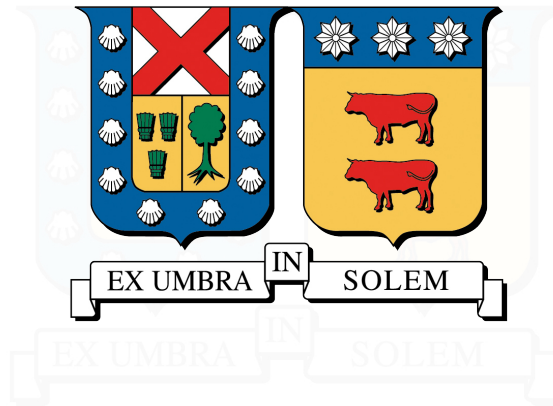


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
SANTIAGO - CHILE



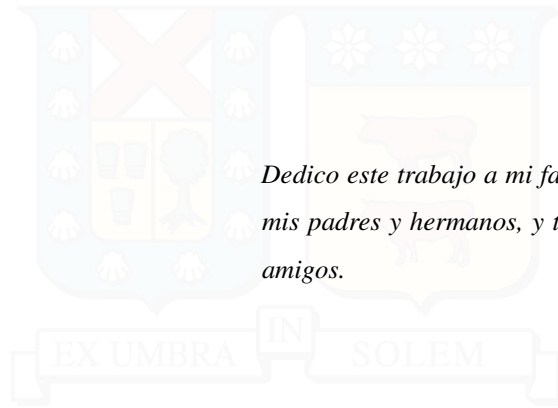
**DESPACHO DE BUSES ELÉCTRICOS DADO UN PLAN
DE SALIDAS E INCERTIDUMBRE EN LOS TIEMPOS
DE VIAJE**

KARAM ANÍBAL KHARRAT VILLASANTE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Y AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA	:	DR. VÍCTOR ALBORNOZ
PROFESOR CORREFERENTE	:	DR. RODRIGO MENA
PROFESOR CORREFERENTE	:	MAG. LINCO ÑANCO
PROFESOR CORREFERENTE	:	DR. MATHIAS KLAPP

OCTUBRE 2021



Dedico este trabajo a mi familia, en especial a mis padres y hermanos, y también a todos mis amigos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a todos los que me acompañaron en mi etapa universitaria, la cual finaliza con el presente trabajo. Primero agradecer a mis padres y hermanos, los cuales son, y serán siempre, mi soporte y pilar fundamental, quienes siempre están apoyándome incondicionalmente.

Agradezco también a las amistades formadas en el camino universitario, las cuales muchas se han mantenido intactas desde los tiempos de mechón, y que seguimos acumulando anécdotas y bellos momentos tal como en el inicio de nuestra vida universitaria. A ustedes amigos míos, muchas gracias.

Del mismo modo, agradecer al equipo de baloncesto de la universidad que me acompañó desde mis primeros días en el campus, en donde hice grandes amistades y vivimos momentos, viajes y experiencias inolvidables. Asimismo, quiero destacar y agradecer al DEFIDER, quienes siempre velaron, nos apoyaron e hicieron todo lo posible para que podamos compatibilizar los estudios con el deporte, y así poder rendir al máximo en las competencias.

Quiero también hacer un agradecimiento especial a Matías, Patricio y Claudio, mis amigos del magíster con quienes compartí muchos momentos estos últimos años en donde el apoyo mutuo fue fundamental.

Igualmente, quiero agradecer a mi profesor guía Victor Albornoz, quien dedicó gran parte de su tiempo a dar forma a este trabajo pese a todas las dificultades que surgieron en el camino, como fue el caso de una pandemia. Así mismo, agradecer a la Dirección General de Investigación y Postgrado y al departamento de Industrias de la Universidad Técnica Federico Santa María, que contribuyeron con financiamiento parcial a la investigación desarrollada.

A todos ustedes, muchas gracias.

RESUMEN EJECUTIVO

En este trabajo se aborda la formulación de un modelo lineal de optimización estocástica de múltiples etapas en variables entera-mixta para determinar la respectiva secuencia de salidas e instantes en que se cargará la batería de cada bus con el propósito de atender el plan de salidas que es entregado inicialmente.

En primer lugar, se analizan datos reales de operación de una línea de buses durante meses normales de operación del año 2019 para entender el comportamiento del tráfico según la hora y el día de la semana, y así separar estos en grupos de días de comportamientos similares y franjas horarias dentro de estos. Por otra parte, se define, a través de la programación en Python, una red *time-expanded*, en donde cada viaje, estación de carga y terminal de bus es representado por su respectivo nodo y tiene asignado un intervalo de tiempo.

El modelo contempla planificar los despachos de dos terminales de buses en un día completo de operación, dividido en ciertas franjas horarias, en las cuales se tienen determinados comportamientos de los tiempos de viaje y disponibilidad de buses. Dicho modelo define la secuencia de cada bus y los momentos en que cargará su batería, minimizando los costos totales de operación y penalidades por no atender algún viaje.

El modelo es resuelto de manera directa con el solver Gurobi en Pyomo, conjuntamente con otras colecciones de paquetes de software de Python para formular modelos de optimización. Los resultados de las instancias en donde se probó el modelo muestran la relevancia del uso del modelo estocástico frente al modelo determinista. Además, se realiza una sensibilización en los tiempos de carga de batería de los buses eléctricos, para analizar los efectos en el modelo en disminuir o aumentar del porcentaje de carga de batería y el tiempo que destina el bus en las visitas a estaciones de carga.

Palabras Clave. Ciudades inteligentes, buses eléctricos, programación estocástica multietapa, problema de programación de vehículos con múltiples terminales

ABSTRACT

In this work it is addressed the formulation of a linear model of multistage stochastic optimization on integer-mixed variables to determine the respective sequence of dispatches and times when the battery of every bus will be charged in order to meet the initially proposed departure plan.

First, real data on the operation of a bus line during normal operating months of 2019 are analyzed to understand the behavior of the traffic according to the time and day of the week, and thus separate these into groups of days with similar behaviors, and time slots within them. On the other hand, a *time-expanded* network is defined through Python programming, in which each trip, charging station and depot is represented by its respective node, and is assigned a time interval.

The model contemplates planning the dispatches of two depots in a full day of operation, divided into certain time slots, in which there are certain behaviors of travel times and availability of buses. This model defines the sequence of each bus and the moments when it will charge its battery, minimizing total operating costs and penalties for not attending a trip.

The model is solved directly with the Gurobi solver in Pyomo, together with other collections of Python software packages to formulate optimization models. The results of the instances where the model was tested show the relevance of the use of the stochastic model compared to the deterministic model. In addition, a sensitization is carried out on the battery charging times of the electric buses, to analyze the effects on the model of decreasing or increasing the percentage of battery charge and the time that the bus spends on visits to the charging stations.

Keywords. Smart cities, electric buses, multistage stochastic programming, MDVSP.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes generales	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivos generales	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Motivación	3
1.3.1. Importancia y aporte sobre las bases	3
1.3.2. Interesados	3
1.4. Estructura	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Antecedentes de la programación de vehículos (Vehicle Scheduling Problem)	5
2.1.1. Problema de programación de vehículo con un sólo terminal	5
2.2. Estado del Arte	8
3. Metodología	16
3.1. Modelo Determinista	16
3.2. Modelo Estocástico con Recursos de Múltiples Etapas	19
4. Resultados	25
5. Conclusiones	34
Bibliografía	36
A. COMPORTAMIENTO DIARIO DE TRÁFICO POR FRANJA HORARIA	38
B. PROGRAMACIÓN INICIAL DE VIAJES	40
C. VALIDACIÓN DISTRIBUCIÓN	41
C.1. Prueba hipótesis	41
C.2. Validación gráfica	42
D. SENSIBILIZACIÓN DE TIEMPO DE CARGA	53

Índice de Tablas

4.1. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de lunes-martes-miércoles.	26
4.2. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de jueves-viernes.	26
4.3. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de sábado-domingo.	26
4.4. Valores de indicadores.	29
4.5. Distribución de probabilidad en las etapas del día miércoles.	29
4.6. Resultados del modelo con cuatro escenarios.	31
4.7. Resultados del modelo con seis escenarios.	32
4.8. Resultados del modelo con nueve escenarios.	32
4.9. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 1.	33
A.1. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los lunes.	38
A.2. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los martes.	38
A.3. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los miércoles.	38
A.4. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los jueves.	39
A.5. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los viernes.	39
A.6. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los sábados.	39
A.7. Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los domingos.	39
B.1. Programación inicial de dos terminales de buses.	40
C.1. Prueba de Shapiro-Wilk para cada etapa de las 10 instancias.	41
D.1. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 1.	53
D.2. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 2.	53
D.3. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 3.	54
D.4. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 4.	54
D.5. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 5.	54
D.6. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 6.	55
D.7. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 7.	55
D.8. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 8.	55
D.9. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 9.	56
D.10. Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 10.	56

Índice de Figuras

2.1. Grafo representativo de SDVSP.	7
2.2. Árbol de 4 escenarios con 3 etapas	13
2.3. Ilustración de red <i>time-expanded network</i>	14
3.1. Árbol de 6 escenarios con 3 etapas	20
4.1. Ajuste de distribución a los tiempos de viajes.	25
4.2. Árbol de 4 escenarios con 3 etapas	28
4.3. Diferencia de secuencia de un bus en dos escenarios distintos.	28
4.4. Árboles de cuatro, seis y nueve escenarios.	31
C.1. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 1.	42
C.2. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 1.	42
C.3. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 1.	43
C.4. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 2.	43
C.5. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 2.	43
C.6. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 2.	44
C.7. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 3.	44
C.8. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 3.	44
C.9. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 3.	45
C.10. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 4.	45
C.11. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 4.	45
C.12. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 4.	46
C.13. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 5.	46
C.14. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 5.	46
C.15. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 5.	47
C.16. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 6.	47
C.17. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 6.	47
C.18. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 6.	48
C.19. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 7.	48
C.20. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 7.	48
C.21. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 7.	49
C.22. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 8.	49
C.23. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 8.	49
C.24. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 8.	50
C.25. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 9.	50
C.26. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 9.	50
C.27. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 9.	51
C.28. Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 10.	51
C.29. Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 10.	51
C.30. Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 10.	52

1 | Introducción

1.1. Antecedentes generales

Aspectos tan importantes como la sustentabilidad y la reducción en las emisiones de gases con efecto invernadero están presentes en el diseño y funcionamiento de los actuales sistemas de transporte público. En este sentido, tanto en Europa como en Asia ya operan buses eléctricos desde hace un par de años, y, en el caso específico de Santiago de Chile, esto ocurre desde marzo de 2019 ([Revistaei, 2019](#)). Es más, a finales del año 2019, Santiago se consolidó como la segunda capital con más buses eléctricos a nivel mundial, con un total de 386 buses eléctricos ([Reportesostenible, 2019](#)). Con estos buses se busca no solo disminuir las emisiones de CO₂ del sistema sino también mejorar la calidad del servicio, pues estos poseen aire acondicionado y espacios para cargar dispositivos eléctricos, entre otros elementos que hacen el viaje más grato para el usuario. Sin embargo, su empleo también plantea desafíos operacionales al momento de satisfacer el cumplimiento de salidas programadas, ya que su despacho debe tomar en cuenta el nivel de la batería y programar sus respectivas cargas. Lo anterior, sumado a la incertidumbre de las condiciones de tráfico durante el día, genera complicaciones en el despacho de los buses eléctricos. En línea con lo anterior, el efecto producido por la falla en la programación de un único viaje, es suficiente para repercutir de manera negativa en el resto de la operación. Además, las decisiones que se deben tomar de cuál bus despachar y a qué hora, deben ser tomadas de manera rápida.

Cabe destacar que, durante el día de operación, se entrega inicialmente una programación que contiene la hora de salida y llegada que se debe cumplir en cada viaje. Para esto, se debe tomar en cuenta que los tiempos de viajes no son determinísticos, ya que, dependiendo la hora y el día, el tráfico en las calles tiene distinto comportamiento. Además, hay que considerar que la flota de buses, y la electricidad que utilizan estos, no es ilimitado. Por otra parte, se debe tomar en cuenta la cantidad de terminales de buses (*depot* en inglés), ya que esto influye directamente en las condiciones del problema: cantidad de flota, lugares para cargar con combustible los buses, entre otras.

En este trabajo, se presenta un modelo de optimización estocástica con recursos de múltiples etapas,

cuya función objetivo consiste en minimizar los costos de operación y penalidades por eventuales atrasos en el despacho de las salidas. El modelo abordará la operación de un intervalo de tiempo en los cuales será dividido un día de operaciones, definidos según el comportamiento de los tiempos de viaje estocásticos. Las principales decisiones que contempla son los instantes de salida de cada bus eléctrico desde el terminal y los instantes en que estos cargarán su batería.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos generales

El objetivo general de este trabajo es formular un modelo de optimización estocástica con recursos de múltiples etapas que determine la secuencia óptima de buses eléctricos teniendo en cuenta una programación de salidas dada y tiempos de viajes que son considerados estocásticos. Esto tiene como fin entregar una herramienta basada en investigación de operaciones a la medida para el sistema público con vehículos eléctricos, buscando atender todos los viajes programados de manera eficaz y eficiente, sin dejar de lado los instantes para cargar la batería.

1.2.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos de este trabajo son:

1. Recopilar datos y antecedentes a modelar.
2. Analizar estadísticamente los tiempos de viajes reales de una línea del transporte público eléctrico de Santiago de Chile en meses normales de operación (sin protestas ni pandemia).
3. Formular un modelo de optimización estocástica con recursos de múltiples etapas para el sistema de transporte público eléctrico de Santiago de Chile.
4. Evaluar el desempeño de la metodología propuesta para el problema real abordado.

1.3. Motivación

1.3.1. Importancia y aporte sobre las bases

El problema desarrollado en el presente trabajo consiste en optimizar el proceso de programación de despachos de buses eléctricos en el sistema de transporte público, es decir, utilizar herramientas de la investigación de operaciones para mejorar un proceso del transporte público, específicamente de Santiago de Chile.

La literatura muestra algunos artículos referidos al despacho de vehículos convencionales y no convencionales, pero de acuerdo a los trabajos consultados, ninguno se enfoca exclusivamente en las condiciones estocásticas del tráfico y utiliza un modelo con recursos de múltiples etapas. La metodología propuesta en este trabajo puede ser aplicada en el transporte público de vehículos eléctricos de otras ciudades o países y cambiar la manera de tomar las decisiones en cuanto a la secuencia de buses se trata. El objetivo del modelo propuesto, es determinar la programación óptima de vehículos a partir un conjunto de viajes y tomando en consideración las restricciones asociadas. Sin duda esto significa una mejora en la operación de una compañía que licita en el transporte público de Santiago de Chile, por lo que poseer herramientas para su gestión puede ser una gran ayuda para disminuir costos y multas asociadas a incumplimiento de contrato (por ejemplo, viajes no atendidos).

1.3.2. Interesados

Los resultados de esta investigación son de especial interés para empresas que cuenten con buses eléctricos y que liciten en el transporte público, ya sea en Santiago de Chile o en otra ciudad y/o país. En el transporte público se deben tomar decisiones sobre la secuencia que tomarán los buses de la flota para poder atender todos los viajes programados en los tiempos correspondientes, tomando en cuenta que los tiempos de cada viaje varían dependiendo el día y la hora en que se este operando. Por lo general, las empresas que licitan en el transporte público deben cumplir, de acuerdo con el contrato, con una hora de inicio de cada viaje o sino la empresa licitadora pierde porcentaje de ganancia dependiendo la cantidad de retraso. Además, debe coordinar las cargas de batería de los buses, ya que por lo general esto toma bastante tiempo y las estaciones de carga son limitadas. De igual forma, esto se traduce en un costo debido a la electricidad utilizada. Por lo tanto, un despacho óptimo de buses eléctricos generará un mayor beneficio económico.

1.4. Estructura

El resto de este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera, en el capítulo 2 se presenta el marco teórico, donde se revisan los antecedentes relevantes para esta investigación en la literatura. Esto incluye por un lado antecedentes para la definición del problema como importantes investigaciones en el problema de programación de vehículos convencionales con uno y múltiples terminales de buses, uso de heurísticas para la resolución del problema, y por otra parte, problemas usando flota híbrida (vehículos eléctricos y convencionales), programación de vehículos eléctricos con cambio de batería, programación de buses eléctricos con un modelo dinámico, entre otros.

En el capítulo 3 se presenta el desarrollo teórico y una descripción de la aplicación de la metodología utilizada para alcanzar los resultados de la investigación. Esto involucra, en primer lugar, la formulación determinista del problema abordado y su completa descripción. Luego, se muestra la extensión estocástica con múltiples etapas del modelo determinista.

En el capítulo 4 se presentan los resultados computacionales del caso de estudio enfocado en una empresa real del transporte público de Santiago de Chile, en donde se detallan las características de las instancias realizadas y el desempeño de la metodología propuesta.

Por último, en el capítulo 5, se muestran las conclusiones obtenidas de este trabajo de Investigación que entrega una herramienta basada en investigación de operaciones, junto con una mirada a futuras investigaciones.

2 | Marco Teórico

Este trabajo se desarrolla en el ámbito del despacho óptimo de buses eléctricos dada una programación inicial con los viajes que hay que atender durante un día completo de operación. El objetivo de esto, es determinar la programación óptima de vehículos a partir de un conjunto de viajes y tomando en consideración las restricciones asociadas. Por años, este tipo de problema estuvo enfocado en vehículos convencionales, en donde se asientan las bases del problema en cuestión.

2.1. Antecedentes de la programación de vehículos (Vehicle Scheduling Problem)

A continuación se presentan algunos antecedentes a la programación de vehículos, específicamente en vehículos convencionales.

En el problema de programación se considera un conjunto de viajes caracterizados por un origen, destino, duración y hora de inicio de viaje fija. Entre dos viajes sucesivos, hay un periodo de tránsito entre el punto de término y de inicio de cada uno, con cierta duración y costo asociado. El problema a resolver, consiste en formar la secuencia de viajes de cada vehículo de tal forma que cada uno de los despachos programados sea asignado a un vehículo dado. Este tipo de problema se puede encontrar en distintas áreas, tales como en trenes, buses escolares, aviones de aerolíneas y en el transporte urbano.

2.1.1. Problema de programación de vehículo con un sólo terminal

En el problema de programación de vehículo con un sólo terminal (SDSVP, por sus siglas en inglés) se considera un set de n viajes $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ en donde cada viaje T_i tiene una duración dada y hora de comienzo a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Del mismo modo, se consideran v vehículos en el terminal. Los diferentes despachos se representan a través de un grafo $G = (N, A)$, donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ representa el set de viajes y

que el nodo $\{n + 1\}$ representa el terminal de vehículos. Además, el tiempo de tránsito entre dos viajes se denota como $t_{i,j}$ y corresponde al último punto del viaje T_i y al punto de partida del viaje T_j . Por simplicidad, en este caso, se asume que $t_{i,j}$ contiene la duración del viaje i . Un par de viajes ordenados (T_i, T_j) se dice que son compatibles si se cumple que $a_i + t_{i,j} \leq a_j$, para todo $i, j \in N$. El costo que se incurre si un vehículo realiza el viaje T_j inmediatamente luego de haber realizado el viaje T_i corresponde a $c_{i,j}$. Este costo usualmente está en función del último punto del viaje T_i y el punto de partida del viaje T_j . De la misma forma, los costos al iniciar el viaje T_i saliendo desde el terminal o al terminar el día con el último viaje T_j son $c_{n+1,i}$ y $c_{j,n+1}$, respectivamente. De igual forma, este costo también puede considerar el costo fijo que se tiene por realizar el viaje T_j , por ejemplo. Finalmente, c es el costo asociado al uso del vehículo. El problema consiste en la asignación óptima de la secuencia de buses al set de viajes de tal forma que se cumpla con lo siguiente:

- Cada viaje es atendido exactamente una vez por un sólo vehículo.
- Cada vehículo comienza desde el terminal, atiende una secuencia compatible de viajes y regresa al terminal al finalizar su ruta.
- El número de vehículos que sale del terminal no puede superar a v (cantidad de vehículos disponibles en el terminal).
- La suma de los costos de las rutas realizadas por los vehículos en la solución es minimizado.

La Figura 2.1 describe la representación del SDVSP. Es importante destacar que el nodo o y d corresponden al mismo terminal, el set de arcos de viajes es denotado como I y el set de arcos totales (considerando al terminal) es denotado como A . Cabe mencionar que el terminal es duplicado solamente para separar el origen de los buses y el destino final de estos y así, representarlos de mejor manera en el grafo. Con este duplicado del terminal, el grafo se podría entender como un *grafo acíclico*.

Para la formulación del problema, se definen las variables:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo realiza el viaje } T_j \text{ después del viaje } T_i. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El modelo de programación entera corresponde a:

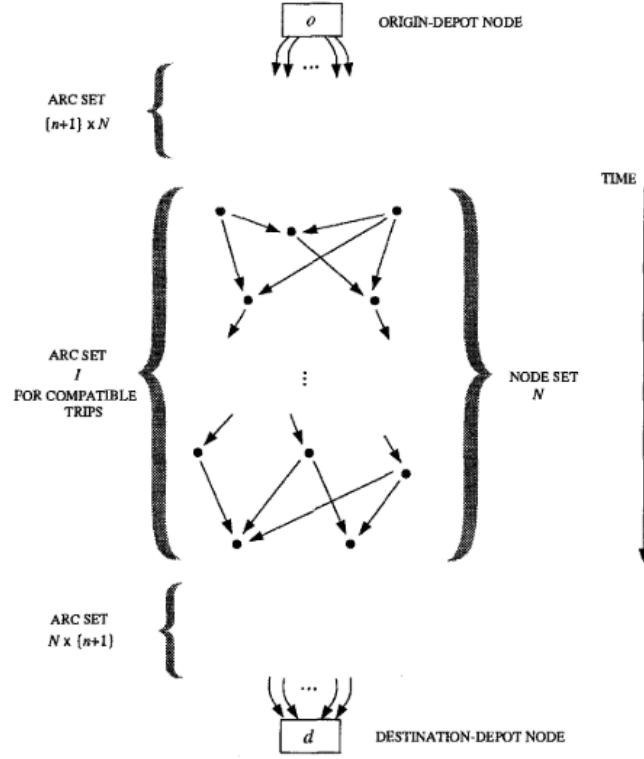


Figura 2.1: Grafo representativo de SDVSP

(Fuente: ball et al.(1995). Handbooks in Operations Research and Management Science: Network Routing. Elsevier.)

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{j \in N} c x_{n+1,j} \quad (2.1)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j \in V} x_{i,j} = 1, \quad \forall i \in N \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{n+1,j} \leq v, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,j} - \sum_{i \in V} x_{j,i} = 0, \quad \forall j \in V \quad (2.4)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (2.5)$$

La función objetivo (2.1) minimiza los costos de viajes y uso de vehículo. La restricción (2.2) asegura que cada viaje se realice exactamente una sola vez, mientras que las restricciones (2.3) y (2.4) corresponden al tamaño de la flota y a la conservación de flujo de esta, respectivamente. La restricción (2.5) indica la naturaleza binaria de las variables de decisión.

Esta formulación consolida las bases para los problemas de programación de vehículos urbanos y es utilizada para ciertas variaciones en el modelo tales como: modificaciones y/o agregaciones de restricciones,

variables de decisión, problemas con múltiples terminales, etc. En este sentido, en la literatura, la formulación del SDVSP para vehículos eléctricos también utiliza como base la formulación para vehículos convencionales, compartiendo de esta manera varios elementos, pero dado las características de estos vehículos, hay que tener en consideración ciertos aspectos tales como:

- **El nivel de carga de las baterías:** Ya que, si bien en los buses convencionales hay que preocuparse por el combustible de estos, en la literatura nunca resulta ser un gran problema para el modelamiento y resolución del problema. Por otra parte, con los buses eléctricos el nivel de carga si es un problema, ya que se necesita cierto porcentaje mínimo de batería para que el bus pueda atender el viaje. Además, el uso del freno del vehículo permite cargar la batería mientras se está atendiendo un viaje, por lo que la manera en que se conduce el bus eléctrico afecta en la carga de batería.
- **Estaciones de carga:** Normalmente, las estaciones para cargar batería se encuentran en los terminales de buses, es decir, no se disponen de estaciones para cargar los buses en toda la ciudad. Sin embargo, en ciertas ciudades de Europa, debido que llevan mas años operando con buses eléctricos, disponen de ciertos lugares en la ciudad para cargar los buses eléctricos. En el caso de los buses convencionales, si se presenta alguna emergencia, es posible cargar combustible fuera de los terminales de buses.
- **Los cargadores:** Se dispone de estaciones para cargar los buses, pero no siempre es posible utilizar todos los cargadores simultáneamente, ya que depende de la capacidad de los transformadores que se disponga. Por otra parte, cargar un bus eléctrico toma mucho más tiempo que un vehículo convencional, tan así que para cargar 0 % a 100 %, con cargadores normales, se requiere aproximadamente 2,5 horas. Cabe mencionar que cargadores “de carga rápida” requieren menos tiempo, pero no siempre están presente en las estaciones de carga.

2.2. Estado del Arte

En esta sección se describen brevemente artículos relacionados al problema abordado. En el libro (Ball et al., 1995) se tiene una introducción a la programación de vehículos, específicamente a vehículos convencionales, en donde se pueden asentar las bases al problema en que se enfoca este trabajo. En este libro se presentan antecedentes, tipos de programación de vehículos y sus variaciones. Además del modelo base presentado en la sección anterior, también presenta ciertas variaciones en el modelo y distintas formas de como resolverlo, por ejemplo una descomposición de Dantzig-Wolfe.

Con respecto a las variaciones en el modelo base en vehículos convencionales, (Banihashemi y Haghani, 2000) estudia el problema en ciudades grandes considerando múltiples terminales. Para abordar este problema, generalmente se tiende a dividir éste en pequeños problemas de programación (*scheduling*)

para terminales individuales, y cada uno de estos problemas se trata individualmente. El modelo es utilizado en un día completo de operación y éste es dividido en mañana, tarde y noche. La resolución del modelo es a través de una heurística ad hoc.

(Rinaldi et al., 2018) estudia el despacho óptimo de una flota mixta de buses en el transporte público, en la cual consideran buses eléctricos e híbridos, los cuales atienden varias líneas de servicio que parten de un terminal de buses en común. El objetivo es determinar la cantidad y la secuencia óptima de buses dada una programación inicial de viaje, y tomando en cuenta las restricciones de batería.

En este artículo se tienen como parámetros la cantidad de batería que consume cada viaje, los horarios de salida y la duración de cada viaje. Por otra parte, se asume que la mitad de la flota corresponde a buses híbridos y que estos solamente cargan su batería en las estaciones solamente en las noches. Además los tiempos de viajes son determinísticos.

Para el modelamiento del problema se utilizan las restricciones clásicas mencionadas anteriormente, pero con la salvedad que, como la flota es mixta, se deben hacer ciertas distinciones tales como: Cada bus (eléctrico e híbrido) puede hacer a lo más un viaje a la vez, todos los viajes deben ser atendidos y esto puede ser por un bus eléctrico o híbrido. Además, hay otras restricciones propias que suelen aparecer en estos problemas con flota que contienen vehículos eléctricos, tales como:

1. Un bus puede estar cargándose en una sola estación de carga (en cualquier momento el día), y el total de buses cargándose simultáneamente es limitado, ya que depende de la cantidad de cargadores disponibles.
2. Un bus eléctrico necesita tener al menos la cantidad de batería que consume el viaje para poder atenderlo.
3. Si un bus eléctrico no tiene carga suficiente para realizar un viaje, entonces este cargará su batería en el futuro. Además, cabe mencionar que como parámetros del problema se conoce el consumo de batería por viaje, por lo que aparece otra restricción que permite o no que un bus eléctrico realice un viaje dependiendo del nivel de carga de su batería y de la cantidad de batería que tome realizar dicho viaje.

El modelo de este artículo corresponde a un modelo Programación Entera Mixta (MIP, por sus siglas en inglés) y fue resuelto directamente usando CPLEX.

La mayoría de estos problemas suelen tener muchas variables, por lo que la solución exacta suele tomar mucho tiempo, o bien no es posible resolverlo a optimalidad. Es por esto que es común el uso de heurísticas para encontrar una solución aproximada y en un tiempo de ejecución aceptable, ya que es primordial tener una respuesta rápida para el contexto en el que se está tratando. En (Jiang et al., 2018) se estudia un caso aplicado en China con dos terminales de buses eléctricos, con carga de buses normales (sin cambio de baterías

ni cargadores rápidos) y los viajes en tránsito sin pasajeros (*deadhead trips*) que usualmente realizan los buses en el transporte público para llegar a algún punto del viaje no están permitidos. Para resolver el modelo se utiliza la heurística “*neighborhood search based heuristic*” y así, con la solución del problema, se analiza cuanto impacta en la decisión del tamaño de flota a usar el costo fijo (cantidad de terminales) y el costo variable (costo de cargar la baterías durante el día). En este caso de estudio se consideran los tiempos de viaje de manera determinística.

Los autores de ([van Kooten Niekerk et al., 2017](#)) estudian el problema con un sólo terminal de buses eléctricos, el cambio de batería entre buses no está permitido y consideran dos casos; El primero en donde la carga de la batería es lineal y el precio de electricidad es constante durante todo el día, y el segundo escenario en donde la carga de batería no es lineal y el precio de la electricidad es variable dependiendo la hora del día. Además de estos casos, se consideran tres instancias del problema a resolver:

- Modelo con variables continuas para el nivel de carga de batería y para un problema de tamaño pequeño/mediano.
- Modelo con variables discretas para el nivel de carga de batería y para un problema de tamaño pequeño/mediano.
- Modelo resuelto con generación de columnas para un problema de tamaño grande.

En la primera instancia, se formula un modelo de Programación Lineal (LP, por sus siglas en inglés), y se asume que la carga de batería es lineal y que el precio de electricidad es constante durante todo el día. Luego, para la segunda instancia se formula un modelo de Programación Entera Lineal (ILP, por sus siglas en inglés), que discretiza el nivel de carga de batería en múltiplos de 25 %, y de esta manera trabajan cada discretización como un nodo, para luego representar los arcos posibles en el problema. Por último, la tercera instancia es similar a la segunda instancia, pero para un problema de tamaño más grande, y la técnica para abordar el problema es utilizando generación de columnas. Luego, se trabaja con esta misma instancia, pero se aborda con generación de columna combinado con relajación lagrangiana. La instancia dos entrega peores resultados que la instancia uno, ya que esta es una aproximación de la otra. Sin embargo, la instancia uno no sirve para cargas no lineales en la batería y para problemas de gran tamaño. Por otra parte, la instancia tres es resuelta mucho más rápido con generación de columna combinado con relajación lagrangiana. Cabe mencionar que la instancia tres, a diferencia de las otras dos instancias, no entrega un resultado exacto en la solución.

Tal como se mencionó en el artículo anterior, es común encontrar en la literatura el uso de generación de columna en este tipo de problema. En artículo ([Häll et al., 2019](#)) se estudia un caso aplicado en Suecia en donde asumen que es posible instalar estaciones de carga en cada uno de los nodos y el uso de cargadores rápidos está permitido, además cargando los buses entre 5 a 10 minutos se puede obtener un nivel de

carga aceptable para continuar con las operaciones. El modelo es un MIP que rápidamente se convierte computacionalmente intratable, por lo que el modelo se aborda a través de generación de columna y un generación de columna acelerado. Este último funciona de mejor manera obteniendo mejores resultados y en menor tiempo.

Debido a las características combinatoriales de los problemas de programación de vehículos, estos son clasificados como NP-hard, y en la práctica los métodos exactos no suelen poder resolverlos para instancias grandes. Es por esto que la alternativa de utilizar heurísticas resulta ser bastante efectiva, ya que, si bien entrega una solución aproximada, logra resolver el modelo y usualmente en un tiempo aceptable debido al contexto del problema (problemas que se necesita tomar una decisión con poco tiempo). (Pepin et al., 2009) compara cinco heurísticas en un problema de programación de vehículos con múltiples terminales. La primera heurística es *truncated branch-and-cut*, la cual cae en el grupo de heurísticas, ya que se detiene una vez que encuentra la primera solución entera. Luego, con *Lagrangian heuristic* resuelven el modelo usando un algoritmo iterativo no uniforme como el método del gradiente. Dado que, en la mayoría de las iteraciones (a menudo todas), la solución óptima del subproblema lagrangiano no es factible para el problema original, se deben derivar soluciones viables utilizando un procedimiento heurístico ad hoc. Para el subproblema, se omiten dos restricciones y queda finalmente como un problema de un sólo terminal (SDVSP), luego el modelo es resuelto con la ayuda de un algoritmo ad hoc. La tercera heurística corresponde a *Truncated column generation*, en donde el problema es dividido en dos partes: un problema maestro reducido (RMP, por sus siglas en inglés) y un subproblema por terminal. Posteriormente, se estudia la heurística *Large neighborhood search*, la cual comienza con una solución inicial y destruye, en cada iteración, una parte de la solución actual antes de reoptimizarla para obtener una solución global mejorada. Finalmente, está la heurística *Tabu search*, la cual, en pocas palabras, se dedica a la búsqueda de solución utilizando estructuras de memorias, ya que una vez que se encuentra una potencial solución, está es marcada como “tabú” para que el algoritmo no la vuelva a visitar. Estas cinco heurísticas se compararon en instancias con 500, 1000 y 1500 set de viajes y para 4 y 8 terminales, obteniendo de esta manera que generación de columna es la mejor opción siempre y cuando la estabilidad y el tiempo computacional sea suficiente, por otro lado, large neighborhood search es la mejor alternativa cuando se busca una solución de buena calidad en relativamente poco tiempo computacional.

Muy recientemente, en (Alvo et al., 2021) se enfocan en el despacho óptimo de una flota mixta de buses eléctricos y convencionales diesel en el transporte público de Santiago, Chile. Se estudia el caso con un solo terminal de buses, una sola línea de operación de bus y un horizonte de tiempo de 24 horas. El objetivo es minimizar jerárquicamente (1) la cantidad de autobuses diesel adicionales a utilizar cada día sujetos a una flota eléctrica fija y (2) su energía total consumida durante el día. Esta elección tiene como enfoque minimizar la contaminación durante la operación.

Este artículo busca de manera óptima la programación de carga de batería y de viaje para cada bus, y

simultáneamente la programación de cada cargador en un horizonte de tiempo continuo, en donde existe un número restringido de cargadores y los tiempos de carga son flexibles. Cabe destacar que el estado de carga de batería es aproximado por una función lineal, como comúnmente se encuentra en la literatura.

Por otra parte, los buses eléctricos, como sus baterías, son homogéneos, pero pueden comenzar el día con diferentes niveles de batería.

El modelo presentado corresponde a uno de Programación Entera Mixta (MIP, por sus siglas en inglés) de dos etapas, en donde se tiene un problema maestro que asigna horarios de viaje y de carga de la batería para cada autobús y un problema satélite que identifica una programación de carga factible para una programación de salidas de buses dada o, de lo contrario, deduce un corte de factibilidad que elimina la programación de viajes actual y conduce a una operación de carga de autobús inviable. El enfoque presentado personaliza el método de descomposición Combinatorial de Benders y facilita su solución exacta. Cabe mencionar que no se presentan aspectos estocásticos en el tiempo de viaje a diferencia de la presente tesis.

Los trabajos citados anteriormente no incorporan antecedentes del problema bajo incertidumbre. A este respecto, (Birge y Louveaux, 2011) realizan una introducción a la programación estocástica, en donde, a través de ejemplos directos, se puede apreciar el verdadero valor de incluir este aspecto en los distintos problemas. En esta terminología, estocástico es completamente lo contrario a determinista, ya que los datos con los que se trabaja son aleatorios (incierto), y dentro de la programación estocástica, el objetivo es encontrar una decisión óptima en problemas que involucran este tipo de datos. Esto significa que algunos de los parámetros del problema se pueden representar por variables aleatorias.

Para entender mejor la programación estocásticas, es necesario definir ciertos elementos que son típicos en la programación estocástica, tal como se explica en (Galán et al., 2008) :

- a) **Etapas:** Corresponde a un conjunto de periodos de tiempo en los que se estudia la realización de los aspectos inciertos del problema. Los problemas estocásticos se tienden a clasificar de acuerdo al número de etapas que tiene, es decir, bi-etapa para aquellos de dos etapas, y multi-etapa para los de tres etapas o más.
- b) **Estado:** La incertidumbre modelada como un número finito y discreto de estados, en donde cada uno tiene asociado una probabilidad condicional de ocurrencia definida para cada etapa en que se ha subdividido el horizonte de estudio.
- c) **Escenario:** Corresponde a la realización de parámetros inciertos y deterministas a lo largo de largo de las diversas etapas en las que se dividió el problema, con la salvedad que se recorran todas las etapas, es decir, ir desde la etapa inicial hasta la etapa final.

La Figura 2.2 se conoce comúnmente en la literatura como un árbol de escenarios, y en este ejemplo

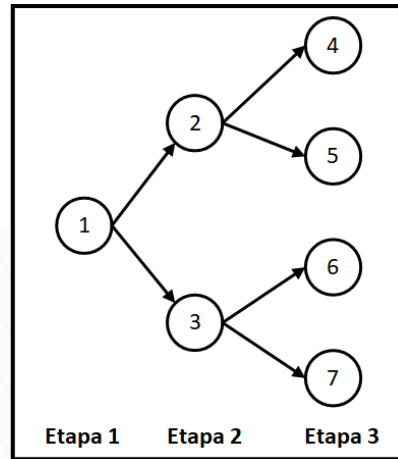


Figura 2.2: Árbol de 4 escenarios con 3 etapas.

en particular, se pueden apreciar 3 etapas, en donde en cada etapa existen ramificaciones a los posibles estados existentes. Cabe mencionar que cada ramificación tiene una probabilidad de ocurrencia, en donde se debe cumplir que la suma de probabilidades por etapa debe ser igual a 1, al igual que la suma de todos los escenarios. Además, dicho ejemplo presenta 4 posibles escenarios.

Otro aspecto importante dentro de este tipo de problemas es la anticipatividad, la cual es esencial para los modelos estocásticos con escenarios, ya que aseguran que las decisiones en una etapa deben ser iguales para todos los escenarios que coinciden hasta esa etapa. Ejemplificando lo anterior, si se observa la Figura 2.2, específicamente el escenario 1 (1-2-4) y el escenario 2 (1-2-5), se debe cumplir que las decisiones tomadas en el nodo 2 deben ser las mismas para ambos escenarios. Es decir, las decisiones tomadas en ese nodo deben ser iguales en todos los escenarios que coinciden hasta dicho nodo. En otras palabras, se dice que una solución es anticipativa, si los valores de las variables son únicos, implementables e independientes del escenario que acontezca.

- *Expected Value of Perfect Information:* Normalmente visto con las siglas EVPI, representa la máxima cantidad que el tomador de decisiones está dispuesto a pagar por contar con toda la información acerca del futuro, y se calcula como la diferencia entre el Recourse Problem (RP por sus siglas en inglés) y el promedio del óptimo de cada escenario resuelto por separado (conocido como Wait-and-see).
- *Value of stochastic solution:* Abreviado con las siglas VSS, muestra el verdadero aporte del modelo estocástico comparado con la calidad de la solución resultante de un modelo determinista subyacente. Para este indicador es necesario calcular previamente el *Expected result of using the EV solution*, el cual corresponde a resolver el modelo determinista usando como instancia el promedio de los parámetros con incertidumbre de los escenarios (EV), y luego tomar las decisiones de primera etapa realizadas y fijarlas en el modelo estocástico con recursos. Este resultado se conoce como EEV, y la diferencia del RP con el EEV corresponde al VSS, el cual permite cuantificar el valor que tiene el modelo estocástico.

Debido a que algunos parámetros se pueden representar por variables aleatorias, está disponible una descripción probabilística de estas, bajo la forma de distribuciones de probabilidad, densidades, o más generalmente, medidas de probabilidad. Como es habitual, los valores particulares que toman las variables aleatorias sólo se conocen tras el experimento aleatorio. Problemas con estas características aparecen en varias disciplinas, y una de ellas corresponde al despacho óptimo de vehículos.

Hasta el momento no se ha mencionado ningún artículo que considere tiempos de viajes estocásticos como suele suceder en la realidad. En (Tang et al., 2019) estudian un caso estático y otro dinámico en buses eléctricos para enfrentar la condiciones estocásticas del tráfico a través de estrategias robustas. Cabe mencionar que los viajes en tránsito sin pasajeros fueron considerados sin estocasticidad. Para el modelo estático se introducen algunas restricciones especiales para dicho problema, tales como: buses eléctricos que salen de estaciones de carga lo hacen con el 100 % de la carga de la batería. El resto de las restricciones son similares a las mencionadas anteriormente para los modelos SDVSP de buses eléctricos. Para la formulación del modelo, trabajan con grafos, pero con la característica de que la red es “*time-expanded network*”, es decir, cada nodo tiene definido un intervalo de tiempo, tal como se muestra en la Figura 2.3. Además, las estaciones de carga, los viajes, el terminal y estaciones virtuales de carga (estos hacen referencia las estaciones de carga en donde los buses pueden recargar completamente su batería para luego continuar con su secuencia de viajes, o bien, volver al terminal, sin cargar batería, para mas adelante continuar atendiendo viajes. Estos nodos se definieron solamente para facilitar el conteo de buses eléctricos) son los nodos, que se encuentran en el espacio-tiempo, definidos en el modelo. Esta forma de crear el grafo que se utilizará para el modelo resulta ser novedoso en este tipo de problemas, y debido a las facilidades que otorga en cuanto a la creación de los arcos admisibles, se opta por utilizar este tipo de red como base para el modelo propuesto.

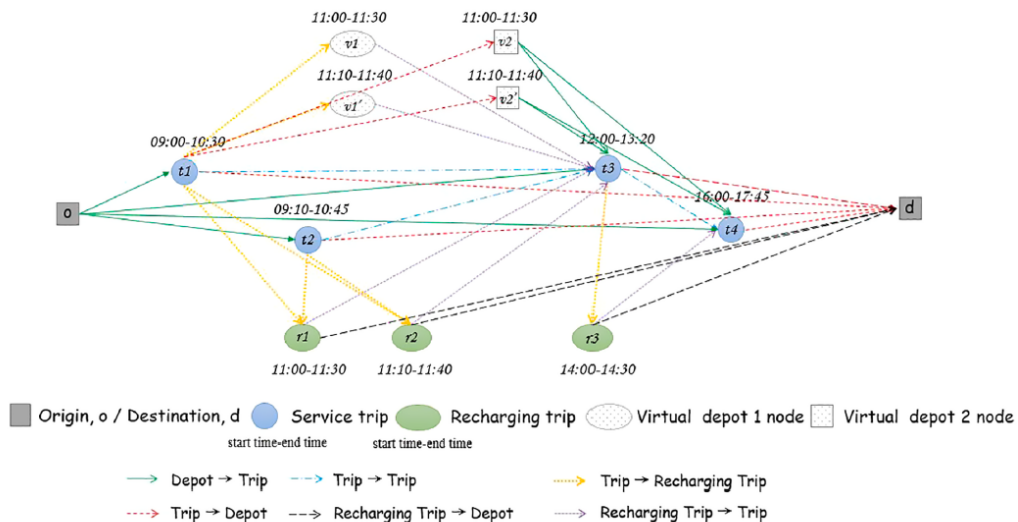


Figura 2.3: Ilustración de red *time-expanded network*.

(Fuente: (Tang et al., 2019))

Tal como se aprecia en la Figura 2.3, al finalizar el viaje “t2”, se puede tomar la decisión de visitar una estación de carga de batería a las 11:00, visitar la misma estación a las 11:10, esperar unos minutos para comenzar el viaje “t3” o bien devolverse al terminal de buses. Todos estos posibles destinos mencionados tienen un intervalo de tiempo definido, transformando de esta manera esta red en una “*time-expanded network*”

Para enfrentar la estocasticidad, se adopta en el modelo una “distancia de seguridad” para amortiguar el consumo de batería de los vehículos eléctricos, y así evitar el panne de batería. Este problema fue reformulado para transformarlo en un path-based y así resolverlo a través de branch-and-price, el cual corresponde a una extensión del método generación de columnas. Por otra parte, el modelo dinámico divide el día completo de operación en varios periodos, en donde un período debe ser más largo que la duración de un viaje y más corto que el tiempo de viaje total de dos viajes consecutivos. El modelo aprovecha las condiciones de tráfico actualizadas continuamente y reprograma periódicamente la flota de buses, esto es, bajo el supuesto que, con el desarrollo de la tecnología, se puede predecir los tiempos de viajes al comienzo de cada período. Esto se realiza a través de 3 posibles estados que se definen en el problema, por lo que, dependiendo de donde se esté en el periodo anterior, se elegirá la programación según el estado en el que se encuentre. Este modelo también fue resuelto con branch-and-price.

Los trabajos mencionados anteriormente están relacionados con la programación de vehículos en el transporte urbano con el objetivo de siempre minimizar los costos fijos y/o operacionales. Sin embargo, por lo general se considera determinístico el tiempo de viaje a diferencia del modelo propuesto en este trabajo. Otra diferencia con los artículos anteriores es que se cuenta con data histórica de los viajes de varios meses del sistema de transporte público de la ciudad de Santiago de Chile, con la cual se ha podido definir ventanas de tiempo y la distribución de estas. Por lo que sabemos, al inicio de esta investigación, no había evidencia de trabajos relacionados con la programación de buses eléctricos con un modelo de optimización estocástica con recursos de múltiples etapas.

3 | Metodología

En este capítulo se presentará la metodología propuesta en esta investigación para resolver el problema de despacho óptimo de buses eléctricos en una empresa del sistema de transporte público dado un plan de salidas de viajes. En primer lugar, se presentará el modelo determinista, y luego la extensión de este a un modelo estocástico con recursos de múltiples etapas.

Es importante mencionar algunas consideraciones que se tienen en cuenta para el modelamiento. Los viajes tipo *deadhead trip* (viajes sin pasajeros) no están permitidos. Se dispone de un solo tipo de cargador en las estaciones de carga de los terminales, y este no es de carga rápida. La flota está conformada solo por buses eléctricos, los cuales poseen las mismas características. Siguiendo con lo anterior, no está permitido el cambio de batería. Por último, si un bus visita una estación de carga, este estará un tiempo fijo cargando su batería independiente del nivel de carga.

3.1. Modelo Determinista

A continuación, se detalla el modelo determinista propuesto y sus características. El modelo es representado mediante un grafo $G = (N, A)$, donde N representa el conjunto de nodos y A el conjunto de arcos. N está conformado por el nodo de “origen” o_k ; el nodo de “término” d_k de cada terminal de buses eléctrico k (estos dos nodos se encuentran en el mismo lugar físico, es decir, ambos hacen referencia al terminal k); el conjunto de viajes I , en el cual están considerados todos los viajes de los k terminales, cada uno de estos con un horario de salida ya programado y tiempos de viaje estocásticos que deben ser atendidos una sola vez y por un solo bus; y el conjunto de nodos virtuales V^k , los cuales se encuentran en los terminales, pero se distinguen de o_k y d_k en el sentido de facilitar el modelamiento. Estos nodos virtuales se dividen a su vez en V_1^k y V_2^k , donde el primero permite representar un bus eléctrico que se dirige al terminal de buses, carga su batería y luego continúa con la secuencia de viajes, mientras que el segundo permite representar cuando un bus eléctrico va al terminal de buses, no carga su batería y espera simplemente para luego continuar con la secuencia de viajes. Cabe mencionar que estos nodos son denominados nodos *time span*, es decir,

no solamente se encuentran en un punto espacial, sino que también temporal, por lo que cada nodo tiene asignado un intervalo de tiempo y así la red completa resulta ser una red *time-expanded*.

Los conjuntos, parámetros y variables de decisión del modelo se describen a continuación:

Conjuntos

K : Conjunto de terminales de buses eléctricos.

A^k : Conjunto de arcos del terminal k .

N^k : Conjunto de nodos del terminal k .

I : Conjunto de viajes que hay que atender.

V^k : Conjunto de nodos virtuales del terminal k , los cuales se dividen en V_1^k y V_2^k . V_1^k : Buses que llegan al terminal k , cargan batería, y luego salen a seguir atendiendo la secuencia de viajes. V_2^k : Buses que llegan al terminal k , no cargan batería, y luego en algún momento vuelven a seguir atendiendo la secuencia de viajes.

W_j : Conjunto de nodos que si al finalizar un viaje deciden cargar su batería (V_1^k), coinciden con parte del tiempo de carga del bus que luego de realizar el viaje j decidió cargar su batería.

Parámetros

$e_{i,j}$: Consumo de batería desde el nodo i al nodo j .

W : Porcentaje de batería que se carga en una estación.

r^k : Cantidad de vehículos en el terminal k .

E_{max} : Máximo nivel de batería permitido.

E_{min} : Mínimo nivel de batería permitido.

Cr^k : Cantidad de estaciones de carga disponibles en el terminal k .

M : Penalización por no atender un viaje.

c_{ij} : Costos operacionales por realizar el recorrido por el arco (i, j) .

Cabe mencionar que los costos operacionales consideran el tiempo ocioso del bus eléctrico cuando espera en el terminal (V_2^k), el costo de cargar batería en el terminal (V_1^k) y un costo fijo por uso de vehículo, es decir, por sacar un bus eléctrico del terminal para que sea utilizado en atender los viajes requeridos.

Variables de decisión

$x_{i,j}^k$: Variable binaria que vale 1 si el bus del terminal k realiza el viaje al nodo j luego de haber realizado el viaje al nodo i y 0 si no.

$z_{i,j}^k$: Variable binaria que vale 1 si el bus del terminal k **no** realiza el viaje al nodo j luego de haber realizado el viaje al nodo i y 0 si no.

g_j : Variable real que indica el consumo de batería acumulado del bus al terminar el viaje al nodo j .

$Aux1_{i,j}^k$: Variable auxiliar real.

$Aux2_{i,j}^k$: Variable auxiliar real.

La primera variable de decisión mostrada tiene como finalidad escoger la secuencia de viajes que realizará cada bus eléctrico. La segunda variable de decisión corresponde a si se decide no atender un viaje en particular debido a que no es posible. Cabe mencionar que esta última permitiría saber qué viajes necesitarán el apoyo de otro bus adicional para así lograr atender todos los viajes. La variable g_j sirve para llevar un recuento de la batería consumida por cada bus mientras realiza su secuencia de viajes. Por último, las dos variables auxiliares serán utilizadas para tener una representación lineal de las restricciones relacionadas con el consumo acumulado de batería.

$$\text{mín} \quad \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} c_{i,j} x_{i,j}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} M z_{i,j}^k \quad (3.1)$$

s.a

$$\sum_{i:(i,j) \in A^k} (x_{i,j}^k + z_{i,j}^k) = 1, \quad \forall j \in I, \forall k \in K \quad (3.2)$$

$$\sum_{j:(o_k,j) \in A^k} x_{o_k,j}^k \leq r^k, \quad \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in A^k} x_{i,j}^k - \sum_{p:(j,p) \in A^k} x_{j,p}^k = 0, \quad \forall j \in I \cup V_1^k \cup V_2^k, \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$g_j = \sum_{i:(i,j) \in A^k} (Aux1_{i,j}^k + e_{i,j} \cdot x_{i,j}^k), \quad \forall j \in I \cup V_2^k, \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$Aux1_{i,j}^k \leq E_{max} \cdot x_{i,j}^k, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.6)$$

$$Aux1_{i,j}^k \leq g_i, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.7)$$

$$Aux1_{i,j}^k \geq g_i - (1 - x_{i,j}^k) \cdot E_{max}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.8)$$

$$g_j = \sum_{i:(i,j) \in A^k} (Aux2_{i,j}^k - W \cdot x_{i,j}^k), \quad \forall j \in V_1^k, \forall k \in K \quad (3.9)$$

$$Aux2_{i,j}^k \leq E_{max} \cdot x_{i,j}^k, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.10)$$

$$Aux2_{i,j}^k \leq g_i, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.11)$$

$$Aux2_{i,j}^k \geq g_i - (1 - x_{i,j}^k) \cdot E_{max}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.12)$$

$$g_i + \sum_{j:(i,j) \in A^k} e_{i,j} \cdot x_{i,j}^k \leq (1 - E_{min}), \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (3.13)$$

$$\sum_{j:(j,r) \in A^k} x_{j,r}^k + \sum_{w \in W_j} \sum_{i \in I} x_{i,w}^k \leq Cr^k, \quad \forall r \in V_1^k, \forall k \in K \quad (3.14)$$

$$x_{i,j}^k \in \{0, 1\}, \quad z_{i,j}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.15)$$

$$Aux1_{i,j}^k \geq 0, \quad Aux2_{i,j}^k \geq 0 \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K \quad (3.16)$$

$$g_j \geq 0, \quad j \in I \cup V_1^1 \cup V_1^2 \quad (3.17)$$

La función objetivo (3.1) minimiza los costos totales de la programación realizada en el uso de vehículos y carga de batería, incluyendo un término que penaliza los viajes no atendidos. Respecto a las restricciones del modelo, la restricción (3.2) asegura que cada viaje debe ser atendido una vez, ya sea por la flota de buses disponible o por algún bus de apoyo en la práctica ($z_{i,j}^k$). La restricción (3.3) asegura que no se pueden utilizar más buses eléctricos de los disponibles en cada terminal de buses. La restricción (3.4) asegura la conservación de flota de buses. La restricción (3.5) permite calcular el consumo acumulado de energía del bus al realizar un viaje del nodo i al nodo j . Las restricciones (3.6)–(3.8) representan una linealización de la ecuación no-lineal $g_j = \sum_{i:(i,j) \in A^k} (g_i + e_{i,j}) \cdot x_{i,j}^k$. De igual manera la restricción (3.9) actualiza el consumo acumulado de energía del bus eléctrico cuando este carga su batería, y al igual que la restricción (3.5), esta restricción se debe linealizar y para ello se utilizan las restricciones (3.10)–(3.12) conjuntamente con una variable auxiliar ($Aux2_{i,j}^k$). La restricción (3.13) no permite que un bus eléctrico atienda un viaje si su porcentaje de batería es menor al porcentaje mínimo necesario para abandonar el terminal de buses. La restricción (3.14) asegura que la cantidad de buses que visiten la estación de carga del terminal k no exceda su capacidad. Las restricciones (3.15)–(3.17) muestran la naturaleza de las variables de decisión.

3.2. Modelo Estocástico con Recursos de Múltiples Etapas

Para extender el modelo presentado anteriormente a un modelo estocástico con recursos de múltiples etapas, es fundamental definir previamente las etapas, estados y escenarios del problema estudiado.

- a) **Etapas:** Se tomará una franja horaria de un día de operación, y esta franja se subdividirá en distintos intervalos de tiempo que definen las etapas del modelo, en cada una de las cuales se deberá tomar la decisión de qué bus realizará la salida programada, tomando en cuenta la información de las etapas anteriores y la definición del parámetro asociado al tiempo de viaje en esa etapa.

- b) **Estados:** Como ya se ha señalado, en este modelo, el parámetro bajo incertidumbre es el tiempo de

viaje de los buses eléctricos, y para ello este parámetro es modelado como un número finito y discreto de estados, en donde cada uno tiene asociado una probabilidad condicional de ocurrencia definida para cada etapa en que se ha subdividido el horizonte de planificación.

- c) **Escenarios:** En este modelo, en cada ramificación de nodos se pueden encontrar estados optimistas, promedios o pesimistas respecto a los tiempos de los viajes que componen dicha etapa en cuestión. Entonces, por ejemplo, si se toma un árbol de tres etapas y dos posibles estados (excepto para la primera etapa que es determinista en tiempos de viajes), los escenarios serían todos los caminos recorridos desde el nodo raíz de la primera etapa hasta los nodos de la última etapa, en donde en cada camino se tendrá una serie de estados (determinista—optimista—pesimista, determinista—optimista—optimista, etc.) los cuales componen a un escenario.

Para ejemplificar lo anterior, se presenta un árbol de escenario en la Figura 3.1, en donde existen tres etapas. Utilizando este ejemplo para el problema en cuestión, a cada etapa pertenece un número finito de viajes. El primer nodo corresponde a viajes programados se deben atender, en donde los tiempos de viajes se mantienen de manera constante, es decir, los tiempos de viaje de la primera etapa no están sujetos a incertidumbre, mientras que las decisiones pertenecientes a la segunda etapa presentan dos tipos de estados (podría ser uno pesimista y otro optimista) en los tiempos de viaje resultante de los buses disponibles para el despacho, y a su vez, estos se vuelven a ramificar en tres estados, dando origen así a la tercera etapa. Cada una de estas ramificaciones tiene asignada una probabilidad, en donde, en cada etapa, la suma de las probabilidades de ocurrencia de todos los estados en dicha etapa debe sumar 1. Respecto a los escenarios, en este ejemplo se pueden apreciar seis escenarios, los cuales corresponden a los seis posibles caminos desde el nodo 1 hasta los nodos finales (nodo 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Cabe mencionar que la suma de la probabilidad de ocurrencia de todos los escenarios debe ser igual a 1.

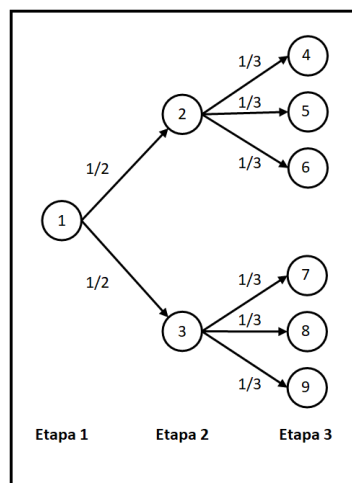


Figura 3.1: Árbol de 6 escenarios con 3 etapas.
(Fuente: Elaboración propia.)

Por lo tanto, es importante poder identificar cada escenario, lo cual implica que las variables de decisión y algunos conjuntos del modelo determinista estén con un subíndice adicional correspondiente al escenario en cuestión.

Conjuntos

S : Conjunto de escenarios.

K : Conjunto de terminales de buses eléctricos.

A_s^k : Conjunto de arcos del terminal k bajo el escenario s .

N^k : Conjunto de nodos del terminal k .

I : Conjunto de viajes que hay que atender.

V^k : Conjunto de nodos virtuales del terminal k , los cuales se dividen en V_1^k y V_2^k . V_1^k : Buses que llegan al terminal k , cargan batería, y luego salen a seguir atendiendo la secuencia de viajes. V_2^k : Buses que llegan al terminal k , no cargan batería, y luego en algún momento vuelven a seguir atendiendo la secuencia de viajes.

W_j : Conjunto de nodos que si al finalizar un viaje deciden cargar su batería (V_1^k), coinciden con parte del tiempo de carga del bus que luego de realizar el viaje j decidió cargar su batería.

El primer conjunto corresponde a los escenarios posibles del modelo estocástico multi-etapa, y respecto al resto de los conjuntos, estos se mantienen igual al del modelo determinista, a excepción del conjunto de arcos admisibles de cada terminal de buses, ya que, dependiendo del escenario en el que se esté trabajando, los tiempos de viajes cambiarán y provocarán que algunos arcos ya no se puedan realizar, como por ejemplo terminar un viaje y comenzar inmediatamente otro.

Respecto a los parámetros, es importante recalcar que el parámetro bajo incertidumbre son los tiempos de viajes, y estos, si bien no aparecen explícitamente en la formulación del modelo, están en la creación de la red *time-expanded*, específicamente en los arcos admisibles de cada escenario, los cuales están condicionados por el tiempo que toma realizar cada viaje de la programación inicial. En continuación con lo anterior, se agrega el parámetro $t_{i,j}^s$. En relación al resto de los parámetros, se mantienen los mismos de los presentados para la versión determinista del modelo.

Parámetros

$e_{i,j}$: Consumo de batería desde el nodo i al nodo j .

W : Porcentaje de batería que se carga en una estación.

r^k : Cantidad de vehículos en el terminal k .

E_{max} : Máximo nivel de batería permitido.

E_{min} : Mínimo nivel de batería permitido.

Cr^k : Cantidad de estaciones de carga disponibles en el terminal k .

M : Penalización por no atender un viaje.

p_s : Probabilidad de ocurrencia del escenario s .

c_{ij} : Costos operacionales por realizar el recorrido por el arco (i, j) .

$t_{i,j}^s$: Tiempo de viaje de realizar el el recorrido por el arco (i, j) en el escenario s . Cabe mencionar que este parámetro es utilizado propiamente tal para la creación de la red *time-expanded*, y así los arcos admisibles por escenario.

Variables de decisión

$x_{i,j,s}^k$: Variable binaria que vale 1 si el bus del terminal k , bajo el escenario s , realiza el viaje al nodo j luego de haber realizado el viaje al nodo i y 0 si no.

$z_{i,j,s}^k$: Variable binaria que vale 1 si el bus del terminal k , bajo el escenario s , **no** realiza el viaje al nodo j luego de haber realizado el viaje al nodo i y 0 si no.

$g_{j,s}$: Variable real que indica el consumo de batería acumulado del bus al terminar el viaje al nodo j bajo el escenario s .

$Aux1_{i,j,s}^k$: Variable auxiliar real.

$Aux2_{i,j,s}^k$: Variable auxiliar real.

Ahora, debido a que es necesario tener una variable de decisión distinta respecto al escenario que se esté estudiando, a cada una de las variables de decisión del modelo determinista se le agrega el subíndice "s" correspondiente a los escenarios.

$$\min \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_s^k} c_{i,j} x_{i,j,s}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_s^k} M z_{i,j,s}^k \right] \quad (3.18)$$

s.a

$$\sum_{i:(i,j) \in A_s^k} (x_{i,j,s}^k + z_{i,j,s}^k) = 1, \quad \forall j \in I, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.19)$$

$$\sum_{j:(o_k,j) \in A_s^k} x_{o_k,j,s}^k \leq r^k, \quad \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.20)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in A_s^k} x_{i,j,s}^k - \sum_{p:(j,p) \in A_s^k} x_{j,p,s}^k = 0, \quad \forall j \in I \cup V_1^k \cup V_2^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.21)$$

$$g_{j,s} = \sum_{i:(i,j) \in A_s^k} (Aux1_{i,j,s}^k + e_{i,j} \cdot x_{i,j,s}^k), \quad \forall j \in I \cup V_2^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.22)$$

$$Aux1_{i,j,s}^k \leq E_{max} \cdot x_{i,j,s}^k, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.23)$$

$$Aux1_{i,j,s}^k \leq g_{i,s}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.24)$$

$$Aux1_{i,j,s}^k \geq g_{i,s} - (1 - x_{i,j,s}^k) \cdot E_{max}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.25)$$

$$g_{j,s} = \sum_{i:(i,j) \in A_s^k} (Aux2_{i,j,s}^k - W \cdot x_{i,j,s}^k), \quad \forall j \in V_1^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.26)$$

$$Aux2_{i,j,s}^k \leq E_{max} \cdot x_{i,j,s}^k, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.27)$$

$$Aux2_{i,j,s}^k \leq g_{i,s}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.28)$$

$$Aux2_{i,j,s}^k \geq g_{i,s} - (1 - x_{i,j,s}^k) \cdot E_{max}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.29)$$

$$g_{i,s} + \sum_{j:(i,j) \in A_s^k} e_{i,j} \cdot x_{i,j,s}^k \leq (1 - E_{min}), \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.30)$$

$$\sum_{j:(j,r) \in A_s^k} x_{j,r,s}^k + \sum_{w \in W_j} \sum_{i \in I} x_{i,w,s}^k \leq C r^k, \quad \forall r \in V_1^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.31)$$

$$x_{i,j,s}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.32)$$

$$z_{i,j,s}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.33)$$

$$Aux1_{i,j,s}^k \geq 0, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.34)$$

$$Aux2_{i,j,s}^k \geq 0, \quad \forall i \in N^k, \forall j \in N^k, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (3.35)$$

$$g_{j,s} \geq 0, \quad j \in I \cup V_1^1 \cup V_1^2, \forall s \in S \quad (3.36)$$

$$\text{Restricciones de no anticipatividad} \quad (3.37)$$

A diferencia de la versión determinista del modelo, ahora la función objetivo se multiplica por la probabilidad de ocurrencia de cada escenario, en donde la suma de la probabilidad de cada uno de estos es igual a 1. Respecto a las restricciones, estas tienen el mismo propósito, pero con la salvedad de que se deben cumplir para cada uno de los escenarios que se estén estudiando. Por otro lado, se agregan las restricciones de

no anticipatividad, las cuales son esenciales para los modelos estocásticos con escenarios, ya que aseguran que las decisiones en una etapa deben ser iguales para todos los escenarios que coinciden hasta esa etapa.

Este modelo es resuelto de manera directa, es decir, no se utilizó ninguna heurística o estrategia de resolución, ya que el procesamiento de datos y la creación de la red *time-expanded network* reducen bastante el tiempo de resolución del modelo.



4 | Resultados

En esta sección, se describe la aplicación del modelo propuesto y su aplicación a un caso de estudio para un servicio de una empresa del sistema de transporte público de la ciudad de Santiago de Chile. Para ello, se utiliza los datos reales de 3 meses de operación normal durante el año 2019 del recorrido de una línea de bus. Se trabajó con personas pertenecientes a una empresa que posee la licitación en el transporte público de la ciudad de Santiago, y fueron ellos quienes proporcionaron la información necesaria. Además, se realizaron visitas a los terminales de buses, en donde se consultó a los operadores sobre datos más específicos de los buses y de la operación en el día a día. Toda la información recopilada se utilizó para construir el modelo propuesto, y posteriormente validarlo.

Para poder aplicar la metodología descrita anteriormente, es importante partir analizando el comportamiento del tráfico durante los distintos días de la semana y el horario de dicho día. Para ello, se analizaron los datos de la operación completa de cada día para los tres meses estudiados, en donde, a través de Python 3.7, se realizaron diferentes pruebas de ajuste de distribución de probabilidades de Kolmogorov-Smirnov a los tiempos de viajes, obteniendo por ejemplo que la distribución para los datos de todo un día de operación es la distribución normal, ver Figura 4.1. Cabe mencionar que durante las 00:01 y las 08:00 la empresa utiliza buses convencionales para sus recorridos.

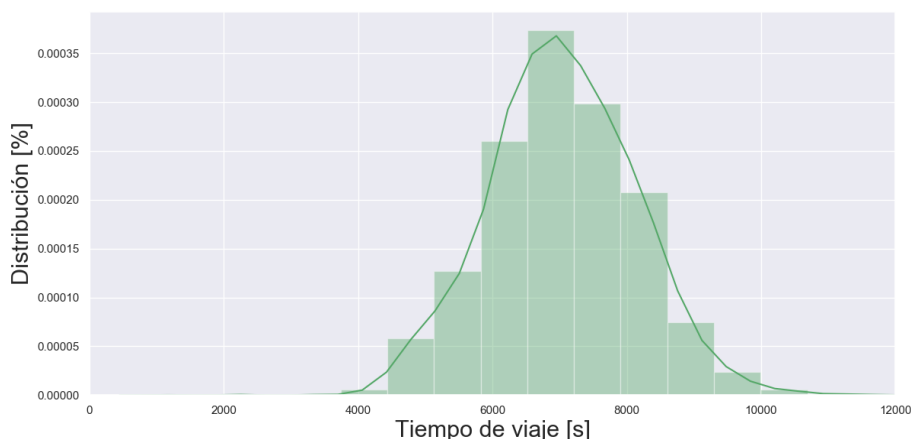


Figura 4.1: Ajuste de distribución a los tiempos de viajes.
(Fuente: Elaboración propia.)

Debido a lo descrito anteriormente, es decir, que cada día de la semana tiene distinto comportamiento de tráfico, y que además está condicionado por el horario del día estudiado, fue necesario agrupar los días de la semana que mostraron comportamientos similares en los tiempos medios y desviaciones estándares de los tiempos de viajes. De esta forma, la semana se dividió en tres grupos: lunes-martes-miércoles, jueves-viernes y sábado-domingo. Ante la variabilidad observada en cada grupo, fue necesario dividir el día completo de operación en franjas horarias debido al comportamiento del tráfico durante el día (horario punta, horario valle, etc.). En las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se puede apreciar los tiempos esperados y la desviación estándar de cada una de las franjas horarias de los grupos de días.

Tabla 4.1: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de lunes-martes-miércoles.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:45	02:13:33	00:14:37
09:45 - 17:00	01:56:12	00:10:58
17:00 - 19:30	02:11:11	00:13:02
19:30 - 21:45	01:49:42	00:11:39
21:45 - 06:30	01:35:00	00:14:03

Tabla 4.2: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de jueves-viernes.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:00	02:14:35	00:12:30
09:00 - 17:15	02:00:02	00:17:09
17:15 - 19:15	02:14:52	00:15:21
19:15 - 21:30	01:53:58	00:13:17
21:30 - 06:30	01:36:38	00:13:58

Tabla 4.3: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de sábado-domingo.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
08:00 - 12:00	01:46:33	00:14:37
12:00 - 17:15	01:53:41	00:14:25
17:15 - 22:15	01:44:08	00:10:58
22:15 - 00:00	01:27:21	00:17:43

Para el comportamiento del tráfico y franjas horarias de cada día de la semana de manera particular, ver Anexo A.

A continuación, se mostrarán distintas instancias en las que se probó la metodología propuesta. Cabe mencionar que en cada una de estas instancias se utilizan 2 terminales de buses, la frecuencia de salida de cada viaje es cada 15 minutos, todos los buses eléctricos comienzan con nivel de batería del 100 % y no es posible que se comience a atender un viaje si el nivel de batería es menor al 30 %. Del mismo modo, se considera un consumo de batería fijo del 30 % por recorrer cada arco, asimismo, la carga de batería también

es fija y corresponde 20 % e implica que el bus esta 1 hora detenido en la estación de carga. Por otra parte, existe una penalización de \$1.500.000 por no atender un viaje, y costos operaciones de \$5.000 por cada carga de batería y \$30 por cada minuto ocioso en el que un bus eléctrico está en el terminal esperando atender un viaje. Cabe mencionar que es permitido como máximo 40 minutos de tiempo ocioso. Por último, existen 7 estaciones de carga de batería en cada terminal.

Respecto al resto de los parámetros utilizados para probar la metodología, como es el caso de la probabilidad de ocurrencia de cada escenario, esta es equiprobable, es decir, si un modelo es de seis escenarios, entonces la probabilidad de que cada escenario ocurra es de $\frac{1}{6}$ %.

Es importante destacar que se presenta la programación de salidas en viajes en un archivo Excel, y luego, a través de Python 3.7, se realiza el procesamiento de datos para crear la red *time-expanded* y entregar toda esta información al modelo formulado en Pyomo, en el cual se utiliza el solver Gurobi 9.1.1 en un computador con un procesador Intel Core i5 de 1.60[GHz] y 8[Gb] de RAM.

Ahora bien, teniendo los grupos de días y las franjas horarias en donde el comportamiento de los tiempos de viajes son similares, se analizó una instancia en concreto en el día sábado, en la franja horaria 12:00 - 17:15 (Albornoz et al., 2020). En dicha franja se volvieron a calcular los tiempos medios y desviaciones estándar con intervalos de tiempo de 15 minutos (frecuencia de salida de los viajes a atender), para así, dentro de la misma franja horaria, poder separar el problema en múltiples etapas. La Tabla 4.3 permite apreciar los tiempos esperados y la desviación estándar de distintas franjas horarias en los días sábados y domingos. Es importante destacar que durante el fin de semana no hay registro entre las 00:01 y las 08:00 debido a que en ese horario la empresa utiliza buses convencionales.

Para esta instancia en particular, se tiene una programación inicial de 22 viajes a atender por terminal, es decir, 44 viajes en total, tal como se muestra en el Anexo B. El problema es dividido en 3 etapas, en donde los primeros 3 viajes de cada terminal pertenecen a la primera etapa, los siguientes 6 viajes, de cada terminal, a la segunda etapa y el resto a la tercera etapa. Para la primera etapa, se consideraron tiempos de viajes determinista, por otra parte, para la segunda y tercera etapa se consideró, para cada etapa, un estado optimista y otro pesimista de acuerdo a la desviación estándar de cada etapa, generando así un árbol de cuatro escenarios. La probabilidad de ocurrencia de cada estado es del 50 %. Cabe mencionar que, para la creación de los estados optimistas y pesimista, se le restó y se le sumó 1 desviación estándar al tiempo medio de la etapa en cuestión, respectivamente.

El modelo resuelto entrega, para cada escenario, la secuencia que debe seguir cada bus, y los viajes que no se pueden atender por falta de flota. En la Figura 4.3, se puede apreciar la secuencia de un bus en particular en el escenario 1 (nodos 1-2-4) y en el escenario 4 (nodos 1-3-7) presentados en la Figura 4.2. Tal como se muestra en el escenario 1, el cual podría llamarse “escenario optimista”, la secuencia del bus corresponde a salir del terminal n°1 (O_1), atender el viaje número 11 (t_{11}), cargar su batería durante una

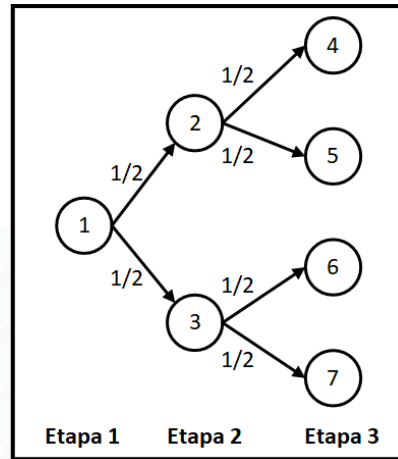


Figura 4.2: Árbol de 4 escenarios con 3 etapas.
(Fuente: Elaboración propia.)

hora (V_1) en el terminal n°2, para luego atender el viaje número 22 del mismo terminal (t_{44}) y finalizar en el terminal n°1 (D_1). Por otra parte, en el escenario 4, el cual está conformado solamente por estados pesimistas, la secuencia del mismo bus corresponde solamente a salir del terminal n°1 (O_1), atender el viaje número 11 (t_{11}) y terminar su secuencia en el terminal n°2 (D_2). Vale la pena hacer notar que el aumento de la duración de un mismo viaje en casi 30 minutos, debido a las condiciones del tráfico, cambia completamente la secuencia y por ende repercute en el resto de los viajes.

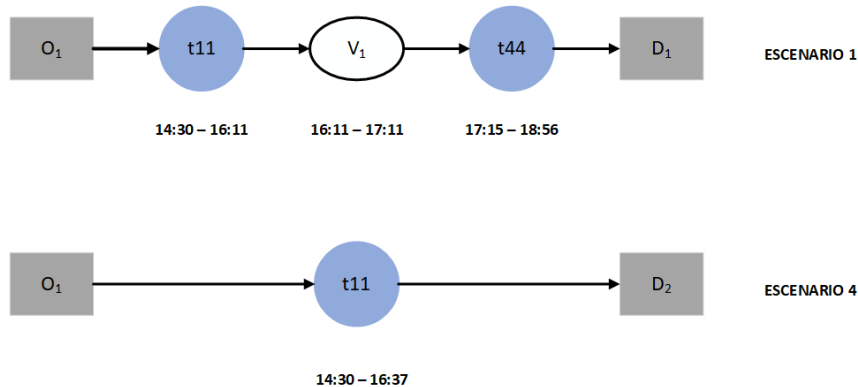


Figura 4.3: Diferencia de secuencia de un bus en dos escenarios distintos.
(Fuente: Elaboración propia.)

El valor de la función objetivo en este modelo, conocido como Recourse Problem en la literatura, resulta ser de \$17.620.764, y el tiempo de ejecución para resolver esta instancia fue de 15,3 segundos. Ahora bien, para medir la calidad e importancia de esta solución, es necesario analizar ciertos indicadores que son comunes en problemas estocásticos, tales como el EVPI y el VSS, los cuales fueron introducidos previamente en el capítulo 2. Para este caso de estudio, el valor del *Wait-and-see* resultó ser \$12.916.522, mientras que el EV de \$12.126.022 y el EEV_2 de \$20.620.764. Asimismo, se tiene que la cota inferior y superior del RP es el

Wait-and-see y el EEV_2 , respectivamente. Es importante aclarar que el subíndice anterior hace referencia a que las decisiones de la primera son las que están fijas en la resolución del modelo.

En la Tabla 4.4 se muestran los valores de los indicadores mencionados anteriormente.

Tabla 4.4: Valores de indicadores.

Indicador	Valor
EVPI	\$ 4.704.242
VSS_2	\$ 3.000.000

Se puede apreciar, en primer lugar, que ambos indicadores representan un valor cercano al 30 % y al 20 % del valor del modelo con recurso, respectivamente. Ahora bien, el resultado del EVPI, quiere decir que el tomador de decisiones está dispuesto a pagar como máximo \$ 4.704.242 por contar con información sobre el futuro, mientras que el VSS_2 muestra que existe una gran ganancia al usar el modelo estocástico frente al determinista para el escenarios promedio, lo cual da relevancia al uso de la metodología propuesta.

Luego, teniendo los antecedentes de la instancia del día sábado, se procedió a probar la metodología propuesta en el día miércoles, específicamente en el horario de 9:45 a 17:00. Para estos casos de estudio, se debió atender 60 viajes (30 viajes por cada terminal). Se separó el horizonte de operación en tres etapas, en donde la primera etapa contempla los viajes desde las 9:45 a las 11:30, la segunda etapa los viajes desde las 11:30 hasta las 13:15 y el resto de los viajes corresponden a la tercera etapa. Hay que recalcar que estas etapas se formaron por comportamiento similar en el tráfico durante esos horarios, por lo que se procedió a estudiar la distribución de probabilidad en cada etapa, a través de Python 3.7, usando pruebas de ajuste de distribución de probabilidades de Kolmogorov-Smirnov. Los resultados obtenidos para cada una de las etapas se encuentran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Distribución de probabilidad en las etapas del día miércoles.

Etapas	Distribución	Parámetros
Etapas 1	Normal	$\mu = 6774,26$ [s] ; $\sigma^2 = 589,74$ [s ²]
Etapas 2	Normal	$\mu = 7064,75$ [s] ; $\sigma^2 = 676,69$ [s ²]
Etapas 3	Normal	$\mu = 7112,28$ [s] ; $\sigma^2 = 627,37$ [s ²]

Posteriormente, conociendo la distribución y los parámetros de esta en cada una de las etapas, se utilizó la librería NumPy de Python 3.7 para así generar 1.000 números aleatorios para cada etapa, y seleccionar al azar una muestra de números igual a la cantidad de viajes de la etapa en cuestión, es decir, como la etapa uno contiene ocho viajes, entonces se seleccionó una muestra de ocho números al azar de los 1.000 números aleatorios generados con la distribución de dicha etapa. Luego, como todas las etapas resultaron tener una distribución normal, para la selección de las instancias, se validó que los datos generados efectivamente distribuyeran como una distribución normal a través de las siguientes métodos:

- a) Histogramas: Se basa en graficar la distribución de probabilidad y compararla con las gráficas de las distribuciones conocidas, es decir, al comparar con una distribución normal centrada, se debe observar si los datos se agrupan torno a un valor central (media), y además es simétrica a ambos lados del centro, quedando las desviaciones estándares a igual distancia unas de otras. En cada una de las instancias se puede observar que los datos muestrales se agrupan como una distribución normal.
- c) Gráficos Cuantil-Cuantil: También conocido como gráficos Q-Q (por su nombre en inglés), es un método gráfico para comparar dos distribuciones de probabilidad, generalmente la de una muestra con la distribución teórica de esta, a través de un gráfico de cuantiles, en donde en el eje de las abscisas se posiciona la distribución teórica y en el eje de las ordenadas la distribución de probabilidad de la muestra ([Gnanadesikan, 2011](#)). Para comprobar si distribuye como una distribución normal, se traza una recta en 45° respecto al eje x, y si los puntos de la muestra se sitúan sobre esta, entonces distribuye como una distribución normal. Se aprecia que en cada instancia ocurre lo mencionado anteriormente.
- d) Prueba de Shapiro Wilk: Es una prueba de hipótesis en donde se plantea como hipótesis nula que la muestra tiene distribución normal con un nivel de significancia α . Por otra parte, se tiene la hipótesis alternativa que afirma que la muestra no proviene de una distribución normal ([Shapiro y Wilk, 1965](#)). Cabe mencionar que uno al no poder rechazar la hipótesis nula, no es posible afirmar que la muestra distribuye con una normal, por lo que es necesario acompañarlo de otro análisis para poder hacer dicha afirmación, como por ejemplo alguno de los mencionados anteriormente. Esta prueba se realizó con un nivel de significancia del 5 %, en donde, en cada instancia, y en cada una de las tres etapas, el valor-p resulta ser mayor a la significancia, por lo tanto no es posible rechazar la hipótesis nula.

Estas validaciones se realizaron haciendo uso de las librerías de Python. En el Anexo C se encuentra la validación de la normalidad de cada etapa en cada una de las instancias, y tal como se mencionó anteriormente, todas las etapas de todas las instancias resultaron distribuir como una normal.

Ahora bien, se analizaron 10 instancias diferentes en un árbol de cuatro, seis y nueve escenarios, en donde siempre la primera etapa contiene tiempos deterministas, mientras que para el resto de las etapas se tienen estados pesimistas, optimistas y promedio, tal como se muestra en la Figura 4.4. Los tiempos de viajes optimistas corresponden a los tiempos medios de la etapa en cuestión, pero restándole 1 desviación estándar de dicha etapa. Para los tiempos de viajes pesimistas ocurre lo mismo, solo que se le suma 1 desviación estándar, y por último, para los estados promedios solamente se utiliza el tiempo medio de la etapa correspondiente. Siguiendo con lo anterior, la ramificación en cada uno de estos ocurre de manera equiprobable, es decir, si ocurren tres ramificaciones, entonces la probabilidad de ocurrencia de cada estado es igual a $\frac{1}{3}$ %. A continuación se presentan los resultados en cada tipo de árbol de escenario junto al cálculo del EEV_2 , VSS_2 , WS y $EVPI$.

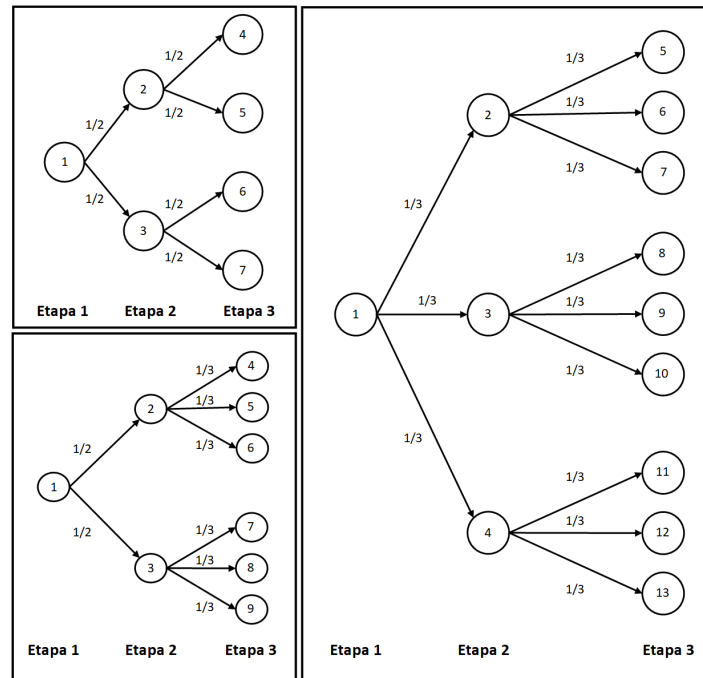


Figura 4.4: Árboles de cuatro, seis y nueve escenarios.
(Fuente: Elaboración propia.)

En la Tabla 4.6, en la cual se encuentran los resultados para el modelo de cuatro escenarios, se destaca, al igual que en los modelos de seis y nueve escenarios, que en cada una de las instancias, la función objetivo del modelo estocástico multi-etapa tiene un valor mayor que el del modelo determinista. Al igual que en la instancia del sábado, los tiempos de cómputo no fueron tan elevados, resolviendo el modelo de cuatro escenarios en 25 segundos, el modelo de seis escenarios en 60 segundos y el último modelo en 115 segundos, aproximadamente. Así mismo, para medir la calidad e importancia de la solución de cada modelo, se calcularon los indicadores EVPI y VSS_2 .

Tabla 4.6: Resultados del modelo con cuatro escenarios.

Instancia	Modelo Determinista	RP	EEV_2	VSS_2	WS	EVPI
1	\$ 439.317	\$ 653.520	\$ 672.643	\$ 19.123	\$ 548.855	\$ 104.665
2	\$ 439.360	\$ 653.707	\$ 671.816	\$ 18.109	\$ 548.692	\$ 105.015
3	\$ 439.264	\$ 653.546	\$ 672.776	\$ 19.230	\$ 548.733	\$ 104.813
4	\$ 439.271	\$ 653.379	\$ 673.458	\$ 20.079	\$ 548.751	\$ 104.628
5	\$ 439.217	\$ 653.547	\$ 671.756	\$ 18.209	\$ 548.772	\$ 104.775
6	\$ 439.175	\$ 653.484	\$ 673.631	\$ 20.147	\$ 548.727	\$ 104.758
7	\$ 439.174	\$ 653.541	\$ 672.670	\$ 19.129	\$ 548.692	\$ 104.849
8	\$ 439.277	\$ 653.507	\$ 671.961	\$ 18.454	\$ 548.733	\$ 104.774
9	\$ 439.229	\$ 653.781	\$ 670.727	\$ 16.946	\$ 548.832	\$ 104.949
10	\$ 439.203	\$ 653.718	\$ 671.773	\$ 18.055	\$ 548.805	\$ 104.913

Para poder analizar estos indicadores estocásticos, es necesario calcular previamente el valor del *Wait-and-see* y el EEV_2 , en donde, al mismo tiempo estos valores resultan ser una cota inferior y superior

Tabla 4.7: Resultados del modelo con seis escenarios.

Instancia	Modelo Determinista	RP	EEV_2	VSS_2	WS	EVPI
1	\$ 439.317	\$ 652.065	\$ 682.049	\$ 29.984	\$ 512.348	\$ 139.717
2	\$ 439.360	\$ 652.253	\$ 681.192	\$ 28.939	\$ 512.255	\$ 139.999
3	\$ 439.264	\$ 652.094	\$ 683.164	\$ 31.070	\$ 512.349	\$ 139.745
4	\$ 439.271	\$ 651.914	\$ 681.877	\$ 29.963	\$ 512.217	\$ 139.697
5	\$ 439.217	\$ 652.095	\$ 682.147	\$ 30.052	\$ 512.254	\$ 139.841
6	\$ 439.175	\$ 652.032	\$ 681.026	\$ 28.994	\$ 512.218	\$ 139.815
7	\$ 439.174	\$ 652.087	\$ 681.553	\$ 29.466	\$ 512.171	\$ 139.916
8	\$ 439.277	\$ 652.043	\$ 681.757	\$ 29.714	\$ 512.213	\$ 139.830
9	\$ 439.229	\$ 652.329	\$ 682.126	\$ 29.797	\$ 512.297	\$ 140.032
10	\$ 439.203	\$ 652.266	\$ 682.167	\$ 29.901	\$ 512.293	\$ 139.973

Tabla 4.8: Resultados del modelo con nueve escenarios.

Instancia	Modelo Determinista	RP	EEV_2	VSS_2	WS	EVPI
1	\$ 439.317	\$ 655.987	\$ 1.856.412	\$ 1.200.426	\$ 512.357	\$ 143.630
2	\$ 439.360	\$ 656.183	\$ 1.856.538	\$ 1.200.355	\$ 512.275	\$ 143.908
3	\$ 439.264	\$ 656.059	\$ 1.856.308	\$ 1.200.249	\$ 512.364	\$ 143.695
4	\$ 439.271	\$ 656.001	\$ 1.856.292	\$ 1.200.290	\$ 512.222	\$ 143.779
5	\$ 439.217	\$ 656.065	\$ 1.856.373	\$ 1.200.309	\$ 512.258	\$ 143.807
6	\$ 439.175	\$ 655.993	\$ 1.856.348	\$ 1.200.355	\$ 512.229	\$ 143.764
7	\$ 439.174	\$ 656.189	\$ 1.856.474	\$ 1.200.285	\$ 512.185	\$ 144.004
8	\$ 439.277	\$ 656.011	\$ 1.856.238	\$ 1.200.228	\$ 512.225	\$ 143.785
9	\$ 439.229	\$ 656.133	\$ 1.856.452	\$ 1.200.318	\$ 512.315	\$ 143.819
10	\$ 439.203	\$ 655.946	\$ 1.856.268	\$ 1.200.321	\$ 512.300	\$ 143.646

del Recourse Problem, respectivamente. Siguiendo con lo anterior, se aprecia que, en el modelo de cuatro escenarios, en cada una de las instancias, el EVPI y el VSS_2 representan un valor cercano al 16 % y al 4,3 % respecto al modelo con recursos, respectivamente. Luego, para el modelo con recursos de seis escenarios, el valor de estos indicadores varían notablemente, obteniendo así un EVPI y un VSS_2 que representan un 21,3 % y un 3 % aproximadamente respecto al modelo con recursos. Por último, para el modelo de mayor escenarios, estos indicadores terminan siendo, respecto al modelo con recursos, de un 21,9 % para el EVPI y del 182 % aproximadamente para el VSS_2 . El aumento considerable de este último indicador en dicho modelo es debido principalmente a la alta penalización por no atender viajes, lo cual se relaciona directamente con las decisiones fijadas de la primera etapa del modelo promedio del parámetro con incertidumbre de los escenarios (tiempo de viaje), es decir, del modelo determinista. Volviendo con los indicadores, se puede apreciar, tal como se muestran en las tablas anteriores, que en cada instancia el valor del EVPI resulta ser positivo, lo cual quiere decir cuanto esta dispuesto a pagar el tomador de decisiones por contar con información sobre el futuro, cuyo valor es del orden de 10^5 , mientras que el VSS muestra que existe una gran ganancia al usar los modelos estocásticos frente al determinista para el escenario promedio, lo cual da relevancia al uso de la metodología propuesta.

Cabe mencionar que, en los casos de estudios presentados anteriormente, se mantuvo fijo el tiempo de

carga de batería, en donde, independiente del nivel de batería del bus, si este visitaba una estación de carga, este se mantendría una hora cargando su batería, lo cual es equivalente a cargar 20 % de batería. Es por esto por lo que se procedió a sensibilizar este parámetro, en donde se varió, de manera discreta, el porcentaje que se va a cargar en cada visita a las estaciones entre 25 % y 17 %, y por ende también varió, de manera lineal, el tiempo de carga. Esta sensibilización se realizó tanto en el modelo estocástico como en el determinista, para así observar de mejor manera los cambios en la decisión óptima de cada instancia, y en consecuencia de la función objetivo.

Este cambio en la duración de carga de batería se realizó en el modelo de cuatro escenarios, obteniendo los siguientes resultados.

Tabla 4.9: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 1.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 443.283	\$ 659.459	25 %	1,25
\$ 442.490	\$ 658.272	24 %	1,20
\$ 441.699	\$ 657.084	23 %	1,15
\$ 440.907	\$ 655.896	22 %	1,10
\$ 440.115	\$ 654.708	21 %	1,05
\$ 439.323	\$ 653.519	20 %	1,00
\$ 1.206.389	\$1.418.050	19 %	0,95
\$ 1.204.211	\$1.415.476	18 %	0,90
\$ 1.097.795	\$1.307.438	17 %	0,85

A medida que se va sensibilizando el porcentaje de carga de batería, del mismo modo va variando el tiempo de carga batería. De igual forma, el costo de cargar batería también aumenta de manera lineal, teniendo un costo de \$5.000 por cargar 20 %. Por otra parte, se aprecia que a medida que más se carga la batería, mayor es el valor de la función objetivo debido al aumento del costo de cargar batería, así como también se modifican decisiones que terminan variando, en menor escala, el costo ocioso. Siguiendo con lo anterior, se observa que al cargar 19 %, 18 % y 17 %, el valor de la función objetivo aumenta considerablemente. Esto se debe a que el porcentaje mínimo para realizar un viaje es del 30 % de batería, por lo que no se alcanza a cumplir con la condición debido a 1 % de batería, por ejemplo, y en consecuencia se deben realizar más visitas a las estaciones de carga, o bien dejar de atender algunos viajes.

En las nueve instancias restantes, los resultados obtenidos son bastante parecidos, debido principalmente al mismo motivo de la restricción del porcentaje mínimo de batería para realizar un viaje.

5 | Conclusiones

En este trabajo, se formula y se resuelve un problema para determinar la secuencia optima de buses eléctricos teniendo en cuenta una programación de salidas dada y tiempos de viajes estocásticos. Para esto, se debe determinar, en primer lugar, el tipo de distribución de probabilidad de los distintos días de la semana y de las distintas franjas horarias, para así poder conocer los distintos comportamientos del tráfico dependiendo el día y la hora. Se presentó un modelo de optimización estocástica con recursos en múltiples etapas con resolución directa para un problema real de una empresa chilena que licita en el transporte publico de la ciudad de Santiago de Chile.

Este problema es especialmente relevante para la actualidad, en donde se ha ido dejando de lado los vehículos convencionales y se están empezando a cambiar a vehículos eléctricos, en donde el tiempo para cargar batería es notablemente mayor al tiempo en que uno se demora en cargar con combustible un vehículo.

En este trabajo se formula un modelo de optimización estocástica multi-etapa para la programación de salidas de flotas de buses eléctricos con múltiples terminales de buses, donde se considera como parámetro bajo incertidumbre el tiempo de viaje ante las condiciones de tráfico. Asimismo, el modelo emplea una representación de la red a través de nodos *time-expanded*, lo cual no es muy común en la literatura para este tipo de problema. Hasta donde se tiene conocimiento, no hay evidencia de trabajos que abarquen todos los aspectos considerados. Adicionalmente, se analizó la información de operación en meses normales del año 2019 de una línea de buses eléctricos del transporte público de la ciudad de Santiago de Chile, y se determinó que la distribución que mejor se ajustaba a los tiempos de viajes es la distribución normal. Luego, se dividieron los días de la semana en tres grupos que compartían comportamientos similares dentro de ciertas franjas horarias, por lo que así se pudo dividir el día completo de operación, de los días pertenecientes a estos grupos, en varias franjas horarias, y del mismo modo, determinar que las etapas en las franjas seleccionadas, estas tambien distribuyen como una normal.

Se resolvió una instancia utilizando la información de operación de un día sábado. Esta instancia fue resuelta para una de esas franjas con un modelo de optimización estocástica con recurso de tres etapas con 4

escenarios. El solver seleccionado logra resolver esta instancia en alrededor de 15 segundos. Para poder medir la calidad de la solución estocástica (RP), se calculó los valores *Wait-and-see*, EEV y EV, los cuales fueron usados para calcular los indicadores EVPI y VSS. El primer indicador muestra la máxima disposición a pagar por el tomador de decisión por contar con información sobre el futuro, mientras que el VSS muestra que existe una gran ganancia al usar el modelo estocástico frente al determinista en escenarios con incertidumbre. Ambos indicadores alcanzaron valores altos en términos relativos.

Del mismo modo, se procedió a replicar esto en un día de semana con un horizonte mucho mayor y con 10 instancias, las cuales fueron generadas a partir de muestras aleatorias originadas a través de los parámetros de las distribuciones de probabilidad de cada etapa. Cada etapa de cada instancia se validó a través de histogramas, gráficos Q-Q y pruebas de Shapiro-Wilk que efectivamente distribuían como se esperaba. Estas 10 instancias se probaron para los modelos propuestos de cuatro, seis y nueve escenarios, resolviendo los modelos en 25 segundos, 60 segundos y 115 segundos, respectivamente. Por otra parte, al medir la calidad de la solución estocástica, se obtuvieron resultados muy similares al caso del día sábado, por lo que se concluye que este modelo de optimización estocástico tendría un gran impacto al ser utilizado en este problema. Además, se puede apreciar que a medida que se agranda el horizonte de estudio y la cantidad de escenarios, mayor es el tiempo requerido por el solver para resolver el problema.

Por otra parte, se sensibilizó el tiempo de carga de batería de los buses a través de la variación, de manera discreta, del porcentaje que se va a cargar en cada visita a las estaciones, provocando una variación de manera lineal en los tiempos de carga y en el costo, también de manera lineal, de cargar batería. Esto último se probó solamente en las instancias del modelo de cuatro escenarios, obteniendo que a medida que menos tiempo permanece el vehículo cargando batería, menor es el valor de la función objetivo, excepto cuando se disminuye del 20 % por visita de estación, en donde esta aumenta considerablemente, ya que la restricción del porcentaje mínimo de batería para atender un viaje es fija, lo que provoca que si un bus eléctrico queda por debajo de esta restricción por 1 % de carga, entonces debe realizar una visita a las estaciones de carga, provocando más cargas de baterías por parte del bus y dejar de atender viajes.

Se destaca que este trabajo puede ser una contribución importante para el sistema de transporte público de buses eléctricos, específicamente para la ciudad Santiago de Chile, la cual es una de las capitales más grande del mundo con buses eléctricos operando, pudiendo optimizar de esta manera la secuencia de los buses y el uso de estos en su operación. Como trabajos futuros, se puede incorporar al modelo cierta flexibilidad en el despacho lo que permitirá eventuales retrasos en las salidas, con su correspondiente penalización por minuto de retraso. Del mismo modo, agregar más de un recorrido de bus eléctrico, y otorgar cierta flexibilidad en el porcentaje mínimo de batería para atender un viaje. Por último, también se puede restringir los horarios en los cuales se puede cargar batería. Respecto a los tiempos de resolución, hasta el momento no parecen ser muy elevados, pero si al agregar estos nuevos aspectos los tiempos de resolución aumentan considerablemente, será necesario evaluar un método de resolución algorítmico.

Bibliografía

- Albornoz, Víctor Manuel; Kharrat, Karam Anibal; y Ñanco, Linco Jose (2020). Optimal dispatch of electric buses under uncertain travel times. In :Rossit D.A., Tohmé F., Mejía Delgadillo G. (eds) *Production Research. ICPR-Americas 2020. Communications in Computer and Information Science*, volume 1408 (pp. 77–86).: Springer. 4
- Alvo, Matias; Angulo, Gustavo; y Klapp, Mathias (2021). An exact solution approach for an electric bus dispatch problem. 2.2
- Ball, Michael O; Magnanti, TL; Monma, Clyde L; y Nemhauser, George L (1995). *Handbooks in Operations Research and Management Science: Network Routing*. Elsevier. 2.2
- Banihashemi, Mohamadreza y Haghani, Ali (2000). Optimization model for large-scale bus transit scheduling problems. *Transportation Research Record*, 1733(1), 23–30. 2.2
- Birge, John R y Louveaux, Francois (2011). *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media. 2.2
- Galán, Andrés Ramos; Ayuso, Antonio Alonso; y de Rozas, Gloria Pérez Sainz (2008). *Optimización bajo incertidumbre*. Universidad Pontificia Comillas. 2.2
- Gnanadesikan, Ram (2011). *Methods for statistical data analysis of multivariate observations*, volume 321. John Wiley & Sons. 4
- Häll, Carl H; Ceder, Avishai; Ekström, Joakim; y Quttineh, Nils-Hassan (2019). Adjustments of public transit operations planning process for the use of electric buses. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 23(3), 216–230. 2.2
- Jiang, Mengyan; Zhang, Yi; Zhang, Canrong; Zhang, Kai; Zhang, Gechu; y Zhao, Ziyao (2018). Operation and scheduling of pure electric buses under regular charging mode. In *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)* (pp. 1894–1899).: IEEE. 2.2
- Pepin, Ann-Sophie; Desaulniers, Guy; Hertz, Alain; y Huisman, Dennis (2009). A comparison of five heuristics for the multiple depot vehicle scheduling problem. *Journal of scheduling*, 12(1), 17. 2.2
- Reportesostenible (2019). Santiago se consolida como la segunda capital a nivel mundial con mayor cantidad de buses eléctricos. <https://n9.cl/wcn8a>. [Acceso Abril de 2020]. 1.1
- Revistaei (2019). Llegan a Chile 100 nuevos buses eléctricos que se sumarán a red metropolitana de movilidad. <https://n9.cl/kafq>. [Acceso Abril de 2020]. 1.1
- Rinaldi, Marco; Parisi, Federico; Laskaris, Georgios; D'Ariano, Andrea; y Viti, Francesco (2018). Optimal dispatching of electric and hybrid buses subject to scheduling and charging constraints. In *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)* (pp. 41–46).: IEEE. 2.2
- Shapiro, Samuel Sanford y Wilk, Martin B (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591–611. 4

- Tang, Xindi; Lin, Xi; y He, Fang (2019). Robust scheduling strategies of electric buses under stochastic traffic conditions. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 105, 163–182. [2.2](#), [2.3](#)
- van Kooten Niekerk, Marcel E; van den Akker, JM; y Hoogeveen, JA (2017). Scheduling electric vehicles. *Public Transport*, 9(1-2), 155–176. [2.2](#)



A | COMPORTAMIENTO DIARIO DE TRÁFICO POR FRANJA HORARIA

Tabla A.1: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los lunes.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:45	02:12:41	00:14:24
09:45 - 17:00	01:56:00	00:11:26
17:00 - 19:30	02:08:54	00:12:08
19:30 - 21:45	01:47:24	00:10:29
21:45 - 06:30	01:34:57	00:13:52

Tabla A.2: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los martes.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:45	02:14:48	00:15:12
09:45 - 17:00	01:55:28	00:10:55
17:00 - 19:30	02:13:28	00:14:48
19:30 - 21:45	01:51:19	00:13:10
21:45 - 06:30	01:33:49	00:13:26

Tabla A.3: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los miércoles.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:45	02:13:08	00:14:06
09:45 - 17:00	01:57:13	00:10:25
17:00 - 19:30	02:11:28	00:11:30
19:30 - 21:45	01:50:17	00:10:43
21:45 - 06:30	01:34:56	00:15:07

Tabla A.4: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los jueves.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:00	02:16:22	00:13:21
09:00 - 17:15	01:59:41	00:19:51
17:15 - 19:15	02:16:11	00:16:26
19:15 - 21:30	01:53:43	00:13:49
21:30 - 06:30	01:35:32	00:13:54

Tabla A.5: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los viernes.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:00	02:12:41	00:11:13
09:00 - 17:15	02:00:24	00:13:59
17:15 - 19:15	02:13:24	00:13:54
19:15 - 21:30	01:54:15	00:12:41
21:30 - 06:30	01:38:00	00:13:43

Tabla A.6: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los sábados.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
08:00 - 12:00	01:52:20	00:14:43
12:00 - 17:15	01:58:06	00:14:35
17:15 - 22:15	01:46:57	00:11:11
22:15 - 00:00	01:27:35	00:21:55

Tabla A.7: Tiempos medios y desviación estándar en franjas horarias de los domingos.

Franja horaria	Tiempos medios [HH:MM:SS]	Desv. Estándar [HH:MM:SS]
06:30 - 09:00	01:39:09	00:10:37
09:00 - 17:15	01:48:08	00:12:05
17:15 - 19:15	01:40:40	00:09:38
19:15 - 21:30	01:27:00	00:07:48

B | PROGRAMACIÓN INICIAL DE VIAJES

Tabla B.1: Programación inicial de dos terminales de buses.

Viajes Terminal 1	Hora de salida	Viajes Terminal 2	Hora de salida
t1	12:00	t23	12:00
t2	12:15	t24	12:15
t3	12:30	t25	12:30
t4	12:45	t26	12:45
t5	13:00	t27	13:00
t6	13:15	t28	13:15
t7	13:30	t29	13:30
t8	13:45	t30	13:45
t9	14:00	t31	14:00
t10	14:15	t32	14:15
t11	14:30	t33	14:30
t12	14:45	t34	14:45
t13	15:00	t35	15:00
t14	15:15	t36	15:15
t15	15:30	t37	15:30
t16	15:45	t38	15:45
t17	16:00	t39	16:00
t18	16:15	t40	16:15
t19	16:30	t41	16:30
t20	16:45	t42	16:45
t21	17:00	t43	17:00
t22	17:15	t44	17:15

C | VALIDACIÓN DISTRIBUCIÓN

C.1. Prueba hipótesis

Tabla C.1: Prueba de Shapiro-Wilk para cada etapa de las 10 instancias.

Instancia	Etapas	Valor-p
Instancia 1	Etapas 1	0,272
Instancia 1	Etapas 2	0,816
Instancia 1	Etapas 3	0,880
Instancia 2	Etapas 1	0,909
Instancia 2	Etapas 2	0,715
Instancia 2	Etapas 3	0,184
Instancia 3	Etapas 1	0,180
Instancia 3	Etapas 2	0,940
Instancia 3	Etapas 3	0,098
Instancia 4	Etapas 1	0,551
Instancia 4	Etapas 2	0,134
Instancia 4	Etapas 3	0,672
Instancia 5	Etapas 1	0,527
Instancia 5	Etapas 2	0,531
Instancia 5	Etapas 3	0,658
Instancia 6	Etapas 1	0,859
Instancia 6	Etapas 2	0,408
Instancia 6	Etapas 3	0,170
Instancia 7	Etapas 1	0,802
Instancia 7	Etapas 2	0,639
Instancia 7	Etapas 3	0,269
Instancia 8	Etapas 1	0,227
Instancia 8	Etapas 2	0,927
Instancia 8	Etapas 3	0,500
Instancia 9	Etapas 1	0,411
Instancia 9	Etapas 2	0,715
Instancia 9	Etapas 3	0,393
Instancia 10	Etapas 1	0,659
Instancia 10	Etapas 2	0,475
Instancia 10	Etapas 3	0,111

C.2. Validación gráfica

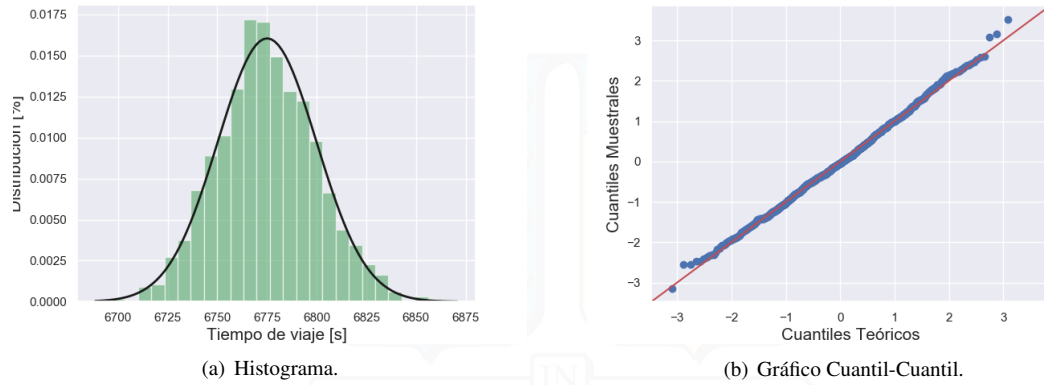


Figura C.1: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 1.

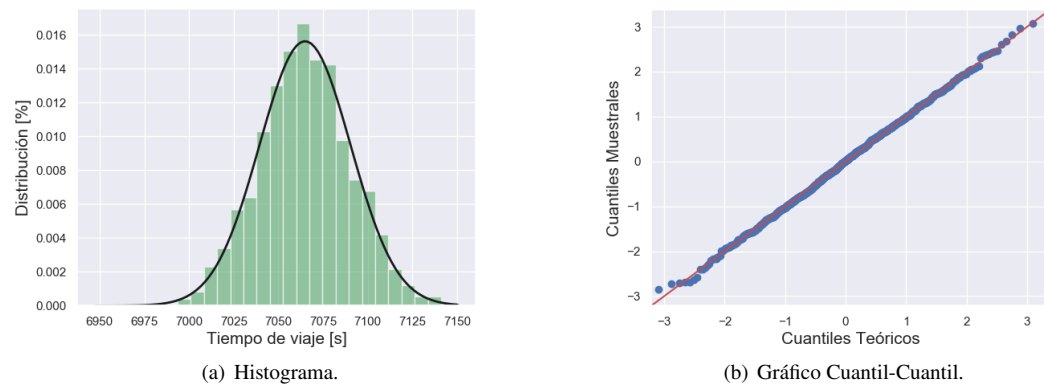
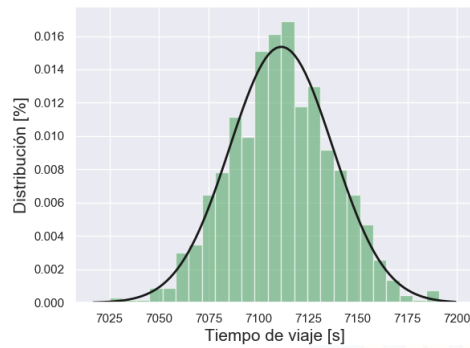
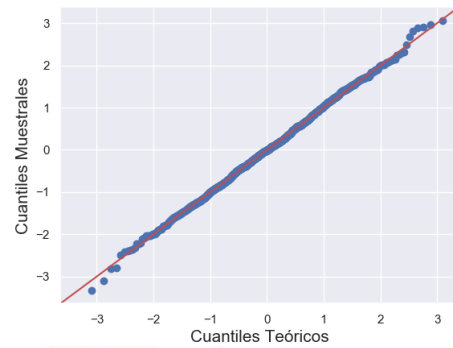


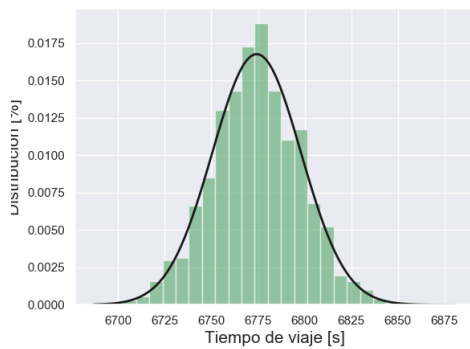
Figura C.2: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 1.



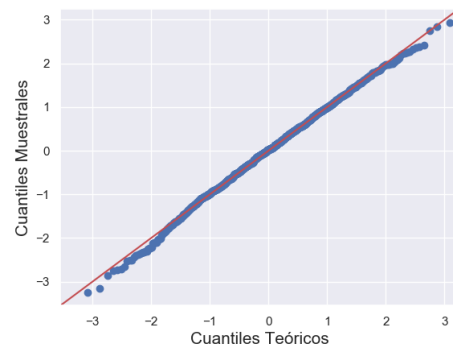
(a) Histograma.



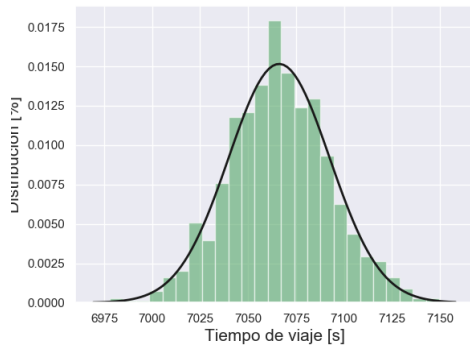
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.3: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 1.

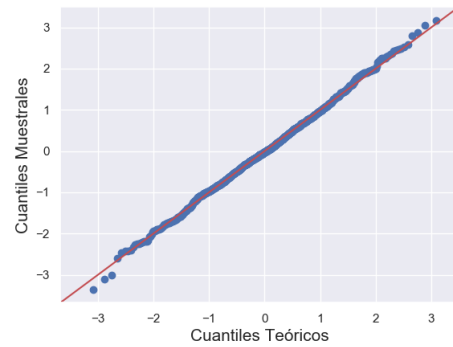
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

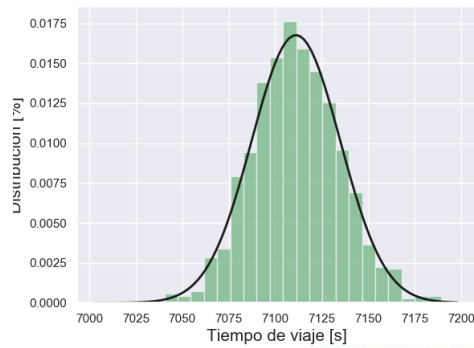
Figura C.4: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 2.

(a) Histograma.

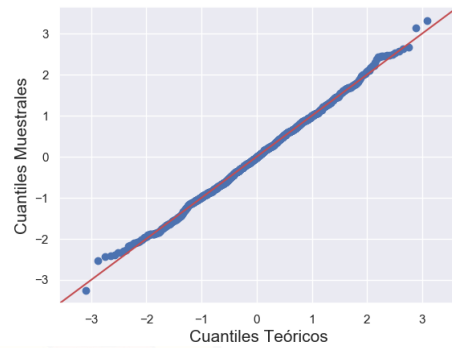


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

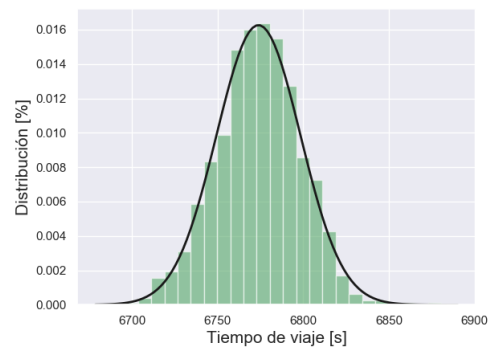
Figura C.5: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 2.



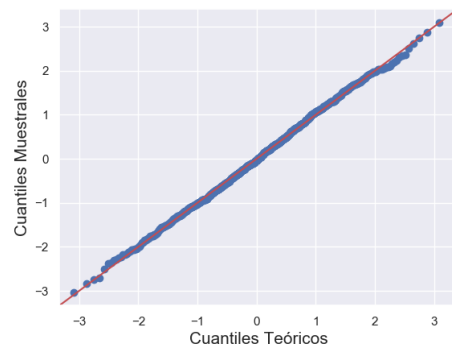
(a) Histograma.



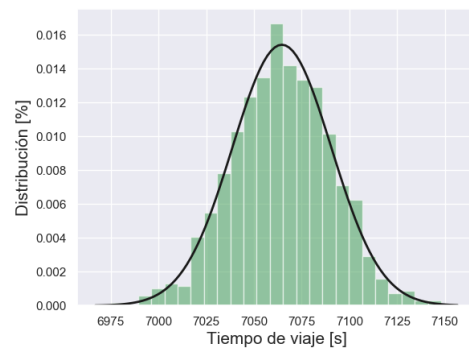
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.6: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 2.

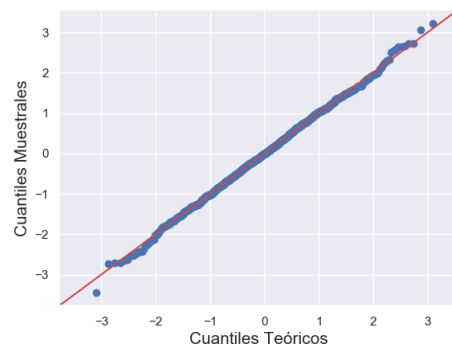
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.7: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 3.

(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.8: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 3.

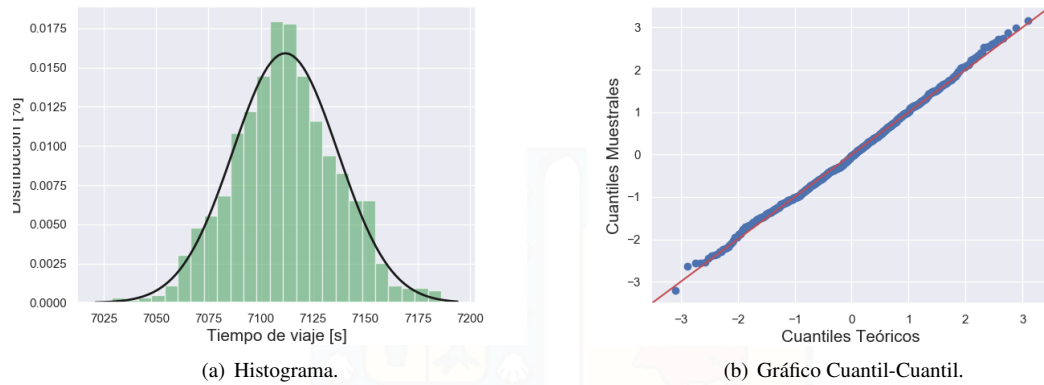


Figura C.9: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 3.

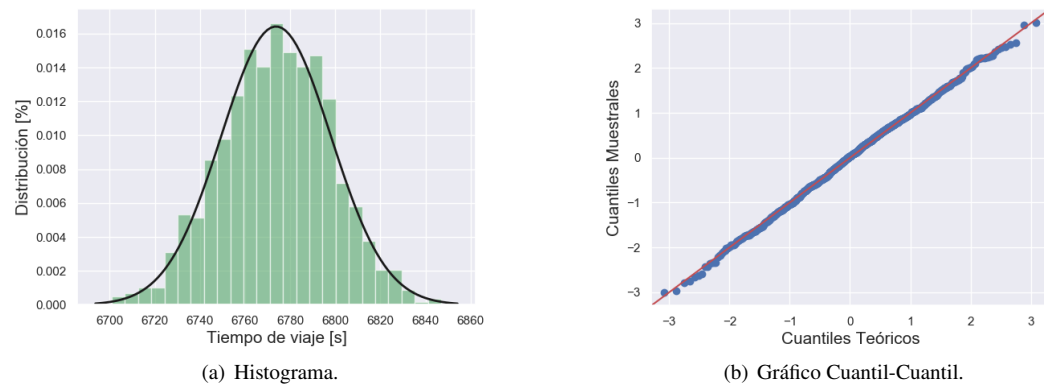


Figura C.10: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 4.

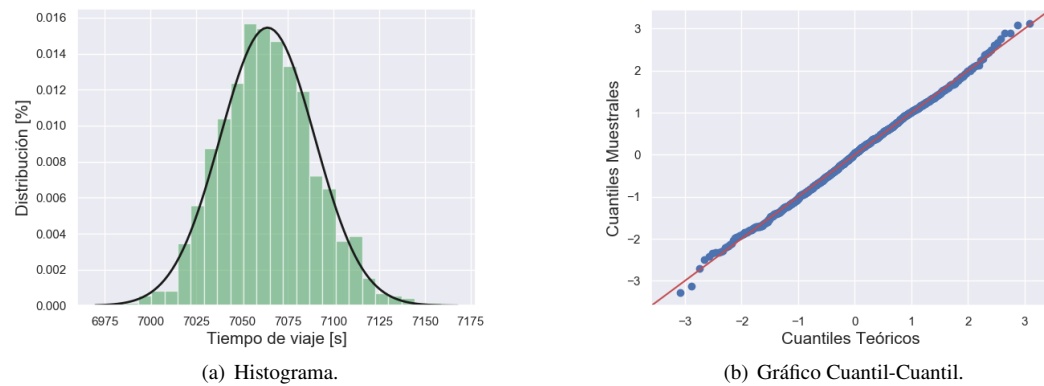
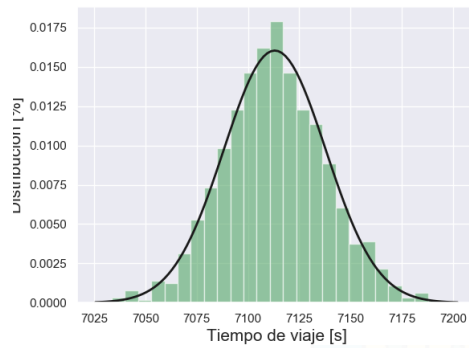
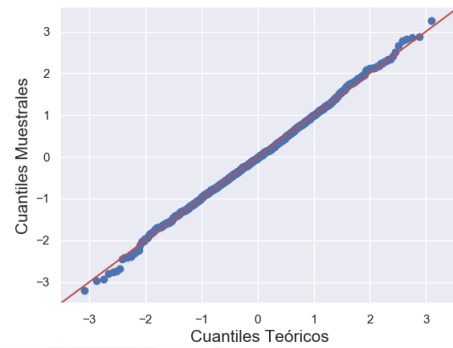


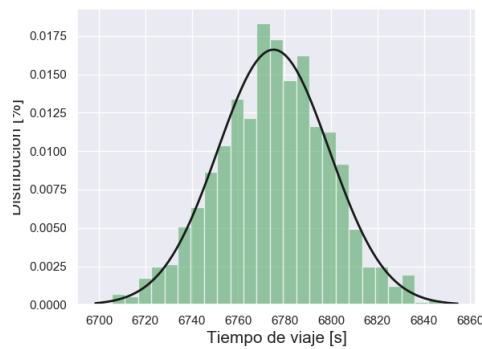
Figura C.11: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 4.



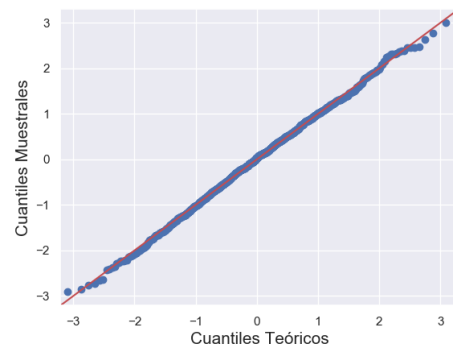
(a) Histograma.



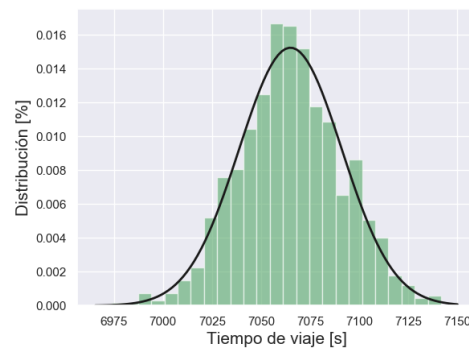
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.12: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 4.

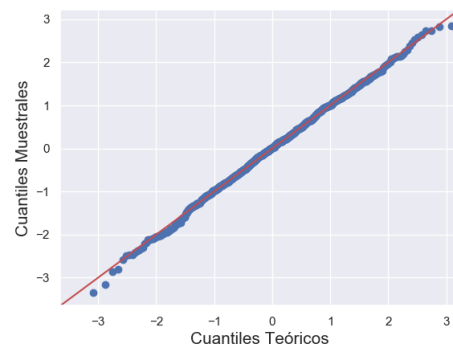
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

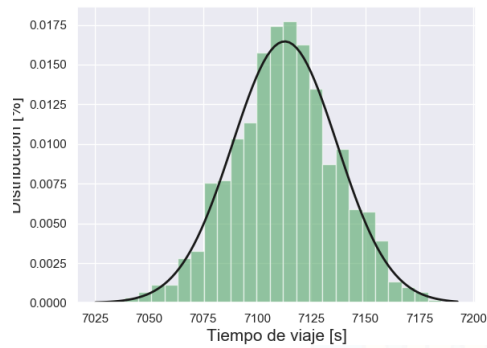
Figura C.13: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 5.

(a) Histograma.

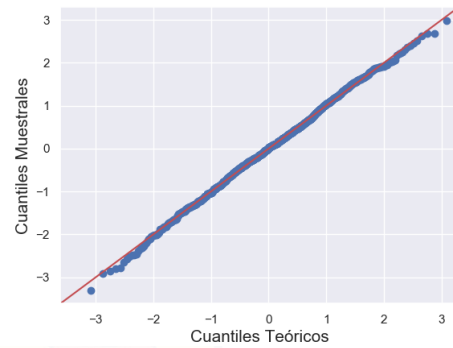


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

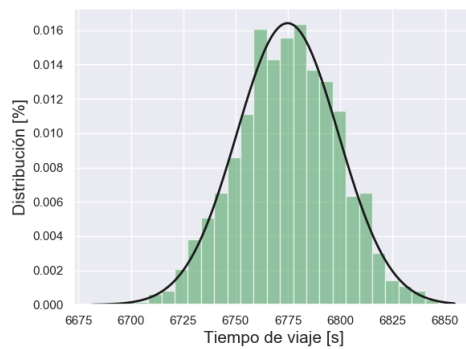
Figura C.14: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 5.



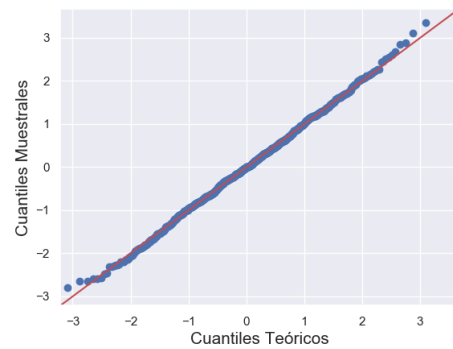
(a) Histograma.



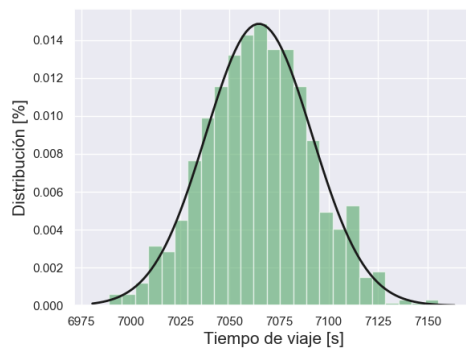
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.15: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 5.

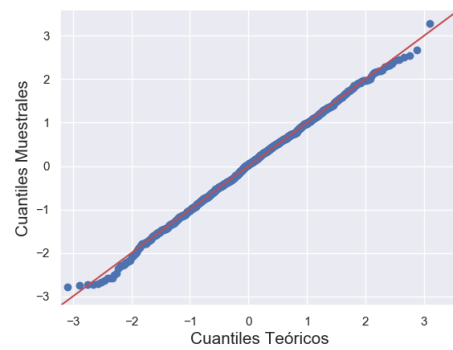
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

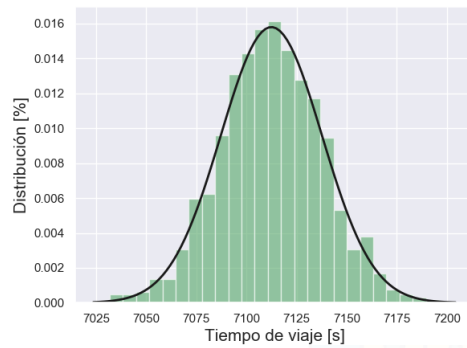
Figura C.16: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 6.

(a) Histograma.

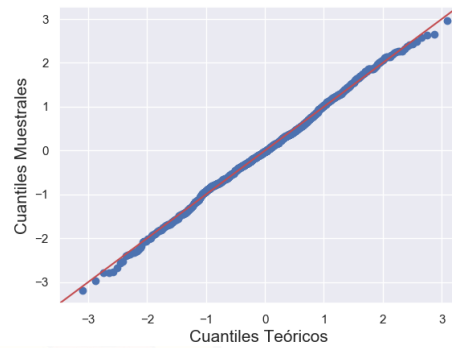


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

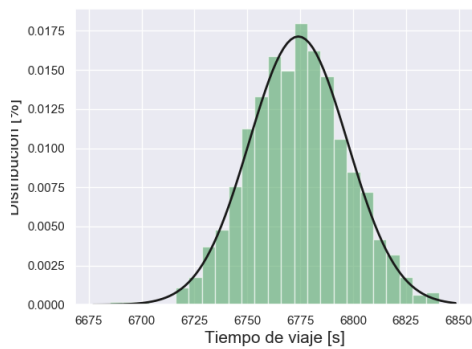
Figura C.17: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 6.



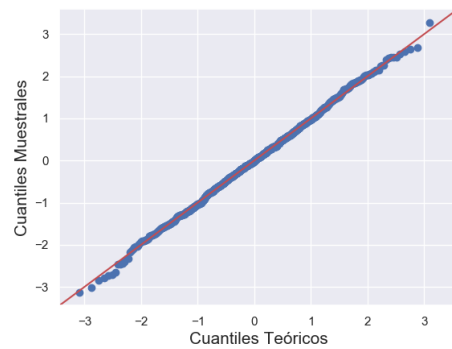
(a) Histograma.



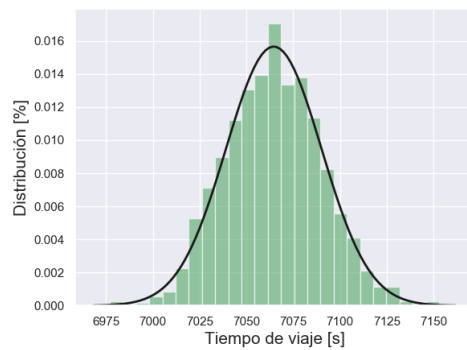
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.18: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 6.

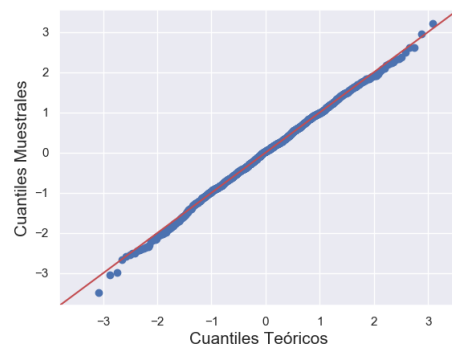
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

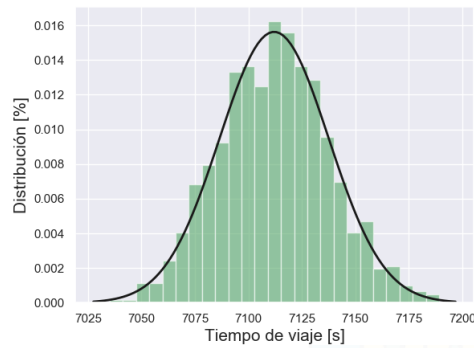
Figura C.19: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 7.

(a) Histograma.

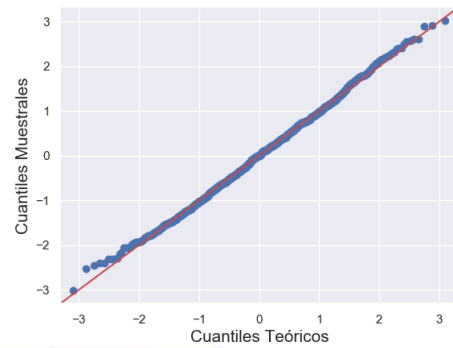


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

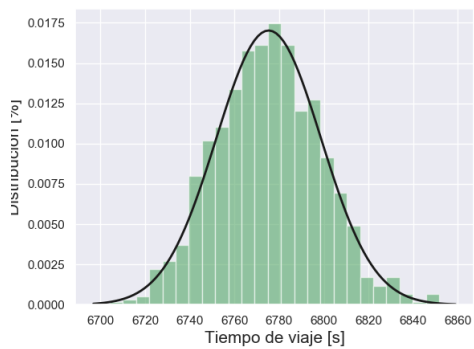
Figura C.20: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 7.



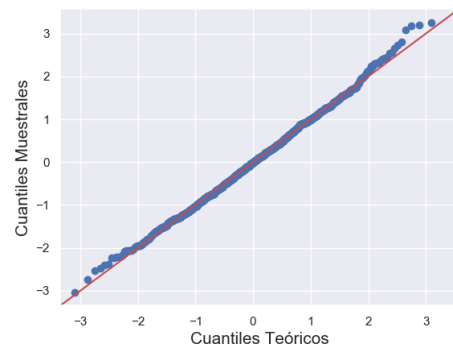
(a) Histograma.



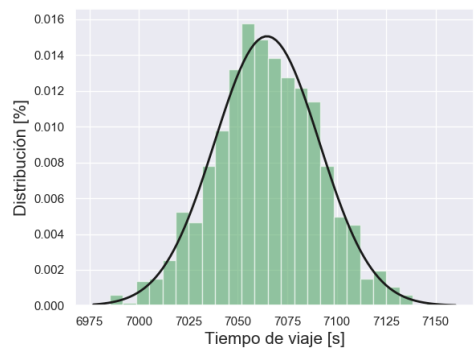
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.21: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 7.

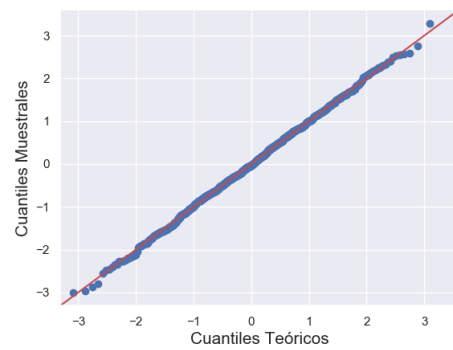
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

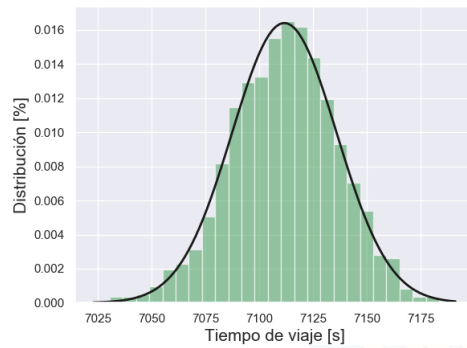
Figura C.22: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 8.

(a) Histograma.

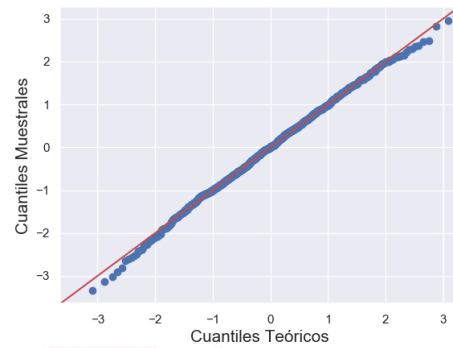


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

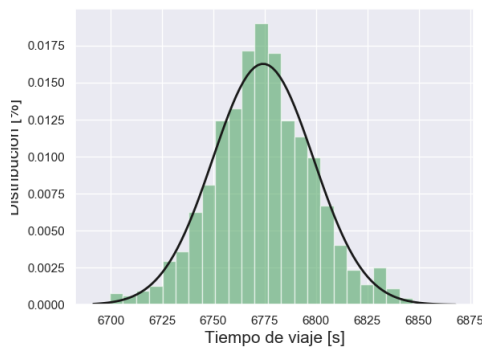
Figura C.23: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 8.



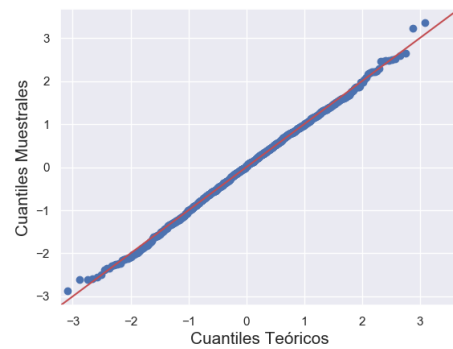
(a) Histograma.



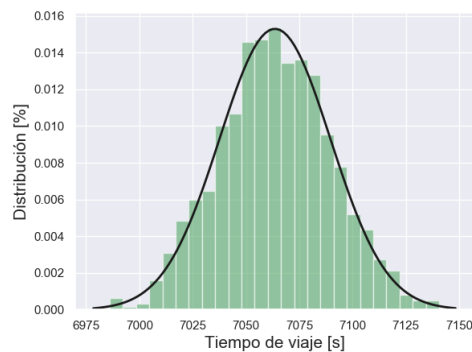
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.24: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 8.

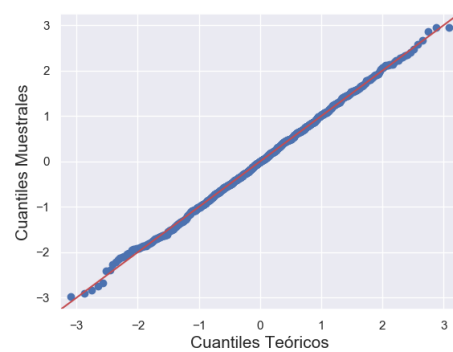
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

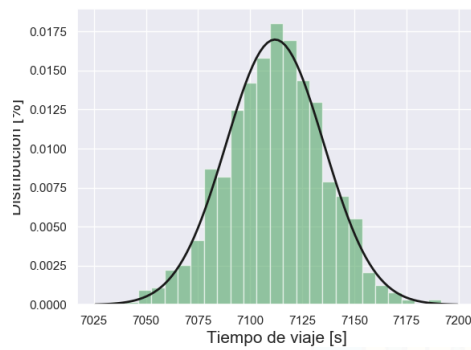
Figura C.25: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 9.

(a) Histograma.

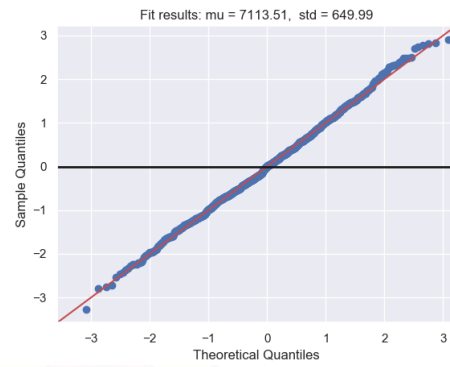


(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

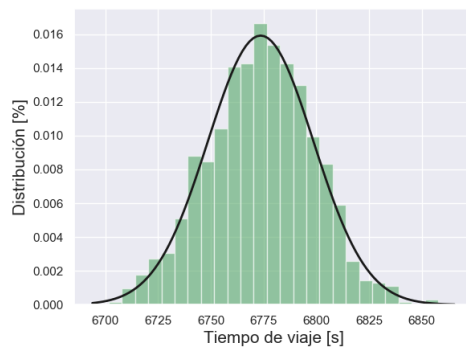
Figura C.26: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 9.



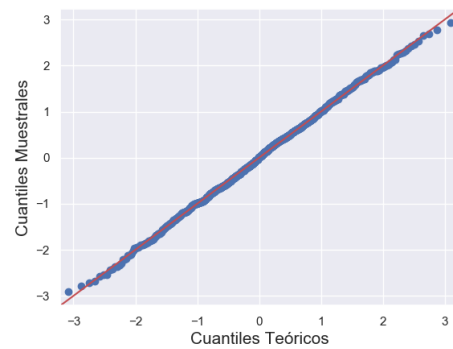
(a) Histograma.



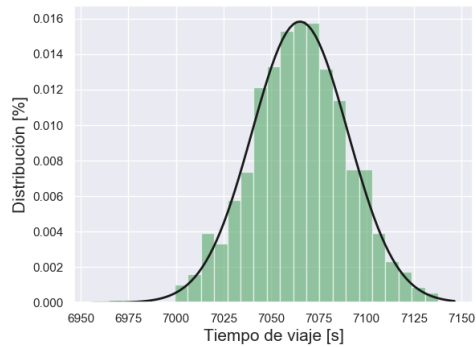
(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.27: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 9.

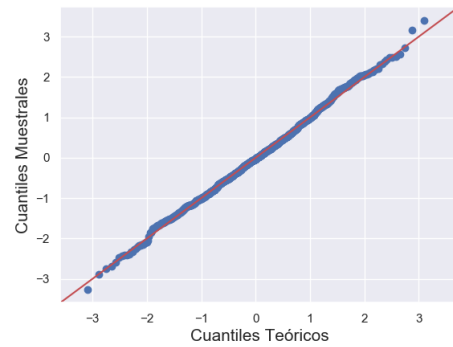
(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.28: Verificación de distribución normal en la primera etapa de la instancia 10.

(a) Histograma.



(b) Gráfico Cuantil-Cuantil.

Figura C.29: Verificación de distribución normal en la segunda etapa de la instancia 10.

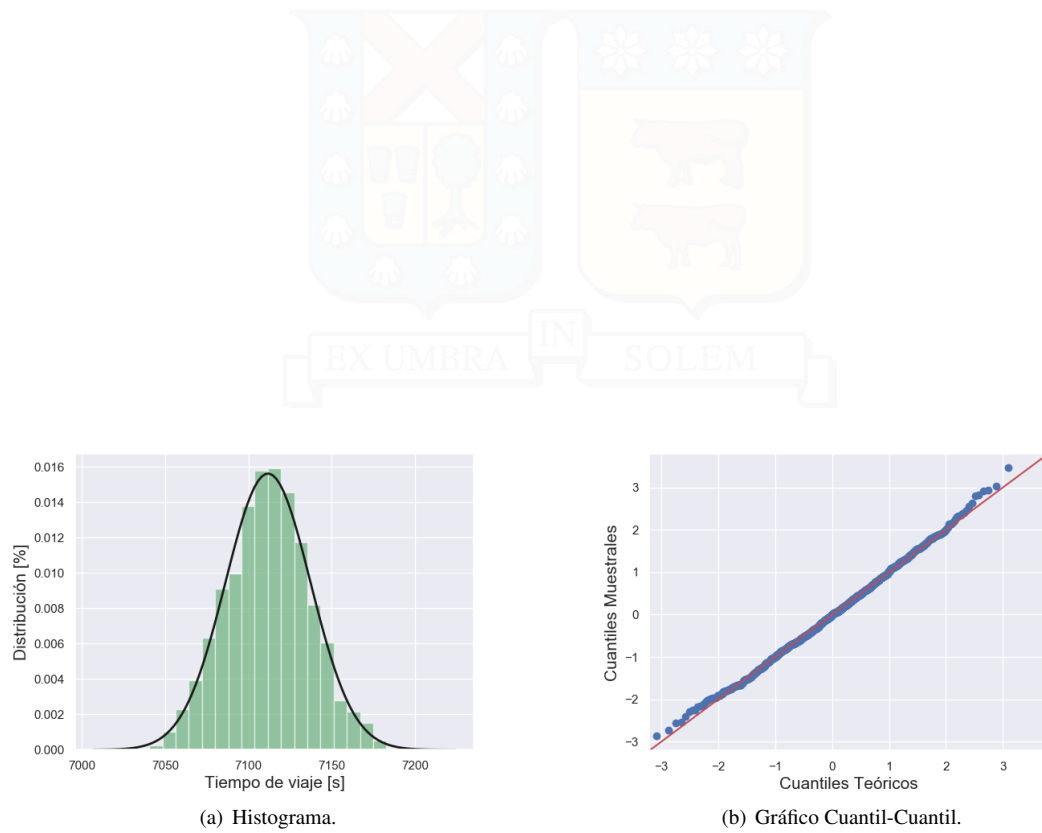


Figura C.30: Verificación de distribución normal en la tercera etapa de la instancia 10.

D | SENSIBILIZACIÓN DE TIEMPO DE CARGA

Tabla D.1: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 1.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 443.283	\$ 659.459	25 %	1,25
\$ 442.490	\$ 658.272	24 %	1,20
\$ 441.699	\$ 657.084	23 %	1,15
\$ 440.907	\$ 655.896	22 %	1,10
\$ 440.115	\$ 654.708	21 %	1,05
\$ 439.323	\$ 653.519	20 %	1,00
\$ 1.206.389	\$1.418.050	19 %	0,95
\$ 1.204.211	\$1.415.476	18 %	0,90
\$ 1.097.795	\$1.307.438	17 %	0,85

Tabla D.2: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 2.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 443.189	\$ 659.646	25 %	1,25
\$ 442.397	\$ 658.458	24 %	1,20
\$ 441.605	\$ 657.271	23 %	1,15
\$ 440.813	\$ 656.083	22 %	1,1
\$ 440.021	\$ 654.894	21 %	1,05
\$ 439.229	\$ 653.707	20 %	1,00
\$ 1.206.465	\$1.418.038	19 %	0,95
\$ 1.204.296	\$1.415.464	18 %	0,90
\$ 1.097.792	\$1.307.111	17 %	0,85

Tabla D.3: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 3.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 443.324	\$ 659.486	25 %	1,25
\$ 442.532	\$ 658.298	24 %	1,20
\$ 441.740	\$ 657.110	23 %	1,15
\$ 440.948	\$ 655.922	22 %	1,10
\$ 440.156	\$ 654.734	21 %	1,05
\$ 439.364	\$ 653.546	20 %	1,00
\$ 1.206.404	\$1.418.206	19 %	0,95
\$ 1.204.226	\$1.415.633	18 %	0,90
\$ 1.097.811	\$1.307.154	17 %	0,85

Tabla D.4: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 4.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 443.157	\$ 659.319	25 %	1,25
\$ 442.365	\$ 658.130	24 %	1,20
\$ 441.573	\$ 656.943	23 %	1,15
\$ 440.781	\$ 655.754	22 %	1,10
\$ 439.989	\$ 654.566	21 %	1,05
\$ 439.197	\$ 653.379	20 %	1,00
\$ 1.206.440	\$1.418.056	19 %	0,95
\$ 1.204.262	\$1.415.482	18 %	0,90
\$ 1.097.635	\$1.307.432	17 %	0,85

Tabla D.5: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 5.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.486	\$ 443.176	25 %	1,25
\$ 658.298	\$ 442.384	24 %	1,20
\$ 657.110	\$ 441.592	23 %	1,15
\$ 655.923	\$ 440.800	22 %	1,10
\$ 654.735	\$ 440.008	21 %	1,05
\$ 653.546	\$ 439.216	20 %	1,00
\$ 1.418.083	\$1.206.449	19 %	0,95
\$ 1.415.508	\$1.204.271	18 %	0,90
\$ 1.306.881	\$1.097.747	17 %	0,85

Tabla D.6: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 6.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.423	\$ 443.138	25 %	1,25
\$ 658.236	\$ 442.346	24 %	1,20
\$ 657.047	\$ 441.554	23 %	1,15
\$ 655.859	\$ 440.762	22 %	1,10
\$ 654.672	\$ 439.970	21 %	1,05
\$ 653.484	\$ 439.178	20 %	1,00
\$ 1.418.126	\$1.206.363	19 %	0,95
\$ 1.415.552	\$1.204.185	18 %	0,90
\$ 1.306.975	\$1.097.712	17 %	0,85

Tabla D.7: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 7.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.480	\$ 443.134	25 %	1,25
\$ 658.293	\$ 442.342	24 %	1,20
\$ 657.105	\$ 441.550	23 %	1,15
\$ 655.916	\$ 440.758	22 %	1,10
\$ 654.728	\$ 439.973	21 %	1,05
\$ 653.541	\$ 439.174	20 %	1,00
\$ 1.418.160	\$1.206.401	19 %	0,95
\$ 1.415.586	\$1.204.223	18 %	0,90
\$ 1.306.967	\$1.097.507	17 %	0,85

Tabla D.8: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 8.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.447	\$ 443.122	25 %	1,25
\$ 658.259	\$ 442.330	24 %	1,20
\$ 657.071	\$ 441.538	23 %	1,15
\$ 655.883	\$ 440.746	22 %	1,10
\$ 654.695	\$ 439.954	21 %	1,05
\$ 653.507	\$ 439.162	20 %	1,00
\$ 1.418.050	\$1.206.382	19 %	0,95
\$ 1.415.476	\$1.204.204	18 %	0,90
\$ 1.307.405	\$1.097.751	17 %	0,85

Tabla D.9: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 9.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.721	\$ 443.191	25 %	1,25
\$ 658.532	\$ 442.399	24 %	1,20
\$ 657.345	\$ 441.607	23 %	1,15
\$ 656.156	\$ 440.815	22 %	1,10
\$ 654.969	\$ 440.023	21 %	1,05
\$ 653.781	\$ 439.231	20 %	1,00
\$ 1.418.049	\$1.206.286	19 %	0,95
\$ 1.415.475	\$1.204.108	18 %	0,90
\$ 1.307.062	\$1.097.414	17 %	0,85

Tabla D.10: Resultados de la sensibilización en el modelo de cuatro escenario utilizando la instancia 10.

Modelo Determinista	RP	Porcentaje cargando	Tiempo por carga [Horas]
\$ 659.657	\$ 443.201	25 %	1,25
\$ 658.469	\$ 442.409	24 %	1,20
\$ 657.281	\$ 441.617	23 %	1,15
\$ 656.093	\$ 440.825	22 %	1,10
\$ 654.906	\$ 440.033	21 %	1,05
\$ 653.717	\$ 439.241	20 %	1,00
\$ 1.418.139	\$1.206.363	19 %	0,95
\$ 1.415.565	\$1.204.184	18 %	0,90
\$ 1.307.158	\$1.097.793	17 %	0,85