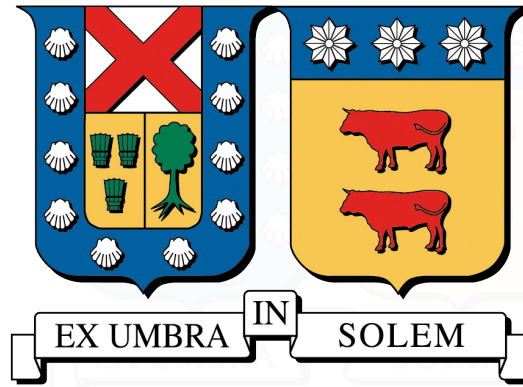


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS  
VALPARAÍSO - CHILE



**DISTRITAJE DE SISTEMAS DE TRANSPORTE DE BUSES  
URBANOS PARA INSPECCIÓN DE TARIFAS**

**DANIEL VICENTE CERDA COVARRUBIAS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : Dr. PABLO ESCALONA RODRÍGUEZ  
PROFESOR CORREFERENTE : Dr. VÍCTOR ALBORNOZ SANHUEZA

ABRIL, 2026



## CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

### 1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

**Tipo de monografía (marcar una opción):**  Memoria o trabajo de título  Tesis de Postgrado

**Título del trabajo:** Distritaje de sistemas de transporte de buses urbanos para inspección de tarifas

**Nombre del candidato(a):** Daniel Vicente Cerda Covarrubias

**Carrera / Grado:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería Industrial

**Campus:** Casa Central

**Departamento:** Industrias

### 2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Pablo Escalona Rodríguez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

### 3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses  12 meses  2 años  3 años  5 años  10 años

**Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):**

---

---

---

### 4.- FIRMAS

**Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:**

**Fecha:** 04/05/2026

**Firma:** \_\_\_\_\_

**Estudiante o Candidato(a):**

**Fecha:** 04/05/2026

**Firma:** \_\_\_\_\_

*Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.*

## **Agradecimientos**

Quisiera comenzar agradeciendo profundamente a mis padres Jacqueline y Marcelo, quienes han sido un pilar fundamental a lo largo de toda mi formación personal y académica. Gracias por su apoyo incondicional, por los valores que me han inculcado y por estar siempre presentes en cada etapa de este camino. Extiendo este agradecimiento a mi familia en general, por su cariño y comprensión.

Un agradecimiento muy especial a Antonia, mi compañera durante estos años. Gracias por tu amor, tu paciencia y tu apoyo incondicional, por acompañarme en los momentos de cansancio y duda, y por ser un espacio de contención y motivación constante. Este logro también es parte de nuestro camino compartido.

Agradezco sinceramente a mi profesor guía, Pablo Escalona, por su orientación, confianza y dedicación a lo largo de este trabajo. Su exigencia, sus comentarios y su disposición permanente fueron clave para el desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradezco a los profesores conocidos durante mi formación académica, y en especial a aquellos con quienes tuve la oportunidad de trabajar como ayudante, por las instancias de aprendizaje que contribuyeron significativamente a mi desarrollo profesional.

Finalmente, extiendo mi gratitud a todas aquellas personas que, de una u otra forma, me acompañaron y apoyaron a lo largo de este proceso.

---

## RESUMEN EJECUTIVO

**Resumen** — La evasión de tarifas en los sistemas de transporte público constituye uno de los principales desafíos para la sostenibilidad financiera y operativa de estos servicios. Esta práctica genera pérdidas económicas significativas, limita la capacidad de inversión en mejoras del sistema y afecta la percepción de calidad del servicio por parte de los usuarios. La falta de mecanismos efectivos de control favorece además la normalización de este comportamiento, debilitando la cultura de pago y produciendo efectos negativos de largo plazo. En respuesta a ello, las autoridades de transporte implementan varios métodos para garantizar el pago de las tarifas, siendo los principales las inspecciones de pasajeros y la imposición de multas. En este trabajo se aborda el problema de distritaje de un sistema de transporte de buses urbanos para gestionar las inspecciones de tarifas, teniendo en cuenta cuatro criterios básicos de distritaje: integridad, contigüidad, compacidad y balance. La red de transporte público se representa mediante un grafo no dirigido, en el cual los nodos representan unidades básicas y los arcos conectan unidades básicas adyacentes. Se propone un modelo de programación entera-mixta que utiliza un enfoque de partición basado en nodos. El modelo incorpora un número exponencial de restricciones de contigüidad, las cuales resultan imposibles de enumerar explícitamente para un sistema de transporte de buses urbanos real de gran escala. Para resolver el problema se adopta un enfoque de *branch-and-cut* basado en *cutting-planes*, el cual relaja inicialmente las restricciones de contigüidad y las añade iterativamente como cortes en los nodos activos del árbol de *branch-and-bound* hasta alcanzar optimalidad. Se exploran dos enfoques para la definición de las unidades básicas: conexiones entre paradas de buses y áreas poligonales obtenidas mediante una técnica de teselación. Los resultados muestran que el enfoque basado en conexiones entre paradas resulta computacionalmente intratable para redes de transporte de gran escala. En contraste, el uso de áreas poligonales mediante teselación permite resolver el problema de distritaje en sistemas de transporte de buses urbanos de gran escala, demostrando la aplicabilidad práctica del enfoque propuesto.

**Palabras Clave** — Distritaje, sistema de transporte de buses urbanos, contigüidad, compacidad, balance, evasión de tarifas, teselación, partición de grafos.

---

## ABSTRACT

**Resume** — Fare evasion in public transportation systems remains one of the main challenges to the financial and operational sustainability of these services. This practice generates substantial economic losses, limits investment capacity in system improvements, and affects users' perception of service quality. The absence of effective enforcement fosters a social learning effect, where evasive behavior becomes normalized, weakening the payment culture and producing long-term negative effects. In response, transit authorities implement several methods to ensure fare payment, the main ones being passenger inspections and fine enforcement. This paper addresses the districting problem in an urban bus transportation system to manage fare inspections, considering four basic districting criteria: integrity, contiguity, compactness, and balance. The transit network is represented by an undirected graph, where nodes represent basic units and edges represent adjacency between basic units. A mixed-integer programming model using a node-based partitioning approach is proposed. The model incorporates an exponential number of contiguity constraints, which are impossible to enumerate explicitly for a real large-scale urban bus transportation system. We adopt a cutting-plane based branch-and-cut approach, which initially relaxes the contiguity constraints and iteratively adds them as cuts at the active nodes of the branch-and-bound tree until optimality is achieved. Two approaches to defining basic units are explored: connections between bus stops and polygonal areas obtained using a tessellation technique. The results show that the approach based on connections between stops is computationally intractable for large-scale transportation networks. In contrast, the use of polygonal areas through tessellation allows the districting problem to be solved in large-scale urban bus transportation systems, demonstrating the practical applicability of the proposed approach.

**Keywords** — Districting, urban bus transportation system, contiguity, compactness, balance, fare evasion, graph partitioning.

# Índice de Contenidos

<b>1. Problema de Investigación</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>4</b>
2.1. Objetivo General	4
2.2. Objetivos Específicos	4
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
3.1. Evasión de tarifas en sistemas de transporte	5
3.2. Antecedentes de evasión en el sistema de transporte de Santiago	7
3.3. Estrategias y programas de inspección de tarifas	9
3.4. Distritaje	15
3.4.1. Integridad	16
3.4.2. Contigüidad	17
3.4.3. Compacidad	17
3.4.4. Balance	18
3.5. Distritaje en sistemas de transporte	18
3.6. Algoritmos de partición de grafos	21
<b>4. Formulación del modelo</b>	<b>25</b>
4.1. Representación del sistema de transporte	25
4.2. Variables de decisión	26
4.3. Modelo matemático	27
4.4. Restricción de contigüidad	29
<b>5. Generación de columnas</b>	<b>32</b>
<b>6. Descomposición de Benders</b>	<b>37</b>
<b>7. Branch-and-cut</b>	<b>45</b>
7.1. Esquema de descomposición	45
7.2. Enfoque de <i>branch-and-cut</i>	47
7.2.1. Relajación de TSD	48
7.2.2. Cotas para TSD	48
7.2.3. Algoritmo de <i>branch-and-cut</i>	49

<b>8. Caso de estudio</b>	<b>52</b>
8.1. Escalabilidad y elección de las unidades básicas . . . . .	53
8.1.1. Distritaje usando conexiones entre paradas de buses . . . . .	54
8.1.2. Distritaje usando áreas poligonales . . . . .	55
8.2. El número de distritos y la tolerancia de balance . . . . .	58
8.2.1. Una breve discusión sobre el número de hexágonos . . . . .	61
8.3. Uso de un conjunto de candidatos a centros de buena calidad . . . . .	63
8.4. Algoritmo recursivo jerárquico . . . . .	66
<b>9. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>
<b>A. Pseudocódigo <i>branch-and-cut</i></b>	<b>81</b>
<b>B. Modelo de cobertura total</b>	<b>83</b>

# 1 | Problema de Investigación

La evasión del pago de tarifas en los sistemas de transporte público constituye una problemática persistente que afecta de manera directa la sostenibilidad financiera y operativa de estos servicios (Barabino and Salis, 2023). Esta práctica genera pérdidas económicas significativas, limita la capacidad de inversión en mejoras del sistema y deteriora la percepción de seguridad, equidad y calidad del servicio por parte de los usuarios (Reddy et al., 2011; Porath and Galilea, 2020).

En los sistemas de transporte de buses urbanos, la fiscalización de tarifas resulta especialmente compleja debido a la alta densidad de paradas, el elevado número de líneas y la diversidad de rutas de servicio (Escalona et al., 2025). La magnitud del fenómeno de evasión ha sido documentada en múltiples sistemas de transporte a nivel internacional. En el sistema TransMilenio de Bogotá, la evasión alcanzó un 15.32 % durante el año 2023 (DTS, 2024), mientras que en el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago se registró una tasa de evasión del 36.5 % durante el primer semestre de 2025 (DTPM, 2025). Aunque en países desarrollados se reportan tasas en promedio menores, estas cifras podrían estar subestimadas (Ramos and Silva, 2023) e incluso tasas moderadas de evasión representan pérdidas anuales millonarias para los operadores, impactando directamente en la viabilidad financiera de los sistemas de transporte (Cantillo et al., 2022).

Frente a este escenario, las autoridades implementan estrategias centradas principalmente en inspecciones presenciales y en la aplicación de sanciones monetarias (Barabino et al., 2024; Board et al., 2022), adoptando en la práctica esquemas de despliegue para la inspección de tarifas tanto estáticos como móviles. Brotcorne et al. (2021) propone un esquema móvil en el cual diariamente se definen rutas de patrullaje que los equipos de inspección deben recorrer dentro de la red. Sin embargo, estos recorridos pueden resultar ineficientes o difíciles de ejecutar cuando los puntos iniciales y finales de las rutas se encuentran muy alejados entre sí. Adicionalmente, los equipos de inspección pueden enfrentar cargas de trabajo desiguales, generando conflictos laborales, desmotivación del

personal o resistencia a la implementación de las estrategias de fiscalización. Este aspecto adquiere particular relevancia cuando las condiciones laborales son objeto de negociación con organizaciones sindicales de inspectores.

Este contexto evidencia la necesidad de abordar el problema de distritaje para las inspecciones de tarifas en sistemas de transporte de buses urbanos mediante metodologías analíticas que permitan particionar la red en distritos que cumplan simultáneamente criterios de contigüidad geográfica, compacidad espacial, integridad territorial y balance de carga de trabajo entre los equipos de inspección. La formulación matemática de este problema conduce naturalmente a modelos de partición sobre grafos, ampliamente utilizados en la literatura de distritaje (Kalcsics and Ríos-Mercado, 2019). En particular, la condición de contigüidad suele modelarse mediante restricciones basadas en la formulación propuesta por Drexl and Haase (1999), la cual introduce un número exponencial de restricciones de conectividad destinadas a asegurar que cada distrito forme un subgrafo conexo. Si bien este enfoque garantiza una formulación exacta del requisito de contigüidad, la cantidad de restricciones resultante es exponencial y resultan prácticamente imposibles de enumerar explícitamente para sistemas de transporte de buses urbanos reales de gran escala, lo que impone desafíos computacionales significativos para su resolución directa y exige el desarrollo de enfoques avanzados de resolución basados en optimización entera.

En este marco, la presente investigación se orienta a responder interrogantes tales como: ¿cómo modelar formalmente el problema de distritaje para inspección de tarifas considerando simultáneamente criterios de integridad, balance, compacidad espacial y contigüidad geográfica?; ¿qué estrategias computacionales permiten manejar de manera eficiente la resolución del modelo propuesto?; ¿en qué medida la implementación de esquemas de resolución basados en técnicas de *branch-and-cut* posibilita la obtención de soluciones factibles y cercanas al óptimo en redes de gran escala?; y ¿cómo contribuye el uso de técnicas de teselación a la viabilidad computacional del enfoque propuesto y a su aplicabilidad práctica en sistemas de transporte de buses urbanos reales?

Para dar respuesta a estas interrogantes, el estudio plantea el desarrollo de un modelo de programación entera-mixta para la partición de un grafo no dirigido que representa la red de transporte de buses urbanos, incorporando los criterios básicos del distritaje. Dado el carácter exponencial de las restricciones de contigüidad, se adopta un enfoque de resolución basado en *branch-and-cut*, en el cual dichas restricciones se relajan inicialmente y se incorporan de forma

iterativa mediante la generación de planos de corte durante la exploración del árbol de *branch-and-bound*. Se implementa un esquema de agrupación espacial mediante teselación hexagonal regular, el cual permite estructurar el conjunto de unidades básicas consideradas y mejorar la escalabilidad del procedimiento, facilitando así la aplicación del enfoque propuesto en redes urbanas reales de gran tamaño.



## 2 | Objetivos

### 2.1. Objetivo General

Distritar un sistema de transporte de buses urbanos real de gran escala cumpliendo simultáneamente criterios de integridad territorial, contigüidad geográfica, compacidad espacial y balance de carga de trabajo.

### 2.2. Objetivos Específicos

- Formular un modelo de programación entera-mixta para el problema de distritaje, incorporando explícitamente los criterios de integridad territorial, contigüidad geográfica, compacidad espacial y equilibrio de carga entre distritos de inspección.
- Desarrollar e implementar un enfoque de resolución basado en técnicas de *branch-and-cut*, orientado a abordar la complejidad asociada a las restricciones de contigüidad de carácter exponencial, las cuales resultan prácticamente imposibles de enumerar de forma explícita para sistemas de transporte de buses urbanos de gran escala.
- Desarrollar una técnica de agrupación espacial basada en teselación hexagonal regular, que permita estructurar el conjunto de unidades básicas consideradas y reducir la complejidad computacional de las instancias reales de gran escala.
- Evaluar el desempeño computacional del enfoque propuesto aplicándolo a un sistema de transporte de buses urbanos real, analizando la calidad de las soluciones obtenidas y los tiempos de resolución alcanzados.

## 3 | Marco Teórico

### 3.1. Evasión de tarifas en sistemas de transporte

La evasión del pago de tarifas corresponde al comportamiento mediante el cual usuarios del sistema de transporte acceden al servicio sin efectuar el pago correspondiente, ya sea evitando los dispositivos de validación o aprovechando fallas operativas en los mecanismos de control. Este fenómeno ha sido reconocido como uno de los principales desafíos para la sostenibilidad financiera y operativa de los sistemas de transporte urbano (Barabino and Salis, 2023), generando pérdidas económicas directas, restricciones a la capacidad de inversión en mejoras del servicio y efectos negativos sobre la percepción de calidad y seguridad por parte de los usuarios (Reddy et al., 2011; Porath and Galilea, 2020).

Diversos estudios han documentado que la evasión no constituye únicamente un problema financiero, sino también un fenómeno de carácter conductual y social. La falta de mecanismos de fiscalización efectivos tiende a incentivar procesos de aprendizaje social, en los cuales el comportamiento evasivo se normaliza a través de la observación de otros usuarios que incumplen el pago sin enfrentar sanciones (Guarda et al., 2016). Esta dinámica refuerza la percepción de impunidad, debilita la cultura de cumplimiento y puede extender progresivamente el comportamiento evasivo dentro del sistema, contribuyendo a ampliar el fenómeno más allá de grupos marginales y transformándolo en una práctica socialmente tolerada en determinados contextos urbanos. A largo plazo, esta erosión de la cultura de pago puede adquirir un carácter estructural, dificultando la implementación de políticas correctivas y generando un círculo vicioso entre evasión, debilitamiento del control y aumento de las pérdidas operativas (Freiria and Sousa, 2025).

Desde una perspectiva operacional, la evasión impacta directamente en el equilibrio financiero

de los sistemas de transporte público, particularmente en aquellos que funcionan bajo esquemas de subsidio. La reducción de ingresos tarifarios obliga a una mayor dependencia de transferencias fiscales, tensionando los presupuestos públicos y reduciendo los recursos disponibles para mejoras en infraestructura, flota o calidad del servicio. En sistemas de gran escala, incluso tasas moderadas de evasión representan pérdidas de millones de dólares anuales, comprometiendo la viabilidad económica de las operaciones (Cantillo et al., 2022).

La magnitud observada de la evasión varía entre ciudades y países. En América Latina, por ejemplo, las tasas reportadas tienden a ser elevadas, como en el caso de Bogotá, donde la evasión alcanzó 15.32 % en 2023 (DTS, 2024), o Santiago, con un 36.5 % durante el primer semestre de 2025 (DTPM, 2025). En países desarrollados las tasas parecen menores, aunque podrían estar siendo subestimadas (Ramos and Silva, 2023). En el sistema de buses de Nueva York se reportó una evasión del 44 % durante el primer trimestre de 2025 (MTA, 2025); en el sistema de buses de Lyon, Francia, se alcanzó un 33 % en 2017 (Egu and Bonnel, 2020); y en el sistema de buses de Victoria, Australia, se registró una evasión del 5.1 % en octubre de 2024 (PTV, 2024). Estas cifras evidencian que la evasión constituye un fenómeno global, presente tanto en economías emergentes como desarrolladas, con impactos financieros relevantes para los operadores.

El estudio de la evasión de tarifas ha abordado distintos factores explicativos, entre los cuales se encuentran variables socio-demográficas, percepción del riesgo de sanción, percepción de calidad del servicio, duración de viajes y historial de multas por evasión.

Buccioli et al. (2013) estudia las características que afectan el comportamiento evasor en el sistema de transporte de buses urbanos de Reggio Emilia, Italia. Se encuentra correlación entre la evasión y ser joven, hombre e inmigrante no europeo. Además, los pasajeros evasores perciben mayor frecuencia de inspección de tarifas que los pasajeros que no evaden.

Barabino et al. (2015) estudia los factores que hacen a los usuarios evadir en el sistema de transporte de buses urbanos de Cagliari, Italia. Se muestra que hombres menores de 26 años con un bajo nivel educacional son evasores de tarifas con mayor probabilidad. Respecto a la duración del viaje y la percepción de calidad del servicio, ambos muestran correlación negativa con la probabilidad de evadir tarifas. Finalmente, los pasajeros con infracciones previas son más propensos a evadir.

Cools et al. (2018) estudia las variables que determinan la evasión de tarifas en el sistema de

transporte de Flanders, Bélgica. Respecto a las variables socio-demográficas, la edad y género son las más relevantes, siendo los viajeros más jóvenes y de género masculino los de mayor probabilidad de evadir. Además, se identifica que las personas que perciben una mayor probabilidad de ser inspeccionadas son menos propensas a evadir.

Barabino and Salis (2020) estudia la evasión de tarifas en el sistema de transporte de buses urbanos de Cagliari, Italia. Se encuentra que las personas desempleadas y las personas con un historial de evasión tienen mayor probabilidad de evadir el pago de tarifas.

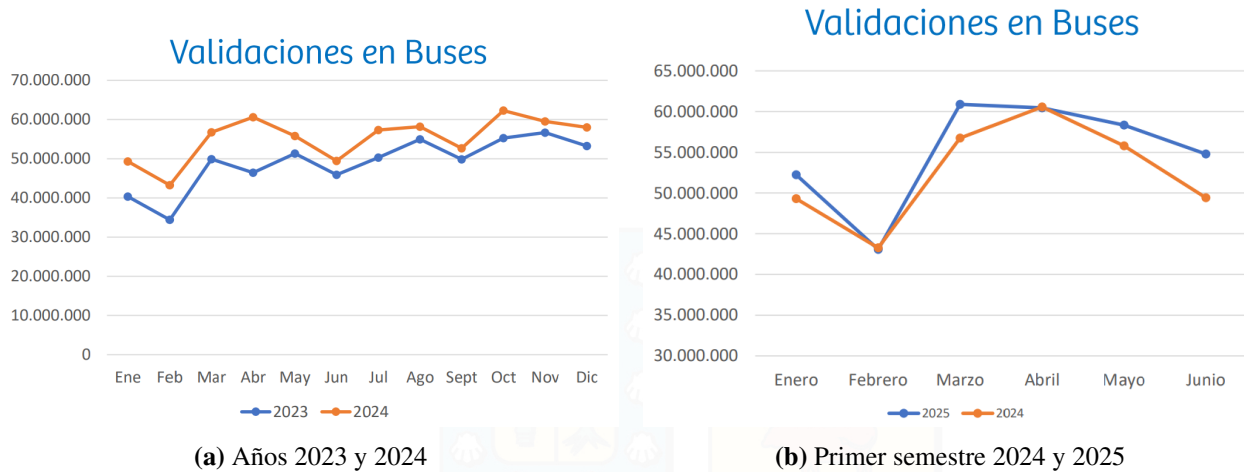
Estos antecedentes evidencian que la evasión constituye un fenómeno complejo, determinado por múltiples factores, cuya mitigación requiere estrategias de fiscalización sistemáticas y eficientes.

### 3.2. Antecedentes de evasión en el sistema de transporte de Santiago

El sistema de transporte público de Santiago, gestionado por el Directorio de Transporte Público Metropolitano (DTPM), ha enfrentado históricamente elevados niveles de evasión tarifaria, lo cual constituye un desafío estructural para su sostenibilidad financiera, operativa y su expansión. En la Tabla 3.1 se presentan los índices semestrales de evasión registrados en el sistema entre los años 2020 y 2025. Se observa una disminución sostenida desde la implementación del Plan Antievasión durante el primer semestre de 2023, acumulando una reducción total de 9.3 puntos porcentuales hasta el primer semestre de 2025.

Semestre	% Evasión
Segundo Semestre 2020	46.2 %
Primer Semestre 2021	41.2 %
Segundo Semestre 2021	36.1 %
Primer Semestre 2022	40.30 %
Segundo Semestre 2022	44.0 %
Primer Semestre 2023	45.8 %
Segundo Semestre 2023	39.8 %
Primer Semestre 2024	38.2 %
Segundo Semestre 2024	37.5 %
Primer Semestre 2025	36.5 %

**Tabla 3.1:** Índices semestrales de evasión tarifaria en Santiago.



**Figura 3.1:** Comparación de validaciones mensuales

La reducción de los niveles de evasión observada desde 2023 se encuentra respaldada por el aumento sostenido en la cantidad de validaciones realizadas en los buses del sistema. Las Figuras 3.1a y 3.1b presentan comparaciones de las validaciones mensuales entre los años 2023 y 2024, y entre el primer semestre de los años 2024 y 2025, respectivamente, evidenciando una tendencia creciente en el pago efectivo del pasaje.

En paralelo al incremento de validaciones, las labores de fiscalización han mantenido presencia en la red. Durante el primer semestre de 2024 se realizaron más de 135 505 controles en buses del sistema, detectándose y sancionándose a 15 064 pasajeros evasores (RED, 2024c). La evasión constituye una infracción grave que conlleva una multa de entre 1 y 1.5 UTM, equivalente aproximadamente a un rango de 69 000 a 104 000 pesos chilenos, lo que corresponde a cerca de 150 veces el valor del pasaje (Gob, 2024). En caso de reincidencia, el monto de la sanción se duplica. Cabe señalar que la multa puede ser reducida al 50 % si el infractor realiza el pago hasta cinco días antes de la citación judicial asociada a la infracción (BCN, 2021).

Respecto a los niveles de inspección, Barabino et al. (2014) estima que el porcentaje óptimo de fiscalización corresponde a aproximadamente un 3.8 %, es decir, que deberían inspeccionarse alrededor de 38 pasajeros por cada 1 000 usuarios del sistema. No obstante, las cifras de fiscalización previamente descritas sugieren un nivel de inspección efectivo cercano al 0.2 %, valor sustancialmente inferior al nivel óptimo propuesto en la literatura, lo que evidencia una brecha significativa entre la fiscalización observada y la requerida para desincentivar de manera efectiva la evasión.

El incumplimiento del pago de la multa implica la inscripción del infractor en el Registro de

Pasajeros Infractores (RPI), lo que conlleva sanciones adicionales, tales como la imposibilidad de obtener o renovar la licencia de conducir, restricción para tramitar el permiso de circulación o la retención de la devolución de impuestos a la renta con el fin de saldar la deuda pendiente (Gob, 2025). Desde su implementación en el año 2017, el RPI ha acumulado aproximadamente 22 000 personas inscritas.

En el sistema de transporte público de Santiago existen también beneficios tarifarios dirigidos a estudiantes y adultos mayores mediante tarjetas especiales de rebaja. Sin embargo, una proporción de usuarios utiliza de manera indebida estos beneficios portando tarjetas que no les pertenecen, configurando una forma adicional de evasión asociada al pago de una tarifa inferior a la correspondiente. En estos casos, la sanción considera multas de entre 1.5 y 3 UTM, equivalentes aproximadamente a un rango de 104 000 a 208 000 pesos chilenos. Durante el primer semestre de 2024, este tipo de incumplimiento representó un 16.3 % del total de evasores sancionados (DTPM, 2024).

Cabe señalar que las medidas orientadas a la reducción de la evasión tarifaria no se han limitado exclusivamente al aumento de fiscalizaciones y sanciones económicas. De forma complementaria, se han implementado acciones destinadas a facilitar la validación del pasaje, tales como la instalación de validadores en las puertas traseras de los buses (RED, 2024b) y la expansión del número de zonas pagas dentro del sistema (RED, 2024a). Estas intervenciones buscan disminuir las barreras operativas al pago, fortaleciendo los mecanismos de control y contribuyendo a la mejora progresiva de los niveles de evasión.

Este conjunto de antecedentes demuestra que, pese a mejoras sostenidas en los últimos años, la evasión sigue siendo elevada y es necesario desarrollar estrategias que permitan alcanzar niveles de evasión aceptables.

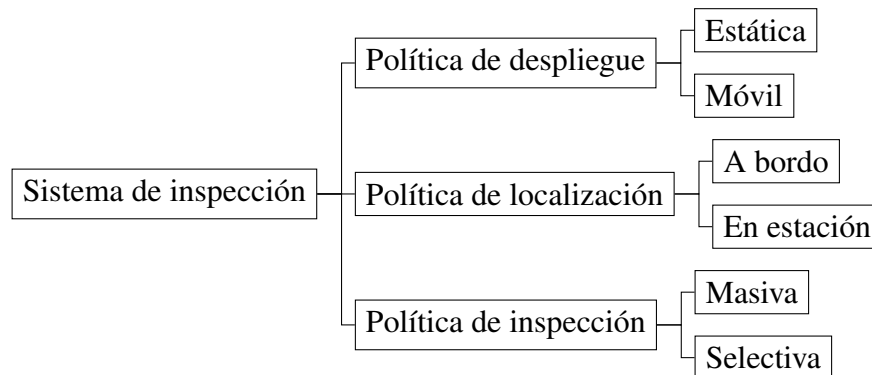
### 3.3. Estrategias y programas de inspección de tarifas

La inspección de tarifas en sistemas de transporte público es realizada por equipos de inspección y se define de acuerdo con el sistema de inspección de tarifas, el cual cuenta con tres componentes principales: la política de despliegue (*deployment policy*), la política de localización (*location policy*) y la política de inspección (*inspection policy*) (Escalona et al., 2024, 2025).

La política de despliegue se refiere a la forma en que los equipos de inspección son distribuidos

en la red de transporte. En la política de despliegue estática (*spot*), cada equipo es asignado a una ubicación geográfica fija en la que permanece controlando el pago de tarifas. En cambio, en la política de despliegue móvil (*patrolling*), los equipos siguen rutas espacio-temporales realizando inspecciones en distintos puntos de la red. Si bien la política de despliegue estática puede ser más sencilla de planificar y coordinar, la política de despliegue móvil permite una mayor cobertura territorial.

La política de localización define el lugar físico donde se realizan las inspecciones, distinguiéndose principalmente entre inspecciones a bordo de los vehículos (*on-board*) e inspecciones en estaciones o puntos de acceso al sistema (*in-station*). Por su parte, la política de inspección distingue entre esquemas de control masivo (*mass inspection*), donde se controla a la totalidad de los pasajeros presentes en el lugar de inspección, y esquemas de inspección selectiva (*selective inspection*), donde solo una fracción de los pasajeros es inspeccionada. La inspección selectiva puede ampliar la cobertura efectiva utilizando recursos limitados, pero requiere especial atención en su diseño para evitar sesgos en la selección de pasajeros.



**Figura 3.2:** Sistema de inspección

Para enfrentar la evasión de tarifas, uno de los principales problemas que enfrenta la autoridad de tránsito es el problema de la estrategia de inspección, el cual determina las distribuciones de probabilidad de inspección sobre la red con el objetivo de disuadir la evasión de pasajeros. Dependiendo de la política de despliegue utilizada, dichas distribuciones de probabilidad son de carácter espacial, en el caso del despliegue estático, o espacio-temporal, en el caso del despliegue móvil. En la literatura, este problema se aborda mayoritariamente mediante un enfoque de juego de Stackelberg líder-seguidor, donde la autoridad de tránsito actúa como líder definiendo las probabilidades de inspección, mientras que los pasajeros evasores, como seguidores, deciden si evadir o no el pago de

la tarifa considerando el riesgo asociado a ser inspeccionados.

Para implementar operacionalmente una estrategia de inspección resulta fundamental garantizar la impredecibilidad de los controles desde la perspectiva de los pasajeros, ya que la aparición de patrones regulares podría ser detectada y explotada por evasores. La implementación puede ser realizada mediante un conjunto de programas de inspección, donde cada programa corresponde a una colección de ubicaciones a inspeccionar o a una colección de rutas de patrullaje espacio-temporales, dependiendo de si se utiliza una política de despliegue estática o móvil, respectivamente. Cada programa tiene asociada una probabilidad de selección, de modo que diariamente la autoridad selecciona de forma impredecible uno de ellos, permitiendo que, en el largo plazo, la aplicación de los programas converja a las distribuciones de probabilidad definidas por el problema de la estrategia de inspección. El problema asociado a definir tanto los programas como sus probabilidades de selección se denomina como el problema del programa impredecible.

En la literatura se han estudiado tanto el problema de la estrategia de inspección como el problema del programa impredecible, considerando diversas combinaciones de políticas de despliegue, localización e inspección.

Jiang et al. (2012) estudia el problema de la estrategia de inspección bajo una política de despliegue móvil y una política de localización a bordo y en estaciones. Se considera un sistema de trenes urbanos de una sola línea, representado mediante un grafo espacio-temporal, y se adopta una política de inspección selectiva, ya que la probabilidad de inspeccionar a un pasajero depende de la tasa de inspección de los equipos. Los autores proponen un modelo de programación lineal formulado como un juego de Stackelberg líder-seguidor y utilizan como caso de estudio el sistema de trenes urbanos de Los Ángeles. Yin et al. (2012) extiende el trabajo de Jiang et al. (2012) mediante el uso de un grafo de transición espacio-temporal ampliado que permite incorporar restricciones temporales para los equipos de inspección. Adicionalmente, presentan una heurística para la generación de programas de inspección impredecibles; sin embargo, no se garantiza la convergencia de las distribuciones de probabilidad alcanzadas hacia aquellas definidas por el problema de la estrategia de inspección. Nuevamente, los experimentos se realizan considerando el sistema de trenes urbanos de Los Ángeles. Jiang et al. (2013) extiende el trabajo de Yin et al. (2012) incorporando incertidumbre en la ejecución de las rutas de patrullaje de los equipos de inspección. La incertidumbre es modelada utilizando procesos de decisión Markovianos dentro del

problema de la estrategia de inspección. Los experimentos, realizados en el sistema de trenes de Los Ángeles, demuestran que incorporar incertidumbre permite obtener mejores resultados en términos de reducción de la evasión y aumento de los ingresos de la autoridad de tránsito.

[Borndörfer et al. \(2012\)](#) estudia de forma independiente el problema de la estrategia de inspección y el problema del programa impredecible bajo una política de despliegue estático. Se analiza un sistema de peaje en carreteras modelado como un grafo espacial dirigido, considerando una política de inspección selectiva en la que la probabilidad de inspección depende de la proporción de conductores que los equipos de inspección logran inspeccionar en cada ubicación. Siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor, se proponen dos modelos para el problema de la estrategia de inspección: un modelo de programación lineal cuyo objetivo es maximizar los ingresos por peaje, y un modelo de programación entera-mixta cuyo objetivo es minimizar el número de evasores. Respecto al problema del programa impredecible, se formula como un problema de programación lineal y es resuelto mediante generación de columnas, donde el subproblema consiste en un modelo no lineal abordado mediante una heurística *greedy*. El caso de estudio corresponde al sistema de peaje a camiones en autopistas de Alemania. [Borndörfer et al. \(2015\)](#) extiende el trabajo de [Borndörfer et al. \(2015\)](#) considerando que los conductores pueden elegir sus rutas dentro de la red, de modo que los seguidores minimizan los costos asociados al viaje, los peajes y las multas. Asimismo, se analizan tanto esquemas de peajes fijos como peajes basados en la distancia recorrida. Los experimentos también se realizan sobre redes de autopistas alemanas.

[Krogvig \(2014\)](#) estudia el problema del programa impredecible bajo una política de despliegue móvil, una política de localización a bordo y una política de inspección masiva. Se considera un sistema de trenes urbanos con posibilidad de transbordos entre líneas, representado mediante un grafo espacio-temporal. El problema se aborda desde una perspectiva de juegos de Stackelberg líder-seguidor utilizando un enfoque de generación de columnas en el que se deriva una relajación lineal para el subproblema. El caso de estudio corresponde al sistema de trenes urbanos de Oslo, Noruega.

[Correa et al. \(2017\)](#) analiza el problema de la estrategia de inspección bajo una política de despliegue estático y una política de inspección masiva. Se consideran dos tipos de evasores: adaptativos y no adaptativos. Los pasajeros no adaptativos siguen una ruta fija previamente seleccionada, mientras que los pasajeros adaptativos modifican su ruta utilizando la información adquirida durante el viaje.

El problema se formula como un juego de Stackelberg líder-seguidor y se proponen modelos de programación no lineal entera-mixta para ambos tipos de evasores, los cuales se resuelven mediante un marco general de búsqueda local que permite obtener soluciones casi óptimas. Los casos de estudio corresponden al sistema de ferrocarriles de Holanda y el sistema de trenes urbanos de Ámsterdam.

[Bahamondes et al. \(2017\)](#) aborda el problema de la estrategia de inspección bajo una política de despliegue estático y una política de inspección masiva, considerando también evasores adaptativos y no adaptativos. El problema es modelado como uno de interdicción en redes siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor. Se proponen dos modelos de programación lineal de un solo nivel: uno cuyo objetivo es maximizar el costo esperado de los evasores y otro destinado a maximizar la recaudación por multas. Ambos modelos se resuelven mediante metaheurísticas basadas en esquemas de aproximación.

[Delfau et al. \(2018\)](#) estudia el problema del programa impredecible considerando una política de despliegue móvil, una política de localización en estaciones y una política de inspección masiva. Se desarrolla un algoritmo de cuatro pasos. En el primer paso, se seleccionan las estaciones a controlar utilizando una versión modificada del algoritmo bandido de múltiples brazos no estocástico. En el segundo paso, se calculan los tiempos de viaje entre dichas estaciones. En el tercer paso, se determinan las rutas de inspección mediante un problema de enrutamiento de vehículos. En el cuarto paso, se ajustan las rutas de inspección para considerar los horarios de los autobuses y de los equipos de inspección.

[Holzmann and Smith \(2021\)](#) estudia el problema de la estrategia de inspección bajo una política de despliegue estático y una política de inspección masiva, considerando evasores adaptativos y no adaptativos. El problema se formula como uno de interdicción en redes siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor, donde el seguidor identifica la ruta de menor costo esperado y el líder busca maximizar el costo esperado del viaje del seguidor. Se consideran funciones objetivo del líder tanto cóncavas como convexas, y se proponen algoritmos específicos para resolver cada una de las variantes del problema.

[Brotcorne et al. \(2021\)](#) analiza de forma independiente el problema de la estrategia de inspección y el problema del programa impredecible bajo una política de despliegue móvil y una política de inspección selectiva, con localización tanto en estaciones como a bordo de los vehículos. Se

modela un sistema de trenes urbanos de una línea mediante un grafo espacio-temporal. Siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor y utilizando una formulación exacta para las probabilidades de inspección, se formula el problema de la estrategia de inspección como un modelo de programación no lineal de un nivel, el cual se resuelve mediante una relajación lineal para obtener soluciones factibles. Respecto al problema del programa impredecible, este se aborda mediante generación de columnas, donde el problema maestro corresponde a un modelo de programación lineal y el subproblema a un modelo de programación no lineal entera-mixta responsable de la generación de programas de inspección. El caso de estudio es el sistema de trenes urbanos de Los Ángeles.

Escalona et al. (2024) estudia de forma conjunta el problema de la estrategia de inspección y el problema del programa impredecible considerando una política de despliegue móvil, una política de inspección selectiva y una política de localización en estaciones. Se modela un sistema de trenes urbanos con transbordos, representado mediante un grafo espacio-temporal, incorporando además heterogeneidad en la propensión al riesgo de los pasajeros evasores. Siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor y utilizando una formulación exacta para las probabilidades de inspección, ellos formulan el problema de la estrategia de inspección como un modelo de programación lineal de un nivel. Ellos reformulan el problema de la estrategia de inspección para obtener el problema del programa impredecible, garantizando que toda estrategia de inspección tiene un correspondiente programa impredecible. Para resolver dicho problema se propone un enfoque de generación de columnas basado en Brotcorne et al. (2021). El caso de estudio es nuevamente el sistema de trenes de Los Ángeles.

Escalona et al. (2025) aborda de forma conjunta el problema de la estrategia de inspección y el problema del programa impredecible bajo una política de despliegue estático y una política de localización a bordo. Se considera un sistema de buses urbanos, en el que las inspecciones son selectivas respecto a los buses y masivas para los pasajeros a bordo del bus seleccionado. Se consideran dos modalidades operativas: inspecciones realizadas con el bus detenido, interrumpiendo su programación, e inspecciones realizadas con el bus en movimiento, sin interrumpir su programación. Siguiendo un enfoque de juegos de Stackelberg líder-seguidor y utilizando una formulación exacta para las probabilidades de inspección, ellos formulan el problema de la estrategia de inspección como un modelo de programación no lineal de un nivel. Para obtener soluciones factibles se considera

una heurística basada en la relajación lineal del modelo. Siguiendo el enfoque de Escalona et al. (2024), el problema de la estrategia de inspección es reformulado para obtener el problema del programa impredecible, asegurando que cada estrategia de inspección tiene un correspondiente programa impredecible. La resolución se efectúa utilizando generación de columnas. El caso de estudio corresponde al sistema de buses urbanos de Berlín, Alemania.

Entre los trabajos revisados, varios abordan el problema del programa impredecible y generan programas de inspección que pueden ser implementados operacionalmente. No obstante, dichas propuestas suelen omitir la consideración de ciertas dificultades prácticas relevantes para su aplicación en entornos reales. Por ejemplo, las rutas de patrullaje obtenidas pueden resultar operacionalmente complejas cuando los puntos de inicio y término se encuentran excesivamente distantes entre sí, o bien pueden producir asignaciones de trabajo desiguales entre los equipos de inspección. Estas situaciones adquieren especial relevancia en contextos donde las condiciones laborales constituyen una materia de negociación con organizaciones sindicales de inspectores.

### 3.4. Distritaje

El distritaje (*districting*) consiste en agrupar pequeñas unidades geográficas, denominadas unidades básicas, en un número predefinido de grupos espaciales llamados distritos (Kalesics and Ríos-Mercado, 2019). Este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiado durante las últimas décadas en diversos contextos de aplicación, entre los cuales destacan el diseño de distritos electorales (Bozkaya et al., 2011; Chopra et al., 2023; Lari et al., 2016), la delimitación de zonas para patrullaje policial (Camacho-Collados et al., 2015; Liberatore et al., 2022), el diseño de territorios para la recolección de residuos sólidos (Herrera-Granda et al., 2019; Lin and Kao, 2008), y la definición de áreas comerciales o distritos de ventas (Moya-García and Salazar-Aguilar, 2020; Ríos-Mercado and Escalante, 2016; Salazar-Aguilar et al., 2011). En todos estos ámbitos, el distritaje constituye una herramienta fundamental para organizar el territorio de manera eficiente, facilitando la planificación operativa y la asignación de recursos.

Entre los principales objetivos del distritaje se encuentran la mejora de la eficiencia operativa (Liberatore and Camacho-Collados, 2016; Perrier et al., 2006), el balance equitativo de cargas de trabajo (Zhang and Brown, 2013), la asignación justa de recursos (Farughi et al., 2020), el incremento

en los niveles de servicio y la reducción de los tiempos de respuesta (Bucarey et al., 2015; Chen et al., 2019), así como la disminución de externalidades ambientales asociadas a desplazamientos excesivos o ineficientes (Mostafayi Darmian et al., 2020). Estos objetivos, que en ocasiones se contraponen entre sí, transforman al distritaje en un problema de naturaleza multicriterio, en el cual se deben encontrar soluciones que permitan satisfacer simultáneamente distintos requerimientos.

Desde el punto de vista de la modelación, el problema de distritaje se aborda típicamente como un problema de particionamiento de grafos. Dependiendo de la naturaleza de las unidades básicas, estas pueden ser representadas como nodos o como arcos del grafo subyacente. El enfoque basado en nodos se utiliza en aplicaciones donde las unidades corresponden a áreas geográficas que pueden ser concentradas en nodos, como ocurre en el distritaje electoral o policial. En contraste, el enfoque basado en arcos resulta adecuado cuando las unidades básicas corresponden a tramos viales, calles o carreteras, como ocurre en el distritaje comercial o el distritaje para servicios de mantenimiento invernal.

A pesar de la diversidad de aplicaciones, la mayoría de los problemas de distritaje comparten un conjunto común de criterios fundamentales que guían la construcción de los distritos. En particular, cuatro criterios básicos son ampliamente utilizados en la literatura: integridad, contigüidad, compacidad y balance (Ricca et al., 2008, 2013; Shirabe, 2009).

### 3.4.1. Integridad

El criterio de integridad (*integrity*) establece que cada unidad básica debe ser asignada a un único distrito, asegurando que la partición cubra completamente el territorio sin superposiciones ni fraccionamientos. Este requerimiento garantiza la coherencia administrativa y operacional del sistema, evitando zonas ambiguas o dobles asignaciones territoriales. La integridad es particularmente relevante en contextos como la definición de áreas comerciales o territorios de venta, donde la asignación exclusiva de clientes a un distrito evita disputas entre vendedores y permite establecer relaciones comerciales estables y de largo plazo.

### 3.4.2. Contigüidad

El criterio de contigüidad (*contiguity*) exige que cada distrito forme una región espacial conexas, de modo que cualquier unidad básica pueda alcanzarse desde cualquier otra perteneciente al mismo distrito recorriendo exclusivamente unidades del propio distrito. En otras palabras, este criterio asegura la conectividad interna de cada territorio delimitado, evitando la presencia de distritos fragmentados o desconexos (Arredondo et al., 2021). La contigüidad adquiere especial relevancia en aplicaciones donde la continuidad geográfica facilita los desplazamientos internos, la coordinación de actividades de los equipos de trabajo y la supervisión de las operaciones dentro de cada distrito.

Desde el punto de vista matemático, la contigüidad se modela mediante restricciones dentro del problema de particionamiento. Generalmente se emplea un grafo de adyacencia, donde los nodos representan las unidades básicas y los arcos conectan aquellas unidades que comparten frontera o cercanía espacial directa. Una de las formulaciones clásicas corresponde a la propuesta por Drexl and Haase (1999), caracterizada por presentar un número exponencial de restricciones de contigüidad. Alternativamente, Shirabe (2009) propone una formulación polinomial basada en restricciones de flujo en redes. Por su parte, Mehrotra et al. (1998) plantea una formulación más simple y computacionalmente eficiente basada en estructuras de árboles de caminos mínimos. No obstante, esta última aproximación puede excluir algunas configuraciones de distritos contiguos, por lo que no garantiza la obtención de soluciones óptimas para el problema general.

### 3.4.3. Compacidad

El criterio de compacidad (*compactness*) busca la formación de distritos con configuraciones espaciales regulares y concentradas, reduciendo la dispersión territorial de sus unidades básicas. Distritos compactos permiten limitar distancias internas, favorecen la eficiencia de los desplazamientos, facilitan la supervisión de tareas en terreno y mejoran la identificabilidad geográfica de los territorios asignados.

Este criterio suele ser abordado directamente dentro de la función objetivo del problema (Borndörfer et al., 2023). En la literatura se distinguen principalmente dos tipos de medidas de compacidad: geométricas y basadas en distancia. Las medidas geométricas cuantifican la regularidad de la forma de los distritos a partir de indicadores vinculados al área o el perímetro de estos (Lei et al., 2012). Por

su parte, las medidas basadas en distancia evalúan la dispersión territorial calculando típicamente la suma de las distancias entre las unidades básicas y el centro de su distrito. Este último enfoque resulta especialmente adecuado cuando el interés principal se encuentra en minimizar los desplazamientos dentro de cada distrito.

#### 3.4.4. Balance

El criterio de balance (*balance*) busca asegurar una distribución equitativa de la carga de trabajo entre los distritos resultantes (Alvarez-Miranda et al., 2025). La definición específica de carga de trabajo depende directamente del contexto de aplicación: puede corresponder, por ejemplo, al número de habitantes en el distritaje electoral, al volumen de residuos recolectados en distritaje para recolección de residuos, o a la demanda de atención policial en distritaje policial.

Se pueden distinguir dos tipos de medidas de carga de trabajo distrital: aditivas sobre unidades básicas o no aditivas sobre unidades básicas. Las medidas aditivas calculan la carga de un distrito como la suma directa de las cargas individuales de las unidades básicas que lo componen. Este enfoque es adecuado cuando no existe superposición de carga entre unidades. Sin embargo, en situaciones donde múltiples unidades comparten carga de trabajo común, la utilización de medidas aditivas conduce a una sobreestimación de la carga real. En tales casos, es necesario emplear medidas no aditivas, capaces de reflejar de manera más precisa la carga efectiva experimentada por cada distrito.

### 3.5. Distritaje en sistemas de transporte

La literatura sobre el distritaje aplicado a sistemas de transporte es, en comparación con otros ámbitos de uso del distritaje, relativamente limitada. Los trabajos existentes han abordado este problema desde distintas perspectivas, considerando distintos criterios de distritaje y enfocándose en aplicaciones tales como la tarificación de sistemas de transporte, la gestión del tráfico vehicular y la operación de centros de atención ferroviarios.

En el ámbito de la tarificación de sistemas de transporte, Tavares Pereira et al. (2007) y Schöbel and Urban (2025) estudian la partición de redes de transporte en zonas tarifarias que determinan los precios de los viajes.

Tavares Pereira et al. (2007) formula un problema biobjetivo que incorpora el criterio de balance, considerando medidas de carga de trabajo distrital aditivas tales como superficie, población, número de estaciones ferroviarias o población activa. El modelo incluye restricciones asociadas a la integridad, la compacidad, el número de distritos y la cantidad de unidades básicas por distrito. Ellos aproximan la frontera de Pareto mediante un algoritmo evolutivo de búsqueda local, el cual es aplicado al sistema de transporte público de París, Francia.

Por su parte, Schöbel and Urban (2025) presenta un modelo de programación lineal entera-mixta cuyo objetivo es minimizar la suma de las desviaciones entre las nuevas tarifas propuestas y las tarifas de referencia. En este trabajo se consideran explícitamente los criterios de integridad y contigüidad, sin incluir el balance de cargas de trabajo. El modelo incorpora restricciones adicionales destinadas a evitar beneficios tarifarios derivados de la compra de boletos para trayectos más largos que el recorrido real (*no-elongation constraints*) o fragmentar artificialmente un viaje en múltiples boletos parciales (*no-stopover constraints*). La formulación es resuelta solo en instancias de tamaño reducido mediante un solver comercial.

El distritaje orientado a la gestión del tráfico ha sido abordado por Etemadnia et al. (2014) y Wang et al. (2021), quienes estudian la partición de redes de transporte en distritos asignados a centros de control responsables de mitigar la congestión vehicular. En este tipo de aplicaciones, además de los criterios tradicionales del distritaje, se introduce el criterio de independencia, cuyo objetivo es reducir las interacciones operativas entre distritos adyacentes.

Etemadnia et al. (2014) propone un modelo de programación entera que integra los criterios de integridad, contigüidad, balance e independencia. La independencia se aborda mediante la minimización de los flujos vehiculares que cruzan las fronteras entre distritos. La carga de trabajo distrital se define de manera aditiva, considerando el número de unidades básicas por distrito y los flujos vehiculares dentro de los distritos. El balance se implementa a través de cotas superiores e inferiores para la carga de trabajo. Los autores desarrollan dos heurísticas: una de tipo recursivo basada en la identificación de cortes mínimos que preserven conectividad y equilibrio, y otra basada en un procedimiento *greedy* de agregación de nodos para la identificación de las subredes de mayor independencia de flujos. Ambas heurísticas son evaluadas sobre la red de transporte de Dallas, Estados Unidos.

Por otro lado, Wang et al. (2021) desarrolla una formulación de distritaje que considera simultá-

neamente unidades básicas representadas por nodos y arcos. Se plantea un modelo de programación lineal entera-mixta que incorpora los criterios de integridad, contigüidad, balance e independencia. El balance se gestiona mediante la minimización de la desviación total de la carga de trabajo distrital, la cual es definida como una medida aditiva. Para su resolución, el modelo es reformulado como un modelo de programación entera y se propone un algoritmo híbrido que combina generación de columnas con un procedimiento iterativo de búsqueda basado en exploración de vecindarios y búsqueda intensiva. Este algoritmo es aplicado a una red ferroviaria de alta velocidad de China, considerando instancias de hasta 169 unidades básicas.

En una aplicación orientada a la gestión de centros de atención telefónica ferroviarios, [Xie and Ouyang \(2016\)](#) estudia el problema de particionar la red ferroviaria en distritos asignados a mesas de atención de usuarios. Formulan un modelo de programación entera-mixta que incorpora los criterios de integridad, contigüidad, compacidad, balance y confiabilidad del servicio. Los criterios de compacidad y balance son abordados en la función objetivo, mientras que los restantes se implementan mediante restricciones. La carga de trabajo distrital se define de forma aditiva como la demanda esperada de llamadas entrantes a cada centro. Para resolver el modelo, los autores proponen un algoritmo que se compone de dos etapas: primero, una heurística constructiva destinada a obtener una solución inicial; posteriormente, una heurística de búsqueda por vecindarios que utiliza dicha solución como punto de partida (*warm-start*) para mejorarla progresivamente. El algoritmo es aplicado a una red ferroviaria de Estados Unidos conformada por 157 unidades básicas.

Un trabajo que aborda de forma explícita la aplicación del distritaje a la inspección de tarifas se presenta en [Escalona et al. \(2025\)](#). En dicho estudio, un sistema de transporte de buses urbanos es representado mediante un grafo no dirigido, donde los nodos corresponden a paradas y los arcos representan conexiones entre estas. Mediante un enfoque de enumeración completa y considerando que cada parada es un candidato a centro de distrito, los autores definen tantos distritos como paradas existen en la red. Siguiendo un enfoque de cobertura, los distritos se construyen como subgrafos que contienen todos los nodos y arcos alcanzables desde el centro de distrito dentro de un tiempo máximo de viaje predefinido. En este trabajo no se consideran explícitamente los criterios de integridad, compacidad ni balance.

En síntesis, la literatura muestra un interés en la aplicación del distritaje a problemas del ámbito del transporte, abordando una variedad de contextos operativos y proponiendo múltiples enfoques

de modelación y resolución. Sin embargo, hasta la fecha no se identifican trabajos que hayan considerado el diseño de distritos para inspección de tarifas en sistemas de transporte público incorporando simultáneamente los cuatro criterios básicos del distritaje (integridad, contigüidad, compacidad y balance) bajo una definición de carga de trabajo distrital no aditiva sobre las unidades básicas. Adicionalmente, gran parte de los enfoques existentes presentan limitaciones en términos de escalabilidad, siendo evaluados principalmente en instancias de tamaño reducido, lo que restringe su aplicabilidad directa a redes de transporte reales de gran escala.

### 3.6. Algoritmos de partición de grafos

La partición de grafos constituye un área ampliamente estudiada debido a sus múltiples aplicaciones en ámbitos como la computación paralela, minería de datos, análisis de redes sociales, procesamiento de imágenes, simulación de mallas y planificación de rutas, entre otros (Çatalyürek et al., 2023; Cordero et al., 2025). De manera general, el problema consiste en dividir los nodos (unidades básicas) de un grafo en un número predefinido de subconjuntos (distritos) con pesos (cargas de trabajo) aproximadamente equivalentes. En este marco, el peso de cada subconjunto se define como la suma de los pesos de los nodos que lo componen, lo que implica el uso de una medida de carga de trabajo aditiva.

Existen distintos tipos de problemas de partición de grafos, diferenciados principalmente por la función objetivo que adoptan y los criterios que se priorizan en la construcción de los subconjuntos. Algunos tipos de problemas de partición de grafos son los siguientes:

- *Minimum edge-cut graph partitioning problem*
- *Maximum partitioning of graphs with supply and demand*
- *Minimum gap graph partitioning*

El problema más estudiado es el *minimum edge-cut graph partitioning problem*, cuyo objetivo es minimizar el número total de arcos que conectan nodos pertenecientes a distintos distritos, es decir, el *edge-cut*. Este objetivo promueve la generación de subconjuntos compactos y cohesionados, ya que maximiza la conectividad interna y reduce la interacción entre distritos, lo que resulta

particularmente relevante en aplicaciones donde los costos de comunicación o desplazamiento entre particiones deben reducirse.

Una amplia variedad de algoritmos ha sido propuesta para abordar problemas de partición de grafos. [Kernighan and Lin \(1970\)](#) introduce uno de los métodos pioneros, basado en intercambios sucesivos de pares de nodos entre dos subconjuntos. El balance se garantiza imponiendo que ambos distritos contengan el mismo número de nodos o igual suma de pesos. Posteriormente, [Fiduccia and Mattheyses \(1982\)](#) extienden este enfoque permitiendo movimientos individuales de nodos, lo que mejora la eficiencia computacional del método. En este caso, el balance se controla mediante cotas superiores e inferiores sobre el peso permitido en cada subconjunto. Ambos métodos no incorporan medidas de calidad de la solución en términos de brecha de optimalidad (*optimality gap*).

Otra familia relevante corresponde a los métodos espectrales, fundamentados en el análisis de los valores propios y vectores propios de la matriz laplaciana del grafo, la cual se construye a partir de medidas de similitud entre pares de nodos ([Pothén et al., 1990](#); [Newman, 2013](#); [Di Nardo et al., 2017](#)). Este enfoque permite identificar particiones que capturan la estructura global del grafo, pero presenta una elevada complejidad computacional, lo que limita su aplicación a grafos de gran escala.

Los métodos multinivel representan una de las aproximaciones más eficientes para la partición de grafos de gran escala. Estos métodos constan de tres fases principales: una etapa de engrosamiento (*coarsening*), en la cual el grafo original se reduce progresivamente mediante la agregación de nodos en supernodos; una etapa de partición inicial (*initial partitioning*) sobre el grafo reducido; y una etapa de refinamiento (*uncoarsening*), en la cual la solución obtenida se proyecta nuevamente sobre el grafo original, realizando ajustes locales para mejorar la calidad de la partición ([Jafari et al., 2021](#)). Paquetes de software ampliamente utilizados, como CHACO ([Hendrickson and Leland, 1995](#)), SCOTCH ([Pellegrini and Roman, 1996](#)) y METIS ([Karypis and Kumar, 1998](#)), implementan este tipo de técnicas. Estos métodos gestionan el balance mediante cotas sobre el peso total permitido por subconjunto, el cual es definido como la suma de los pesos de los nodos que lo conforman, considerando un enfoque aditivo. Además, SCOTCH y METIS consideran explícitamente restricciones de contigüidad, mientras que CHACO y METIS promueven la compacidad buscando minimizar el número de arcos que conectan subconjuntos distintos. A pesar de su eficiencia (bajos tiempos computacionales), estos paquetes no proveen medidas de calidad de la solución en términos de brecha de optimalidad.

Junto a los enfoques anteriores, también se han desarrollado métodos evolutivos y metaheurísticos para abordar problemas de partición de grafos. [Datta et al. \(2008\)](#) propone un algoritmo evolutivo multiobjetivo que incorpora restricciones de contigüidad y optimiza simultáneamente criterios de compacidad y balance, utilizando el número de nodos como medida de peso distrital. La metodología es aplicada a grafos de 50, 100, 200 y 500 nodos.

[Sanders and Schulz \(2012\)](#) presenta KaFFPaE, un algoritmo evolutivo que extiende el particionador multinivel KaFFPa ([Sanders and Schulz, 2011](#)) mediante la integración de operadores de cruce y mutación. Tanto KaFFPa como KaFFPaE emplean funciones objetivo orientadas a la reducción del *edge-cut*, junto con restricciones de balance basadas en medidas de carga de trabajo aditivas.

[Jovanovic et al. \(2016\)](#) estudia el *maximum partitioning of graphs with supply and demand*, cuyo objetivo es maximizar la demanda cubierta tal que cada nodo demanda está en único subconjunto, cada subconjunto tiene un único nodo oferta y dicho nodo oferta tiene la capacidad suficiente para cubrir todos sus nodos demanda. Los autores incorporan explícitamente la contigüidad de los subconjuntos y resuelven el problema mediante un enfoque basado en colonias de hormigas apoyado por un algoritmo *greedy*. El enfoque es evaluado en grafos con hasta 100 nodos oferta y 2 000 nodos demanda.

[Bruglieri and Cordone \(2021\)](#) aborda el *minimum gap graph partitioning*, cuyo objetivo es minimizar la suma, en todos los subconjuntos, de la mayor diferencia entre los pesos de dos nodos pertenecientes al mismo subconjunto. La formulación considera explícitamente la contigüidad de los distritos. Los autores proponen dos algoritmos: uno de búsqueda tabú a dos niveles y otro de búsqueda adaptativa por grandes vecindarios. Los algoritmos son aplicados a grafos de hasta 22 963 nodos. Dentro de esta línea de investigación, este trabajo es uno de los pocos que reporta explícitamente la calidad de las soluciones obtenidas mediante la brecha de optimalidad. No obstante, las brechas observadas son del orden del 45 %, lo que se explica por la debilidad de la relajación del modelo, la cual genera una diferencia significativa entre la mejor solución factible encontrada y la cota inferior asociada a la relajación.

En términos generales, los algoritmos de partición de grafos permiten abordar instancias de gran escala, proporcionando soluciones eficientes desde el punto de vista computacional y cumpliendo, en muchos casos, varios de los criterios clásicos del distritaje, tales como integridad, contigüidad, compacidad y balance. Sin embargo, todos los enfoques descritos comparten la utilización de

medidas de carga de trabajo distrital de carácter aditivo sobre las unidades básicas, lo cual constituye una limitación importante para aplicaciones que requieren definir la carga de trabajo distrital de forma no aditiva.



## 4 | Formulación del modelo

En esta sección se presenta un modelo de programación matemática para la partición de un sistema de transporte de buses urbanos en distritos destinados a la inspección de tarifas. El objetivo es construir distritos que respeten simultáneamente los cuatro criterios fundamentales del distritaje: integridad, contigüidad, compacidad y balance, utilizando el número de buses como medida de carga de trabajo.

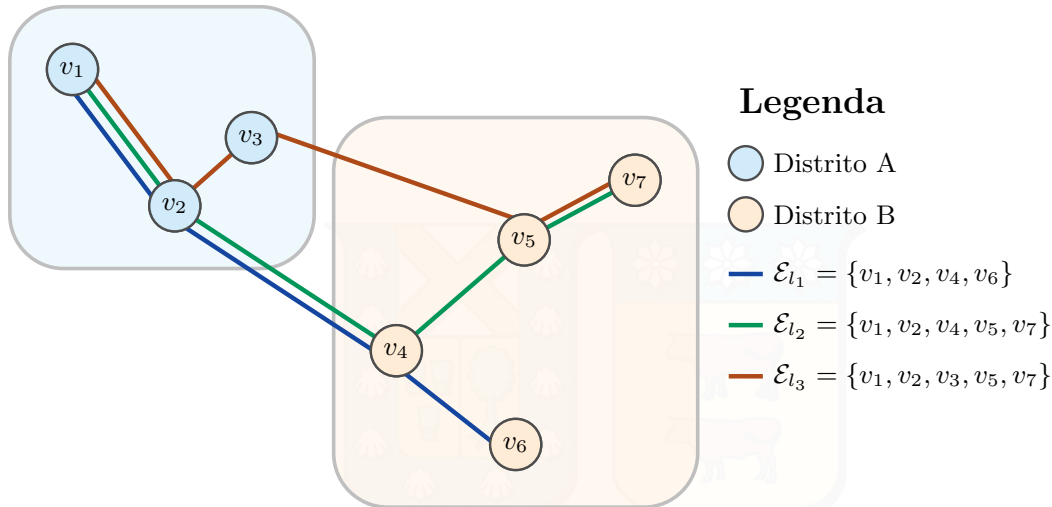
### 4.1. Representación del sistema de transporte

Considere un sistema de transporte de buses urbanos representado mediante un grafo no dirigido  $G = (V, E)$ , donde  $V$  ( $v = 1, \dots, |V|$ ) es el conjunto de nodos que representan unidades básicas y  $E$  ( $e = 1, \dots, |E|$ ) es el conjunto de arcos que conectan unidades básicas adyacentes. En un sistema de transporte de buses urbanos, las unidades básicas pueden corresponder a paradas de buses, conexiones entre paradas o áreas poligonales (Kalsics and Ríos-Mercado, 2019). Para cada unidad básica  $v \in V$ , se define el conjunto de sus unidades básicas adyacentes como  $N_v = \{v' \in V : (v, v') \in E\}$ .

Sea  $L$  el conjunto de líneas de buses del sistema, donde cada línea  $l \in L$  opera con  $h_l$  buses en un intervalo de tiempo dado. El conjunto de unidades básicas recorridas por la línea  $l$  se denota por  $\mathcal{E}_l$ .

La Figura 4.1 muestra una solución ilustrativa al problema de distritaje en sistema de transporte de buses urbanos.

El criterio de compacidad se aborda mediante un enfoque basado en la dispersión de las unidades básicas respecto al centro del distrito, considerando  $d_{vv'}$  como la distancia entre  $v \in W$  y  $v' \in V$ , donde  $W \subseteq V$  es el conjunto de candidatos a centros de distrito. Cabe señalar que la compacidad en problemas de distritaje para inspección de tarifas busca evitar que los equipos de inspección tengan que trasladarse entre puntos muy lejanos, por lo que la compacidad es abordada sumando las



**Figura 4.1:** Solución ilustrativa de distritaje

distancias de cada unidad básica, sin usar factores de ponderación. En sistemas de transporte reales resulta prácticamente imposible balancear exactamente la carga de trabajo entre distritos. Por ello, se introduce un parámetro de tolerancia de balance  $\alpha > 0$  que establece la máxima diferencia relativa permitida entre las cargas de trabajo distritales. Además, se define  $n$  como el número máximo permitido de distritos.

A diferencia de otros contextos de aplicación del distritaje, en los sistemas de transporte de buses urbanos las unidades básicas comparten carga de trabajo, puesto que las líneas de buses circulan sobre múltiples unidades básicas de la red, como se muestra en la Figura 4.1. Esta característica impide utilizar medidas aditivas tradicionales, ya que conducirían a sobreestimaciones de la carga de trabajo. En consecuencia, se requiere una formulación capaz de contabilizar los buses de cada línea a lo más una vez por distrito, dando lugar a una medida de carga de trabajo distrital no aditiva en las unidades básicas.

## 4.2. Variables de decisión

El modelo utiliza las siguientes variables binarias:

- $X_v = 1$  si la unidad básica  $v \in W$  es seleccionada como centro de distrito.
- $Y_{vv'} = 1$  si la unidad básica  $v' \in V$  es asignada al distrito con centro  $v \in W$ .

- $H_{vl} = 1$  si la línea  $l \in L$  recorre al menos una unidad básica perteneciente al distrito con centro  $v$ . Notar que esta es una variable auxiliar que permite identificar la presencia de una línea en un distrito y evita contabilizar múltiples veces una misma línea dentro del mismo distrito.

Además, se definen variables continuas:

- $Q_v$ : número total de buses que recorren el distrito con centro  $v$ .
- $\bar{Q}$ : mayor número de buses recorriendo un distrito.
- $\underline{Q}$ : menor número de buses recorriendo un distrito.

Cabe señalar que, a diferencia de otras formulaciones de distritaje, no se puede predefinir una carga de trabajo distrital promedio, puesto que la carga es compartida entre distritos, como también lo es entre unidades básicas. Por lo tanto, se definen explícitamente las variables  $\bar{Q}$  y  $\underline{Q}$  para abordar el criterio de balance.

### 4.3. Modelo matemático

El problema de distritaje para sistemas de transporte de buses urbanos se modela como el siguiente modelo de programación entera-mixta, denominado *Transportation System Districting* (TSD):

$$\text{TSD : } \min_{\substack{X, Y, H, \\ \bar{Q}, \underline{Q}}} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} \quad (4.1)$$

$$s.t : \sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \\ k \in S}} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$Q_v = \sum_{l \in L} h_l H_{vl} \quad \forall v \in W \quad (4.7)$$

$$\bar{Q} \geq Q_v \quad \forall v \in W \quad (4.8)$$

$$Q_v \geq \underline{Q} - (1 - X_v)M \quad \forall v \in W \quad (4.9)$$

$$\bar{Q} \leq \underline{Q}(1 + \alpha) \quad (4.10)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L \quad (4.12)$$

$$Q_v, \bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad \forall v \in W, \quad (4.13)$$

donde  $M$  es un número suficientemente grande, calculado como  $M = \sum_{l \in L} h_l$ , y  $\Omega$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de unidades básicas  $S \subset V \setminus (N_v \cup \{v\})$ .

La función objetivo (4.1) minimiza la suma de las distancias entre cada unidad básica y el centro del distrito al cual es asignada, promoviendo la compacidad espacial de los distritos mediante una medida de compacidad basada en distancia, tal como en [García-Ayala et al. \(2016\)](#) y [Bucarey et al. \(2015\)](#). Las restricciones (4.2) garantizan el criterio de integridad, asegurando que cada unidad básica sea asignada a un único distrito, mientras que (4.3) evita asignaciones a centros no seleccionados. Cabe señalar que (4.2) y (4.3) garantizan conjuntamente que exista al menos un distrito, es decir,  $\sum_{v \in W} X_v > 0$ , evitando la infactibilidad. Las restricciones (4.4), basadas en [Drexler and Haase \(1999\)](#), aseguran la contigüidad de los distritos. En la Sección 4.4 se explica en detalle su funcionamiento. Las restricciones (4.5)–(4.6) conjuntamente determinan si una línea de bus  $l \in L$  recorre el distrito con centro  $v \in W$ , de forma que la restricción (4.7) calcula la carga de trabajo distrital contabilizando a lo más una vez cada línea, aspecto fundamental para la definición no aditiva de la carga de trabajo distrital. Las restricciones (4.8) y (4.9) definen el mayor y menor número de buses recorriendo un distrito, respectivamente, mientras que la restricción (4.10) asegura el criterio de balance, de forma que la diferencia entre el número de buses recorriendo los distritos no exceda la tolerancia de balance  $\alpha$ . La restricción (4.11) fija un límite superior sobre el número máximo de distritos permitidos. Finalmente, las restricciones (4.12) y (4.13) corresponden a restricciones de integrabilidad y no negatividad, respectivamente.

## 4.4. Restricción de contigüidad

Las restricciones de contigüidad (4.4), propuestas por Drexl and Haase (1999), son similares a las restricciones de eliminación de subtours del problema del vendedor viajero (*traveling salesman problem*) (Dantzig et al., 1954).

Estas restricciones se interpretan de la siguiente manera. Sea  $S \subset V \setminus (N_v \cup \{v\})$  un subconjunto de unidades básicas que no incluye al centro  $v$  ni a sus unidades básicas adyacentes. Cuando todas las unidades básicas de  $S$  son asignadas al centro  $v$ , el segundo término del lado izquierdo de (4.4) toma el valor  $|S|$ . En consecuencia, el primer término debe ser al menos igual a 1, es decir, al menos una unidad básica adyacente a  $S$  también debe ser asignada al mismo centro  $v$ . La aplicación recursiva de esta condición garantiza la contigüidad del distrito. Notar que si al menos una unidad básica en  $S$  no es asignada a  $v$ , el segundo término se vuelve estrictamente menor que  $|S|$ , haciendo que la restricción sea redundante.

En síntesis, las restricciones (4.4) garantizan que para cualquier subconjunto  $S$  de unidades asignadas al centro  $v \in W$ , exista al menos una unidad básica adyacente a  $S$  también asignada al mismo distrito, impidiendo así la formación de distritos desconectados.

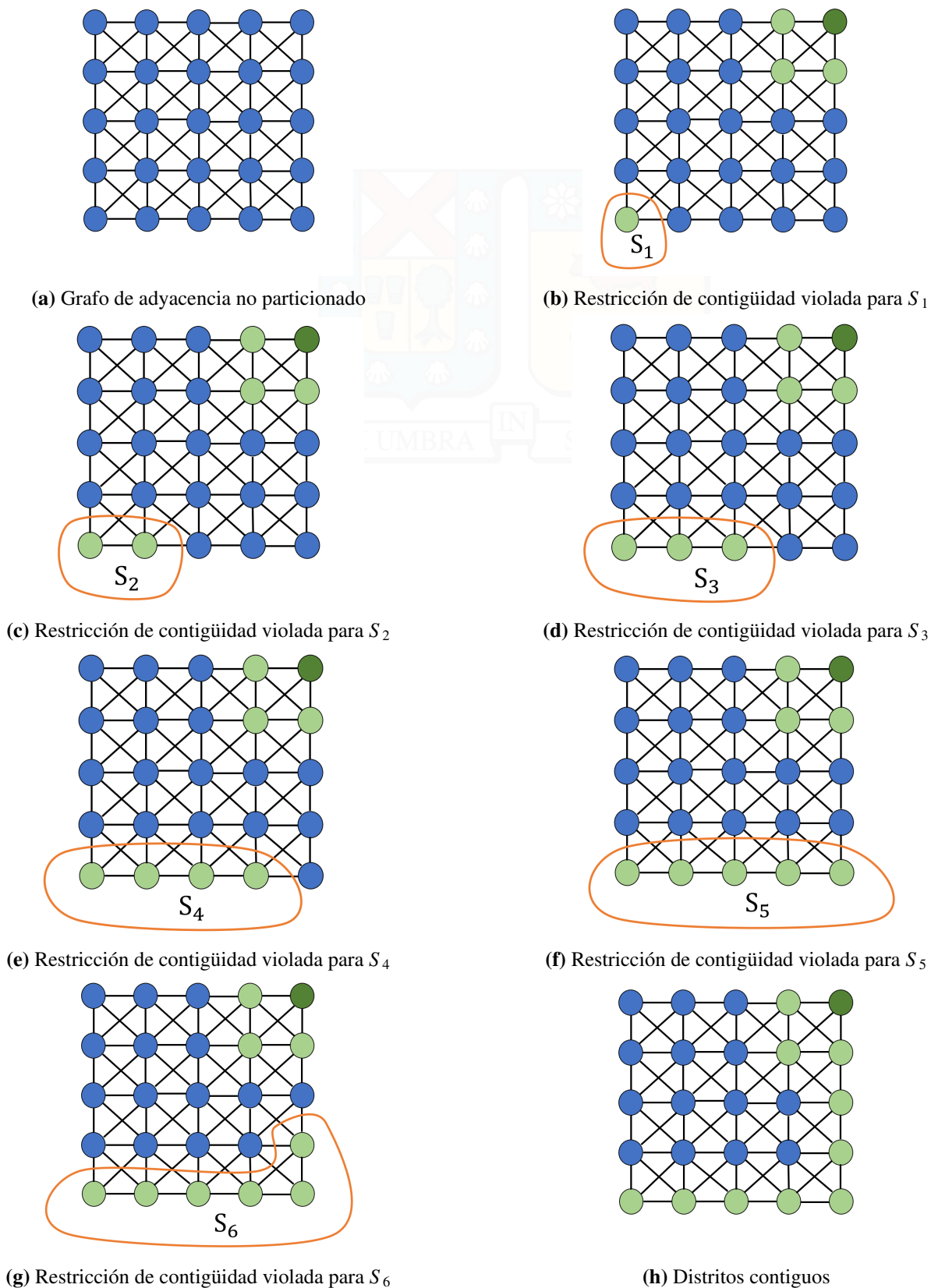
La Figura 4.2 ilustra el funcionamiento de las restricciones de contigüidad (4.4) mediante un ejemplo ilustrativo. La Figura 4.2a muestra un grafo de adyacencia no particionado. La Figura 4.2b muestra una solución al distritaje del grafo de adyacencia, siendo los nodos de color verde pertenecientes al distrito con centro en el nodo de color verde oscuro. Esta solución claramente no es factible, pues se viola la restricción de contigüidad (4.4) para el subconjunto  $S_1$ . Para no violar la restricción de contigüidad (4.4) para el subconjunto  $S_1$  se puede agregar al distrito un nodo adyacente a  $S_1$  como muestra la Figura 4.2c. Esta solución sigue siendo infactible debido a la violación de la restricción de contigüidad (4.4) para el subconjunto  $S_2$ .

De forma análoga, para corregir la violación asociada al subconjunto  $S_2$ , se agrega al distrito un nodo adyacente a dicho subconjunto, según se observa en la Figura 4.2d. Aun así, la solución continúa siendo infactible, pues aparece una nueva violación de la restricción (4.4) correspondiente al subconjunto  $S_3$ . El procedimiento se repite iterativamente: cada vez que un subconjunto  $S$  asignado al centro viola la restricción de contigüidad, se agrega al distrito al menos un nodo adyacente a  $S$ . Mediante esta construcción incremental se alcanza finalmente una partición factible en la cual el

distrito resulta totalmente contiguo, tal como se muestra en la Figura 4.2h.

Cabe destacar que, dado que las restricciones (4.4) deben aplicarse a todo subconjunto de unidades básicas, su número crece exponencialmente con el tamaño del conjunto de unidades básicas, lo que hace prácticamente imposible expresarlas de manera explícita en instancias de gran escala.





**Figura 4.2:** Funcionamiento de las restricciones de contigüidad

## 5 | Generación de columnas

Una solución al problema TSD consiste en una partición del conjunto de unidades básicas en subconjuntos contiguos, donde cada subconjunto es asignado a un candidato a centro de distrito, conformando así un distrito para la inspección de tarifas.

Bajo esta interpretación, surge naturalmente la idea de abordar TSD mediante un enfoque de generación de columnas (Gilmore and Gomory, 1961, 1963), en el cual cada columna representa un subconjunto contiguo de unidades básicas que puede conformar un distrito factible. Este tipo de enfoques ha sido ampliamente utilizado en problemas de particionamiento y ruteo de gran escala, donde el conjunto de columnas es exponencial y no puede ser enumerado explícitamente.

Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de todos los subconjuntos contiguos de unidades básicas. Cada elemento  $R \in \mathcal{R}$  define un distrito potencial. Bajo este enfoque, el problema TSD puede reformularse como el siguiente problema maestro (*master problem*).

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} : \quad \min_{T, \underline{Q}, \bar{Q}} \sum_{R \in \mathcal{R}} c_R T_R \quad (5.1)$$

$$s.t : \quad \sum_{R \in \mathcal{P}_v} T_R = 1 \quad \forall v' \in V \quad (5.2)$$

$$\bar{Q} \geq q_R \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (5.3)$$

$$q_R \geq \underline{Q} - (1 - T_R)M \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (5.4)$$

$$\bar{Q} \leq \underline{Q}(1 + \alpha) \quad (4.10)$$

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} T_R \leq n \quad (5.5)$$

$$T_R \in \{0, 1\} \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (5.6)$$

$$\bar{Q}, \underline{Q} \geq 0, \quad (5.7)$$

donde:

- $P_v$  es el conjunto de subconjuntos contiguos de unidades básicas que contienen a la unidad básica  $v \in V$ , es decir,  $P_v = \{R \in \mathcal{R} : v \in R\}$ ,
- $c_R$  es la medida de compacidad del subconjunto contiguo de unidades básicas  $R \in \mathcal{R}$ ,
- $q_R$  es el número de buses que recorren el subconjunto contiguo de unidades básicas  $R \in \mathcal{R}$ ,
- $T_R$  es variable binaria igual a 1 si el subconjunto contiguo de unidades básicas  $R \in \mathcal{R}$  es seleccionado.

Obsérvese que, dado un subconjunto contiguo de unidades básicas  $R$ , su medida de compacidad puede calcularse de forma directa, ya que el centro óptimo al cual se asigna el distrito es simplemente aquel que minimiza la suma de distancias entre cada unidad básica del subconjunto y dicho centro. En particular,

$$c_R = \min_{v \in R} \{c_{R,v}\} = \min_{v \in R} \left\{ \sum_{v' \in R} d_{vv'} \right\}.$$

Sea  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}}$  la relajación lineal de  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ . Dado que el conjunto  $\mathcal{R}$  es exponencial,  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}}$  se resuelve mediante generación de columnas, comenzando con un conjunto restringido de columnas conocidas  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ . El problema maestro restringido queda definido como:

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}'} : \quad \min_{T, \overline{Q}, \underline{Q}} \sum_{R \in \mathcal{R}'} c_R T_R \quad (5.8)$$

$$s.t : \sum_{R \in P_v} T_R = 1 \quad \forall v' \in V \quad (5.9)$$

$$\overline{Q} \geq q_R \quad \forall R \in \mathcal{R}' \quad (5.10)$$

$$q_R \geq \underline{Q} - (1 - T_R)M \quad \forall R \in \mathcal{R}' \quad (5.11)$$

$$\overline{Q} \leq \underline{Q}(1 + \alpha) \quad (4.10)$$

$$\sum_{R \in \mathcal{R}'} T_R \leq n \quad (5.12)$$

$$T_R \in [0, 1] \quad \forall R \in \mathcal{R}' \quad (5.13)$$

$$\overline{Q}, \underline{Q} \geq 0, \quad (5.7)$$

donde  $P'_v$  es el conjunto de subconjuntos contiguos de unidades básicas conocidos que contienen a la unidad básica  $v \in V$ , es decir,  $P'_v = \{R \in \mathcal{R}' : v \in R\}$ .

Al resolver  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}'}$  se obtiene una solución óptima  $T^*$ , la cual puede extenderse a una solución factible de  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}}$  asignando  $T_R^* = 0$  para todo  $R \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$ . Esta solución es óptima si no existe ningún subconjunto contiguo  $R \in \mathcal{R}$  con costo reducido negativo. En caso contrario, el subconjunto con menor costo reducido es agregado a  $\mathcal{R}'$  y se comienza una nueva iteración resolviendo el problema maestro restringido.

La identificación de subconjuntos con costo reducido negativo se realiza resolviendo el problema *pricing*, cuyo objetivo es encontrar el subconjunto contiguo  $R^*$  con el menor costo reducido.

Sea  $\mu \in \mathbb{R}$  la variable dual asociada a (5.9), y sean  $\lambda, \beta, \eta, \delta \geq 0$  las variables duales asociadas a (5.10), (5.11), (4.10) y (5.12), respectivamente. El lagrangiano del problema maestro restringido viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T, \overline{Q}, \underline{Q}, \mu, \lambda, \beta, \eta, \delta) &= \sum_{R \in \mathcal{R}'} (c_R - \sum_{v \in R} \mu_v + \delta + M\beta_R) T_R + (\eta - \sum_{R \in \mathcal{R}'} \lambda_R) \overline{Q} \\ &\quad + (-\eta(1 + \alpha) + \sum_{R \in \mathcal{R}'} \beta_R) \underline{Q} + \sum_{R \in \mathcal{R}'} (\lambda_R - \beta_R) q_R \\ &\quad - \sum_{v \in V} \mu_v - n\delta - \sum_{R \in \mathcal{R}'} M\beta_R. \end{aligned}$$

A partir de la función dual del problema maestro restringido se obtiene el problema *pricing*, esta función dual viene dada por:

$$\begin{aligned} f(\mu, \lambda, \beta, \eta, \delta) &= \min_{T, \overline{Q}, \underline{Q}} \{ \mathcal{L}(T, \overline{Q}, \underline{Q}, \mu, \lambda, \beta, \eta, \delta) \} \\ &= \sum_{R \in \mathcal{R}'} \min_{0 \leq T_R \leq 1} (c_R - \sum_{v \in R} \mu_v + \delta + M\beta_R) T_R + \min_{\overline{Q} \geq 0} (\eta - \sum_{R \in \mathcal{R}'} \lambda_R) \overline{Q} \\ &\quad + \min_{\underline{Q} \geq 0} (-\eta(1 + \alpha) + \sum_{R \in \mathcal{R}'} \beta_R) \underline{Q}. \end{aligned}$$

Para la formulación del problema *pricing* se omiten aquellos términos de la función dual que dependen de variables duales de la columna a generar o de variables primales que no dependen

exclusivamente de la columna a generar. En particular, las variables duales  $\lambda_R$  y  $\beta_R$  no existen para el subconjunto  $R^*$  en la iteración actual y, por tanto, no pueden ser incorporadas en el costo reducido. Asimismo, las variables  $\bar{Q}$  y  $\underline{Q}$  son globales al problema maestro y su valor no es conocido hasta resolver la siguiente iteración del problema maestro restringido. Así, el problema *pricing* se formula de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} : \quad \min_{X, Y, H, Q} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} (d_{vv'} - \mu_{v'}) Y_{vv'} + \delta \quad (5.14)$$

$$s.t. : Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \\ k \in S}} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$Q_v = \sum_{l \in L} h_l H_{vl} \quad \forall v \in W \quad (4.7)$$

$$\sum_{v \in W} X_v = 1 \quad (5.15)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L \quad (4.12)$$

$$Q_v \geq 0. \quad (5.16)$$

A partir de la solución óptima  $Y^*$  del problema *pricing*, se obtiene el subconjunto contiguo de menor costo reducido

$$R^* = \{v' \in V : Y_{vv'}^* = 1\}.$$

El pseudocódigo del método de generación de columnas propuesto para obtener una solución óptima de TSD se presenta en el Algoritmo [1](#).

El enfoque de solución basado en generación de columnas fue implementado sin éxito en esta tesis. La principal dificultad radica en la definición de la carga de trabajo distrital, la cual no es aditiva. Como consecuencia, las restricciones [\(5.10\)](#) y [\(5.11\)](#), asociadas al cálculo del mayor y menor número de buses que recorren un distrito, deben aplicarse a todas las columnas del modelo. Esto

**Algorithm 1** *Generacion\_Columnas*


---

```

1: Sea  $\mathcal{R}'^{(0)}$  el conjunto inicial de columnas factibles
2: Sea  $c^{(0)} = -\infty$  el costo reducido inicial de la columna óptima del problema pricing
3:  $t = 0$ 
4: while  $c^{(t)} < 0$  do
5:   Resolver  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}'^{(t)}}$ 
6:   Obtener las variables duales asociadas a  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}'^{(t)}}$ 
7:   Resolver  $\mathcal{P}$ 
8:   Sea  $Z_{\mathcal{P}}^*$  el valor óptimo de la función objetivo de  $\mathcal{P}$ 
9:    $c^{(t+1)} = Z_{\mathcal{P}}^*$ 
10:  if  $Z_{\mathcal{P}}^* < 0$  then
11:     $\mathcal{R}'^{(t+1)} = \mathcal{R}'^{(t)} \cup R^*$ 
12:     $t = t + 1$ 
13:  else
14:     $T_R^* = T_R^{(t)*}, \forall R \in \mathcal{R}'^{(t)}$ 
15:     $T_R^* = 0, \forall R \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'^{(t)}$ 
16:     $t = t + 1$ 
17:  end if
18: end while
19: return  $T_R^*$ 

```

---

da origen a los términos omitidos en la función dual y dificulta la correcta definición del problema *pricing*.

Hasta donde se tiene conocimiento, la literatura en generación de columnas no aborda problemas en los cuales existan restricciones que se apliquen directamente al conjunto de columnas. Por esta razón, este trabajo se limita a presentar la descomposición natural asociada a generación de columnas para el problema TSD, sin estudiar estrategias que permitan superar las dificultades de implementación observadas.

## 6 | Descomposición de Benders

La solución óptima de TSD consiste en una partición del conjunto de unidades básicas en distritos que maximizan la compacidad y satisfacen simultáneamente los criterios de integridad, contigüidad y balance. Con el fin de abordar este problema, se propone emplear un enfoque de descomposición de Benders (Benders, 1962). El problema maestro contiene las variables binarias de TSD y es responsable de generar distritos que maximizan la compacidad y satisfacen los criterios de integridad y contigüidad. El subproblema primal, por su parte, contiene las variables continuas asociadas a la carga de trabajo distrital y, fijando las variables enteras, permite verificar si los distritos generados por el problema maestro satisfacen el criterio de balance.

De esta forma, TSD puede expresarse mediante la siguiente formulación descompuesta:

$$\min_{X, Y, H} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} + \varphi(X, H) \quad (6.1)$$

$$s.t : \sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \setminus S} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L, \quad (4.12)$$

donde el subproblema primal  $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  está dado por:

$$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H}) : \quad \min_{\underline{Q}, \bar{Q}, \underline{Q}} \quad 0 \quad (6.2)$$

$$s.t : \quad Q_v = \sum_{l \in L} h_l H_{vl} \quad \forall v \in W \quad (4.7)$$

$$\bar{Q} \geq Q_v \quad \forall v \in W \quad (4.8)$$

$$Q_v \geq \underline{Q} - (1 - X_v)M \quad \forall v \in W \quad (4.9)$$

$$\bar{Q} \leq \underline{Q}(1 + \alpha) \quad (4.10)$$

$$Q_v, \bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad \forall v \in W. \quad (4.13)$$

Cabe destacar que la función objetivo de  $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  es constante e igual a cero, dado que este subproblema actúa exclusivamente como un problema de factibilidad que verifica el cumplimiento del criterio de balance para la solución generada por el problema maestro.

Sea  $\pi \in \mathbb{R}$  la variable dual asociada a la restricción (4.7), y sean  $\nu, \rho, \sigma \geq 0$  las variables duales asociadas a las restricciones (4.8), (4.9) y (4.10), respectivamente. El lagrangiano asociado al subproblema primal  $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{Q}, \bar{Q}, \underline{Q}, \pi, \nu, \rho, \sigma) &= \sum_{v \in W} (\pi_v + \nu_v - \rho_v) Q_v + (\sigma - \sum_{v \in W} \nu_v) \bar{Q} \\ &\quad + (-\sigma(1 + \alpha) + \sum_{v \in W} \rho_v) \underline{Q} - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_v h_l H_{vl} \\ &\quad - \sum_{v \in W} \rho_v (1 - X_v) M. \end{aligned}$$

Dado que  $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  es un problema de programación lineal, el teorema de dualidad fuerte garantiza que el valor óptimo de la función objetivo del subproblema primal coincide con el valor óptimo de la función objetivo de su problema dual. En consecuencia,  $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  puede ser reemplazado por su formulación dual, obteniendo la siguiente representación equivalente de TSD:

$$\min_{X,Y,H} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} + \sup_{\pi, \nu, \rho, \sigma} \inf_{\substack{Q \geq 0, \bar{Q} \geq 0, \\ \underline{Q} \geq 0}} \mathcal{L}(Q, \bar{Q}, \underline{Q}, \pi, \nu, \rho, \sigma) \quad (6.3)$$

$$s.t : \sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{v' \in \cup_{k \in S} N_k \setminus S}} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L. \quad (4.12)$$

Utilizando la definición del supremo como la mayor cota inferior, se introduce una variable auxiliar  $w$  que representa el valor óptimo de la función objetivo del subproblema dual. De este modo, el problema original se reformula como un problema maestro que incorpora implícitamente el criterio de balance mediante restricciones de optimalidad tipo Benders.

$$\text{MP : } \min_{X,Y,H,w} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} + w \quad (6.4)$$

$$s.t : w \geq \inf_{\substack{Q \geq 0, \\ \bar{Q} \geq 0, \\ \underline{Q} \geq 0}} \mathcal{L}(Q, \bar{Q}, \underline{Q}, \pi, \nu, \rho, \sigma) \quad \forall \pi \in \mathbb{R}, \nu \geq 0, \rho \geq 0, \sigma \geq 0 \quad (6.5)$$

$$\sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{v' \in \cup_{k \in S} N_k \setminus S}} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L. \quad (4.12)$$

La formulación explícita de las restricciones de Benders se obtiene a partir del problema dual del subproblema, el cual viene dado por el siguiente modelo de programación lineal:

$$D(X, H) : \quad \max_{\pi, \nu, \rho, \sigma} \quad - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_w h_l H_{wl} - \sum_{v \in W} \rho_v (1 - X_v) M \quad (6.6)$$

$$s.t : \quad \pi_v + \nu_v - \rho_v \geq 0 \quad \forall v \in W \quad (6.7)$$

$$\sigma - \sum_{v \in W} \nu_v \geq 0 \quad (6.8)$$

$$- \sigma(1 + \alpha) + \sum_{v \in W} \rho_v \geq 0 \quad (6.9)$$

$$\pi_v \in \mathbb{R} \quad \forall v \in W \quad (6.10)$$

$$\nu_v, \rho_v, \sigma \geq 0. \quad \forall v \in W \quad (6.11)$$

De esta forma, el problema maestro puede expresarse incorporando explícitamente las restricciones de optimalidad de Benders generadas a partir de soluciones factibles del problema dual.

$$MP : \quad \min_{X, Y, H, w} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} + w \quad (6.4)$$

$$s.t : w \geq - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_w h_l H_{wl} - \sum_{v \in W} \rho_v (1 - X_v) M \quad \forall \pi_v \in \mathbb{R}, \rho_v \geq 0 \quad (6.12)$$

$$\sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \setminus S} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L, \quad (4.12)$$

donde  $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho})$  son variables óptimas de  $D(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{H})$ , es decir, el vértice óptimo del poliedro factible de  $D(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{H})$ .

Al resolver el problema maestro se obtiene una partición que maximiza la compacidad y satisface los criterios de integridad y contigüidad. La verificación del criterio de balance se realiza resolviendo el subproblema dual  $D(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{H}^*)$  asociado a las variables óptimas  $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{H}^*)$  del problema maestro.

Cuando los distritos generados no cumplen el criterio de balance, el subproblema primal resulta infactible y, por ende, el subproblema dual resulta no-acotado. Por lo tanto, no es posible obtener las variables óptimas (vértice óptimo) del subproblema dual. Para afrontar este caso, se utilizan las direcciones extremas del poliedro factible del subproblema dual para incorporar restricciones de factibilidad de Benders al problema maestro, las cuales tienen la siguiente forma:

$$0 \geq - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_v h_l H_{vl} - \sum_{v \in W} \rho_v (1 - X_v) M, \quad (6.13)$$

donde  $\pi_v$  y  $\rho_v$  son direcciones extremas del poliedro factible de  $D(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{H})$ .

Cabe destacar que el problema maestro resultante es un problema de programación semi-infinita, dado que las restricciones de optimalidad (6.12) y de factibilidad (6.13) deben cumplirse para todo vector dual factible y dirección extrema del problema  $D(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{H})$ , respectivamente. Para tratar este problema, se considera una relajación del problema maestro en la cual solo se incorpora un conjunto finito de restricciones de Benders, dando origen al problema maestro restringido.

$$\text{RMP : } \quad \min_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{H}, w} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} + w \quad (6.4)$$

$$s.t : w \geq - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_v^{(i)} h_l H_{vl} - \sum_{v \in W} \rho_v^{(i)} (1 - X_v) M \quad \forall i \in I \quad (6.14)$$

$$0 \geq - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_v^{(j)} h_l H_{vl} - \sum_{v \in W} \rho_v^{(j)} (1 - X_v) M \quad \forall j \in J \quad (6.15)$$

$$\sum_{v \in W} Y_{vv'} = 1 \quad \forall v' \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{vv'} \leq X_v \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \setminus S} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega \quad (4.4)$$

$$H_{vl} \geq Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L, v' \in \mathcal{E}_l \quad (4.5)$$

$$H_{vl} \leq \sum_{v' \in \mathcal{E}_l} Y_{vv'} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{v \in W} X_v \leq n \quad (4.11)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L, \quad (4.12)$$

donde  $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$  y  $(\pi^{(j)}, \rho^{(j)})$  son variables duales óptimas y direcciones extremas que se obtienen de  $D(\mathbf{X}, \mathbf{H})$  para una combinación 0-1 fija de  $\mathbf{X}, \mathbf{H}$ .

El subproblema dual  $D(\mathbf{X}, \mathbf{H})$ , evaluado para una solución entera fija  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  del problema maestro restringido, permite identificar si la solución obtenida satisface el criterio de balance o si, por el contrario, es necesario generar nuevos cortes de Benders.

$$D(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)}) : \quad \max_{\pi, \nu, \rho, \sigma} \quad - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_w h_l H_{wl}^{(k)} - \sum_{v \in W} \rho_v (1 - X_v^{(k)}) M \quad (6.16)$$

$$s.t : \quad \pi_v + \nu_v - \rho_v \geq 0 \quad \forall v \in W \quad (6.7)$$

$$\sigma - \sum_{v \in W} \nu_v \geq 0 \quad (6.8)$$

$$-\sigma(1 + \alpha) + \sum_{v \in W} \rho_v \geq 0 \quad (6.9)$$

$$\pi_v \in \mathbb{R} \quad \forall v \in W \quad (6.10)$$

$$\nu_v, \rho_v, \sigma \geq 0. \quad \forall v \in W \quad (6.11)$$

Sean  $\mathbf{X}_{RMP}^*, \mathbf{Y}_{RMP}^*, \mathbf{H}_{RMP}^*$  y  $w_{RMP}^*$  las variables óptimas del problema maestro restringido. La solución obtenida es óptima para el problema maestro completo y, por ende, para TSD, si y solo si se cumple que  $w_{RMP}^* \geq - \sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_{D_v}^* h_l H_{RMP_vl}^* - \sum_{v \in W} \rho_{D_v}^* (1 - X_{RMP_v}^*) M$ , donde  $\pi_D^*$  y  $\rho_D^*$  son

variables óptimas de  $D(X^*, H^*)$ .

Cuando no se cumple la condición anterior y el subproblema dual es acotado, se generan restricciones de optimalidad de Benders a partir de las variables óptimas del subproblema dual. Por el contrario, cuando el subproblema dual es no-acotado, se generan restricciones de factibilidad a partir de las direcciones extremas de su poliedro factible. Estas restricciones se incorporan al problema maestro restringido, iniciando una nueva iteración del método.

El pseudocódigo del método de descomposición de Benders propuesto para obtener una solución óptima de TSD se presenta en el Algoritmo [2](#).

---

**Algorithm 2 Benders**


---

```

1: Sea  $I^{(0)} = \emptyset$  el conjunto inicial para las restricciones de optimalidad
2: Sea  $J^{(0)} = \emptyset$  el conjunto inicial para las restricciones de factibilidad
3: Sea  $w_{RMP}^{(0)*} = -\infty$  la variable óptima  $w$  inicial del problema maestro restringido
4: Sea  $Z_D^{(0)*} = \infty$  el valor óptimo inicial de la función objetivo del subproblema dual
5:  $t = 0$ 
6: while  $w_{RMP}^{(t)*} < Z_D^{(t)*}$  do
7:   Resolver RMP
8:    $w_{RMP}^{(t+1)*} = w_{RMP}^*$ 
9:   if  $D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)$  es acotado then
10:    Resolver  $D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)$ 
11:     $Z_D^{(t+1)*} = -\sum_{w \in W} \sum_{l \in L} \pi_{D_v}^* h_l H_{RMP_v l}^* - \sum_{v \in W} \rho_{D_v}^* (1 - X_{RMP_v}^*) M$ 
12:    if  $w_{RMP}^{(t+1)*} < Z_D^{(t+1)*}$  then
13:       $I^{(t+1)} = I^{(t)} \cup \{t + 1\}$ 
14:       $\pi^{(t+1)} = \pi_{D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)}^*$ 
15:       $\rho^{(t+1)} = \rho_{D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)}^*$ 
16:       $J^{(t+1)} = J^{(t)}$ 
17:    end if
18:   else
19:      $Z_D^{(t+1)*} = Z_D^{(t)*}$ 
20:     Sean  $\pi_D^d$  y  $\rho_D^d$  direcciones extremas del poliedro factible de  $D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)$ 
21:      $I^{(t+1)} = I^{(t)}$ 
22:      $J^{(t+1)} = J^{(t)} \cup \{t + 1\}$ 
23:      $\pi^{(t+1)} = \pi_{D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)}^d$ 
24:      $\rho^{(t+1)} = \rho_{D(X_{RMP}^*, H_{RMP}^*)}^d$ 
25:   end if
26:    $t = t + 1$ 
27: end while
28: return  $X_{RMP}^*, Y_{RMP}^*, H_{RMP}^*$ 

```

---

Finalmente, el enfoque de descomposición de Benders fue implementado sin éxito en esta tesis.

En particular, el criterio de detención no se satisface en ninguna de las iteraciones realizadas, lo que impide la convergencia del método hacia la solución óptima de TSD.



## 7 | *Branch-and-cut*

El modelo de distritaje, TSD, es un modelo de programación entera-mixta con un número exponencial de restricciones de contigüidad (4.4). Debido a esta característica, la enumeración explícita de todas las restricciones es prácticamente imposible para una red de transporte de tamaño real. En consecuencia, resulta necesario diseñar un enfoque de solución que permita manejar de forma eficiente dichas restricciones.

### 7.1. Esquema de descomposición

Inicialmente, se considera emplear un esquema de descomposición, donde el problema maestro corresponde a una relajación de TSD que considera únicamente un conjunto restringido  $\Omega_r$ , del conjunto de todos los subconjuntos de unidades básicas  $\Omega$ , reduciendo así la cantidad de restricciones de contigüidad. El problema maestro viene dado por el siguiente modelo de programación entera-mixta:

$$\text{PM}(\Omega_r) : \min_{\substack{X, Y, H, \\ Q, \bar{Q}, \underline{Q}}} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} \quad (4.1)$$

$$s.t : \sum_{\substack{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \setminus S}} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega_r \quad (7.1)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L \quad (4.12)$$

$$Q_v, \bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad \forall v \in W \quad (4.13)$$

$$(X, Y) \in \mathcal{I} \quad (7.2)$$

$$(X, Y, H, Q, \bar{Q}, \underline{Q}) \in \mathcal{B}, \quad (7.3)$$

donde  $\mathcal{I} = \{(X, Y) : (4.2), (4.3), (4.11)\}$  es el conjunto de variables de integridad y número de distritos, y  $\mathcal{B} = \{(X, Y, H, Q, \bar{Q}, \underline{Q}) : (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10)\}$  es el conjunto de variables de balance.

A partir de las variables óptimas del problema maestro, específicamente las variables  $X^*$  e  $Y^*$  con las que se determinan los distritos, se resuelve un problema primal (*primal problem*) que identifica los subconjuntos  $S$  desconectados inducidos por dicha solución. Para identificar los subconjuntos desconectados se sigue el procedimiento descrito en el Algoritmo 3.

---

**Algorithm 3** *Subconjuntos\_Desconectados*( $\bar{X}, \bar{Y}$ )

---

- 1: Sea  $\bar{\Omega}_r = \emptyset$  el conjunto inicial de subconjuntos desconectados inducidos por la solución  $(\bar{X}, \bar{Y})$
  - 2: Sea  $\bar{\chi}$  el conjunto de centros seleccionados en la solución  $\bar{X}$ , i.e.,  $\bar{\chi} = \{v \in W : \bar{X}_v = 1\}$
  - 3: Sea  $\bar{\gamma}_v$  el conjunto de unidades básicas asignadas al centro seleccionado  $v \in \bar{\chi}$  en la solución  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , i.e.,  $\bar{\gamma}_v = \{v' \in V : \bar{Y}_{vv'} = 1\}, \forall v \in \bar{\chi}$
  - 4: **while**  $\bar{\chi} \neq \emptyset$  **do**
  - 5:     Seleccionar un centro  $v$  de  $\bar{\chi}$
  - 6:      $\bar{\chi} = \bar{\chi} \setminus \{v\}$
  - 7:     Sea  $\bar{G}_v = (\bar{\gamma}_v, \bar{E}_v)$  el subgrafo que representa al distrito con centro  $v$  en la solución  $(\bar{X}, \bar{Y})$
  - 8:     Sea  $\bar{\Omega}_{r,v}$  el conjunto de subconjuntos desconectados en el distrito con centro  $v$  en en la solución  $(\bar{X}, \bar{Y})$  obtenido usando el paquete `is_connected` de la librería `Networkx` de Python.
  - 9:      $\bar{\Omega}_r = \bar{\Omega}_r \cup \bar{\Omega}_{r,v}$
  - 10: **end while**
  - 11: **return**  $\bar{\Omega}_r$
- 

Los subconjuntos desconectados son añadidos al conjunto restringido  $\Omega_r$  y se inicia una nueva iteración resolviendo nuevamente el problema maestro. Este proceso continúa hasta que, al resolver el problema primal, ya no se identifican subconjuntos desconectados. En ese caso, la solución óptima obtenida en el problema maestro es factible para TSD. Además, como el problema maestro constituye una relajación de TSD, dicha solución es también óptima para TSD.

La Figura 7.1 ilustra el esquema de descomposición descrito. Además, en el Algoritmo 4 se presenta el pseudocódigo del esquema de descomposición propuesto para obtener una solución óptima de TSD.

Este esquema de descomposición permite manejar las restricciones de contigüidad sin requerir su expresión explícita para todos los subconjuntos  $S \in \Omega$ . No obstante, su implementación resulta costosa computacionalmente, ya que en cada iteración se resuelve a optimalidad el problema maestro, lo que implica resolver un árbol completo de *branch-and-bound* en cada iteración.

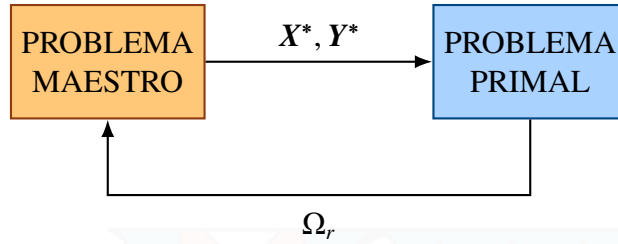


Figura 7.1: Esquema de descomposición

**Algorithm 4** *Esquema\_Descomposicion*

- 1: Sea  $\overline{\Omega}_r^{(k)}$  el conjunto de subconjuntos desconectados inducidos por la solución óptima del problema maestro en la iteración  $k$
- 2: Sea  $\Omega_r^{(1)} = \emptyset$  el conjunto restringido inicial de subconjuntos de unidades básicas
- 3:  $k = 1$
- 4: Sea  $\overline{\Omega}_r^{(0)} = \{V\}$  para inicializar el algoritmo
- 5: **while**  $\overline{\Omega}_r^{(k-1)} \neq \emptyset$  **do**
- 6:   Resolver PM( $\Omega_r^{(k)}$ )
- 7:   Sea  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)}, \mathbf{Q}^{(k)}, \overline{\mathbf{Q}}^{(k)}, \underline{\mathbf{Q}}^{(k)})$  variables óptimas de PM( $\Omega_r^{(k)}$ )
- 8:    $\overline{\Omega}_r^{(k)} = \text{Subconjuntos\_Desconectados}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)})$
- 9:    $\Omega_r^{(k+1)} = \Omega_r^{(k)} \cup \overline{\Omega}_r^{(k)}$
- 10:    $k = k + 1$
- 11: **end while**
- 12: **return**  $(\mathbf{X}^{(k-1)}, \mathbf{Y}^{(k-1)}, \mathbf{H}^{(k-1)}, \mathbf{Q}^{(k-1)}, \overline{\mathbf{Q}}^{(k-1)}, \underline{\mathbf{Q}}^{(k-1)})$

## 7.2. Enfoque de *branch-and-cut*

En este trabajo se adopta un enfoque de *branch-and-cut* basado en planos de corte (*cutting-plane*), el cual consiste esencialmente en incorporar el esquema de descomposición descrito en la Sección 7.1 dentro de un único árbol de *branch-and-bound*. De este modo, se evita resolver un árbol completo en cada iteración, mejorando significativamente la eficiencia computacional.

A continuación, se describen en detalle los principales componentes del enfoque propuesto: (i) la relajación de TSD, (ii) el cálculo de cotas superiores e inferiores para TSD, y (iii) el algoritmo que implementa este enfoque.

### 7.2.1. Relajación de TSD

El problema que se considera resolver a lo largo del árbol de *branch-and-bound* corresponde al problema maestro del esquema de descomposición, es decir,  $PM(\Omega_r)$ . Sin embargo, respecto a modelos de distritaje con restricciones de contigüidad relajadas, [Salazar-Aguilar et al. \(2011\)](#) muestra que la mayoría de los subconjuntos desconectados presentes en las soluciones obtenidas poseen cardinalidad igual a uno. Por lo tanto, siguiendo a [Ríos-Mercado and López-Pérez \(2013\)](#), se incorpora un número polinomial de restricciones lineales que impiden soluciones con subconjuntos desconectados de cardinalidad uno.

Así, se obtiene la siguiente versión relajada de TSD:

$$\text{RTSD}(\Omega_r) : \min_{\substack{X, Y, H, \\ Q, \bar{Q}, \underline{Q}}} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} \quad (4.1)$$

$$s.t : Y_{vv'} \leq \sum_{k \in N_{v'}} Y_{vk} \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (7.4)$$

$$\sum_{v' \in \bigcup_{k \in S} N_k \setminus S} Y_{vv'} - \sum_{v' \in S} Y_{vv'} \geq 1 - |S| \quad \forall v \in W, S \in \Omega_r \quad (7.1)$$

$$X_v, Y_{vv'}, H_{vl} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W, v' \in V, l \in L \quad (4.12)$$

$$Q_v, \bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad \forall v \in W \quad (4.13)$$

$$(X, Y) \in \mathcal{I} \quad (7.2)$$

$$(X, Y, H, Q, \bar{Q}, \underline{Q}) \in \mathcal{B}. \quad (7.3)$$

En este modelo, las restricciones [\(7.4\)](#) corresponden a las restricciones lineales que eliminan subconjuntos desconectados de cardinalidad uno.

### 7.2.2. Cotas para TSD

De acuerdo con el esquema de *branch-and-bound*, en cada nodo  $k$  del árbol se resuelve la relajación lineal de  $\text{RTSD}(\Omega_r)$ , denotada como  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$ , donde  $\mathcal{X}^{(k)}$ ,  $\mathcal{Y}^{(k)}$  y  $\mathcal{H}^{(k)}$  son los dominios continuos de las variables  $X$ ,  $Y$  y  $H$  en el nodo  $k$ , respectivamente.

$$\text{LP-RTSD}(\mathcal{S}_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}) : \min_{\substack{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}, \\ \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}, \underline{\mathbf{Q}}}} \sum_{v \in W} \sum_{v' \in V} d_{vv'} Y_{vv'} \quad (4.1)$$

$$s.t : X_v \in \mathcal{X}_v^{(k)} \quad \forall v \in W \quad (7.5)$$

$$Y_{vv'} \in \mathcal{Y}_{vv'}^{(k)} \quad \forall v \in W, v' \in V \quad (7.6)$$

$$H_{vl} \in \mathcal{H}_{vl}^{(k)} \quad \forall v \in W, l \in L \quad (7.7)$$

$$Q_v, \bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad \forall v \in W \quad (4.13)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathcal{I} \quad (7.2)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}, \underline{\mathbf{Q}}) \in \mathcal{B} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{C}, \quad (7.8)$$

donde  $\mathcal{C} = \{\mathbf{Y} : (7.1), (7.4)\}$  es el conjunto de variables de contigüidad.

La resolución de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$  lleva a la definición de una cota superior o inferior para TSD. Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son enteras, estas definen particiones con ninguno, uno o más distritos desconectados, dando lugar a dos situaciones posibles:

- La solución presenta distritos desconectados: En este caso, la solución no es factible para TSD, y el valor óptimo de la función objetivo constituye una cota inferior.
- La solución no presenta distritos desconectados: En este caso, la solución es factible para TSD y el valor óptimo de la función objetivo constituye una cota superior.

Además, cuando las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son no-enteras, el valor óptimo de la función objetivo constituye una cota inferior

### 7.2.3. Algoritmo de *branch-and-cut*

En el nodo raíz ( $k = 0$ ), se resuelve  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathcal{X}^{(0)}, \mathcal{Y}^{(0)}, \mathcal{H}^{(0)})$ , con  $\Omega_r = \emptyset$ ,  $\mathcal{X}^{(0)} = \{X_v : 0 \leq X_v \leq 1, \forall v \in W\}$ ,  $\mathcal{Y}^{(0)} = \{Y_{vv'} : 0 \leq Y_{vv'} \leq 1, \forall v \in W, v' \in V\}$ , y  $\mathcal{H}^{(0)} = \{H_{vl} : 0 \leq H_{vl} \leq 1, \forall v \in W, l \in L\}$ . El valor óptimo de la función objetivo de esta relajación proporciona una cota inferior para TSD. Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)})$  son enteras, se verifica contigüidad

determinando los subconjuntos desconectados. Cuando no hay subconjuntos desconectados, la solución óptima es factible en TSD y entrega una cota superior inicial. En caso contrario, los subconjuntos desconectados son añadidos a  $\Omega_r$ . Para verificar los subconjuntos desconectados se sigue el procedimiento descrito en el Algoritmo 3.

Para cada nodo  $k > 0$  del árbol de *branch-and-bound*, el proceso descrito se repite manteniendo el conjunto acumulado de subconjuntos desconectados  $\Omega_r$ , el cual crece dinámicamente conforme se detectan nuevas violaciones de contigüidad, es decir, nuevos subconjuntos desconectados.

El algoritmo de *branch-and-cut* implementado en este trabajo considera las siguientes reglas:

1. Poda por infactibilidad: Si la relajación lineal  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  es infactible, entonces el nodo  $k$  se poda.
2. Adición de cortes: Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son enteras y existen subconjuntos desconectados, entonces el conjunto  $\Omega_r$  es actualizado añadiendo el conjunto de los subconjuntos desconectados determinados para el nodo  $k$ , el cual se denomina  $\Omega_r^{(k)}$ .
3. Actualización del incumbente y la mejor cota superior: Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son enteras, no existen subconjuntos desconectados y el valor óptimo de la función objetivo de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  es menor que la actual mejor cota superior, entonces la solución óptima es factible en TSD y mejora la cota superior. Por lo tanto, la solución incumbente y la mejor cota superior son actualizadas. Además, todo nodo abierto cuyo valor óptimo de la función objetivo sea mayor que la actual cota superior es podado.
4. Ramificación: Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son no-enteras y el valor óptimo de la función objetivo de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  es menor que la actual mejor cota superior, entonces el nodo  $k$  es ramificado de acuerdo al procedimiento descrito en el Algoritmo 5.
5. Poda por cota: Si las variables óptimas  $(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  son no-enteras y el valor óptimo de la función objetivo de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  no es menor que la actual mejor cota superior, entonces el nodo  $k$  se poda.
6. Actualización de la cota inferior: Si el valor óptimo de la función objetivo de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)})$  es menor que el valor óptimo de la función objetivo de  $\text{LP-RTSD}(\Omega_r, \mathbf{X}^{(n)})$ ,

$\mathcal{Y}^{(n)}, \mathcal{H}^{(n)}$ ), para cualquier nodo hoja  $n$ , entonces la cota inferior es actualizada al valor óptimo de la función objetivo de LP-RTSD( $\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}$ ).

---

**Algorithm 5** *Ramificacion*( $X^{(k)}, Y^{(k)}, H^{(k)}, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{N}, i$ )

---

```

1: Seleccionar una variable  $X_v, Y_{vv'}$  o  $H_{vl}$  con valor no-entero  $X_v^{(k)}, Y_{vv'}^{(k)}$  o  $H_{vl}^{(k)}$ 
2: if  $X_v$  es seleccionado then
3:    $\mathcal{X}^{(i+1)} = \mathcal{X}^{(k)} \cap \{X \in \mathbb{R}^{|W|} : X_v \leq \lfloor X_v^{(k)} \rfloor\}$ 
4:    $\mathcal{X}^{(i+2)} = \mathcal{X}^{(k)} \cap \{X \in \mathbb{R}^{|W|} : X_v \geq \lceil X_v^{(k)} \rceil\}$ 
5:    $(\mathcal{Y}^{(i+1)}, \mathcal{H}^{(i+1)}) = (\mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$ 
6:    $(\mathcal{Y}^{(i+2)}, \mathcal{H}^{(i+2)}) = (\mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$ 
7:    $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \{i+1, i+2\}$ 
8:    $i = i+2$ 
9: else if  $Y_{vv'}$  es seleccionado then
10:   $\mathcal{Y}^{(i+1)} = \mathcal{Y}^{(k)} \cap \{Y \in \mathbb{R}^{|W| \times |V|} : Y_{vv'} \leq \lfloor Y_{vv'}^{(k)} \rfloor\}$ 
11:   $\mathcal{Y}^{(i+2)} = \mathcal{Y}^{(k)} \cap \{Y \in \mathbb{R}^{|W| \times |V|} : Y_{vv'} \geq \lceil Y_{vv'}^{(k)} \rceil\}$ 
12:   $(\mathcal{X}^{(i+1)}, \mathcal{H}^{(i+1)}) = (\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$ 
13:   $(\mathcal{X}^{(i+2)}, \mathcal{H}^{(i+2)}) = (\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)})$ 
14:   $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \{i+1, i+2\}$ 
15:   $i = i+2$ 
16: else if  $H_{vl}$  es seleccionado then
17:   $\mathcal{H}^{(i+1)} = \mathcal{H}^{(k)} \cap \{H \in \mathbb{R}^{|W| \times |L|} : H_{vl} \leq \lfloor H_{vl}^{(k)} \rfloor\}$ 
18:   $\mathcal{H}^{(i+2)} = \mathcal{H}^{(k)} \cap \{H \in \mathbb{R}^{|W| \times |L|} : H_{vl} \geq \lceil H_{vl}^{(k)} \rceil\}$ 
19:   $(\mathcal{X}^{(i+1)}, \mathcal{Y}^{(i+1)}) = (\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)})$ 
20:   $(\mathcal{X}^{(i+2)}, \mathcal{Y}^{(i+2)}) = (\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)})$ 
21:   $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \{i+1, i+2\}$ 
22:   $i = i+2$ 
23: end if
24: return  $\mathcal{X}^{(i+1)}, \mathcal{X}^{(i+2)}, \mathcal{Y}^{(i+1)}, \mathcal{Y}^{(i+2)}, \mathcal{H}^{(i+1)}, \mathcal{H}^{(i+2)}, \mathcal{N}, i$ 

```

---

Este proceso iterativamente explora el árbol de *branch-and-bound* mientras dinámicamente fortalece la relajación añadiendo cortes de contigüidad. El criterio de parada es que no queden nodos abiertos, que se exceda el límite de tiempo CPU o que la brecha de optimalidad sea alcanzada. La brecha de optimalidad es definida como  $GAP = \frac{\inf UB - LB}{\inf UB}$ , donde  $\inf UB$  es la mejor cota superior y  $LB$  es la cota inferior. Si  $GAP \leq \epsilon$ , entonces el algoritmo se detiene y  $\inf UB$  es un valor  $\epsilon$ -óptimo de la función objetivo para TSD.

El pseudocódigo del método *branch-and-cut* propuesto para obtener una solución  $\epsilon$ -óptima de TSD se presenta en el Algoritmo [7](#) del Apéndice [A](#).

## 8 | Caso de estudio

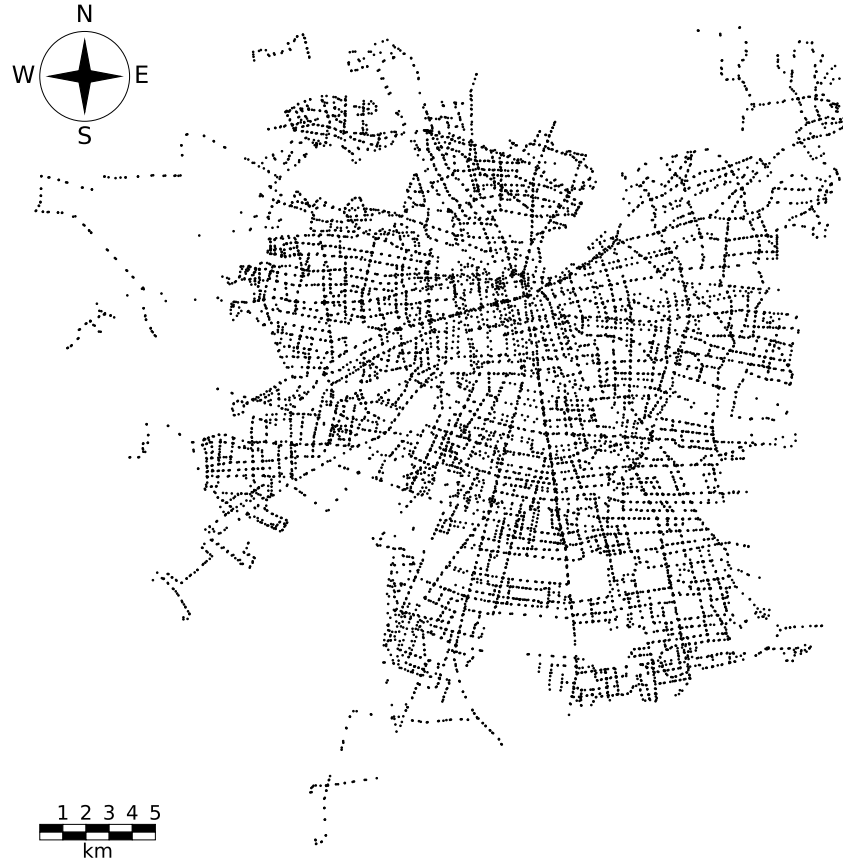
Este trabajo explora un enfoque práctico para el distritaje de sistemas de transporte de buses urbanos de gran escala. En esta sección se abordan cuatro aspectos fundamentales. Primero, se analiza el tipo de unidad básica más adecuada que permita el distritaje de todo el sistema de transporte. Segundo, se estudia el desempeño del enfoque de *branch-and-cut* al variar el número de distritos y la tolerancia de balance. Tercero, se evalúa el impacto computacional de utilizar un conjunto reducido y bien seleccionado de candidatos a centros de distrito. Por último, se desarrolla un algoritmo recursivo jerárquico para abordar instancias con mayor número de distritos.

El estudio computacional se basa en el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago. Este sistema cuenta con un total de 11 720 paradas de buses, 710 líneas de buses y un promedio diario de 34 064 buses en operación. A partir de los recorridos de cada línea, se identifican 20 705 conexiones entre paradas de buses, las cuales definen la estructura de la red de transporte.

Los datos utilizados fueron obtenidos a partir de las bases de datos de la Dirección de Transporte Público Metropolitano (DTPM), organismo encargado de la planificación y gestión del transporte público en Santiago. La Figura 8.1 muestra la distribución espacial de las paradas de buses en el sistema de transporte considerado.

El enfoque de *branch-and-cut* propuesto, definido en el Algoritmo 7 (Apéndice A), fue implementado en Python 3.12 utilizando el solver comercial Gurobi 12.0. La identificación de subconjuntos desconectados (Algoritmo 3) se realizó mediante la biblioteca *NetworkX* de Python. El criterio de detención utilizado considera tres condiciones alternativas: (i) que no existan nodos abiertos en el árbol de *branch-and-bound*, (ii) que se alcance una brecha de optimalidad  $\epsilon = 10^{-4}$ , o (iii) que el tiempo de CPU supere los 432 000 segundos.

Todos los experimentos fueron ejecutados en un equipo con procesador Intel(R) Xeon(R) Gold 5218 @ 2.30 GHz y 512 GB de memoria RAM.



**Figura 8.1:** Distribución de las paradas de buses en el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago

## 8.1. Escalabilidad y elección de las unidades básicas

Un aspecto clave en la resolución de problemas de distritaje a gran escala es la definición de las unidades básicas sobre las cuales se construyen los distritos. Si bien las conexiones entre paradas de buses constituyen una elección natural, no existe garantía de que esta representación permita distritar completamente un sistema de transporte de buses urbanos de gran escala. Por este motivo, también se presenta como una alternativa el uso de áreas poligonales como unidades básicas, de acuerdo con una técnica de teselación.

En todos los experimentos de esta sección se considera que el conjunto de candidatos a centros de distrito es igual al conjunto de unidades básicas ( $W = V$ ), es decir, cada unidad básica es también un candidato a centro de distrito. El número de distritos es igual a diez ( $n = 10$ ) y la tolerancia de balance es  $\alpha = 1$ .

### 8.1.1. Distritaje usando conexiones entre paradas de buses

Cuando se utilizan las conexiones entre paradas de buses como unidades básicas, el grafo que representa el sistema de transporte, definido como  $G = (V, E)$ , tiene 20 705 nodos y 63 604 arcos, es decir,  $|V| = 20\,705$  y  $|E| = 63\,604$ .

Con el fin de evaluar la escalabilidad del enfoque de *branch-and-cut*, se adopta un enfoque de cobertura. Más precisamente, dado un radio de cobertura  $r$  y el centroide del sistema de transporte, se construye un subgrafo  $G_r = (V_r, E_r) \subseteq G$ , el cual es el que se intenta distritar. Sea  $L_r \subseteq L$  el conjunto de líneas de buses que operan en  $G_r$ . El radio de cobertura inicial es  $r = 250$  metros, el cual se incrementa en tramos de 250 metros con cada iteración hasta cubrir todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago ( $r \geq 30\,000$  metros) o hasta que el problema TSD no pueda resolverse dentro del límite de tiempo.

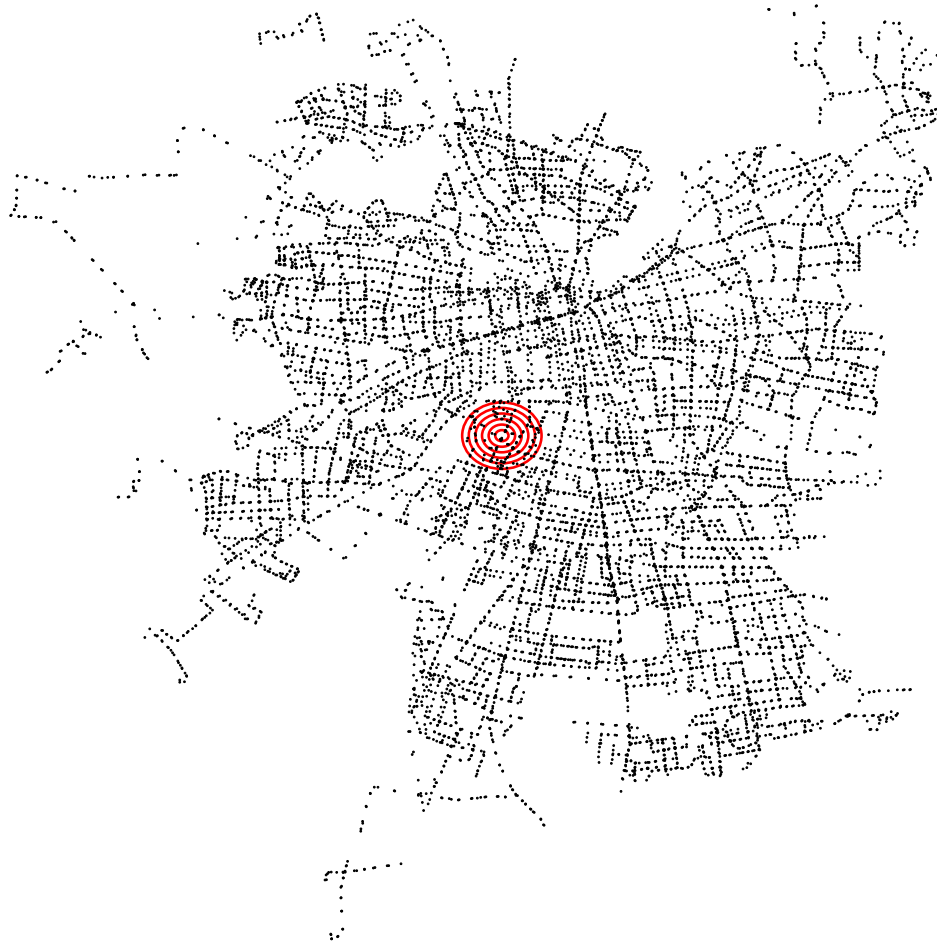
La Tabla 8.1 reporta los tiempos de CPU y los *gaps* de optimalidad obtenidos para cada radio de cobertura. Además, la Figura 8.2 ilustra el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con los radios de cobertura para los cuales se logra obtener una solución factible.

**Tabla 8.1:** Tiempo CPU y *gap* de optimalidad usando conexiones entre paradas de buses para  $n = 10$  y  $\alpha = 1$

Radios (m)	$ V_r $	$ E_r $	$ L_r $	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )
250	12	25	19	<1	0.0
500	57	195	82	1252	0.0
750	108	504	99	432000	6.8
1000	166	737	128	432000	9.5
1250	292	1262	167	432000	4.8
1500	411	1739	181	432000	4.4
1750	526	2178	197	432000	-

Como se muestra en la Tabla 8.1, el uso de conexiones entre paradas de buses como unidades básicas no permite distritar todo el sistema de transporte de Santiago. El mayor radio de cobertura para el cual se obtiene una solución factible es de 1 500 metros, el cual contiene 215 paradas de buses, 411 conexiones entre paradas y 181 líneas de buses. En este caso, el *gap* de optimalidad alcanzado es de 4.4 % en el tiempo límite. El mayor *gap* de optimalidad observado es de 9.5 %, el cual se obtiene cuando el radio de cobertura es de 1 000 metros.

Estos resultados evidencian que la topología de la red de transporte influye de manera significativa en la dificultad computacional del problema. En particular, una red con un mayor número de nodos



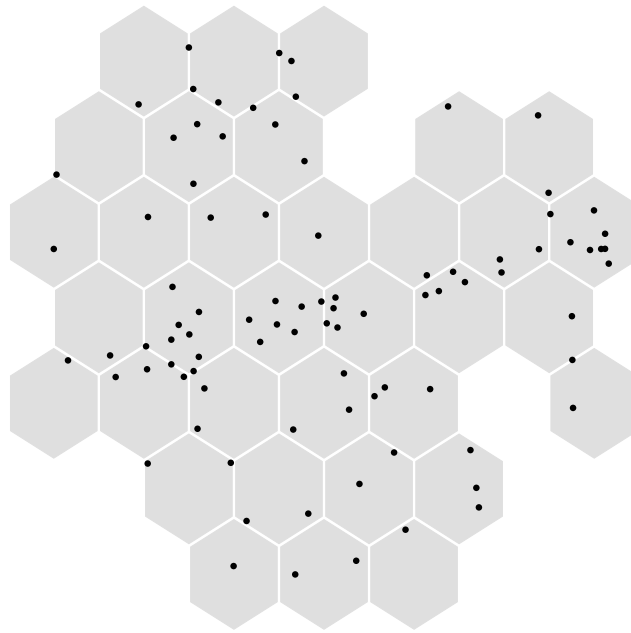
**Figura 8.2:** Sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con radios de cobertura factibles usando conexiones entre paradas de buses

y líneas de buses puede ser distritada con un mejor *gap* de optimalidad.

### 8.1.2. Distritaje usando áreas poligonales

Para abordar los problemas de escalabilidad observados anteriormente, se introduce una técnica de teselación, en la cual el sistema de transporte es cubierto mediante áreas poligonales que se ajustan perfectamente sin superponerse ni dejar espacios vacíos. La técnica se basa en la agregación de las unidades básicas consideradas en la Sección [8.1.1](#), de forma que ahora cada área poligonal de la teselación constituye una unidad básica que contiene al menos una conexión entre paradas de buses. En este caso, el grafo que representa el sistema de transporte, definido como  $G = (V, E)$ , tiene tantos nodos como el número de áreas poligonales en la teselación. Cabe señalar que la ruta

seguida por la línea de bus  $l$ ,  $\mathcal{E}_l$ , en términos de áreas poligonales es fácil de construir a partir de la ruta en términos de conexiones entre paradas de buses. En todos los experimentos se emplea una teselación regular compuesta por hexágonos de igual tamaño. Las teselaciones utilizadas constan de 400 hexágonos, excepto para las instancias con radios de cobertura de 500 metros y 1 000 metros, donde se utilizan teselaciones de 20 y 35 hexágonos, respectivamente. Para ilustrar la técnica de teselación, la Figura 8.3 muestra la teselación hexagonal para la instancia con un radio de cobertura de 1 000 metros.

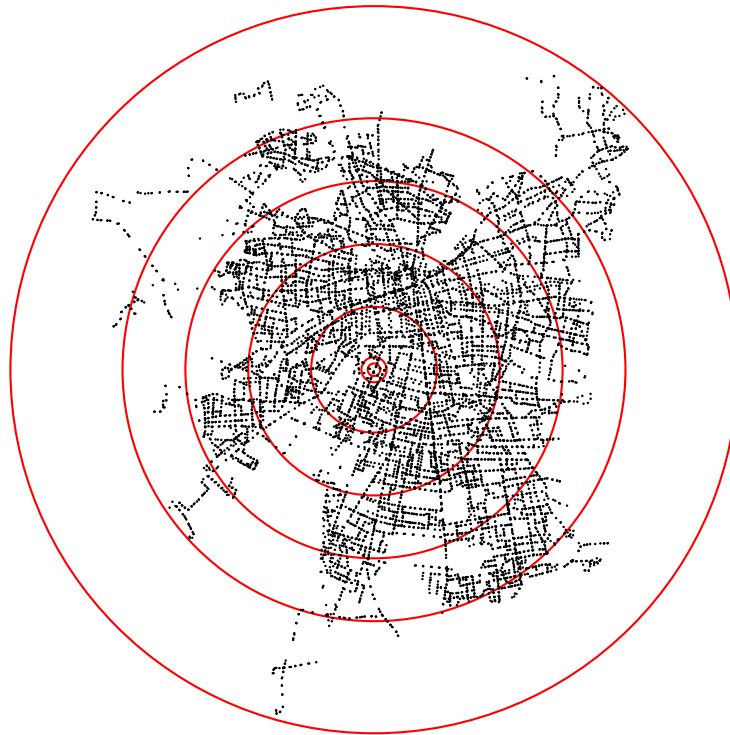


**Figura 8.3:** Teselación hexagonal para un radio de cobertura de 1 000 metros

De manera análoga a la Sección 8.1.1, para analizar la escalabilidad de esta técnica se evalúan distintos radios de cobertura  $r$ , generando un subgrafo  $G_r = (V_r, E_r) \subseteq G$  a distribuir. A diferencia del caso anterior, el uso de áreas poligonales permite obtener soluciones factibles para todos los radios analizados, incluyendo el radio de 30 000 metros que cubre todo el sistema de transporte, tal como se resume en la Tabla 8.2. La Figura 8.4 ilustra el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con los radios de cobertura considerados.

**Tabla 8.2:** Tiempo CPU y *gap* de optimalidad usando áreas poligonales para  $n = 10$  y  $\alpha = 1$ 

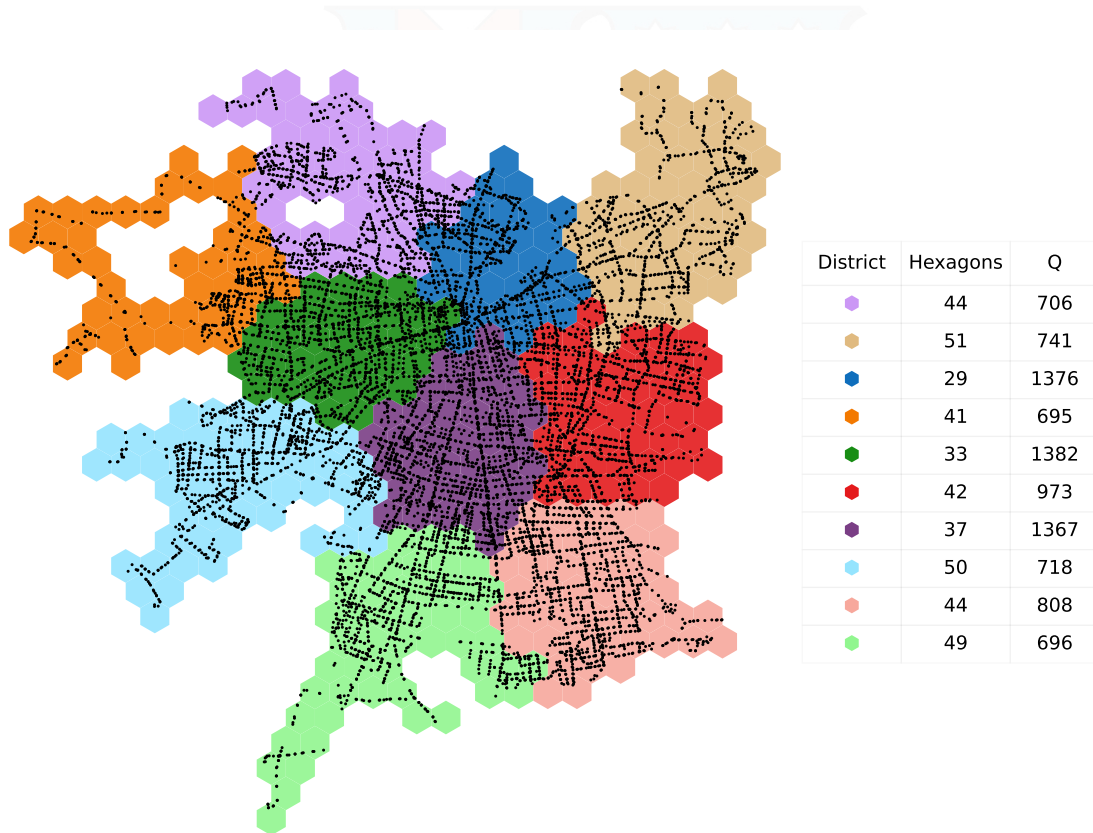
Radios (m)	$ V_r $	$ E_r $	$ L_r $	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )
500	20	30	82	7	0.0
1000	35	75	128	1641	0.0
5000	400	1017	317	432000	1.1
10000	400	1149	548	13890	0.0
15000	400	1081	660	47155	0.0
20000	400	1034	708	432000	0.7
30000	400	1088	710	432000	2.7

**Figura 8.4:** Sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con radios de cobertura factibles usando áreas poligonales

El mayor *gap* de optimalidad observado es de 2.7 %, correspondiente al radio de cobertura de 30 000 metros. Cabe destacar que la instancia con radio de cobertura de 15 000 metros es resuelta a optimalidad en 47 155 segundos, mientras que la instancia con radio de cobertura de 5 000 metros es resuelta con un *gap* de optimalidad de 1.1 % en el tiempo límite. Esto refuerza la influencia de la topología de la red de transporte, ya que una red con el mismo número de nodos y un mayor número

de líneas de buses es distritada con una reducción del 89 % en el tiempo de CPU y con un mejor *gap* de optimalidad.

La Figura 8.5 presenta la configuración final de los distritos al considerar todo el sistema de transporte de Santiago.



**Figura 8.5:** Distritos para inspección de tarifas para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $n = 10$  y  $\alpha = 1$

Dado que el flujo de buses es sustancialmente mayor en el área central del sistema, los distritos centrales son más pequeños en términos del número de unidades básicas, con el fin de satisfacer el criterio de balance.

Es importante hacer notar que cada hexágono en la Figura 8.5 representa un área de 2.29 km<sup>2</sup>.

## 8.2. El número de distritos y la tolerancia de balance

En esta sección se evalúa el desempeño del enfoque de *branch-and-cut* sobre todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago, considerando diferentes números de distritos  $n$  y distintas

tolerancias de balance  $\alpha$ , utilizando el enfoque basado en áreas poligonales. En todas las instancias, cada unidad básica es también un candidato a centro de distrito, es decir, hay tantos candidatos a centro de distrito como unidades básicas. Se utilizan teselaciones de 250 y 400 hexágonos, en las que cada hexágono representa un área de 4.38 km<sup>2</sup> y 2.29 km<sup>2</sup>, respectivamente.

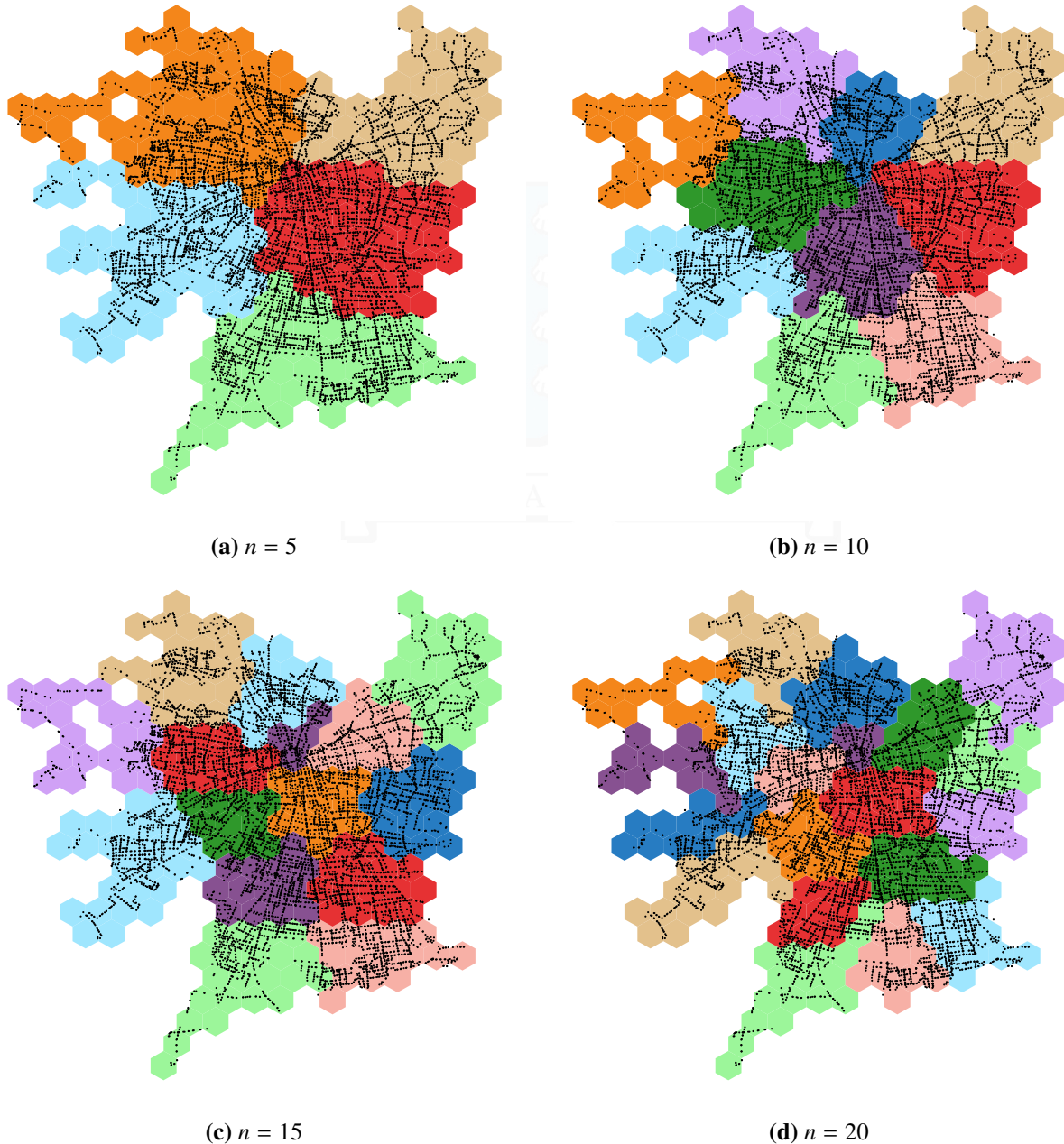
Sean  $\bar{U}$  y  $\underline{U}$  el mayor y menor número de hexágonos conformando un distrito, respectivamente. La Tabla 8.3 reporta los resultados para las instancias con  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$ .

**Tabla 8.3:** Resultados para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$

$n$	$\alpha$	$ V_r  = 250$						$ V_r  = 400$					
		tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\bar{Q}$	$\underline{U}$	$\bar{U}$	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\bar{Q}$	$\underline{U}$	$\bar{U}$
5	1	391	0.0	996	1946	38	54	2092	0.0	936	1867	67	97
10	1	432000	0.3	649	1297	14	27	432000	2.7	695	1382	29	51
15	1	432000	5.1	518	1036	4	26	432000	-	-	-	-	-
20	1	432000	7.5	482	960	3	19	432000	-	-	-	-	-
25	1	432000	-	-	-	-	-	432000	-	-	-	-	-

El *gap* de optimalidad crece a medida que aumenta  $n$ . Considerando 400 áreas poligonales, no se alcanza solución factible para  $n > 10$ . Considerando 250 áreas poligonales, el mayor *gap* de optimalidad observado es de 7.5 %, correspondiente a la instancia con  $n = 20$ . Además, no se alcanza una solución factible cuando  $n = 25$ . Como es de esperar, a medida que aumenta el número de distritos, disminuyen los valores de  $\underline{Q}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\underline{U}$  y  $\bar{U}$ . No obstante, destaca el marcado descenso en el valor del menor número de hexágonos en un distrito, representado por  $\underline{U}$ .

La Figura 8.6 ilustra los distritos obtenidos considerando 250 áreas poligonales para las instancias con  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 15$  y  $n = 20$ .



**Figura 8.6:** Distritos para inspección de tarifas para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago considerando 250 áreas poligonales con  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$

A medida que el número de distritos aumenta, se observa una mayor diferencia en tamaño entre los distritos centrales y los distritos periféricos. En particular, en la instancia con  $n = 20$ , algunos distritos centrales son sustancialmente más pequeños, ya que deben reducir su carga de trabajo para mantener el balance frente al aumento en el número de distritos.

La Tabla [8.4](#) reporta los resultados para las instancias con  $n = 10$  y distintos valores de  $\alpha$ .

**Tabla 8.4:** Resultados para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $n = 10$  y diferentes valores de  $\alpha$ 

$\alpha$	$n$	$ V_r  = 250$						$ V_r  = 400$					
		tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\overline{Q}$	$\underline{U}$	$\overline{U}$	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\overline{Q}$	$\underline{U}$	$\overline{U}$
1.25	10	146888	0.0	632	1420	16	27	432000	0.5	593	1333	33	48
1.00	10	432000	0.3	649	1297	14	27	432000	2.7	695	1382	29	51
0.75	10	432000	2.1	722	1262	13	29	432000	-	-	-	-	-
0.50	10	432000	4.7	814	1220	12	30	432000	-	-	-	-	-
0.25	10	432000	-	-	-	-	-	432000	-	-	-	-	-

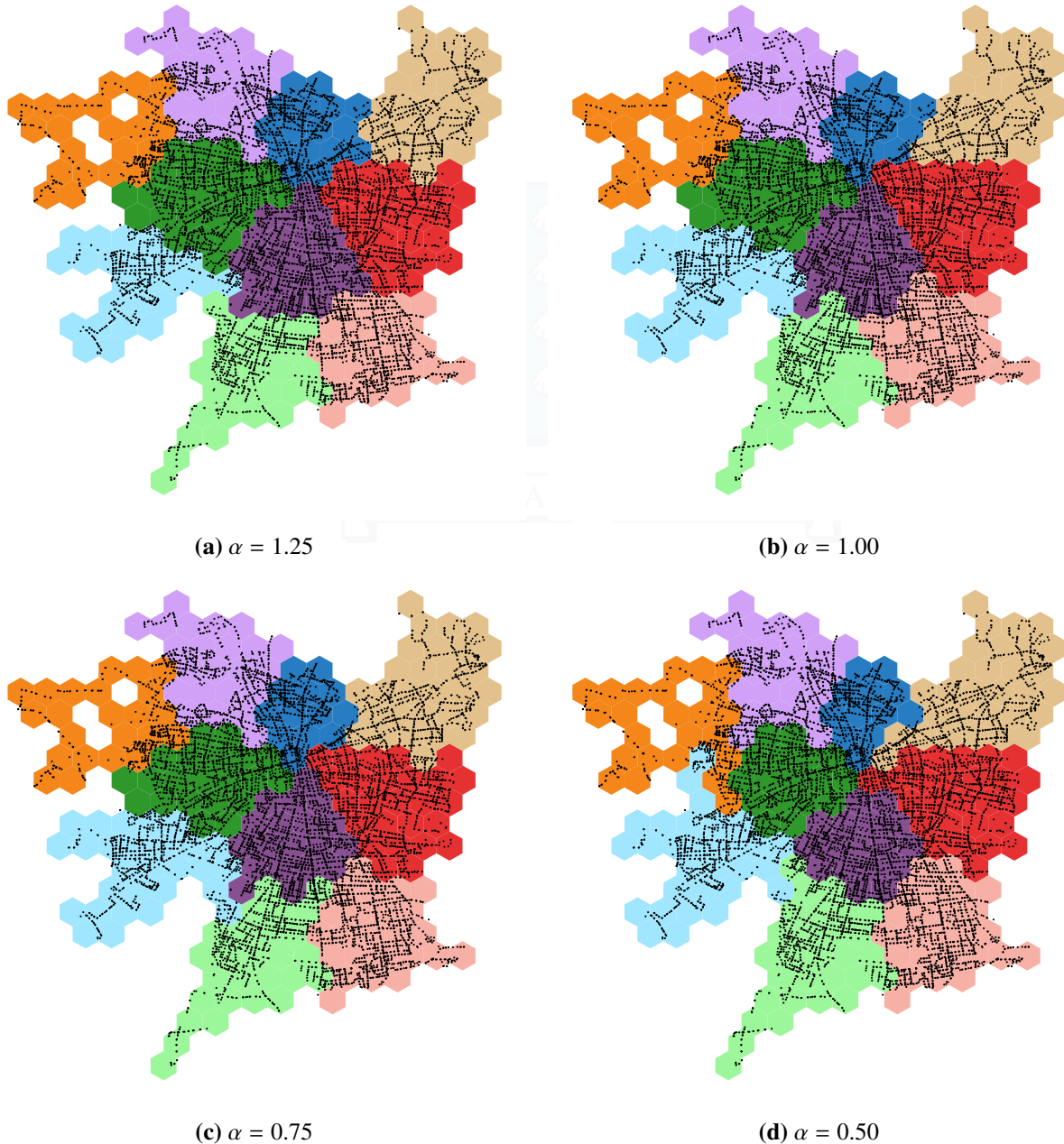
El *gap* de optimalidad aumenta a medida que  $\alpha$  disminuye. Considerando 400 áreas poligonales, no se alcanza solución factible para  $\alpha < 1.00$ . Considerando 250 áreas poligonales, el mayor *gap* de optimalidad observado es de 4.7 %, correspondiente a la instancia con  $\alpha = 0.50$ . Además, no se alcanza una solución factible cuando  $\alpha = 0.25$ . Como es de esperar, a medida que  $\alpha$  disminuye, el valor de  $\underline{Q}$  aumenta, mientras que  $\overline{Q}$  disminuye. No obstante, destaca que el incremento de  $\underline{Q}$  ocurre en una proporción considerablemente mayor que la disminución observada en  $\overline{Q}$ .

La Figura 8.7 ilustra los distritos obtenidos considerando 250 áreas poligonales para las instancias con  $\alpha = 1.25$ ,  $\alpha = 1.00$ ,  $\alpha = 0.75$  y  $\alpha = 0.50$ .

Requerimientos de balance más exigentes (menores valores de  $\alpha$ ) afectan especialmente a los distritos ubicados en las áreas más periféricas del sistema de transporte, los cuales tienden a presentar una menor carga de trabajo. Para satisfacer el criterio de balance, estos distritos deben incrementar su número de unidades básicas de forma que aumente su carga de trabajo. Como consecuencia, la compacidad de los distritos se ve afectada, ya que los distritos periféricos tienden a incorporar unidades básicas más cercanas al área central, donde el flujo de buses es mayor.

### 8.2.1. Una breve discusión sobre el número de hexágonos

Los resultados presentados previamente, basados en teselaciones de 250 y 400 hexágonos, permiten analizar el impacto del número de unidades básicas sobre el desempeño computacional y la factibilidad del enfoque de *branch-and-cut*. El número de hexágonos determina el nivel de resolución espacial con el que se discretiza el sistema de transporte, pero también incide directamente en el tamaño del modelo de programación entera-mixta.



**Figura 8.7:** Distritos para inspección de tarifas para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $n = 10$  y diferentes valores de  $\alpha$

Al comparar ambas teselaciones, se observa que el uso de 400 hexágonos incrementa de manera significativa la dificultad computacional. En particular, para números de distritos mayores a diez ( $n > 10$ ) o para tolerancias de balance más exigentes ( $\alpha < 1$ ), no es posible encontrar soluciones factibles dentro del tiempo computacional considerado. En contraste, la teselación de 250 hexágonos permite resolver un mayor número de instancias, alcanzando menores tiempos computacionales y

menores *gaps* de optimalidad.

Estos resultados evidencian la existencia de un compromiso entre resolución espacial y viabilidad computacional. Una discretización más fina, basada en un mayor número de hexágonos, permite representar con mayor detalle la estructura del sistema, pero limita la escalabilidad del modelo y enfoque de resolución. Por el contrario, una discretización más agregada reduce el tamaño del problema y facilita la resolución de instancias más exigentes en términos de número de distritos y tolerancia de balance.

### 8.3. Uso de un conjunto de candidatos a centros de buena calidad

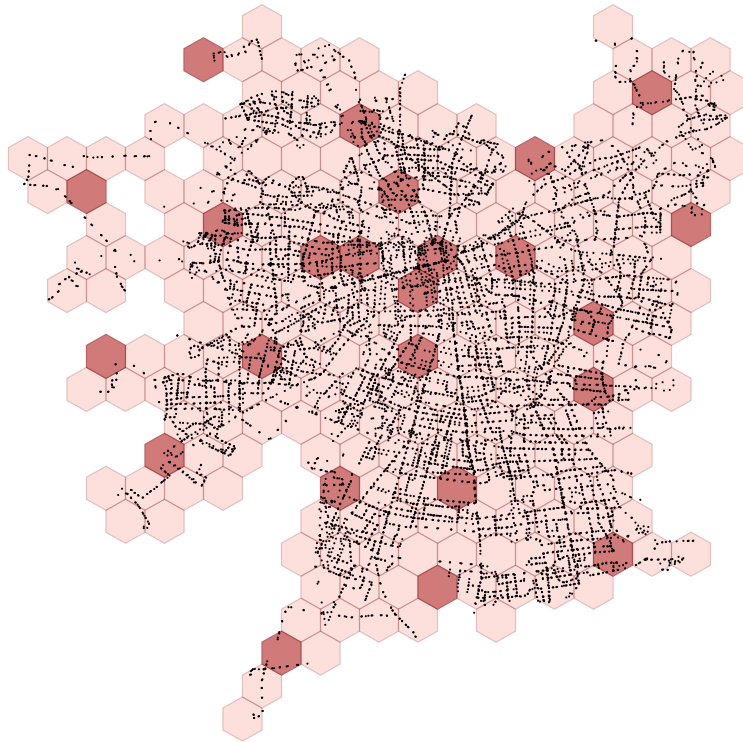
El conjunto de candidatos a centros de distrito, denotado por  $W$ , desempeña un rol clave en la resolución del problema TSD, ya que está directamente asociado tanto al número de variables como al número de restricciones del modelo. En esta sección se propone definir un conjunto  $W$  de buena calidad mediante un enfoque de cobertura total (Toregas et al., 1971), el cual aproxima TSD relajando el criterio de integridad y el número de distritos. El modelo para obtener un conjunto  $W$  de buena calidad siguiendo un enfoque de cobertura total se presenta en el Apéndice B.

Se considera una teselación de 250 hexágonos, tal como en la Sección 8.2. La resolución del problema de cobertura total conduce a la selección de 24 candidatos a centro de distrito. La Figura 8.8 muestra la teselación del sistema de transporte de buses urbanos de Santiago junto con la ubicación de estos candidatos.

Al considerar este conjunto de candidatos de buena calidad  $W$ , se alcanza una solución óptima en un menor tiempo computacional que en la Sección 8.2 para distintos valores de los parámetros  $n$  y  $\alpha$ , como se resume en las Tablas 8.5 y 8.6, respectivamente.

**Tabla 8.5:** Resultados con un conjunto de candidatos de buena calidad para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$

$n$	$\alpha$	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\overline{Q}$	$\underline{U}$	$\overline{U}$
5	1.00	17	0.0	917	1793	40	52
10	1.00	4094	0.0	708	1408	15	31
15	1.00	75033	0.0	618	1229	9	26
20	1.00	166785	0.0	500	999	4	20



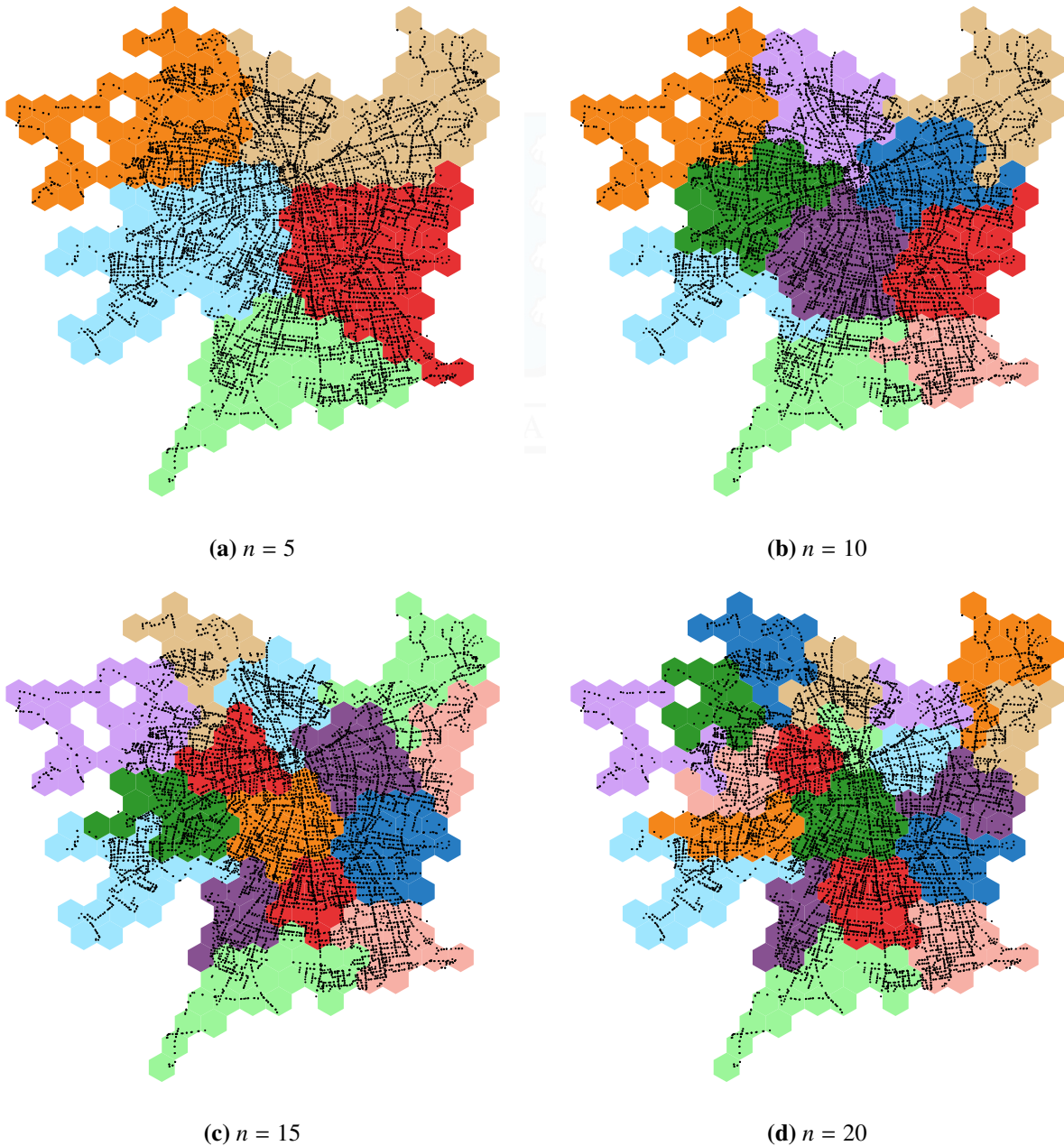
**Figura 8.8:** Teselación para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago y candidatos a centro de distrito

**Tabla 8.6:** Resultados con un conjunto de candidatos de buena calidad para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $n = 10$  y diferentes valores de  $\alpha$

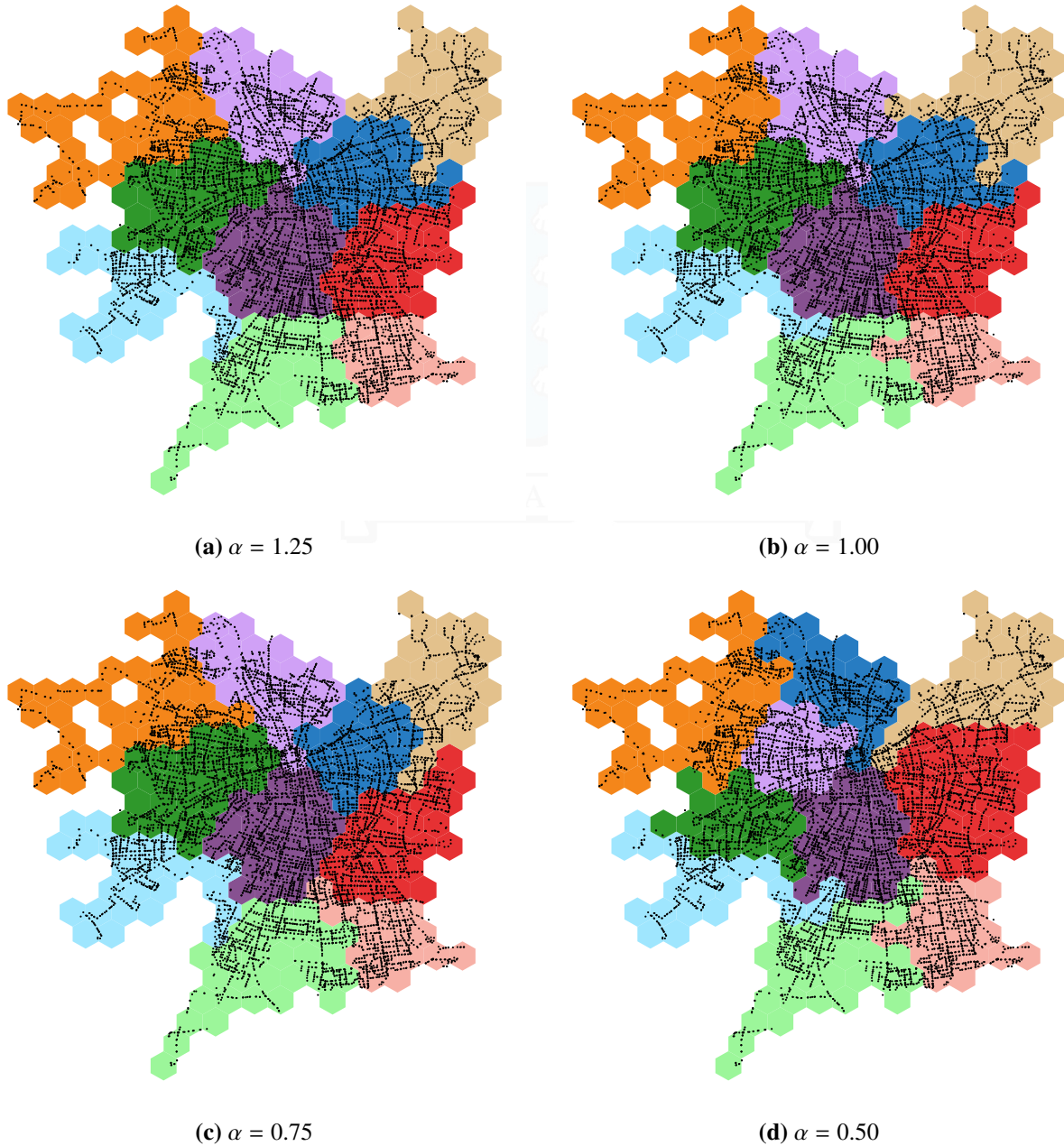
$\alpha$	$n$	tiempo CPU (s)	GAP ( $\times 10^{-2}$ )	$\underline{Q}$	$\overline{Q}$	$\underline{U}$	$\overline{U}$
1.25	10	2786	0.0	626	1395	14	32
1.00	10	4094	0.0	708	1408	15	31
0.75	10	10099	0.0	736	1286	15	33
0.50	10	42078	0.0	846	1260	13	35

El tiempo CPU aumenta a medida que crece  $n$  y disminuye  $\alpha$ . En todas las instancias analizadas, ya sea variando  $n$  o  $\alpha$ , se alcanza una solución óptima dentro del tiempo límite. El mayor tiempo CPU observado es de 166 785 segundos en las instancias que varían  $n$  y de 42 078 segundos en las instancias que varían  $\alpha$ . Se observa que el enfoque de *branch-and-cut* presenta un mejor desempeño ante variaciones de  $\alpha$  que ante variaciones de  $n$ . Cabe señalar que, en la Sección [8.2](#), se alcanza el tiempo límite de 432 000 segundos en casi todas las instancias, a excepción de aquellas con  $n = 5$  y  $\alpha = 1.25$ .

Las Figuras 8.9 y 8.10 ilustran los distritos obtenidos para las instancias presentadas.



**Figura 8.9:** Distritos para inspección de tarifas con un conjunto de candidatos de buena calidad para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$



**Figura 8.10:** Distritos para inspección de tarifas con un conjunto de candidatos de buena calidad para todo el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago con  $n = 10$  y diferentes valores de  $\alpha$

## 8.4. Algoritmo recursivo jerárquico

En la Sección [8.2](#) se evidencia que el enfoque de *branch-and-cut* presenta limitaciones prácticas a medida que aumenta el número de distritos a generar. En particular, para instancias con  $n \geq 25$  no es posible encontrar soluciones factibles dentro del tiempo computacional considerado, es decir,

432 000 segundos. Esta dificultad está asociada tanto al tamaño del problema como a la complejidad inducida por las restricciones de contigüidad y balance bajo una definición no aditiva de la carga de trabajo distrital.

Con el objetivo de superar esta limitación y explorar configuraciones con un mayor número de distritos, se propone un algoritmo recursivo jerárquico. La idea central de este algoritmo consiste en descomponer el problema original en etapas sucesivas. En una primera etapa, el enfoque de *branch-and-cut* se utiliza para distritar la red completa en un número reducido de distritos. Posteriormente, en las etapas siguientes, cada uno de los distritos obtenidos en la etapa anterior es distritado de manera independiente, aplicando nuevamente el mismo enfoque de *branch-and-cut*. De esta forma, se genera progresivamente una partición más fina del sistema, evitando enfrentar directamente una instancia de gran escala con un número elevado de distritos.

Sea  $n_t$  el parámetro que define el número de distritos considerado en la etapa  $t$ ,  $\alpha_t$  la tolerancia de balance asociada a dicha etapa y  $T$  el número total de etapas del procedimiento. El pseudocódigo del algoritmo recursivo jerárquico propuesto se presenta en el Algoritmo 6.

---

**Algorithm 6** *Recursivo\_Jerarquico*( $G, n_t, \alpha_t, T$ )

---

```

1: Sea  $\mathcal{D}^{(0)} = \{V\}$  el conjunto inicial de distritos, compuesto únicamente por todo el sistema
2:  $t = 0$ 
3: while  $t < T$  do
4:   Inicializar  $\mathcal{D}^{(t+1)} = \emptyset$ 
5:   while  $\mathcal{D}^{(t)} \neq \emptyset$  do
6:     Seleccionar un distrito  $D \in \mathcal{D}^{(t)}$ 
7:      $\mathcal{D}^{(t)} = \mathcal{D}^{(t)} \setminus \{D\}$ 
8:     Definir el subgrafo inducido  $G_D = (V_D, E_D)$  asociado al distrito  $D$ 
9:      $CP\text{-}B\&C(G_D, n_{t+1}, \alpha_{t+1}, \epsilon, \epsilon)$ 
10:    Sea  $\mathcal{D}_D^{(t+1)}$  el conjunto de distritos obtenidos al particionar  $D$  en la etapa  $t + 1$ 
11:     $\mathcal{D}^{(t+1)} = \mathcal{D}^{(t+1)} \cup \mathcal{D}_D^{(t+1)}$ 
12:   end while
13:    $t = t + 1$ 
14: end while
15: return  $\mathcal{D}^{(t)}$ 

```

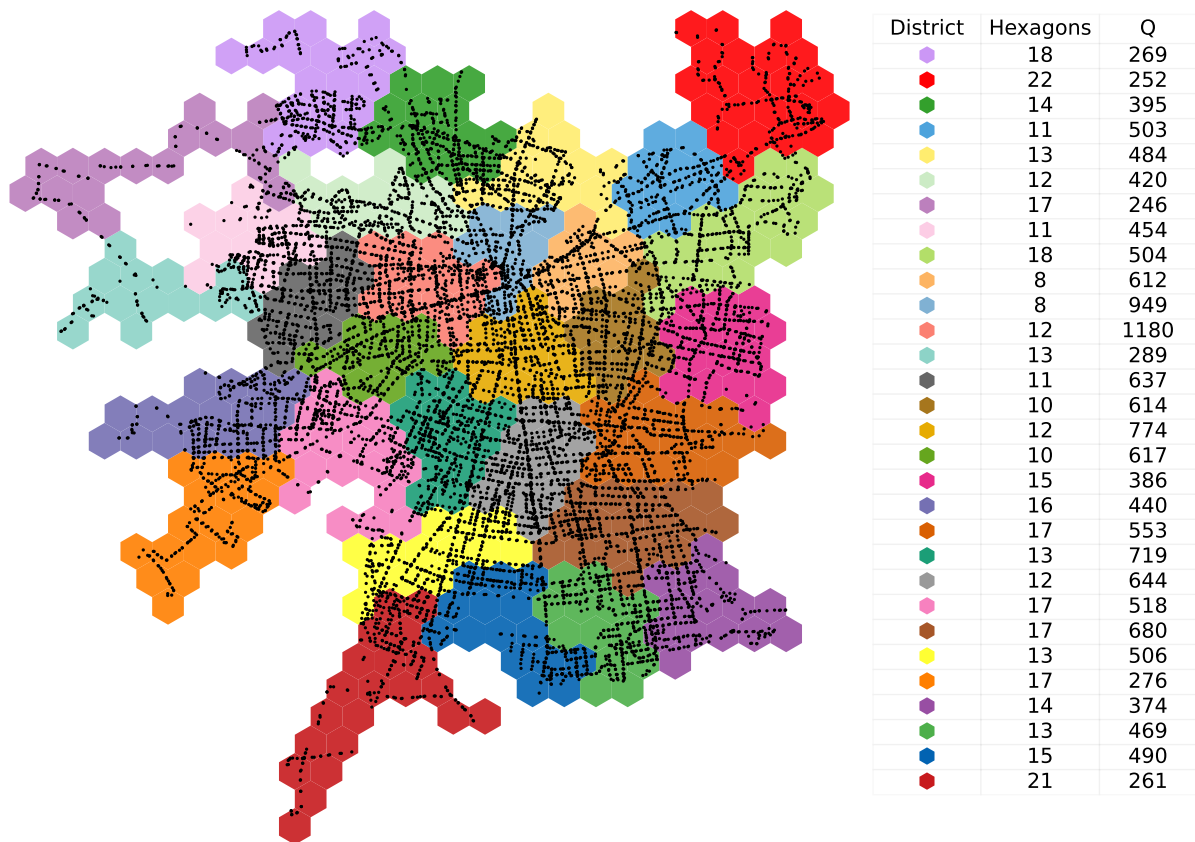
---

Cabe señalar que el número total de distritos generados por el algoritmo se encuentra acotado superiormente por el producto de los parámetros de número de distritos considerados en cada etapa.

Así, sea  $\bar{n}_T$  el número de distritos generados tras  $T$  etapas, se cumple que:

$$\bar{n}_T \leq \prod_{t=1}^T n_t.$$

Para ejemplificar el funcionamiento del algoritmo recursivo jerárquico, se considera una primera etapa en la que se utilizan los parámetros  $n = 10$  y  $\alpha = 1$ . La solución obtenida en esta etapa se muestra en la Figura 8.5. A continuación, en una segunda etapa, cada uno de los distritos generados es distritado nuevamente utilizando los parámetros  $n = 3$  y  $\alpha = 1$ . El tiempo computacional requerido para ejecutar la segunda etapa es de 799 segundos. La solución final resultante de este proceso recursivo jerárquico se presenta en la Figura 8.11.



**Figura 8.11:** Distritos para inspección de tarifas mediante el algoritmo recursivo jerárquico

Dados los parámetros utilizados en la instancia resuelta, el algoritmo recursivo jerárquico genera un total de 30 distritos. La solución final presenta una combinación de distritos de distinto tamaño y

forma, incluyendo distritos de tamaño reducido en términos del número de unidades básicas. En particular, se observa la presencia de distritos muy pequeños en zonas con alto flujo de buses, uno de los cuales está conformado por solo ocho unidades básicas.

Es importante destacar que el algoritmo recursivo jerárquico presenta algunas desventajas relevantes. En primer lugar, se trata de un algoritmo que no entrega una medida explícita de calidad de la solución en términos del *gap* de optimalidad, por lo que no es posible evaluar cuán lejos se encuentra la solución obtenida del óptimo global del problema. En segundo lugar, el uso de una misma tolerancia de balance  $\alpha_i$  en cada etapa no garantiza que la solución final cumpla dicha tolerancia a nivel global. En particular, para la instancia resuelta, donde  $T = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $n_1 = 10$  y  $n_2 = 3$ , se obtiene en la solución final un valor de  $\overline{Q} = 1180$  y  $\underline{Q} = 247$ , lo que implica un nivel de balance dado por

$$\frac{\overline{Q} - \underline{Q}}{\underline{Q}} = 3.77,$$

valor considerablemente superior al permitido en cada una de las etapas del algoritmo.

Con el objetivo de analizar si es posible mejorar el balance final utilizando tolerancias de balance más exigentes en la segunda etapa, se resolvieron instancias adicionales del algoritmo recursivo jerárquico variando el parámetro  $\alpha_2$ . En la Tabla 8.7 se reportan los resultados obtenidos para estas instancias.

**Tabla 8.7:** Resultados del algoritmo recursivo jerárquico

$n_1$	$\alpha_1$	$n_2$	$\alpha_2$	tiempo CPU etapa 2 (s)	$\underline{Q}$	$\overline{Q}$	$\frac{\overline{Q} - \underline{Q}}{\underline{Q}}$
10	1.00	3	1.00	799	247	1180	3.77
10	1.00	3	0.75	1173	247	1180	3.77
10	1.00	3	0.50	2638	270	1102	3.08
10	1.00	3	0.25	2723	333	1003	2.01

Los resultados muestran que el tiempo computacional de la segunda etapa aumenta a medida que disminuye la tolerancia de balance  $\alpha_2$ , alcanzando un valor máximo de 2723 segundos cuando  $\alpha_2 = 0.25$ . Como es de esperar, la medida de balance final mejora al utilizar tolerancias de balance más estrictas en la segunda etapa. No obstante, incluso bajo valores exigentes de  $\alpha_2$ , el balance global de la solución final sigue siendo considerablemente peor que el impuesto en cada una de las etapas del algoritmo.

A pesar de estas limitaciones, el algoritmo recursivo jerárquico constituye una herramienta exploratoria útil para analizar configuraciones con un mayor número de distritos y para obtener soluciones en escenarios donde los enfoques exactos presentan dificultades computacionales significativas.



## 9 | Conclusiones

Este trabajo estudia el problema de distritaje en sistemas de transporte de buses urbanos, con énfasis en su aplicación a la inspección de tarifas. El problema se aborda desde una perspectiva integral, incorporando simultáneamente los criterios fundamentales de integridad, contigüidad, compacidad y balance, los cuales son esenciales para garantizar tanto la viabilidad operacional como la equidad en la asignación de cargas de trabajo a los equipos de inspección.

Entre estos criterios, el balance resulta particularmente desafiante de modelar en el contexto de los sistemas de transporte de buses urbanos. Para su aplicación, la carga de trabajo se define como el número de buses que circulan en un intervalo de tiempo determinado. Dado que las líneas de buses recorren la red de transporte atravesando múltiples unidades básicas, la carga de trabajo es intrínsecamente compartida y no puede agregarse de manera aditiva a nivel distrital. Por consiguiente, a diferencia de la mayoría de las formulaciones de distritaje presentes en la literatura, este trabajo adopta explícitamente un enfoque de carga de trabajo distrital no aditiva en las unidades básicas.

Se propone un modelo de programación entera-mixta para el problema de distritaje en sistemas de transporte de buses urbanos, el cual incorpora un número exponencial de restricciones de contigüidad. La formulación captura explícitamente la estructura espacial de la red de transporte y permite garantizar que cada distrito constituya una región conectada, compacta y balanceada en términos de carga de trabajo. Debido a la imposibilidad práctica de enumerar todas las restricciones de contigüidad, se desarrolla un enfoque de solución basado en *branch-and-cut* con generación dinámica de cortes, en el cual dichas restricciones son inicialmente relajadas y añadidas de forma iterativa cuando se detecta su violación.

Asimismo, se exploraron enfoques alternativos de descomposición, específicamente generación de columnas y descomposición de Benders. En el enfoque de generación de columnas, cada columna representa un subconjunto contiguo de unidades básicas, lo cual resulta conceptualmente atractivo

desde el punto de vista de la modelación. Por su parte, la descomposición de Benders permite separar las decisiones espaciales binarias de la verificación del criterio de balance mediante la resolución de un subproblema lineal. No obstante, ninguno de estos enfoques resultó exitoso en el contexto del problema estudiado. En el caso de la generación de columnas, la principal dificultad radica en la definición no aditiva de la carga de trabajo distrital, la cual induce restricciones que deben aplicarse de manera global sobre el conjunto de columnas. Estos resultados negativos permiten identificar limitaciones prácticas de los enfoques de descomposición cuando se enfrentan a estructuras de balance no aditivas, y aportan evidencia empírica relevante para orientar futuras investigaciones en esta línea.

El desempeño del enfoque de *branch-and-cut* propuesto fue evaluado mediante un extenso estudio computacional basado en el sistema de transporte de buses urbanos de Santiago. Los experimentos permitieron analizar tanto la escalabilidad del modelo como la influencia de diversas decisiones de modelación. En particular, se observó que:

- El uso de conexiones entre paradas de buses como unidades básicas limita severamente la escalabilidad del enfoque, permitiendo distritar únicamente fracciones reducidas del sistema.
- La agregación de la red mediante una técnica de teselación basada en áreas poligonales mejora sustancialmente la escalabilidad, permitiendo el distritaje de todo el sistema de transporte.
- Restringir el conjunto de candidatos a centros de distrito mediante un enfoque de cobertura total reduce significativamente los tiempos de solución y permite alcanzar soluciones óptimas para una amplia gama de parámetros.

El análisis de sensibilidad respecto del número de distritos y de la tolerancia de balance permitió identificar patrones relevantes desde un punto de vista operativo. En particular, se observó que incrementos en el número de distritos o exigencias más estrictas de balance afectan principalmente a las zonas periféricas del sistema, generando distritos menos compactos y aumentando la dificultad computacional.

Adicionalmente, se desarrolló un algoritmo recursivo jerárquico que permite abordar instancias con un mayor número de distritos, aunque sin garantizar la factibilidad de las soluciones obtenidas respecto del criterio de balance.

Este trabajo abre diversas líneas de investigación futura. Una primera dirección consiste en el fortalecimiento del marco de *branch-and-cut*, por ejemplo, mediante la separación en soluciones fraccionarias y una gestión más eficiente de los cortes, con el fin de mejorar aún más la escalabilidad ante requisitos de balance más estrictos y un mayor número de distritos. Una segunda línea relevante corresponde al estudio de formulaciones alternativas basadas en cargas de trabajo aditivas, por ejemplo, utilizando información de origen–destino de pasajeros, particularmente bajo políticas de inspección en estaciones. Si bien en este trabajo la compacidad se mide a través de la dispersión de las unidades básicas, existen métricas alternativas de compacidad, por ejemplo, basadas en las fronteras de los distritos, las cuales podrían explorarse en trabajos futuros. Resulta de interés el desarrollo de enfoques de partición multinivel que permitan abordar instancias con un mayor número de distritos, manteniendo una definición no aditiva de la carga de trabajo y garantizando la factibilidad de las soluciones obtenidas. Cabe señalar que no existen algoritmos multinivel con carga de trabajo no aditiva que sean operacionalmente viables para la inspección de tarifas.

En conjunto, los resultados de esta tesis contribuyen al entendimiento del distritaje en sistemas de transporte público y entregan herramientas metodológicas y empíricas relevantes para el diseño de distritos equitativos y operacionalmente viables para la inspección de tarifas.

# Bibliografía

- Alvarez-Miranda, E., Epstein, R., Pereira, J., Sinnl, M., and Urrutia, R. (2025). A multi-criteria districting approach with a lexicographic compactness metric: An application to the chilean postal service. *Computers & Operations Research*, 173:106845.
- Arredondo, V., Martínez-Panero, M., Peña, T., and Ricca, F. (2021). Mathematical political districting taking care of minority groups. *Annals of Operations Research*, 305:375–402.
- Bahamondes, B., Correa, J., Matuschke, J., and Oriolo, G. (2017). Adaptivity in network interdiction. In Rass, S., An, B., Kiekintveld, C., Fang, F., and Schauer, S., editors, *Decision and Game Theory for Security*, pages 40–52, Cham. Springer International Publishing.
- Barabino, B., Carra, M., and Currie, G. (2024). Fare inspection in proof-of-payment transit networks: A review. *Journal of Public Transportation*, 26:100101.
- Barabino, B. and Salis, S. (2020). Do students, workers, and unemployed passengers respond differently to the intention to evade fares? an empirical research. *Transportation Research Interdisciplinary Perspectives*, 7:100215.
- Barabino, B. and Salis, S. (2023). Segmenting fare-evaders by tandem clustering and logistic regression models. *Public Transport*, 15:61–96.
- Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2014). Fare evasion in proof-of-payment transit systems: Deriving the optimum inspection level. *Transportation Research Part B: Methodological*, 70:1–17.
- Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2015). What are the determinants in making people free riders in proof-of-payment transit systems? evidence from italy. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 80:184–196.
- BCN (2021). Pago de tarifa en el transporte público y registro de infractores. <https://www.bcn.cl/portal/leyfacil/recurso/pago-de-tarifa-en-el-transporte-publico-y-registro-de-infractores>.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4(1):238–252.
- Board, T. R., National Academies of Sciences, E., and Medicine (2022). *Measuring and Managing Fare Evasion*. The National Academies Press, Washington, DC.

- Borndörfer, R., Omont, B., Sagnol, G., and Swarat, E. (2012). A stackelberg game to optimize the distribution of controls in transportation networks. In Krishnamurthy, V., Zhao, Q., Huang, M., and Wen, Y., editors, *Game Theory for Networks*, pages 224–235, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Borndörfer, R., Buwaya, J., Sagnol, G., and Swarat, E. (2015). Network spot-checking games: Theory and application to toll enforcing in transportation networks. *Networks*, 65(4):312–328.
- Borndörfer, R., Schwartz, S., and Surau, W. (2023). Vertex covering with capacitated trees. *Networks*, 81(2):253–277.
- Bozkaya, B., Erkut, E., Haight, D., and Laporte, G. (2011). Designing new electoral districts for the city of edmonton. *Interfaces*, 41(6):534–547.
- Brotcorne, L., Escalona, P., Fortz, B., and Labbé, M. (2021). Fare inspection patrols scheduling in transit systems using a stackelberg game approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, 154:1–20.
- Bruglieri, M. and Cordone, R. (2021). Metaheuristics for the minimum gap graph partitioning problem. *Computers & Operations Research*, 132:105301.
- Bucarey, V., Ordóñez, F., and Bassaletti, E. (2015). Shape and balance in police districting. In Eiselt, H. A. and Marianov, V., editors, *Applications of Location Analysis*, pages 329–347. Springer International Publishing, Cham.
- Bucciol, A., Landini, F., and Piovesan, M. (2013). Unethical behavior in the field: Demographic characteristics and beliefs of the cheater. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 93:248–257.
- Camacho-Collados, M., Liberatore, F., and Angulo, J. (2015). A multi-criteria police districting problem for the efficient and effective design of patrol sector. *European Journal of Operational Research*, 246(2):674–684.
- Cantillo, A., Raveau, S., and Muñoz, J. C. (2022). Fare evasion on public transport: Who, when, where and how? *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 156:285–295.
- Çatalyürek, U., Devine, K., Faraj, M., Gottesbüren, L., Heuer, T., Meyerhenke, H., Sanders, P., Schlag, S., Schulz, C., Seemaier, D., and Wagner, D. (2023). More recent advances in (hyper)graph partitioning. *ACM Comput. Surv.*, 55(12).
- Chen, H., Cheng, T., and Ye, X. (2019). Designing efficient and balanced police patrol districts on an urban street network. *International Journal of Geographical Information Science*, 33(2):269–290.
- Chopra, S., Park, H., and Shim, S. (2023). An exact solution method for the political districting problem. *Parallel Processing Letters*, 33(01n02):2340001.
- Cools, M., Fabbro, Y., and Bellemans, T. (2018). Identification of the determinants of fare evasion. *Case Studies on Transport Policy*, 6(3):348–352. TRANSPORT PLANNING AND POLICY.

- Cordero, M., Miniguano–Trujillo, A., Recalde, D., Torres, R., and Vaca, P. (2025). Optimizing connected components graph partitioning with minimum size constraints using integer programming and spectral clustering techniques. *Networks*, 85(3):245–260.
- Correa, J., Harks, T., Kreuzen, V. J. C., and Matuschke, J. (2017). Fare evasion in transit networks. *Operations Research*, 65(1):165–183.
- Dantzig, G., Fulkerson, R., and Johnson, S. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393–410.
- Datta, D., Figueira, J. R., Fonseca, C. M., and Tavares-Pereira, F. (2008). Graph partitioning through a multi-objective evolutionary algorithm: a preliminary study. In *Proceedings of the 10th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation, GECCO '08*, page 625–632, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.
- Delfau, J.-B., Pertsekos, D., and Chouiten, M. (2018). Optimization of control agents shifts in public transportation: Tackling fare evasion with machine-learning. In *2018 IEEE 30th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI)*, pages 409–413.
- Di Nardo, A., Di Natale, M., Giudicianni, C., Greco, R., and Santonastaso, G. F. (2017). Weighted spectral clustering for water distribution network partitioning. *Applied Network Science*, 2(19).
- Drexler, A. and Haase, K. (1999). Fast approximation methods for sales force deployment. *Management Science*, 45(10):1307–1323.
- DTPM (2024). Plan antievasión 2024: Mtt reporta más de 2 mil infracciones por mal uso de tne y tam. <https://www.dtpm.cl/index.php/noticias-2/noticias-dtpm/1059-plan-antievasion-2024-mtt-reporta-mas-de-2-mil-infracciones-por-mal-uso-de-tne-y-tam>.
- DTPM (2025). Índice de evasión en buses del sistema de transporte público metropolitano. <https://www.dtpm.cl/index.php/documentos/indice-de-evasion>.
- DTS (2024). Informe de evasión en el componente troncal de transmilenio. <https://www.transmilenio.gov.co/publicaciones/153766/este-2023-la-linea-base-de-evasion-disminuyo-hasta-ubicarse-en-1532/>.
- Egu, O. and Bonnel, P. (2020). Can we estimate accurately fare evasion without a survey? results from a data comparison approach in lyon using fare collection data, fare inspection data and counting data. *Public Transport*, 12:1–26.
- Escalona, P., Brotcorne, L., Fortz, B., and Ramírez, M. (2024). Fare inspection patrolling under in-station selective inspection policy. *Annals of Operations Research*, 332:191–212.
- Escalona, P., Brotcorne, L., Fortz, B., and Wolf, N. (2025). Spot-fare inspection in urban bus transportation systems: strategy and unpredictability under a stackelberg game approach. *Public Transport*.

- Etemadnia, H., Abdelghany, K., and Hassan, A. (2014). A network partitioning methodology for distributed traffic management applications. *Transportmetrica A: Transport Science*, 10(6):518–532.
- Farughi, H., Tavana, M., Mostafayi, S., and Arteaga, F. J. S. (2020). A novel optimization model for designing compact, balanced, and contiguous healthcare districts. *Journal of the Operational Research Society*, 71(11):1740–1759.
- Fiduccia, C. M. and Mattheyses, R. M. (1982). A linear-time heuristic for improving network partitions. In *Proceedings of the 19th Design Automation Conference, DAC '82*, page 175–181. IEEE Press.
- Freiria, S. and Sousa, N. (2025). Determinants of fare evasion in urban bus lines: Case study of a large database considering spatial components. *Urban Sci*, 9(6):231.
- García-Ayala, G., González-Velarde, J. L., Ríos-Mercado, R. Z., and Fernández, E. (2016). A novel model for arc territory design: promoting eulerian districts. *International Transactions in Operational Research*, 23(3):433–458.
- Gilmore, P. C. and Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9(6):849–859.
- Gilmore, P. C. and Gomory, R. E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations Research*, 11(6):863–888.
- Gob (2024). Infracción grave: estas son las multas por evasión en red movilidad. <https://www.gob.cl/noticias/infraccion-grave-estas-son-las-multas-por-evasion-en-red-movilidad/>.
- Gob (2025). Evasión en buses red cae a su nivel más bajo en tres años. <https://www.gob.cl/noticias/evasion-buses-red-cae-a-nivel-mas-bajo-en-tres-anos/>.
- Guarda, P., Galilea, P., Paget-Seekins, L., and Ortúzar, J. (2016). What is behind fare evasion in urban bus systems? an econometric approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 84:55–71.
- Hendrickson, B. and Leland, R. (1995). A multilevel algorithm for partitioning graphs. In *Proceedings of the 1995 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*, Supercomputing '95, page 28–es, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.
- Herrera-Granda, I. D., León-Jácome, J. C., Lorente-Leyva, L. L., Lucano-Chávez, F., Montero-Santos, Y., Oviedo-Pantoja, W. G., and Díaz-Cajas, C. S. (2019). Subregion districting to optimize the municipal solid waste collection network: A case study. In Botto-Tobar, M., Barba-Maggi, L., González-Huerta, J., Villacrés-Cevallos, P., S. Gómez, O., and Uvidia-Fassler, M. I., editors, *Information and Communication Technologies of Ecuador (TIC.EC)*, pages 225–237, Cham. Springer International Publishing.
- Holzmann, T. and Smith, J. C. (2021). The shortest path interdiction problem with randomized interdiction strategies: Complexity and algorithms. *Operations Research*, 69(1):82–99.

- Jafari, N., Selvitopi, O., and Aykanat, C. (2021). Fast shared-memory streaming multilevel graph partitioning. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 147:140–151.
- Jiang, A. X., Yin, Z., Johnson, M., Tambe, M., Kiekintveld, C., Leyton-Brown, K., and Sandholm, T. (2012). Towards optimal patrol strategies for fare inspection in transit systems. *AAAI Spring Symposium - Technical Report*.
- Jiang, A. X., Yin, Z., Zhang, C., Tambe, M., and Kraus, S. (2013). Game-theoretic randomization for security patrolling with dynamic execution uncertainty. *12th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems 2013, AAMAS 2013*, 1:207–214.
- Jovanovic, R., Tuba, M., and Voß, S. (2016). An ant colony optimization algorithm for partitioning graphs with supply and demand. *Applied Soft Computing*, 41:317–330.
- Kalcsics, J. and Ríos-Mercado, R. Z. (2019). Districting problems. In Laporte, G., Nickel, S., and Saldanha da Gama, F., editors, *Location Science*, pages 705–743. Springer International Publishing, Cham.
- Karypis, G. and Kumar, V. (1998). A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 48(1):71–95.
- Kernighan, B. W. and Lin, S. (1970). An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *Bell System Technical Journal*, 49(2):291–307.
- Krogvig, L. B. (2014). Fare inspection optimization in train networks. Master's thesis, Institutt for matematiske fag.
- Lari, I., Ricca, F., Puerto, J., and Scozzari, A. (2016). Partitioning a graph into connected components with fixed centers and optimizing cost-based objective functions or equipartition criteria. *Networks*, 67(1):69–81.
- Lei, H., Laporte, G., and Guo, B. (2012). Districting for routing with stochastic customers. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 1(1):67–85.
- Liberatore, F. and Camacho-Collados, M. (2016). A comparison of local search methods for the multicriteria police districting problem on graph. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(1)(1):3690474.
- Liberatore, F., Camacho-Collados, M., and Quijano-Sánchez, L. (2022). Equity in the police districting problem: Balancing territorial and racial fairness in patrolling operations. *Journal of Quantitative Criminology*, 38(1):1–25.
- Lin, H.-Y. and Kao, J.-J. (2008). Subregion districting analysis for municipal solid waste collection privatization. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 58(1)(1):104–111.
- Mehrotra, A., Johnson, E. L., and Nemhauser, G. L. (1998). An optimization based heuristic for political districting. *Management Science*, 44(8):1100–1114.

- Mostafayi Darmian, S., Moazzeni, S., and Hvattum, L. M. (2020). Multi-objective sustainable location-districting for the collection of municipal solid waste: Two case studies. *Computers & Industrial Engineering*, 150:106965.
- Moya-García, J. G. and Salazar-Aguilar, M. A. (2020). Territory design for sales force sizing. In Ríos-Mercado, R. Z., editor, *Optimal Districting and Territory Design*, pages 191–206. Springer International Publishing, Cham.
- MTA (2025). Bus fare evasion. <https://metrics.mta.info/?bus/fareevasion>.
- Newman, M. E. J. (2013). Spectral methods for community detection and graph partitioning. *Phys. Rev. E*, 88:042822.
- Pellegrini, F. and Roman, J. (1996). Scotch: A software package for static mapping by dual recursive bipartitioning of process and architecture graphs. In Liddell, H., Colbrook, A., Hertzberger, B., and Sloot, P., editors, *High-Performance Computing and Networking*, pages 493–498. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Perrier, N., Langevin, A., and Campbell, J. F. (2006). A survey of models and algorithms for winter road maintenance. part i: system design for spreading and plowing. *Computers & Operations Research*, 33(1):209–238.
- Porath, K. and Galilea, P. (2020). Temporal analysis of fare evasion in transantiago: A socio-political view. *Research in Transportation Economics*, 83:100958.
- Pothen, A., Simon, H. D., and Liou, K.-P. (1990). Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 11(3):430–452.
- PTV (2024). Victorian official fare compliance series october 2024. <https://www.vic.gov.au/sites/default/files/2025-06/Victorian-Official-Fare-Compliance-Report-October-2024.pdf>.
- Ramos, R. and Silva, H. (2023). Fare evasion in public transport: How does it affect the optimal design and pricing? *Transportation Research Part B: Methodological*, 176:1–26.
- RED (2024a). Mtt anuncia plan antievasión 2024 que busca aumentar controles. <https://www.red.cl/red-comunica/mtt-anuncia-plan-antievasion-2024-que-busca-aumentar-controles/>.
- RED (2024b). Mtt anuncia plan piloto: se instalan validadores en puertas traseras de buses de red movilidad. <https://www.red.cl/red-comunica/mtt-anuncia-plan-piloto-se-instalan-validadores-en-puertas-traseras-de-buses-de-red-movilidad/>.
- RED (2024c). Mtt lanza nueva campaña contra la evasión en red movilidad. <https://www.red.cl/red-comunica/mtt-lanza-nueva-campana-contra-la-evasion-en-red-movilidad/>.
- Reddy, A. V., Kuhls, J., and Lu, A. (2011). Measuring and controlling subway fare evasion: Improving safety and security at new york city transit authority. *Transportation Research Record*, 2216(1):85–99.

- Ricca, F., Scozzari, A., and Simeone, B. (2008). Weighted voronoi region algorithms for political districting. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(9):1468–1477.
- Ricca, F., Scozzari, A., and Simeone, B. (2013). Political districting: from classical models to recent approaches. *Annals of Operations Research*, 204:271–299.
- Ríos-Mercado, R. Z. and Escalante, H. J. (2016). Grasp with path relinking for commercial districting. *Expert Systems with Applications*, 44:102–113.
- Ríos-Mercado, R. Z. and López-Pérez, J. F. (2013). Commercial territory design planning with realignment and disjoint assignment requirements. *Omega*, 41(3):525–535.
- Salazar-Aguilar, M. A., Ríos-Mercado, R. Z., and Cabrera-Ríos, M. (2011). New models for commercial territory design. *Networks and Spatial Economics*, 11:487–507.
- Sanders, P. and Schulz, C. (2011). Engineering multilevel graph partitioning algorithms. In Demetrescu, C. and Halldórsson, M. M., editors, *Algorithms – ESA 2011*, pages 469–480. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Sanders, P. and Schulz, C. (2012). Distributed evolutionary graph partitioning. In *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments*, ALENEX '12, page 16–29, USA. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Schöbel, A. and Urban, R. (2025). Fare structure design in public transport.
- Shirabe, T. (2009). Districting modeling with exact contiguity constraints. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 36(6):1053–1066.
- Tavares Pereira, F., Figueira, J. R., Mousseau, V., and Roy, B. (2007). Multiple criteria districting problems-the public transportation network pricing system of the paris region. *Annals of Operations Research*, 154(1):69–92.
- Toregas, C., Swain, R., ReVelle, C., and Bergman, L. (1971). The location of emergency service facilities. *Operations Research*, 19(6):1363–1373.
- Wang, D., Zhao, J., D'Ariano, A., and Peng, Q. (2021). Simultaneous node and link districting in transportation networks: Model, algorithms and railway application. *European Journal of Operational Research*, 292(1)(1):73–94.
- Xie, S. and Ouyang, Y. (2016). Railroad caller districting with reliability, contiguity, balance, and compactness considerations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 73:65–76.
- Yin, Z., Jiang, A. X., Tambe, M., Kiekintveld, C., Leyton-Brown, K., Sandholm, T., and Sullivan, J. P. (2012). Trusts: Scheduling randomized patrols for fare inspection in transit systems using game theory. *AI Magazine*, 33(4):59.
- Zhang, Y. and Brown, D. E. (2013). Police patrol districting method and simulation evaluation using agent-based model & gis. *Security Informatics*, 2(7).

## A | Pseudocódigo *branch-and-cut*

Sea  $\epsilon$  el criterio de detención de brecha de optimalidad preestablecido, y  $\varepsilon$  la brecha preestablecida para la poda. El Algoritmo 7 utiliza el Algoritmo 3 y el Algoritmo 5 para resolver DTS siguiendo un enfoque de *branch-and-cut* basado en *cutting-planes*.

**Algorithm 7** *CP-B&C* ( $G, n, \alpha, \epsilon, \varepsilon$ )

---

```

1:  $\inf UB = +\infty$ 
2:  $LB = -\infty$ 
3:  $\Omega_r = \emptyset$ 
4:  $\mathcal{X}_v^0 = [0, 1], \mathcal{H}_{vl}^0 = [0, 1], \mathcal{Y}_{vv'}^0 = [0, 1], \forall v \in W, v' \in V, l \in L$ 
5: Sea  $\mathcal{N} = \{0\}$  la lista inicial de nodos abiertos
6: Sea  $LN^{(k)}$  la lista de nodos hoja en un nodo  $k$ 
7:  $i = 0$ 
8: while  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  or  $\frac{\inf UB - LB}{\inf UB} \leq \epsilon$  do
9:   Seleccionar un nodo  $k$  en  $\mathcal{N}$ 
10:  if LP-RTSD( $\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}$ ) es infactible then
11:     $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \{k\}$  // Poda por infactibilidad
12:  else
13:    Sea  $(X^{(k)}, Y^{(k)}, H^{(k)}, Q^{(k)}, \bar{Q}^{(k)}, \underline{Q}^{(k)}, R^{(k)})$  las variables óptimas de LP-RTSD( $\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}$ )
14:    Sea  $Z^{(k)}$  el valor óptimo de la función objetivo de LP-RTSD( $\Omega_r, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}$ )
15:    if  $Z^{(k)} \leq Z^{(m)}, \forall m \in LN^{(k)}$  then
16:       $LB = Z^{(k)}$  // Actualización de cota inferior
17:    end if
18:    if  $(X^{(k)}, Y^{(k)}, H^{(k)})$  son enteros then
19:       $\Omega_r^{(k)} = \text{Subconjuntos\_Desconectados}(X^{(k)}, Y^{(k)})$ 
20:      if  $\Omega_r^{(k)} = \emptyset$  and  $Z^{(k)} < \inf UB - \varepsilon$  then
21:         $\inf UB = Z^{(k)}$  // Actualización mejor cota superior
22:         $(X^*, Y^*, H^*, Q^*, \bar{Q}^*, \underline{Q}^*) = (X^{(k)}, Y^{(k)}, H^{(k)}, Q^{(k)}, \bar{Q}^{(k)}, \underline{Q}^{(k)})$ 
23:         $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \{j : Z^{(j)} \geq \inf UB - \varepsilon\}$  // Poda por cota
24:      else if  $\Omega_r^{(k)} \neq \emptyset$  then
25:         $\Omega_r = \Omega_r \cup \Omega_r^{(k)}$ 
26:      end if
27:    else
28:      if  $Z^{(k)} < \inf UB - \varepsilon$  then
29:        // Ramificación
30:         $\mathcal{X}^{(i+1)}, \mathcal{X}^{(i+2)}, \mathcal{Y}^{(i+1)}, \mathcal{Y}^{(i+2)}, \mathcal{H}^{(i+1)}, \mathcal{H}^{(i+2)}, \mathcal{N}, i$  =
        Ramificacion( $X^{(k)}, Y^{(k)}, H^{(k)}, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{N}, i$ )
31:      else
32:         $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \{k\}$  // Poda por cota
33:      end if
34:    end if
35:  end if
36: end while
37: return  $X^*, Y^*, H^*, Q^*, \bar{Q}^*, \underline{Q}^*, \inf UB, LB$ 

```

---

## B | Modelo de cobertura total

Siguiendo un enfoque de cobertura total, el objetivo es determinar la mínima cantidad de centros (distritos) de tal forma que toda unidad básica este cubierta por al menos un centro para algún radio, y que los distritos estén balanceados en términos del número de buses. Toda unidad básica que se encuentre dentro del radio de cobertura de un distrito es cubierta por dicho distrito. Sean  $W_{CTW} = V$  el conjunto de candidatos a centros de distrito para el modelo de cobertura total y  $R$  ( $r = 1, \dots, |R|$ ) el conjunto de radios de cobertura. Sea  $X_v^r = 1$  si la unidad básica  $v \in W_{CTW}$  es seleccionada como centro de distrito con radio  $r \in R$ , y 0 si no. El modelo propuesto es de programación entera-mixta y viene dado por:

$$\text{CTW : } \min_{X, \bar{Q}, \underline{Q}} \sum_{r \in R} \sum_{v \in W_{CTW}} X_v^r \quad (\text{B.1})$$

$$\text{s.t: } \sum_{r \in R} \sum_{v' \in N_v^r} X_{v'}^r \geq 1 \quad \forall v \in V \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{r \in R} X_v^r \leq 1 \quad \forall v \in W_{CTW} \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{Q} \geq h_v^r X_v^r \quad \forall v \in W_{CTW}, r \in R \quad (\text{B.4})$$

$$\underline{Q} \leq h_v^r X_v^r + (1 - X_v^r)M \quad \forall v \in W_{CTW}, r \in R \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{Q} \leq \underline{Q}(1 + \alpha) \quad (\text{4.10})$$

$$\bar{Q}, \underline{Q} \geq 0 \quad (\text{5.7})$$

$$X_v^r \in \{0, 1\} \quad \forall v \in W_{CTW}, r \in R, \quad (\text{B.6})$$

donde:

- $N_v^r$  es el conjunto de candidatos que cubren a la unidad básica  $v \in V$  en un radio  $r \in R$ , es

decir,  $N_v^r = \{v' \in W_{CTW} : d_{v'v} \leq r\}$ ,

- $h_v^r$  es el número de buses que recorren el distrito de centro  $v \in W_{CTW}$  con radio  $r \in R$ .

El conjunto de candidatos a centro de distrito viene dado por los centros de distrito seleccionados en la solución óptima de CTW, es decir,  $W = \{v \in W_{CTW} : X_v^r = 1, \forall r \in R\}$ .

