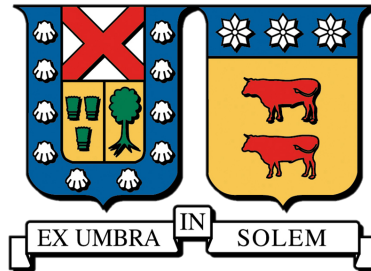


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS, METALURGIA Y MATERIALES
SANTIAGO - CHILE



CUANTIFICACIÓN DEL TAMAÑO DE LA ZONA DE EXTRACCIÓN
PARA DISTINTAS SECUENCIAS EN MINERÍA DE CAVING

Autor: Carlos Joaquín Bocaz Ramírez

Trabajo de titulación presentado como requisito para optar al título de:

Ingeniero Civil de Minas

y el grado académico de:

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica

Profesor Guía: Dr. Sergio Palma Moya
Comisión: Dr. René Gómez Puigpinos
Dr. Gonzalo Nelis Suazo
Dr. Fabián Manriquez León



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título; Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: CUANTIFICACIÓN DEL TAMAÑO DE LA ZONA DE EXTRACCIÓN PARA DISTINTAS SECUENCIAS EN MINERÍA DE CAVING

Nombre del candidato(a): Carlos Joaquín Bocaz Ramírez

Carrera / Grado: Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica

Campus: Santiago San Joaquín ; **Departamento:** Ingeniería de Minas, Metalurgia y Materiales

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Sergio Palma Moya, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

6 meses; 12 meses; 2 años; 3 años; 5 años; 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 28/07/2025

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 28/07/2025

Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

*Para Alejandra, mi madre.
Todo esto es gracias a ti.*

Resumen

La geometría de la zona de extracción (EZ) gobierna la eficiencia, la recuperación y la dilución en minería por hundimiento, pero su caracterización cuantitativa sigue siendo limitada bajo condiciones operacionales y geomecánicas complejas. Este trabajo integra experimentación física, modelación por elementos finitos y análisis dimensional para predecir su evolución según la secuencia de apertura, el diámetro medio de partícula (D_{50}) y el ángulo de fricción interna (φ). El objetivo central fue cuantificar la IEZ y proponer un modelo adimensional que anticipe su ancho bajo distintas condiciones operativas.

Se diseñó una maqueta a escala 1:267 que simula un *block caving* de 200 m de alto con ocho puntos de extracción secuencial y partículas de cuarzo; el sistema automatizado, procesado en MATLAB, se obtuvieron coeficientes de variación menores al 5 % en la medición del ancho de la zona de movimiento, evaluados a partir de 30 repeticiones por configuración. En paralelo, se implementó en COMSOL MULTIPHYSICS —mediante el Método de Elementos Finitos (FEM)— la formulación de Morales et al. (2024) para simular distintas secuencias y, a través de un barrido paramétrico sobre el D_{50} y φ , derivar relaciones adimensionales que predican el ancho de la IEZ. El modelo resultante alcanzó un $R^2 = 0.9347$. Simulaciones complementarias en EDEM respaldaron los fenómenos observados.

Los resultados muestran que la activación progresiva de puntos reduce el ancho un 20 % e incrementa la altura un 25 % para el caso base homólogo al de Leyton. Un D_{50} mayor aumenta en 35 % el ancho inicial (reduciéndose al 2 % tras 20 aperturas), mientras que incrementar φ de 0.174 a 0.474 rad (10° a 27°) reduce el ancho un 25 %, estabilizado desde la décima apertura. La sobreextracción localizada acelera la expansión lateral inicial, mejorando la interacción del flujo. El modelo matemático incorpora grupos adimensionales que capturan estas variaciones, destacando al número de puntos de extracción como la variable más influyente. Además, se observó que al aumentar el número de puntos de extracción activos, el ancho adimensional W^* disminuyó un 63 % en ensayos físicos, 20 % en FEM y 14 % en DEM, debido a que las simulaciones representan solo la zona estrictamente extraída. Los resultados evidencian que abrir más puntos en etapas tempranas promueve una mayor conectividad entre zonas activas y una expansión más uniforme del flujo, lo que favorece una recuperación más eficiente. El modelo predictivo desarrollado permite anticipar la evolución geométrica de la IEZ bajo distintas condiciones operacionales y guiar decisiones sobre la secuencia y el ritmo de apertura de puntos, entregando criterios cuantitativos para optimizar el diseño de mallas, mejorar la recuperación y aumentar la eficiencia en operaciones de hundimiento.

Abstract

The geometry of the extraction zone (EZ) governs efficiency, recovery, and dilution in caving mining, yet its quantitative characterization remains limited under complex operational and geomechanical conditions. This work integrates physical experimentation, finite element modeling, and dimensional analysis to predict its evolution as a function of draw sequence, mean particle size (D_{50}), and internal friction angle (φ). The main objective was to quantify the interaction extraction zone (IEZ) and propose a dimensionless model capable of predicting its width under different operational conditions.

A 1:267 scale physical model simulating a 200 m high *block caving* layout with eight sequential drawpoints and quartz particles was designed. The automated system, processed in MATLAB, achieved coefficients of variation below 5 % in measuring the width of the movement zone, based on 30 repetitions per configuration. In parallel, the finite element formulation of Morales et al. (2024) was implemented in COMSOL MULTIPHYSICS to simulate different draw sequences and, through a parametric sweep over D_{50} and φ , derive dimensionless relationships that predict the IEZ width. The resulting model reached $R^2 = 0.9347$. Complementary EDEM simulations supported the observed phenomena.

Results show that progressive drawpoint activation reduces the width by 20 % and increases the height by 25 % for the base case analogous to that of Leyton. A larger D_{50} increases the initial width by 35 % (decreasing to 2 % after 20 drawpoints), whereas increasing φ from 0.174 to 0.474 rad (10° to 27°) decreases the width by 25 %, stabilizing after the tenth draw. Localized overdrawn accelerates initial lateral expansion, improving flow interaction. The mathematical model incorporates dimensionless groups capturing these variations, highlighting the number of active drawpoints as the most influential variable.

Moreover, increasing the number of active drawpoints led to a 63 % reduction in the dimensionless width W^* in physical tests, 20 % in FEM, and 14 % in DEM, given that numerical simulations represent only the strictly extracted region. The findings demonstrate that opening more drawpoints in early stages promotes greater connectivity among active zones and a more uniform flow expansion, resulting in more efficient recovery. The predictive model developed enables anticipating the geometric evolution of the IEZ under different operational conditions and supports decision-making on drawpoint sequence and rate, providing quantitative criteria to optimize drawbell layout, enhance recovery, and improve efficiency in caving operations.

Tabla de contenidos

1. Introducción	7
1.1. Problemática	7
1.2. Motivación	8
1.3. Objetivos	9
1.3.1. Objetivo general	9
1.3.2. Objetivos específicos	9
1.4. Alcances y limitaciones	10
1.4.1. Alcances	10
1.4.2. Limitaciones	10
1.5. Definiciones	11
2. Antecedentes	12
2.1. Minería subterránea en Chile	12
2.2. Métodos subterráneos	13
2.2.1. Block caving	13
2.2.2. Panel caving	13
2.2.3. Diseño de mallas de extracción	14
2.3. Flujo gravitacional	17
2.3.1. Evolución del estudio	17
2.4. Modelos analíticos	22
2.4.1. Modelo de Morales, Vivanco y Palma (2024)	23
2.5. Método de elementos finitos	27
2.5.1. COMSOL Multiphysics	28
3. Metodología	29
3.1. Metodología computacional	30
3.1.1. Diseño computacional	30
3.1.2. Parámetros	31

3.1.3.	Configuración	32
3.1.4.	Simulaciones	33
3.1.5.	Secuencias	35
3.1.6.	Barrido paramétrico	36
3.2.	Metodología experimental	37
3.2.1.	Diseño experimental	37
3.2.2.	Caracterización del mineral	38
3.2.3.	Secuencias	39
3.2.4.	Sistema de extracción	40
3.2.5.	Análisis experimental	41
3.2.6.	Estadísticas	41
4.	Resultados	42
4.1.	Secuencias	42
4.1.1.	Caso 1: Apertura secuencial	42
4.1.2.	Caso 2: Apertura con 2 sobreextracciones	46
4.1.3.	Caso 3: Apertura con 4 sobreextracciones	49
4.2.	Barrido paramétrico	52
4.2.1.	Variación D_{50}	52
4.2.2.	Variación φ	56
4.3.	Experimentos	62
4.3.1.	Apertura secuencial	62
4.3.2.	Análisis estadístico	64
4.4.	Comparación con simulaciones numéricas	65
4.5.	Modelo matemático	70
5.	Conclusiones	72
5.1.	Conclusiones	72
5.2.	Recomendaciones	74
A.	Anexos	75
A.1.	Tablas complementarias	75
A.2.	Evolución de la forma de la zona de extracción en EDEM	77

Índice de figuras

2.1. Configuración Triangular Traslapada Total. Fuente: Cavieres (2011).	15
2.2. Configuración Triangular Tangente. Fuente: Cavieres (2011).	15
2.3. Configuración Mixta Tangente. Fuente: Cavieres (2011).	16
2.4. Planta de Malla de Extracción Tipo Teniente. Fuente: Cavieres (2011).	16
2.5. Modelo típico con arena que muestra el elipsoide de extracción. Fuente: Kvapil (1965).	17
2.6. Secuencia de extracción en un modelo físico de flujo gravitacional. Fuente: Kvapil (2008).	18
2.7. Ábaco de Laubscher para predecir espaciamiento. Fuente: Laubscher (1994).	19
2.8. Ábaco de Laubscher para predecir la altura de interacción. Fuente: Laubscher (1994).	19
2.9. Evolución de la altura H_{IEZ} (a) y el ancho W_{IEZ} (b) en función de la masa extraída, para configuraciones de extracción aislada y secuencial.	21
2.10. (a) Volumen representativo de partículas movilizadas. (b) Fuerzas actuantes.	23
2.11. Comparación de zonas de extracción para una apertura.	26
2.12. Comparación de zonas de extracción para dos aperturas separadas por distintas distancias.	26
2.13. Discretización: malla y esquema explicativo de elementos y nodos.	27
2.14. Campo de presión obtenido en una simulación de flujo granular en COMSOL MULTIPHYSICS.	28
3.1. Representación esquemática de 22 bateas y respectivos puntos de extracción.	30
3.2. Condiciones de frontera en la modelación FEM.	33
3.3. Medición W_{EZ}	34
3.4. Medición H_{EZ}	34
3.5. Esquemas conceptuales de la apertura secuencial de puntos de extracción.	35
3.6. Esquemas conceptuales del caso con sobreextracción en 2 puntos.	36
3.7. Esquemas conceptuales del caso con sobreextracción en 4 puntos.	36

3.8. Montaje del modelo experimental.	37
3.9. Curva granulométrica.	39
3.10. Sistema de extracción automatizado.	40
4.1. Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para tiraje secuencial	43
4.2. Ancho en función del número de puntos de extracción - Tiraje Secuencial . .	44
4.3. Comparación esquemática del ancho de la zona de extracción entre simulacio- nes DEM (a) y FEM (b).	45
4.4. Altura en función del número de puntos de extracción - Tiraje Secuencial . .	45
4.5. Comparación esquemática de la altura de la zona de extracción entre simula- ciones DEM (a) y FEM (b).	46
4.6. Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para 2 sobre- extracciones.	47
4.7. Ancho en función del número de puntos de extracción - 2 sobreextracciones.	48
4.8. Altura en función del número de puntos de extracción - 2 sobreextracciones.	48
4.9. Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para 4 sobre- extracciones.	50
4.10. Ancho en función del número de puntos de extracción - 4 sobreextracciones .	51
4.11. Altura en función del número de puntos de extracción - 4 sobreextracciones .	51
4.12. Impacto del D_{50} en el ancho - Tiraje Secuencial.	53
4.13. Impacto del D_{50} en la altura - Tiraje Secuencial.	53
4.14. Impacto del D_{50} en el ancho - Dos sobreextracciones.	54
4.15. Impacto del D_{50} en la altura - Dos sobreextracciones.	54
4.16. Impacto del D_{50} en el ancho - Cuatro sobreextracciones.	55
4.17. Impacto del D_{50} en la altura - Cuatro sobreextracciones.	55
4.18. Impacto del φ en el ancho - Tiraje Secuencial.	56
4.19. Impacto del φ en la altura - Tiraje Secuencial.	57
4.20. Impacto del φ en el ancho - Dos sobreextracciones.	57
4.21. Impacto del φ en la altura - Dos sobreextracciones.	58
4.22. Impacto del φ en el ancho - Cuatro sobreextracciones.	58
4.23. Impacto del φ en la altura - Cuatro sobreextracciones.	59
4.24. W_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores de D_{50}	60
4.25. W_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores del ángulo de fricción φ .	60
4.26. H_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores de D_{50}	61
4.27. H_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores del ángulo de fricción φ .	61

4.28. Comparación de la imagen binarizada y la delimitación de la región de medición para extracción de 4 puntos.	62
4.29. W_{IMZ} en función del número de puntos de extracción	63
4.30. W_{IMZ} para diferentes tiempos de apertura.	63
4.31. Comparación del ancho adimensional W^*	66
4.32. Evolución del ancho en experimentos físicos.	66
4.33. Evolución del ancho en simulaciones FEM (COMSOL).	67
4.34. Evolución del ancho en simulaciones DEM (EDEM).	67
4.35. Comparación entre resultados experimentales y simulaciones promediadas del ancho adimensional.	68
4.36. Evolución de R_{exp} en función del número de puntos de extracción.	69
4.37. Relación entre el parámetro compuesto χ y la razón adimensional.	71
A.1. Zona de extracción para apertura 1 en EDEM.	77
A.2. Zona de extracción para apertura 2 en EDEM.	78
A.3. Zona de extracción para apertura 3 en EDEM.	78
A.4. Zona de extracción para apertura 4 en EDEM.	78
A.5. Zona de extracción para apertura 5 en EDEM.	79
A.6. Zona de extracción para apertura 6 en EDEM.	79
A.7. Zona de extracción para apertura 7 en EDEM.	79
A.8. Zona de extracción para apertura 8 en EDEM.	80

Índice de tablas

3.1. Propiedades físicas y mecánicas del material utilizado por Leyton y Palma (2024).	31
3.2. Propiedades utilizadas en la simulación FEM.	32
3.3. Distribución granulométrica del cuarzo.	38
4.1. Estadísticas descriptivas de la MZ.	64
4.2. Estadísticas descriptivas de la IMZ.	65
A.1. Correspondencia entre tiempo y masa extraída.	75
A.2. Resultados de iteraciones con diferentes combinaciones de u_0 y Y_0	76
A.3. Propiedades de material utilizadas en las simulaciones de EDEM.	76
A.4. Distribución granulométrica utilizada en las simulaciones de EDEM.	77

1. Introducción

1.1. Problemática

En minería por hundimiento, la determinación de la zona de extracción (*Extraction Zone*, EZ), entendida como el volumen de material que se moviliza gravitacionalmente hacia los puntos de extracción, requiere ser cuantificada con precisión. Su geometría depende de múltiples factores, como el espaciamiento entre puntos, la forma de las bateas, la fragmentación del macizo, la altura de socavación y la secuencia de apertura (Gómez y Labbé 2019).

Una estimación inadecuada de esta zona puede derivar en errores con consecuencias técnicas y económicas de gran magnitud. Un espaciamiento excesivo entre puntos reduce la recuperación del mineral, al dejar zonas sin movilizar. Por otro lado, una malla demasiado densa incrementa los costos operacionales y reduce el tamaño de los pilares entre puntos de extracción, lo que puede comprometer la estabilidad estructural del macizo rocoso al concentrar esfuerzos y facilitar colapsos prematuros (Cavieres 2011). Además, configuraciones deficientes en la altura de socavación o en el nivel de producción pueden generar acumulaciones de esfuerzos que deterioran el control geomecánico del sector hundido (Hormazabal et al. 2018; Sainsbury y Loring 2013).

Desde el punto de vista operativo, Rodríguez et al. (2020) destaca que el diseño y ejecución de la voladura de bateas influye directamente en la habilitación oportuna de los puntos de extracción. A esto se suma lo señalado por Garcés et al. (2020), quien advierte que eventos como colgaduras o la necesidad de tronadura secundaria reducen la disponibilidad de los puntos, afectando la continuidad del proceso.

En paralelo, diversos estudios experimentales han evidenciado que la evolución geométrica de la zona de extracción está fuertemente condicionada por variables como la fragmentación, la humedad del material, el confinamiento y el espaciamiento entre puntos (Castro et al. 2022; Castro 2021).

Particularmente, Leyton y Palma (2024) demuestran que la geometría de la zona de extracción se ve alterada al operar múltiples puntos simultáneamente, manifestando deformaciones, inclinaciones y cambios en su esbeltez.

En síntesis, sin una cuantificación robusta y contextualizada de la zona de extracción, el diseño carece de fundamentos técnicos para proyectar recuperación, eficiencia y estabilidad, lo que puede comprometer tanto la continuidad operativa como el valor económico del proyecto.

1.2. Motivación

El diseño de mallas de extracción en minería por hundimiento es un proceso crítico que influye directamente en la recuperación de mineral, el control de la dilución y la estabilidad del macizo rocoso. En este contexto, la EZ cumple un rol central, ya que su geometría, evolución y grado de interacción entre puntos determinan el comportamiento del flujo gravitacional y, por tanto, la eficiencia global del sistema.

En operaciones a gran escala, caracterizadas por yacimientos profundos y condiciones geotécnicas complejas, una planificación adecuada del espaciamiento y disposición de los puntos de extracción exige comprender en detalle cómo varía la EZ bajo distintos esquemas operacionales. La ausencia de esta información puede derivar en errores de diseño que afecten la recuperación, aumenten la dilución o generen zonas de estancamiento del flujo.

Diversas investigaciones respaldan esta necesidad. Gómez y Labbé (2019) subraya que, a medida que las operaciones se desarrollan en contextos más profundos y desafiantes, el diseño de niveles de socavación y extracción debe adaptarse a nuevas dinámicas de propagación del colapso y fragmentación. En la misma línea, Castro et al. (2022) ha realizado ensayos físicos y simulaciones que permiten caracterizar fenómenos como la fragmentación secundaria, la migración de partículas finas y la redistribución de esfuerzos, ofreciendo datos fundamentales para la calibración de modelos numéricos.

Por su parte, Cumming-Potvin et al. (2018) demuestra que modelos numéricos simplificados pueden reproducir con buena precisión los patrones de fractura observados en modelos físicos de hundimiento, mientras que Elmo et al. (2022) destaca el valor de los modelos conceptuales para explorar escenarios operacionales sin recurrir a grandes recursos computacionales.

En este contexto, la motivación de este estudio radica en aplicar simulaciones computacionales para analizar el comportamiento de la EZ bajo distintas configuraciones operacionales. El objetivo es generar lineamientos técnicos que orienten el diseño de mallas más eficientes, seguras y adaptadas a las condiciones reales de operación.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Cuantificar las dimensiones de la zona de extracción para distintas secuencias operacionales y parámetros geomecánicos mediante experimentos de laboratorio y simulaciones computacionales.

1.3.2. Objetivos específicos

- Simular el flujo gravitacional de materiales granulares en medios continuos mediante un modelo implementado en COMSOL MULTIPHYSICS, basado en la formulación propuesta por Morales et al. (2024), para caracterizar la evolución de la zona de extracción bajo distintas secuencias de apertura.
- Realizar ensayos experimentales a escala de laboratorio que permitan observar la geometría de la zona de extracción en condiciones controladas, generando datos cuantitativos para su análisis comparativo.
- Corroborar la validez del fenómeno mediante simulaciones en EDEM, contrastando sus resultados con los obtenidos en COMSOL y en el laboratorio, para fortalecer la consistencia del análisis multiescala.
- Desarrollar un modelo matemático adimensional que relacione las dimensiones de la zona de extracción con variables operacionales y geomecánicas, a partir de los resultados obtenidos en el barrido paramétrico numérico en COMSOL MULTIPHYSICS.

1.4. Alcances y limitaciones

1.4.1. Alcances

- **Modelo numérico bidimensional:** Se representa el flujo de material granular en un corte transversal de una mina subterránea, permitiendo el seguimiento de la zona de hundimiento y su geometría evolutiva simplificada.
- **Validación experimental a escala reducida:** Se construye y ensaya en una maqueta física con bateas y puntos de extracción impresos en 3D, bajo un tiraje secuencial, para medir de forma directa la morfología y el comportamiento dinámico de la EZ.
- **Variables de estudio seleccionadas:** Se examina el efecto del diámetro medio de partícula, el ángulo de fricción interna y las secuencias de apertura (incluyendo sobreextracciones puntuales). De esta forma, se abarcan tanto factores de diseño como propiedades internas del medio granular.

1.4.2. Limitaciones

- **Simplificación geométrica y de escala:** La aproximación 2D y los ensayos en maqueta no reproducen por completo la complejidad tridimensional ni los esfuerzos profundos del macizo rocoso en escenarios reales de gran escala. Tampoco se abordan posibles heterogeneidades relevantes a profundidades mayores.
- **Propiedades homogéneas del medio:** Se asume que los parámetros mecánicos permanecen constantes y uniformes, sin considerar discontinuidades, fisuras ni procesos de fracturación progresiva que podrían modificar el flujo gravitacional.
- **Validación restringida a laboratorio y datos DEM:** La comparación de resultados se basa en experimentos controlados y estudios previos, sin incluir mediciones *in situ* en operaciones mineras a gran escala.
- **Ausencia de representación del proceso de caving:** El modelo considera que el material inicia previamente fragmentado, sin representar explícitamente el proceso de colapso y generación de la fragmentación propia del *caving*, lo que limita la interpretación del comportamiento inicial.

1.5. Definiciones

Término	Descripción
IEZ	Zona de Extracción Aislada (<i>Isolated Extraction Zone</i>).
IMZ	Zona de Movimiento Aislada (<i>Isolated Movement Zone</i>).
EZ	Zona de Extracción (<i>Extraction Zone</i>).
MZ	Zona de Movimiento (<i>Movement Zone</i>).
W_{IEZ}	Ancho de la zona de extracción aislada.
H_{IEZ}	Altura de la zona de extracción aislada.
W_{EZ}	Ancho total de la zona de extracción.
H_{EZ}	Altura de la zona de extracción.
ZDP	Zona de Deformación Preferencial.
R_{exp}	Razón experimental entre el ancho de la IMZ y la IEZ.

2. Antecedentes

2.1. Minería subterránea en Chile

Chile cuenta con una industria minera altamente desarrollada, que representa un pilar fundamental de su economía, aportando un 14.6 % al producto interno bruto, principalmente a través de la minería del cobre (Cochilco 2024a). Con una participación del 24.7 % en la producción mundial de este mineral, el país mantiene una posición de liderazgo global en el sector (Cochilco 2024b).

Sin embargo, el agotamiento progresivo de los yacimientos a cielo abierto ha generado una transición estratégica hacia la minería subterránea. En este contexto, proyectos como Chuquicamata Subterránea y la expansión de El Teniente reflejan el avance hacia operaciones a mayor profundidad, las cuales enfrentan condiciones geotécnicas más complejas, caracterizadas por mayores esfuerzos *in-situ*, litologías heterogéneas y ambientes operacionales más exigentes (Verzani et al. 2014).

Frente a estos desafíos, métodos como el *panel caving* y el *block caving* han demostrado ser soluciones efectivas para la explotación de yacimientos masivos de baja ley. Estos métodos permiten una extracción continua y altamente eficiente, aprovechando el colapso gravitacional del macizo, y se distinguen por ofrecer altas tasas de recuperación con menores costos por tonelada extraída (Gómez y Labbé 2019; Castro 2021; Brady y E. T. Brown 2006).

Según proyecciones recientes, se estima que la producción subterránea de cobre en Chile crecerá un 51.6 % entre 2023 y 2034 (Cochilco 2024b), impulsada por el desarrollo de nuevas tecnologías, mejoras en las prácticas de diseño y avances en automatización y monitoreo. Estas transformaciones son esenciales para contrarrestar el impacto de la disminución de las leyes minerales, el incremento de los costos operativos y la necesidad de garantizar condiciones de trabajo más seguras.

En este escenario, la cuantificación precisa de la EZ adquiere un rol clave en el diseño de mallas de extracción más eficientes y seguras. Comprender cómo varía su geometría en función de distintas configuraciones operacionales permite optimizar el espaciamiento entre puntos, minimizar zonas de sobre o subextracción, y mejorar la estabilidad del macizo rocoso.

2.2. Métodos subterráneos

2.2.1. Block caving

El *block caving* es un método de minería subterránea orientado a la explotación de yacimientos masivos y de baja ley, que se basa en el colapso controlado del macizo rocoso inducido desde su base mediante perforación y voladura (Laubscher 1994). Una vez iniciada la fracturación en el nivel de hundimiento (*undercut*), el material fragmentado se desmorona progresivamente y desciende por gravedad hacia los puntos de extracción ubicados en el nivel de producción. Desde allí, es derivado hacia el nivel de transporte a través de piques verticales o correas (Marano 1980).

Brady y E. T. Brown (2006) señala que la eficiencia del método depende de la interacción entre los esfuerzos internos del macizo y la fuerza gravitacional, lo que permite mantener un flujo continuo de bloques fragmentados. Este proceso se sostiene mientras la extracción genere el espacio necesario para que el hundimiento se propague hacia niveles superiores.

La operación se organiza en tres niveles: hundimiento, producción y transporte. Un diseño adecuado de estos niveles es esencial para asegurar la continuidad del colapso y evitar interferencias estructurales, especialmente en contextos de gran profundidad. En el contexto chileno, Gómez y Labbé (2019) destacan que este método ha adquirido creciente relevancia como alternativa ante la transición desde minas a cielo abierto, debido a su capacidad de mantener la rentabilidad en condiciones geotécnicas más exigentes. Además, subrayan que su eficiencia está estrechamente ligada al grado de fragmentación y a una correcta planificación del socavamiento y de los niveles operacionales.

Este método permite explotar grandes volúmenes de mineral a bajo costo unitario, aprovechando la gravedad como fuerza motriz. No obstante, su aplicación requiere una planificación cuidadosa del espaciamiento entre bateas, de la secuencia de hundimiento y del ritmo de extracción, con el fin de evitar dilución, controlar la propagación del colapso y asegurar un flujo estable del material (E. Brown 2007).

2.2.2. Panel caving

El *panel caving* es una variante del *block caving* en la que el yacimiento se divide en paneles o sectores independientes, lo que permite un mayor control sobre la propagación del hundimiento. Esta segmentación resulta especialmente útil en yacimientos con geometrías irregulares. El proceso se inicia con la excavación del nivel de hundimiento y la ejecución de perforaciones radiales para generar una cavidad basal que facilite el inicio del colapso (RL Castro y Paredes 2014; Suzuki Morales et al. 2024).

El éxito del método depende de mantener una tasa de extracción controlada, que permita la propagación estable del hundimiento dentro de cada panel, sin comprometer la integridad de las estructuras adyacentes. Este enfoque es adecuado para yacimientos de gran tamaño, ya que aprovecha el peso del macizo rocoso para inducir el colapso del mineral de forma gradual y dirigida. Las propiedades geomecánicas del mineral y de la roca de caja son factores críticos para garantizar la seguridad y eficiencia operativa del proceso (Kvapil 2008).

A diferencia del *block caving*, que involucra el hundimiento de bloques completos del yacimiento, el *panel caving* permite una extracción más segmentada y controlada.

2.2.3. Diseño de mallas de extracción

El diseño de mallas de extracción constituye un componente fundamental en la ingeniería de minas subterráneas que utilizan el método de hundimiento. Su adecuada planificación permite optimizar tanto el desempeño técnico del proceso como su eficiencia económica, lo que ha impulsado el desarrollo de metodologías integradas para su implementación (Cavieres 2011).

Este proceso comienza con la caracterización geomecánica del macizo rocoso, habitualmente mediante sistemas de clasificación como el *Rock Mass Rating* (RMR). Con esta información, y en función de la fragmentación esperada y las dimensiones del punto de extracción, se define la geometría del elipsoide de extracción. Este se determina a partir de los modelos de Kvapil y Laubscher: el ábaco de Laubscher permite estimar el espaciamiento entre puntos de extracción, mientras que su curva de diseño entrega la altura de interacción. A su vez, el diámetro teórico del elipsoide puede ser calculado utilizando la fórmula y relaciones desarrolladas por Kvapil (Laubscher 1994; Kvapil 1982).

Una vez definidos estos parámetros, se analizan distintas configuraciones geométricas para distribuir eficientemente los puntos de extracción sobre el nivel de producción. Esta evaluación se basa en varios criterios técnicos:

- Interacción efectiva entre zonas: grado de superposición entre elipsoides adyacentes, influyendo en la continuidad del flujo de material.
- Sustentación estructural: capacidad de la malla para mantener la estabilidad del macizo rocoso superior.
- Densidad de puntos de extracción: cantidad de puntos por unidad de superficie, directamente influenciada por el espaciamiento.
- Distorsión geométrica: desviaciones respecto de una disposición ideal, lo cual puede afectar la eficiencia operativa y la cobertura uniforme del nivel.

Entre las configuraciones más utilizadas se destacan:

- Triangular traslapada total: disposición donde los elipsoides se superponen completamente, generando un 100 % de interacción entre zonas adyacentes, con alta sustentación estructural.

CONFIGURACION TRIANGULAR TRASLAPADA TOTAL
15.00x17.32m 259.8m²

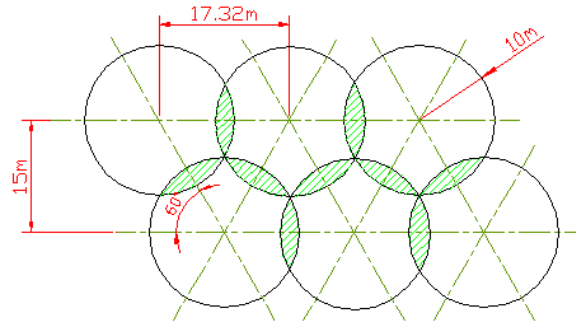


Figura 2.1: Configuración Triangular Traslapada Total. Fuente: Cavieres (2011).

- Triangular tangente: los elipsoides se disponen en contacto sin superposición, alcanzando aproximadamente un 90,7 % de interacción efectiva. Esta configuración presenta menor distorsión geométrica y una implementación más sencilla desde el punto de vista constructivo.

CONFIGURACION TRIANGULAR TANGENTE
17.32x20.00m 346.4m²

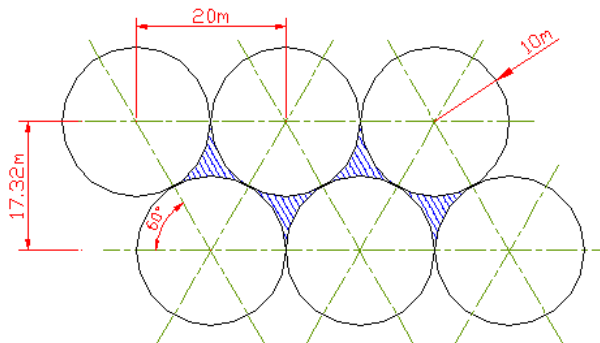


Figura 2.2: Configuración Triangular Tangente. Fuente: Cavieres (2011).

- Mixta tangente: combinación de las configuraciones anteriores, diseñada para adaptarse a restricciones geométricas o geotécnicas, equilibrando eficiencia operacional y criterios de estabilidad.

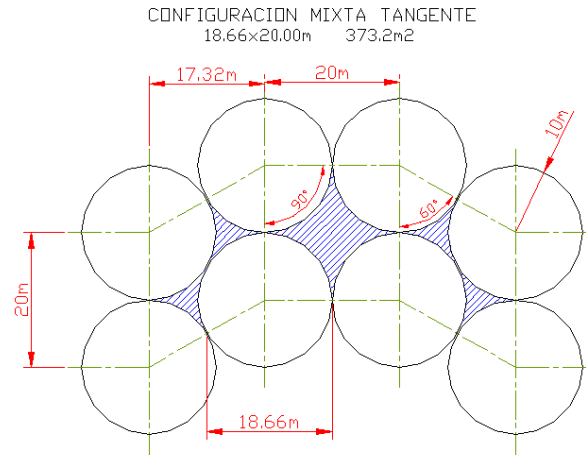


Figura 2.3: Configuración Mixta Tangente. Fuente: Cavieres (2011).

En el contexto chileno, una de las configuraciones más reconocidas es la malla Tipo Teniente, desarrollada y validada en la División El Teniente de Codelco. Esta presenta una disposición triangular regular con calles y zanjas dispuestas a 60° , lo que proporciona una alta cobertura del nivel, buena interacción del flujo y compatibilidad con equipos de carguío mecanizados (Cavieres 2011; Reveco 2014).

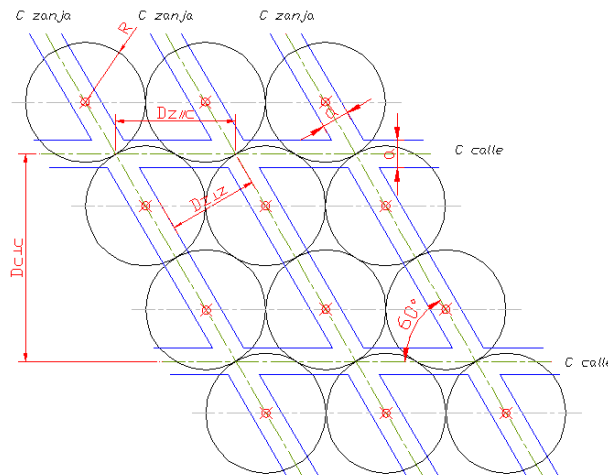


Figura 2.4: Planta de Malla de Extracción Tipo Teniente. Fuente: Cavieres (2011).

Tras seleccionar la configuración óptima, se diseña la malla completa incorporando las labores subterráneas necesarias: bateas, calles y zanjas. La ubicación de estas estructuras se ajusta según el tipo y tamaño de los equipos LHD utilizados, el ángulo entre calles y zanjas, y los radios mínimos de operación, en un proceso conocido como operativización (Reveco 2014).

2.3. Flujo gravitacional

2.3.1. Evolución del estudio

El estudio del flujo gravitacional de materiales granulares en minería tiene sus raíces en los trabajos pioneros de Kvpil (1965), quien abordó el fenómeno desde una perspectiva cuantitativa mediante experimentos en modelos físicos bidimensionales con arena confinada en silos y tolvas. Estas pruebas permitieron observar el comportamiento del material durante la extracción e identificar dos zonas fundamentales: la zona de extracción, correspondiente al volumen efectivamente removido, y la zona de movimiento (*Movement Zone*, MZ), que abarca el volumen afectado por dicha extracción (véase Figura 2.5).

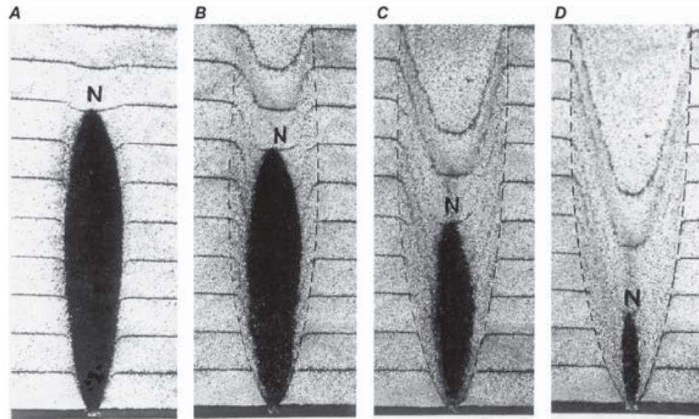


Figura 2.5: Modelo típico con arena que muestra el elipsoide de extracción. Fuente: Kvpil (1965).

Posteriormente, Janelid y Kvpil (1966) caracterizaron ambas zonas como elipsoides de revolución. En los estudios de Kvpil (2008) (véase Figura 2.6), se observa cómo, durante una secuencia de extracción, el área gris representa el elipsoide de extracción, mientras que el contorno indica el elipsoide de movimiento. Se identificó que la proporción entre los semiejes del elipsoide de movimiento tiende a permanecer constante para un mismo material.

Janelid y Kvpil (1966) también determinaron que el volumen de la MZ puede ser hasta quince veces mayor que el de la EZ, y que su altura puede llegar a ser 2.5 veces superior. Más adelante, Janelid (1972) validó estos resultados a escala industrial, observando que una mayor fricción interna en la roca fragmentada amplifica la zona de movimiento.

En la década de 1980, Marano (1980) y Heslop (1981) extendieron estos ensayos a modelos tridimensionales con múltiples puntos de extracción regularmente distribuidos. Concluyeron que, si el espaciamiento entre puntos coincide con el ancho de la MZ, el flujo se mantiene estable al operar todos los puntos simultáneamente.

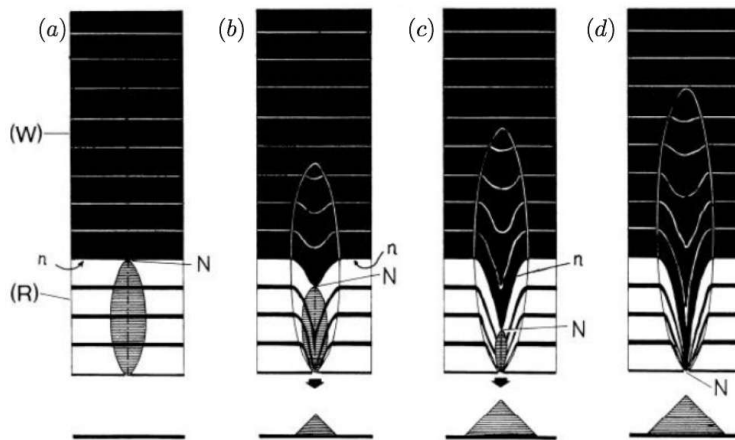


Figura 2.6: Secuencia de extracción en un modelo físico de flujo gravitacional. Fuente: Kvapil (2008).

Peters (1984) desarrolló un modelo bidimensional a gran escala utilizando grava de distintos tamaños. Determinó que el tamaño de partícula tiene escasa influencia en la geometría de la zona de extracción aislada, siendo más determinante el ancho del punto de extracción. Además, observó que la interacción entre zonas comienza cuando la distancia entre puntos alcanza aproximadamente 1.14 veces el ancho máximo de la IEZ.

En 1994, Laubscher (1994) formuló una metodología de diseño de mallas de producción basada en ensayos físicos con modelos de arena, introduciendo el concepto de flujo interactivo. Este ocurre cuando el espaciamiento entre puntos de extracción es inferior a 1.5 veces el diámetro de la IEZ, lo que genera superposición entre zonas y modifica el comportamiento del flujo. Además, propuso herramientas gráficas para estimar espaciamientos y alturas de interacción en función de la calidad del macizo rocoso, el tamaño de fragmento y el ancho de carga (véase 2.8 y 2.7).

Power (2004) desarrolló un modelo tridimensional más complejo, incorporando materiales con distintas granulometrías, y evidenció que tanto el tamaño de partícula como la altura de extracción influyen significativamente en la evolución de la zona movilizada. En paralelo, Halim (2004) introdujeron definiciones que han sido ampliamente adoptadas: zona de extracción (*Extraction Zone*, EZ) como el volumen efectivamente extraído; zona de movimiento (*Movement Zone*, MZ) como el volumen perturbado por dicha extracción; y sus versiones aisladas, zona de extracción aislada (*Isolated Extraction Zone*, IEZ) y zona de movimiento aislada (*Isolated Movement Zone*, IMZ), cuando no existe interacción con zonas generadas por puntos de extracción vecinos.

El trabajo de R. Castro (2007) mediante modelos físicos tridimensionales con materiales no cohesivos mostró que la expansión de la IEZ e IMZ depende principalmente de la masa y altura de la columna extraída, mientras que el tamaño y distribución de partículas tie-

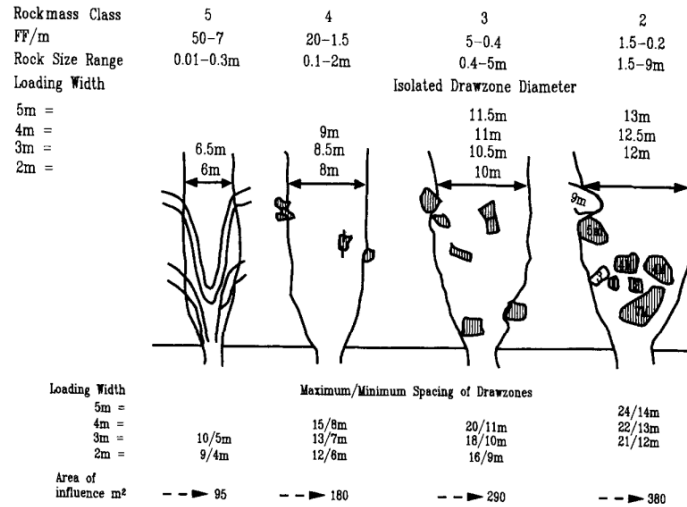


Figura 2.7: Ábaco de Laubscher para predecir espaciamiento. Fuente: Laubscher (1994).

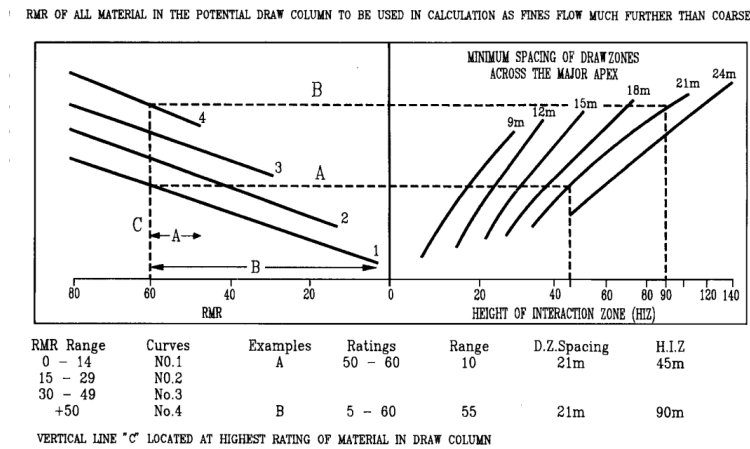


Figura 2.8: Ábaco de Laubscher para predecir la altura de interacción. Fuente: Laubscher (1994).

nen menor efecto. Complementariamente, Melo et al. (2008) propuso un modelo cinemático generalizado que incorpora efectos de dilatación mediante un término difusivo asociado al desplazamiento vertical.

Posteriormente, Pierce (2010) desarrolló una herramienta computacional basada en el código PFC9, la cual integra parámetros geomecánicos y reglas incrementales de hundimiento para modelar la evolución espacio-temporal del flujo de roca fragmentada.

A través de simulaciones con elementos discretos, Jin, Sun, Ma et al. (2016) validaron la capacidad de replicar el comportamiento observado en extracciones físicas, y confirmaron que la masa extraída es de las variables más influyentes en la geometría de la zona. En un estudio posterior, Jin, Sun, Wu et al. (2017) mostraron que las formas reales de IEZ e IMZ tienden a ser asimétricas, más cercanas a una “gota invertida” que a un elipsoide ideal.

Sun et al. (2019) introdujeron el efecto de fractura secundaria en sus simulaciones, lo que permitió una representación más precisa del comportamiento del material fragmentado.

Reyes Rojas (2021) desarrolló experimentos en modelos 2D y 3D con arena de sílice y grava, utilizando procesamiento de imágenes y fotogrametría para cuantificar la expansión geométrica de la EZ en función del espaciado y masa extraída. Su trabajo validó la existencia de zonas elipsoidales asimétricas y definió la “zona de deformación preferencial” (ZDP) como el volumen especialmente sensible a las condiciones iniciales de apertura.

Sturla (2022) examinó la influencia del diseño geométrico de bateas y propiedades físicas del material en la evolución del flujo, destacando la alta sensibilidad frente a parámetros como el ángulo de fricción estática y el ángulo de zanja.

Carvallo (2024) y Pulgar (2024) propusieron modelos fisicomatemáticos simplificados, basados en simulaciones bidimensionales en medios continuos, para estimar la geometría de la EZ en función de parámetros como el ángulo de fricción y el tamaño medio de partícula. El primero fue implementado en División El Teniente, y el segundo en Chuquicamata Subterránea.

Finalmente, Leyton y Palma (2024) investigaron en detalle los efectos geométricos que generan la secuencia y el número de puntos de extracción sobre la zona de extracción, utilizando simulaciones numéricas con el Método de Elementos Discretos (*Discrete Element Method*, DEM). El estudio contempló distintos esquemas de extracción: aislada, secuencial con desfase temporal y sobreextracción en configuraciones centrales. Los resultados permitieron identificar patrones sistemáticos de deformación en la geometría de la IEZ en función de la masa extraída m , observándose dos etapas en su evolución: una fase no lineal de crecimiento acelerado, seguida por un régimen lineal estable a partir de ciertos umbrales. Las funciones ajustadas para describir esta evolución fueron:

$$H_{IEZ} = \begin{cases} 230 m^{0.45} & \text{si } 0 \leq m < 0.46, \\ 135 m + 100 & \text{si } m \geq 0.46, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$W_{IEZ} = \begin{cases} 145 m^{0.45} & \text{si } 0 \leq m < 0.94, \\ 6.60 m + 135 & \text{si } m \geq 0.94, \end{cases} \quad (2.2)$$

Como se muestra en la Figura 2.9, las zonas sometidas a secuencias de apertura presentaron mayores alturas y menores anchos respecto del caso aislado, lo que evidencia una deformación inducida por la interacción con zonas vecinas. Estas observaciones respaldan que la geometría de la IEZ está condicionada por las condiciones de contorno dinámicas del entorno extractor.

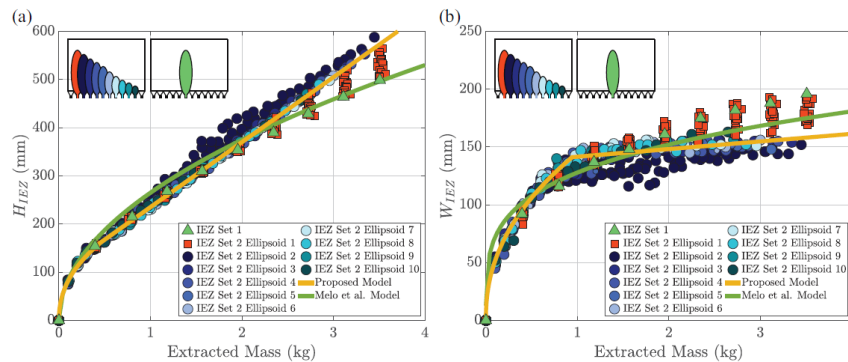


Figura 2.9: Evolución de la altura H_{IEZ} (a) y el ancho W_{IEZ} (b) en función de la masa extraída, para configuraciones de extracción aislada y secuencial.

2.4. Modelos analíticos

Litwiniszyn (1958) propuso un modelo estocástico para describir el movimiento de los granos mediante movimientos verticales. Más adelante, Mullins (1972) reinterpretó este proceso en términos de densidad de flujo, conduciendo a una formulación continua basada en una ecuación de difusión. En este marco, las partículas se desplazan más rápidamente en regiones con fuertes gradientes de concentración, mientras que el movimiento es más lento donde esta es uniforme. Desde una perspectiva cinemática, Nedderman y Tüzün (1979) dedujeron una ecuación similar a partir de una relación entre las componentes del campo de velocidades. Su modelo bidimensional plantea:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

donde v es la velocidad vertical y b es el coeficiente de difusión.

Para un orificio puntual en la base de un contenedor semi-infinito, la solución de la Ecuación 2.3 es:

$$v(x, y) = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi by}} e\left(-\frac{x^2}{4by}\right) \quad (2.4)$$

donde Q es el flujo volumétrico por unidad de espesor. Esta expresión muestra cómo la velocidad decrece lateralmente y aumenta cerca del orificio.

Diversos estudios experimentales han mostrado que el coeficiente b guarda una relación directa con el tamaño medio de partícula, siguiendo una expresión del tipo:

$$b \approx \alpha D_{50} \quad (2.5)$$

donde D_{50} es el diámetro medio del material granular y α es un factor adimensional que varía típicamente entre 1.5 y 4, dependiendo del tipo de material, la altura de medición y las condiciones de flujo (Mullins 1972; Nedderman y Tüzün 1979; Medina et al. 1998; Samadani et al. 1999). Aunque útil, este modelo presenta limitaciones: se ha observado que b varía con la altura, lo que restringe su generalización (Choi et al. 2005).

Basado en observaciones experimentales, Bazant (2004) propuso un modelo alternativo al enfoque de vacíos, introduciendo el concepto de *spots*, las cuales corresponden a regiones de fluidez que provocan desplazamientos cooperativos entre partículas. Esta formulación permite explicar la baja mezcla, la correlación espacial y la persistencia de estructuras locales en flujos densos.

2.4.1. Modelo de Morales, Vivanco y Palma (2024)

El estudio desarrollado por Morales et al. (2024) propone un modelo matemático novedoso para describir el flujo de materiales granulares densos bajo el efecto de la gravedad, como ocurre en silos o en minería por hundimiento. A diferencia de los modelos cinemáticos clásicos, este enfoque se basa directamente en la segunda ley de Newton, aplicándola a grupos de partículas que se movilizan colectivamente dentro de un medio mayoritariamente estático.

Tal como se esquematiza en la Figura 2.10, se considera que el volumen movilizado tiene un tamaño característico D_h , dentro del cual actúan fuerzas impulsoras generadas por el desequilibrio tensional y el peso propio del material. Estas son contrarrestadas por fuerzas de resistencia friccional y viscosa, que surgen del contacto con el entorno no movilizado.

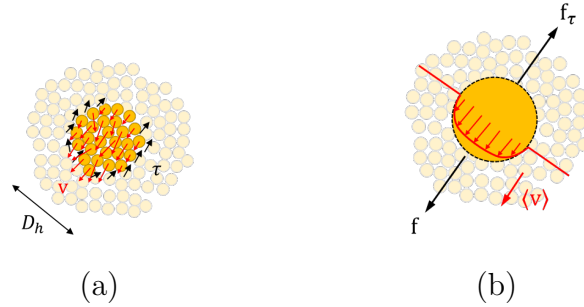


Figura 2.10: (a) Volumen representativo de partículas movilizadas. (b) Fuerzas actuantes.

El modelo parte de una formulación general basada en la segunda ley de Newton, que establece el equilibrio entre las fuerzas impulsoras y las resistencias internas del medio granular:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_\tau \quad (2.6)$$

donde ρ es la densidad del material, \mathbf{v} es la velocidad del volumen movilizado, \mathbf{f} representa la fuerza impulsora neta, y \mathbf{f}_τ la fuerza de resistencia total. La fuerza impulsora está compuesta por el gradiente de esfuerzos internos y la fuerza gravitacional:

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \quad (2.7)$$

La fuerza de resistencia, en tanto, incluye una componente friccional estática y una viscosa:

$$\mathbf{f}_\tau = -\frac{\mu P}{D_h} \hat{\mathbf{v}} - \frac{32\nu}{D_h^2} \rho \mathbf{v} \quad (2.8)$$

donde μ es el coeficiente de fricción, P la presión local, ν la viscosidad cinemática, D_h el tamaño característico del volumen movilizado y $\hat{\mathbf{v}}$ el vector unitario en la dirección de

movimiento. El primer término representa la resistencia friccional ejercida por el entorno granular estático, mientras que el segundo corresponde a una disipación viscosa proporcional a la velocidad del volumen movilizado.

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de movimiento, se obtiene la formulación completa del modelo:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} - \frac{\mu P}{D_h} \hat{\mathbf{v}} - \frac{32\nu}{D_h^2} \rho \mathbf{v} \quad (2.9)$$

Esta ecuación permite describir no solo la condición de inicio del movimiento, sino también el régimen dinámico una vez activado el flujo.

Para evaluar cuándo un volumen de material comienza a moverse, se introduce un número adimensional de resistencia:

$$Y = \frac{D_{50} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g}\|}{\mu P} \quad (2.10)$$

donde D_{50} es el diámetro medio de las partículas. Este número compara la magnitud de la fuerza neta impulsora con la fricción interna del sistema. Se establece que el material se moviliza cuando $Y \geq Y_0$, siendo $Y_0 = D_{50}/D_h$.

Cuando $Y \geq Y_0$, el sistema entra en régimen de flujo viscoso, representado mediante una ley tipo Darcy adaptada a medios granulares densos:

$$\mathbf{j} = -\frac{D_h^2}{32\nu} \chi \left(\frac{Y_0}{Y} \right) (-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}) \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ es el flujo de masa. La función χ modula el inicio y la intensidad del flujo en función del cociente Y_0/Y , activándose gradualmente una vez superado el umbral. Se propone dos formas:

$$\chi \left(\frac{Y_0}{Y} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{Y_0}{Y}, & Y \geq Y_0 \\ 0, & Y < Y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\chi \left(\frac{Y_0}{Y} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_0}{Y} \right)^4, & Y \geq Y_0 \\ 0, & Y < Y_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

La primera es una versión lineal por tramos, mientras que la segunda, inspirada en el comportamiento de fluidos tipo Bingham, proporciona una transición más continua entre el estado estático y móvil, evitando discontinuidades abruptas.

Para aplicar el modelo en minería por hundimiento, se asume un campo de esfuerzos

anisotrópico asociado al empuje activo en medios granulares:

$$\sigma_{xx} = -(1 - \sin \varphi)P, \quad \sigma_{yy} = -(1 + \sin \varphi)P, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (2.14)$$

Este estado permite deducir una forma explícita del número Y en función del gradiente del perfil de altura $h(x, y)$:

$$Y = \frac{D_{50}}{h \sin \varphi} \left[(1 - \sin \varphi)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + (1 + \sin \varphi)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{1 + \sin \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

y, consecuentemente, obtener las componentes de la velocidad del flujo:

$$u = -u_0 \chi (1 - \sin \varphi) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$v = -u_0 \chi (1 + \sin \varphi) \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{1 + \sin \varphi} \right) \quad (2.17)$$

donde $u_0 = gD_{50}^2/(32Y_0^2\nu)$ es un factor de escala dependiente de la granulometría, la gravedad y la viscosidad interna del medio.

Este conjunto de ecuaciones fue implementado en el software COMSOL MULTIPHYSICS, considerando condiciones de borde como presión nula en la superficie superior del silo, velocidad horizontal nula en las paredes laterales y una velocidad vertical constante en las aperturas.

La validación del modelo se realizó comparando las zonas de extracción simuladas con datos experimentales obtenidos mediante velocimetría por imágenes. En la Figura 2.11 se presenta el caso de una única apertura, donde se observa que el modelo propuesto (líneas negras) reproduce con alta fidelidad la forma experimental (puntos azules), a diferencia del modelo cinemático tradicional (líneas rojas), que subestima la elongación vertical y presenta una curvatura lateral menos precisa.

La Figura 2.12 muestra la comparación para dos aperturas separadas por distintas distancias. El modelo logra capturar la interacción no lineal entre zonas de extracción: para separaciones intermedias se genera una elongación acentuada del flujo, mientras que con mayor distancia las zonas evolucionan de forma independiente. Este comportamiento no puede ser replicado por modelos cinemáticos, que asumen una superposición lineal.

Los resultados confirman que el modelo propuesto no solo reproduce con precisión la forma de las zonas de extracción, sino que también capta los efectos de interacción entre puntos, esenciales para comprender la evolución del hundimiento en condiciones reales.

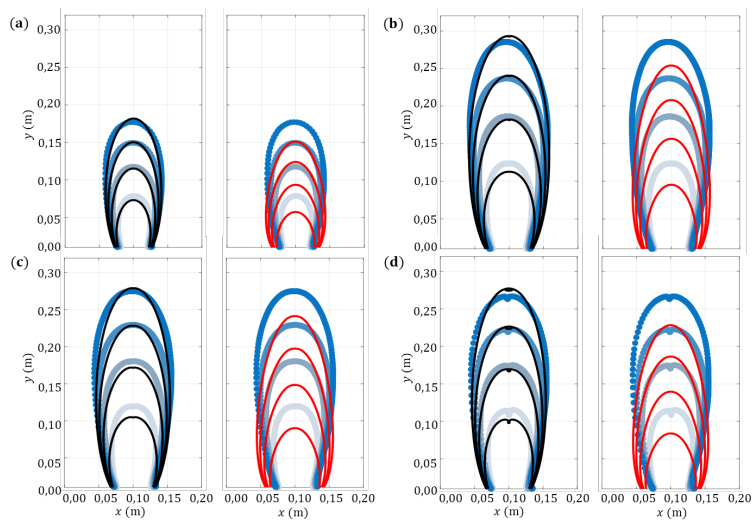


Figura 2.11: Comparación de zonas de extracción para una apertura.

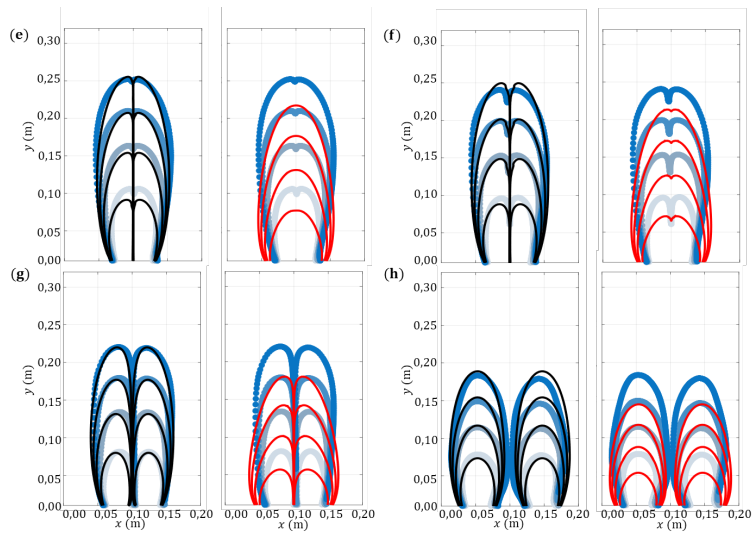


Figura 2.12: Comparación de zonas de extracción para dos aperturas separadas por distintas distancias.

2.5. Método de elementos finitos

El Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM) es una técnica numérica ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales sobre dominios complejos. Su principio fundamental consiste en dividir el dominio continuo del problema en un conjunto de subdominios más simples, denominados elementos finitos, que conforman una malla o grilla computacional (Reddy 1994; Bathe 2007; Jagota et al. 2013).

Cada uno de estos elementos está asociado a un conjunto finito de puntos llamados nodos, en los cuales se evalúan las soluciones del sistema. A partir de estos valores nodales, se construyen funciones de interpolación —usualmente polinomios— que permiten aproximar la solución en todo el dominio (Anderson 1995). Una vez definida la malla, las ecuaciones se resuelven en cada nodo utilizando métodos numéricos, considerando las condiciones de borde e iniciales del problema. La calidad de la solución obtenida depende directamente del tamaño y refinamiento de los elementos: a menor tamaño de elemento, mayor precisión, aunque también se incrementa el costo computacional (Carrillo 2011).

Estos conceptos se ilustran en la Figura 2.13, donde se muestra a la izquierda una malla generada computacionalmente y a la derecha un esquema explicativo que destaca visualmente los elementos (subdominios triangulares) y nodos (puntos de cálculo) característicos del método de elementos finitos.

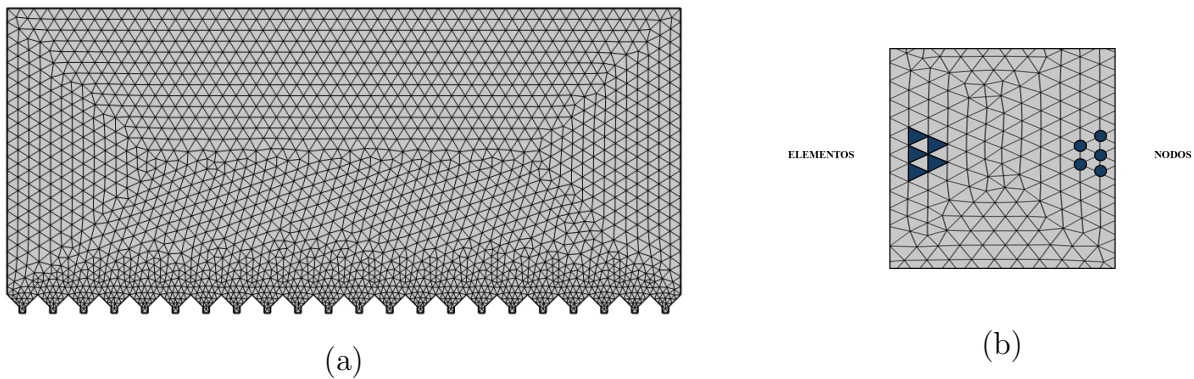


Figura 2.13: Discretización: malla y esquema explicativo de elementos y nodos.

2.5.1. COMSOL Multiphysics

En el marco del presente trabajo, se utiliza el software COMSOL MULTIPHYSICS como herramienta de implementación del método de elementos finitos. Este entorno permite modelar fenómenos físicos complejos a través de la definición de geometrías, propiedades de materiales, condiciones de contorno y cargas externas, resolviendo sistemas de ecuaciones diferenciales parciales en dominios continuos mediante discretización espacial ([Multiphysics 2023](#)).

El flujo de trabajo comienza con la construcción del dominio geométrico y la asignación de la física correspondiente al fenómeno estudiado. Posteriormente, se generan las mallas sobre el dominio, un proceso crítico que define la resolución espacial del modelo. El refinamiento de esta malla tiene un impacto directo en la precisión de los resultados y en el costo computacional de la simulación.

Para la resolución del sistema, el software ofrece solucionadores numéricos que pueden operar en modo *fully coupled* o *segregated*. La primera opción resuelve todas las ecuaciones simultáneamente, siendo adecuada para modelos con alto grado de acoplamiento entre variables. La segunda resuelve cada grupo de ecuaciones por separado, lo cual puede ser más eficiente en problemas con interacciones débiles o escalas temporales diferenciadas.

Finalmente, los resultados se analizan mediante herramientas de post-procesamiento, como mapas de contorno, vectores de desplazamiento y cortes transversales. En la Figura 2.14, se presenta un ejemplo del campo de presión resultante en un modelo de flujo granular, lo cual permite visualizar la distribución interna de tensiones generadas durante el proceso de extracción.

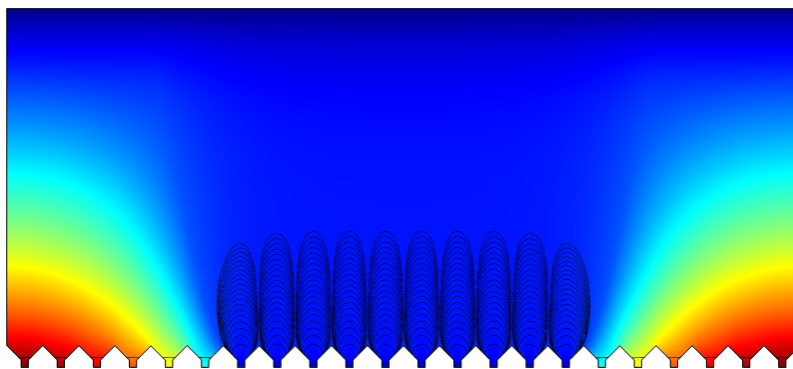


Figura 2.14: Campo de presión obtenido en una simulación de flujo granular en COMSOL MULTIPHYSICS.

3. Metodología

El presente capítulo describe la estrategia metodológica adoptada para cuantificar la EZ en minería por hundimiento. Dado el carácter multifactorial del fenómeno y la necesidad de validar numéricamente los patrones de flujo granular, se optó por una aproximación mixta que combina simulaciones computacionales con ensayos físicos a escala de laboratorio. La metodología se divide en dos componentes principales:

- **Metodología computacional:** Se implementa un modelo numérico bidimensional en COMSOL MULTIPHYSICS, basado en la formulación de Morales et al. (2024) e inspirado en los resultados de Leyton y Palma (2024). El modelo describe el flujo granular bajo el efecto de la gravedad, considerando resistencias friccionales, viscosas y condiciones de frontera representativas del proceso de *caving*. Se calibra mediante una extracción aislada, y luego se simulan distintas secuencias de apertura para evaluar su influencia sobre la geometría de la zona de extracción. Finalmente, se realiza un barrido paramétrico que analiza la sensibilidad del modelo frente a variaciones en el ángulo de fricción interna y el tamaño medio de partícula.
- **Metodología experimental:** Se desarrolla una maqueta física con bateas impresas en 3D. A través de pruebas controladas y técnicas de procesamiento de imágenes, se registran las dimensiones de la zona movilizada bajo condiciones secuenciales de apertura.

3.1. Metodología computacional

3.1.1. Diseño computacional

El diseño del modelo numérico se basó en la geometría simplificada de una batea de extracción, con el fin de replicar las condiciones observadas en experimentos físicos y facilitar la implementación computacional. Para ello, se consideró un corte transversal bidimensional que representa la vista frontal de la batea.

La geometría global del modelo se construyó a partir del esquema propuesto por Leyton y Palma (2024), extendiéndolo para incorporar un total de 22 puntos de extracción distribuidos uniformemente a lo largo del contacto inferior. Esta disposición busca reflejar la interacción entre zonas adyacentes y simular el traslape progresivo entre las zonas de extracción a medida que se abren nuevos puntos. La Figura 3.1 muestra la disposición general del dominio modelado.

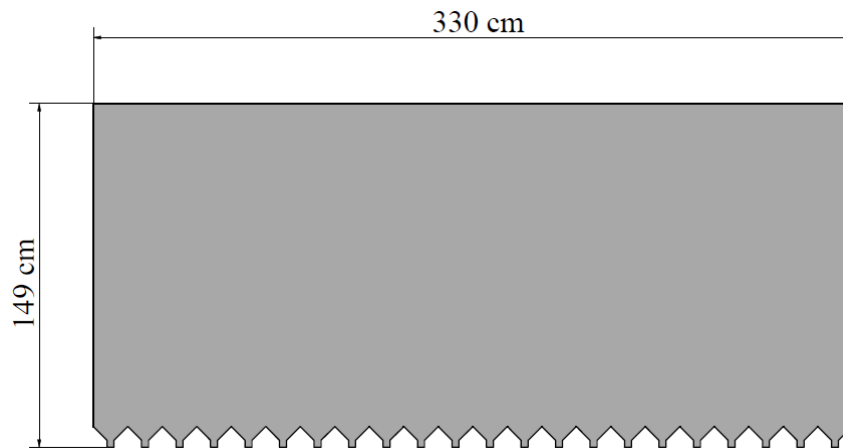


Figura 3.1: Representación esquemática de 22 bateas y respectivos puntos de extracción.

Además, se definió la geometría específica de cada punto de extracción de acuerdo con los planos del modelo físico, con una pendiente interna de 45° .

El modelo numérico no adopta una escala explícita de similitud respecto a un sistema minero real. No obstante, se fundamenta en el estudio de Leyton y Palma (2024), quien utilizó un contenedor de 180.1 cm de ancho y 149.0 cm de altura, con una separación de 15.0 cm entre centros de extracción, configurado para simular flujos gravitacionales mediante el método del elemento discreto (DEM).

En esta propuesta, se conservaron las proporciones generales del modelo original, ampliando el número de puntos de extracción a 22 con el objetivo de mejorar la resolución espacial y representar con mayor precisión la interacción entre zonas adyacentes.

La altura de la columna se definió como 149.0 cm, correspondiente a la dimensión vertical total del dominio, en concordancia con el modelo de referencia. Esta magnitud representa la zona activa de flujo y se mantuvo constante en todos los escenarios. Al tratarse de un modelo bidimensional, dicha altura corresponde a la extensión completa del material granular simulado en corte transversal.

En cuanto a la representación de dimensiones reales, el modelo busca reproducir patrones geométricos característicos del hundimiento, como la expansión de la zona de extracción y su superposición con zonas vecinas. Sin establecer una escala física formal, su interpretación es cualitativa y funcional, centrada en el análisis de relaciones geométricas.

3.1.2. Parámetros

De acuerdo con Leyton y Palma (2024), las propiedades físicas y mecánicas del material para las simulaciones DEM se muestran en la Tabla 3.1. Para la metodología FEM, dichos parámetros se adaptan a la formulación continua.

Tabla 3.1: Propiedades físicas y mecánicas del material utilizado por Leyton y Palma (2024).

Propiedad	Valor
Densidad (kg/m ³)	2600
Módulo de Young (MPa)	3.00
Módulo de Corte (MPa)	1.03
Coefficiente de Poisson	0.46
Coefficiente de Restitución	0.30
Coefficiente de Fricción	0.30
Coefficiente de Resistencia Rodadura	0.10

Para calcular el ángulo de fricción interna a partir del coeficiente de fricción (μ), se utiliza la ecuación:

$$\varphi = \arctan(\mu). \quad (3.1)$$

Dado que $\mu = 0.30$,

$$\varphi \approx \arctan(0.30) \approx 16.70^\circ \approx 0.291 \text{ rad}. \quad (3.2)$$

Los parámetros finales para las simulaciones se detallan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Propiedades utilizadas en la simulación FEM.

Propiedad	Símbolo	Valor
Diámetro medio de partícula	D_{50} (mm)	4.800
Velocidad de salida	v (m/s)	0.500
Umbral adimensional	Y_0 (-)	0.125
Ángulo de fricción interna	φ (rad)	0.291

Por otra parte, el parámetro Y_0 proviene del modelo propuesto por Morales et al. (2024), y representa un umbral adimensional asociado a la activación del flujo granular. Su valor depende de la relación entre el tamaño medio de partícula y una longitud característica del sistema, y aunque no condiciona directamente el vaciado en esta simulación, permite mantener coherencia con el marco teórico utilizado para describir el comportamiento del medio granular.

3.1.3. Configuración

Las simulaciones fueron desarrolladas en COMSOL MULTIPHYSICS 5.6, utilizando la geometría presentada en la Figura 3.1 y aplicando las condiciones de frontera definidas por Morales.

- Presión nula en la parte superior del dominio.
- Velocidad horizontal nula ($u = 0$) en las paredes laterales del silo.
- Velocidad vertical nula ($v = 0$) en la base del silo, salvo en los puntos de extracción.
- Velocidad descendente constante ($v = v'$) aplicada en cada apertura de extracción, ajustada según el caso.

Estas condiciones están esquematizadas en la Figura 3.2, donde se muestran los valores impuestos en cada segmento del dominio.

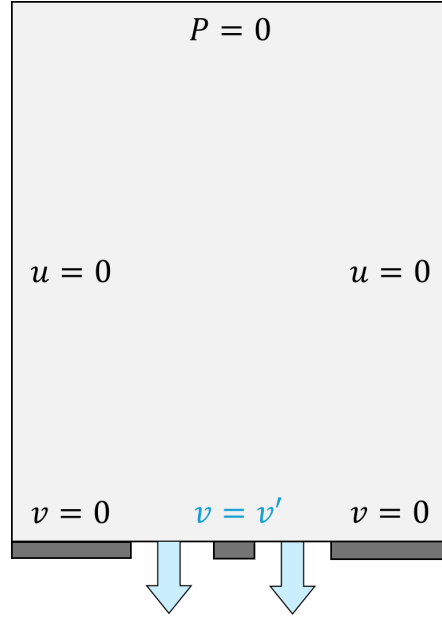


Figura 3.2: Condiciones de frontera en la modelación FEM.

En el caso base se aplicó una velocidad descendente de $v' = 0.45$ m/s en los puntos de extracción. Para representar sobreextracción, se aumentó a $v' = 0.65$ m/s. Estas velocidades fueron impuestas como condición de borde y representan escenarios idealizados de vaciado continuo.

3.1.4. Simulaciones

El propósito de esta etapa fue evaluar si las simulaciones numéricas implementadas en el modelo FEM reproducen de manera coherente la evolución geométrica de la zona de extracción, contrastando los resultados con aquellos obtenidos experimentalmente por Leyton y Palma (2024). Para ello, se realizaron simulaciones individuales para la apertura de cada punto de batea, bajo tres configuraciones distintas de secuencia de extracción.

Las dimensiones características de la EZ fueron medidas siguiendo el procedimiento ilustrado en las Figuras 3.3 y 3.4. El ancho de la zona de extracción W_{EZ} se definió como la extensión horizontal máxima movilizada, medida entre los extremos de las zonas activas. Por su parte, la altura $H_{i,EZ}$ se determinó como la distancia vertical desde la base del punto de extracción hasta la frontera superior movilizada, evaluada individualmente para cada punto.

A partir de estas mediciones, se calcularon las siguientes expresiones:

$$W_p = \frac{W_{EZ}}{n}, \quad H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_{i,EZ}, \quad (3.3)$$

donde n corresponde al número de puntos de extracción activos. Esta formulación constituye una simplificación metodológica que permite interpretar:

$$W_p \approx W_{IEZ}, \quad H_p \approx H_{IEZ} \quad (3.4)$$

Es decir, se asume que el ancho y altura promedio por punto representan el comportamiento de una IEZ individual idealizada, bajo la hipótesis de que las zonas movilizadas se distribuyen de forma tangente y uniforme. Aunque estas métricas no provienen de zonas efectivamente aisladas, permiten cuantificar el aporte individual de cada punto sin necesidad de segmentar físicamente cada evento.

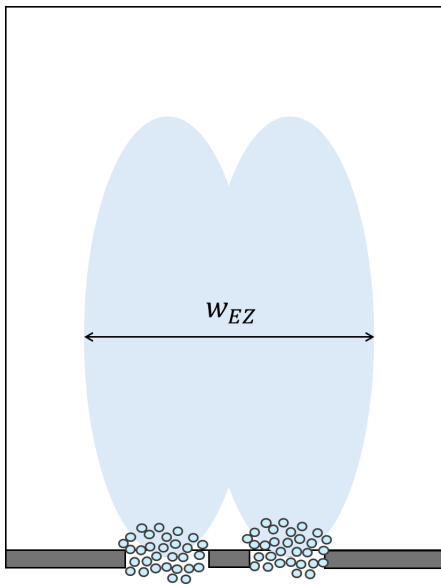


Figura 3.3: Medición W_{EZ} .

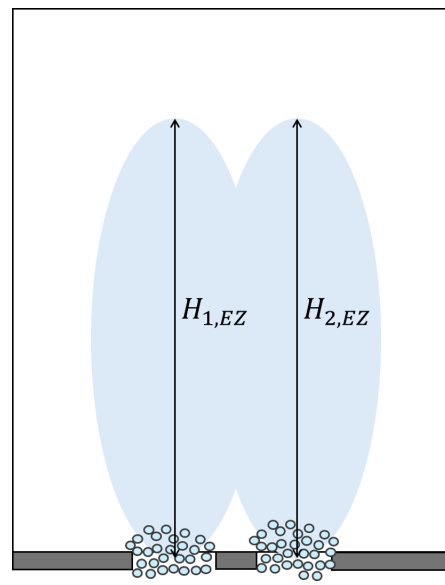


Figura 3.4: Medición H_{EZ} .

Con el objetivo de calibrar el modelo, se simuló inicialmente la apertura de un solo punto de extracción. Se monitoreó la evolución de la IEZ en el tiempo, ajustando los parámetros iniciales u_0 y Y_0 hasta reproducir las dimensiones finales del ancho y altura observadas. La relación entre el tiempo de simulación y la masa extraída fue determinada empíricamente, según se presenta en la Tabla A.1.

Se ensayaron múltiples combinaciones de parámetros, evaluando el coeficiente de variación tanto en el ancho como en la altura de la IEZ. La Tabla A.2 muestra una selección de las iteraciones más representativas, ordenadas por el error combinado. La Iteración 6 mostró el mejor desempeño, con un error de 1.6 % en el ancho y 6.3 % en la altura.

Estos errores se calcularon mediante comparación directa con las dimensiones de la zona de extracción obtenidas por Leyton y Palma (2024) en simulaciones EDEM, las cuales se tomaron como referencia para validar el comportamiento geométrico del modelo. Esta configuración

fue seleccionada para las simulaciones posteriores, al lograr una representación realista de la geometría movilizada sin comprometer el ajuste frente a los datos base. Dado que el enfoque FEM tiende a subestimar la subsidencia respecto a modelos DEM, se priorizó una buena estimación del ancho, variable clave en el diseño de mallas de extracción.

3.1.5. Secuencias

Con el objetivo de evaluar cómo distintas configuraciones de extracción afectan la geometría de la zona influenciada, se analizaron tres casos representativos, cada uno con una secuencia distinta de activación de puntos de batea. En todos los escenarios, se midieron los valores de ancho y altura, respectivamente.

Caso 1: Apertura secuencial

Este primer escenario considera la apertura progresiva y ordenada de puntos de extracción, uno a la vez, en secuencia simétrica desde el centro hacia los extremos. Este caso se utiliza como referencia comparativa frente a las situaciones con sobreextracción. La Figura 3.5 muestra esquemáticamente la evolución de la zona movilizada conforme se activan nuevos puntos.

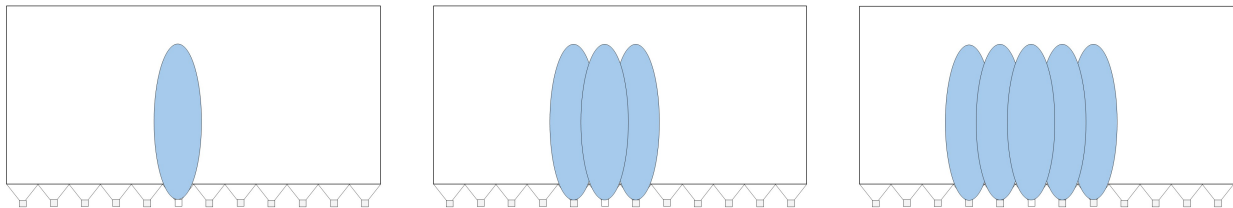


Figura 3.5: Esquemas conceptuales de la apertura secuencial de puntos de extracción.

Caso 2: Sobreextracción en dos puntos

En este caso, se introdujo un flujo mayor en dos puntos centrales de la base, simulando una condición de sobreextracción localizada. El objetivo fue analizar cómo el incremento del flujo en ubicaciones específicas afecta la expansión vertical y horizontal de la EZ. En la Figura 3.6 se ilustran las distintas etapas de desarrollo de la zona influenciada bajo esta condición modificada.

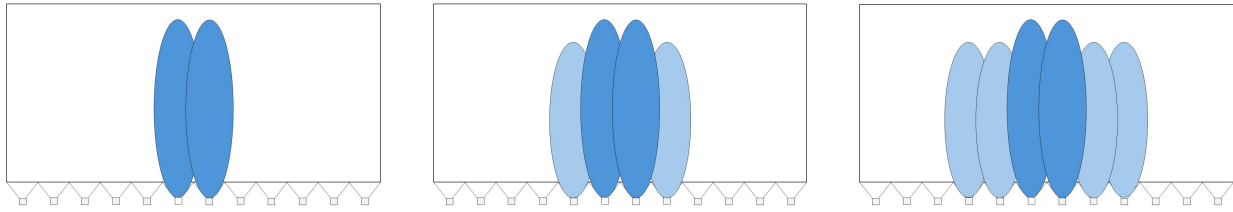


Figura 3.6: Esquemas conceptuales del caso con sobreextracción en 2 puntos.

Caso 3: Sobreextracción en cuatro puntos

Finalmente, se evaluó una condición más agresiva de sobreextracción, aplicando un mayor flujo en cuatro puntos distribuidos de forma simétrica en el centro de la base. Esta configuración permite estudiar el efecto acumulado de múltiples zonas de sobreextracción y cómo influye en la forma global de la EZ. La Figura 3.7 resume gráficamente la evolución geométrica del sistema bajo esta condición.

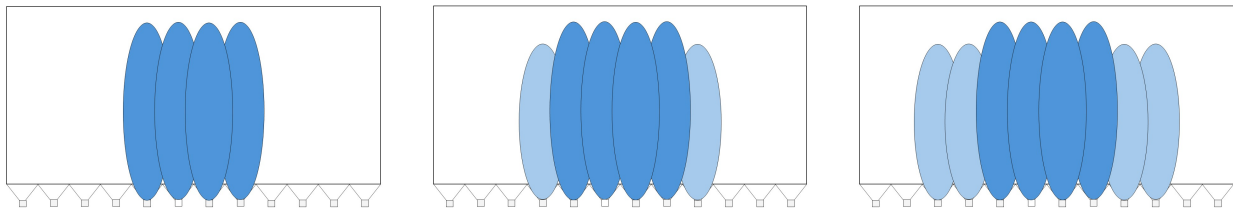


Figura 3.7: Esquemas conceptuales del caso con sobreextracción en 4 puntos.

3.1.6. Barrido paramétrico

Como complemento al análisis de secuencias, se realizó un barrido paramétrico para explorar el efecto de las propiedades del material granular sobre la forma de la IEZ. Se definieron rangos de variación para los parámetros clave, aplicando un incremento uniforme en cada uno:

- El ángulo de fricción φ se varió entre 0.174 rad (10.0°) y 0.474 rad (27.2°), en pasos de 0.05 rad (2.9°).
- El tamaño medio de partícula D_{50} se exploró entre 1.2 mm y 8.4 mm, con incrementos de 1.2 mm.

Estas combinaciones permitieron analizar de forma sistemática la sensibilidad del modelo ante variaciones en los parámetros físicos, y evaluar su influencia sobre la geometría final de la zona movilizada.

3.2. Metodología experimental

3.2.1. Diseño experimental

El presente estudio experimental se llevó a cabo utilizando una maqueta física diseñada para replicar las condiciones del flujo gravitacional en minería por hundimiento. El sistema, ilustrado en la Figura 3.8, consiste en un contenedor vertical de acrílico transparente con dimensiones de 75 cm de alto, 72 cm de ancho y 2 cm de espesor, montado sobre una estructura metálica con superficie modular.

En la base del contenedor se habilitaron ocho puntos de extracción alineados horizontalmente. Cada uno posee una geometría en ángulo de 45° , orientada para favorecer el desprendimiento y posterior flujo del material granular. Las bateas y sus respectivos mecanismos de apertura fueron diseñados mediante el software *Inventor* y fabricados mediante impresión 3D.

Para controlar el inicio del flujo, se utilizaron tapas móviles diseñadas específicamente para cada punto. Estas tapas se posicionan de forma precisa sobre las aperturas, asegurando el confinamiento del material granular hasta el instante de extracción.



(a) Vista frontal.



(b) Bateas y tapas móviles cerradas.

Figura 3.8: Montaje del modelo experimental.

3.2.2. Caracterización del mineral

El material utilizado en este estudio fue cuarzo grueso con densidad promedio de 2.65 g/cm^3 . Para garantizar la representatividad de la muestra, se aplicó la técnica de roleo y cuarteo (Sironvalle 2002), formándose inicialmente una pila cónica a partir de la cual se tomaron fracciones alternadas en cuartos, reduciendo progresivamente el volumen hasta obtener la cantidad requerida para los ensayos.

La determinación de la distribución granulométrica se realizó mediante un conjunto de tamices de aberturas decrecientes, siguiendo la metodología descrita por Salager (2007). El material se colocó en el tamiz superior y se sometió a agitación mecánica hasta que no se observaran partículas atravesando las mallas. Posteriormente, se pesó la fracción retenida en cada tamiz, calculando así la masa acumulada correspondiente a cada intervalo de tamaño. Con estos datos se construyó la curva granulométrica (Figura 3.9), la cual se ajustó al modelo teórico de Rosin- Rammler (1933), permitiendo identificar los diámetros característicos D_{10} , D_{30} , D_{50} y D_{60} .

A partir de estos valores se calcularon el coeficiente de uniformidad (C_U) y el coeficiente de curvatura (C_Z), según las expresiones propuestas por Craig (2004):

$$C_U = \frac{D_{60}}{D_{10}}, \quad C_Z = \frac{(D_{30})^2}{D_{10}D_{60}}. \quad (3.5)$$

Tabla 3.3: Distribución granulométrica del cuarzo.

D_{10} (mm)	D_{30} (mm)	D_{50} (mm)	D_{60} (mm)	C_U	C_Z
1.63	2.08	2.48	2.68	1.65	0.99

Como se observa en la Tabla 3.3, el coeficiente de uniformidad $C_U = 1.65$ refleja una distribución con tamaños de partícula relativamente homogéneos. Según Craig (2004), valores cercanos a 1 indican una baja dispersión en el rango de tamaños, propios de materiales uniformes, mientras que valores superiores a 6 son típicos de suelos bien graduados.

Respecto al coeficiente de curvatura, se obtuvo $C_Z = 0.99$, ligeramente por debajo del rango $1 \leq C_Z \leq 3$, asociado a curvas suaves y bien distribuidas.

El ajuste a la curva de Rosin-Rammler se realizó a partir de tres puntos experimentales, seleccionados por su capacidad de representar los tramos más relevantes de la distribución acumulada, incluyendo los extremos y el valor central. Debido a que el material presenta una granulometría relativamente uniforme, el modelo entrega una aproximación confiable incluso con un conjunto limitado de datos.

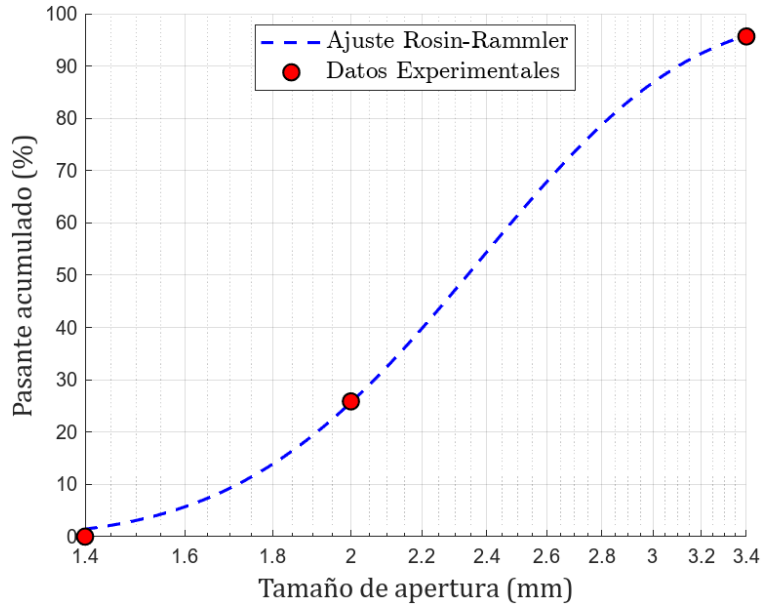


Figura 3.9: Curva granulométrica.

3.2.3. Secuencias

Para analizar el comportamiento del flujo granular de la MZ, se realizaron ensayos experimentales abriendo entre 1 y 8 bateas de forma secuencial. En cada prueba, la maqueta fue llenada completamente con cuarzo, registrando imágenes previas e inmediatamente posteriores a la apertura. Se evaluaron tres tiempos de apertura (0.5, 1 y 2 s), variando la duración del movimiento de las tapas. En total, se realizaron ocho configuraciones experimentales por cada intervalo de tiempo.

No se consideraron secuencias con sobreextracción, ya que el objetivo de esta fase fue estudiar el patrón base del fenómeno de flujo. Se estableció un máximo de ocho bateas activas para evitar efectos de borde y asegurar que la dispersión del flujo representara adecuadamente el comportamiento del sistema.

3.2.4. Sistema de extracción

Para asegurar una apertura simultánea y controlada de las bateas, se implementó un sistema automatizado basado en Arduino, compuesto por dos motores paso a paso accionados mediante *drivers* independientes. La electrónica fue montada en una caja de control diseñada especialmente para garantizar un funcionamiento coordinado. La Figura 3.10 muestra el montaje completo del sistema.

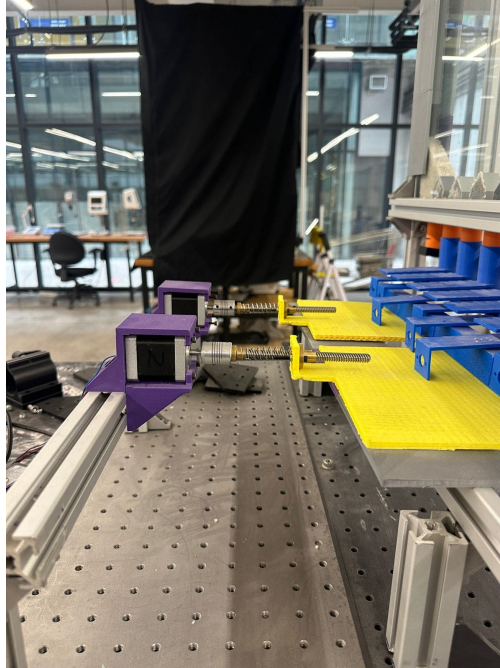


Figura 3.10: Sistema de extracción automatizado.

El código de control fue programado para que, al mantener presionada la tecla “*Enter*”, ambos motores se activaran de forma sincronizada, desplazando las tapas que bloqueaban las aperturas. Esta configuración permitió una ejecución precisa del inicio del flujo y una alta repetibilidad en los ensayos.

3.2.5. Análisis experimental

Los ensayos se realizaron en un ambiente con iluminación controlada, mediante dos focos de alta intensidad ubicados en las esquinas inferiores del montaje. Esta configuración redujo la proyección de sombras, favoreciendo una visibilidad uniforme del material granular. Las imágenes fueron capturadas con una cámara Nikon D7500 en resolución 4K a 30 *fps*. Para cada prueba se extrajeron cinco fotogramas clave: uno previo a la apertura, otro inmediatamente posterior, y tres adicionales a 0.5, 1 y 2 segundos, respectivamente.

El procesamiento de estos registros se efectuó mediante un código automatizado en MATLAB. Cada par de imágenes —antes y después de la apertura— fue convertido a escala de grises. A partir de esta comparación se generó una imagen diferencial, destacando exclusivamente las zonas movilizadas por la extracción.

Para mejorar la detección, se aplicaron técnicas de filtrado espacial y realce local del contraste, seguidas de una segmentación binaria basada en un umbral automático. Esto permitió aislar de forma precisa las regiones activas. Sobre la imagen segmentada se analizó un perfil horizontal a una altura fija, previamente definida por su efectividad para capturar el desplazamiento lateral. Los extremos de la zona movilizada fueron identificados a lo largo de este perfil, y su distancia —expresada inicialmente en píxeles— fue convertida a milímetros mediante una escala calibrada.

El procedimiento se repitió para cada configuración experimental, generando un conjunto de mediciones que fueron posteriormente normalizadas en función del tamaño de la abertura. Esta automatización permitió obtener resultados consistentes, comparables con las simulaciones y representativos de la evolución espacial del flujo bajo distintas condiciones de apertura y tiempos de exposición.

3.2.6. Estadísticas

Con el fin de evaluar la reproducibilidad y variabilidad de los resultados, se realizaron 30 repeticiones de los ensayos en los casos de 2, 5 y 8 bateas abiertas. El análisis estadístico incluyó el cálculo de promedios, desviaciones estándar y coeficiente de variación, permitiendo establecer la consistencia de los datos experimentales.

4. Resultados

4.1. Secuencias

Esta sección presenta los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas realizadas en COMSOL MULTIPHYSICS, utilizando el enfoque de elementos finitos previamente descrito. El objetivo fue analizar la evolución geométrica de la zona de extracción inducida por distintas secuencias de apertura, manteniendo constante la geometría de la batea y las propiedades del material granular. Se evaluaron configuraciones basadas en la activación progresiva de puntos de extracción, considerando variaciones tanto en el sentido como en la intensidad del vaciado, con el fin de identificar patrones característicos de movilización y posibles zonas de interferencia lateral.

4.1.1. Caso 1: Apertura secuencial

Se analizó la evolución de la geometría de la zona de extracción bajo un esquema de tiraje secuencial. En la Figura 4.1 se presentan las simulaciones que muestran el campo de presión en función de la cantidad de puntos activados. El color rojo y azul indica zonas de alta y baja presión, respectivamente, asociadas al desplazamiento del material.

La disminución de presión en torno a los puntos activados responde al comportamiento típico de medios granulares: al extraer material, se reduce el confinamiento y se genera un desequilibrio local que induce el colapso del material suprayacente.

Las líneas de contorno representan superficies equipotenciales del campo de presión en distintos instantes. Estas delimitan el avance progresivo del flujo a medida que se expande la zona activa.

La Figura 4.2 presenta la evolución del ancho de la zona de extracción en función del número de puntos habilitados. Inicialmente, se observa un valor elevado, el cual disminuye progresivamente hasta estabilizarse en torno a 0.15 m. Esta disminución se asocia a la redistribución del flujo conforme se activan más puntos, concentrando el material y limitando su expansión lateral.

Aunque el comportamiento general muestra una tendencia decreciente (tonos oscuros), algunas zonas presentan un aumento del ancho (zonas claras). Este efecto se relaciona con la metodología de medición: en etapas tempranas, con baja masa extraída, los puntos aún no

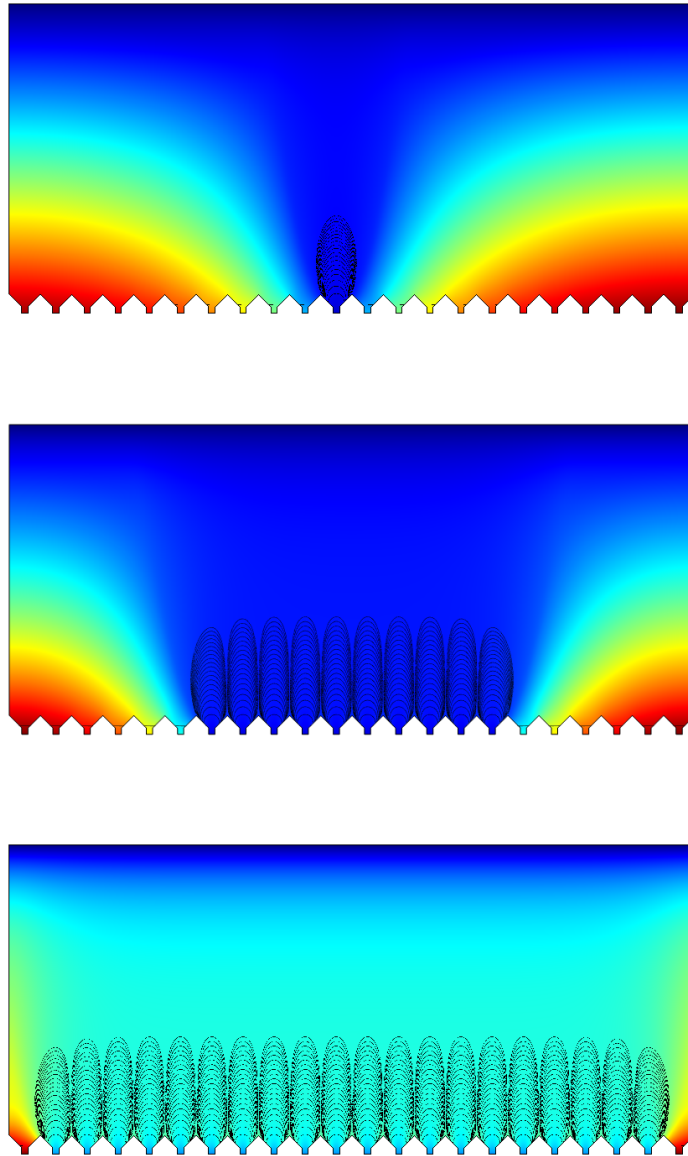


Figura 4.1: Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para tiraje secuencial

interactúan, comportándose como zonas independientes. Por ello, las mediciones en esta fase reflejan una limitación metodológica y no un comportamiento físico representativo.

Además, es importante considerar que el promedio del ancho puede verse afectado por la distribución espacial de los anchos individuales. En esta configuración, los puntos extremos tienden a presentar mayores anchos que los centrales. Cuando el número de puntos habilitados es reducido, estos valores extremos tienen una mayor influencia en el cálculo del promedio, elevándolo artificialmente. A medida que se activan más puntos, el efecto relativo de los extremos disminuye, lo que contribuye a la caída observada del promedio.

Por tanto, si bien la tendencia decreciente es coherente con un aumento en la interacción entre zonas, también responde parcialmente a un efecto estadístico derivado de cómo se calcula el promedio. Esto refuerza la importancia de complementar el análisis con visualizaciones punto a punto, que permitan identificar con mayor claridad la geometría local del flujo.

Al extraer 3.51 kg, el ancho de la zona de extracción disminuye en torno al 20 %, mientras que su altura se incrementa aproximadamente un 25 %. Este comportamiento sugiere una transición desde un flujo confinado hacia un hundimiento vertical más acentuado, a medida que se habilitan nuevos puntos y el material se redistribuye en profundidad.

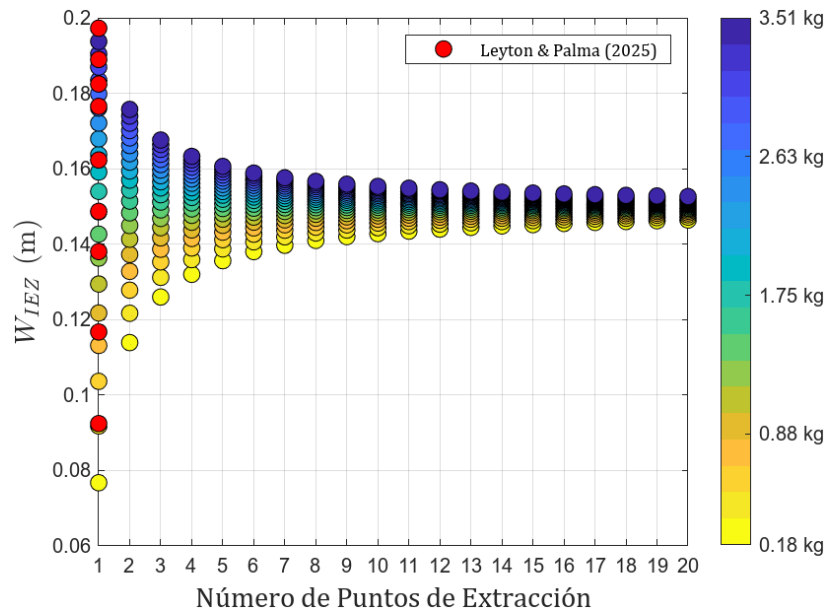


Figura 4.2: Ancho en función del número de puntos de extracción - Tiraje Secuencial

En el mismo gráfico se incluyen los puntos rojos correspondientes a los datos obtenidos por Leyton y Palma (2024), lo que permite una comparación directa con los resultados FEM.

Esta correspondencia también se evidencia en la Figura 4.3, donde se ilustran esquemáticamente los resultados obtenidos mediante simulaciones DEM (subfigura 4.3a) y FEM (subfigura 4.3b). En ambos casos, los elipsoides representan la expansión lateral de la zona de

extracción en función de la masa movilizada. Aunque las figuras no están escaladas verticalmente, se aprecia una buena concordancia, lo que sugiere que el modelo FEM logra capturar adecuadamente la dispersión horizontal del flujo.

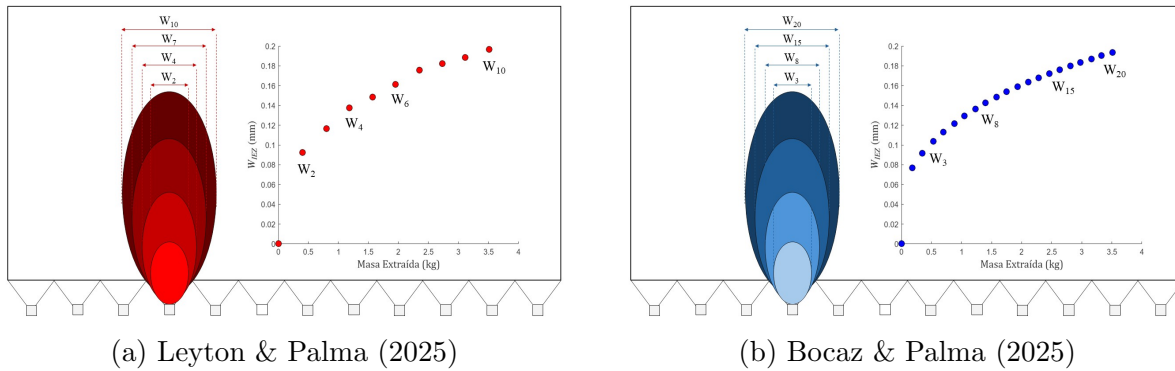


Figura 4.3: Comparación esquemática del ancho de la zona de extracción entre simulaciones DEM (a) y FEM (b).

Por su parte, la Figura 4.4 muestra la evolución de la altura. En las primeras etapas, se evidencia una discrepancia entre los resultados DEM y FEM. En el caso de Leyton y Palma (2024), la interacción entre partículas genera una compactación adicional del material, lo que produce un mayor hundimiento vertical. En contraste, el enfoque continuo del modelo FEM atenúa estas deformaciones iniciales, explicando las menores alturas simuladas al comienzo del proceso.

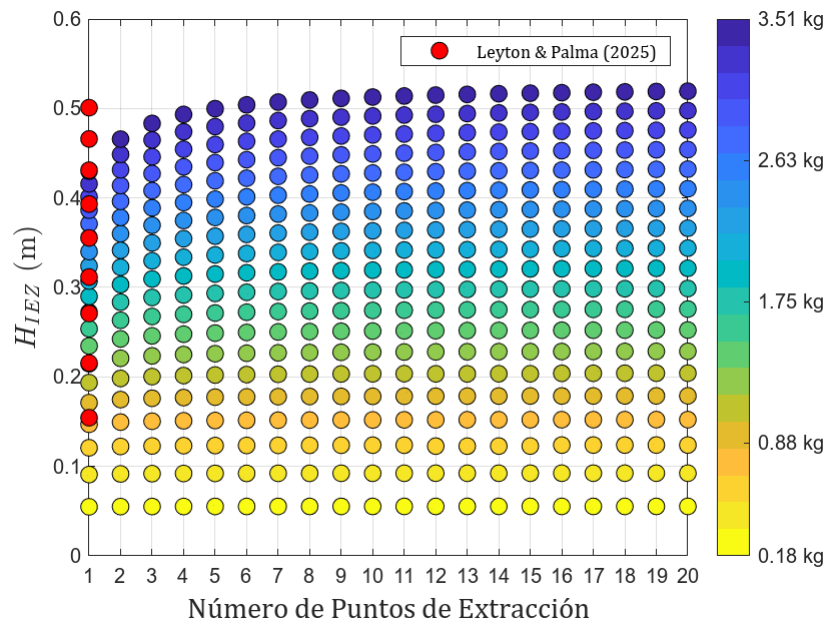


Figura 4.4: Altura en función del número de puntos de extracción - Tiraje Secuencial

Para complementar esta observación, la Figura 4.5 presenta una comparación esquemática

de la evolución vertical obtenida con ambos enfoques. La subfigura 4.5a, correspondiente al modelo DEM de Leyton y Palma (2024), muestra un hundimiento más pronunciado, coherente con la capacidad del método para representar fenómenos de subsidencia. En contraste, la subfigura 4.5b, que muestra el modelo FEM utilizado en este estudio, evidencia una evolución más contenida, lo que se atribuye a que el enfoque continuo no incorpora de forma explícita el colapso del macizo suprayacente.

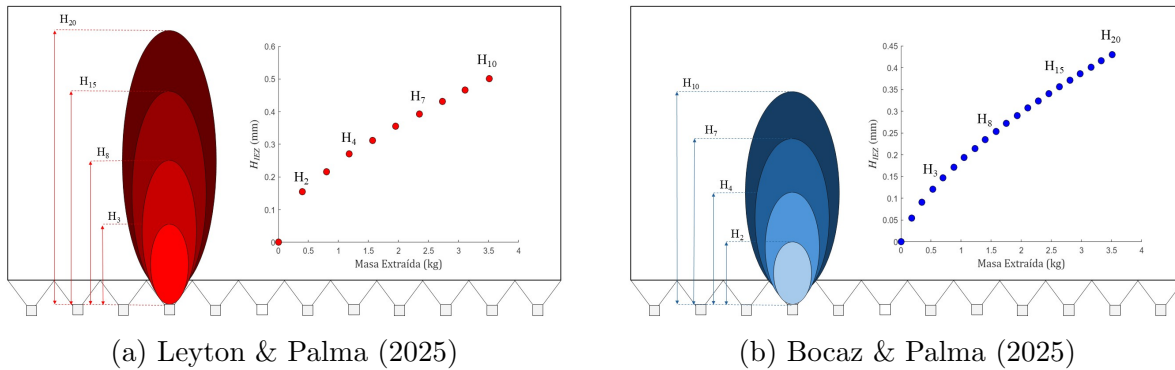


Figura 4.5: Comparación esquemática de la altura de la zona de extracción entre simulaciones DEM (a) y FEM (b).

4.1.2. Caso 2: Apertura con 2 sobreextracciones

En este caso se analiza el comportamiento del sistema al incorporar dos sobreextracciones. Inicialmente, se observa la secuencia de imágenes que ilustran la evolución fenomenológica del flujo, donde se aprecia cómo la sobreextracción inicial propicia una mayor expansión lateral y mejora la conectividad del material movilizado (Figura 4.6).

La Figura 4.7 presenta los resultados del ancho cuando se incorporan dos sobreextracciones. A diferencia del caso anterior, la sobreextracción inicial provoca un incremento significativo en la expansión lateral del material movilizado. Si bien podría esperarse un aumento en la masa extraída, esta fue fijada en 3.51 kg para todas las simulaciones, con el fin de comparar la geometría del flujo bajo condiciones equivalentes. Por tanto, el mayor ancho observado no refleja una mayor cantidad de material removido, sino una redistribución espacial más amplia en las etapas iniciales del proceso.

Este incremento sugiere que la sobreextracción en puntos estratégicos puede mejorar la conectividad del flujo de material, favoreciendo una mayor movilidad horizontal. En cuanto a la altura de la IEZ, la Figura 4.8 muestra que las sobreextracciones iniciales inducen un hundimiento más profundo en las primeras etapas, debido a la mayor cantidad de material movilizado.

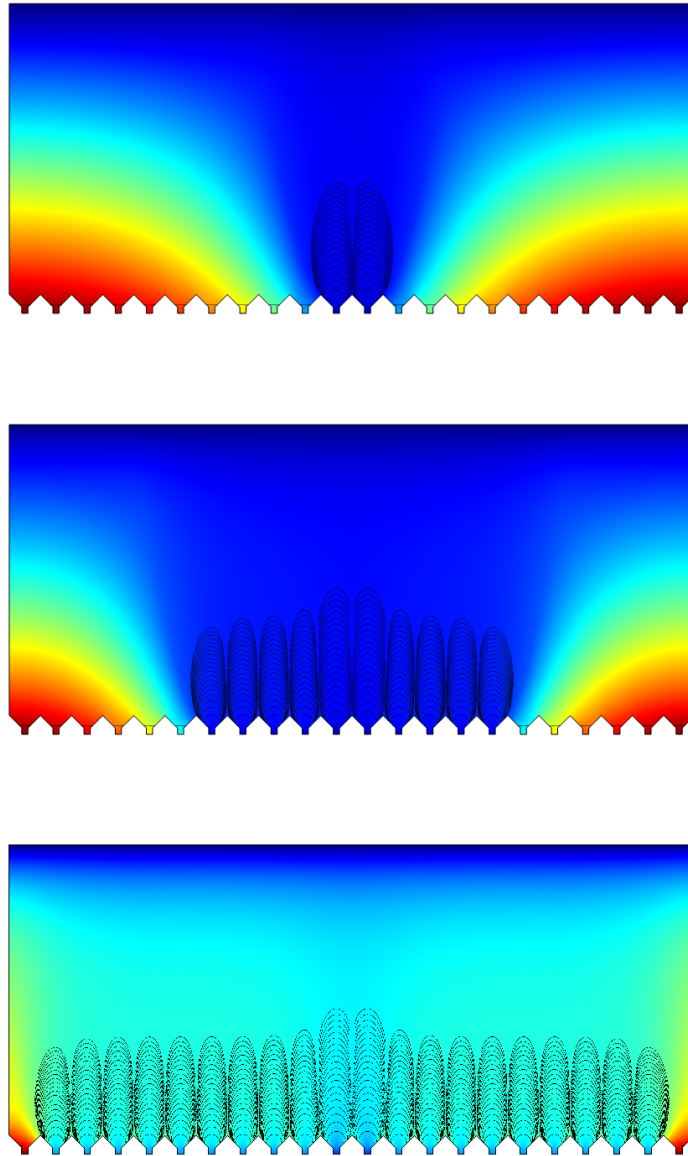


Figura 4.6: Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para 2 sobreex-
tracciones.

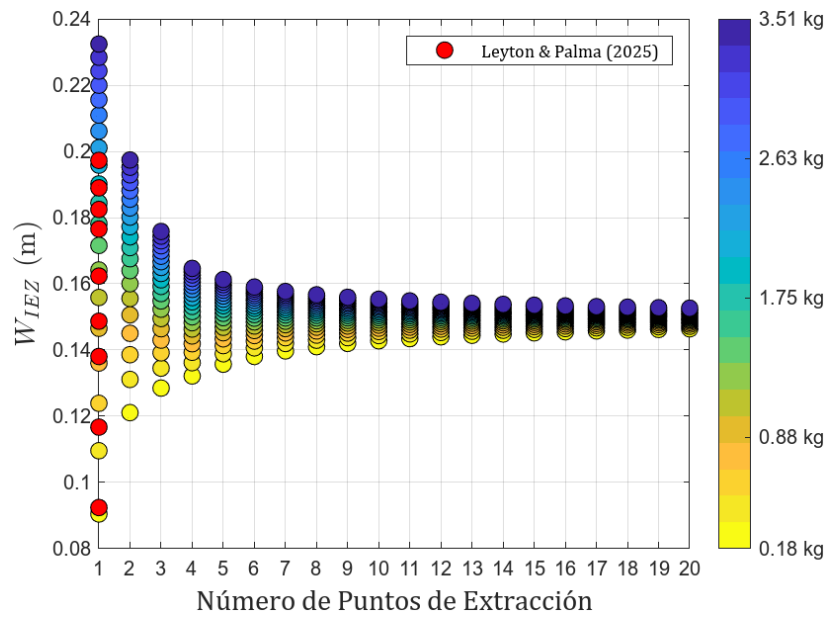


Figura 4.7: Ancho en función del número de puntos de extracción - 2 sobreextracciones.

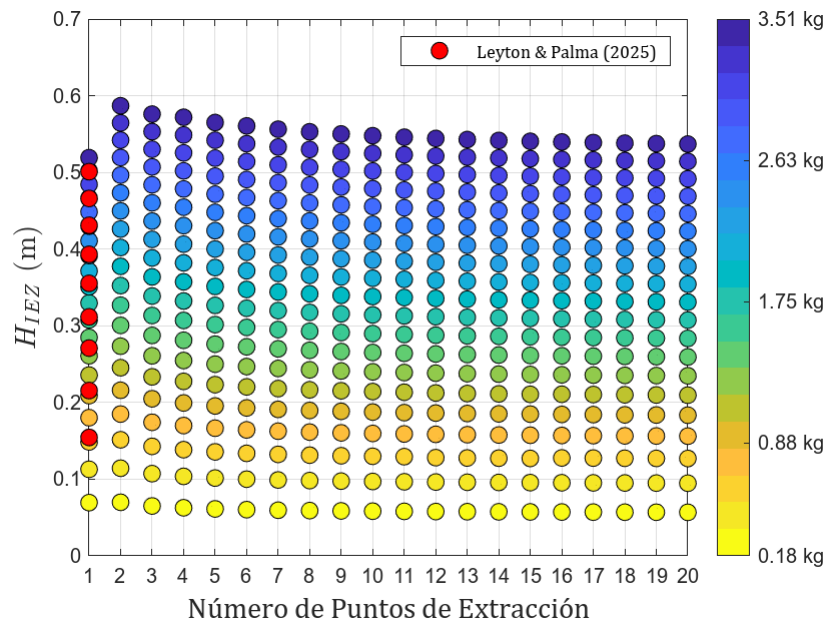


Figura 4.8: Altura en función del número de puntos de extracción - 2 sobreextracciones.

4.1.3. Caso 3: Apertura con 4 sobreextracciones

El caso con cuatro sobreextracciones presenta un patrón similar al del caso anterior, pero con una expansión lateral aún mayor. Sin embargo, su aplicación debe considerarse cuidadosamente en función de las características del macizo rocoso. La Figura 4.9 muestra la evolución del flujo en tres etapas representativas, evidenciando cómo las sobreextracciones progresivas amplifican la propagación horizontal del material movilizado.

En cuanto al ancho, la Figura 4.10 evidencia nuevamente una disminución de la expansión lateral a medida que se activan más puntos de extracción. A diferencia de los casos anteriores, la pendiente de disminución del ancho es ligeramente más suave. Esto se debe a que la configuración con cuatro sobreextracciones produce una expansión lateral elevada desde las primeras etapas, lo que lleva a una estabilización progresiva del sistema sin una reducción tan abrupta del ancho. Esta respuesta sugiere que, al aumentar la intensidad de extracción desde el inicio, el flujo alcanza antes un régimen de propagación lateral amplio y sostenido, con menor variabilidad relativa conforme se suman nuevos puntos.

Respecto a la altura, la Figura 4.11 muestra que la sobreextracción genera una mayor deformación vertical inicial en comparación con los casos anteriores.

Si bien las alturas obtenidas mediante FEM difieren de las reportadas por DEM, esta discrepancia se explica porque el modelo de Morales et al. (2024) no incorpora ciertos efectos físicos relevantes, como la subsidencia del macizo rocoso tras la pérdida de soporte. En contraste, el enfoque DEM permite capturar este comportamiento mediante la interacción entre partículas, lo que se traduce en una mayor deformación vertical. No obstante, dado que la variable de interés en este estudio es la evolución del ancho de la zona de extracción —la cual mostró buena concordancia entre ambos enfoques—, estas diferencias en altura no afectan de forma significativa las conclusiones del análisis.

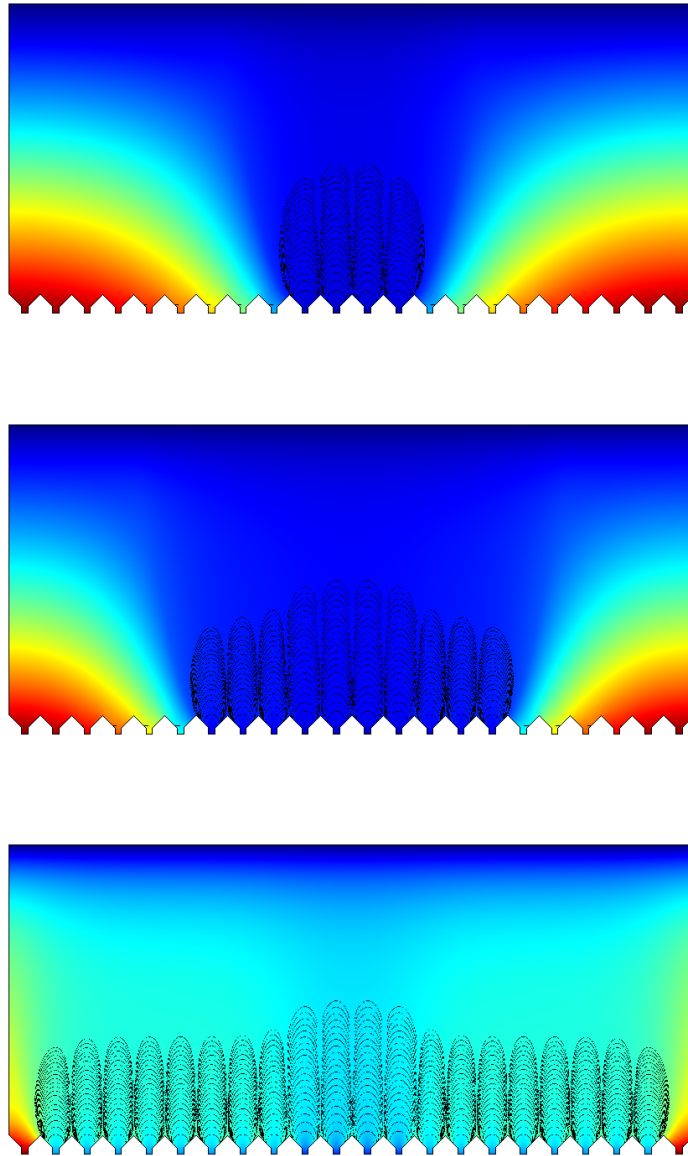


Figura 4.9: Secuencia de evolución del flujo mostrando el campo de presión para 4 sobreextracciones.

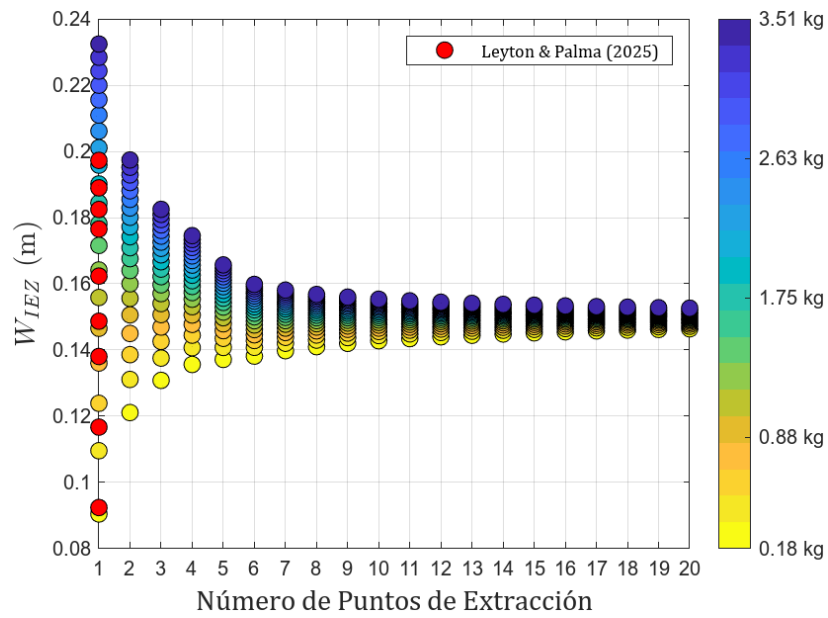


Figura 4.10: Ancho en función del número de puntos de extracción - 4 sobreextracciones

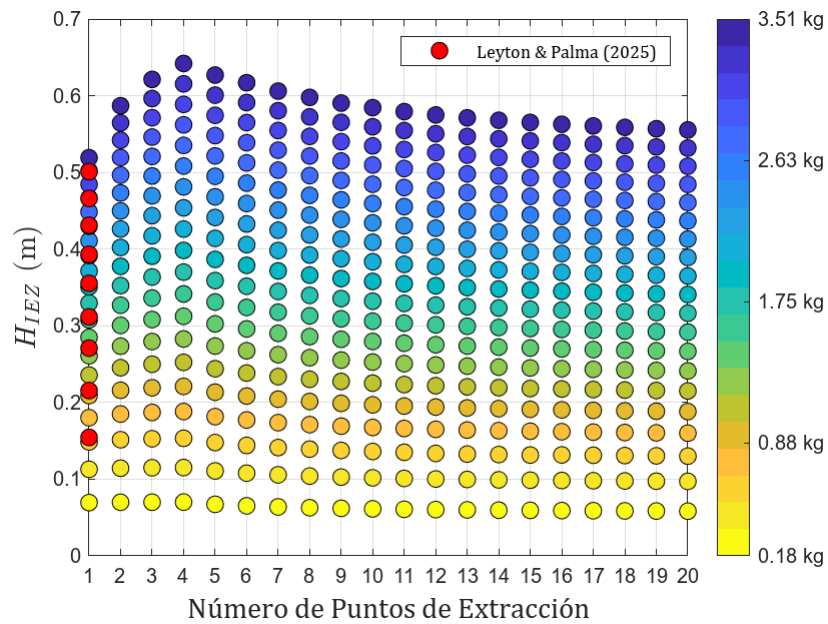


Figura 4.11: Altura en función del número de puntos de extracción - 4 sobreextracciones

4.2. Barrido paramétrico

El análisis de las dimensiones de la IEZ, considerando tanto la altura como el ancho, se presenta para las tres secuencias evaluadas. Se estudió la influencia del diámetro medio de las partículas y el ángulo de fricción interna en la evolución de estas dimensiones a medida que se incrementa el número de puntos.

4.2.1. Variación D_{50}

En el tiraje secuencial, las Figuras 4.12 y 4.13 evidencian que el incremento del diámetro medio de partícula D_{50} afecta de manera opuesta el ancho y la altura de la IEZ. A mayores D_{50} , se observa un aumento inicial en el ancho debido a una mayor expansión lateral del flujo, mientras que la altura disminuye, probablemente por una menor compactación del material. A medida que se activan más puntos de extracción, ambas dimensiones tienden a estabilizarse, independientemente del tamaño de partícula.

Para el primer punto de extracción, el ancho obtenido con $D_{50}=8.4$ mm supera en 35 % al registrado con $D_{50}=1.2$ mm, lo que confirma la tendencia empírica del ábaco de Laubscher (1994) que asocia tamaños de partícula mayores con elipsoides más anchos. Sin embargo, esa diferencia se reduce al 2 % en el punto 20, lo que sugiere que la influencia del D_{50} es relevante sólo en las etapas iniciales: la interacción lateral entre puntos de extracción termina homogeneizando la expansión del flujo y suavizando el efecto granulométrico.

En consecuencia, la caída acumulada de ancho entre el punto 1 y el 20 alcanza un 26 % para $D_{50} = 8.4$ mm frente a apenas un 2 % para $D_{50} = 1.2$ mm, indicando que los materiales gruesos muestran una evolución geométrica más pronunciada, mientras que los finos responden de forma prácticamente uniforme desde las primeras aperturas. Por tanto, el ábaco constituye una guía razonable para definir espaciamientos iniciales, pero el espaciamiento óptimo debería considerar el efecto de la secuencia.

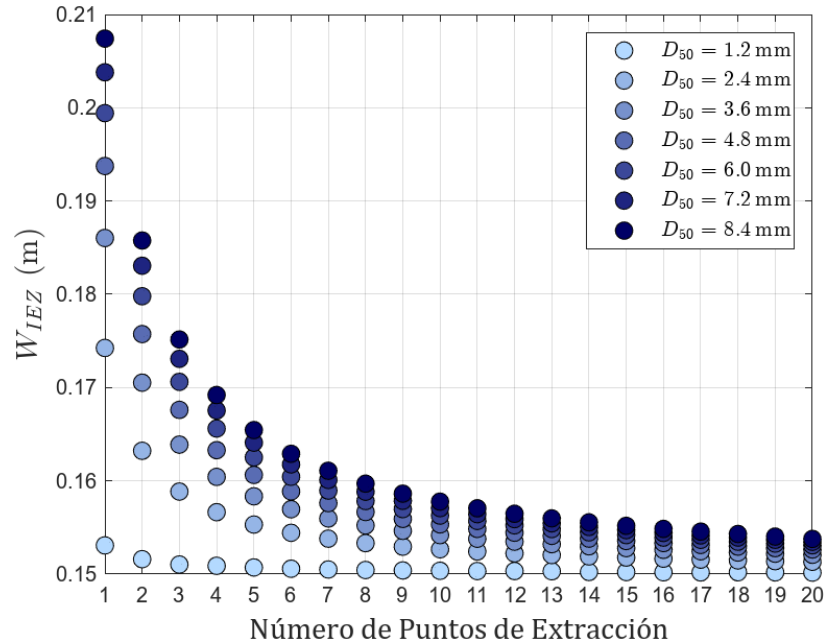


Figura 4.12: Impacto del D_{50} en el ancho - Tiraje Secuencial.

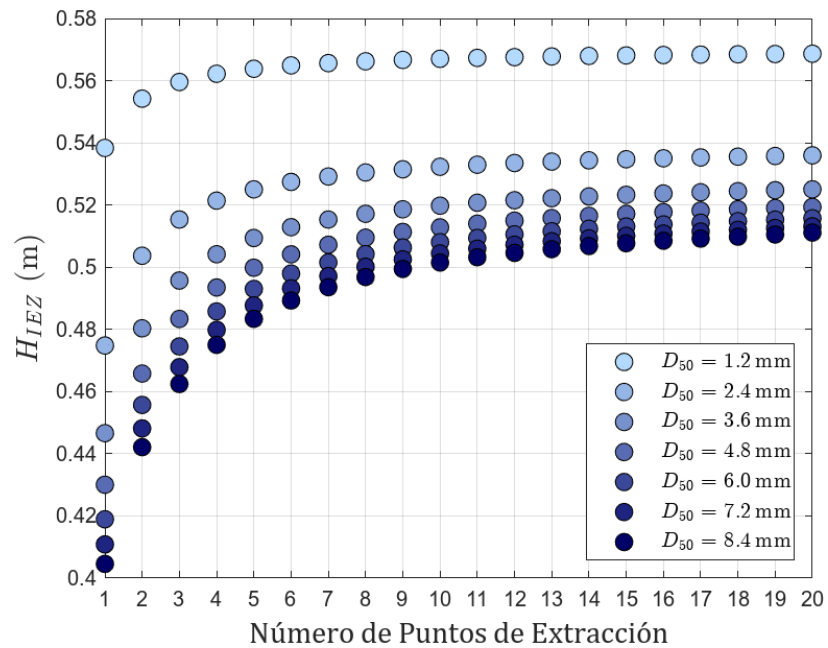


Figura 4.13: Impacto del D_{50} en la altura - Tiraje Secuencial.

Para el caso con dos sobreextracciones, las Figuras 4.14 y 4.15 revelan que las dimensiones iniciales de la IEZ son más sensibles en comparación con el tiraje secuencial. Los anchos iniciales son mayores para partículas más grandes, dado que en las zonas de sobreextracción se intensifica la expansión lateral; mientras que las alturas iniciales son más elevadas en las

regiones con mayor flujo de material, especialmente para D_{50} pequeños.

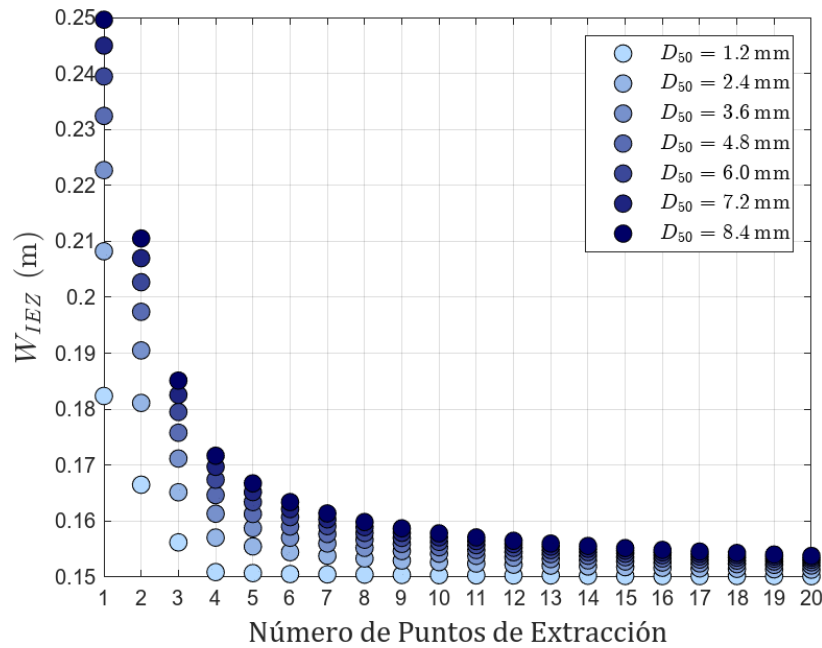


Figura 4.14: Impacto del D_{50} en el ancho - Dos sobreextracciones.

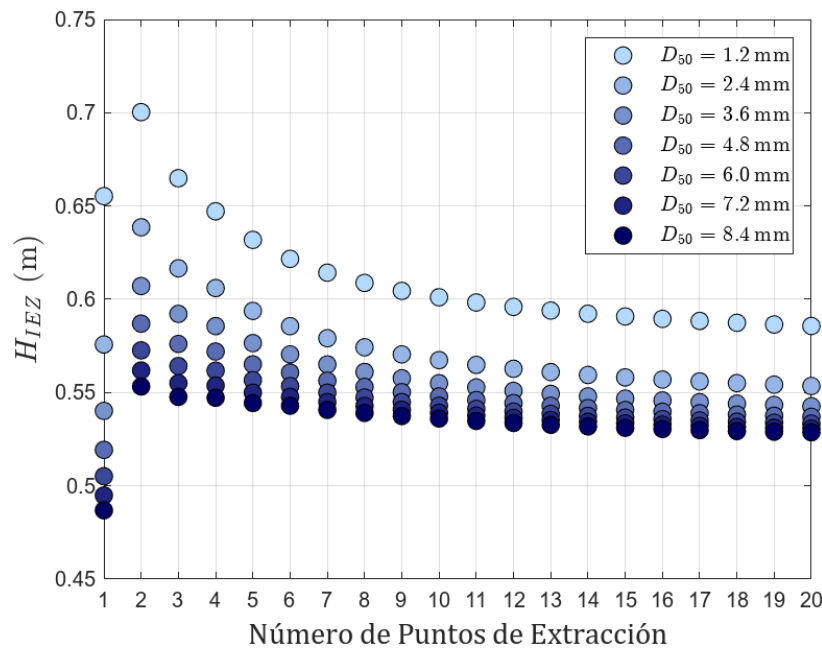


Figura 4.15: Impacto del D_{50} en la altura - Dos sobreextracciones.

Finalmente, en el caso con cuatro sobreextracciones, representado en las Figuras 4.16 y 4.17, se observan las mayores variaciones en las dimensiones iniciales. Sin embargo, ocurre el mismo fenómeno que en los casos anteriores.

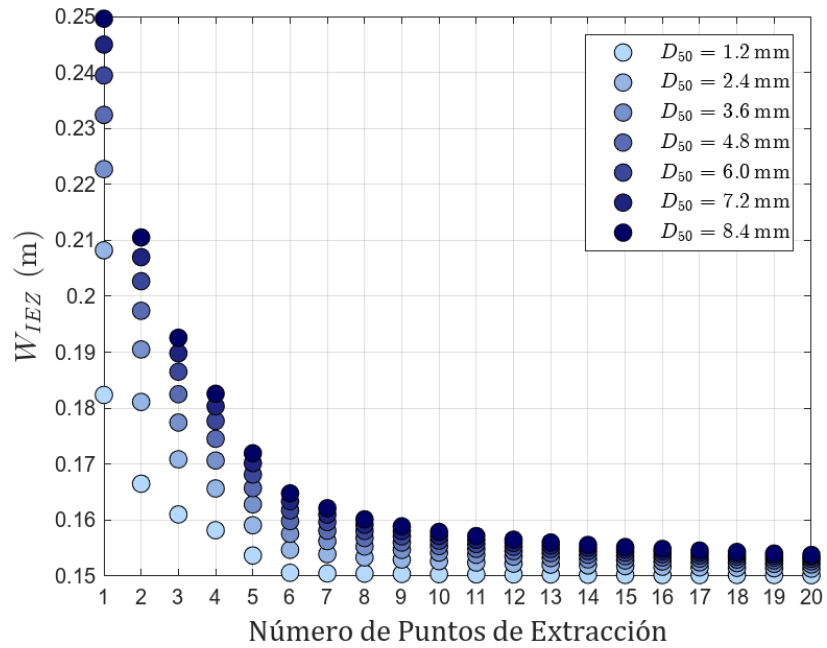


Figura 4.16: Impacto del D_{50} en el ancho - Cuatro sobreextracciones.

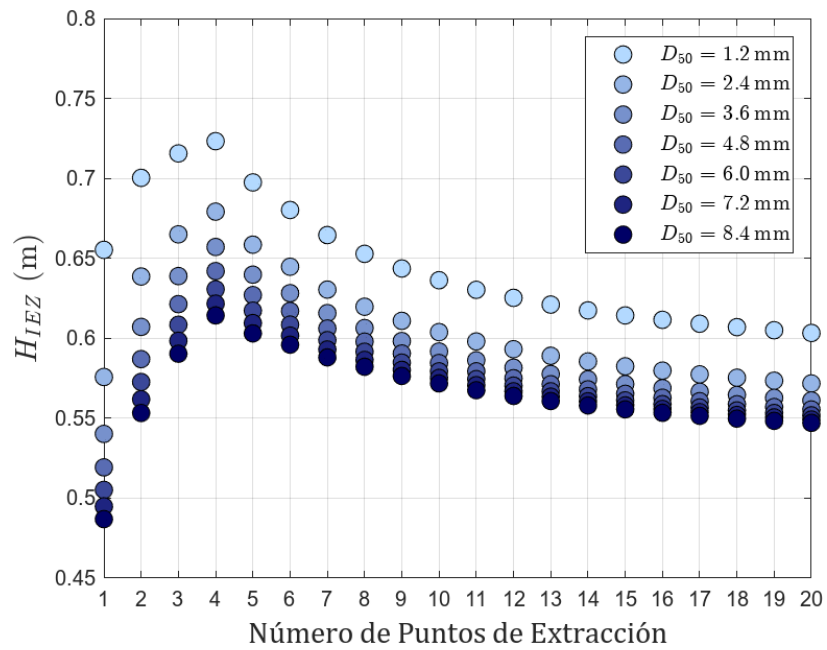


Figura 4.17: Impacto del D_{50} en la altura - Cuatro sobreextracciones.

4.2.2. Variación φ

En el tiraje secuencial, las Figuras 4.18 y 4.19 muestran que un aumento en el ángulo de fricción φ produce una disminución del ancho de la IEZ y un incremento en su altura. Esto se debe a que una mayor fricción interna reduce la expansión lateral del flujo, canalizando el movimiento en dirección vertical. A medida que se activan más puntos de extracción, ambas dimensiones tienden a estabilizarse, independientemente del valor de φ .

La influencia de este parámetro en el ancho fue cuantificada al comparar los anchos extremos para $\varphi = 0.174$ rad y $\varphi = 0.474$ rad. En el primer punto de extracción, la diferencia alcanza un 25 %, lo que evidencia una fuerte sensibilidad a la fricción en las etapas iniciales. Esta diferencia disminuye a solo un 2 % en el punto 20, reflejando una progresiva estabilización del sistema. Por otra parte, al analizar la disminución del ancho entre los puntos 1 y 20 para un mismo valor de φ , se observa una caída del 30 % para $\varphi = 0.174$ rad y del 9 % para $\varphi = 0.474$ rad. Esto indica que un menor ángulo de fricción favorece una mayor propagación lateral al inicio, mientras que valores altos del ángulo de fricción restringen la expansión y promueven una evolución más controlada y vertical del flujo.

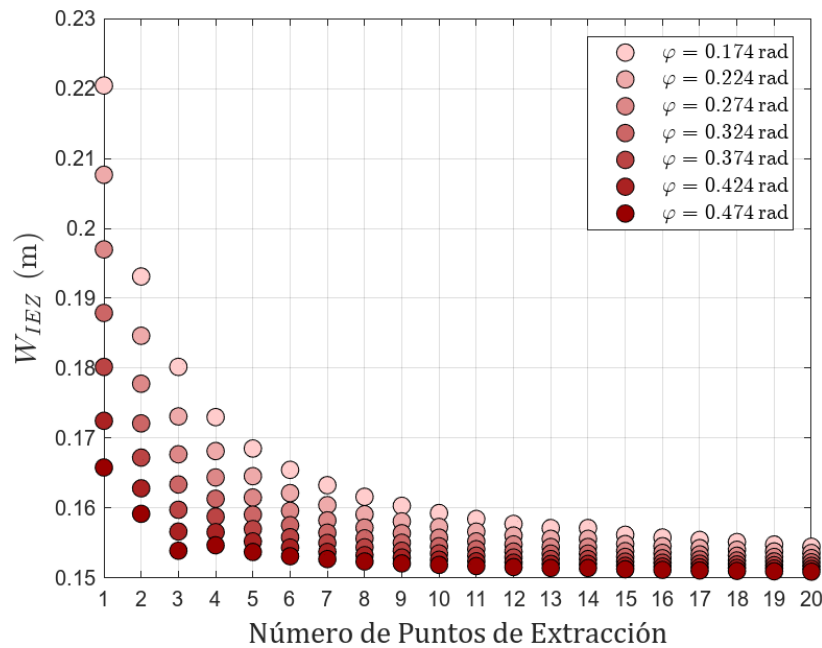


Figura 4.18: Impacto del φ en el ancho - Tiraje Secuencial.

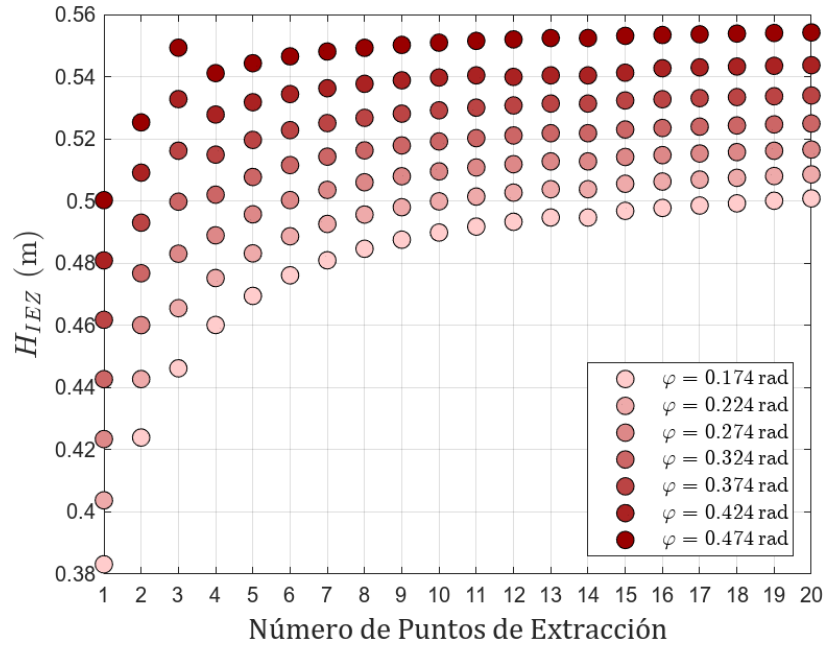


Figura 4.19: Impacto del φ en la altura - Tiraje Secuencial.

En el caso con dos sobreextracciones, mostrado en las Figuras 4.20 y 4.21, se observa que el comportamiento general es consistente con el tiraje secuencial, pero las variaciones son más marcadas en las zonas de mayor flujo. El ancho decrece y la altura se incrementa aún más para ángulos mayores, debido a la concentración del material en las áreas de sobreextracción.

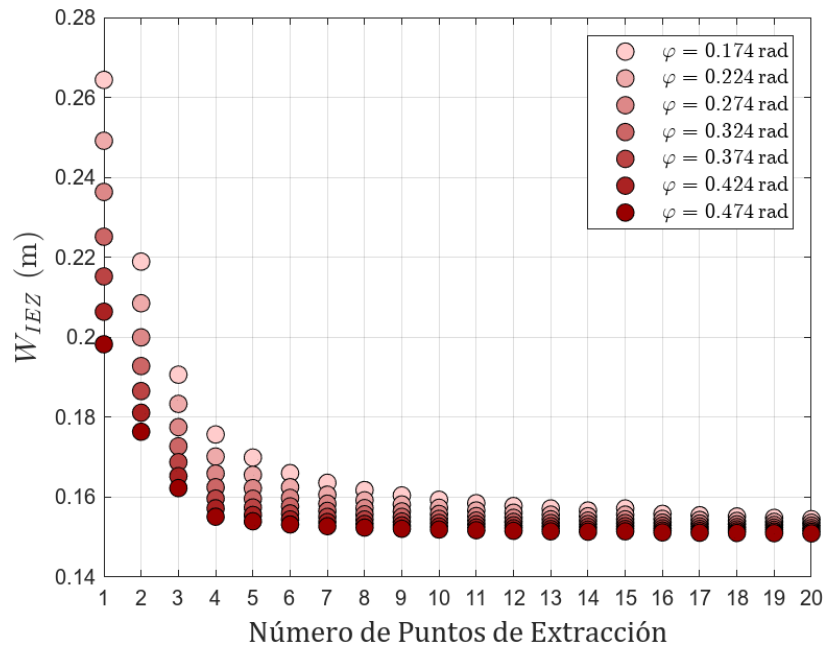


Figura 4.20: Impacto del φ en el ancho - Dos sobreextracciones.

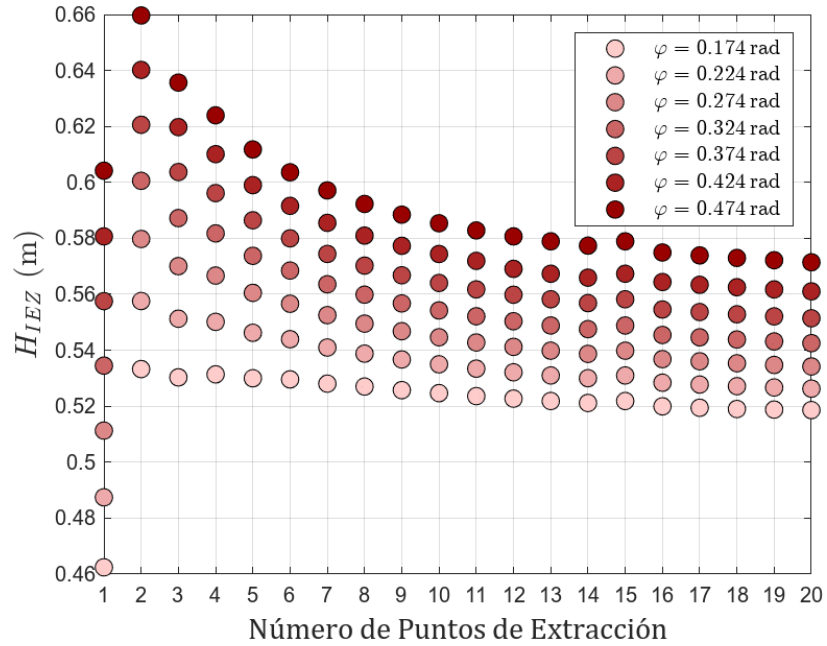


Figura 4.21: Impacto del φ en la altura - Dos sobreextracciones.

Finalmente, en el caso con cuatro sobreextracciones, representado en las Figuras 4.22 y 4.23, se observa un comportamiento similar al de las demás secuencias en términos generales. Sin embargo, en los anchos se obtienen valores mayores en los puntos correspondientes a las sobreextracciones.

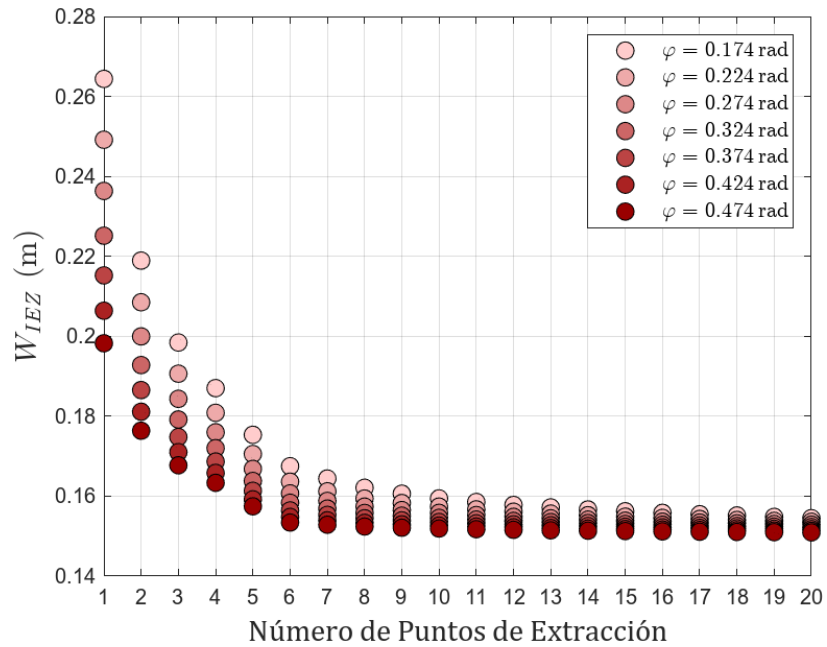


Figura 4.22: Impacto del φ en el ancho - Cuatro sobreextracciones.

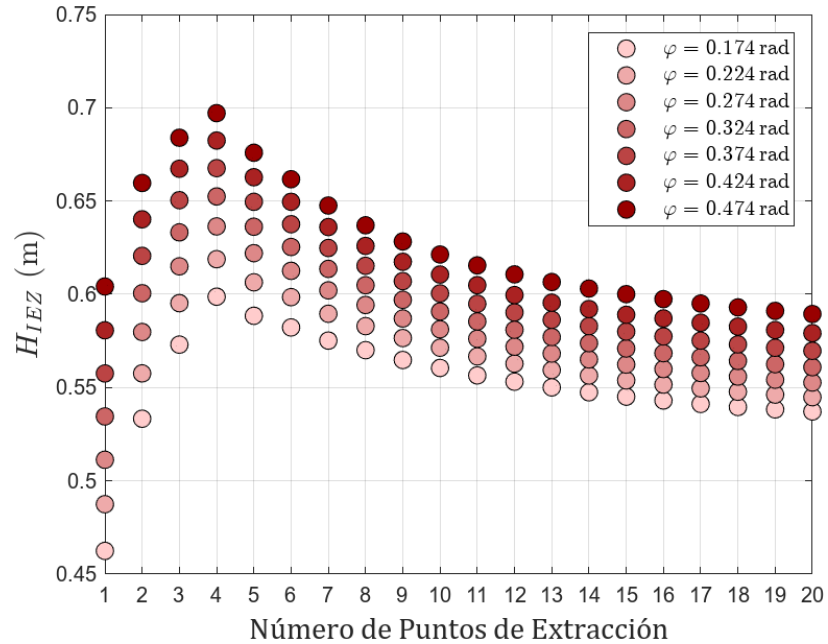


Figura 4.23: Impacto del φ en la altura - Cuatro sobreextracciones.

Los yacimientos con alta fricción interna requieren una mayor tasa de extracción para compensar la menor movilidad del material. Este ajuste puede incrementar el consumo energético, afectando el costo operativo del proceso.

Las Figuras 4.24 y 4.25 presentan los resultados consolidados del W_{IEZ} para distintas configuraciones de secuencia. De forma análoga, las Figuras 4.26 y 4.27 muestran la evolución de la H_{IEZ} .

En general, las secuencias con sobreextracciones muestran una mayor sensibilidad a ambos parámetros, amplificando los efectos geométricos del flujo. A partir de 8 a 10 puntos abiertos, los valores tienden a estabilizarse, indicando una transición hacia un régimen estacionario en la evolución geométrica de la zona de extracción.

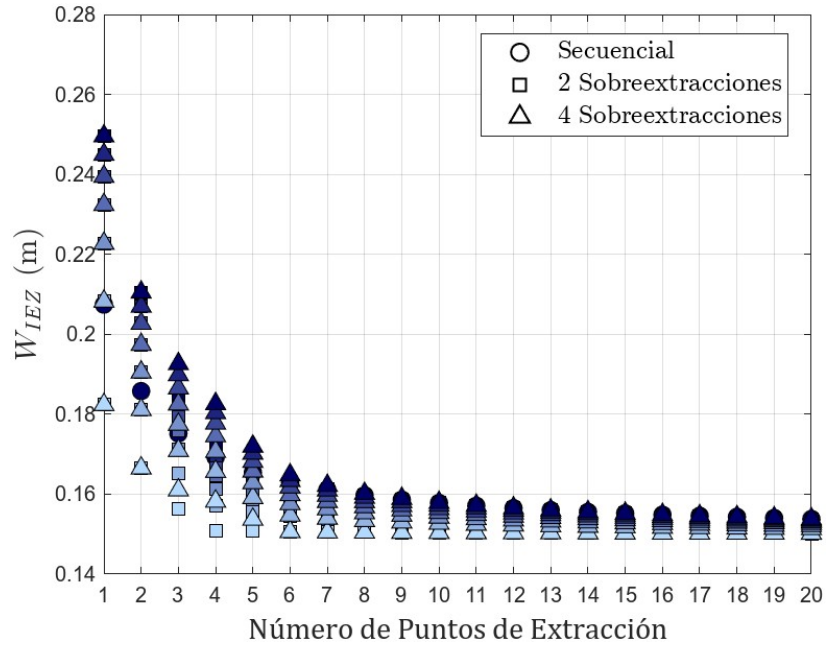


Figura 4.24: W_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores de D_{50} .

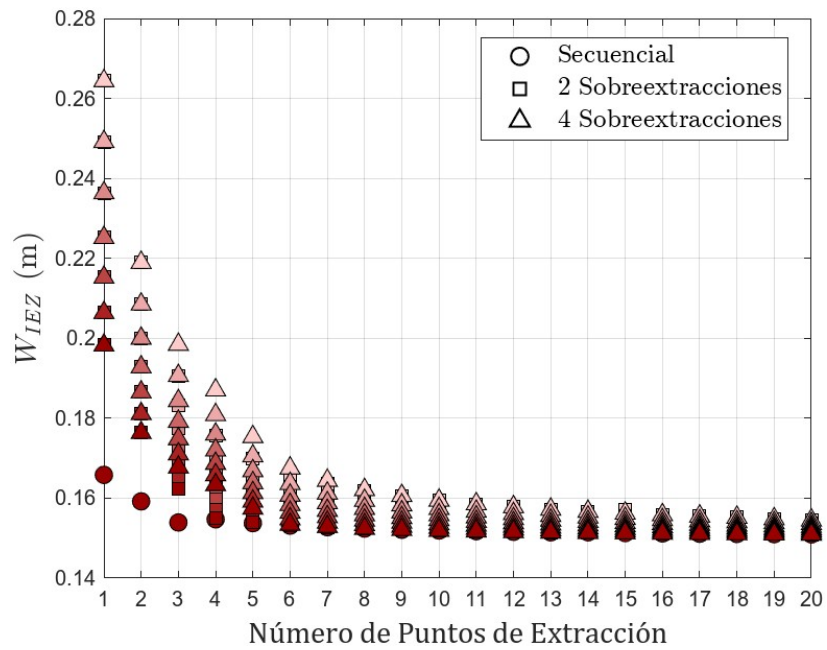


Figura 4.25: W_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores del ángulo de fricción φ .

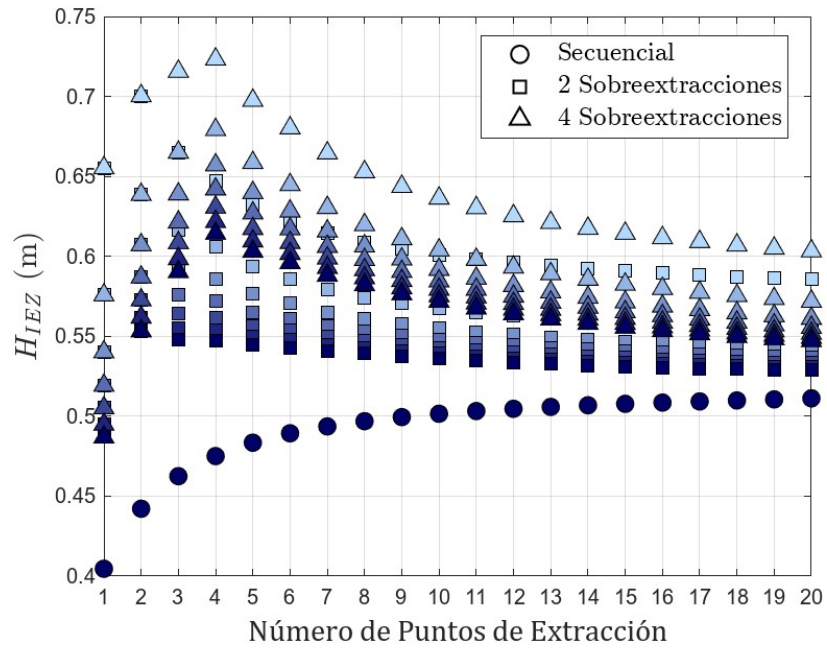


Figura 4.26: H_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores de D_{50} .

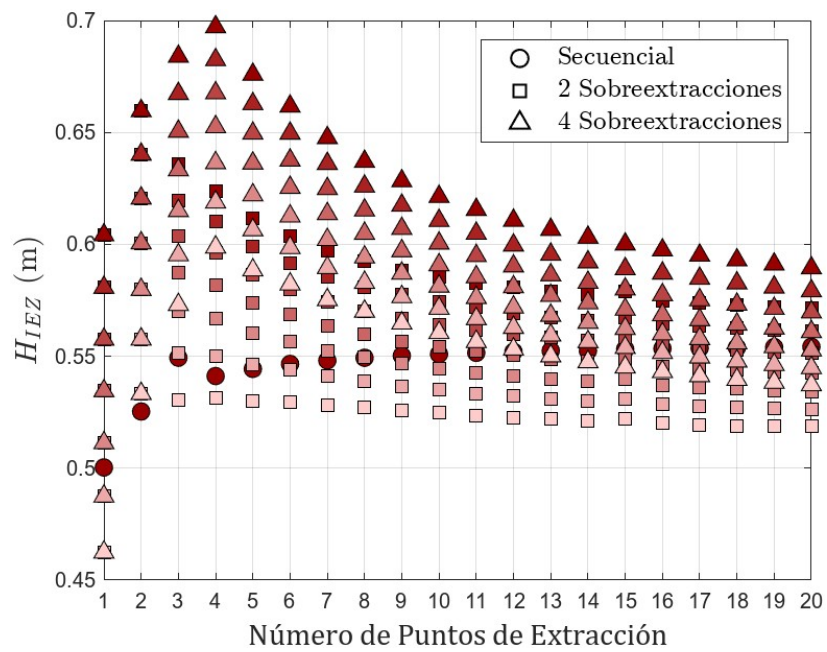
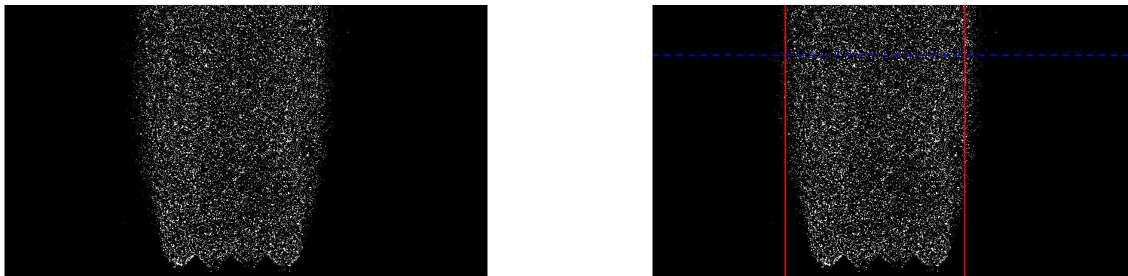


Figura 4.27: H_{IEZ} para distintas secuencias de extracción y valores del ángulo de fricción φ .

4.3. Experimentos

4.3.1. Apertura secuencial

Los resultados obtenidos en los experimentos evidenciaron la influencia directa del número de puntos de extracción abiertos sobre la morfología de la zona de movimiento. La Figura 4.28 muestra un ejemplo de la elipse formada por el flujo de cuarzo, identificada mediante procesamiento de imágenes en MATLAB.



(a) Imagen binarizada

(b) Límites y altura de medición

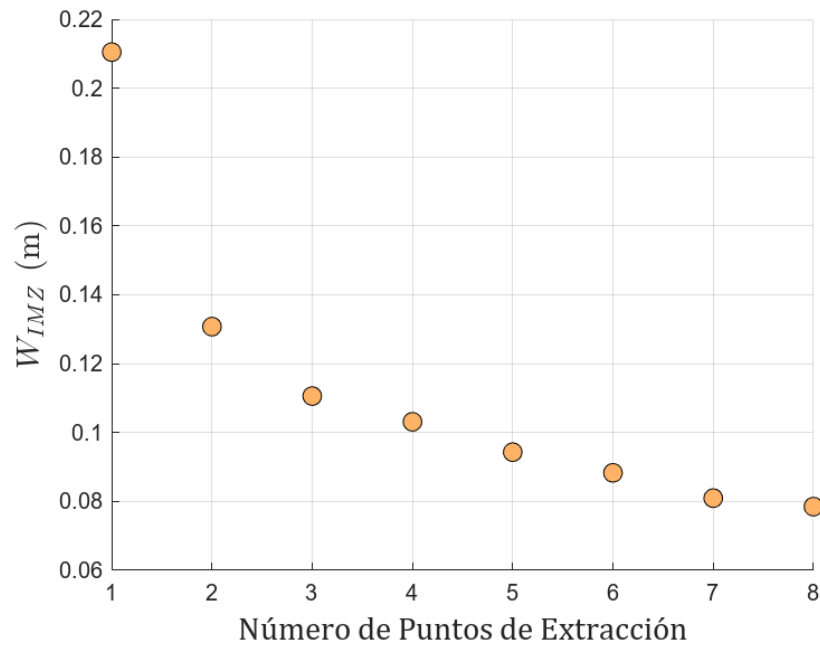
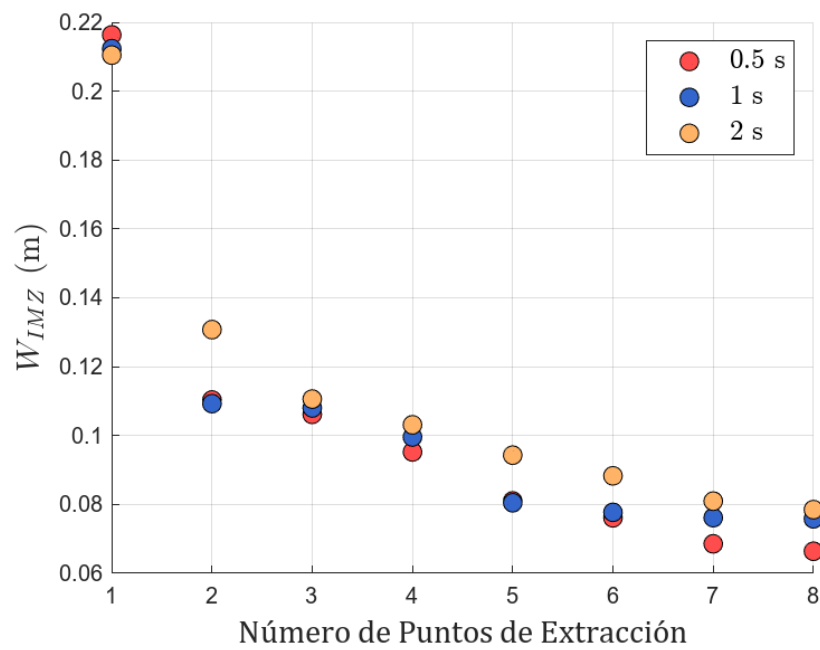
Figura 4.28: Comparación de la imagen binarizada y la delimitación de la región de medición para extracción de 4 puntos.

Los resultados experimentales presentados en la Figura 4.29 muestran que el ancho de la zona de movimiento disminuye progresivamente a medida que se incrementa el número de puntos de extracción. Esta tendencia refleja una relación inversamente proporcional entre la extensión lateral del flujo granular y la cantidad de puntos abiertos, en concordancia con el fenómeno de superposición de zonas de influencia observado en las simulaciones computacionales previas.

Con el objetivo de analizar cómo influye la velocidad de apertura de los puntos en la evolución del flujo, se realizaron ensayos adicionales en los que se capturaron dos fotogramas clave por cada apertura: uno antes del inicio y otro una vez completada la apertura. En este contexto, el tiempo de apertura se define como el intervalo requerido para que un punto de extracción pase desde un estado completamente cerrado a uno totalmente abierto. Este parámetro regula la rapidez con que se habilita el paso del material hacia la zona inferior del modelo.

Se consideraron tres tiempos de apertura distintos: 0.5, 1 y 2 segundos. La Figura 4.30 presenta los resultados obtenidos para cada caso.

Los resultados evidencian que el tiempo de apertura no tiene una influencia significativa sobre el ancho final que alcanza la zona de movimiento. Sin embargo, sí modifica la dinámi-

Figura 4.29: W_{IMZ} en función del número de puntos de extracciónFigura 4.30: W_{IMZ} para diferentes tiempos de apertura.

ca del flujo: aperturas rápidas inducen una respuesta más abrupta y enérgica del mineral, mientras que aperturas más lentas favorecen un desplazamiento progresivo y uniforme. Esta diferencia en la velocidad de transición hacia un estado estable resulta especialmente relevante en el contexto de minería profunda, donde los esfuerzos son muy elevados. En tales condiciones, una apertura súbita podría generar tensiones adicionales en las zonas adyacentes, afectando la estabilidad de los caserones, los puntos de extracción o incluso la infraestructura de soporte (Garcés et al. 2020; Shea et al. 2018).

4.3.2. Análisis estadístico

Para evaluar la confiabilidad de las mediciones y cuantificar la variabilidad en la determinación del ancho de la elipse de movimiento, se realizaron 90 experimentos adicionales en configuraciones de 2, 5 y 8 puntos de extracción. Esto permitió estimar la dispersión de los datos y calcular el coeficiente de variación asociado a cada caso.

La Tabla 4.1 presenta los valores promedio del ancho, la desviación estándar y el coeficiente de variación de la MZ obtenidos a partir de la muestra experimental.

Tabla 4.1: Estadísticas descriptivas de la MZ.

N°	\bar{W}_{MZ} (mm)	σ (mm)	Error (%)
2	318.66	15.79	4.9
5	469.18	16.16	3.4
8	654.82	25.25	3.9

Los resultados muestran coeficientes de variación inferiores al 5% en todas las configuraciones analizadas. La medición del ancho se realizó con un algoritmo en MATLAB, que compara imágenes antes y después del movimiento, genera una imagen de diferencia y extrae un perfil horizontal binarizado a una altura fija. A partir de los extremos laterales detectados se calcula el ancho en milímetros. El coeficiente de variación se obtiene como la razón entre la desviación estándar y el promedio, expresado en porcentaje.

La Tabla 4.2 presenta los valores promedio y la dispersión obtenida para la IMZ, calculada a partir del subconjunto de área aislada dentro de la zona de movimiento total.

Tabla 4.2: Estadísticas descriptivas de la IMZ.

N°	\overline{W}_{IMZ} (mm)	σ (mm)
2	159.33	11.16
5	93.83	7.23
8	81.85	8.93

4.4. Comparación con simulaciones numéricas

El ancho adimensional de la zona de extracción se define como:

$$W^* = \frac{W}{W_p}, \quad (4.1)$$

donde W representa el ancho característico obtenido según la metodología utilizada: en el caso experimental, corresponde al ancho de la zona de movimiento aislada observada; mientras que en las metodologías computacionales, se refiere al ancho de la zona de extracción aislada determinada en las simulaciones. Por su parte, W_p denota el ancho del punto de extracción utilizado en cada caso.

Con el fin de replicar el fenómeno previamente observado tanto experimentalmente como en simulaciones computacionales con el método de elementos finitos, se llevaron a cabo simulaciones adicionales en el software de elementos discretos EDEM. Para estas simulaciones, se definieron las propiedades físicas y mecánicas del material, así como su granulometría, según lo indicado en la Tabla A.3 y la Tabla A.4, respectivamente.

La Figura 4.31 presenta una comparación entre los resultados experimentales y las simulaciones realizadas tanto en COMSOL como en EDEM. En ella se observa una tendencia decreciente en el ancho adimensional conforme se incrementa el número de puntos de extracción. Aunque ambas herramientas numéricas reproducen adecuadamente esta tendencia, los valores obtenidos son menores que los observados experimentalmente.

Para analizar con mayor claridad el comportamiento individual de cada metodología, se presentan en las Figuras 4.32 a 4.34 las curvas del ancho por separado. Se aprecia que la pendiente de disminución es más pronunciada en los resultados experimentales, mientras que las simulaciones presentan una caída más suave.

Cabe destacar que las simulaciones en EDEM se enfocaron principalmente en reproducir el comportamiento cualitativo del fenómeno y validar la tendencia decreciente del ancho de la zona de extracción, más que en alcanzar una cuantificación exacta. Dado que las propiedades del modelo discreto no son equivalentes a las del sistema físico ni a las empleadas en elementos finitos, no se buscó homología directa, sino coherencia en la evolución de la variable con el

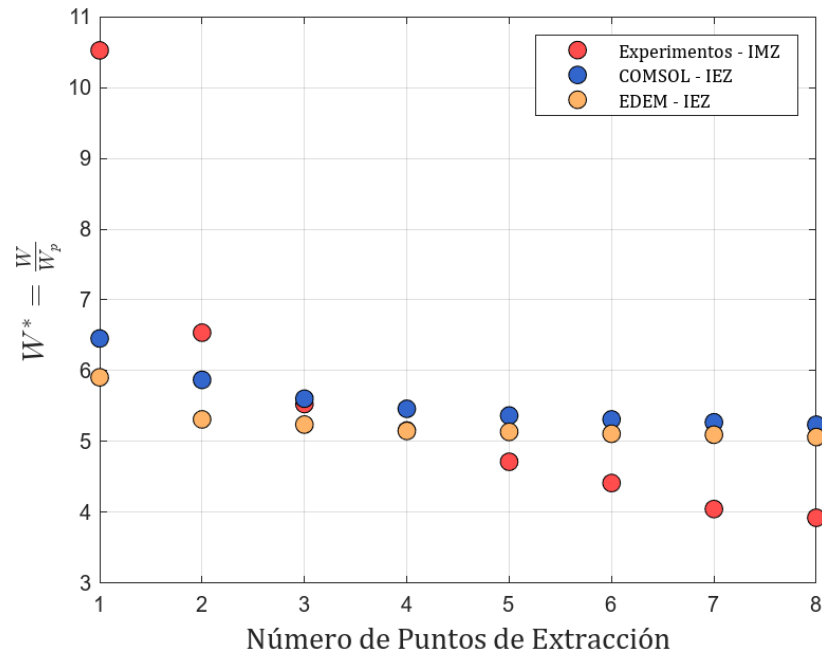
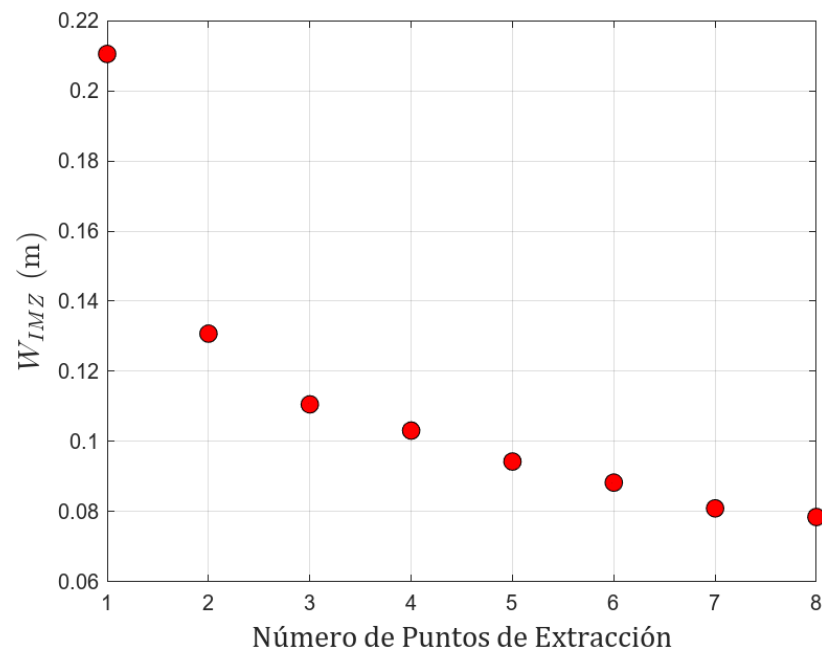
Figura 4.31: Comparación del ancho adimensional W^* .

Figura 4.32: Evolución del ancho en experimentos físicos.

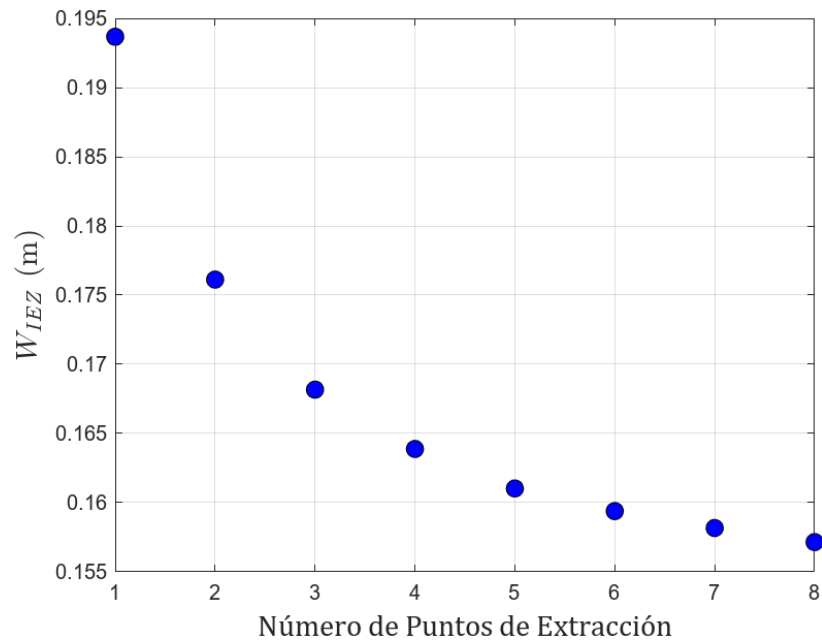


Figura 4.33: Evolución del ancho en simulaciones FEM (COMSOL).

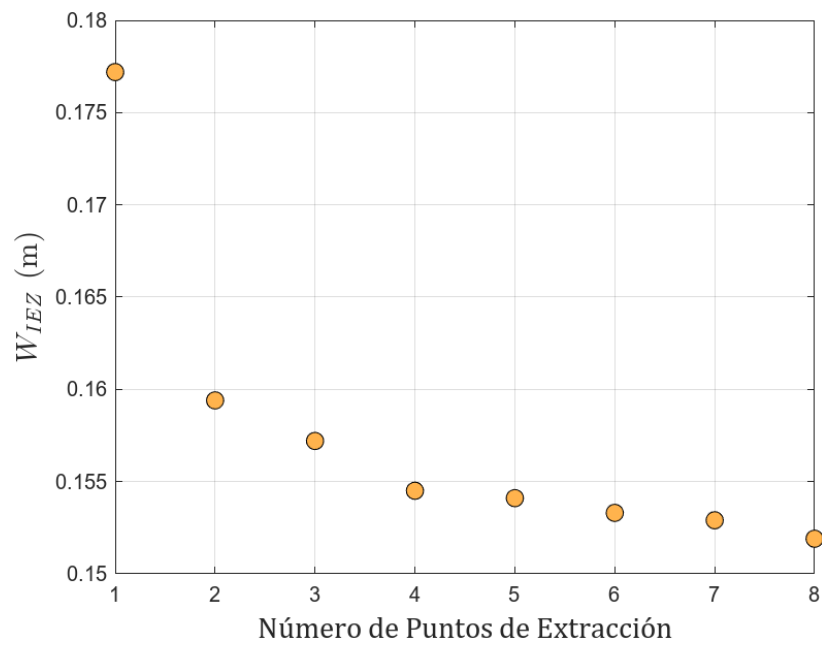


Figura 4.34: Evolución del ancho en simulaciones DEM (EDEM).

número de aperturas. Además, se observó que los tiempos de simulación en EDEM fueron considerablemente mayores en comparación con COMSOL, lo que limita su aplicabilidad para análisis rápidos.

Desde una perspectiva cuantitativa, se identificó que la reducción total del ancho adimensional, desde la primera a la última apertura, fue de un 63 % en los ensayos experimentales, frente a un 20 % en COMSOL y un 14 % en EDEM. Esta diferencia refuerza la necesidad de mejorar la calibración de los modelos, afinando parámetros como la fricción, la distribución de tamaños de partículas y la inclusión de efectos de heterogeneidad y escala.

Para examinar con mayor detalle las discrepancias entre los enfoques experimental y numérico, se realizó una comparación directa entre los valores obtenidos en el laboratorio y aquellos obtenidos a partir de simulaciones. La Figura 4.35 presenta esta comparación utilizando un promedio entre las curvas numéricas.

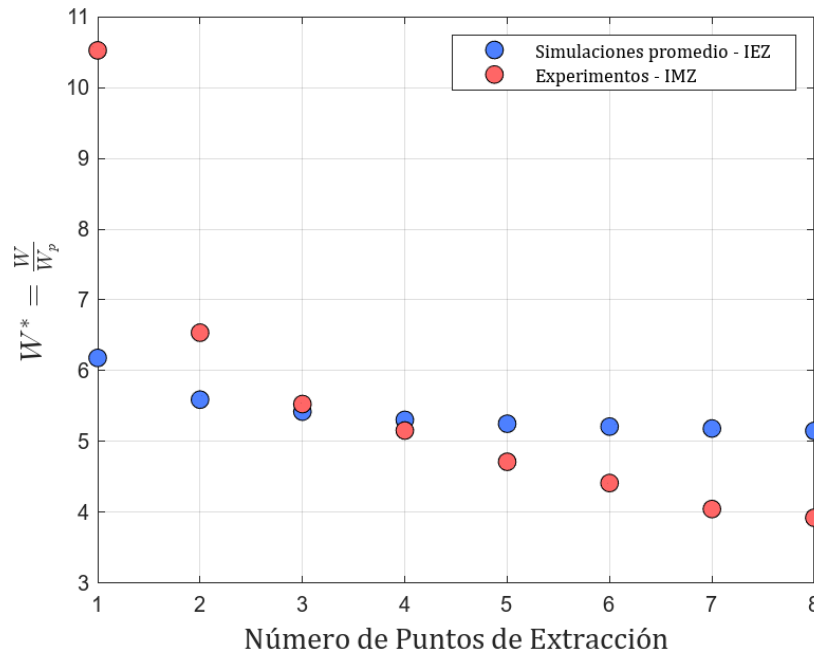


Figura 4.35: Comparación entre resultados experimentales y simulaciones promediadas del ancho adimensional.

Se observa que, si bien ambas curvas siguen una tendencia decreciente, los valores experimentales son consistentemente mayores. Esta diferencia se atribuye a que el método experimental registra la extensión completa del material en movimiento, mientras que las simulaciones identifican únicamente la zona extraída. A medida que se incrementa el número de puntos, la diferencia entre ambos enfoques tiende a reducirse, lo que sugiere una convergencia en la geometría del flujo en estados más desarrollados.

Para cuantificar dicha discrepancia se definió el parámetro de razón experimental:

$$R_{exp} = \frac{W_{IMZ}}{W_{IEZ}}, \quad (4.2)$$

el cual indica el cociente entre el ancho observado en la zona de movimiento y extracción. La evolución de este parámetro se muestra en la Figura 4.36.

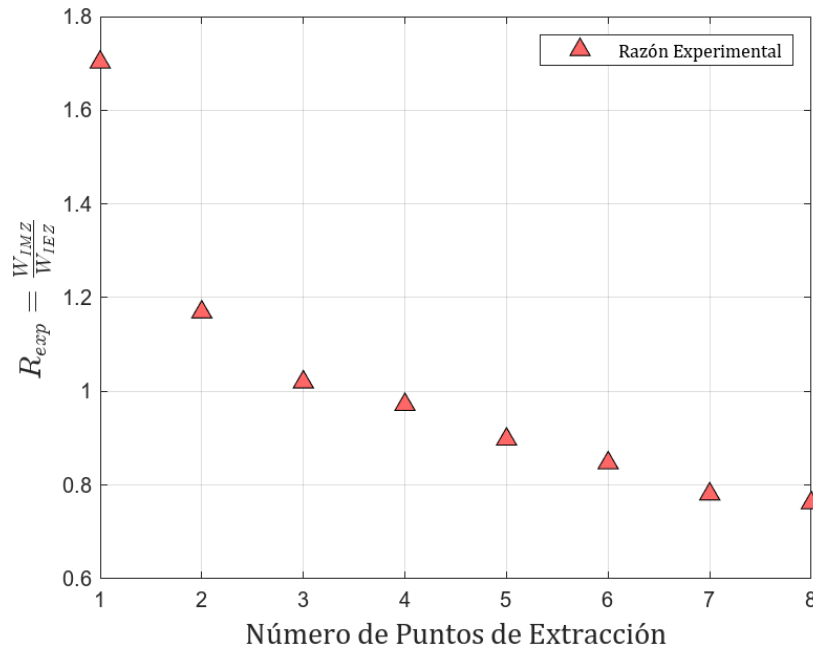


Figura 4.36: Evolución de R_{exp} en función del número de puntos de extracción.

La figura evidencia una disminución progresiva de R_{exp} , desde valores cercanos a 1.7 en la primera apertura hasta valores inferiores a 0.8 en los últimos casos. Este comportamiento confirma que, en etapas iniciales del proceso de hundimiento, la zona movilizada es considerablemente más extensa que la zona estrictamente extraída, mientras que esta diferencia se atenúa conforme aumenta el número de puntos.

Como complemento, en el Anexo A.2 se presentan las formas obtenidas para la zona de extracción en las simulaciones de EDEM. Estas imágenes ilustran la evolución geométrica del material movilizado a medida que se incrementa el número de puntos.

En síntesis, los modelos numéricos reproducen con fidelidad la tendencia observada experimentalmente, aunque con una magnitud más conservadora. Esta diferencia se explica porque el experimento abarca toda la zona de movimiento, mientras que las simulaciones se centran exclusivamente en la extracción. Lo anterior refuerza la necesidad de desarrollar metodologías experimentales que permitan aislar con mayor precisión la zona de extracción, mejorando así la capacidad de comparación y validación de modelos computacionales.

4.5. Modelo matemático

Con el objetivo de cuantificar la geometría de la zona de extracción aislada W_{IEZ} , a partir de los resultados obtenidos mediante barridos paramétricos, se propone un modelo empírico basado en análisis dimensional. El parámetro adimensional de interés es la razón entre el ancho extraído y el ancho del punto de extracción, expresado como:

$$\Pi_1 = \frac{W_{IEZ}}{W_p} \quad (4.3)$$

Para capturar las principales variables que condicionan la propagación lateral del flujo, se definieron los siguientes grupos adimensionales:

$$\Pi_2 = \frac{D_{50}}{W_p}, \quad \Pi_3 = \tan(\varphi), \quad \Pi_4 = \frac{S}{3}, \quad \Pi_5 = \frac{N_p}{20}$$

donde D_{50} es el diámetro medio del material fragmentado, φ el ángulo de fricción interna del material, S el tipo de secuencia de extracción (codificada como 1 para secuencial, 2 para dos sobreextracciones y 3 para cuatro sobreextracciones), y N_p el número total de puntos de extracción. La normalización de S y N_p permite unificar sus escalas con respecto al resto de las variables.

El comportamiento de Π_1 se modeló mediante una ley potencial de la forma:

$$\Pi_1 = a_1 \Pi_2^{a_2} \Pi_3^{a_3} \Pi_4^{a_4} \Pi_5^{a_5} \quad (4.4)$$

Los coeficientes a_i fueron ajustados mediante el algoritmo no lineal de Levenberg–Marquardt, minimizando la suma de los errores cuadráticos entre los valores simulados y los predichos. El ajuste convergió con los siguientes parámetros:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.394 \\ 0.047 \\ -0.084 \\ 0.031 \\ -0.107 \end{bmatrix}$$

La calidad del ajuste se evaluó con el coeficiente de determinación R^2 , calculado como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (\Pi_{1,\text{obs}} - \Pi_{1,\text{pred}})^2}{\sum (\Pi_{1,\text{obs}} - \bar{\Pi}_{1,\text{obs}})^2} \quad (4.5)$$

obteniéndose un valor de $R^2 = 0.9347$, lo que indica que el modelo explica el 93.47 % de la

variabilidad de los datos. Este alto nivel de ajuste valida tanto la selección de las variables como la estructura funcional propuesta.

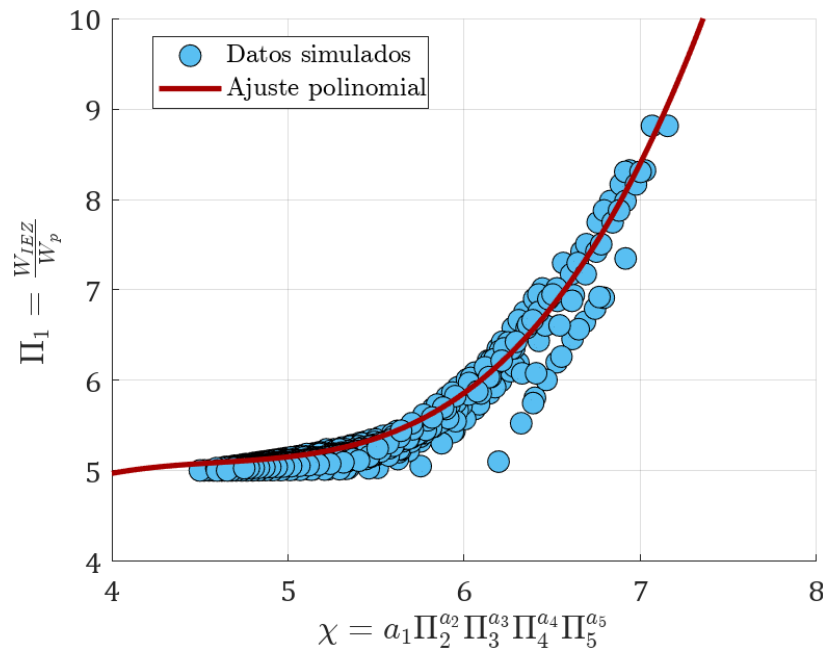


Figura 4.37: Relación entre el parámetro compuesto χ y la razón adimensional.

El análisis de los exponentes revela la sensibilidad del modelo frente a cada variable. El parámetro más influyente es el número de puntos de extracción Π_5 ($a_5 = -0.107$), lo que sugiere que aumentar N_p tiende a reducir el ancho de la zona de extracción. Le sigue el ángulo de fricción Π_3 ($a_3 = -0.084$), cuya mayor pendiente también restringe la propagación lateral.

En contraste, el tamaño de partícula Π_2 muestra un efecto positivo y moderado ($a_2 = 0.047$), asociado a un mayor empuje lateral en materiales más gruesos. Por su parte, el tipo de secuencia Π_4 tiene una influencia menor, pero positiva ($a_4 = 0.031$), indicando que secuencias más intensas podrían expandir levemente la zona de extracción.

En conjunto, estos resultados confirman la pertinencia del modelo propuesto. Su formulación adimensional, baja complejidad y elevado grado de ajuste lo convierten en una herramienta eficaz para predecir la evolución geométrica de las zonas de extracción en función de las variables operacionales.

5. Conclusiones

5.1. Conclusiones

La presente investigación logró cuantificar con precisión la evolución geométrica de la zona de extracción en minería por hundimiento, validando un modelo basado en el Método de Elementos Finitos. Este modelo alcanzó un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9347$, lo que indica que explica un 93.47 % de la varianza observada en los datos experimentales, demostrando su alta fidelidad respecto al comportamiento observado en simulaciones computacionales del flujo granular con apertura progresiva.

En términos operacionales, se observó que la secuencia de apertura influye directamente en la forma de la zona de extracción. La activación de múltiples puntos produjo una disminución del 20 % en el ancho total y un aumento del 25 % en la altura, en comparación con el caso de un solo punto habilitado. Esta sensibilidad fue corroborada en los tres enfoques analizados —ensayos físicos, FEM y DEM—, con reducciones en el ancho adimensional W^* de 63 %, 20 % y 14 %, respectivamente. Las diferencias se atribuyen a que los modelos numéricos representan únicamente la zona de extracción, mientras que los ensayos físicos consideran el volumen total movilizado. El análisis dimensional reveló que el número de puntos de extracción es la variable más influyente, con un exponente negativo de -0.107, seguido por el ángulo de fricción interna con -0.084.

Respecto a la granulometría, se determinó que para un D_{50} de 8.4 mm, el ancho inicial fue un 35 % mayor que para un D_{50} de 1.2 mm, diferencia que se redujo al 2 % tras 20 aperturas, mostrando un efecto transitorio marcado. Por otro lado, al aumentar el ángulo de fricción interna desde 0.174 hasta 0.474 rad, se evidenció una reducción de hasta 25 % en el ancho de la zona de extracción, acompañado de un incremento en la altura, estabilizándose a partir de la décima apertura. Las repeticiones experimentales en configuraciones con 2, 5 y 8 puntos de batea arrojaron coeficientes de variación menores al 5 %, y desviaciones estándar entre 15.8 y 25.3 mm, validando la confiabilidad del enfoque físico empleado.

Se destacó que la comparación con el modelo DEM de Leyton permitió verificar la capacidad del modelo FEM para representar con precisión la expansión horizontal del flujo, aunque con menores deformaciones verticales debido a la ausencia de colapso explícito del macizo suprayacente en su formulación. Asimismo, se analizaron casos de sobreextracción estratégica en dos y cuatro puntos, observándose un aumento significativo en la expansión lateral y

en la conectividad del material movilizado, junto con un mayor hundimiento vertical en las etapas iniciales. Estas estrategias demostraron ser eficaces para inducir una propagación horizontal más pronunciada, aunque su aplicación debe evaluarse considerando las condiciones geomecánicas del macizo.

Este estudio entrega un marco robusto para la toma de decisiones en el diseño y optimización de mallas de extracción en minería subterránea. Se verificó que ajustes en el flujo de materiales o espaciamiento pueden modificar la geometría de la zona de extracción hasta en un 60 %, lo que afecta directamente la recuperación y la dilución. La herramienta predictiva desarrollada permite anticipar la evolución geométrica bajo distintas condiciones operacionales y del material, constituyendo una contribución significativa para el diseño eficiente y seguro de explotaciones mediante técnicas de hundimiento masivo.

Finalmente, este trabajo aporta una metodología integrada de validación numérico-experimental con aplicación directa en minería subterránea, pero también adaptable a otros sistemas de flujo granular confinados. El uso conjunto de experimentación física controlada y modelación FEM calibrada ofrece una vía precisa y económica para la evaluación anticipada del comportamiento geométrico de zonas de flujo.

Si bien el modelo no incorpora fenómenos de colapso ni deformación del macizo, sus resultados permiten construir reglas de diseño cuantitativas para una planificación más eficiente. Se sugiere como trabajo futuro extender el modelo a geometrías tridimensionales, considerar efectos de fragmentación heterogénea y explorar su integración con herramientas de planificación minera para escenarios a mayor escala.

5.2. Recomendaciones

- **Extender la modelación a dominios tridimensionales:** Se sugiere avanzar hacia simulaciones en geometría 3D que representen de forma más precisa la interacción espacial entre puntos de extracción, permitiendo una mejor comprensión de los escenarios reales de minería subterránea.
- **Evaluar variaciones del frente secuencial convencional:** Dado que la apertura progresiva en una sola dirección es una estrategia operativa frecuente, resulta pertinente explorar variantes dentro de este enfoque, como secuencias asimétricas, cambios de ritmo o patrones escalonados. Estas configuraciones podrían influir en la evolución geométrica del flujo y en la eficiencia de extracción.
- **Incluir heterogeneidad geomecánica en el modelo:** Para mejorar la representatividad del macizo rocoso, se recomienda incorporar propiedades variables como cohesión, presencia de fracturas, anisotropía, densidad y estado de esfuerzos. Esto permitiría evaluar la sensibilidad del flujo ante condiciones geológicas más complejas.
- **Diseñar ensayos multifactoriales:** Se propone implementar experimentos que combinen múltiples variables como granulometría, densidad, ritmo de extracción y disposición de los puntos para identificar efectos de interacción entre factores. Esta aproximación facilitaría la construcción de modelos predictivos más robustos para el diseño de mallas en minería por hundimiento.

A. Anexos

A.1. Tablas complementarias

Tabla A.1: Correspondencia entre tiempo y masa extraída.

Tiempo (s)	Masa (kg)
0.00	0.00
0.25	0.18
0.50	0.35
0.75	0.53
1.00	0.70
1.25	0.88
1.50	1.05
1.75	1.23
2.00	1.40
2.25	1.58
2.50	1.75
2.75	1.93
3.00	2.11
3.25	2.28
3.50	2.46
3.75	2.63
4.00	2.81
4.25	2.98
4.50	3.16
4.75	3.33
5.00	3.51

Tabla A.2: Resultados de iteraciones con diferentes combinaciones de u_0 y Y_0 .

Iteración	u_0	Y_0	Error Ancho (%)	Error Altura (%)	Error Combinado (%)
6	0.4200	0.0950	1.6013	6.3243	7.9256
5	0.4250	0.0925	1.4236	6.4604	7.8840
4	0.4250	0.0900	1.0649	6.7436	7.8085
9	0.4500	0.0900	1.9202	6.0551	7.9753
12	0.4000	0.1000	1.5562	6.3743	7.9305
2	0.4500	0.0850	1.1800	6.6410	7.8210
1	0.4000	0.0850	-0.6035	8.0401	8.6436
10	0.5000	0.0900	3.4185	4.7819	8.2004
3	0.5000	0.0850	2.7084	5.3810	8.0894
15	0.4000	0.1100	2.8725	5.3236	8.1961
13	0.5000	0.1050	5.4471	3.0556	8.5027
16	0.5000	0.1100	6.0835	2.5038	8.5873
8	0.4375	0.0950	2.2157	5.8266	8.0423
10	0.4500	0.0950	2.6259	5.4838	8.1097
12	0.5000	0.1000	4.8050	3.6206	8.4256

Tabla A.3: Propiedades de material utilizadas en las simulaciones de EDEM.

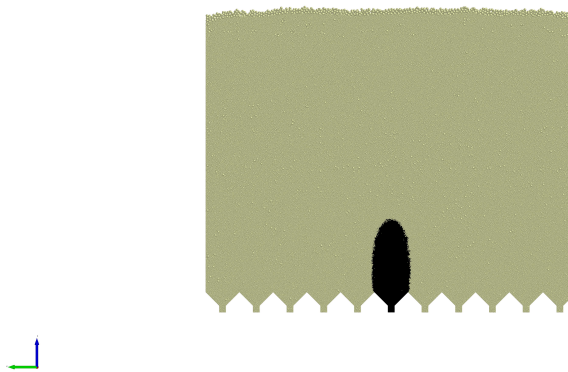
Propiedad	Valor
Densidad (kg/m^3)	2700
Módulo de Corte (MPa)	1.03
Coefficiente de Poisson	0.46
Coefficiente de Restitución	0.30
Coefficiente de Fricción Estática	0.30
Coefficiente de Resistencia Rodadura	0.10

Tabla A.4: Distribución granulométrica utilizada en las simulaciones de EDEM.

% Acumulado	Diámetro	Unidad
100 %	12.20	mm
90 %	6.80	mm
80 %	5.40	mm
70 %	4.90	mm
60 %	4.40	mm
50 %	3.90	mm
40 %	3.40	mm
30 %	3.10	mm
20 %	2.70	mm
10 %	2.20	mm

A.2. Evolución de la forma de la zona de extracción en EDEM

Time: 20 s



Altair EDEM™

Figura A.1: Zona de extracción para apertura 1 en EDEM.

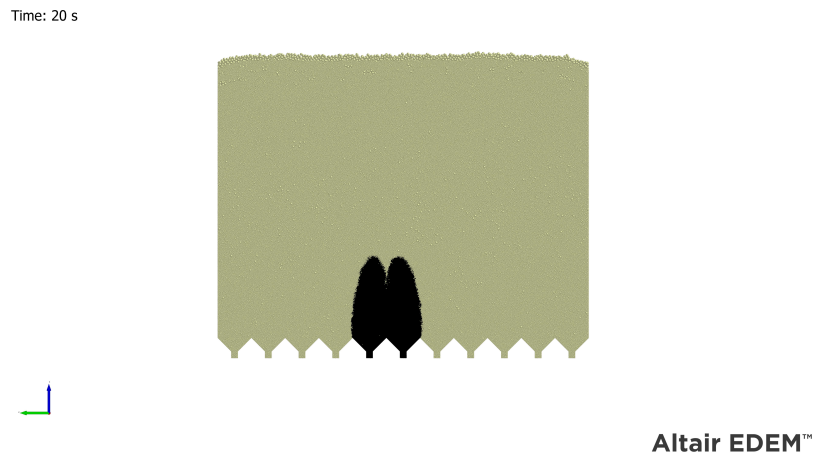


Figura A.2: Zona de extracción para apertura 2 en EDEM.

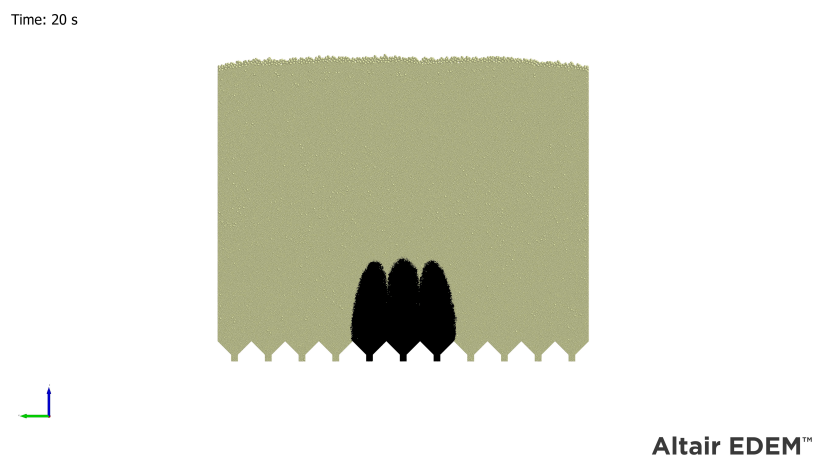


Figura A.3: Zona de extracción para apertura 3 en EDEM.

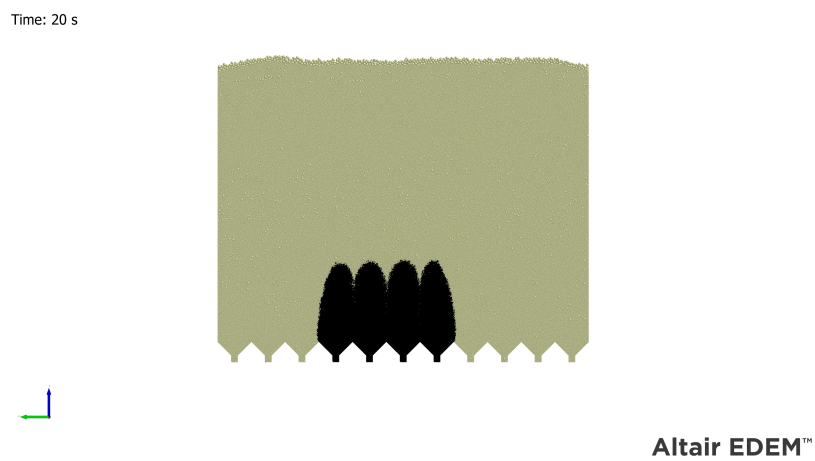


Figura A.4: Zona de extracción para apertura 4 en EDEM.

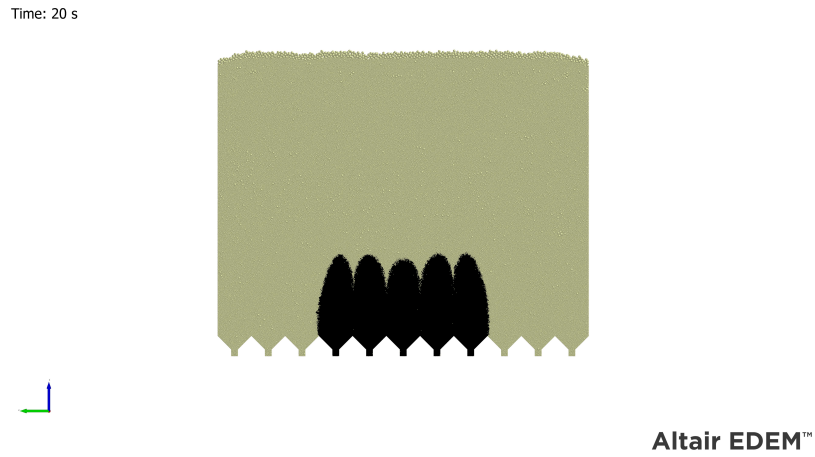


Figura A.5: Zona de extracción para apertura 5 en EDEM.

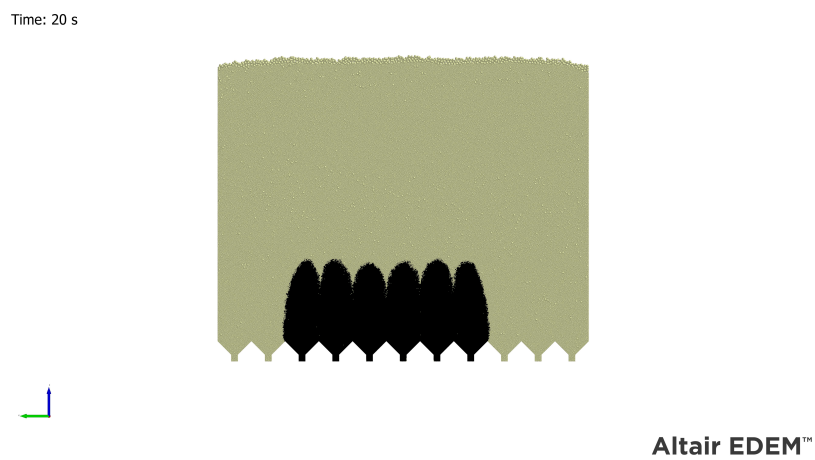


Figura A.6: Zona de extracción para apertura 6 en EDEM.

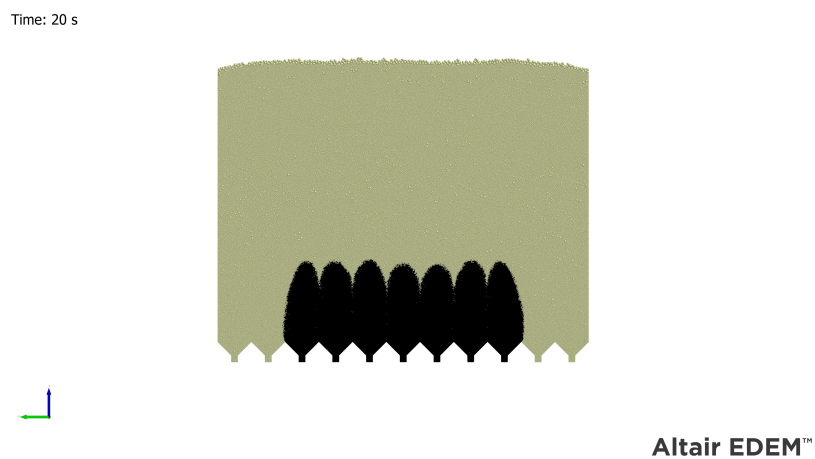


Figura A.7: Zona de extracción para apertura 7 en EDEM.

Time: 20 s

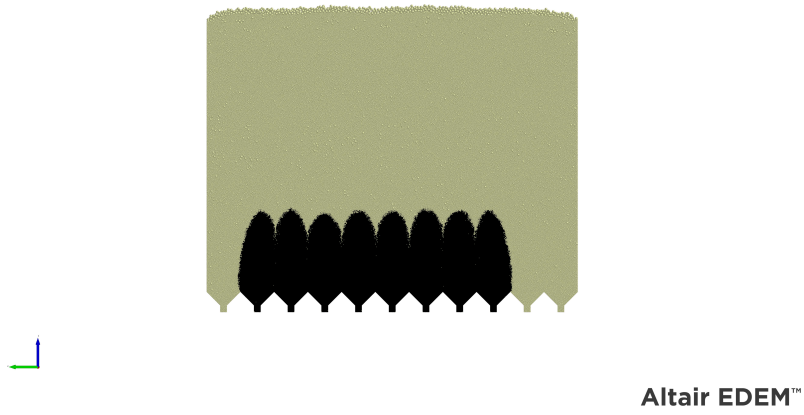


Figura A.8: Zona de extracción para apertura 8 en EDEM.

Bibliografía

- Anderson, J. (1995). *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill.
- Bathe, Klaus-Jürgen (2007). «Finite element method». En: *Wiley encyclopedia of computer science and engineering*, págs. 1-12.
- Bazant, M. (2004). «A Theory of Cooperative Diffusion in Dense Granular Flows». En: *arXiv preprint*.
- Brady, Barry HG y Edwin T Brown (2006). *Rock Mechanics: For Underground Mining*. 3rd. Springer Netherlands.
- Brown, E. (2007). *Block Caving Geomechanics*. 2nd ed. JKMRRC Monograph Series in Mining and Mineral Processing. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, University of Queensland.
- Carrillo, J. (2011). «Consideraciones del mallado aplicadas al cálculo de flujos bifásicos con las técnicas de dinámica de fluidos computacional». En: *Revista de Ingeniería Aplicada*.
- Carvalho, C. (2024). «Desarrollo de Ábaco de Diseño Basado en Nuevo Modelo Fisicomatemático para Minería de Caving en División El Teniente». Santiago, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María.
- Castro, R (2021). «Experimental study of the influence of drawbell geometry on hang-ups in cave mine applications». En: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 54, págs. 1-10.
- Castro, R, RE Gómez y Á Pérez (2022). «Physical modelling as a tool to improve our understanding of mechanisms of cave flow». En: *Caving 2022: Proceedings of the Fifth International Conference on Block and Sublevel Caving*. Australian Centre for Geomechanics, págs. 1071-1088.
- Castro, R. (2007). «A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44.6, págs. 860-870.
- Castro, RL y PS Paredes (2014). «Empirical observations of dilution in panel caving». En: *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 114.6, págs. 455-462.

- Cavieres, P. (2011). «Dimensionamiento de mallas de extracción, bateas recolectoras y pilar corona para método panel caving en roca primaria, mina El Teniente». En: Universidad de Santiago de Chile.
- Choi, Jaehyuk, Arshad Kudrolli y Martin Z Bazant (2005). «Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers». En: *Journal of Physics: Condensed Matter* 17.24.
- Cochilco (2024a). *Medición de Encadenamientos productivos de la industria minera en Chile*.
- (2024b). *Proyección de la producción de cobre en Chile 2023 – 2034*.
- Craig, R. (2004). *Craig's soil mechanics*. CRC Press.
- Cumming-Potvin, Daniel, Johan Wesseloo, ME Pierce, Tryana Garza-Cruz, Lauriane Bouze-ran, SW Jacobsz y E Kearsley (2018). «Numerical simulations of a centrifuge model of caving». En: *Caving 2018: Proceedings of the Fourth International Symposium on Block and Sublevel Caving*. Australian Centre for Geomechanics, págs. 191-206.
- Elmo, D, K Farahmand, S Rogers, K Veltin y J Lett (2022). «An effective numerical method to understand different aspects of cave preconditioning». En: *Caving 2022: Proceedings of the Fifth International Conference on Block and Sublevel Caving*. Australian Centre for Geomechanics, págs. 1337-1350.
- Garcés, D, H Rebolledo y P Miranda (2020). «Incorporating vulnerability of hang-ups and secondary breaking to drawpoints availability for short-term cave plans, El Teniente mine». En: *MassMin 2020: Proceedings of the Eighth International Conference & Exhibition on Mass Mining*. University of Chile, págs. 988-1001.
- Gómez, René y E Labbé (2019). «Una opción para el paso a la minería subterránea masiva: la actual metodología aplicada en Chile del "block caving"». En: *Boletín Geológico y Minero* 130.1.
- Halim, A. (2004). *3D Large Scale Physical Modelling for Studying Interactive Drawing and Drawpoint Spacing in Block Caving Mines*.
- Heslop, T. (1981). «Draw control in caving operations on Southern African chrysotile asbestos mines». En: *Society of Mining Engineers – AIME*, págs. 755-774.
- Hormazabal, E, R Alvarez, A Russo y D Acevedo (2018). «Influence of the undercut height on the behaviour of pillars at the extraction level in block and panel caving operations». En: *Caving 2018: Proceedings of the Fourth International Symposium on Block and Sublevel Caving*. Australian Centre for Geomechanics, págs. 351-362.

- Jagota, Vishal, Aman Preet Singh Sethi y Khushmeet Kumar (2013). «Finite element method: an overview». En: *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)* 10.1, págs. 1-8.
- Janelid, I. (1972). «Study of the gravity flow process in sublevel caving». En: *Proceedings of the International Sublevel Caving Symposium*. Stockholm: Atlas Copco.
- Janelid, I. y R. Kvapil (1966). «Gravity Flow Mechanisms in Sublevel Caving Mines». En: *Caving Methods of Mining*. Society of Mining Engineers, págs. 327-340.
- Jin, Aibing, Hao Sun, Guowei Ma, Yongtao Gao, Shunchuan Wu y Xinqiu Meng (2016). «A study on the draw laws of caved ore and rock using the discrete element method». En: *Computers and Geotechnics* 80, págs. 59-70.
- Jin, Aibing, Hao Sun, Shunchuan Wu y Yongtao Gao (2017). «Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 92, págs. 91-98.
- Kvapil, R. (1965). «Gravity Flow of Granular Materials in Hoppers and Bins». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 2.
- (1982). «The mechanics and design of sublevel caving system». En: *Underground Mining Methods Handbook*. Ed. por W. Hustrulid. New York: SME.
- (2008). *Gravity flow in sublevel and panel caving : a common sense approach*. Luleå University of Technology.
- Laubscher (1994). *Cave Mining - The State of the Art*. Inf. téc.
- Leyton, S. y S. Palma (2024). «Geometric effects of the extraction sequence and number of drawpoints in the IEZ for caving mining». En: *Preprint submitted to Elsevier*.
- Litwiniszyn, J. (1958). «Statistical methods in the mechanics of granular bodies». En: *Rheologica Acta* 1.2, págs. 146-150.
- Marano, G (1980). «The interaction between adjacent draw points in free flowing materials and it application to mining». En: *Chamber of Mines Journal* 22, págs. 25-32.
- Medina, A, JA Cordova, E Luna y C Trevino (1998). «Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2D silo». En: *Physics Letters A* 250.1-3, págs. 111-116.
- Melo, F, F Vivanco, C Fuentes y V Apablaza (2008). «Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45.2, págs. 248-259.

- Morales, Rodolfo, Francisco J Vivanco-Avaria y Sergio Palma (2024). «A novel mathematical approach for gravity-driven granular flows in block caving». En: *Applied Mathematical Modelling* 125, págs. 756-771.
- Mullins, W. (1972). «Stochastic Theory of Particle Flow under Gravity». En: *Journal of Applied Physics* 43.2, págs. 665-678.
- Multiphysics, COMSOL (2023). *Solving Multiphysics Problems*. URL: <https://www.comsol.com/multiphysics>.
- Nedderman, RM y U Tüzün (1979). «A kinematic model for the flow of granular materials». En: *Powder Technology* 22.2, págs. 243-253.
- Peters, D. (1984). «Physical modeling of the draw behavior of broken rock in caving». En: *Colorado School of Mines Quarterly* 79.1, pág. 1.
- Pierce, M. (2010). «A Model for Gravity Flow of Fragmented Rock in Block Caving Mines». PhD Thesis. Brisbane, Australia: The University of Queensland.
- Power, G. (2004). «Modelling granular flow in caving mines: large scale physical modelling and full scale experiments». En.
- Pulgar, S. (2024). «Aplicación de Modelo Físico–Matemático para la Creación de un Ábaco de Diseño con Datos de Chuquicamata Subterránea». Santiago, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María.
- Reddy, J. (1994). *Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill.
- Reveco, Manuel (2014). «Diseño de malla de producción para el método de explotación panel caving en la mina Chuquicamata Subterránea». Memoria de título. Universidad de Chile.
- Reyes Rojas, Juan Pablo (2021). «Análisis experimental de la interacción de zonas de extracción en minería por hundimiento mediante modelos físicos 2D y 3D». Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas. Valparaíso, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María.
- Rodríguez, F, A Berg, JC Videla, N Jamett, D Morales, R Castro y L Arancibia (2020). «Blasting design and drawbell implementation at the Chuquicamata Underground mine». En: *MassMin 2020: Proceedings of the Eighth International Conference & Exhibition on Mass Mining*. University of Chile, págs. 897-909.
- Rosin- Rammeler, P. (1933). «The laws governing the fineness of powdered coal». En: *J. Inst. Fuel* 7.31, págs. 29-36.

- Sainsbury, DP y DM Loring (2013). «Analysis of extraction level performance at the Henderson Mine». En: *Ground Support 2013: Proceedings of the Seventh International Symposium on Ground Support in Mining and Underground Construction*. Australian Centre for Geomechanics, págs. 539-550.
- Salager, J. (2007). *Granulometría teoría*. Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.
- Samadani, Azadeh, A. Pradhan y A. Kudrolli (1999). «Size segregation of granular matter in silo discharges». En: *Physical Review E* 60.6, págs. 7203-7209.
- Shea, N, R Sinclair y T Welsh (2018). «Safely re-opening a collapsed extraction level drive in a resource-limited environment». En: *Caving 2018: Proceedings of the Fourth International Symposium on Block and Sublevel Caving*. Ed. por Y Potvin y J Jakubec. Perth: Australian Centre for Geomechanics, págs. 45-56.
- Sironvalle, M. (2002). *Introducción al muestreo minero*. Santiago de Chile.
- Sturla, M. (2022). «Influencia de parámetros físicos del material granular y del diseño de bateas de extracción en el flujo gravitacional en minería de block caving». Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas. Santiago, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María.
- Sun, Hao, Yongtao Gao, Davide Elmo, Aibing Jin, Shunchuan Wu y Leonardo Dorador (2019). «A study of gravity flow based on the upside-down drop shape theory and considering rock shape and breakage». En: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 52, págs. 881-893.
- Suzuki Morales, Kimie, Fidelis T Suorineni y Bruce Hebblewhite (2024). «Orebody cavability prediction challenges in block caving mining—a review». En: *Bulletin of Engineering Geology and the Environment* 83.1, pág. 23.
- Verzani, Lorenzo Paolo, Giordano Russo, Piergiorgio Grasso y Agustín Cabañas (2014). «The Risk Analysis Applied to Deep Tunnels Design—El Teniente New Mine Level Access Tunnels, Chile». En: *Engineering Geology for Society and Territory-Volume 6: Applied Geology for Major Engineering Projects*. Springer, págs. 1023-1030.