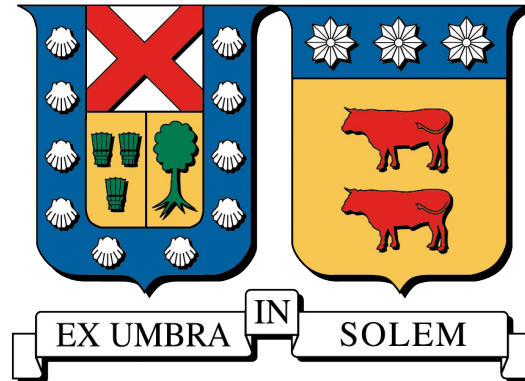


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
VALPARAÍSO- CHILE



**DISEÑO E IPLEMENTACIÓN DE ESTRATEGIA DE
CONTROL PREDICTIVO EN PROCESO DE
FLOTACIÓN DE MINERALES**

CRISTIÁN ENRIQUE TRONCOSO GARAY

**TÉSIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**PROFESOR GUÍA:
PROFESOR CORREFERENTE:**

**DR. ALEJANDRO SUÁREZ SOTOMAYOR
DR. MANUEL OLIVARES SALINAS**

JULIO 2016

Agradecimientos

Se agradece a todas las personas que ayudaron en el desarrollo de este trabajo, en especial al personal de minera Candelaria por tener siempre la disposición para apoyar el desarrollo de este proyecto.

Dedicado a mi familia.

Diseño e implementación de una estrategia de control predictivo dentro en proceso de flotación de minerales

Cristián Enrique Troncoso Garay

Requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería
Electrónica

Profesor Guía: **Alejandro Suárez Sotomayor**

Julio 2016

Resumen

Este trabajo presenta el diseño, la implementación y los resultados de una estrategia de control predictivo para el control del nivel de pulpa de dos circuitos de flotación “*Rougher*” de minera Candelaria, ubicada en la tercera región de Chile. La estrategia considera una representación de estados que modela el nivel de cada banco (modelo de múltiples entradas y una salida), el que es obtenido mediante un procedimiento de identificación de sistemas y utiliza un filtro de Kalman como estimador de estados. Para resolver el problema de optimización que calcula la acción de control a aplicar se utiliza un optimizador basado en algoritmos genéticos.

Los resultados obtenidos de manera experimental indican que con la estrategia de control implementada se logra reducir la varianza del nivel en los bancos *Rougher* hasta en un 88 %, además de mejorar el seguimiento de la referencia, mediante la adecuada compensación de perturbaciones. El sistema de control predictivo es integrado con otro sistema de control que manipula las referencias del nivel de los bancos *Rougher* con el fin de optimizar la operación del proceso, lo que le permite a la compañía producir al menos 1.685.973 libras extras de cobre al año entre las dos líneas de producción.

Palabras Clave. Control predictivo basado en modelo, Identificación de sistemas y estimación de parámetros, Filtro de Kalman, Algoritmos genéticos, Rechazo a perturbaciones, Minería, metalurgia, metales y materiales

Design and implementation of a predictive control strategy in a mineral flotation process

Cristián Enrique Troncoso Garay

Submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Science of the Electronic Engineering

Advisor: **Alejandro Suárez Sotomayor**

July 2016

Abstract

This work presents the design, implementation and results of a model predictive control strategy used to control the pulp level of two Rougher flotation circuits of minera Candelaria, located in the third region of Chile. The strategy considers a state space representation which models the level of each bank (multiple input – single output model), which is obtained through a system identification procedure and uses a Kalman filter as state estimator. To solve the optimization problem that calculates the control action to apply, a genetic algorithm based optimizer is used.

The experimental results obtained show the control strategy implementes manages to reduce the level variance in the Rougher banks up to an 88 % and improve the reference tracking through a proper disturbance compensation. The model predictive control system is integrated with another control systema which manipulates the level setpoint of the Rougher banks with the purpose of optimizing the operation of the process, which allows the company to produce at least 1.685.973 extra pounds of copper in a year between the two production lines.

Keywords. Model predictive control, System identification and parameter estimation, Kalman filter, Genetic Algorithms, Disturbance rejection, Mining, metalurgy, metals and materials

Índice de Contenidos

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación principal | 1 |
| 1.2. Descripción del problema a solucionar | 3 |
| 1.3. Descripción del trabajo | 4 |
| 1.4. Objetivos | 5 |
| 1.5. Metodología | 6 |
| 1.6. Soluciones y abordajes realizadas por otros autores | 7 |
| 1.7. Hipótesis | 11 |
| 2. Proceso a trabajar | 12 |
| 2.1. La planta | 12 |
| 2.2. Descripción del proceso de flotación | 15 |
| 2.3. Bancos de flotación | 17 |
| 2.4. Circuitos de flotación | 18 |
| 2.5. Circuito de flotación de la planta | 19 |
| 2.6. Control de nivel en banco “ <i>Rougher</i> ” | 20 |
| 2.6.1. Modelo no lineal | 21 |
| 2.6.2. Modelo lineal | 23 |
| 3. Herramientas de trabajo | 25 |
| 3.1. Arquitectura del sistema de control | 25 |
| 3.2. Sistema experto KSX | 29 |
| 3.3. Estándar de comunicación OPC | 31 |
| 3.4. Algoritmos Genéticos | 31 |
| 3.4.1. Componentes de un algoritmo genético | 32 |
| 3.5. Algoritmos de identificación | 37 |
| 3.5.1. Mínimos cuadrados | 37 |
| 3.5.2. Estimación de modelos lineales mediante mínimos cuadrados | 39 |
| 3.5.3. Variables instrumentales | 42 |
| 4. Modelado | 46 |
| 4.1. Identificación de sistemas | 46 |
| 4.2. Diseño del experimento de identificación | 47 |
| 4.2.1. Pruebas preliminares | 47 |
| 4.2.2. Señales de entrada | 48 |
| 4.2.3. Experimento final | 51 |
| 4.3. Estructura para sistemas lineales | 53 |
| 4.4. Validación del modelo y número de parámetros | 57 |
| 4.4.1. Análisis residual | 58 |

| | |
|--|-----------|
| 4.4.2. Validación cruzada | 59 |
| 4.5. Resumen | 60 |
| 5. Estrategia de control predictivo | 62 |
| 5.1. Control Predictivo | 62 |
| 5.1.1. Predicción | 63 |
| 5.1.2. Problema de optimización | 67 |
| 5.1.3. Estrategia de horizonte móvil | 69 |
| 5.2. Restricciones | 70 |
| 5.2.1. Restricciones de entrada | 70 |
| 5.2.2. Restricciones de salida | 70 |
| 5.2.3. Restricciones en algoritmos genéticos | 71 |
| 5.3. Variables de estado | 72 |
| 5.3.1. Observadores | 72 |
| 5.3.2. Filtro de Kalman | 74 |
| 5.4. Compensación de perturbaciones constantes | 76 |
| 5.5. Estrategia de control predictivo | 78 |
| 5.5.1. Estrategia de control predictivo | 78 |
| 5.5.2. Control en primer banco | 79 |
| 5.5.3. Compensación de las perturbaciones | 80 |
| 5.5.4. Efectos de horizonte de predicción y control | 81 |
| 5.5.5. Algoritmo de optimización | 82 |
| 5.5.6. Resumen de la estrategia de control formulada | 84 |
| 6. Trabajo experimental | 86 |
| 6.1. Estrategia de control predictivo en línea 1 | 88 |
| 6.1.1. Experimento de identificación | 89 |
| 6.1.2. Resultados de la identificación | 94 |
| 6.1.3. Representación en variables de estado | 100 |
| 6.1.4. Representación en variables de estado aumentada | 103 |
| 6.1.5. Filtro de Kalman | 106 |
| 6.1.6. Estrategia de control predictivo | 109 |
| 6.1.7. Programación en sistema experto | 116 |
| 6.1.8. Integración de control predictivo con aplicación de control de sistema experto de los bancos “ <i>Rougher</i> ” | 121 |
| 6.2. Estrategia de control predictivo en línea 2 | 124 |
| 6.2.1. Experimento de identificación | 124 |
| 6.2.2. Resultados de la identificación | 137 |
| 6.2.3. Representación en variables de estado | 143 |
| 6.2.4. Representación en variables de estado aumentada | 146 |
| 6.2.5. Filtro de Kalman | 148 |
| 6.2.6. Estrategia de control predictivo | 151 |

| | |
|--|------------|
| 7. Resultados | 159 |
| 7.1. Resultado en línea 1 | 159 |
| 7.2. Análisis económico en línea 1 | 164 |
| 7.3. Resultados en línea 2 | 168 |
| 7.4. Análisis económico en línea 2 | 171 |
| 7.5. Resumen de beneficios en ambas líneas | 174 |
| 8. Conclusiones | 175 |
| 8.1. Conclusiones del trabajo | 175 |
| 8.2. Extensiones del trabajo | 177 |
| Bibliografía | 180 |

Índice de Tablas

| | |
|--|-----|
| 4.1. Estructuras simplificadas de modelos lineales. | 54 |
| 6.1. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 1 de la línea 1. | 97 |
| 6.2. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 2 de la línea 1. | 98 |
| 6.3. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 3 de la línea 1. | 99 |
| 6.4. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 4 de la línea 1. | 99 |
| 6.5. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 5 de la línea 1. | 100 |
| 6.6. Estimados gruesos de tiempos de asentamiento del nivel de los bancos 1, 2 y 3 para los escalones aplicados. | 131 |
| 6.7. Estimados gruesos de tiempos de asentamiento del nivel de los bancos 4 y 5 para los escalones aplicados. | 131 |
| 6.8. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 1 de la línea 2. | 140 |
| 6.9. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 2 de la línea 2. | 141 |
| 6.10. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 3 de la línea 2. | 142 |
| 6.11. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 4 de la línea 2. | 142 |
| 6.12. Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “ <i>Rougher</i> ” 5 de la línea 2. | 143 |
| 7.1. Promedio y desviación estándar para el error de seguimiento en los bancos “ <i>Rougher</i> ” cuando se utiliza la estrategia de control predictivo vs el control PID. | 160 |
| 7.2. Resultado de control con sistema experto más control predictivo (Con SCEA) vs control supervisado más control PID (sin SCEA). | 165 |
| 7.3. Beneficio económico para distintos márgenes de utilidad para mejora mínima asegurada y para mejora promedio. | 166 |
| 7.4. Promedio y desviación estándar para el error de seguimiento en los bancos “ <i>Rougher</i> ” cuando se utiliza la estrategia de control predictivo vs el control PID. | 169 |
| 7.5. Resultado de control con sistema experto más control predictivo (Con SCEA) vs control supervisado más control PID (sin SCEA). | 172 |

7.6. Beneficio económico para distintos márgenes de utilidad para mejora mínima asegurada y para mejora promedio. 173

Índice de Figuras

| | | |
|-------|--|----|
| 2.1. | Esquema de la planta concentradora. | 14 |
| 2.2. | Principio de funcionamiento de la flotación de minerales. | 16 |
| 2.3. | Mecánica de la flotación. | 17 |
| 2.4. | Diagrama de flujo del circuito de flotación. | 20 |
| 2.5. | Esquema de bancos “ <i>Rougher</i> ” desde el punto de vista de control. | 22 |
| 3.1. | Arquitectura del sistema de control de la planta. | 26 |
| 3.2. | Arquitectura del sistema de control del chancado primario. | 27 |
| 3.3. | Arquitectura del sistema de control de la planta desalinizadora. | 27 |
| 3.4. | Diagrama de flujos de los componentes de un algoritmo genético. | 33 |
| 3.5. | Ejemplo de reproducción en algoritmo genético. | 36 |
| 4.1. | Estructura ARX. | 55 |
| 4.2. | Estructura ARMAX. | 56 |
| 4.3. | Estructura Box-Jenkins. | 56 |
| 4.4. | Estructura Output Error. | 57 |
| 5.1. | Resumen de estrategia de control. | 85 |
| 6.1. | Propagación de perturbaciones. | 87 |
| 6.2. | Perturbación en quinto banco provocada por cambios de referencias en los bancos anteriores. | 87 |
| 6.3. | Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 1. | 90 |
| 6.4. | Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 2. | 90 |
| 6.5. | Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 3. | 91 |
| 6.6. | Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 4. | 91 |
| 6.7. | Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 5. | 92 |
| 6.8. | Gráfico de experimento de identificación 6; manipulan los actuador de todos los bancos a la vez. | 92 |
| 6.9. | Gráficos del experimento de identificación 3; con valor medio igual a cero. | 94 |
| 6.10. | Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 1. | 95 |
| 6.11. | Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 2. | 95 |

| | |
|---|-----|
| 6.12. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 3. | 96 |
| 6.13. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 4. | 96 |
| 6.14. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 5. | 97 |
| 6.15. Programación del modelo aumentado del banco 3. | 118 |
| 6.16. Primera parte de función objetivo del banco 3. | 118 |
| 6.17. Segunda parte de función objetivo del banco 3. | 119 |
| 6.18. Tercera parte de función objetivo del banco 3. | 120 |
| 6.19. Optimizador del banco 3. | 121 |
| 6.20. Diagrama de flujos de regla global de sistema experto de los bancos “ <i>Rougher</i> ”. | 122 |
| 6.21. Diagrama de flujos de regla que calcula la referencia de cada uno de los bancos. | 123 |
| 6.22. Pérdida de control con controladores PID. | 124 |
| 6.23. Respuesta a escalón del nivel de pulpa de los bancos <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvulas de cada banco. | 127 |
| 6.24. Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 1 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvula del banco 1. | 127 |
| 6.25. Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 2 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 1 y 2. | 128 |
| 6.26. Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 3 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 2 y 3. | 128 |
| 6.27. Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 4 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 3 y 4. | 129 |
| 6.28. Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 4 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 4 y 5. | 130 |
| 6.29. Gráfico de experimento de identificación 1 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN a la actuación del banco 1. | 133 |
| 6.30. Gráfico de experimento de identificación 1 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 1. | 133 |
| 6.31. Gráfico de experimento de identificación 2 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 2. | 134 |
| 6.32. Gráfico de la primera parte del experimento de identificación 3 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 3. | 134 |
| 6.33. Gráfico de experimento de identificación 4 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 4. | 135 |
| 6.34. Gráfico de experimento de identificación 5 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 5. | 135 |
| 6.35. Gráfico de experimento de identificación 6 de la línea 2; se aplica la entrada GBN a todos los bancos al mismo tiempo. | 136 |
| 6.36. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 1 del circuito <i>Rougher</i> de la línea 2. | 137 |

| | |
|--|-----|
| 6.37. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 2 del circuito Rougher de la línea 2. | 138 |
| 6.38. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 3 del circuito Rougher de la línea 2. | 138 |
| 6.39. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 4 del circuito Rougher de la línea 2. | 139 |
| 6.40. Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 5 del circuito Rougher de la línea 2. | 139 |
| | |
| 7.1. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo (estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0). | 161 |
| 7.2. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo (estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0). | 162 |
| 7.3. Comportamiento de la estrategia de control predictivo en línea 1, en conjunto con sus restricciones. | 162 |
| 7.4. Comportamiento de la estrategia de control predictivo en el banco 3 de la línea 1, en conjunto con sus restricciones. | 163 |
| 7.5. Comparación entre estrategia de control predictivo en conjunto con la aplicación del sistema experto (CON SCEA) vs control PID de turno de noche vs turno de día. | 166 |
| 7.6. Comparación entre estrategia de control predictivo en conjunto con la aplicación del sistema experto (CON SCEA) vs control PID del mismo turno dos días seguidos. | 167 |
| 7.7. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba. | 168 |
| 7.8. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo en línea 2(estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0). | 170 |
| 7.9. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba en línea 2. | 171 |
| 7.10. Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba. | 173 |

1. Introducción

En este trabajo se presenta el desarrollo de una estrategia de control predictivo para el control del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*” del proceso de flotación de minerales. Esta estrategia fue implementada en las dos líneas de producción de la compañía Minera Candelaria obteniendo resultados exitosos, los cuales se presentan en los últimos capítulos del trabajo.

La mayor limitante dentro en el diseño de la estrategia de control predictivo corresponde a utilizar solamente las herramientas disponibles en la empresa en su implementación, lo que implica utilizar un sistema experto que no cuenta ni con un módulo de identificación de sistemas, ni con un módulo que permita realizar operaciones matriciales y que posee un módulo optimizador basado en algoritmos genéticos.

Para resolver el problema señalado anteriormente, el procedimiento de identificación se lleva a cabo creando un experimento de identificación, cuyos datos son adquiridos utilizando las herramientas historizadoras de la empresa (software PI de OsiSoft y la herramienta historizadora del sistema experto KSX de KnowledgeScape), los que luego son procesados mediante MATLAB, con el fin de obtener un modelo del sistema. Luego la estrategia de control es programada e implementada con las herramientas disponibles del sistema experto KSX.

1.1. Motivación principal

Dentro de la minería se está buscando continuamente mejorar el rendimiento de los procesos productivos debido a que cualquier mejora en la eficiencia de éstos, tiene un impacto económico considerable para la compañía.

La manera más común de lograr esta mejora consiste en reemplazar el control supervisado realizado por el personal de operación por sistemas de control avanzado. Estos sistemas que permiten realizar control multivariable, control no lineal y/o control basado

en reglas. Para lograr este objetivo las compañías cuentan con softwares especializados que permiten realizar estas tareas, como sistemas expertos y otros sistemas de control avanzado que permiten realizar control predictivo y/o control óptimo.

Este trabajo se realiza dentro de una minera que cuenta con el sistema experto KSX de la empresa Knowledgescape y en donde la automatización de los procesos de la planta se ha realizado históricamente mediante reglas heurísticas y control difuso, que replican las mejores prácticas del personal de operación.

El sistema experto cuenta también con un módulo de optimización en base a algoritmos genéticos y que en la actualidad no está siendo utilizado. Este módulo, en conjunto con un modelo matemático, que puede ser obtenido mediante un procedimiento de identificación de sistemas es capaz de generar una estrategia de control predictivo (MPC) para algún proceso. Hay trabajos que indican que el control predictivo ha sido capaz de entregar mejores resultados que el control difuso [1], por lo que es de interés para la empresa, analizar los beneficios que se pueden obtener con este tipo de estrategia.

El proceso en donde se realiza el trabajo corresponde a la flotación de minerales, que es un proceso que se utiliza para separar el mineral valioso (cobre) del resto de mineral que hay en la roca extraída desde la mina y que ya ha sido reducida a un tamaño idóneo por los procesos anteriores (chancado, molienda SAG, molienda convencional y chancado de "pebbles").

Económicamente este proceso es muy importante ya que por un lado afecta la calidad del material vendido, que tiene que ser concentrado de cobre y por lo tanto debe poseer una concentración pequeña de otros minerales y por otro lado, el cobre que no es recuperado en este proceso es desechado como relave y por lo tanto es mineral que no se vende. Por lo que es idóneo poder automatizar el proceso de manera de la recuperación de cobre en este proceso sea la mayor posible. Para esto ya existen algunas aplicaciones dentro de un sistema experto que permiten manipular las variables internas del proceso (típicamente referencias de otros lazos de control) que han logrado mejorar la eficiencia en algunas partes del proceso, pero existen otras etapas que no han podido ser automatizadas debido a que al manipular rápidamente las referencias, los lazos de control pierden el control debido a las perturbaciones que estos cambios generan. El problema se encuentra específicamente

en el circuito de flotación “*Rougher*”, en donde hay una interacción grande entre los bancos. Es conocido que en el control de este proceso, cuando el circuito está formado por 3 bancos o más, es necesario considerar las interacciones que ocurren dentro de él y que, por lo tanto, el control PID comúnmente utilizado, no es suficiente [2], [3].

Debido a lo anterior la propuesta hecha consiste en implementar una estrategia de control predictivo dentro del proceso de flotación, que considere las interconexiones de los equipos y permita realizar un control preciso dentro del proceso, que luego se utilizará en conjunto con la aplicación existente en el sistema experto para llevar el proceso a un punto de trabajo idóneo.

1.2. Descripción del problema a solucionar

El proceso de flotación es un proceso de separación de mineral en donde se aprovecha la diferencia en las propiedades aerofílicas de los minerales que hacen que algunos minerales se peguen a burbujas de aire con más facilidad que otros. Este proceso se produce en un conjunto de celdas conectadas entre sí, en una configuración muy parecida a la de un conjunto de estanques acoplados, a las cuales ingresa el material y en donde se generan burbujas que suben a la superficie de las celdas. Debido a sus propiedades aerofílicas, las cuales son exacerbadas mediante la adición de químicos, el mineral valioso de cobre se adhiere a dichas burbujas subiendo a la superficie y formando espuma rica en cobre (o en el mineral que se desee recuperar), mientras que el resto de material se mantiene en el fondo del estanque. Mediante el ajuste del nivel de la pulpa en cada celda, la espuma que se obtiene se hace rebosar hacia estanques que la envían hacia otras etapas. Es importante controlar el nivel de las celdas de manera precisa (sin oscilaciones) para evitar efectos como el rebose de pulpa de material indeseable en vez de espuma y para poder controlar la velocidad de rebose de la celda de manera precisa, lo que permite trabajar más cerca del punto óptimo de trabajo de la celda. Cabe destacar en el proceso de flotación varias celdas se conectan entre sí, haciendo que el material que no se recupera en una celda sirva como entrada para la siguiente celda, repitiendo luego el proceso de burbujeo y recolección de espuma.

El control de nivel de pulpa en cada celda se realiza manipulando la válvula de salida de ésta, en donde generalmente se usan controladores PID. Este tipo de control no entrega un buen desempeño al conectar varias celdas en serie ya que el nivel en cada celda depende tanto del flujo de entrada como el de salida, y el control no considera el efecto que tendrá en el nivel de una celda el manipular el flujo de salida de la celda anterior. Esta interconexión al utilizar controladores PID genera un comportamiento oscilante que empeora el rendimiento del circuito de flotación. Por lo mismo es necesario generar una estrategia de control que sea capaz de compensar las perturbaciones causadas por dichas interconexiones. Para esto se propone una estrategia de control predictivo.

El control predictivo utiliza un modelo del sistema para predecir el comportamiento de éste, y encontrar las entradas que optimizan el comportamiento del sistema en un horizonte de tiempo determinado, cumpliendo además, con las restricciones del sistema. El trabajo consiste en utilizar el módulo de optimización basado en algoritmos genéticos del sistema experto, en conjunto con un procedimiento de identificación de sistemas para implementar una estrategia de control predictivo que permita controlar el nivel en los bancos de flotación.

1.3. Descripción del trabajo

En la primera parte del trabajo es necesario estudiar en qué consiste el proceso de flotación y analizar adecuadamente el problema de control que se desea resolver.

Luego es necesario estudiar los fundamentos requeridos para resolver el problema del control propuesto, que consiste en la implementación de una estrategia de control predictivo que utiliza un modelo lineal y un módulo basado en algoritmos genéticos para resolver el problema de optimización asociado a la estrategia de control predictivo.

Para encontrar el modelo del sistema se crea un experimento de identificación utilizando la teoría presentada en [4] y [5], en donde se aplican entradas adecuadas al proceso y se observa la reacción que estas entradas producen en las salidas del proceso, los datos de entrada y salida obtenidos son guardados mediante un software historizador de datos, los que luego son procesados en el "*toolbox*" de identificación de sistemas de MATLAB para

encontrar un modelo adecuado de la dinámica de los bancos.

Luego utilizando el modelo se formula el problema a ser resuelto por el módulo de optimización para lo cual se define la función objetivo del problema, los horizontes de predicción y control de la estrategia de control predictivo y las restricciones del sistema. La estrategia de control predictivo se programa en el sistema experto.

A continuación se implementa la estrategia de control predictivo diseñada en el proceso real y se analiza su desempeño, el cual es comparado con el control mediante controladores PID.

Finalmente la estrategia de control predictivo se integra con el sistema de control que manipula las referencias de los niveles del circuito “*Rougher*”, existente en la planta analizando el beneficio económico obtenido por la implementación de ambos sistemas.

1.4. Objetivos

Los objetivos del trabajo son:

- Describir la estrategia de control predictivo utilizada.
- Describir el proceso de flotación.
- Obtener un modelo que describa la respuesta del nivel a los cambios en las aperturas de las válvulas de salida de las celdas, incluyendo las interacciones entre ellas.
- Generar una estrategia de control predictivo utilizando el modelo obtenido en conjunto con el módulo de optimización basado en algoritmos genéticos.
- Implementar la estrategia en el proceso real.
- Estudiar si se obtiene una mejora en el control del proceso, específicamente si hay una reducción en la varianza del nivel en las celdas de flotación.
- Integrar la estrategia de control predictivo con la estrategia utilizada por el sistema experto para llevar el sistema a un punto de trabajo óptimo y analizar si hay ventajas económicas al implementar ambas estrategias.

1.5. Metodología

En la primera parte del trabajo de aplicación se diseña el experimento de identificación del proceso, en donde se define la forma que deben tener las entradas y los parámetros de ésta, para que el modelo obtenido sea útil para el control del sistema. Para realizar el experimento de identificación se siguen las recomendaciones entregadas en [4] y en [5]. El experimento es diseñado e implementado dentro del mismo sistema experto que se utiliza para implementar la estrategia de control predictivo, utilizando su módulo historizador para guardar los datos de entrada-salida del experimento. Luego estos datos son importados en MATLAB, en donde se utiliza su módulo de identificación de sistemas para obtener un modelo del sistema.

En este trabajo se utilizan los algoritmos de cuadrados mínimos y variables instrumentales para obtener el mejor modelo (lineal, con estructura ARX) del sistema, el cual se evalúa con herramientas como la validación cruzada, el FPE, gráfico de polos y ceros, y respuesta a escalón. El número de parámetros del modelo se escoge de manera de obtener el modelo más preciso posible, lo que se analiza con las herramientas nombradas anteriormente.

Del modelo ARX obtenido se toma la parte que relaciona las entradas con las salidas y se transforma en una representación de estados, la que luego es aumentada con el fin de compensar las perturbaciones no medibles constantes y se utiliza un filtro de Kalman para estimar los estados de la representación aumentada del sistema.

Luego de encontrar un modelo que describa apropiadamente el proceso se formula y programa dentro del sistema experto el problema de optimización que busca obtener las actuaciones óptimas que permiten cumplir con las restricciones del proceso (rango de las válvulas y de los niveles en las celdas) y que minimizan un criterio que considera el error entre el nivel de cada celda y su referencia dentro y el cambio la actuación de un periodo de tiempo. Luego se utiliza el módulo de optimización del sistema experto para resolver el problema programado y obtener las actuaciones óptimas a aplicar en cada banco.

A continuación se implementa la estrategia de control predictivo en los bancos de flotación durante un periodo de varias horas y se compararán los resultados de esta estrategia

con los resultados obtenidos con el control mediante PID. Para analizar si hay una mejora en el control se estudia la media, la varianza del nivel en las celdas de flotación.

Finalmente se integra la estrategia de control predictivo con la aplicación de control implementada mediante el sistema experto para el control de las celdas “*Rougher*”. De donde se analiza el desempeño de la estrategia de control ante los cambios de referencias en el nivel de las celdas y si hay un beneficio económico debido a la implementación de las aplicaciones de control en conjunto. El análisis económico considera experimentos “*on/off*” en donde se analiza la diferencia entre las recuperaciones obtenidas en el proceso de flotación al trabajar con y sin el control mediante el sistema experto, luego se transforma la diferencia en la recuperación en libras de cobre extras para la compañía y finalmente en dinero obtenido.

1.6. Soluciones y abordajes realizadas por otros autores

El trabajo corresponde a la implementación de una estrategia de control predictivo dentro del proceso de flotación de minerales.

Dentro de los trabajos estudiados, existen muchos trabajos enfocados en el diseño de estrategias de control predictivo dentro del proceso de flotación columnar. La flotación columnar es un proceso en donde el mineral se flota en una columna cilíndrica de una altura considerable, en donde se generan burbujas en la parte inferior de la columna las cuales hacen subir el mineral con las propiedades aerofílicas correctas como espuma y en donde además se agrega agua en la parte superior de la columna, con el fin de que el material que tiene más afinidad con el agua (material indeseable) decante hacia el fondo del estanque. En los trabajos [6], [7], [8], [9], [10], se utilizan distintas estrategias de control predictivo para controlar algunas variables internas del proceso (“*bias*”, gas retenido y/o la profundidad de la espuma), manipulando el flujo de salida de la columna, el flujo de aire con el que se generan las burbujas y el flujo de agua de lavado utilizada. Cabe destacar que este no es el problema a resolver en este trabajo, a pesar de ser parte del proceso de flotación, la flotación columnar tiene una forma de funcionar distinta a la flotación en las celdas “*Rougher*”. Las columnas trabajan en paralelo, por lo que cada columna controla

el nivel regulando el flujo de salida de cada columna, y no interfieren entre ellas. Generalmente la flotación columnar se utiliza para mejorar la ley de concentrado (calidad) del producto final que entrega el proceso, mientras que las celdas “*Rougher*” se encargan de recuperar la mayor cantidad de cobre proveniente del proceso anterior, perdiendo la menor cantidad de cobre en el camino, sin tener como prioridad fundamental la calidad del mineral. Cabe destacar todos los trabajos presentados entregan buenos resultados. En [11] se presentan comparaciones entre estrategias de control predictivo que consideran modelos lineales vs estrategias con modelos no lineales, en donde se observa que el control no lineal se comporta mejor en un rango más amplio de operación. Hay que notar que estos trabajos fueron hechos en laboratorios, dentro de plantas pilotos por lo que a pesar de que simulan las condiciones más realistas que las de un proceso industrial, todavía no consideran problemas como la falta de instrumentación industrial para medir las variables que deben ser controladas, los niveles de perturbaciones a los que se someten debido a emergencias en los procesos, ni el comportamiento de la estrategia de control cuando los instrumentos (sensores y actuadores) se degradan.

También existen trabajos que consideran el control de los bancos “*Rougher*”, pero que principalmente buscan como optimizar el proceso, manipulando las referencias de los lazos de control del proceso con el fin de llevar el sistema a un punto óptimo de trabajo.

En [12] se presenta una estrategia de control predictivo que posee un elemento que compensa las perturbaciones provocadas por el cambio en la alimentación y el contenido de metales en el mineral y utiliza la adición de colectores (químicos) y flujo de aire como variables manipuladas para controlar el concentrado de cobre y la ley de los relaves. El documento indica que la estrategia es exitosa, aunque no considera el efecto de las perturbaciones no medidas, que pueden hacer que el comportamiento del proceso no sea óptimo.

En [13] se presenta la implementación de un módulo que de control predictivo SISO, que utiliza una estrategia de control predictivo conocida como control predictivo generalizado (GPC) para controlar las variables internas del proceso (ley de concentrado y ley de relaves). El trabajo presenta una herramienta robusta que permite seleccionar distintos pares de entrada y salida para el controlador dependiendo del objetivo deseado. El docu-

mento muestra que el módulo es programado exitosamente, logrando mejorar el control en el proceso de flotación.

Existen más trabajos en donde se presentan estrategias de control predictivo para el control de circuitos de flotación, por ejemplo [14], [15] y [16], pero la mayoría de estas estrategias asumen que el problema de inestabilidad en el nivel ya está solucionado, y lo que se desea es controlar la ley de relaves, la ley de concentrado o ambas. En el caso de este trabajo el problema es solucionado con una aplicación de control difuso programada en un sistema experto. Cabe destacar que las estrategias de control predictivo son muy útiles dentro del proceso de flotación ya que permiten hacer control multivariable y definir restricciones para las variables, que en general son impuestas por el sistema físico. Cabe destacar que los trabajos presentados anteriormente son todos desarrollados dentro de un ambiente de simulación, y no sobre un proceso real, por lo que las condiciones para el análisis e implementación de las estrategias son mucho más controladas.

Un problema similar al control del nivel de pulpa en los bancos “*Rougher*” presentado en este trabajo es el control de nivel en un conjunto de estanques acoplados. Varios trabajos se han realizado mostrando el poder de las estrategias de control predictivo para controlar el sistema de estanques acoplados, se han hecho trabajos en sistemas de dos ([17], [18]), tres ([19], [20]) o cuatro estanques acoplados ([21], [22]), todos ellos entregan buenos resultados, pero cabe destacar que algunos de estos trabajos, sobre todo los sistemas de cuatro estanques, no poseen la configuración en serie de los estanques acoplados, además no se hacen análisis sobre el efecto que generan los cambios en el flujo de entrada al sistema, que es el mayor problema en el circuito de flotación “*Rougher*”.

A continuación se presentan varias soluciones para realizar el control de nivel de los bancos de flotación a nivel industrial.

En [23] se proponen dos opciones; el uso de un controlador por desacoplo y un controlador LQR, en ambos casos el control se complementa con un controlador por prealimentación para compensar los cambios de flujo a la entrada del circuito. En este documento se concluye que ambas estrategias responden mejor que el control (SISO) mediante PID ya que consideran las interacciones entre los estanques, y al compararlas entre sí, se llega a la conclusión de que el controlador por desacoplo posee mejor desempeño que

el controlador LQR, pero solo cuando el modelo del proceso es preciso, por otro lado el control LQR es preferible cuando se desea que el nivel se mantenga más cerca de las referencias en algunas celdas.

En [24] se simula la respuesta del proceso a 4 estrategias multivariadas; el uso de un controlador por pre-alimentación a la entrada de la primera celda en conjunto con el control SISO mediante controladores PID, un controlador por desacoplo, un controlador PID para cada celda que además considera el error entre la referencia y el nivel de cada estanque en las celdas anteriores, las que se suman en proporción a la entrada del controlador y por último la estrategia descrita anteriormente en conjunto con un controlador de pre-alimentación para el flujo de entrada a la primera celda. Este documento concluye que el desempeño de todas las estrategias multivariadas es mucho mejor que la de los controladores SISO, además indica que la estrategia con mejor desempeño es el controlador mediante desacoplo, pero que éste tiene como limitación la necesidad de un buen modelo.

En [25] se presenta un controlador no lineal basado en pasividad para realizar el control del nivel de los estanques, manteniendo los niveles dentro de un rango determinado. El controlador presentado atenúa las perturbaciones a medida que se propagan por los tanques mejor que un controlador PI y como es de esperarse también logra cumplir con las restricciones (rango del nivel) entregadas.

En los documentos [26] y [27] se presenta la solución industrial (software) conocida como "*FloatStar Level Stabiliser*" de Mintek que utiliza un conjunto de técnicas de control avanzado, para obtener un controlador con un muy buen desempeño (mejora de hasta un 89 % en la varianza del nivel en algunas celdas). Estos documentos no indican la estrategia exacta que se utiliza para realizar el control del nivel de las celdas, pero detallan claramente las ventajas obtenidas.

En [28] se presentan los resultados de una estrategia de control predictivo híbrida para el control del proceso de flotación. En este trabajo las variables manipuladas son la apertura de las válvulas de salida de los bancos, y las salidas el nivel de los bancos y la ley de relaves final. El trabajo demuestra que la estrategia de control logra controlar las variables indicadas. Cabe destacar que este trabajo realiza un análisis mediante simulaciones y a pesar de que el trabajo considera distintas perturbaciones, hay que analizar si la estrategia

de control funciona bien dada la instrumentación y perturbaciones a las que se enfrenta un sistema de control de este tipo en un proceso real.

Finalmente en [29] se presenta teoría sobre una estrategia muy similar a la propuesta en este trabajo, donde se utiliza un modelo ARX en conjunto con un optimizador basado en algoritmos genéticos para realizar control predictivo, donde se indica que al usar algoritmos genéticos hay más flexibilidad al escoger la función objetivo, que ya no está limitada a una estructura específica (como que los costos sean cuadráticos). También sugiere una forma de adaptar el modelo de las perturbaciones utilizado en la estructura CARIMA a modelos no lineales y cómo agregar algunos tipos de no linealidades que puede haber en los actuadores ya sea al modelo del sistema o como una restricción dentro del problema de optimización. Se indica que lo que limita el uso de esta estrategia es el tiempo de cómputo, por lo que no se puede utilizar para controlar sistemas con dinámicas muy rápidas.

1.7. Hipótesis

Este trabajo plantea como hipótesis que se puede desarrollar una estrategia de control predictivo para el control de los bancos “*Rougher*” del proceso de flotación de Minería Candelaria, utilizando las herramientas que se poseen en la empresa (sistema experto KSX, sistema historizador PI, MATLAB) que permite mejorar el desempeño del circuito , entregando beneficios económicos para la compañía.

2. Proceso a trabajar

En este capítulo se describe el proceso en donde se realiza el trabajo, cuáles son sus objetivos y la naturaleza del problema a solucionar.

2.1. La planta

El trabajo es realizado en Minera Candelaria, minera ubicada a 20 kilómetros al suroeste de Copiapó y a 9 kilómetros de Tierra Amarilla, con una elevación de 680 metros sobre el nivel del mar. Minera Candelaria comprende una extensión de 4000 hectáreas que incluyen la mina, la planta concentradora, el tranque de relaves, planta desalinizadora y otras instalaciones, las cuales se encuentran en la cercanía de la carretera panamericana 5 norte, ruta por la cual se transporta en camiones el concentrado de cobre hasta el puerto punta padrones, ubicado en el puerto de Caldera.

Los principales minerales encontrados en la mina son la calcopirita, pirita, magnetita y en una menor proporción se encuentra oro y plata, siendo el mineral predominante la calcopirita, la cual es tratada para obtener concentrado de cobre.

El proceso de extraer el mineral y convertirlo en concentrado de cobre desarrollado en la minera se realiza en dos sectores; la mina y la planta concentradora. En la mina se realizan los procesos que permiten extraer y trasladar el mineral en forma de roca desde el cerro hacia la planta concentradora, la que luego se encarga de procesar el mineral extraído y obtener el concentrado de cobre que luego es vendido.

Este trabajo se realiza dentro de la planta concentradora, que se compone de varios procesos: el chancado primario, la molienda SAG, chancado de “*pebbles*”, la molienda convencional, la flotación, la planta de filtros, los espesadores de relaves y el tranque de relaves.

El chancado primario tiene como objetivo principal recibir la roca proveniente de la mina que posee un diámetro nominal de 1.2 metros y reducirlas de tamaño hasta que

el 90 % del mineral sea menor a 204 milímetros (8 pulgadas). Este mineral es enviado mediante una correa transportadora al acopio o stock pile de mineral grueso.

Luego, en la molienda SAG, se recoge el mineral de este acopio mediante tres alimentadores que lo envían a una correa que alimenta el molino SAG. Este molino posee una dimensión de 11 metros de diámetro y es el encargado de reducir el mineral con ayuda de una pequeña cantidad de bolas de acero. El mineral proveniente del molino SAG se clasifica mediante dos harneros, el primero posee una dimensión de 22 por 52 milímetros y el segundo de 11 por 52 milímetros. El material de sobre-tamaño se puede hacer recircular al molino SAG, a lo cual se le denomina circuito corto o a un depósito en donde se junta con el material de sobre-tamaño del circuito de “*pebbles*” y se envía hacia la planta de chancado de “*pebbles*” y el material de bajo tamaño se envía a la molienda convencional.

La planta de chancado de “*pebbles*” muele el material de sobre-tamaño mediante tres chancadores, este material se puede enviar a la correa que alimenta el molino SAG o hacia una correa que envía el material a dos harneros que clasifican el material en dos tamaños: el material sobre 11 milímetros retorna a los chancadores de “*pebbles*” y el bajo tamaño se envía a un molino de bolas que muele el material que al salir del molino se clasifica mediante una batería de 4 ciclones y luego enviada a la molienda convencional.

En la molienda convencional se utilizan dos molinos de bolas para reducir el tamaño del material proveniente de la molienda SAG y del circuito de “*pebbles*” a un tamaño adecuado para el proceso de flotación, lo que corresponde a 20 % sobre malla #100, es decir, que sólo el 20 % del material puede poseer un valor mayor a 120 micras. En este proceso el material es acumulado en una cuba en donde se añade agua y luego es impulsado por dos bombas a dos baterías de ciclones, que separan el material en fino y grueso. Cada batería envía el material grueso a un molino de bolas distinto que lo muele y lo envía nuevamente a la cuba. Mientras que el material fino proveniente de la batería de ciclones se envía a flotación.

En la flotación, mediante la adición de reactivos, agitación y adición de burbujas de aire, se hace que el mineral de cobre valioso flote hacia la superficie.

El concentrado producido en la etapa de flotación alimenta la siguiente etapa de espesamiento, en donde tres espesadores de concentrado, reducen la cantidad de agua en

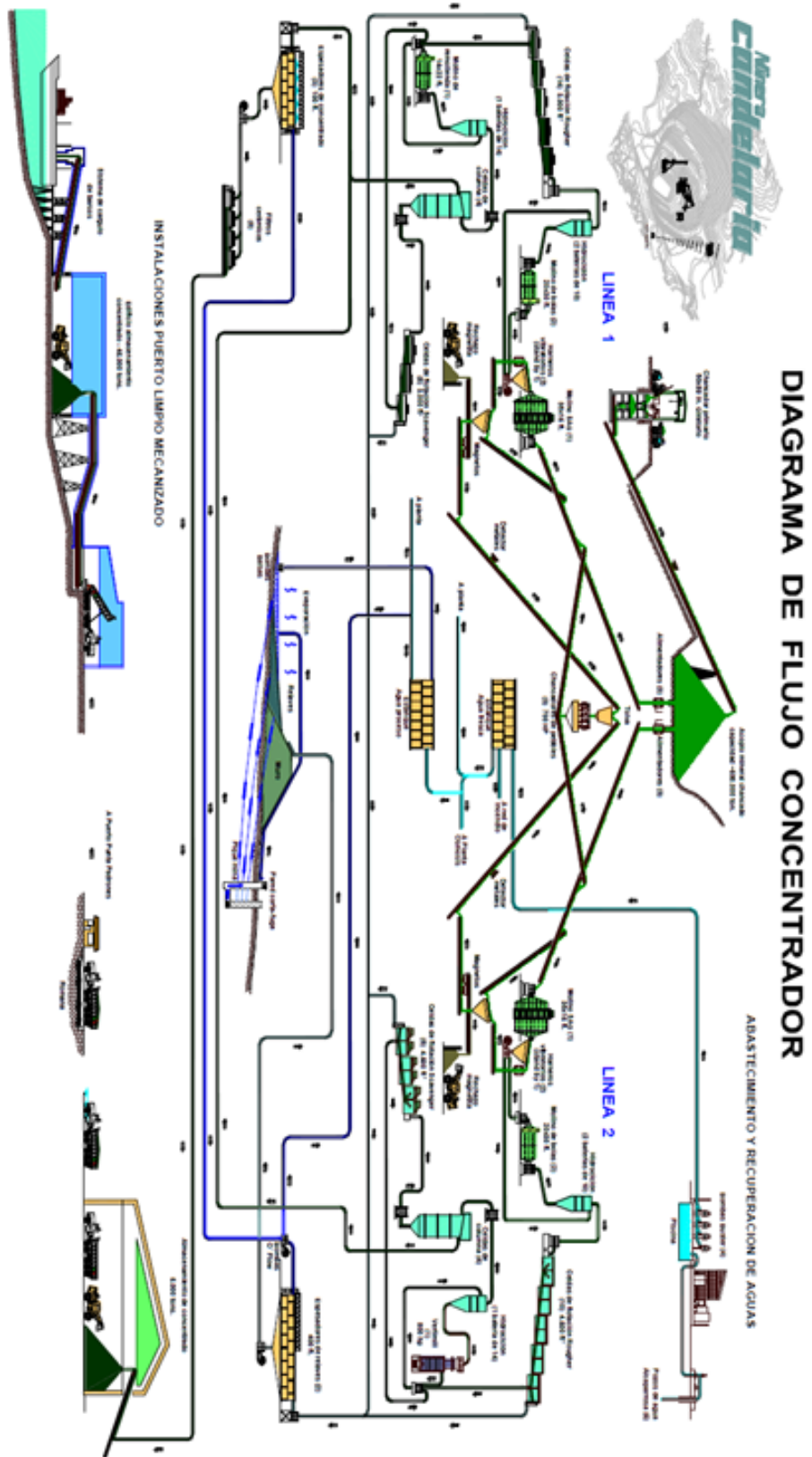


Figura 2.1: Esquema de la planta concentradora.

el concentrado, aumentando el porcentaje de sólidos de éste de 18 por ciento a 60 por ciento. El agua recuperada se envía a un sumidero de donde es recogida y reenviada hacia los circuitos del proceso. El concentrado proveniente del espesador se envía a ocho filtros cerámicos, en donde se filtra y se obtiene un concentrado con 9 por ciento de humedad el cual es transportado a un acopio de concentrado con una capacidad de 45.000 toneladas en el puerto de Caldera.

Los relaves producidos por la planta de flotación se impulsan hacia dos espesadores de relaves que reducen la cantidad de agua en los relaves, los cuales son enviados a el tranque de relave, mediante tres trenes de bombas (uno para cada espesador y uno auxiliar común) en donde es acumulado.

Cabe destacar que en la planta concentradora, cuyo diagrama de flujos puede verse en la figura 2.1, hay dos líneas de producción, que constan de un circuito de molienda SAG, un circuito de molienda convencional, un circuito de flotación, un espesador de relaves y un espesador de concentrado respectivamente. El trabajo desarrollado considera el desarrollo de una estrategia de control para cada línea de producción.

2.2. Descripción del proceso de flotación

La flotación es un proceso de concentración en donde se busca separar el material valioso (sulfuros de cobre) del resto de material que componen la roca original. En este proceso, se aprovecha la diferencia en las propiedades aerofílicas de los distintos materiales que componen la roca, que hace que algunos materiales se peguen más fácilmente a burbujas de aire que se generan mediante la impulsión de aire en el proceso, de manera que estos floten hacia la superficie de un estanque o celda.

La unidad básica para desarrollar el proceso de flotación se conoce como celda de flotación. Esta puede ser un tanque o recipiente de dimensiones adecuadas. A las celdas de flotación entra pulpa de mineral y sale concentrado de cobre por una parte y colas o material pobre en mineral valioso por otra. A la celda se le agregan químicos (espumantes y colectores) que hacen que las partículas de mineral valioso floten con más facilidad y que generan una capa de espuma estable.

La celda de flotación tiene una rastra que se utiliza para agitar la pulpa. Cerca de la rastra se añade un flujo de aire con el fin de generar burbujas. Las partículas aerofílicas (que flotan con mayor facilidad) se pegan a la superficie de las burbujas y levantan los minerales a la superficie de la celda de flotación, formando una capa de mineral. Sin embargo, durante este procedimiento, material no valioso también puede flotar a la superficie. El nivel del material dentro de la celda de flotación es controlado, de manera que la espuma rebose controladamente por el borde de la celda. La espuma que rebose es enviada a un estanque donde continúa el proceso, mientras que las colas de la celda se envían a la siguiente celda en el banco de flotación.

En la figura 4 se observa el principio de funcionamiento de la flotación de minerales dentro de una celda de flotación.

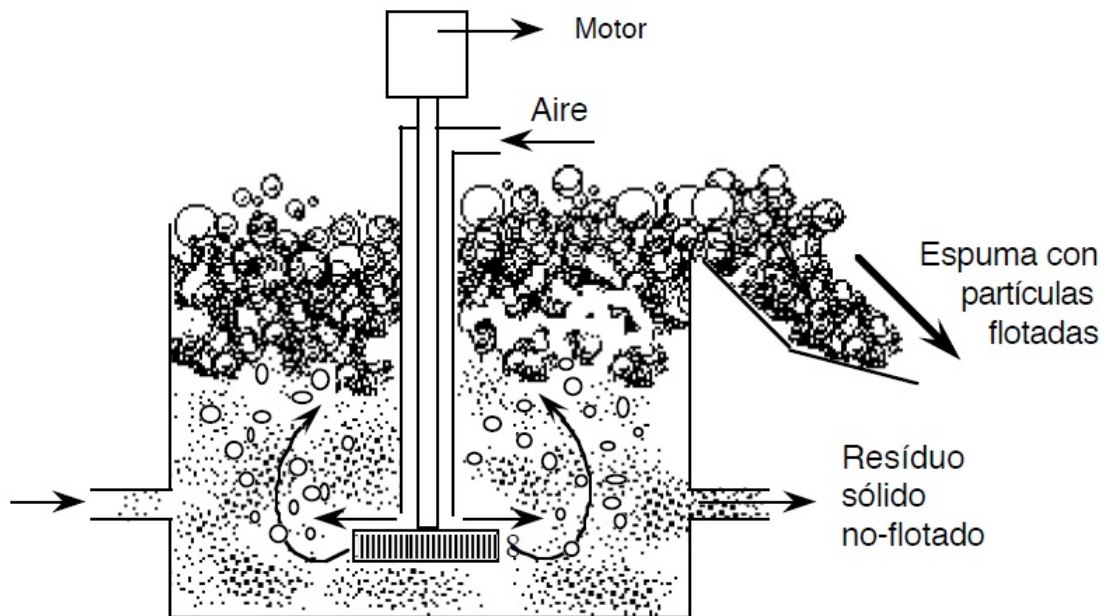


Figura 2.2: Principio de funcionamiento de la flotación de minerales.

El objetivo del proceso de flotación es obtener concentrado con una ley alta de minerales valiosos. Para conseguir este objetivo, las celdas de flotación se conectan en serie para formar un banco de flotación y varios bancos se conectan en serie para formar un circuito de flotación.

2.3. Bancos de flotación

Las celdas de flotación se conectan en serie para formar un banco de flotación, como se muestra en la figura 2.3a. Inicialmente la pulpa se alimenta a la primera celda del banco de flotación. Una fracción del concentrado de mineral valioso es extraído en la primera celda y el resto de la pulpa se envía al siguiente banco donde más mineral valioso es extraído y así sucesivamente. La pulpa que sale de la última celda del banco se conoce como cola. La ley de concentrado total del banco corresponde a la ley de concentrado obtenido por el conjunto de celdas. El banco puede consistir en una serie de bancos interconectados o de un estanque con agitadores en serie.

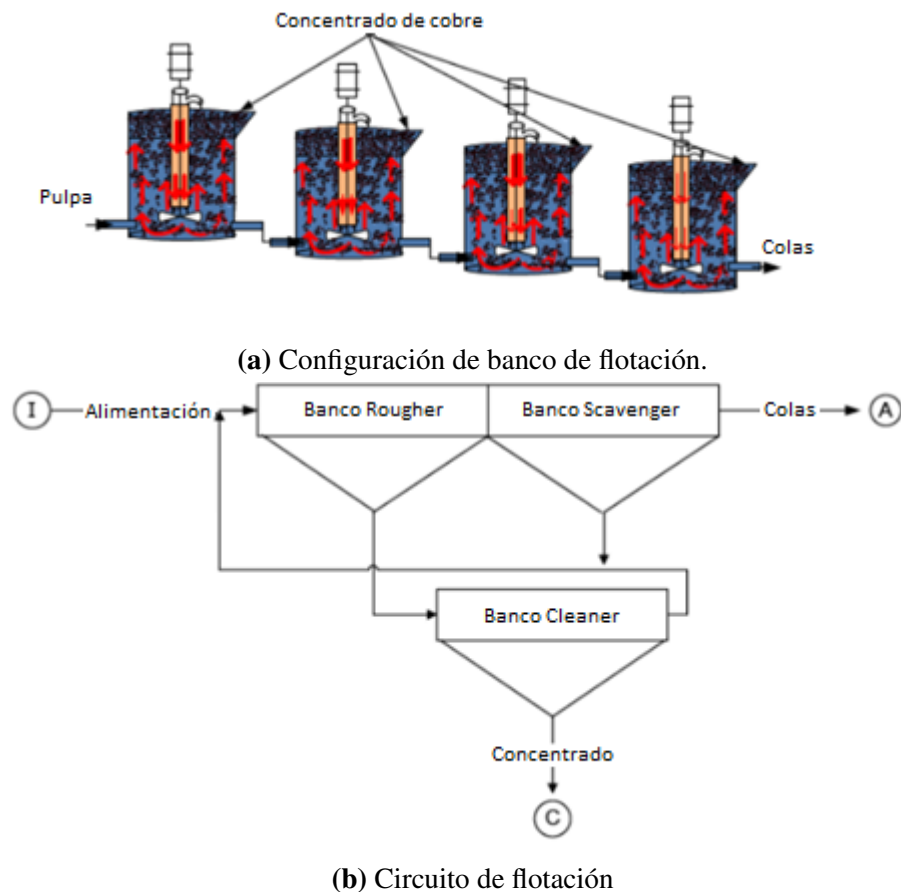


Figura 2.3: Mecánica de la flotación.

2.4. Circuitos de flotación

En la industria, las celdas de flotación están conectadas en series de bancos que forman un circuito de flotación. El circuito de flotación está diseñado para alcanzar una alta ley de concentrado y recuperación, controlando el flujo y tamaño del estanque, que le dan al mineral suficiente tiempo para ser activado.

El proceso consta de 4 circuitos: la flotación “*Rougher*”, la flotación “*Scavenger*”, la remolienda y la flotación columnar.

Las celdas “*Rougher*” son la primera etapa del proceso y produce el concentrado “*Rougher*”. El objetivo en esta etapa es recuperar la mayor cantidad de material valioso como sea posible, sin poner mucho énfasis en la calidad (ley) del concentrado producido.

El concentrado “*Rougher*” generalmente se somete a otra etapa de molienda, conocida como remolienda, en donde se busca reducir el tamaño de la pulpa de mineral concentrado, de manera de que sea más fácil para este material pegarse y flotar con las burbujas.

Generalmente las colas provenientes en etapa de flotación “*Rougher*” alimenta la etapa de flotación “*Scavenger*”. El objetivo de esta etapa es recuperar cualquier mineral que no fue recuperado en la etapa “*Rougher*”, lo que se logra cambiando las condiciones de la flotación para hacerlas más rigurosas que la de la etapa anterior.

Luego en las columnas de flotación el concentrado proveniente del circuito “*Rougher*” y “*Scavenger*”, se procesa mediante un método conocido como flotación columnar y que se utiliza para reducir la cantidad de mineral no valioso que hay en el concentrado, a esta etapa se le conoce como etapa de limpieza. El producto final de esta etapa se conoce como el concentrado “*Cleaner*” y es el concentrado final que entrega el proceso de flotación.

Existen muchas formas de conectar los circuitos, lo que se decide en la etapa de diseño de la planta de flotación, un ejemplo de la configuración de los circuitos en una planta se presenta en la figura 2.3b.

2.5. Circuito de flotación de la planta

En la planta concentradora, el flujo de bajo tamaño proveniente de la molienda convencional alimenta la flotación “*Rougher*” en ambas líneas de producción. El circuito de flotación “*Rougher*” de la línea de producción 1 tiene 14 celdas con una capacidad de 85 [m³] (3000 [pies³]). El banco “*Rougher*” de la línea 2 consta de diez celdas de una capacidad de 127 [m³] (4500 [pies³]). Las celdas de flotación “*Rougher*” proporcionan agitación e introducen aire dentro de la pulpa. Los minerales que contiene cobre en la pulpa flotan a la superficie y son extraídos como un concentrado, mientras que el residuo, que posee un concentrado muy bajo de mineral valioso (conocido como relaves) sale desde la última celda del banco de flotación a un estanque en donde es acumulado, que luego es impulsado mediante una bomba hacia los espesadores de relaves.

El concentrado de cada circuito de flotación (“*Rougher*” y “*Scavenger*”) se envía a su respectivo circuito de remolienda que consta de una cuba donde se acumula el concentrado, un molino vertical que muele el concentrado, y una batería de ciclones que clasifica el material. El material fino obtenido en el circuito de remolienda circula hacia la etapa de limpieza, que se realiza mediante columnas de flotación, mientras que el material grueso se recircula hacia la cuba de remolienda para ser molido otra vez.

El circuito de flotación de cada línea de producción posee tres bancos de flotación “*Scavenger*” y cinco columnas para la etapa de limpieza. El circuito de flotación “*Scavenger*” de la línea 1 posee ocho celdas de 85 [m³], en donde el primer banco se compone de dos celdas y los otros dos bancos de tres celdas y el circuito “*Scavenger*” de la línea 2 tiene seis celdas con una capacidad de 127 [m³], en donde los tres bancos están compuesto por dos celdas cada uno.

Las columnas de la etapa de limpieza poseen una altura de 14 metros (46 pies) por 3.7 metros (12 pies) de diámetro. En esta etapa cuatro de las columnas funcionan en modo “*Cleaner*” realizando la función de limpieza del concentrado y la quinta columna funciona en modo “*Recleaner*”, en donde se vuelve a limpiar el concentrado proveniente de las otras columnas, entregando el concentrado final, que luego se envía a la etapa de espesamiento. La quinta columna también tiene la opción de funcionar en modo “*Cleaner*”,

en cuyo caso el concentrado final que se entrega a la etapa de espesamiento corresponde concentrado proveniente de las cinco columnas.

Los relaves de la flotación columnar son bombeados hacia la etapa de flotación "Scavenger" en donde se recuperan los minerales de cobre residuales. Los relaves de la flotación "Scavenger" son enviados hacia la cuba de relaves, los que luego circulan hacia los espesadores de relaves. Mientras que el concentrado de las celdas de flotación "Scavenger" se envían al circuito de remolienda, en donde el material es molido y enviado a las columnas de flotación para su limpieza, cerrando el circuito.

El diagrama de flujos del circuito de flotación de la planta concentradora de la minera en donde es realizado el trabajo se puede observar en la figura 2.4.

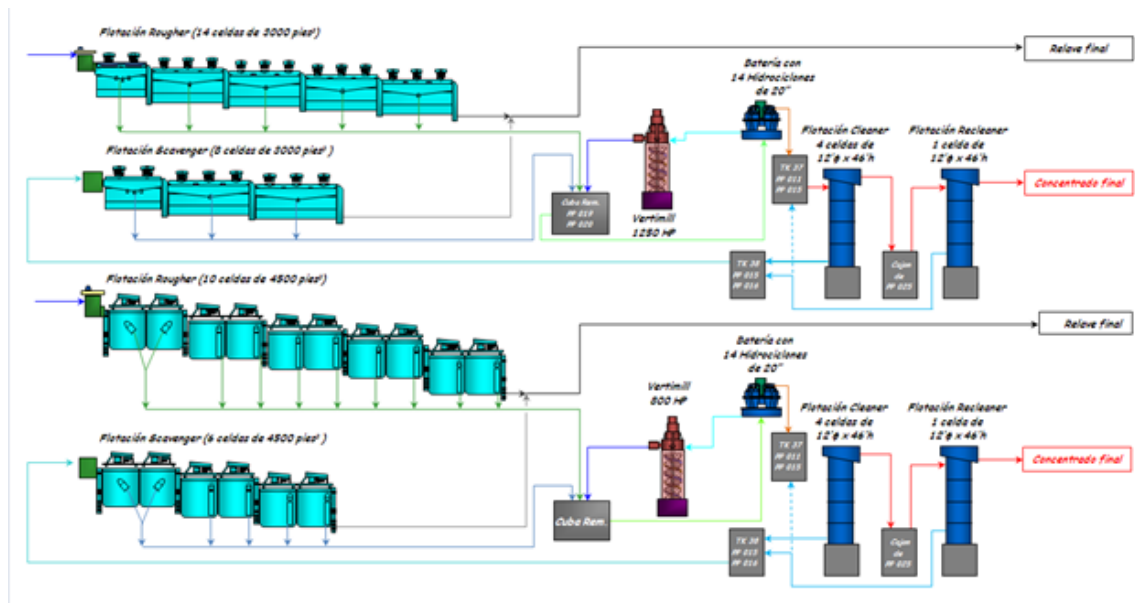


Figura 2.4: Diagrama de flujo del circuito de flotación.

2.6. Control de nivel en banco "Rougher"

Dentro de la planta, las variables que se manipulan para mejorar el resultado del proceso, son la cantidad de reactivos que se le añaden al proceso (espumantes y colectores) y el nivel de trabajo de cada banco. En la planta los reactivos se añaden en proporción a la cantidad de material que se alimenta al circuito, por lo que el control del proceso se realiza en función del nivel de la pulpa en cada celda.

El nivel de pulpa se controla de manera que la espuma rebose por el borde de celda de manera controlada. Mientras más alto es el nivel de pulpa en la celda, más rápido rebosa la espuma, y es más probable que parte del mineral no valioso también rebose, lo que reduce la ley de concentrado "Rougher", pero también reduce la cantidad de cobre que se va por las colas (ya que hay que trabajar con los actuadores más cerrados), por lo que en general a pesar de que empeora la calidad del material entregado, aumenta la recuperación.

Al operar el proceso, también se debe tener en cuenta que el rebose debe ser controlado, ya que el concentrado que se obtiene se acumula en un recipiente (o cuba) y hay que evitar que el rebose por las celdas sea tan grande que provoque un rebalse en este recipiente, ya que todo el material que rebosa termina siendo pérdida para la empresa, y genera molestias ya que debe ser limpiado. Por lo tanto, es importante controlar el nivel en las celdas de manera apropiada.

Este trabajo se realiza dentro del circuito de flotación "Rougher", que consiste en 5 bancos conectados en serie y consiste en el control de nivel de conjunto de bancos, con el fin de disminuir las variaciones en los bancos producto de las perturbaciones a las cuales son sometidas. El nivel de cada banco se controla manipulando 4 válvulas a la salida de la última celda del banco, celdas que cambian al unísono en función del porcentaje de apertura que se le entrega.

Para realizar el control, en este trabajo, se utiliza una estrategia de control predictivo, que permite mejorar el control que se realiza con controladores PID, al modelar la perturbación que genera en el flujo de entrada cambiar la apertura del banco anterior, además del efecto que tiene el nivel en los flujos del circuito, con el fin de realizar acciones correctivas antes de que estas perturbaciones tengan efecto en el banco, esta estrategia será presentada en el capítulo 5.

2.6.1. Modelo no lineal

Para efectos de control los bancos se pueden considerar como un sistema de estanques acoplados, en donde el flujo de salida de cada estanque se manipula abriendo o cerrando una válvula como el presentado en la figura 2.5.

En el esquema se denomina y_1 a y_5 al nivel de los bancos 1 a 5 respectivamente, y u_1

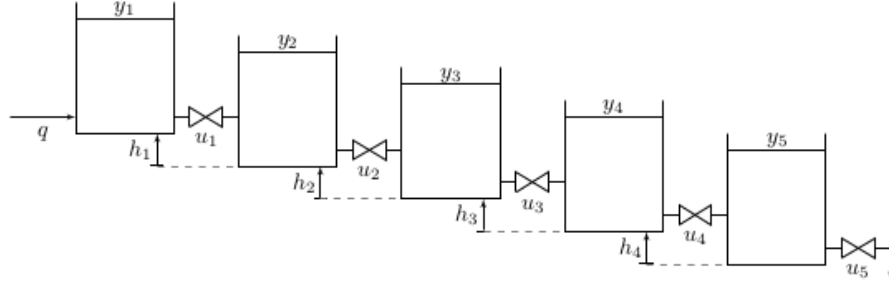


Figura 2.5: Esquema de bancos "Rougher" desde el punto de vista de control.

a u_5 corresponden a las actuaciones (porcentaje de apertura) de cada banco, además del flujo de entrada del primer banco, es denominado como q .

Considerando el circuito "Rougher" como un conjunto de estanques acoplados, se puede modelar utilizando el principio de Bernoulli, con lo cual se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones no lineales:

$$\dot{y}_1(t) = \frac{1}{S} \left(q(t) - \alpha_1 \cdot u_1(t) \sqrt{y_1(t) - y_2(t) + h_1} \right) \quad (2.1a)$$

$$\dot{y}_2(t) = \frac{1}{S} \left(\alpha_1 \cdot u_1(t) \sqrt{y_1(t) - y_2(t) + h_1} - \alpha_2 \cdot u_2(t) \sqrt{y_2(t) - y_3(t) + h_2} \right) \quad (2.1b)$$

$$\dot{y}_3(t) = \frac{1}{S} \left(\alpha_2 \cdot u_2(t) \sqrt{y_2(t) - y_3(t) + h_2} - \alpha_3 \cdot u_3(t) \sqrt{y_3(t) - y_4(t) + h_3} \right) \quad (2.1c)$$

$$\dot{y}_4(t) = \frac{1}{S} \left(\alpha_3 \cdot u_3(t) \sqrt{y_3(t) - y_4(t) + h_3} - \alpha_4 \cdot u_4(t) \sqrt{y_4(t) - y_5(t) + h_4} \right) \quad (2.1d)$$

$$\dot{y}_5(t) = \frac{1}{S} \left(\alpha_4 \cdot u_4(t) \sqrt{y_4(t) - y_5(t) + h_4} - \alpha_5 \cdot u_5(t) \sqrt{y_5(t)} \right) \quad (2.1e)$$

Donde S corresponde al área transversal de los bancos, $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ son coeficientes de proporcionalidad que dependen del área transversal del orificio que conecta los bancos y la constante de gravedad, y h_1, \dots, h_4 la diferencia de altura entre los bancos.

Note que las no linealidades provienen de la relación entre el coeficiente de la válvula con el flujo y de la diferencia de alturas. Aun así, el sistema se puede aproximar bien por un sistema lineal dentro de su rango de operación, razón por la cual el sistema es controlado mediante controladores PID. En el capítulo 6 se presentará la descripción del proceso de identificación de este sistema, el cuál es modelado como un sistema lineal discreto.

2.6.2. Modelo lineal

Luego el sistema de ecuaciones obtenido en (2.1) se puede linealizar en torno a un punto de operación, lo que lleva al siguiente modelo:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + T \cdot q(t) \quad (2.2a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad (2.2b)$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} S^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{45} & \beta_{55} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = -\frac{\alpha_1}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1}}$$

$$a_{12} = \frac{\alpha_1}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1}}$$

$$a_{32} = \frac{\alpha_2}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2}}$$

$$a_{23} = \frac{\alpha_2}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2}}$$

$$a_{43} = \frac{\alpha_3}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3}}$$

$$a_{34} = \frac{\alpha_3}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3}}$$

$$a_{54} = \frac{\alpha_4}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4}}$$

$$a_{21} = \frac{\alpha_1}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1}}$$

$$a_{22} = -\frac{\alpha_1}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1}} - \frac{\alpha_2}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2}}$$

$$a_{33} = -\frac{\alpha_2}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2}} - \frac{\alpha_3}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3}}$$

$$a_{44} = -\frac{\alpha_3}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3}} - \frac{\alpha_5}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4}}$$

$$\begin{aligned}
a_{45} &= \frac{\alpha_4}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4}} & a_{55} &= -\frac{\alpha_4}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4}} - \frac{\alpha_5}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_5}} \\
\beta_{11} &= \frac{\alpha_1}{S} \cdot \sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1} \\
\beta_{21} &= \frac{\alpha_1}{S} \cdot \sqrt{Y_1 - Y_2 + h_1} & \beta_{22} &= -\frac{\alpha_2}{S} \cdot \sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2} \\
\beta_{32} &= \frac{\alpha_1}{S} \cdot \sqrt{Y_2 - Y_3 + h_2} & \beta_{33} &= -\frac{\alpha_3}{S} \cdot \sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3} \\
\beta_{43} &= \frac{\alpha_3}{S} \cdot \sqrt{Y_3 - Y_4 + h_3} & \beta_{44} &= -\frac{\alpha_4}{S} \cdot \sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4} \\
\beta_{54} &= \frac{\alpha_4}{S} \cdot \sqrt{Y_4 - Y_5 + h_4} & \beta_{55} &= -\frac{\alpha_5}{S} \cdot \sqrt{Y_5}
\end{aligned}$$

Este modelo indica que, para efectos del procedimiento de identificación, en donde el orden del sistema no es conocido, éste debe ser bajo. Como se señala anteriormente, este modelo no considera el efecto que puede tener la dinámica de las válvulas, ni que un banco consiste en un conjunto de dos o tres celdas conectadas, por lo que hay una dinámica debido al traspaso de pulpa de una celda a la otra, ni el hecho que no son celdas perfectamente cúbicas, etc.

3. Herramientas de trabajo

La implementación de la herramienta de trabajo se realiza dentro del sistema experto de la compañía, este sistema experto se comunica con el sistema de control distribuido (DCS) mediante el protocolo de comunicación OPC.

El sistema experto recibe la información de terreno enviada por el DCS, procesa dicha información mediante sus herramientas de lógica difusa, lógica convencional, redes neuronales, optimizadores, etcétera y calcula los cambios que hay que hacer en el punto de operación del proceso, ya sea manipulando las actuaciones o las referencias del proceso. Los equipos físicos que están en terreno se comunican con el DCS, por lo tanto reciben y transmiten información solamente a través del DCS, por lo que para aplicar los cambios calculados para las referencias o las actuaciones del proceso, el sistema experto debe enviar los datos al DCS, el que luego realiza los cambios. Como se señaló anteriormente esta comunicación se realiza mediante el protocolo de comunicación OPC. En la primera parte de este capítulo se presentan detalles sobre la arquitectura del sistema de control de la empresa, el sistema experto con el que trabaja, y el protocolo de comunicación OPC. En la segunda parte de este capítulo se presentan algunos aspectos teóricos de las herramientas utilizadas en la identificación de la dinámica del nivel de los bancos Rougher y la herramienta de optimización que luego se utiliza en el desarrollo de la estrategia de control predictivo.

3.1. Arquitectura del sistema de control

La estructura del sistema de control de la minera en donde fue realizado el trabajo se muestra en la figura 3.1.

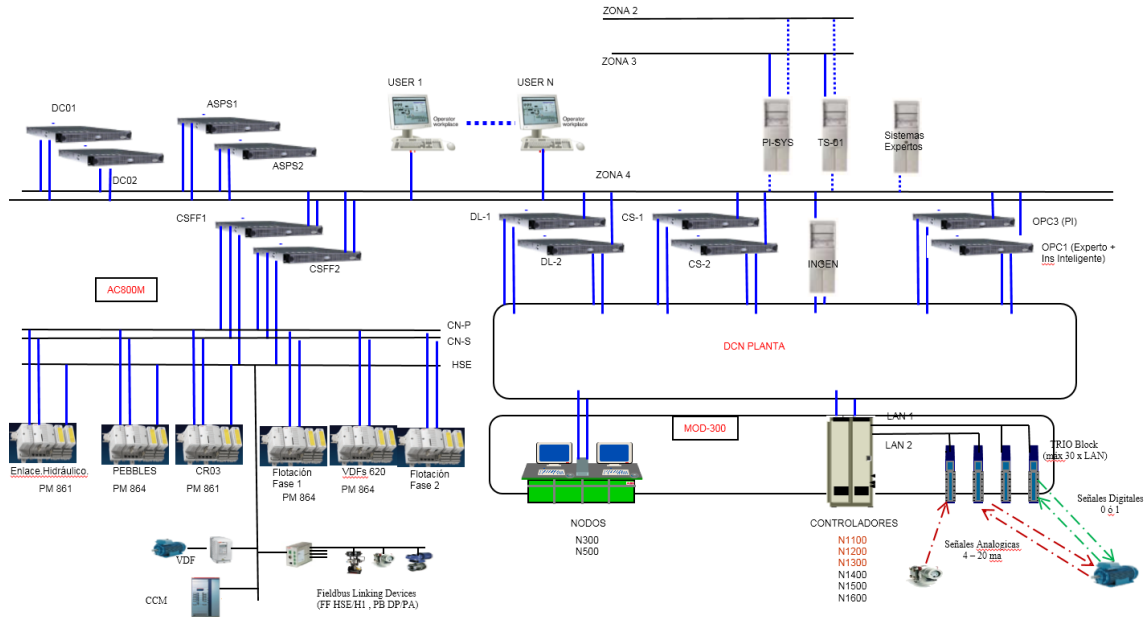


Figura 3.1: Arquitectura del sistema de control de la planta.

El sistema posee cuatro sistemas de control distribuidos (DCS), que se encargan del control individual de cada equipo mediante controladores PID y lógica de escalera, uno de ellos trabaja con la plataforma MOD 300, y tres con el sistema 800xA, ambos de ABB.

En un comienzo la planta contaba solo con dos DCS, basados en la plataforma MOD 300: un DCS para el chancado primario, y uno para el resto de procesos de la planta (molienda, flotación, espesadores, filtros). Luego, fueron incorporados nuevos procesos a la planta, y en dichos procesos se utilizó una plataforma DCS más moderna (sistema 800xA). Con el fin de contar con una plataforma más reciente, se comenzó un proceso de migración desde MOD 300 al sistema 800xA, comenzando con el chancado primario, que actualmente funciona con esta plataforma. Además, la minera incorporó una planta desalinizadora en el puerto de Caldera, la que cuenta con su propio DCS, que también utiliza la plataforma 800xA. La arquitectura del sistema de control del chancado primario y la planta desalinizadora se presentan en las figuras 3.2 y 3.3 respectivamente.

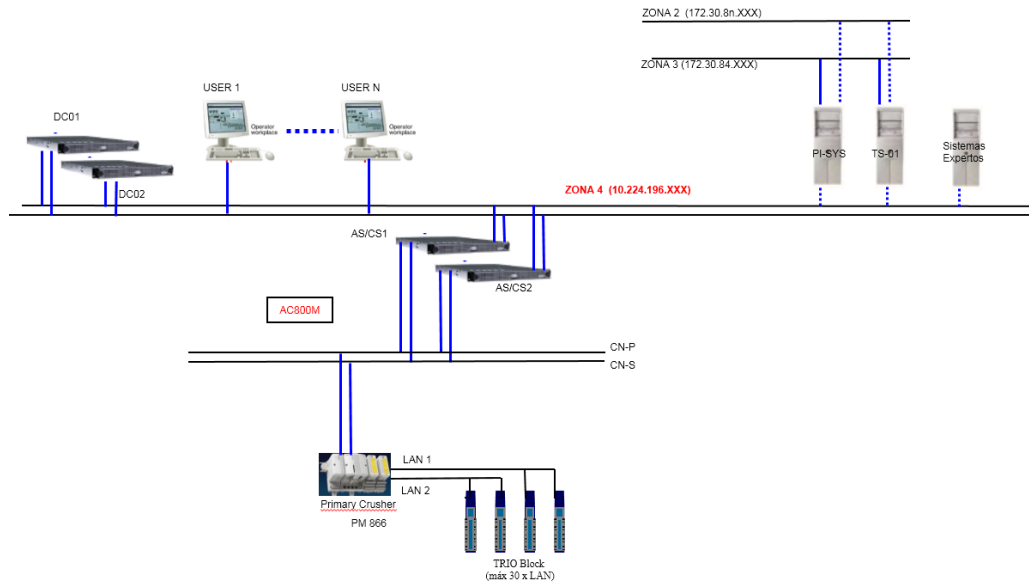


Figura 3.2: Arquitectura del sistema de control del chancado primario.

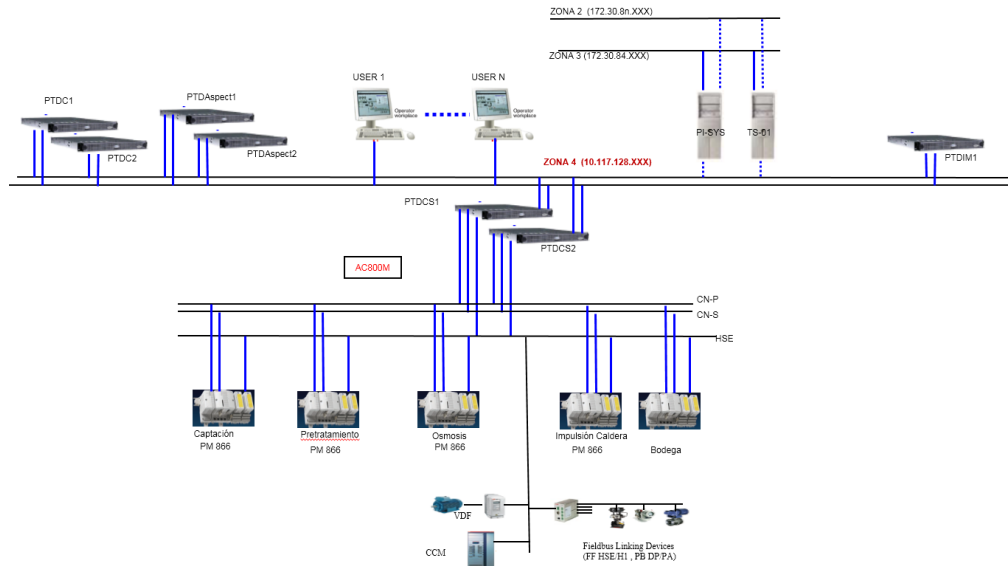


Figura 3.3: Arquitectura del sistema de control de la planta desalinizadora.

MOD 300 se comunica por medio de protocolo de comunicación propietario de ABB del tipo “*Token Ring*” denominado como anillo DCN.

Al anillo DCN se conectan controladores industriales SC6000, que cuentan con 2 LAN por controlador y 30 “*Taylor Remote Input/Output (o TRIO) blocks*” por LAN.

Los “*TRIO blocks*” tienen como función recopilar las señales I/O provenientes de terreno.

Además, al anillo DCN se conectan turbo-nodos, que tienen como objetivo el despliegue de información. También interactúa con una estación de ingeniería, que permite a los ingenieros generar la lógica y reglas de control, con un servidor histórico encargado de guardar la historia de las alarmas y eventos del sistema.

Todos los sistemas de control se comunican por la red de control, también denominada zona 4, que es una red de acceso reducido.

Existen dos sistemas que comunican la red de control con la red de negocios de la empresa, también denominada zona 2, que es la red a la que tiene acceso todo el personal perteneciente a la compañía. Estos sistemas corresponden al “Terminal Server” (TS-01), que permite el acceso remoto, a la red de control, y el sistema “PI” (PI-SYS), que guarda la información del proceso dentro de una base de datos histórica, la que puede ser accedida por los empleados de la compañía.

Existen una serie de servidores OPC, que permiten que los sistemas que trabajan con distintos protocolos de comunicación se comuniquen entre sí. Ellos son:

- OPC3: Comunica los sistemas de control con el sistema PI.
- OPC1: Comunica los sistemas de control con el sistema experto y los sensores inteligentes.
- OPC4: Comunica el sistema de control del chancado primario con los demás sistemas.

El sistema 800xA maneja la información de una forma distinta a MOD 300, ya que las estaciones de trabajo se conectan a la red de control, y no al sistema de control como es el caso de MOD 300, y el sistema trabaja con una interfaz HMI por medio de servidores denominados aspectos (ASPS1 y ASP2).

Para conectar MOD 300 con los servidores aspectos del sistema 800xA, se cuenta con dos servidores OPC redundantes, denominados servidores de conectividad (CS-1 y CS-2), del mismo modo se cuenta con servidores de conectividad (CSFF1 y CSFF2) para los procesos controlados por el sistema 800xA y 2 servidores (DL-1 y DL-2) que comunican directamente el sistema de MOD 300 con el sistema 800xA.

El servidor de dominio (DC-01) permite restringir el acceso a la red de control. En el chancado primario el servidor AS/CS1 y AS/CS2 cumple la función tanto de servidor aspecto como de conectividad.

En la planta desalinizadora los servidores PTDC1 y PTDC2 corresponden a los servidores de dominio, los servidores PTDApect1 y PTDApect2 a los servidores de aspectos, los servidores PTDCS1 y PTDCS2 a los servidores de conectividad y el servidor PTDIM1 corresponde a un servidor que permite tener acceso tanto a la información histórica como en tiempo real.

Adicionalmente se cuenta con el sistema experto, en donde se realiza el trabajo, que toma las variables de terreno y las manipula a través de reglas con el fin de optimizar el proceso, comunicándose con el DCS mediante un servidor OPC.

3.2. Sistema experto KSX

KSX es un software perteneciente a la compañía KnowledgeScape, empresa dedicada al desarrollo e implementación de sistemas de control experto, con plataformas tanto externas como propias.

KSX es un sistema experto que está diseñado para optimizar el rendimiento de una planta de acuerdo a objetivos definidos por el usuario. El sistema experto permite representar objetos físicos (equipos, actuadores, sensores) mediante programación orientada a objetos. Y permite actuar dentro del sistema mediante la integración de reglas de comportamiento (o scripts) del tipo si – entonces.

El sistema experto utiliza un árbol de jerarquía basado en nodos. Un proceso puede ser descrito mediante nodos y sub-nodos, mientras que los datos numéricos, texto y estados pueden ser almacenados en atributos. Además a los nodos se les pueden integrar reglas (scripts programables) y modelos mediante redes neuronales, que se pueden utilizar para entregarle inteligencia al sistema. Los datos son almacenados en atributos dentro de los nodos y esta información se puede visualizar mediante gráficos de tendencias, reportes de texto, tablas de datos, histogramas y gráficos.

KSX utiliza su propio lenguaje de programación y permite utilizar tanto lógica difusa

como convencional en el diseño de las reglas de comportamiento. Además, KSX posee herramientas con capacidad de modelamiento mediante redes neuronales y optimización mediante algoritmos genéticos. El sistema experto utiliza tanto lógica difusa como convencional dentro de sus reglas.

Dentro de las características más importantes del software, se encuentran:

- Sistema de computación distribuida. El sistema permite trabajar con computadores que sirven de servidores, que realizan los cálculos y computadores clientes, que permiten acceder y manipular la aplicación que corre en el servidor
- Arquitectura de nodos y atributos.
- Herramientas de lógica difusa.
- Herramienta para comunicación mediante servidor OPC.
- Herramientas de predicción. Cuenta con herramientas de predicción en base a redes neuronales.
- Herramientas de optimización. Cuenta con herramientas de optimización en base a algoritmos genéticos.
- Herramienta para presentar gráficos.
- Herramienta para presentar información en forma escrita.
- Herramienta para presentar tablas de valor.
- Herramienta historizadora.
- Herramienta de presentación de datos estadísticos (histogramas y gráfico de dispersión)
- Son estas las herramientas utilizadas para realizar el control del proceso.

En [30] se presenta el desarrollo de una aplicación para el control de la molienda convencional.

3.3. Estándar de comunicación OPC

OPC, de las siglas “*Object linking and embedding (OLE) for process control*” es un estándar de comunicación, basado en tecnología de Microsoft que ofrecen una interfaz común para facilitar la transferencia de datos entre dispositivos de hardware industriales y sistemas informáticos, como interfaces de control, sistemas de supervisión, bases de datos, etcétera.

La principal ventaja del estándar OPC es que provee una interfaz común para la comunicación de distintos productos de control industrial, independiente del software o hardware usado en el proceso.

El estándar OPC está basado en una arquitectura cliente servidor. Un servidor OPC es un software que reúne los datos de dispositivos (como PLC, controladores DCS o SCADA) usando los protocolos nativos del dispositivo (como MODBUS o PROFIBUS). El servidor, entonces, permite acceder a esta información, permitiendo a múltiples clientes OPC indirectamente leer y escribir datos al dispositivo de campo mediante el servidor OPC. Un cliente OPC es una aplicación que accede a los datos almacenados en el servidor OPC.

3.4. Algoritmos Genéticos

Parte del diseño de un problema de control predictivo consiste en plantear un problema de optimización que debe ser resuelto por algún método de optimización numérica. La herramienta que hay en la compañía para resolver este problema de optimización corresponde al optimizador presente en el sistema experto KSX, que funciona en base a algoritmos genéticos. Debido a lo anterior, en este trabajo se utiliza esta herramienta. A continuación hace una reseña sobre los algoritmos genéticos, para más detalles sobre esta herramienta se recomienda revisar [31], [32].

Los algoritmos genéticos corresponden a una técnica de optimización y búsqueda que se basa en los principios de la genética y selección natural presentes en la naturaleza. Un algoritmo genético hace evolucionar la solución de un problema de optimización, encon-

trando la solución de un problema donde se minimiza o maximiza una función objetivo mediante reglas de selección bien definidas.

Algunas de las ventajas de los algoritmos genéticos son [32]:

- Resuelve problemas de optimización con variables continuas y/o discretas.
- No requiere información de las derivadas de ninguna variable, al contrario de otros algoritmos de búsqueda.
- Busca simultáneamente en un amplio espacio de las soluciones del problema.
- Permite lidiar con un amplio número de variables.
- Se combina bien con la computación paralela.
- Puede resolver problemas de optimización que poseen funciones de costo complejas (se puede salir de los mínimos locales)
- Trabaja con datos generados numéricamente, datos experimentales o funciones analíticas.

Estas ventajas le permiten a los algoritmos genéticos encontrar soluciones para algunos problemas de optimización donde otros algoritmos de búsqueda fallan.

La desventaja de los algoritmos genéticos es que el tiempo que demoran en encontrar una solución para algunos problemas puede ser mucho mayor al de otros algoritmos que ya han sido optimizados en este sentido (por ejemplo la optimización de una función analítica convexa con pocas variables).

3.4.1. Componentes de un algoritmo genético

El algoritmo genético al igual que todos los otros métodos de optimización se inicia definiendo las variables a optimizar y la función de costo, y termina evaluando su desempeño, de acuerdo a un procedimiento de término, sin embargo lo que hacen entre medio los algoritmos genéticos es muy diferente. Un diagrama de flujos de los componentes de un algoritmo genético se presenta en la figura 3.4.

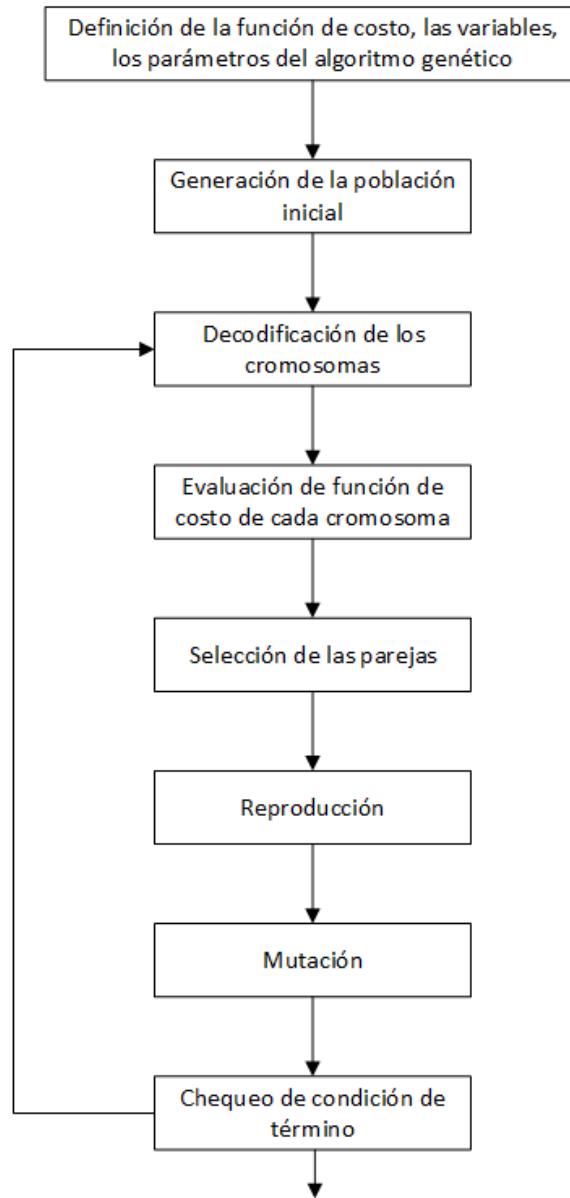


Figura 3.4: Diagrama de flujos de los componentes de un algoritmo genético.

El algoritmo genético comienza definiendo un cromosoma, que corresponde a un arreglo de las variables a ser optimizadas. Si el problema posee N_o variables a ser minimizadas dadas por u_1, u_2, \dots, u_{N_o} , entonces el cromosoma se escribe como

$$C_r = [u_1, u_2, \dots, u_{N_o}] \quad (3.1)$$

Luego cada cromosoma tiene un costo asociado a la función de costo $f(u_1, u_2, \dots, u_{N_o})$. Esta función de costo debe ser definida y corresponde a la función que se desea minimizar

(o maximizar dependiendo de cómo se plantee el problema).

En el caso de este algoritmo de optimización no hay restricciones sobre la forma que debe tener la función de costo, la que puede ser lineal, no lineal, continua, discontinua, etcétera, pero es conveniente que ésta no sea muy compleja (que se deban evaluar muchas funciones no lineales, que dependa de muchas variables de diseño, etcétera) ya que a mayor complejidad, mayor es el tiempo de cómputo del algoritmo.

Para realizar los cálculos que permiten hacer evolucionar los valores que van tomando las variables, a la solución óptima, a medida que se ejecuta el algoritmo genético es necesario convertir el rango de valores continuos en un conjunto de valores binarios. A su vez cuando hay que evaluar la función objetivo, es necesario contar con la representación continua de los valores que toman las variables a optimizar. Por lo tanto se debe convertir el rango de valores binarios de las variables en un rango continuo, para realizar esta transformación los algoritmos genéticos utilizan procedimiento de cuantificación.

Existen muchas formas de cuantificar los datos, y todas pueden ser utilizadas, lo que da formas distintas de implementar un algoritmo genético. En el caso específico del trabajo, el optimizador en base a algoritmos genéticos que tiene disponible el sistema experto (KSX) realiza una cuantificación uniforme, en donde se debe definir un rango para los valores que pueden tomar las variables a optimizar y además la distancia entre los niveles de reconstrucción (distancia mínima entre dos valores que puede tomar la variable) y con esto el sistema codifica/decodifica los valores que toman las variables.

Luego de tener codificados los datos, el procedimiento utilizado por un algoritmo genético corresponde a:

- *Creación de la población inicial:* El algoritmo genético comienza con un conjunto de N_{pob} cromosomas al que se le conoce como población. El valor que toma cada cromosoma inicialmente se escoge al azar, por lo tanto hay que crear N_{pob} cromosomas de N_b bits, donde N_b es el número de bits de cada cromosoma (lo cual depende de la cuantificación de u_1, u_2, \dots, u_{N_o}). Luego de este proceso las variables se evalúan en la función de costo.
- *Evaluación de la función de costo:* Cada uno de los valores de la población deben

ser evaluados en la función de costo, esta entrega un valor numérico, con la que luego se decide si la población debe reproducirse o no.

- *Selección de las parejas a reproducirse:* Para elegir las parejas que van a reproducirse se debe utilizar un procedimiento de selección natural. Primero los N_{pob} cromosomas son ordenados de menor a mayor de acuerdo a su costo y luego se escogen los X_r cromosomas con el costo más bajo, los que pasan a la etapa de reproducción, el resto se descarta. Escoger el número X_r de cromosomas a mantener es una decisión un tanto arbitraria, en la herramienta de optimización utilizada en el trabajo esta es una variable a escoger, que por defecto es definida como el 90 % de la población, lo que en la práctica entrega buenos resultados. Cabe destacar que existen más formas de realizar la selección de las parejas a reproducirse, por ejemplo que sobrevivan solo los cromosomas que entreguen una función menor que un límite [32], pero la idea siempre es descartar los cromosomas con un costo alto y reproducir los cromosomas con un costo bajo.
- *Reproducción:* Los cromosomas que fueron descartados, luego deben ser reemplazados por nuevos cromosomas. Los algoritmos genéticos realizan un proceso de reproducción, en donde los cromosomas se mezclan (o reproducen) para generar los cromosomas faltantes de la población. Existen varias maneras de escoger los pares a reproducir (padres), por ejemplo seleccionar de a dos los pares con menor costo hasta completar la población, escoger los pares de manera aleatoria, pero con mayor probabilidad de reproducción que los pares con menor costo, o seleccionar un conjunto de dos o 3 cromosomas al azar y seleccionar como padre al que posee el menor costo entre ellos, hasta completar todos los pares necesarios para completar la población. Todas estas formas de escoger a los padres, dan distintas formas de implementar un algoritmo genético, siendo las últimas dos las formas estándares al implementar la mayoría de los algoritmos genéticos.

Luego se debe crear uno o más hijos con los padres seleccionados anteriormente. La forma más común de reproducción consiste en generar dos hijos a partir de dos padres. En el proceso de reproducción se consideran los cromosomas como un arreglo

de bits, luego se escoge un punto de cruce y a partir de este punto se separa a cada padre en dos arreglos de bits, luego para generar cada uno de los hijos se unen uno de los arreglos de bits del primer padre con un arreglo de bits del segundo padre. Un ejemplo de la reproducción mediante este método se presenta en la figura 3.5.

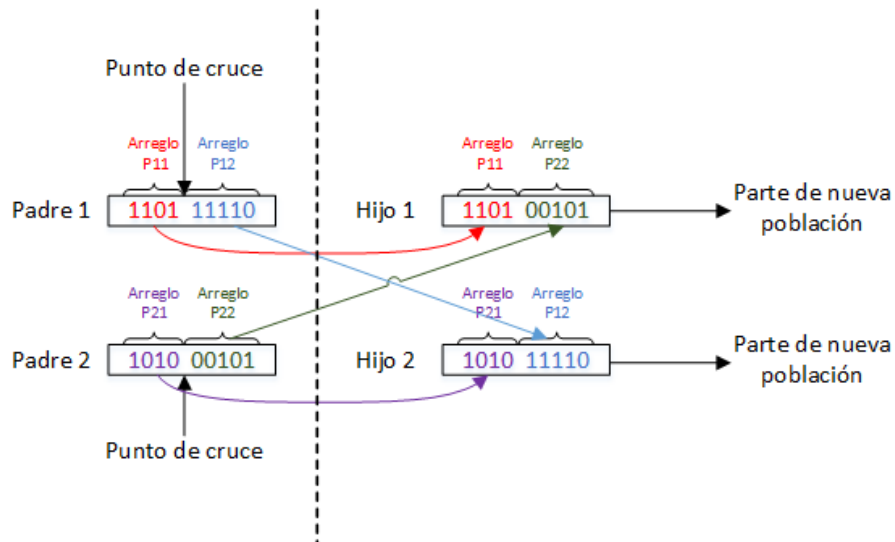


Figura 3.5: Ejemplo de reproducción en algoritmo genético.

- **Mutación:** Luego de haber obtenido la población faltante, se realiza un procedimiento en donde algunos de los bits de cada uno de los cromosomas de la población se cambia de manera aleatoria con una probabilidad pequeña. Este procedimiento tiene como objetivo generar cambios aleatorios en la población, evitando que todos los hijos tengan la misma genética. Desde un punto de vista de optimización, el objetivo de la mutación es generar aleatoriamente nuevos valores a evaluar para las variables a optimizar, de manera que el algoritmo genético busque soluciones en un espacio más amplio, y de esta forma no converja a mínimos locales. En la herramienta de optimización presente en el sistema experto, se debe escoger la probabilidad de que la población mute, valor que viene por defecto en un 0.5 % y que en la práctica entrega resultados adecuados.
- **Chequeo de condición de término:** Existen varias formas para elegir cuando un algoritmo genético termina, por ejemplo evaluando si se obtiene o no una mejora considerable al continuar iterando o si se excede un número de iteraciones. En el

caso de la herramienta de optimización presente en el sistema experto, el criterio consiste en definir el número de iteraciones que se ejecutará el algoritmo genético. En caso de que no se llegue a la condición de término, el algoritmo vuelve al paso de evaluación de la función de costo con la nueva población, comenzando una nueva iteración, también conocida como una nueva generación del algoritmo genético. En caso de que se cumpla con la condición de término, el algoritmo genético termina y la solución entregada corresponde a los valores de las variables a optimizar que obtuvieron el costo más bajo. Cabe destacar que no necesariamente el algoritmo genético entrega el óptimo, por temas de cuantificación y ya que como se señala, el algoritmo entrega la solución numérica de menor costo, que bajo algunas condiciones (por ejemplo si se pone como condición de término que el algoritmo itere una o dos veces) puede no ser el óptimo, pero generalmente la respuesta obtenida está muy cerca de él.

3.5. Algoritmos de identificación

Dentro del trabajo, para encontrar el modelo del sistema se realiza un experimento de identificación, que tiene como objetivo generar datos de entrada/salida que tengan propiedades propicias para ser procesados por un algoritmo de identificación. Los fundamentos del experimento son presentados en el capítulo 4. En este subcapítulo se presentan fundamentos teóricos sobre los algoritmos de identificación utilizados en el trabajo para encontrar los modelos. El software utilizado en el modelado corresponde a MATLAB, y se utilizan “arx.m” e “iv4.m” como rutinas para identificar el modelo, las cuales utilizan los algoritmos de mínimos cuadrados y variables instrumentales para encontrar los parámetros de los modelos, los cuales son presentados a continuación.

3.5.1. Mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados corresponde a una técnica que permite estimar los parámetros desconocidos de un modelo de regresión lineal, en donde los parámetros se estiman minimizando la suma de los errores cuadráticos entre la medición obtenida y la

respuesta del modelo.

Suponga que un modelo matemático tiene la forma:

$$y(t) = x_1(t) \cdot \theta_1 + x_2(t) \cdot \theta_2 + \dots + x_n(t) \cdot \theta_n + e(t) \quad (3.2)$$

donde $y(t)$ es la variable observada, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ es un conjunto de parámetros constantes a encontrar y $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ son funciones conocidas que pueden depender de otras variables.

Si hay N muestras de $y(t)$ y se conoce el valor de $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ en todo instante $t \in \{1, 2, \dots, N\}$, se puede generar un de conjunto N ecuaciones lineales del tipo:

$$y(1) = x_1(1) \cdot \theta_1 + x_2(1) \cdot \theta_2 + \dots + x_n(1) \cdot \theta_n + e(1) \quad (3.3a)$$

$$y(2) = x_1(2) \cdot \theta_1 + x_2(2) \cdot \theta_2 + \dots + x_n(2) \cdot \theta_n + e(2) \quad (3.3b)$$

⋮

$$y(N) = x_1(N) \cdot \theta_1 + x_2(N) \cdot \theta_2 + \dots + x_n(N) \cdot \theta_n + e(N) \quad (3.3c)$$

Conjunto de ecuaciones que se pueden ordenar en la siguiente ecuación matricial:

$$Y = \Phi \cdot \theta + \varepsilon \quad (3.4)$$

Donde:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

Bajo estas condiciones θ se puede estimar en base a la regla de cuadrados mínimos, la

que considera:

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t) \cdot \theta \quad (3.6a)$$

$$\varphi(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T \quad (3.6b)$$

Y que consiste en calcular el estimado de θ , de manera que minimice la siguiente función objetivo:

$$J_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) = \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi^T(t) \cdot \theta)^2(t) = \frac{1}{N} \varepsilon^T \cdot \varepsilon \quad (3.7)$$

Para llevar a cabo esta minimización se expresa la función objetivo como:

$$J_{LS}(\theta) = \frac{1}{N} (Y - \Phi \cdot \theta)^T (Y - \Phi \cdot \theta) \quad (3.8a)$$

$$J_{LS}(\theta) = \frac{1}{N} (Y^T Y - \theta^T \Phi^T Y - Y^T \Phi \theta - \theta^T \Phi^T \Phi \theta) \quad (3.8b)$$

Luego derivando $J_{LS}(\theta)$ con respecto a θ e igualando a cero se obtiene:

$$\left. \frac{\partial J_{LS}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{N} [-2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi \theta] = 0 \quad (3.9)$$

Despejando (3.9) se obtiene:

$$\hat{\theta} = [(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y] \quad (3.10)$$

Este resultado se conoce como el estimador de cuadrados mínimos de θ .

3.5.2. Estimación de modelos lineales mediante mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados puede ser utilizado para modelar las dinámicas de un sistema lineal. La forma particular de hacer esto depende de la estructura del modelo y de su parametrización. A continuación se presenta el procedimiento utilizado para identificar un modelo ARX.

En la estructura ARX, la salida es representada como:

$$A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + e(t) \quad (3.11)$$

donde z^{-1} representa al operador retardo,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_{n_a} \cdot z^{-n_a} \quad (3.12a)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_{n_b} \cdot z^{-n_b} \quad (3.12b)$$

y $e(t)$ es el error residual, o error de ajuste.

Nota: durante el transcurso de este trabajo se utiliza z^{-1} para denotar al operador retardo y no para denominar la transformada zeta de ninguna señal.

El problema consiste en obtener los parámetros $[a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}]$, dada la secuencia de datos:

$$y(1), u(1), \dots, y(N + n_b), u(N + n_b) \quad (3.13)$$

asumiendo que se conoce n_a y n_b .

Bajo estas condiciones la salida $y(t)$ se puede definir como:

$$y(t) = -a_1 \cdot y(t-1) - a_2 \cdot y(t-2) - \dots - a_{n_a} \cdot y(t-n_a) + b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot u(t-1) + \dots + b_{n_b} \cdot u(t-n_b) + e(t) \quad (3.14)$$

Lo que se puede llevar a la forma matricial:

$$y(t) = \varphi^T(t) \cdot \theta + e(t) \quad (3.15)$$

si se escoge:

$$\varphi(t) = \left[-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b) \right]^T \quad (3.16a)$$

$$\theta = \left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \right]^T \quad (3.16b)$$

Usando la secuencia de N datos adquiridos, se puede formar un sistema de N ecuacio-

nes $N \gg n_a + n_b$:

$$Y = \Phi \cdot \theta + \varepsilon \quad (3.17)$$

donde:

$$Y = \begin{bmatrix} y(n_b + 1) \\ y(n_b + 2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} e(n_b + 1) \\ e(n_b + 2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(n_b + 1) \\ \varphi^T(n_b + 2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n_b) & \dots & -y(n_b - n_a + 1) & u(n_b + 1) & \dots & u(1) \\ -y(n_b + 1) & \dots & -y(n_b - n_a + 2) & u(n_b + 2) & \dots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ -y(N - 1) & \dots & -y(N - n_a) & u(N) & \dots & u(N - n_b) \end{bmatrix} \quad (3.18b)$$

Luego siguiendo el principio de mínimos cuadrados, la solución estimada de los parámetros que minimiza la función objetivo, presentada en (3.7), viene dada por:

$$\hat{\theta} = [(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi]^T Y = \left[\sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) y(t) \right]^{-1} \quad (3.19)$$

Esta solución existe si la matriz presentada en 3.20 posee inversa (no singular), lo que se puede garantizar para un proceso de orden n_b si la señal de entrada aplicada durante el experimento es persistentemente excitante de orden $2n_b$ (ver [5]).

$$\Phi^T \Phi = \sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \quad (3.20)$$

Este método de identificación se numéricamente sencillo y posee una solución única debido a que el error es lineal en los parámetros $[a_1, \dots, a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}]$, y que se está minimizando una función cuadrática. Este método funciona apropiadamente si se escoge el orden del modelo adecuadamente (en un procedimiento de identificación como el que se verá en el capítulo 4) y cuando el nivel de ruido en la salida es bajo.

3.5.3. Variables instrumentales

Si se desea estudiar las propiedades del estimador de mínimos cuadrados (consistencia y sesgo), se puede combinar la ecuación (3.17) con la ecuación (3.19), obteniendo

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \\
 \hat{\theta} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T [\Phi \cdot \theta + \varepsilon] \\
 \hat{\theta} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi \cdot \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon \\
 \hat{\theta} &= \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Luego error en los parámetros se puede calcular como:

$$\hat{\theta} - \theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon = \left[\sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) e(t) \right] \tag{3.22}$$

Bajo condiciones débiles se cumple que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N - n_b} \sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T = E\{\varphi(t) \varphi(t)^T\} \tag{3.23a}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N - n_b} \sum_{t=n_b+1}^N \varphi(t) e(t) = E\{\varphi(t) e(t)\} \tag{3.23b}$$

Por lo tanto el error tiende a cero a medida que se aumenta el número de datos N, (y el estimador de cuadrados mínimos es consistente y sin sesgo), si se cumple que:

(a.1) $E\{\varphi(t) \varphi(t)^T\}$ es no singular.

(a.2) $E\{\varphi(t) e(t)\} = 0$.

La condición (a.1) se cumple si la entrada es persistentemente excitante de orden $2 \cdot n_b$ y la condición (a.2) se cumple cuando se está realizando identificación en lazo abierto, el número de datos es lo suficientemente grande y $e(t)$ corresponde a una secuencia de ruido blanco, en caso contrario el estimado entregado por mínimos cuadrados poseerá sesgo (ambas aseveraciones se pueden demostrar en [5]). Esta es una condición muy restrictiva, sin embargo, si la relación señal a ruido es pequeña, el sesgo que se obtendrá será pequeño.

Además si el modelos se utilizará en un sistema de control que ha sido diseñado para ser robusto ante los cambios del modelo, cierto grado de sesgo será aceptable.

Para identificar sistemas en donde $e(t)$ no corresponde a una secuencia de ruido blanco, es necesario utilizar otros métodos de identificación, como variables instrumentales. La idea detrás del método de variables instrumentales consiste en modificar el estimador de cuadrados mínimos con el fin de obtener un estimador consistente independiente de la distribución de $e(t)$. Para lograr lo anterior, se introduce un vector $z_{iv}(t)$, denominado instrumento, con la misma dimensión de $\varphi(t)$ que cumple las siguientes propiedades:

(b.1) $E\{z_{iv}(t)\varphi(t)^T\}$ es no singular.

(b.2) $E\{z_{iv}(t)e(t)\} = 0$.

Note que si luego se reemplaza $\varphi(t)$ por $z_{iv}(t)$ en (3.22) y se cumplen las propiedades anteriores, el estimador que se obtenga siempre sin sesgo. Éste reemplazo da lugar al estimador:

$$\hat{\theta}_{iv} = (Z_{iv}^T \Phi)^{-1} Z_{iv}^T Y = \left[\sum_{t=n_b+1}^N z_{iv}(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=n_b+1}^N z_{iv}(t)y(t) \right] \quad (3.24)$$

en donde:

$$Z_{iv} = \begin{bmatrix} z_{iv}(n_b + 1) & z_{iv}(n_b + 2) & \dots & z_{iv}(N) \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

En este caso los parámetros estimados corresponden a:

$$\hat{\theta}_{iv} = (Z_{iv}^T \Phi)^{-1} Z_{iv}^T [\Phi \cdot \theta + \varepsilon] = \theta + (Z_{iv}^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon \quad (3.26)$$

Por lo tanto el sesgo se calcula como:

$$\hat{\theta}_{iv} - \theta = (Z_{iv}^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon = \left[\frac{1}{N - n_b} \sum_{t=n_b+1}^N z_{iv}(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N - n_b} \sum_{t=n_b+1}^N z_{iv}(t)e(t) \right] \quad (3.27)$$

Que a medida que aumenta el número de datos tiende a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\hat{\theta}_{iv} - \theta) = (E\{z_{iv}(t)\varphi(t)^T\})^{-1} E\{z_{iv}(t)e(t)\} \quad (3.28)$$

Luego esta expresión tiende a cero debido a la condición (b.1).

En consecuencia, basta con encontrar un conjunto de instrumentos que cumplan con las condiciones (b.1) y (b.2) para encontrar un estimador sin sesgo de los parámetros. Existen muchas formas de escoger los instrumentos, lo único que cambia dependiendo de la elección es la covarianza del estimador resultante. Una opción para esta elección corresponde a:

$$z_{iv}(t) = \begin{bmatrix} -x(t-1) & \dots & -x(t-n_a) & u(t-1) & \dots & u(t-n_b) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

donde la señal $x(t)$ se calcula mediante

$$x(t) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} \cdot u(t) \quad (3.30)$$

Los polinomios $D(z^{-1})$ y $C(z^{-1})$ se pueden elegir arbitrariamente. Una elección especial corresponde a escoger $C(z^{-1})$ y $D(z^{-1})$ como los estimados de $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ del modelo ARX obtenido con mínimos cuadrados. Otra elección puede ser escoger los instrumentos como variables de las entradas retrasadas.

$$z_{iv}(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & \dots & u(t-n_a) & \dots & u(t-n_a-n_b) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Luego es lógico preguntarse cuál es la elección de instrumentos que entrega los parámetros $\hat{\theta}_{iv}$ de varianza mínima. Se probó en [33] que los instrumentos $z_{iv}(t)$ óptimos en este sentido son:

$$z_{iv}(t) = H^{-1}(z^{-1}) \cdot \tilde{\varphi}(t) \quad (3.32a)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} -\tilde{x}(t-1) & \dots & -\tilde{x}(t-n_a) & u(t-1) & \dots & u(t-n_b) \end{bmatrix} \quad (3.32b)$$

$$G_o(z^{-1}) = \frac{B_o(z^{-1})}{A_o(z^{-1})} \quad (3.32c)$$

$$A_o(z^{-1})\tilde{x}(t-1) = B_o(z^{-1})u(t) \quad (3.32d)$$

En donde:

$$y(t) = G_o(z^{-1})u(t) + H(z^{-1})e(t) \quad (3.33)$$

es la representación del sistema, $H(z^{-1})$ corresponde al filtro real del ruido y $G_o(z^{-1})$ corresponde a la función de transferencia real entre $u(t)$ e $y(t)$.

Esta elección no se puede utilizar en la práctica, ya que justamente $A_o(z^{-1})$ y $B_o(z^{-1})$ contienen los parámetros a ser identificados y $H(z^{-1})$ también corresponde a un polinomio desconocido. En la práctica se puede construir un algoritmo de varios pasos, en donde estos polinomios se sustituyen por sus estimados (“iv4.m” en Matlab).

La ventaja del método de variables instrumentales son su simplicidad numérica y que es un estimador consistente, por lo que en general es un método superior al de cuadrados mínimos, la mayor desventaja es que posee una varianza mayor o igual al estimador de cuadrados mínimos, por lo que para un conjunto de datos particular puede que la estimación de cuadrados mínimos sea mejor que la de variables instrumentales. En el desarrollo del trabajo, debido al tiempo de muestreo escogido, hay polos en los modelos que se ubican cerca al círculo unitario, y en algunos casos al utilizar variables instrumentales, la solución obtenida entrega modelos inestables, lo que no refleja la realidad. Esto no pasa con cuadrados mínimos, este efecto se le atribuye a la varianza del estimador que al ser mayor, hace que para el conjunto de datos particular, los polos del modelo obtenido estén fuera del círculo unitario, aunque cerca del mismo.

También existen otros métodos, que además de obtener los parámetros de $G(z^{-1})$ permiten obtener los parámetros de $H(z^{-1})$, y que utilizan métodos numéricos para minimizar el error residual. El nombre general de estos métodos se conoce como P.E.M. (método del error de predicción), esto le da más flexibilidad al modelo identificado.

4. Modelado

El modelo de un sistema tiene como objetivo representar los aspectos esenciales de un sistema, de manera utilizable.

El campo de la identificación de sistemas se encarga de buscar formas para obtener modelos matemáticos de un sistema a partir pruebas o datos experimentales. En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales del proceso de identificación de sistemas que permiten crear un buen modelo para ser utilizado dentro de la estrategia de control predictivo. Cabe destacar que el capítulo se enfoca en el modelado de sistemas lineales y discretos, que es el tipo de modelo que será utilizado en la aplicación de control predictivo que se presenta en este trabajo.

4.1. Identificación de sistemas

Existen tres elementos involucrados en la identificación de sistemas: la generación de datos utilizados para modelar, el tipo de modelo a encontrar y una regla o criterio que permita estimar el modelo.

Los datos de entrada y salida generalmente son recolectados de un experimento que está diseñado específicamente para que los datos recolectados maximicen la información de interés del sistema.

El conjunto de modelos se obtiene especificando sus características comunes, y luego se busca el modelo más adecuado dentro de este conjunto. Ejemplos de los distintos tipos de modelos que se pueden escoger son: modelos lineales, no lineales, de tiempo continuo, de tiempo discreto, invariantes en el tiempo, etc. En el caso de este trabajo el enfoque está hecho en sistemas lineales discretos.

Luego de que los datos ya están disponibles y el conjunto de modelos ya haya sido seleccionado, se debe buscar el mejor modelo dentro del conjunto que minimice algún criterio (función objetivo), el que debe ser especificado. Comúnmente se utiliza la suma

del error cuadrático de alguna señal como criterio.

Luego de haber identificado un modelo es necesario validarlo. En esta etapa se prueba si el modelo estimado es lo suficientemente bueno para el uso que se le dará. Primero se chequea si el modelo es consistente con el conocimiento a priori del sistema. Luego se chequea si el modelo se ajusta bien a los datos adquiridos, preferentemente usando un conjunto de datos que no haya sido utilizado en la estimación del modelo. La última forma de validar la calidad del modelo es usar el modelo en la aplicación para la cual fue diseñado.

A continuación se detallan aspectos importantes sobre la identificación sistemas.

4.2. Diseño del experimento de identificación

Elegir bien las variables de diseño asociadas al experimento de identificación es una de las partes cruciales del procedimiento de identificación, ya que las otras variables asociadas a la elección del modelo y los métodos para conseguirlo pueden ser probados en un computador, pero los datos solo se pueden cambiar realizando un nuevo experimento, lo que es un procedimiento costoso tanto en tiempo como en dinero. Por lo que es importante diseñar el experimento cuidadosamente, con el fin de que los datos de entrada-salida entreguen suficiente información del sistema.

4.2.1. Pruebas preliminares

Para realizar un buen experimento de identificación se requiere conocer cierta información a priori del sistema (ancho de banda, constante dominante, no linealidades, etc.). A veces esta información puede obtenerse conversando con el personal que opera el sistema, en caso de que no se posea mucha información del proceso, es recomendable realizar algunas pruebas previas para obtener la información relevante para el experimento de identificación.

La principal prueba a realizar con el fin de obtener información relevante para el experimento, es la prueba a escalón.

En la prueba a escalón el sistema se opera en lazo abierto y con la menor intervención

posible del operador, se le aplica una serie de escalones a cada entrada del proceso, que deben tener una duración mayor al tiempo de asentamiento del proceso. La respuesta del proceso utiliza para:

- Obtener un estimado de la constante dominante del proceso y las ganancias en estado estacionario del proceso. Esta información se utiliza en el diseño del experimento de identificación final.
- Chequear el comportamiento de las entradas. Asegurarse que los actuadores funcionen correctamente, que los lazos de control internos estén bien sintonizados, etc.
- Familiarizarse con la dinámica del proceso viendo la respuesta a escalón de las entradas.

4.2.2. Señales de entrada

El propósito del experimento de identificación es excitar el sistema con entradas adecuadas con el fin de recolectar las propiedades de interés.

Hay dos aspectos importantes que se deben considerar a la hora de escoger las señales de entrada que se aplicarán en la prueba de identificación; la forma de onda y el contenido en frecuencias de las señales de entrada.

- Forma de onda de la señal: Para tener una buena relación de señal a ruido se debe tener una señal de amplitud grande. Pero en la práctica además se debe considerar que la entrada no saque al proceso del punto de operación normal del proceso y que no excite sus no-linealidades. Las señales binarias son muy útiles para evitar estos efectos.
- Contenido en frecuencia de la señal: El espectro de la señal de entrada afecta la forma del espectro del error de modelado ([4], [5]). Por lo tanto se puede escoger la señal de entrada de manera de minimizar el error de modelado dentro del rango de frecuencias de interés, por ejemplo para una aplicación de control.

En la práctica las señales de entrada se mueven en torno a un punto de operación. Por lo que el valor medio de las señales debe ser cero o cercano a cero.

Dos señales de interés en este trabajo corresponden a una señal binaria aleatoria (RBS) y el ruido generalizado binario (GBN).

Señal binaria aleatoria

Una señal binaria aleatoria es una señal discreta que asume dos valores, a y $-a$ de manera aleatoria. Se puede generar de varias maneras, siendo la más fácil, generar ruido aleatorio de media cero y luego calculando el signo de la señal. Esta señal tiene un espectro plano (ver [34], para $p=0.5$) dado por :

$$\Phi_u(\omega) = a^2 \cdot T_{min} \quad (4.1)$$

Donde T_{min} es el tiempo de muestreo de la señal.

Muchas veces al identificar un modelo con el objetivo de crear una aplicación de control es deseable que las señales de entrada tengan un contenido con una característica pasa bajos. Una de las formas de crear esta señal es filtrando el ruido aleatorio, con un filtro pasa-bajos, antes de calcular el signo de la señal, y otra forma es aumentar el tiempo de muestreo T_{min} de la señal, en cuyo caso el espectro se calcula como (ver [5]):

$$\Phi_u(\omega) = a^2 \cdot T_{min} \left(\frac{\sin(\omega T_{min}/2)}{\omega T_{min}/2} \right) \quad (4.2)$$

Una desventaja de utilizar esta forma para modificar el espectro de la señal es que el espectro tiene una caída en torno a las frecuencias $2 \cdot \pi \cdot n/T_{min}$ con $n = [1, \dots, \infty]$, lo que resulta que en estas frecuencias la relación señal a ruido sea pequeña, y por lo tanto el modelo tienda a ser malo en estas frecuencias. El ruido binario generalizado (GBN) es una señal binaria con característica pasa bajos generado de una mejor manera.

Ruido binario generalizado

El ruido binario generalizado fue propuesto con el fin de generar una señal de entrada para el proceso de identificación que fuera buena para el control de los procesos industria-

les. Una señal de ruido binario generalizado es una señal que toma dos valores a y $-a$. En cada tiempo de muestreo T_{min} la señal puede cambiar de valor de acuerdo a la siguiente regla:

$$P[u(t) = -u(t - 1)] = p_{sw} \quad (4.3a)$$

$$P[u(t) = u(t - 1)] = 1 - p_{sw} \quad (4.3b)$$

Donde p_{sw} es la probabilidad de cambio. Esta señal tiene media cero, el tiempo de cambio promedio entre los dos niveles es:

$$ET_{sw} = \frac{T_{min}}{p_{sw}} \quad (4.4)$$

Y el espectro de la señal corresponde a

$$\Phi_u(\omega) = \frac{a^2 \cdot T_{min} \cdot (1 - q^2)}{1 - 2q \cos(T_{min} \cdot \omega) + q^2} \quad (4.5)$$

Donde $q = 1 - 2 \cdot p_{sw}$. En [34] se presentan las demostraciones de las ecuaciones anteriores.

Si se escoge $p_{sw} = 0,5$ se obtiene una señal GBN de ruido blanco ([34] , [5]). En ese caso $ET_{sw} = 2 \cdot T_{min}$. Este tipo de señales generalmente no son la mejor opción como entradas al experimento de identificación, debido a la caída de la energía a cero en ciertas frecuencias (indicadas anteriormente). Al reducir la probabilidad p_{sw} a valores menores que 0.5, se obtiene una señal GBN pasa bajos, que no tiene caídas en dichas frecuencias, además eligiendo distintos valores de p_{sw} se puede modificar el tiempo de cambio promedio de la señal presentado en (4.4). La señal GBN también tiene un factor de cresta mínimo.

Note que ambas señales son señales persistentemente excitantes de cualquier orden finito [5]. Esta propiedad garantiza que los algoritmos de identificación tendrán una solución única y que cualquier modelo pueda ser identificado independiente del número de parámetros que tenga.

4.2.3. Experimento final

Si el proceso es estable y se tiene la siguiente información mediante pruebas previas:

- Rango de operación normal del proceso o los límites de las salidas del proceso.
- Estimación del tiempo de asentamiento más largo en el proceso.
- La amplitud apropiada para los cambios en las señales de entrada, es decir que sean lo suficientemente grandes para generar un cambio perceptible en la salida, pero no tan grandes que perturben la operación del proceso.

Se puede generar un experimento de identificación apropiado. Luego el experimento debe tener las siguientes características [5]:

- Duración del experimento: el experimento debe durar entre 6 a 18 veces el tiempo de asentamiento más largo del proceso. La prueba debe durar lo suficiente, de manera de poder promediar el efecto de las perturbaciones no medidas (generalmente se asume que las perturbaciones tienen valor medio cero) y ya que las propiedades de los algoritmos de identificación generalmente se cumplen solo cuando el número de datos tiende a infinito.
- Forma y amplitud de las señales de entrada: Se utilizan señales de ruido binario generalizado (GBN). En general las señales binarias son amistosas para los operadores, ya que son comúnmente utilizadas. La amplitud de estas señales deben ser lo suficientemente grandes para que la relación señal a ruido sea grande y al mismo tiempo no tan grande que saque al proceso de su rango de operación lineal.
- Tiempo promedio de cambio de la señal GBN: Al escoger el tiempo de cambio promedio de la señal también se determina la distribución espectral de la señal de entrada. Una recomendación entregada en [5] es que se escoja el tiempo de cambio promedio como:

$$ET_{sw} = \frac{98\% \cdot T_s}{3} \quad (4.6)$$

Donde T_s es el tiempo de asentamiento (más largo) del proceso. No existe una recomendación para el tiempo mínimo de la señal GBN, que puede ser de cualquier valor menor a $\frac{ET_{sw}}{2}$, es recomendable que se escoja $T_{min} = \frac{ET_{sw}}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}$, para que p_{sw} sea fácil de calcular y que sea lo suficientemente grande como para que se observe un cambio (pequeño) en las salidas.

- Número de entradas por experimento: El número de entradas que deben manipular al mismo tiempo bajo las condiciones anteriores debe ser menor a 10.

Los datos del experimento deben ser adquiridos de alguna manera para que puedan ser procesados por un algoritmo de identificación. En la industria existen softwares historizadores dedicados a la captura de datos, asimismo la mayoría de los softwares que cuentan con herramientas de modelado permiten realizar la captura de datos dentro del mismo software y en algunos casos exportar los datos a un archivo dentro del computador, que generalmente se puede abrir con programas como Microsoft Excel.

Una práctica previa al modelado consiste en el pre tratamiento de los datos, con el fin de acondicionarlos antes de su tratamiento, algunas prácticas relevantes al pre tratamiento son:

- Recorte de “*peaks*”: Es común en un ambiente industrial que debido al fallo en los sensores, las mediciones del experimento presenten picos. Éstos tienen una amplitud elevada y son señales de alta frecuencia, por lo que pueden empeorar el desempeño del modelo en dichas frecuencias. Los picos se pueden eliminar interpolando los datos que estén fuera del rango de operación normal de la señal. Generalmente la inspección visual en conjunto con el conocimiento del proceso bastan para realizar esta tarea.
- Recorte de la señal: Se puede eliminar parte de los datos del experimento que no sean útiles para la identificación del proceso. Estos datos pueden provenir por ejemplo, de periodos en donde los efectos de las perturbaciones en el proceso son muy grandes o donde el proceso se sale del rango de operación lineal debido a un cambio en su punto de operación.

- Corrección de tendencias: Es común observar que los datos tienen un promedio que cambia lentamente con el tiempo. Este efecto se puede considerar como una perturbación de baja frecuencia que no tiene media cero, por lo que no se puede promediar y produce un efecto nocivo en la estimación del modelo a frecuencias bajas, por lo que es recomendable remover dichas tendencias. Una forma de remover dichas tendencias es aplicar un filtro pasa altos a las entradas como las salidas del proceso.
- Normalización (escalamiento y corrección de “*offset*”): Este procedimiento se realiza para evitar que el algoritmo de identificación se enfoque en encontrar el mejor modelo que describa la dinámica del proceso y no la relación que hay entre los valores medios de las señales, en el caso de la corrección “*offset*”, y para que las señales con los valores numéricos más grandes no ponderen con mayor importancia en la función objetivo que se utiliza para determinar el modelo, en el caso del escalamiento. Este procedimiento consiste en restar el valor de la señal en el punto de operación del proceso, que se puede estimar como el valor medio de las señales en durante el periodo del experimento y a escalar las señales con respecto a su contenido en potencia.

4.3. Estructura para sistemas lineales

Para obtener un modelo, los datos recolectados con el experimento descrito anteriormente deben procesarse con un algoritmo de identificación. Una parte importante antes de realizar este proceso es determinar la estructura que tendrá el modelo que se desea obtener.

La estructura más general que se le puede dar a un sistema discreto corresponde a:

$$y(t) = G(z^{-1}) \cdot u(t) + H(z^{-1}) \cdot e(t) \quad (4.7)$$

Donde $G(z^{-1})$ y $H(z^{-1})$ son funciones racionales del operador z^{-1} , $u(t)$ es la entrada al sistema, $y(t)$ es la salida y $e(t)$ es una variable aleatoria de ruido blanco. Luego el modelo queda parametrizado por el número de coeficientes (polos y ceros) de $G(z^{-1})$ y $H(z^{-1})$.

Esta estructura es bastante flexible, permitiendo describir tanto la dinámica del sistema como las características estocásticas de la señal medida. El término $H(z^{-1}) \cdot e(t)$ en (4.7) describe las perturbaciones a las que está sometida la salida, que se asumen que son aleatorias y en donde $H(z^{-1})$ varía dependiendo del punto en donde se asume que entran dichas perturbaciones.

Si se hacen algunas suposiciones en la estructura presentada en (4.7) se obtienen algunas estructuras simplificadas, esto facilita el proceso de ajuste de los parámetros del modelo. Algunas de las estructuras simplificadas que se pueden obtener son los modelos: ARX, ARMAX, output error (OE) y Box-Jenkins (BJ) en la tabla 4.1 se presentan las características de cada uno de estos modelos.

Tabla 4.1: Estructuras simplificadas de modelos lineales.

| Tipo de modelo | Condición | Estructura |
|---------------------|---|--|
| Modelo ARX | $G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ $H(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})}$ | $A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + e(t)$ |
| Modelo Output Error | $G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}$ $H(z^{-1}) = 1$ | $y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot u(t) + e(t)$ |
| Modelo ARMAX | $G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ $H(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ | $A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + C(z^{-1}) \cdot e(t)$ |
| Modelo Box Jenkins | $G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}$ $H(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ | $y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \cdot e(t)$ |

Para un problema particular la elección de cuál debe ser la estructura (ARX, ARMAX, OE o BJ) a escoger depende tanto de la dinámica del proceso como de las características del ruido del sistema. No siempre es conveniente utilizar un modelo con estructuras más complejas o con muchos parámetros, ya que esta elección puede llevar a modelos que presentan dinámicas y/o características de ruido inexistentes.

Estructura ARX

La estructura ARX, presentada en la figura 4.1, es la estructura más simple que se puede considerar. Esta estructura se utiliza comúnmente ya que para poder encontrar los parámetros de este modelo solo es necesario resolver un conjunto de ecuaciones lineales de forma analítica y además la solución obtenida es única. Por lo mismo el modelo ARX es preferible, sobre todo cuando el orden del modelo es alto. La desventaja es que la estructura asume que la característica estocástica de las perturbaciones tienen los mismos polos que el sistema, lo que puede ser una suposición poco realista. Sin embargo esta desventaja puede ser reducida si se posee una buena relación señal a ruido en los datos utilizados para identificar el sistema.

Cuando la perturbación $e(t)$ no es ruido blanco, el acoplamiento entre las dinámicas determinísticas y estocásticas pueden hacer que aparezca un sesgo en los parámetros obtenidos. Para solucionar este problema se puede estimar un modelo de orden alto y luego reducir el orden del modelo mediante un método de reducción de orden.

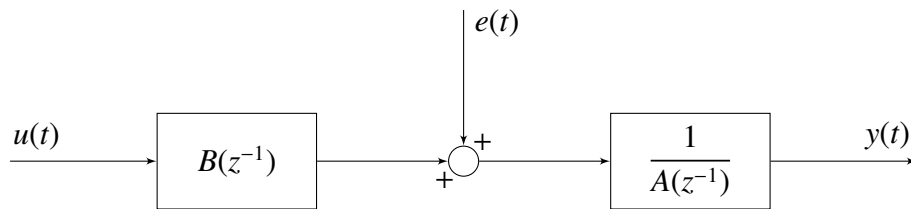


Figura 4.1: Estructura ARX.

Estructura ARMAX

Esta estructura considera la dinámica de las perturbaciones. Los modelos ARMAX son útiles cuando se tienen perturbaciones que entran temprano al sistema, como por ejemplo perturbaciones de entrada. Este modelo es más flexible cuando se quiere modelar el efecto de las perturbaciones que el modelo ARX.

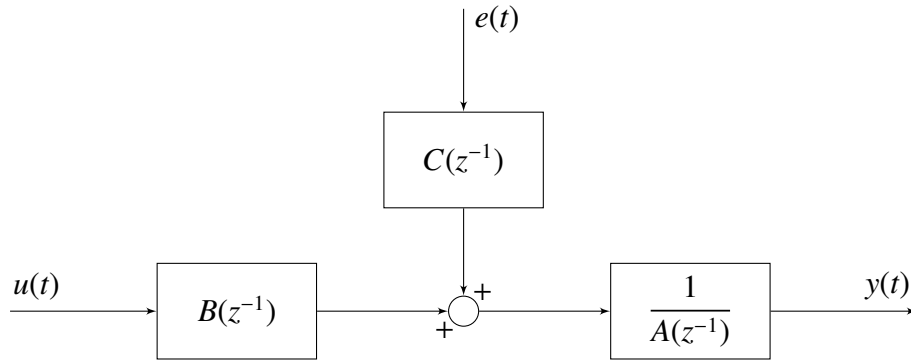


Figura 4.2: Estructura ARMAX.

Estructura Box-Jenkins

Esta estructura provee un modelo completo para el modelamiento de las perturbaciones, que se considera completamente independiente de la dinámica del sistema. Este modelo es útil cuando las perturbaciones entran tarde en el proceso.

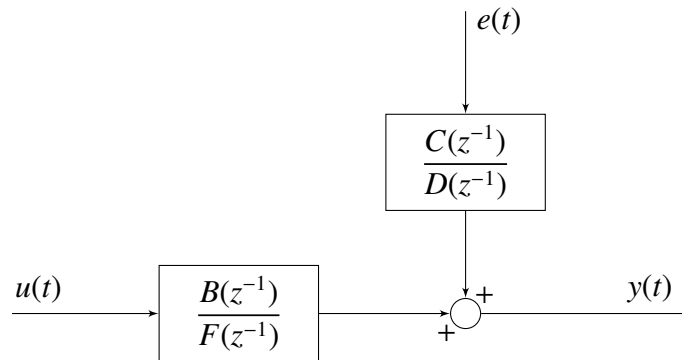


Figura 4.3: Estructura Box-Jenkins.

Estructura Output Error

La estructura Output Error no utiliza ningún parámetro para modelar las características de las perturbaciones. Esta estructura considera que la única perturbación que hay es ruido blanco en la medición de la salida.

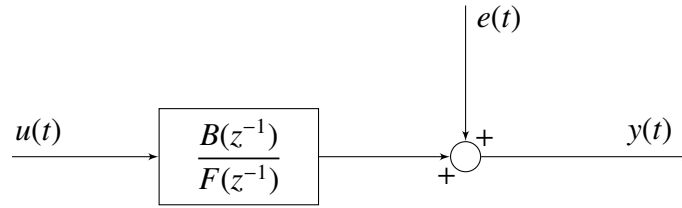


Figura 4.4: Estructura Output Error.

4.4. Validación del modelo y número de parámetros

En la identificación de sistemas la determinación de la estructura del modelo y la validación del modelo son aspectos relevantes. Un modelo sobre-parametrizado puede llevar a dinámicas inexistentes (cancelaciones de polos y ceros) y problemas de cómputos, mientras que un modelo con menos parámetros de los que corresponde puede llevar a modelos poco precisos. La elección de la estructura del modelo depende mucho del uso que se le dará al modelo. En caso de que el modelo se use para control, basta con un modelo simple, de orden bajo, mientras que modelos que se utilicen para darle sentido físico al modelo, requiere de modelos mucho más complejos.

Una recomendación es utilizar siempre modelos más simples primero y solo usar modelos más complejos en caso de que los modelos simples no pasen las pruebas de validación. Los modelos ARX llevan a problemas de optimización que se pueden resolver de forma sencilla y que son robustos (cuadrados mínimos).

Uno de los problemas que pueden surgir en la identificación del sistema tiene que ver con el tiempo de muestreo del sistema, que si es muy pequeño, puede hacer que las constantes de tiempo queden todas alrededor del círculo unitario, lo que a su vez genera problemas numéricos. Una recomendación entregada en [4] es que no se utilice un tiempo de muestreo menor a 30 veces la constante de tiempo del sistema, y que si se requiere identificar un modelo con una mezcla de respuestas rápidas y lentas, que se utilicen dos modelos con distintos tiempos de muestreo.

En la práctica, para encontrar un buen modelo, se identifican varios modelos que van incrementando en número de parámetros, hasta que se cumple alguna condición que indique que no es necesario seguir aumentando el orden del modelo. En algunos casos, si

se tiene conocimiento previo del sistema (por ejemplo, las ecuaciones diferenciales que lo rigen) el orden del sistema puede ser escogido o aproximado de manera previa.

Para saber si la estructura del modelo contiene el suficiente número de parámetros para contener al sistema real se pueden realizar los siguientes análisis:

- Estudio de la respuesta del sistema mediante gráficos.
- Uso de pruebas estadísticas del error residual $e(t)$.

Con respecto al primer análisis, es recomendable realizar un gráfico de la salida del proceso vs la salida del modelo para una señal de entrada, y lo que se debe buscar es que ambas respuestas sean lo más parecidas posible. La diferencia entre la salida del modelo y del sistema real se debe tanto a las perturbaciones como al ruido, por lo que si la salida posee ruido es esperable que existan diferencias entre ambas.

4.4.1. Análisis residual

En cuanto al error residual $e(t)$, este idealmente debe ser ruido blanco no correlacionado con la entrada $u(t)$.

Para probar si el error es ruido blanco se computa el estimador de la función de autocorrelación dada por:

$$R_e(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} e(t+\tau)e(t) \quad (4.8)$$

Y para asegurarse que el residual $e(t)$, no esté correlacionado con la entrada $u(t)$ se debe calcular el estimador de la correlación:

$$R_{eu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=\tau-1}^{N-1} e(t)u(t-\tau) \quad (4.9)$$

Luego se pueden realizar pruebas de hipótesis que indiquen si se puede asegurar, con cierta probabilidad, que estos residuos no son blancos y no están correlacionados con la entrada. Para más información revisar [33].

4.4.2. Validación cruzada

La validación cruzada consiste en comparar la respuesta del sistema vs la del modelo, utilizando datos diferentes a los utilizados para identificar el sistema. Esto se realiza para probar si el modelo obtenido generaliza bien el sistema a identificar, ya que el algoritmo de identificación siempre será capaz de ajustarse a los datos que se utilizan en la identificación, pero puede si el modelo no generaliza bien, tendrá un mal desempeño en un conjunto de datos diferentes. La desventaja de la validación cruzada es que hay que separar los datos en un grupo para la identificación y uno para la validación por lo que no se puede utilizar toda la información para construir el modelo.

Número de parámetros vs ajuste

Entre varios modelos que explican bien los datos, es recomendable escoger el modelo con el número de parámetros más pequeños.

Existen algunos criterios que permiten llegar a un compromiso entre el ajuste del modelo a los datos y el número de parámetros (complejidad). Algunos de estos criterios son:

- Criterio de información de Akaike (AIC):

$$J_{AIC} = J \left(1 + \frac{2p}{N} \right) \quad (4.10)$$

- Criterio del error final de predicción (FPE):

$$J_{FPE} = J \left(\frac{N + p}{N - p} \right) \quad (4.11)$$

- La longitud de descripción mínima (MDL):

$$J_{AIC} = J \left(1 + \frac{p \ln(N)}{N} \right) \quad (4.12)$$

Donde p es el número de parámetros, N es el número de datos y J corresponde al promedio de los errores cuadráticos entregada por:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\varphi(t) \cdot \theta - y(t))^2 \quad (4.13)$$

Estos tres criterios evalúan cuando una disminución en J , a medida que aumenta el número de parámetros, es significativa.

4.5. Resumen

En resumen los pasos utilizados para identificar un sistema son:

1. *Escoger el conjunto de modelos a utilizar:* Idealmente se debe tener alguna idea del tipo de modelo a utilizar (lineal, no lineal, discreto, continuo, variables de estado, etc.). Esto depende principalmente de la aplicación en la que se utilizará el modelo.
2. *Generar un experimento:* Se debe generar un experimento de entrada-salida para el proceso que se desea identificar. En caso de que se desee utilizar un modelo lineal para realizar control, se recomienda utilizar el procedimiento presentado en la sección 4.2.
3. *Pre-procesamiento de datos:* Los datos se deben procesar antes de realizar la identificación, removiendo tendencias, datos poco realistas e intervalos de tiempo en donde los datos no entregan buena información.
4. *Separación de datos:* Se deben separar los datos para identificación el sistema y datos para validación.
5. *Estimación del modelo:* Se debe estimar el modelo utilizando uno o más métodos de identificación. Es común que como primer método de identificación se utilice cuadrados mínimos y en caso de que la respuesta de este modelo no sea aceptable, se utilice variables instrumentales. Se puede acotar el número de parámetros que tendrá el modelo utilizando el conocimiento que se posee sobre el sistema. En caso de no conocer nada del sistema se puede probar con un número de parámetros pequeños e ir aumentando este número hasta encontrar un modelo suficientemente bueno, de acuerdo a algún criterio, como el fpe, la validación cruzada, etc.

6. *Validación:* Para validar un modelo es bueno utilizar varios métodos como: el gráfico de señales, pruebas estadísticas como el análisis de residuos y el sentido común (cancelaciones de polos y ceros, ordenes mucho más grande de lo que indican las ecuaciones del sistema, etc.).

Es posible que el modelo obtenido no pase el procedimiento de validación. Las causas generalmente corresponden a que:

- Los datos utilizados no entregan suficiente información debido a un mal diseño del experimento.
- El tipo de modelo escogido (en este caso lineal y discreto) no permite describir adecuadamente el sistema.
- El algoritmo de identificación no fue escogido adecuadamente.
- El procedimiento numérico utilizado por el algoritmo falló. Por ejemplo, cuando el algoritmo diverge.

La mayor parte del trabajo de identificación consiste en atacar estos problemas y por lo tanto son los aspectos más relevantes a tener en cuenta al realizar un procedimiento de identificación. Es importante diseñar adecuadamente el experimento ya que este paso es el más costoso del procedimiento de identificación. Luego tanto el modelo como el algoritmo de identificación se pueden modificar fácilmente al realizar la identificación. Es importante realizar el proceso de validación con datos distintos a los utilizados en la identificación, comprobando que el modelo se ajuste a los datos y que se cumplan las suposiciones estadísticas realizadas por el algoritmo de identificación. Si el experimento de identificación es diseñado apropiadamente y a pesar de utilizar varios algoritmos de identificación el modelo no logra describir el comportamiento del sistema, lo más probable es que deba analizar el tipo de modelo utilizado, que puede no ser el correcto.

5. Estrategia de control predictivo

El control predictivo busca resolver el problema de control mediante la formulación y solución de un problema de optimización. El control predictivo no corresponde a una técnica específica, sino que involucra un modelo (que puede obtenerse de muchas maneras), un algoritmo de optimización en conjunto con una estrategia de horizonte móvil para resolver un problema de control que puede ser complejo, como los de un sistema multivariable, con grandes retardos o donde existen restricciones (físicas o económicas) que cumplir.

En este capítulo se presentan la teoría sobre el control predictivo, las técnicas utilizadas en la estrategia de control implementada y finalmente se presenta la estrategia utilizada en este trabajo para controlar el nivel de pulpa de los bancos de flotación Rougher.

5.1. Control Predictivo

El control predictivo, o MPC por sus siglas en inglés, es una estrategia de control basada en la optimización numérica, en donde se utiliza un modelo del sistema para predecir las respuestas futuras de la planta a una entrada determinada y se resuelve un problema de optimización en donde se busca minimizar una función objetivo que considera los objetivos de control (aplicar una actuación con energía acotada que permita seguir una referencia). Este problema de optimización se resuelve en intervalos regulares con el fin de encontrar la actuación óptima a aplicar en cada instante de muestreo, de acuerdo a las condiciones actuales del sistema.

El control predictivo permite controlar sistemas multivariables de muchas entradas y salidas, y provee un método sistemático para lidiar con restricciones del proceso. Dichas restricciones están presentes en todas las aplicaciones de control y representan limitaciones en los actuadores y otras variables de la planta que aparecen por restricciones físicas, económicas o de seguridad. El control predictivo considera estas restricciones directamen-

te al incluirlas en el problema de optimización a resolver.

La estrategia de control predictivo presenta tres componentes principales: el elemento de predicción, el de optimización y una estrategia de horizonte móvil. A continuación se presenta cada uno de estos componentes.

5.1.1. Predicción

La respuesta futura de la planta es predicha utilizando un modelo de la dinámica de la planta. Existen muchos modelos que se pueden utilizar, como modelos continuos, discretos, lineales, no lineales, en representación de estado u otros, por ejemplo basado en principios fundamentales.

El control predictivo está hecho pensando en modelos discretos (aunque se puede adecuar a modelos continuos) en donde la salida puede ser descrita por la siguiente ecuación:

$$y(t) = f(u(t), u(t-1), \dots, u(t-n_u), y(t-1), \dots, y(t-n_y)) \quad (5.1)$$

$f(x)$ puede ser una función lineal o no lineal, de acuerdo al modelo que se utilice, $u(t)$ e $y(t)$ corresponden a la entrada y la salida del sistema en el instante t respectivamente.

Generalmente las estrategias de control predictivo utilizan un modelo lineal, de esa manera las salidas futuras predichas dependen linealmente de la secuencia de entradas, lo que facilita luego el proceso de optimización, ya que el problema se convierte en un problema convexo o que se puede resolver fácilmente mediante un algoritmo de optimización iterativo. Un modelo no lineal se puede utilizar en caso de que las aproximaciones lineales no sean lo suficientemente precisas y si es que la carga computacional y/o el tiempo de cálculo del algoritmo de optimización no representan un problema.

En la estrategia de control predictivo el modelo se utiliza para calcular las predicciones de las salidas del sistema, por lo que el modelo debe entregar predicciones suficientemente precisas. Es posible que no sea necesario modelar todos los comportamientos físicos, químicos e internos del proceso para obtener un modelo que entregue predicciones adecuadas. Como regla base siempre se debiese utilizar el modelo más sencillo que entregue buenos resultados.

La secuencia de salida para un determinado horizonte de predicción N_p es predicha en cada instante t usando el modelo del proceso. Las salidas predichas $\hat{y}(t+k|t)$, para $k = 1, \dots, N_p$ dependen de los valores pasados de $u(t)$ e $y(t)$ y de los valores presentes y futuros de $u(t)$ ($\hat{u}(t+k|t)$, para $k = 0, \dots, N_p$), los que deben ser calculados por el algoritmo de identificación.

Una suposición que se realiza para la secuencia futura de la actuación es que ésta cambia un número de muestras N_u y luego se mantiene fija. Este valor N_u se conoce como horizonte de control. Esto permite reducir el número de variables a optimizar por el algoritmo de optimización, reduciendo su tiempo de cómputo y carga computacional. Al igual que el horizonte de predicción N_p , el horizonte de control N_u se trata como una variable de diseño en cualquier estrategia de control predictivo, y tiene un efecto en el desempeño de la estrategia de control.

Para calcular las salidas futuras $\hat{y}(t+k|t)$ para $k = 1, \dots, N_p$ se aplica el modelo de forma recursiva, con los valores de $u(t)$ e $y(t)$ que se poseen hasta el instante t , las predicciones hechas hasta el instante $t+k-1$ y las actuaciones (a optimizar) obtenidas hasta el instante $t+k-1$.

Luego las predicciones evolucionan según.

$$\hat{y}(t+k|t) = f(\hat{u}(t+k|t), \dots, \hat{u}(t+k-n_u|t), \hat{y}(t+k-1|t), \dots, \hat{y}(t+k-n_y|t)) \quad (5.2)$$

Existen muchos modelos que se pueden utilizar, y todos entregan distintas estrategias de control predictivo que se resuelven de distintas maneras, algunos modelos comúnmente usados son:

- Respuesta a impulso.
- Respuesta a escalón.
- Función de transferencia.
- Modelo CARIMA.
- Representación de estados.

- Redes neuronales.
- Modelos difusos.

Para ver más aspectos relacionados con estos modelos se recomienda revisar [35] y [36].

Ejemplo 5.1

Si se utiliza una representación de estados del tipo:

$$\hat{x}(t+1|t) = A \cdot \hat{x}(t|t) + B \cdot \hat{u}(t|t) \quad (5.3a)$$

$$\hat{y}(t|t) = C \cdot \hat{x}(t|t) \quad (5.3b)$$

Si se asume que la estimación de los estados $\hat{x}(t|t)$ se conoce, las predicciones se calculan como:

$$\hat{y}(t+1|t) = C \cdot A \cdot \hat{x}(t|t) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t|t) \quad (5.4a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+2|t) &= C \cdot A \cdot \hat{x}(t+1|t) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1|t) \\ &= C \cdot A \cdot (A \cdot \hat{x}(t|t) + B \cdot \hat{u}(t|t)) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1|t) \\ &= C \cdot A^2 \cdot \hat{x}(t|t) + C \cdot A \cdot B \cdot \hat{u}(t|t) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1|t) \end{aligned} \quad (5.4b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+N_p|t) &= C \cdot A^{N_p} \cdot \hat{x}(t|t) + C \cdot A^{N_p-1} \cdot B \cdot \hat{u}(t|t) + C \cdot A^{N_p-2} \cdot B \cdot \hat{u}(t+1|t) \\ &\quad + \dots + C \cdot A \cdot B \cdot \hat{u}(t+N_p-1|t) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+N_p|t) \end{aligned} \quad (5.4c)$$

Ejemplo 5.2

Si se utiliza un modelo ARX la salida viene dada por (3.14), luego suponiendo que $e(t)$ es ruido blanco de media cero, la salida se puede predecir como:

$$y(t) = -a_1 \cdot y(t-1) - a_2 \cdot y(t-2) - \dots - a_{n_a} \cdot y(t-n_a) + b_0 \cdot \hat{u}(t|t) + b_1 \cdot u(t-1) + \dots + b_{n_b} \cdot u(t-n_b) \quad (5.5)$$

Luego las predicciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1|t) = & -a_1 \cdot y(t) - a_2 \cdot y(t-1) - \dots - a_{n_a} \cdot y(t-n_a+1) + b_0 \cdot \hat{u}(t+1|t) \\ & + b_1 \cdot \hat{u}(t|t) + \dots + b_{n_b} \cdot u(t-n_b+1) \end{aligned} \quad (5.6a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+2|t) = & -a_1 \cdot \hat{y}(t+1|t) - a_2 \cdot y(t) - \dots - a_{n_a} \cdot y(t-n_a+2) + b_0 \cdot \hat{u}(t+2|t) \\ & + b_1 \cdot \hat{u}(t+1|t) + \dots + b_{n_b} \cdot u(t-n_b+2) \end{aligned} \quad (5.6b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+N_p|t) = & -a_1 \cdot \hat{y}(t+N_p+1|t) - a_2 \cdot \hat{y}(t+N_p+2|t) - \dots - a_{n_a} \cdot y(t-n_a+N_p) \\ & + b_0 \cdot \hat{u}(t+N_p|t) + b_1 \cdot \hat{u}(t+N_p-1|t) + \dots + b_{n_b} \cdot \hat{u}(t+N_p-n_b|t) \end{aligned} \quad (5.6c)$$

Teniendo este conjunto de predicciones se debe formular el problema de optimización a resolver.

Note que al revisar documentación sobre el control predictivo es común encontrar que las salidas predichas y las actuaciones futuras se recopilan en matrices del tipo:

$$U = \begin{bmatrix} \hat{u}(t|t) \\ \hat{u}(t+1|t) \\ \vdots \\ \hat{u}(t+N_p|t) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{u}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{u}(t+N_p|t) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

y luego se resuelve un conjunto de ecuaciones matriciales para resolver el problema de optimización.

Este tipo de recopilación no corresponde a una parte fundamental del control predictivo, sino que al procedimiento que generalmente facilita la formulación y solución del problema de optimización. En casos como el de los algoritmos genéticos, en donde la función objetivo solamente tiene que entregar un número el cual será minimizado por el algoritmo, este tipo de formulación y los cálculos matriciales asociados no son necesarios.

5.1.2. Problema de optimización

El control predictivo calcula la actuación a aplicar resolviendo un problema de optimización que se define en términos de las secuencias predichas de $y(t)$ y las actuaciones futuras de $u(t)$. El conjunto de actuaciones futuras a aplicar se calculan minimizando una función objetivo que tiene como criterio que las salidas futuras sigan lo más cercano posible una trayectoria de referencia $r(t+k)$ para $k = 1, \dots, N_p$, la que en este trabajo se asume constante, es decir, $r(t+k) = r(t)$, $\forall k > 0$. Generalmente esta función objetivo toma una forma cuadrática que considera el error entre las salidas predichas y la referencia, adicionalmente se incluye un término que considera el esfuerzo de control dentro de la función objetivo.

Siguiendo las consideraciones anteriores, la función objetivo toma la forma:

$$J(t) = \sum_{k=0}^{N_p} \left((\hat{y}(t+k|t) - r(t))^T \cdot R_y \cdot (\hat{y}(t+k|t) - r(t)) + \Delta \hat{u}^T(t+k|t) \cdot R_u \cdot \Delta \hat{u}(t+k|t) \right) \quad (5.8)$$

Donde R_y es una matriz definida positiva, R_u es una matriz semi-definida positiva y:

$$\Delta \hat{u}(t+k|t) = \hat{u}(t+k|t) - \hat{u}(t+k-1|t) \quad (5.9)$$

Claramente $J(t)$ es una función de las actuaciones presentes y futuras que todavía no son aplicadas, por lo que el problema de optimización a solucionar consiste en encontrar la secuencia óptima $U^*(t)$:

$$\hat{U}^*(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}^*(t|t) \\ \hat{u}^*(t+1|t) \\ \vdots \\ \hat{u}^*(t+N_p|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\hat{u}(t+k|t)} J(t) \quad (5.10)$$

para $k = 0, \dots, N_p$.

Si la planta es sujeta a restricciones de entrada y salida, estas pueden incluirse en el problema de optimización.

Se puede obtener una solución explícita del problema de optimización si el criterio toma la forma cuadrática, el modelo es lineal y no hay restricciones. En caso contrario se debe utilizar un algoritmo iterativo para encontrar la solución.

Ejemplo 5.3

Continuando con el ejemplo 5.1 presentado en la sección anterior, la salida se puede ordenar en la siguiente ecuación matricial:

$$Y = F \cdot X + \Phi \cdot U \quad (5.11)$$

donde:

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N_p|t) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \hat{u}(t|t) \\ \hat{u}(t+1|t) \\ \vdots \\ \hat{u}(t+N_p|t) \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{N_p} \end{bmatrix} \quad (5.12a)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} C \cdot B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C \cdot A \cdot B & C \cdot B & 0 \dots & 0 & \\ C \cdot A^2 \cdot B & C \cdot A \cdot B & C \cdot B \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C \cdot A^{N_p-1} \cdot B & C \cdot A^{N_p-2} \cdot B & C \cdot A^{N_p-3} \cdot B \dots & C \cdot B & \end{bmatrix} \quad (5.12b)$$

Luego si se define:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \hat{u}(t|t) - u(t-1) \\ \hat{u}(t+1|t) - \hat{u}(t|t) \\ \vdots \\ \hat{u}(t+N_p|t) - \hat{u}(t+N_p-1|t) \end{bmatrix} \quad R_{ef} = \begin{bmatrix} r(t) \\ r(t) \\ \vdots \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

y $r(t)$ es la referencia, la función objetivo se formula como:

$$J(t) = (Y - R_{ef})^T (Y - R_{ef}) + \Delta U^T R_u \Delta U \quad (5.14)$$

El problema de optimización consiste en encontrar la secuencia óptima $\hat{U}^*(t)$ presentada en la ecuación (5.10).

Existen varias formas de resolver este problema, en [17] cambia la representación de estados, para que los estados dependan de $\Delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$ en vez de $u(t)$, en cuyo caso la optimización se puede realizar derivando la función objetivo con respecto a $\Delta u(t)$ y luego igualando a cero. En [37] se manipula la función objetivo, con el fin de que ésta dependa de U y no de ΔU y luego se resuelve mediante un método iterativo. En [38] el problema se resuelve mediante un regulador cuadrático lineal.

Como se puede observar del ejemplo anterior no existe una única manera de formular ni resolver el problema de optimización en una estrategia de control predictivo. El algoritmo de optimización a utilizar por la estrategia de control predictivo depende de cómo se formule el problema de optimización y las herramientas disponibles.

5.1.3. Estrategia de horizonte móvil

Al realizar las predicciones siempre se consideran los datos que se tienen hasta el instante t , pero en el instante $t + 1$ se tendrá un nuevo conjunto de mediciones, por lo que se puede mejorar la predicción considerando este conjunto. Al implementar la estrategia de control predictivo, se obtiene la secuencia de entradas óptimas $\hat{U}^*(t)$ resolviendo el problema de optimización y luego sólo se aplica la primera actuación es decir:

$$u(t) = \hat{u}^*(t|t) \quad (5.15)$$

Luego se vuelve a resolver el problema de optimización considerando el nuevo conjunto de mediciones.

Como las predicciones dependen de las salidas actuales $y(t)$, este procedimiento introduce realimentación a la ley del controlador predictivo, lo que le da un grado de robustez a los errores de modelado y otro tipo de perturbaciones. Otra característica de la estrategia de horizonte móvil es que al mover continuamente el horizonte de predicción se compensa el hecho de que el horizonte de predicción es finito.

5.2. Restricciones

Una de las mayores ventajas del control predictivo en comparación con otras estrategias de control consiste en la habilidad de manejar restricciones de forma sistemática. Los detalles de cómo se incorporan estas restricciones dependen específicamente del algoritmo de optimización utilizado.

Además de las restricciones de igualdad que deben satisfacer las entradas y salidas para cumplir con la dinámica del sistema, en todo problema de control hay restricciones de desigualdad tanto para las entradas como para las salidas. Mientras que las restricciones de igualdad se trabajan implícitamente (el modelo de la planta se utiliza para predecir la trayectoria predicha para las salidas, en función de las condiciones iniciales del sistema), las restricciones de desigualdad se imponen explícitamente en el problema de optimización.

5.2.1. Restricciones de entrada

Éstas pueden tener la forma de restricciones absolutas, como:

$$\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u} \quad (5.16)$$

o restricciones en los cambios de la actuación, es decir:

$$\underline{\Delta u} \leq u(t) - u(t-1) \leq \overline{\Delta u} \quad (5.17)$$

Generalmente las restricciones de entrada surgen como limitaciones de los actuadores.

5.2.2. Restricciones de salida

Las restricciones de salida tienen la forma general:

$$\underline{g}_c \leq G_c \cdot y(t) \leq \overline{g}_c \quad (5.18)$$

donde G_c es una matriz constante y $\underline{g}_c, \overline{g}_c$ son vectores constantes. Estas restricciones pueden estar activas durante los transientes, por ejemplo como resultado de límites del proceso, por ejemplo por factores económicos.

5.2.3. Restricciones en algoritmos genéticos

Al trabajar con algoritmos genéticos existen varias formas de lidiar con las restricciones, para ver un resumen detallado se recomienda [39].

En este trabajo se utiliza una función de penalidad para lidiar con las restricciones de desigualdad. El objetivo de las funciones de penalidad es agregar un factor a la función objetivo de manera que ésta tenga un valor muy grande cuando una de las restricciones no se cumpla, con el fin que los algoritmos genéticos rechacen las soluciones que no cumplan las restricciones.

La función de penalidad utilizada para resolver una restricción del tipo $g(x) \leq 0$ en este trabajo es:

$$J_r = \rho \cdot \text{máx}(0, g(x))^2 \quad (5.19)$$

donde ρ corresponde a una constante de valor grande.

Luego la función objetivo a resolver en el problema de optimización utilizando los algoritmos genéticos tiene la forma:

$$J(t) = \sum_{k=0}^{N_p} \left((\hat{y}(t+k|t) - r(t))^T \cdot R_y \cdot (\hat{y}(t+k|t) - r(t)) \right) + \sum_{k=0}^{N_p} \left(\Delta \hat{u}^T(t+k|t) \cdot R_u \cdot \Delta \hat{u}(t+k|t) \right) + J_r \quad (5.20)$$

No existe problema en incluir más de una restricción, en cuyo caso se debe crear una función de penalidad por cada restricción, con la ecuación (5.19) y luego deben ser añadidas a la función, igual que en la ecuación (5.20).

5.3. Variables de estado

La estrategia de control predictivo implementada utiliza un modelo en representación de estados, y se utiliza un filtro de Kalman para estimar los estados del sistema, a continuación se presentan detalles sobre la estimación con dicho filtro.

Considere un sistema discreto con la siguiente representación de estados:

$$x(t + 1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (5.21a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad (5.21b)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ corresponde al vector de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ al vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ al vector de salida y $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

En los sistemas físicos generalmente $D = 0$ ya que no es posible tener un efecto instantáneo de las entradas sobre sus salidas. Esto es equivalente a que las funciones de transferencia de estos sistemas sean estrictamente propias. Note que esta representación permite trabajar fácilmente con sistemas multivariables, si es que se definen adecuadamente las dimensiones de las matrices presentadas anteriormente.

5.3.1. Observadores

En general para un mismo sistema existen infinitas representaciones de estados ([40], sección 17.3), para trabajar con cualquier representación es necesario contar con el valor que $x(t)$ toma en el tiempo, lo que no siempre es posible ya que solo un número pequeño de representaciones tienen sentido físico y por lo tanto $x(t)$ se puede medir. En caso contrario es necesario buscar una forma de estimar estos valores, para lo cual se utilizan los observadores, que estiman el valor de $x(t)$ a partir de las mediciones que se tienen de $y(t)$ y de $u(t)$ y del modelo del sistema.

En la ecuación (5.21b) la salida $y(t)$ depende directamente de los estados $x(t)$. Es válido suponer entonces, que si se observa la salida por suficiente tiempo se debería poder obtener información sobre los estados. Este hecho se puede formalizar matemáticamente y lleva al

concepto de observabilidad del cual se puede leer en la sección 17.7 de [40].

La estimación de estado se hace a partir de un sistema que replica a la planta, pero que corrige la estimación en base a un término que considera el error entre la salida estimada (con el modelo y la estimación del estado) y la salida medida.

Si se considera un sistema de orden n_x , con n_u entradas y n_y salidas, definido por las ecuaciones:

$$x(t + 1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (5.22a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad (5.22b)$$

La forma del observador corresponde a:

$$\hat{x}(t + 1|t) = A \cdot \hat{x}(t|t) + B \cdot u(t) + J_o \cdot (y(t) - C \cdot \hat{x}(t|t)) \quad (5.23)$$

donde $J_o \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ se denomina la ganancia del estimador y $\hat{x}(t|t)$ se conoce como el estado estimado.

La ganancia del observador J tiene un efecto en la velocidad con la que el estimador puede estimar correctamente los estados de la planta.

Definiendo:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t|t) \quad (5.24)$$

Se tiene que $e_x(t)$ tiene una dinámica dada por:

$$e_x(t + 1) = (A - J_o \cdot C) \cdot e_x(t) \quad (5.25)$$

Además si el par (A, C) es completamente observable, los autovalores de $(A - J_o \cdot C)$ pueden situarse arbitrariamente en el plano complejo escogiendo adecuadamente la matriz de ganancia J_o (ver [40]).

5.3.2. Filtro de Kalman

Una de las mayores dificultades al utilizar un observador, es que el diseño de éste depende en gran medida de la precisión del modelo utilizado (matrices A , B y C). Para mejorar las capacidades del observador al lidiar con problemas como la incerteza, ruido de medición, perturbaciones, etcétera, se introduce el filtro de Kalman.

El filtro de Kalman es un estimador de estados óptimo, en donde la ganancia del estimador se calcula de manera que minimice la siguiente suma cuadrática:

$$E\{e_x^T(t) \cdot e_x(t)\} = E\{e_{x_1}^2(t) + e_{x_2}^2(t) + \dots, e_{x_n}^2(t)\} \quad (5.26)$$

Donde $e_x(t)$ es el error de estimación definido en (5.25). Este estimador asume que se tiene un modelo lineal, que posee perturbaciones estocásticas (ruido blanco) en la ecuación de estados como en la ecuación de salida.

Una de las ventajas del filtro de Kalman es que es un estimador recursivo, por lo que se puede actualizar a medida que llegan nuevas mediciones.

El filtro de Kalman calcula la media y varianza de los estados utilizando la ecuación del sistema en conjunto con las ecuaciones del estimador afín óptimo (que minimiza la suma del error cuadrático medio) llegando a una forma recursiva de estas ecuaciones [41]. El hecho de que sea un estimador recursivo es una gran ventaja ya que la estimación se puede actualizar a medida que van llegando nuevos datos.

Formulación del problema

Considere el sistema representado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + w(t) \quad (5.27a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + v(t) \quad (5.27b)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ corresponde al vector de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ al vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ al vector de salida y $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. Además los vectores w

y v son variables aleatorias multivariantes de ruido blanco, donde $w \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $v \in \mathbb{R}^{n_y}$ que representan al ruido de proceso (incerteza en el modelo) y al ruido de medición respectivamente. Las señales anteriores cumplen con:

$$E\{v(t)\} = 0 \quad (5.28a)$$

$$E\{w(t)\} = 0 \quad (5.28b)$$

$$E\{(v(t))^T(v(t))\} = P_v \quad (5.28c)$$

$$E\{(w(t))^T(w(t))\} = P_w \quad (5.28d)$$

$$E\{x(0)\} = \mu_0 \quad (5.28e)$$

$$E\{(x(0) - \mu_0)^T(x(0) - \mu_0)\} = P_0 \quad (5.28f)$$

El estimado a priori se calcula como:

$$\hat{x}(t|t-1) = A \cdot \hat{x}(t-1|t-1) + B \cdot u(t-1) \quad (5.29a)$$

$$P(t|t-1) = A \cdot P(t-1|t-1) \cdot A^T + P_w \quad (5.29b)$$

Cuando la nueva medición $x(t)$ se encuentra disponible la estimación se actualiza:

$$K(t) = P(t|t-1) \cdot C^T (C \cdot P(t|t-1)C^T + P_v)^{-1} \quad (5.30a)$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t) \cdot (y(t) - C \cdot \hat{x}(t|t-1)) \quad (5.30b)$$

$$P(t|t) = (I - K(t) \cdot C) \cdot P(t|t-1) \quad (5.30c)$$

En este caso $K(t)$ se conoce como la ganancia de Kalman y corresponde a la ganancia del observador (J_o en (5.23)), que en este caso corresponde a una señal que varía en el tiempo de manera óptima en el sentido que minimiza la suma de error cuadrático medio del estimador. Los parámetros de diseño del filtro de Kalman son los valores iniciales de la media y varianza de los estados, además de la varianza del ruido de medición y de proceso. En la mayoría de las aplicaciones estos valores no son conocidos, pero el filtro de Kalman

aún logra estimar los estados del proceso, aunque no de manera óptima.

5.4. Compensación de perturbaciones constantes

Existen varias formas de compensar las perturbaciones a ganancia continua. Una estrategia de control predictivo conocida como control predictivo generalizado o G.P.C. modela el ruido del proceso como una caminata aleatoria en vez de ruido blanco, lo que permite mejorar el desempeño a ganancia continua (cero error en estado estacionario), pero se ha observado que debido a las suposiciones que hace sobre el ruido, el desempeño a altas frecuencias se degrada. La versión original de esta estrategia de control fue presentada en [42], que utiliza un modelo en base a funciones de transferencias, luego esta estrategia fue extendida en [43], en donde se utiliza un modelo en variables de estados, que requiere de un observador para estimar sus estados. Claramente en ese caso se puede utilizar un filtro de Kalman para mejorar el rendimiento de la estrategia de control, lo que no es analizado en el documento.

Cabe destacar que el modelo CARIMA hace una suposición diferente para las perturbaciones que un modelo ARX, pero la función de transferencia que relaciona las entradas con las salidas es la misma, por lo que se puede identificar dicha función de transferencia con cuadrados mínimos o variables instrumentales y luego se puede transformar el modelo ARX obtenido en uno CARIMA.

Una práctica común para compensar las perturbaciones cuando un sistema es sometido a perturbaciones no medibles es realizar alguna suposición de la forma que tiene dicha perturbación y extender la representación de estados del sistema, incluyendo dicha perturbación como parte del modelo.

En este trabajo se considera que las perturbaciones no medibles tienen forma constante y se aplican en la salida del sistema durante el horizonte de predicción, por lo que la perturbación tiene la forma:

$$d(t + 1) = d(t) \quad (5.31)$$

Luego si $y(t)$ corresponde a la salida del modelo presentado en (5.22) o (5.27) la salida

que considera la perturbación $y_d(t)$ corresponde a:

$$y_d(t) = y(t) + d(t) \quad (5.32)$$

Luego el sistema presentado en (5.22) se puede extender como:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.33a)$$

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (5.33b)$$

Y si se desea estimar con un filtro de Kalman la ecuación (5.27) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + w(t) \quad (5.34a)$$

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (5.34b)$$

En ese caso la perturbación se modela como:

$$d(t+1) = d(t) + w_d(t) \quad (5.35)$$

Donde $w_d(t)$ corresponde a ruido blanco de media cero y varianza $\sigma_{w_d}^2$. En este caso el filtro de Kalman asume que la perturbación puede cambiar en cada instante de muestreo y corrige dicho cambio. A la hora de diseñar el filtro de Kalman el parámetro $\sigma_{w_d}^2$ indica que tanto cambia la perturbación, de manera que si es muy grande, cualquier error entre el modelo y la salida se asume producto de la perturbación. Mientras que si se disminuye el valor de $\sigma_{w_d}^2$ se asume que la perturbación cambia lentamente y parte del error entre el modelo y la salida se asume como ruido en los estados.

5.5. Estrategia de control predictivo

Para explicar la estrategia de control predictivo implementada es necesario presentar algunos detalles, en su mayoría de carácter práctico, los cuales serán vistos a continuación.

5.5.1. Estrategia de control predictivo

En un principio se piensa que la estrategia de control considere un sistema MIMO, de cinco entradas y cinco salidas, y que se implemente una estrategia de control predictivo que controle los cinco bancos a la vez. En teoría esto debe funcionar bien y entregar buenos resultados, ya que considera cómo se propagan las perturbaciones desde el primer al último banco y coordina las actuaciones de manera de reducir el error de seguimiento global, sacrificando el seguimiento de la referencia en un banco, para compensar en otro. En la práctica existen varias situaciones que causan problemas al implementar una estrategia de este estilo.

En primer lugar al utilizar una estrategia MIMO, es difícil aislar los problemas de control que ocurren en un banco. No es raro que al implementar la estrategia de control existan problemas, por ejemplo de programación, que hacen que esta estrategia no se comporte adecuadamente. Aislar un problema de este tipo en una estrategia multivariable es muy complicado, ya que el mal desempeño en el control de un banco hace que empeore el desempeño en el control de todo el circuito. Una forma de solucionar este problema es probando la estrategia de control predictivo en un banco a la vez, manteniendo el control PID en los otros bancos. Luego se puede ir aumentando el número de bancos que funcionan con control predictivo, hasta llegar al banco en donde se generen los problemas, luego el análisis debe enfocarse en el control de ese banco. Para realizar esto hay que poder controlar los bancos de manera independiente, lo que lleva a considerar la implementación de varias estrategias MISO, en vez de una MIMO. En el caso de este trabajo implementar un conjunto de estrategias MISO para el control del nivel de los bancos Rougher es posible, ya que la estrategia de control tiene como objetivo principal compensar las perturbaciones provocadas por los otros bancos y no el control multivariable del proceso.

En el caso de los bancos de flotación Rougher tampoco es deseable que se sacrifique

seguimiento en un banco para compensar en otro. Como se sabe, el nivel de las celdas se controla con el fin de mantener un rebose controlado, por lo que al sacrificar seguimiento es posible que las celdas comiencen a rebosar muy rápido generando rebalses en el sumidero de remolienda, efecto que se debe evitar a toda costa. Por otra parte es más fácil para el personal de operación detectar un problema si una celda se comporta de manera extraña, que si el circuito completo está presentando problemas. En el primer caso la acción tomada por el operador será desactivar el control en ese banco y buscar una causa del problema, mientras que en el segundo caso la acción será desactivar la estrategia de control en todos los bancos y no volver a activarla, perdiendo confianza en la estrategia de control.

Por último, no es extraño que algún elemento dentro de un banco del circuito falle, por ejemplo puede fallar el rotor de una celda, el sensor puede entregar valores falsos, una válvula puede requerir mantención, etcétera. Cuando algo como esto pasa, lo más común es desactivar el control en el banco que tiene problemas y trabajar con los actuadores en modo manual. En una estrategia de control MIMO esto significa desactivar el control en todo el circuito, en una estrategia MISO en cambio, desactivar el control en una celda no afecta al control de las demás.

Por todas las razones anteriores se decide implementar una estrategia MISO con prealimentación, en donde cada banco se controla de manera independiente con una estrategia de control predictivo.

5.5.2. Control en primer banco

Una de las debilidades del control predictivo es que cuando el sistema se somete a perturbaciones no medibles el desempeño de la estrategia de control se degrada. Para corregir lo anterior se hacen suposiciones sobre las perturbaciones, las que luego son integradas como parte del modelo, procedimiento presentado en la subsección 5.4. En el caso del primer banco Rougher, la mayor perturbación corresponde al flujo de entrada, que no es medido por ningún instrumento, por lo tanto cualquier cambio de flujo implica una perturbación. En ese caso el flujo no tiene forma constante como es asumido en el modelo de la perturbación, sino que cambia dependiendo de las condiciones del proceso anterior (mo-

lienda convencional), cambios que pueden ser muy bruscos, como cuando se detiene una de las dos bombas de impulsión del proceso, rápidos pero de magnitud pequeña o lentos, que es el común de los casos. Debido a esto es muy difícil generar una estrategia de control predictivo que funcione correctamente en dicho banco, ya que si la estrategia se sintoniza para que el control responda lento, al detenerse una bomba (perturbación rápida) el control se desestabiliza, generando problemas en el circuito de flotación. De igual manera, si la estrategia se sintoniza para que el lazo responda rápidamente, el circuito reacciona demasiado brusco a los cambios de flujo de alta frecuencia con pequeña amplitud, efecto que es empeorado ya que hay ruido de medición, que de ser filtrado hace que la respuesta del lazo sea muy lenta, lo que también desestabiliza el control y el desempeño de todo el circuito.

En este caso particular el objetivo de la estrategia de control predictivo es que permite compensar las perturbaciones medibles (en este caso el efecto de la apertura del actuador del banco anterior), así que en el primer banco no existe mucha diferencia entre aplicar la estrategia de control predictivo y el control PID, ya que la perturbación principal no se puede medir.

Debido a la situación descrita anteriormente y a restricciones de tiempo, se decide mantener el control PID en el primer banco e implementar la estrategia de control predictivo en los otros bancos.

5.5.3. Compensación de las perturbaciones

En el capítulo 6.2 de [36] se indica que no es buena idea utilizar toda la información que se tiene sobre el comportamiento futuro del sistema ya que las predicciones consideran que el modelo está trabajando en lazo abierto y que las salidas actuarán libremente en el futuro. Si se utilizan las predicciones de algunas salidas para predecir el comportamiento de otra, en un esquema de prealimentación, habrá una gran diferencia entre la salida del modelo y la salida real, ya que el modelo no considerará el efecto de la realimentación y que hay un lazo de control que evita que la señal se aleje mucho de la referencia.

Para evitar este efecto, en este trabajo el problema de optimización considera que los niveles de los bancos contiguos, que forman parte del modelo de cada banco, se mantienen

constantes durante el horizonte de predicción.

Además, el problema de optimización entrega las actuaciones que se aplicarán en los instantes t y $t + 1$. Como estas actuaciones son perturbaciones para el nivel del siguiente banco y debido a que la estrategia de control predictivo se ejecuta de manera secuencial (primero se soluciona el problema de optimización del banco 2, luego del 3, etc.), se pueden utilizar en el modelo del nivel de dicho banco para mejorar la predicción. En el caso del primer banco, como no se tienen predicciones de las actuaciones futuras, se considera que las actuaciones de este banco no cambian en el horizonte de predicción, al utilizarse en el modelo del segundo banco.

5.5.4. Efectos de horizonte de predicción y control

A continuación se presentan algunas de las consideraciones que se deben tener al escoger los horizontes de predicción N_p y control N_u .

- Al aumentar el horizonte de control y resolver el problema de optimización, las soluciones obtenidas tienden a optimizar mejor el transiente.
- Al aumentar el horizonte de predicción, la solución obtenida pondera más lo que pasa cuando el sistema llega a estado estacionario y por lo tanto tiende a suavizar la respuesta entregada por la estrategia de control predictivo.
- Debido a lo anterior es bueno seguir algunas recomendaciones, como que el horizonte de control debe ser más pequeño que el horizonte de predicción (alrededor de 4 veces más pequeño), con el fin de optimizar el comportamiento en estado estacionario y no solo en el transiente. Ya que esto último tiende a entregar respuestas que hacen que el control sea inestable. Además es recomendable que el horizonte de predicción sea más grande que el tiempo de asentamiento del sistema, para que el problema de optimización considere lo que pasa en estado estacionario.
- Teóricamente manipular estos valores, sobre todo el horizonte de predicción, no tiene un efecto muy grande entre un horizonte de una o dos muestras más que otro, pero en la práctica, debido a los errores de modelado, perturbaciones no modeladas,

etcétera a veces cambios en estos parámetros, por pequeños que sean si producen efectos grandes en el desempeño de la estrategia de control predictivo.

En capítulo 5 de [36] se realiza un análisis más detallado sobre la elección de estos parámetros.

5.5.5. Algoritmo de optimización

La mayor limitante a la hora de diseñar la estrategia de control, en este trabajo, es que ésta debe ser implementada con las herramientas disponibles, las que en este caso consiste en el software MATLAB, para realizar cálculos offline y el sistema experto KSX, para implementar la estrategia de control. El sistema experto KSX cuenta con una herramienta de optimización basada en algoritmos genéticos la que se utiliza para resolver el problema (5.10), con la función objetivo que considera las restricciones presentada en (5.20). El principal problema que surge debido a la utilización de esta herramienta es el tiempo de cálculos de los algoritmos genéticos es considerable y aumenta a medida que:

- Crece el número de variables a optimizar, que en el caso del control predictivo depende del horizonte de control y de cuántas entradas a manipular tenga la estrategia de control en caso de tener varias entradas y varias salidas
- Crece espacio de búsqueda, que depende del rango en que se pueden escoger las soluciones y los niveles de cuantificación
- Aumenta la complejidad de la función objetivo (en caso de querer cambiar el criterio presentado en (5.21) o al agrandar el horizonte de predicción).

Para disminuir el número de variables a optimizar, el problema de optimización se formula de manera que se encuentren los cambios futuros a aplicar en la actuación en vez de la secuencia de actuaciones futuras. En ese caso si se asume que la secuencia solo cambia un número de muestras pequeñas, definidas por el horizonte de control N_u , el

problema se convierte en encontrar:

$$\Delta \hat{U}^*(t) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}^*(t|t) \\ \Delta \hat{u}^*(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}^*(t+N_u-1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}(t+k|t)} J(t) \quad (5.36)$$

para $k = 0, \dots, N_u - 1$ y la función objetivo definida en (5.20).

De esta manera ahora el número de variables a optimizar depende de N_u , que en este caso se escoge igual a 2 muestras, en vez de N_p , ya que el resto de cambios se considera igual a cero.

El hecho de que la estrategia es del tipo MISO y no MIMO también ayuda a reducir el tiempo de cálculo de los algoritmos genéticos, ya que cada problema requiere de optimizar 2 variables en vez de 8 (2 por banco). Cabe destacar que el espacio de búsqueda crece exponencialmente con el número de variables del problema. En la experiencia al resolver un problema MIMO la herramienta del sistema experto toma alrededor de 7 segundos en encontrar la solución del problema de optimización, mientras que la solución de cada problema por separado toma alrededor de 0.5 segundos.

La herramienta de optimización requiere además, que las variables a optimizar se cuantifiquen, para lo que hay que especificar el rango de las variables a optimizar y la distancia entre los niveles de cuantificación. Como en este caso las variables a minimizar corresponden a la secuencia de cambios de las actuaciones futuras $\Delta \hat{U}^*(t)$, definir el rango agrega una restricción adicional que es el tamaño máximo que puede tomar un cambio en la actuación. Analizando datos históricos se observa que con el control PID los cambios máximos de las actuaciones eran de aproximadamente 3% cada 10 segundos, que corresponde al tiempo de muestreo de la estrategia de control, por lo que se escoge el rango para cada variable a optimizar entre -3% y 3% , con una distancia entre niveles de cuantificación de $0,1\%$. Lo anterior implica que la actuación solo podrá tomar los valores $[-3\%, -2,9\%, -2,8\%, \dots, 2,9\%, 3\%]$. No se justifica que la distancia entre niveles de cuantificación sea menor ya que la válvula no es capaz de generar actuaciones tan precisas, pero el tiempo de cálculo del algoritmo aumenta debido a esta elección.

5.5.6. Resumen de la estrategia de control formulada

La estrategia de control predictivo formulada corresponde a una estrategia MISO, en donde el comportamiento del nivel de cada banco se predice en función de los niveles de los bancos contiguos y de la apertura de las válvulas (actuadores) del banco anterior, y de su propio banco. El problema de optimización a resolver corresponde al problema presentado en la ecuación (5.36), es decir encontrar la secuencia de cambios futuros a aplicar en el actuador (válvula a la salida del banco), que minimiza la función objetivo presentada en (5.20), la que considera restricciones para la actuación y la salida. El modelo se implementa utilizando variables de estados, que considera que las perturbaciones no medibles son constantes y utiliza un filtro de Kalman para estimar los estados del modelo, que incluyen la perturbación constante. Al ser una estrategia MISO cada problema de optimización se resuelve de manera secuencial, comenzando con la actuación calculada por el control PID del primer banco, luego la estrategia de control predictivo del segundo banco, luego la del tercer banco, hasta llegar al quinto banco. La estrategia de control predictivo aplica una acción de control cada 10 segundos.

En la figura 5.1 se presenta un resumen de cómo se ejecuta la estrategia de control, la que utiliza la siguiente notación para referirse al sistema aumentado presentado en la sección 5.4.

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_d = \begin{bmatrix} C & I \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

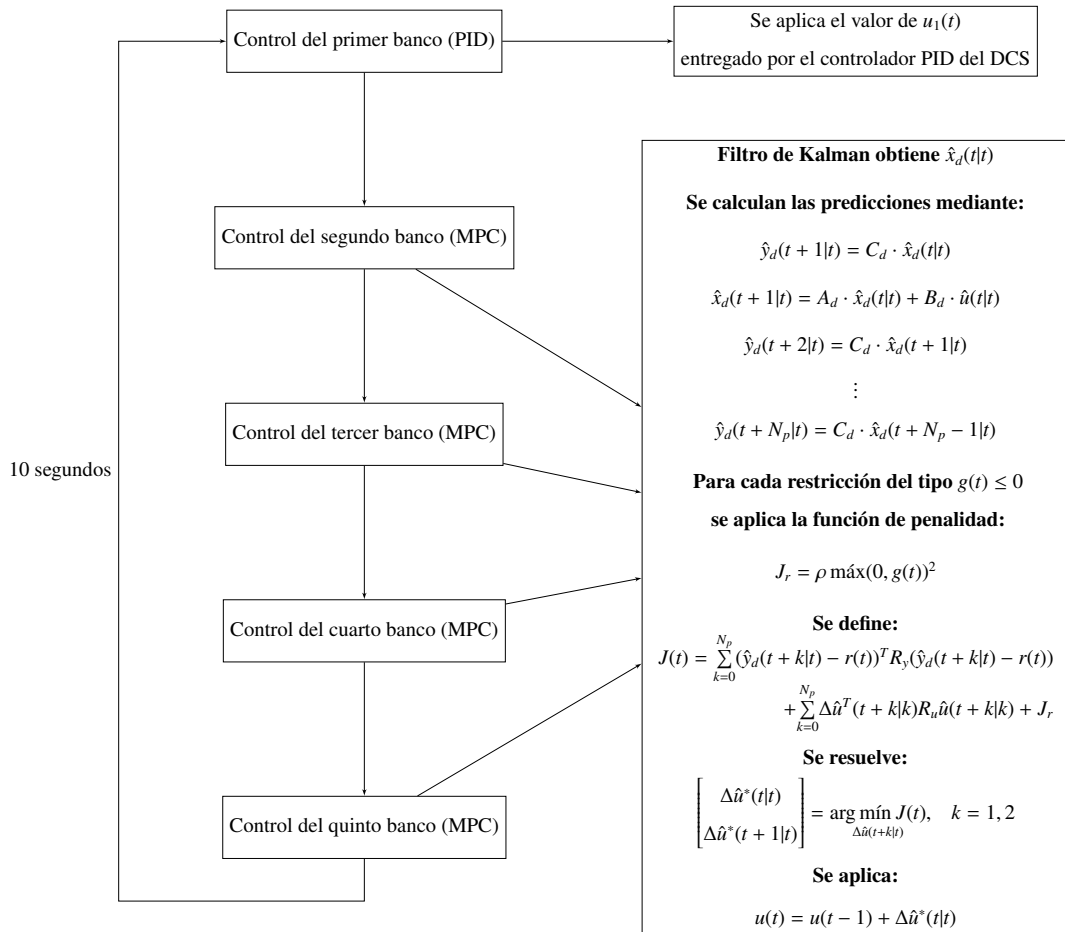


Figura 5.1: Resumen de estrategia de control.

6. Trabajo experimental

Los bancos “*Rougher*” en el proceso de flotación se asimilan mucho a un conjunto de estanques acoplados. El desempeño de un conjunto de controladores PID en este sistema no es lo suficientemente bueno, ya que las actuaciones de un banco provocan perturbaciones en el siguiente. Además la empresa cuenta con una aplicación de control programada en un sistema experto que imita las mejoras prácticas operacionales del personal, con el fin de llevar el proceso a un punto de trabajo óptimo manipulando las referencias del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*”. Esta aplicación al integrarse con los controladores PID presenta problemas, ya que al manipular las referencias se generan perturbaciones que el control PID no logra compensar, y que terminan por desestabilizar el sistema. Uno de los objetivos del trabajo consiste en mejorar el seguimiento de las referencias del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*”, de manera que esta aplicación pueda manipular las referencias sin perder el control del nivel de pulpa del circuito.

El trabajo consiste en la implementación de una estrategia de control predictivo que permita controlar el nivel de pulpa de cada uno de los bancos considerando las perturbaciones provocadas por los bancos anteriores, con el fin de reducir la variabilidad del nivel y mejorar el seguimiento de las referencias dentro circuito “*Rougher*” del proceso de flotación de ambas líneas de producción.

En la figura 6.1 se observa como un cambio en el flujo de entrada genera una perturbación que se propaga por todo el circuito. En la figura 6.2 se observa una perturbación en el quinto banco provocada por los cambios en las referencias de los bancos anteriores.

El trabajo realizado experimentalmente consiste en la identificación, programación e implementación de la estrategia de control predictivo.

Primero se identifica el sistema, para lo que se realiza un experimento de identificación, generando datos de entrada y salida, los que son adquiridos mediante las herramientas del sistema experto KSX y luego son procesados mediante el “*toolbox*” de identificación de sistemas de MATLAB. Luego se programa e implementa la estrategia de control predictivo

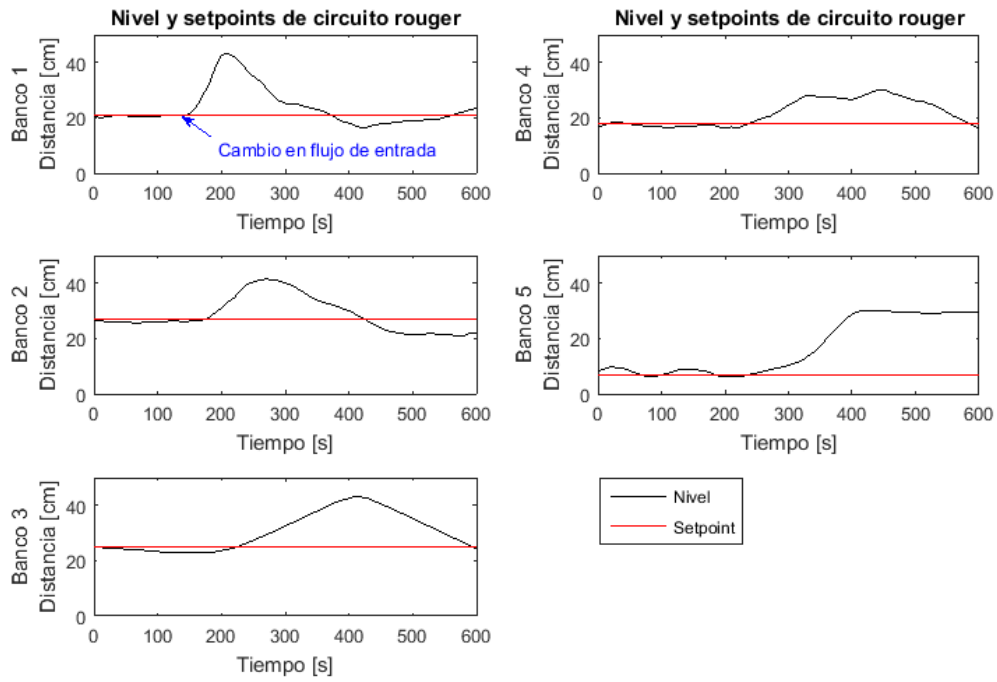


Figura 6.1: Propagación de perturbaciones.

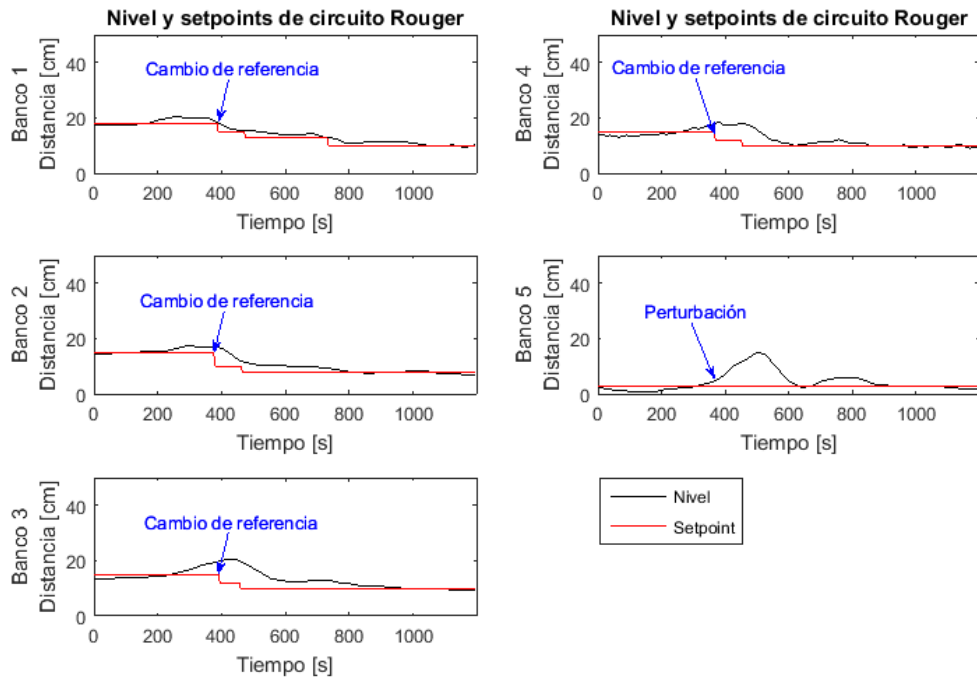


Figura 6.2: Perturbación en quinto banco provocada por cambios de referencias en los bancos anteriores.

presentada en el capítulo 5, que considera un modelo en variables de estado aumentado, que asume que las perturbaciones no medibles en la salida son constantes, un filtro de Kalman para la estimación de los estados y en donde el problema de optimización considerado, es resuelto mediante la herramienta de optimización del sistema experto (que utiliza algoritmos genéticos).

A continuación se detalla el desarrollo del trabajo realizado.

6.1. Estrategia de control predictivo en línea 1

El trabajo comienza con la identificación del modelo del nivel de los bancos “*Rougher*” de la línea 1, que consiste en 5 bancos formados por 14 celdas cuadradas de 3000[*pies*³], y donde el primer banco está formado por dos celdas, mientras que el resto de los bancos está formado por tres.

Se consideran cinco modelos, en donde cada uno considera como salida el nivel de pulpa de cada banco y como entradas:

Para el banco 1:

- El flujo de entrada (no hay sensores que midan este flujo)
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 1.
- El nivel del banco 2.

Para el banco 2:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 1.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 2.
- El nivel del banco 1.
- El nivel del banco 3.

Para el banco 3:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 2.

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 3.
- El nivel del banco 2.
- El nivel del banco 4.

Para el banco 4:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 3.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 4.
- El nivel del banco 3.
- El nivel del banco 5.

Para el banco 5:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 4.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 5.
- El nivel del banco 4.

Lo que concuerda con el modelo presentado en la sección 2.6.1 si se considera cada una de las ecuaciones presentadas en (2.1) como un sistema MISO.

Cabe destacar que el control mediante controladores PID utilizado para controlar los niveles funciona correctamente cuando no hay perturbaciones adicionales, independiente del punto de operación del proceso. De este hecho se concluye que un modelo lineal es lo suficientemente bueno para modelar el sistema, por lo que se utiliza esta clase de modelos en la identificación del proceso.

6.1.1. Experimento de identificación

Para identificar el sistema se realizan 6 experimentos; en 5 de estos experimentos se manipulan 5 entradas a la vez y se utilizan para estimar el modelo del nivel de cada uno

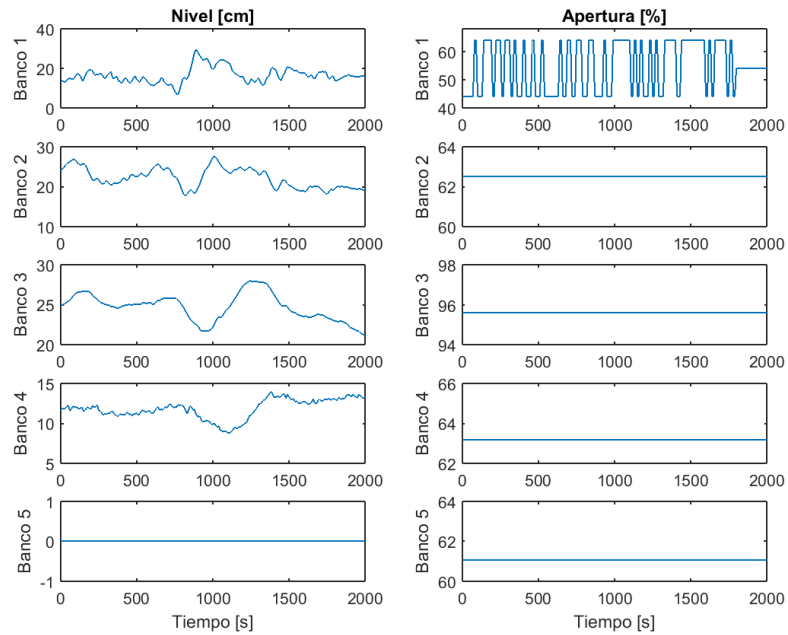


Figura 6.3: Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 1.

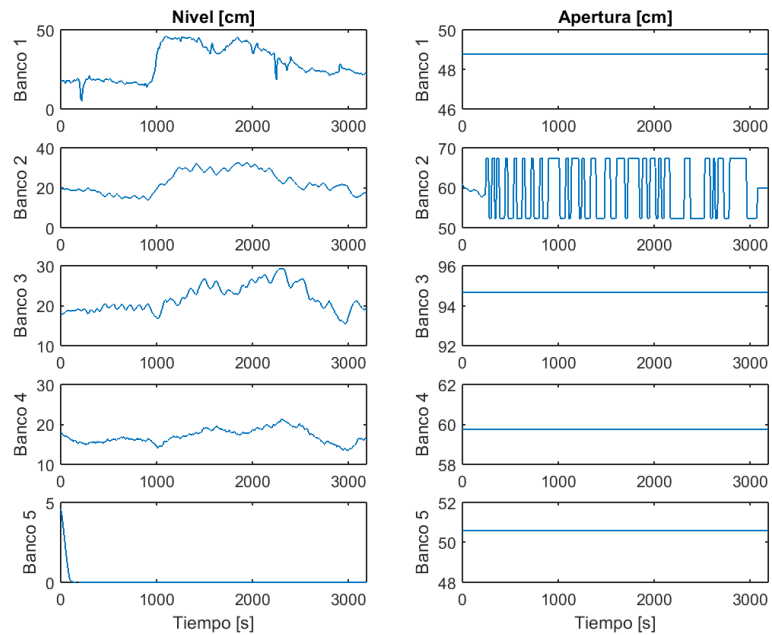


Figura 6.4: Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 2.

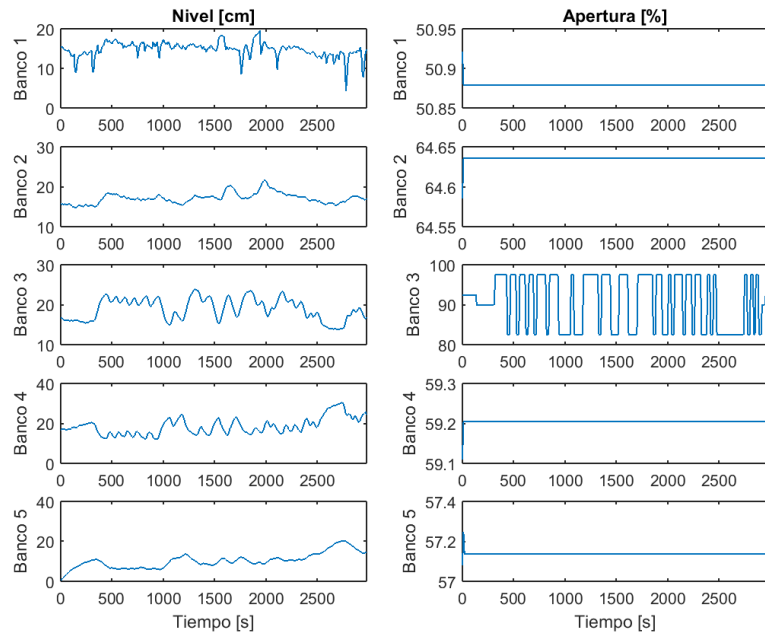


Figura 6.5: Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 3.

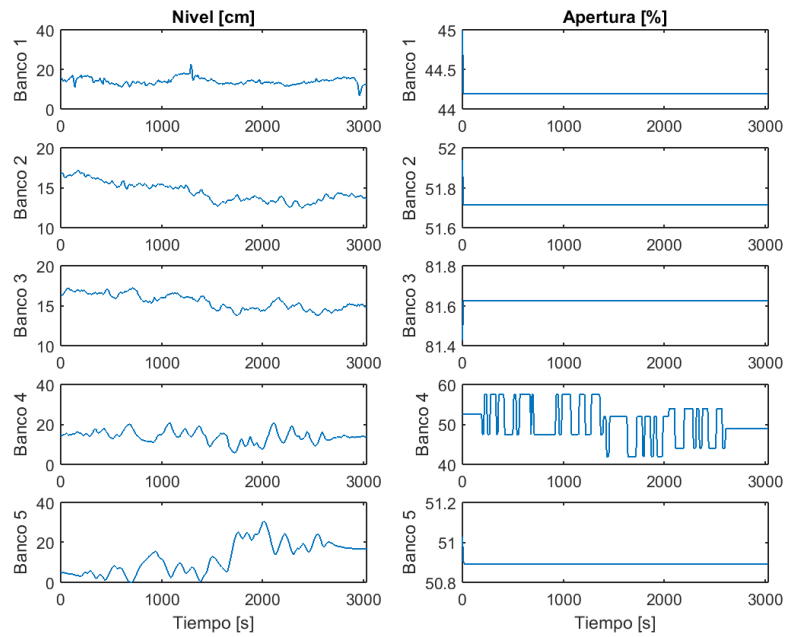


Figura 6.6: Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 4.

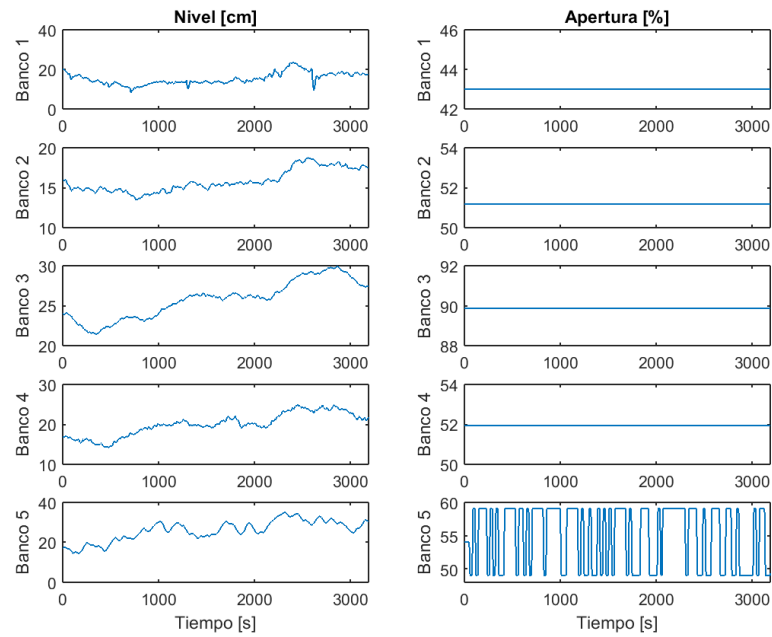


Figura 6.7: Gráfico de experimento de identificación 1; solo se modifica el actuador del banco 5.

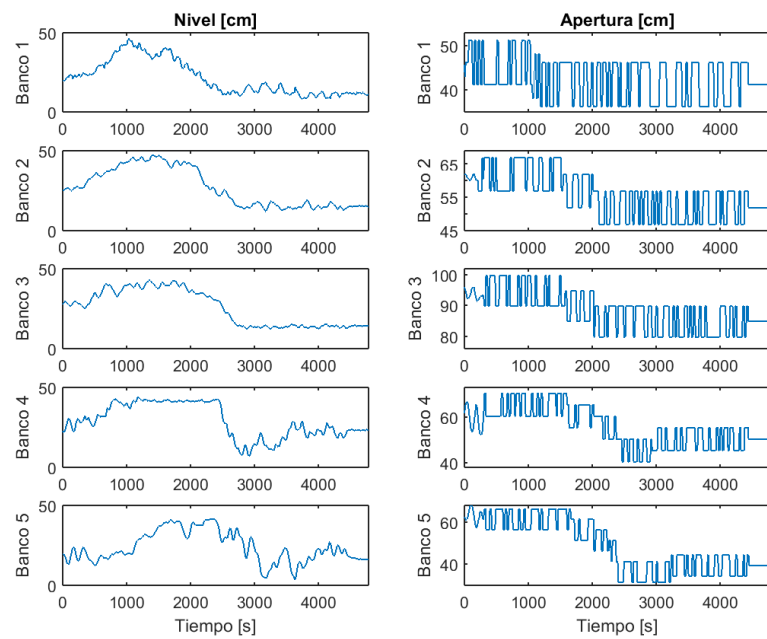


Figura 6.8: Gráfico de experimento de identificación 6; manipulan los actuador de todos los bancos a la vez.

de los bancos. En el sexto experimento se manipulan las 5 entradas a la vez y se utiliza para validar el modelo obtenido. En las figuras 6.3-6.8 se presentan los experimentos realizados.

Los experimentos se realizaron alimentando la entrada correspondiente con una señal PRBS con un tiempo de cambio mínimo de 20[s] y de amplitud:

- 20[%] en la apertura de la válvula 1 para el experimento 1.
- 15[%] en la apertura de la válvula 2 para el experimento 2.
- 15[%] en la apertura de la válvula 3 para el experimento 3.
- 10[%] en la apertura de la válvula 4 para el experimento 4.
- 10[%] en la apertura de la válvula 5 para el experimento 5.
- 10[%] en la apertura de la válvula 1, 10[%] en la apertura de la válvula 2, 10[%] en la apertura de la válvula 3, 10[%] en la apertura de la válvula 4, 10[%] en la apertura de la válvula 5 para el experimento 6.

El punto de operación en el cual trabaja el proceso para cada experimento corresponde al punto de operación que tiene el circuito “*Rougher*” antes de comenzar el experimento.

En algunos casos este punto de operación debe ser modificado para compensar cambios de flujo en la entrada del proceso lo que corresponde a una práctica permitida al identificar el sistema, siempre y cuando éstos cambios sean mucho menores que los cambios aplicados por la señal PRBS. Idealmente el experimento debiese hacerse evitando que existan perturbaciones, pero al estar trabajando en un proceso real que se encuentra en producción, esto resulta imposible.

Al diseñar el experimento en esta línea se siguen las recomendaciones básicas, que corresponden a alimentar el sistema con una señal PRBS de amplitud lo suficientemente grandes para tener una relación señal a ruido pequeña y en donde no hay recomendaciones clara sobre el tiempo de cambio mínimo de la señal PRBS. Para obtener este tiempo, se realizan pruebas, manipulando este parámetro hasta observar que exista un cambio pequeño pero perceptible en la salida.

Los datos de entrada y salida son obtenidos en una planilla de datos guardados en formato “.csv”, que se puede abrir con herramientas como Microsoft Excel, mediante la herramienta historizadora del sistema experto KSX. Estos datos se pre-procesan eliminando su valor medio (un ejemplo de esto se puede observar en la figura 6.9) y luego se utiliza tanto el algoritmo de cuadrados mínimos como el algoritmo de variables instrumentales para encontrar el mejor modelo (función de transferencia) que se ajuste a los datos de validación (utilizando validación cruzada).

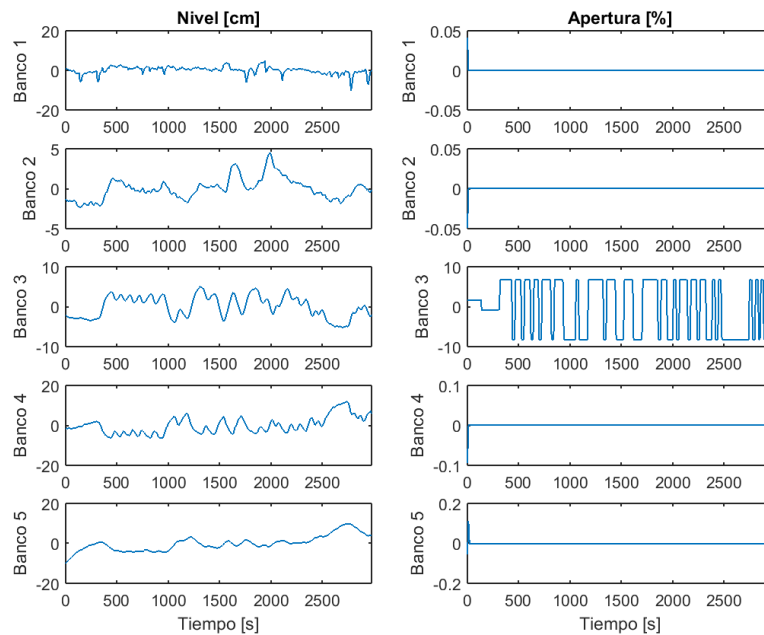


Figura 6.9: Gráficos del experimento de identificación 3; con valor medio igual a cero.

6.1.2. Resultados de la identificación

Para encontrar el número de parámetros correctos para el modelo se utiliza el conocimiento del modelo, acotándose a buscar modelos de órdenes pequeños (no mayores a 5), se revisan los gráficos de la respuesta del modelo vs la respuesta del proceso, buscando que esta sea lo más parecida posible, se analiza la respuesta a escalón del modelo obtenido, la que debe ser consistente con la respuesta del sistema y se utiliza el criterio del FPE como ayuda para escoger el modelo.

Cabe destacar que el trabajo de identificación es un trabajo largo de prueba y error,

en donde se utilizan las herramientas señaladas anteriormente para encontrar el mejor modelo para el nivel de pulpa de cada banco. En este documento se presentan los modelos obtenidos luego de realizar este procedimiento.

En las figuras 6.10-6.14 se presentan los gráficos del modelo vs la respuesta del proceso y su porcentaje de ajuste del mejor modelo obtenido.

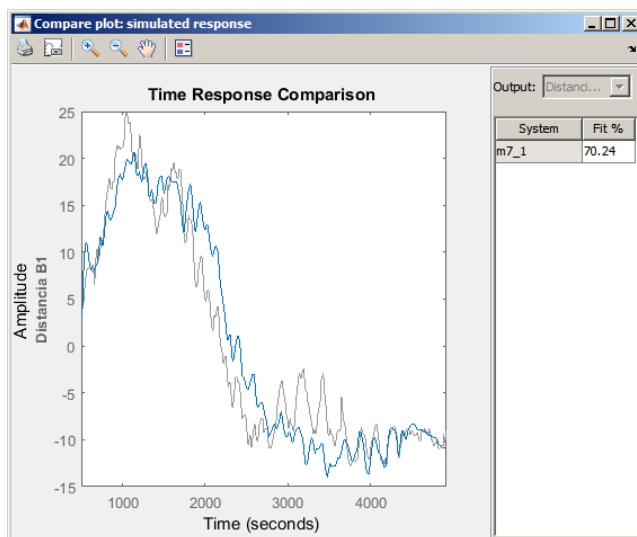


Figura 6.10: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 1.

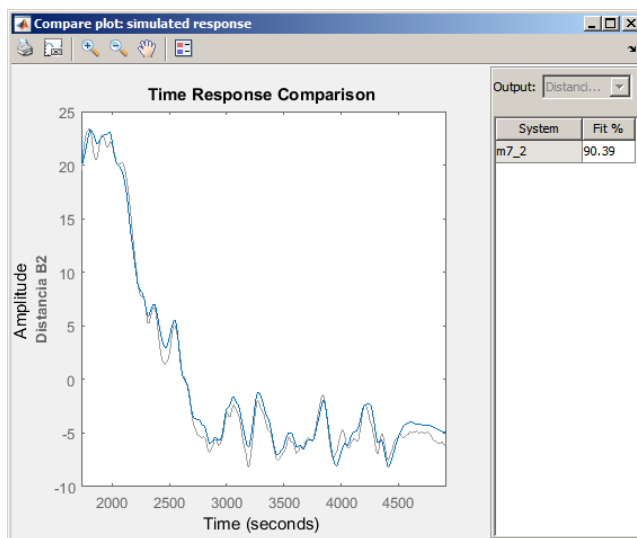


Figura 6.11: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 2.

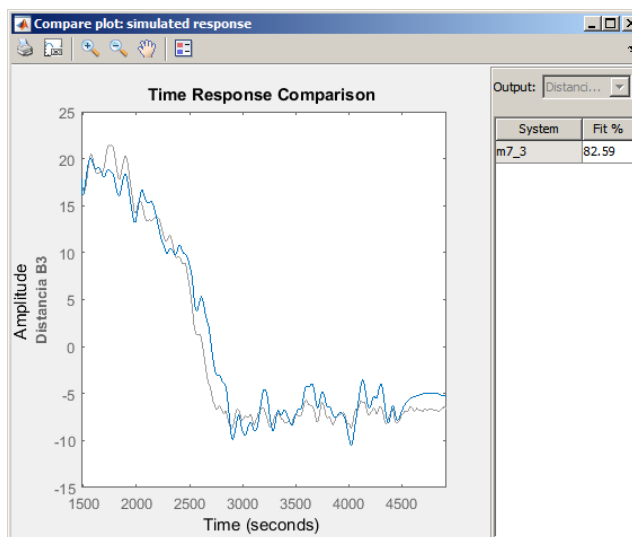


Figura 6.12: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 3.

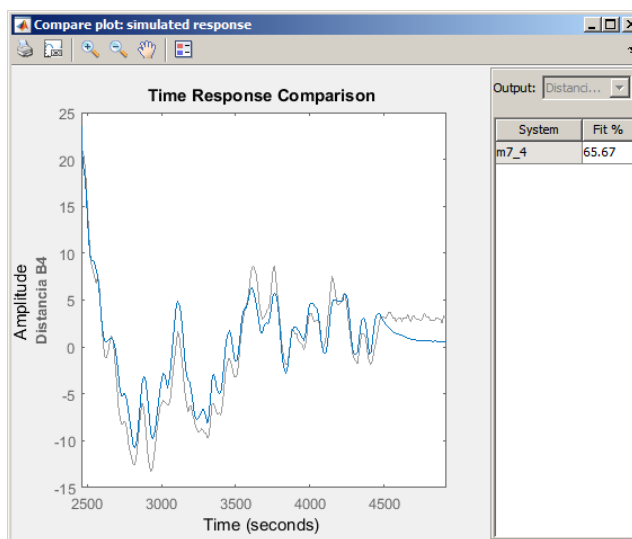


Figura 6.13: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 4.

En las tablas 6.1-6.5 se presenta el tiempo de asentamiento y ganancia a continua de cada función de transferencia. Los tiempos de asentamiento concuerdan con los valores obtenidos experimentalmente, que son estimados entre 2 y 5 minutos para cada banco y las ganancias también, que se estiman entre 0.5 y 2 para cada banco.

A continuación se presenta un resumen de los mejores modelos obtenidos y algunas de sus características.

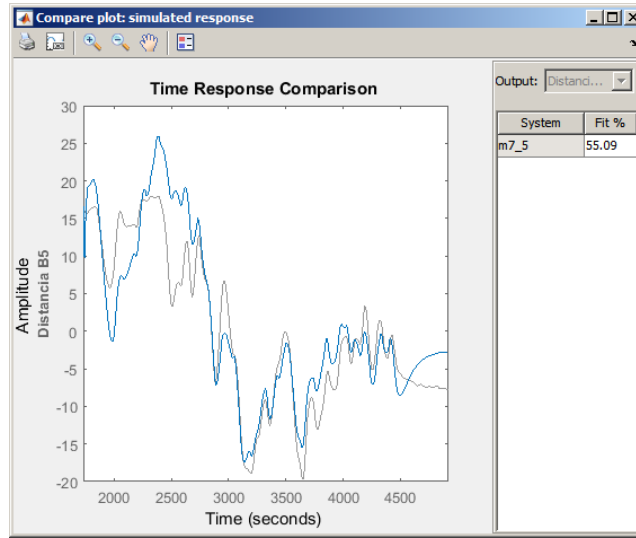


Figura 6.14: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 5.

Modelo del nivel de pulpa del banco 1

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$(1 - 0,959 \cdot z^{-1}) \cdot y_1(t) = z^{-2} \cdot (0,4876 - 0,1122 \cdot z^{-1} - 0,3413 \cdot z^{-2}) \cdot y_2(t) + 0,6301 \cdot z^{-1} \cdot u_1(t) + e(t) \quad (6.1)$$

Ajuste con datos de validación: 70.24 %

FPE: 1.682

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.1: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “Rougher” 1 de la línea 1.

| | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Función de transferencia | $\frac{Y_1(z^{-1})}{Y_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_1(z^{-1})}{U_1(z^{-1})}$ |
| Ganancia en estado estacionario | 0.83 | 1.54 |
| Tiempo de asentamiento | 29.2 segundos | 935 segundos |

Modelo del nivel de pulpa del banco 2

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Variables instrumentales

Modelo:

$$(1 - 1,707 \cdot z^{-1} + 0,7433 \cdot z^{-2})y_2(t) = 0,01697 \cdot z^{-2} \cdot y_1(t) \\ + z^{-2} \cdot (0,1087 - 0,09058 \cdot z^{-1}) \cdot y_3(t) - 0,01543z^{-1} \cdot u_1(t) \\ + z^{-1} \cdot (0,01461 + 0,0144 \cdot z^{-1}) \cdot u_2(t) + e(t) \quad (6.2)$$

Ajuste con datos de validación: 90.39 %

FPE: 0.04639

Tiempo de muestreo: 10 segundos.

Tabla 6.2: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1.

| Función de transferencia | $\frac{Y_2(z^{-1})}{Y_1(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{Y_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{U_1(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{U_2(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.466 | 0.499 | -0.424 | 0.797 |
| Tiempo de asentamiento | 293 [s] | 255 [s] | 283 [s] | 288 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 3

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Variables instrumentales

Modelo:

$$(1 - 2,019 \cdot z^{-1} + 1,382 \cdot z^{-2} - 0,3316 \cdot z^{-3}) \cdot y_3(t) = 0,01692 \cdot z^{-2} \cdot y_2(t) \\ + z^{-2} \cdot (0,02798 - 0,01831 \cdot z^{-1}) \cdot y_4(t) - 0,01801 \cdot z^{-1} \cdot u_2(t) \\ + z^{-1} \cdot (0,01444 + 0,0154 \cdot z^{-1}) \cdot u_3(t) + e(t) \quad (6.3)$$

Ajuste con datos de validación: 82.59 %

FPE: 0.02881

Tiempo de muestreo: 10 segundos.

Tabla 6.3: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 3 de la línea 1.

| Función de transferencia | $\frac{Y_3(z^{-1})}{Y_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{Y_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{U_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{U_3(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.541 | 0.309 | -0.576 | 0.952 |
| Tiempo de asentamiento | 293 [s] | 269 [s] | 283 [s] | 289 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 4

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Variables instrumentales

Modelo:

$$\begin{aligned}
 (1 - 1,515 \cdot z^{-1} + 0,5686 \cdot z^{-2}) \cdot y_4(t) = & z^{-2} \cdot (0,1522 - 0,1229 \cdot z^{-1}) \cdot y_3(t) \\
 & + z^{-2} \cdot (0,06215 - 0,04549 \cdot z^{-1}) \cdot y_5(t) - 0,06999 \cdot z^{-1} \cdot u_3(t) \\
 & + 0,08308 \cdot z^{-1} \cdot u_4(t) + e(t)
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ajuste con datos de validación: 65.67 %

FPE: 0.1484

Tiempo de muestreo: 10 segundos.

Tabla 6.4: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 4 de la línea 1.

| Función de transferencia | $\frac{Y_4(z^{-1})}{Y_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{Y_5(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{U_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{U_4(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.547 | 0.311 | -1.3 | 1.55 |
| Tiempo de asentamiento | 156 [s] | 208 [s] | 242 [s] | 242 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 5

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Variables instrumentales

Modelo:

$$(1 - 1,515 \cdot z^{-1} + 0,5686 \cdot z^{-2}) \cdot y_4(t) = z^{-2} \cdot (0,1522 - 0,1229 \cdot z^{-1}) \cdot y_3(t) \\ + z^{-2} \cdot (0,06215 - 0,04549 \cdot z^{-1}) \cdot y_5(t) - 0,06999 \cdot z^{-1} \cdot u_3(t) \\ + 0,08308 \cdot z^{-1} \cdot u_4(t) + e(t) \quad (6.5)$$

Ajuste con datos de validación: 55.09 %

FPE: 0.5304

Tiempo de muestreo: 10 segundos.

Tabla 6.5: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 5 de la línea 1.

| Función de transferencia | $\frac{Y_5(z^{-1})}{Y_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_5(z^{-1})}{U_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_5(z^{-1})}{U_5(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 1.2 | -3.87 | 2.09 |
| Tiempo de asentamiento | 432 [s] | 432 [s] | 431 [s] |

En el resumen anterior se utiliza la siguiente notación.

$y_1(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 1.

$y_2(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1.

$y_3(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 1.

$y_4(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 4 de la línea 1.

$y_5(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 5 de la línea 1.

$u_1(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 1 de la línea 1 [%].

$u_2(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1 [%].

$u_3(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 3 de la línea 1 [%].

$u_4(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 4 de la línea 1 [%].

$u_5(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 5 de la línea 1 [%].

6.1.3. Representación en variables de estado

Luego se toma la parte de los modelos que consideran la relación entre las entradas y salidas de cada banco, ignorando la parte estocástica, y se transforma a una representación

de estado.

Estas representaciones se presentan a continuación.

Representación de estados del modelo del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*” de la línea 1

La representación de estados para los modelos del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*” de la línea 1 corresponde a:

$$X_{mi}(t + 1) = A_i \cdot X_{mi}(t) + B_i \cdot U_{mi}(t) \quad (6.6a)$$

$$y_i(t) = C_i \cdot X_{mi}(t) \quad (6.6b)$$

con $i = 1, \dots, 5$

Los parámetros de la representación de estados de los modelos de cada banco se presentan a continuación:

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,959 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,3413 & 0 \\ -0,1122 & 0 \\ 0,4876 & 0,06301 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m1}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} \quad X_{m1} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,7355 \\ 1 & 1,673 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,06416 \\ 0 & 0 & -0,06142 & 0,06538 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$U_{m2}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad X_{m2} = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco

“Rougher” 3 de la línea 1

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,3316 \\ 0,5 & 0 & -0,6909 \\ 0 & 2 & 2,019 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,03662 & 0 & 0,0308 \\ 0,06767 & 0,1119 & -0,07206 & 0,05775 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$U_{m3}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad X_{m3} = \begin{bmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco

“Rougher” 4 de la línea 1

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,6081 \\ 1 & 1,533 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1426 & 0,1573 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$U_{m4}(t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \quad X_{m3} = \begin{bmatrix} x_{41}(t) \\ x_{42}(t) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “Rougher” 5 de la línea 1

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,6925 \\ 0 & 1 & 1,67 \end{bmatrix} & B_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,005242 \\ 0 & -0,1836 & 0,07114 \\ 0,0547 & 0,007228 & 0,01881 \end{bmatrix} \\
 C_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \\
 U_{m5}(t) &= \begin{bmatrix} y_4(t)(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} & X_{m3} &= \begin{bmatrix} x_{51}(t) \\ x_{52}(t) \\ x_{53}(t) \end{bmatrix} \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

6.1.4. Representación en variables de estado aumentada

Luego estos modelos se aumentaron considerando una perturbación constante en la salida, los que se presentan a continuación:

Representación de estados aumentada

La representación de estados que considera una perturbación no medible constante en la salida, para los modelos del nivel de pulpa de los bancos “Rougher” de la línea 1 corresponde a:

$$X_{mai}(t + 1) = A_i \cdot X_{mai}(t) + B_i \cdot U_{mi}(t) \quad (6.12a)$$

$$y_i(t) = C_{ai} \cdot X_{mai}(t) \quad (6.12b)$$

con $i = 1, \dots, 5$

Los parámetros de la representación de estados se presentan a continuación:

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 1

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9590 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a1} = \begin{bmatrix} -0,3413 & 0 \\ -0,1122 & 0 \\ 0,4876 & 0,0630 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m1}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma1} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \\ d_1(t) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1

$$A_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,7433 & 0 \\ 1 & 1,7069 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1812 & 0 & 0,0288 \\ 0,0339 & 0,2175 & -0,0309 & 0,0292 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m2}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma2} = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 1

$$\begin{aligned}
 A_{a3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,3316 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,6909 & 0 \\ 0 & 2 & 2,0189 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & B_{a3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0366 & 0 & 0,0308 \\ 0,0677 & 0,1119 & -0,0721 & 0,0578 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_{a3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 & 1 \end{bmatrix} \\
 U_{m3}(t) &= \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} & X_{ma3} &= \begin{bmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 4 de la línea 1

$$\begin{aligned}
 A_{a4} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5686 & 0 \\ 1 & 1,5151 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & B_{a4} &= \begin{bmatrix} -0,2458 & -0,0910 & 0 & 0 \\ 0,3045 & 0,1243 & -0,1400 & 0,1662 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_{a4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \\
 U_{m4}(t) &= \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} & X_{ma4} &= \begin{bmatrix} x_{41}(t) \\ x_{42}(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix} \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 5 de la línea 1

$$\begin{aligned}
 A_{a5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,6925 & 0 \\ 0 & 1 & 1,6697 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & B_{a5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0052 \\ 0 & -0,1836 & 0,0711 \\ 0,0547 & 0,0072 & 0,0188 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_{a5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 & 1 \end{bmatrix} \\
 U_{m5}(t) &= \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} & X_{ma5} &= \begin{bmatrix} x_{51}(t) \\ x_{52}(t) \\ x_{53}(t) \\ d_5(t) \end{bmatrix} \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

6.1.5. Filtro de Kalman

Luego para cada modelo aumentado se implementa un filtro de Kalman con el fin de estimar los estados del modelo, incluyendo la perturbación constante a la salida, los que se presentan a continuación.

Ecuaciones de los filtros de Kalman

Las ecuaciones para cada filtro de Kalman implementados corresponden a:

$$\hat{X}_{mai}(t|t-1) = A_{mai} \cdot \hat{X}_{mai}(t-1|t-1) + B_{mai} \cdot U_{mi}(t-1) \quad (6.18a)$$

$$P_{mai}(t|t-1) = A_{mai} \cdot P_{mai}(t-1|t-1) \cdot A_{mai}^T + P_{wi} \quad (6.18b)$$

$$K_{mai}(t) = P_{mai}(t|t-1) \cdot C_{mai}^T \cdot (C_{mai} \cdot P_{mai}(t|t-1) \cdot C_{mai}^T + P_{vi})^{-1} \quad (6.18c)$$

$$\hat{X}_{mai}(t|t) = \hat{X}_{mai}(t|t-1) + K_{mai}(t) \cdot (y_i(t) - C_{mai} \cdot \hat{X}_{mai}(t|t-1)) \quad (6.18d)$$

$$P_{mai}(t|t) = (I - K_{mai}(t)C_{mai}) \cdot P_{mai}(t|t-1) \quad (6.18e)$$

con $i = 1, \dots, 5$.

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 1

$$P_{w1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad P_{v1} = 1$$

$$\hat{X}_{ma1}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma1}(0|0) = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 1

$$P_{w2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \quad P_{v2} = 1$$

$$\hat{X}_{ma2}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma2}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 1

$$P_{w3} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad P_{v3} = 1$$

$$\hat{X}_{ma3}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma3}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 4 de la línea 1

$$P_{w4} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad P_{v4} = 1$$

$$\hat{X}_{ma4}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma4}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 5 de la línea 1

$$P_{w5} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \quad P_{v5} = 1$$

$$\hat{X}_{ma5}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma5}(0|0) = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

Como se presenta en el capítulo 5, el filtro de Kalman sirve para estimar los estados, reducir los efectos del ruido de medición de la salida y para reducir el efecto de los errores de modelado, mejorando la robustez de la estrategia de control. Como el modelo del sistema es un sistema aumentado que considera la perturbación constante, el filtro de Kalman también estima esta perturbación, lo que permite que luego al utilizarlo en la estrategia de

control predictivo le agrega un efecto integrativo al control, ya que el filtro de Kalman está siempre corrigiendo el error en estado estacionario.

Los valores de los parámetros del filtro de Kalman (valores iniciales de la covarianza del estimador y la covarianza del ruido) se escogen de manera que la convergencia de la perturbación constante sea rápida, que el filtro sea consistente con el nivel de ruido en las mediciones, que la salida estimada a priori del filtro de Kalman se asemeje a la salida real y, ya cuando se tiene la estrategia de control predictivo funcionando, los parámetros fueron ajustados para suavizar la respuesta de la actuación.

6.1.6. Estrategia de control predictivo

Luego teniendo el modelo del sistema, se implementa la estrategia de control predictivo, en donde se resuelve un problema de optimización con el cual se obtiene el cambio de las actuaciones $\Delta u_2(t)$, $\Delta u_3(t)$, $\Delta u_4(t)$, $\Delta u_5(t)$ que minimizan una función objetivo presentada en (5.21).

La estrategia obtenida corresponde a un sistema de control predictivo MISO con un elemento de pre-alimentación que se utiliza para compensar el efecto de las perturbaciones (en este caso los cambios en el flujo de entrada producida por los cambios en las aperturas de las válvulas en los bancos anteriores). El problema considera como restricción que el nivel no supere los rangos de las celdas (0 a 50 [cm]) ni de la actuación (0 a 100[%]), y que el cambio de la actuación tenga una amplitud máxima de 3[%].

La estrategia de control considera que el banco 1 se controla mediante un controlador PID. Luego el problema de optimización en los otros bancos, considerando $r_i(t)$, $i = 2, \dots, 5$ como la referencia para los bancos 2 a 5 respectivamente, corresponde a:

Problema de optimización del banco 2

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_2(t|t) \\ \Delta \hat{u}_2(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_2(t+N_{u2}-1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_2(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p2}} (\hat{y}_2(t+i|t) - r_2(t))^2 + \sigma_2 \sum_{j=0}^{N_{u2}-1} (\Delta \hat{u}_2(t+j|t))^2 \quad (6.19)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_2(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_2(t+m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_2(t+n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u2}-1, k = 0, \dots, N_{u2}-1, \sigma_2 = 3, N_{p2} = 16, N_{u2} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_2(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 2.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m2}(t|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.20a)$$

$$\hat{U}_{m2}(t+1|t) = \hat{U}_{m2}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m2}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t+1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.20b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m2}(t + N_{u2}|t) &= \hat{U}_{m2}(t + N_{u2} - 1|t) + \Delta \hat{U}_{m2}(t + N_{u2}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u2} - 1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t + N_{u2}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.20c)$$

$$\hat{U}_{m2}(t + N_{u2} + 1|t) = \hat{U}_{m2}(t + N_{u2}|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u2}|t) \end{bmatrix} \quad (6.20d)$$

$$\vdots$$

$$\hat{U}_{m2}(t + N_{p2}|t) = \hat{U}_{m2}(t + N_{u2}|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u2}|t) \end{bmatrix} \quad (6.20e)$$

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_2(t) = u_2(t - 1) + \Delta u_2(t|t) \quad (6.21)$$

Problema de optimización del banco 3

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_3(t|t) \\ \Delta \hat{u}_3(t + 1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_3(t + N_{u3} - 1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_3(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p3}} (\hat{y}_3(t + i|t) - r_3(t))^2 + \sigma_3 \sum_{j=0}^{N_{u3}-1} (\Delta \hat{u}_3(t + j|t))^2 \quad (6.22)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_3(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_3(t + m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_3(t + n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u3} - 1, k = 0, \dots, N_{u3} - 1, \sigma_3 = 3, N_{p3} = 15, N_{u3} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_3(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 3.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m3}(t|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \\ \hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t-1) \\ u_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.23a)$$

$$\hat{U}_{m3}(t+1|t) = \hat{U}_{m3}(t|t) + \Delta\hat{U}_{m3}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \\ \hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t+1|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.23b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) &= \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}-1|t) + \Delta\hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u2}-1|t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u3}-1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t+N_{u2}|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.23c)$$

$$\hat{U}_{m3}(t+N_{u3}+1|t) = \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u3}|t) \\ \hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \quad (6.23d)$$

⋮

$$\hat{U}_{m3}(t+N_{p3}|t) = \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u2}|t) \\ \hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \quad (6.23e)$$

Y $\Delta u_2(t|t), \dots, \Delta u_2(t + N_{u2}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 2 y N_{u2} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_3(t) = u_3(t - 1) + \Delta u_3(t|t) \quad (6.24)$$

Problema de optimización del banco 4

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_4(t|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t + 1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_4(t + N_{u4} - 1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_4(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p4}} (\hat{y}_4(t + i|t) - r_4(t))^2 + \sigma_4 \sum_{j=0}^{N_{u4}-1} (\Delta \hat{u}_4(t + j|t))^2 \quad (6.25)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_4(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_4(t + m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_4(t + n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u4} - 1, k = 0, \dots, N_{u4} - 1, \sigma_4 = 3, N_{p4} = 15, N_{u4} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_4(t + i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 4.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m4}(t|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t|t) \\ \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_3(t - 1) \\ u_4(t - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_3(t|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.26a)$$

$$\hat{U}_{m4}(t + 1|t) = \hat{U}_{m4}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m4}(t + 1|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t|t) \\ \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_3(t + 1|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t + 1|t) \end{bmatrix} \quad (6.26b)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) &= \hat{U}_{m4}(t + N_{u4} - 1|t) + \Delta\hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3} - 1|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4} - 1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \Delta\hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.26c)$$

$$\hat{U}_{m4}(t + N_{u4} + 1|t) = \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \quad (6.26d)$$

$$\vdots$$

$$\hat{U}_{m4}(t + N_{p4}|t) = \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \quad (6.26e)$$

Y $\Delta u_3(t), \dots, \Delta u_3(t + N_{u3}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 3 y N_{u3} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_4(t) = u_4(t - 1) + \Delta u_4(t|t) \quad (6.27)$$

Problema de optimización del banco 5

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_5(t|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_5(t+N_{u5}-1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_5(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p5}} (\hat{y}_5(t+i|t) - r_5(t))^2 + \sigma_5 \sum_{j=0}^{N_{u5}-1} (\Delta \hat{u}_5(t+j|t))^2 \quad (6.28)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_5(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_5(t+m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_5(t+n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u5}-1, k = 0, \dots, N_{u5}-1, \sigma_5 = 1, N_{p5} = 15, N_{u5} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_5(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 5.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m5}(t|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t|t) \\ \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t-1) \\ u_5(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.29a)$$

$$\hat{U}_{m5}(t+1|t) = \hat{U}_{m5}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m5}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t|t) \\ \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t+1|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.29b)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}|t) &= \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}-1|t) + \Delta \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t+N_{u4}-1|t) \\ \hat{u}_5(t+N_{u5}-1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t+N_{u4}|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+N_{u5}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.29c)$$

$$\hat{U}_{m5}(t + N_{u5} + 1|t) = \hat{U}_{m5}(t + N_{u5}|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \\ \hat{u}_5(t + N_{u5}|t) \end{bmatrix} \quad (6.29d)$$

⋮

$$\hat{U}_{m5}(t + N_{p5}|t) = \hat{U}_{m5}(t + N_{u5}|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \\ \hat{u}_5(t + N_{u5}|t) \end{bmatrix} \quad (6.29e)$$

Y $\Delta u_4(t|t), \dots, \Delta u_4(t + N_{u4}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 4 y N_{u4} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_5(t) = u_5(t - 1) + \Delta u_5(t|t) \quad (6.30)$$

6.1.7. Programación en sistema experto

En las figuras 6.16-6.18 se presenta el código programado en el sistema experto para obtener la función objetivo del tercer banco, que luego se minimiza con la herramienta de optimización. El comando “args” indica las variables a manipular por el optimizador para minimizar la función objetivo. En la figura 6.17 y 6.18, se puede observar que para calcular las salidas futuras se está aplicando recursivamente un modelo, cuyo código se puede observar en la figura 6.15, que tiene como entrada los estados y entradas actuales y entrega los estados y salida futura del modelo aumentado del banco 3. En la figura 6.18, se observa la parte de la función objetivo que tiene que ver con las restricciones, las cuales se programaron de la manera descrita en la subsección 5.2.3. El cálculo realizado en J0 corresponde a la parte de la función objetivo que penaliza el tamaño de $\Delta u_3(t + j)$, con $j = 0, 1, \dots, N_{u3}$ y J1, la parte que penaliza el tamaño de $y_3(t+i|t) - r_3(t)$, con $i = 1, \dots, N_{p3}$. Y que finalmente lo que entrega la función objetivo es el valor calculado en la última línea de este programa, que corresponde a $3*J0+J1+rest$, y que contiene las restricciones y lo que corresponde a J0 y J1, como se acaba de señalar. Luego la constante 3 multiplicando a J0, es una variable de diseño para el controlador, que permite ajustar la velocidad del

control haciéndolo más lento a medida que se aumenta dicho número.

En la figura 6.19 se presenta la interfaz gráfica que se utiliza para configurar el optimizador. Note que esta herramienta necesita que se ingresen algunos parámetros de los algoritmos genéticos, entre que se encuentran:

- Tamaño de la población: En donde se escogió igual a 100.
- Número de generaciones: En donde se escogió igual a 100.
- Probabilidad de reproducción: En donde se escogió igual a 0.9 (90 %)
- Probabilidad de mutación: En donde se escogió igual a 0.05 (5
- Si se desea minimizar o maximizar la función objetivo: En donde se escogió minimizar.
- Parámetros de las variables de entrada al algoritmo genético: En donde se escogió el valor mínimo igual a -3 %, el valor máximo igual a 3 %, y el espaciado entre los niveles de cuantificación igual a 0.1 %.

Estos valores son iguales para todos los optimizadores utilizados.

Ya habiendo resuelto el problema de optimización, se obtiene el cambio en la actuación que se debe aplicar en cada banco, el cual luego es aplicado por el sistema de control, terminando con la estrategia de control predictivo.

```

args x_1 x_2 x_3 x_4 u_1 u_2 u_3 u_4;
temps x_1f x_2f x_3f x_4f y_f;

x_1f=0.3316 * x_3;
x_2f=0.0308 * u_4 - 0.03662 * u_2 + 0.5 * x_1 - 0.6909 * x_3;
x_3f=0.06767 * u_1 + 0.1119 * u_2 - 0.07206 * u_3 + 0.05775 * u_4 + 2.0 * x_2 + 2.019 * x_3;
x_4f=x_4;

y_f = 0.25 * x_3f + x_4f;

collect( x_1f, x_2f, x_3f, x_4f, y_f);

```

Figura 6.15: Programación del modelo aumentado del banco 3.

```

args du3 du3_1f;

temps dy1_1f dy1_2f dy1_3f dy1_4f dy1_5f dy1_6f dy1_7f dy1_8f dy1_9f dy1_10f dy1_11f dy1_12f dy2_1f dy2_2f dy2_3f dy2_4f dy2_5f
dy2_6f dy2_7f dy2_8f dy2_9f dy2_10f dy2_11f dy2_12f dy3_1f dy3_2f dy3_3f dy3_4f dy3_5f dy3_6f dy3_7f dy3_8f dy3_9f dy3_10f dy3_11f
dy3_12f dy3_13f dy3_14f dy3_15f dy3_16f dy3_17f dy3_18f dy3_19f dy3_20f dy4_1f dy4_2f dy4_3f dy4_4f dy4_5f dy4_6f dy4_7f dy4_8f
dy4_9f dy4_10f dy4_11f dy4_12f dy4_13f dy4_14f dy4_15f dy4_16f dy4_17f dy4_18f dy4_19f dy4_20f dy5_1f dy5_2f dy5_3f dy5_4f dy5_5f
dy5_6f dy5_7f dy5_8f dy5_9f dy5_10f dy5_11f dy5_12f dy5_13f dy5_14f dy5_15f dy5_16f dy5_17f dy5_18f dy5_19f dy5_20f y1_1f y1_2f
y1_3f y1_4f y1_5f y1_6f y1_7f y1_8f y1_9f y1_10f y1_11f y1_12f y2_1f y2_2f y2_3f y2_4f y2_5f y2_6f y2_7f y2_8f y2_9f y2_10f y2_11f
y2_12f y3_1f y3_2f y3_3f y3_4f y3_5f y3_6f y3_7f y3_8f y3_9f y3_10f y3_11f y3_12f y3_13f y3_14f y3_15f y3_16f y3_17f y3_18f y3_19f
y3_20f y4_1f y4_2f y4_3f y4_4f y4_5f y4_6f y4_7f y4_8f y4_9f y4_10f y4_11f y4_12f y4_13f y4_14f y4_15f y4_16f y4_17f y4_18f y4_19f
y4_20f y5_1f y5_2f y5_3f y5_4f y5_5f y5_6f y5_7f y5_8f y5_9f y5_10f y5_11f y5_12f y5_13f y5_14f y5_15f y5_16f y5_17f y5_18f y5_19f
y5_20f u1_1f u2_1f u3_1f u4_1f u5_1f J0 J1 J2 J3 J4 J5 rest rest_u_min rest_u_max rest_y_min rest_y_max rest_y1_min rest_y1_max
rest_y2_min rest_y2_max rest_y3_min rest_y3_max rest_y4_min rest_y4_max rest_y5_min rest_y5_max rest_sump n1_1f n2_1f n3_1f
n4_1f n5_1f n1_2f n2_2f n3_2f n4_2f n5_2f n1_3f n2_3f n3_3f n4_3f n5_3f n1_4f n2_4f n3_4f n4_4f n5_4f n1_5f n2_5f n3_5f n4_5f n5_5f
n1_6f n2_6f n3_6f n4_6f n5_6f n1_7f n2_7f n3_7f n4_7f n5_7f n1_8f n2_8f n3_8f n4_8f n5_8f n1_9f n2_9f n3_9f n4_9f n5_9f n1_10f n2_10f
n3_10f n4_10f n5_10f n1_11f n2_11f n3_11f n4_11f n5_11f n1_12f n2_12f n3_12f n4_12f n5_12f du1 du2 du4 du5 du1_1f du2_1f du4_1f
du5_1f du1_2f du2_2f du3_2f du4_2f X_1f X_2f X_3f X_4f X_5f X_6f X_7f X_8f X_9f X_10f X_11f X_12f X_13f X_14f X_15f X_16f X_17f X_18f
X_19f X_20f u2 u3 ;

du1 = Valve b1_opChange ;
du2 = Valve b2_opChange ;
du4 = Valve b4_opChange ;
du5 = Valve b5_opChange ;

du1_1f = Valve b1_opChange_1f;
du2_1f = Valve b2_opChange_1f;
du4_1f = Valve b4_opChange_1f;
du5_1f = Valve b5_opChange_1f;

u2 = Kalman u2 + du2 ;
u2_1f = u2 + du2_1f;
u3 = Kalman u3 + du3 ;

```

Figura 6.16: Primera parte de función objetivo del banco 3.

```

u3_1f= u3 + du3_1f;

X_1f= Kalman model ( Kalman x1 , Kalman x2 , Kalman x3 , Kalman x4 , Kalman y2 , Kalman y4 , u2 , u3 );
y3_1f= nth (X_1f , 5 );

X_2f= Kalman model ( nth (X_1f , 1 ) , nth (X_1f , 2 ) , nth (X_1f , 3 ) , nth (X_1f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_2f= nth (X_2f , 5 );

X_3f= Kalman model ( nth (X_2f , 1 ) , nth (X_2f , 2 ) , nth (X_2f , 3 ) , nth (X_2f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_3f= nth (X_3f , 5 );

X_4f= Kalman model ( nth (X_3f , 1 ) , nth (X_3f , 2 ) , nth (X_3f , 3 ) , nth (X_3f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_4f= nth (X_4f , 5 );

X_5f= Kalman model ( nth (X_4f , 1 ) , nth (X_4f , 2 ) , nth (X_4f , 3 ) , nth (X_4f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_5f= nth (X_5f , 5 );

X_6f= Kalman model ( nth (X_5f , 1 ) , nth (X_5f , 2 ) , nth (X_5f , 3 ) , nth (X_5f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_6f= nth (X_6f , 5 );

X_7f= Kalman model ( nth (X_6f , 1 ) , nth (X_6f , 2 ) , nth (X_6f , 3 ) , nth (X_6f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_7f= nth (X_7f , 5 );

X_8f= Kalman model ( nth (X_7f , 1 ) , nth (X_7f , 2 ) , nth (X_7f , 3 ) , nth (X_7f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_8f= nth (X_8f , 5 );

X_9f= Kalman model ( nth (X_8f , 1 ) , nth (X_8f , 2 ) , nth (X_8f , 3 ) , nth (X_8f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_9f= nth (X_9f , 5 );

X_10f= Kalman model ( nth (X_9f , 1 ) , nth (X_9f , 2 ) , nth (X_9f , 3 ) , nth (X_9f , 4 ) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f );
y3_10f= nth (X_10f , 5 );

```

Figura 6.17: Segunda parte de función objetivo del banco 3.

```

y3_10f = nth (X_10f , 5);

X_11f = Kalman model ( nth (X_10f , 1) , nth (X_10f , 2) , nth (X_10f , 3) , nth (X_10f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_11f = nth (X_11f , 5);

X_12f = Kalman model ( nth (X_11f , 1) , nth (X_11f , 2) , nth (X_11f , 3) , nth (X_11f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_12f = nth (X_12f , 5);

X_13f = Kalman model ( nth (X_12f , 1) , nth (X_12f , 2) , nth (X_12f , 3) , nth (X_12f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_13f = nth (X_13f , 5);

X_14f = Kalman model ( nth (X_13f , 1) , nth (X_13f , 2) , nth (X_13f , 3) , nth (X_13f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_14f = nth (X_14f , 5);

X_15f = Kalman model ( nth (X_14f , 1) , nth (X_14f , 2) , nth (X_14f , 3) , nth (X_14f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_15f = nth (X_15f , 5);

X_16f = Kalman model ( nth (X_15f , 1) , nth (X_15f , 2) , nth (X_15f , 3) , nth (X_15f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_16f = nth (X_16f , 5);

X_17f = Kalman model ( nth (X_16f , 1) , nth (X_16f , 2) , nth (X_16f , 3) , nth (X_16f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_17f = nth (X_17f , 5);

X_18f = Kalman model ( nth (X_17f , 1) , nth (X_17f , 2) , nth (X_17f , 3) , nth (X_17f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_18f = nth (X_18f , 5);

X_19f = Kalman model ( nth (X_18f , 1) , nth (X_18f , 2) , nth (X_18f , 3) , nth (X_18f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_19f = nth (X_19f , 5);

X_20f = Kalman model ( nth (X_19f , 1) , nth (X_19f , 2) , nth (X_19f , 3) , nth (X_19f , 4) , Kalman y2 , Kalman y4 , u2_1f , u3_1f);
y3_20f = nth (X_20f , 5);

rest_u_max = 10 ^ 15 * ( max ( 0 , ( u3 - ks FeedForward Bank3 Valve hiLimit ) ) ^ 2 );
rest_u_min = 10 ^ 15 * ( max ( 0 , ( -1 * u3 + ks FeedForward Bank3 Valve loLimit ) ) ^ 2 );

rest_y3_max = 10 ^ 6 * ( max ( 0 , ( y3_1f - ks FeedForward Bank3 PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_2f - ks FeedForward Bank3
PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_3f - ks FeedForward Bank3 PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_4f - ks FeedForward Bank3
PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_5f - ks FeedForward Bank3 PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_6f - ks FeedForward Bank3
PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( y3_7f - ks FeedForward Bank3 PulpLevel hiLimit ) ) ^ 2 );
rest_y3_min = 10 ^ 6 * ( max ( 0 , ( -1 * y3_1f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( -1 * y3_2f + ks
FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( -1 * y3_3f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( -1 *
y3_4f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( -1 * y3_5f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max (
0 , ( -1 * y3_6f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^ 2 + max ( 0 , ( -1 * y3_7f + ks FeedForward Bank3 PulpLevel loLimit ) ) ^
2 );
rest_y_min = rest_y3_min;
rest_y_max = rest_y3_max;
rest_sump = em * 10 ^ 15 * ( max ( 0 , ( -1 * du3 - 0.5 ) ) ^ 2 );
rest = rest_u_min + rest_u_max + rest_y_min + rest_y_max + rest_sump;

J0 = du3 ^ 2 + du3_1f ^ 2;
J3 = ( y3_1f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_2f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_3f - ks FeedForward
Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_4f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_5f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + (
y3_6f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_7f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_8f - ks FeedForward Bank3
Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_9f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_10f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_11f -
ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_12f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_13f - ks FeedForward Bank3 Pid
setpoint ) ^ 2 + ( y3_14f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2 + ( y3_15f - ks FeedForward Bank3 Pid setpoint ) ^ 2;

3* J0 + J3 + rest;

```

Figura 6.18: Tercera parte de función objetivo del banco 3.

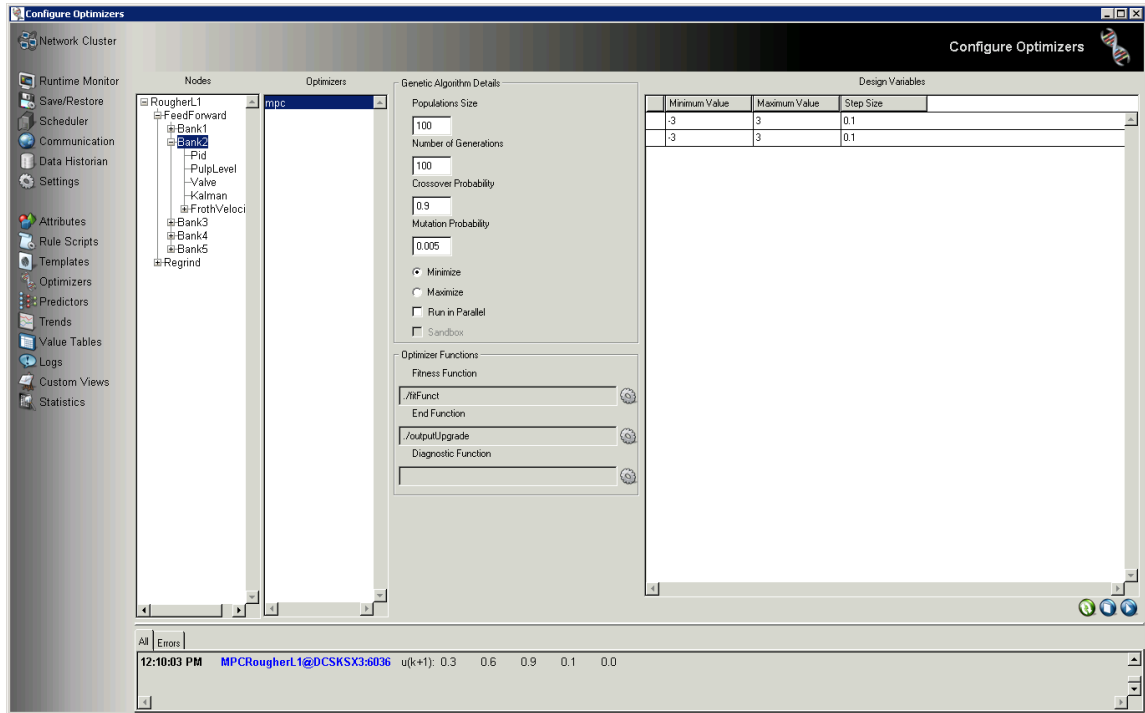


Figura 6.19: Optimizador del banco 3.

6.1.8. Integración de control predictivo con aplicación de control de sistema experto de los bancos “Rougher”

Luego de implementar la estrategia de control predictivo, ésta se utiliza en conjunto con la aplicación programada en el sistema experto, que manipula las referencias de los niveles de los bancos, con el fin de llevar las leyes de cola y concentrado “Rougher” a una referencia determinada. Además esta aplicación manipula las referencias con el fin de evitar algunas emergencias en el proceso.

Esta aplicación funciona mediante lógica difusa y reúne las mejores estrategias operacionales utilizadas por el personal de la empresa, para optimizar el funcionamiento del proceso.

Observación: *en el proceso los sensores están posicionados arriba de los bancos, y miden la distancia que hay desde el sensor a la pulpa, por lo que a mayor distancia, el banco está más vacío y a menor distancia, el banco está más lleno. Al aumentar el valor de las referencias se disminuye el nivel de pulpa en los bancos el rebose espuma por ellos es menor y al disminuir el valor de las referencias se está aumentando el nivel pulpa en*

los bancos, aumentando el rebose por ellos.

Las reglas de emergencia de la aplicación consideran que hay un sumidero, en donde cae todo el material que rebose por los bancos “*Rougher*” y “*Scavenger*” y que a la salida tiene una bomba que funciona a una velocidad fija. Por lo tanto si este sumidero está muy lleno, o se está llenando muy rápido, se debe aumentar el valor de las referencias del nivel de pulpa de cada banco, con el fin de reducir el rebose y evitar rebalses.

El sistema tiene una regla global que toma decisiones en base a las leyes de concentrado “*Rougher*”, ley de colas “*Rougher*” y nivel del sumidero de Remolienda que determina si el circuito debe aumentar, reducir o mantener el rebose en los bancos. Y luego existe una regla para cada banco, que monitorea las condiciones específica de cada banco (velocidad de rebose y nivel de espuma), para tomar la decisión de si se aumentará o disminuirá el valor de la referencia del nivel del banco.

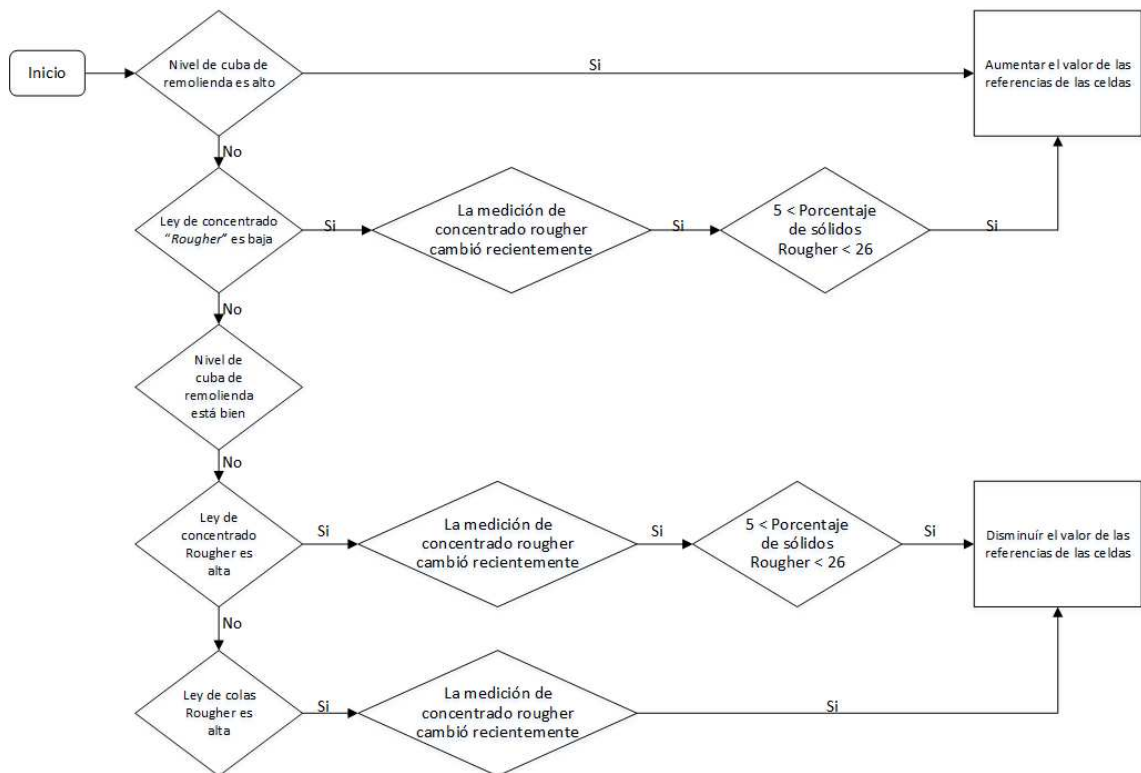


Figura 6.20: Diagrama de flujos de regla global de sistema experto de los bancos “*Rougher*”.

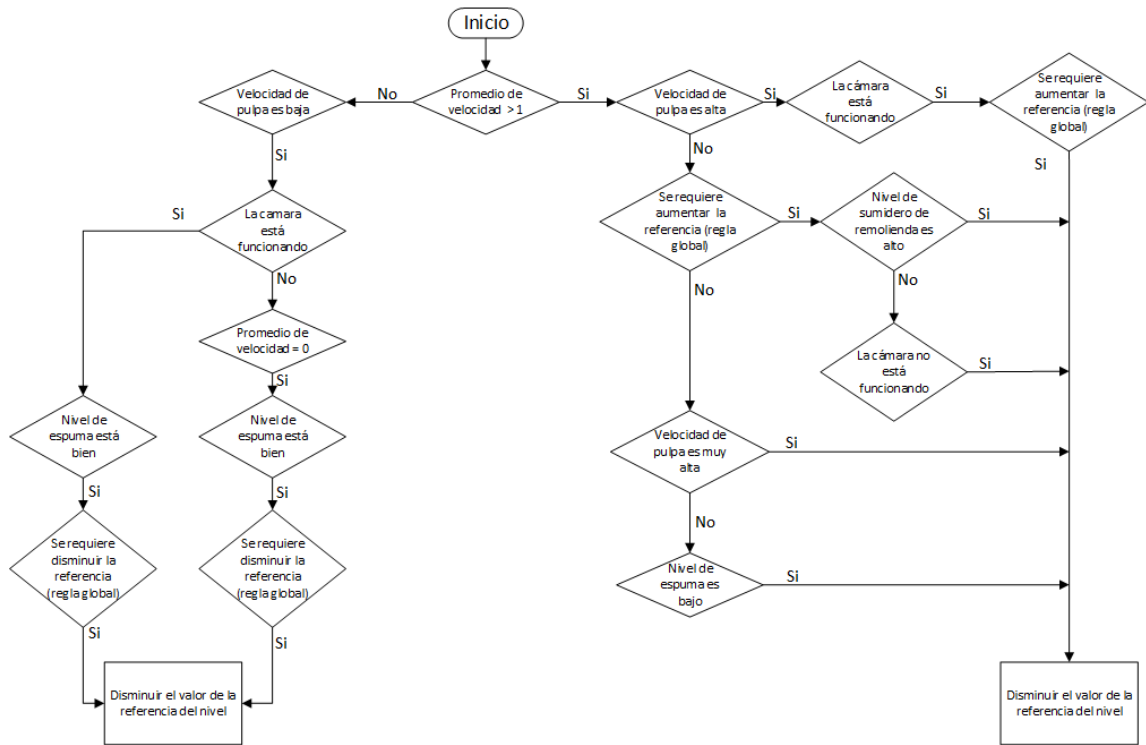


Figura 6.21: Diagrama de flujos de regla que calcula la referencia de cada uno de los bancos.

En la figura 6.20 se presenta el diagrama de flujo de la regla global, y en la figura 6.21 se presenta el diagrama de flujo de la regla de cada una de los bancos. Además como regla de emergencia, si el nivel del sumidero de remolienda supera un umbral, que puede ser definido por el operador del proceso, la aplicación comienza a aumentar el valor de las referencias del nivel de todos los bancos, hasta que se controla la emergencia.

El control PID no es capaz de compensar la perturbación generada por los cambios de referencias, lo que genera que el circuito se descontrola bajo algunas condiciones. Esto se puede observar en la figura 6.22, en donde el sistema funcionando con PID se descontrola completamente. Se observa también en la figura 6.22 que el sistema anteriormente está funcionando con la estrategia de control predictivo y que bajo estas condiciones se siguen los cambios de la referencia sin problemas.

Los resultados de la implementación de la estrategia de control predictivo en conjunto con esta aplicación serán presentados en el capítulo 7.

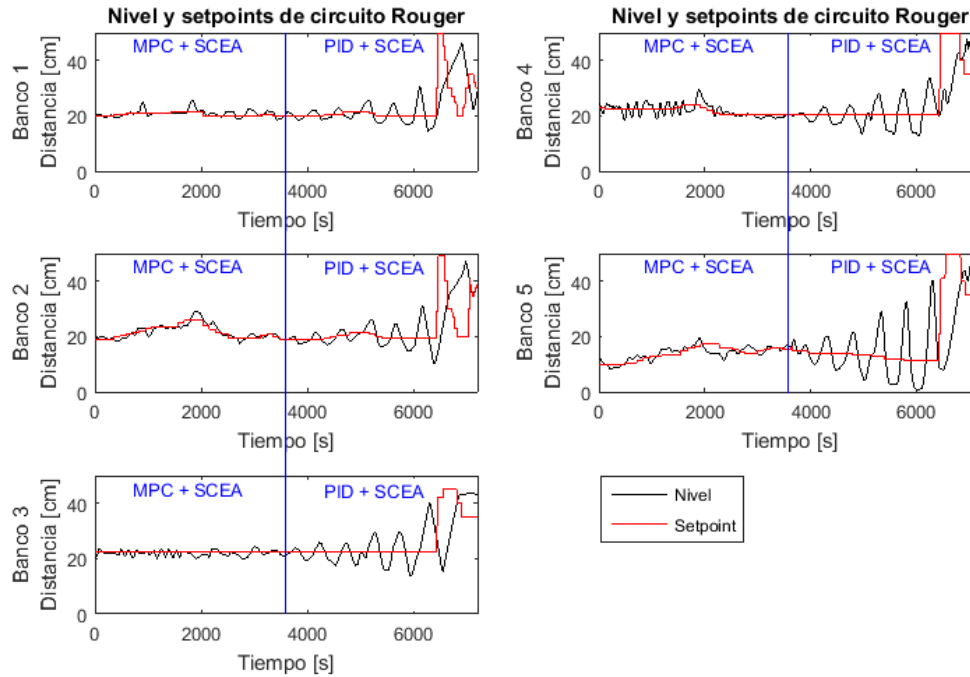


Figura 6.22: Pérdida de control con controladores PID.

6.2. Estrategia de control predictivo en línea 2

Este trabajo es muy similar, al presentado en el capítulo anterior. La mayor diferencia entre ambos trabajos consiste en el procedimiento de identificación, ya que en esta línea las entradas del experimento se alimentan con una señal GBN de parámetros adecuados, lo que permite obtener un mejor modelo para el nivel de los bancos “*Rouger*”.

6.2.1. Experimento de identificación

El trabajo comienza con la identificación del modelo del nivel del circuito “*Rouger*”, que consiste en 5 bancos formados por 10 celdas cilíndricas de 4500 [*pies*³], y en donde cada banco está formado por dos celdas.

Cabe destacar que antes de comenzar con la identificación, en esta línea se reemplazaron los actuadores (válvulas) los cuales hasta el momento tenían problemas, ya que no reaccionaban cuando se les indicaban que realizaran cambios pequeños en la actuación.

Por lo mismo los nuevos actuadores son bastante sensibles, y cambios pequeños (de 2 o 3 %) generan reacciones considerables en el nivel de los bancos.

Se consideran cinco modelos, en donde cada uno considera como salida el nivel de pulpa de cada banco y como entradas:

Para el banco 1:

- El flujo de entrada (no hay instrumentación instalada para medir esta señal).
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 1.
- El nivel del banco 2.

Para el banco 2:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 1.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 2.
- El nivel del banco 1.
- El nivel del banco 3.

Para el banco 3:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 2.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 3.
- El nivel del banco 2.
- El nivel del banco 4.

Para el banco 4:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 3.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 4.
- El nivel del banco 3.

- El nivel del banco 5.

Para el banco 5:

- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 4.
- La apertura del actuador (válvula de salida) del banco 5.
- El nivel del banco 4.

Antes de generar el experimento de identificación, se realizan pruebas de respuesta a escalón, para obtener un estimado grueso del tiempo de asentamiento más largo del proceso. El experimento tiene una duración de 1 hora y 50 minutos, y no está exenta de perturbaciones, en la figura 6.23 se presenta el experimento en su totalidad, en donde se puede apreciar que hay un cambio en la apertura de las válvulas y una respuesta en los niveles de las celdas. En esta figura no se puede apreciar adecuadamente el efecto que tienen los cambios en la apertura de la válvula en el nivel, para corregir esto, se presentan las figuras 6.24-6.29, que corresponden a un “zoom” de la figura 6.23.

Para cada uno de los escalones aplicados se estima el tiempo de asentamiento, datos que se presentan en las tablas 6.6 y 6.7.

Luego se calcula el promedio de estos datos para obtener un estimado del tiempo de asentamiento de cada banco, de lo cual se obtiene que para el nivel de pulpa del banco 1 el tiempo de asentamiento estimado es de 317[s], el nivel de pulpa del banco 2 de 155[s], el nivel de pulpa del banco 3 de 198[s], el nivel de pulpa del banco 4 de 217[s], el nivel de pulpa del banco 5 de 347[s]. De este análisis entonces se obtiene que el tiempo de asentamiento más largo del proceso es de 347[s]. Luego siguiendo el procedimiento presentado en el subcapítulo 4.2.2, el tiempo de cambio promedio óptimo de la señal GBN debe ser de:

$$ET_{sw} = \frac{98\% \cdot T_s}{3} = \frac{98\% \cdot 347}{3} = 113[s] \quad (6.31)$$

Se escoge el tiempo mínimo de la señal GBN de 20[s], tiempo suficiente para observar un pequeño cambio en la respuesta del nivel en cada banco al generar una apertura en la válvula correspondiente (observado al analizar la respuesta a escalón).

La probabilidad de cambio de la señal GBN debe ser de:

$$p_{sw} = \frac{T_{min}}{ET_{sw}} = \frac{20[s]}{113[s]} = 0,1769 \quad (6.32)$$

Finalmente la probabilidad de cambio de la señal GBN se aproxima a $p_{sw} \approx 0,2$. No hay problema al hacer dicha aproximación, ya que de por sí todos estos cálculos son estimados gruesos.

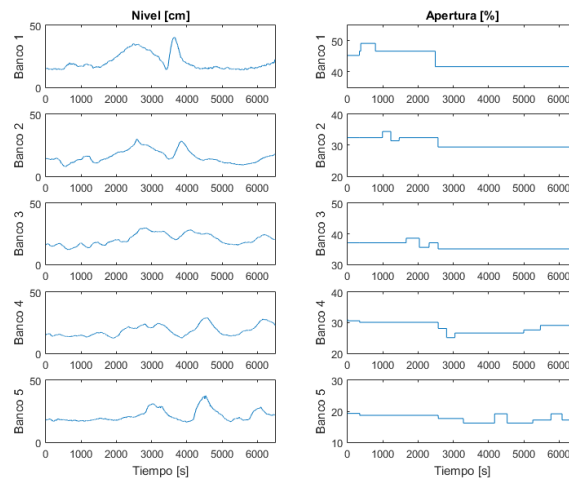


Figura 6.23: Respuesta a escalón del nivel de pulpa de los bancos Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvulas de cada banco.

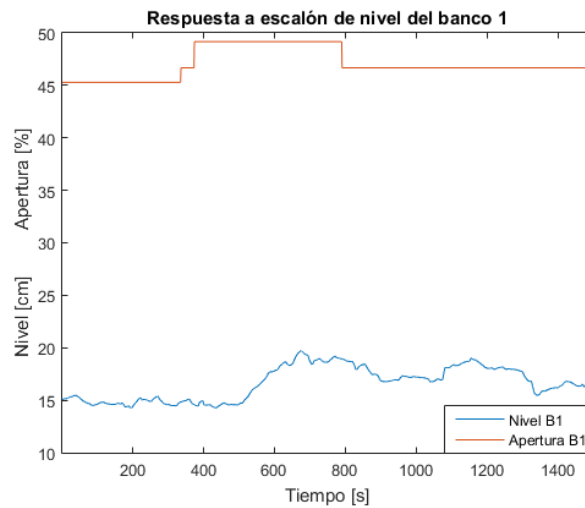


Figura 6.24: Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 1 del circuito Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvula del banco 1.

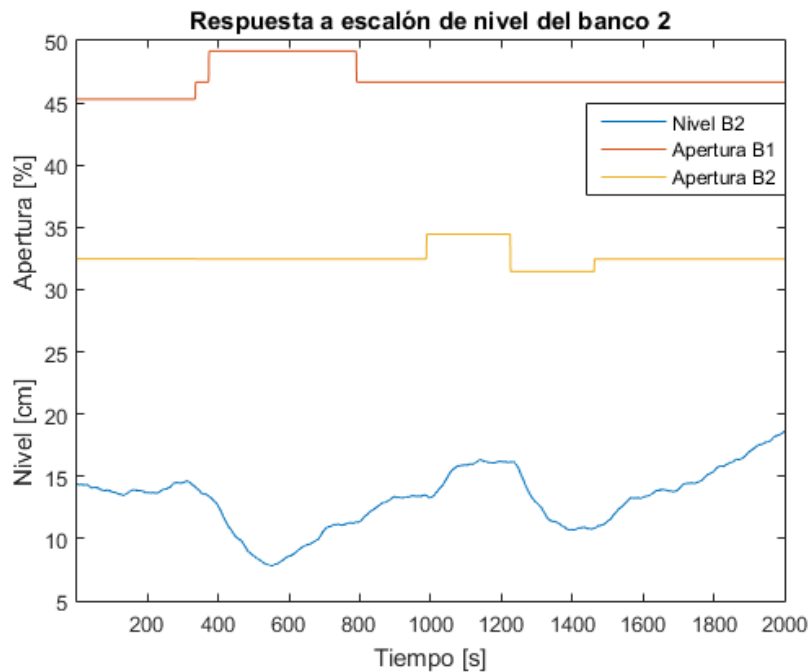


Figura 6.25: Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 2 del circuito Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 1 y 2.

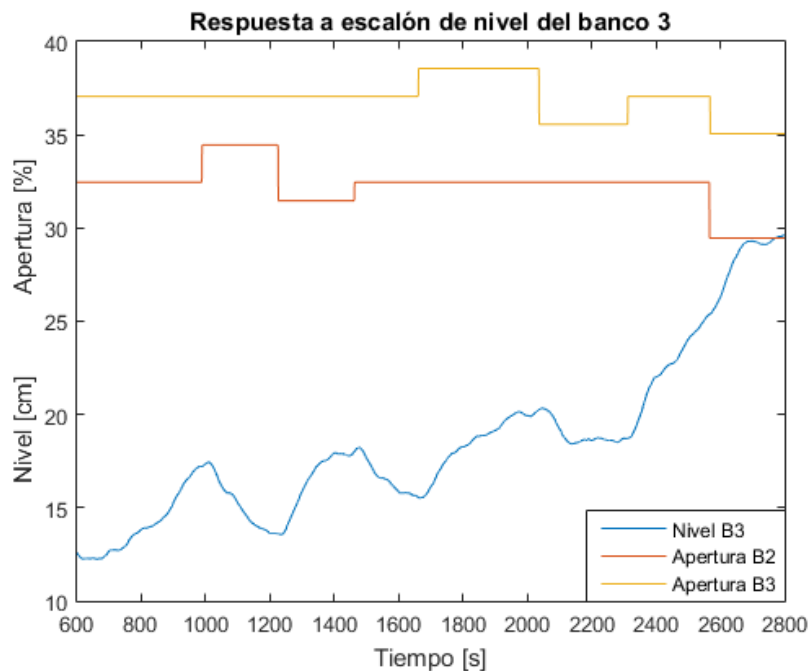


Figura 6.26: Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 3 del circuito Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 2 y 3.

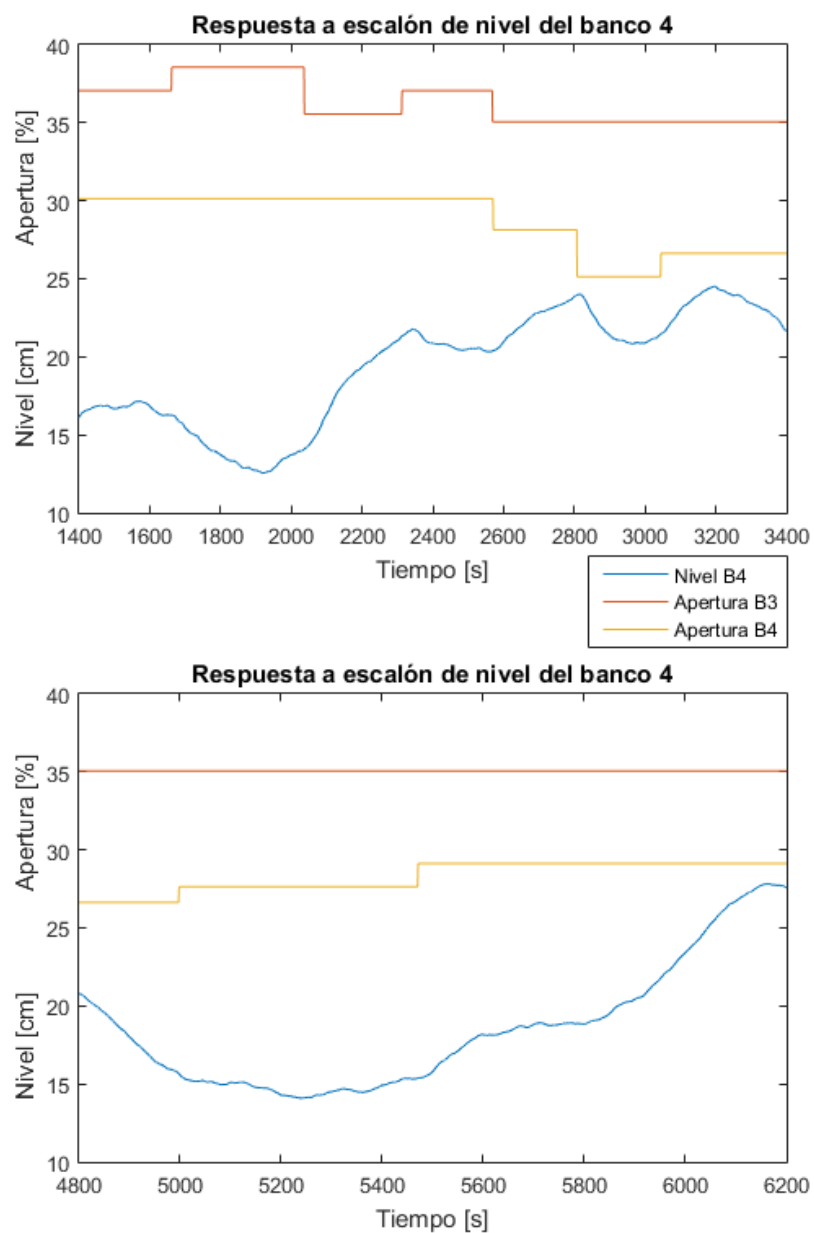


Figura 6.27: Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 4 del circuito Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 3 y 4.

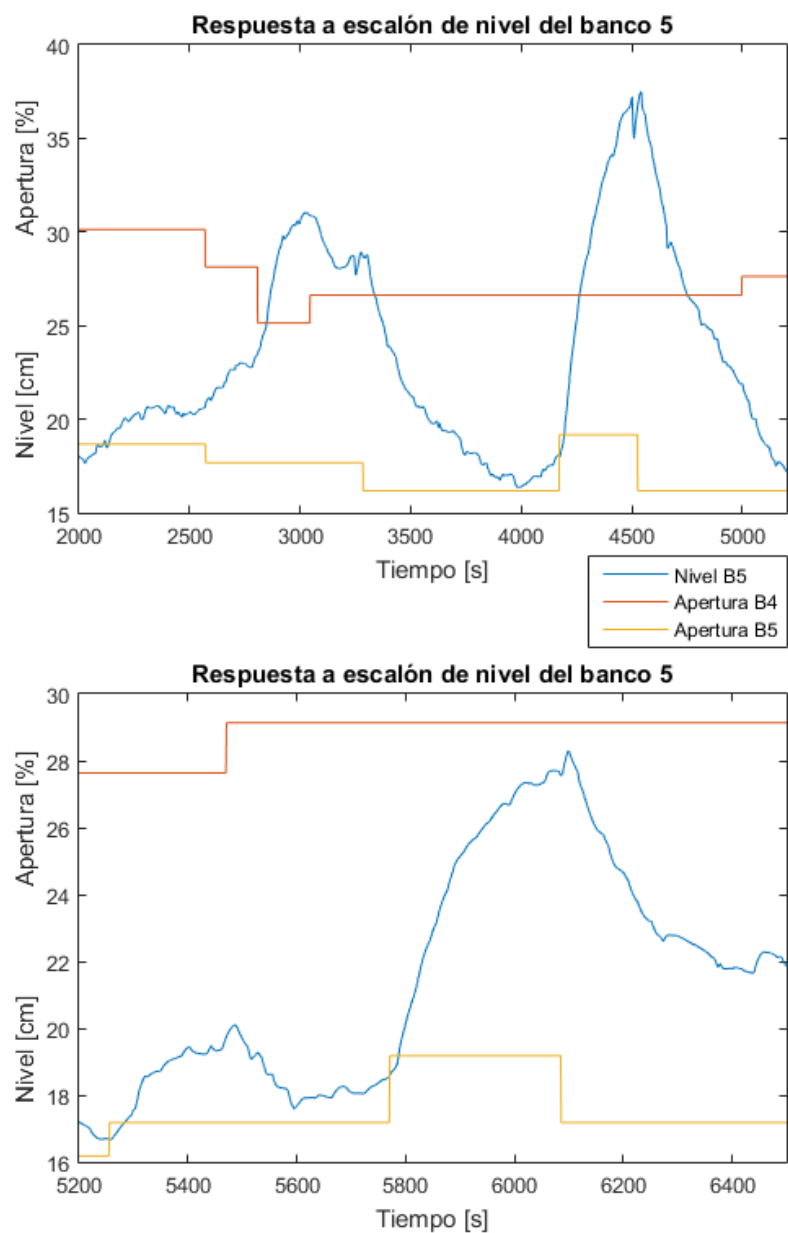


Figura 6.28: Respuesta a escalón del nivel de pulpa del banco 4 del circuito Rougher de la línea 2 a la apertura de las válvulas del banco 4 y 5.

Tabla 6.6: Estimados gruesos de tiempos de asentamiento del nivel de los bancos 1, 2 y 3 para los escalones aplicados.

| Banco 1 | | Banco 2 | | Banco 3 | |
|------------------------|----------|------------------------|----------|------------------------|----------|
| Escalón 1 | | Escalón 1 | | Escalón 1 | |
| Tiempo inicial | 374 [s] | Tiempo inicial | 374 [s] | Tiempo inicial | 989 [s] |
| Tiempo final | 697 [s] | Tiempo final | 551 [s] | Tiempo final | 1200 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 323 [s] | Tiempo de asentamiento | 177 [s] | Tiempo de asentamiento | 211 [s] |
| Escalón 2 | | Escalón 2 | | Escalón 2 | |
| Tiempo inicial | 791 [s] | Tiempo inicial | 791 [s] | Tiempo inicial | 1226 [s] |
| Tiempo final | 1101 [s] | Tiempo final | 920 [s] | Tiempo final | 1440 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 310 [s] | Tiempo de asentamiento | 129 [s] | Tiempo de asentamiento | 214 [s] |
| | | Escalón 3 | | Escalón 3 | |
| | | Tiempo inicial | 990 [s] | Tiempo inicial | 1464 [s] |
| | | Tiempo final | 1127 [s] | Tiempo final | 1631 [s] |
| | | Tiempo de asentamiento | 137 [s] | Tiempo de asentamiento | 167 [s] |
| | | Escalón 4 | | Escalón 4 | |
| | | Tiempo inicial | 1226 [s] | Tiempo inicial | 1662 [s] |
| | | Tiempo final | 1393 [s] | Tiempo final | 1878 [s] |
| | | Tiempo de asentamiento | 167 [s] | Tiempo de asentamiento | 216 [s] |
| | | Escalón 5 | | Escalón 5 | |
| | | Tiempo inicial | 1464 [s] | Tiempo inicial | 2037 [s] |
| | | Tiempo final | 1628 [s] | Tiempo final | 2218 [s] |
| | | Tiempo de asentamiento | 164 [s] | Tiempo de asentamiento | 181 [s] |

Tabla 6.7: Estimados gruesos de tiempos de asentamiento del nivel de los bancos 4 y 5 para los escalones aplicados.

| Banco 4 | | Banco 5 | | | |
|------------------------|----------|------------------------|----------|------------------------|----------|
| Escalón 1 | | Escalón 1 | | Escalón 6 | |
| Tiempo inicial | 1662 [s] | Tiempo inicial | 2809 [s] | Tiempo inicial | 5257 [s] |
| Tiempo final | 1918 [s] | Tiempo final | 3023 [s] | Tiempo final | 5420 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 256 [s] | Tiempo de asentamiento | 214 [s] | Tiempo de asentamiento | 163 [s] |
| Escalón 2 | | Escalón 2 | | Escalón 7 | |
| Tiempo inicial | 2037 [s] | Tiempo inicial | 3045 [s] | Tiempo inicial | 5472 [s] |
| Tiempo final | 2337 [s] | Tiempo final | 3236 [s] | Tiempo final | 5625 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 300 [s] | Tiempo de asentamiento | 191 [s] | Tiempo de asentamiento | 153 [s] |
| Escalón 3 | | Escalón 3 | | Escalón 8 | |
| Tiempo inicial | 2313 [s] | Tiempo inicial | 3285 [s] | Tiempo inicial | 5771 [s] |
| Tiempo final | 2485 [s] | Tiempo final | 3989 [s] | Tiempo final | 6075 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 172 [s] | Tiempo de asentamiento | 704 [s] | Tiempo de asentamiento | 304 [s] |
| Escalón 4 | | Escalón 4 | | Escalón 9 | |
| Tiempo inicial | 2808 [s] | Tiempo inicial | 4169 [s] | Tiempo inicial | 6086 [s] |
| Tiempo final | 2965 [s] | Tiempo final | 4543 [s] | Tiempo final | 6387 [s] |
| Tiempo de asentamiento | 157 [s] | Tiempo de asentamiento | 374 [s] | Tiempo de asentamiento | 301 [s] |
| Escalón 5 | | Escalón 5 | | | |
| Tiempo inicial | 5472 [s] | Tiempo inicial | 4527 [s] | | |
| Tiempo final | 5673 [s] | Tiempo final | 5247 [s] | | |
| Tiempo de asentamiento | 201 [s] | Tiempo de asentamiento | 720 [s] | | |

Teniendo estos parámetros se genera la señal GBN que se aplica como entrada, la cual se evalúa cada 20 segundos, y en donde la señal puede cambiar de valor de acuerdo a la regla:

$$s_i(0) = a_i \quad (6.33a)$$

$$P[s_i(t) = -s_i(t - 1)] = 0,2 \quad (6.33b)$$

$$P[s_i(t) = s_i(t - 1)] = 0,8 \quad (6.33c)$$

En donde a_i corresponde a la amplitud de la señal GBN y la salida de cada banco se calcula como:

$$u_i(t) = u_{EQi}(t) + s_i(0) \quad (6.34)$$

Con $i = 1, \dots, 5$.

$u_{EQi}(t)$ corresponde al punto de equilibrio del nivel del banco, valor que tienen las actuaciones antes de comenzar el experimento.

Para identificar el sistema se realizan 6 experimentos; en 5 de estos experimentos se manipulan 5 entradas a la vez y se utilizan para estimar el modelo del nivel de cada uno de los bancos. En el sexto experimento se manipulan las 5 entradas a la vez y se utiliza para validar el modelo obtenido. En las figuras 6.29-6.35 se presentan los experimentos realizados.

La amplitud de cada entrada GBN para cada experimento corresponde a:

- 5 [%] en la apertura de la válvula 1 para el experimento 1.
- 3 [%] en la apertura de la válvula 2 para el experimento 2.
- 3 [%] en la apertura de la válvula 3 para la primera parte del experimento 3.
- 3 [%] en la apertura de la válvula 3 para la segunda parte del experimento 3.
- 3 [%] en la apertura de la válvula 4 para el experimento 4.
- 3 [%] en la apertura de la válvula 5 para el experimento 5.

- 2 [%] en la apertura de la válvula 1, 2 [%] en la apertura de la válvula 2, 2 [%] en la apertura de la válvula 3, 2 [%] en la apertura de la válvula 4, 2 [%] en la apertura de la válvula 5 para el experimento 6.

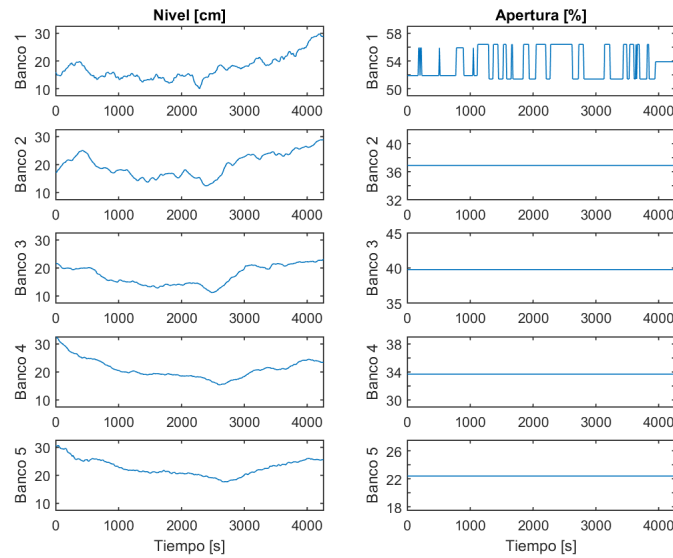


Figura 6.29: Gráfico de experimento de identificación 1 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN a la actuación del banco 1.

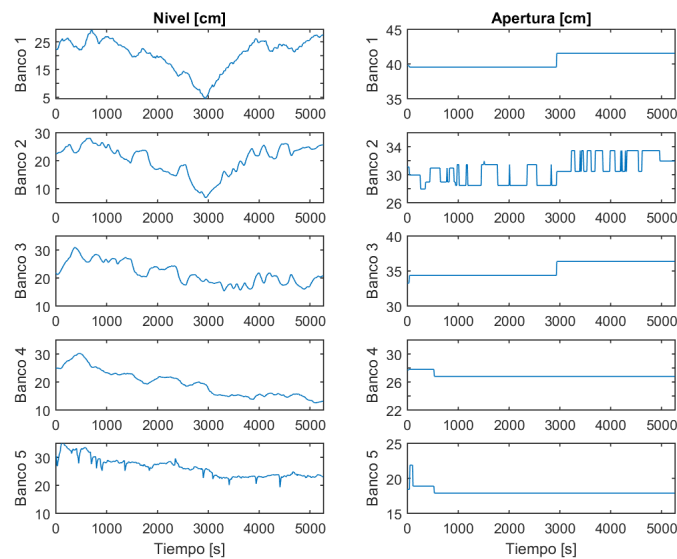


Figura 6.30: Gráfico de experimento de identificación 1 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 1.

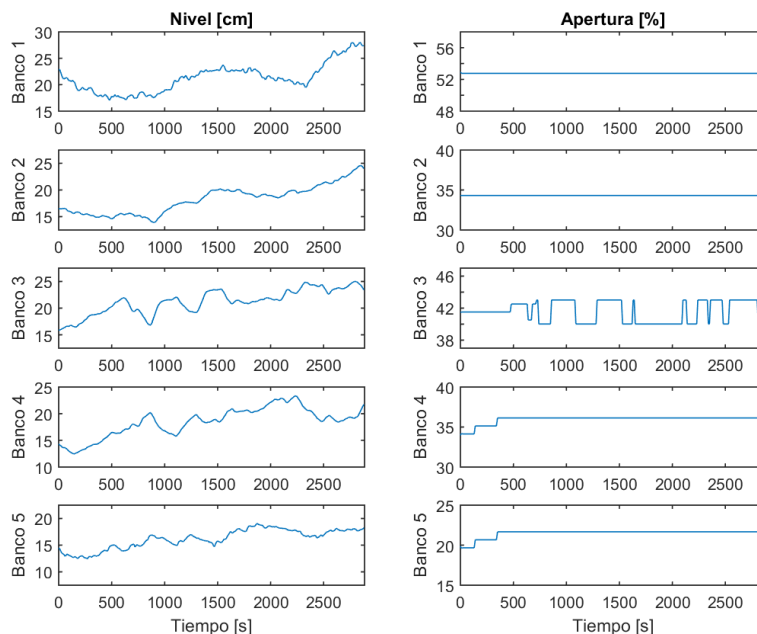


Figura 6.31: Gráfico de experimento de identificación 2 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 2.

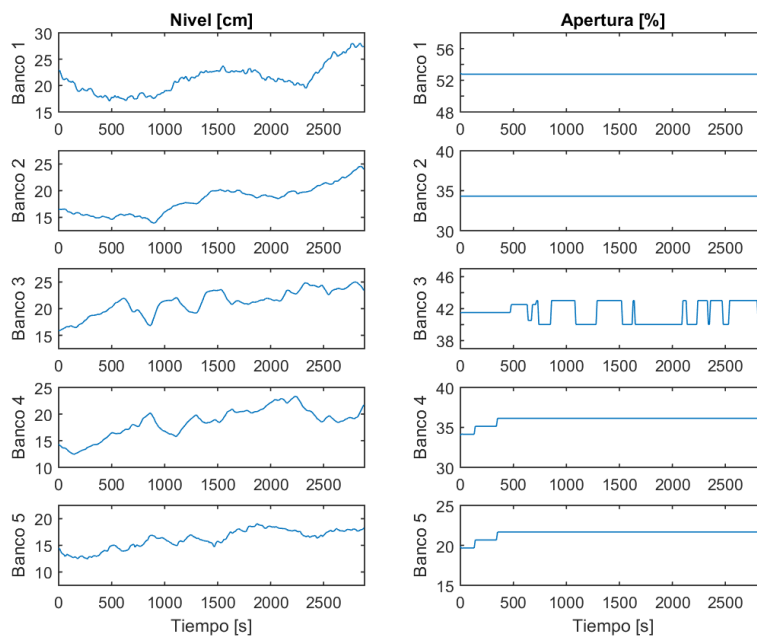


Figura 6.32: Gráfico de la primera parte del experimento de identificación 3 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 3.

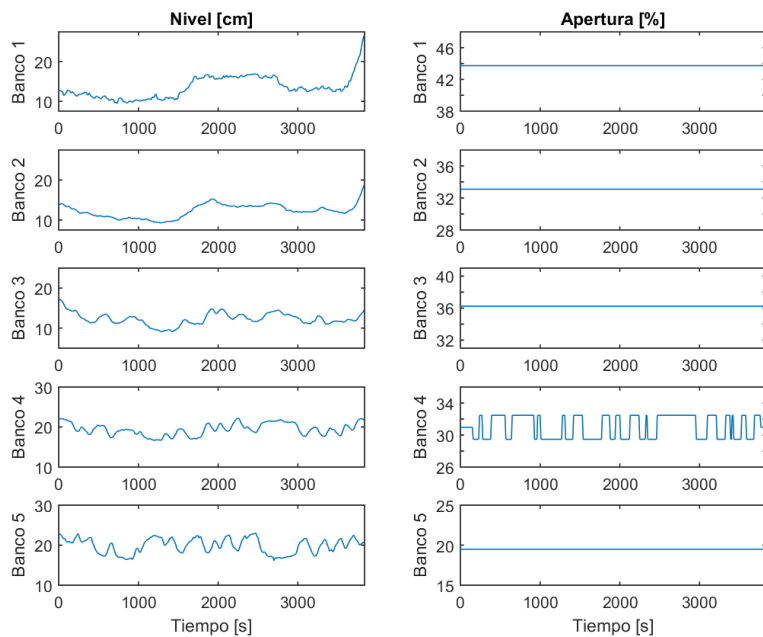


Figura 6.33: Gráfico de experimento de identificación 4 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 4.

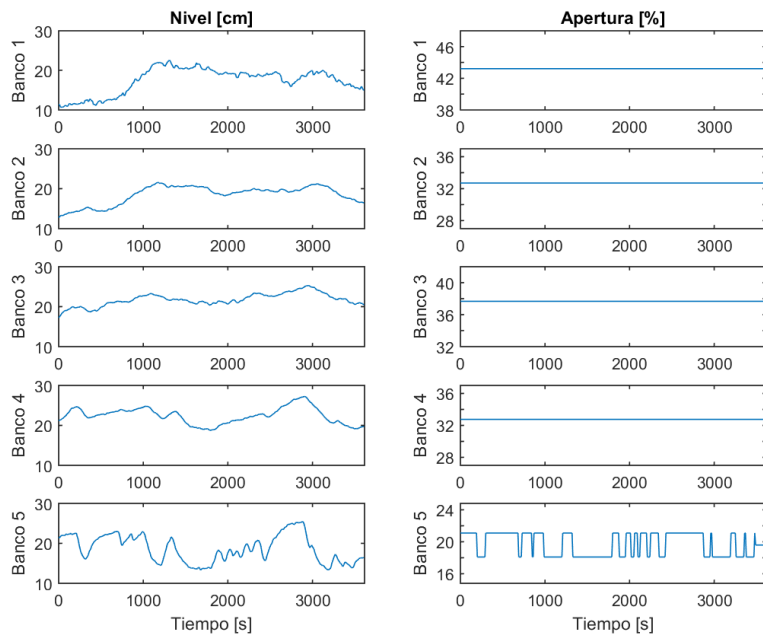


Figura 6.34: Gráfico de experimento de identificación 5 de la línea 2; solo se aplica la entrada GBN al banco 5.

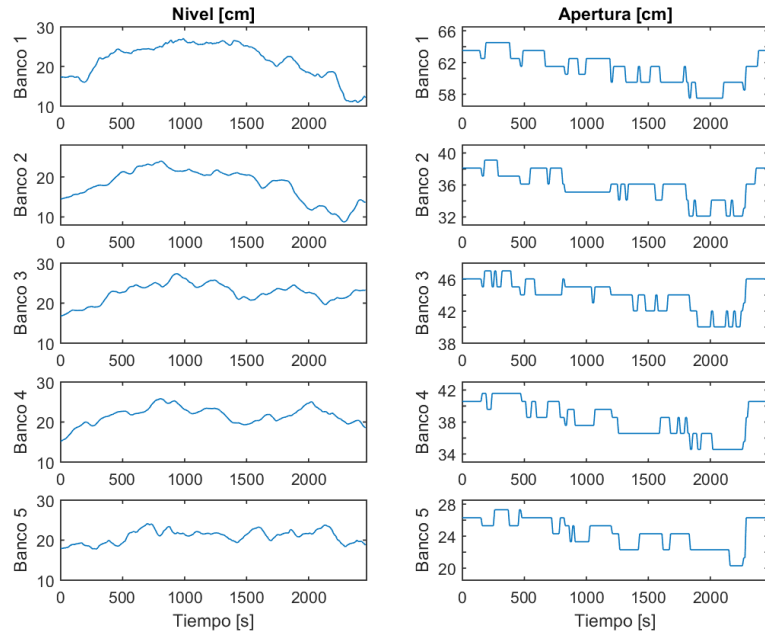


Figura 6.35: Gráfico de experimento de identificación 6 de la línea 2; se aplica la entrada GBN a todos los bancos al mismo tiempo.

Al igual que en el trabajo de la línea 1, en algunos casos es necesario cambiar el punto de operación del circuito con el fin compensar cambios de flujo a la entrada del proceso.

Note que a diferencia de la línea 1, en este procedimiento los cambios son más pequeños. Esto se debe a que los actuadores de esta línea son más sensibles que los de la línea 1, ya que fueron reemplazados hace poco tiempo (4 meses antes de realizar el procedimiento de identificación).

Los datos de entrada y salida son obtenidos en una planilla de datos de la herramienta historizadora del sistema experto KSX que se utiliza para generar las entradas del experimento. Estos datos se pre-procesan eliminando su valor medio y luego se utiliza tanto el algoritmo de cuadrados mínimos como el algoritmo de variables instrumentales para encontrar el mejor modelo (función de transferencia) del sistema de acuerdo a los datos de validación.

6.2.2. Resultados de la identificación

Para encontrar el número de parámetros correctos para los modelos se utilizan los mismos métodos que en el trabajo de la línea 1, es decir: se utiliza el conocimiento del modelo, acotándose a buscar modelos de órdenes pequeños se revisan los gráficos de la respuesta del modelo vs la respuesta del proceso, buscando que esta sea lo más parecida posible, se analiza la respuesta a escalón del modelo obtenido y se utiliza el criterio del fpe como ayuda para escoger el modelo.

En las figuras 6.36-6.40 se presentan los gráficos del modelo vs la respuesta del proceso y su porcentaje de ajuste del mejor modelo obtenido.

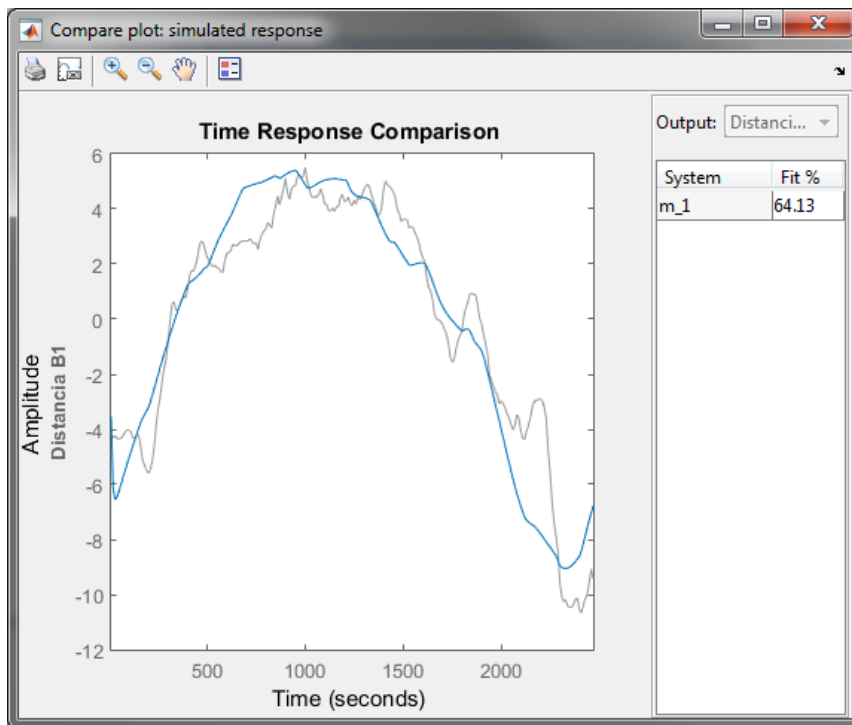


Figura 6.36: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 1 del circuito Rougher de la línea 2.

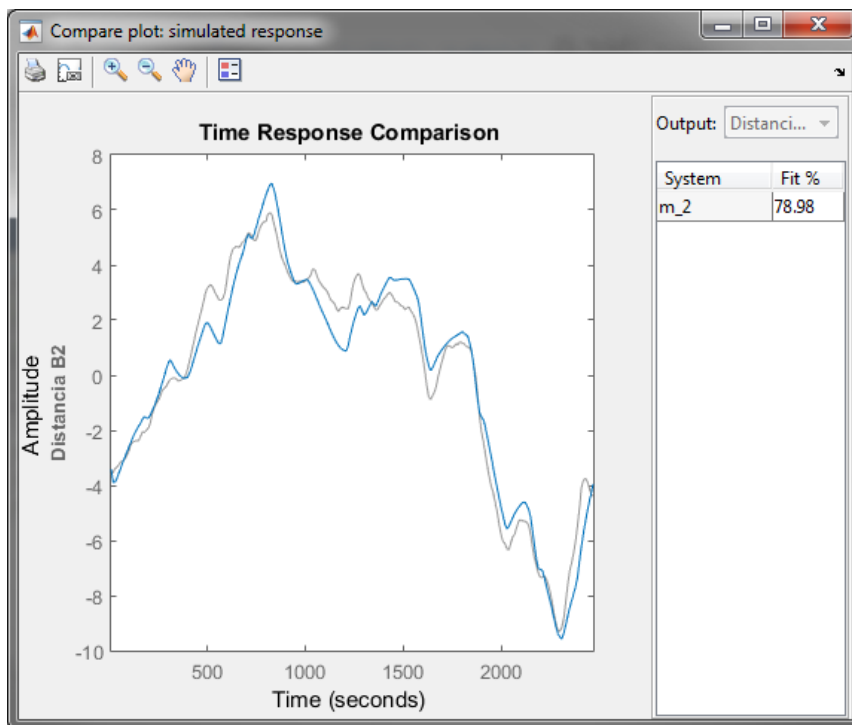


Figura 6.37: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 2 del circuito Rougher de la línea 2.

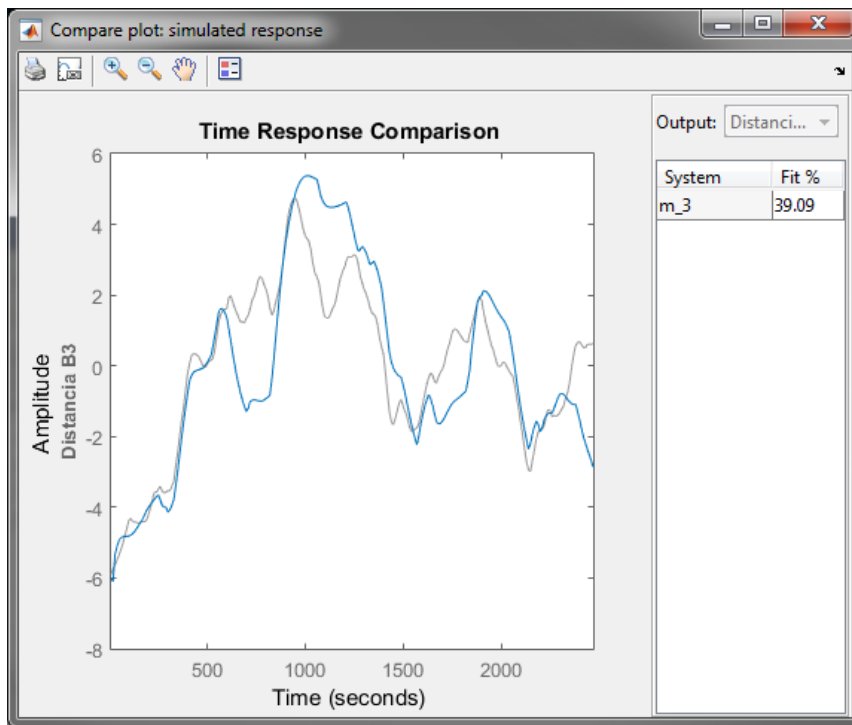


Figura 6.38: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 3 del circuito Rougher de la línea 2.

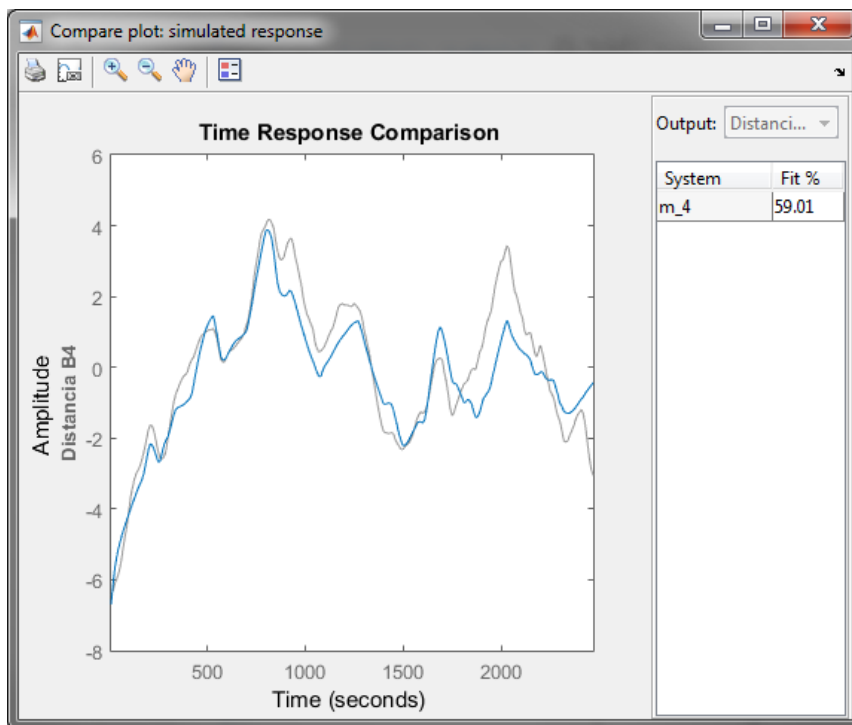


Figura 6.39: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 4 del circuito Rougher de la línea 2.

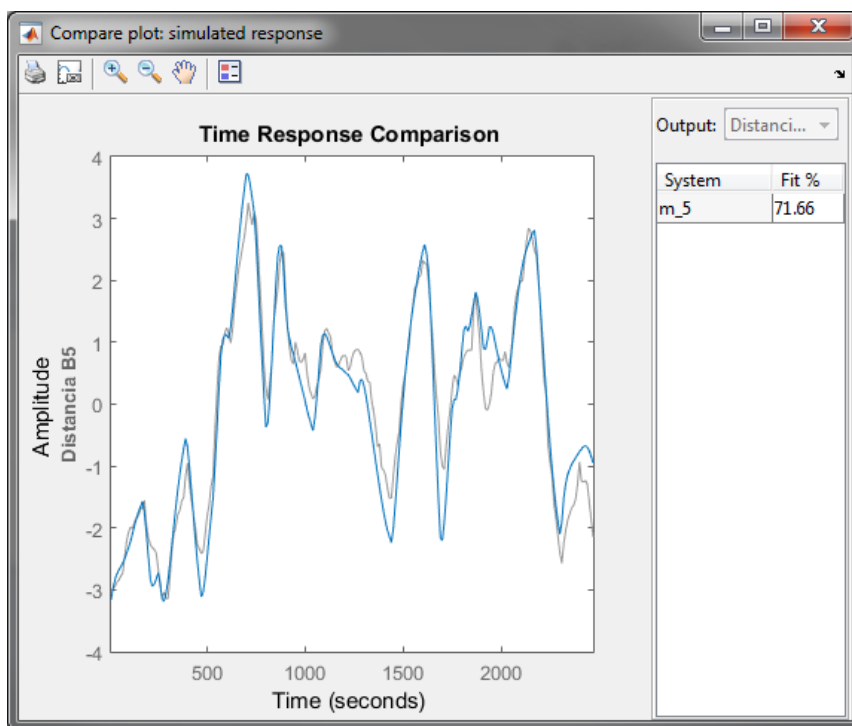


Figura 6.40: Respuesta del modelo (azul) vs la respuesta del proceso (gris) del modelo del nivel del banco 5 del circuito Rougher de la línea 2.

En las tablas 6.8-6.12 se presenta el tiempo de asentamiento y ganancia a continua de cada función de transferencia. Los tiempos de asentamiento concuerdan con los valores obtenidos experimentalmente, que se estimaron entre 2 y 5 minutos para cada banco y las ganancias también, que se estiman entre 0.5 y 2 para cada banco.

A continuación se presenta un resumen de los mejores modelos obtenidos y algunas de sus características.

Modelo del nivel de pulpa del banco 1

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$(1-1,214 \cdot z^{-1}+0,2408 \cdot z^{-2}) \cdot y_1(t) = 0,02736 \cdot z^{-2} \cdot y_2(t)+z^{-1}(0,0413+0,009508 \cdot z^{-1}) \cdot u_1(t)+e(t) \quad (6.35)$$

Ajuste con datos de validación: 64.13 %

FPE: 0.1685

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.8: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 1 de la línea 2.

| | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Función de transferencia | $\frac{Y_1(z^{-1})}{Y_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_1(z^{-1})}{U_1(z^{-1})}$ |
| Ganancia en estado estacionario | 1.01 | 1.88 |
| Tiempo de asentamiento | 1080 segundos | 1070 segundos |

Modelo del nivel de pulpa del banco 2

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$\begin{aligned} (1 - 1,262 \cdot z^{-1} + 0,323 \cdot z^{-2}) \cdot y_2(t) = & 0,03253 \cdot z^{-2} \cdot y_1(t) \\ & + 0,03309 \cdot z^{-2} \cdot y_3(t) - 0,05044 \cdot z^{-1} \cdot u_1(t) \\ & + z^{-1} \cdot (0,04996 + 0,1085 \cdot z^{-1}) \cdot u_2(t) + e(t) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ajuste con datos de validación: 78.98 %

FPE: 0.06806

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.9: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2.

| Función de transferencia | $\frac{Y_2(z^{-1})}{Y_1(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{Y_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{U_1(z^{-1})}$ | $\frac{Y_2(z^{-1})}{U_2(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.535 | 0.544 | -0.829 | 2.61 |
| Tiempo de asentamiento | 412 [s] | 412 [s] | 402 [s] | 408 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 3

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$\begin{aligned} ((1 - 1,247 \cdot z^{-1} + 0,1184 \cdot z^{-2} + 0,1836 \cdot z^{-3}) \cdot y_3(t) = & 0,02126 \cdot z^{-2} \cdot y_2(t) \\ & + z^{-2} \cdot (0,04923 - 0,02297 \cdot z^{-1}) \cdot y_4(t) - 0,1107 \cdot z^{-1} \cdot u_2(t) \\ & + 0,08532 \cdot z^{-1} \cdot u_3(t) + e(t) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Ajuste con datos de validación: 39.09 %

FPE: 0.05748

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.10: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 3 de la línea 2.

| Función de transferencia | $\frac{Y_3(z^{-1})}{Y_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{Y_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{U_2(z^{-1})}$ | $\frac{Y_3(z^{-1})}{U_3(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.382 | 0.473 | -1.99 | 1.54 |
| Tiempo de asentamiento | 302 [s] | 292 [s] | 292 [s] | 292 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 4

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$\begin{aligned}
 & (1 - 1,359 \cdot z^{-1} + 0,4036 \cdot z^{-2}) \cdot y_4(t) \\
 & = z^{-2} \cdot (0,03459 - 0,02095 \cdot z^{-1}) \cdot y_3(t) \\
 & \quad + z^{-2} \cdot (-0,04453 + 0,06875 \cdot z^{-1}) \cdot y_5(t) \\
 & \quad + z^{-1} \cdot (-0,01881 - 0,05282 \cdot z^{-1}) \cdot u_3(t) \\
 & \quad + 0,08029 \cdot z^{-1} \cdot u_4(t) + e(t)
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Ajuste con datos de validación: 59.01 %

FPE: 0.02383

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.11: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 4 de la línea 2.

| Función de transferencia | $\frac{Y_4(z^{-1})}{Y_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{Y_5(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{U_3(z^{-1})}$ | $\frac{Y_4(z^{-1})}{U_4(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.547 | 0.546 | -1.62 | 1.81 |
| Tiempo de asentamiento | 477 [s] | 512 [s] | 492 [s] | 485 [s] |

Modelo del nivel de pulpa del banco 5

Estructura del modelo: ARX

Obtenido con algoritmo: Cuadrados mínimos

Modelo:

$$(1 - 1,503 \cdot z^{-1} + 0,5566 \cdot z^{-2}) \cdot y_5(t) = z^{-1} \cdot (0,1021 - 0,07848 \cdot z^{-1}) \cdot y_4(t) - 0,1247 \cdot z^{-1} \cdot u_4(t) + 0,1489 \cdot z^{-1} \cdot u_5(t) + e(t) \quad (6.39)$$

Ajuste con datos de validación: 71.66 %

FPE: 0.03938

Tiempo de muestreo: 10 segundos

Tabla 6.12: Características de respuesta a escalón de modelo del nivel del banco “*Rougher*” 5 de la línea 2.

| Función de transferencia | $\frac{Y_5(z^{-1})}{Y_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_5(z^{-1})}{U_4(z^{-1})}$ | $\frac{Y_5(z^{-1})}{U_5(z^{-1})}$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Ganancia en estado estacionario | 0.443 | -2.34 | 2.79 |
| Tiempo de asentamiento | 199 [s] | 255 [s] | 255 [s] |

En el resumen anterior se utiliza la siguiente notación:

$y_1(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 2.

$y_2(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2.

$y_3(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 2.

$y_4(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 4 de la línea 2.

$y_5(t)$: Nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 5 de la línea 2.

$u_1(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 1 de la línea 2 [%].

$u_2(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2 [%].

$u_3(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 3 de la línea 2 [%].

$u_4(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 4 de la línea 2 [%].

$u_5(t)$: Apertura de válvula del banco “*Rougher*” 5 de la línea 2 [%].

6.2.3. Representación en variables de estado

Siguiendo el mismo procedimiento realizado para la línea 1, se toma la parte de los modelos que consideran la relación entre las entradas y salidas de cada banco, ignorando

la parte estocástica, y se transforman a una representación de estado, las que se presentan a continuación.

Representación de estados del modelo del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*” de la línea 2

La representación de estados para los modelos del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*” de la línea 2 corresponde a:

$$X_{mi}(t + 1) = A_i \cdot X_{mi}(t) + B_i \cdot U_{mi}(t) \quad (6.40a)$$

$$y_i(t) = C_i \cdot X_{mi}(t) \quad (6.40b)$$

con $i = 1, \dots, 5$.

Los parámetros de la representación de estados de los modelos de cada banco se presentan a continuación:

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,4817 \\ 0,5 & 1,214 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,07606 \\ 0,1094 & 0,1652 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$U_{m1}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} \quad X_{m1} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,646 \\ 0,5 & 1,262 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,4339 \\ 0,06506 & 0,06618 & -0,1009 & 0,09993 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$U_{m2}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad X_{m2} = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco

“Rougher” 3 de la línea 2

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,3673 \\ 0,5 & 0 & -0,1184 \\ 0 & 1 & 1,247 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,04595 & 0 & 0 \\ 0,04251 & 0,09846 & -0,2214 & 0,1706 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$U_{m3}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad X_{m3} = \begin{bmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco

“Rougher” 4 de la línea 2

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,8073 \\ 0,5 & 1,359 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -0,08379 & 0,275 & -0,2113 & 0 \\ 0,06919 & -0,08906 & -0,03761 & 0,1606 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$U_{m4}(t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \quad X_{m3} = \begin{bmatrix} x_{41}(t) \\ x_{42}(t) \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Parámetros de la representación de estados del modelo del nivel de pulpa del banco “Rougher” 5 de la línea 2

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0,5566 \\ 1 & 1,503 \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} -0,157 & 0 & 0 \\ 0,2042 & -0,2494 & 0,2977 \end{bmatrix} \quad C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$U_{m5}(t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} \quad X_{m3} = \begin{bmatrix} x_{51}(t) \\ x_{52}(t) \\ x_{53}(t) \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

6.2.4. Representación en variables de estado aumentada

Luego estos modelos se aumentaron considerando una perturbación constante en la salida, los que se presentan a continuación:

Representación de estados aumentada

La representación de estados que considera una perturbación no medible constante en la salida, para los modelos del nivel de pulpa de los bancos “Rougher” de la línea 2 corresponde a:

$$X_{mai}(t + 1) = A_i \cdot X_{mai}(t) + B_i \cdot U_{mi}(t) \quad (6.46a)$$

$$y_i(t) = C_{ai} \cdot X_{mai}(t) \quad (6.46b)$$

con $i = 1, \dots, 5$.

Los parámetros de la representación de estados se presentan a continuación:

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “Rougher” 1 de la línea 2

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,4817 & 0 \\ 0,5 & 1,2139 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,0761 \\ 0,1094 & 0,1652 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m1}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma1} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \\ d_1(t) \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2

$$A_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,6460 & 0 \\ 0,5 & 1,2624 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,4339 \\ 0,0651 & 0,0662 & -0,1009 & 0,0999 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m2}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma2} = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 2

$$A_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,3673 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,1184 & 0 \\ 0 & 1 & 1,2466 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0459 & 0 & 0 \\ 0,0425 & 0,0985 & -0,2214 & 0,1706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m3}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma3} = \begin{bmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “Rougher” 4 de la línea 2

$$A_{a4} = \begin{bmatrix} 0 & -0,8073 & 0 \\ 0,5 & 1,3593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a4} = \begin{bmatrix} -0,0838 & 0,275 & -0,2113 & 0 \\ 0,0692 & -0,0891 & -0,0376 & 0,1606 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a4} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m4}(t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma4} = \begin{bmatrix} x_{41}(t) \\ x_{42}(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Parámetros de la representación de estados aumentada del modelo del nivel de pulpa del banco “Rougher” 5 de la línea 2

$$A_{a5} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5566 & 0 \\ 1 & 1,5032 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{a5} = \begin{bmatrix} -0,157 & 0 & 0 \\ 0,2042 & -0,2494 & 0,2977 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{a5} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{m5}(t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} \quad X_{ma5} = \begin{bmatrix} x_{51}(t) \\ x_{52}(t) \\ x_{53}(t) \\ d_5(t) \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

6.2.5. Filtro de Kalman

Luego para cada modelo aumentado se implementa un filtro de Kalman con el fin de estimar los estados del modelo, incluyendo la perturbación constante a la salida, las que se presentan a continuación.

Ecuaciones de los filtros de Kalman

Las ecuaciones para cada filtro de Kalman implementados corresponden a:

$$\hat{X}_{mai}(t|t-1) = A_{mai} \cdot \hat{X}_{mai}(t-1|t-1) + B_{mai} \cdot U_{mi}(t-1) \quad (6.52a)$$

$$P_{mai}(t|t-1) = A_{mai} \cdot P_{mai}(t-1|t-1) \cdot A_{mai}^T + P_{wi} \quad (6.52b)$$

$$K_{mai}(t) = P_{mai}(t|t-1) \cdot C_{mai}^T \cdot (C_{mai} \cdot P_{mai}(t|t-1) \cdot C_{mai}^T + P_{vi})^{-1} \quad (6.52c)$$

$$\hat{X}_{mai}(t|t) = \hat{X}_{mai}(t|t-1) + K_{mai}(t) \cdot (y_i(t) - C_{mai} \cdot \hat{X}_{mai}(t|t-1)) \quad (6.52d)$$

$$P_{mai}(t|t) = (I - K_{mai}(t)C_{mai}) \cdot P_{mai}(t|t-1) \quad (6.52e)$$

con $i = 1, \dots, 5$.

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 1 de la línea 2

$$P_{w1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{bmatrix} \quad P_{v1} = 0,5$$

$$\hat{X}_{ma1}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma1}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 2 de la línea 2

$$P_{w2} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix} \quad P_{v2} = 2$$

$$\hat{X}_{ma2}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma2}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 3 de la línea 2

$$P_{w3} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad P_{v3} = 1,5$$

$$\hat{X}_{ma3}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma3}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 4 de la línea 2

$$P_{w4} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad P_{v4} = 1$$

$$\hat{X}_{ma4}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma4}(0|0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Parámetros del filtro de Kalman para el modelo aumentado para el nivel de pulpa del banco “*Rougher*” 5 de la línea 2

$$P_{w5} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \quad P_{v5} = 1$$

$$\hat{X}_{ma5}(0|0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{ma5}(0|0) = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

6.2.6. Estrategia de control predictivo

Luego teniendo el modelo de los niveles de pulpa del circuito “*Rougher*” de la línea 2, se implementa la estrategia de control predictivo, que corresponde a la misma estrategia de control predictivo utilizada en la línea 1, donde se utiliza la representación de estados del modelo aumentado para predecir las salidas futuras, y los filtros de Kalman presentados anteriormente para estimar los estados. Luego la estrategia de control corresponde a un sistema de control predictivo MISO con un elemento de pre-alimentación que se utiliza para compensar el efecto de las perturbaciones. En donde se considera como restricción que el nivel no supere los rangos de las celdas (0 a 50 [cm]) ni de la actuación (0 a 100[%]), y que el cambio de la actuación tenga una amplitud máxima de 3 %.

Al igual que en la línea 1, la estrategia de control de los bancos “*Rougher*” de la línea 2 considera que el primer banco “*Rougher*” se controla mediante un controlador PID.

El problema de optimización en cada banco, considerando $r_i(t)$, $i = 2, \dots, 5$ como la referencia para los bancos 2 a 5 respectivamente, se presentan a continuación.

Problema de optimización del banco 2

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_2(t|t) \\ \Delta \hat{u}_2(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_2(t+N_{u2}-1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_2(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p2}} (\hat{y}_2(t+i|t) - r_2(t))^2 + \sigma_2 \sum_{j=0}^{N_{u2}-1} (\Delta \hat{u}_2(t+j|t))^2 \quad (6.53)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_2(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_2(t+m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_2(t+n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7$, $n = 0, \dots, N_{u2} - 1$, $k = 0, \dots, N_{u2} - 1$, $\sigma_2 = 0,9$, $N_{p2} = 17$, $N_{u2} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_2(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 2.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m2}(t|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.54a)$$

$$\hat{U}_{m2}(t+1|t) = \hat{U}_{m2}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m2}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t+1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.54b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2}|t) &= \hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2} - 1|t) + \Delta \hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u_2} - 1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_2(t + N_{u_2}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.54c)$$

$$\hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2} + 1|t) = \hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2}|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u_2}|t) \end{bmatrix} \quad (6.54d)$$

$$\vdots$$

$$\hat{U}_{m_2}(t + N_{p_2}|t) = \hat{U}_{m_2}(t + N_{u_2}|t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ \hat{u}_2(t + N_{u_2}|t) \end{bmatrix} \quad (6.54e)$$

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_2(t) = u_2(t - 1) + \Delta u_2(t|t) \quad (6.55)$$

Problema de optimización del banco 3

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_3(t|t) \\ \Delta \hat{u}_3(t + 1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_3(t + N_{u_3} - 1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_3(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p_3}} (\hat{y}_3(t + i|t) - r_3(t))^2 + \sigma_3 \sum_{j=0}^{N_{u_3}-1} (\Delta \hat{u}_3(t + j|t))^2 \quad (6.56)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_3(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_3(t + m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_3(t + n|t) \leq 3$$

Con $i = m, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u3} - 1, k = 0, \dots, N_{u3} - 1, \sigma_3 = 3, N_{p3} = 30, N_{u3} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_3(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 3.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m3}(t|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \\ \hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t-1) \\ u_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.57a)$$

$$\hat{U}_{m3}(t+1|t) = \hat{U}_{m3}(t|t) + \Delta\hat{U}_{m3}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t|t) \\ \hat{u}_3(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t+1|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.57b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) &= \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}-1|t) + \Delta\hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u2}-1|t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u3}-1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_2(t+N_{u2}|t) \\ \Delta\hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.57c)$$

$$\hat{U}_{m3}(t+N_{u3}+1|t) = \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u3}|t) \\ \hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \quad (6.57d)$$

⋮

$$\hat{U}_{m3}(t+N_{p3}|t) = \hat{U}_{m3}(t+N_{u3}|t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ \hat{u}_2(t+N_{u2}|t) \\ \hat{u}_3(t+N_{u3}|t) \end{bmatrix} \quad (6.57e)$$

Y $\Delta u_2(t|t), \dots, \Delta u_2(t + N_{u2}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 2 y N_{u2} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_3(t) = u_3(t - 1) + \Delta u_3(t|t) \quad (6.58)$$

Problema de optimización del banco 4

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_4(t|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t + 1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_4(t + N_{u4} - 1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_4(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p4}} (\hat{y}_4(t + i|t) - r_4(t))^2 + \sigma_4 \sum_{j=0}^{N_{u4}-1} (\Delta \hat{u}_4(t + j|t))^2 \quad (6.59)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_4(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_4(t + m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_4(t + n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u4} - 1, k = 0, \dots, N_{u4} - 1, \sigma_4 = 1,5, N_{p4} = 30, N_{u4} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_4(t + i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 4.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m4}(t|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t|t) \\ \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_3(t - 1) \\ u_4(t - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_3(t|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.60a)$$

$$\hat{U}_{m4}(t + 1|t) = \hat{U}_{m4}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m4}(t + 1|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t|t) \\ \hat{u}_4(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{u}_3(t + 1|t) \\ \Delta \hat{u}_4(t + 1|t) \end{bmatrix} \quad (6.60b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) &= \hat{U}_{m4}(t + N_{u4} - 1|t) + \Delta\hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3} - 1|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4} - 1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \Delta\hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.60c)$$

$$\hat{U}_{m4}(t + N_{u4} + 1|t) = \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \quad (6.60d)$$

⋮

$$\hat{U}_{m4}(t + N_{p4}|t) = \hat{U}_{m4}(t + N_{u4}|t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ \hat{u}_3(t + N_{u3}|t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \end{bmatrix} \quad (6.60e)$$

Y $\Delta u_3(t), \dots, \Delta u_3(t + N_{u3}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 3 y N_{u3} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_4(t) = u_4(t - 1) + \Delta u_4(t|t) \quad (6.61)$$

Problema de optimización del banco 5

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_5(t|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_5(t+N_{u5}-1|t) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}_5(t+k|t)} \sum_{i=1}^{N_{p5}} (\hat{y}_5(t+i|t) - r_5(t))^2 + \sigma_5 \sum_{j=0}^{N_{u5}-1} (\Delta \hat{u}_5(t+j|t))^2 \quad (6.62)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_5(t|t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_5(t+m|t) \leq 50$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_5(t+n|t) \leq 3$$

Con $m = 1, \dots, 7, n = 0, \dots, N_{u5}-1, k = 0, \dots, N_{u5}-1, \sigma_5 = 1, N_{p5} = 30, N_{u5} = 2$ y en donde las predicciones $\hat{y}_5(t+i|t)$, se crean propagando los valores de los estados entregados por el filtro de Kalman, por el modelo aumentado del banco 5.

Las entradas presentes y futuras consideradas por el problema de optimización corresponden a:

$$\hat{U}_{m5}(t|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t|t) \\ \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t-1) \\ u_5(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} \quad (6.63a)$$

$$\hat{U}_{m5}(t+1|t) = \hat{U}_{m5}(t|t) + \Delta \hat{U}_{m5}(t+1|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t|t) \\ \hat{u}_5(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t+1|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+1|t) \end{bmatrix} \quad (6.63b)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}|t) &= \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}-1|t) + \Delta \hat{U}_{m5}(t+N_{u5}|t) \\ &= \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t+N_{u4}-1|t) \\ \hat{u}_5(t+N_{u5}-1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \hat{u}_4(t+N_{u4}|t) \\ \Delta \hat{u}_5(t+N_{u5}|t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.63c)$$

$$\hat{U}_{m5}(t + N_{u5} + 1|t) = \hat{U}_{m5}(t + N_{u5}|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \\ \hat{u}_5(t + N_{u5}|t) \end{bmatrix} \quad (6.63d)$$

$$\vdots$$

$$\hat{U}_{m5}(t + N_{p5}|t) = \hat{U}_{m5}(t + N_{u5}|t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ \hat{u}_4(t + N_{u4}|t) \\ \hat{u}_5(t + N_{u5}|t) \end{bmatrix} \quad (6.63e)$$

Y $\Delta u_4(t|t), \dots, \Delta u_4(t + N_{u4}|t)$ son los parámetros calculados al resolver el problema de optimización del banco 4 y N_{u4} es el parámetro ingresado en dicho problema.

Luego la estrategia de control aplica:

$$u_5(t) = u_5(t - 1) + \Delta u_5(t|t) \quad (6.64)$$

Esta estrategia es implementada en el proceso, obteniendo los resultados presentados en el capítulo 7.

7. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar las estrategias de control predictivo tanto en la línea 1 como en la línea 2. Primero se presenta la mejora en el control del nivel de los bancos “*Rougher*” obtenida con la estrategia de control predictivo, y luego se calcula el beneficio económico de implementar esta estrategia de control predictivo en conjunto con la aplicación que manipula las referencias del nivel de los bancos.

7.1. Resultado en línea 1

Se realiza un análisis para confirmar si existe una reducción en la varianza del error de seguimiento en el nivel de los bancos “*Rougher*” al utilizar la estrategia de control predictivo. Este análisis considera 9 experimentos de pruebas “*on/off*”, en donde los datos se muestrean cada 5 segundos y consideran un experimento de duración de mínimo 3 horas para cada prueba, lo que es mucho mayor al tiempo de asentamiento del proceso (aproximadamente 5 minutos de acuerdo a los modelos) y al del control (aproximadamente 2 minutos). Los resultados se presentan en la tabla 7.1, que muestran que al implementar la estrategia de control predictivo:

- El error de seguimiento en todos los bancos se mantiene dentro del mismo orden de magnitud y es muy pequeño en comparación con el rango en el que operan las celdas (0 a 50 [cm]), y es imperceptible en la operación del proceso.
- Al analizar la desviación estándar en las celdas siempre se puede ver una mejora en la desviación estándar del error de seguimiento, el que puede ser de hasta un 66 %, en los últimos bancos.
- La mejora es mucho mayor en los últimos bancos, ya que el control predictivo no propaga las perturbaciones como el control PID.

Tabla 7.1: Promedio y desviación estándar para el error de seguimiento en los bancos “*Rougher*” cuando se utiliza la estrategia de control predictivo vs el control PID.

| | | | Banco 1 | Banco 2 | Banco 3 | Banco 4 | Banco 5 |
|-------------------|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Experimento 1 | Promedio | Con MPC | 0,0027 | 0,187 | 0,294 | -0,232 | -0,261 |
| | | Con PID | 0,038 | 0,039 | 2,533 | 0,066 | -0,073 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 2,126 | 2,69 | 2,752 | 2,526 | 4,379 |
| Con PID | | 3,114 | 5,104 | 7,854 | 6,2 | 10,379 | |
| Mejora Porcentual | | 32 % | 47 % | 65 % | 59 % | 58 % | |
| Experimento 2 | Promedio | Con MPC | -0,026 | -0,03 | 0,062 | -0,088 | -0,126 |
| | | Con PID | -0,062 | -0,189 | -0,202 | -0,238 | -0,314 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 1,478 | 2,113 | 2,133 | 3,045 | 4,381 |
| Con PID | | 1,687 | 2,424 | 2,394 | 3,863 | 5,363 | |
| Mejora Porcentual | | 12 % | 13 % | 11 % | 21 % | 18 % | |
| Experimento 3 | Promedio | Con MPC | 0,031 | 0,021 | 0,15 | -0,237 | -0,706 |
| | | Con PID | -0,028 | -0,09 | -0,657 | -0,464 | -0,71 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,93 | 0,778 | 1,1 | 1,196 | 2,311 |
| Con PID | | 2,143 | 2,598 | 3,982 | 2,628 | 4,663 | |
| Mejora Porcentual | | 57 % | 70 % | 72 % | 54 % | 50 % | |
| Experimento 4 | Promedio | Con MPC | 0,008 | -0,018 | 0,068 | -0,042 | 0,108 |
| | | Con PID | -0,07 | -0,034 | -0,021 | -0,037 | -0,118 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 1,334 | 0,711 | 0,914 | 1,083 | 1,353 |
| Con PID | | 1,861 | 1,504 | 1,464 | 2,121 | 3,433 | |
| Mejora Porcentual | | 28 % | 53 % | 38 % | 49 % | 61 % | |
| Experimento 5 | Promedio | Con MPC | -0,38 | 0,126 | 0,066 | -0,318 | -0,387 |
| | | Con PID | -0,38 | -0,017 | -0,0207 | -0,045 | -0,082 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 1,377 | 0,984 | 1,582 | 2,239 | 3,599 |
| Con PID | | 2,294 | 2,634 | 2,983 | 2,974 | 4,538 | |
| Mejora Porcentual | | 40 % | 63 % | 47 % | 25 % | 21 % | |
| Experimento 6 | Promedio | Con MPC | 0,014 | 0,930 | 0,127 | 0,105 | 0,248 |
| | | Con PID | 0,029 | 0,027 | 0,031 | 0,028 | 0,029 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,622 | 0,683 | 0,921 | 1,432 | 1,003 |
| Con PID | | 0,810 | 0,852 | 1,451 | 2,623 | 2,932 | |
| Mejora Porcentual | | 23 % | 20 % | 37 % | 45 % | 66 % | |
| Experimento 7 | Promedio | Con MPC | -0,026 | 0,821 | 0,400 | 0,131 | 0,062 |
| | | Con PID | 0,024 | 0,016 | -0,005 | -0,003 | -0,006 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,991 | 1,254 | 1,694 | 2,734 | 2,475 |
| Con PID | | 1,193 | 1,333 | 1,959 | 1,909 | 3,503 | |
| Mejora Porcentual | | 17 % | 6 % | 14 % | -43 % | 29 % | |
| Experimento 8 | Promedio | Con MPC | 0,090 | 0,948 | 0,075 | 0,214 | 0,252 |
| | | Con PID | -0,004 | 0,018 | 0,005 | 0,015 | 0,019 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,742 | 0,946 | 0,945 | 0,943 | 1,171 |
| Con PID | | 0,734 | 0,975 | 1,042 | 1,752 | 2,819 | |
| Mejora Porcentual | | -1 % | 3 % | 9 % | 46 % | 58 % | |
| Experimento 9 | Promedio | Con MPC | 0,002 | 0,065 | -0,086 | -0,209 | -0,241 |
| | | Con PID | -0,089 | 0,008 | 0,007 | 0,000 | 0,059 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,941 | 0,622 | 1,242 | 1,352 | 1,730 |
| Con PID | | 1,939 | 1,383 | 2,188 | 1,685 | 3,062 | |
| Mejora Porcentual | | 51 % | 55 % | 43 % | 20 % | 44 % | |

Note como en el experimento 8 casi no hay diferencia en la varianza del primer banco, pero la varianza mejora un poco para el banco 2, y luego un poco más para el banco 3, hasta llegar al banco 5 en donde la mejora es de casi un 60 %.

Los resultados anteriores muestran que la estrategia de control predictivo logra su objetivo que es la reducción de la varianza del nivel de los bancos, manteniendo un seguimiento adecuado de las referencias.

En las figuras 7.1 y 7.2 se presenta el comportamiento temporal del nivel y la referencia en las celdas “*Rougher*” durante 1.5 días y 1.15 días respectivamente. En el último gráfico de la figuras 7.1 y 7.2 se observa el estado del sistema experto de las celdas “*Rougher*”, que cuando es igual a 1 indica que está funcionando la estrategia de control predictivo y cuando es igual a 0 indica que está funcionando el control PID. En ambas figuras se observa que cuando se habilita la estrategia de control predictivo, hay una mejora perceptible en la varianza del nivel y seguimiento de referencias, sobre todo para los últimos bancos. En la figura 7.1 se observa que al haber una transición del control PID a control predictivo existe instantáneamente una mejora en la varianza y seguimiento de la referencia.

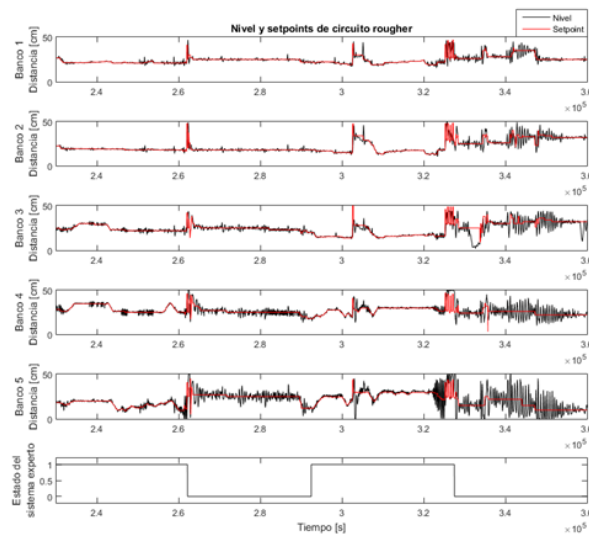


Figura 7.1: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo (estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0).

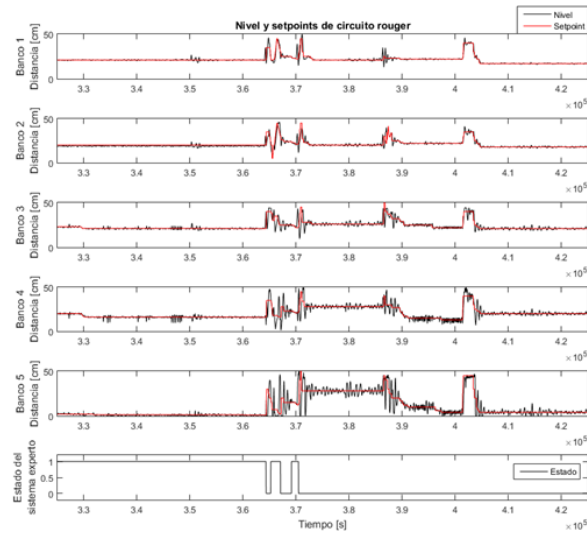


Figura 7.2: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo (estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0).

En la figura 7.3 se presenta el comportamiento de la estrategia de control de la línea 1, en conjunto con la actuación y los límites impuestos por las restricciones. En esta figura se observa que se cumplen tanto las restricciones en la salida, como la actuación en todo momento.

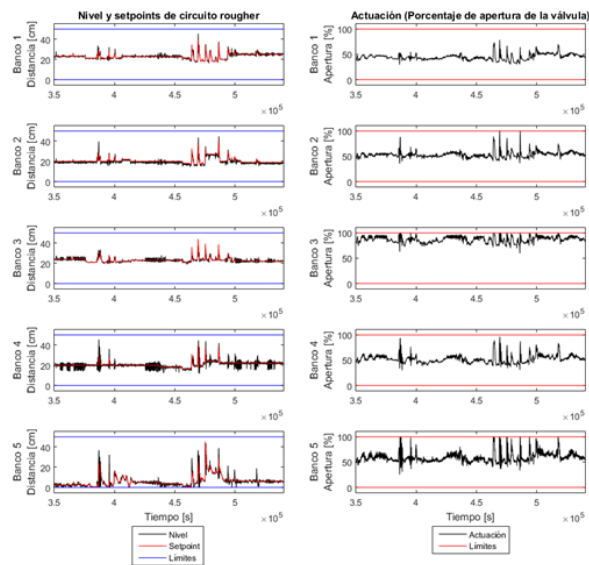


Figura 7.3: Comportamiento de la estrategia de control predictivo en línea 1, en conjunto con sus restricciones.

En la figura 7.4 se presenta un gráfico del comportamiento del banco 3, en un momento en que el límite de la actuación (restricción) del banco se ajusta a 95 %, restricción que siempre se cumple. Además, se observa que hasta los 590000 [s], a pesar de que el nivel está bajo la referencia (banco más lleno de lo deseado) y hay libertad para abrir más el actuador, la estrategia de control no lo hace, con el fin de cumplir con dicha restricción.

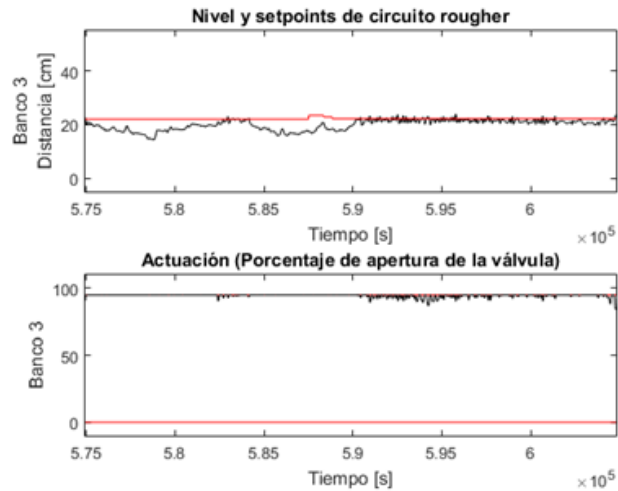


Figura 7.4: Comportamiento de la estrategia de control predictivo en el banco 3 de la línea 1, en conjunto con sus restricciones.

Del análisis anterior, entonces, se concluye que la estrategia de control predictivo logra su objetivo de reducir la varianza y mejorar el seguimiento de referencia del nivel de los bancos “*Rougher*”, además de cumplir con las restricciones impuestas.

Cabe destacar que al realizar el proceso de identificación en esta línea, el proceso está trabajando con algunos actuadores que están en el límite de su vida útil (banco 1 y banco 4) y que ya no responden a cambios pequeños (menores a 10 %). Estos actuadores son reemplazados, pero el trabajo de reemplazo es realizado luego de haber ejecutado el procedimiento de identificación, por lo que los modelos consideran la dinámica de los actuadores antiguos. A pesar de esto, la estrategia de control predictivo entrega resultados lo suficientemente buenos como para mantener la estrategia sin realizar otro experimento de identificación.

7.2. Análisis económico en línea 1

El análisis económico en este trabajo considera la implementación del sistema de control predictivo en conjunto con la aplicación de control de las celdas “*Rougher*”. El principal aporte de la estrategia de control predictivo es permitir que el sistema responda correctamente a los cambios de referencias, permitiendo a la aplicación del sistema experto, llevar al sistema al punto de operación óptimo. No se encuentra una forma de analizar el beneficio económico obtenido por la implementación de cada sistema de control por separado, ya que las mejoras por un buen seguimiento de referencias no son tan grandes y la aplicación del sistema experto que manipula las referencias no funciona adecuadamente por si sola. Es solo cuando se unen ambos sistemas de control que se obtiene un beneficio económico.

El análisis económico se realiza en función de la recuperación del circuito de flotación. La recuperación consiste en la razón entre la masa del material útil obtenido en el concentrado (en este caso la masa de cobre) y la masa del material útil en la alimentación. Y se calcula como:

$$R_m = \frac{(f - t) \cdot c}{(c - t) \cdot f} \cdot 100 \quad (7.1)$$

donde: f : Ley de alimentación. c : Ley de concentrado. t : Ley de relave.

Para el análisis se considera el presupuesto de la compañía, que indica que para una recuperación de 92,65 % (proyectada para el 2016), se venderán 327.727.000 libras entre las dos líneas, por lo que la línea 1 producirá aproximadamente 163.863.500 libras (la mitad). Luego considerando la recuperación para las condiciones nuevas se calcula cuántas libras de cobre más se venderá, mediante:

$$P_N = \frac{R_N}{R_A} \cdot 163,863,500 \text{ [libra]} \quad (7.2)$$

donde: R_A : Recuperación antigua. R_N : Recuperación nueva. Y el beneficio en libras de cobre se calcula mediante:

$$B = P_N - P_A \quad (7.3)$$

con $P_A = 163,863,500$ [libras].

Se realiza un análisis para distintos intervalos de tiempo, en donde se observa la recuperación del proceso de flotación cuando se trabaja con la aplicación del sistema experto (denominado SCEA) y la estrategia de control predictivo y cuando se trabaja sin dicho sistema, es decir mediante control PID, y supervisión de los operadores.

Los datos para estos intervalos se presentan en la tabla 7.2, en donde se obtiene una mejora promedio en la recuperación de 1,21 %, con una desviación estándar de 0,8 %, al utilizar la aplicación programada en el sistema experto en conjunto con la estrategia de control predictivo. Por lo tanto, se considera que la mejora mínima asegurable en la recuperación con la implementación es de aproximadamente $1,21 \% - 0,8 \% = 0,41 \%$.

Tabla 7.2: Resultado de control con sistema experto más control predictivo (Con SCEA) vs control supervisado más control PID (sin SCEA).

| | Recuperación Final | | | Nueva utilidad P_A [libras] | Beneficio B [libras] |
|----------------|--------------------|----------|------------|----------------------------------|---------------------------|
| | Con SCEA | Sin SCEA | Diferencia | | |
| Experimento 1 | 90,28 | 90,38 | -0,10 | 163.687.875 | -175.625 |
| Experimento 3 | 92,11 | 90,86 | 1,25 | 166.124.599 | 2.261.099 |
| Experimento 4 | 92,11 | 90,85 | 1,26 | 166.133.917 | 2.270.417 |
| Experimento 5 | 86,37 | 85,53 | 0,83 | 165.462.022 | 1.598.522 |
| Experimento 7 | 94,75 | 91,97 | 2,78 | 168.814.635 | 4.951.135 |
| Experimento 8 | 92,85 | 91,35 | 1,50 | 166.555.853 | 2.692.353 |
| Experimento 9 | 93,52 | 92,49 | 1,03 | 165.684.637 | 1.821.137 |
| Experimento 10 | 86,82 | 85,73 | 1,09 | 165.946.997 | 2.083.497 |
| Promedio | 91,10 | 89,89 | 1,21 | 166.061.801 | 2.198.301 |

Luego se realiza el cálculo del beneficio en libras para una mejora en la recuperación de 0,41 % y para una mejora de 1,21 % y se calcula el beneficio económico para distintos márgenes de utilidad, lo que se presenta en la tabla 7.3.

Además, en las figuras 7.5 y 7.6 se presentan gráficos de cajas que sirven para comparar los resultados obtenidos con la aplicación del sistema experto de las celdas “Rougher” en conjunto con el control predictivo (con SCEA) versus el control con PID y supervisión del operador (sin SCEA). En estos gráficos se presentan datos de 6.5 horas de trabajo continuo para cada caso.

En la figura 7.5 se analiza un turno de operación de la noche, con el siguiente turno que

Tabla 7.3: Beneficio económico para distintos márgenes de utilidad para mejora mínima asegurada y para mejora promedio.

| Mejora | Mínima 0,41 % | Promedio 1,21 % |
|--------------------|----------------------|--------------------|
| Recuperación | 93,06 % | 93,86 % |
| Margen de utilidad | Ganancia anual extra | |
| 0,25 | \$170,521 | \$506,561 |
| 0,5 | \$341,043 | \$1,013,122 |
| 0,75 | \$511,564 | \$1,519,683 |
| 1 | \$682,085 | \$2,026,244 |
| 1,25 | \$852,607 | \$2,532,804 |
| 1,5 | \$1,023,128 | \$3,039,365 |
| 1,75 | \$1,193,649 | \$3,545,926 |
| 2 | \$1,364,171 | \$4,052,487 |

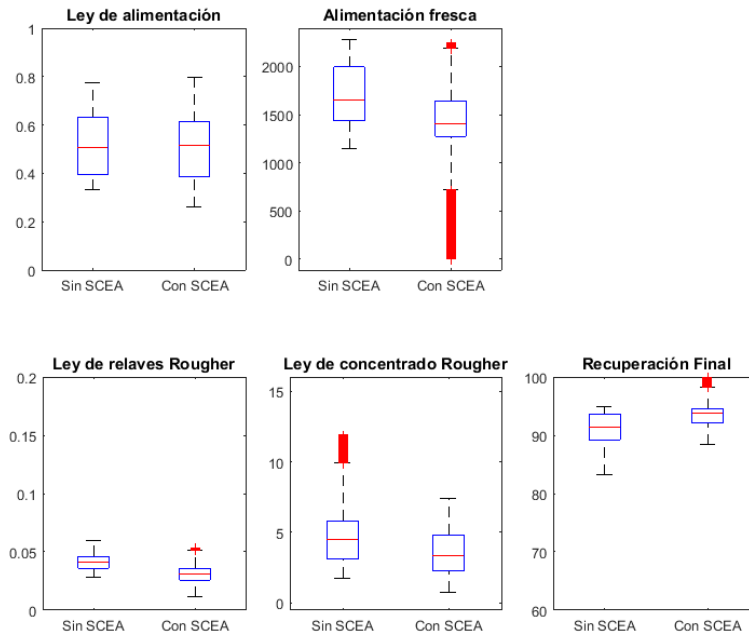


Figura 7.5: Comparación entre estrategia de control predictivo en conjunto con la aplicación del sistema experto (CON SCEA) vs control PID de turno de noche vs turno de día.

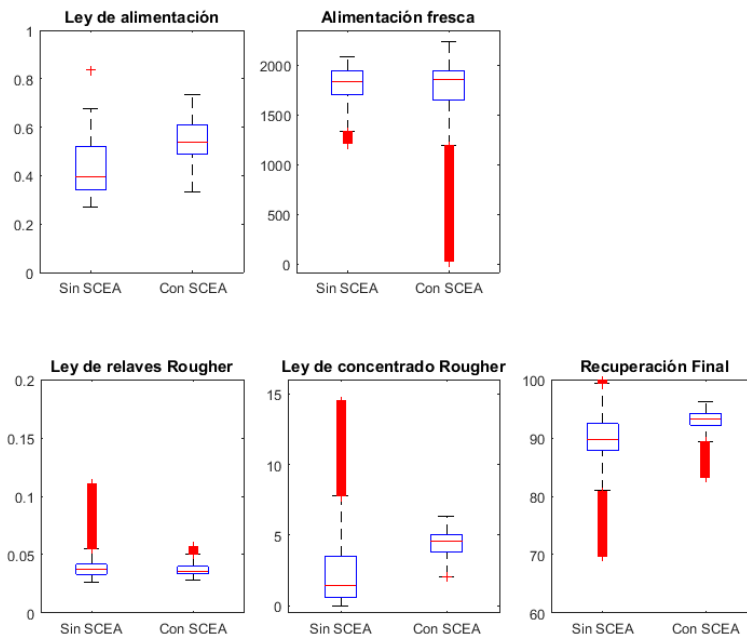


Figura 7.6: Comparación entre estrategia de control predictivo en conjunto con la aplicación del sistema experto (CON SCEA) vs control PID del mismo turno dos días seguidos.

trabaja de día, con el fin de comparar el comportamiento bajo condiciones similares. En la figura 7.6 se analiza el mismo turno durante dos días seguidos, con el fin de comparar los resultados cuando los criterios operacionales son los mismos (mismo operador). En los primeros dos gráficos se presentan los parámetros externos que hacen variar la recuperación del proceso y que deben ser similares, que son la ley de alimentación del circuito y la alimentación fresca (flujo). Note como en ambos casos la ley de relaves “*Rougher*” es menor (por lo que se fue menos cobre en los relaves) y la ley de concentrado “*Rougher*” es mayor (por lo que se recuperó más cobre), lo que reincide en una mejora en la recuperación total del proceso, que en ambos casos es mayor y posee una menor varianza, cuando se utiliza la aplicación del sistema experto de las celdas “*Rougher*” en conjunto con la estrategia de control predictivo.

En la figura 7.7 se presenta el comportamiento del proceso bajo varias reglas de emergencia por rebalse de la cuba de remolienda. En el último gráfico de esta figura se observa el nivel de llenado de la cuba de remolienda y el umbral que no debe superarse (línea azul) y como el control es capaz de seguir los cambios hechos en las referencias para recuperar-

se de una situación de rebalse en caso de no ser evitable y evitarla en los casos en que es posible.

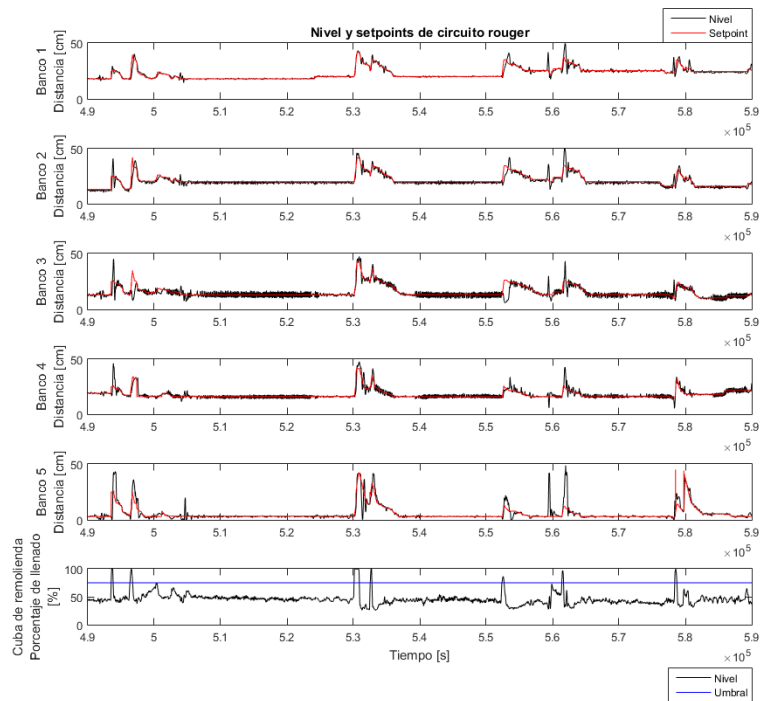


Figura 7.7: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba.

7.3. Resultados en línea 2

Se realiza el mismo análisis que en la línea 1 para confirmar si existe una reducción en la varianza del error de seguimiento en el nivel de los bancos “*Rougher*” al utilizar la estrategia de control predictivo. En este análisis se consideraron 7 experimentos de pruebas “*on/off*”, muestreados cada 5 segundos y que consideran un experimento de duración de mínimo 1.5 horas para cada prueba, lo que es mucho mayor al tiempo de asentamiento del proceso (aproximadamente 5 minutos de acuerdo a los modelos) y al del control (aproximadamente 2 minutos). Los resultados se presentan en la tabla 7.4, que muestran que al implementar la estrategia de control predictivo:

- El error de seguimiento en todos los bancos se mantiene dentro del mismo orden

de magnitud y es muy pequeño en comparación con el rango en el que operan las celdas (0 a 50 [cm]), y es imperceptible en la operación del proceso.

- Siempre se puede ver una mejora en la desviación estándar del error de seguimiento, que llega a ser de hasta un 86 %, en los últimos bancos.

Tabla 7.4: Promedio y desviación estándar para el error de seguimiento en los bancos “*Rougher*” cuando se utiliza la estrategia de control predictivo vs el control PID.

| | | | Banco 1 | Banco 2 | Banco 3 | Banco 4 | Banco 5 |
|-------------------|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Experimento 1 | Promedio | Con MPC | -0,024 | -0,003 | -0,037 | -0,092 | 0,020 |
| | | Con PID | 0,0047 | 0,019 | 0,028 | 0,038 | 0,027 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,697 | 0,918 | 1,053 | 1,387 | 0,605 |
| Con PID | | 0,752 | 0,980 | 1,836 | 5,237 | 2,027 | |
| Mejora Porcentual | | 7 % | 6 % | 43 % | 57 % | 70 % | |
| Experimento 2 | Promedio | Con MPC | 0,034 | -0,004 | -0,001 | -0,001 | 0,07 |
| | | Con PID | -0,316 | -1,629 | -0,085 | -0,145 | -0,170 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,658 | 0,505 | 0,553 | 0,400 | 0,299 |
| Con PID | | 2,336 | 4,311 | 1,539 | 2,269 | 1,120 | |
| Mejora Porcentual | | 72 % | 88 % | 64 % | 82 % | 73 % | |
| Experimento 3 | Promedio | Con MPC | 0,055 | 0,896 | 0,586 | 0,341 | 0,167 |
| | | Con PID | -0,011 | -0,005 | 0,009 | 0,446 | 0,195 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 1,569 | 1,918 | 0,757 | 0,608 | 0,647 |
| Con PID | | 1,220 | 1,407 | 1,818 | 1,389 | 1,188 | |
| Mejora Porcentual | | -29 % | -36 % | 58 % | 56 % | 45 % | |
| Experimento 4 | Promedio | Con MPC | 0,001 | 0,507 | 0,776 | 0,180 | 0,040 |
| | | Con PID | -0,003 | -0,015 | -0,051 | -0,037 | -0,028 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,989 | 0,361 | 0,508 | 0,341 | 0,257 |
| Con PID | | 3,338 | 2,093 | 2,559 | 2,892 | 1,787 | |
| Mejora Porcentual | | 70 % | 83 % | 80 % | 88 % | 86 % | |
| Experimento 5 | Promedio | Con MPC | -0,015 | 0,355 | 0,625 | 0,096 | 0,033 |
| | | Con PID | -0,113 | -0,103 | -0,156 | -0,079 | -0,053 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 0,562 | 1,242 | 0,836 | 0,252 | 0,407 |
| Con PID | | 0,689 | 0,767 | 1,130 | 1,032 | 0,713 | |
| Mejora Porcentual | | 18 % | -62 % | 26 % | 76 % | 43 % | |
| Experimento 6 | Promedio | Con MPC | 0,058 | 0,722 | 0,571 | 0,275 | -0,037 |
| | | Con PID | -0,011 | -0,012 | -0,018 | -0,017 | -0,027 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 2,081 | 2,679 | 2,106 | 1,378 | 1,303 |
| Con PID | | 1,549 | 1,599 | 2,337 | 2,531 | 1,587 | |
| Mejora Porcentual | | -34 % | -67 % | 10 % | 46 % | 18 % | |
| Experimento 7 | Promedio | Con MPC | 0,277 | 0,811 | 0,689 | 0,165 | 0,037 |
| | | Con PID | -0,006 | -0,006 | -0,055 | -0,009 | -0,009 |
| | Desviación Estándar | Con MPC | 1,256 | 1,837 | 1,539 | 0,751 | 0,537 |
| Con PID | | 1,348 | 1,695 | 2,549 | 2,342 | 1,848 | |
| Mejora Porcentual | | 7 % | -8 % | 40 % | 68 % | 71 % | |

En la figura 7.8 se presenta el comportamiento temporal del nivel y referencias en las celdas “*Rougher*” durante 7 días. En el último gráfico de la figura 7.8 se observa el estado del sistema experto de las celdas “*Rougher*”, que cuando es igual a 1 indica que está funcionando la estrategia de control predictivo y cuando es igual a 0 indica que está

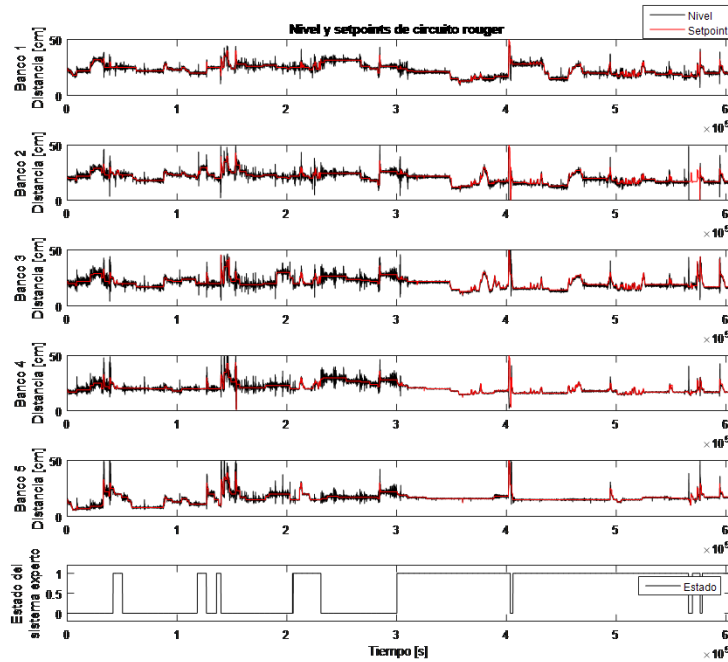


Figura 7.8: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo en línea 2 (estado de sistema experto igual a 1) vs control PID (estado de sistema experto igual a 0).

funcionando el control PID. En esta figura se observa que cuando se activa la estrategia de control predictivo, hay una reducción bastante notoria y casi instantánea, en la varianza del nivel sobre todo para los últimos bancos, además el sistema es capaz de seguir sin problemas los cambios en las referencias. Note por ejemplo entre el tiempo 400000 [s] y 500000 [s] hay cambios en las referencias de los primeros bancos, pero no en el quinto banco, esto produce problemas con el control PID (ver figura 6.2). En este caso el control del quinto banco es capaz de compensar completamente la perturbación generada por los cambios de las referencias de los otros bancos, por lo que no se observa ningún cambio perceptible en el nivel del quinto banco bajo estas condiciones.

En la figura 7.9 se presenta el comportamiento de la estrategia de control, en conjunto con la actuación y los límites impuestos por las restricciones. Al igual que en el caso de la línea 1 se puede observar que en todo momento el sistema se mantiene dentro de los límites impuestos por las restricciones.

Del análisis anterior, entonces, se concluye que la estrategia de control predictivo logra su objetivo de reducir la varianza y mejorar el seguimiento de referencia del nivel de los

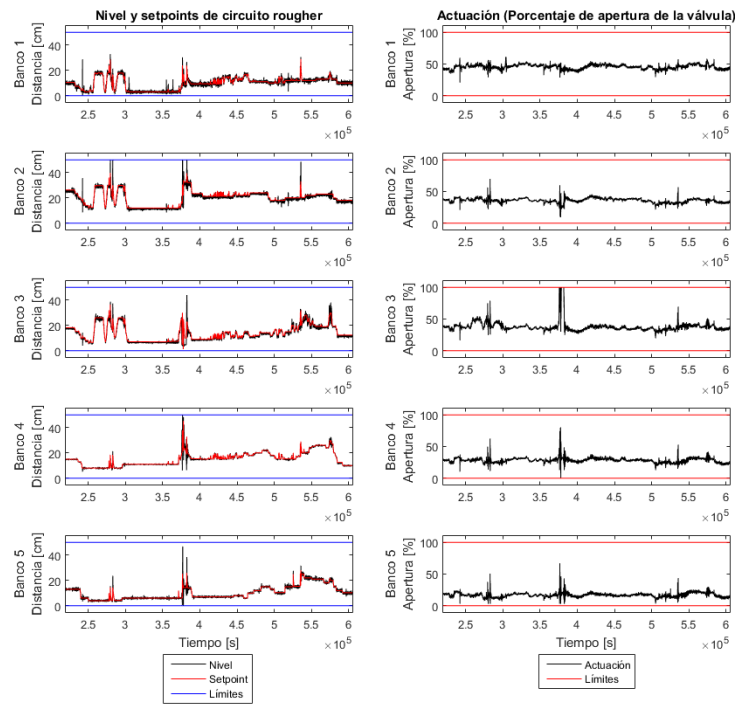


Figura 7.9: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba en línea 2.

bancos “*Rougher*”.

Cabe destacar que al realizar la identificación del sistema para la línea 2 se siguieron las recomendaciones entregadas en los capítulos anteriores, referentes a la utilización de una señal GBN con el fin de mejorar la calidad del modelo para las frecuencias bajas. Esto claramente tuvo un efecto si se compara los resultados presentados en las tablas 7.1 y 7.4. En la línea 2 la reducción de la varianza llega a un 88 % en algunos casos, mientras que en la línea 1 la reducción de la varianza máxima obtenida es de un 66 %.

7.4. Análisis económico en línea 2

Al igual que en la línea 1, para realizar el análisis económico se analizó la recuperación del circuito de flotación y considera la implementación del sistema de control predictivo en conjunto con la aplicación de control de las celdas “*Rougher*”.

El beneficio económico se calcula de la misma manera que en la línea 1, es decir, se considerando el presupuesto de la compañía, que indica que para una recuperación de

92,65 % (proyectada para el 2016), se venderán 327,727,000 libras entre las dos líneas, por lo que la línea 2 producirá aproximadamente 163,863,500 libras (la mitad). Luego considerando la recuperación para las condiciones nuevas se calcula cuántas libras de cobre más se venderá, mediante las ecuaciones (7.1)-(7.3).

Se realiza un análisis para distintos intervalos de tiempo, en donde se observa la recuperación del proceso de flotación cuando se trabaja con la aplicación del sistema experto (denominado SCEA) y la estrategia de control predictivo y cuando se trabaja sin dicho sistema, es decir mediante control PID, y supervisión de los operadores.

Tabla 7.5: Resultado de control con sistema experto más control predictivo (Con SCEA) vs control supervisado más control PID (sin SCEA).

| | Recuperación Final | | | | Beneficio B [libras] |
|---------------|--------------------|----------|------------|----------------------------------|---------------------------|
| | Con SCEA | Sin SCEA | Diferencia | Nueva utilidad P_A [libras] | |
| Experimento 1 | 94,09 | 93,64 | 0,44 | 164.637.139 | 773.639 |
| Experimento 2 | 94,28 | 92,68 | 1,60 | 166.690.585 | 2.827.085 |
| Experimento 3 | 94,94 | 94,17 | 0,78 | 165.212.580 | 1.349.080 |
| Experimento 4 | 94,94 | 94,02 | 0,92 | 165.472.802 | 1.609.302 |
| Experimento 5 | 95,33 | 94,33 | 1,00 | 165.595.587 | 1.732.087 |
| Experimento 6 | 95,33 | 94,14 | 1,19 | 165.934.109 | 2.070.609 |
| Promedio | 94,82 | 93,83 | 0,99 | 164.637.139 | 1.724.973 |

Los datos para estos intervalos se presentan en la tabla 7.5, en donde se obtiene una mejora promedio en la recuperación de 0,99 %, con una desviación estándar de 0,39 %, al utilizar la aplicación programada en el sistema experto en conjunto con la estrategia de control predictivo. Por lo tanto, se considera que la mejora mínima asegurable en la recuperación con la implementación es de aproximadamente $0,99 \% - 0,39 \% = 0,6 \%$.

Luego se realiza el cálculo del beneficio en libras para la mejora mínima asegurable y la mejora promedio y se consideró el beneficio económico para distintos márgenes de utilidad. Con esto se obtuvo la tabla 7.6.

Del análisis anterior se observa, que al igual que en la línea 1, la implementación del sistema de control predictivo en conjunto con la aplicación de control de las celdas “*Rougher*” genera un impacto económico considerable para la compañía.

Otro aspecto importante en la integración de la estrategia de control predictivo con la

Tabla 7.6: Beneficio económico para distintos márgenes de utilidad para mejora mínima asegurada y para mejora promedio.

| Mejora | Mínima 0,6 % | Promedio 0,99 % |
|--------------------|----------------------|--------------------|
| Recuperación | 93,25 % | 93,64 % |
| Margen de utilidad | Ganancia anual extra | |
| 0,25 | \$250,972 | \$414,901 |
| 0,5 | \$501,944 | \$829,803 |
| 0,75 | \$752,916 | \$1,244,704 |
| 1 | \$1,003,888 | \$1,659,605 |
| 1,25 | \$1,254,860 | \$2,074,506 |
| 1,5 | \$1,505,832 | \$2,489,408 |
| 1,75 | \$1,756,803 | \$2,904,309 |
| 2 | \$2,007,775 | \$3,319,210 |

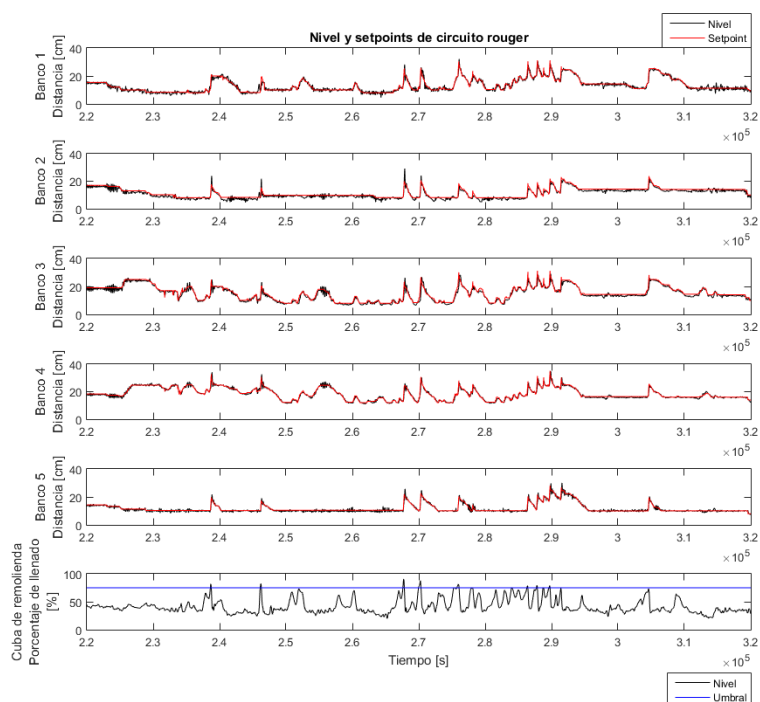


Figura 7.10: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo y reacción ante emergencias por rebalse de cuba.

aplicación de control implementada en el sistema experto de las celdas “*Rougher*”, es que el sistema sea capaz de evitar los rebalses en la cuba de remolienda. En la figura 7.10 se presenta el comportamiento del proceso bajo varias reglas de emergencia por rebalse de la cuba de remolienda, lo que se observa en el último gráfico cuando el nivel supera el umbral en azul, donde se puede observar que el sistema es capaz de manipular la referencia del nivel de los bancos adecuadamente, evitando que el nivel de la cuba supere por mucho tiempo el umbral indicado.

7.5. Resumen de beneficios en ambas líneas

De los resultados presentados en las secciones anteriores se concluye que la implementación de la estrategia de control predictivo entrega resultados favorables en el control del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*”, logrando una reducción en la varianza del nivel de algunos bancos en hasta un 66 % en la línea 1 y en hasta un 88 % en la línea 2.

Del análisis económico hecho, que considera la implementación de la aplicación de control programada en el sistema experto para manipular las referencias del nivel de pulpa de los bancos “*Rougher*”, en conjunto con la estrategia de control predictivo que busca mejorar control del nivel de pulpa de los bancos, mediante la compensación de las perturbaciones, se concluye que la implementación de la línea 1 entrega una mejora mínima asegurable de 0,41 % en la recuperación del proceso de flotación en la línea 1 y un 0,6 % en la línea 2. Por lo que la mejora de la implementación en ambas líneas se obtiene como mínimo una mejora 0,505 % entre ambas líneas en la flotación, esto se traduce en un beneficio para la compañía de 1,685,973 libras de cobre vendible. Luego conociendo el margen de utilidad de la compañía se puede obtener el beneficio económico de la implementación. Considerando el margen de utilidad de Diciembre del 2015 de 0,5[\$USD/libra] (margen muy bajo para el común del tiempo), se obtiene un beneficio de 842,986[\$USD], en el peor de los casos.

8. Conclusiones

8.1. Conclusiones del trabajo

Los resultados demuestran que es posible implementar una estrategia de control predictivo para controlar adecuadamente el nivel de pulpa en los bancos del circuito “*Rougher*” en un proceso de flotación. La estrategia de control es probada en dos circuitos de flotación de distintas características (volumen y celdas de distinta forma) de las dos líneas de producción de la compañía minera Candelaria y en ambos casos se logra reducir la variabilidad del nivel en los bancos “*Rougher*” y mejorar el seguimiento, mediante la adecuada compensación de perturbaciones. Éste resultado es aprovechado por otro sistema de control que lleva el circuito “*Rougher*” a un punto de operación óptimo, permitiéndole a la compañía producir al menos 1.685.973 libras de cobre vendible extras al año.

Para encontrar el modelo e implementar la estrategia de control predictivo se utiliza el “*toolbox*” de identificación de sistemas de MATLAB y las herramientas del sistema experto KSX. Por lo tanto es posible cumplir con la principal limitante del trabajo que consiste en solo utilizar herramientas existentes dentro de la compañía, ya que todos los softwares presentados anteriormente están disponibles en minera Candelaria.

Una parte importante de la estrategia de control predictivo es el filtro de Kalman que le da más robustez al control ante el ruido de medición que se encuentra presente dentro del proceso y en cierta medida a los errores de modelado. Además se utiliza un algoritmo genético para resolver el problema de optimización, lo que le permite a la estrategia de control considerar restricciones, mejorando la estrategia de control.

La identificación del sistema se realiza utilizando una señal PRBS con un tiempo mínimo de cambio de 20 [s] en la línea 1 y una señal GBN la cual es diseñada de acuerdo al procedimiento presentado en el capítulo 4 en la línea 2. Con estas señales se obtienen modelos adecuados en ambas líneas, pero al comparar los resultados de la estrategia de

control predictivo se puede observar que hay un mejor control en la línea 2 (mayor reducción de varianza), esto se le atribuye a que existe un mejor modelo en dicha línea. Lo que se debe en parte a las consideraciones de diseño hechas a la hora de hacer el experimento y en parte a que en la línea 1 algunos actuadores (banco 1 y banco 4) son reemplazados luego de haber realizado el proceso de identificación.

De lo anterior también se concluye que la estrategia de control predictivo diseñada es lo suficientemente robusta como para controlar los bancos, manteniendo un buen desempeño a pesar de haber diferencias entre el modelo y el sistema.

Dentro de la etapa de diseño de la estrategia de control predictivo se encuentran varios aspectos prácticos, que de no considerarse pueden hacer que la utilización de esta estrategia se reduzca considerablemente, hasta el punto de volverse inutilizable. Algunos de estos aspectos son la robustez ante ruido de medición, que el nivel de cada uno de los bancos debe poder controlarse de manera independiente y sobre todo que el desempeño de la estrategia de control se degrada notablemente al trabajar con un sistema que se somete a perturbaciones no medibles en donde no se puede hacer una suposición de la forma de la perturbación.

Una dificultad al implementar la estrategia de control presentada se encuentra en la programación, que requiere de gran atención, ya que muchas de las ecuaciones que hay que implementar corresponde a ecuaciones matriciales (filtro de Kalman, modelo en representación de estados), y el sistema experto no cuenta con herramientas que permitan trabajar con matrices, por lo que es necesario programar las ecuaciones matriciales elemento por elemento, lo que requiere de un trabajo minucioso.

Otro aspecto a considerar es el algoritmo de optimización utilizado, a pesar de ser un algoritmo que requiere que las variables de entrada se cuantifiquen y que puede no entregar la solución exacta al problema de optimización, en la práctica entrega soluciones suficientemente buenas para y resolver el problema de optimización y controlar adecuadamente el sistema. Una de las debilidades de los algoritmos genéticos es que su tiempo de cálculo puede llegar a ser considerable si no se acota el número de variables de entrada del algoritmo y/o si no se ajustan los parámetros adecuadamente. Esto en la práctica se traduce en acotar el horizonte de control de la estrategia a un valor pequeño (2 muestras

en el trabajo) y formular el problema de optimización de manera que el espacio de búsqueda del problema sea pequeño, es decir que el rango de las variables sea pequeño y el espacio entre niveles de cuantificación lo más grande posible sin sacrificar precisión (lo que depende de la respuesta de los actuadores).

Finalmente, se remarca que el trabajo logra crear una estrategia de control predictivo que permite controlar los bancos de flotación “*Rougher*” del proceso de flotación de minera Candelaria, además se comprueba que con las herramientas disponibles se puede generar una estrategia de control predictivo robusta ante el ruido de medición y errores de modelado, que se puede extender fácilmente al control de otros procesos.

Se considera que el aporte del trabajo consiste en demostrar que se puede utilizar un modelo lineal, un filtro de Kalman y una herramienta de optimización basada en algoritmos genéticos para implementar una estrategia de control predictivo sujeto a restricciones, que se desconoce si ha sido usado en otras aplicaciones. Además se presenta la implementación del trabajo sobre un sistema real y se describe la forma en que se lidia con los problemas que aparecen en el proceso debido a las fluctuantes condiciones de operación.

8.2. Extensiones del trabajo

Los algoritmos genéticos son una herramienta bastante robusta, que permite resolver problemas de optimización que considera funciones objetivos que no son convexas. Para una estrategia de control predictivo se traduce en que no es necesario definir modelos lineales y/o que se utilicen funciones objetivos con una forma particular. Por lo que existen al menos dos trabajos que se pueden realizar con respecto a la utilización de algoritmos genéticos:

- Utilizar un modelo no-lineal: para considerar un rango de operación más amplio y agregar precisión al modelo, además de incluir efectos como la histéresis de los actuadores u otros. Se recomienda realizar una comparación entre un modelo basado en principios fundamentales, uno basado en redes neuronales y uno basado en modelos difusos, y realizar comparaciones del tiempo de cálculo de los algoritmos genéticos y la precisión de los modelos en las distintas estrategias de control

predictivo.

- Utilizar distintas funciones objetivos: En el esquema de control propuesto se utiliza una función objetivo cuadrática, pero también se pueden utilizar funciones lineales o con otras formas, lo que cambia la velocidad de convergencia de la solución, como es presentado en [29]. El análisis presentado en [29] considera un modelo SISO, lo que se puede extender a un sistema MIMO, realizando un análisis más detallado de cómo afecta el uso de otras funciones objetivo a la respuesta del sistema ante cambios en la referencia de un banco y ante cambios de más de una referencia al mismo tiempo, poniendo énfasis en si hay oscilaciones, bajo qué condiciones el nivel de cada uno de los 5 bancos llega a su estado estacionario más rápido, con cuál función objetivo se compensan mejor las perturbaciones, etcétera. Además se debe realizar un análisis de robustez de la estrategia para distintas funciones objetivo.

En otro aspecto, el control predictivo tiene varias ventajas, como que permite definir restricciones, que se puede utilizar en sistemas multivariables y que tiene un buen desempeño en sistemas de dinámicas lentas y que presentan retardos, lo que es común en los procesos presentes en la minería. Se recomienda utilizar la estrategia diseñada para generar un sistema de control predictivo que manipule las referencias y/o actuaciones de los lazos de control de un proceso con el fin de llevarlo a distintos puntos de operación, logrando estabilizar el proceso y mantener las señales del proceso dentro de su rango de operación (generalmente impuesto por criterios de seguridad o físicos).

Algunos de los procesos en donde se puede implementar una estrategia de control de este tipo son:

- Molienda convencional.
- Espesadores de relaves.
- Molienda SAG.
- Velocidad de “*feeders*” en chancado primario.

Todos los procesos anteriores son sistemas multivariables, en donde se deben mantener algunas variables cerca de una referencia; la cual puede ser cambiada dependiendo de las

condiciones de operación del proceso. Además en estos procesos tanto las salidas como algunas otras variables que dependen de las entradas deben mantenerse dentro de un rango o no superar un límite para evitar condiciones peligrosas para el proceso (enbaque en los espesadores, ruptura de correa en el chancado primario, etc.). Una estrategia de control predictivo puede servir para llevar el sistema a un punto de operación adecuado considerando las condiciones de operación, lo que luego se traduce en beneficios económicos.

Bibliografía

- [1] D. A. Silva and L. A. Tapia, “Experiences and lessons with advanced control systems for the sag mill control in minera los pelambres,” in *Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, vol. 1, pp. 25–30, 2009.
- [2] M. D. Adams, *Advances in gold ore processing*, vol. 15. Elsevier, 2005.
- [3] D. Hulbert, “Multivariable control of pulp levels in flotation circuits,” Mintek, 1995.
- [4] L. Ljung, *System Identification: Theory for the user*. Prentice-Hall information and system sciences series, Prentice Hall PTR, 1999.
- [5] Y. Zhu, *Multivariable system identification for process control*. Elsevier, 2001.
- [6] S. M. Vieira, J. M. C. Sousa, and F. O. Duraó, “Real-time fuzzy predictive control of a column flotation process,” in *2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pp. 1–6, July 2007.
- [7] A. Riquelme, A. Desbiens, R. del Villar, and M. Maldonado, “Predictive control of the bubble size distribution in a two-phase pilot flotation column,” *Minerals Engineering*, vol. 89, pp. 71 – 76, 2016.
- [8] M. Maldonado, A. Desbiens, and R. del Villar, “Potential use of model predictive control for optimizing the column flotation process,” *International Journal of Mineral Processing*, vol. 93, no. 1, pp. 26 – 33, 2009.
- [9] D. Calisaya, Poulin, A. Desbiens, R. d. Villar, and A. Riquelme, “Multivariable predictive control of a pilot flotation column,” in *2012 American Control Conference (ACC)*, pp. 4022–4027, June 2012.
- [10] J. Bouchard, A. Desbiens, and R. del Villar, “Recent advances in bias and froth depth control in flotation columns,” *Minerals Engineering*, vol. 18, no. 7, pp. 709 – 720, 2005.
- [11] S. Mohanty, “Artificial neural network based system identification and model predictive control of a flotation column,” *Journal of Process Control*, vol. 19, no. 6, pp. 991 – 999, 2009.
- [12] D. Hodouin, C. Bazin, E. Gagnon, and F. Flament, “Feedforward-feedback predictive control of a simulated flotation bank,” *Powder Technology*, vol. 108, no. 2-3, pp. 173 – 179, 2000.
- [13] M. Suichies, D. Leroux, C. Dechert, and A. Trusiak, “An implementation of generalized predictive control in a flotation plant,” *Control Engineering Practice*, vol. 8, no. 3, pp. 319 – 325, 2000.

- [14] R. Pérez-Correa, G. González, A. Casali, A. Cipriano, R. Barrera, and E. Zavala, "Dynamic modelling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits," *Minerals Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 333 – 346, 1998.
- [15] D. Rojas and A. Cipriano, "Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells," *Dyna*, vol. 78, no. 166, pp. 29–37, 2011.
- [16] A. Desbiens, D. Hodouin, and M. Mailloux, "Nonlinear predictive control of a rougher flotation unit using local models," in *Proceedings of the IFAC-MMM Automation Symposium, Pergamon, Köln, Germany*, pp. 297–302, 1998.
- [17] M. Essahafi, "Model predictive control (mpc) applied to coupled tank liquid level system," *Proceedings of CoRR*, 2014. arXiv:1404.1498.
- [18] A. A. Aldair, "Hardware implementation of the neural network predictive controller for coupled tank system," *American Journal of Electrical and Electronic Engineering*, vol. 2, no. 2, pp. 40–47, 2014.
- [19] M. Petrov, A. Taneva, A. Ichtev, and S. Ahmed, *Fuzzy-neural model predictive control of multivariable processes*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [20] C. Joseph, V. George, N. Narayana, and T. Saranya, "Design of hybrid model predictive controller for a hybrid three tank system," *International Journal of Control Theory and Applications*, vol. 8, no. 3, pp. 1235–1242, 2015.
- [21] E. P. Gatzke, E. S. Meadows, C. Wang, and F. J. Doyle, "Model based control of a four-tank system," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 24, no. 2, pp. 1503–1509, 2000.
- [22] D. Di Ruscio, "Model Predictive Control with Integral Action: A simple MPC algorithm," *Modeling, Identification and Control*, vol. 34, no. 3, pp. 119–129, 2013.
- [23] B. Stenlund and A. Medvedev, "Level control of cascade coupled flotation tanks," *Control engineering practice*, vol. 10, no. 4, pp. 443–448, 2002.
- [24] P. Kämpjärvi and S.-L. Jämsä-Jounela, "Level control strategies for flotation cells," *Minerals Engineering*, vol. 16, no. 11, pp. 1061–1068, 2003.
- [25] D. Sbarbaro and R. Ortega, "Averaging level control of multiple tanks: A passivity based approach," in *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pp. 7384–7389, IEEE, 2005.
- [26] G. Smith, L. Jordaan, A. Singh, V. Vandayar, V. Smith, B. Muller, and D. Hulbert, "Innovative process control technology for milling and flotation circuit operations," *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 104, pp. 353–365, 2004.

- [27] A. Singh, J. Louw, and D. Hulbert, "Flotation stabilization and optimization," *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 103, no. 9, pp. 581–588, 2003.
- [28] E. Putz and A. Cipriano, "Hybrid model predictive control for flotation plants," *Minerals Engineering*, vol. 70, pp. 26 – 35, 2015.
- [29] J. S. S. Miguel Martínez and X. Blasco, "Generalized predictive control using genetic algorithms (gagpc)," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 11, no. 3, pp. 355 – 377, 1998.
- [30] C. Troncoso, "Aplicación de las herramientas de un sistema experto en el control de un proceso minero," memoria para optar al título de ingeniero civil electrónico, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, 2012. 106 h.
- [31] D. E. Goldberg, *Genetic algorithms in search optimization and machine learning*, vol. 412. Addison-wesley Reading Menlo Park, 1989.
- [32] R. L. Haupt and S. E. Haupt, *Practical genetic algorithms*. John Wiley & Sons, 2004.
- [33] T. Soderstrom and P. Stoica, "System identification," *Prencite Hall Intemational*, 1989.
- [34] H. J. Tulleken, "Generalized binary noise test-signal concept for improved identification-experiment design," *Automatica*, vol. 26, no. 1, pp. 37–49, 1990.
- [35] E. F. Camacho and C. B. Alba, *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] J. A. Rossiter, *Model-based predictive control: a practical approach*. CRC press, 2013.
- [37] J. K. Huusom, N. K. Poulsen, S. B. Jorgensen, and J. B. Jorgensen, "Tuning of methods for offset free mpc based on arx model representations," in *American Control Conference (ACC), 2010*, pp. 2355–2360, IEEE, 2010.
- [38] P. O. Scokaert and J. B. Rawlings, "Constrained linear quadratic regulation," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 8, pp. 1163–1169, 1998.
- [39] C. A. C. Coello and A. Carlos, "A survey of constraint handling techniques used with evolutionary algorithms," *Lania-RI-99-04, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada*, 1999.
- [40] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control system design*, vol. 240. Prentice Hall New Jersey, 2001.
- [41] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.

- [42] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. Tuffs, “Generalized predictive control - part i. the basic algorithm,” *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 137–148, 1987.
- [43] J. V. Salcedo, M. Martínez, J. Sanchis, and X. Blasco, “Design of gpc’s in state space,” *Automatika*, vol. 42, pp. 3–4, 2002.