



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO
SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA



Equivalencia entre Problemas de Programación Lineal y Cierta Clase de Problemas de Programación Entera

Tesis de Grado presentada por
Rodrigo Graves Rodríguez

como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico
y al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Director de Tesis
Juan C. Agüero V., Ph.D.

Codirector de Tesis
Angel Cedeño N., Ph.D.

Valparaíso, 2026.



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☒ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Equivalencia entre Problemas de Programación Lineal y Cierta Clase de Problemas de Programación Entera

Nombre del candidato(a): Rodrigo Graves Rodríguez

Carrera / Grado: Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica e Ingeniería Civil Electrónica

Campus: Casa Central

Departamento: Electrónica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Jon C. Agüero, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha:

30/06/2026

Firma:

[Firma]

Estudiante o Candidato(a):

Fecha:

30/06/2026

Firma:

[Firma]

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

Equivalencia entre Problemas de Programación Lineal y Cierta Clase de Problemas de Programación Entera.

AUTOR:

Rodrigo Graves Rodríguez

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Director de Tesis

Juan C. Agüero V., Ph.D.

Examinador Interno

Francisco J. Vargas P., Ph.D.

Examinador Externo

Rodrigo J. Carvajal G., Ph.D.

Valparaíso, 2026.

La preparación reduce el espacio del azar.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer, en primer lugar, a mi familia, por el apoyo y la motivación constante a lo largo de todo este proceso. Gracias por escucharme siempre y por confiar en mí y en mis decisiones.

A mi profesor guía, Juan C. Agüero, agradezco su orientación, disposición y la confianza que me ha brindado durante el desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradezco al profesor Ángel Cedeño por su importante colaboración y valiosos aportes.

Extiendo también mi reconocimiento a los profesores que tuve a lo largo de mi formación universitaria, en particular a Milan Derpich (Q.E.P.D.), Gonzalo Carrasco, Juan Yuz y Matías Zañartu, quienes contribuyeron significativamente a mi formación profesional, académica y, de alguna forma, personal, mostrándome como enfrentar la vida y los desafíos con pasión. Cada curso y cada instancia de aprendizaje fueron construyendo las herramientas que hoy me permiten abordar problemas de mayor complejidad.

A mis compañeros y amigos, gracias por el apoyo, las conversaciones técnicas y los momentos de distensión necesarios para mantener el equilibrio durante estos años. Compartir este proceso hizo el camino significativo, más allá de lo académico.

A la Universidad Técnica Federico Santa María por brindar el entorno académico que permitió el desarrollo de esta investigación y por la oportunidad de completar tanto el título profesional como el grado de magíster en un mismo proceso formativo.

Por último agradecer al Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica ANID AC3E CIA250006, al proyecto Fondecyt ANID 1261290 del profesor Juan C. Agüero, al proyecto Fondecyt ANID 3240181 del profesor Ángel Cedeño y al Proyecto Interno USM 2025 PI-LIR.25_12.

Esta tesis representa el cierre de una etapa importante en mi vida y, al mismo tiempo, el inicio de nuevos desafíos personales, profesionales y académicos.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
ÍNDICE DE FIGURAS	VI
RESUMEN	VII
ABSTRACT	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivo y marco de trabajo	2
1.2.1. Marco de Trabajo	3
1.3. Contribución de la Tesis	3
1.4. Publicaciones	3
1.5. Organización de la Tesis	4
2. PRELIMINARES	5
2.1. Introducción	5
2.2. Programación Matemática y Modelos de Optimización	5
2.2.1. Programación Lineal	6
2.2.2. Programación Entera Lineal Mixta	10
2.3. MPC	14
2.3.1. RHC	14
2.3.2. MPC en sistemas lineales	14
2.4. Teorema de Adición de Variables de Holgura, Versión Minimización	16
2.4.1. Aplicación del Teorema de Adición de Variables de Holgura	18
2.5. Teorema de Adición de Variables de Holgura, Versión Maximización	20
	III

2.6. Teorema de equivalencia de hipógrafo de una función lineal por tramos cóncava	23
3. EQUIVALENCIA ENTRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN ENTERA Y PROGRAMACIÓN LINEAL	25
3.1. Introducción	25
3.2. Problema de Interés	26
3.3. Teorema considerando problema de interés en Escenario 1	28
3.3.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial	30
3.4. Teorema considerando problema de interés en Escenario 2	32
3.4.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial	35
3.5. Teorema considerando problema de interés en Escenario 3	38
3.5.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial	42
4. APLICACIÓN: ESQUEMA MPC EN PLANTAS FOTOVOLTAICAS CON SISTEMA DE ALMACENAMIENTO ENERGÉTICO	45
4.1. Introducción	45
4.2. Esquema MPC	46
4.3. Aplicación de los Teoremas Propuestos a esquemas MPC	48
4.3.1. Escenario 1: Batería ideal	48
4.3.2. Escenario 2: Batería no ideal	50
4.3.3. Escenario 3: Batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga	54
4.4. Resultados de Simulación	55
4.4.1. Escenario 1: Batería ideal	56
4.4.2. Escenario 2: Batería no ideal.	61
4.4.3. Escenario 3: Batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga	65
4.4.4. Comparación Global de tiempos de ejecución de Escenarios	69
5. CONCLUSIONES	71
5.1. Conclusiones	71
5.2. Trabajo futuro	72
A. FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 1	73
B. FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 2	78

C. FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 3	84
D. REESCRITURA DEL PROBLEMA DE INTERÉS EN EL ESCENARIO 3 COMO MILP	90
REFERENCIAS	96

Índice de figuras

4.1. Esquema MPC escenario 1, batería ideal.	57
4.2. Inputs del MPC en el Escenario 1. (a) Costo por unidad de energía inyectada a la red. (b) Potencia comprometida a inyectar a la red $P_{\text{ref}}(t)$. (c) Potencia generada por sistema de paneles fotovoltaicos.	59
4.3. Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 1, batería ideal. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.	60
4.4. Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-LP, MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 1 (batería ideal).	61
4.5. Esquema MPC escenario 2, batería no ideal.	62
4.6. Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 2, batería no ideal. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.	64
4.7. Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 2 (batería no ideal).	65
4.8. Esquema MPC escenario 3, batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga.	66
4.9. Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 3, batería no ideal y penalización a carga y descarga. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.	68
4.10. Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 3 (batería no ideal).	69

RESUMEN

En esta tesis se estudia la equivalencia entre cierta clase de problemas que suelen ser formulados como problemas de Programación Entera Lineal Mixta (MILP) y problemas de Programación Lineal (LP)

Se formulan y demuestran tres teoremas que establecen condiciones bajo las cuales una clase específica de problemas de optimización, que incorporan variables lógicas dependientes de variables continuas, puede reformularse como un problema LP. El desarrollo teórico se apoya en el Teorema de Adición de Variables de Holgura y en el Teorema de equivalencia del hipógrafo de funciones lineales por tramos cóncavas.

Los resultados obtenidos se aplican a esquema de Control Predictivo Basado en Modelos (MPC) para la gestión de carga y descarga de baterías en sistemas fotovoltaicos con almacenamiento (PV+BESS), considerando tres escenarios de interés: batería ideal, batería no ideal y batería no ideal con penalización de ciclos de carga y descarga. Las formulaciones propuestas se validan mediante simulaciones numéricas implementadas en MATLAB utilizando CPLEX.

Finalmente, se comparan los tiempos de ejecución entre las formulaciones MILP y LP equivalentes, mostrando que, bajo las condiciones establecidas, es posible reducir el tiempo promedio de cómputo. Estos resultados son particularmente relevantes para aplicaciones MPC en tiempo real, donde la complejidad computacional impacta directamente en la factibilidad de implementación.

ABSTRACT

This thesis studies the equivalence between a certain class of optimization problems that are commonly formulated as Mixed-Integer Linear Programming (MILP) problems and Linear Programming (LP) problems.

Three theorems are formulated and formally proven, establishing conditions under which a specific class of optimization problems involving logical variables dependent on continuous decision variables can be reformulated as Linear Programming problems. The theoretical development relies on the Slack Variable Addition Theorem and on the hypograph equivalence theorem for piecewise linear concave functions.

The obtained results are applied to a Model Predictive Control (MPC) scheme for battery charge and discharge management in photovoltaic systems with energy storage (PV+BESS), considering three relevant scenarios: ideal battery, non-ideal battery, and non-ideal battery with charge/discharge cycle penalization. The proposed formulations are validated through numerical simulations implemented in MATLAB using CPLEX.

Finally, computational times are compared between the equivalent MILP and LP formulations, showing that, under the established conditions, it is possible to reduce the average computation time. These findings are particularly relevant for real-time MPC applications, where computational complexity directly impacts implementation feasibility.

INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta el contexto general del trabajo desarrollado en esta tesis, estableciendo las motivaciones, los objetivos y el marco de trabajo adoptado. En primer lugar, se expone la motivación del estudio, situando el problema dentro del ámbito de la programación matemática aplicada a esquemas de Control Predictivo Basado en Modelos y revisando brevemente los enfoques existentes en la literatura.

Posteriormente, se formulan el objetivo general y los objetivos específicos que guían la investigación, junto con el marco de trabajo empleado para el desarrollo teórico y la validación computacional. A continuación, se describen las principales contribuciones del trabajo y las publicaciones asociadas. Finalmente, se presenta la organización del resto del documento.

1.1. Motivación

El problema de optimización asociado a la gestión de carga y descarga de baterías en sistemas fotovoltaicos con almacenamiento (PV+BESS) ha sido abordado en la literatura mediante distintas formulaciones matemáticas. En [1] se propuso una formulación basada en Programación Lineal (LP) que permitía resolver el problema de manera eficiente bajo supuestos ideales de operación. Dicha formulación presentaba una estructura lineal explícita que facilitaba su implementación en esquemas de Control Predictivo Basado en Modelos (MPC).

Sin embargo, la estructura propuesta en [1] dependía fuertemente de hipótesis asociadas a una batería ideal, lo que dificultaba su extensión a modelos más generales. En particular, al considerar fenómenos no ideales o penalizaciones adicionales en la dinámica de carga y descarga, la formulación lineal original no resultaba directamente aplicable.

Posteriormente, en [2] se presentó una reformulación del problema como un modelo de Programación Entera Lineal Mixta (MILP), incorporando variables binarias que permitían modelar de manera más flexible comportamientos no ideales

y restricciones adicionales. Esta reformulación amplió la versatilidad del modelo y permitió validar formalmente la coherencia de la formulación lineal original bajo supuestos específicos. No obstante, la introducción de variables binarias conlleva, en general, un aumento significativo en la complejidad computacional.

En efecto, los problemas MILP son, en general, NP-hard, mientras que los problemas LP pueden resolverse mediante algoritmos de complejidad polinomial. Desde una perspectiva estructural, resulta entonces de interés determinar si la complejidad combinatoria introducida por ciertas variables lógicas es esencial al problema o si, bajo condiciones específicas, puede eliminarse mediante una reformulación lineal equivalente.

Esta cuestión adquiere especial relevancia en el contexto de MPC, donde el problema de optimización debe resolverse repetidamente en cada instante de muestreo. En tales escenarios, la complejidad computacional impacta directamente en la factibilidad de implementación en tiempo real y en los requerimientos de hardware asociados. Por ello, identificar clases de problemas que, aun siendo modelados habitualmente como MILP, admitan una reformulación como problemas LP constituye un aporte tanto teórico como práctico.

En este contexto, la presente tesis se orienta a caracterizar formalmente las condiciones bajo las cuales una clase específica de problemas de programación matemática con variables lógicas dependientes de variables de decisión continuas admite una reformulación exacta como un problema de Programación Lineal. El principal desafío asociado a este tipo de problemas consiste precisamente en determinar cuándo dicha equivalencia existe y cómo puede demostrarse formalmente.

1.2. Objetivo y marco de trabajo

El objetivo principal de esta tesis es determinar condiciones bajo las cuales una clase de problemas de programación matemática con variables lógicas dependientes de variables de decisión continuas admite una reformulación como un problema de LP.

Los objetivos específicos son:

1. Demostrar que el problema de programación matemática considerado, en cada uno de los tres escenarios analizados, puede reformularse como un problema de LP.
2. Validar la equivalencia entre las formulaciones mediante simulaciones en un caso de estudio basado en control MPC.
3. Comparar el desempeño computacional en términos de tiempo de cómputo utilizando solvers adecuados para formulaciones MILP y LP.

1.2.1. Marco de Trabajo

El marco de trabajo es el siguiente:

1. El desarrollo teórico se apoya en herramientas de programación matemática tales como el Teorema de Adición de Variables de Holgura en su versión de maximización y el Teorema del Hipógrafo para funciones lineales por tramos, los cuales permiten construir la reformulación lineal.
2. La validación computacional de la equivalencia entre las formulaciones se realiza mediante implementación en MATLAB utilizando el solver CPLEX para formulaciones MILP y LP
3. Para la comparación de tiempos, se usan funciones nativas de MATLAB, tomando estadísticas de un número definido de iteraciones del esquema MPC

1.3. Contribución de la Tesis

La principal contribución de esta tesis consiste en demostrar la equivalencia entre una clase de problemas de programación matemática que incorporan variables lógicas dependientes de variables de decisión continuas que habitualmente se reformulan como MILP y un problema LP.

1.4. Publicaciones

Las publicaciones relacionadas a este trabajo de tesis son las siguientes.

Publicaciones asociadas a la Tesis

1. R. Graves, A. L. Cedeño, C. Silva and J. C. Agüero, "On the Equivalence Between Mixed-Integer Linear and Linear Programming Problems in MPC for Photovoltaic Plants with Energy Storage," *2024 IEEE ANDESCON, Cuzco, Perú*, 2024, pp. 1–6.
2. A. L. Cedeño, R. Graves, C. Silva, G. Carvajal and J. C. Agüero, "Linear Programming Reformulation of Logical Constraints in Model Predictive Control for Renewable Energy and Storage Systems," 2026, enviado para publicación en revista.

1.5. Organización de la Tesis

El contenido de esta tesis se organiza de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos matemáticos que sustentan el trabajo desarrollado, incluyendo conceptos de programación matemática, problemas LP y MILP, el esquema MPC y los resultados teóricos que servirán de base para las demostraciones posteriores.
- En el Capítulo 3 se introduce el problema de interés en sus tres escenarios considerados. Para cada uno de estos escenarios se establece y demuestra un teorema de equivalencia, los cuales constituyen el principal aporte de esta tesis. Además, se presenta la formulación matricial asociada a cada reformulación LP equivalente.
- En el Capítulo 4 se presenta el esquema MPC para el sistema PV+BESS conectado a la red eléctrica, basado en [1]. Se incorpora además la extensión del modelo para considerar batería no ideal (Escenario 2, propuesto en [2] y formulado como problema MILP) y batería no ideal con penalización de ciclos de carga y descarga (Escenario 3). A partir de estos modelos se aplican los tres teoremas propuestos para obtener formulaciones LP equivalentes. Finalmente, se comparan los distintos escenarios mediante simulaciones utilizando tanto formulaciones MILP como LP.
- En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos, junto con líneas de trabajo futuro para continuar la investigación desarrollada.

PRELIMINARES

2.1. Introducción

Este capítulo desarrolla los fundamentos matemáticos que sustentan el trabajo realizado en esta tesis. En particular, se introducen las herramientas de programación matemática, los conceptos de Control Predictivo basado en Modelos y los resultados teóricos de reformulación que permiten establecer la equivalencia entre cierta clase de problemas MILP y problemas LP, eje central del presente trabajo.

En primer lugar, se presentan las definiciones generales de modelos de Programación Lineal (LP) y Programación Entera Lineal Mixta (MILP), junto con sus formulaciones matriciales. Estas herramientas resultan centrales en este trabajo, ya que la hipótesis principal consiste en demostrar la equivalencia entre cierta clase de problemas MILP y problemas LP.

Posteriormente, se introduce el concepto de Control Predictivo Basado en Modelos (MPC), describiendo su formulación general, el mecanismo de horizonte en retroceso y su particularización para sistemas lineales en tiempo discreto. El caso de estudio que motivó este análisis corresponde a un esquema MPC aplicado a la gestión de carga y descarga de baterías en un sistema fotovoltaico con almacenamiento (BESS) e inyección de energía a la red eléctrica.

Finalmente, se presentan los resultados teóricos que serán utilizados en la demostración de equivalencia propuesta, en particular el teorema de adición de variables de holgura y el teorema de equivalencia del hipógrafo de funciones lineales por tramos cóncavas.

2.2. Programación Matemática y Modelos de Optimización

La **programación matemática** constituye uno de los pilares fundamentales de la investigación de operaciones y se orienta a la formulación y resolución de problemas de optimización asociados a la toma de decisiones en sistemas reales [3].

En este contexto, el objetivo principal consiste en representar, mediante un modelo matemático, los aspectos esenciales del problema estudiado.

Un **modelo de optimización** describe el problema a través de un conjunto de variables de decisión, una función objetivo que cuantifica el desempeño del sistema mediante alguna métrica de interés y un conjunto de restricciones que representan las limitaciones físicas, técnicas u operacionales del problema. La construcción de estos modelos implica un proceso de abstracción, en el cual se busca lograr un equilibrio entre fidelidad a la realidad y capacidad de ser resuelto computacionalmente.

Dependiendo de la naturaleza de las variables de decisión y de la estructura de las funciones que componen el modelo, es posible distinguir diferentes clases de problemas de optimización. En particular, cuando las funciones objetivo y las restricciones son lineales y las variables de decisión son continuas, el problema puede formularse como uno de programación lineal (LP). En cambio, cuando se incorporan variables enteras o binarias para representar decisiones discretas o lógicas, el modelo resultante corresponde a un problema de programación entera lineal mixta (MILP) [4].

2.2.1. Programación Lineal

Un problema de Programación Lineal (LP, del inglés *Linear Programming*) hace referencia a aquel problema de optimización (maximización o minimización) donde la función de costo es lineal, las variables de decisión pertenecen a $\mathbb{R}$ y está sujeto a satisfacer un set de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad [5], [6].

Definición Formal de Problemas LP:

A continuación se presenta una definición formal y general de un problema LP de maximización, basada en la presentada en [6], junto a su forma matricial:

Definición 2.2.1. Forma General de un Problema LP de Maximización

Considerando:

- $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ como las N variables de decisión a determinar.
- La función de costo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N c_j x_j,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ son los N coeficientes de costo.

- Las M restricciones de desigualdad

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j \leq b_i,$$

con $i = 1, 2, \dots, M$, donde a_{ij} son llamados coeficientes tecnológicos.

El problema LP general de maximización está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N c_j x_j, \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j \leq b_i; \quad \text{con } i = 1, \dots, M \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Definición 2.2.2. Forma General de un Problema LP de Maximización en Forma Matricial

Considerando el problema (2.2.1) puede ser escrito de forma matricial como:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ & \mathcal{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

donde:

- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ como el vector de variables de decisión.
- $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ como el vector de coeficientes de costo.
- $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_M]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ como el vector de cotas superiores de restricciones.
- La matriz de restricción está dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix}$$

A continuación se presentan algunas observaciones:

- Si bien se comentó que un problema LP considera restricciones de igualdad, cualquier restricción de igualdad lineal:

$$\sum_{j=1}^N \psi_j x_j = v_j$$

puede ser reescrita por 2 restricciones de desigualdad lineales del tipo

$$\sum_{j=1}^N \psi_j x_j \geq v_j$$

$$\sum_{j=1}^N \psi_j x_j \leq v_j$$

Por lo que considerar solo restricciones de desigualdad permite generalizar correctamente el problema.

- Se escogió considerar el problema de maximización en la generalización del problema por el problema de interés que se aborda en este trabajo.
- A diferencia de la forma estándar comúnmente presentada en la literatura (por ejemplo en [6]), no se impone explícitamente la restricción de no negatividad sobre las variables de decisión, ya que cualquier variable puede representarse como la diferencia de dos variables no negativas, lo que hace ambas formulaciones equivalentes.

Métodos de Resolución de Problemas LP y Complejidad Computacional

Dentro de los métodos de resolución de problemas de programación lineal (LP) se distinguen principalmente aquellos basados en el método simplex [7] y los métodos de punto interior (*interior point methods*) [8]. Ambos enfoques constituyen la base de los solvers comerciales modernos para programación lineal, los cuales suelen combinar distintas variantes de estos métodos según las características del problema [5].

Con respecto a la complejidad computacional de estos algoritmos, se destacan los siguientes aspectos:

- El método simplex no posee una cota polinomial garantizada en el peor caso. De hecho, existen ejemplos teóricos artificiales, como los problemas de Klee–Minty, para los cuales su tiempo de ejecución crece exponencialmente. No obstante, en aplicaciones prácticas el método simplex suele exhibir un desempeño muy eficiente y continúa siendo ampliamente utilizado en solvers comerciales [7].
- Los métodos de punto interior admiten una complejidad computacional polinomial demostrada, lo que establece formalmente que los problemas de programación lineal pertenecen a la clase de complejidad P [8].

El hecho de que los problemas LP pertenezcan a la clase P y que existan métodos de resolución con buen desempeño práctico hace que estas formulaciones sean de interés para su aplicación en esquemas MPC.

Importancia y Aplicaciones de Problemas LP

Múltiples modelos de optimización pueden formularse como problemas LP. Desde el desarrollo del método símplex por George Dantzig en 1947 como un algoritmo eficiente para la resolución de este tipo de problemas, estos modelos han sido ampliamente utilizados como herramienta de programación matemática en la toma de decisiones en diversos sectores industriales, tales como la banca, la educación, el sector forestal, el sector energético y el transporte de carga, entre otros [9].

Ejemplo Ilustrativo

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo con el objetivo de mostrar cómo un problema LP puede ser reescrito en forma matricial.

Considere el siguiente problema de optimización LP:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + 3 \leq x_2, \\ & x_1 + 2 \leq x_2, \\ & -x_1 + 4 \leq x_2 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son las variables de decisión.

Definiendo el vector de variables de decisión como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

- La función de costo puede escribirse de forma matricial como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \text{con} \quad \mathbf{c}^T = [2 \quad 1]$$

- Las restricciones pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq -3, \\ x_1 - x_2 &\leq -2, \\ -x_1 - x_2 &\leq -4 \end{aligned}$$

Con lo que pueden expresarse matricialmente como:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

De este modo, el problema LP puede escribirse finalmente en su forma matricial como:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{máx}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{sujeto a:} \quad \mathcal{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

2.2.2. Programación Entera Lineal Mixta

Un problema de Programación Entera Lineal Mixta (MILP, del inglés *Mixed Integer-Linear Programming*) hace referencia a aquel problema de optimización (maximización o minimización) donde la función de costo es lineal, un subconjunto de las variables de decisión están restringidos a $\mathbb{Z}$ y el resto a $\mathbb{R}$, y está sujeto a satisfacer un set de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad [10]

Definición Formal de Problemas MILP:

A continuación se presenta una definición formal y general de un problema MILP de maximización, basada en la presentada en [10], junto a su forma matricial:

Definición 2.2.3. Forma General de un Problema MILP de Maximización

Considerando:

- $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ y $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_N \in \mathbb{Z}$ como las N variables de decisión, con $0 < r < N$.
- La función de costo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N c_j x_j,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ son los N coeficientes de costo.

- Las M restricciones de desigualdad

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i,$$

con $i = 1, 2, \dots, M$, donde a_{ij} son llamados coeficientes tecnológicos.

El problema MILP general de maximización está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N c_j x_j, \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i; \quad & \text{con } i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Definición 2.2.4. Forma General de un Problema MILP de Maximización en Forma Matricial

Considerando el problema (2.2.5) puede ser escrito de forma matricial como:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

donde:

- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1} \times \mathbb{Z}^{(N-r) \times 1}$ como el vector de variables de decisión, con $0 < r < N$.
- $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ como el vector de coeficientes de costo.
- $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_M]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ como el vector de cotas superiores de restricciones.
- La matriz de restricción está dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix}$$

A continuación se presentan algunas observaciones:

- Al igual que en los problemas LP, basta considerar restricciones de desigualdad en el problemas general.
- Idéntico al problema LP, se considera el problema de maximización en la generalización del problema por el problema de interés que se aborda en este trabajo.
- A diferencia de la forma estándar comúnmente presentada en la literatura (por ejemplo en [10]), no se impone explícitamente la restricción de no negatividad sobre las variables de decisión, ya que cualquier variable puede representarse como la diferencia de dos variables no negativas, lo que hace ambas formulaciones equivalentes.

Métodos de Resolución de un Problema MILP y complejidad computacional

Dentro de los métodos de resolución de problemas MILP se distinguen principalmente los métodos de planos de corte (*cutting planes*), *branch and bound* y *branch and cut*. Entre ellos, los enfoques basados en *branch and bound* y *branch and cut* han mostrado un buen desempeño en la práctica y constituyen la base de la mayoría de los solvers comerciales modernos [3].

Sin embargo, estos algoritmos presentan complejidad computacional exponencial en el peor caso, lo cual es consistente con el hecho de que los problemas MILP son NP-hard en general [11]. Por esta razón, aunque estas técnicas resultan efectivas en muchas aplicaciones, su uso en esquemas MPC puede verse limitado por la falta de garantías de tiempo de cómputo acotado.

Esta observación motiva la búsqueda de reformulaciones exactas en programación lineal para ciertas clases de problemas que, si bien pueden expresarse inicialmente como MILP, no presentan la complejidad combinatoria asociada al caso general. En tales situaciones, la resolución mediante programación lineal permite aprovechar algoritmos con complejidad polinomial conocida, lo que resulta especialmente relevante en aplicaciones de esquemas MPC.

Importancia y Aplicaciones

Al igual que con los problemas LP, múltiples modelos de optimización pueden formularse como problemas MILP. Esto en conjunto a la existencia de solvers comerciales y *opensource* hacen este tipo de problemas de suma importancia. Entre algunas de las aplicaciones se puede nombrar medicina ([12], [13], [14]), procesos industriales y químicos ([15], [16]), transporte [17], control de microrredes ([18], [19]), sistemas tecnológicos sostenibles [20] y gestión energética en edificios inteligentes [21].

Ejemplo Ilustrativo: Reformulación de un Problema de Optimización con Regla Lógica como un Problema MILP

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo cuyo objetivo es mostrar cómo un problema de optimización que contiene una regla lógica puede ser reformulado como un problema de Programación Lineal Mixta (MILP), siguiendo la estrategia descrita en el Apéndice C de [2].

Considérese el siguiente problema de optimización con regla lógica:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & g(x) = \rho(x - x_0) \\ \text{sujeto a:} \quad & x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \\ & \rho = \begin{cases} a, & \text{si } x - x_0 \geq 0, \\ b, & \text{si } x - x_0 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable de decisión, $x_{\min}, x_{\max} \in \mathbb{R}$ con $x_{\max} > x_{\min}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un umbral que define la condición lógica.

En primer lugar, la condición lógica $x - x_0 \geq 0$ se asocia a una nueva variable binaria $\delta \in \{0, 1\}$, definida como:

$$x - x_0 \geq 0 \Leftrightarrow \delta = 1. \quad (2.2.8)$$

Dado que la variable x se encuentra acotada inferiormente por $x_{\min}$ y superiormente por $x_{\max}$, la proposición lógica (2.2.8) puede ser reescrita mediante las siguientes restricciones lineales:

$$x - x_0 \geq (x_{\min} - x_0)(1 - \delta), \quad (2.2.9)$$

$$x - x_0 + \epsilon \leq (x_{\max} - x_0 + \epsilon)\delta, \quad (2.2.10)$$

donde $\epsilon > 0$ es un escalar positivo pequeño que representa una tolerancia numérica, típicamente asociada a la precisión de la máquina.

Adicionalmente, se introduce una variable continua auxiliar $z \in \mathbb{R}$, definida como:

$$z = (x - x_0)\delta, \quad (2.2.11)$$

la cual puede ser representada mediante el siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$z \leq (x_{\max} - x_0)\delta, \quad (2.2.12)$$

$$z \geq (x_{\min} - x_0)\delta, \quad (2.2.13)$$

$$z \leq x - x_0 - (x_{\min} - x_0)(1 - \delta), \quad (2.2.14)$$

$$z \geq x - x_0 - (x_{\max} - x_0)(1 - \delta). \quad (2.2.15)$$

Luego según el Anexo C de [2] se obtiene el siguiente problema MILP equivalente:

$$\begin{aligned} \max_{x, \delta, z} \quad & g(x, \delta, z) = (a - b)z + b(x - x_0) \\ \text{sujeto a:} \quad & \delta \in \{0, 1\}, \\ & \text{restricciones (2.2.9) – (2.2.10),} \\ & \text{restricciones (2.2.12) – (2.2.15).} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

2.3. MPC

El Control Predictivo basado en Modelos (MPC, del inglés *Model Predictive Control*) es una técnica de control avanzada donde se calcula la acción de control actual resolviendo en cada instante de muestreo un problema de optimización, utilizando alguna herramienta de programación matemática [22].

El problema de optimización a resolver considera un horizonte de predicción finito de N muestras hacia adelante y una función de costo J que depende del estado inicial del sistema, de la dinámica del sistema y de la secuencia de actuaciones en el horizonte de predicción, además de las restricciones de la planta. Para su resolución se utiliza la estrategia de Control por Horizonte en Retroceso (RHC, del inglés *Receding Horizon Control*) [23], que se discute más adelante en esta sección.

Entre las principales ventajas del MPC se encuentran el manejo explícito de restricciones, la flexibilidad con respecto a la función de costo y su aplicabilidad a sistemas multivariados. No obstante, requiere resolver un problema de optimización en cada instante de muestreo y su efectividad depende de la calidad del modelo [22].

2.3.1. RHC

El MPC implementa un procedimiento iterativo conocido como RHC. Este mecanismo convierte la optimización repetida en una estrategia de control en lazo cerrado. [23]

El algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos [22]:

1. Medición o estimación del estado actual del sistema.
2. Resolución del problema de optimización que minimiza la función de costo sujeta a las restricciones dinámicas
3. Aplicación únicamente de la primera acción de control de la secuencia óptima
4. Desplazamiento del horizonte hacia el siguiente instante de muestreo.
5. Repetición del procedimiento.

2.3.2. MPC en sistemas lineales

Considere el sistema de tiempo discreto lineal e invariable en el tiempo en espacio de estados dado por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.3.1)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.3.2)$$

Donde:

- x_k corresponde al vector de estados en el instante k .
- u_k corresponde al vector de entradas en el instante k .
- y_k corresponde al vector de salidas en el instante k .
- A es la matriz de estado
- B es la matriz de entrada
- C es la matriz de salida

Luego, la construcción del esquema MPC requiere:

1. Obtener predicción de estados en un horizonte de predicción N desde instante actual.
2. Definir función de costo y establecer esquema MPC, junto a herramienta de programación matemática adecuada para la implementación.

Con respecto al primer punto, definiendo el vector de estados en el horizonte de predicción N a partir del instante k como $\vec{x}$, con x_k conocido, se tiene lo siguiente [22]:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & \dots & AB & B \end{bmatrix} \vec{u} \quad (2.3.3)$$

$$\mathcal{A}x_0 + \mathcal{O}\vec{u} \quad (2.3.4)$$

Con respecto al punto 2, se suelen usar funciones cuadráticas, lo que lleva a tener que utilizar solver de programación cuadrática (QP, del inglés *quadratic programming*) [22], sin embargo, para este trabajo, el foco serán funciones de costo lineales, teniendo que utilizar solver LP.

Cabe destacar que restricciones usuales tales como cotas en el vector de estado, vector de salida y vector de actuación pueden modelarse como restricciones lineales, siendo las herramientas de programación matemática antes mencionadas aún válidas.

En sistemas con espacio de estados con dinámica y/o ecuación de salida no lineal la obtención e implementación del esquema MPC se vuelve más compleja. Si bien los pasos son en teoría los mismos, puede llevar a requerir el uso de Herramientas de programación no lineal e incluso ser problemas no convexos, complicando encontrar el punto óptimo, simplemente encontrando un óptimo local [24].

2.4. Teorema de Adición de Variables de Holgura, Versión Minimización

En [25], sección II *Convex Optimization Models*, capítulo 8 *Convexity*, inciso 8.3.4.4 se presenta el teorema de adición de variables de holgura (*Addition of slack variables*). A continuación se presenta el teorema.

Teorema 2.4.1. *Se pueden obtener problemas equivalentes agregando variables de holgura al problema. Aquí se describe el caso típico que ocurre cuando la función objetivo corresponde a una suma de términos, como en el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} p^* &= \min_x \sum_{i=1}^r \varphi_i(x), \\ \text{sujeto a: } x &\in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Introduciendo las variables de holgura $\xi_i, i = 1, \dots, r$ se reformula el problema como:

$$\begin{aligned} q^* &= \min_{x, \xi} \sum_{i=1}^r \xi_i, \\ \text{sujeto a: } x &\in \mathcal{X} \\ \varphi_i(x) &\leq \xi_i, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Donde el nuevo problema tiene la variable original x y el vector de variables de holgura $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$

Estos problemas son equivalentes en el siguiente sentido:

1. Si x es factible para (2.4.1), entonces $\xi_i = \varphi_i(x), i = 1, \dots, r$ es factible para (2.4.2);
2. Si x es factible para (2.4.2), entonces x es factible para (2.4.1);
3. Si x^* es el óptimo para (2.4.1), entonces $x^*, \xi_i^* = \varphi_i(x^*), i = 1, \dots, r$ es el óptimo para (2.4.2);
4. Si x^*, ξ^* es el óptimo para (2.4.2) entonces x^* es el óptimo para (2.4.1).
5. $p^* = q^*$

Demostración. A continuación se muestra la demostración del teorema, con un desarrollo más detallado a lo que se muestra en [25]

- El punto 1 es inmediato de probar pues el conjunto al que pertenece x es el mismo en ambos problemas y cuando $\xi_i = \varphi_i(x)$ con $i = 1, \dots, r$ la inecuación agregada en (2.4.2) se cumple en igualdad.

- El punto 2 es claro que se cumple.
- El punto 3 se puede probar por contradicción, suponiendo x^* como solución óptima para el problema original (2.4.1) .

En primer lugar notar que por el punto 1 $x^*, \xi_i^* = \varphi_i(x^*)$ con $i = 1, \dots, r$ es una solución factible para (2.4.2). En caso de que este no sea el óptimo y considerando como óptimo el par factible y^*, τ^* se tendría:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \tau_i^* &< \sum_{i=1}^r \xi_i^* \\ \sum_{i=1}^r \tau_i^* &< \sum_{i=1}^r \varphi_i(x^*) \quad (\text{usando } \xi_i^* = \varphi_i(x^*)) \end{aligned}$$

Luego evaluando la restricción de holgura en el par factible y^*, τ^* se tiene que $\varphi_i(y^*) \leq \tau_i^*$ con $i = 1, \dots, r$ y por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^r \varphi_i(y^*) \leq \sum_{i=1}^r \tau_i^* < \sum_{i=1}^r \varphi_i(x^*)$$

Donde $\sum_{i=1}^r \varphi_i(y^*)$ corresponde a la función objetivo del problema original (2.4.1) evaluada en el punto y^* , lo cual contradice el supuesto inicial de que x^* es la solución óptima del problema original (2.4.1)

- El punto 4 se puede probar de forma similar, suponiendo $x^*, \xi_i^* = \varphi_i(x^*)$ como solución óptima del problema equivalente (2.4.2) .

En primer lugar notar que por el punto 2 x^* es una solución factible para (2.4.1). En caso de que este no sea el óptimo y considerando como óptimo y^* y $\tau_i^* = \varphi_i(y^*)$ con $i = 1, \dots, r$ se tendría:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \varphi_i(y^*) &< \sum_{i=1}^r \varphi_i(x^*) \\ \sum_{i=1}^r \tau_i^* &< \sum_{i=1}^r \xi_i^* \quad (\text{usando } \xi_i^* = \varphi_i(x^*); \tau_i^* = \varphi_i(y^*)) \end{aligned}$$

Donde $\sum_{i=1}^r \tau_i^*$ corresponde a la función objetivo del problema equivalente (2.4.2) evaluada en el par y^*, τ_i^* , lo cual contradice el supuesto inicial de que $x^*, \xi_i^* = \varphi_i(x^*)$ es la solución óptima de dicho problema.

- El punto 5 es inmediato de probar:

Considerando como soluciones óptimas para el problema (2.4.1) y (2.4.2) a x^* y $x^*, \xi_i(x^*)$ respectivamente se tiene que evaluando ambas funciones objetivos:

$$p^* = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x^*)$$

$$q^* = \sum_{i=1}^r \xi_i^* = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x^*)$$

Por lo que es claro que $p^* = q^*$.

□

A continuación se muestra una aplicación del Teorema de Adición de Variables de Holgura para la obtención de problemas de optimización equivalentes. En particular, se demuestra formalmente la equivalencia asociada a la descomposición positiva/negativa, técnica ampliamente utilizada para reformular problemas de optimización con términos de valor absoluto en la función objetivo ([5], [26]).

2.4.1. Aplicación del Teorema de Adición de Variables de Holgura

Considere el problema de optimización dado por

$$p^* = \min_x \sum_{j=1}^N c_j |x_j|, \quad (2.4.3)$$

donde $x, c \in \mathbb{R}^N$ y $c_j \geq 0$, con $j = 1, \dots, N$.

Usando la descomposición positiva/negativa dada por:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$|x_j| = x_j^+ + x_j^-$$

El problema equivalente puede escribirse como

$$p^* = \min_{x^+, x^-} \sum_{j=1}^N c_j (x_j^+ + x_j^-) \quad (2.4.4)$$

sujeto a:

$$x_j^+ \geq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.5)$$

$$x_j^- \geq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.6)$$

Nótese que esta reformulación permite eliminar explícitamente el operador valor absoluto de la función objetivo, obteniendo un problema lineal equivalente.

La técnica utilizada ha sido usada por [5] y [26], donde generalmente se presenta como una reformulación estándar sin una demostración explícita basada en teoría de optimización.

A continuación se muestra como ese resultado puede demostrarse usando el Teorema de Adición de Variables de Holgura (versión minimización).

Demostración. Aplicando el teorema 2.4.1, se introduce el vector de variables de holgura $t \in \mathbb{R}^N$ tal que $t_j \geq c_j|x_j|$. Por lo tanto se obtiene el problema equivalente:

$$p^* = \min_{x,t} \sum_{j=1}^N t_j \quad (2.4.7)$$

sujeto a:

$$t_j \geq c_j|x_j| \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.8)$$

Observando que la restricción $t_j \geq c_j|x_j|$ es equivalente al conjunto de restricciones lineales, $t_j \geq c_jx_j$ y $t_j \geq -c_jx_j$ el problema puede reescribirse como:

$$p^* = \min_{x,t} \sum_{j=1}^N t_j \quad (2.4.9)$$

sujeto a:

$$t_j \geq c_jx_j \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.10)$$

$$t_j \geq -c_jx_j \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.11)$$

Finalmente, aplicando el siguiente cambio de variable biyectivo:

$$\begin{aligned} x_j &= x_j^+ - x_j^- \\ t_j &= c_jx_j^+ + c_jx_j^- \end{aligned}$$

El problema queda reformulado exactamente al obtenido aplicando la descomposición positiva/negativa.

$$p^* = \min_{x^+, x^-} \sum_{j=1}^N c_j (x_j^+ + x_j^-) \quad (2.4.12)$$

sujeto a:

$$x_j^+ \geq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.13)$$

$$x_j^- \geq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, N \quad (2.4.14)$$

□

2.5. Teorema de Adición de Variables de Holgura, Versión Maximización

Hasta el momento se ha trabajado con el teorema de adición de variables de holgura siendo el problema uno de minimización, sin embargo es posible reformularlo considerando ahora un problema de maximización. Esta formulación no se presenta de manera explícita en la literatura revisada, pero se obtiene de forma directa como una extensión del teorema de adición de variables de holgura en su versión de minimización, presentado previamente.

Esta versión será de utilidad en este trabajo pues la clase de problema de programación entera a abordar en esta tesis presenta un componente no lineal en su función de costo, con lo que usando este teorema, será posible reescribir la función de costo como un costo lineal, pasando la no linealidad a ser parte de las restricciones, paso clave en la demostración de equivalencia entre esta clase de problemas y problemas LP.

Teorema 2.5.1. *Se pueden obtener problemas equivalentes agregando variables de holgura al problema. Aquí se describe el caso típico que ocurre cuando la función objetivo corresponde a una suma de términos, como en el siguiente problema:*

$$p^* = \max_x \sum_{i=1}^r \varphi_i(x), \quad (2.5.1)$$

sujeto a: $x \in \mathcal{X}$.

Introduciendo las variables de holgura $\xi_i, i = 1, \dots, r$ se reformula el problema como:

$$q^* = \max_{x, \xi} \sum_{i=1}^r \xi_i, \quad (2.5.2)$$

sujeto a: $x \in \mathcal{X}$
 $\varphi_i(x) \geq \xi_i, \quad i = 1, \dots, r$

Donde el nuevo problema tiene la variable original x y el vector de variables de holgura $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$

Estos problemas son equivalentes en el siguiente sentido:

1. Si x es factible para (2.5.1), entonces $\xi_i = \varphi_i(x), i = 1, \dots, r$ es factible para (2.5.2);
2. Si x es factible para (2.5.2), entonces x es factible para (2.5.1);
3. Si x^* es el óptimo para (2.5.1), entonces $x^*, \xi_i^* = \varphi_i(x^*), i = 1, \dots, r$ es el óptimo para (2.5.2);
4. Si x^*, ξ^* es el óptimo para (2.5.2) entonces x^* es el óptimo para (2.5.1).
5. $p^* = q^*$

Demostración. Se demostrará aplicando el Teorema de Adición de variables de Holgura versión minimización a un problema de minimización equivalente al problema (2.5.1) y luego aplicando un cambio de variable adecuado.

Es posible reescribir el problema de maximización original (2.5.1) como uno de minimización considerando como nueva función objetivo la función objetivo original pero con signo contrario, de esta forma se obtiene el problema equivalente:

$$p^* = \min_x \sum_{i=1}^r -\varphi_i(x), \quad (2.5.3)$$

sujeto a: $x \in \mathcal{X}$.

Aplicando ahora el teorema de adición de variables de holgura, considerando como variable de holgura las variable $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ se obtiene el siguiente problema equivalente:

$$q^* = \min_{x, \xi} \sum_{i=1}^r \xi_i, \quad (2.5.4)$$

sujeto a: $x \in \mathcal{X}$
 $-\varphi_i(x) \leq \xi_i, \quad i = 1, \dots, r$

Ahora aplicando la misma técnica usada anteriormente de considerar la función objetivo de signo contrario es posible volver a un problema de maximización. De

esta forma se tiene el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned}
 q^* &= \max_{x, \tilde{\xi}} \sum_{i=1}^r -\tilde{\xi}_i, \\
 \text{sujeto a: } &x \in \mathcal{X} \\
 &-\varphi_i(x) \leq \tilde{\xi}_i, \quad i = 1, \dots, r
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Luego aplicando el cambio de variable $\xi = -\tilde{\xi}$ se obtiene el problema equivalente:

$$\begin{aligned}
 q^* &= \max_{x, \xi} \sum_{i=1}^r \xi_i, \\
 \text{sujeto a: } &x \in \mathcal{X} \\
 &\varphi_i(x) \geq \xi_i, \quad i = 1, \dots, r
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Donde considerando el sentido de equivalencia dado por el teorema adición de variables de holgura versión minimización queda el teorema demostrado. $\square$

2.6. Teorema de equivalencia de hipógrafo de una función lineal por tramos cóncava

A continuación se define lo que es el conjunto hipógrafo de una función, término que puede encontrarse en el capítulo 1. *Max and Min* de [27], sección D. *Continuity, Closure and Growth*, página 13.

Definición 2.6.1 (Conjunto hipógrafo de una función).

Considerando la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ el hipógrafo de f corresponde al conjunto:

$$\text{hypo}(f) := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} | \alpha \leq f(x)\} \quad (2.6.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

Teorema 2.6.1 (Teorema de equivalencia de hipógrafo de una función lineal por tramos cóncava).

Considerando las $n \in \mathbb{N}$ funciones afines

$$f_i(x) = a_i x + b_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (2.6.2)$$

los conjuntos hipógrafos de cada función están dados por:

$$\text{hypo}(f_i) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq f_i(x)\} \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (2.6.3)$$

Luego considerando la función lineal por tramos cóncava:

$$f(x) = \min_{i=1, \dots, n} \{f_i(x)\} = \min_{i=1, \dots, n} \{a_i x + b_i\} \quad (2.6.4)$$

donde el conjunto hipógrafo de la función $f(x)$ está dado por:

$$\text{hypo}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq f(x)\} \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (2.6.5)$$

Se tiene que:

$$\text{hypo}(f) = \bigcap_{i=1}^n \text{hypo}(f_i) \quad (2.6.6)$$

Demostración. Por definición el par (x, y) pertenece a $\text{hypo}(f)$ si y solo si $y \leq f(x) = \min_{i=1, \dots, n} \{f_i(x)\}$ lo cual es cierto si y solo si $y \leq f_i(x)$ para cada $i = 1, \dots, n$. De forma equivalente se tiene $(x, y) \in \bigcap_{i=1}^n \text{hypo}(f_i)$ $\square$

Resultados similares se muestran en la demostración de la proposición 1.2.4 de [28], capítulo 1. *Basic Convexity Concepts*, sección 1.2 *Sets and Functions*, página 31; salvo que aquí se habla sobre funciones convexas y el conjunto epígrafe.

Notar que el teorema 2.6.1 permite reemplazar una restricción no lineal del tipo:

$$y \leq f(x) = \min_{i=1,\dots,n} \{f_i(x)\} = \min_{i=1,\dots,n} \{a_i x + b_i\} \quad (2.6.7)$$

Por el set de restricciones lineales:

$$y \leq f_i(x) = a_i x + b_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (2.6.8)$$

Que es donde radica la importancia de este teorema en este trabajo.

EQUIVALENCIA ENTRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN ENTERA Y PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1. Introducción

Este capítulo presenta el desarrollo formal de la equivalencia entre cierta clase de problemas de Programación Entera Lineal Mixta (MILP) y problemas de Programación Lineal (LP), eje central de esta tesis.

En primer lugar, se presenta el problema de interés, el cual considera tres escenarios distintos que, en el capítulo siguiente, se relacionarán con tres esquemas MPC de estudio.

Posteriormente, se presentan los teoremas de equivalencia entre las tres clases de problemas MILP asociadas a los escenarios de interés y sus correspondientes problemas LP equivalentes, junto con sus respectivas demostraciones. Estas demostraciones se desarrollan a partir de los fundamentos de programación matemática establecidos en el capítulo anterior, particularmente el teorema de adición de variables de holgura en su versión de maximización y el teorema de equivalencia del hipógrafo de funciones lineales por tramos cóncavas. Estos tres teoremas corresponden al principal resultado de este trabajo de tesis.

Dada la relevancia computacional de estos modelos, se presenta además la formulación matricial explícita de cada uno de los problemas LP resultantes.

3.2. Problema de Interés

Para este trabajo se considera el problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 p^* &= \max_u \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - g(u_k) \\
 \text{sueto a:} \\
 c_k &= \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \\
 u_k &\in U, \\
 m_k &\leq u_k \leq M_k, \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} h_s u_s \leq E_{\max}, \quad k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde

- $u = (u_0, \dots, u_N)$ corresponde al vector de variables de decisión, donde $u_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \dots, N$.
- $r = (r_0, \dots, r_N)$ es un vector de coeficientes, donde $r_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \dots, N$.
- $c = (c_0, \dots, c_N)$ es un vector de variables lógicas, donde $c_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \dots, N$.
- $c^p = (c_0^p, \dots, c_N^p)$ y $c^n = (c_0^n, \dots, c_N^n)$ son vectores de coeficientes, donde $c_i^n, c_i^p \in \mathbb{R}$ y $c_i^n \geq c_i^p$ con $i = 0, \dots, N$.
- $U \subset \mathbb{R}$.
- $m = (m_0, \dots, m_N)$ y $M = (M_0, \dots, M_N)$ son vectores de coeficientes, donde $m_i, M_i \in \mathbb{R}$ y $m_i \leq M_i$ con $i = 0, \dots, N$.
- $E_{\min}, E_{\max}, E_0 \in \mathbb{R}$ son coeficientes, donde $E_{\min} \leq E_{\max}$.
- $g(\cdot)$ es una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h_s \in \mathbb{R}$. Se consideran tres posibles escenarios, los cuales corresponden a:
 - **Escenario 1:** $g(u_i) = b_k u_i$ y $h_s = 1$.
 - **Escenario 2:** $g(u_i) = b_k \eta_i u_i$ y $h_s = \eta_s$
 - **Escenario 3:** $g(u_i) = b_k \eta_i u_i + OM_k |u_i|$ y $h_s = \eta_s$

Donde:

- $b = (b_0, \dots, b_N)$ es un vector de coeficientes, donde $b_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \dots, N$.
- $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_N)$ es un vector de variables lógicas, donde $\eta_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \dots, N$.

$$\eta_i = \begin{cases} \eta_i^d & \text{si } u_i \geq 0 \\ \eta_i^c & \text{si } u_i < 0 \end{cases}$$

- $\eta^d = (\eta_0^d, \dots, \eta_N^d)$ y $\eta^c = (\eta_0^c, \dots, \eta_N^c)$ son vectores de coeficientes, donde $\eta_i^d, \eta_i^c \in \mathbb{R}$ y $\eta_i^d \geq \eta_i^c > 0$ con $i = 0, \dots, N$.
- $OM_k = (OM_0, \dots, OM_N)$ es un vector de coeficientes, donde $OM_i \in \mathbb{R}^+$ con $i = 0, \dots, N$.

Notar que el problema de optimización (3.2.1) corresponde a un problema de optimización no lineal, donde en particular los factores c_k y η_k están definidos por reglas lógicas dependientes de variables de decisión continuas. Este tipo de problemas puede ser resuelto utilizando un solver *Mixed Integer Linear Programming* (MILP) adecuado

El problema (3.2.1) puede ser reescrito como (3.2.2) introduciendo el vector de variables de holgura $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$, utilizando el teorema de Adición de Variables de Holgura en su Versión de Maximización, cuya demostración se muestra en el capítulo 2.

$$\max_{u, \xi} \sum_{k=0}^N \xi_k, \quad (3.2.2)$$

sujeto a:

$$\xi_k \leq c_k(u_k - r_k) - g(u_k) \quad (3.2.3)$$

$$u_k \in U, \quad (3.2.4)$$

$$m_k \leq u_k \leq M_k, \quad (3.2.5)$$

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.2.6)$$

Transformándolo así en un problema de optimización de costo lineal con restricciones lineales salvo por (3.2.3), la cual presenta variables lógicas.

3.3. Teorema considerando problema de interés en Escenario 1

Teorema 3.3.1. *El problema de optimización dado por:*

$$\begin{aligned}
 & \underset{u}{\text{máx}} \quad \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k u_k \\
 & \text{sueto a:} \\
 & c_k = \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

con restricciones lineales y no lineales puede ser reescrito como el problema equivalente de Programación Lineal:

$$\begin{aligned}
 & \underset{u, \xi}{\text{máx}} \quad \sum_{k=0}^N \xi_k \\
 & \text{sueto a:} \\
 & \xi_k \leq (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k = L_2(c_k^p, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \xi_k \leq (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k = L_1(c_k^n, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

donde:

- $u_k, \xi_k \in \mathbb{R}$, con $k = 0, \dots, N$, corresponden a variables de decisión.
- $r_k, b_k, c_k^p, c_k^n, m_k, M_k$ con $k = 0, \dots, N$ y $E_{\min}, E_{\max}, E_0, T$ son parámetros conocidos, donde se cumple que $c_k^n \geq c_k^p$.

Demostración. Considerando el caso en que $g(u_k) = b_k u_k$ y $h_s = 1$ el problema de

interés (3.2.1) queda dado por:

$$\begin{aligned}
 p^* &= \max_u \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k u_k \\
 \text{sujeto a:} \\
 c_k &= \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 u_k &\in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 m_k &\leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Luego, usando el Teorema de Adición de Variables de Holgura en su versión Maximización se agrega el vector de variables de holgura $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$, donde:

$$\xi_k \leq c_k(u_k - r_k) - b_k u_k = (c_k - b_k)u_k - c_k r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

De esta forma se obtiene el problema de optimización equivalente:

$$\begin{aligned}
 \max_{u, \xi} \quad & \sum_{k=0}^N \xi_k \\
 \text{sujeto a:} \\
 \xi_k &\leq \begin{cases} (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k & \text{si } u_k - r_k < 0 \\ (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 u_k &\in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 m_k &\leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Notar que el problema equivalente (3.3.4) no es lineal por la restricción sobre los elementos de ξ :

$$\xi_k \leq f_k(u_k) = \begin{cases} (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k & \text{si } u_k - r_k < 0 \\ (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

donde $f_k(u_k)$ es una una función lineal por tramos cóncava en cada $k = 0, \dots, N$, pues es continua en $u_k = r_k$ y las pendientes no aumentan (pues $c_k^n \geq c_k^p$)

Como $f_k(u_k)$ es lineal por tramos cóncava, aplicando el teorema 2.6.1 es posible reemplazar las restricciones no lineales sobre los elementos de ξ en (3.3.4) por el set de restricciones lineales:

$$\tilde{\xi}_k \leq (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k = L_2(c_k^p, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (3.3.5)$$

$$\tilde{\xi}_k \leq (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k = L_1(c_k^n, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (3.3.6)$$

Obteniendo el siguiente problema LP equivalente:

$$\begin{aligned} & \underset{u, \xi}{\text{máx}} \quad \sum_{k=0}^N \tilde{\xi}_k \\ & \text{sujeto a:} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\tilde{\xi}_k \leq (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k = L_2(c_k^p, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$\tilde{\xi}_k \leq (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k = L_1(c_k^n, u_k) \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

□

3.3.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial

A continuación se muestra el problema escrito de forma matricial, es decir:

$$\underset{v}{\text{máx}} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{v} \quad (3.3.8)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q} \quad (3.3.9)$$

Donde se considera:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_N \end{bmatrix}, \quad (3.3.10)$$

El vector $\mathbf{e}$ está dado por:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

La matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_p - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_n - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix}, \quad (3.3.12)$$

Donde $\text{diag}\{x\}$ corresponde a la matriz diagonal formada con los coeficientes del vector columna x , $\odot$ hace referencia al producto elemento a elemento, $\mathbf{I}_{N+1}$ es la matriz Identidad de dimensión $(N+1) \times (N+1)$ y $\mathbf{0}_{N+1}$ es la matriz de ceros de dimensión $(N+1) \times (N+1)$.

Además:

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_0^n \\ \vdots \\ c_N^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_0^p \\ \vdots \\ c_N^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{\max} \\ \vdots \\ a_{\max} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{\min} \\ \vdots \\ a_{\min} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (3.3.14)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (3.3.15)$$

y $a_{\min}, a_{\max}$ están dados por:

$$a_{\min} = (E_0 - E_{\max})/T, \quad a_{\max} = (E_0 - E_{\min})/T \quad (3.3.16)$$

La deducción de esta forma matricial se muestra en el Anexo A

3.4. Teorema considerando problema de interés en Escenario 2

Teorema 3.4.1. *El problema de optimización dado por:*

$$\begin{aligned}
 & \max_u \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k \eta_k u_k \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & c_k = \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \eta_k = \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } u_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_s u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

con restricciones lineales y no lineales puede ser reescrito como el problema equivalente de Programación Lineal:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\tilde{u}, \tilde{\xi}} \sum_{k=0}^N \tilde{\xi}_k \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & \tilde{\xi}_k \leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \tilde{\xi}_k \leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \tilde{\xi}_k \leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

donde:

- $u_k, \tilde{u}_k, \xi_k \in \mathbb{R}$, con $k = 0, \dots, N$, corresponden a variables de decisión, con $\tilde{u}_k = \eta_k u_k$.
- $r_k, b_k, c_k^p, c_k^n, \eta_k^c$ y η_k^d, m_k, M_k con $k = 0, \dots, N$ y $E_{\min}, E_{\max}, E_0, T$ son parámetros conocidos, donde se cumple que $c_k^n \geq c_k^p, 0 < \eta_k^c \leq \eta_k^d, m_k < 0$ y $M_k \geq 0$.

Demostración. Considerando el caso en que $g(u_k) = \eta_k b_k u_k$ y $h_s = \eta_s$ el problema de interés (3.2.1) queda dado por:

$$\begin{aligned}
 p^* &= \max_u \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k \eta_k u_k \\
 \text{sujeto a:} \\
 c_k &= \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k &= \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } u_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 u_k &\in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 m_k &\leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_s u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Para evitar trabajar con el producto $\eta_k u_k$ se introduce el cambio de variable $\tilde{u} = \eta_k u_k$, el cual es un mapeo biyectivo. Con dicho cambio de variable el problema puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 p^* &= \max_{\tilde{u}} \sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \right) - b_k \tilde{u}_k \\
 \text{sujeto a:} \\
 c_k &= \begin{cases} c_k^p & \text{si } \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k &= \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } \tilde{u}_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } \tilde{u}_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \tilde{u}_k &\in \tilde{U}, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k^c m_k &\leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Luego, usando el Teorema de Adición de Variables de Holgura en su versión Maximización se agrega el vector de variables de holgura $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$, donde:

$$\xi_k \leq f_k(u_k) = c_k \left(\frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \right) - b_k \tilde{u}_k = \left(\frac{c_k}{\eta_k} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

De esta forma se obtiene el problema de optimización equivalente:

$$q^* = \max_{\tilde{u}, \xi} \sum_{k=0}^N \xi_k$$

sujeto a:

Si $r_k \geq 0$:

$$\xi_k \leq f_k(\tilde{u}_k) = \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } \tilde{u}_k < 0 \\ \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } 0 \leq \tilde{u}_k < \eta_k^d r_k \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } \tilde{u}_k \geq \eta_k^d r_k \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Si $r_k < 0$:

$$\xi_k \leq f_k(\tilde{u}_k) = \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } \tilde{u}_k < \eta_k^c r_k \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } \eta_k^c r_k \leq \tilde{u}_k < 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } \tilde{u}_k \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$\eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

Notar que $f_k(u_k)$ es una función lineal por tramos cóncava en el caso $r_k \geq 0$ y $r_k < 0$, ya que es continua en los puntos de inflexión y que las pendientes van disminuyendo. Por lo anterior es posible aplicar el teorema 2.6.1 en ambos casos, obteniendo el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned}
q^* &= \max_{\tilde{u}, \xi} \sum_{k=0}^N \xi_k \\
\text{sujeto a:} \\
&\xi_k \leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
&\xi_k \leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
&\xi_k \leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
&\eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
&E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

El cual es un problema LP ya que la secuencia $r = (r_0, \dots, r_N)$ es conocida a priori. $\square$

3.4.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial

A continuación se muestra el problema escrito de forma matricial, es decir:

$$\max_v \mathbf{e}^T \mathbf{v} \tag{3.4.6}$$

$$\text{sujeto a: } \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q} \tag{3.4.7}$$

Donde se considera:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \tag{3.4.8}$$

El vector $\mathbf{e}$ está dado por:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix} \tag{3.4.9}$$

La matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{pd}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nc}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ \Psi & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{\text{p}} \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_{\text{n}} \odot \mathbf{r} \\ \psi \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix}, \quad (3.4.10)$$

Donde $\text{diag}\{x\}$, $\odot$, $\mathbf{I}_{N+1}$ y $\mathbf{0}_{N+1}$ corresponden a las definiciones introducidas previamente para la formulación matricial del Escenario 1.

Por otro lado la matriz Ψ y el vector ψ toman distintos valores dependiendo el valor de r_k , tal como se muestra a continuación:

$$\Psi = -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} - \mathbf{b}\} \quad (3.4.11)$$

$$\psi = [-\mathbf{c}_{\text{n|p}} \odot \mathbf{r}] \quad (3.4.12)$$

Considerando los vectores:

$$\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{nd|pc}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{nd|pc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{n|p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n|p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n|p}} \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_k^{\text{nd|pc}} = \begin{cases} \frac{c_k^{\text{n}}}{\eta_k^{\text{d}}} & \text{si } r_k \geq 0 \\ \frac{c_k^{\text{p}}}{\eta_k^{\text{c}}} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$c_k^{\text{n|p}} = \begin{cases} c_k^{\text{n}} & \text{si } r_k \geq 0 \\ c_k^{\text{p}} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Las demás matrices están dadas por:

$$\mathbf{c}_{\text{n}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (3.4.13)$$

$$\mathbf{c}_{\text{nc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pd}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}}/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}}/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad (3.4.14)$$

$$\mathbf{c}_{\text{nd}} = \begin{bmatrix} c_0^n / \eta_0^d \\ \vdots \\ c_N^n / \eta_N^d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pc}} = \begin{bmatrix} c_0^p / \eta_0^c \\ \vdots \\ c_N^p / \eta_N^c \end{bmatrix}, \quad (3.4.15)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_0^d M_0 \\ \vdots \\ \eta_N^d M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\text{max}} = \begin{bmatrix} a_{\text{max}} \\ \vdots \\ a_{\text{max}} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\text{min}} = \begin{bmatrix} a_{\text{min}} \\ \vdots \\ a_{\text{min}} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (3.4.16)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \eta_0^c m_0 \\ \vdots \\ \eta_N^c m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (3.4.17)$$

y $a_{\text{min}}, a_{\text{max}}$ estan dados por:

$$a_{\text{min}} = (E_0 - E_{\text{max}})/T, \quad a_{\text{max}} = (E_0 - E_{\text{min}})/T \quad (3.4.18)$$

La deducción de esta forma matricial se muestra en el Anexo B

3.5. Teorema considerando problema de interés en Escenario 3

Teorema 3.5.1. *El problema de optimización dado por:*

$$\begin{aligned}
 & \max_u \quad \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k \eta_k u_k - OM_k |u_k| \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & c_k = \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \eta_k = \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } u_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_s u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

con restricciones lineales y no lineales puede ser reescrito como el problema equivalente de Programación Lineal:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\tilde{u}, \xi, t} \quad \sum_{k=0}^N \xi_k + t_k \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & \xi_k \leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \xi_k \leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \xi_k \leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & \eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

$$t_k \leq -\frac{OM_k}{\eta_k^d} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$t_k \leq \frac{OM_k}{\eta_k^c} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

donde:

- $u_k, \tilde{u}_k, \xi_k, t_k \in \mathbb{R}$, con $k = 0, \dots, N$, corresponden a variables de decisión, con $\tilde{u}_k = \eta_k u_k$.
- $r_k, b_k, c_k^p, c_k^n, \eta_k^c$ y η_k^d, m_k, M_k con $k = 0, \dots, N$ y $E_{\min}, E_{\max}, E_0, T$, y OM_k son parámetros conocidos, donde se cumple que $c_k^n \geq c_k^p, 0 < \eta_k^c \leq \eta_k^d, m_k < 0, M_k \geq 0$ y $OM_k > 0$.

Demostración. Considerando el caso en que $g(u_k) = b_k \eta_k u_k + OM_k |u_k|$ y $h_s = \eta_s$ el problema de interés (3.2.1) queda dado por:

$$p^* = \max_u \sum_{k=0}^N c_k(u_k - r_k) - b_k \eta_k u_k - OM_k |u_k|$$

sujeto a:

$$c_k = \begin{cases} c_k^p & \text{si } u_k - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } u_k - r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } u_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (3.5.3)$$

$$u_k \in U, \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$m_k \leq u_k \leq M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_s u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

Similar al escenario 2, para evitar trabajar con el producto $\eta_k u_k$ se introduce el cambio de variable $\tilde{u} = \eta_k u_k$, el cual es un mapeo biyectivo. Con dicho cambio de

variable el problema puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 p^* = \max_{\tilde{u}} \quad & \sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \right) - b_k \tilde{u}_k - OM_k \left| \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} \right| \\
 \text{sujeto a:} \quad & \\
 c_k = \begin{cases} c_k^P & \text{si } \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \geq 0 \\ c_k^n & \text{si } \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k < 0 \end{cases} & \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k = \begin{cases} \eta_k^d & \text{si } \tilde{u}_k \geq 0 \\ \eta_k^c & \text{si } \tilde{u}_k < 0 \end{cases} & \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \tilde{u}_k \in \tilde{U}, & \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, & \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, & \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Luego, usando el Teorema de Adición de Variables de Holgura en su versión Maximización se agregan los vectores de variables de holgura $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$ y $t = (t_0, \dots, t_N)$ donde:

$$\begin{aligned}
 \xi_k &\leq c_k \left(\frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} - r_k \right) - b_k \tilde{u}_k = \left(\frac{c_k}{\eta_k} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 t_k &\leq f_k(u_k) = -OM_k \left| \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} \right| \quad \text{con } k = 0, \dots, N
 \end{aligned}$$

Utilizando el resultado de las restricciones sobre ξ_k escritas en forma lineal del escenario anterior se obtiene el siguiente problema de optimización equivalente:

$$\begin{aligned}
q^* &= \max_{\tilde{u}, \tilde{\zeta}, t} \sum_{k=0}^N \tilde{\zeta}_k + t_k \\
\text{sujeto a:} \\
\tilde{\zeta}_k &\leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
\tilde{\zeta}_k &\leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
\tilde{\zeta}_k &\leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
\eta_k^c m_k &\leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N \\
t_k &\leq f_k(u_k) = -OM_k \left| \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} \right| \quad \text{con } k = 0, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Lo cual es un problema no lineal por la restricción sobre t_k . Sin embargo notar que la función $f_k(\tilde{u}_k)$ puede ser reescrita como

$$f_k(\tilde{u}_k) = -OM_k \left| \frac{\tilde{u}_k}{\eta_k} \right| = \begin{cases} -\frac{OM_k}{\eta_k^d} \tilde{u}_k & \text{si } \tilde{u}_k \geq 0 \\ \frac{OM_k}{\eta_k^c} \tilde{u}_k & \text{si } \tilde{u}_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Lo cual es una función lineal por tramos cóncava, pues es continua en su punto de inflexión y las pendientes son decrecientes. De esta forma es posible aplicar el teorema 2.6.1, obteniendo el siguiente problema de optimización equivalente:

$$\begin{aligned}
 q^* &= \max_{\tilde{u}, \xi, t} \sum_{k=0}^N \xi_k + t_k \\
 \text{sujeto a:} \\
 \xi_k &\leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \xi_k &\leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \xi_k &\leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k^c m_k &\leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N \\
 t_k &\leq -\frac{OM_k}{\eta_k^d} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 t_k &\leq \frac{OM_k}{\eta_k^c} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

□

3.5.1. Formulación de Problema LP Equivalente en Forma Matricial

A continuación se muestra el problema escrito de forma matricial, es decir:

$$\max_v \mathbf{e}^T \mathbf{v} \tag{3.5.7}$$

$$\text{sujeto a: } \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q} \tag{3.5.8}$$

Donde se considera:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}, \tag{3.5.9}$$

El vector $\mathbf{e}$ está dado por:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

La matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{pd}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nc}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \Psi & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \\ \text{diag}\{\mathbf{OM}_d\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{OM}_c\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r} \\ \psi \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}, \quad (3.5.11)$$

donde $\text{diag}\{\mathbf{x}\}$, $\odot$, $\mathbf{I}_{N+1}$ y $\mathbf{0}_{N+1}$ corresponden a las definiciones introducidas previamente para la formulación matricial del Escenario 1.

Por otro lado la matriz Ψ y el vector ψ toman distintos valores dependiendo el valor de r_k , tal como se muestra a continuación:

$$\Psi = -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} - \mathbf{b}\} \quad (3.5.12)$$

$$\psi = [-\mathbf{c}_{\text{n|p}} \odot \mathbf{r}] \quad (3.5.13)$$

Considerando los vectores:

$$\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{nd|pc}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{nd|pc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{n|p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n|p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n|p}} \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_k^{\text{nd|pc}} = \begin{cases} \frac{c_k^n}{\eta_k^d} & \text{si } r_k \geq 0 \\ \frac{c_k^p}{\eta_k^c} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$c_k^{\text{n|p}} = \begin{cases} c_k^n & \text{si } r_k \geq 0 \\ c_k^p & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Las demás matrices están dadas por:

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_0^n \\ \vdots \\ c_N^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_0^p \\ \vdots \\ c_N^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (3.5.14)$$

$$\mathbf{c}_{nc} = \begin{bmatrix} c_0^n / \eta_0^c \\ \vdots \\ c_N^n / \eta_N^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{pd} = \begin{bmatrix} c_0^p / \eta_0^d \\ \vdots \\ c_N^p / \eta_N^d \end{bmatrix}, \quad (3.5.15)$$

$$\mathbf{c}_{nd} = \begin{bmatrix} c_0^n / \eta_0^d \\ \vdots \\ c_N^n / \eta_N^d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{pc} = \begin{bmatrix} c_0^p / \eta_0^c \\ \vdots \\ c_N^p / \eta_N^c \end{bmatrix}, \quad (3.5.16)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_0^d M_0 \\ \vdots \\ \eta_N^d M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{\max} \\ \vdots \\ a_{\max} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{\min} \\ \vdots \\ a_{\min} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (3.5.17)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \eta_0^c m_0 \\ \vdots \\ \eta_N^c m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (3.5.18)$$

$$\mathbf{OM}_c = \begin{bmatrix} OM_0^n / \eta_0^c \\ \vdots \\ OM_N^n / \eta_N^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{OM}_d = \begin{bmatrix} OM_0 / \eta_0^d \\ \vdots \\ OM_N / \eta_N^d \end{bmatrix}, \quad (3.5.19)$$

y $a_{\min}, a_{\max}$ están dados por:

$$a_{\min} = (E_0 - E_{\max})/T, \quad a_{\max} = (E_0 - E_{\min})/T \quad (3.5.20)$$

La deducción de esta forma matricial se muestra en el Anexo C

APLICACIÓN: ESQUEMA MPC EN PLANTAS FOTOVOLTAICAS CON SISTEMA DE ALMACENAMIENTO ENERGÉTICO

4.1. Introducción

Este capítulo presenta la aplicación de los teoremas desarrollados en el capítulo anterior al esquema MPC de interés.

En primer lugar, se introduce el esquema de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC) considerado en la literatura para la gestión óptima de carga y descarga de baterías en un sistema fotovoltaico con almacenamiento energético (PV+BESS) con inyección de energía a la red [1], formulado originalmente como un problema no lineal y posteriormente abordado mediante una formulación MILP en [2]. Se describen sus componentes principales, variables de decisión y restricciones, estableciendo el marco general sobre el cual se desarrollará el análisis posterior.

Posteriormente, se distinguen tres escenarios de estudio. El primer escenario corresponde al problema original de [1], es decir, PV+BESS con baterías ideales en su formulación lineal equivalente. El segundo escenario considera baterías no ideales, extensión propuesta en [2], que conduce a una formulación MILP. El tercer escenario incorpora, además, una penalización asociada a los ciclos de carga y descarga del BESS.

Luego, al esquema MPC correspondiente a cada escenario se le aplican las reformulaciones necesarias para utilizar directamente los tres teoremas desarrollados en el capítulo anterior, obteniendo en cada caso una formulación LP equivalente.

Finalmente, se presentan los resultados de simulación para cada escenario, comparando los tiempos de ejecución y las soluciones obtenidas mediante los distintos esquemas MPC considerados. Se analiza el impacto computacional de las formulaciones propuestas, validando que los problemas LP equivalentes permiten preservar la calidad de la solución mientras reducen significativamente los tiempos de resolución frente a las formulaciones MILP.

4.2. Esquema MPC

En [1] se propone el siguiente esquema MPC para maximizar las ganancias económicas inyectando energía eléctrica a la red mediante un sistema fotovoltaico con sistema de almacenamiento de energía en baterías (BESS, del inglés *battery energy storage system*) en el mercado eléctrico español, gestionando la potencia de carga y descarga óptimo del BESS:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_{t+N+1}^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}}), \quad (4.2.1)$$

$$\text{sujeto a:} \quad (4.2.2)$$

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}} \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}} < 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

$$p_{t+k}^{\text{grid}} = \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} + p_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.2.4)$$

$$E_{t+k+1}^{\text{ES}} = E_{t+k}^{\text{ES}} - T p_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.2.5)$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.2.6)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_{t+k}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.2.7)$$

Donde:

- p_{t+k}^{ref} corresponde a la potencia eléctrica constante por hora previamente comprometida a inyectar a la red eléctrica por el sistema PV+BESS en el instante $t+k$.
- p_{t+k}^{grid} corresponde a la potencia eléctrica a ser inyectada a la red en el instante $t+k$, la cual está compuesta por $\hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}$ (potencia estimada que entregan los paneles solares en el instante $t+k$) y p_{t+k}^{ES} (potencia extraída desde el BESS en el instante $t+k$).
- c_{t+k} es el valor económico asociado a una unidad de energía eléctrica. Dado el funcionamiento del mercado eléctrico español, es una variable lógica donde $c_{t+k}^{\text{n}} \geq c_{t+k}^{\text{p}}$

- c_{t+N+1}^{SOC} es el valor económico asociado a una unidad de energía eléctrica almacenada en el BESS al final del horizonte de predicción N . E_{t+N+1}^{ES} es la energía almacenada en el BESS al final del horizonte de predicción.
- T corresponde al periodo de muestreo.
- $\alpha^{-1} \in (0, 1)$ es un número que permite incluir el aumento en la incertidumbre de la predicción de la potencia entregada por los paneles fotovoltaicos $\hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}$ a medida que se avanza en el horizonte de predicción.

El problema formulado en [1] presenta una estructura originalmente no lineal debido a la definición dependiente del precio c_{t+k} en función del signo de $p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{pref}}$, como se observa en (4.2.3). En dicho trabajo se propuso una reformulación lineal equivalente que permitía resolver el problema mediante programación LP. No obstante, esta reformulación se presentó de manera constructiva, sin una demostración formal de equivalencia.

Una limitación relevante de esta formulación LP de [1] radica en que su estructura depende de supuestos asociados a una batería ideal. En consecuencia, la incorporación de modelos más realistas, como eficiencias diferenciadas de carga y descarga no resulta directamente factible bajo su esquema.

En [2] se abordó esta limitación mediante una reformulación del problema como un modelo de optimización MILP, introduciendo variables de decisión auxiliares binarias y continuas que permiten modelar explícitamente la no linealidad del BESS. Esta reformulación no solo permitió extender el problema a escenarios más generales, sino que además validó la coherencia de la formulación lineal propuesta en [1] bajo condiciones ideales. Sin embargo, la introducción de la formulación MILP incrementa la complejidad computacional del problema, reflejándose en mayores tiempos de resolución al utilizar solvers MILP.

En este contexto, resulta de interés analizar si la estructura lógica introducida en la formulación MILP es esencial o si, bajo ciertas condiciones, puede eliminarse mediante una reformulación lineal equivalente. La aplicación de los teoremas desarrollados en el capítulo anterior permite precisamente abordar este tema, obteniendo formulaciones de LP que preservan la versatilidad del modelo MILP mientras reducen los tiempos de ejecución. Esto resulta particularmente relevante en esquemas MPC implementados en hardware, donde los requerimientos computacionales impactan directamente en la factibilidad de operación en tiempo real.

4.3. Aplicación de los Teoremas Propuestos a esquemas MPC

En lo que sigue de este capítulo, se utilizará la sigla SVLP (del inglés *Slack Variable Linear Programming*) para hacer referencia a las formulaciones LP equivalentes obtenidas mediante la aplicación de los teoremas desarrollados en el capítulo anterior. Dependiendo del escenario considerado, estas formulaciones corresponderán a la aplicación del Teorema 3.3.1, 3.4.1 o 3.5.1.

4.3.1. Escenario 1: Batería ideal

El esquema MPC corresponde al planteado por [1], dado por (4.2.1)- (4.2.7), se reescribirá este problema de optimización de forma que el Teorema 3.3.1 propuesto y demostrado en este trabajo sea directamente aplicable.

Para lograr lo anterior se proponen los siguientes pasos:

1. Eliminar ecuación (4.2.4) por sustitución en función de costo y en umbrales de variable lógica c_{t+k}
2. Eliminar ecuación recursiva (4.2.5) reescribiendo E_{t+k+1}^{ES} en función a la energía almacenada en el BESS al inicio del horizonte de predicción E_t^{ES} y secuencia de potencias extraídas del BESS ($P_t^{ES}, \dots, P_{t+k}^{ES}$)
3. Utilizar cambio de variable adecuado en variable lógica.

Paso 1:

Al sustituir (4.2.4) en la función de costo para sustituir la variable P_{t+k}^{grid} y reordenando términos se tiene que la función de costo puede reescribirse como:

$$f(P_t^{ES}, \dots, P_{t+N}^{ES}) = c_{t+N+1}^{soc} E_{t+N+1}^{ES} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(P_{t+k}^{ES} - [P_{t+k}^{pref} - \hat{P}_{t+k}^{PV}]) \quad (4.3.1)$$

De forma análoga, la regla lógica sobre c_{t+k} (4.2.3) puede reescribirse como:

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^p & \text{si } P_{t+k}^{ES} - [P_{t+k}^{pref} - \hat{P}_{t+k}^{PV}] \geq 0 \\ c_{t+k}^n & \text{si } P_{t+k}^{ES} - [P_{t+k}^{pref} - \hat{P}_{t+k}^{PV}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Por lo que el esquema MPC puede reescribirse como:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_{t+N+1}^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]), \quad (4.3.3)$$

sujeto a:

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

$$E_{t+k+1}^{\text{ES}} = E_{t+k}^{\text{ES}} - T p_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.3.5)$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.6)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_{t+k}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.7)$$

Paso 2:

Por propiedad telescópica de la suma es claro que la restricción (4.2.5) puede ser reescrita como:

$$E_{t+k}^{\text{ES}} = E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} p_{t+s}^{\text{ES}} \quad (4.3.8)$$

Con lo que sustituyendo E_{t+N+1}^{ES} con el resultado anterior en la función de costo y reagrupando términos se tiene que la función de costo puede ser reescrita como:

$$f(p_t^{\text{ES}}, \dots, p_{t+N}^{\text{ES}}) = c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T p_{t+k}^{\text{ES}} \right\} \quad (4.3.9)$$

Obteniendo que el esquema MPC puede ser reescrito como:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T p_{t+k}^{\text{ES}} \right\}, \quad (4.3.10)$$

sujeto a:

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.11)$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.12)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} p_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.13)$$

Paso 3:

Finalmente, considerando el cambio de variable:

$$c_{t+k}^{\text{SVLP}} = \alpha^{-k} T c_{t+k} = \begin{cases} \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{P}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.14)$$

El esquema MPC puede reescribirse como:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ c_{t+k}^{\text{SVLP}} (p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T p_{t+k}^{\text{ES}} \right\}, \quad (4.3.15)$$

sujeto a:

$$c_{t+k}^{\text{SVLP}} = \begin{cases} \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{P}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.16)$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.17)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} p_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.18)$$

Siendo el teorema 3.3.1 propuesto en este trabajo directamente aplicable.

4.3.2. Escenario 2: Batería no ideal

El esquema MPC planteado por [1], dado por (4.2.1)- (4.2.7) puede ser extendido considerando un BESS no ideal, incluyendo la eficiencia de carga y descarga de la batería.

La eficiencia se incluye considerando la segunda variable lógica:

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Con lo que el esquema MPC extendido correspondería a:

$$\max_{p_{t+k}^{ES}} c_{t+N+1}^{soc} E_{t+N+1}^{ES} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{grid} - p_{t+k}^{ref}), \quad (4.3.20)$$

$$\text{sujeto a:} \quad (4.3.21)$$

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^p & \text{si } p_{t+k}^{grid} - p_{t+k}^{ref} \geq 0 \\ c_{t+k}^n & \text{si } p_{t+k}^{grid} - p_{t+k}^{ref} < 0 \end{cases} \quad (4.3.22)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^d & \text{si } p_{t+k}^{ES} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^c & \text{si } p_{t+k}^{ES} < 0 \end{cases} \quad (4.3.23)$$

$$p_{t+k}^{grid} = \hat{p}_{t+k}^{PV} + p_{t+k}^{ES}, \quad (4.3.24)$$

$$E_{t+k+1}^{ES} = E_{t+k}^{ES} - T \eta_{t+k} p_{t+k}^{ES}, \quad (4.3.25)$$

$$p_{\min}^{ES} \leq p_{t+k}^{ES} \leq p_{\max}^{ES}, \quad (4.3.26)$$

$$E_{\min}^{ES} \leq E_{t+k}^{ES} \leq E_{\max}^{ES}, \quad (4.3.27)$$

En este escenario se reescribirá el problema de optimización de forma que el Teorema 3.4.1 propuesto y demostrado en este trabajo sea directamente aplicable.

Para lograr lo anterior se proponen los siguientes pasos:

1. Eliminar ecuación (4.3.24) por sustitución en función de costo y en umbrales de variable lógica c_{t+k} (idéntico a paso 1 en subsección 4.3.1)
2. Eliminar ecuación recursiva (4.3.25) reescribiendo E_{t+k+1}^{ES} en función a la energía almacenada en el BESS al inicio del horizonte de predicción E_t^{ES} , secuencia de potencias extraídas del BESS ($p_t^{ES}, \dots, p_{t+k}^{ES}$) y secuencia de eficiencias de carga o descarga ($\eta_t, \dots, \eta_{t+k}$)
3. Utilizar cambio de variable adecuado .

Paso 1:

Ya que la sustitución es la misma que se muestra en el Paso 1 de subsección 4.3.1, es claro que se obtiene el siguiente esquema MPC equivalente:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_{t+N+1}^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]), \quad (4.3.28)$$

sueto a:

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.29)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.30)$$

$$E_{t+k+1}^{\text{ES}} = E_{t+k}^{\text{ES}} - T \eta_{t+k} p_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.3.31)$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.32)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_{t+k}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.33)$$

Paso 2:

Análogo al paso 2 del primer esquema MPC analizado, por propiedad telescópica de la suma es claro que la restricción (4.3.25) puede ser reescrita como:

$$E_{t+k}^{\text{ES}} = E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} p_{t+s}^{\text{ES}} \quad (4.3.34)$$

Con lo que reemplazando E_{t+N+1}^{ES} en la función de costo con el resultado anterior y reagrupando términos se tiene que la función de costo puede ser reescrita como:

$$f(p_t^{\text{ES}}, \dots, p_{t+N}^{\text{ES}}) = c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{ES}} - [p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} p_{t+k}^{\text{ES}} \right\} \quad (4.3.35)$$

Con lo que el esquema MPC puede ser reescrito como:

$$\max_{P_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ \alpha^{-k} c_{t+k} T (P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} \right\}, \quad (4.3.36)$$

sujeto a:

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.37)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.38)$$

$$P_{\min}^{\text{ES}} \leq P_{t+k}^{\text{ES}} \leq P_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.39)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} P_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.40)$$

Paso 3:

Para finalizar, considerando el cambio de variable:

$$c_{t+k}^{\text{SVLP}} = \alpha^{-k} T c_{t+k} = \begin{cases} \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.41)$$

El esquema MPC puede reescribirse como:

$$\max_{P_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ c_{t+k}^{\text{SVLP}} (P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} \right\}, \quad (4.3.42)$$

sujeto a:

$$c_{t+k}^{\text{SVLP}} = \begin{cases} \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.43)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.44)$$

$$P_{\min}^{\text{ES}} \leq P_{t+k}^{\text{ES}} \leq P_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.45)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} P_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.46)$$

Siendo el teorema 3.4.1 propuesto en este trabajo directamente aplicable.

4.3.3. Escenario 3: Batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga

Según [18] es posible agregar el término:

$$-OM_{t+k}|P_{t+k}^{\text{ES}}|$$

a la función de costo para reducir la frecuencia de carga y descarga del BESS, aumentando de esta forma la vida útil de este, donde $OM_{t+k} > 0$ corresponde al parámetro asociado al costo de mantención y mantenimiento por unidad de energía consumida o extraída del BESS.

Añadiendo este término el esquema MPC del Escenario 2 se tiene el siguiente esquema MPC no lineal:

$$\max_{P_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_{t+N+1}^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} c_{t+k} T(p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}}) - OM_{t+k}|P_{t+k}^{\text{ES}}|, \quad (4.3.47)$$

$$\text{sujeto a:} \quad (4.3.48)$$

$$c_{t+k} = \begin{cases} c_{t+k}^{\text{p}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}} \geq 0 \\ c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{grid}} - p_{t+k}^{\text{ref}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.49)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.50)$$

$$p_{t+k}^{\text{grid}} = \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} + P_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.3.51)$$

$$E_{t+k+1}^{\text{ES}} = E_{t+k}^{\text{ES}} - T\eta_{t+k}P_{t+k}^{\text{ES}}, \quad (4.3.52)$$

$$P_{\min}^{\text{ES}} \leq P_{t+k}^{\text{ES}} \leq P_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.53)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_{t+k}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.54)$$

Notar que el Teorema 3.5.1 propuesto y demostrado en este trabajo aún no es directamente aplicable.

Para lograr que el teorema sea aplicable, basta reescribir el problema como el esquema MPC equivalente donde el Teorema 3.4.1 era aplicable pero ahora considerando los términos extra $OM_{t+k}|P_{t+k}^{\text{ES}}|$, es decir:

$$\max_{P_{t+k}^{\text{ES}}} c_{t+N+1}^{\text{soc}} E_t^{\text{ES}} + \sum_{k=0}^N \left\{ c_{t+k}^{\text{SVLP}} (P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}]) - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} - OM_{t+k} |P_{t+k}^{\text{ES}}| \right\}, \quad (4.3.55)$$

sujeto a:

$$c_{t+k}^{\text{SVLP}} = \begin{cases} \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{P}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] \geq 0 \\ \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} - [P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}] < 0 \end{cases} \quad (4.3.56)$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta_{t+k}^{\text{d}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta_{t+k}^{\text{c}} & \text{si } P_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (4.3.57)$$

$$P_{\min}^{\text{ES}} \leq P_{t+k}^{\text{ES}} \leq P_{\max}^{\text{ES}}, \quad (4.3.58)$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} P_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (4.3.59)$$

4.4. Resultados de Simulación

Con el fin de mostrar el impacto de los teoremas propuestos se comparará mediante simulaciones los esquemas MPC propuestos en los 3 escenarios anteriores, comparando con el esquema MPC propuesto en [1] y al esquema MILP propuesto en [2] según corresponda.

Para la comparación de los esquemas MPC se obtendrán estadísticas del tiempo de ejecución y se validará que se llegue al mismo resultado en todos los esquemas.

Entre los resultados esperados de las simulaciones se considera lo siguiente:

- En escenario 1 (batería ideal) se espera un tiempo de ejecución superior en esquema MPC-MILP propuesto en [2]. Tiempos comparables entre el esquema original propuesto en [1] y el propuesto en este trabajo, dado que ambos son problemas LP con número similar de variables de decisión.
- En escenario 2 (batería no ideal) se espera un tiempo de ejecución inferior en el esquema propuesto en este trabajo pues se resolverá un problema LP vs el problema MILP a resolver con el esquema propuesto en [2]. El esquema LP propuesto en [1] no aplica para este escenario pues no permite considerar eficiencia de batería.
- En el escenario 3 (batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga) se esperan los mismos resultados con respecto a los tiempos de ejecución que en el escenario 2. El esquema LP propuesto en [1] tampoco aplica para este escenario.

Con respecto a la implementación de los esquemas MPC se aclara lo siguiente:

- La implementación es realizada en MATLAB R2019b [29] en conjunto con la toolbox de optimización CPLEX [30] de IBM.
- Todos los problemas LP son resueltos con el solver `cplexlp` y los problemas MILP son resueltos con el solver `cplexmilp` de la toolbox CPLEX.
- Los tiempos de ejecución son medidos usando las funciones `tic-toc` de MATLAB
- Para cada esquema MPC de cada escenario se consideraron 165 iteraciones del esquema MPC.
- Todas las simulaciones fueron realizadas en un computador portátil MSI Modern 14 B5M, equipado con un procesador AMD Ryzen 5 5500U a 2.10 GHz, 8 GB de memoria RAM, y sistema operativo Windows 10 Home (64 bits).

Otros aspectos importantes con respecto a la implementación

- La toolbox de optimización CPLEX se obtuvo descargando el software IBM CPLEX Optimization Studio IDE 12.10.0.
- Según el reporte de compatibilidad de IBM [31], IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.10.0 es compatible con MATLAB R2019b. En el caso de querer replicar debe tener cuidado con la versión de ambos software.

4.4.1. Escenario 1: Batería ideal

En la figura 4.1 se muestra el diagrama del esquema MPC para este escenario.

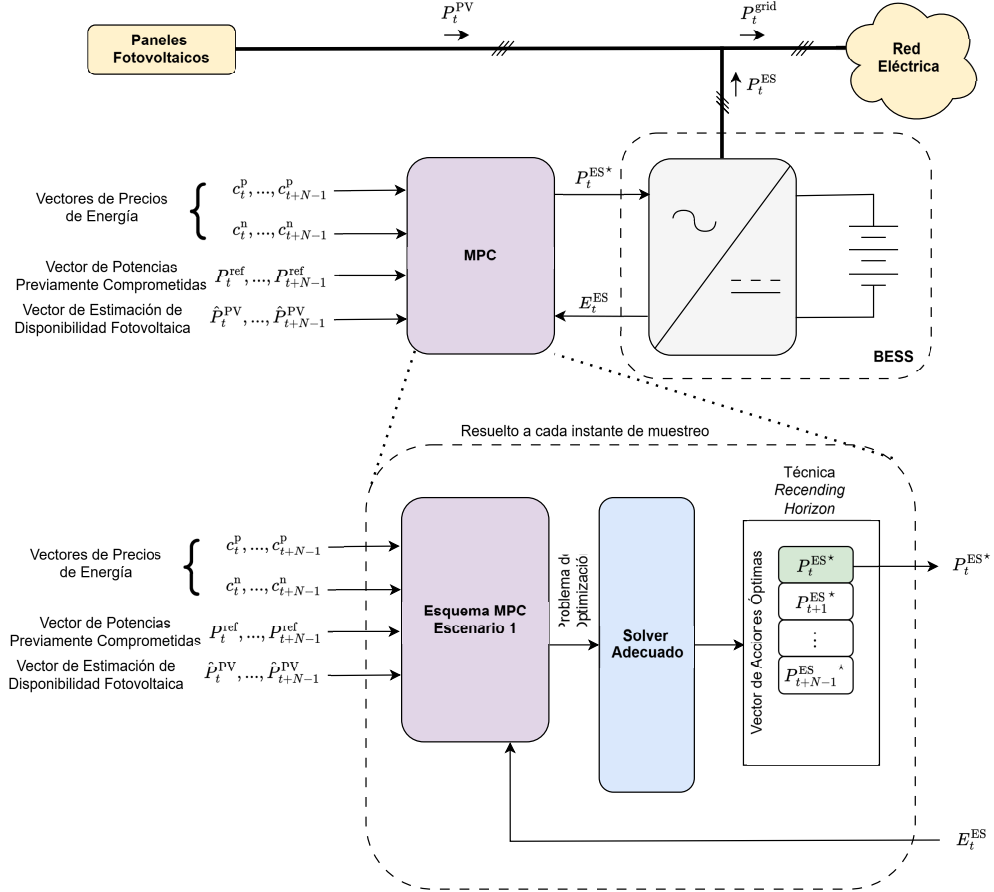


Figura 4.1: Esquema MPC escenario 1, batería ideal.

Los parámetros y entradas del esquema MPC se muestran en el cuadro 4.1, mientras en la figura 4.3 se muestran los resultados de haber aplicado los 3 esquemas MPC (LP propuesto en [1], MILP propuesto en [2] y SVLP propuesto en este trabajo) con fines comparativos.

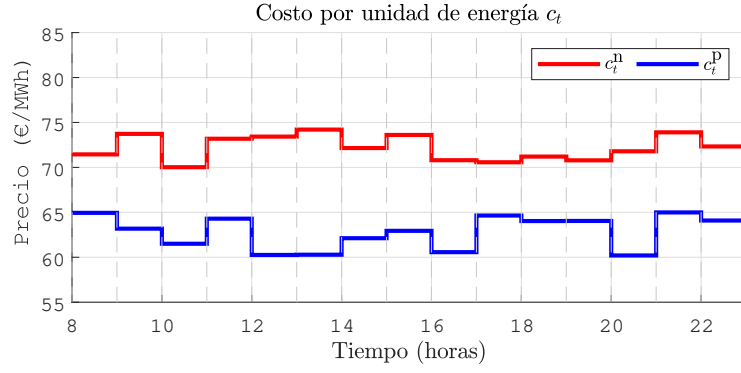
Con respecto a la elección de parámetros, se escogen buscando ser consistente con los presentados en [2], sin embargo se consideran 2 diferencias, siendo una de ellas un valor inicial de energía en el BESS de un 50 % de la capacidad, con una capacidad de 48 kWh y por último distintos umbrales de carga y descarga en el BESS, siendo estos un 90 y un 20 % de la capacidad respectivamente pues tanto una alta o baja carga en un BESS tiene un impacto negativo en la vida útil de este [32].

Con respecto a los resultados obtenidos, se valida que los 3 esquemas son equivalentes, llegando a las mismas acciones de control óptimas, el mismo valor de función de costo y la misma cantidad de energía almacenada en el BESS durante

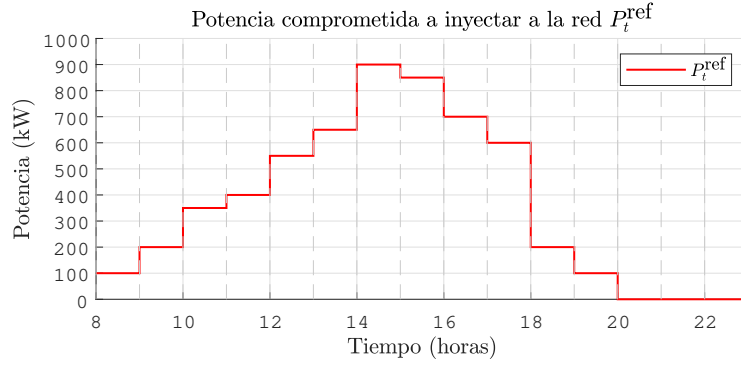
cada instante de la simulación.

Cuadro 4.1: Parámetros de control MPC y del sistema PV+BESS en escenario 1

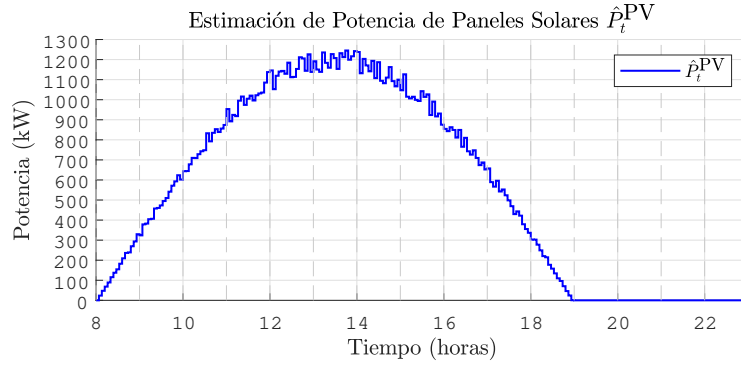
E_0^{ES}	$0,5 \cdot 48 \text{ kWh}$
N	60
T	4 minutos
$p_{\min}^{\text{ES}}$	-500 kW
$p_{\max}^{\text{ES}}$	500 kW
$E_{\min}^{\text{ES}}$	$0,2 \cdot 48 \text{ kWh}$
$E_{\max}^{\text{ES}}$	$0,9 \cdot 48 \text{ kWh}$
α	$1/0,999$
c_{t+N+1}^{soc}	c_{t+N+1}^{n}
c^{p}	Ver figura 4.2a
c^{n}	Ver figura 4.2a
p^{ref}	Ver figura 4.2b
$\hat{p}_{\text{PV}}$	Ver figura 4.2c



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2: Inputs del MPC en el Escenario 1. (a) Costo por unidad de energía inyectada a la red. (b) Potencia comprometida a inyectar a la red $P_{\text{ref}}(t)$. (c) Potencia generada por sistema de paneles fotovoltaicos.

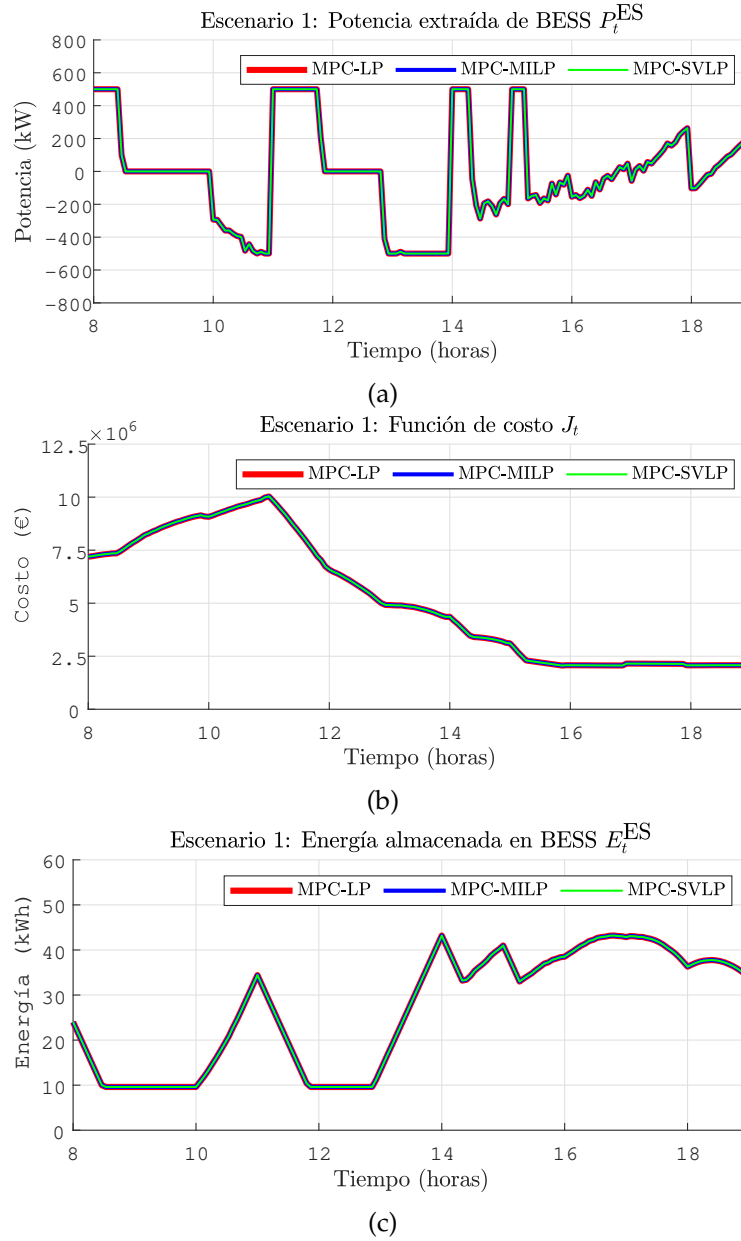


Figura 4.3: Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 1, batería ideal. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.

Con respecto a los tiempos de ejecución de los 3 esquemas MPC para este escenario, en la figura 4.4 se muestra el diagrama de cajas (boxplot) para cada esquema. En la tabla 4.2 se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución para cada esque-

ma

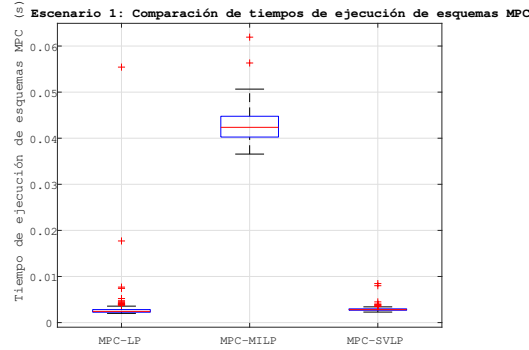


Figura 4.4: Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-LP, MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 1 (batería ideal).

Cuadro 4.2: Estadísticas de tiempo de resolución en Escenario 1 (s).

Esquema MPC	Media	Mediana	Desviación Estándar
MPC-LP	0.003083	0.002427	0.004336
MPC-MILP	0.042825	0.042361	0.003665
MPC-SVLP	0.002900	0.002810	0.000672

En la figura 4.4 se observa una diferencia marcada entre la formulación MPC-MILP y las formulaciones LP. Mientras que MPC-MILP presenta tiempos de ejecución centrados en torno a 0.04 s, las formulaciones MPC-LP y MPC-SVLP se concentran en valores cercanos a 0.003 s, evidenciando una reducción cercana a un orden de magnitud.

Cabe destacar que el boxplot muestra una mayor dispersión relativa en la formulación MPC-LP respecto a MPC-SVLP, lo cual es consistente con los valores de desviación estándar presentados en el Cuadro 4.2. En particular, MPC-SVLP exhibe menor variabilidad en los tiempos de resolución, indicando un comportamiento computacional más estable.

4.4.2. Escenario 2: Batería no ideal.

En la figura 4.5 se muestra el diagrama del esquema MPC para este escenario.

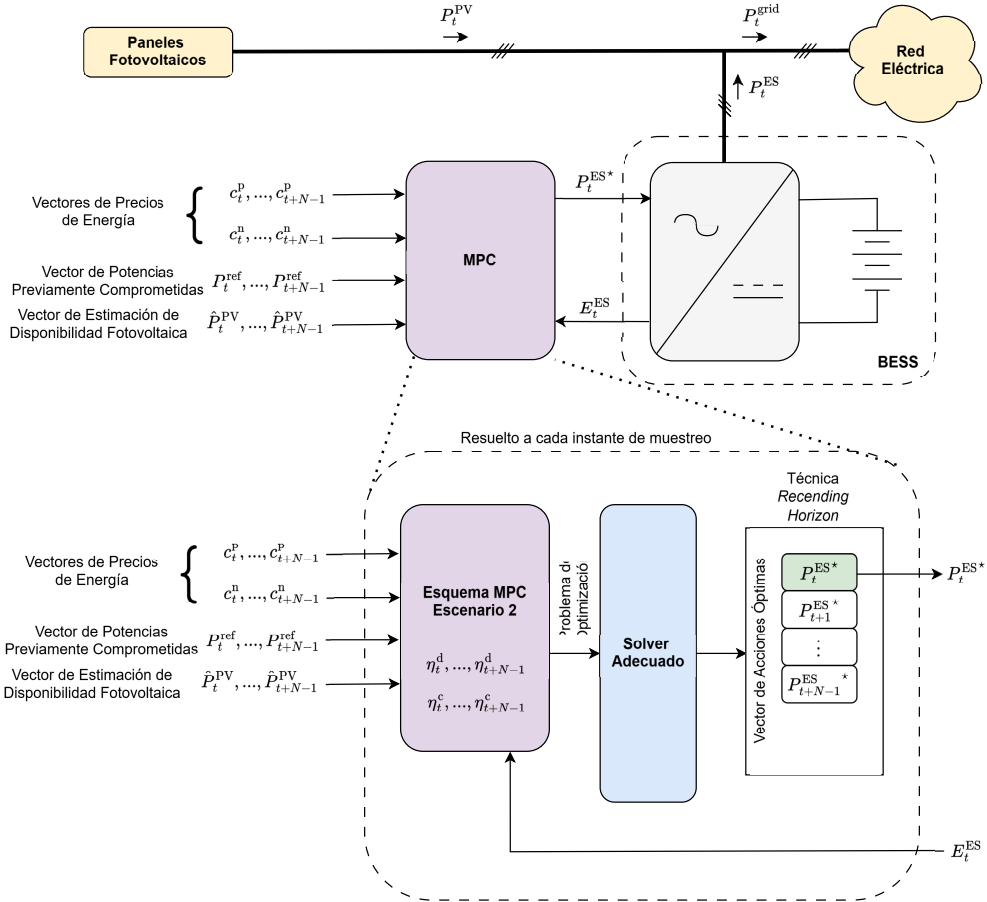


Figura 4.5: Esquema MPC escenario 2, batería no ideal.

Los parámetros y entradas del esquema MPC se muestran en el cuadro 4.3, mientras en la figura 4.6 se muestran los resultados de haber aplicado los 2 esquemas MPC admisibles, MILP propuesto en [2] y SVLP propuesto en este trabajo) con fines comparativos.

Con respecto a la elección de parámetros se hace con el mismo criterio que en el escenario anterior, se escogen buscando ser consistente con los presentados en [2], considerando ahora además las eficiencias de carga y descarga.

Con respecto a los resultados obtenidos, se valida que los 2 esquemas MPC admisibles son equivalentes, llegando a las mismas acciones de control óptimas, el mismo valor de función de costo y la misma cantidad de energía almacenada en el BESS durante cada instante de la simulación.

Cuadro 4.3: Parámetros de control MPC y del sistema PV+BESS en escenario 2

E_0^{ES}	$0,5 \cdot 48 \text{ kWh}$
N	60
T	4 minutos
$P_{\min}^{\text{ES}}$	-500 kW
$P_{\max}^{\text{ES}}$	500 kW
$E_{\min}^{\text{ES}}$	$0,2 \cdot 48 \text{ kWh}$
$E_{\max}^{\text{ES}}$	$0,9 \cdot 48 \text{ kWh}$
α	$1/0,999$
c_{t+N+1}^{soc}	c_{t+N+1}^{n}
c^{p}	Ver figura 4.2a
c^{n}	Ver figura 4.2a
p^{ref}	Ver figura 4.2b
$\hat{P}_{\text{PV}}$	Ver figura 4.2c
η^{c}	0,89
η^{d}	$1/0,89$

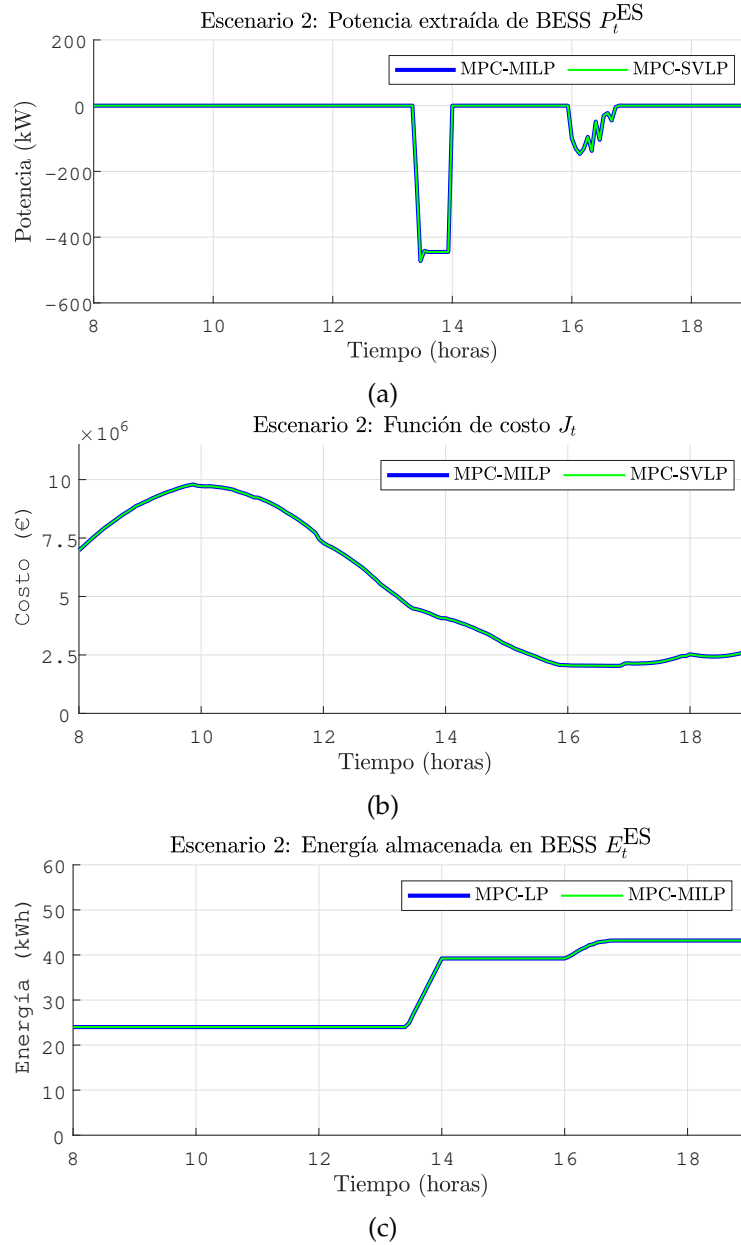


Figura 4.6: Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 2, batería no ideal. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.

Con respecto a los tiempos de ejecución de los 2 esquemas MPC para este escenario, en la figura 4.7 se muestra el diagrama boxplot para cada esquema. En la tabla 4.4 se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución para cada esquema.

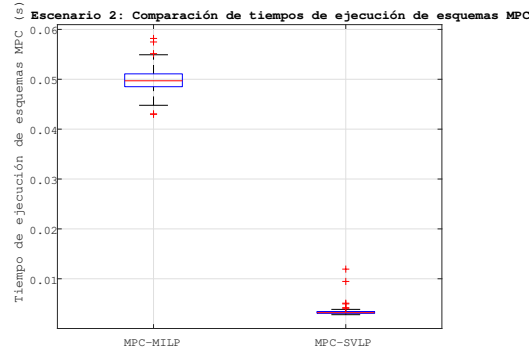


Figura 4.7: Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 2 (batería no ideal).

Cuadro 4.4: Estadísticas de tiempo de resolución en Escenario 2 (s).

Esquema MPC	Media	Mediana	Desviación Estándar
MPC-MILP	0.049764	0.049698	0.002317
MPC-SVLP	0.003357	0.003204	0.000884

En la Figura 4.7 se observa nuevamente una diferencia marcada entre la formulación MPC-MILP y MPC-SVLP. Mientras que MPC-MILP presenta tiempos de ejecución centrados en torno a 0.05 s, la formulación MPC-SVLP se concentra en valores cercanos a 0.003 s, evidenciando una reducción del orden de una magnitud.

Asimismo, el boxplot muestra una mayor dispersión en la formulación MPC-MILP respecto a MPC-SVLP, lo cual es consistente con los valores de desviación estándar presentados en la tabla 4.4. En particular, MPC-SVLP exhibe menor variabilidad en los tiempos de resolución, indicando un comportamiento computacional más estable en este escenario.

4.4.3. Escenario 3: Batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga

En la figura 4.8 se muestra el diagrama del esquema MPC para este escenario.

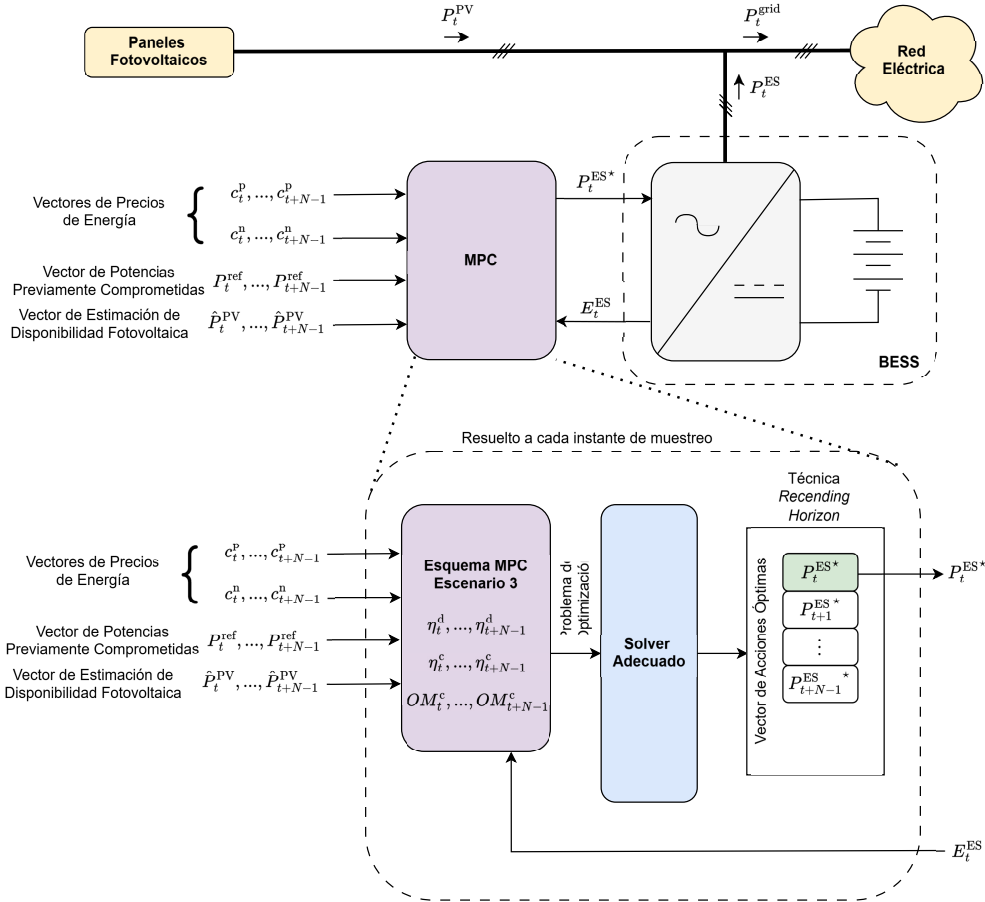


Figura 4.8: Esquema MPC escenario 3, batería no ideal y penalización a ciclos de carga y descarga.

Los parámetros y entradas del esquema MPC se muestran en el cuadro 4.5, mientras en la figura 4.9 se muestran los resultados de haber aplicado los 2 esquemas MPC admisibles, MILP basado en el propuesto en [2] y SVLP propuesto en este trabajo con fines comparativos. La formulación MILP se muestra en el Anexo A.

Con respecto a la elección de parámetros se hace con el mismo criterio que en el escenario anterior, se escogen buscando ser consistente con los presentados en [2] junto a las eficiencias de carga y descarga, y se agrega parámetro OM relacionado a costos operacionales y de gestión. El valor numérico está probablemente sobreestimado y se escogió con fines demostrativos para apreciar su impacto en las decisiones de control. Un valor realista debiese considerar el tener que cambiar el BESS por el fin de su vida útil, teniendo en cuenta el costo del BESS, costos logísticos de transporte del mismo, servicio de instalación y/o el costo de horas hombre

de quienes instalan el sistema, entre otros, lo cual escapa de los alcances de este trabajo.

Con respecto a los resultados obtenidos, al igual que en los casos anteriores, se valida que los 2 esquemas MPC admisibles son equivalentes, llegando a las mismas acciones de control óptimas, el mismo valor de función de costo y la misma cantidad de energía almacenada en el BESS durante cada instante de la simulación.

Cuadro 4.5: Parámetros de control MPC y del sistema PV+BESS en escenario 3

E_0^{ES}	$0,5 \cdot 48 \text{ kWh}$
N	60
T	4 minutos
$P_{\min}^{\text{ES}}$	-500 kW
$P_{\max}^{\text{ES}}$	500 kW
$E_{\min}^{\text{ES}}$	$0,2 \cdot 48 \text{ kWh}$
$E_{\max}^{\text{ES}}$	$0,9 \cdot 48 \text{ kWh}$
α	$1/0,999$
c_{t+N+1}^{soc}	c_{t+N+1}^{n}
c^{p}	Ver figura 4.2a
c^{n}	Ver figura 4.2a
p^{ref}	Ver figura 4.2b
$\hat{P}_{\text{PV}}$	Ver figura 4.2c
η^{c}	0,89
η^{d}	$1/0,89$
OM	2,527

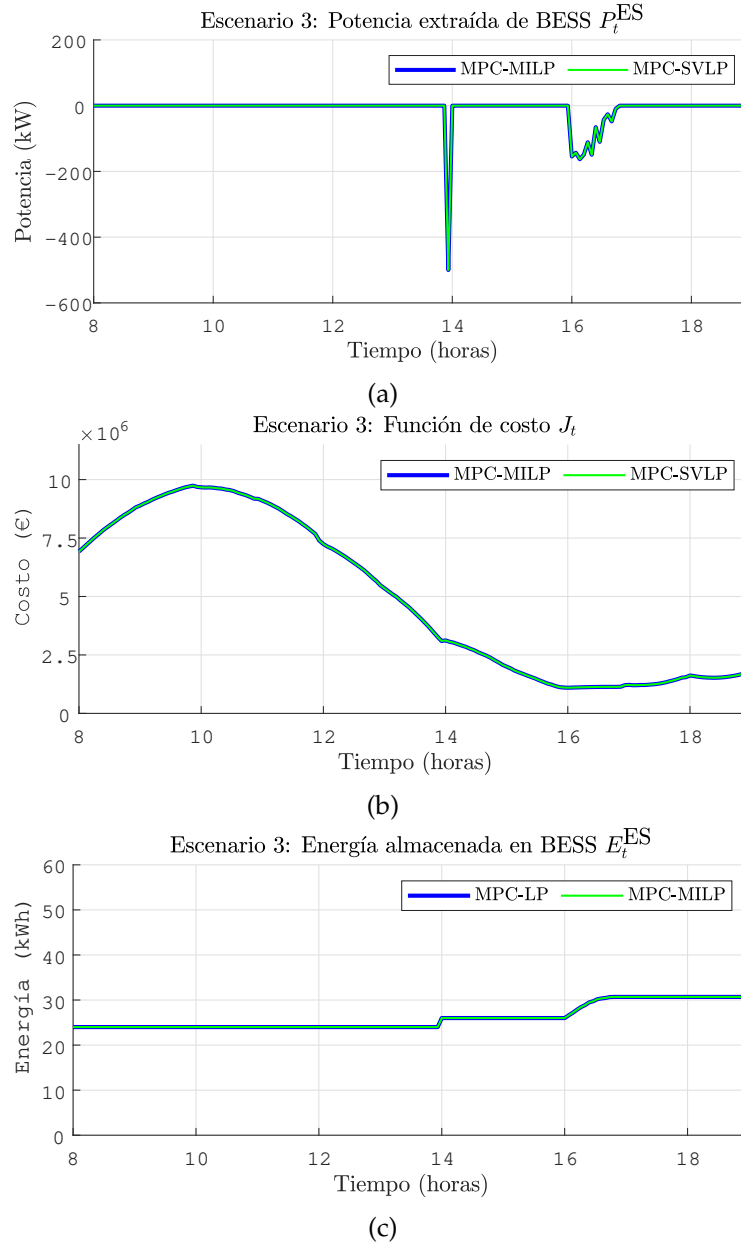


Figura 4.9: Resultados por cada Esquema MPC en el Escenario 3, batería no ideal y penalización a carga y descarga. (a) Potencia extraída del BESS. (b) Función de costo evaluada. (c) Energía almacenada en el BESS.

Con respecto a los tiempos de ejecución de los 2 esquemas MPC para este escenario, en la figura 4.10 se muestra el diagrama boxplot para cada esquema. En la tabla 4.6 se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución para cada esquema.

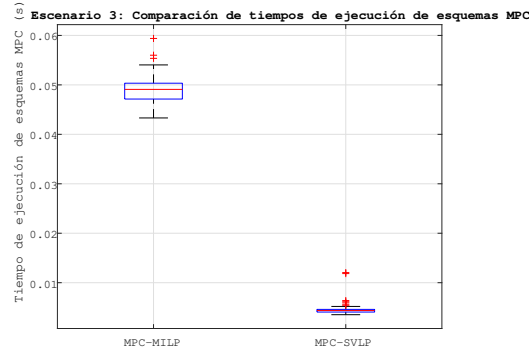


Figura 4.10: Boxplot de tiempos de ejecución para esquemas MPC-MILP y MPC-SVLP para el escenario 3 (batería no ideal).

Cuadro 4.6: Estadísticas de tiempo de resolución en Escenario 3 (s).

Esquema MPC	Media	Mediana	Desviación Estándar
MPC-MILP	0.048937	0.049089	0.002422
MPC-SVLP	0.004480	0.004369	0.000948

En la Figura 4.10 se observa nuevamente una diferencia significativa entre la formulación MPC-MILP y MPC-SVLP. Mientras que MPC-MILP presenta tiempos de ejecución centrados en torno a 0.049 s, la formulación MPC-SVLP se concentra en valores cercanos a 0.004 s, evidenciando una reducción cercana a un orden de magnitud.

Asimismo, el boxplot muestra una mayor dispersión en la formulación MPC-MILP respecto a MPC-SVLP, lo cual es consistente con los valores de desviación estándar presentados en la Tabla 4.6. En particular, MPC-SVLP exhibe menor variabilidad en los tiempos de resolución, indicando un comportamiento computacional más estable en este escenario.

4.4.4. Comparación Global de tiempos de ejecución de Escenarios

En la tabla 4.7 se muestra el resumen de estadísticas de ejecución de cada esquema MPC mientras que en la tabla 4.8 se presenta el número de variables decisión continuas y binarias.

Cuadro 4.7: Resumen de tiempos de resolución (media $\pm$ desviación estándar) por escenario (s).

Escenario	Esquema MPC	Tiempo (s)
Escenario 1	MPC-LP	$0,003083 \pm 0,004336$
	MPC-MILP	$0,042825 \pm 0,003665$
	MPC-SVLP	$0,002900 \pm 0,000672$
Escenario 2	MPC-MILP	$0,049764 \pm 0,002317$
	MPC-SVLP	$0,003357 \pm 0,000884$
Escenario 3	MPC-MILP	$0,048937 \pm 0,002422$
	MPC-SVLP	$0,004480 \pm 0,000948$

Cuadro 4.8: Número de variables de decisión por escenario y esquema MPC.

Escenario	Esquema MPC	Variables Continuas	Variables Binarias
Escenario 1	MPC-LP	$N + 1 = 61$	0
	MPC-MILP	$2(N + 1) = 122$	$(N + 1) = 61$
	MPC-SVLP	$2(N + 1) = 122$	0
Escenario 2	MPC-MILP	$3(N + 1) = 183$	$2(N + 1) = 122$
	MPC-SVLP	$2(N + 1) = 122$	0
Escenario 3	MPC-MILP	$3(N + 1) = 183$	$2(N + 1) = 122$
	MPC-SVLP	$3(N + 1) = 183$	0

A partir de los resultados presentados en las Tablas 4.7 y 4.8, se observan diferencias consistentes en el desempeño computacional de las formulaciones analizadas.

Acorde a lo esperado, las formulaciones lineales presentan tiempos de resolución significativamente menores que sus contrapartes MILP. En los Escenarios 1 y 2 se observa una mejora cercana a un factor 15, mientras que en el Escenario 3 la reducción es del orden de 10 veces. En este último caso, la diferencia relativa disminuye debido a que la formulación lineal incrementa su dimensión respecto al Escenario 2, mientras que la estructura MILP se mantiene inalterada.

Un aspecto relevante es que en el Escenario 1 ambas formulaciones LP difieren en un factor dos en el número de variables continuas; sin embargo, los tiempos de ejecución son del mismo orden de magnitud, e incluso ligeramente menores y más estables en la formulación SVLP. Este comportamiento sugiere que la estructura particular del problema lineal tiene mayor incidencia en el desempeño que el simple incremento en la dimensión en las variables continuas.

En conjunto, la evidencia experimental indica que la reformulación propuesta permite preservar un comportamiento computacional comparable al de un problema lineal puro.

CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones

En esta tesis se abordó el desafío de determinar si cierta clase de problemas de programación matemática que incorporan variables lógicas dependientes de variables continuas (habitualmente modelados como problemas MILP) admite una reformulación exacta como problemas LP.

El principal aporte del trabajo consiste en la formulación y demostración de tres teoremas de equivalencia que caracterizan formalmente las condiciones bajo las cuales dicha reformulación es posible. Estos resultados permiten establecer que, para los tres escenarios analizados, la complejidad combinatoria introducida por las variables binarias no es estructuralmente esencial, pudiendo eliminarse mediante una reformulación lineal equivalente basada en el teorema de adición de variables de holgura y el teorema del hipógrafo de funciones lineales por tramos cóncavas.

Desde el punto de vista computacional, se obtuvo además la forma matricial explícita de los problemas LP equivalentes, facilitando su implementación directa en herramientas de optimización estándar.

La utilidad práctica de los resultados fue validada mediante su aplicación a esquemas MPC para la gestión de carga y descarga en sistemas PV+BESS. Las simulaciones realizadas muestran que la reformulación LP permite obtener soluciones equivalentes a las formulaciones MILP tradicionales, logrando mejoras en el tiempo promedio de cómputo. Este resultado es particularmente relevante en contextos MPC, donde el problema de optimización debe resolverse de manera repetida en cada instante de muestreo.

En consecuencia, este trabajo aporta una caracterización estructural que permite distinguir condiciones cuándo la formulación MILP puede reemplazarse por una formulación LP computacionalmente más eficiente.

5.2. Trabajo futuro

A partir de los resultados obtenidos, se identifican diversas líneas de investigación futuras.

Por una parte, sería interesante extender los resultados obtenidos a clases más generales de problemas de programación matemática con variables lógicas dependientes de variables continuas. En particular, resulta de interés identificar nuevas estructuras que admitan reformulaciones exactas como problemas LP, así como determinar las condiciones bajo las cuales dichas equivalencias pueden demostrarse formalmente.

Asimismo, podría estudiarse el caso en que $g(u_k)$ sea una función cóncava no lineal. En tal escenario, si bien la equivalencia exacta con un problema LP podría no mantenerse sin aproximaciones, sería relevante cuantificar el compromiso entre calidad de solución y eficiencia computacional al utilizar aproximaciones lineales por tramos y solvers LP en comparación con métodos de optimización no lineal.

Por otra parte, se propone explorar la aplicación de los teoremas desarrollados a esquemas MPC con horizontes más largos o restricciones más exigentes en términos de tiempo de cómputo, evaluando su impacto en implementaciones en hardware o sistemas embebidos.

FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 1

En este anexo se presenta la formulación matricial del problema LP equivalente obtenido para el Escenario 1. Esta representación permite expresar el problema en la forma estándar de programación lineal, facilitando su implementación computacional.

El problema LP equivalente obtenido para el Escenario 1 corresponde a:

$$\begin{aligned} & \max_{u, \xi} \sum_{k=0}^N \xi_k \\ & \text{sujeto a:} \end{aligned} \tag{A.1}$$
$$\begin{aligned} \xi_k & \leq (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k & \text{con } k = 0, \dots, N \\ \xi_k & \leq (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k & \text{con } k = 0, \dots, N \\ u_k & \in U, & \text{con } k = 0, \dots, N \\ m_k & \leq u_k \leq M_k, & \text{con } k = 0, \dots, N \\ E_{\min} & \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, & \text{con } k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

donde u_k, ξ_k corresponden a las variables de decisión y r_k, c_k^p, c_k^n y b_k corresponden a parámetros conocidos definidos previamente en el desarrollo del problema.

Para obtener una formulación matricial del problema, es decir,

$$\begin{aligned} & \underset{v}{\text{máx}} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{v} \\ & \text{sujeto a:} \quad \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}, \end{aligned}$$

se sigue el siguiente procedimiento:

1. Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
2. Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
3. Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}$.

1) Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión

Definiendo el vector de variables de decisión como la concatenación de las variables de decisión del problema (A.1) se tiene:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

con

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix},$$

Con lo que la función de costo de (A.1) puede ser reescrita como:

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^N \tilde{\zeta}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}^T \mathbf{v}$$

Por lo que el vector de coeficientes para escribir la función de costo como combinación lineal de $\mathbf{v}$ corresponde a:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}$$

2) Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión

- La primera restricción sobre ξ_k en (A.1) dada por:

$$\xi_k \leq (c_k^p - b_k)u_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} -(c_k^p - b_k)u_k + \xi_k &\leq -c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\ [-\text{diag}\{\mathbf{c}_p - \mathbf{b}\} \quad \mathbf{I}_{N+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} &\leq [-\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r}] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Donde $\text{diag}\{\mathbf{x}\}$ denota a la matriz diagonal construida a partir del vector $\mathbf{x}$, $\mathbf{I}_{N+1}$ corresponde a la matriz identidad de dimensión $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$ otro representa el producto elemento a elemento, $\mathbf{c}_p = [c_0^p \dots c_N^p]^T$ y $\mathbf{r} = [r_0 \dots r_N]^T$

- La segunda restricción sobre ξ_k en (A.1) dada por:

$$\xi_k \leq (c_k^n - b_k)u_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} -(c_k^n - b_k)u_k + \xi_k &\leq -c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\ [-\text{diag}\{\mathbf{c}_n - \mathbf{b}\} \quad \mathbf{I}_{N+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} &\leq [-\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r}] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Donde $\mathbf{c}_n = [c_0^n \dots c_N^n]^T$

- La restricción referente a las cotas de u_k en (A.1) corresponde a:

$$m_k \leq u_k \leq M_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (\text{A.5})$$

Puede separarse en dos inecuaciones:

$$u_k \geq m_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (\text{A.6})$$

$$u_k \leq M_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \quad (\text{A.7})$$

Donde (A.6) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} -u_k &\leq -m_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\ [-\mathbf{I}_{N+1} \quad \mathbf{0}_{N+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} &\leq -\mathbf{m} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde $\mathbf{m} = [m_0 \dots m_N]^T$

Luego (A.7) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} u_k &\leq M_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} &\leq \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $\mathbf{0}_{N+1}$ corresponde a la matriz de ceros de dimensión $(N+1) \times (N+1)$ y $\mathbf{M} = [M_0 \dots M_N]^T$

Posteriormente, uniendo (A.8) y (A.9) se obtiene la siguiente restricción matricial:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

■ Finalmente la restricción:

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N \quad (\text{A.11})$$

Puede separarse en dos inecuaciones:

$$E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq E_{\max} \quad \text{con } k = 1, \dots, N \quad (\text{A.12})$$

$$E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} u_s \geq E_{\min} \quad \text{con } k = 1, \dots, N \quad (\text{A.13})$$

Donde (A.12) puede ser reescrita como:

$$-\sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq \frac{E_0 - E_{\max}}{T} = a_{\min} \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

y (A.13) puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\sum_{s=0}^{k-1} u_s \leq \frac{E_0 - E_{\min}}{T} = a_{\max} \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

Por lo que uniendo ambas restricciones se obtiene la siguiente restricción matricial:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

con

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{a}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{\max} \\ \vdots \\ a_{\max} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{\min} \\ \vdots \\ a_{\min} \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

3) Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{q}$

Al agrupar todas las restricciones matriciales, es decir (A.3), (A.4), (A.10) y (A.14), se tiene que la matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_p - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_n - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

Donde:

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_0^n \\ \vdots \\ c_N^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_0^p \\ \vdots \\ c_N^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{\max} \\ \vdots \\ a_{\max} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{\min} \\ \vdots \\ a_{\min} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

y $a_{\min}, a_{\max}$ están dados por:

$$a_{\min} = (E_0 - E_{\max})/T, \quad a_{\max} = (E_0 - E_{\min})/T \quad (\text{A.19})$$

FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 2

En este anexo se presenta la formulación matricial del problema LP equivalente asociado al Escenario 2.

El problema LP equivalente correspondiente puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 q^* &= \max_{\tilde{u}, \tilde{\xi}} \sum_{k=0}^N \tilde{\xi}_k \\
 \text{sujeto a:} & \\
 \tilde{\xi}_k &\leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \tilde{\xi}_k &\leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \tilde{\xi}_k &\leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 \eta_k^c m_k &\leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde $\tilde{u}_k, \tilde{\zeta}_k$ corresponden a las variables de decisión y $r_k, c_k^p, c_k^n, b_k, \eta_k^c$ y η_k^d corresponden a parámetros conocidos definidos previamente en el desarrollo del problema.

Para obtener una formulación matricial del problema, es decir,

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{v}}{\text{máx}} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{v} \\ & \text{sujeto a:} \quad \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}, \end{aligned}$$

se sigue el mismo procedimiento que en el Anexo A:

1. Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
2. Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
3. Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}$.

1) Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión

El vector de variables de decisión se define de forma análoga a lo presentado en el Anexo A, es decir,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\zeta}_N \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

Además, considerando que la función de costo coincide con la del Escenario 1, el vector de coeficientes para reescribir esta función como combinación lineal del vector de variables de decisión corresponde a:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

tal como se presenta en el Anexo A

2) Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión

- La primera restricción sobre $\tilde{\zeta}_k$ en (B.1) dada por:

$$\tilde{\zeta}_k \leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k + \xi_k \leq -c_k^n r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 & [-\text{diag} \{ \mathbf{c}_{nc} - \mathbf{b} \} \quad \mathbf{I}_{N+1}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r}]
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

respetando la notación del Anexo A y considerando $\mathbf{c}_{nc} = [c_0^n/\eta_0^c \dots c_N^n/\eta_N^c]^T$

- La segunda restricción sobre ξ_k en (B.1) dada por:

$$\xi_k \leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Es análoga a la anterior, por lo que puede ser reescrita como:

$$[-\text{diag} \{ \mathbf{c}_{pd} - \mathbf{b} \} \quad \mathbf{I}_{N+1}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r}] \tag{B.5}$$

donde $\mathbf{c}_{pd} = [c_0^p/\eta_0^d \dots c_N^p/\eta_N^d]^T$

- La tercera restricción sobre ξ_k en (B.1) corresponde a:

$$\xi_k \leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Luego, definiendo los vectores:

$$\mathbf{c}_{nd|pc} = \begin{bmatrix} c_0^{nd|pc} \\ \vdots \\ c_N^{nd|pc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{n|p} = \begin{bmatrix} c_0^{n|p} \\ \vdots \\ c_N^{n|p} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 c_k^{nd|pc} &= \begin{cases} \frac{c_k^n}{\eta_k^d} & \text{si } r_k \geq 0 \\ \frac{c_k^p}{\eta_k^c} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N \\
 c_k^{n|p} &= \begin{cases} c_k^n & \text{si } r_k \geq 0 \\ c_k^p & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N
 \end{aligned}$$

la restricción puede reescribirse como:

$$\tilde{\zeta}_k \leq \left(c_k^{\text{nd|pc}} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^{\text{n|p}} r_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

lo cual es análogo a la restricción anterior, por lo que puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\text{diag} \{ \mathbf{c}_{\text{nd|pc}} - \mathbf{b} \} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix}}_{\Psi} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_{\text{n|p}} \odot \mathbf{r}] = \boldsymbol{\psi} \quad (\text{B.6})$$

- La restricción referente a las cotas de $\tilde{u}_k$ en (B.1) corresponde a:

$$\eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

la cual es análoga a la restricción (A.5) analizada en el Anexo A, por lo que puede escribirse de forma matricial como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

donde $\mathbf{m} = [\eta_0^c m_0 \dots \eta_N^c m_N]^T$ y $\mathbf{M} = [\eta_0^d M_0 \dots \eta_N^d M_N]^T$

- Finalmente la restricción:

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

Es análoga a la restricción (A.11) analizada en el Anexo A, por lo que puede ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Con $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}_{\max}$ y $\mathbf{a}_{\min}$ definidos en el Anexo A.

3) Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{q}$

Al agrupar todas las restricciones matriciales, es decir (B.4), (B.5), (B.6), (B.7) y (B.8), se tiene que la matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{pd}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nc}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} \\ \Psi & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{\text{p}} \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_{\text{n}} \odot \mathbf{r} \\ \psi \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\text{min}} \\ \mathbf{a}_{\text{max}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

Donde la matriz Ψ y el vector ψ toman distintos valores dependiendo el valor de r_k , tal como se muestra a continuación:

$$\Psi = -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} - \mathbf{b}\} \quad (\text{B.10})$$

$$\psi = [-\mathbf{c}_{\text{n|p}} \odot \mathbf{r}] \quad (\text{B.11})$$

Considerando los vectores:

$$\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{nd|pc}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{nd|pc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{n|p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n|p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n|p}} \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_k^{\text{nd|pc}} = \begin{cases} \frac{c_k^{\text{n}}}{\eta_k^{\text{d}}} & \text{si } r_k \geq 0 \\ \frac{c_k^{\text{p}}}{\eta_k^{\text{c}}} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$c_k^{\text{n|p}} = \begin{cases} c_k^{\text{n}} & \text{si } r_k \geq 0 \\ c_k^{\text{p}} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Las demás matrices están dadas por:

$$\mathbf{c}_{\text{n}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{c}_{\text{nc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pd}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}}/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}}/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{c}_{\text{nd}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_0^d M_0 \\ \vdots \\ \eta_N^d M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{\max} \\ \vdots \\ a_{\max} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{\min} \\ \vdots \\ a_{\min} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \eta_0^c m_0 \\ \vdots \\ \eta_N^c m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

y $a_{\min}, a_{\max}$ estan dados por:

$$a_{\min} = (E_0 - E_{\max})/T, \quad a_{\max} = (E_0 - E_{\min})/T \quad (\text{B.17})$$

FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA LP EQUIVALENTE PARA EL ESCENARIO 3

En este anexo se presenta la formulación matricial del problema LP equivalente asociado al Escenario 3.

El problema LP equivalente correspondiente puede escribirse como:

$$q^* = \max_{\tilde{u}, \tilde{\zeta}, t} \sum_{k=0}^N \tilde{\zeta}_k + t_k$$

sujeto a:

(C.1)

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_k &\leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k && \text{con } k = 0, \dots, N \\ \tilde{\zeta}_k &\leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k && \text{con } k = 0, \dots, N \\ \tilde{\zeta}_k &\leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} && \text{con } k = 0, \dots, N \\ \eta_k^c m_k &\leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k, && \text{con } k = 0, \dots, N \\ E_{\min} &\leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, && \text{con } k = 1, \dots, N \end{aligned}$$
(C.2)

$$t_k \leq -\frac{OM_k}{\eta_k^d} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$t_k \leq \frac{OM_k}{\eta_k^c} \tilde{u}_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

donde u_k, ξ_k, t_k corresponden a las variables de decisión y $r_k, c_k^p, c_k^n, b_k, \eta_k^c, \eta_k^d$ y OM_k corresponden a parámetros conocidos definidos previamente en el desarrollo del problema.

Para obtener una formulación matricial del problema, es decir,

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{v}}{\text{máx}} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{v} \\ & \text{sujeto a:} \quad \mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}, \end{aligned}$$

se sigue el siguiente procedimiento:

1. Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
2. Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión.
3. Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A} \mathbf{v} \leq \mathbf{q}$.

1) Definir el vector de variables de decisión $\mathbf{v}$ y la función de costo como una combinación lineal del vector de variables de decisión

El vector de variables de decisión se define de forma análoga a lo presentado en el Anexo A y B, pero ahora añadiendo el vector $\mathbf{t}$ asociado a las nuevas variables de decisión, es decir,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Con lo anterior la función de costo de (C.1) puede ser reescrita como:

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^N \tilde{\xi}_k + t_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}^T \mathbf{v}$$

Por lo que el vector de coeficientes para escribir la función de costo como combinación lineal de $\mathbf{v}$ corresponde a:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}$$

2) Expresar cada restricción como una combinación lineal del vector de variables de decisión

- Las 3 restricciones sobre ξ_k en (C.1), es decir,

$$\begin{aligned} \xi_k &\leq \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k && \text{con } k = 0, \dots, N \\ \xi_k &\leq \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k && \text{con } k = 0, \dots, N \\ \xi_k &\leq \begin{cases} \left(\frac{c_k^n}{\eta_k^d} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^n r_k & \text{si } r_k \geq 0 \\ \left(\frac{c_k^p}{\eta_k^c} - b_k \right) \tilde{u}_k - c_k^p r_k & \text{si } r_k < 0 \end{cases} && \text{con } k = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Ya fueron analizadas en el Anexo B, obteniendo las restricciones matriciales (B.4), (B.5) y (B.6) respectivamente. Para este escenario basta extender las matrices para el nuevo set de variables de decisión $\mathbf{t}$, es decir:

$$\begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{nc} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r}] \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{pd} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r}] \quad (\text{C.5})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{nd|pc} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix}}_{\Psi} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \leq [-\mathbf{c}_{n|p} \odot \mathbf{r}] = \boldsymbol{\psi} \quad (\text{C.6})$$

- La restricción referente a las cotas de $\tilde{u}_k$ en (C.1) corresponde a:

$$\eta_k^c m_k \leq \tilde{u}_k \leq \eta_k^d M_k \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

la cual fue analizada en el Anexo B, obteniendo la restricción matricial (B.7). Al igual que en el punto anterior, para este escenario basta extender las matrices para el nuevo set de variables de decisión t , es decir:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

- La restricción:

$$E_{\min} \leq E_0 - T \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{u}_s \leq E_{\max}, \quad \text{con } k = 1, \dots, N$$

fue analizada en el Anexo B, obteniendo la restricción matricial (B.8). Al igual que los puntos anteriores, para este escenario basta extender las matrices para el nuevo set de variables de decisión t :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

- La sexta y séptima restricción sobre (C.1) pueden ser reescritas como:

$$\frac{OM_k}{\eta_k^d} \tilde{u}_k + t_k \leq 0 \quad (\text{C.9})$$

$$-\frac{OM_k}{\eta_k^c} \tilde{u}_k + t_k \leq 0 \quad (\text{C.10})$$

Por lo que estas pueden ser reescritas matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{OM}_d\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{OM}_c\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Definiendo los vectores columna $\mathbf{OM}_c$ y $\mathbf{OM}_d$ como:

$$\mathbf{OM}_c = \begin{bmatrix} OM_0^n / \eta_0^c \\ \vdots \\ OM_N^n / \eta_N^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{OM}_d = \begin{bmatrix} OM_0 / \eta_0^d \\ \vdots \\ OM_N / \eta_N^d \end{bmatrix}$$

3) Agrupar todas las restricciones en una única expresión matricial del tipo $\mathcal{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{q}$

Al agrupar todas las restricciones matriciales, es decir (C.4), (C.5), (C.6), (C.7), (C.8) y (C.11), se tiene que la matriz $\mathcal{A}$ y el vector $\mathbf{q}$ están dados por;

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{pd}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nc}} - \mathbf{b}\} & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \Psi & \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0}_{N \times (N+2)} & \mathbf{0}_{N \times (N+1)} \\ \text{diag}\{\mathbf{OM}_d\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -\text{diag}\{\mathbf{OM}_c\} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_p \odot \mathbf{r} \\ -\mathbf{c}_n \odot \mathbf{r} \\ \psi \\ -\mathbf{m} \\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{a}_{\min} \\ \mathbf{a}_{\max} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

Donde la matriz Ψ y el vector ψ toman distintos valores dependiendo el valor de r_k , tal como se muestra a continuación:

$$\Psi = -\text{diag}\{\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} - \mathbf{b}\} \quad (\text{C.13})$$

$$\psi = [-\mathbf{c}_{\text{n|p}} \odot \mathbf{r}] \quad (\text{C.14})$$

Considerando los vectores:

$$\mathbf{c}_{\text{nd|pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{nd|pc}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{nd|pc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{n|p}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n|p}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n|p}} \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_k^{\text{nd|pc}} = \begin{cases} \frac{c_k^n}{\eta_k^d} & \text{si } r_k \geq 0 \\ \frac{c_k^p}{\eta_k^c} & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

$$c_k^{\text{n|p}} = \begin{cases} c_k^n & \text{si } r_k \geq 0 \\ c_k^p & \text{si } r_k < 0 \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \dots, N$$

Las demás matrices están dadas por:

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_0^n \\ \vdots \\ c_N^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_0^p \\ \vdots \\ c_N^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{c}_{\text{nc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pd}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}}/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}}/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{c}_{\text{nd}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\text{pc}} = \begin{bmatrix} c_0^{\text{p}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ c_N^{\text{p}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_0^{\text{d}} M_0 \\ \vdots \\ \eta_N^{\text{d}} M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\text{max}} = \begin{bmatrix} a_{\text{max}} \\ \vdots \\ a_{\text{max}} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{a}_{\text{min}} = \begin{bmatrix} a_{\text{min}} \\ \vdots \\ a_{\text{min}} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \eta_0^{\text{c}} m_0 \\ \vdots \\ \eta_N^{\text{c}} m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{OM}_{\text{c}} = \begin{bmatrix} OM_0^{\text{n}}/\eta_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ OM_N^{\text{n}}/\eta_N^{\text{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{OM}_{\text{d}} = \begin{bmatrix} OM_0/\eta_0^{\text{d}} \\ \vdots \\ OM_N/\eta_N^{\text{d}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

y $a_{\text{min}}, a_{\text{max}}$ están dados por:

$$a_{\text{min}} = (E_0 - E_{\text{max}})/T, \quad a_{\text{max}} = (E_0 - E_{\text{min}})/T \quad (\text{C.21})$$

REESCRITURA DEL PROBLEMA DE INTERÉS EN EL ESCENARIO 3 COMO MILP

Considerando el problema de interés en el escenario 3, es decir, el problema de optimización dado por:

$$\max_{p_{t+k}^{\text{ES}}} J_3 = \sum_{k=0}^N c_{t+k} T \left[p_{t+k}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] - c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} p_{t+k}^{\text{ES}} - OM_{t+k} \left| p_{t+k}^{\text{ES}} \right| \quad (\text{D.1})$$

Sujeto a:

$$c_{t+k} = \begin{cases} \alpha^{-k} c_{t+k}^{\text{P}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \alpha^{-k} c_{t+k}^{\text{n}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

$$\eta_{t+k} = \begin{cases} \eta^{\text{d}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \\ \eta^{\text{c}} & \text{si } p_{t+k}^{\text{ES}} < 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

$$p_{\min}^{\text{ES}} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} \leq p_{\max}^{\text{ES}} \quad (\text{D.4})$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} p_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (\text{D.5})$$

Para reescribirlo como un problema MILP se analizarán los términos

$$g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}}) = c_{t+k} T \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \quad (\text{D.6})$$

$$g_{t+k}^2(P_{t+k}^{\text{ES}}) = c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.7})$$

$$g_{t+k}^3(P_{t+k}^{\text{ES}}) = OM_{t+k} \left| P_{t+k}^{\text{ES}} \right| \quad (\text{D.8})$$

por separado.

1) Reescribiendo $g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}})$

Considerando que:

$$g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}}) = c_{t+k} T \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \quad (\text{D.9})$$

y siendo consistente con el apéndice C de [2], es posible agregar la variable binaria $\delta_{t+k} \in \{0, 1\}$ tal que:

$$P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \geq 0 \iff \delta_{t+k} = 1 \quad (\text{D.10})$$

Donde, como P_{t+k}^{ES} es acotada entonces la proposición lógica (D.10) puede ser reescrita como las siguientes restricciones:

$$P_{t+k}^{\text{ES}} \geq \left(P_{\text{mín}}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right) (1 - \delta_{t+k}) + \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \quad (\text{D.11})$$

$$P_{t+k}^{\text{ES}} + \epsilon \leq \left(P_{\text{máx}}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) + \epsilon \right) \delta_{t+k} + \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \quad (\text{D.12})$$

Ahora considerando la nueva variable auxiliar continua z_{t+k}

$$z_{t+k} = \delta_{t+k} \cdot \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \quad (\text{D.13})$$

la cual puede ser representada mediante el siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$z_{t+k} \leq \left[P_{\max}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \delta_{t+k} \quad (\text{D.14})$$

$$z_{t+k} \geq \left[P_{\min}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \delta_{t+k} \quad (\text{D.15})$$

$$z_{t+k} \leq \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] - \left[P_{\min}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] (1 - \delta_{t+k}) \quad (\text{D.16})$$

$$z_{t+k} \geq \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] - \left[P_{\max}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] (1 - \delta_{t+k}) \quad (\text{D.17})$$

Con lo que $g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}})$ puede reescribirse con las nuevas variables como:

$$g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}}, \delta_{t+k}, z_{t+k}) = \alpha^{-k} T (c_{t+k}^{\text{P}} - c_{t+k}^{\text{n}}) z_{t+k} + \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} \left[P_{t+k}^{\text{ES}} - \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \quad (\text{D.18})$$

$$= \alpha^{-k} T (c_{t+k}^{\text{P}} - c_{t+k}^{\text{n}}) z_{t+k} + \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.19})$$

$$- \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} \left(P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \quad (\text{D.20})$$

2) Reescribiendo $g_{t+k}^2(P_{t+k}^{\text{ES}})$

Considerando que:

$$g_{t+k}^2(P_{t+k}^{\text{ES}}) = c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.21})$$

y siendo consistente con el apéndice C de [2], es posible agregar la variable binaria $\beta_{t+k} \in \{0, 1\}$ en que:

$$P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \iff \beta_{t+k} = 1 \quad (\text{D.22})$$

Donde, como P_{t+k}^{ES} es acotada entonces la proposición lógica (D.22) puede ser reescrita como las siguientes restricciones:

$$P_{t+k}^{\text{ES}} \geq P_{\min}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.23})$$

$$P_{t+k}^{\text{ES}} + \epsilon \leq (P_{\max}^{\text{ES}} + \epsilon) \beta_{t+k} \quad (\text{D.24})$$

Ahora considerando la nueva variable auxiliar continua w_{t+k}

$$w_{t+k} = \beta_{t+k} \cdot P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.25})$$

la cual puede ser representada mediante el siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$w_{t+k} \leq P_{\text{máx}}^{\text{ES}} \beta_{t+k} \quad (\text{D.26})$$

$$w_{t+k} \geq P_{\text{mín}}^{\text{ES}} \beta_{t+k} \quad (\text{D.27})$$

$$w_{t+k} \leq P_{t+k}^{\text{ES}} - P_{\text{mín}}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.28})$$

$$w_{t+k} \geq P_{t+k}^{\text{ES}} - P_{\text{máx}}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.29})$$

Con lo que $g_{t+k}^2 (P_{t+k}^{\text{ES}})$ puede reescribirse con las nuevas variables como:

$$g_{t+k}^2 (P_{t+k}^{\text{ES}}, \beta_{t+k}, w_{t+k}) = c_{t+N+1}^{\text{soc}} T (\eta_{t+k}^{\text{d}} - \eta_{t+k}^{\text{c}}) w_{t+k} + c_{t+N+1}^{\text{soc}} T \eta_{t+k}^{\text{c}} P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.30})$$

3) Reescribiendo $g_{t+k}^3 (P_{t+k}^{\text{ES}})$

Considerando que:

$$g_{t+k}^3 (P_{t+k}^{\text{ES}}) = OM_{t+k} |P_{t+k}^{\text{ES}}| = OM_{t+k} \text{sign}(P_{t+k}^{\text{ES}}) P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.31})$$

Notar que no es necesario introducir nuevas variables binarias ni continuas ya que la condición para que la regla lógica de $g_{t+k}^3 (P_{t+k}^{\text{ES}})$ es la misma que la de $g_{t+k}^2 (P_{t+k}^{\text{ES}})$. Por lo anterior se puede usar β_{t+k} y w_{t+k} para reescribir $g_{t+k}^3 (P_{t+k}^{\text{ES}})$ usando resultado de apéndice C de [2]

$$g_{t+k}^3 (P_{t+k}^{\text{ES}}, \beta_{t+k}, w_{t+k}) = 2OM_{t+k} w_{t+k} - OM_{t+k} P_{t+k}^{\text{ES}} \quad (\text{D.32})$$

4) Restricción sobre δ_{t+k} en respecto a β_{t+k}

Al considerar las proposiciones lógicas de ambas variables binarias:

$$\delta_{t+k} = 1 \iff P_{t+k}^{\text{ES}} - (P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}) \geq 0 \quad (\text{D.33})$$

$$\beta_{t+k} = 1 \iff P_{t+k}^{\text{ES}} \geq 0 \quad (\text{D.34})$$

es claro que $\delta_{t+k}, \beta_{t+k}$ no son independientes. Esto puede representarse por la siguiente restricción lineal:

$$(\delta_{t+k} - \beta_{t+k}) (P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}) \leq 0 \quad (\text{D.35})$$

5) Función de Costo equivalente

La función de costo considerando las nuevas variables binarias y continuas corresponde a

$$\begin{aligned} J_3(P_{t+k}^{\text{ES}}, \delta_{t+k}, z_{t+k}, \beta_{t+k}, w_{t+k}) &= \sum_{k=1}^N g_{t+k}^1(P_{t+k}^{\text{ES}}, \delta_{t+k}, z_{t+k}) - g_{t+k}^2(P_{t+k}^{\text{ES}}, \beta_{t+k}, w_{t+k}) \\ &\quad - g_{t+k}^3(P_{t+k}^{\text{ES}}, \beta_{t+k}, w_{t+k}) \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Donde considerando las expresiones obtenidas en (D.20), (D.30) y (D.32) se tiene:

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} T (c_{t+k}^{\text{p}} - c_{t+k}^{\text{n}}) z_{t+k} + \left[T (\alpha^{-k} c_{t+k}^{\text{n}} - c_{t+N+1}^{\text{soc}} \eta_{t+k}^{\text{c}}) + OM_{t+k} \right] P_{t+k}^{\text{ES}} \\ &\quad - (c_{t+N+1}^{\text{soc}} T (\eta_{t+k}^{\text{d}} - \eta_{t+k}^{\text{c}}) + 2OM_{t+k}) w_{t+k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} T c_{t+k}^{\text{n}} (P_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{P}_{t+k}^{\text{PV}}) \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Notar que la sumatoria de la derecha es independiente de las variables de decisión, por lo que puede omitirse para fines de la formulación del problema.

6) Formulación MILP

Con lo anterior se obtiene la siguiente formulación MILP:

$$\begin{aligned} \max_{P_{t+k}^{\text{ES}}, \delta_{t+k}, z_{t+k}, \beta_{t+k}, w_{t+k}} \quad J_3^* &= \sum_{k=0}^N \alpha^{-k} T (c_{t+k}^{\text{p}} - c_{t+k}^{\text{n}}) z_{t+k} + \left[T (\alpha^{-k} c_{t+k}^{\text{n}} - c_{t+N+1}^{\text{soc}} \eta_{t+k}^{\text{c}}) + OM_{t+k} \right] P_{t+k}^{\text{ES}} \\ &\quad - (c_{t+N+1}^{\text{soc}} T (\eta_{t+k}^{\text{d}} - \eta_{t+k}^{\text{c}}) + 2OM_{t+k}) w_{t+k} \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Sujeto a:

$$p_{t+k}^{\text{ES}} \geq \left(p_{\min}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right) (1 - \delta_{t+k}) + \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \quad (\text{D.39})$$

$$p_{t+k}^{\text{ES}} + \epsilon \leq \left(p_{\max}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) + \epsilon \right) \delta_{t+k} + \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \quad (\text{D.40})$$

$$z_{t+k} \leq \left[p_{\max}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \delta_{t+k} \quad (\text{D.41})$$

$$z_{t+k} \geq \left[p_{\min}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] \delta_{t+k} \quad (\text{D.42})$$

$$z_{t+k} \leq \left[p_{t+k}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] - \left[p_{\min}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] (1 - \delta_{t+k}) \quad (\text{D.43})$$

$$z_{t+k} \geq \left[p_{t+k}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] - \left[p_{\max}^{\text{ES}} - \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \right] (1 - \delta_{t+k}) \quad (\text{D.44})$$

$$p_{t+k}^{\text{ES}} \geq p_{\min}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.45})$$

$$p_{t+k}^{\text{ES}} + \epsilon \leq \left(p_{\max}^{\text{ES}} + \epsilon \right) \beta_{t+k} \quad (\text{D.46})$$

$$w_{t+k} \leq p_{\max}^{\text{ES}} \beta_{t+k} \quad (\text{D.47})$$

$$w_{t+k} \geq p_{\min}^{\text{ES}} \beta_{t+k} \quad (\text{D.48})$$

$$w_{t+k} \leq p_{t+k}^{\text{ES}} - p_{\min}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.49})$$

$$w_{t+k} \geq p_{t+k}^{\text{ES}} - p_{\max}^{\text{ES}} (1 - \beta_{t+k}) \quad (\text{D.50})$$

$$(\delta_{t+k} - \beta_{t+k}) \left(p_{t+k}^{\text{ref}} - \hat{p}_{t+k}^{\text{PV}} \right) \leq 0 \quad (\text{D.51})$$

$$\delta_{t+k} \in \{0, 1\} \quad (\text{D.52})$$

$$\beta_{t+k} \in \{0, 1\} \quad (\text{D.53})$$

$$E_{\min}^{\text{ES}} \leq E_t^{\text{ES}} - T \sum_{s=0}^{k-1} \eta_{t+s} p_{t+s}^{\text{ES}} \leq E_{\max}^{\text{ES}} \quad (\text{D.54})$$

REFERENCIAS

- [1] E. Perez, H. Beltran, N. Aparicio, and P. Rodriguez. Predictive power control for PV plants with energy storage. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 4(2):482–490, 2012.
- [2] A. L. Cedeño, R. López-Ahual, J. Rojas, G. Carvajal, C. Silva, and J. C. Agüero. Model predictive control for photovoltaic plants with non-ideal energy storage using mixed integer linear programming. Energies, 15(17):6427, 2022.
- [3] H. P. Williams. Model Building in Mathematical Programming. John Wiley & Sons, 5th edition, 2013.
- [4] F. S. Hillier. Introduction to Operations Research. McGraw-Hill, 2005.
- [5] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific, 1997.
- [6] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] D. G. Luenberger and Y. Ye. Linear and Nonlinear Programming. Springer, 4 edition, 2016.
- [8] S. J. Wright. Primal-Dual Interior Point Methods. SIAM, 1997.
- [9] W. L. Winston. Operations Research: Applications and Algorithms. Thomson Learning, 4th edition, 2004.
- [10] L. A. Wolsey. Integer Programming. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2020.
- [11] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. Integer and Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons, 1st edition, 1988.
- [12] G. Bednarz, D. Michalski, C. Houser, S. Huq, Y. Xiao, P. Rani Anne, and J. Galvin. The use of mixed-integer programming for inverse treatment planning with pre-defined field segments. Physics in Medicine & Biology, 47(13):2235, 2002.

- [13] M. C. Ferris, R. R. Meyer, and W. D'Souza. Radiation treatment planning: mixed integer programming formulations and approaches. In Handbook on Modelling for Discrete Optimization, pages 317–340. Springer, 2006.
- [14] M. Antaki, C. L. Deufel, and S. A. Enger. Fast mixed integer optimization (FMIO) for high dose rate brachytherapy. Physics in Medicine & Biology, 65(21):215005, 2020.
- [15] C. A. Floudas and X. Lin. Mixed integer linear programming in process scheduling: modeling, algorithms, and applications. Annals of Operations Research, 139(1):131–162, 2005.
- [16] J. Kallrath. Mixed integer optimization in the chemical process industry: experience, potential and future perspectives. Chemical Engineering Research and Design, 78(6):809–822, 2000.
- [17] Y. Cao, Z. Zhang, F. Cheng, and S. Su. Trajectory optimization for high-speed trains via a mixed integer linear programming approach. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 23(10):17666–17676, 2022.
- [18] A. Parisio, E. Rikos, and L. Glielmo. A model predictive control approach to microgrid operation optimization. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 22(5):1813–1827, 2014.
- [19] F. Delfino, G. Ferro, R. Minciardi, M. Robba, and M. Rossi. Identification and optimal control of an electrical storage system for microgrids with renewables. Sustainable Energy, Grids and Networks, 17:100183, 2019.
- [20] A. Bolzoni, A. Parisio, R. Todd, and A. Forsyth. Model predictive control for optimizing the flexibility of sustainable energy assets: an experimental case study. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 129:106822, 2021.
- [21] Z. Foroozandeh, S. Ramos, J. Soares, F. Lezama, Z. Vale, A. Gomes, and R. L. Joench. A mixed binary linear programming model for optimal energy management of smart buildings. Energies, 13(7):1625, 2020.
- [22] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, and M. M. Diehl. Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design. Nob Hill Publishing, 2nd edition, 2017.
- [23] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert. Constrained model predictive control: stability and optimality. Automatica, 36(6):789–814, 2000.
- [24] L. Grüne and J. Pannek. Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms. Springer, 2017.
- [25] G. C. Calafiore and L. El Ghaoui. Optimization Models. Cambridge University Press, 2014.

- [26] A. DeJans. The Linearization Handbook for MILP Optimization: Modeling Tricks and Patterns for Practitioners. Bit Bros LLC, 2025.
- [27] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. Variational Analysis, volume 317. Springer, 2009.
- [28] D. P. Bertsekas, A. Nedić, and A.E. Ozdaglar. Convex Analysis and Optimization, volume 1. Athena Scientific, 2003.
- [29] The MathWorks Inc. Matlab version: 9.7.01737446 (r2019b), 2019.
- [30] CPLEX. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 2023. Disponible en: <https://www.ibm.com/c1-es/products/ilog-cplex-optimization-studio>. (accessed on 21 August 2023).
- [31] IBM Corporation. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio – Software Product Compatibility Report. <https://www.ibm.com/software/reports/compatibility/clarity-reports/report/html/prereqsForProduct?deliverableId=BE7489907D6811E9BFD5252BC35BF06E&osPlatforms=spcrAllValues&duComponentIds=spcrAllValues&mandatoryCapIds=132|1|47|16|9|30&optionalCapIds=140>, 2024. Accessed: Nov. 12, 2025.
- [32] E. Wikner, E. Björklund, J. Fridner, D. Brandell, and T. Thiringer. How the utilised SOC window in commercial li-ion pouch cells influence battery ageing. Journal of Power Sources Advances, 8:100054, 2021.