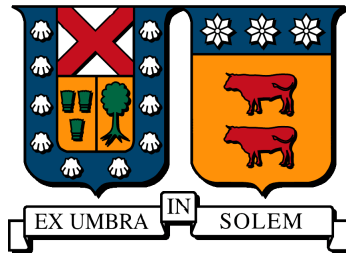


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA  
MARÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA  
SANTIAGO-CHILE**



**ESTIMACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS  
USANDO MODELOS REDUCIDOS A  
PARTIR DE IMÁGENES IN VIVO DE  
ELASTOGRAFÍA**

**MATÍAS ENRIQUE ÁLVAREZ JEREZ**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE: INGENIERO CIVIL  
MECÁNICO Y AL GRADO DE MAGÍSTER EN: CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MECÁNICA**

**PROFESOR GUÍA : Dr. JOAQUÍN MURA MARDONES  
PROFESOR CORREFERENTE : PhD. FELIPE GALARCE MARIN  
PROFESOR CORREFERENTE : PhD OLIVIER SKURTYS  
PROFESOR CORREFERENTE : PhD HUGO CARRILLO**

**ENERO 2026**



## CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

### 1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

**Tipo de monografía (marcar una opción):**  Memoria o trabajo de título  Tesis de Postgrado

**Título del trabajo:** Estimación de desplazamientos usando modelos reducidos a partir de imágenes in vivo de elastografía

**Nombre del candidato(a):** Matías Enrique Álvarez Jerez

**Carrera / Grado:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica / Ingeniería Civil Mecánica

**Campus:** Santiago / San Joaquín **Departamento:** Ingeniería Mecánica

### 2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Joaquín Alejandro Mura Mardones, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

### 3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses  12 meses  2 años  3 años  5 años  10 años

**Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):**

---

---

---

### 4.- FIRMAS

**Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:**

**Fecha:** 20/01/2026 **Firma:** \_\_\_\_\_

**Estudiante o Candidato(a):**

**Fecha:** 20/01/2026 **Firma:** \_\_\_\_\_

*Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.*

# Índice de Contenidos

<b>1. Abstract</b>	<b>2</b>
<b>2. Resumen</b>	<b>3</b>
<b>3. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>4. Objetivos</b>	<b>6</b>
4.1. Objetivo general . . . . .	6
4.2. Objetivos específicos . . . . .	6
<b>5. Estado del arte</b>	<b>7</b>
5.1. Revisión bibliográfica . . . . .	7
5.2. Cárcamo et al. (2024): Formulación de presión total estabilizada para Biot en régimen armónico . . . . .	8
5.3. Maday et al. (2015): Enfoque PBDW para asimilación variacional de datos: Formulación, análisis y aplicación en acústica . . . . .	10
5.4. Galarce et al. (2023): Reconstrucción de desplazamiento y presión a partir de imágenes MRE: aplicación a un cerebro in silico . . . . .	11
5.5. Síntesis de la literatura disponible e identificación de brecha de conocimiento	14
<b>6. Metodología</b>	<b>15</b>
6.1. Modelación de la elastografía cerebral . . . . .	16
6.2. Construcción de la base de simulaciones . . . . .	18
6.3. Reducción de orden mediante POD–SVD . . . . .	19
6.4. Problema inverso y reconstrucción del campo . . . . .	20
6.5. Planteamiento de una cota de error a priori . . . . .	23
6.6. Alternativa al POD: incorporación de modos específicos para mediciones (OMP) . . . . .	25
6.7. Adquisición y preprocesamiento de datos . . . . .	26
6.8. Herramienta numérica: software MAD . . . . .	27
<b>7. Resultados</b>	<b>28</b>
7.1. Construcción de la base numérica . . . . .	28
7.2. Análisis del ROM . . . . .	29
7.3. Sobre la observabilidad de las mediciones reales . . . . .	30
7.4. Reconstrucción a partir de datos sintéticos . . . . .	31
7.5. Reconstrucción a partir de datos experimentales . . . . .	33
7.5.1. Evaluación en la <i>slice</i> utilizada para la reconstrucción . . . . .	34
7.5.2. Evaluación de la extrapolación de datos . . . . .	37
7.6. Implementación de OMP . . . . .	39

---

**8. Conclusiones**

**41**

**Referencias**

**42**

---

# Índice de Figuras

1.	Esquema ejemplo de procedimiento de toma de imágenes de MRE. Extraído de [3] . . . . .	4
2.	Dominio computacional utilizado y condición de borde desplazamiento $s(x)$ . Extraído de [11] . . . . .	9
3.	Magnitud de desplazamiento para dominio exterior y 4 cortes equidistantes para una frecuencia $\omega = 2\pi * 10$ rad/s. Extraído de [11] . . . . .	9
4.	Magnitud de presión para 4 cortes equidistantes para una frecuencia $\omega = 2\pi * 10$ rad/s. Extraído de [11] . . . . .	9
5.	Visualización de primeros cuatro modos de desplazamiento. Extraído de [32] . . . . .	12
6.	Reconstrucción a $t = 10$ ms después del inicio del pulso de los campos de desplazamiento (arriba) y presión (abajo) para el escenario con el mayor error de reconstrucción entre las 18 muestras utilizadas en la validación (mediciones sin ruido). . . . .	13
7.	Esquema metodología . . . . .	15
8.	Dominio, superficies de frontera y condición de excitación armónica. . . . .	17
9.	Representación gráfica de SVD truncada. . . . .	20
10.	Ejemplo de uso de matriz de observación . . . . .	22
11.	Esquema procedimiento de adquisición de datos. Extraído de [4] . . . . .	26
12.	Histogramas de los parámetros utilizados. . . . .	28
13.	Análisis de parámetros del ROM, con $\sigma$ valor singular y $\lambda$ valor propio . . . . .	29
14.	Comparación global de observabilidad y cota teórica por <i>slice</i> . . . . .	30
15.	Ranking de <i>slices</i> según $\varepsilon/\beta$ . . . . .	31
16.	Ranking de <i>slices</i> proyectado sobre el dominio. . . . .	31
17.	Reconstrucción sintética: posición de la <i>slice</i> , medidas en la <i>slice</i> , campo sintético y campo reconstruido. . . . .	32
18.	Reconstrucción sintética del campo en todo el dominio. . . . .	33
19.	Reconstrucción experimental para la <i>slice</i> 0, $n = 20$ : posición de la <i>slice</i> , mediciones, campo sintético y campo reconstruido. . . . .	35
20.	Reconstrucción experimental para la <i>slice</i> 6, $n = 25$ : posición de la <i>slice</i> , mediciones, campo sintético y campo reconstruido. . . . .	35
21.	Error absoluto y relativo por voxel para la reconstrucción experimental de la <i>slice</i> 0, comparación sobre el mismo $n = 20$ . . . . .	36
22.	Error absoluto y relativo por voxel para la reconstrucción experimental de la <i>slice</i> 6, comparación sobre el mismo $n = 25$ . . . . .	36
23.	Error relativo global de la reconstrucción en función del número de modos, para todas las <i>slices</i> . . . . .	37
24.	Interpolación experimental del campo utilizando las <i>slices</i> 6 y 8, $n = 15$ : posición de la <i>slice</i> , mediciones en la <i>slice</i> 7, campo sintético y campo reconstruido. . . . .	38
25.	Error absoluto y relativo por voxel para la interpolación experimental desde las <i>slices</i> 6 y 8 hacia la <i>slice</i> 7, $n = 15$ . . . . .	39

---

26.	Comparativa de error de reconstrucción entre base POD y base OMP, bases construidas con distintos valores de modos originales utilizados ( $n$ ), con azul curva sin la implementación de OMP base tradicional. . . . .	40
-----	---	----

## Índice de Tablas

1.	Parámetros utilizados para las distribuciones. . . . .	28
2.	Error relativo de reconstrucción para cada <i>slice</i> , $n = 55$ . . . . .	33

---

# Agradecimientos

Quisiera expresar mis más sinceros agradecimientos a cada persona que fue parte de este proceso y un apoyo para mi persona. A mis padres por siempre ser la muralla que sostiene mi espalda, por su constante apoyo y cariño, este logro es tanto mío como de ustedes. A mi pareja Paulina por siempre ayudarme a ver la luz al final del camino y levantarme después de cada caída y fracaso. A mis abuelos Mayling y Enrique por siempre estar presentes en cada paso de este largo camino. A mis padrinos Jenniffer y Paulo por su incondicional apoyo y cariño. Y a mi tío Carlos por sus distintas enseñanzas sobre la industria. Agradecer, a mi bisabuelo Calixto por ser el primer ingeniero que conocí, quien también habiendo estudiado en una Universidad técnica puso las primeras piedras en lo que es el camino que recorro hoy en día. Finalmente, a toda mi familia por siempre presentar un orgullo y cariño por las cosas que he realizado.

A mis compañeros de la carrera de Ingeniería que me acompañaron en la mayor parte de proceso, compartiendo tanto victorias como fracasos, risas y llantos, celebraciones y noches de desvelo. A mis compañeros de posgrado por compartir lo difícil que fue esta travesía y hacerla un poco más fácil.

Para finalizar quiero agradecer a mis profesores, Joaquín Mura quien me recibió como un alumno que llego sumamente aproblemado entregando tranquilidad y ayudándome a sacar mi carrera adelante; Felipe Galarce por su guía durante este proceso, su paciencia al enseñar y su confianza en mi trabajo, sin el este trabajo no hubiese sido posible; y Olivier Skurtys, por confiar en mí para incorporarme al programa de Magíster y por impulsarme a apuntar a metas más altas.

"Que el conocimiento sea el faro que alumbre tu porvenir"

# 1. Abstract

This work proposes an approach based on the PBDW (Parameterized-Background Data Weak) method, using the finite element method, to reconstruct the displacement field in the full domain from partial data obtained by elastography using magnetic resonance or ultrasound. The method combines information from a database of numerical simulations of a poroelastic tissue subjected to a steady-state harmonic regime, within a physiologically plausible range of parameters, with measurement data. These simulations are used to construct a reduced basis via the POD (Proper Orthogonal Decomposition) method, on which an optimization problem is solved to find the best fit to the available displacement measurements on selected planes. With this method, displacement and pressure fields can be estimated using only displacement data defined on a limited number of slices.

A numerical *manifold* of 2048 three-dimensional simulations is built by varying Young's modulus, Poisson's ratio, permeability, and excitation frequency; the singular value analysis shows that most of the information is concentrated in the first 50 modes, and that a reduced model with this number of modes is sufficient to describe the relevant dynamics. With this scheme, synthetic fields are reconstructed with relative errors in the 2-norm on the order of 0.0001%, validating the internal consistency of the approach. For *in vivo* measurements, the method achieves relative errors in the 2-norm on the order of 15–20% when comparing on the same *slice* used for the reconstruction, and about 27% when interpolating between *slices*. Additionally, the incorporation of data-driven modes via OMP (Orthogonal Modes Pursuit) further reduces the error for a given total number of combined modes compared with traditional POD, showing that the hybrid ROM (Reduced Order Model) –PBDW approach is a promising alternative for the reconstruction of mechanical fields in brain elastography.

## 2. Resumen

El presente trabajo propone un enfoque basado en el método PBDW (Parameterized-Background Data Weak), utilizando elementos finitos, para reconstruir el campo de desplazamiento en el dominio completo a partir de datos parciales obtenidos mediante elastografía utilizando resonancia magnética. El método combina información de una base de simulaciones numéricas de tejido cerebral poro-elástico sometido a un régimen armónico permanente, dentro de un rango fisiológicamente plausible de parámetros, en conjunto con los datos obtenidos de mediciones. Estas simulaciones se utilizan para construir una base reducida mediante el método POD (Proper Orthogonal Decomposition), sobre la cual se resuelve un problema de optimización que busca el mejor ajuste frente a mediciones de desplazamiento disponibles en planos. Con el método se pueden estimar campos de desplazamiento utilizando solamente desplazamientos definidos en una cantidad limitada de planos.

Se construye una *manifold* numérica de 2048 simulaciones tridimensionales variando módulo de Young, razón de Poisson, permeabilidad y frecuencia de excitación; el análisis de valores singulares muestra que la mayor parte de la información se concentra en los primeros 50 modos, y que un modelo reducido con esta cantidad de modos resulta suficiente para describir la dinámica relevante. Con este esquema, los campos sintéticos se reconstruyen con errores relativos en norma 2 del orden de 0,0001 %, validando la consistencia interna del enfoque. En mediciones *in vivo*, el método alcanza errores relativos en norma 2 del orden de 15–20 % al comparar en la misma *slice* utilizada para la reconstrucción, y del orden de 27 % al interpolar entre *slices*. Adicionalmente, la incorporación de modos guiados por datos mediante OMP (Orthogonal Modes Pursuit) permite reducir aún más el error para un mismo número de modos combinados versus la POD tradicional, mostrando que el enfoque híbrido ROM (Reduced Order Model)–PBDW constituye una alternativa promisoría para la reconstrucción de campos mecánicos en elastografía cerebral.

### 3. Introducción

La caracterización mecánica de tejidos blandos juega un rol fundamental en el diagnóstico temprano de diversas patologías, tales como fibrosis, cáncer o enfermedades neurodegenerativas [1–3]. Estas alteraciones suelen manifestarse como cambios en propiedades mecánicas como la rigidez y el comportamiento viscoelástico [4], por lo que su estimación *in vivo* resulta clínicamente relevante.

Entre las técnicas disponibles, la elastografía por resonancia magnética (Magnetic Resonance Elastography, MRE) se ha consolidado como una herramienta no invasiva para estimar parámetros mecánicos de tejidos [3, 5–7]. Su principio básico se fundamenta en la generación y medición de ondas de deformación inducidas en el tejido mediante un actuador mecánico, permitiendo inferir propiedades mecánicas a partir del análisis del campo de desplazamientos registrado, se muestra un ejemplo de adquisición de imágenes mediante MRE en la Figura 1.

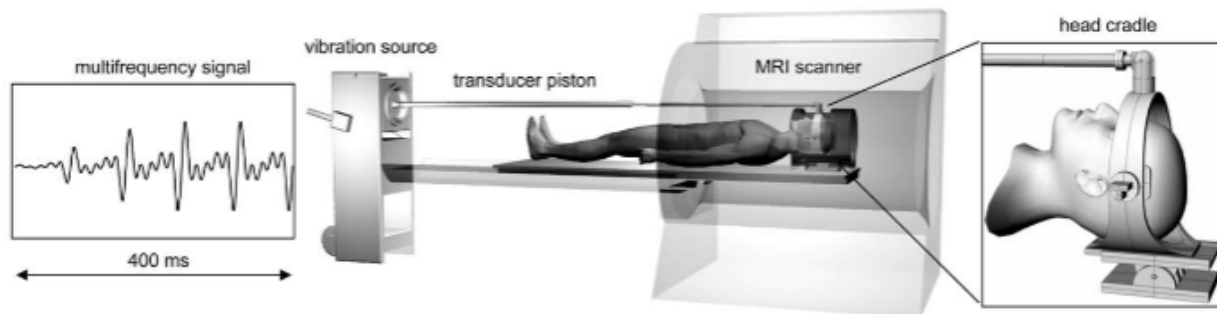


Figura 1: Esquema ejemplo de procedimiento de toma de imágenes de MRE.  
Extraído de [3]

Sin embargo, uno de los principales desafíos de la MRE es la limitación en la resolución espacial y en la cobertura del dominio. En la práctica clínica, las mediciones suelen restringirse a un número reducido de planos o *slices*, entregando únicamente información parcial del campo tridimensional de desplazamiento. Esta disponibilidad incompleta de datos dificulta la estimación robusta de propiedades mecánicas y de magnitudes internas derivadas del modelo físico.

Frente a este desafío, surge la necesidad de desarrollar métodos numéricos eficientes que permitan reconstruir el campo completo de desplazamientos a partir de un conjunto limitado de mediciones. En este contexto, los modelos numéricos reducidos, en combinación con técnicas de asimilación de datos [8, 9], ofrecen una alternativa prometedora para superar las restricciones actuales de adquisición.

El presente trabajo propone un enfoque basado en un solver de elementos finitos [10] que combina un modelo reducido, obtenido a partir de simulaciones poro-elásticas [11], mediante la técnica de *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), con un procedimiento de asimilación de datos que incorpora mediciones experimentales parciales. Este esquema permite recons-

truir campos tridimensionales de desplazamiento a nivel del órgano completo, y estimar variables internas asociadas al modelo, como el campo de presión poral, aun cuando las observaciones MRE estén disponibles solo en algunos planos del dominio.

La implementación de esta metodología no solo busca mejorar la precisión en la reconstrucción de campos de propiedades mecánicas, sino también contribuir a reducir los tiempos de escaneo e incrementar la tasa de captura de imágenes, favoreciendo el diagnóstico temprano y el monitoreo eficiente de patologías que afectan el comportamiento mecánico de los tejidos blandos [12, 13].

Finalmente, el escrito se organiza de la siguiente manera. En la sección 5 se exponen los principales estudios que existen en la actualidad relacionados con la temática investigada, continuando en la sección 6 se desarrolla la metodología utilizada tanto para simulaciones físicas como para la reducción de orden, luego en la sección 7 se exponen y analizan los principales resultados de la investigación, para finalizar con la sección 8 donde se muestran las conclusiones del escrito.

---

## 4. Objetivos

### 4.1. Objetivo general

Desarrollar un flujo de trabajo que permita la reconstrucción de campos de desplazamiento a partir de mediciones MRE in vivo.

### 4.2. Objetivos específicos

- Formular y parametrizar el modelo físico de elastografía cerebral en el dominio de la frecuencia, incorporando las propiedades mecánicas del tejido y las condiciones de borde que representan el examen de MRE.
  - Construir una base numérica de simulaciones tridimensionales variando parámetros, y obtener un modelo de orden reducido mediante POD–SVD (Singular Value Decomposition) evaluando su calidad.
  - Plantear e implementar el problema inverso de reconstrucción en el espacio reducido, analizando la observabilidad de los modos reducidos.
  - Evaluar el desempeño del esquema de reconstrucción utilizando datos sintéticos y datos experimentales in vivo, cuantificando el error relativo, la influencia del número de modos y de las mediciones disponibles.
-

## 5. Estado del arte

### 5.1. Revisión bibliográfica

La elastografía por resonancia magnética (MRE) se ha consolidado como una modalidad de imagen no invasiva diseñada para medir propiedades mecánicas. Esta combina el método tradicional de adquisición de imágenes mediante resonancia magnética con contraste (MRI), con la generación y observación de ondas armónicas de deformación en el rango de decenas de Hz (1 – 100Hz), las cuales son inducidas mediante la utilización de actuadores externos que producen un desplazamiento armónico en el tejido externo del cuerpo del paciente [5, 14]. Al combinarse con la utilización de modelos físicos de tejidos orgánicos y algoritmos de inversión, la data proveniente del campo de desplazamiento permite obtener información cuantitativa relacionada con la caracterización mecánica del tejido, en término de parámetros mecánicos como tal [15–17]

En los últimos años, se ha demostrado el potencial de la elastografía para la estimación de diferentes parámetros mecánicos (parámetros de elasticidad, fluidez o viscosidad) que difieren entre pacientes sanos y aquellos que sufren distintas patologías. Como ejemplo, tanto en cáncer, fibrosis y diversas patologías tisulares, es posible observar mediante elastografía un aumento en la rigidez [18, 19]. Enfocados solamente en el cerebro esta ha sido utilizada para la caracterización de tejido cancerígeno [1], para la caracterización de tejido en pacientes con Alzheimer [6], pacientes con esclerosis múltiple [3], y diferenciación de rigidez en diferentes secciones del cerebro para comparar pacientes con distintos tipos de demencia [7].

Una de las principales problemáticas al momento de modelar el comportamiento físico del cerebro frente a un estímulo externo es la interacción entre el sólido y fluido intersticial que lo rodea. Estudios experimentales exponen como mediante MRE se pueden analizar patologías asociadas a la presión, analizando el efecto de la presión intersticial sobre las propiedades mecánicas del cerebro [20, 21]. Es así como debido a la importancia de caracterizar el comportamiento de la presión, ha nacido la necesidad de plantear el sólido como un medio bifásico que integre las componentes tisulares e intersticiales, un modelo utilizado en distintas investigaciones es el modelo poro-elástico que considera al cerebro como un medio poroso, con poros por los cuales circula fluido [22–24].

Desde el punto de vista de reconstrucción inversa, se han propuesto diferentes estrategias para estimar parámetros poro-elásticos y campos de presión a partir de datos MRE. Entre ellas, destacan enfoques de elementos finitos sobre fantasmas sintéticos [25, 26], técnicas de estimación local basadas en problemas de Biot en parches de medición [27], y aproximaciones híbridas que combinan reconstrucción de rigidez con modelos analíticos para relacionar deformación y presión [15, 28]. Sin embargo, estos métodos siguen enfrentando limitaciones asociadas a la alta dimensión del problema inverso y a la escasa cobertura espacial de las mediciones.

Bajo estas complicaciones, los métodos de asimilación de datos se han desarrollado para

complementar las observaciones parciales, extendiendo la información disponible mediante la utilización de modelos físicos y simulaciones numéricas. En particular, el método *Parametrized-Background Data-Weak* (PBDW) aborda el problema de estimación de estado combinando un subespacio de soluciones admisibles informado por la EDP con un término de corrección ajustado a los datos disponibles [8]. Originalmente propuesto para ecuaciones de onda, PBDW ha sido recientemente extendido a elastografía por ultrasonido y resonancia magnética, así como a aplicaciones de flujo sanguíneo, permitiendo reconstrucciones globales aún con mediciones internas incompletas [29–31]. Para el caso del cerebro se han realizado reconstrucciones de campos de desplazamiento y presión para datos sintéticos [32]

A continuación se presentan las principales investigaciones utilizadas como pilares para esta investigación, exponiendo una revisión bibliográfica más detallada para cada una.

## 5.2. Cárcamo et al. (2024): Formulación de presión total estabilizada para Biot en régimen armónico

El artículo [11] se enfoca en la simulación de materiales poro-elásticos basándose en las ecuaciones de Biot, donde se modela el comportamiento del medio como el acoplamiento de elasticidad lineal en conjunto con flujo a través de un medio poroso deformable. Motivado principalmente por la aplicación en la resolución de problemas inversos en elastografía por resonancia magnética, plantean un enfoque en el dominio de la frecuencia y no en el del tiempo.

El trabajo propone y analiza un esquema basado en elementos finitos de primer orden, tanto para presión como desplazamiento, con el objetivo de reducir tiempos y costos computacionales. Si bien esto puede involucrar una inestabilidad del esquema numérico al tener elementos del mismo orden para ambos campos, se compensa mediante la incorporación de una formulación de presión-total con un término de estabilización basado en residuos presentado anteriormente por [33], asegurando así la estabilidad del esquema.

Debido a la posibilidad de inestabilidades causadas por zonas de baja permeabilidad, se muestra la robustez del método mediante la resolución de dos casos sintéticos con solución analítica conocida tanto en 2 como 3 dimensiones, para luego mostrar el comportamiento del método para un amplio rango de permeabilidades. Finalmente, se muestra la aplicación del modelo en un caso que replica las condiciones de un examen de elastografía en un dominio tridimensional.

Se define como dominio computacional el volumen contenido entre la superficie exterior del cerebro y la superficie exterior de los ventrículos, y se impone una condición de desplazamiento sobre la superficie exterior la cual alcanza un valor máximo en la región occipital del cerebro, este dominio se puede observar de mejor manera en la Figura 2. A continuación se muestra el campo de magnitud de desplazamiento obtenido para una frecuencia de 10 Hz en la Figura 3, así como el campo de magnitud de presión para la misma frecuencia en la Figura 4.

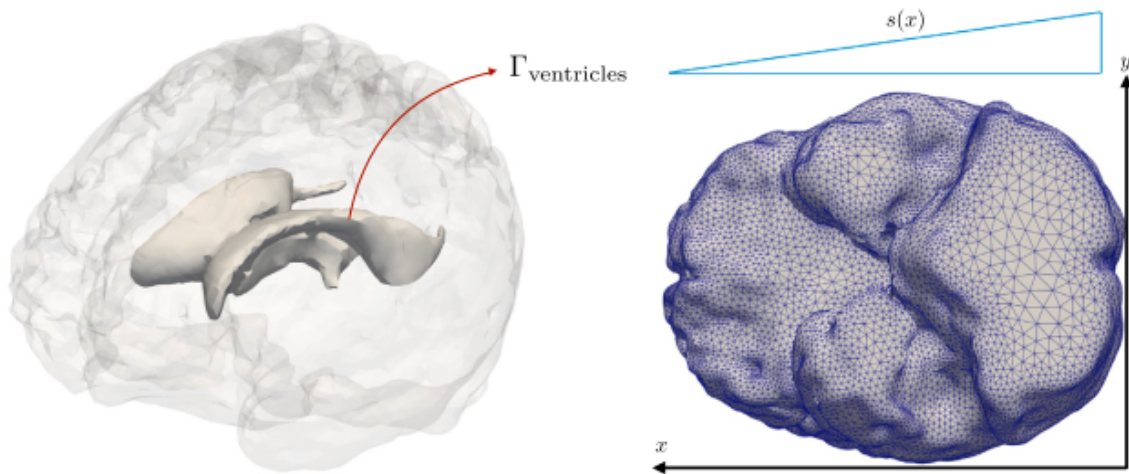


Figura 2: Dominio computacional utilizado y condición de borde desplazamiento  $s(x)$ . Extraído de [11]

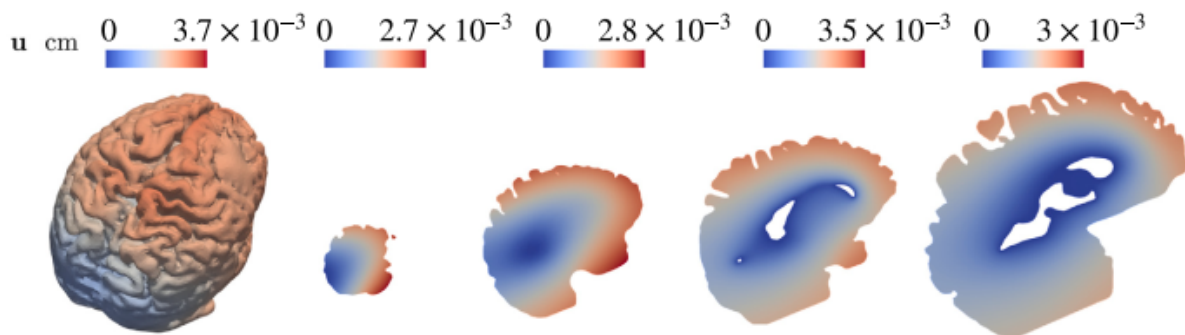


Figura 3: Magnitud de desplazamiento para dominio exterior y 4 cortes equidistantes para una frecuencia  $\omega = 2\pi * 10$  rad/s. Extraído de [11]

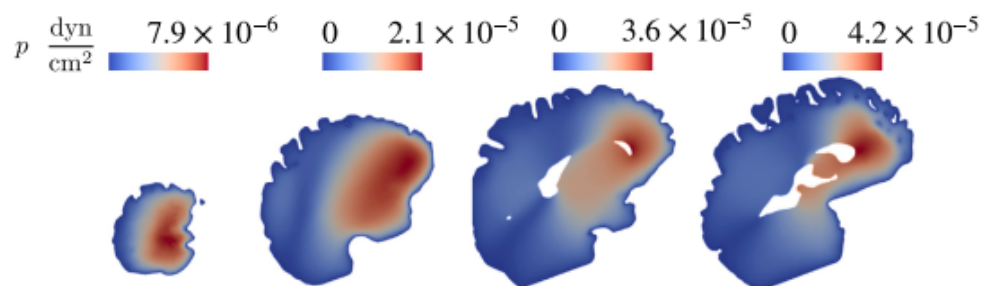


Figura 4: Magnitud de presión para 4 cortes equidistantes para una frecuencia  $\omega = 2\pi * 10$  rad/s. Extraído de [11]

En síntesis, este apartado es fundamental para cerrar la investigación, ya que establece y justifica el modelo físico–matemático que servirá de base para simular el comportamiento mecánico del cerebro. La formulación y supuestos asociados a este modelo se presentan en detalle en la Sección 6.

### 5.3. Maday et al. (2015): Enfoque PBDW para asimilación variacional de datos: Formulación, análisis y aplicación en acústica

Los autores del trabajo [8] presentan una formulación general del método *Parametrized-Background Data-Weak* (PBDW) para problemas de estimación de estado en sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales [8]. El objetivo es aproximar el campo verdadero  $u_{\text{true}}$  en un dominio  $\Omega$  combinando dos fuentes de información: (i) un modelo matemático de mejor conocimiento, representado por una familia de soluciones  $u_{\text{bk},\mu}$  de una EDP parametrizada (la *variedad de fondo*  $\mathcal{M}_{\text{bk}}$ ), y (ii) un conjunto finito de observaciones experimentales  $\{\ell_m^o(u_{\text{true}})\}_{m=1}^M$ , descritas mediante funcionales de observación que modelan los sensores disponibles.

El método construye una estimación del estado  $u_{N,M}^*$  como suma de dos contribuciones: un *fondo deducido*  $z_{N,M}^* \in Z_N$  y una *corrección* o *actualización*  $\eta_{N,M}^* \in U_M$ , donde  $Z_N$  es un espacio reducido generado a partir de la variedad de mejor conocimiento (por ejemplo mediante Reduced Basis, POD o expansiones de Taylor) y  $U_M$  es el espacio generado por las representaciones de Riesz de los funcionales de observación (espacio experimentalmente observable). La estimación se obtiene resolviendo un problema de minimización restringida en el que se busca la corrección de norma mínima que hace compatibles las predicciones del modelo con las observaciones, lo que conduce a un problema de punto silla bien posado y a la definición de una constante de estabilidad  $\beta_{N,M}$  que controla el error de la aproximación.

El trabajo desarrolla un marco teórico completo de análisis de error a priori y a posteriori para el campo reconstruido y para funcionales de salida, identificando el rol de tres ingredientes: la calidad del espacio de fondo  $Z_N$ , las propiedades de aproximación del espacio de actualización  $U_M$  y la constante de estabilidad asociada al par  $(Z_N, U_M)$ . Los autores muestran que PBDW se relaciona y generaliza, en casos particulares, métodos como GEIM, Gappy-POD, aproximación de mínimos cuadrados estables y formulaciones de asimilación variacional 3D-VAR.

Finalmente, la metodología se ilustra en un problema sintético de acústica de Helmholtz y en un resonador acústico tridimensional controlado mediante una plataforma robótica de adquisición de datos, donde se logra estimar en tiempo casi real el campo de presión armónico a partir de un número limitado de mediciones.

Para la investigación desarrollada, este trabajo constituye la base teórica del enfoque PBDW que se adapta posteriormente al contexto de elastografía por resonancia magnética en tejidos poro-elásticos, permitiendo integrar modelos físicos reducidos y datos experimentales

parciales en la reconstrucción del estado mecánico del cerebro.

#### 5.4. Galarce et al. (2023): Reconstrucción de desplazamiento y presión a partir de imágenes MRE: aplicación a un cerebro in silico

El trabajo [32] propone una metodología de asimilación de datos para reconstruir en forma conjunta los campos tridimensionales de desplazamiento y presión en un modelo poro-elástico de cerebro, a partir de mediciones parciales de elastografía por resonancia magnética. El enfoque se basa en el método *Parametrized-Background Data-Weak* (PBDW), donde el estado del sistema (desplazamientos y presión) se reconstruye sobre una base de soluciones físicamente admisibles definida por un modelo poro-elástico lineal del tejido cerebral, formulado en el dominio de la frecuencia. Se debe destacar que existe una diferenciación con este estudio en distintos enfoques que plantean una serie de desafíos y que complican el desarrollo de la misma investigación, siendo estas la utilización de mediciones reales en vez de mediciones sintéticas lo que implica una mayor complejidad del modelo inverso, así como la utilización de una geometría más detallada basada en el paciente y la utilización de más de un esquema de reducción de orden.

Para construir la base de soluciones, se generan previamente simulaciones por elementos finitos de la respuesta poro-elástica del cerebro, muestreando un espacio de parámetros que incluye propiedades mecánicas del parénquima, permeabilidades y condiciones de presión en el líquido cefalorraquídeo dentro de rangos fisiológicamente plausibles. A partir de estas simulaciones se obtiene una base reducida mediante *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), sobre la cual se proyectan los campos de desplazamiento y presión. La etapa de asimilación consiste entonces en resolver un problema de minimización que combina la estructura del modelo reducido con los datos de desplazamiento medidos en unos pocos *slices* de MRE, obteniendo así una aproximación global del estado mecánico del cerebro en un espacio de baja dimensión.

La metodología se valida numéricamente utilizando datos sintéticos generados por el mismo modelo poro-elástico, lo que permite evaluar el error de reconstrucción bajo diferentes resoluciones de medición y niveles de ruido en las imágenes de MRE. En particular, se consideran poblaciones sintéticas de “pacientes” sanos y patológicos, donde estos últimos se caracterizan por un aumento de la presión ventricular respecto del rango fisiológico. Sobre estos escenarios, el algoritmo logra reconstrucciones precisas tanto del campo de desplazamiento como de la presión, y permite distinguir de manera robusta entre configuraciones de presión normal y elevada, aun cuando las mediciones de entrada se restringen a una subregión del dominio.

Se muestra en la Figura 5 la extracción de los primeros cuatro modos de desplazamientos, los cuales representan las tendencias del campo en el dominio computacional, los cuales corresponden a vectores de la base reducida sobre la cual se proyecta la solución. Además, en

la Figura 6 se muestra la reconstrucción del campo de desplazamiento y presión en conjunto con el campo de error para un tiempo  $t = 10s$  luego de que comienza el pulso.

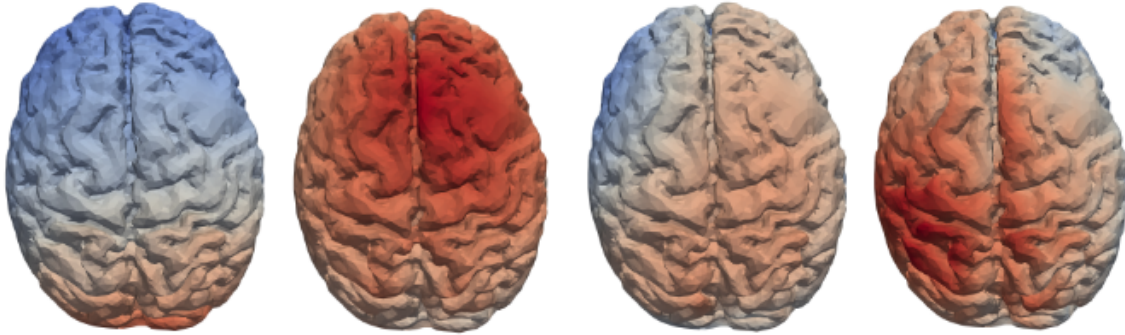


Figura 5: Visualización de primeros cuatro modos de desplazamiento. Extraído de [32]

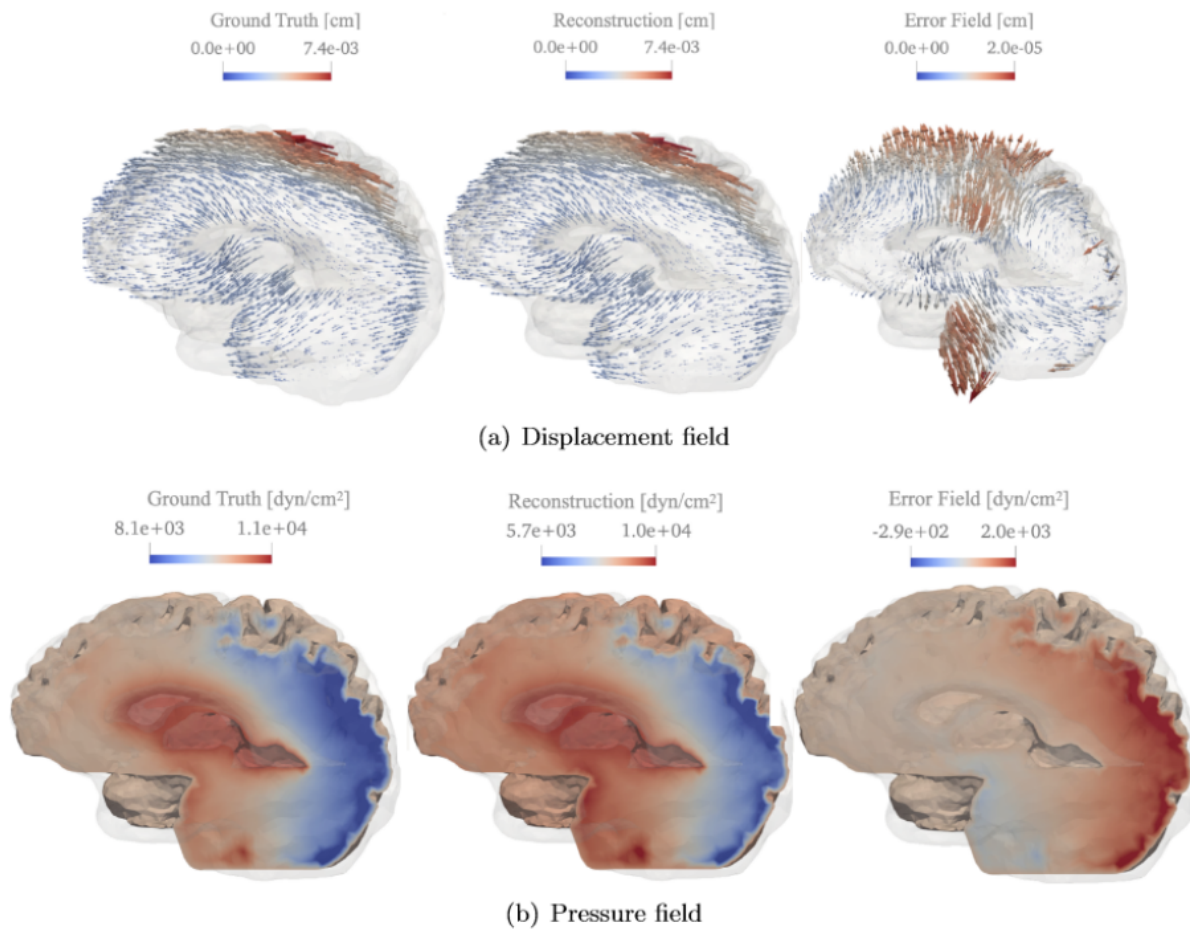


Figura 6: Reconstrucción a  $t = 10$  ms después del inicio del pulso de los campos de desplazamiento (arriba) y presión (abajo) para el escenario con el mayor error de reconstrucción entre las 18 muestras utilizadas en la validación (mediciones sin ruido).

En síntesis, este trabajo introduce y valida un marco completo de asimilación de datos que combina modelos poro-elásticos fisiológicamente plausibles, reducción de orden y PBDW para aprovechar mediciones parciales de MRE en la reconstrucción de magnitudes internas no observables directamente.

El trabajo es así de importancia a la investigación debido al planteamiento de un *pipeline* de trabajo exitoso para la reconstrucción de datos en mediciones sintéticas. Esta metodología de asimilación de datos es la base para esta investigación, lo cual se retoma y desarrolla a mayor profundidad en la Sección 6.

## 5.5. Síntesis de la literatura disponible e identificación de brecha de conocimiento

Los trabajos revisados en esta sección muestran que la elastografía por resonancia magnética, combinada con modelos poro-elásticos o y técnicas de inversión, constituye una herramienta prometedora para la caracterización mecánica del cerebro y la estimación indirecta de campos de presión. Los estudios clínicos y experimentales basados en MRE evidencian que es posible diferenciar estados patológicos mediante parámetros de rigidez o viscoelasticidad y, en casos particulares, correlacionar cambios en las propiedades mecánicas con alteraciones de la presión intracraneal. Por otra parte, los modelos de Biot y sus extensiones han demostrado ser adecuados para describir el acoplamiento entre parénquima y fluido intersticial, mientras que los métodos de reconstrucción inversa y de asimilación de datos (como PBDW) han probado su capacidad para combinar información experimental limitada con soluciones numéricas de alta fidelidad. En conjunto, esta literatura sustenta la viabilidad de utilizar marcos poro-elásticos reducidos, calibrados con datos MRE, para estudiar procesos fisiológicos y patológicos en el tejido cerebral.

Sin embargo, la evidencia disponible también revela limitaciones relevantes de los enfoques existentes. Una parte importante de los estudios de reconstrucción poro-elástica se basa en fantasmas sintéticos o configuraciones geométricas simplificadas, lo que restringe la extrapolación directa de sus resultados a anatomías cerebrales realistas. Desde el punto de vista de los datos, la mayor parte de las metodologías asume campos de desplazamiento medidos con buena relación señal-ruido y, en general, en condiciones experimentales controladas; en la práctica clínica, en cambio, las mediciones suelen estar restringidas a un número reducido de *slices*, con resolución limitada y ruido significativo.

En síntesis, los trabajos revisados confirman el potencial de la combinación de MRE, modelos poro-elásticos y técnicas de asimilación de datos para la estimación de campos internos de desplazamiento y presión; no obstante, también ponen de manifiesto que los enfoques actuales aún no son suficientes para cuantificar con robustez la respuesta mecánica del cerebro bajo condiciones realistas de adquisición. Estas brechas motivan la presente investigación, orientada a estudiar y extender un marco de asimilación de datos basado en modelos reducidos poro-elásticos, integrando parámetros fisiológicamente plausibles con la incorporación de mediciones reales y no datos sintéticos.

## 6. Metodología

En esta sección se describe el procedimiento completo de reconstrucción del campo mecánico a partir de mediciones parciales de MRE. El método puede descomponerse en cuatro etapas principales, tal como se resume esquemáticamente en la Figura 7:

1. **Modelado físico de tejidos:** Formulación física del problema, planteando el sistema de EDP necesario a resolver para cada simulación.
2. **Generación de base numérica:** Construcción de una base de simulaciones directas considerando un espacio muestral limitado de parámetros.
3. **Reducción de orden (POD):** Aplicación de la descomposición en valores singulares (SVD) sobre la base de simulaciones para extraer los modos espaciales más representativos y construir una base reducida ortonormal.
4. **Asimilación de datos y reconstrucción:** Formulación del problema inverso en el espacio reducido, combinando la base de modos de tal manera que se obtenga un estado que aproxime las mediciones.

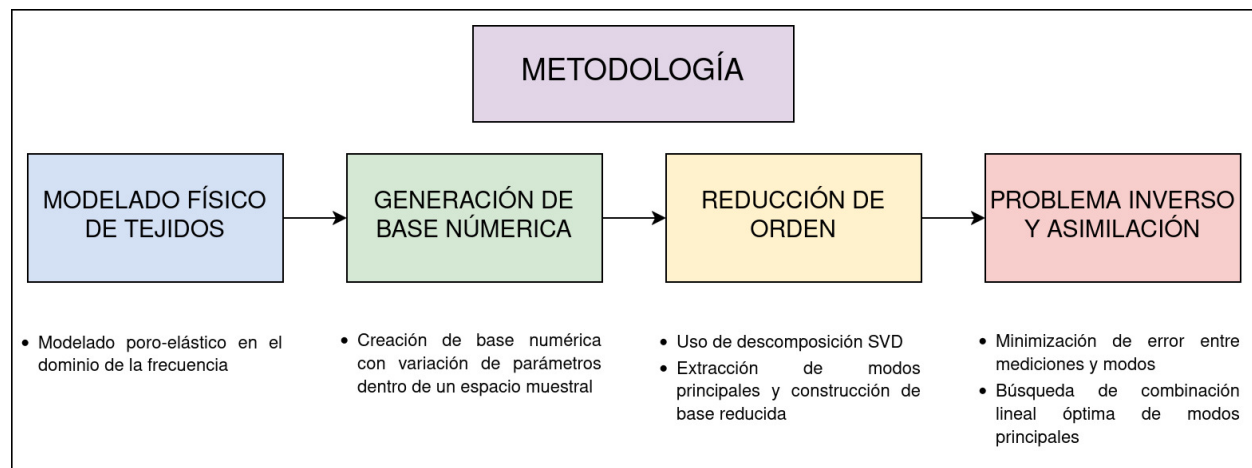


Figura 7: Esquema metodología

Las tres primeras etapas constituyen la fase *offline* o de preparación del sistema: en ellas se concentra la mayor parte del costo computacional asociado a las simulaciones directas y a la construcción del modelo reducido. La cuarta etapa corresponde a la fase *online* de reconstrucción, en la cual, dado un nuevo conjunto de mediciones, la solución del problema inverso se reduce a resolver un sistema de baja dimensión en el espacio generado por los modos POD.

## 6.1. Modelación de la elastografía cerebral

Con el fin de representar el comportamiento mecánico del tejido cerebral, se requiere un modelo adecuado; para este propósito se utiliza un modelo de material poro-elástico basado en las ecuaciones de Biot, en el cual se describe la interacción entre la deformación de una matriz sólida (tejido cerebral) y el flujo de fluido (fluido intersticial) a través de un medio poroso deformable [34].

El modelo considera un dominio tridimensional  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , donde se definen un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un campo de presión  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  como soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, que describe el balance de cantidad de movimiento lineal para el medio sólido y la conservación de masa para el medio fluido:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla p &= \mathbf{0} & \text{en } \Omega \times [0, T], \\ S_e p_t + \nabla \cdot \mathbf{u}_t - \frac{\kappa}{\mu_f} \Delta p &= 0 & \text{en } \Omega \times [0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Se define  $\boldsymbol{\sigma}$  como el tensor de tensiones de Cauchy del sólido y  $\mu_e$ ,  $\lambda$  como los coeficientes de Lamé, donde  $E$  corresponde al módulo de Young y  $\nu$  al coeficiente de Poisson:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_e \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad \mu_e = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Volviendo a la ecuación del fluido,  $\kappa$  representa la permeabilidad del sólido,  $\mu_f$  la viscosidad del fluido y  $\alpha$  el parámetro de Biot–Willis.  $S_e$  corresponde al parámetro de almacenamiento de masa, definido por la siguiente expresión, donde  $B$  es el parámetro de Skempton:

$$S_e = 3\alpha(1 - \alpha B)(1 - 2\nu)(BE)^{-1}.$$

Debido a la naturaleza del examen de elastografía, en el cual el tejido se encuentra bajo una excitación mecánica armónica a una frecuencia fija (20–35 Hz), y considerando además que los datos de desplazamiento obtenidos del examen se encuentran en el dominio de la frecuencia, se reescriben las ecuaciones en dicho dominio. Se consideran los campos de desplazamiento y presión como campos armónicos, definidos por  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x)e^{i\omega t}$  y  $p(x, t) = p(x)e^{i\omega t}$ , siendo  $i$  la unidad imaginaria. Las ecuaciones anteriores pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu_e \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \phi \mathbb{I}) &= \mathbf{0}, \\ i \left( S_e + \frac{\alpha}{\lambda} \right) \omega p - i\omega \frac{\alpha}{\lambda} \phi - \frac{\kappa}{\mu_f} \Delta p &= 0, \\ \phi &= p - \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\phi$  corresponde a la presión total siguiendo el enfoque de [11], utilizando este campo para estabilizar cambios abruptos en la presión.

El dominio espacial  $\Omega$  para el modelo consiste en una geometría realista, obtenida a partir de datos de MRI de un paciente vivo. Las fronteras del dominio son dos superficies: una que representa la superficie externa del cerebro ( $\Gamma_{\text{outer}}$ ) y otra que representa los ventrículos ( $\Gamma_{\text{ventricles}}$ ). Finalmente, el dominio  $\Omega$  corresponde al volumen contenido entre ambas superficies, como se muestra en la Figura 8, con

$$\partial\Omega = \Gamma_{\text{ventricles}} \cup \Gamma_{\text{outer}}, \quad \Gamma_{\text{outer}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\text{ventricles}}.$$

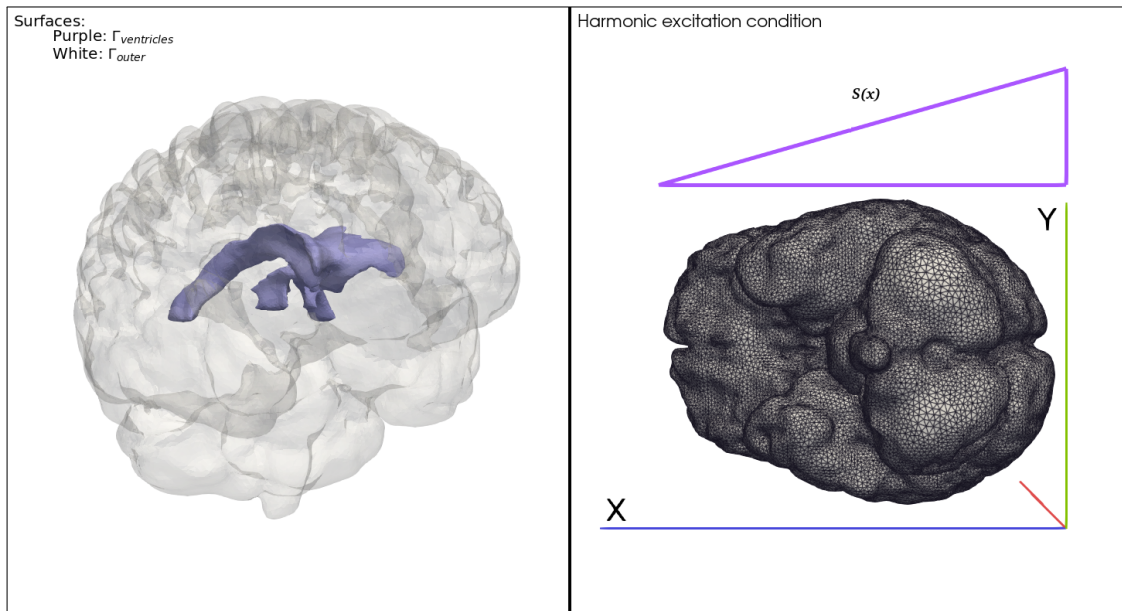


Figura 8: Dominio, superficies de frontera y condición de excitación armónica.

Las condiciones de borde utilizadas para replicar las condiciones del examen se describen a continuación:

- **Excitación armónica:** se aplica una excitación armónica a la frecuencia del examen  $\omega$ , con amplitud determinada  $A$ , sobre la superficie externa del dominio  $\Gamma_{\text{outer}}$ . Este pulso armónico alcanza un valor máximo en la región occipital y se propaga a través del cerebro hacia la región frontal, donde alcanza un mínimo, según:

$$\sigma \mathbf{n} = [0, s(x), 0] \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{outer}},$$

con

$$s(x) = A \left( 1 - \frac{x}{16.92} \right).$$

Donde 16.92 corresponde a largo del cerebro en el eje  $x$  en cm.

- **Condición de presión:** se asume que las presiones intracraneal y ventricular permanecen constantes durante el examen, lo que se traduce en la siguiente condición:

$$p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{outer}} \cup \Gamma_{\text{ventricles}}.$$

- **Condición de desplazamiento:** se impone una condición de no deslizamiento de tipo Dirichlet homogénea sobre la superficie de los ventrículos, es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{ventricles}}.$$

Las simulaciones se realizan utilizando elementos finitos de primer orden para reducir el costo computacional, tanto para desplazamiento como presión, basándose en el trabajo de [11] y su estabilización.

## 6.2. Construcción de la base de simulaciones

Con el objetivo de utilizar un enfoque de asimilación de datos basado en modelos reducidos, es necesario construir previamente una variedad paramétrica de soluciones del modelo poro-elástico descrito en la Subsección 6.1. Esta variedad reúne un conjunto representativo de estados del cerebro sometido a deformación, obtenidos a partir de simulaciones numéricas que exploran un rango fisiológicamente plausible de parámetros materiales y de condiciones de contorno. A partir de este conjunto de soluciones se genera posteriormente un espacio reducido sobre el cual se proyectará la reconstrucción PBDW.

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$  el espacio de parámetros del problema, siendo  $n_p$  el número de parámetros a variar, donde cada vector.

$$\boldsymbol{\theta} = (E, \nu, \kappa, \dots) \in \mathcal{P}$$

representa una configuración de propiedades mecánicas del tejido como módulo de Young o coeficiente de Poisson, permeabilidad del tejido o eventualmente, otros parámetros de interés (por ejemplo, variaciones en la frecuencia de excitación o en la amplitud del pulso armónico). Para construir la variedad de simulaciones se define un conjunto de entrenamiento

$$\{\boldsymbol{\theta}^{(k)}\}_{k=1}^K \subset \mathcal{P},$$

seleccionado mediante un muestreo uniforme o aleatorio con una distribución normal, que cubra de manera equilibrada el rango de valores considerados para cada parámetro.

Dado que el modelo se formula en el dominio de la frecuencia, para cada vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  se resuelve el problema poro-elástico armónico y se obtiene el campo complejo de desplazamiento.

$$\mathbf{u}^{(k)}(x) \in \mathbb{C}^3, \quad p^{(k)}(x) \in \mathbb{C}^1, \quad x \in \Omega$$

que satisfacen el sistema de ecuaciones presentado en la Subsección 6.1. Para propósitos de reducción de orden, estos campos se almacenan en un vector de dimensión  $\mathcal{N}$  asociado a la

mallla de elementos finitos utilizada en conjunto con los grados de libertad por nodo. Así, el vector de estado  $\mathbf{w}^{(k)}$  se puede definir con base en el campo que se desea reconstruir, dándose las siguientes posibilidades.

$$\mathbf{w}^{(k)} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{u}^{(k)}) \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \operatorname{Re}(p^{(k)}) \\ \operatorname{Im}(p^{(k)}) \end{bmatrix} \vee [|\mathbf{u}^{(k)}|] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}},$$

donde  $\mathcal{N}$  denota la dimensión total del vector real resultante, siendo igual al número de nodos de la mallla multiplicado por la cantidad de parámetros a guardar en cada uno de ellos. De esta forma, la *matriz de snapshots* se define como

$$\mathcal{M} = (\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(K)}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times K},$$

cuyas columnas representan posibles estados del cerebro bajo diferentes configuraciones de parámetros. Cuando los campos a asimilar difieren en orden de magnitud, se normalizan (por ejemplo, dividiendo por la norma de cada *snapshot* o por la amplitud impuesta en la condición de borde) para evitar que la escala de ciertas simulaciones domine la descomposición.

### 6.3. Reducción de orden mediante POD–SVD

A partir de la matriz de *snapshots*  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times K}$  se emplea un procedimiento de *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) basado en la descomposición en valores singulares (SVD). Conceptualmente, la SVD busca un conjunto de vectores ortonormales que maximizan la varianza (o covarianza) de los datos proyectados sobre ellos: el primer modo POD es la dirección en la que los *snapshots* presentan mayor dispersión, el segundo modo es la dirección ortogonal que representa la mayor parte de la varianza remanente, y así sucesivamente. De esta forma, la POD–SVD construye una base ortonormal “óptima” en el sentido de mínimos cuadrados para representar el conjunto de *snapshots*.

En la práctica, la SVD se obtiene mediante los algoritmos de álgebra lineal estándar que ya se encuentran implementados en la mayoría de los *solvers* numéricos y librerías científicas (por ejemplo, la función `numpy.linalg.svd` en la librería `numpy` [35] en Python o la función `svd()` en MatLab [36]). La descomposición se escribe de forma compacta como

$$\mathcal{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^{\top},$$

donde:

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$  es una matriz ortogonal cuyas columnas son los modos POD; cada vector columna  $\phi_i$  es un modo espacial ortonormal.
- $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times K}$  es una matriz diagonal rectangular que contiene los valores singulares  $\sigma_i$  en

su diagonal, los cuales miden la importancia relativa (energía) de cada modo.

- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{K \times K}$  es una matriz ortogonal cuyas columnas describen las combinaciones temporales/paramétricas asociadas a cada modo POD.

Para construir el espacio reducido se utiliza una *SVD truncada*: en lugar de conservar todos los modos, se seleccionan únicamente los primeros  $n$  modos asociados a los mayores valores singulares. Denotamos por

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times n}$$

la matriz formada por las primeras  $n$  columnas de  $\mathbf{U}$ , es decir, por los  $n$  modos POD de mayor energía. De forma equivalente, la aproximación de rango  $n$  de la matriz de *snapshots* puede escribirse como

$$\mathcal{M} \approx \Phi \Sigma_n \mathbf{V}_n^T,$$

donde  $\Sigma_n$  y  $\mathbf{V}_n$  son las matrices truncadas que contienen únicamente los primeros  $n$  valores singulares y los vectores asociados.

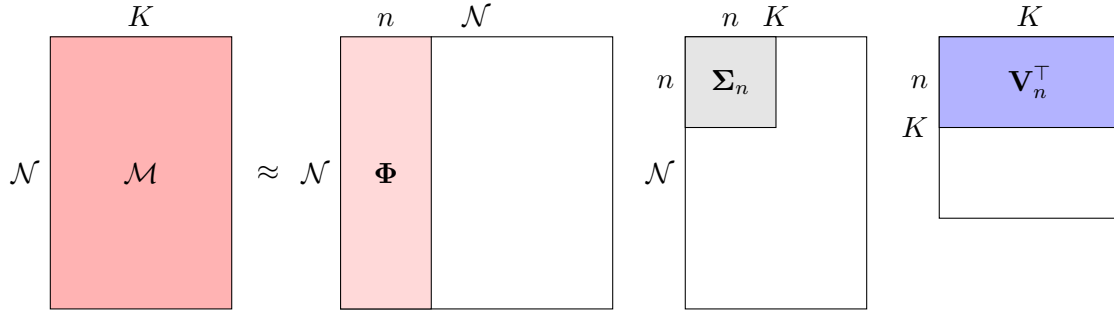


Figura 9: Representación gráfica de SVD truncada.

De esta manera, la matriz de modos truncada cuyas columnas forman una base ortonormal de dimensión reducida. Teniéndose así la posibilidad de aproximar cualquier estado como una combinación lineal de dichos modos, es decir,

$$\mathbf{w}(x) \approx \Phi \mathbf{c},$$

donde el vector de coeficientes  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  representa la proyección del estado sobre la base reducida. La matriz  $\Phi$  constituye, por tanto, la base sobre la cual se formulará posteriormente el problema de reconstrucción mediante PBDW.

## 6.4. Problema inverso y reconstrucción del campo

El objetivo de la etapa de reconstrucción es estimar el estado mecánico del cerebro a partir de los datos parciales de desplazamiento obtenidos en el examen de MRE. Se denota

el vector de mediciones disponibles como

$$\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$$

donde cada componente de este corresponde a los valores asociados a los voxeles provenientes del examen, en otras palabras el vector contiene todas las mediciones en un corte de medición a utilizar para reconstruir.

Desde el punto de vista matemático, cada medición puede modelarse como la aplicación de un funcional lineal sobre el estado completo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  (vector de grados de libertad del problema poro-elástico):

$$\ell_j = \mathcal{L}_j(\mathbf{w}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Bajo la estructura de producto interno del espacio discreto, el teorema de representación de Riesz garantiza que para cada funcional  $\mathcal{L}_j$  existe un vector  $\mathbf{r}_j \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  tal que

$$\mathcal{L}_j(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{r}_j),$$

de modo que la acción del sensor queda codificada por su *representador de Riesz*. En la práctica, estos vectores  $\mathbf{r}_j$  representan el proceso de medición asociado a cada voxel, ya sea promediando el campo en un dominio definido (voxel) o realizando una observación puntual.

Agrupando los representadores de Riesz en una matriz, se define la *matriz de observación*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_m) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times m},$$

de forma que el modelo directo de observación de un campo puede escribirse compactamente como

$$\boldsymbol{\ell} \approx \mathbf{W}^T \mathbf{w},$$

Donde por ejemplo al multiplicar por la izquierda por la matriz de observación asociada a un corte a un determinado campo, se obtendría una observación sintética del campo computacional, un ejemplo de esto se muestra en la Figura 10

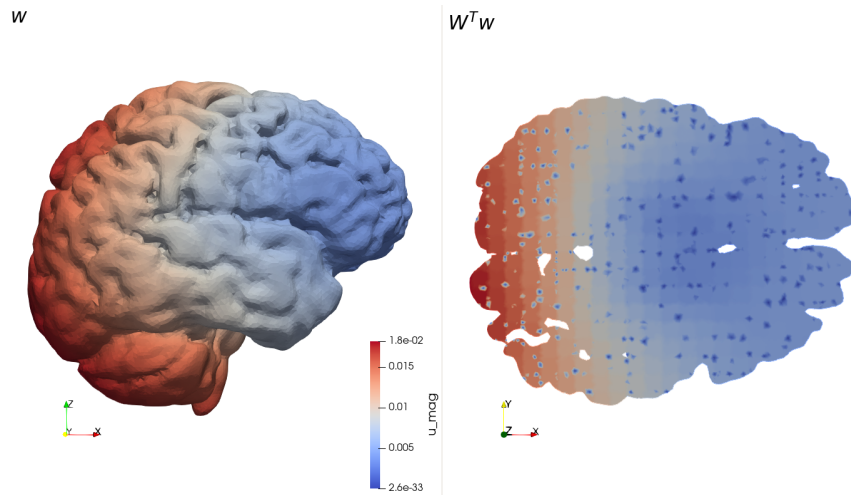


Figura 10: Ejemplo de uso de matriz de observación

Una vez definido el modelo de observación, el problema inverso consiste en reconstruir un estado determinado.  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  a partir de los datos experimentales  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$ . En una aproximación clásica de resolución, el problema puede formularse como la minimización de la discrepancia entre las mediciones y el estado observado en los puntos donde existe medición, es decir,

$$\mathbf{w}^* = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}} \|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{W}^T \mathbf{w}\|_2.$$

El minimizador  $\mathbf{w}^*$  se busca en un espacio de dimensión  $\mathcal{N}$ , igual al número de grados de libertad del modelo físico en elementos finitos. Sin embargo, en la práctica el número de mediciones disponibles suele ser mucho menor que la dimensión del modelo ( $\mathcal{N} \gg m$ ), por lo que el problema anterior no tiene, en general, una solución única. Al desarrollar las condiciones de minimización del problema de mínimos cuadrados se obtiene el sistema

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T \mathbf{w} = \mathbf{W} \boldsymbol{\ell},$$

en el cual la matriz  $\mathbf{W}\mathbf{W}^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$  tiene a lo más  $m$  autovalores no nulos. En el caso típico  $\mathcal{N} > m$ , esta matriz es singular y existen infinitos estados  $\mathbf{w}$  que al ser observados coinciden con las mediciones utilizadas para la reconstrucción.

Para superar esta problemática se plantea restringir la búsqueda a un subespacio reducido de dimensión  $n \ll \mathcal{N}$ , definido por la base POD truncada  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times n}$  (Subsección 6.3). Cualquier estado admisible se aproxima entonces como la combinación lineal de los  $n$  modos que definen la base ortonormal truncada. Lo que se traduce en:

$$\mathbf{w} \approx \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n,$$

De esta manera el problema de mínimos cuadrados se transforma en la búsqueda de cada

coeficiente  $c_i$  asociado a cada modo de la base truncada  $\phi_i$ :

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \left\| \boldsymbol{\ell} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c} \right\|_2.$$

Introduciendo la matriz

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

la formulación anterior puede escribirse como

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \left\| \boldsymbol{\ell} - \mathbf{G} \mathbf{c} \right\|_2,$$

cuyas condiciones de optimalidad conducen a las ecuaciones normales

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{c}^* = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\ell}.$$

Una vez determinados los coeficientes óptimos, la reconstrucción del campo en el espacio físico se obtiene como

$$\mathbf{w}^* \approx \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c}^* = \sum_{i=1}^n \phi_i c_i$$

Esta formulación permite interpretar el problema de reconstrucción como un ajuste en mínimos cuadrados dentro de un espacio de dimensión reducida, informado por la física del modelo. En la práctica, se asume que la información contenida por los  $n$  primeros modos es suficiente para reflejar la física del problema, el cómo estudiar la calidad de la base reducida y la reconstrucción se plantea en la Sección 6.5.

## 6.5. Planteamiento de una cota de error a priori

Definiendo la base reducida como un subespacio  $Z_n = \text{span}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ , el problema inverso y el algoritmo de reconstrucción introducen dos fuentes principales de error: (i) la capacidad del subespacio  $Z_n$  para aproximar el estado que se desea reconstruir, y (ii) la capacidad del sistema de mediciones para *observar* dicho subespacio. Ambas se pueden cuantificar mediante dos parámetros que se definirán basándose en el trabajo realizado por [37]: el parámetro de energía excluida normalizada  $\hat{\varepsilon}_n$  y el parámetro de observabilidad  $\beta_n$ .

### Parámetro de energía excluida normalizada.

Sea  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times K}$  la matriz de *snapshots* y  $\mathcal{M} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$  su descomposición SVD. Denotando por  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  los valores singulares distintos de cero, se define este parámetro de la siguiente manera.

$$\hat{\varepsilon}(n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=n+1}^r \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}},$$

La cantidad  $\hat{\varepsilon}(n)$  mide la fracción de energía de los datos de entrenamiento que no está capturada por los primeros  $n$  modos POD. Lo que pasaría a representar la fracción de información que no captura el subespacio, cuyo valor disminuye en la medida que se aumenta el valor de  $n$ .

### Parámetro de observabilidad.

Sea  $Z_n = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  el subespacio reducido generado por los  $n$  primeros modos POD, y sea  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times m}$  la matriz de observación asociada a las mediciones MRE, cuyas columnas son los representadores de Riesz  $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^m$ . Denotamos por

$$\mathcal{W} = \text{span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$$

el subespacio de mediciones generado por dichos vectores. El grado en que los modos del modelo reducido son “vistos” por las mediciones se caracteriza mediante el parámetro de observabilidad

$$\beta_n(Z_n, \mathbf{W}) := \inf_{v \in Z_n} \sup_{w \in \mathcal{W}} \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2}.$$

De esta manera la condición *inf sup* determina la peor alineación dentro del espacio de observación y el espacio de medición, o por decirlo de otra manera, que tan difícil es observar los modos que constituyen la base reducida, recordando que estos corresponden a direcciones de máxima covarianza de la base numérica. Es de esperar entonces que en la medida que  $n$  crezca, la capacidad del espacio de medición de alinearse con la información de los modos decrezca.

Para evaluar numéricamente el parámetro de observabilidad se utiliza la matriz  $\mathbf{G}$  definida anteriormente, la cual debido a su definición almacena los productos internos entre los modos POD y los representadores de Riesz asociados a las mediciones. Esto debido a que

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^T \Phi \quad \text{con} \quad G_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \phi_j \rangle$$

En consecuencia, al considerar que la matriz  $\mathbf{G}$  contiene los productos internos, se puede aproximar numéricamente la condición *inf sup* al menor valor singular de  $\mathbf{G}$ .

$$\beta(Z_n, \mathbf{W}) = \sigma_{\min}(\mathbf{G}),$$

### Cota *a priori*.

Bajo la hipótesis de que el subespacio  $Z_n$  es observable (es decir,  $\beta > 0$ ), se puede plantear que el error relativo de reconstrucción verifica la siguiente cota *a priori*:

$$\frac{\|u - u^*\|_2}{\|u\|_2} \leq \beta_n^{-1} \hat{\varepsilon}_n.$$

En otras palabras, el error de reconstrucción está controlado por el producto de dos factores: (i)  $\hat{\varepsilon}_n$ , que refleja la calidad del modelo reducido (cuánta energía de los datos queda fuera de  $Z_n$ ), parámetro que mejora con el aumento de  $n$ , y (ii)  $\beta^{-1}$ , que amplifica el error según cuán bien el subespacio reducido es observado por las mediciones, parámetro que empeora con el aumento de  $n$ .

## 6.6. Alternativa al POD: incorporación de modos específicos para mediciones (OMP)

La reconstrucción descrita en la Subsección 6.4 se apoya en una base reducida  $\Phi$  obtenida mediante POD a partir de la matriz de *snapshots*. Esta base es fija y se construye pensando en describir de la mejor manera posible el conjunto completo de simulaciones de entrenamiento. Sin embargo, para una medición concreta de MRE puede ser conveniente refinar esta base, incorporando modos específicos que estén asociados de manera más directa a la información contenida en la *slice* de medición.

Con este objetivo se introduce un esquema que incorpore modos específicos asociados a cada corte de mediciones. La idea central es utilizar los *snapshots* disponibles como un “diccionario” de posibles patrones y, para cada conjunto de mediciones, seleccionar iterativamente aquellas simulaciones que mejor representen los datos. Cada simulación seleccionada da lugar a un modo nuevo que se incorpora a la base reducida, mejorando su capacidad de ajuste para esa medición específica.

El procedimiento puede describirse de forma cualitativa del siguiente modo:

- Construcción de la base reducida POD a partir de la matriz de *snapshots*, tal como se describió en las secciones anteriores, obteniendo una ROM tradicional con  $n$  modos.
- Observación de cada simulación de entrenamiento en la *slice* de interés, aplicando el operador de observación para almacenar, para cada *snapshot*, su correspondiente respuesta medida (manifold de respuestas observadas).
- Análisis de la discrepancia entre la reconstrucción obtenida con la base POD tradicional y la medición experimental  $\ell$ , definiendo un residuo que cuantifica la diferencia entre ambas.
- Iteración sobre la manifold de respuestas observadas, buscando la simulación que mejor reduzca dicha discrepancia; la simulación seleccionada se utiliza para generar un modo nuevo que se añade a la base reducida, y se vuelve a calcular el residuo. El procedimiento se repite hasta cumplir un criterio de parada (por ejemplo, un umbral de error o un número máximo de modos adicionales).

De esta forma, para cada conjunto de datos experimentales se obtiene una base reducida enriquecida, formada por los modos POD globales y por un número de modos adicionales

---

construidos con base en el método mencionado. Estos modos adicionales están específicamente asociados a la medición considerada y se eligen buscando, en cada paso, reducir lo máximo posible la discrepancia entre la ROM y los datos. El resultado es una ROM híbrida cuya base no es completamente fija, sino que puede adaptarse a cada medición mediante la incorporación de modos seleccionados desde la manifold de *snapshots*, la cantidad de modos totales  $n'$  se definen como la suma entre los modos POD y los agregados.

$$n' = \text{POD}_{\text{modos}} + \text{OMP}_{\text{modos}}$$

## 6.7. Adquisición y preprocesamiento de datos

Los datos experimentales utilizados en este trabajo corresponden a medidas de elastografía por resonancia magnética (MRE) cerebral, proporcionadas por el Hospital Charité (Berlín, Alemania) [38] en el marco de estudios previamente aprobados por los comités éticos correspondientes. El conjunto de datos considera 4 voluntarios sanos, sometidos a excitaciones armónicas en cuatro frecuencias de estimulación  $\omega \in \{20, 25, 30.03, 35.09\}$  Hz. El examen médico se realiza en una configuración experimental basada en el esquema de la Figura 11, donde se utiliza un generador de vibración externo ubicado fuera del resonador.

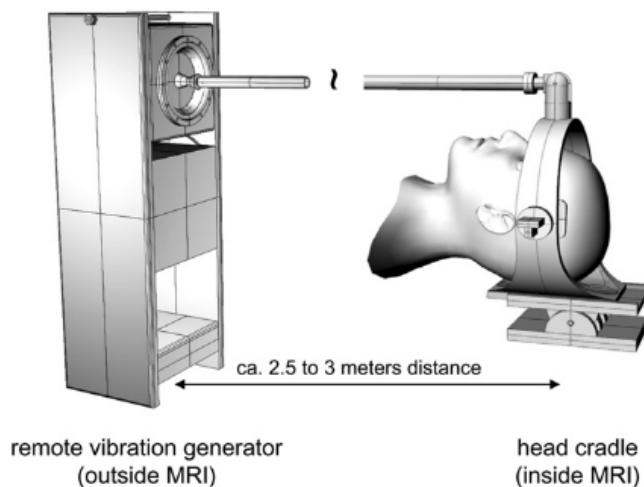


Figura 11: Esquema procedimiento de adquisición de datos. Extraído de [4]

Cada adquisición se realiza sobre un volumen cerebral discretizado en *voxels* de tamaño

$$\Delta x \times \Delta y \times \Delta z = 0.17 \times 0.17 \times 0.21 \text{ cm}^3,$$

Para cada *voxel*  $j$ , el examen entrega un único vector de medida  $\mathbf{m}_j \in \mathbb{R}^9$  que contiene tanto la posición del centro como el desplazamiento complejo descompuesto en partes real e

imaginaria:

$$\mathbf{m}_j = \left( x_j \quad y_j \quad z_j \quad u_{re,x,j} \quad u_{re,y,j} \quad u_{re,z,j} \quad u_{im,x,j} \quad u_{im,y,j} \quad u_{im,z,j} \right),$$

donde  $(x_j, y_j, z_j)$  corresponde a las coordenadas del centro del *voxel* y  $u_{re}$ ,  $u_{im}$  representan, respectivamente, las partes real e imaginaria del desplazamiento.

Se plantea para el esquema computacional que cada *voxel* de medición contenga por lo menos tres tetraedros de los que conforman la malla utilizada para las simulaciones, esto implica un tamaño de vértice por lo menos de largo  $< 0.17/3 \text{ cm}^2$ , lo cual conforma una malla demasiado fina y pesada computacionalmente. Por esto se realiza un preprocesamiento de los datos, generando un nuevo tamaño de *voxel* de

$$\Delta x \times \Delta y \times \Delta z = \Delta x_2 \times \Delta y_2 \times \Delta z_2,$$

Cuyos valores se exponen en la sección Sección 7 de resultados. Este sub-sampleo implica que el valor de cada *voxel* nuevo corresponderá al promedio de los *voxeles* contenidos dentro de este.

## 6.8. Herramienta numérica: software MAD

Todas las simulaciones directas, la construcción del modelo de orden reducido (ROM) y la resolución del problema inverso se realizan con el software de código abierto MAD<sup>1</sup> (*Multi-physics simuLations for engineering and Data assimilation*), desarrollado por Felipe Galarce [39]. Este código basado en C++ está orientado a simulaciones mediante el método de elementos finitos, con énfasis en técnicas de reducción de orden y asimilación de datos.

En el contexto de este trabajo, MAD se utiliza para:

- Resolver el problema directo poro-elástico en el dominio de la frecuencia, generando la variedad de simulaciones sobre la que se define el ROM.
- Construir la base reducida mediante descomposición en valores singulares (POD–SVD) a partir de los *snapshots* obtenidos.
- Formular y resolver el problema inverso de reconstrucción, imponiendo la compatibilidad entre el modelo reducido y las mediciones de MRE.

Los sistemas lineales provenientes de la discretización en elementos finitos se resuelven con un esquema iterativo de tipo GMRES (método de subespacios de Krylov), acoplado a PETSc para el manejo eficiente de matrices dispersas y pre condicionadores, MAD admite paralelización en CPU mediante MPI, lo que permite distribuir el cómputo en múltiples núcleos y hacer viables las simulaciones poro-elásticas tridimensionales de alta resolución y la evaluación repetida del modelo dentro del esquema de ROM y del problema inverso.

<sup>1</sup> Repositorio disponible en <https://gitlab.com/felipe.galarce.m/mad>.

## 7. Resultados

### 7.1. Construcción de la base numérica

Con el fin de generar la manifold ( $\mathcal{M}$ ), se debe realizar un cierto número de simulaciones variando distintos parámetros asociados al modelo poro-elástico, de manera de obtener simulaciones suficientemente variadas. Para este caso, se genera una manifold de 2048 simulaciones con diferentes combinaciones de cuatro parámetros: módulo de Young ( $E$ ), permeabilidad ( $\kappa$ ), razón de Poisson ( $\nu$ ) y frecuencia ( $\omega$ ). Cada parámetro se varía según una distribución normal truncada, cuyas distribuciones se generan de acuerdo con los parámetros que se muestran a continuación.

Tabla 1: Parámetros utilizados para las distribuciones.

Parámetro	$\mu$	$\sigma$	Mínimo	Máximo
Módulo de Young [dyn/cm <sup>2</sup> ]	5.5e4	2.7e4	1e4	1e5
Permeabilidad [cm <sup>2</sup> ]	5.5 e-10	2.7 e-10	1 e-10	1 e-9
Coefficiente de Poisson [-]	0.425	0.015	0.4	0.45
Frecuencia [Hz]	20	1.3	18	22

Los histogramas asociados a cada parámetro se muestran en la Figura 12.

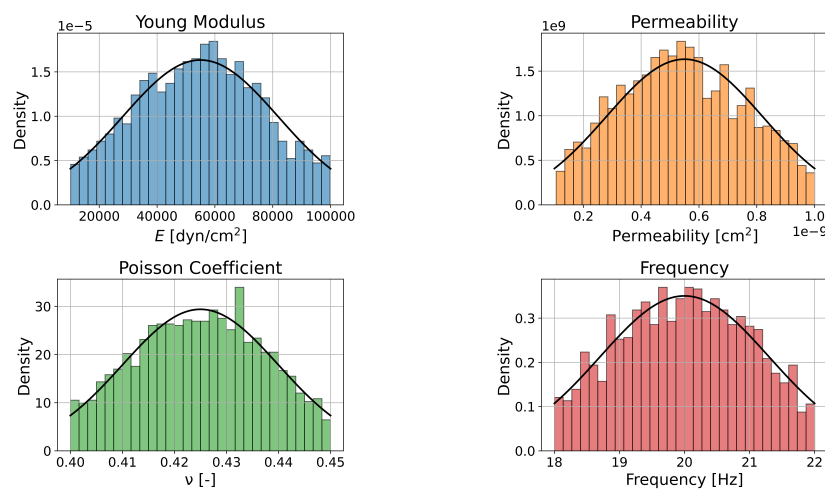


Figura 12: Histogramas de los parámetros utilizados.

## 7.2. Análisis del ROM

Como se mencionó anteriormente, al utilizar un mayor número de modos para la reconstrucción, aumenta la cantidad de energía o información proveniente de la base, pero la observabilidad de dicha información disminuye. Con el propósito de analizar este fenómeno, luego de extraer 350 modos para la manifold de 2048 simulaciones, y dos sub-manifolds de 1024 simulaciones tomadas aleatoriamente de la original, se calculan el valor singular asociado a cada modo, la energía excluida normalizada ( $\hat{\varepsilon}$ ), el parámetro de observabilidad ( $\beta$ ) y la cota teórica de error dada por la razón  $\varepsilon/\beta$ . Los resultados se muestran en la Figura 13.

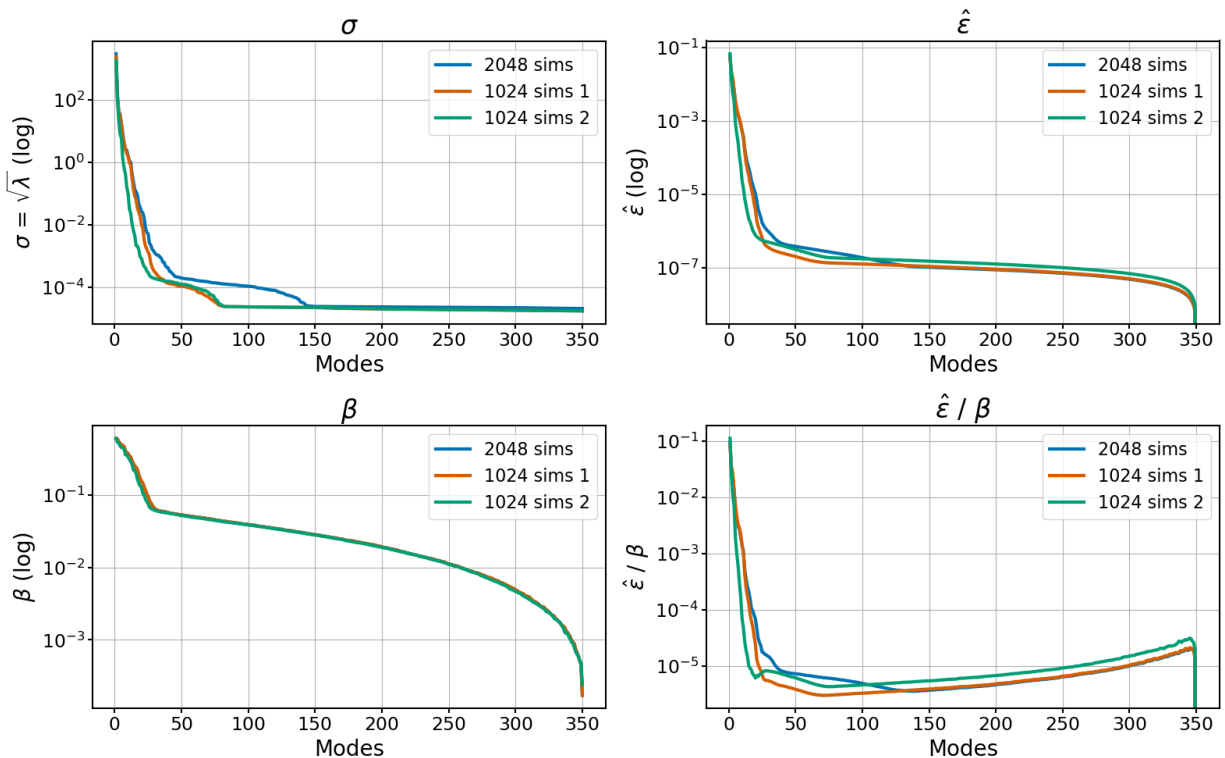


Figura 13: Análisis de parámetros del ROM, con  $\sigma$  valor singular y  $\lambda$  valor propio

A partir de esto se pueden observar varias conclusiones. En primer lugar, la mayor parte de la información se captura dentro de los primeros 50 modos, lo cual se refleja en la brusca disminución de la pendiente en las curvas de valores singulares y de energía excluida normalizada. En segundo lugar, se observa que las curvas son similares para la manifold original y las dos sub-manifolds generadas, lo que permite aceptar que 2048 simulaciones capturan información suficiente para la reconstrucción. Finalmente, se observa que un número teórico de modos adecuado para la reconstrucción se encuentra en torno a 55 modos para la manifold de 2048 simulaciones.

### 7.3. Sobre la observabilidad de las mediciones reales

Dado que la observabilidad es un parámetro asociado a qué tan bien es posible “ver” la información, se genera una dependencia con la *slice* utilizada para la reconstrucción. Esto se debe a que cada *slice* observa una sección diferente del dominio y también un cierto número de *voxels* dentro de este. Lo anterior lleva a suponer que algunas *slices* se comportarán mejor que otras y que ciertas *slices* serán más adecuadas para la estimación del campo. Para analizar esto, se calculan el parámetro de observabilidad  $\beta$  y la razón  $\hat{\epsilon}/\beta$  para las 10 *slices* disponibles; los resultados se muestran en la Figura 14.

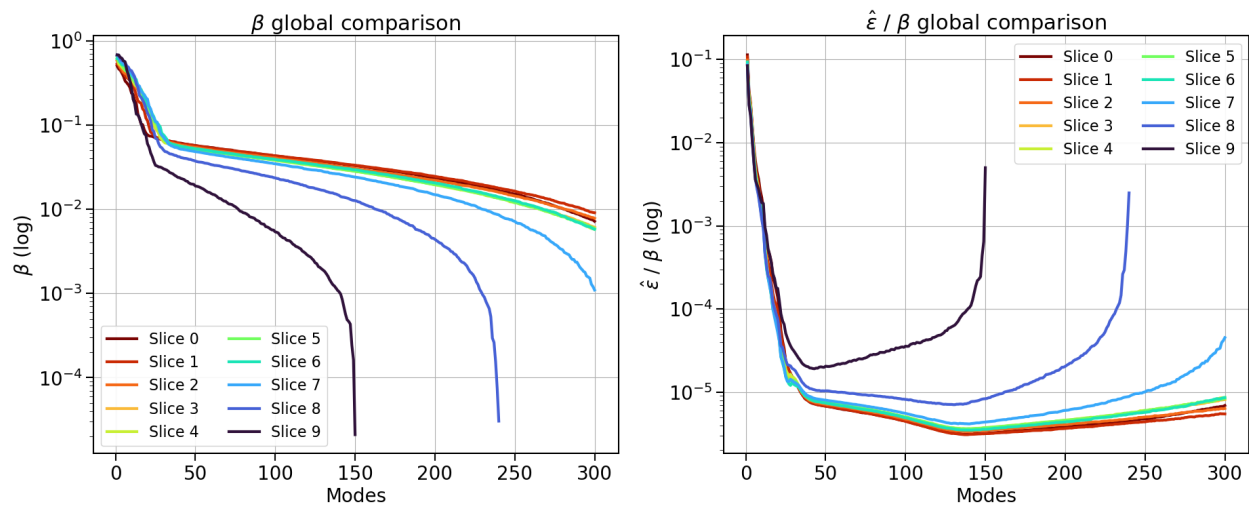


Figura 14: Comparación global de observabilidad y cota teórica por *slice*.

Como se muestra, cada *slice* presenta un valor mínimo diferente de  $\epsilon/\beta$ . Para clasificarlas de mejor a peor, se define que la mejor *slice* será aquella con el menor valor de  $\epsilon/\beta$ . El ranking de *slices* se presenta en la Figura 15, y su distribución sobre el dominio cerebral se muestra en la Figura 16.

A partir de este ranking se observa que las peores *slices* son las superiores (7, 8 y 9). Esto se debe al reducido número de *voxels* contenidos en cada una, lo que se correlaciona con que los valores de  $\beta$  y  $\epsilon/\beta$  queden restringidos a un número de modos menor que 350, estando cada una restringida a un número de modos igual al número de *voxels* de la *slice*. Esto se debe a que, para realizar una reconstrucción, es necesario que el número de modos sea menor que el número de mediciones ( $n < m$ ). Por otro lado, las siguientes *slices* con peor desempeño son las centrales (3, 4 y 5), lo cual puede asociarse a la presencia de los ventrículos dentro del dominio contenido en cada una. Finalmente, las mejores *slices* para una reconstrucción *a priori* resultan ser las inferiores (0, 1 y 2).

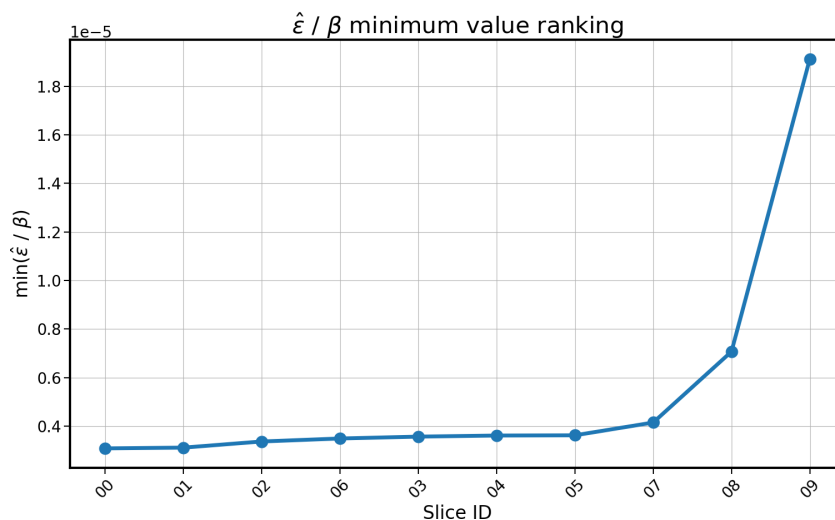


Figura 15: Ranking de *slices* según  $\hat{\epsilon}/\beta$ .

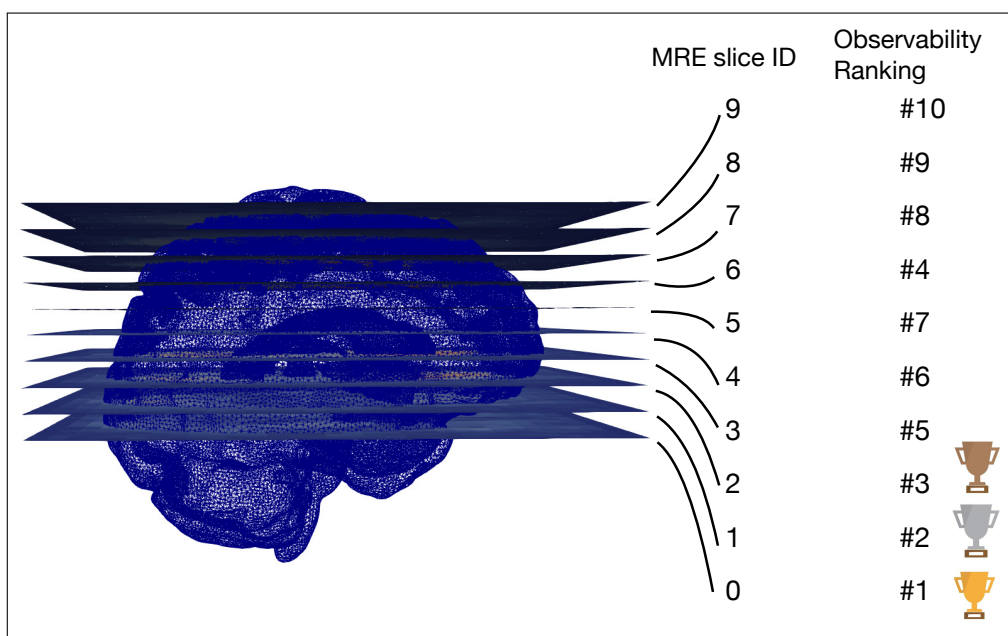


Figura 16: Ranking de *slices* proyectado sobre el dominio.

## 7.4. Reconstrucción a partir de datos sintéticos

Con el fin de evaluar la capacidad del procedimiento para reconstruir un campo a partir de mediciones parciales, se realiza una reconstrucción utilizando datos sintéticos. Para ello, se asimila la magnitud del campo de desplazamientos proveniente de una simulación externa a la manifold. Para observar dicho campo se genera una medición sintética utilizando la in-

formación de posiciones y dimensiones de los voxels de una *slice* arbitraria de las mediciones reales; el valor de cada *voxel* sintético corresponde al promedio del campo dentro del dominio espacial de ese *voxel*.

En la Figura 17 se muestra una reconstrucción de una simulación utilizando las posiciones de los voxels de la *slice* 6. La reconstrucción se realiza con  $n = 55$  modos, ya que, como se mencionó en la Sección 4.3, este número es suficiente para capturar la mayor parte de la información del ROM. En la figura se aprecia la posición de la *slice* en el dominio, el campo sintético en la *slice*, cómo es observado y el campo reconstruido en dicha *slice*. En la Figura 18 se muestra el campo completo reconstruido y el campo sintético en todo el dominio.

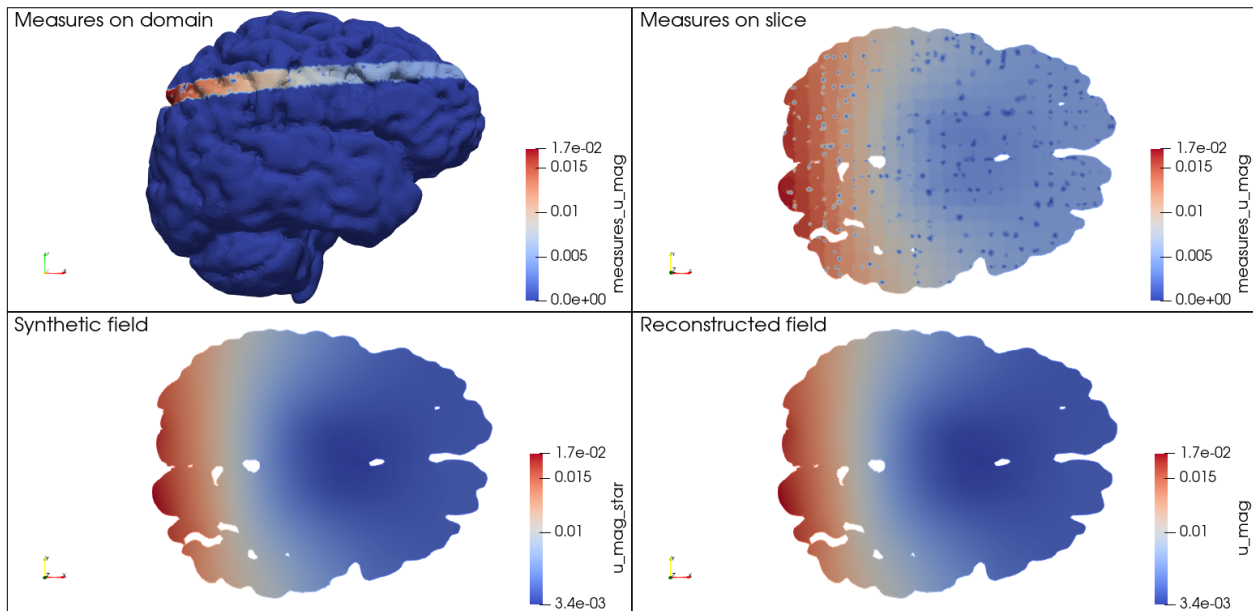


Figura 17: Reconstrucción sintética: posición de la *slice*, medidas en la *slice*, campo sintético y campo reconstruido.

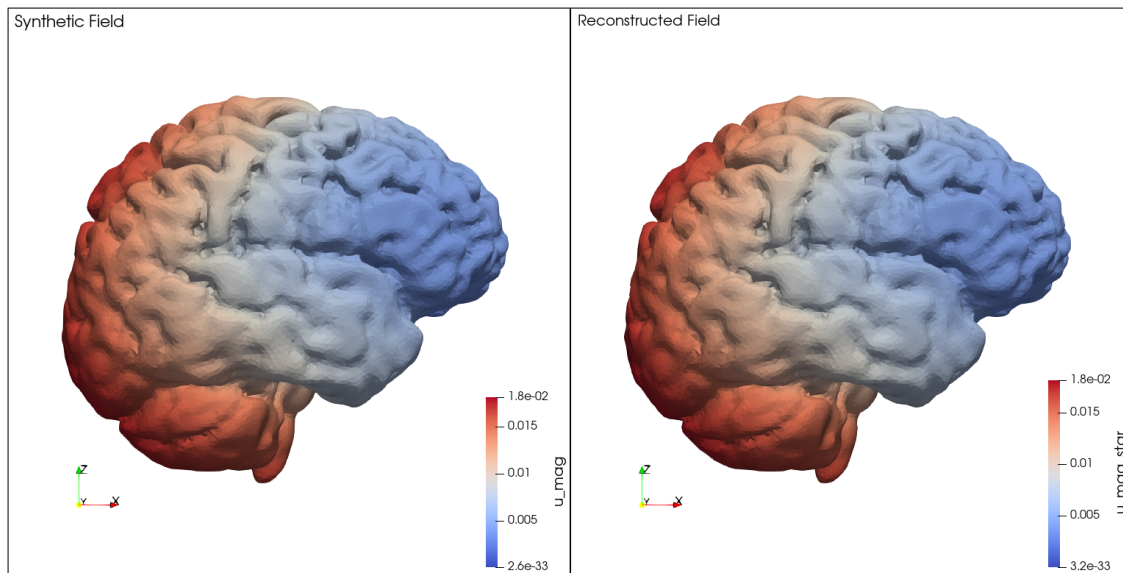


Figura 18: Reconstrucción sintética del campo en todo el dominio.

A primera vista se aprecia una gran similitud entre el campo sintético y el reconstruido, pero se requiere un parámetro cuantitativo para evaluar la calidad de la reconstrucción. Para este propósito se calcula el error relativo de reconstrucción como

$$\text{error relativo} = \frac{\|W^T \mathbf{u}_{\text{mag}} - W^T \mathbf{u}_{\text{mag}}^*\|_2}{\|W^T \mathbf{u}_{\text{mag}}\|_2}.$$

Para la reconstrucción anterior, el error relativo tiene un valor de  $7.0 \times 10^{-4} \%$ . El error relativo para el mismo número de modos ( $n$ ) utilizando todas las *slices* se muestra en la Tabla 2. Con base en estos resultados, se puede afirmar que el *pipeline* general funciona adecuadamente, siendo el siguiente paso la reconstrucción a partir de mediciones reales.

Tabla 2: Error relativo de reconstrucción para cada *slice*,  $n = 55$ .

Slice ID	Error rel. [%]	Slice	Error rel. [%]
0	7.0e-4	5	7.0e-4
1	2.1e-3	6	7.0e-4
2	7.0e-4	7	7.0e-4
3	6.0e-4	8	1.0e-3
4	8.0e-4	9	3.3e-3

## 7.5. Reconstrucción a partir de datos experimentales

En la siguiente sección se implementa el uso de mediciones reales, con el fin de analizar de mejor manera el desempeño de la reconstrucción bajo un escenario desfavorable, debido

a la calidad de las imágenes. El error relativo y absoluto se calcula en cada voxel de la *slice* de comparación. El vector de error absoluto  $\mathbf{e}$  se obtiene como la diferencia entre el vector de mediciones ( $\ell$ ) y la observación de la reconstrucción ( $W^T \mathbf{u}_{\text{mag}}^*$ ):

$$\mathbf{e} = \ell - W^T \mathbf{u}_{\text{mag}}^*.$$

El error relativo en cada voxel se calcula como

$$\text{error relativo por voxel} = \frac{|e_i|}{|\mathbf{u}_{\text{mag},i}|}.$$

Los resultados se dividen en dos subsecciones principales: la primera, en la que la reconstrucción se evalúa en la misma *slice* utilizada para reconstruir, y la segunda, en la que se evalúa la capacidad de extrapolar información.

Para ambos escenarios se utilizan datos del voluntario 1 y las imágenes empleadas para reconstrucción corresponden a una frecuencia de excitación de  $w = 20$  Hz.

### 7.5.1. Evaluación en la *slice* utilizada para la reconstrucción

En este caso, la reconstrucción se evalúa sobre la misma *slice* utilizada para reconstruir, con el propósito de mostrar la capacidad del método para aumentar la resolución en un dominio que ya cuenta con información, pero que está limitado por la resolución de la imagen de RM. En este sentido, el método puede verse como un algoritmo de *super-sampling*.

En las Figura 19 y Figura 20 se muestran las reconstrucciones correspondientes a las *slices* 0 y 6, respectivamente. En cada imagen se observan cuatro sub gráficos: la posición de la *slice* en el dominio, las mediciones en la *slice*, el campo reconstruido en la *slice* y la reconstrucción observada. La *slice* 6 se reconstruye con  $n = 25$  modos, alcanzando un error relativo global de 14.8%, mientras que la *slice* 0 se reconstruye con  $n = 20$  modos, con un error relativo global de 16.8%. Como se mencionó anteriormente, para un análisis más completo de la reconstrucción es necesario evaluar el error relativo y absoluto en cada voxel; esta información se presenta en las Figura 21 y Figura 22.

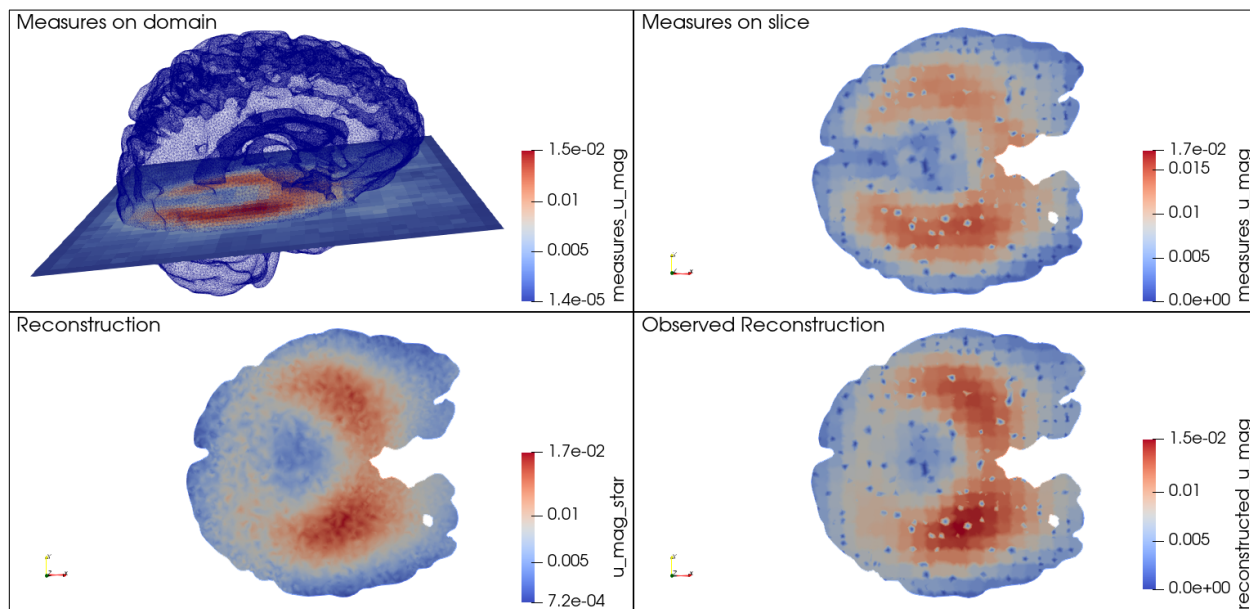


Figura 19: Reconstrucción experimental para la *slice* 0,  $n = 20$ : posición de la *slice*, mediciones, campo sintético y campo reconstruido.

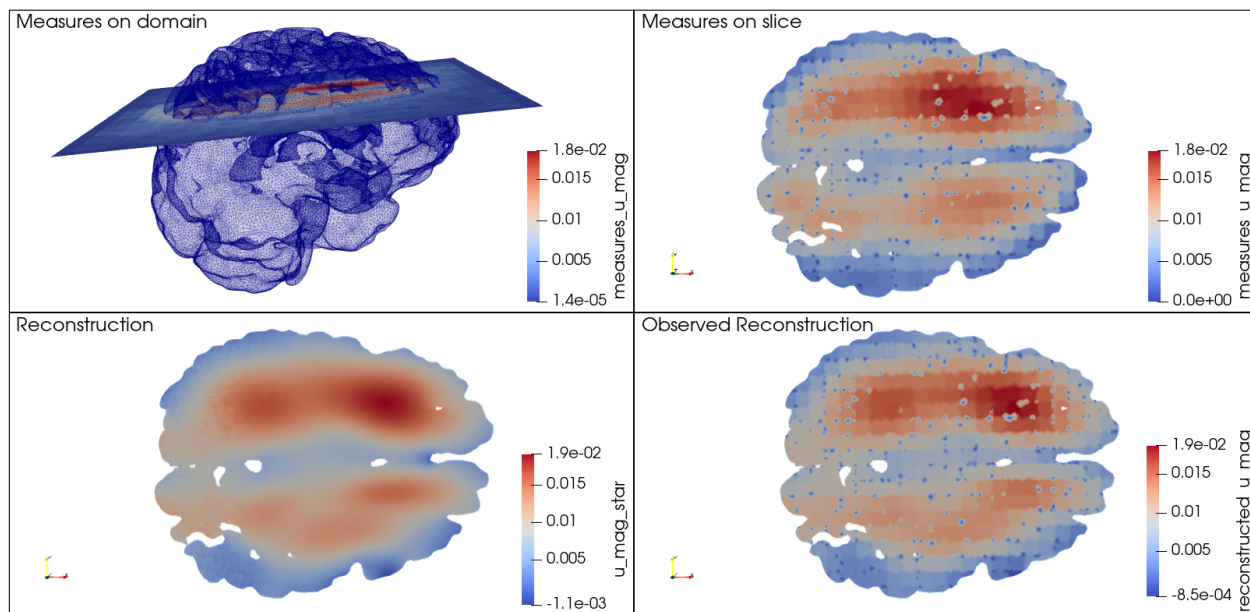


Figura 20: Reconstrucción experimental para la *slice* 6,  $n = 25$ : posición de la *slice*, mediciones, campo sintético y campo reconstruido.

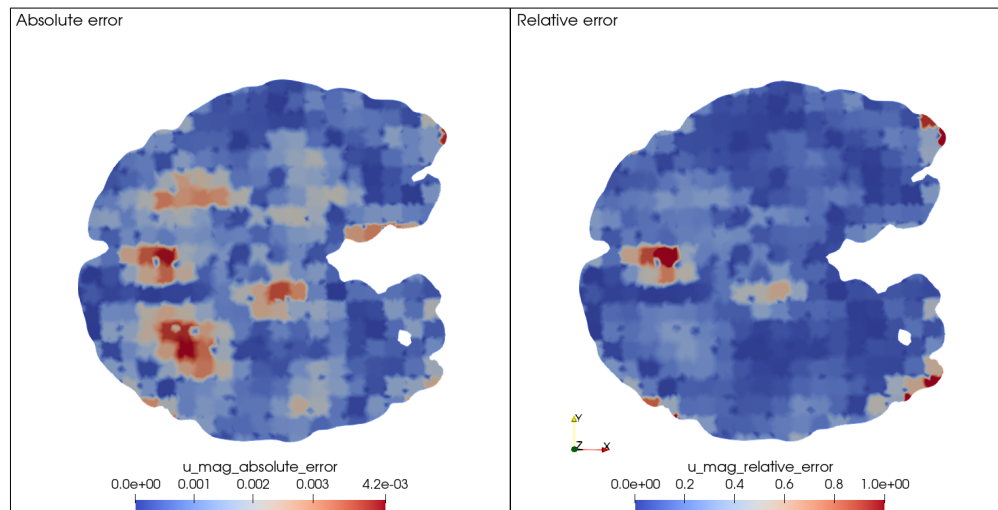


Figura 21: Error absoluto y relativo por voxel para la reconstrucción experimental de la *slice* 0, comparación sobre el mismo  $n = 20$ .

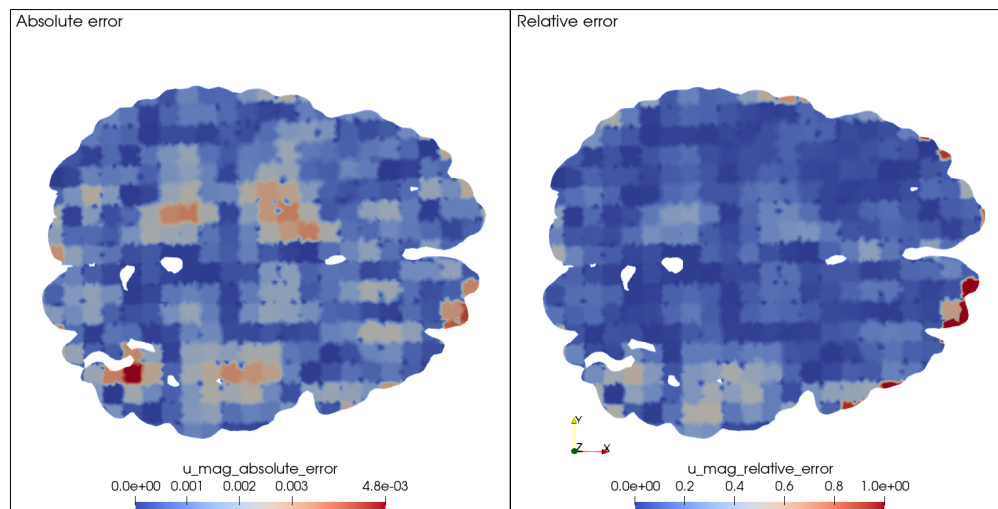


Figura 22: Error absoluto y relativo por voxel para la reconstrucción experimental de la *slice* 6, comparación sobre el mismo  $n = 25$ .

Para el caso de la *slice* 6, las principales fuentes de error se concentran en la sección superior central y en los voxeles cercanos a los bordes, donde las imágenes presentan valores nulos de desplazamiento. En la *slice* 0, la principal fuente de error se ubica cerca de la zona de desplazamiento nulo en la porción media izquierda de la imagen. Esto sugiere que existe una dificultad para reconstruir cambios abruptos del campo observado, cambios que no estaban presentes en las mediciones sintéticas. La capacidad de reconstruir estas zonas con cambios bruscos puede mejorarse aumentando el número de modos utilizados: los modos de orden más alto son capaces de capturar variaciones más finas del campo. Esto lleva a la discusión de qué tan buena es una reconstrucción aceptable frente al costo computacional de utilizar

un mayor número de modos, recordando que uno de los objetivos del algoritmo y del uso de un modelo de orden reducido (ROM) es disminuir el número de variables a resolver.

Las reconstrucciones para cada *slice* se calculan para valores de  $n$  en el intervalo  $[1, 350]$ , y se determina el error relativo global para cada uno de ellos. La comparación global se muestra en la Figura 23. Se observa que las curvas correspondientes a las *slices* 7, 8 y 9 alcanzan un valor cero antes de los 350 modos, debido a que cada una posee menos voxeles que 350; es imposible resolver la combinación lineal de modos cuando  $n > m$ , ya que hay menos voxeles con información en la imagen que modos a combinar. Además, se aprecia que las *slices* con mayor error son (2, 3, 4, 5), las cuales corresponden a las *slices* centrales que contienen los ventrículos. Por último, la región donde el error relativo decrece con mayor rapidez se encuentra entre 1 y aproximadamente 50 modos, mostrando que la mayor parte de la información está contenida en los primeros 50 modos. Todas estas observaciones son consistentes con los resultados de las secciones 7.2 y 7.3.

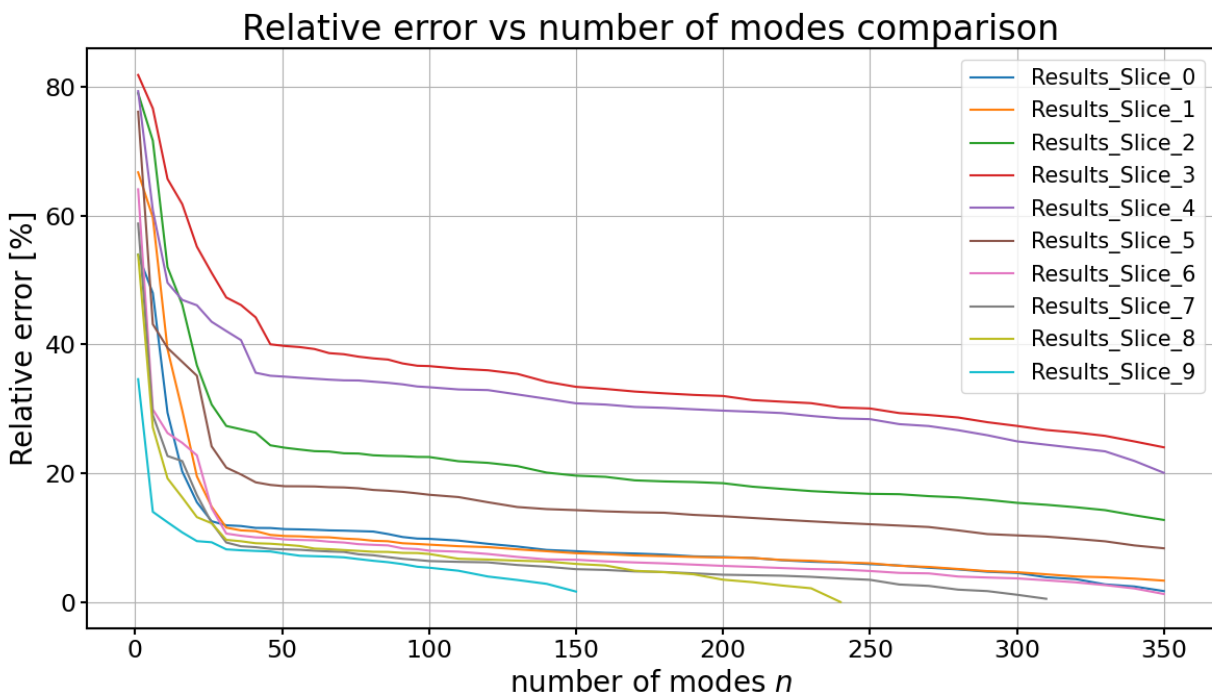


Figura 23: Error relativo global de la reconstrucción en función del número de modos, para todas las *slices*.

### 7.5.2. Evaluación de la extrapolación de datos

Tras analizar la reconstrucción de datos en un dominio que ya posee información, es necesario evaluar la capacidad del algoritmo para extrapolar o interpolar datos. Para ello se propone un caso de estudio en el que se busca interpolar la magnitud del campo de desplazamientos entre dos *slices* separadas por una *slice*. En este caso, las *slices* utilizadas

para la reconstrucción son la 6 y la 8, mientras que la *slice* 7 se emplea para la evaluación.

Al intentar extrapolar información se observa un fenómeno particular: una alta similitud con una de las *slices* utilizadas puede inducir un campo extrapolado que no coincide con el resto de las mediciones experimentales. En este sentido, es necesario encontrar un punto medio en el que el campo sea lo suficientemente cercano a las mediciones utilizadas como referencia y, al mismo tiempo, lo bastante próximo al campo que se desea reconstruir. Buscando este equilibrio, se utilizan menos modos que en la sección anterior, realizando la reconstrucción con 15 modos.

La reconstrucción se muestra en la Figura 24 y los errores relativo y absoluto por voxel se presentan en la Figura 25; la estructura e información de cada imagen es análoga a la descrita en la Sección 7.5.1. Se observa que las principales fuentes de error son los voxeles cercanos a las paredes con desplazamiento nulo y la zona de máximo valor en la parte superior. El error relativo global de la reconstrucción es 26.9%, lo que lleva a la misma observación que en la Sección 7.5.1: las zonas más difíciles de reconstruir utilizando pocos modos son aquellas con cambios abruptos en la magnitud del desplazamiento. No obstante, en términos generales, el algoritmo muestra la capacidad de interpolar datos en un dominio distinto al utilizado para la adquisición de mediciones.

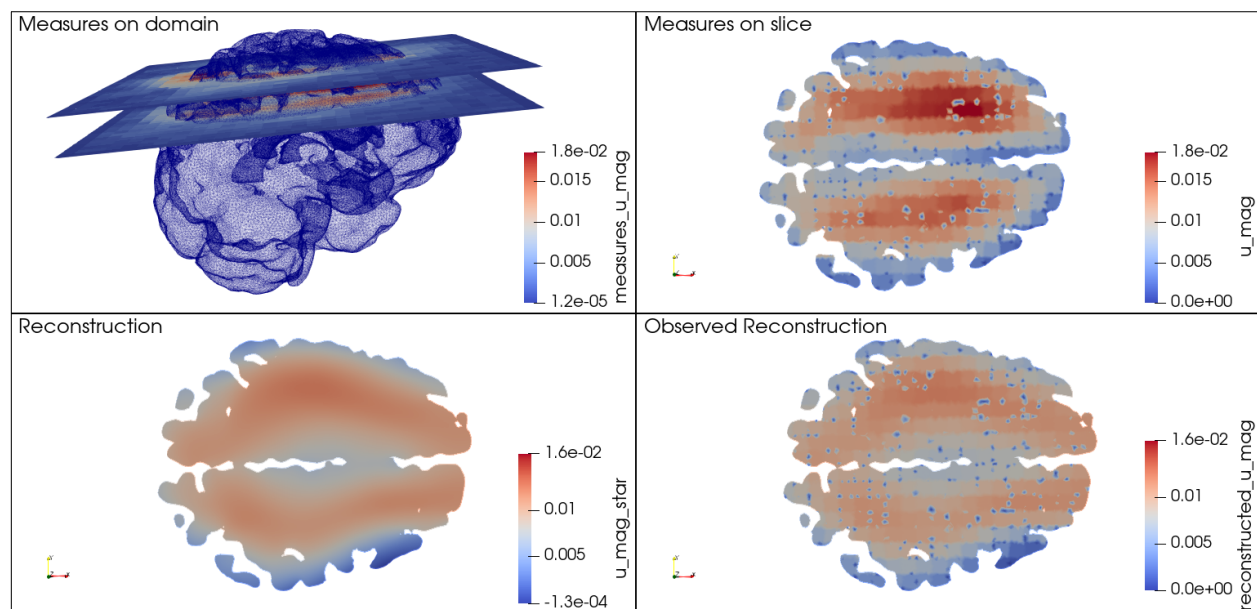


Figura 24: Interpolación experimental del campo utilizando las *slices* 6 y 8,  $n = 15$ : posición de la *slice*, mediciones en la *slice* 7, campo sintético y campo reconstruido.

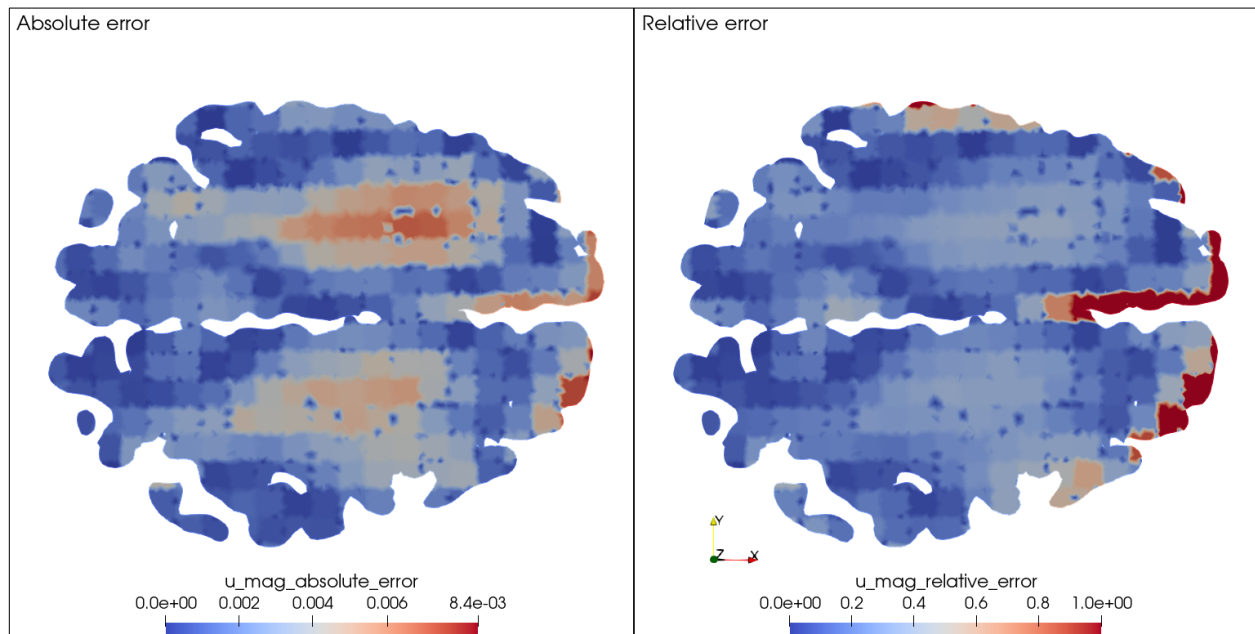


Figura 25: Error absoluto y relativo por voxel para la interpolación experimental desde las *slices* 6 y 8 hacia la *slice* 7,  $n = 15$ .

## 7.6. Implementación de OMP

Como se mencionó en la Sección 6.6, se propone una nueva forma de ROM basada en localización guiada por datos, que consiste en el cálculo de modos específicos asociados a cada *slice* de mediciones, buscando dentro de la manifold aquellas simulaciones más similares a los datos experimentales, minimizando la distancia entre el ROM y el espacio de mediciones.

Para evaluar la capacidad del nuevo método, se calculan modos guiados por datos para cada *slice* variando la cantidad de modos POD (Proper Orthogonal Decomposition) utilizados,  $n = [3, 5, 7, 10, 12]$ , y buscando modos guiados por datos dentro de la manifold de 2048 simulaciones.

Posteriormente, se realizan reconstrucciones y comparaciones sobre la misma *slice* para las *slices* 0–6, excluyendo las superiores debido a su baja observabilidad, como se mencionó en la Sección 7.3. Para cada *slice* se calcula el error relativo global de reconstrucción en función del número total de modos  $n'$ , definido como  $n' = \text{POD}_{\text{modos}} + \text{OMP}_{\text{modos}}$ . Además, para cada *slice* se realiza una comparación entre las distintas bases generadas para cada valor de  $n$ ; los resultados para cada *slice* se presentan en la Figura 26.

## POD vs OMP comparison

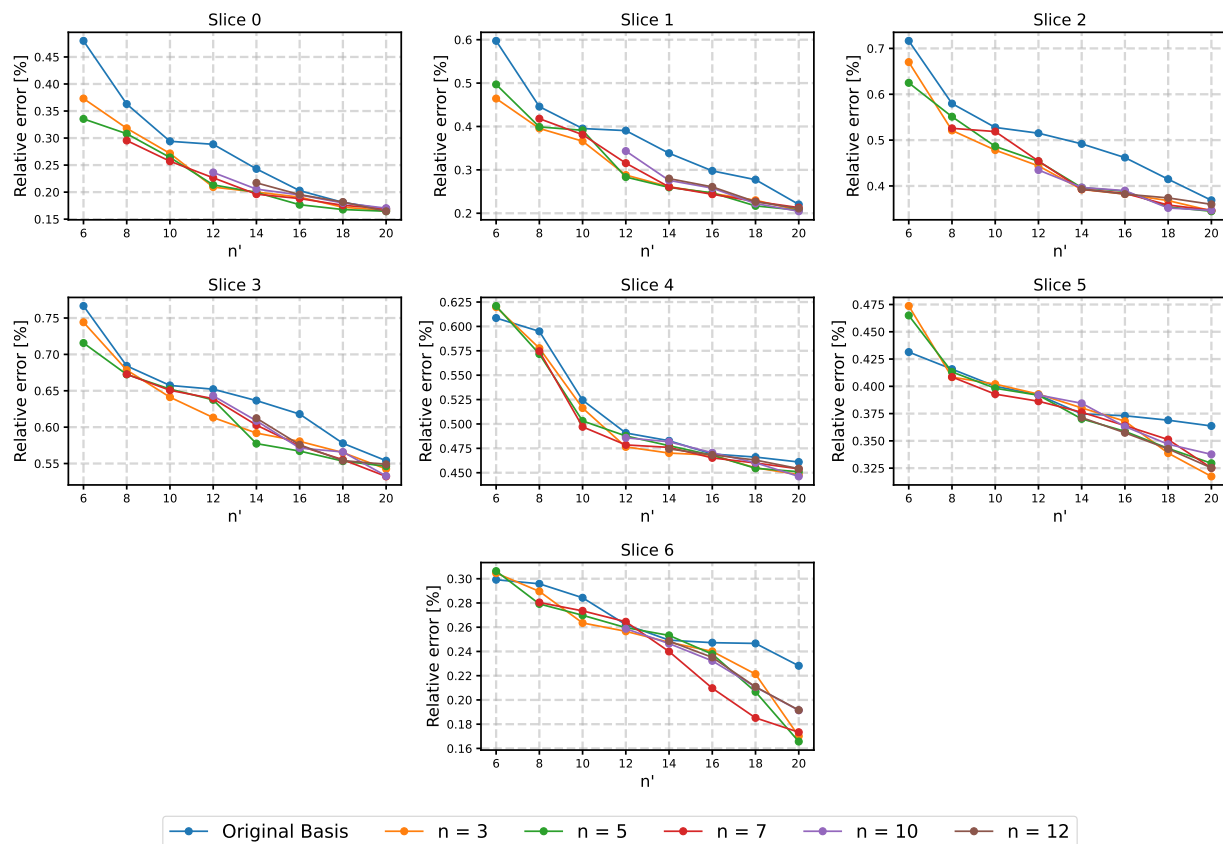


Figura 26: Comparativa de error de reconstrucción entre base POD y base OMP, bases construidas con distintos valores de modos originales utilizados ( $n$ ), con azul curva sin la implementación de OMP base tradicional.

Se observa que, para cada *slice*, se logra una reducción del error relativo y, por lo tanto, una disminución del número de modos necesarios para alcanzar un error dado. Las *slices* 2, 3, 4 siguen siendo las más problemáticas debido a la presencia de los ventrículos dentro de la región de medición, alcanzando valores mínimos más altos de error relativo; sin embargo, el algoritmo OMP produce igualmente una mejora, mostrando una capacidad global superior al método tradicional basado únicamente en POD.

## 8. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un flujo de trabajo completo para la reconstrucción de campos de desplazamiento a partir de mediciones de elastografía por resonancia magnética (MRE) *in vivo*, combinando un modelo poro-elástico en el dominio de la frecuencia, una manifold numérica tridimensional y un modelo de orden reducido formulado en el espacio de modos POD.

La formulación del modelo físico de elastografía cerebral, basada en las ecuaciones de Biot, permitió describir de manera consistente la interacción entre el campo de desplazamiento y el campo de presión bajo excitación armónica. El uso de parámetros mecánicos dentro de rangos fisiológicamente plausibles, junto con condiciones de borde que representan el examen de MRE, dio lugar a campos que reproducen cualitativamente la propagación de las ondas observadas en los datos experimentales.

A partir de este modelo se construyó una base numérica tridimensional mediante 2048 simulaciones directas, variando módulo de Young, permeabilidad, razón de Poisson y frecuencia. La aplicación de POD–SVD sobre la matriz de *snapshots* mostró que la mayor parte de la energía se concentra en los primeros 50 modos y que un número de modos en torno a este valor resulta suficiente para describir la manifold con buena fidelidad. El análisis conjunto de los valores singulares, de la energía excluida normalizada  $\hat{\varepsilon}_n$  y de la cota de error a priori  $\hat{\varepsilon}_n/\beta_n$  confirmó que este rango de modos ofrece un equilibrio adecuado entre riqueza de la base y condicionamiento del problema inverso.

Sobre la base reducida se planteó e implementó el problema inverso de reconstrucción, utilizando un modelo de observación que conecta los modos POD con las mediciones de MRE y analizando la observabilidad de los modos reducidos a través del parámetro  $\beta_n$ . El estudio de  $\hat{\varepsilon}_n/\beta_n$  para cada *slice* permitió cuantificar de manera sistemática la calidad de las mediciones: las *slices* inferiores (0–2) presentaron las cotas teóricas de error más bajas, mientras que las superiores mostraron valores más altos. Además, la incorporación de modos guiados por datos mediante OMP demostró ser eficaz para reducir el error con un número total menor de modos, permitiendo reducir el costo computacional de la reconstrucción.

Finalmente, la evaluación del desempeño del *pipeline* de reconstrucción demostró que el enfoque propuesto es capaz de recuperar campos sintéticos con errores relativos en norma 2 del orden de 0,0001 %, lo que valida la consistencia interna del método. En el caso de mediciones reales *in vivo*, se obtuvieron reconstrucciones con errores relativos en norma 2 del orden del 15–20 % al comparar en la misma *slice*, y del orden del 27 % al interpolar entre *slices*. Para un número típico de  $n \approx 50$  modos, las *slices* con mejor desempeño (0, 1, 6, 7, 8 y 9) presentan errores entre aproximadamente 5 % y 12 %; las *slices* de desempeño intermedio (2 y 5) se sitúan en torno al 15–25 %; mientras que las *slices* más desfavorables (3 y 4) alcanzan errores del orden del 30–40 %, en concordancia en parte, con el análisis de observabilidad y de la cota de error *a priori*, pero además se concluye que aquellas que involucran los ventrículos dentro del dominio poseen un aumento en el error.

## Referencias

- [1] A. Bunevicius, K. Schregel, R. Sinkus, A. Golby, and S. Patz. Review: Mr elastography of brain tumors. *NeuroImage: Clinical*, 25:102109, 2020.
  - [2] Kihan Park, Gabrielle Lonsberry, Marla Gearing, Allan Levey, and Jaydev Desai. Viscoelastic properties of human autopsy brain tissues as biomarkers for alzheimer’s diseases. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, PP:1–1, 10 2018. doi: 10.1109/TBME.2018.2878555.
  - [3] Kaspar-Josche Streitberger, Ingolf Sack, Dagmar Krefting, Caspar Püller, Jürgen Braun, Friedemann Paul, and Jens Wuerfel. Brain viscoelasticity alteration in chronic-progressive multiple sclerosis. *PLOS ONE*, 7(1):e29888, 2012. doi: 10.1371/journal.pone.0029888. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0029888>.
  - [4] Ingolf Sack, Bernd Beierbach, Jens Wuerfel, Dieter Klatt, Uwe Hamhaber, Sebastian Papazoglou, Peter Martus, and Jürgen Braun. The impact of aging and gender on brain viscoelasticity. *NeuroImage*, 46(3):652–657, 2009. ISSN 1053-8119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2009.02.040>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811909002237>.
  - [5] R. Muthupillai, D. J. Lomas, P. J. Rossman, J. F. Greenleaf, A. Manduca, and R. L. Ehman. Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves. *Science*, 269:1854–1857, 1995.
  - [6] S. Majumdar and D. Klatt. Longitudinal study of sub-regional cerebral viscoelastic properties of 5xfad alzheimer’s disease mice using multifrequency mr elastography. *Magnetic Resonance in Medicine*, 86(1):405–414, 2021. doi: 10.1002/mrm.28709. Epub 2021 Feb 18.
  - [7] Mona ElSheikh, Amir Arani, Alexander Perry, Bradley F. Boeve, Fredric B. Meyer, Rodolfo Savica, Richard L. Ehman, John Huston, and John Huston III. Mr elastography demonstrates unique regional brain stiffness patterns in dementias. *American Journal of Roentgenology*, 209(2):403–408, 2017. doi: 10.2214/AJR.16.17455. Epub 2017 Jun 1.
  - [8] Y. Maday, A. T. Patera, J. D. Penn, and M. Yano. A parameterized-background data-weak approach to variational data assimilation: formulation, analysis, and application to acoustics. *Numerical Methods in Engineering*, 102(5):933–965, 2014.
  - [9] F. Galarce et al. Displacement and pressure reconstruction from magnetic resonance elastography images: Application to an in silico brain model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 16(2):996–1027, June 2023.
  - [10] F. G. Marin. *Inverse problems in hemodynamics. Fast estimation of blood flows from medical data*. PhD thesis, Inria Paris; Sorbonne Université; Laboratoire Jacques-Louis Lions, April 2021.
  - [11] C. Cárcamo, A. Caiazzo, F. Galarce, and J. Mura. A stabilized total pressure-formulation of the biot’s poroelasticity equations in frequency domain: Numerical analy-
-

- sis and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 432, 2024. doi: 10.1016/j.cma.2024.117353.
- [12] Marta Rosa-Grilo, Hira R. Chughtai, Daniel L. Thomas, Daniel C. Alexander, Martyn Beament, Cornelia R. S. Belder, H. Richard Jäger, Eileen A. Lim, Nicholas Magill, Dominic Mallon, Jonathan M. Nicholas, Oliver Nicholas, Florian Urban, Geoffrey J. M. Parker, Frederik Barkhof, Catherine J. Mummery, and Nick C. Fox. Ultra-fast mri for dementia diagnosis and treatment eligibility: A prospective study. *Alzheimer's & Dementia*, 21(6):e70341, 2025. doi: 10.1002/alz.70341.
- [13] Doris Leithner, Linda Moy, Elizabeth A. Morris, Mark A. Marino, Thomas H. Helbich, and Katja Pinker. Abbreviated mri of the breast: Does it provide value? *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 49(7):e85–e100, 2019. doi: 10.1002/jmri.26291. Epub 2018 Sep 8.
- [14] Armando Manduca, Philip J. Bayly, Richard L. Ehman, Aparna Kolipaka, Trent J. Royston, Ingolf Sack, Ralph Sinkus, and Bernard E. Van Beers. MR elastography: Principles, guidelines, and terminology. *Magnetic Resonance in Medicine*, 85(5):2377–2390, 2021. doi: 10.1002/mrm.28627. Epub 2020 Dec 9.
- [15] David Fovargue, David Nordsletten, and Ralph Sinkus. Stiffness reconstruction methods for MR elastography. *NMR in Biomedicine*, 31(10):e3935, 2018. doi: 10.1002/nbm.3935. Epub 2018 May 18.
- [16] Ingolf Sack, Birgit Beierbach, Ulf Hamhaber, Dietmar Klatt, and Jürgen Braun. Non-invasive measurement of brain viscoelasticity using magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 21(3):265–271, 2008. doi: 10.1002/nbm.1189.
- [17] Ingolf Sack and Tobias Schaeffter. *Quantification of Biophysical Parameters in Medical Imaging*. 02 2018. ISBN 978-3-319-65923-7. doi: 10.1007/978-3-319-65924-4.
- [18] Gergely Bertalan, Charlotte Klein, Stefanie Schreyer, Barbara Steiner, Bernhard Kreft, Heiko Tzschätzsch, Angela Ariza de Schellenberger, Melina Nieminen-Kelhä, Jürgen Braun, Jing Guo, and Ingolf Sack. Biomechanical properties of the hypoxic and dying brain quantified by magnetic resonance elastography. *Acta Biomaterialia*, 101, 11 2019. doi: 10.1016/j.actbio.2019.11.011.
- [19] Rolf Reiter, Mehrgan Shahryari, Heiko Tzschätzsch, Dieter Klatt, Britta Siegmund, Bernd Hamm, Jürgen Braun, Ingolf Sack, and Patrick Asbach. Spatial heterogeneity of hepatic fibrosis in primary sclerosing cholangitis vs. viral hepatitis assessed by mr elastography. *Scientific Reports*, 11, 05 2021. doi: 10.1038/s41598-021-89372-4.
- [20] Sandra Hetzer, Philipp Birr, Andreas Fehlner, Sebastian Hirsch, Frank Dittmann, Elisabeth Barnhill, Jürgen Braun, and Ingolf Sack. Perfusion alters stiffness of deep gray matter. *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*, 38(1):116–125, 2018. doi: 10.1177/0271678X17691530. Epub 2017 Feb 2.
- [21] Sebastian Hirsch, J. Guo, R. Reiter, E. Schott, C. Büning, R. Somasundaram, Jürgen Braun, Ingolf Sack, and Thomas J. Kröncke. Towards compression-sensitive magnetic
-

- resonance elastography of the liver: sensitivity of harmonic volumetric strain to portal hypertension. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 39(2):298–306, 2014. doi: 10.1002/jmri.24165. Epub 2013 May 6.
- [22] Matthew McGarry, Erich Van Houten, Laila Solamen, Sarah Gordon-Wylie, John Weaver, and Keith Paulsen. Uniqueness of poroelastic and viscoelastic nonlinear inversion MR elastography at low frequencies. *Physics in Medicine and Biology*, 64(7):075006, 2019. doi: 10.1088/1361-6560/ab0a7d.
- [23] Ricardo Leiderman, Paul Barbone, and Assad Oberai. Coupling between elastic strain and interstitial fluid flow: Ramifications for poroelastic imaging. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119:3319–3319, 05 2006. doi: 10.1121/1.4786341.
- [24] Matthew McGarry, Curtis Johnson, Brad Sutton, John Georgiadis, Elijah Van Houten, Adam Pattison, J Weaver, and K Paulsen. Suitability of poroelastic and viscoelastic mechanical models for high and low frequency mr elastography. *Medical Physics*, 42: 947, 02 2015. doi: 10.1118/1.4905048.
- [25] Pablo R. Perriñez, Francis E. Kennedy, Erich E. W. Van Houten, James B. Weaver, and Keith D. Paulsen. Modeling of soft poroelastic tissue in time-harmonic MR elastography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 56(3):598–608, 2009. doi: 10.1109/TBME.2008.2009928. Epub 2008 Dec 2.
- [26] Pablo R. Perriñez, Andrew J. Pattison, Francis E. Kennedy, James B. Weaver, and Keith D. Paulsen. Contrast detection in fluid-saturated media with magnetic resonance poroelastography. *Medical Physics*, 37(7):3518–3526, 2010. doi: 10.1118/1.3443563.
- [27] Likun Tan, Matthew McGarry, Elijah Van Houten, Ming Ji, Ligin Solamen, Wei Zeng, John Weaver, and Keith Paulsen. A numerical framework for interstitial fluid pressure imaging in poroelastic mre. *PLOS ONE*, 12, 06 2017. doi: 10.1371/journal.pone.0178521.
- [28] David Fovargue, Michele Fiorito, Andrei Capilnasiu, David Nordsletten, J. Lee, and Ralph Sinkus. Towards noninvasive estimation of tumour pressure by utilising MR elastography and nonlinear biomechanical models: a simulation and phantom study. *Scientific Reports*, 10(1):5588, 2020. doi: 10.1038/s41598-020-62367-3. Published 2020 Mar 27.
- [29] Felipe Galarce, Jean-Frédéric Gerbeau, Diego Lombardi, and Olga Mula. Fast reconstruction of 3d blood flows from doppler ultrasound images and reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 375:113559, 2021.
- [30] Felipe Galarce Marin. *Inverse Problems in Hemodynamics: Fast Estimation of Blood Flows from Medical Data*. Ph.d. thesis, INRIA Paris and Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, 2021.
- [31] Felipe Galarce Marin, Diego Lombardi, and Olga Mula. Data estimation with model reduction and shape variability: Application to biomedical problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 44(?):B806–B833, 2022.
- [32] F. Galarce, K. Tabelow, J. Polzehl, C. Papanikas, V. Vavourakis, L. Lilaj, I. Sack,
-

- and A. Caiazzo. Displacement and pressure reconstruction from magnetic resonance elastography images: Application to an in silico brain model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 16(2):996 – 1027, 2023. doi: 10.1137/22M149363X.
- [33] Ricardo Oyarzúa and Ricardo Ruiz-Baier. Locking-free finite element methods for poroelasticity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(5):2951–2973, 2016. doi: 10.1137/15M1050082. URL <https://doi.org/10.1137/15M1050082>.
- [34] Stephen C. Cowin and Stephen B. Doty, editors. *Poroelasticity*, pages 247–288. Springer New York, New York, NY, 2007. ISBN 978-0-387-49985-7. doi: 10.1007/978-0-387-49985-7\_9. URL [https://doi.org/10.1007/978-0-387-49985-7\\_9](https://doi.org/10.1007/978-0-387-49985-7_9).
- [35] NumPy Developers. numpy.linalg.svd. <https://numpy.org/devdocs/reference/generated/numpy.linalg.svd.html>. Accedido: 24 noviembre 2025.
- [36] Inc. The MathWorks. Singular value decomposition (svd). <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/double.svd.html>. Accedido: 24 noviembre 2025.
- [37] Felipe Galarce, Diego R. Rivera, Douglas R.Q. Pacheco, Alfonso Caiazzo, and Ernesto Castillo. A fast food-freezing temperature estimation framework using optimally located sensors. *International Journal of Mechanical Sciences*, 299:110374, 2025. ISSN 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.110374>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740325004606>.
- [38] Home — charite.de. <https://www.charite.de/en/>. [Accessed 27-11-2025].
- [39] F. Galarce. Mad: Multi-physics simulations for engineering and data assimilation. <https://gitlab.com/felipe.galarce.m/mad>, 2024.
-