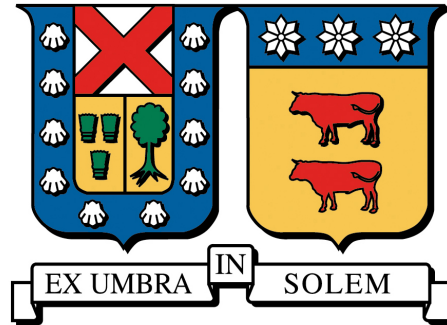


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS

SANTIAGO DE CHILE



Coordinación del problema de planificación de cosecha en una
cadena de suministro agrícola a través de un modelo binivel

PATRICIO VERA ZULETA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE

MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL

Y AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA	:	DR. VICTOR ALBORNOZ S.
PROFESOR CORREFERENTE	:	DR. PABLO ESCALONA R.
PROFESOR EXTERNO	:	DR. ALEJANDRO MAC CAWLEY V.

ABRIL 2020

Acknowledgement

A mi madre, María del Pilar Zuleta, por depositar la confianza en mí y todo el apoyo que me ha otorgado, por todo su cariño y por su amor.

A mis profesores del colegio, Álvaro Mena, Cristian Rojas, Natalia Aliga y Julio Rios, quienes vieron un potencial en mí y lograron explotar.

A mi profesor guía, Dr. Victor Albornoz, por guiarme en la búsqueda de conocimiento.

A todos mis amigos.

A todos aquellos que he conocido en este camino llamada Universidad.

Dedico este trabajo a mi madre María de Pilar

Resumen Ejecutivo

Este trabajo aborda un problema de planificación de cosecha en el contexto de una cadena de suministro agrícola jerárquica, que integra la definición de zonas de manejo para la cosecha, y la coordinación entre el productor y el mayorista. El problema se representa a través de una programación binivel estocástica que permite la representación de la jerarquía entre el productor (líder) y el mayorista (seguidor). El productor decide la planificación y la programación de la cosecha para cada zona de manejo homogénea en la partición resultante, y el mayorista decide la cantidad a adquirir para satisfacer la demanda. En cada nivel de decisión se propone un modelo de optimización estocástica para representar la incertidumbre en los rendimientos, precios y demandas futuras de los cultivos mediante un conjunto finito de escenarios. Una reformulación del modelo binivel en un problema de programación lineal entera-mixta es proporcionada por el uso de las condiciones Karush-Kuhn-Tucker y el reemplazo de las restricciones complementariedad no-lineales que permiten la introducción de variables binarias auxiliares y un término big- M . La investigación revela valiosos resultados de la metodología propuesta a partir de un conjunto de instancias que representan el comportamiento de ambos tomadores de decisiones bajo incertidumbre.

Palabras Clave: Planificación y programación de la cosecha, Zonas de manejo, Cadena de suministro agrícola, Programación binivel, Programación estocástica, IO en agricultura, Agricultura de precisión.

Abstract

This work addresses a selective harvest planning problem in the context of a hierarchical agricultural supply chain, which integrates the definition of management zones for harvesting, and the coordination between the producer and the wholesaler. The problem is represented through a stochastic bilevel program that allows for the representation of the hierarchy between the producer (leader) and a wholesaler (follower). The producer decides the planning and scheduling of the selective harvest for each homogeneous management zone into the resulting partition, and the wholesaler decides the amount to be acquired to satisfy the demand requirements. At each decision level, a stochastic optimization model is proposed for representing the uncertainty in future crop yields, prices and demands by a finite set of scenarios. A reformulation of the bilevel model into a mixed-integer linear program is provided by the use of the Karush–Kuhn–Tucker conditions and replacing the non-linear complementary constraints allowing for the introduction of auxiliary binary variables and big- M term. The research reveals valuable results of the proposed methodology from a set of instances representing the behavior of both decision makers under uncertainty.

Keywords: Harvest planning and scheduling, Management zones, Agricultural supply chain, bilevel programming, Stochastic programming, OR in agriculture, Precision agriculture.

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción	7
1.1. Objetivos	11
1.1.1. Generales	11
1.1.2. Específicos	11
1.2. Estructura	11
2. Marco Teórico	12
2.1. Optimización	12
2.1.1. Programación lineal	14
2.1.2. Programación lineal entera	15
2.1.3. Programación estocástica	16
2.1.3.1. Valor esperado de la información perfecta	17
2.1.4. Dualidad	18
2.1.5. Holguras complementarias	20
2.1.6. Condiciones Karush–Kuhn–Tucker	21
2.2. Programación Binivel	22
2.2.1. Programación lineal binivel, variables continuas	23
2.2.1.1. Enfoques Clásicos	25
2.2.1.2. Enfoque Kunh–Tucker	26
2.2.2. Programación lineal binivel, variables discretas	28
2.2.2.1. Enfoques clásicos	31
2.2.3. Programación lineal binivel estocástica	32
2.3. Agricultura de Precisión	36
2.3.1. Delineación de zonas	36
2.3.2. Planificación de cosecha	38
2.3.2.1. Planificación de cosecha selectiva	40
2.3.2.2. Enfoque integrado: delineación y planificación de cosecha	42
3. Metodología	44
3.1. Descripción del problema	44
3.2. Problema del productor	46
3.3. Problema del vendedor mayorista	51
3.4. Propuesta binivel	52
3.4.1. Programación binivel	52
3.4.1.1. Notación	52
3.4.1.2. Problema de programación lineal binivel	54
3.4.2. Programación binivel estocástico	56
3.4.2.1. Notación	56
3.4.2.2. Problema de programación lineal binivel estocástico	58
3.5. Reformulación	60
3.5.1. Aplicación del enfoque Kunh-Tucker	60
3.5.2. Reformulación MILP	62

4. Caso de Estudio	64
4.1. Descripción	64
4.2. Instancias	64
4.3. Resultados y Discusión	67
5. Conclusiones	72
Referencias	74

Índice de Tablas

4.1. Información sobre el número de variables, las restricciones y el tiempo de resolución de cada instancia de ambos modelos.	66
4.2. Resultados de la programación binivel y del esquema independiente	67
4.3. Resultados del modelo de programación binivel estocástico de dos etapas. .	69

Índice de Figuras

2.1. Clasificación de modelos matemáticos	13
4.1. Crecimiento del número de variables y restricciones a medida que aumentan las instancias. (a) Programación binivel, (b) Programación binivel estocástico de dos etapas.	66
4.2. Gestión de personal de la programación binivel y del esquema independiente	68
4.3. Comparación de resultados con una variación del término big- M . En (a) y (b), muestra los valores óptimos de ambos modelos.	70

1. Introducción

La agricultura en Chile corresponde a un sector importante de la economía nacional, contribuyendo un 13% del PIB integrado, por lo que el desarrollo de nuevas metodologías en el marco de la agricultura de precisión son de gran interés para el sector. Hoy en día el cliente se ha vuelto más exigente, por lo que la calidad de la fruta es esencial, para ello se debe definir un proceso de manipulación adecuado y una optimización de las operaciones de la cosecha, permitiendo así una buena calidad de la fruta, reducción de costos en el proceso y en consecuencia el productor percibe un mayor beneficio económico ([Ampatzidis et al., 2014](#)). Por otro lado, para asegurar la entrega de productos de calidad y frescura, las cadenas de suministro agrícola dedicada a su producción y distribución se ven enfrentadas a mejorar la productividad y coordinación entre los distintos niveles que la conforman.

En agricultura, la variabilidad de las propiedades del suelo corresponden a un aspecto clave en la calidad de los cultivos y los rendimientos. Los índices de suelo y vegetación permiten delinear zonas de manejo específicas al sitio, la delineación de un terreno facilita la planificación de la operación de cosecha en cada zona permitiendo obtener una mejor calidad y rendimiento de los cultivos. Inicialmente en la literatura se propone resolver el problema de delineación de zonas a través de algoritmos de agrupamiento de acuerdo a características del suelo, dando resultados pocos atractivos para los productores puesto a que provee zonas de manejo irregulares con forma oval y fragmentadas. Dado el requerimiento de especificar zonas de manejo rectangulares, [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#) desarrolla un método de delineación de zonas rectangulares de manejo en base a determinadas propiedades del suelo. [Albornoz et al. \(2015\)](#) provee un modelo bi-objetivo que minimiza la cantidad de zonas de manejo a elegir, a la vez que maximiza la homogeneidad de cada zona desde un esquema jerárquico. Luego en [Saez and Albornoz \(2016\)](#) incorpora la incertidumbre a través de un modelo estocástico de dos etapas. Posteriormente se han desarrollado diversas estrategias para abordar el modelo de [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#) entre ellas, [Albornoz and Ñanco \(2016\)](#) formula un algoritmo de generación de columnas que permite enfrentar al modelo determinista, luego en [Albornoz et al. \(2019\)](#) enfrenta el modelo de delineación incorporando la variabilidad junto con una estrategia de resolución de

generación de columnas. En ([Wolfert et al., 2017](#)) menciona que delinear zonas de manejo de manera eficiente y precisa es un desafío importante que requiere de sistemas de soporte de decisiones.

El conocer cuándo realizar una cosecha óptima es una información muy valiosa para el productor. Los problemas de programación de cosecha y problemas de delineación integrada, permiten definir zonas de cosechas diarias, considerando los recursos escasos a asignar, permitiendo de manera oportuna la cosecha y almacenaje con la finalidad de preservar su calidad. Una buena planificación de la cosecha es clave en el contexto de cadenas de suministro debido a la relevancia de las restricciones que impone de empleo de recursos humanos y la calidad de los productos cosechados ([Kusumastuti et al., 2016](#)). El problema de Planificación de cosecha se ha estudiado ampliamente. En [Caixeta-Filho \(2006\)](#) provee una formulación lineal entero-mixto con el fin de optimizar la industrias de las naranjas a través de características químicas y biológicas, luego en [Ferrer et al. \(2008\)](#) aborda la cosecha de uva destinadas para la producción a través de un modelo de programación lineal entero-mixto que incluye las operaciones de cosecha de uva, los costos de operación, la calidad, mano de obra y transporte. [Bohle et al. \(2010\)](#) extiende el trabajo anterior incorporando la variabilidad de la producción a través de un modelo de programación lineal robusta. [Arnaout and Maatouk \(2010\)](#) aborda la cosecha de vinos con el objetivo de maximizar la calidad del vino y a su vez minimizar los costos de operaciones, a través de la incorporación de una función de pérdida de calidad. Más adelante [Costa et al. \(2014\)](#) desarrollar un problema de programación lineal entero-mixto, permitiendo definir horarios de cultivos en base al cumplimiento de la demanda e incorporando el almacenaje de la cosecha en un período de tiempo y [González-Araya et al. \(2015\)](#) provee la planificación de cosecha de manzana dentro de una ventana de tiempo e incluyendo la fuerza de trabajo tanto estacional y temporales. En [Araneda and Alborno \(2019\)](#) introdujo un modelo de optimización determinista que aborda dos problemas conocidos en la agricultura: el problema de delineación de zonas, y el problema de planificación selectiva de la cosecha, con el fin de apoyar la planificación táctica de las operaciones de cosecha. Más recientemente [Jiang et al. \(2019\)](#) aborda las ventas en línea integrando integra la programación de la cosecha y la distribución de las hortalizas, de la granja a la puerta.

Un aspecto común en la producción agrícola es su dependencia de complejos sistemas naturales, biológicos y económicos que están sujetos a cambios dinámicos e inciertos, por lo que es apropiado considerar antecedentes bajos incertidumbre como rendimientos, precios y demandas futuras. En [Borodin et al. \(2016\)](#) presentan el estado del arte más reciente en la aplicación de metodologías de investigación de operaciones que incluyen la incorporación de parámetros bajo incertidumbre en agricultura.

En el contexto de las cadenas de suministro, la importancia y la complejidad de los problemas de diseño, tácticos, de operaciones y logísticos ha aumentado, siendo la investigación de operaciones una de las disciplinas más importantes que se ocupan de las metodologías analíticas avanzadas para modelar y resolver esos problemas. [Ahumada and Villalobos \(2009\)](#) presentaron una revisión específica para la planificación de modelos en las cadenas de suministro agrícola de alimentos y hortalizas. [Plà et al. \(2014\)](#) introdujeron nuevas oportunidades relativas a la investigación de operaciones para la industria agrícola. Más recientemente, [Utomo et al. \(2018\)](#) compilaron las investigaciones existentes sobre la cadena de suministro de productos agroalimentarios que utilizan la modelación y la simulación basadas en agentes, y [Borodin et al. \(2016\)](#) presentaron un estado de la técnica en la aplicación de las metodologías de investigación operativa para el manejo de la incertidumbre que se produce en las cadenas de suministro agrícola.

En este contexto, la coordinación entre productores y distribuidores en cadenas de suministro jerárquicas lleva a considerar modelos de optimización binivel permitiendo reflejar la jerarquía existente entre el productor y el distribuidor mediante un modelo de dos niveles de decisión. La jerarquía es representada en un modelo binivel adoptando, en el nivel superior, las decisiones del líder, y en el nivel inferior las decisiones del seguidor. El uso de modelos de optimización binivel en el diseño y la coordinación de las cadenas de suministro: [Kalashnikov et al. \(2010\)](#) presentó un modelo optimización estocástica binivel de múltiples etapas, desarrollado para tratar un subsistema de la cadena de suministro de gas natural. [Sadigh et al. \(2012\)](#) estudió una cadena de suministro de múltiples productos, donde la demanda depende conjuntamente del precio y los gastos de publicidad usando un modelo binivel, [Heydari and Norouzinassab \(2015\)](#) propuso coordinar las decisiones de precios y pedidos en una cadena de suministro dos niveles, [Yeh et al. \(2015\)](#) desarrolló

un modelo de programación binivel en una cadena de suministro forestal con intereses de inversión en biorrefinería, [Tantiwattanakul and Dumrongsiri \(2019\)](#) desarrolló un modelo de programación no-lineal binivel para coordinar la cadena de suministro. Mas recientemente, en las cadenas de suministro agroalimentarias: [Bustos et al. \(2017\)](#) proponen un modelo entero-mixta de programación binivel para coordinar dos niveles de una cadena de suministro de productos cárnicos, [Albornoz and Urrutia-Gutiérrez \(2018\)](#) un modelo binivel entero-mixto para coordinar la planificación y la comercialización de los cultivos, en una cadena de suministros agroindustrial de dos niveles, y [Cheraghalipour et al. \(2019\)](#) propusieron un modelo entero-mixto de programación binivel para el diseño y coordinación de una cadena de suministro de producción de arroz.

Los problemas binivel son considerados $\mathcal{NP}$ -Hard puesto que son problemas de optimización no convexo ([Dempe et al., 2015](#); [Jeroslow, 1985](#)). Por lo que problema debe ser reformulado a un solo nivel incorporando las condiciones de optimalidad del problema inferior una a través las condiciones de Karush-Khun-Tucker, posteriormente se provee una nueva reformulación ajustando aquellas restricciones no lineales cómo restricciones enteras mixtas ([Bard and Moore, 1990](#); [Fortuny-Amat and McCarl, 1981](#)).

La novedad de este trabajo es apoyar el proceso de toma de decisiones en una cadena de suministro agrícola desde una perspectiva de agricultura de precisión, integrando la definición de las zonas de manejo el problema de la planificación de la cosecha con la correspondiente coordinación entre el productor y un mayorista para satisfacer la demanda de los clientes en una cadena de suministro jerárquica. Además, suponiendo que un aspecto común de la producción agrícola es la incertidumbre sobre los complejos sistemas naturales, biológicos y económicos que están sujetos a cambios dinámicos e inciertos, resulta apropiado considerar parámetros bajo incertidumbre, como los rendimientos, precios y demandas futuros. Por lo tanto, se propone un modelo estocástico de dos etapas binivel.

1.1. Objetivos

1.1.1. Generales

Formular y resolver un problema de planificación de cosecha en el contexto de una cadena de suministro agrícola jerárquica, que integra la definición de zonas de manejo para la cosecha y la distribución de los productos que incorpore antecedentes bajo incertidumbre.

1.1.2. Específicos

- Formular un modelo estocástico que integre el problema de definición de zonas de manejo para la programación óptima de la cosecha y posterior distribución.
- Formular un modelo de programación binivel que refleje la coordinación de una cadena de suministro jerárquica entre un productor y un mayorista, con la característica de que el productor decide la planificación y programación de la cosecha, y el mayorista decide la cantidad a adquirir al proveedor y a un tercero para cumplir la demanda enfrentada.
- Extender el modelo anterior a un modelo de programación binivel Estocástico, incorporando antecedentes bajo incertidumbre considerando rendimientos, precios y demandas futuras.
- Observar el comportamiento de la solución ante variaciones del big- M .

1.2. Estructura

La estructura del presente documento se desglosa en 5 capítulos. En lo que sigue en el capítulo 2 se presentan los tópicos relacionados a la investigación, exponiendo detalles teóricos a través de una revisión en la literatura. En el capítulo 3 se aborda la metodología propuesta, exponiendo los modelos de programación matemática con el fin de abordar el problema. En el capítulo 4 se presentan los principales resultados, además de su correspondiente discusión de los resultados obtenidos. El capítulo 5 se presentan las conclusiones obtenidas, así como posibles extensiones para una investigación futura.

2. Marco Teórico

2.1. Optimización

La optimización está en el corazón de varios procesos industriales, procedimientos de operación y planificación, logística de transporte y muchos otros problemas de ingeniería y ciencia del mundo real, cuyo desempeño depende de una gestión adecuada de los recursos disponibles (Olivares, 2019). La optimización es importante para cualquier proceso industrial, además, es clave para la vida, puesto que diariamente nos vemos en la necesidad de tomar decisiones que nos permita mejorar nuestras vidas en diferentes aspectos con ciertas limitaciones personales, ambientales, etc. La optimización permite al tomador de decisiones escoger la mejor alternativa empleando para ello un modelo matemático propio de la Programación Matemática (Sioshansi and Conejo, 2017). Para lo anterior debemos recurrir a un modelo, se entiende por modelo a una simplificación de alguna realidad concreta orientada a nuestros propósitos (Ferrer and Muñoz, 2006).

Un modelo matemático de optimización es de la forma (Boyd et al., 2004),

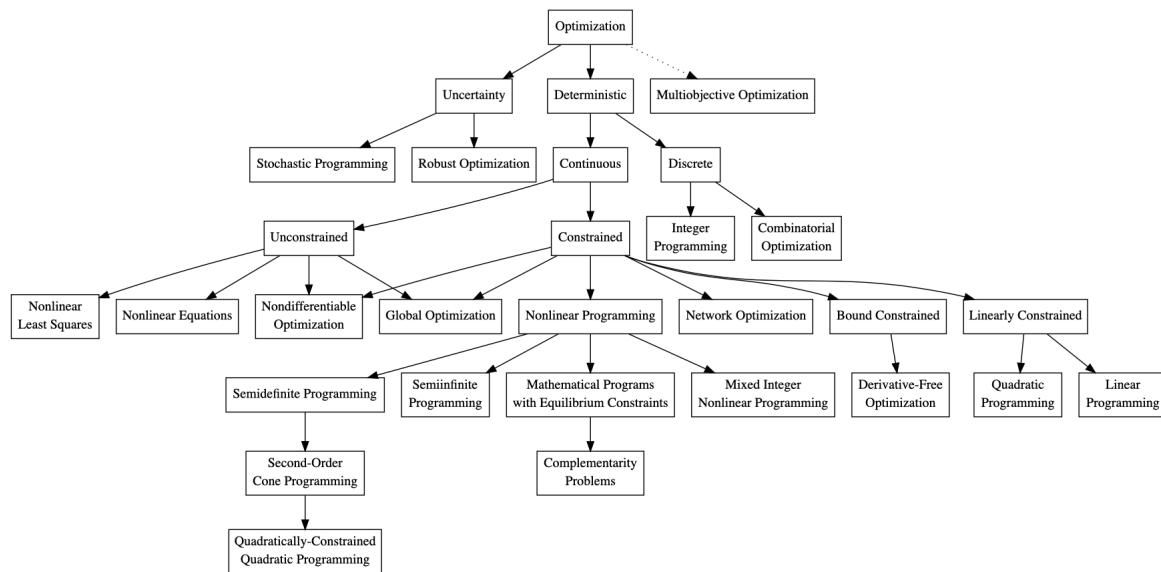
$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde x es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ que se define como la variable a optimizar del problema, la función $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde a la función objetivo, las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$ son las restricciones del problema en forma de desigualdad, y las constantes b_i son los límites de las restricciones. El vector x^* es llamado optimo o solución del problema si tiene el valor objetivo más pequeño entre todos los vectores que satisfacen las restricciones, es decir, $f_0(x) \geq f_0(x^*)$.

El campo de la optimización es muy popular y tiene muchas teorías, métodos y software. La clasificación de los modelos de optimización permiten comprender los problemas de optimización y escoger de forma adecuada los algoritmos, ya que los algoritmos se adaptan a un tipo particular de problema.

En la siguiente figura (2.1) se presenta un desglose de los subcampos de optimización,

Figura 2.1: Clasificación de modelos matemáticos



(Fuente: Guide (2019))

A continuación se presentan algunos tipos de problemas de optimización,

■ Optimización continua versus optimización discreta

La optimización continua se caracteriza de poseer un dominio continuo, como un conjunto de números reales. En la optimización discreta poseen un conjunto de valores discretos, como los números enteros.

■ Optimización lineal versus no lineal

La optimización lineal corresponde a que su función objetivo es lineal y todas sus restricciones son funciones lineales. En caso de que la función objetivo o bien una restricción no es lineal corresponde a al subcampo de la optimización no lineal.

■ Optimización determinista versus optimización estocástica

La optimización determinista, asume que los datos se conocen con precisión. En cambio la realidad no se pueden conocer todos los datos, por errores de medición o datos futuros, es por ello que se introduce la optimización estocástica o bajo incertidumbre, que que incorpora la incertidumbre al modelo.

2.1.1. Programación lineal

Dentro de los modelos matemáticos se encuentran los modelos lineales, en general estos modelos son conocidos como "problema de optimización lineal" o "problema de programación lineal" ([Hiller and Lieberman, 1995](#); [Sioshansi and Conejo, 2017](#)), este posee las siguientes características

- Variables continuas y funciones lineales: Las variables de decisión son continuas y además las funciones asociada a la función objetivo y restricciones deben ser lineales en las variables.
- Proporcionalidad y Divisibilidad: La proporcionalidad hace referencia a que cada variable debe contribuir tanto en la función objetivo como en las restricciones y la divisibilidad corresponde a que cada variable puede tomar cualquier valor de manera que cumpla con las restricciones impuestas en el modelo.

En la literatura existen diversas formas de poder representar un modelo lineal, una de ellas, es a través de funciones [Boyd et al. \(2004\)](#),

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{2.2}$$

en donde $f_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones lineales, $x \in \mathbb{R}^n$ una variable continua.

Desde el enfoque tradicional es a través de vectores y matrices ([Bard, 2013](#)) como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$ un vector fila, $b \in \mathbb{R}^m$ un vector columna, $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $m \leq n$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

La programación lineal considera variables reales y en muchos otros casos más realistas, algunas variables deben ser más restringidas, que sean enteras y/o binarias, estas variables hace más complejo el problema de programación lineal, debido a la ausencia de la convexidad y continuidad ([Castillo et al., 2002](#)).

2.1.2. Programación lineal entera

Existen diversas situaciones que nos vemos enfrentado donde algunas o todas las variables en el modelo sean enteros y/o binarios. Las tres características importantes ([Bard, 2013](#); [Sioshansi and Conejo, 2017](#)).

- Algunos conjuntos de variables de decisión están restringidos para tomar valores enteros, mientras que otros pueden tomar valores reales $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_j \in \mathbb{R}$.
- La función objetivo es lineal en las variables de decisión.
- Las restricciones deben ser lineales en las variables de decisión.

En algunos casos las variables deben ser de carácter binario, es decir, 0 ó 1, esta se puede representada de dos formas, la primera $x_i \in \{0, 1\}$, la segunda $x_i \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x_i \leq 1$.

En la literatura se distinguen tres casos generales en la Programación entera,

<i>ILP</i>)	<i>BLP</i>)	<i>MILP</i>)	
mín cx	mín cx	mín $cx + dy$	
<i>s.t.</i> $Ax = b$	<i>s.t.</i> $Ax = b$	<i>s.t.</i> $Ax + By = b$	(2.4)
$x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$	$x \in \{0, 1\}$	$x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$	
		$y \geq 0$	

donde $c, d \in \mathbb{R}^n$ un vector fila, $b \in \mathbb{R}^m$ un vector columna, $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $m \leq n$, $B \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ con $m \leq p$, $x \in \mathbb{R}^n$ restringido a no ser negativo y entero, su equivalente $x \in \mathbb{Z}^+$ y $y \in \mathbb{R}^p$ restringido a no ser negativo.

Cada caso posee una característica, programación lineal entera (ILP) es dado que todas sus variables son enteras, programación lineal binaria (BLP) un problema que consta de variables de carácter binario y programación lineal entera-mixta (MILP) que consta de un problema con variables enteras y continuas.

2.1.3. Programación estocástica

La Programación Lineal es de carácter determinístico lo que no siempre es la más adecuada para representar comportamientos aleatorios que se presentan en la vida real. Por lo que es de interés querer abordar la aleatoriedad a través de la Optimización bajo incertidumbre una de cuyas principales metodologías es la llamada Programación Estocástica, la que se ha desarrollado mediados el siglo XX (Beale, 1955; Dantzig, 2010).

La incertidumbre puede deberse a la falta de datos confiables y errores de medición, entre otros. La programación lineal es de carácter determinístico, en el caso de la programación estocástica se asume conocida la distribución de los parámetros dado que no se conocen en exactitud. Comúnmente se considera que las distribuciones son discretas con un número finito de estados posibles (Ramos et al., 2011).

Los modelos más estudiados son motivados por problemas con decisiones de tipo *aquí y ahora* (here and now), decisiones previas bajo un futuro incierto. Estos modelos son llamados problemas con recurso de dos etapas, se llama de primera etapa aquellas decisiones escogidas antes de que se revele la incertidumbre y de segunda etapa (también conocidas como decisiones de recurso) aquellas decisiones que en respuesta a los valores de los parámetros inciertos y como consecuencia de las decisiones de primera etapa.

El modelo es formulado de manera tal que optimice el valor esperado de la función objetivo. Se expone el siguiente problema lineal con recurso de dos etapas,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & cx + \mathbb{E}_\omega [Q(x, \xi^\omega)] \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde,

$$\begin{aligned} Q(x, \xi^\omega) = \min_{y_\omega} \quad & q_\omega y_\omega \\ \text{s.t.} \quad & W_\omega y_\omega \leq h_\omega - T_\omega x \\ & y_\omega \geq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde x son las variables de decisión de primera etapa, y_ω corresponden a las variables de decisión de segunda etapa para las diferentes realizaciones ω del parámetro incierto.

El problema puede ser formulado en su forma equivalente, conocido como problema determinista equivalente en su forma compacta. Se considera un número finito de escenarios $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\omega\}$ con $\omega \in \Omega$, con sus respectivas probabilidades $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\omega\}$,

$$\begin{aligned} \min_{x, y_\omega} \quad & cx + \sum_{\omega \in \Omega} \pi_\omega q_\omega y_\omega \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & W_\omega y_\omega \leq h_\omega - T_\omega x, \quad \forall \omega \in \Omega \\ & x \geq 0 \\ & y_\omega \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{2.7}$$

En lo que sigue ahora es cuantificar el impacto que genera resolver problemas a través del modelado estocástico. Existen medidas que permiten medir la importancia que representa resolver un modelo estocástico con respecto a un modelo determinista.

2.1.3.1 Valor esperado de la información perfecta

El valor esperado de la información perfecta (*EVPI*, *Expected Value of Perfect Information*) mide la cantidad esperada máxima que un tomador de decisiones está dispuesto a pagar por conocer de antemano toda la información acerca del futuro ([Birge and Louveaux, 2011](#); [Ramos et al., 2011](#)).

EVPI se determinar como la diferencia entre la solución de *here and now* (*RP*) y la solución de *wait and see* (*WS*),

$$EVPI = RP - WS \tag{2.8}$$

donde,

- *Here and Now* (*RP*). Corresponde al valor óptimo del modelo estocástico, es decir, al valor óptimo del modelo lineal con recurso.
- *Wait and See* (*SW*). Corresponde al valor esperado de resolver el modelo para cada escenario por separado.

La medida EPVI muestra la importancia de incluir la incertidumbre en el problema, entres más grande sea la diferencia entre RP y WP, más importante la inclusión de la incertidumbre.

2.1.4. Dualidad

Una característica muy particular de los problemas de programación lineal es que para cada problema existe un problema asociado que comparten diversas características, a este problema se le denomina problema dual (Ferrer and Muñoz, 2006). Considerando la notación estándar (2.2) se puede definir la función Lagrangeana $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ asociada al problema de la siguiente forma (Boyd et al., 2004),

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) \quad (2.9)$$

empleando la notación de forma estándar expuesta en (2.3) se tiene (Bard, 2013),

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = cx + \lambda^T(Ax - b) - \mu^T x \quad (2.10)$$

adoptando esta última como notación, se define la función dual $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ como el mínimo valor del Lagrangeano con respecto a x , con $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^n$

$$g(\lambda, \mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \quad (2.11)$$

la función dual genera un límite inferior con respecto al valor óptimo p^* (i.e cx^*) al problema, si $\mu \geq 0$ se tiene,

$$g(\lambda, \mu) \leq p^* = cx^* \quad (2.12)$$

con lo anterior se tiene que para (2.3) su función dual es,

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \\ &= \begin{cases} -\lambda^T x & \text{si } c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0 \\ -\infty & \text{si } e.o.c \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Con esto se observa la propiedad de límite inferior, $-\lambda^T b \leq cx^*$ siempre cuando se cumpla con $\mu \geq 0$ y $c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0$.

Como se provee de un límite inferior a través de la función dual, cabe preguntarse ¿cuál es el mejor límite inferior que se puede obtener?, esto lleva a lo siguiente,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & g(\lambda, \mu) \\ \text{s.t.} \quad & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

este problema es llamado, el problema dual asociado al problema original, en este contexto el problema original es llamado problema primal. Continuando con la función dual (2.13) se tiene que el problema dual corresponde a,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -\lambda^T b \\ \text{s.t.} \quad & c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0 \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

usando transitividad de $\mu \geq 0$ y $c + \lambda^T A - \mu^T = 0$ se tiene $c + \lambda^T A \geq 0$ y un cambio $-\lambda^T = \gamma^T$ se tiene,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \gamma^T b \\ \text{s.t.} \quad & A^T \gamma \leq c \end{aligned} \tag{2.16}$$

a los problemas (2.15) o (2.16) se les conoce como el problema dual del problema (2.3), también conocido como el problema primal.

Dualidad débil

Se define que el valor óptimo del problema primal a p^* (2.3), valor óptimo del problema dual d^* . Por definición d^* es el mejor límite inferior en p^* (2.16), luego se define p, d a valores de soluciones factibles de sus respectivos problema. La dualidad débil se representa con la siguiente desigualdad,

$$d \leq p \tag{2.17}$$

en base al problema primal (2.3) y su respectivo problema dual (2.16) correspondería a,

$$cx \leq \gamma^T b \tag{2.18}$$

Dualidad fuerte

Los problemas primales y duales poseen otra propiedad, conocida como Dualidad Fuerte,

$$d^* = p^* \quad (2.19)$$

que el valor del problema primal y dual, en su óptimo deben ser iguales.

2.1.5. Holguras complementarias

Suponiendo que el problema (2.3) cumple dualidad fuerte, se tiene que x^* corresponde al óptimo del problema primal y (λ^*, μ^*) corresponde al óptimo del problema dual,

$$\begin{aligned} cx^* &= g(\lambda^*, \mu^*) \\ &= \inf_x \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) \\ &= \inf_x \left(cx + \lambda^{*T}(Ax - b) - \mu^{*T}x \right) \\ &\leq cx + \lambda^{*T}(Ax - b) - \mu^{*T}x \\ &\leq cx \end{aligned} \quad (2.20)$$

en base a la definición de problema dual, dualidad fuerte, la consideración de una desigualdad natural $\inf_x \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) \leq \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*)$ e concluye que las desigualdades en esta cadena debe ocurrir con igualdad. Con lo anterior se deduce que,

$$\lambda^{*T}(Ax^* - b) - \mu^{*T}x^* = 0 \Rightarrow \lambda^{*T}(Ax^* - b) = 0 \wedge \mu^{*T}x^* = 0 \quad (2.21)$$

a estas últimas restricciones (2.21) se conoce como holguras complementarias.

2.1.6. Condiciones Karush–Kuhn–Tucker

Considerando el problema de programación lineal (2.3) y su función dual a través del mínimo valor del Lagrangeano (2.10), considerando los valores óptimos del problema primal y dual se tiene que x^* debe minimizar $\mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*)$ en consecuencia $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) &= cx + \lambda^{*T}(Ax - b) - \mu^{*T}x \\ \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) &= c + \lambda^{*T}A - \mu^{*T} = 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

con esto se tiene que,

$$\begin{aligned}c + \lambda^{*T}A - \mu^{*T} &= 0 \\ Ax^* &= b \\ \lambda^{*T}(Ax^* - b) &= 0 \\ \mu^{*T}x^* &= 0 \\ x^* &\geq 0 \\ \mu^* &\geq 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

estas últimas se llaman las condiciones suficientes y necesarias de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) (2.23). En general para cualquier problema de Optimización con funciones diferenciables para las cuales se obtiene una dualidad fuerte, cualquier par de puntos óptimos para el primal y dual debe satisfacer las condiciones de KKT (Boyd et al., 2004).

2.2. Programación Binivel

Varios problemas del mundo real implican una relación jerárquica entre dos o más niveles de decisión (Labbé and Violin, 2013). Lo anterior puede modelarse como un problema de programación matemática multinivel (Bard and Falk, 1982). El problema de dos niveles puede verse comúnmente como Juego de Stackelberg (Von Stackelberg, 2010) en un contexto económico, en que propone dos niveles jerárquicos entre un líder y seguidor, en que ambos buscan minimizar sus costos o maximizar sus beneficios. Las decisiones del líder depende del seguidor y con la característica en particular que el seguidor se ve limitado por las decisiones del líder. Los problemas con restricciones de problemas de optimización fueron introducidos por Bracken and McGill (1973) mientras que los términos de binivel y multinivel otorgados por Candler and Norton (1977).

Los problemas de programación binivel se caracterizan por problemas de optimización en donde una de sus restricciones corresponde a otro problema de optimización, el problema principal es denominado como nivel superior o líder y el problema anidado es denominado como nivel inferior o seguidor (Sinha et al., 2017).

En la formulación del modelo se considera que, las variables de decisión para el nivel superior o líder son $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, las variables de decisión del nivel inferior o seguidor $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, tanto el líder como el seguidor buscan minimizar $F(x, y), f(x, y)$ respectivamente, en general el Problema de Programación Binivel (BLPP, por sus siglas en inglés Linear Bilevel Programming Problem)(Bard, 2013) se escribe,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} F(x, y) \\
 & s.t \quad G(x, y) \leq 0 \\
 & \min_{y \in Y} f(x, y) \\
 & s.t \quad g(x, y) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, y $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ suponiendo que son continuas y dos veces diferenciables. Los conjuntos X e Y emplean restricciones adicionales a las variables como puede ser la no negatividad o de naturaleza entera de las decisiones. Los problemas binivel son problemas de optimización no convexos y además son considerados $\mathcal{NP}$ -Hard (Dempe et al., 2015; Jeroslow, 1985).

2.2.1. Programación lineal binivel, variables continuas

La característica de este problema es que considera funciones lineales, y se representa mediante el siguiente problema de programación lineal binivel (BLPP),

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} c_1x + d_1y \\
 & s.t \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & \min_{y \in Y} c_2x + d_2y \\
 & s.t \quad A_2x + B_2y \leq b_2
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m$, $b_1 \in \mathbb{R}^p$, $b_2 \in \mathbb{R}^q$, $A_1 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A_2 \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$, $B_1 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$, $B_2 \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$, se establece como $F(x, y) = c_1x + d_1y$ y $f(x, y) = c_2x + d_2y$. Los conjuntos X, Y representan restricciones adicionales a las variables, como los límites superiores e inferiores, en lo que sigue se incluye únicamente la no-negatividad.

Con la formulación del problema, se tienen las siguientes definiciones:

(a) Región de Restricciones :

$$S = \{(x, y) \in X \times Y : A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\}$$

(b) Conjunto factible para el seguidor para cada $x \in X$ fijo:

$$S(x) = \{y \in Y : B_2y \leq b_2 - A_2x\}$$

(c) Proyección de S en el espacio de decisión del líder:

$$S(X) = \{x \in X / \exists y \in Y : A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\}$$

(d) La reacción racional del seguidor establecida para $x \in S(x)$.

$$P(x) = \{y \in Y : y \in \arg \min[f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\}$$

(e) Región Inducible :

$$IR = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in P(x)\}$$

Desde las definiciones expuestas se concluye que el conjunto racional $P(x)$ define la respuesta, mientras que la región inducible IR representa el conjunto sobre el cual el líder puede optimizar.

Para la existencia del problema se supone que, S es distinto de vacío y compacto, para las decisiones tomadas por el líder, el seguidor tiene espacio para responder, es decir, que $P(x)$ es distinto de vacío (Bard, 2013) y el conjunto factible, que es la región inducible está conectado (Chi et al., 2014).

En base a las definiciones anteriores el BLPP se puede escribir,

$$\min\{F(x, y) : (x, y) \in IR\}$$

En la búsqueda de resolver el BLPP es posible reformular el problema del seguidor a través de las condiciones de KKT. Una condición necesaria para que (x^*, y^*) resuelva el BLPP lineal es que existan u, v tales que (x^*, y^*, u^*, v^*) resuelva,

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x + d_1y \\ \text{s.t.} \quad & A_1x + B_1y \leq b_1 \\ & d_2 + uB_2 - v = 0 \\ & u(A_2x + B_2y - b_2) = 0 \\ & vy = 0 \\ & A_2x + B_2y \leq b_2 \\ & x, y \geq 0, \quad u, v \geq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

esta formulación es clave para la formulación de algoritmos (Bard, 2013).

2.2.1.1 Enfoques Clásicos

Desde los años 1970 se han desarrollado numerosos de algoritmos para resolver el BLPP, muchos de estos son de interés académico (Bard, 2013). En general, hay tres enfoques,

- El primero se basa en un teorema "*La solución (x^*, y^*) de BLPP ocurre en un vértice de S .*" e involucra la enumeración de vértices del método simplex. Candler and Townsley (1982) fueron los primeros en crear un algoritmo que es globalmente óptimo.

Se centra en la resolución repetidamente de dos problemas lineales, uno para el líder en las variables x y un subconjunto de las variables y asociadas a una base óptima del problema del seguidor, el segundo consta de resolver el problema del seguidor con x fijo. En base a un esquema iterativo usando la verificación de los costos reducidos se obtiene la base óptima del problema.

Luego Bialas and Karwan (1984) proponen un esquema diferente en que se basa en la búsqueda de los vértices.

- El segundo, es conocido como el enfoque de *Karush–Kunh–Tucker*, se basa en la formulación del problema del seguidor a través de las condiciones de KKT (2.26). La propuesta es la utilización de la estrategia *Brach and Bound* para las restricciones relacionadas a las holguras complementarias, al relajar aquellas restricciones el problema abordar de manera más fácil pues se convierte a un LP (2.3). Los diversos métodos propuesto por Júdice and Faustino (1992), Fortuny-Amat and McCarl (1981) y Bard and Moore (1990) procurar asegurar las restricciones complementariedad.
- El tercero, se basa en las penalizaciones, Aiyoshi and Shimizu (1984) propone una reformulación del problema del seguidor en un problema sin restricciones utilizando un método de penalización. Para asegurar las soluciones del problema se incluyen las restricciones de estacionaridad y además se exige que la función del seguidor sea estrictamente convexa.

2.2.1.2 Enfoque Kunh–Tucker

El enfoque más directo para resolver el BLPP lineal es resolver el problema equivalente

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & c_1x + d_1y \\
 \text{s.t.} \quad & A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & d_2 + uB_2 - v = 0 \\
 & u(A_2x + B_2y - b_2) = 0 \\
 & vy = 0 \\
 & A_2x + B_2y \leq b_2 \\
 & x, y \geq 0, \quad u, v \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Esta reformulación muestra el carácter no convexo del problema binivel debido a las restricciones de complementariedad que son ecuaciones no-lineales. Denotaremos a todas las desigualdades del problema del seguidor (2.25) como $g_i(x, y) \geq 0$, $i = 1, \dots, q + m$, y notamos que la holgura complementaria $u_i g_i(x, y) = 0$ provee una dificultad al ser una restricción no-lineal. Para poder abordar lo anterior consiste en transformar el problema a uno lineal de enteros mixtos, introduciendo variables binaria y un término big- M , reemplazando las restricciones de holguras complementarias (Fortuny-Amat and McCarl, 1981),

$$\begin{aligned}
 u(A_2x + B_2y - b_2) &= 0 \\
 vy &= 0
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

con el siguiente conjunto de desigualdades,

$$u_i \leq Mz_i, \quad g_i \leq M(1 - z_i) \tag{2.29}$$

donde M es suficientemente grande y $z_i \in \{0, 1\}$. El problema resultante contiene $q + m$ variables adicionales y $2(q + m)$ restricciones adicionales.

Esta reformulación resulta bastante practica para resolver los problemas binivel, no obstante se debe abordar con cuidado la elección del término Big- M . Comprobar la validez la constante M puede ser tan difícil como resolver problema original binivel (Kleinert et al.,

2019) y si la elección de la constante M es demasiado pequeña puede resultar en soluciones subóptimas del problema binivel (Pineda and Morales, 2019). En Kleinert and Schmidt (2020) establece que a menos que se puedan derivarse constantes válidas para M a partir de conocimientos específicos problema, no puede esperar que la reformulación entregue resultados correctos.

2.2.2. Programación lineal binivel, variables discretas

Muchas veces en la optimización un conjunto de variables se restringen a que deban ser enteras, es por ello que aparece una nueva clasificación para el problema BLPP (Bard, 2013). Para especificar el modelo, se define $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $x_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$, donde $x = (x_1, x_2)$ con $n = n_1 + n_2$, de forma similar se definen $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $y_2 \in \mathbb{Z}^{m_2}$ con $m = m_1 + m_2$,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} \quad c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + d_{11}y_1 + d_{12}y_2 \\
 & s.t \quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}y_1 + B_{12}y_2 \leq b_1 \\
 & \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z} \\
 & \min_{y \in Y} \quad c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + d_{21}y_1 + d_{22}y_2 \\
 & s.t \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{21}y_1 + B_{22}y_2 \leq b_2 \\
 & \quad \quad y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

también existen variantes del modelo anteriormente expuesto, para ello utilizaremos modelo BLPP (2.25) sin hacer referencia a que variables son continuas y cuales discretas,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} \quad c_1x + d_1y \\
 & s.t \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & \min_{y \in Y} \quad c_2x + d_2y \\
 & s.t \quad A_2x + B_2y \leq b_2
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m$, $b_1 \in \mathbb{R}^p$, $b_2 \in \mathbb{R}^q$, $A_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$.

Con esto es posible extender el conjunto de regiones factibles para el nivel inferior denominado S_L y para el nivel superior denominado S_U ,

$$S_L(y) = \{x \in X : A_2x \leq b_2 - B_2y\} \tag{2.32}$$

$$S_U = \{(x, y) \in X \times Y : A_1x + B_1y \leq b_1\} \tag{2.33}$$

además se supondrá que para cada $x \in X$ posee una única solución óptima del problema del nivel inferior.

Junto con el problema definido en (2.31) es posible clasificar tres modelos según la naturaleza de las variables,

- (a) Programación lineal binivel discreto (DL–BLPP), es decir, el modelo contempla solo variables de decisión $X \in B^n, Y \in B^m$
- (b) Programación lineal binivel discreta continua (DCL–BLPP), es decir, el modelo contempla variables de decisión discretas para el nivel superior y continuas para el nivel inferior, $X \in B^n, Y \in \mathbb{R}^m$.
- (c) Programación lineal binivel continua discreta (CDL–BLPP), es decir, el modelo contempla variables de decisión continuas para el nivel superior y discretas para el nivel inferior, $X \in \mathbb{R}^n, Y \in B^m$.

Ante la clasificación de modelos se establecen equivalencias entre modelos a través de una función de penalización cóncava (Bard, 2013). Por ejemplo, es posible reducir un problema DCL–BLPP a uno BLPP, a modo de ilustración consideremos el siguiente DCL–BLPP y luego su equivalencia a BLPP a través de la introducción de un vector de unos e_x y además una nueva variable u ,

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & c_1x + d_1y \\
 s.t \quad & A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 \min_y \quad & d_2y \\
 s.t \quad & A_2x + B_2y \leq b_2
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

entonces su equivalencia,

$$\begin{aligned}
 \min_{x \in X} \quad & c_1x + d_1y + Me_x^T u \\
 s.t \quad & A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & 0 \leq x \leq e_x \\
 \min_{y \in Y, u} \quad & d_2y - e_x^T u \\
 s.t \quad & A_2x + B_2y \leq b_2 \\
 & u \leq x \\
 & u \leq e_x - x
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $X \in \{0, 1\}^n, Y \in \mathbb{R}^m$ para (2.34) y M una constante positiva para (2.35).

También es posible establecer la equivalencia de un problema DL–BLPP a un problema de programación de tres niveles, para ello se introducen dos constantes positivas M_x, M_y , consideremos el siguiente DL–BLPP,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} && c_1x + d_1y \\
 & s.t && A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & && \min_{y \in Y} && d_2y \\
 & && s.t && A_2x + B_2y \leq b_2
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

con $X \in \{0, 1\}^n, Y \in \{0, 1\}^m$, entonces su equivalencia lineal es,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in X} && c_1x + d_1y + Me_x^T u \\
 & s.t && A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & && 0 \leq x \leq e_x \\
 & && \min_{y \in Y, u} && d_2y - e_x^T u + M_y e_y^T v \\
 & && s.t && A_2x + B_2y \leq b_2 \\
 & && && 0 \leq x \leq e_y \\
 & && && u \leq x \\
 & && && u \leq e_x - x \\
 & && && \min_v && -e_y^T v \\
 & && && s.t && v \leq y \\
 & && && && v \leq e_y - y
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde e_x, e_y corresponden a vectores de unos. Estas reformulaciones permite resolver estos problemas mediante los enfoques de resoluciones expuesto para el caso L–BLPP (2.2.1.1). En cambio el problema CDL–BLPP no posee una equivalencia lineal puesto que no existe un valor finito para M para establecer una equivalencia. Ante esta dificultad de se ha planteado en la literatura un algoritmo de búsqueda para determinar el valor de M_k en base a resolver una serie de BLPP para una secuencia de valores de M_k . Puede ser prudente hacer uso de heurísticas que encuentren soluciones factibles y renunciar a la garantía de la optimización global (Bard, 2013).

2.2.2.1 Enfoques clásicos

A través de la reducción lineal se han prestando dos algoritmos que permite abordar los problemas DCL–BLP y DL–BLPP,

- Algoritmo para un problema de programación lineal binivel discreta continua de [Bard and Moore \(1990\)](#). Busca resolver el problema a través de la reformulación mediante el enfoque de Karush–Kunh–Tucker [2.26](#) y el método de búsqueda de *Branch and Bound*, esta estrategia permite relajar aquellas restricciones relacionadas a las holguras complementarias y además de aquellas variables que son de naturaleza discreta.
- Algoritmo para un problema de programación lineal binivel discreta de [Bard and Moore \(1990\)](#). Busca resolver el problema binario en ambos niveles a través de la enumeración implícita de [Balas \(1967\)](#). La clave del algoritmo está en el reconocimiento de que cualquier solución para el DL–BLPP debe estar en el conjunto de reacción racional $P(x)$ ([2.2.1](#)) del seguidor ([Bard, 2013](#))

En la presente tesis se buscará desarrollar un problema CDL–BLPP para luego utilizar la reformulación de Karush–Kunh–Tucker lo que nos conducirá a un modelo de programación no–lineal entera mixta que posteriormente se volverá a reformular a un problema lineal entero–mixto reemplazando a aquellas restricciones no lineales por un conjunto de desigualdades a través de variables binarias y un término big– M .

2.2.3. Programación lineal binivel estocástica

La programación lineal binivel estocástica es una generalización de un problema de programación lineal binivel (2.31), permitiendo incorporar la incertidumbre al problema (Floudas and Pardalos, 2008). Los trabajos que introdujeron y estudiaron los problemas de programación binivel estocástico se encuentran en Patriksson and Wynter (1997), Christiansen et al. (2001).

Ahora en adelante se utilizará la notación empleada para un BLPP en (2.24) e incluyendo la variabilidad al problema como se introdujo en (2.1.3). Un problema general de programación binivel estocástico considerando la incertidumbre como una variable aleatoria ξ (Werner, 2005), se formula de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & F_1(x, y, \xi) \\
 s.t \quad & G_1(x, y, \xi) \leq 0 \\
 \min_y \quad & f_1(x, y, \xi) \\
 s.t \quad & g_1(x, y, \xi) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dependiendo del punto de vista sobre el problema, diferentes enfoques evolucionaron combinando conceptos de toma de decisiones bajo incertidumbre con métodos de programación binivel (Werner, 2005). En la literatura se puede encontrar diferentes propuesta para representar un problema de programación lineal binivel Estocástico. Werner (2005) provee una formulación para un problema de programación lineal binivel de dos etapas en el nivel superior y un problema de programación estocástica de una etapa en el nivel inferior, consideremos un número finito de escenarios $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\omega\}$ con $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & F_1(x, y) + \mathbb{E}_\omega[Q(x, \xi^\omega)] \\
 s.t \quad & G_1(x, y) \leq 0 \\
 \min_y \quad & \mathbb{E}_\omega[f_1(x, y_\omega, \xi^\omega)] \\
 s.t \quad & g_1(x, y) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $Q(x, \xi^\omega)$ se define,

$$\begin{aligned}
 Q(x, \xi^\omega) = \min_{x_\omega} \quad & F_2(x_\omega, x, \xi^\omega) \\
 s.t \quad & G_2(y_\omega, x, \xi^\omega) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

en su formulación determinista equivalente se tiene,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x, x_\omega} F_1(x, y) + \mathbb{E}_\omega[F_2(x_\omega, x, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad G_1(x, y) \leq 0 \\
 & \quad G_2(x_\omega, x, \xi^\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega \\
 & \min_{y_\omega} \mathbb{E}_\omega[f_1(x, y_\omega, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad g_1(x, y) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

esta formulación es considerada como la más básica ([Werner, 2005](#)). Además se puede interpretar que la influencia de las decisiones del seguidor no son lo suficientemente fuerte como para ser considerada en la segunda etapa del problema del líder.

En contraste a la formulación anterior se introduce un modelo de programación binivel estocástico de dos etapas en ambos niveles ([Alizadeh et al., 2013](#)),

$$\begin{aligned}
 & \min_x F_1(x, y) + \mathbb{E}_\omega[Q(x, y, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad G_1(x, y) \leq 0 \\
 & \quad \min_y f_1(x, y) \\
 & s.t \quad g_1(x, y) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde

$$\begin{aligned}
 Q(x, y, \xi^\omega) = & \min_{x_\omega} F_2(x_\omega, y_\omega, \xi^\omega) \\
 & s.t \quad G_2(x_\omega, y_\omega, x, y, \xi^\omega) \leq 0 \\
 & \min_{y_\omega} f_2(x_\omega, y_\omega, \xi^\omega) \\
 & s.t \quad g_1(x_\omega, y_\omega, x, y, \xi^\omega) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

el problema anterior se puede reformular a un problema de programación lineal binivel en su formulación determinista equivalente,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x, x_\omega} F_1(x, y) + \mathbb{E}_\omega[F_2(x_\omega, y_\omega, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad G_1(x, y) \leq 0 \\
 & \quad G_2(x_\omega, y_\omega, x, y, \xi^\omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \\
 & \min_{y, y_\omega} f_1(x, y) + \mathbb{E}_\omega[f_2(x_\omega, y_\omega, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad g_1(x, y) \leq 0 \\
 & \quad g_2(x_\omega, y_\omega, x, y, \xi^\omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in \Omega
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

El modelo (2.44) permite resolver un problema binivel estocástico de dos etapas en una red de transporte (Alizadeh et al., 2013). La primera etapa, el nivel superior establece las tarifas de un conjunto de arcos disponibles en una red de transporte, en cambio, el nivel inferior asigna los flujos a las rutas más baratas. La segunda etapa, se incorpora la variabilidad a las tarifas conservando el comportamiento entre el líder y el seguidor en que se establecen las tarifas y los flujos respectivamente.

En Yeh et al. (2015) se desarrolla un modelo de programación binivel estocástico de dos etapas en una cadena de suministros de bosques con intereses de inversión en biorefinería, que posee la misma estructura del modelo anteriormente expuesto. El comportamiento binivel se presenta entre cosechadores y productores. En donde las decisiones de primera etapa corresponde a la inversión en biorefinería y la de segunda etapa corresponde a la asignación de suministro de dos niveles

Otro modelo que se ha estudiado a profundidad corresponde a un caso particular expuesto en (2.41), que considera que el líder tiene que tomar su decisión sin conocer la realización de la aleatoriedad, mientras que el seguidor decide con información completa (Burtsccheidt et al., 2020; Henkel, 2014). Considerando su formulación determinista equivalente,

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & F_1(x) + \mathbb{E}_\omega[F_2(y_\omega, \xi^\omega)] \\
 s.t \quad & G_1(y_\omega, x, \xi^\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega \\
 \min_{y_\omega} \quad & \mathbb{E}_\omega[f_2(y_\omega, \xi^\omega)] \\
 s.t \quad & g_1(x, y_\omega, \xi^\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

este caso particular es considerado como un caso especial puesto que las funciones objetivos de nivel superior e inferior coinciden a nivel de variables de decisión (Burtsccheidt et al., 2020).

Entre otras variantes de un problema de programación binivel estocástico que deben ser destacados. Como es el modelo propuesto en Kosuch et al. (2012) en donde las decisiones del líder corresponde a un problema estocástico de una etapa en donde cuyas decisiones no afectan a las decisiones del problema del seguidor. También se pueden observar variantes de múltiples etapas, en (Kalashnikov et al., 2010) provee un modelo de programación binivel estocástico de tres etapas con recurso, con el objetivo de resolver un problema de suministro de gas.

Finalmente en el trabajo de [Carrión et al. \(2009\)](#) desarrolla un problema de programación lineal estocástica con la particularidad en que el nivel superior es un problema de dos etapas con una incertidumbre como un conjunto finito de escenarios $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\omega\}$ con $\omega \in \Omega$, y para el nivel inferior un problema estocástico de una etapa con una incertidumbre como $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\sigma\}$ con $\sigma \in \Sigma$. Detallando de forma general el problema en su forma determinista equivalente de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 & \underset{x, x_\omega}{\text{máx}} && F_1(x) + \mathbb{E}_\omega[F_2(x_\omega, \xi^\omega)] \\
 & \text{s.t} && G_1(x, x_\omega, \xi^\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega \\
 & && G_2(y_\omega, x, \xi^\omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \\
 & && \underset{y_\sigma}{\text{mín}} \mathbb{E}_\sigma[f_1(y_\sigma, \phi^\sigma)] \\
 & \text{s.t} && g_1(y_\sigma, x, \phi^\sigma) \leq 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

esto se debe a la caracterización del problema de participación de mercado de un minorista y sus rivales, en donde el líder es el minorista que determina la cartera de contratos a plazo y el precio de venta ofrecido a los clientes en un horizonte de planificación a mediano plazo para que se maximice su beneficio esperado, en cambio el seguidor que corresponden a los minoristas rivales en el mercado que en base a la decisión del líder deben determinar la participación de la demanda suministrada por cada minorista rival.

En la mayoría de los trabajos expuesto de forma general simplifican el problema binivel mediante la incorporación de las condiciones de óptimalidad usando el enfoque de Karush–Kuhn–Tucker ([2.23](#)), reduciendo el problema a un problema de programación no lineal de un solo nivel en donde se utilizan en gran medida estrategias clásicas ([2.2.1.1](#)) tal como una reformulación a un problema MILP .

2.3. Agricultura de Precisión

2.3.1. Delineación de zonas

El problema de Delineación de Zonas consiste en delinear una parcela agrícola en zonas de manejo sitio-específicas. Se entiende por Zona de Manejo a una subregión del terreno que se define en base a criterios establecidos. La delineación de un terreno facilita la planificación de la operación de la cosecha, este se realiza considerando la homogeneidad relativa de algún indicador de cultivo o suelo, requiriendo de una cantidad mínima de datos ([Roudier et al., 2008](#)).

El problema de Delineación de Zonas se ha estudiado ampliamente, ciertos autores han propuesto resolver el problema utilizando algoritmos de agrupamiento de acuerdo a características del suelo, por ejemplo, la utilización de la información del suelo y relieve obtenida a partir de mapas topográficos ([Fraisie et al., 2001](#)), a partir de un muestreo de suelo ([Johnson et al., 2003](#)), la utilización de mapas de rendimientos considerando datos de varias estaciones ([Blackmore, 2000](#)), ([Diker et al., 2004](#)) y ([Pedroso et al., 2010](#)), por ultimo la utilización del muestro de del suelo y mapas de rendimiento ([Franzen and Nanna, 2002](#); [Hornung et al., 2006](#)).

Gran parte de los trabajos que abordan los problemas de delineación provee como resultados zonas de manejo poco atractivas para los productores agrícolas esto se debe a que las zonas son irregulares con forma oval y fragmentas. El interés de los productores son las zonas de manejos rectangulares ya que la maquinaria empleada para el tratamiento de la tierra como la fertilización, sistema de regadío que suelen seguir formas rectangulares ([Li and Guo, 2015](#)).

Dado el requerimiento de especificar zonas de manejo rectangulares, [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#) desarrolla un método de delineación de zonas rectangulares de manejo en base a determinadas propiedades del suelo. Para asegurar cierto nivel de homogeneidad en las zonas de manejo se hace uso del concepto de varianza relativa (dado su acrónimo en inglés *relativa variance*), que provee un criterio para medir la eficiencia del método de delineación ([Ortega and Santibáñez, 2007](#)).

Consideremos N puntos muestrales con un indicador dado, una partición del terreno en

Q zonas de manejo rectangulares de manejo con Q con $Z \subset Q$ y cada zona z contiene n_z de los N puntos muestrales, se define la varianza relativa (RV) de Q ,

$$RV(Q) = 1 - \frac{1}{\sigma_T^2} \frac{\sum_{z \in Z} (n_z - 1) \sigma_z^2}{(N - |Q|)} \quad (2.47)$$

donde σ_T^2 es la varianza total de todo el campo y σ_z^2 es la varianza en la zona de manejo z . La varianza relativa se comprende entre 0 y 1, entre más alto el valor representa una alta homogeneidad interna para cada una de las zona de manejo.

Detallando el modelo propuesto de delineación de zonas de manejo rectangulares de [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#) el cuál incorpora la varianza relativa. Consideremos ahora, Z como el conjunto de de zonas rectangulares de manejo, S como el conjunto de puntos muestrales del suelo, el número total de puntos muestrales N . Estableciendo como variable de decisión a q_z , que toma valor 1 si la zona z está en la partición y 0 en caso contrario. Los parámetros considerados son,

- $a_{s,z}$: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto de muestra s pertenece a la potencial zona de manejo z y 0 en caso contrario.
- n_z : Número total de puntos de muestras en la potencial zona de manejo z .
- σ_T^2 : Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
- σ_z^2 : Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la potencial zona de manejo z .
- UB : Cota superior de la cantidad de zonas de manejo que pueden haber en el campo.
- LB : Cota inferior de la cantidad de zonas de manejo que pueden haber en el campo.
- α : Nivel de homogeneidad requerido.

Con ello el modelo,

$$\text{mín} \quad \sum_{z \in Z} q_z \quad (2.48)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (2.49)$$

$$LB \leq \sum_{z \in Z} q_z \leq UB \quad (2.50)$$

$$1 - \frac{\sum_{z \in Z} (n_z - 1) \sigma_z^2 q_z}{\sigma_T^2 \left(N - \sum_{z \in Z} q_z \right)} \geq \alpha \quad (2.51)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (2.52)$$

La función objetivo (2.48) minimiza el número de zonas de manejo a utilizar en la partición del terreno. La restricción (2.49) corresponde a una restricción de factibilidad, permite asegurar que todo punto muestral se encuentre cubierto por la zona de manejo, cubriendo así todo el terreno, la restricción (2.50) corresponde a los límites superior e inferior para el número de zonas a seleccionar, la restricción (2.51) asegura que se cumpla el nivel de homogeneidad requerido para las particiones. Por último la restricción (2.52) corresponde a la naturaleza binaria de la variable q_z . Cabe señalar que la restricción (2.51) corresponde a una restricción no lineal por lo que se puede llevar a una restricción lineal de la siguiente forma,

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (2.53)$$

Posterior al trabajo expuesto por Cid-Garcia et al. (2013) se encuentra el trabajo de Albornoz et al. (2015) que provee un modelo bi-objetivo que minimiza la cantidad de zonas de manejo a elegir, a la vez que maximiza la homogeneidad de cada zona desde un un esquema jerárquico. Luego en Saez and Albornoz (2016) incorpora la incertidumbre a través de un modelo estocástico de dos etapas. Además existen variantes en la resolución de este problema de delineación, en el trabajo de Albornoz and Ñanco (2016) formula un algoritmo de generación de columnas que permite enfrentar al modelo determinista que posteriormente en el trabajo de Albornoz et al. (2019) enfrenta el modelo de delineación incorporando la variabilidad junto con una estrategia de resolución de generación de columnas.

2.3.2. Planificación de cosecha

El problema de Planificación de cosecha determina cuándo realizar una óptima cosecha permitiendo que los frutos sean recolectados en el campo en el momento oportuno, al poseer esta información permite al agricultor percibir un mayor ingreso. Una buena planificación de la cosecha es clave en el contexto de cadenas de suministro debido a la relevancia de las restricciones que impone de empleo de recursos humanos y la calidad de los productos cosechados (Kusumastuti et al., 2016).

El problema de Planificación de cosecha se ha estudiado ampliamente. En [Caixeta-Filho \(2006\)](#) provee una formulación lineal entera mixta con el fin de optimizar la industrias de las naranjas a través de características químicas y biológicas, permitiendo así un aumento de las ganancias en dichas industria de un 6 %, luego en [Ferrer et al. \(2008\)](#) aborda la cosecha de uva destinadas para la producción a través de un modelo de programación lineal entera mixta que incluye las operaciones de cosecha de uva, los costos de operación, la calidad, mano de obra y transporte. [Bohle et al. \(2010\)](#) extiende el trabajo anterior incorporando la variabilidad de la producción a través de un modelo de programación lineal robusta. [Arnaout and Maatouk \(2010\)](#) aborda la cosecha de vinos con el objetivo de maximizar la calidad del vino y a su vez minimizar los costos de operaciones, a través de la incorporación de una función de pérdida de calidad. Más adelante [Costa et al. \(2014\)](#) desarrollar un problema de programación lineal entera mixta, permitiendo definir horarios de cultivos en base al cumplimiento de la demanda e incorporando el almacenaje de la cosecha en un período de tiempo y [González-Araya et al. \(2015\)](#) provee la planificación de cosecha de manzana dentro de una ventana de tiempo e incluyendo la fuerza de trabajo tanto estacional y temporales. En [Araneda and Albornoz \(2019\)](#) plantea un problema de cosecha selectiva para la cosecha de uva, integrando la definición de zonas de manejo y planificación de la cosecha. Recientemente [Jiang et al. \(2019\)](#) integra la programación de la cosecha y la distribución de las hortalizas en el contexto de ventas en línea.

En lo que sigue se detallara la Planificación de Cosecha Selectiva.

2.3.2.1 Planificación de cosecha selectiva

El problema de planificación de cosecha selectiva permite programar la cosecha diaria considerando recursos escasos que deben ser asignados de forma óptima, con ello permite la cosecha y almacenaje de forma oportuna (Araneda and Alborno, 2019).

En el trabajo de Araneda (2019) provee un modelo que minimiza el costo total del proceso de cosecha considerando recursos escasos en cada periodo de tiempo, con el fin de calendarizar el proceso de cosecha para las zonas de manejo previamente establecidas. Consideremos, T el conjunto de periodos de cosecha, Z^* como el conjunto de zonas de manejos previamente establecidas. A continuación se presentan los parámetros asociados al problema,

$b_{t,z}$	: Matriz binaria de ventana de tiempo. Coeficiente que toma valor 1 si en el periodo t , la zona z puede ser cosechada y 0 en otro caso.
p_z	: Producción total en la zona z .
st_t	: Salario en el periodo t para trabajadores temporales.
ss	: Salario para trabajadores estacionales.
pt	: Productividad del trabajador temporal por periodo.
ps	: Productividad del trabajador estacional por periodo.
sw_{min}	: Número mínimo de trabajadores estacionales.
sw_{max}	: Número máximo de trabajadores estacionales.
tw_{max}	: Número máximo de trabajadores temporales.
trc_z	: Costo de viaje a la zona z .
vc	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
tr_z	: Tiempo de viaje a la zona z en horas.
trh_t	: Horas disponibles para realizar viajes durante el periodo t .

a continuación se presentan las variables de decisión,

$X_{t,z}$	: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z .
SW	: Número de trabajadores estacionales.
TW_t	: Número de trabajadores temporales en el periodo t .
$NT_{t,z}$	: Número de viajes en el periodo t a la zona z .

El modelo (2.54)–(2.62) considera, que la función objetivo minimiza los costos del proceso de cosecha, incluyendo los costos de mano de obra y los costos de transporte (2.54). Luego la restricción (2.55) garantiza que la cantidad cosechada no supere la productividad de los trabajadores. La restricción (2.56) indica que si la zona de manejo es cosechada,

ésta debe ser cosecha por completo. La restricción (2.57) limita el número de trabajadores estacionales. La restricción (2.58) limita superiormente a la cantidad de trabajadores temporales. La restricción (2.59) asegura que la cantidad cosechada no puede exceder la capacidad de trasladado. La restricción (2.60) establece el número máximo de viajes. La restricción (2.61) y (2.62) indican la naturaleza de las variables,

$$\text{mín} \quad ss \cdot SW + \sum_{t \in T} st_t \cdot TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z^*} tr_z \cdot NT_{t,z} \quad (2.54)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z^*} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (2.55)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} = p_z, \quad \forall z \in Z^* \quad (2.56)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (2.57)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (2.58)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (2.59)$$

$$\sum_{z \in Z^*} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (2.60)$$

$$X_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z^* \quad (2.61)$$

$$SW, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z^* \quad (2.62)$$

A continuación se presenta la extensión de este modelo incorporando el problema de delineación de zonas de manejo en un esquema jerárquico (Araneda, 2019).

2.3.2.2 Enfoque integrado: delineación y planificación de cosecha

En el trabajo de [Araneda \(2019\)](#) extiende el problema de cosecha expuesto en la sección anterior, (2.54)–(2.62), integrando el problema de delineación expuesto por [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#), (2.48)–(2.52). Este enfoque integrado posee como objetivo determinar las zonas de manejo óptimas y sus respectivos periodos de cosecha con asignación de recursos escasos. Consideremos, Z como el conjunto de potenciales zonas de manejo, S como el conjunto de puntos muestrales del suelo y T como el conjunto de periodos de cosecha. A continuación se presentan los parámetros,

$a_{s,z}$	: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto de muestra s pertenece a la potencial zona de manejo z y 0 en caso contrario.
N	: Número de puntos muestrales en la zona z .
n_z	: Número total de puntos de muestras en la potencial zona de manejo z .
σ_T^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
σ_z^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la potencial zona de manejo z .
α	: Nivel de homogeneidad requerido.
$b_{t,z}$	: Matriz binaria de ventana de tiempo. Coeficiente que toma valor 1 si en el periodo t , la zona z puede ser cosechada y 0 en otro caso.
p_z	: Producción total en la zona z .
st_t	: Salario en el periodo t para trabajadores temporales.
ss	: Salario para trabajadores estacionales.
pt	: Productividad del trabajador temporal por periodo.
ps	: Productividad del trabajador estacional por periodo.
sw_{min}	: Número mínimo de trabajadores estacionales.
sw_{max}	: Número máximo de trabajadores estacionales.
tw_{max}	: Número máximo de trabajadores temporales.
trc_z	: Costo de viaje a la zona z .
vc	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
tr_z	: Tiempo de viaje a la zona z en horas.
trh_t	: Horas disponibles para realizar viajes durante el periodo t .

a continuación se presentan las variables de decisión,

q_z	: 1 si la zona z está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
$X_{t,z}$	: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z .
SW	: Número de trabajadores estacionales.
TW_t	: Número de trabajadores temporales en el periodo t .
$NT_{t,z}$	: Número de viajes en el periodo t a la zona z .

Lo interesante de este modelo integrado (2.63)–(2.75) no busca minimizar el número total de zonas de manejo en la partición del terreno (q_z), dado que el enfoque integrado incluye el enfoque jerárquico, es decir, que se debe resolver el problema de delineación de zonas de manejo así asignándolos a Z^* , por tanto corresponden a las zonas que conforman la partición. Dado lo anterior se incluye la restricción (2.65) que limita el número total de zonas de manejo en la partición,

$$\text{mín} \quad ss \cdot SW + \sum_{t \in T} st_t \cdot TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z^*} tr_z \cdot NT_{t,z} \quad (2.63)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (2.64)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (2.65)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (2.66)$$

$$\sum_{z \in Z^*} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (2.67)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} = p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z^* \quad (2.68)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (2.69)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (2.70)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (2.71)$$

$$\sum_{z \in Z^*} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (2.72)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (2.73)$$

$$X_{t,z} \geq 0 \quad \forall t \in T, \forall z \in Z^* \quad (2.74)$$

$$SW, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z^* \quad (2.75)$$

además se incorpora la restricción (2.68) que originalmente corresponde a (2.56) considerando ahora una modificación en el lado derecho imponiendo que si no se elige una zona de manejo potencial, ésta no se puede cosechar, de lo contrario debe ser cosechada por completo toda su producción.

3. Metodología

3.1. Descripción del problema

En la industria agrícola al igual que todas las industrias posee su cadena de suministro, que parte desde los productores a los clientes. En la presente tesis se concentrará en dos eslabones, el productor y un vendedor mayorista. El productor busca determinar la planificación y programación de la cosecha, en base a aquellas zonas de manejo previamente establecida, para así vender en cada período dicha cosecha. El vendedor mayorista enfrenta una demanda agregada de los clientes, considerando la producción del productor como la oferta disponible, con ello debe decidir si comprar o no a un tercero en caso de no poder abastecer la demanda enfrentada período a período.

Ambos actores, tanto productor como el mayorista persiguen objetivos distintos. El productor busca maximizar su beneficio en base a la elección de aquellas zonas de manejo cosechar, para su posterior comercialización, además considerando aquellos costos de operación, que van desde la operación de cosecha, operarios y costos de transporte. En cambio el vendedor mayorista busca minimizar la demanda insatisfecha en base a la oferta proveniente del productor.

Se propone apoyar la toma de decisiones en la planificación de cosecha y su proceso de distribución en el contexto de una cadena de suministro agrícola, integrando el problema de delineación de zonas de manejo con la planificación de la misma. Para ello, se formula un problema de programación lineal entera-mixta que provea una programación de cosecha y su posterior distribución a través de la cadena de suministro. Luego, se propone extender el modelo anterior considerando una cadena de suministro jerárquica, con lo cual permite una mejor coordinación entre el productor y el vendedor mayorista, en donde el mayorista se ve afectado ante las decisiones del productor, con esto se observa una jerarquía entre el productor (líder) y el vendedor mayorista (seguidor). Para lo anterior se empleara un problema de programación binivel para así poder representar la debida coordinación.

Los modelos que se proponen anteriormente son de carácter determinista. No obstante, en el mundo agrícola depende de muchos factores, tanto biológicos, económicos y naturales.

Por lo que en muchas situaciones un modelo determinista no logra capturar adecuadamente la realidad, es por ello que se debe incorporar antecedentes bajo incertidumbre, incluyendo rendimientos, precios y demandas futuras a través de posibles escenarios futuros.

En lo que sigue, se exponen los modelos que constituyen el problema de programación binivel tanto determinista como estocástico. Primero detallando los modelos asociados al líder y al seguidor.

3.2. Problema del productor

En lo que sigue, se formula un modelo de programación lineal entera-mixta que enfrenta el productor que busca maximizar su beneficio de la venta de su cosecha, considerando los costos de utilización de zonas de manejo, operación de cosecha como el personal y transporte. Consideremos, Z como el conjunto de potenciales zonas de manejo, S como el conjunto de puntos muestrales del suelo y T como el conjunto de periodos de cosecha. A continuación se presentan los parámetros,

$a_{s,z}$	: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto de muestra s pertenece a la potencial zona de manejo z y 0 en caso contrario.
N	: Número de puntos muestrales en la zona z .
n_z	: Número total de puntos de muestras en la potencial zona de manejo z .
σ_T^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
σ_z^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la potencial zona de manejo z .
α	: Nivel de homogeneidad requerido.
$b_{t,z}$	: Matriz binaria de ventana de tiempo. Coeficiente que toma valor 1 si en el periodo t , la zona z puede ser cosechada y 0 en otro caso.
p_z	: Producción total en la zona z .
st_t	: Salario en el periodo t para trabajadores temporales.
ss	: Salario para trabajadores estacionales.
ss^e	: Salario para trabajadores estacionales en horas extras.
pt	: Productividad del trabajador temporal por periodo.
ps	: Productividad del trabajador estacional por periodo.
ps^e	: Productividad del trabajador estacional por periodo en horas extras.
sw_{min}	: Número mínimo de trabajadores estacionales.
sw_{max}	: Número máximo de trabajadores estacionales.
tw_{max}	: Número máximo de trabajadores temporales.
trc_z	: Costo de viaje a la zona z .
vc	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
tr_z	: Tiempo de viaje a la zona z en horas.
trh_t	: Horas disponibles para realizar viajes durante el periodo t .
pv_t	: Precio de la cosecha en el periodo t pagado por el vendedor mayorista.

A continuación se presentan las variables de decisión,

q_z	: variable binaria que toma valor 1 si la zona z está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
x_t	: Cantidad a vender de cosecha en cada periodo t .
$X_{t,z}$	: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z .
SW	: Número de trabajadores estacionales.
SW^e	: Número de empleados estacionales que trabajan en horas extras en el periodo t .
TW_t	: Número de trabajadores temporales en el periodo t .
$NT_{t,z}$	: Número de viajes en el periodo t a la zona z .

El modelo (3.1)–(3.15) considera que la función objetivo maximiza los beneficios considerando la venta de la cosecha, los costos del proceso de cosecha, incluyendo los costos de mano de obra y los costos de transporte (3.1). Luego la restricción (3.2) corresponde a una restricción de factibilidad, permite asegurar que todo punto muestral se encuentre cubierto por la zona de manejo, cubriendo así todo el terreno. La restricción (3.3) limita superiormente a la cantidad de zonas de manejo por $|Z^*|$, que se obtiene a través del enfoque jerárquico. La restricción (3.4) asegura que se cumpla el nivel de homogeneidad requerido para las particiones en su versión lineal.

$$\text{máx} \quad \sum_{t \in T} pv_t x_t - \left(ssSW + \sum_{t \in T} ss^e SW_t^e + \sum_{t \in T} st_t TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z} \right) \quad (3.1)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.2)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.3)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.4)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_t^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (3.5)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.6)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.7)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.8)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.9)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq tr h_t, \quad \forall t \in T \quad (3.10)$$

$$x_t \leq \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z}, \quad \forall t \in T \quad (3.11)$$

$$SW_t^e \leq SW, \quad \forall t \in T \quad (3.12)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.13)$$

$$x_t, X_{t,z} \geq 0 \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.14)$$

$$SW, SW_t, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.15)$$

La restricción (3.5) corresponde a una restricción de factibilidad, garantiza que la cantidad cosechada en kilogramos no supere la productividad de los trabajadores. La restricción (3.6) indica que si la zona de manejo es cosechada, ésta puede ser cosechada por completo. La restricción (3.7) limita el número de trabajadores estacionales seguido de (3.8) que limita superiormente a la cantidad de trabajadores temporales. La restricción (3.9) asegura que la cantidad cosechada en kilogramos no puede exceder la capacidad de trasladado. La restricción (3.10) establece el número máximo de viajes y la restricción (3.11) limita la venta de la cosecha a la cantidad cosechada. La restricción (3.12) limita al número de trabajadores en horas a extras a sólo los contratados. La restricción (3.13) a (3.15) indican la naturaleza de las variables.

El modelo anteriormente expuesto es de carácter determinista, por lo que se puede extender a uno que considere la incertidumbre anteriormente mencionada. Para esto se incorpora un conjunto de escenarios posibles $\omega \in \Omega$, por lo que se propone un problema de programación estocástica con recurso de dos etapas. Ante la incorporación de la variabilidad consideraremos ahora la inclusión de los siguientes parámetros,

- $pv_{t,\omega}$: Precio de la cosecha en el período t pagado por el vendedor mayorista en el escenario ω .
- $p_{z,\omega}$: Producción total en la zona z en el escenario ω .
- Π_ω : Probabilidad asociada al escenario ω .

Considerando el precio de venta de la cosecha del productor según cada escenario que debe enfrentar, se incorpora la productividad del trabajador en horas extras y a su vez el incentivo económico correspondiente, además se extiende el rendimiento de la producción de cada zona y finalmente la probabilidad asociada a cada escenario. Como el modelo propuesto corresponde a problema de programación estocástica con recurso de dos etapas, las variables de decisión tanto para la primera etapa y de segunda se exponen a continuación,

■ Variables de decisión de primera etapa.

- q_z : variable binaria que toma valor 1 si la zona z está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
- SW : Número de trabajadores estacionales.
- TW_t : Número de trabajadores temporales en el periodo t .

- Variables de decisión de segunda etapa.

- $x_{t,\omega}$: Cantidad de cultivo cosechado adquirido por el mayorista en el período t en el escenario ω .
 $X_{t,z,\omega}$: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z , en el escenario ω .
 $NT_{t,z,\omega}$: Número de viajes en el periodo t a la zona z en el escenario ω .
 $SW_{t,\omega}^e$: Número de empleados estacionales que trabajan en horas extras en el período t en el escenario ω .

A continuación se presenta el problema de programación lineal entera-mixta con recurso de dos etapas en su forma determinista equivalente (3.16)–(3.30),

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left(\sum_{t \in T} pv_{t,\omega} x_{t,\omega} - \left(ssSW + \sum_{t \in T} ss^e SW_{t,\omega}^e + \sum_{t \in T} st_t TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) \right) \quad (3.16)$$

$$s.t. \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.17)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.18)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.19)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_{t,\omega}^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.20)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq p_{z,\omega} \cdot q_z, \quad \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.21)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.22)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.23)$$

$$X_{t,z,\omega} \leq \nu c \cdot NT_{t,z,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.24)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z,\omega} \leq trh_t, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.25)$$

$$x_{t,\omega} \leq \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega}, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.26)$$

$$SW_{t,\omega}^e \leq SW, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.27)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.28)$$

$$x_{t,\omega}, X_{t,z,\omega} \geq 0 \quad \forall t \in T, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.29)$$

$$SW, SW_{t,\omega}^e, TW_t, NV_{t,z,\omega} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.30)$$

El modelo considera que la función objetivo maximiza el beneficio esperado considerando la venta de la cosecha, los costos del proceso de cosecha, incluyendo los costos de mano de obra y de transporte (3.16). Luego la restricción (3.17) corresponde a una restricción de factibilidad, permite asegurar que todo punto muestral se encuentre cubierto por la zona de manejo, cubriendo así todo el terreno. La restricción (3.18) limita superiormente a la cantidad de zonas de manejo por $|Z^*|$. La restricción (3.19) asegura que se cumpla el nivel de homogeneidad requerido para las particiones en su versión lineal. La restricción (3.20) corresponde a una restricción de factibilidad, garantiza que la cantidad cosechada no supere la productividad de los trabajadores y aquellos que dedican horas extras. La restricción (3.21) indica que si la zona de manejo es cosechada, ésta puede ser cosechada por completo. La restricción (3.22) limita el número de trabajadores estacionales seguido de (3.23) que limita superiormente a la cantidad de trabajadores temporales. La restricción (3.24) asegura que la cantidad cosechada no pueda exceder la capacidad de traslado. La restricción (3.25) establece el número máximo de viajes. La restricción (3.26) limita la venta de cosecha a la cantidad cosechada. La restricción (3.27) limita al número de trabajadores en horas a extras a sólo los contratados. De (3.28) a (3.30) indican la naturaleza de las variables.

3.3. Problema del vendedor mayorista

En la formulación del problema programación lineal que enfrenta el vendedor mayorista busca minimizar la demanda insatisfecha para así enfrentar la demanda agregada de los clientes considerando la oferta que entrega el productor. La decisión del vendedor mayorista consta en cuanto comprar al productor y cuanto comprar a un externo para suplir la demanda insatisfecha. Consideremos T como el conjunto de períodos, Z como el conjunto de potenciales zonas de manejo, pc_t como el costo de comprar a un externo y $X_{t,z}^*$ como la cantidad cosechada en cada zona de manejo. Las decisión de compra al productor y a un externo se representan por x_t y y_t respectivamente. La formulación corresponde a,

$$\text{mín} \quad \sum_{t \in T} pc_t \cdot y_t \quad (3.31)$$

$$s.t. \quad x_t + y_t = d_t, \quad \forall t \in T \quad (3.32)$$

$$x_t \leq \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z}^*, \quad \forall t \in T \quad (3.33)$$

$$x_t, y_t \geq 0, \quad \forall t \in T \quad (3.34)$$

En donde la función objetivo (3.31) corresponde a minimizar los costos de demanda insatisfecha, seguido de una restricción de cumplimiento de demanda (3.32) y el límite de compra al productor en la restricción (3.33). Finalmente (3.34) corresponde a la naturaleza de las variables.

Al incorporar la variabilidad, $\omega \in \Omega$, a la formulación del problema del Vendedor Mayorista, las decisiones de compra se adaptan a cada escenario. Cabe destacar que el Vendedor mayorista enfrenta el problema con información perfecta, puesto que conoce las cantidades disponibles que ofrece el productor y además el comportamiento de la demanda.

3.4. Propuesta binivel

El modelo de programación binivel propuesto busca de apoyar la toma de decisiones desde la perspectiva de la agricultura de precisión en la planificación de la cosecha y su proceso de distribución en el contexto de una cadena de suministro agrícola, integrando el problema de la delineación de las zonas de gestión con la misma planificación. En la formulación del modelo, el líder se presenta como el productor que se enfrenta a una extensión del problema de la planificación y programación de la cosecha integrando la delineación de las zonas de manejo con la planificación de la cosecha, y el seguidor como el mayorista que se enfrenta a un problema de requerimiento de demanda, que busca minimizar el costo de la demanda insatisfecha considerando la oferta proporcionada por el productor.

En lo que sigue se presenta el modelo de programación binivel seguido del la extensión estocástica.

3.4.1. Programación binivel

3.4.1.1 Notación

Conjuntos

- T : Conjunto de períodos.
- Z : Conjunto de potenciales zonas de manejo.
- S : Conjunto de puntos muestrales del suelo.

Parámetros

- $a_{s,z}$: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto de muestra s pertenece a la potencial zona de manejo z y 0 en caso contrario.
- N : Número de puntos muestrales en la zona z .
- n_z : Número total de puntos de muestras en la potencial zona de manejo z .
- σ_T^2 : Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
- σ_z^2 : Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la potencial zona de manejo z .
- α : Nivel de homogeneidad requerido.
- $b_{t,z}$: Matriz binaria de ventana de tiempo. Coeficiente que toma valor 1 si en el periodo t , la zona z puede ser cosechada y 0 en otro caso.
- p_z : Producción total en la zona z .
- st_t : Salario en el periodo t para trabajadores temporales.
- ss : Salario para trabajadores estacionales.

ss^e	: Salario para trabajadores estacionales en horas extras.
pt	: Productividad del trabajador temporal por periodo.
ps	: Productividad el trabajador estacional por periodo.
ps^e	: Productividad del trabajador estacional por periodo en horas extras.
sw_{min}	: Número mínimo de trabajadores estacionales.
sw_{max}	: Número máximo de trabajadores estacionales.
tw_{max}	: Número máximo de trabajadores temporales.
trc_z	: Costo de viaje a la zona z .
vc	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
tr_z	: Tiempo de viaje a la zona z en horas.
trh_t	: Horas disponibles para realizar viajes durante el periodo t .
pv	: Precio de la cosecha pagado por el vendedor mayorista.
pc	: Costo de comprar a un externo.
D	: Demanda agregada que enfrenta el vendedor mayorista.

Variables de decisión del líder

q_z	: Variable binaria que toma valor 1 si la zona z está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
$X_{t,z}$	: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z .
SW	: Número de trabajadores estacionales.
SW_t^e	: Número de empleados estacionales que trabajan en horas extras en el período t
TW_t	: Número de trabajadores temporales en el periodo t .
$NT_{t,z}$	: Número de viajes en el periodo t a la zona z .

Variables de decisión del seguidor

Q	: Cantidad a comprar al productor.
Y	: Cantidad a comprar a un externo.

3.4.1.2 Problema de programación lineal binivel

El problema de programación binivel para la coordinación de la cadena de suministro entre los dos eslabones, productor y vendedor mayorista, se presenta a continuación (3.35)–(3.52),

$$\max \quad pv \cdot Q - \left(ss \cdot SW + \sum_{t \in T} ss^e \cdot SW_t^e + \sum_{t \in T} st_t \cdot TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \right) \quad (3.35)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.36)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.37)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.38)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_t^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (3.39)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.40)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.41)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.42)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.43)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (3.44)$$

$$SW_t^e \leq SW, \quad \forall t \in T \quad (3.45)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.46)$$

$$SW, SW_t, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.47)$$

$$X_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z \quad (3.48)$$

$$\min \quad pc \cdot Y \quad (3.49)$$

$$s.t. \quad Q + Y = D \quad (3.50)$$

$$Q \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \quad (3.51)$$

$$Q, Y \geq 0 \quad (3.52)$$

El problema descrito (3.35) a (3.48) corresponden al problema del líder. El problema descrito en (3.49) a (3.52) corresponde al problema del seguidor. Para el líder, posee como función objetivo (3.35) que busca maximizar el beneficio del productor considerando la venta de la cosecha, los costos del proceso de cosecha y transporte, luego la restricción (3.36) corresponde a una restricción de factibilidad, permitiendo asegurar los puntos muestrales se encuentren cubiertos por la zona de manejo, la restricción (3.37) limita superiormente a la cantidad de zonas de manejo por $|Z^*|$, la restricción (3.38) que permite el cumplimiento de un nivel de homogeneidad requerido para las particiones, la restricción (3.39) corresponde a una restricción de factibilidad, garantiza que la cantidad cosechada no supere la productividad de los trabajadores, la restricción (3.40) indica si la zona de manejo es cosechada, ésta puede ser cosechada por completo, la restricción (3.41) limita el número de trabajadores estacionales, luego la restricción (3.42) limita superiormente a la cantidad de trabajadores temporales, la restricción (3.43) asegura que la cantidad cosechada no exceda la capacidad de traslado, la restricción (3.44) restringe el número de viajes, la restricción (3.45) limita al número de trabajadores en horas a extras a sólo los contratados y (3.46) a (3.48) representan la naturaleza de las variables. Para el seguidor, posee como función objetivo (3.49) que busca minimizar el costo de demanda insatisfecha (i.e. a comprar a un tercero para suplir la demanda insatisfecha), enfrentando dos restricciones, la restricción (3.50) corresponde al cumplimiento de la demanda y la restricción (3.51) limita la compra al productor en base a lo cosechado y (3.52) corresponde a la naturaleza de las variables.

En lo que sigue se presenta la propuesta de programación binivel estocástico, la particularidad el modelo propuesto corresponde a un problema de dos etapas para el líder y el seguidor enfrenta un problema de un etapa, como se expone a continuación,

$$\begin{aligned}
 & \min_{x, x_\omega} \quad F_1(x) + \mathbb{E}_\omega[F_2(x_\omega, y_\omega, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad G_1(x) \leq 0 \\
 & \quad \quad G_2(x_\omega, x, \xi^\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega \\
 & \min_{y_\omega} \quad \mathbb{E}_\omega[f_1(y_\omega, \xi^\omega)] \\
 & s.t \quad g_1(x_\omega, y_\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega \\
 & \quad \quad g_2(y_\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.4.2. Programación binivel estocástico

La propuesta binivel estocástica corresponde una extensión del problema anterior al considerar un vector aleatorio $\omega \in \Omega$ que incluye rendimientos, precios y demandas futuras a través de escenarios posibles. Se propone un problema de programación lineal binivel estocástico en donde el líder enfrenta un problema de programación estocástica con recurso de dos etapas y el seguidor un problema lineal de una etapa. En lo que sigue se presentan los conjuntos, parámetros y variables de decisión.

3.4.2.1 Notación

Conjuntos

T	: Conjunto de períodos.
Z	: Conjunto de potenciales zonas de manejo.
S	: Conjunto de puntos muestrales del suelo.
Ω	: Conjunto de escenarios.

Parámetros

$a_{s,z}$	: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto de muestra s pertenece a la potencial zona de manejo z y 0 en caso contrario.
N	: Número de puntos muestrales en la zona z .
n_z	: Número total de puntos de muestras en la potencial zona de manejo z .
σ_T^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
σ_z^2	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la potencial zona de manejo z .
α	: Nivel de homogeneidad requerido.
$b_{t,z}$	: Matriz binaria de ventana de tiempo. Coeficiente que toma valor 1 si en el periodo t , la zona z puede ser cosechada y 0 en otro caso.
$p_{z,\omega}$	: Producción total en la zona z en el escenario ω .
st_t	: Salario en el periodo t para trabajadores temporales.
ss	: Salario para trabajadores estacionales.
pt	: Productividad del trabajador temporal por periodo.
ps	: Productividad el trabajador estacional por periodo.
sw_{min}	: Número mínimo de trabajadores estacionales.
sw_{max}	: Número máximo de trabajadores estacionales.
tw_{max}	: Número máximo de trabajadores temporales.
trc_z	: Costo de viaje a la zona z .
vc	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
tr_z	: Tiempo de viaje a la zona z en horas.
trh_t	: Horas disponibles para realizar viajes durante el periodo t .

pv_ω	: Precio de la cosecha pagado por el vendedor mayorista en el escenario ω .
pc_ω	: Costo de comprar a un externo en el escenario ω .
ps^e	: Productividad del trabajador estacional por periodo en horas extras.
ss^e	: Salario para trabajadores estacionales en horas extras.
D_ω	: Demanda agregada que enfrenta el vendedor mayorista en el escenario ω .
Π_ω	: Probabilidad asociada al escenario ω .

Variables de decisión del líder

■ Variables de decisión de primera etapa.

q_z	: Variable binaria que toma valor 1 si la zona z está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
SW	: Número de trabajadores estacionales.
TW_t	: Número de trabajadores temporales en el periodo t .

■ Variables de decisión de segunda etapa.

$X_{t,z,\omega}$	: Total de kilogramos cosechados en el periodo t , en la zona z , en el escenario ω .
$SW_{t,\omega}^e$	: Número de empleados estacionales que trabajan en horas extras en el período t en el escenario ω .
$NT_{t,z,\omega}$	: Número de viajes en el periodo t a la zona z en el escenario ω .

Variables de decisión del seguidor

Q_ω	: Cantidad a comprar al productor en el escenario ω .
Y_ω	: Cantidad a comprar a un externo en el escenario ω .

3.4.2.2 Problema de programación lineal binivel estocástico

El problema de programación lineal binivel entero mixto estocástico para la coordinación de la cadena de suministro entre los dos eslabones, productor y vendedor mayorista, se presenta a continuación (3.54)–(3.71),

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left(pv_{\omega} Q - ssSW - \sum_{t \in T} \left(ss^e SW_{t,\omega}^e + \sum_{t \in T} st_t TW_t + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) \right) \quad (3.54)$$

$$s.t. \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.55)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.56)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.57)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_{t,\omega}^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.58)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq p_{z,\omega} \cdot q_z, \quad \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.59)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.60)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.61)$$

$$X_{t,z,\omega} \leq \nu_c \cdot NT_{t,z,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.62)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z,\omega} \leq trh_t, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.63)$$

$$SW_{t,\omega}^e \leq SW, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.64)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.65)$$

$$SW, TW_{t,\omega}, NT_{t,z,\omega} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.66)$$

$$X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.67)$$

$$\min \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} (pc_{\omega} \cdot Y_{\omega}) \quad (3.68)$$

$$s.t. \quad Q_{\omega} + Y_{\omega} = D_{\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.69)$$

$$Q_{\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.70)$$

$$Q_{\omega}, Y_{\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.71)$$

La extensión del modelo considera el comportamiento incierto los rendimientos de los cultivos, precios y demandas futuras mediante el uso de un conjunto finito de escenarios $\omega \in \Omega$. El problema descrito en (3.54)–(3.67) corresponden al problema del líder. El problema descrito en (3.68)–(3.71) corresponde al problema del seguidor. Para el líder, posee como función objetivo (3.54) que busca maximizar el beneficio esperado considerando la venta de la cosecha, los costos del proceso de cosecha, incluyendo los costos de mano de obra y de transporte, luego la restricción (3.55) corresponde a una restricción de factibilidad, permite asegurar que todo punto muestral se encuentre cubierto por la zona de manejo, cubriendo así todo el terreno, la restricción (3.56) limita superiormente a la cantidad de zonas de manejo por $|Z^*|$, la restricción (3.57) que permite el cumplimiento de un nivel de homogeneidad requerido para las particiones, la restricción (3.58) corresponde a una restricción de factibilidad, garantiza que la cantidad cosechada no supere la productividad de los trabajadores y aquellos que dedican horas extras, la restricción (3.59) indica si la zona de manejo es cosechada, ésta puede ser cosechada por completo, la restricción (3.60) limita el número de trabajadores estacionales luego la restricción (3.61) limita superiormente a la cantidad de trabajadores temporales, la restricción (3.62) asegura que la cantidad cosechada no exceda la capacidad de traslado, la restricción (3.63) restringe el número de viajes, la restricción (3.64) limita al número de trabajadores en horas a extras a sólo los contratados y (3.65)–(3.67) representan la naturaleza de las variables. Para el seguidor, posee como función objetivo (3.68) que busca minimizar el costo esperado de demanda insatisfecha, enfrentando dos restricciones, la restricción (3.69) corresponde al cumplimiento de la demanda, la restricción (3.70) limita la compra al productor en base a lo cosechado según en cada escenario y (3.71) representan la naturaleza de las variables. Cabe destacar que el Vendedor mayorista enfrenta el problema con información perfecta, puesto que conoce las cantidades disponibles que ofrece el productor y además el comportamiento de la demanda.

3.5. Reformulación

En lo que sigue se revisara la reformulación del problema (3.35)–(3.52). Primero se debe llevar a un problema de un solo nivel utilizando las condiciones de (2.23), este nuevo problema posee la dificultad de ser un problema no-lineal dadas las restricciones de complementariedad, con ello se provee una nueva reformulación abordando a aquellas restricciones no lineales como restricciones enteras mixtas (Fortuny-Amat and McCarl, 1981).

3.5.1. Aplicación del enfoque Kunh-Tucker

El modelo binivel propuesto en (3.35)–(3.52) se puede reformular como un problema de un solo nivel empleando las condiciones de KKT. Consideremos el problema del seguidor,

$$\text{mín } pc \cdot Y \quad (3.72)$$

$$\text{s.t. } Q + Y = D \quad (3.73)$$

$$Q \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{tz} \quad (3.74)$$

$$Q \geq 0 \quad (3.75)$$

$$Y \geq 0 \quad (3.76)$$

A las restricciones del problema del seguidor (3.73)–(3.76) se asocian los siguientes multiplicadores, λ , β , γ , δ respectivamente. Con ello se obtiene las siguientes condiciones suficientes y necesarias de KKT (3.77)–(3.82),

$$\lambda + \beta - \gamma = 0 \quad (3.77)$$

$$pc + \lambda - \delta = 0 \quad (3.78)$$

$$\beta \cdot \left(\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{tz} - Q \right) = 0 \quad (3.79)$$

$$\gamma \cdot Q = 0 \quad (3.80)$$

$$\delta \cdot Y = 0 \quad (3.81)$$

$$\beta, \gamma, \delta \geq 0 \quad (3.82)$$

Así la reformulación corresponde ahora a un Problema de Programación Entero–Mixto No–Lineal (3.83)–(3.102),

$$\text{máx} \quad pvQ - \left(ssSW + \sum_{t \in T} ss^e SW_t^e + \sum_{t \in T} st_t TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z} \right) \quad (3.83)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.84)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.85)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.86)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_t^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (3.87)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.88)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.89)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.90)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.91)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (3.92)$$

$$SW_t^e \leq SW, \quad \forall t \in T \quad (3.93)$$

$$Q + Y = D \quad (3.94)$$

$$Q \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \quad (3.95)$$

$$\lambda + \beta - \gamma = 0 \quad (3.96)$$

$$pc + \lambda - \delta = 0 \quad (3.97)$$

$$\beta \cdot \left(\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} - Q \right) = 0 \quad (3.98)$$

$$\gamma \cdot Q = 0 \quad (3.99)$$

$$\delta \cdot Y = 0 \quad (3.100)$$

$$\beta, \gamma, \delta \geq 0, \quad Q, Y \geq 0, \quad X_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z \quad (3.101)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z, \quad SW, SW_t^e, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.102)$$

Las condiciones de KKT se ven reflejadas en las restricciones (3.96)–(3.101). La dificultad se presenta en aquellas restricciones no-lineales. A continuación se presenta una reformulación de modo tal que aquellas restricciones no-lineales pasen a ser restricciones enteras mixtas.

3.5.2. Reformulación MILP

Se observa que las restricciones de complementariedad (3.98)–(3.100) se pueden representar como restricciones enteras-mixtas (Fortuny-Amat and McCarl, 1981), para ello se debe introducir ϕ, φ, ψ variables binarias y un parámetro muy grande M , big- M , lo anterior muestra a continuación,

$$\beta \cdot \left(\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} - Q \right) = 0 \implies \begin{cases} \beta \leq M \cdot \phi \\ \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} - Q \leq M \cdot (1 - \phi) \end{cases} \quad (3.103)$$

$$\gamma \cdot Q = 0 \implies \begin{cases} \gamma \leq M \cdot \varphi \\ Q \leq M \cdot (1 - \varphi) \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\delta \cdot Y = 0 \implies \begin{cases} \delta \leq M \cdot \psi \\ Y \leq M \cdot (1 - \psi) \end{cases} \quad (3.105)$$

Ahora es posible llevar el problema programación entero-mixto no-lineal por uno de programación entera-mixta a través de estas nuevas restricciones. A continuación se presenta la nueva reformulación (3.106)–(3.130),

$$\text{máx} \quad pvQ - \left(ssSW + \sum_{t \in T} ss^e SW_t^e + \sum_{t \in T} st_t TW_t + \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z} \right) \quad (3.106)$$

$$s.t. \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.107)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.108)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1)\sigma_z^2 + (1 - \alpha)\sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha)\sigma_T^2 N \quad (3.109)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_t^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (3.110)$$

$$\sum_{t \in T} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.111)$$

$$sw_{min} \leq SW \leq sw_{max} \quad (3.112)$$

$$TW_t \leq tw_{max}, \quad \forall t \in T \quad (3.113)$$

$$X_{t,z} \leq \nu c \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.114)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (3.115)$$

$$SW_t^e \leq SW, \quad \forall t \in T \quad (3.116)$$

$$Q + Y = D \quad (3.117)$$

$$Q \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \quad (3.118)$$

$$\lambda + \beta - \gamma = 0 \quad (3.119)$$

$$pc + \lambda - \delta = 0 \quad (3.120)$$

$$\beta \leq M \cdot \phi \quad (3.121)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} - Q \leq M \cdot (1 - \phi) \quad (3.122)$$

$$\gamma \leq M \cdot \varphi \quad (3.123)$$

$$Q \leq M \cdot (1 - \varphi) \quad (3.124)$$

$$\delta \leq M \cdot \psi \quad (3.125)$$

$$Y \leq M \cdot (1 - \psi) \quad (3.126)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.127)$$

$$SW, SW_t^e, TW_t, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.128)$$

$$\beta, \gamma, \delta \geq 0, \quad Q, Y \geq 0, \quad X_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.129)$$

$$\phi, \varphi, \psi \in \{0, 1\} \quad (3.130)$$

Esta reformulación permite abordar el problema de programación lineal binivel (3.35)–(3.52) como un problema de un solo nivel con la característica de que corresponde a un problema de programación de enteros mixtos. De igual forma es posible expresar el problema de programación binivel estocástico (3.54)–(3.71) como un problema de programación de enteros mixtos.

4. Caso de Estudio

4.1. Descripción

En la presente sección se abordaran los modelos propuestos para 10 instancias. Primero, se evalúa el beneficio de coordinar la cadena de suministro a través del modelo binivel (3.35)–(3.52), comparando el modelo con un esquema esquema independiente. En este último esquema, en lugar del problema binivel se resolvieron dos modelos diferentes, uno para el productor, que maximiza sus beneficios cosechando toda su producción, y otro para el vendedor mayorista, que minimiza la demanda insatisfecha tomando la oferta del productor conseguida como una oferta fija. Luego, revelar la importancia de la incorporación de parámetros bajo incertidumbres en el modelo binivel. Por último, se presenta una breve discusión del término big- M en el método de solución de los modelos binivel.

En todas las instancias se implementaron en el lenguaje de programación algebraica AMPL 3.6.4, acompañado del solver CPLEX 12.10.0.0. en un Mac Mini con procesador Apple M1 8-core 3.2 GHz con 8 GB de RAM disponible.

4.2. Instancias

Se resolvieron diez instancias, con datos tomados del trabajo realizado por [Araneda and Alborno \(2019\)](#) y debidamente extendidos incorporando precios de venta acorde a los informados por la Oficina de Estudios y Políticas Agrarias (ODEPA) y remuneraciones acorde a la Ley vigente en Chile. Además, se ampliaron las instancias para incluir rendimientos, precios y demandas futuras bajo incertidumbre, a través de tres escenarios posibles.

A continuación se detallan las principales características de las instancias a utilizar. Corresponde a la información de un predio ubicado en la zona centro sur de Chile para la cosecha de uva, para la instancia 1 se considera una extensión de 3,2 hectáreas hasta una extensión de 10,4 hectáreas para la instancia 10. El indicador utilizado en el predio corresponde al Normalized Difference Vegetation Index (NDVI), este indicador cuantifica la vegetación con valores que van desde el -1 a 1, el valor más bajo corresponde a gua

nieve y el más alto para hojas verdes más densas. El indicador NDVI fue registrado en el mes de Diciembre, tomando valores desde 0,7641 y 0,7718. Estas instancias poseen desde 80 hasta 260 puntos muestrales homogéneamente distribuidos, cada uno de ellos con una dimensión de $20[m] \times 20[m]$.

El conjunto de zonas potenciales se obtuvo a través del algoritmo expuesto en [Cid-Garcia et al. \(2013\)](#), en que para la instancia 1 le corresponde 1980 zonas potenciales, hasta 19.035 zonas potenciales para la instancia 10. Cabe destacar que para las instancias 1, 2, 3, 4 y 5 se considera un proceso de cosecha es de 14 días y una demanda constante para la cinco instancias mencionadas, para las demás instancias se considera una duración de 21 días y otra demanda constante más elevada, esto se debe a la extensión extensión del predio en cada instancia.

El rendimiento de cada potencial zona de manejo está dado por el indicador NDVI que se encuentra dentro de cada punto de muestreo en cada zona. Cuando un valor más alto de NDVI se traduce en un mayor rendimiento, y en tiempos de cosecha más largos, por otro lado, para valores más bajos, se esperan rendimientos más bajos, y a su vez un tiempo de cosecha más corto.

En la Tabla [4.1](#), muestra principalmente el tamaño de cada modelo y el tiempo de resolución necesario para alcanza la solución óptima de cada instancia. La primera columna introduce el número de instancias. La segunda columna muestra el número de puntos de muestra en el campo y la tercera columna el número total de zonas de manejo rectangulares. Las cuarta, quinta y sexta columna presenta la información del modelo de programación binivel, y las columnas séptima, octava y novena del modelo de programación binivel estocástico de dos etapas, incluyendo el número de variables, las restricciones y los tiempos de resolución.

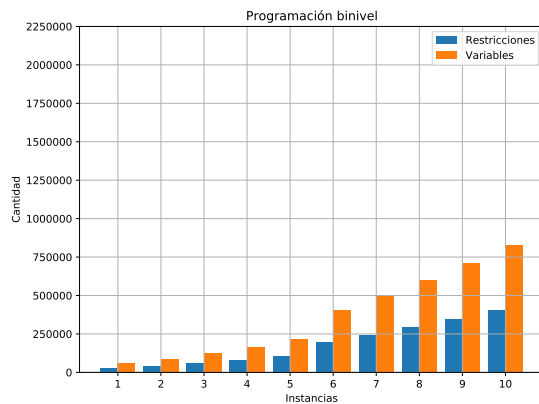
Observe que el tiempo de resolución de cada instancia aumenta a medida que avanza el número de instancias. Esto se debe al aumento de los puntos de muestreo y, en consecuencia, al aumento del número de zonas de gestión potenciales y del tamaño del modelo. La Figura [4.1](#) muestra el aumento del número de variables y restricciones de ambos programas de dos niveles. Al comparar ambos gráficos, se observa que la tasa de crecimiento del número de variables es mayor que la de las restricciones. Obsérvese que se han resuelto

Tabla 4.1: Información sobre el número de variables, las restricciones y el tiempo de resolución de cada instancia de ambos modelos.

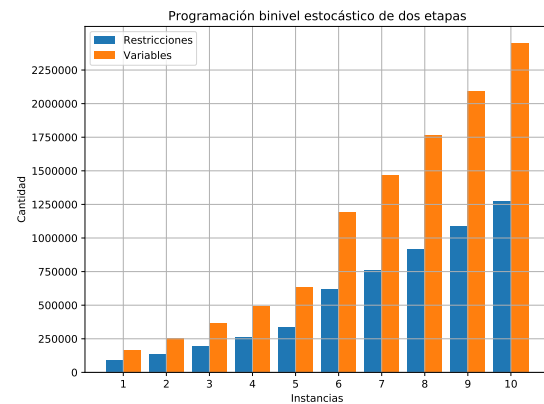
Instance	$ S $	$ Z $	Programación binivel			Programación binivel Estocástico de dos etapas		
			# Variables	# Restricciones	Tiempo[s]	# Variables	# Restricciones	Tiempo[s]
1	80	1.980	57.458	27.870	0,97	168.384	89.354	2,03
2	100	3.025	87.763	42.520	0,75	257.209	136.399	1,96
3	120	4.290	124.448	60.250	1,11	364.734	193.344	12,50
4	140	5.775	167.513	81.060	2,89	490.959	260.189	17,37
5	160	7.480	216.958	104.950	2,91	635.884	336.934	75,20
6	180	9.405	404.467	197.783	16,62	1.194.547	621.154	78,54
7	200	11.550	496.702	242.848	18,44	1.466.962	762.744	122,83
8	220	13.915	598.397	292.533	125,19	1.767.317	918.854	195,74
9	240	16.500	709.552	346.838	187,27	2.095.612	1.089.484	348,16
10	260	19.305	830.167	405.763	4.277,19	2.451.847	1.274.634	46,76

algunas instancias limitadas porque una enumeración completa de las posibles zonas de gestión crece rápidamente con el aumento de los puntos de muestreo.

Figura 4.1: Crecimiento del número de variables y restricciones a medida que aumentan las instancias. (a) Programación binivel, (b) Programación binivel estocástico de dos etapas.



(a) Número de variables y restricciones para la programación binivel



(b) Número de variables y restricciones para la programación binivel Estocástico de dos etapas

En lo que sigue se presentan los resultados computacionales, además de un breve discusión asociada.

4.3. Resultados y Discusión

La Tabla 4.2 muestra el beneficio del productor, el costo del productor y el costo del vendedor mayorista, usando la programación binivel (3.35)–(3.52) y el esquema independiente para todas las instancias.

Tabla 4.2: Resultados de la programación binivel y del esquema independiente

Instance	Beneficio del Productor		Costo del Productor		Costo del Mayorista	
	Binivel	Ind.	Binivel	Ind.	Binivel	Ind.
1	14.509.000	14.502.900	7.206.330	7.214.130	25.912.900	25.911.100
2	16.934.800	13.796.600	7.946.170	13.348.400	22.367.400	19.831.700
3	23.448.100	23.443.800	9.105.450	9.124.850	13.774.200	13.757.200
4	24.899.200	24.465.100	11.598.200	13.521.900	9.357.040	7.688.660
5	29.491.500	29.238.600	13.305.400	14.168.400	2.301.600	1.618.260
6	35.831.000	35.814.600	12.989.400	13.012.800	20.672.300	20.664.400
7	39.554.800	39.498.500	14.597.400	14.747.300	14.700.700	14.595.700
8	44.193.400	44.190.200	15.465.800	15.475.200	8.533.000	8.525.860
9	48.555.000	48.537.800	16.506.300	16.541.300	2.482.480	2.462.460
10	49.392.800	48.300.800	17.885.000	18.976.900	0	0

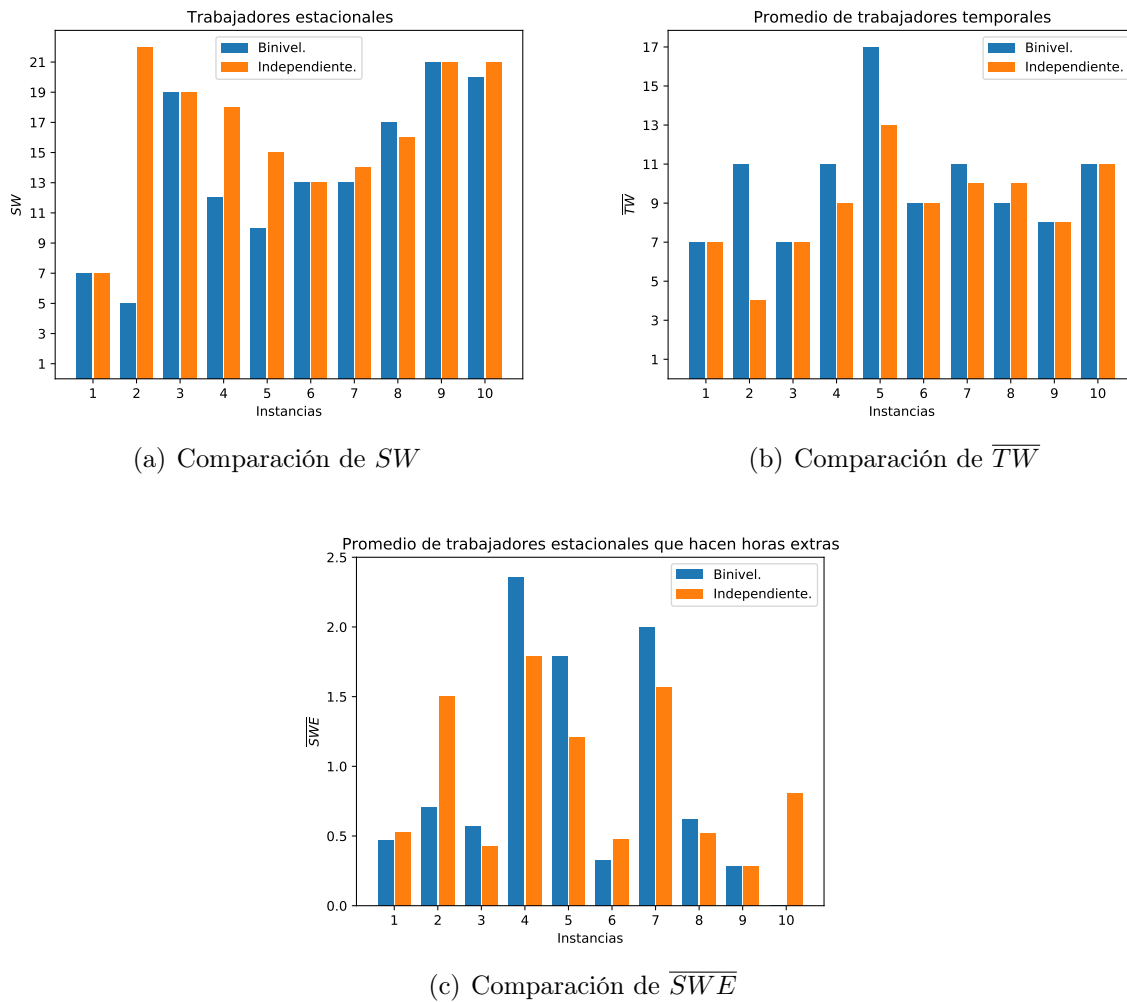
(Fuente: Elaboración Propia)

Los resultados muestran en todos los casos que el beneficio del productor obtenido a partir del modelo de programación binivel son mejores que los conseguidos en un esquema independiente. Lo mismo ocurre si se considera el costo del productor, en cambio el los costos del mayorista aumenta. El beneficio del productor aumenta un 3 % en promedio, mientras que el costo del mayorista aumenta un 9 % en promedio. Esto se debe que la programación binivel puede gestionar de mejor manera los costos de operación de cosecha al coordinar las decisiones del productor y del mayorista. Lo anterior se corrobora al observar los costos del productor, que son menores en la programación binivel, ya que en el esquema independiente el productor no posee conocimiento de la demanda percibida por el mayorista. Por otro lado, el productor es que el se ve mas beneficiado puesto que es el líder, y el mayorista toma las decisiones del productor, lo que se refleja en un mayor costo para el productor. En particular en la instancia 10 el costo del productor es cero. Esto se debe a dos razones: en primer lugar, para las últimas cinco instancias considera una demanda constante y, en segundo lugar, que la instancia 10 tiene una superficie de

cosecha mayor que las anteriores, por lo que el productor puede abastecer la demanda que enfrenta el mayorista.

En la figura 4.2 compara la cantidad de trabajadores requeridos obtenidos a partir de la programación binivel y el esquema independiente. En (a) compara la cantidad de trabajadores estacionales, en (b) el promedio de trabajadores temporales por día y en (c) el promedio de trabajadores que dedican horas extras por día.

Figura 4.2: Gestión de personal de la programación binivel y del esquema independiente



Se observa que la gestión de personal del productor empleando el uso de la programación binivel es distinta al empleado por un esquema independiente. Esto se debe principalmente que el plan de cosecha empleado por la programación binivel es distinto al del esquema independiente.

La Tabla 4.3 muestra los resultados de la programación binivel estocástica de dos etapas (3.54)–(3.71). La primera columna presenta el número de instancia, la segunda el beneficio óptimo del productor y la tercera el costo del mayorista. La cuarta columna presenta la medida estocástica $EVPI$ y la última el porcentaje que el $EVPI$ representa con respecto al valor del modelo programación binivel estocástico para cada instancia.

Tabla 4.3: Resultados del modelo de programación binivel estocástico de dos etapas.

Instance	Beneficio del Productor	Costo del Mayorista	$EVPI$	$EVPI$ en %
1	13,435,400	25,309,900	605,773	4.5 %
2	15,480,900	22,187,700	738,550	4.8 %
3	21,848,500	13,692,700	549,850	2.5 %
4	23,360,200	9,108,320	941,225	4.0 %
5	26,887,200	3,110,210	1,357,300	5.0 %
6	33,271,400	20,099,900	1,530,050	4.6 %
7	36,745,100	14,599,900	1,576,650	4.3 %
8	40,892,200	8,697,510	1,964,225	4.8 %
9	45,040,600	2,727,090	1,864,775	4.1 %
10	45,320,500	857,925	2,092,073	4.6 %

(Fuente: Elaboración Propia)

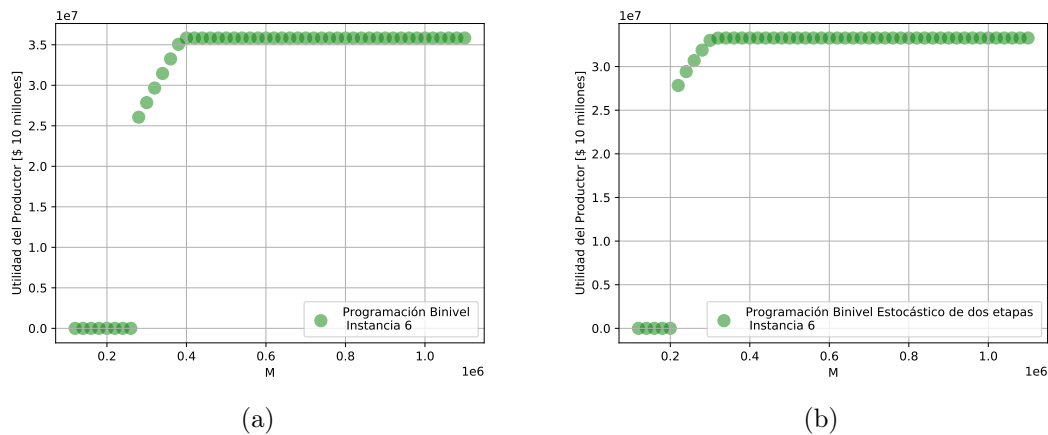
Al incorporar parámetros bajo incertidumbre basados en posibles escenarios, se observa que el modelo estocástico proporciona un valor óptimo menor que le determinista subyacente, para problemas de maximización. Este resultado se debe a que la solución estocástica debe ser capaz de adaptarse a diferentes escenarios al mismo tiempo que proporciona las mejores soluciones.

Hasta el momento se ha mostrado la diferencia de resultados al resolver un modelo de programación estocástica de dos niveles, en lo que sigue se debe verificar la importancia de resolver un modelo estocástico. En la Tabla 4.3 se muestra el Valor Esperado de la Información Perfecta, y el porcentaje que representa el $EVPI$ respecto al valor de la programación binivel estocástico de dos etapas. El $EVPI$ corresponde a la máxima cantidad que un tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar a cambio de una información completa y precisa sobre el futuro (Birge and Louveaux, 2011). Se observa que es importante la incorporación de parámetros bajo incertidumbre (i.e. utilizar modelos estocásticos) ya que a medida que avanzamos en las instancias el valor del $EVPI$ crece. Es importante

mencionar que un modelo estocástico tendrá un valor menor que un modelo determinista en un problema de maximización como se muestra en la Tabla 4.2. Por lo tanto, existe una disposición a pagar por toda la información futura. Es importante señalar que el *EVPI* corresponde en promedio un 4,3 % con respecto al valor de la función objetivo de la programación estocástica binivel de dos etapas.

En la resolución de ambos modelos binivel, se deben reducir a un problema de un solo nivel empleando las condiciones de KKT. A continuación, una reformulación de aquellas restricciones de complementariedad, que son restricciones no lineales, introduciendo variables binarias y un término big- M , obteniendo así un modelo de programación lineal de enteros mixtos, como se puede ver en la sección 3.5.2. Esta reformulación depende del término big- M que no puede ser seleccionado de forma arbitraria ya que puede generar problemas para obtener la solución óptima. En la Figura 4.3 muestra la variación del término big- M , en la instancia 6, mostrando la utilidad del productor con esta variación para los modelos de programación binivel y de programación binivel estocástico de dos etapas, respectivamente.

Figura 4.3: Comparación de resultados con una variación del término big- M . En (a) y (b), muestra los valores óptimos de ambos modelos.



Se observa que una elección pequeña del término big- M puede llevar a un problema infactible como se puede observar en los primeros valores del término big- M en la Figura 4.3. Además, se observa que existe un rango de valores para el término big- M en el que se obtienen valores subóptimos del problema como se puede observar en ambos modelos.

Entonces, una elección más grande del término $\text{big-}M$ resulta una solución estable, asegurando así un óptimo para ambos modelos de programación binivel. Por lo tanto, la elección del término $\text{big-}M$ no puede ser arbitraria. En consecuencia, se adoptó un valor de $6 \cdot 10^5$ para el término $\text{big-}M$ en todas las instancias en ambos modelos de programación binivel.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se propone abordar un problema de de planificación de cosecha bajo incertidumbre en una cadena de suministro agrícola jerárquica, que integra la definición de zonas de manejo para la cosecha y la distribución de producto a un mayorista. El problema se planteó como un modelo de programación estocástico binivel. Empleando una reformulación del modelo binivel a un modelo de un solo nivel a través de las condiciones de KKT y ajustando aquellas restricciones no lineales a restricciones enteras mixtas.

Al comparar la coordinación de la cadena de suministro empleando una programación binivel ante diez instancias de tamaño pequeño y mediano, se observa que el productor percibe mejores beneficios con respecto a un esquema independiente, esto se debe a que gestiona de mejor forma la operación de la cosecha y por otro lado el vendedor mayorista se ve afectado percibiendo mayores costos de penalización. En promedio, el beneficio del productor aumenta un 3 %, mientras que el costo del mayorista incrementa en un 9 %.

Dadas las condiciones ambientales, económicas y naturales de un sistema agrícola, se consideraron como parámetros inciertos las demandas futuras, los precios y los rendimientos de las cosechas, modelados a través de un conjunto de escenarios posibles. Considerando el Valor Esperado de la Información Perfecta, los resultados revelan la importancia de incorporar parámetros bajo incertidumbre ya que existe una importante disposición a pagar por el conocer el futuro.

La resolución de estos problemas se emplea una reformulación a través de las condiciones de KKT, además se expresan aquellas restricciones no lineales provenientes de las holguras complementarias por restricciones enteras mixtas introduciendo variables binarias y un término big- M , donde la elección del big- M no puede ser arbitrario puesto que afecta en la obtención del óptimo del problema.

En futuras investigaciones, sería necesario introducir una mejor representación de la incertidumbre en términos de una determinada distribución de probabilidad conjunta con un gran número de escenarios, lo que acompañado del notorio aumento del número de variables y restricciones en el modelo de programación estocástica binivel, afectando los tiempos de resolución. Por tanto, será necesario también desarrollar una estrategia de

solución basa en una técnica de descomposición de escenarios que permita la solución del modelo. Sin embargo, el diseño de dicho método queda fuera del ámbito de la presente Tesis.

Referencias

- Ahumada, O. and Villalobos, J. R. (2009). Application of planning models in the agri-food supply chain: A review. *European journal of Operational research*, 196(1):1–20.
- Aiyoshi, E. and Shimizu, K. (1984). A solution method for the static constrained stackelberg problem via penalty method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12):1111–1114.
- Albornoz, V. M., Cid-García, N. M., Ortega, R., and Ríos-Solís, Y. A. (2015). A hierarchical planning scheme based on precision agriculture. In *Handbook of operations research in agriculture and the agri-food industry*, pages 129–162. Springer.
- Albornoz, V. M. and Ñanco, L. J. (2016). An empirical design of a column generation algorithm applied to a management zone delineation problem. In *Computational Management Science*, pages 201–208. Springer.
- Albornoz, V. M., Ñanco, L. J., and Sáez, J. L. (2019). Delineating robust rectangular management zones based on column generation algorithm. *Computers and Electronics in Agriculture*, 161:194–201.
- Albornoz, V. M. and Urrutia-Gutiérrez, C. (2018). A mixed-integer linear optimization model for a two-echelon agribusiness supply chain. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 69:253–260.
- Alizadeh, S., Marcotte, P., and Savard, G. (2013). Two-stage stochastic bilevel programming over a transportation network. *Transportation Research Part B: Methodological*, 58:92–105.
- Ampatzidis, Y. G., Vougioukas, S. G., Whiting, M. D., and Zhang, Q. (2014). Applying the machine repair model to improve efficiency of harvesting fruit. *Biosystems Engineering*, 120:25–33.
- Araneda, L. (2019). Modelo integrado de planificación y programación de cosecha. Master’s thesis, Universidad Técnica Federico Santa María.

- Araneda, L. C. and Albornoz, V. M. (2019). Planning and scheduling of selective harvest with management zones delineation. In *III International Conference on Agro BigData and Decision Support Systems in Agriculture*, page 113.
- Arnaout, J.-P. M. and Maatouk, M. (2010). Optimization of quality and operational costs through improved scheduling of harvest operations. *International Transactions in operational research*, 17(5):595–605.
- Balas, E. (1967). Discrete programming by the filter method. *Operations Research*, 15(5):915–957.
- Bard, J. F. (2013). *Practical bilevel optimization: algorithms and applications*, volume 30. Springer Science & Business Media.
- Bard, J. F. and Falk, J. E. (1982). An explicit solution to the multi-level programming problem. *Computers & Operations Research*, 9(1):77–100.
- Bard, J. F. and Moore, J. T. (1990). A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(2):281–292.
- Beale, E. M. (1955). On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 17(2):173–184.
- Bialas, W. F. and Karwan, M. H. (1984). Two-level linear programming. *Management science*, 30(8):1004–1020.
- Birge, J. R. and Louveaux, F. (2011). The value of information and the stochastic solution. In *Introduction To Stochastic Programming*, pages 163–177. Springer.
- Blackmore, S. (2000). The interpretation of trends from multiple yield maps. *Computers and electronics in agriculture*, 26(1):37–51.
- Bohle, C., Maturana, S., and Vera, J. (2010). A robust optimization approach to wine grape harvesting scheduling. *European Journal of Operational Research*, 200(1):245–252.

- Borodin, V., Bourtembourg, J., Hnaien, F., and Labadie, N. (2016). Handling uncertainty in agricultural supply chain management: A state of the art. *European Journal of Operational Research*, 254(2):348–359.
- Boyd, S., Boyd, S. P., and Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Bracken, J. and McGill, J. T. (1973). Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, 21(1):37–44.
- Burtscheidt, J., Claus, M., and Dempe, S. (2020). Risk-averse models in bilevel stochastic linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 30(1):377–406.
- Bustos, J. A., Olavarria, S. H., Albornoz, V. M., Rodríguez, S. V., and Jiménez-Lizárraga, M. (2017). A stackelberg game model between manufacturer and wholesaler in a food supply chain. In *International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, volume 2, pages 409–415. SCITEPRESS.
- Buzzetti, H. et al. (2020). Boletín del vino: producción, precios y comercio exterior. avance a diciembre de 2019. comparación 2017–2018-2019. *Gobierno de Chile*.
- Caixeta-Filho, J. V. (2006). Orange harvesting scheduling management: a case study. *Journal of the Operational Research Society*, 57(6):637–642.
- Candler, W. and Norton, R. (1977). Multilevel programming and development policy, world bank staff. Technical report, Working Paper 258.
- Candler, W. and Townsley, R. (1982). A linear two-level programming problem. *Computers & Operations Research*, 9(1):59–76.
- Carrión, M., Arroyo, J. M., and Conejo, A. J. (2009). A bilevel stochastic programming approach for retailer futures market trading. *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(3):1446–1456.
- Castillo, E., Conejo, A. J., Pedregal, P., Garcia, R., and Alguacil, N. (2002). Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia.

- Cheraghalipour, A., Paydar, M. M., and Hajiaghaei-Keshteli, M. (2019). Designing and solving a bi-level model for rice supply chain using the evolutionary algorithms. *Computers and Electronics in Agriculture*, 162:651–668.
- Chi, X., Wan, Z., and Hao, Z. (2014). The models of bilevel programming with lower level second-order cone programs. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(1):168.
- Christiansen, S., Patriksson, M., and Wynter, L. (2001). Stochastic bilevel programming in structural optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(5):361–371.
- Cid-Garcia, N. M., Albornoz, V., Rios-Solis, Y. A., and Ortega, R. (2013). Rectangular shape management zone delineation using integer linear programming. *Computers and Electronics in Agriculture*, 93:1–9.
- Costa, A. M., dos Santos, L. M. R., Alem, D. J., and Santos, R. H. (2014). Sustainable vegetable crop supply problem with perishable stocks. *Annals of Operations Research*, 219(1):265–283.
- Dantzig, G. B. (2010). Linear programming under uncertainty. In *Stochastic programming*, pages 1–11. Springer.
- Dempe, S., Kalashnikov, V., Pérez-Valdés, G. A., and Kalashnykova, N. (2015). Bilevel programming problems. *Energy Systems. Springer, Berlin*.
- Diker, K., Heermann, D., and Brodahl, M. (2004). Frequency analysis of yield for delineating yield response zones. *Precision Agriculture*, 5(5):435–444.
- Ferrer, J. and Muñoz, J. (2006). *Apuntes de Optimización*. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Ferrer, J.-C., Mac Cawley, A., Maturana, S., Toloza, S., and Vera, J. (2008). An optimization approach for scheduling wine grape harvest operations. *International Journal of Production Economics*, 112(2):985–999.
- Floudas, C. A. and Pardalos, P. M. (2008). *Encyclopedia of optimization*. Springer Science & Business Media.

- Fortuny-Amat, J. and McCarl, B. (1981). A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. *Journal of the operational Research Society*, 32(9):783–792.
- Fraisse, C., Sudduth, K., and Kitchen, N. (2001). Delineation of site-specific management zones by unsupervised classification of topographic attributes and soil electrical conductivity. *Transactions of the ASAE*, 44(1):155.
- Franzen, D. and Nanna, T. (2002). Management zone delineation methods. In *Proceedings of 6th International conference on precision agriculture, Minneapolis, MN [CD-ROM]*, volume 1417, page 363377.
- González-Araya, M. C., Soto-Silva, W. E., and Espejo, L. G. A. (2015). Harvest planning in apple orchards using an optimization model. In *Handbook of operations research in agriculture and the agri-food industry*, pages 79–105. Springer.
- Guide, N. (2019). Types of optimization problems. Website: <https://neos-guide.org/optimization-tree>, Accessed, 19.
- Henkel, C. (2014). *An algorithm for the global resolution of linear stochastic bilevel programs*. PhD thesis, Faculty of Mathematics of the University of Duisburg-Essen.
- Heydari, J. and Norouzinassab, Y. (2015). A two-level discount model for coordinating a decentralized supply chain considering stochastic price-sensitive demand. *Journal of Industrial Engineering International*, 11(4):531–542.
- Hiller, F. and Lieberman, G. (1995). Introduction to operations research, isbn: 0-07-113989-3. *International Editions*.
- Hornung, A., Khosla, R., Reich, R., Inman, D., and Westfall, D. (2006). Comparison of site-specific management zones: Soil-color-based and yield-based. *Agronomy Journal*, 98(2):407–415.
- Jeroslow, R. G. (1985). The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis. *Mathematical programming*, 32(2):146–164.

- Jiang, Y., Bian, B., and Li, L. (2019). Integrated harvest and farm-to-door distribution scheduling with postharvest quality deterioration for vegetable online retailing. *Agronomy*, 9(11):724.
- Johnson, C. K., Mortensen, D. A., Wienhold, B. J., Shanahan, J. F., and Doran, J. W. (2003). Site-specific management zones based on soil electrical conductivity in a semiarid cropping system. *Agronomy journal*, 95(2):303–315.
- Júdice, J. J. and Faustino, A. M. (1992). A sequential lcp method for bilevel linear programming. *Annals of Operations Research*, 34(1):89–106.
- Kalashnikov, V. V., Pérez-Valdés, G. A., Tomasgard, A., and Kalashnykova, N. I. (2010). Natural gas cash-out problem: Bilevel stochastic optimization approach. *European Journal of Operational Research*, 206(1):18–33.
- Kleinert, T., Labbé, M., Plein, F., and Schmidt, M. (2019). There’s no free lunch: On the hardness of choosing a correct big-m in bilevel optimization. *INFORMS Operations Research*.
- Kleinert, T. and Schmidt, M. (2020). Why there is no need to use a big-m in linear bilevel optimization: A computational study of two ready-to-use approaches.
- Kosuch, S., Le Bodic, P., Leung, J., and Lisser, A. (2012). On a stochastic bilevel programming problem. *Networks*, 59(1):107–116.
- Kusumastuti, R. D., Van Donk, D. P., and Teunter, R. (2016). Crop-related harvesting and processing planning: a review. *International Journal of Production Economics*, 174:76–92.
- Labbé, M. and Violin, A. (2013). Bilevel programming and price setting problems. *4OR*, 11(1):1–30.
- Li, M. and Guo, P. (2015). A coupled random fuzzy two-stage programming model for crop area optimization—a case study of the middle heihe river basin, china. *Agricultural Water Management*, 155:53–66.

- Olivares, D. (2019). Motivation and overview of the course, aplicaciones de optimización y control en sistemas de potencia. *Pontificia Universidad Católica de Chile*.
- Ortega, R. A. and Santibáñez, O. A. (2007). Determination of management zones in corn (*zea mays* l.) based on soil fertility. *Computers and Electronics in agriculture*, 58(1):49–59.
- Patriksson, M. and Wynter, L. (1997). Stochastic nonlinear bilevel programming. Technical report, Citeseer.
- Pedroso, M., Taylor, J., Tisseyre, B., Charnomordic, B., and Guillaume, S. (2010). A segmentation algorithm for the delineation of agricultural management zones. *Computers and Electronics in Agriculture*, 70(1):199–208.
- Pineda, S. and Morales, J. M. (2019). Solving linear bilevel problems using big-ms: not all that glitters is gold. *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(3):2469–2471.
- Plà, L. M., Sandars, D. L., and Higgins, A. J. (2014). A perspective on operational research prospects for agriculture. *Journal of the Operational Research Society*, 65(7):1078–1089.
- Ramos, A., Alonso-Ayuso, A., and Pérez, G. (2011). *Optimización bajo incertidumbre*. Universidad Pontificia Comillas.
- Roudier, P., Tisseyre, B., Poilvé, H., and Roger, J.-M. (2008). Management zone delineation using a modified watershed algorithm. *Precision Agriculture*, 9(5):233.
- Sadigh, A. N., Mozafari, M., and Karimi, B. (2012). Manufacturer–retailer supply chain coordination: A bi-level programming approach. *Advances in Engineering Software*, 45(1):144–152.
- Saez, J. L. and Albornoz, V. M. (2016). Delineation of rectangular management zones under uncertainty conditions. In *ICORES*, pages 271–278.
- Sinha, A., Malo, P., and Deb, K. (2017). A review on bilevel optimization: from classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22(2):276–295.

- Sioshansi, R. and Conejo, A. J. (2017). *Optimization in Engineering*. Springer.
- Tantiwattanakul, P. and Dumrongsiri, A. (2019). Supply chain coordination using wholesale prices with multiple products, multiple periods, and multiple retailers: Bi-level optimization approach. *Computers & Industrial Engineering*, 131:391–407.
- Utomo, D. S., Onggo, B. S., and Eldridge, S. (2018). Applications of agent-based modeling and simulation in the agri-food supply chains. *European Journal of Operational Research*, 269(3):794–805.
- Von Stackelberg, H. (2010). *Market structure and equilibrium*. Springer Science & Business Media.
- Werner, A. (2005). Bilevel stochastic programming problems: Analysis and application to telecommunications. *Department of Industrial Economics and Technology Management, Norwegian University of Science and Technology*.
- Wolfert, S., Ge, L., Verdouw, C., and Bogaardt, M.-J. (2017). Big data in smart farming—a review. *Agricultural Systems*, 153:69–80.
- Yeh, K., Whittaker, C., Realff, M. J., and Lee, J. H. (2015). Two stage stochastic bilevel programming model of a pre-established timberlands supply chain with biorefinery investment interests. *Computers & Chemical Engineering*, 73:141–153.