

**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Transporte óptimo para un esquema de extracción de  
pozo a cielo abierto**

Memoria de Título presentada por:

**Bernardo Andrés Recabarren Beltrán**

como requisito parcial para optar al título de

**Ingeniería Civil Matemática y el grado de Magíster en Ciencias Mención  
Matemática**

Otorgado por la Universidad Técnica Federico Santa María

Profesor Guía

Dr. Cristopher Hermosilla

Agosto 2022.



TÍTULO DE LA TESIS:

**Transporte óptimo para un esquema de extracción de pozo a cielo abierto**

AUTOR:

**BERNARDO ANDRÉS RECABARREN BELTRÁN**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniería Civil Matemática y el grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Profesor Guía

---

Dr. Revisor 1

---

Dr. Revisor 2

---

Valparaíso, Chile, Agosto 2022.



*No encontraremos nada más pertinente*

*Que decirle a la mente*

*Detente*

Jorge Drexler



---

---

# AGRADECIMIENTOS

Me gustaría empezar agradeciendo a todas las personas que son parte de mi y han construido mi persona durante todos estos años, a mi familia, a mis amigos, amigas, a las personas con las que he convivido en estos años, y las personas que me han acompañado durante mi vida universitaria y también en mi vida. No llegué a esta instancia sólo, lo logré gracias a mis compañeros y amigos, gustiki, mylo, basti, martin, clau, loyola, bruno, fabimat y todis del grupito ese, con los cuales nos quedamos estudiando hasta tarde, compartimos ideas, comimos panchitos, trabajamos durante muchos años juntos y disfrutamos de esos momentos estresantes convirtiéndolo en lindos recuerdos.

Me gustaría agradecerle también a la gente con la cual he mantenido mi mente sana durante periodos de pandemia y me han dado su amorcito y cariño en estos últimos años, monse, javivi, moniito, gustikis, grupito de discord (inserte nombre del canal de turno), les agradezco por todo lo que hemos vivido y seguiremos viviendo.

Agradecer también al team opti, con esto a los profesores Cristopher y Pedro quienes nos guiaron por el camino de la dualidad y en particular quienes confiaron en mi, me dieron oportunidades de trabajar con ellos y terminar este proyecto. También agradecer todes quienes somos de esta comunidad, giaco, clau, fer y bruno, ojalá siga creciendo y manteniendo el buen espíritu que se ha generado.

Le dedico este trabajo a mi mamá, la que se ha sacado la cresta por que cada uno de sus hijos salga de la universidad y tenga un buen vivir en su vida, finalmente saldrá el más pequeño y último del grupo, y te agradezco de corazón por todo el amor y cariño que me has dado durante mi vida.

Finalmente agradezco a mi circulo más cercano, a mi pareja Monserrat, a mi gran amigo Diego, y gran amiga Paloma, les quiero mucho por todos estos años y que sean muchos más compartiendo juntos. Agradezco además a quienes han ayudado a la redacción de este trabajo y a las lectoras y lectores de estos párrafos, sin ustedes no tendría sentido la investigación y generación de conocimiento. Que se siga compartiendo el lindo camino de la matemática y la abstracción.

---

---

# RESUMEN

El transporte óptimo ha sido tema de interés durante los últimos años [Villani, 2008] por sus aplicaciones en gestión de operaciones y en procesamiento de imágenes. En particular, en [Ekeland and Queyranne, 2015] se plantea un modelo de transporte óptimo para la extracción de un pozo minero a cielo abierto.

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo similar al descrito anteriormente, pero agregando restricciones de capacidad de extracción. Utilizando el esquema de dualidad de [Pennanen and Perkiö, 2019] para problemas en el espacio de medidas de Radón, se consiguen condiciones de optimalidad para las soluciones, las cuales, generan un pozo. Numéricamente se consiguen resultados para la optimalidad del pozo en el problema discretizado tanto para el problema irrestricto, como para el problema con la restricción de capacidad.

---

---

# ABSTRACT

Optimal transport has been a topic of interest during the last few years [Villani, 2008] due to its applications in operations management and image processing. In particular, in [Ekeland and Queyranne, 2015] an optimal transport model for the extraction of an open-pit is proposed.

The objective of this thesis is to present a model similar to the one described above, but adding extraction capacity constraints. Using the duality scheme of [Pennanen and Perkiö, 2019] for problems in the Radon measure space, optimality conditions are obtained for the solutions, which generate a pit. Numerically, results for the optimality of the pit in the discretized problem are obtained for both the original problem and the problem with the capacity constraint.



---

---

# CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>III</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>5</b>
1.1. Transporte óptimo	5
1.1.1. Problema de Monge	5
1.1.2. Problema de Kantorovich	6
1.1.3. Monotonía $c$ -cíclica y dualidad de Kantorovich	7
1.2. Formulación a través de dualidad bajo perturbaciones.	11
1.2.1. Problema	11
1.2.2. Dualidad conjugada	11
1.3. Modelo de extracción de transporte óptimo	14
1.3.1. Problema de extracción	14
1.3.2. Un problema de transporte óptimo asociado	15
1.3.3. Problema dual de Kantorovich	16
<b>2. EXTENSIÓN DEL PROBLEMA DE EXTRACCIÓN DEL POZO</b>	<b>19</b>
2.1. Formulación de pozo	19
2.2. Formulación como un problema de transporte óptimo	20
2.2.1. Problema con restricciones de capacidad en material beneficioso y desechos de la extracción.	20
2.2.2. Restricción de capacidad sobre desechos de la extracción.	33
<b>3. RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>37</b>
3.1. Problema irrestricto	37

---

3.2. Problema restringido	42
3.2.1. Implementación numérica	44
<b>4. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS</b>	<b>47</b>
4.1. Conclusiones	47
4.2. Problemas Abiertos	48
4.2.1. Extracción de varias etapas	48
4.2.2. Optimalidad del pozo con restricción de capacidad	48
<b>ANEXOS</b>	<b>49</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>51</b>

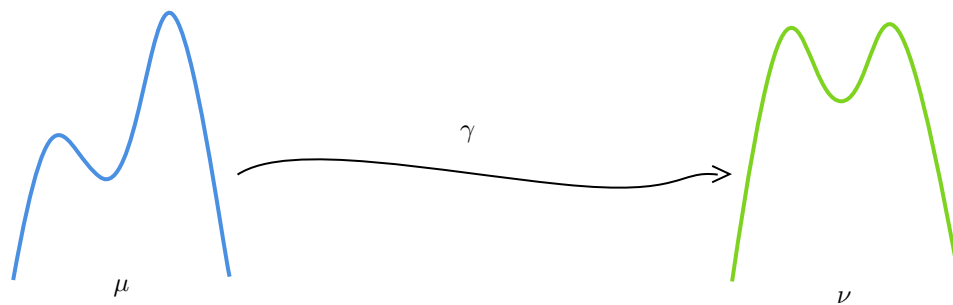
---

---

# INTRODUCCIÓN

## Transporte óptimo

La teoría de transporte óptimo empezó desarrollándose en Francia, de manos del matemático Gaspard Monge (1746-1818), usando palabras informales: Un trabajador con su pala en la mano tiene que mover una gran cantidad de arena en una construcción. El objetivo es mover este material a una pila y generar una cierta forma definida (por ejemplo un castillo de arena gigante). Naturalmente, el trabajador busca minimizar el esfuerzo y energía que implica transportar toda esta arena de un lado hacia otro. En matemática, tanto a la forma de la pila inicial, como la forma de la pila final se les puede asociar una medida de probabilidad como la siguiente imagen.



**Figura 1.** Transporte desde una medida  $\mu$  hacia  $\nu$  a través de  $\gamma$ .

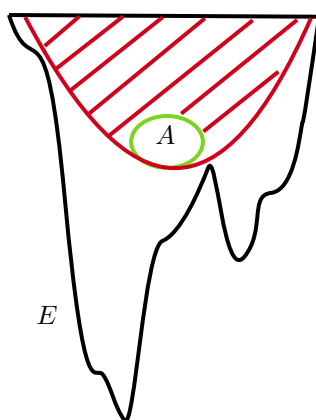
Es entonces que el problema de transporte óptimo se plantea como la búsqueda de un transporte  $\gamma$  el cual indicará el movimiento de la masa desde  $\mu$  a  $\nu$  minimizando una función de costo  $c$ , la cual puede variar según el contexto.

Dentro de la literatura se han estudiado distintas configuraciones de este problema, con distintas hipótesis tanto en medidas como en la función costo, lo que dan paso a distintas interpretaciones y propiedades. Dentro de este trabajo, nos enfocaremos a un caso particular

de transporte óptimo, el cual nos describirá un problema de extracción de pozo a cielo abierto.

## Problema de extracción a cielo abierto

En un problema de extracción minera a cielo abierto, intentamos extraer minerales rentables, pero para llegar a ellos, es necesario extraer el material que esta sobre este.



**Figura 2.** Ejemplo de extracción, donde se intenta minar en un dominio  $E$ , donde  $A$  representa la zona con minerales rentables

Como se muestra en la Figura 2, para llegar al bloque  $A$  que representa nuestra zona con minerales rentables, es necesario extraer toda la zona achurada para evitar derrumbes, definida por sus restricciones geomecánicas. En la literatura existen usualmente tres tipos de problemas relacionados con la evaluación, diseño y planificación de pozos a cielo abierto. El primero es el diseño de un pozo final (FOP), el cual consiste en encontrar la región que maximiza las ganancias de la extracción bajo las restricciones geomecánicas. Otro problema más realista es encontrar el diseño del pozo final como en el problema anterior, pero con una restricción de capacidad sobre la extracción (CFOP). El tercer problema es una extensión del anterior con extracciones en varias etapas, cuyo objetivo es conseguir la secuencia de extracción en varios periodos con un volumen máximo de extracción en cada periodo (CDOP).

La formulación usual de estos problemas consiste en describir una reserva de mineral como un bloque tridimensional. Cada bloque correspondería a una unidad de extracción, caracterizada por sus atributos económicos y físicos. En particular, los modelos de bloques pueden representarse por grafos dirigidos cuyos nodos representan bloques y los arcos indican la

precedencia en el orden de extracción. Así, estos modelos discretos usualmente traen con ellos problemas de Programación Entera de gran escala, como los presentados en [Caccetta, 2007]. El problema de extracción en varias etapas es más difícil de resolver y muchos métodos utilizando optimización discreta se han propuesto en [Boland et al., 2006], [Hochbaum and Chen, 2000] y [Caccetta and Hill, 2003].

Otras formulaciones se han utilizado para modelar este problema, en particular un marco de trabajo continuo, donde la idea es describir el contorno del pozo a través de funciones continuas. Estos trabajos se han propuesto y desarrollado en [Alvarez et al., 2011] y [Amaya et al., 2021].

En este trabajo resolveremos el problema extendiendo el modelo de transporte óptimo de [Ekeland and Queyranne, 2015], en el cual las restricciones geomecánicas vienen dada por una multifunción  $\Gamma$  la que define la función de costo de transporte, y donde el pozo óptimo se caracteriza a través de la solución del problema dual al problema de transporte. En particular, agregaremos restricciones al volumen de extracción tanto en el mineral beneficioso, como en los desechos de la extracción.

## Resultados numéricos en esquemas de transporte óptimo

Dentro del área de investigación de transporte óptimo, se destaca un gran desarrollo de esquema numéricos, los cuales varían según las configuraciones de espacios, medidas y funciones costo que se tengan en el problema. Uno de estos es el método Benamou-Brenier utilizado en un esquema descrito en [Santambrogio, 2015] el cual utiliza la conexión entre un problema de transporte óptimo y la solución de la ecuación Monge-Ampere. Por otro lado, dentro de las configuraciones con espacios discretos, existen varios esquemas numéricos como los mencionados en [Peyre and Cuturi, 2019], dentro de los cuales están el algoritmo de la subasta, métodos de ascenso dual y métodos numéricos para el problema de transporte óptimo con regularización entrópica, la cual permite paralelizar la computación de las soluciones.

En este trabajo dada la configuración particular de los espacios y medidas utilizamos el algoritmo Branch and Bound, el cual aprovecha la estructura binaria de las soluciones, con lo cual conseguimos, luego de discretizar los espacios, pozos óptimos para el modelo original de [Ekeland and Queyranne, 2015] y además un pozo óptimo para nuestro modelo con una restricción de capacidad en la extracción de material no rentable.

**Notación**

$X$  espacio polaco : Hace referencia a que un espacio  $X$  es metrizable, completo y separable.

$C_b(X)$  : Conjunto de funciones continuas acotadas definidas en el espacio  $X$  y que llegan a  $\mathbb{R}$

$M(X \times Y) : C_b(X \times Y)$  Espacio de medidas de Radon definidas sobre  $X \times Y$

$M(X \times Y)^+$  : Espacio de medidas positivas de Radon definidas sobre  $X \times Y$

$[[n]] : \{1, 2, \dots, n\}$

$p \oplus -q \leq C$  : Restricción de los vectores  $p = (p_i)_{i=1}^n$  y  $q = (q_j)_{j=1}^m$  por la matriz

$C = (C_{i,j})_{(i,j) \in [[n]] \times [[m]]}$  de la forma  $p_i - q_j \leq C_{i,j} \quad \forall (i,j) \in [[n]] \times [[m]]$

## Capítulo 1

---

# PRELIMINARES

### 1.1. Transporte óptimo

Gaspard Monge, matemático francés del siglo XVIII, presenta su trabajo “Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais”, donde plantea el siguiente problema, supongamos que tenemos una cantidad de tierra en el piso, y la deseamos transportar a otro lugar, donde se conoce el lugar de donde se va a sacar el material y el lugar donde se dejará este. La pregunta que se plantea es, ¿A qué lugar ‘y’ debemos enviar el material que fue extraído en cierto lugar ‘x’?, la respuesta importa, debido a que el transportar material es costoso, y es por esto, que el objetivo de este problema será minimizar este costo.

Dos siglos más tarde, Leonid Kantorovich, matemático ruso, trabajó en el problema de Monge, consiguiendo resultados a través de la generalización de este, y consiguiendo además, un problema dual el cual nos permite analizar esta problemática desde otro punto.

#### 1.1.1. Problema de Monge

Sean espacios de medida  $(X, \mu, \Omega_X)$  e  $(Y, \nu, \Omega_Y)$ , con  $\mu, \nu$  dos medidas de probabilidad, se define el problema de Monge como

$$\inf_T \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu : T_{\#}\mu = \nu \right\}, \quad (\text{MP})$$

donde la función  $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  nos define el costo de transporte de masa en nuestro problema de transporte. Además se define  $T_{\#}\mu(A) := \mu(T^{-1}(A))$  para  $A \in \Omega_Y$  como el *pushforward* de  $T$  sobre  $\mu$ , donde  $T : X \rightarrow Y$  nos define nuestro mapeo de transporte.

**Observación 1.1.1.** *Notemos que en el problema (MP), la restricción  $T_{\#}\mu = \nu$  no es cerrada bajo convergencia débil. De hecho, basta tomar  $T_n(x) = \sin(nx)$  con  $x \in [0, 2\pi]$ , se puede ver que  $T_n \rightarrow 0$ , lo que no mantiene la restricción de pushforward.*

**Observación 1.1.2.** *Además, observemos que si  $\mu = 2\delta_{x_1}$  y  $\nu = \delta_{y_1} + \delta_{y_2}$  con  $y_1 \neq y_2$ , no existe transporte, y por lo tanto no existe transporte óptimo, esto debido a que  $T$  al ser una función, solo puede asignar masa de un punto a otro único punto, por definición de función, con esto el problema de Monge, directamente no tiene solución, ya que no permite dividir la masa de un punto.*

### 1.1.2. Problema de Kantorovich

Debido a los problemas que conlleva la formulación de Monge, el problema (MP) se convierte un problema difícil de resolver. Con esto, Kantorovich destaca por su formulación que elimina los problemas mencionados anteriormente. Para esto, dados  $(X, \mu)$  e  $(Y, \nu)$  dos espacios de medida, con  $\mu, \nu$  dos medidas de probabilidad, y un costo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , consideremos el problema

$$\inf_{\gamma} \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}, \quad (\text{KP})$$

donde

$$\Pi(\mu, \nu) := \{ \gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : (\pi_X)_{\#}\gamma = \mu, (\pi_Y)_{\#}\gamma = \nu \}.$$

Denotaremos  $\mathcal{P}(X \times Y)$  como a las medidas de probabilidad en el espacio producto. Si  $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ , diremos que  $\gamma$  es un plan de transporte, donde  $\mu$  y  $\nu$  son sus medidas marginales correspondientes a los espacios  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Observación 1.1.3.** *En este problema,  $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$ , debido a que la medida  $\gamma_0 = \mu \otimes \nu \in \mathcal{P}(X \times Y)$ .*

Dada las características de este problema se consiguen varios resultados, de los cuales enunciaremos algunos vistos en [Villani, 2008].

**Teorema 1.1.1** (Existencia de plan de transporte óptimo). *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios Polacos (espacios métricos completos separables) dotados de las medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$ ; sean  $a \in L^1(X, \mu)$  y  $b \in L^1(Y, \nu)$  dos funciones semicontinuas superiores. Además, sea  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función de costo semicontinua inferior, tal que  $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$  para todo  $x, y$ . Entonces existe un plan de transporte  $\gamma$  que minimiza el problema (KP).*

Este resultado nos da la existencia de un plan de transporte óptimo, y por lo tanto, la existencia de soluciones para el problema (KP). La demostración utiliza la compacidad sobre el conjunto de planes de transporte, la cual se consigue por el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.2** (Teorema de Prokhorov). *Sea  $X$  un espacio Polaco, entonces  $P \subset \mathcal{P}(X)$  es precompacto para la topología débil si y solo si es apretado, es decir, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un compacto  $K_\varepsilon$  tal que  $\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$  para todo  $\mu \in P$*

### 1.1.3. Monotonía c-cíclica y dualidad de Kantorovich

Es interesante analizar el problema dual del problema de Kantorovich, y para llegar a este necesitaremos el siguiente concepto.

**Definición 1.1.1** (Monotonía c-cíclica). *Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos arbitrarios, y  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función. Un conjunto  $\Gamma \subset X \times Y$  se dice ser c-cíclicamente monótono (desde ahora en adelante c-CM), si para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y para cada familia  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  de puntos en  $\Gamma$ , se tiene la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^n c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_{i+1})$$

(con la convención de  $y_{n+1} = y_1$ ). Un plan de transporte se dice ser c-CM si esta concentrado en un conjunto c-CM.

**Observación 1.1.4.** *Intuitivamente, un plan de transporte c-CM es aquel que no se puede mejorar, es decir, cualquier perturbación dentro de este nos arroja un costo mayor o igual a nuestro costo original.*

Para introducir el problema dual del problema de Kantorovich imaginemos que en nuestro problema de transporte,  $c(x, y)$  representa el costo de mover cierta cantidad de panes desde una panadería  $x$  a un café  $y$ . Si fuéramos una empresa de transporte, nos gustaría analizar el problema (KP), pero lo veremos desde otro punto de vista. Pensemos que debemos realizar este transporte obligatoriamente, por lo cual cedemos este problema a alguna compañía encargada; nos preocupa conseguir una utilidad de la transacción en la venta de panes, por lo cual si el precio al cual compramos el pan en la panadería es  $\psi(x)$ , y el precio al cual vendemos es  $\varphi(y)$ , nos gustaría conseguir que la utilidad de esta compra venta  $\varphi(y) - \psi(x)$  sea máxima, en vez de buscar minimizar el costo  $c(x, y)$ .

Para que esta venta y compra sea rentable o competitiva, se impone la siguiente restricción

$$\varphi(y) - \psi(x) \leq c(x, y) \quad \forall (x, y),$$

con ésta se consigue naturalmente el problema dual de Kantorovich

$$\sup_{\varphi, \psi} \left\{ \int_Y \varphi(y) d\nu - \int_X \psi(x) d\mu : \varphi(y) - \psi(x) \leq c(x, y) \right\}. \quad (\text{DP})$$

Dentro del contexto, inicialmente se buscará minimizar sobre funciones integrables, es decir

$\psi \in L^1(X, \mu)$  y  $\varphi \in L^1(Y, \nu)$ , aunque veremos que quizás dada la dualidad de espacios, se consigan funciones continuas acotadas.

Dadas las restricciones anteriores, se introduce un nuevo término dentro de las funciones precio.

**Definición 1.1.2** (*c*-convexidad). Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos, y  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Una función  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  se dice ser *c*-convexa si no es idénticamente a  $+\infty$ , y existe  $\zeta : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tal que

$$\psi(x) = \sup_{y \in Y} (\zeta(y) - c(x, y)), \quad \forall x \in X.$$

Además se define la *c*-transformada es la como la función  $\psi^c$  dada por

$$\psi^c(y) = \inf_{x \in X} (\psi(x) + c(x, y)), \quad \forall y \in Y.$$

**Observación 1.1.5.** En el contexto anterior, se puede ver que si el costo toma la forma  $c(x, y) = -\langle x, y \rangle$ , con los espacios correspondientes para que esté bien definido, entonces la *c*-transformada  $\psi^c$  coincide con  $-\psi^*$ , es decir menos la transformada de Legendre-Fenchel usual de análisis convexo.

**Observación 1.1.6.** Con la definición anterior, si uno tiene una función que toma valores en  $X$ , entonces su *c*-transformada es una función de que toma valores en  $Y$ .

**Definición 1.1.3** (*c*-concavidad). Con la misma notación que la definición anterior, una función  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  se dice ser *c*-cóncava si no es idénticamente a  $-\infty$ , y existe  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tal que  $\varphi = \psi^c$ .

Además se define su *c*-transformada como la función  $\varphi^c$  dada por

$$\forall x \in X, \quad \varphi^c(x) = \sup_{y \in Y} (\varphi(y) - c(x, y)).$$

El siguiente resultado es similar a uno ya existente en análisis convexo con la conjugada de Fenchel en vez de la *c*-transformada.

**Proposición 1.1.1.** Sea una función  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , entonces se tiene que  $\psi$  es *c*-convexo sí y solo si  $\psi^{cc} := (\psi^c)^c = \psi$ .

**Observación 1.1.7.** Con esta noción de *c*-convexidad, se puede ver que en el problema dual de Kantorovich, si  $(\varphi, \psi)$  es un par admisible dentro del problema, entonces por la desigualdad de competitividad se tiene que:

$$\psi(x) \geq \varphi(y) - c(x, y),$$

por lo que aplicando supremo al lado derecho, se consigue

$$\psi(x) \geq \sup_{y \in X} \{\varphi(y) - c(x, y)\} = \varphi^c(x).$$

Así, evaluando en la función objetivo

$$J(\varphi, \psi) := \int_Y \varphi d\nu - \int_X \psi d\mu \leq \int_Y \varphi d\nu - \int_X \varphi^c d\mu = J(\varphi, \varphi^c).$$

Note que el par  $(\varphi, \varphi^c)$  permite obtener un mayor valor dentro de la función objetivo. Este proceso se puede repetir nuevamente, y nos podemos percatar de que en caso de que exista solución del problema dual de Kantorovich (DP), esta solución debe ser un par donde uno sea  $c$ -conjugado del otro, lo que se puede ver en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.3** (Dualidad de Kantorovich). Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios Polacos, dotados de las medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$ ; sea además  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función de costo semicontinua inferior tal que

$$c(x, y) \geq a(x) + b(y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

para algunas funciones semicontinua superior  $a \in L^1(\mu)$  y  $b \in L^1(\nu)$ . Entonces se tiene:

1. Existe dualidad:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma \\ &= \sup_{(\psi, \varphi) \in C_b(X) \times C_b(Y): \varphi - \psi \leq c} \left( \int_Y \varphi d\nu - \int_X \psi d\mu \right) \\ &= \sup_{(\psi, \varphi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu): \varphi - \psi \leq c} \left( \int_Y \varphi d\nu - \int_X \psi d\mu \right) \\ &= \sup_{\psi \in L^1(\mu)} \left( \int_Y \psi^c d\nu - \int_X \psi d\mu \right) \\ &= \sup_{\varphi \in L^1(\nu)} \left( \int_Y \varphi d\nu - \int_X \varphi^c d\mu \right), \end{aligned}$$

donde en estos últimos supremos uno debe imponer que las funciones  $\psi$  y  $\varphi$  son  $c$ -convexas y  $c$ -concavas.

2. Si  $c$  es finito y el costo optimal  $C(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int c d\gamma$  es finito, entonces existe un conjunto medible  $c$ -CM  $\Gamma \subset X \times Y$  (el cual es cerrado si  $a, b, c$  son continuos) tal que para cada  $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$  los siguientes cinco enunciados son equivalentes:

a)  $\gamma$  es optimal,

- b)  $\gamma$  es  $c$ -CM,  
 c) existe una función  $\psi$   $c$ -convexa tal que

$$\psi^c(y) - \psi^c(x) = c(x, y) \quad \gamma\text{-c.t.p.},$$

- d) existen  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  y  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , tales que  $\varphi(y) - \psi(x) \leq c(x, y)$  para todo  $(x, y)$  con igualdad  $\gamma$ -c.t.p.,  
 e)  $\gamma$  está concentrado en  $\Gamma$ .

3. Si  $c$  es finito,  $C(\mu, \nu) < +\infty$ , y la función de costo tiene la cota puntual c.t.p.

$$c(x, y) \leq c_X(x) + c_Y(y) \quad (c_X, c_Y) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu),$$

entonces ambos problemas primal y dual, tienen solución. Así las expresiones de dualidad conseguidas anteriormente alcanzan solución.

Este teorema nos reúne los resultados de dualidad presentes en el problema dual de Kantorovich, donde se enuncian las hipótesis para que no exista salto de dualidad utilizando la teoría clásica de transporte óptimo.

A raíz de este problema nacen bastantes preguntas sobre sus posibles variaciones. Por ejemplo, que se tengan  $k$  medidas marginales  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ , en vez de dos  $(\mu, \nu)$ . Este caso de multi-marginales se analiza en [Pass, 2015], donde se recopilan resultados hasta ese entonces conocidos.

Otra pregunta ahora en el contexto de dualidad, sería si es posible conseguir resultados análogos utilizando herramientas de Análisis Convexo. La respuesta es sí; dada la naturaleza del problema (KP) se pueden conseguir resultados similares con dualidad bajo perturbaciones, de hecho enunciaremos los resultados que dan respuesta a esta última pregunta en la siguiente sección.

## 1.2. Formulación a través de dualidad bajo perturbaciones.

Dada la naturaleza del problema de Kantorovich, Pennanen y Perkkiö realizan en [Pennanen and Perkkiö, 2019] el estudio de problemas de transporte óptimo en un marco de trabajo más general de Análisis Convexo, lo que permite conseguir resultados de existencia y optimalidad para las soluciones de estos problemas en espacios de medidas. En particular, por el contexto del trabajo realizado en este documento, nos enfocaremos en los resultados que permitan agregar nuevas restricciones al modelo usual de transporte óptimo.

### 1.2.1. Problema

Sean  $S_0, \dots, S_T$ ,  $T \in \mathbb{N}$ , espacios Polacos, defina  $S = S_0 \times \dots \times S_T$ . Sea  $M_t$  y  $M$  espacios de medidas de Borel  $\mathbb{R}^d$ -evaluadas definidas en  $S_t$  y  $S$  respectivamente. Considere el siguiente problema de optimización

$$\min_{\lambda \in M} \sum_{t=0}^T G_t^*(\lambda_t) + H^*(\lambda), \quad (\text{D})$$

donde  $G_t^*$  y  $H^*$  son funciones convexas definidas en  $M_t$  y  $M$  respectivamente, y se tiene que  $\lambda \in \Pi(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ , es decir,  $\lambda_t$  es la marginal de  $\lambda$  correspondientemente al espacio  $S_t$ .

En particular, si  $T = d = 1$ ,  $G_t^* = \delta_{\mu_t}$  y  $H^*(\lambda) = \int_S c d\lambda + \delta_{M_+}(\lambda)$  para una medida  $\mu_t \in M_t$  dada, con una función de costo  $c$  semicontinua inferior no-negativa, se consigue el problema de Kantorovich clásico visto en la anterior sección, con dos medidas marginales.

### 1.2.2. Dualidad conjugada

En esta sección se mostrará el problema (D) como el dual de un problema convexo de optimización en un espacio de funciones continuas. Para esto, dada una función continua  $\psi_t : S_t \rightarrow [1, +\infty)$ , se define

$$C_t := \{x_t \in C(S_t; \mathbb{R}^d) : x_t/\psi_t \in C_b(S_t; \mathbb{R}^d)\},$$

el cual será un espacio Banach bajo la norma  $\|x_t\|_{C_t} := \|x_t/\psi_t\|_{C_b(S_t; \mathbb{R}^d)}$ , donde  $C_b(S_t; \mathbb{R}^d)$  es el espacio de las funciones continuas acotadas dotado de la norma del supremo. Así, el subespacio de medidas de  $M_t$  en las cuales  $\psi_t$  es integrable puede ser identificado con un subespacio de  $C_t^*$ , en caso de que  $S_t$  sea compacto, entonces  $C_t^* = M_t$ , pero en general, la inclusión  $M_t \subseteq C_t^*$  puede ser estricta.

Análogamente definiendo

$$\psi(s) := \sum_{t=0}^T \psi_t(s_t),$$

se consigue que el subespacio de las medidas de  $M$  en las cuales  $\psi$  es integrable es un subespacio del dual de

$$C := \{u \in C(S; \mathbb{R}^d) : u/\psi \in C_b(S; \mathbb{R}^d)\}.$$

Cuando una función  $\psi_t$  es acotada, tenemos que  $C_t = C_b(S_t; \mathbb{R}^d)$  y en particular, si se cumple para todo  $t = 0, \dots, T$ , se consigue que  $C = C_b(S; \mathbb{R}^d)$ .

Sea  $G_t$  una función propia convexa en  $C_t$ , para todo  $t = 0, \dots, T$ , y sea  $H$  una función propia convexa en  $C$ . Considere el problema

$$\min \sum_{t=0}^T G_t(x_t) + H\left(-\sum_{t=0}^T x_t \circ \pi_t\right) \quad \text{sobre } x \in \prod_{t=0}^T C_t, \quad (P)$$

donde  $x = (x_t)_{t=0}^T := (x_0, \dots, x_T)$  y  $\pi_t$  es la proyección sobre la coordenada  $t$ .

Con esto, se define la función valor  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\varphi(u) := \inf_{x \in C} \left\{ \sum_{t=0}^T G_t(x_t) + H\left(u - \sum_{t=0}^T x_t \circ \pi_t\right) \right\}.$$

De aquí en adelante, dotaremos al espacio dual  $C^*$  con la topología débil-\*. Con esto, los espacios  $C$  y  $C^*$  son espacios separables, y se utilizará el producto en dualidad  $\langle u, \lambda \rangle := \lambda(u)$ . Lo anterior se define similarmente para los espacios  $C_t^*$ .

Así, la conjugada de Fenchel viene dada por

$$\varphi^*(\lambda) := \sup_{u \in C} \{\langle u, \lambda \rangle - \varphi(u)\},$$

con lo que  $\varphi$  puede ser expresado por

$$\varphi^*(\lambda) = \sum_{t=0}^T G_t^*(\lambda_t) + H^*(\lambda),$$

donde  $G_t^*$  es la conjugada de Fenchel de  $G_t$ , y  $H^*$  la de  $H$ , y  $\lambda_t \in C_t^*$  denota el funcional lineal continuo  $x_t \mapsto \langle x_t \circ \pi_t, \lambda \rangle$  en  $C_t$ .

Se puede ver que el ínfimo sobre  $\varphi^*$  en  $C^*$  es igual a  $-\varphi^{**}(0)$ , por lo cual si  $\varphi$  es semi-continuo inferior y el valor óptimo de  $(P)$  es finito, entonces por teorema de la biconjugada se consigue que el valor de  $-\inf(P)$  es igual al valor del problema

$$\inf_{\lambda \in C^*} \sum_{t=0}^T G_t^*(\lambda_t) + H^*(\lambda). \quad (DR)$$

Esto se puede ver como una relajación de (D) desde el espacio  $M$  sobre todo  $C^*$ . Claramente, si  $\text{dom } \varphi^* \subset M$ , entonces (DR) coincide con (D). El siguiente lema da una condición suficiente para esto.

**Lema 1.2.1.** *Si  $\text{dom } \varphi^* \subset C_+^*$  y  $\text{dom } G_t^* \subseteq M_t$  para cada  $t = 0, \dots, T$ , entonces  $\text{dom } \varphi^* \subseteq M$ .*

El conjunto de las soluciones del problema (DR) coincide con el subdiferencial de  $\partial\varphi(0)$ . Si  $\partial\varphi(0)$  es no vacío, entonces  $\varphi$  es cerrado en el origen y no hay salto de dualidad. El siguiente resultado da una condición suficiente de existencia en (DR), el cual involucra el dominio efectivo de  $\varphi$ :

$$\text{dom } \varphi = \text{dom } H + \left\{ \sum_{t=0}^T x_t \circ \pi_t : x_t \in \text{dom } G_t \right\}.$$

Dadas estas definiciones, se enuncia el siguiente resultado, el cual es fundamental para las caracterizaciones obtenidas en el trabajo de Pennamen, y que además utilizaremos en nuestros resultados.

**Teorema 1.2.1.** *Si  $G_t$  y  $H$  son funciones propias semi-continuas inferiores tales que el conjunto*

$$\bigcup_{\alpha > 0} \alpha \text{ dom } \varphi$$

*es un subespacio cerrado de  $C$ , entonces el óptimo de (DR) se alcanza, no hay salto de dualidad y  $x$  es solución de (P) sí y solo si existe un  $\lambda \in C^*$  tal que*

$$\begin{aligned} \lambda_t &\in \partial G_t(x_t), \quad t = 0, \dots, T, \\ \lambda &\in \partial H \left( - \sum_{t=0}^T x_t \circ \pi_t \right), \end{aligned}$$

*y  $\lambda$  resuelve (DR).*

Con este resultado y tomando las funciones  $H$  y  $G_t$  adecuadas, se puede plantear un problema de transporte óptimo, el cual veremos más adelante en los siguientes capítulos.

### 1.3. Modelo de extracción de transporte óptimo

En esta sección veremos los resultados y el modelo del trabajo de [Ekeland and Queyranne, 2015], el cual utiliza el lenguaje de un problema de transporte óptimo para describir un problema de extracción de minerales a cielo abierto.

#### 1.3.1. Problema de extracción

De ahora en adelante, utilizaremos  $E \subset \mathbb{R}^3$  como el dominio compacto, el cual representará el lugar que será excavado. Representaremos las restricciones geomecánicas de nuestra excavación por la multifunción  $\Gamma : E \rightrightarrows E$ , es decir  $\Gamma(x)$  representa todos los puntos que deben ser extraídos para llegar a  $x$ . Se asume que  $\Gamma(x)$  es de grafo cerrado y que satisface lo siguiente:

$$\text{(reflexividad)} \quad x \in \Gamma(x),$$

$$\text{(transitividad)} \quad [x' \in \Gamma(x) \wedge x'' \in \Gamma(x')] \Rightarrow x'' \in \Gamma(x).$$

Lo que induce un preorden  $\succsim_\Gamma$  en  $E$ , definido por

$$x' \succsim_\Gamma x \Leftrightarrow x' \in \Gamma(x).$$

Por lo que en palabras sencillas  $x' \succsim_\Gamma x$  significa que debemos extraer  $x'$  para llegar a  $x$ .

**Definición 1.3.1.** *Un pozo es un subconjunto  $F \subseteq E$  el cual es Lebesgue medible y además estable para el preorden  $\succsim_\Gamma$ , es decir, satisface*

$$[x \in F \wedge x' \succsim_\Gamma x] \Rightarrow x' \in F.$$

Denotaremos por  $\mathcal{L}(E)$  a la familia de conjuntos cerrados tal que  $F \subseteq E$ , por lo que

$$F \in \mathcal{L}(E) \text{ es un pozo si solo si } \Gamma(F) = F$$

Además, consideremos una función continua  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  la cual representará el beneficio/costo de extraer un punto  $x$  en  $E$ . Aquellas secciones donde  $g > 0$  representan a las regiones con minerales beneficiosos de extraer, en cambio, las secciones con  $g < 0$  representan regiones donde no existe beneficio, por lo que extraer estas secciones serían un costo. Asumiremos como hipótesis que existe material dentro de  $E$  que es beneficioso, por lo que

$$\int_E \max\{0, g(x)\} dx > 0.$$

Y denotaremos por  $S(E)$  al conjunto de pozos, es decir

$$F \in S(E) \Leftrightarrow \Gamma(F) = F.$$

Con esto, definimos el problema de extracción óptimo como

$$\begin{aligned} & \text{máx} \int_F g(z) dz & (P) \\ & \text{s.a } F \in S(E). \end{aligned}$$

### 1.3.2. Un problema de transporte óptimo asociado

Para asociar al problema de extracción anterior (P) un problema de transporte óptimo, pensaremos la masa que se mueve como dinero, por lo que según la función costo que definamos, el dinero tendrá una manera limitada para transportarse. Para esto, definimos los siguientes conjuntos y medidas. Primero dos subconjuntos de  $E$  que estarán definidos por

$$E^+ := \overline{\{x \in E : g(x) > 0\}} \quad \text{y} \quad E^- := \overline{\{x \in E : g(x) < 0\}}.$$

Luego utilizaremos dos elementos  $\alpha$  y  $w$ , los cuales cumplirán una función dentro del balance de masa. Así, definimos los espacios compactos en los cuales se realizará el transporte

$$X := E^+ \cup \{\alpha\} \quad \text{e} \quad Y := E^- \cup \{w\},$$

y las medidas no-negativas  $\mu$  y  $\nu$  para los espacios  $X$  e  $Y$  respectivamente,

$$\begin{aligned} \mu(\{\alpha\}) &= \int_{E^-} |g(z)| dz & \mu(A) &= \int_A g(z) dz \quad \text{para } A \subseteq E^+ \text{ medible,} \\ \nu(\{w\}) &= \int_{E^+} g(z) dz & \nu(B) &= \int_B |g(z)| dz \quad \text{para } B \subseteq E^- \text{ medible.} \end{aligned}$$

Gracias a esta forma de definir las medidas, se cumple la condición de igualdad de masas, es decir,  $\mu(X) = \nu(Y)$ .

**Observación 1.3.1.** *Durante esta sección y las siguientes supondremos que  $\mu(X) = \nu(Y) = 1$ , es decir,  $\mu$  y  $\nu$  serán medidas de probabilidad. En caso de que  $1 \neq \mu(X) = \nu(Y) = C \in \mathbb{R}^+$ , se pueden redefinir de tal manera que  $\mu := \frac{\mu}{C}$  y  $\nu := \frac{\nu}{C}$ , y multiplicar por el escalar  $C$  a nuestro problema de optimización.*

Finalmente, definiremos nuestra función de costo.

$X$	$Y$	$c(x, y)$
$x \in E^+$	$y \in E^-, y \in \Gamma(x)$	0
$x \in E^+$	$w$	1
$\alpha$	$y \in Y$	0
$x \in E^+$	$y \notin \Gamma(x), y \in E^-$	$+\infty$

**Cuadro 1.1.** Función de costo

De esta manera, debido a que en el problema de transporte se busca minimizar costos, lo primero que se buscará realizar en el transporte es mover masa desde un  $x \in E^+$  a un  $y \in \Gamma(x)$ , lo que significa que pagamos los gastos de extracción del conjunto  $\Gamma(x)$  con el dinero que podemos ganar al extraer  $x$ , por lo que de esta manera, si el dinero que conseguimos con  $x$  es mayor que el costo de su extracción, entonces el resto de este dinero (masa), irá a  $w$ , así la función de costo le asigna el valor 1 a este movimiento de masa, y sumará al total el beneficio neto de la extracción de  $x$ . Finalmente, luego de que se realicen todos los transportes posibles mencionados anteriormente,  $\alpha$  terminará de realizar el balance de masas en el transporte, lo cual no afecta al beneficio neto, y se le asigna el valor de cero. Cualquier otro movimiento, no será permitido, por lo que se le asigna el valor de  $+\infty$ . Dada esta definición de la función de costo, se demuestra en [Ekeland and Queyranne, 2015] que efectivamente es una función semicontinua inferior, y con esto el siguiente problema de transporte

$$\begin{aligned} & \text{mín} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi & (\text{K}) \\ & \text{s.a } \pi \in \Pi(\mu, \nu) \end{aligned}$$

tiene solución.

### 1.3.3. Problema dual de Kantorovich

Introduciendo el conjunto admisible

$$\mathcal{A} := \{(p, q) \in L^1(X, \mu) \times L^1(Y, \nu) \mid p(x) - q(y) \leq c(x, y) \quad \mu \otimes \nu - \text{c.t.p.}\},$$

y la función objetivo

$$\mathcal{J}(p, q) := \int_X p d\mu - \int_Y q d\nu.$$

Con estas definiciones, formulamos un problema dual usando el esquema de Kantorovich como

$$\begin{aligned} & \sup \mathcal{J}(p, q) & (D) \\ & \text{s.a. } (p, q) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Veamos una caracterización que unirá el problema del pozo (P) con (D).

**Lema 1.3.1.** *Sea  $F \in S(E)$  un pozo. Defina  $F^+ = E^+ \cap F$ ,  $F^- = E^- \cap F$ ,  $p_F : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $q_F : Y \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\begin{aligned} p_F(\alpha) = 0, \quad p_F(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \\ q_F(w) = 0, \quad q_F(y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in F^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \end{aligned}$$

Entonces el par  $(p_F, q_F) \in \mathcal{A}$  es admisible, y además

$$J(p_F, q_F) = \int_F g(z) dz.$$

Es con este resultado que conseguimos la primera conexión entre los problemas (P) y (D), en particular, utilizando el hecho que no hay salto de dualidad entre (D) y (K), se tiene que

$$\sup(P) \leq \inf(K).$$

Por otro lado, en este problema la estructura de  $c$ -conjugada para un par factible  $(p, q)$  del problema dual de Kantorovich queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p^c(y) &= \max\{p(\alpha), \sup_{x \in E^+ : y \in \Gamma(x)} p(x)\}, \\ p^c(w) &= \max\{p(\alpha), \sup_{x \in E^+} p(x) - 1\}, \\ q^c(y) &= \min\{1 + q(w), \inf_{y \in \Gamma(x)} q(y)\}, \\ q^c(\alpha) &= \min\{q(w), \inf_{y \in E^-} q(y)\}. \end{aligned}$$

Veamos que al momento de definir un conjunto, y que este sea efectivamente un pozo necesitamos la propiedad de estabilidad, es por eso el siguiente resultado.

**Lema 1.3.2.** *Se cumple que  $p^c$  y  $q^c$  son crecientes respecto al preorden  $\lesssim_\Gamma$ , es decir,*

$$x' \lesssim_\Gamma x \Rightarrow q^c(x') \geq q^c(x),$$

$$y' \lesssim_\Gamma y \Rightarrow p^c(y') \geq p^c(y).$$

Dadas las características del problema (D), existe solución del problema y además no se tiene salto de dualidad con el problema (P). Así, la siguiente proposición caracteriza la solución del problema (D)

**Proposición 1.3.1.** *El problema (D) tiene una solución  $(\bar{p}, \bar{q})$  con*

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{q}^c & y & \quad \bar{q} = \bar{p}^c, \\ 0 \leq \bar{p} &\leq 1 & y & \quad 0 \leq \bar{q} \leq 1, \\ \bar{p}(\alpha) &= 0 & y & \quad \bar{q}(w) = 0. \end{aligned}$$

Ahora aprovechando la estructura del par  $(p, q)$ , donde son  $c$ -transformadas uno del otro, se consigue el siguiente resultado.

**Lema 1.3.3.** *Si  $(p, q)$  es solución óptima del problema (D) satisfaciendo las características de la proposición anterior, entonces se tiene*

$$y'' \lesssim_\Gamma y' \lesssim_\Gamma x'' \lesssim_\Gamma x' \Rightarrow q(y'') \geq q(y') \geq p(x'') \geq p(x').$$

Con este lema y la caracterización de las soluciones del problema (D), se puede definir un conjunto estable, un pozo óptimo, el cual se define a través de la solución del problema de transporte.

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $(p, q)$  la solución óptima del problema (D) que satisfacen las propiedades de la proposición anterior. Si se define al siguiente conjunto*

$$F := \{x \mid p(x) = 1\} \cup \{y \mid q(y) = 1\}.$$

*Entonces,  $F$  es estable, y es un pozo óptimo que resuelve el problema (P).*

# EXTENSIÓN DEL PROBLEMA DE EXTRACCIÓN DEL POZO

Dado el problema de determinar un pozo óptimo mencionado en el capítulo anterior, nace la duda, ¿Cómo agregamos restricciones o variantes al problema de extracción de forma de hacer el modelo más realista?. Esta pregunta no es trivial para la estructura del modelo, dada la utilización de un problema de transporte óptimo. Es por esto que utilizaremos distintas herramientas ya presentadas en el capítulo 1, entre ellas el esquema de dualidad presentado en [Pennanen and Perkiö, 2019], el que nos permitirá agregar nuevas restricciones a nuestro modelo.

### 2.1. Formulación de pozo

Nuestro objetivo en la siguiente formulación es generar una restricción de capacidad de extracción sobre el pozo a extraer, de tal manera de extender el modelo original, por lo que buscamos que para un pozo  $F$ , se cumpla que  $vol(F) \leq K$  donde  $K$  representará la capacidad máxima del pozo a extraer. En particular, si la restricción de capacidad no se activa, debemos recuperar el problema original de [Ekeland and Queyranne, 2015].

Sea un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  compacto, el cual indicará la sección de donde podremos realizar la extracción, consideremos una función continua  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual que representará el beneficio neto de una sección de  $E$ , además supondremos que la función  $g$  cumple  $vol(\{x \in E : g(x) = 0\}) = 0$ . Así, utilizando la definición de pozo dado por la multifunción  $\Gamma : E \rightrightarrows E$

definido en la sección 1.3.2, definimos el problema

$$\begin{aligned} & \text{máx} \int_F g(z) dz && \text{(P-C)} \\ & \text{s.a} \quad \text{vol}(F^+) \leq hK \\ & \quad \text{vol}(F^-) \leq (1-h)K \\ & \quad F \in S(E). \end{aligned}$$

Donde  $F^+ := \{x \in F : g(x) \geq 0\}$  representa la sección del pozo que es beneficiosa,  $F^- := \{x \in F : g(x) \leq 0\}$  representa el material no beneficioso del pozo,  $h \in (0, 1)$ , y  $K \in \mathbb{R}$  representa nuestra capacidad máxima de extracción. De esta manera, conseguimos restringir el volumen de la extracción, ya que dada la hipótesis sobre la función  $g$ , se tiene que  $\text{vol}(F^+ \cap F^-) = 0$ , con esto el volumen de  $F = F^+ \cup F^-$  será menor o igual que nuestra capacidad máxima  $K$ .

## 2.2. Formulación como un problema de transporte óptimo

### 2.2.1. Problema con restricciones de capacidad en material beneficioso y desechos de la extracción.

Sea un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  compacto, se definen medidas  $\mu, \nu$ , los espacios  $X, Y$  y la función de costo  $c : X \rightarrow Y$  estudiados en la sección 1.3.2. Con esto, definimos el problema

$$\begin{aligned} & \sup_{p \in C_b(X), q \in C_b(Y)} \int_X p d\mu - \int_Y q d\nu && \text{(D-C)} \\ & \text{s.a} \quad p - q \leq c \\ & \quad \int_X p d\lambda_1 \leq hK \\ & \quad \int_Y q d\lambda_2 \leq (1-h)K \\ & \quad q(w) = 0 = p(\alpha). \end{aligned}$$

Donde las medidas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se definen en los espacios  $X$  e  $Y$  respectivamente como

$$\begin{aligned} \lambda_1(\{\alpha\}) &= 0, \quad \lambda_1(A) = \text{vol}(A) \quad \text{para } A \subseteq E^+ \text{ medible,} \\ \lambda_2(\{w\}) &= 0, \quad \lambda_2(B) = \text{vol}(B) \quad \text{para } B \subseteq E^- \text{ medible.} \end{aligned}$$

**Observación 2.2.1.** En nuestro problema (D-C) veamos que un pozo  $F \subseteq E$  se puede representar a través del par de funciones  $(p_F, q_F)$  definidas sobre  $X$  e  $Y$  respectivamente de la siguiente manera,

$$p_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F^+ \\ 0 & \text{si } x \notin F^+ \end{cases} \quad q_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in F^- \\ 0 & \text{si } y \notin F^- \end{cases}$$

Donde  $F^+ := F \cap E^+$  y  $F^- := F \cap E^-$ . Con esto, se cumple que  $J(p_F, q_F) := \int_X p_F d\mu - \int_Y q_F d\nu = \int_F g(z) dz$ .

Bajo estas definiciones, se consigue para cualquier pozo  $F$  que

$$\begin{aligned} \int_X p_F d\lambda_1 &= \int_{F^+} d\lambda_1 = \text{vol}(F^+) \\ \int_Y q_F d\lambda_2 &= \int_{F^-} d\lambda_2 = \text{vol}(F^-) \end{aligned}$$

Así, las primeras dos restricciones de nuestro modelo corresponden a restricciones de capacidad sobre el pozo.

**Observación 2.2.2.** Veamos que la restricción  $q(w) = 0 = p(\alpha)$  en (D-C) impide que nuestra restricción de capacidad quede inactiva, esto debido a que para cualquier par  $(p, q)$  tal que  $p - q \leq c$  pero no cumple las restricciones de capacidad, es decir,

$$\int_X p d\lambda_1 > hK \quad \wedge \quad \int_Y q d\lambda_2 > (1-h)K,$$

se puede definir un par  $(\hat{p}, \hat{q})$  tal que  $\hat{p} = p - C$  y  $\hat{q} = q - C$ , donde  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$C > \max \left\{ \int_X p d\lambda_1 - hK, \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right\}$$

por lo que se cumple que  $\hat{p} - \hat{q} \leq c$ ,  $J(p, q) = \int_X p d\mu - \int_Y q d\nu = J(\hat{p}, \hat{q})$  y además

$$\int_X \hat{p} d\lambda_1 \leq K \quad \wedge \quad \int_Y \hat{q} d\lambda_2 \leq (1-h)K$$

de esta manera, al fijar los valores  $q(w) = 0 = p(\alpha)$ , evitamos que las soluciones de nuestro modelo sean módulo una constante y mantengan inactiva la restricción de capacidad.

Veamos que podemos reformular el problema (D-C) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in C_b(X), q \in C_b(Y)} \int_X p d\mu + \int_Y q d\nu \\ \text{s.a.} \quad & -p - q \leq c \\ & - \int_X p d\lambda_1 \leq hK \\ & \int_Y q d\lambda_2 \leq (1-h)K \\ & q(w) = 0 = p(\alpha). \end{aligned}$$

Con esta nueva formulación reescribiremos nuestro problema de la forma

$$\inf_x \sum_{t=0}^1 G_t(x_t) + H \left( - \sum_{t=0}^1 x_t \circ \pi_t \right) \quad x \in \prod_{t=0}^1 C_t \quad (*)$$

para utilizar el esquema de dualidad estudiado en la sección 1.2, donde  $C_0 := C_b(X)$ ,  $C_1 := C_b(Y)$  y  $C := C_b(X \times Y)$ .

Para esto definimos las funciones  $G_0$ ,  $G_1$  y  $H$  como

$$\begin{aligned} G_0(p) & := \int_X p d\mu + \delta_{\{\mathbb{R}^-\}} \left( - \int_X p d\lambda_1 - hK \right) + \delta_{\{0\}}(p(\alpha)), \\ G_1(q) & := \int_Y q d\nu + \delta_{\{0\}}(q(w)) + \delta_{\{\mathbb{R}^-\}} \left( \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right), \\ H(\phi) & := \delta_{C_b(X \times Y)^-}(\phi - c). \end{aligned}$$

Con esto realizaremos los cálculos para conseguir el problema dual de (\*). Para eso, necesitamos calcular las conjugadas de Fenchel de las funciones  $G_0$ ,  $G_1$  y  $H$ , las cuales conseguiremos a través del siguiente lema.

**Lema 2.2.1.** *Sean las funciones  $G_0 : C_b(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G_1 : C_b(Y) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $H : C_b(X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas anteriormente, entonces sus conjugadas de Fenchel vienen dadas por*

$$\begin{aligned} G_0^*(\gamma_0) & = \inf_{t_0 \in \mathbb{R}_0^+, t_3 \in \mathbb{R}} \{ hK t_0 : t_0 \lambda_1 + \gamma_0 - \mu - t_3 \delta_{\{\alpha\}} = 0 \} \\ G_1^*(\gamma_1) & = \inf_{t_2 \in \mathbb{R}_0^+, t_1 \in \mathbb{R}} \{ (1-h)K t_2 : -t_1 \delta_{\{w\}} - t_2 \lambda_2 + \gamma_1 - \nu = 0 \} \\ H^*(\gamma) & = \int_{X \times Y} c d\gamma + \delta_{\{M^+(X \times Y)\}}(\gamma) \end{aligned}$$

y además se tiene que

$$t_0 \left( - \int_X p d\lambda_1 - hK \right) = 0 \quad \wedge \quad t_2 \left( \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right) = 0$$

**Demostración:**

Por una parte tenemos:

$$\begin{aligned}
G_0^*(\gamma_0) &= \sup_{p \in C_0} \langle p, \gamma_0 \rangle - G_0(p) \\
&= \sup_{p \in C_0} \langle p, \gamma_0 \rangle - \langle p, \mu \rangle - \delta_{\{\mathbb{R}^-\}} \left( - \int_X p d\lambda_1 - hK \right) - \delta_{\{0\}}(p(\alpha)) \\
&= \sup_{p \in C_0} \{ \langle p, \gamma_0 - \mu \rangle : -\langle p, \lambda_1 \rangle \leq hK \wedge p(\alpha) = 0 \},
\end{aligned}$$

Así, utilizando el esquema de dualidad Fenchel-Rockafellar en el problema generado por la función  $G_0^*$ , definiremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
f_0(p) &= -\langle p, \gamma_0 - \mu \rangle \\
g_0(l_0, l_1) &= \delta_{\{(-\infty, hK]\}}(l_0) + \delta_{\{0\}}(l_1) \\
A_0(p) &= \left( - \int_X p d\lambda_1, p(\alpha) \right).
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
G_0^*(\gamma_0) &= \sup_{p \in C_0} \{ \langle p, \gamma_0 - \mu \rangle : -\langle p, \lambda_1 \rangle \leq hK \wedge p(\alpha) = 0 \} \\
&= \inf_{p \in C_0} f_0(p) + g_0(A_0(p))
\end{aligned}$$

Así, calculando las conjugadas de Fenchel de las funciones  $f_0, g_0$  y el operador adjunto  $A_0^*$ ,

$$\begin{aligned}
f_0^*(\eta_0) &= \sup_{p \in C_0} \{ \langle p, \eta_0 \rangle + \langle p, \gamma_0 - \mu \rangle \} \\
&= \delta_{\{0\}}(\eta_0 + \gamma_0 - \mu),
\end{aligned}$$

sigue la conjugada de  $g_0$

$$\begin{aligned}
g_0^*(t_0, t_3) &= \sup_{l_0, l_1 \in \mathbb{R}} \{ t_0 l_0 + t_3 l_1 - \delta_{\{0\}}(l_1) - \delta_{\{(-\infty, hK]\}}(l_0) \} \\
&= t_0 hK + \delta_{\{\mathbb{R}_0^+\}}(t_0),
\end{aligned}$$

luego calculando el operador adjunto  $A_0^*$

$$\begin{aligned}
\langle A_0(p), (t_0, t_3) \rangle &= \left\langle - \int_X p d\lambda_1, t_0 \right\rangle + \langle p(\alpha), t_3 \rangle \\
&= \langle -p, t_0 \lambda_1 \rangle + \langle p, t_3 \delta_{\{\alpha\}} \rangle = \langle p, A_0^*(t_0, t_3) \rangle,
\end{aligned}$$

consequimos que  $A_0^*(t_0, t_3) := -t_0\lambda_1 + t_3\delta_{\{\alpha\}}$ .

Con esto, el problema dual asociado al valor de  $G_0^*(\gamma_0)$  es el siguiente

$$\inf_{t_0, t_3 \in \mathbb{R}} \{f_0^*(-A_0^*(t_0, t_3)) + g_0^*(t_0, t_3)\} = \inf_{t_0 \in \mathbb{R}_0^+, t_3 \in \mathbb{R}} \{t_0 hK : t_0\lambda_1 - t_3\delta_{\{\alpha\}} + \gamma_0 - \mu = 0\}$$

Veamos que se cumple la condición de cualificación para que no se tenga salto de dualidad, en particular tenemos que

$$0 \in \text{int}(\text{dom}(g_0) - A_0(\text{dom}(f_0))) = \text{int}((-\infty, hK] \times \{0\} - \mathbb{R}^2)$$

así, dado que  $G_0^*(\gamma_0) \in \mathbb{R}$  no existe saldo de dualidad, y se caracterizan las soluciones de este problema que cumplen con la condición

$$\begin{aligned} g_0(A_0(p)) + g_0^*((t_0, t_3)) &= \langle A_0(p), (t_0, t_3) \rangle \\ \Leftrightarrow \delta_{\{(-\infty, hK]\}} \left( - \int_X p d\lambda_1 \right) + \delta_{\{0\}}(p(\alpha)) + t_0 hK + \delta_{\{\mathbb{R}_0^+\}}(t_0) &= -t_0 \int_X p d\lambda_1 + p(\alpha)t_3 \\ \Leftrightarrow t_0 hK &= -t_0 \int_X p d\lambda_1. \end{aligned}$$

Con esto, conseguimos que

$$t_0 \left( - \int_X p d\lambda_1 - hK \right) = 0$$

Así,  $G_0^*(\gamma_0) = \inf_{t_0 \in \mathbb{R}_0^+, t_3 \in \mathbb{R}} \{hK t_0 : t_0\lambda_1 + \gamma_0 - \mu - t_3\delta_{\{\alpha\}} = 0\}$ .

Por otro lado, la conjugada de  $G_1$  viene dada por:

$$\begin{aligned} G_1^*(\gamma_1) &= \sup_{q \in \mathcal{C}_1} \{\langle q, \gamma_1 \rangle - G_1(q)\} \\ &= \sup_{q \in \mathcal{C}_1} \left\{ \langle q, \gamma_1 \rangle - \langle q, \nu \rangle - \delta_{\{0\}}(q(w)) - \delta_{\{\mathbb{R}^-\}} \left( \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right) \right\} \\ &= \sup_{q \in \mathcal{C}_1} \{\langle q, \gamma_1 - \nu \rangle : q(w) = 0 \wedge \langle q, \lambda_2 \rangle \leq (1-h)K\}. \end{aligned}$$

Realizando el mismo proceso que con  $G_0^*$ , utilizaremos el esquema de dualidad Fenchel-Rockafellar, con lo que definiremos las funciones

$$\begin{aligned} f_1(q) &= -\langle q, \gamma_1 - \nu \rangle \\ g_1(l_0, l_1) &= \delta_{\{(-\infty, (1-h)K]\}}(l_0) + \delta_{\{0\}}(l_1) \\ A_1(q) &= \left( \int_Y q d\lambda_1, q(w) \right) \end{aligned}$$

Y se cumple que

$$G_1^*(\gamma_1) = \inf_{q \in C_1} f_1(q) + g_1(A_1(q))$$

Por lo que análogamente al proceso realizado con  $G_0^*$ , conseguimos que el problema dual asociado al valor  $G_1^*(\gamma_1)$  es

$$\inf_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \{f_1^*(-A_1^*(t_2, t_1)) + g_1^*(t_2, t_1)\} = \inf_{t_2 \in \mathbb{R}_0^+, t_1 \in \mathbb{R}} \{t_2(1-h)K : -t_2\lambda_1 - t_1\delta_{\{w\}} + \gamma_1 - \nu = 0\}$$

Veamos que se cumple la condición de cualificación para que no se tenga salto de dualidad, en particular tenemos que

$$0 \in \text{int}(\text{dom}(g_1) - A_1(\text{dom}(f_1))) = \text{int}((-\infty, (1-h)K] \times \{0\} - \mathbb{R}^2)$$

así, dado que  $G_1^*(\gamma_1) \in \mathbb{R}$ , no existe salto de dualidad, y se caracterizan las soluciones de este problema que cumplen con la condición

$$\begin{aligned} g_1(A_1(q)) + g_1^*((t_2, t_1)) &= \langle A_1(q), (t_2, t_1) \rangle \\ \Leftrightarrow \delta_{\{(-\infty, (1-h)K]\}} \left( \int_Y q d\lambda_2 \right) + \delta_{\{0\}}(q(w)) + t_2(1-h)K + \delta_{\{\mathbb{R}_0^+\}}(t_2) &= t_2 \int_Y q d\lambda_2 + q(w)t_1 \\ \Leftrightarrow t_2(1-h)K &= t_2 \int_Y q d\lambda_2 \end{aligned}$$

Con esto, conseguimos que

$$t_2 \left( \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right) = 0$$

Finalmente la conjugada de  $H$ ,

$$\begin{aligned} H^*(\gamma) &= \sup_{x \in C} \{ \langle x, \gamma \rangle - \delta_{\{\mathbb{R}\}}(x - c) \} \\ &= \langle c, \gamma \rangle + \delta_{\{M^+(X \times Y)\}}(\gamma). \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos el resultado. ■

Utilizando el resultado del lema anterior, podemos plantear el problema dual de (\*) dado por

$$\inf_{\gamma \in C^*} \sum_{t=0}^1 G_t^*(\gamma_t) + H^*(\gamma),$$

lo cual reescribiendolo queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} & \inf_{\gamma, t_0, t_1, t_2, t_3} \langle c, \gamma \rangle + hKt_0 + (1-h)Kt_2 & \text{(K-C)} \\ \text{s.a} \quad & t_0\lambda_1 + (\pi_X)_\# \gamma - \mu - t_3\delta_{\{\alpha\}} = 0 \\ & -t_1\delta_{\{w\}} - t_2\lambda_2 + (\pi_Y)_\# \gamma - \nu = 0 \\ & \gamma \in M^+(X \times Y), t_0 \in \mathbb{R}_0^+, t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}_0^+, t_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Con estos problemas, podemos escribir sus condiciones de optimalidad utilizando el Teorema 1.2.1.

Primero veamos que se cumplen las condiciones del Teorema 1.2.1, en efecto se pide que el siguiente conjunto sea un subespacio vectorial cerrado

$$F := \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \text{ dom } \varphi,$$

donde  $\varphi$  es la función objetivo, así el dominio efectivo queda

$$\text{dom } \varphi = \text{dom } H + \left\{ \sum_{t=0}^1 x_t \circ \pi_t : x_t \in \text{dom } G_t \right\}.$$

En nuestro caso, tenemos

$$\begin{aligned} \text{dom } \varphi = & \{ \phi \in C_b(X \times Y) : \phi \leq c \} + \\ & + \{ x_0 + x_1 : (x_0, x_1) \in C_b(X) \times C_b(Y), - \int_X x_0 d\lambda_1 \leq hK, \int_Y x_1 d\lambda_2 \leq (1-h)K, x_1(w) = 0 = x_0(\alpha) \} \end{aligned}$$

Por lo que si  $x^1 \in \alpha^1 \text{ dom } \varphi$ ,  $x^2 \in \alpha^2 \text{ dom } \varphi$ . Dada la forma del dominio, tenemos las siguientes caracterizaciones,

$$x^i = \alpha^i x_H^i + \alpha^i (x_0^i + x_1^i) \quad i = 1, 2.$$

Donde  $x_H^i \in \text{dom } H$  y  $(x_0^i + x_1^i) \in \left\{ \sum_{t=0}^1 x_t \circ \pi_t : x_t \in \text{dom } G_t \right\}$  para  $i = 1, 2$ .

Luego, podemos probar que

$$\alpha^1 x_H^1 + \alpha^2 x_H^2 \in (\alpha^1 + \alpha^2) \text{ dom } H,$$

además que

$$\alpha^1(x_0^1 + x_1^1) + \alpha^2(x_0^2 + x_1^2) \in (\alpha^1 + \alpha^2) \left\{ \sum_{t=0}^1 x_t \circ \pi_t : x_t \in \text{dom } G_t \right\}.$$

Por lo tanto  $F$  es un espacio vectorial, ya que  $x^1 + x^2 \in (\alpha^1 + \alpha^2)\text{dom } \varphi$  y  $0 \in \text{dom } \varphi$ . Luego, podemos demostrar que este espacio es cerrado debido a la linealidad de las restricciones. Así, podemos caracterizar la solución dual y primal de este problema por los subdiferenciales de las funciones. En particular, utilizando el Teorema 1.2.1, si  $x^* \in C^*$  y  $x \in C$ , conseguimos las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned} x_t^* &\in \partial G_t(x_t), \quad t = 0, 1, \\ x^* &\in \partial H\left(-\sum_{t=0}^1 x_t \circ \pi_t\right) \end{aligned}$$

Lo cual se puede reescribir de la siguiente manera, con  $x_0 \in \text{dom } G_0$ ,  $x_1 \in \text{dom } G_1$  y denotando a  $x_0^* := (\pi_X)_\# x^*$ ,  $x_1^* := (\pi_Y)_\# x^*$

$$\begin{aligned} \langle \mu - x_0^*, x_0 - y_0 \rangle &\leq 0, \quad \forall y_0 \in \text{dom } G_0, \\ \langle \nu - x_1^*, x_1 - y_1 \rangle &\leq 0, \quad \forall y_1 \in \text{dom } G_1, \\ \langle x^*, x_0 + x_1 + y \rangle &\leq 0, \quad \forall y \in \text{dom } H. \end{aligned}$$

Reescribiéndolo se tiene

$$\langle \mu - x_0^*, x_0 - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y_0 \in C_b(X) \text{ tal que } -\int_X y_0 d\lambda_1 \leq hK, \quad y_0(\alpha) = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\langle \nu - x_1^*, x_1 - y_1 \rangle \leq 0, \quad \forall y_1 \in C_b(Y) \text{ tal que } \int_Y y_1 d\lambda_2 \leq (1-h)K, \quad y_1(w) = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\langle x^*, x_0 + x_1 + y \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C_b(X \times Y) \text{ tal que } y \leq c. \quad (2.2.3)$$

Dado que  $x^*$  debe ser factible, entonces para algún  $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ ,

$$x_0^* = \mu - t_0\lambda_1 + t_3\delta_{\{\alpha\}} \quad x_1^* = \nu + t_2\lambda_2 + t_1\delta_{\{w\}}.$$

Por lo que las primeras dos condiciones de optimalidad quedan en

$$\langle t_0\lambda_1 + t_3\delta_{\{\alpha\}}, x_0 - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y_0 \in C_b(X) \text{ tal que } -\int_X y_0 d\lambda_1 \leq hK, \quad y_0(\alpha) = 0,$$

$$\langle t_2\lambda_2 + t_1\delta_{\{w\}}, x_1 - y_1 \rangle \leq 0, \quad \forall y_1 \in C_b(Y) \text{ tal que } \int_Y y_1 d\lambda_2 \leq (1-h)K, \quad y_1(w) = 0.$$

Utilizando la condición  $y_1(w) = 0$  y  $x_1(w) = 0$ , ya que  $x_1$  debe ser factible, entonces la última desigualdad queda

$$\langle t_2 \lambda_2, x_1 - y_1 \rangle \leq 0, \quad \forall y_1 \in C_b(Y) \text{ tal que } \int_Y y_1 d\lambda_2 \leq (1-h)K, \quad y_1(w) = 0.$$

Veamos que utilizando la desigualdad de  $y_1$ , lo que se consigue es

$$\langle t_2 \lambda_2, x_1 \rangle \leq t_2(1-h)K.$$

Por otro lado, utilizando el mismo razonamiento, (2.2.1) nos entrega que

$$\langle t_0 \lambda_1, x_0 \rangle \leq t_0 h K.$$

Finalmente (2.2.3) viene a entregar la caracterización que se busca en el par óptimo, así se consigue la siguiente igualdad

$$\int_{X \times Y} (x_0 + x_1 + c) dx^* = 0.$$

Con esto entonces enunciaremos las condiciones de optimalidad para nuestro problema (D-C)

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $(p, q)$  y  $(\gamma, t_0, t_2)$  soluciones de (D-C) y (K-C) respectivamente. Entonces las condiciones de optimalidad para este par son las siguientes:*

$$\int_{X \times Y} (p(x) - q(y) - c(x, y)) d\gamma(x, y) = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\langle t_0 \lambda_1, p \rangle \leq t_0 h K, \quad (2.2.5)$$

$$\langle t_2 \lambda_2, q \rangle \leq t_2(1-h)K, \quad (2.2.6)$$

$$t_0 \left( \int_X p d\lambda_1 - hK \right) = 0, \quad (2.2.7)$$

$$t_2 \left( \int_Y q d\lambda_2 - (1-h)K \right) = 0. \quad (2.2.8)$$

**Observación 2.2.3.** *Estas últimas dos condiciones se consiguen a través de los problemas duales de los supremos  $G_0^*$  y  $G_1^*$  obtenidos en el Lema 2.2.1.*

Veamos que dado el problema (D-C), se tiene que la solución  $(p, q)$  cumple una relación de  $c$ -conjugada. En particular, dada la restricción de competitividad conseguimos que

$$\begin{aligned} p(x) - q(y) &\leq c(x, y) \\ \Leftrightarrow q(y) &\geq p(x) - c(x, y) \\ \Rightarrow q(y) &\geq \sup_{x \in X} \{p(x) - c(x, y)\} := p^{\bar{c}}(y) \end{aligned}$$

así el par  $(p, p^{\bar{c}})$  es factible en (D-C) ya que

$$p(x) - p^{\bar{c}}(y) \leq p(x) - p(x) + c(x, y) = c(x, y),$$

y además como  $q \geq p^{\bar{c}}$

$$\int_Y p^{\bar{c}} d\lambda_2 \leq \int_Y q d\lambda_2 \leq (1-h)K.$$

Por lo que nuestra solución debe tener esta estructura, debido a que el par  $(p, p^{\bar{c}})$  tiene un mejor valor en la función objetivo, es decir,

$$J(p, q) = \int_X p d\mu - \int_Y q d\nu \leq \int_X p d\mu - \int_Y p^{\bar{c}} d\nu = J(p, p^{\bar{c}}).$$

**Observación 2.2.4.** *Veamos que a diferencia del problema original sin restricción adicional en nuestro caso no se tiene la estructura de que nuestra solución sea  $(q^c, q)$  por el signo de las desigualdades ya que si  $(p, q)$  son factibles,*

$$\begin{aligned} p(x) - q(y) &\leq c(x, y) \\ \Leftrightarrow p(x) &\leq q(y) + c(x, y) \\ \Rightarrow p(x) &\leq \inf_{y \in Y} \{q(y) + c(x, y)\} := q^c(x), \end{aligned}$$

se tiene que este par  $(q^c, q)$  satisface la primera restricción de competitividad

$$q^c(x) - q(y) \leq q(y) + c(x, y) - q(y) = c(x, y),$$

pero no satisface necesariamente la restricción de capacidad ya que  $p(x) \leq q^c(x)$ , así

$$hK \geq \int_X p d\lambda_1 \leq \int_X q^c d\lambda_1.$$

Con esta estructura de la solución veamos que dada la estructura del espacio  $X$ , se cumple que

$$p^{\bar{c}}(y) := \max\{0, \sup_{x \in E^+ : y \in \Gamma(x)} p(x)\} \quad \forall y \in E^-, \quad (2.2.9)$$

$$p^{\bar{c}}(w) := \max\{0, \sup_{x \in E^-} p(x) - 1\}. \quad (2.2.10)$$

**Observación 2.2.5.** *Podemos notar que utilizando la estructura de  $c$ -conjugada y dada la restricción de  $q(w) = 0$  para un par  $(p, q)$  factible, conseguimos que la solución óptima es*

acotada, de hecho, como

$$p^{\bar{c}}(w) = \max\{0, \sup_{x \in E^+} p(x) - 1\} = 0.$$

Por lo tanto  $p(x) \leq 1$  para  $x \in E^+$ . Además, dado que

$$p^{\bar{c}}(y) = \max\{0, \sup_{x \in E^+ : y \in \Gamma(x)} p(x)\} \quad \forall y \in E^-$$

se consigue la cota  $p^{\bar{c}}(y) \leq 1$  para  $y \in E^-$ .

La siguiente proposición nos permite verificar que el conjunto que definimos en la Proposición 2.2.2 efectivamente sea un pozo, y con esto lograr unir los problemas (D-C), (K-C) y (P-C).

**Proposición 2.2.1.** Sean  $(p, q)$  solución de (D-C), entonces para  $y'', y' \in E^-$  y  $x'', x' \in E^+$  se cumple

$$y'' \succsim_{\Gamma} y' \succsim_{\Gamma} x' \succsim_{\Gamma} x'' \Rightarrow q(y'') \geq q(y') \geq p(x') \geq p(x''),$$

donde las desigualdades de  $x'$  y  $x''$  son  $(\mu - t_0\lambda_1) - c.t.p.$ .

**Demostración:**

Veamos que dada la estructura de la solución  $(p, p^{\bar{c}})$ , como  $y' \succsim_{\Gamma} x'$ , entonces

$$p^{\bar{c}}(y') = \max\{0, \sup_{x: y' \in \Gamma(x)} p(x)\} \geq p(x')$$

además por la misma definición de la  $c$ -conjugada, ya que si  $y'' \succsim_{\Gamma} y'$  y  $y' \in \Gamma(x)$  entonces  $y'' \in \Gamma(x)$ . Por lo que  $\{x \in E^+ : y'' \in \Gamma(x)\} \supseteq \{x \in E^+ : y' \in \Gamma(x)\}$ , así

$$p^{\bar{c}}(y'') = \max\{0, \sup_{x: y'' \in \Gamma(x)} p(x)\} \geq \max\{0, \sup_{x: y' \in \Gamma(x)} p(x)\} = p^{\bar{c}}(y')$$

Por lo que faltaría solamente demostrar que  $x' \succsim_{\Gamma} x'' \Rightarrow p(x') \geq p(x'')$ . Para esto veamos que dada la condición de optimalidad del Teorema 2.2.1, se consigue que

$$p(x) - q(y) = c(x, y) \quad \gamma - c.t.p.$$

En particular dada la estructura de solución que tenemos, y para algún  $y \in \Gamma(x')$ , por

transitividad se consigue que  $y \in \Gamma(x'')$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} p(x') &= c(x', y) + p^{\bar{c}}(y) && \gamma - \text{c.t.p.} \\ &= \text{máx}\{0, \sup_{x:y \in \Gamma(x)} p(x)\} && \gamma - \text{c.t.p.} \\ &\geq p(x'') && \gamma - \text{c.t.p.} \end{aligned}$$

Así, entonces  $p(x') \geq p(x'')$   $\gamma$ -c.t.p., en particular dada la marginal de  $\gamma$  en el espacio  $X$ , se tiene que

$$p(x') \geq p(x'') \quad (\mu - t_0\lambda_1) - \text{c.t.p.}$$

■

**Observación 2.2.6.** *Veamos que la desigualdad anterior nos permite generar un pozo para la siguiente proposición, pero funcionaría si  $\mu - t_0\lambda_1$  tiene los mismos conjuntos de medida nula que  $\mu$ . Esto depende del valor que tome  $t_0$ , debido a que en  $E^+$ ,  $\lambda_1(\cdot) = \text{vol}(\cdot)$ , y  $\mu = g \text{vol}(\cdot)$ , por lo que se puede generar un nuevo conjunto de medida nula al integrar sobre el conjunto  $E$ , lo cual rompería la característica de que efectivamente se cuenta con una estructura de pozo en la siguiente proposición.*

**Proposición 2.2.2.** *Si  $(p, q)$  son solución del problema (D-C), entonces el conjunto*

$$F := \{x \in E^+ : p(x) = 1\} \cup \{y \in E^- : q(y) = 1\},$$

*es un pozo si  $\mu - t_0\lambda_1$  tiene los mismos conjuntos de medida nula que  $\mu$ . Además se tiene que es óptimo en caso que las restricciones de capacidad no estén activas.*

**Demostración:**

Veamos que dada la Proposición 2.2.1, conseguimos que  $F$  es un conjunto estable. Así definiendo  $F^+ := E^+ \cap F$ ,  $F^- := E^- \cap F$ ,  $G^+ := E^+ \setminus F^+$  y  $G^- := E^- \setminus F^-$ , dadas las restricciones del problema (D-C), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X pd\lambda_1 &= \int_{F^+} pd\lambda_1 + \int_{G^+} pd\lambda_1 = \text{vol}(F^+) + \int_{G^+} pd\lambda_1 \leq hK \\ \int_Y qd\lambda_2 &= \int_{F^-} qd\lambda_2 + \int_{G^-} qd\lambda_2 = \text{vol}(F^-) + \int_{G^-} qd\lambda_2 \leq (1-h)K. \end{aligned}$$

Por lo que el pozo  $F$  sería factible, ya que  $\text{vol}(F^+) \leq hK$  y  $\text{vol}(F^-) \leq (1-h)K$ . Luego, calculando el valor del par óptimo conseguimos

$$J(p, q) = \int_{F^+} d\mu - \int_{F^-} d\nu + \int_{G^+} pd\mu - \int_{G^-} qd\nu.$$

Veamos que

$$\begin{aligned}\int_{G^-} q d\nu &= \int_{G^-} q d(\nu + t_2 \lambda_2 + t_1 \delta_{\{w\}}) - t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2 \\ &= \int_{E^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) - t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2.\end{aligned}$$

Luego, como  $p - q = c$   $\gamma$ -c.t.p. y dado que  $c(x, y) = 0$  ó  $+\infty$  en  $E^+ \times E^-$ , como  $p, q$  son acotadas, entonces  $p = q$   $\gamma$ -c.t.p. en  $E^+ \times E^-$ .

$$\Rightarrow \gamma(G^+ \times F^-) = 0 = \gamma(F^+ \times G^-).$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{E^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) &= \int_{G^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) = \int_{G^+ \times G^-} p(x) d\gamma(x, y) \\ &= \int_{G^+ \times E^-} p(x) d\gamma(x, y) = \int_{G^+} p(x) d(\mu - t_0 \lambda_1 + t_3 \delta_{\{\alpha\}}) \\ &= \int_{G^+} p d\mu - t_0 \int_{G^+} p d\lambda_1.\end{aligned}$$

Con esto, sigue que

$$J(p, q) = \int_{F^+} d\mu - \int_{F^-} d\nu + t_0 \int_{G^+} p d\lambda_1 + t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2.$$

Por lo que dado el caso que las restricciones de capacidad no esten activas, se tiene que  $t_0 = 0 = t_2$ , así conseguimos que

$$J(p, q) = \int_F g(z) dz = \sup(D - C).$$

Y dadas las cotas con el problema de pit se consigue que  $\inf(K - C) = \sup(D - C) = \sup(P - C)$ , por lo que el pozo  $F$  es un pozo óptimo. ■

### 2.2.2. Restricción de capacidad sobre desechos de la extracción.

Para este caso modificaremos la formulación de pozo para conseguir una restricción solamente sobre  $q$ , la cual representará una restricción sobre los desechos de la extracción,

$$\begin{aligned} & \text{máx} \int_F g(z) dz & (\text{P-Cq}) \\ & \text{s.a} \quad \text{vol}(F^-) \leq K, \\ & \quad F \in S(E). \end{aligned}$$

Por otro lado, el problema de transporte óptimo se define con los mismos espacios de medida  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  y función de costo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , así el problema se plantea de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \sup_{p \in C_b(X), q \in C_b(Y)} \int_X p d\mu - \int_Y q d\nu & (\text{D-Cq}) \\ & \text{s.a} \quad p - q \leq c, \\ & \quad \int_X q d\lambda_1 \leq K, \\ & \quad q(w) = 0 = p(\alpha). \end{aligned}$$

Con esto, siguiendo el mismo esquema de dualidad visto en [Pennanen and Perkkiö, 2019] y realizado en la sección anterior, conseguimos el siguiente problema

$$\begin{aligned} & \inf_{\gamma, t_1, t_2, t_3} \langle c, \gamma \rangle + K t_2 & (\text{K-Cq}) \\ & \text{s.a} \quad (\pi_X)_\# \gamma - \mu - t_3 \delta_{\{\alpha\}} = 0 \\ & \quad -t_1 \delta_{\{w\}} + (\pi_Y)_\# \gamma - \nu - t_2 \lambda_2 = 0 \\ & \quad \gamma \in M^+(X \times Y), t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}_0^+, t_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Observación 2.2.7.** *Veamos que acá dado que no tenemos la restricción en  $p$ , entonces se tiene que la solución del problema (D-Cq) tiene estructura de  $c$ -conjugada en ambas*

funciones  $(p, q)$ . Así recordemos que

$$p^{\bar{c}}(y) := \max\{0, \sup_{x: y \in \Gamma(x)} p(x)\} \quad \forall y \in E^-,$$

$$p^{\bar{c}}(w) := \max\{0, \sup_{x \in E^-} p(x) - 1\},$$

$$q^c(x) := \min\{1, \inf_{y \in \Gamma(x)} q(y)\} \quad x \in E^+,$$

$$q^c(\alpha) := \min\{0, \inf_{y \in E^-} q(y)\}.$$

Con esto, se puede conseguir un resultado similar a la Proposición 2.2.1.

**Proposición 2.2.3.** Sean  $(p, q)$  solución de (D-Cq), entonces para  $y'', y' \in E^-$  y  $x'', x' \in E^+$  se cumple que

$$y'' \succ_{\Gamma} y' \succ_{\Gamma} x' \succ_{\Gamma} x'' \Rightarrow q(y'') \geq q(y') \geq p(x') \geq p(x'')$$

**Demostración:**

Esta demostración es análoga al Lema 7.1 de [Ekeland and Queyranne, 2015]. La primera y última desigualdad vienen de la estructura de  $c$ -conjugada de la solución  $(p, q)$ , y la del centro se consigue ya que

$$q(y') = p^{\bar{c}}(y) = \max\{0, \sup_{x: y' \in \Gamma(x)} p(x)\} \geq p(x'). \quad \blacksquare$$

Con este resultado se puede generar un pit con la solución óptima de la misma manera y esta vez sin ninguna hipótesis a diferencia del caso anterior.

**Teorema 2.2.2.** Para  $(p, q)$  solución de (D-Cq) el conjunto

$$F := \{x \in E^+ : p(x) = 1\} \cup \{y \in E^- : q(y) = 1\}$$

es un pozo y se tiene que es óptimo cuando la restricción de capacidad no esta activa.

**Demostración:**

La demostración de este resultado sigue la misma idea que en el problema anterior. Veamos que el conjunto  $F$  efectivamente es un pozo por la proposición anterior, además de ser factible en el problema (P-Cq). Con esto definiendo  $F^+ := E^+ \cap F$ ,  $F^- := E^- \cap F$ ,  $G^+ := E^+ \setminus F^+$  y  $G^- := E^- \setminus F^-$ , se tiene que

$$J(p, q) = \int_{F^+} d\mu - \int_{F^-} d\nu + \int_{G^+} p d\mu - \int_{G^-} q d\nu$$

Veamos que

$$\begin{aligned}\int_{G^-} q d\nu &= \int_{G^-} q d(\nu + t_2 \lambda_2 + t_1 \delta_{\{w\}}) - t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2 \\ &= \int_{E^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) - t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2\end{aligned}$$

Así, dado que  $p - q = c$   $\gamma$ -c.t.p. y dado que  $c(x, y) = 0$  ó  $\infty$  en  $E^+ \times E^-$ , como  $(p, q)$  son acotadas, entonces  $p = q$   $\gamma$ -c.t.p. en  $E^+ \times E^-$ .

$$\gamma(G^+ \times F^-) = 0 = \gamma(F^+ \times G^-)$$

Sigue que

$$\begin{aligned}\int_{E^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) &= \int_{G^+ \times G^-} q(y) d\gamma(x, y) = \int_{G^+ \times G^-} p(x) d\gamma(x, y) \\ &= \int_{G^+ \times E^-} p(x) d\gamma(x, y) = \int_{G^+} p(x) d(\mu + t_3 \delta_{\{\alpha\}}) \\ &= \int_{G^+} p d\mu\end{aligned}$$

Por lo tanto se consigue

$$J(p, q) = \int_F g(z) + t_2 \int_{G^-} q d\lambda_2$$

Así cuando la restricción de capacidad no se active se consigue que  $J(p, q) = \int_F g(z) dz$ . ■



# RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo desarrollaremos un esquema numérico para el caso de extracción óptima sin y con restricciones, el cual se desarrolla discretizando los espacios y utilizando la caracterización de las soluciones que se obtienen. En particular, se mostrarán resultados para pozos  $F \subset \mathbb{R}^2$  para reducir el costo computacional, pero se puede extender a más dimensiones, adaptando la implementación utilizada. Todas las implementaciones se pueden encontrar en el siguiente [github](#).

### 3.1. Problema irrestricto

Sean  $E \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto compacto y la función de beneficio neto  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , defina los espacios de medida  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  como en capítulos anteriores, además de la función de costo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**Observación 3.1.1.** *Dentro de la literatura no se cuenta con un esquema numérico específico para conseguir la solución de un problema de transporte óptimo para espacios "semi-discretos", con este término nos referimos que tanto el espacio de medida  $X$  como  $Y$  ambos cuentan con un conjunto continuo,  $E^+$  y  $E^-$  ambos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , y un elemento discreto el cual realiza el término de balance de masas  $\alpha$  y  $w$ . Dicho esto, la implementación que mostramos a continuación se basa en la discretización de los espacios.*

Dados los resultados de [Ekeland and Queyranne, 2015], se consigue la caracterización del pozo óptimo a través de la Proposición 1.3.2. Así podemos notar cierta estructura generada en la solución de este problema.

**Observación 3.1.2.** *La solución  $(p, q)$  del problema (D) se caracteriza por tomar valores 0 y 1, lo que es ideal utilizar algún algoritmo que se beneficie de esto.*

Dada la aproximación que realizaremos a este problema, sea  $h$  el tamaño de paso para un mallado uniforme de  $E$ , el cual nombraremos como  $\tilde{E}$  en nuestros espacios  $X$  e  $Y$ , con esto definiremos los espacios de medida  $(\tilde{X}, \tilde{\mu})$  y  $(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$ , los cuales se definen de la siguiente manera.

$$\tilde{X} := (E^+ \cap \tilde{E}) \cup \{\alpha\} \quad \tilde{Y} := (E^- \cap \tilde{E}) \cup \{w\}$$

y las medidas no negativas

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\{\alpha\}) &= \tilde{\nu}(E^- \cap \tilde{E}) & \mu(x) &= h^2 g(x) \quad \text{para } x \in (E^+ \cap \tilde{E}) \\ \tilde{\nu}(\{w\}) &= \mu(E^+ \cap \tilde{E}) & \tilde{\nu}(y) &= h^2 |g(y)| \quad \text{para } y \in (E^- \cap \tilde{E}) \end{aligned}$$

de esta manera se cumple que  $\tilde{\mu}(\tilde{X}) = \tilde{\nu}(\tilde{Y})$ . En particular, se puede caracterizar a las medidas  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\nu}$  por vectores de largo  $n$  y  $m$ , cuya dimensión estará dada por la cantidad de puntos en cada espacio  $\tilde{X}$ , y  $\tilde{Y}$ . Por lo que de ahora en adelante, utilizaremos la notación  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\nu}$  como vectores. Además definimos la función de costo  $c : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de la misma manera que en la Figura 1.1. Con esto se formula el problema de transporte óptimo.

$$\min_{P \in U(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})} \langle C, P \rangle := \sum_{i,j} C_{i,j} P_{i,j}$$

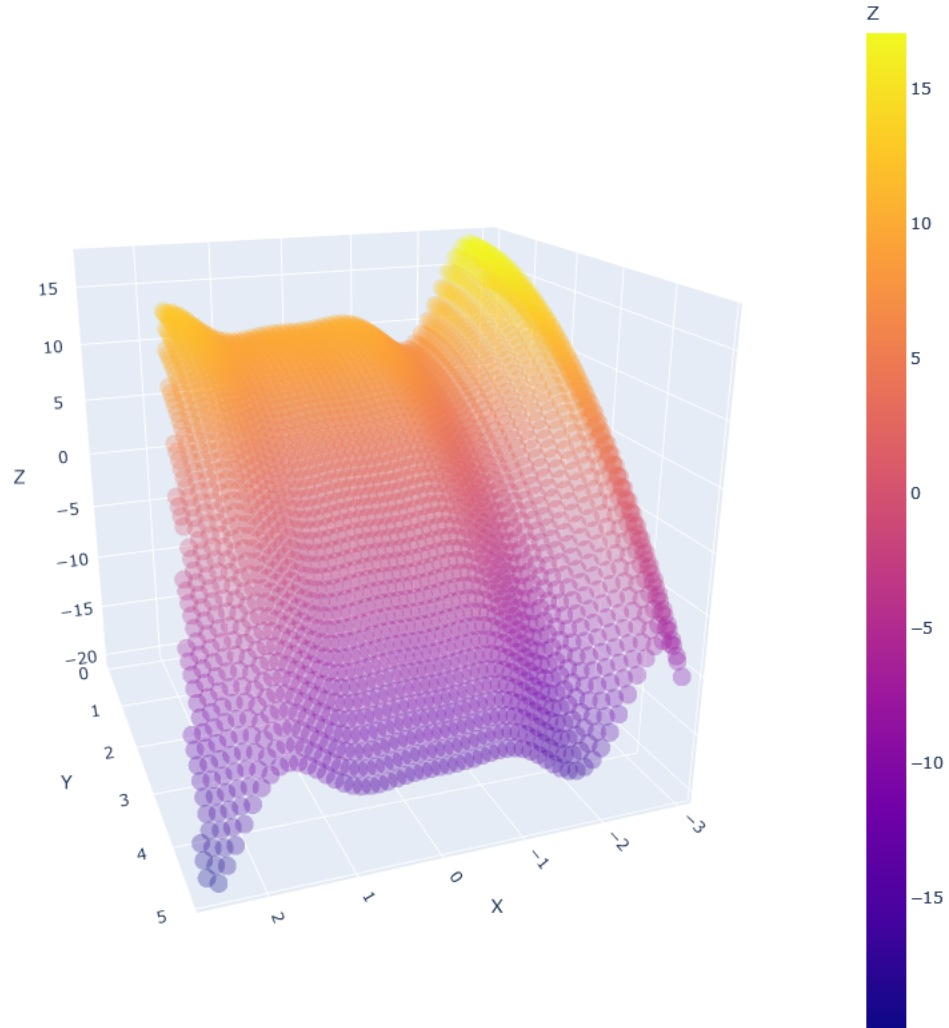
Donde  $U(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) := \{P \in \mathbb{R}^{n \times m} : P \mathbf{1}_m = \tilde{\mu} \quad P^T \mathbf{1}_n = \tilde{\nu}\}$ . Con esto según nuestra notación, nuestro plan de transporte pasaría ser una matriz de tamaño  $n, m$ . Veamos que el problema dual asociado a este problema se escribe de la siguiente manera

$$\max_{(p,q) \in R(C)} \langle p, \tilde{\mu} \rangle - \langle q, \tilde{\nu} \rangle$$

Donde  $R(C) := \{(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \forall (i, j) \in [[n]] \times [[m]], p \oplus -q \leq C\}$ . Así la condición de competitividad se aplica para cada entrada  $C_{i,j}$  de la matriz de costos  $C$ . Dicho esto, nuestra implementación buscará conseguir el par  $(p, q)$  de vectores los cuales dado que se tiene que la solución óptima toma valores 0 ó 1 en cada entrada, utilizaremos el método Branch and Bound, el cual se utiliza a través de la librería de Python Pulp. Con esto se realizaron las siguientes simulaciones:

1. En esta implementación tomamos el espacio  $E := [-3, 3] \times [0, 5]$ . Nuestra multifunción  $\Gamma$  que nos genera el preorden viene dado por  $\Gamma((\bar{x}, \bar{y})) = \{(x, y) \in E : 5|x - \bar{x}| + \bar{y} \leq y\}$ , y la función de beneficio neto viene dada por  $g((x, y)) = -x^2 \sin(3x) - y^2 + 10$ . Con esto, se realizó un mallado del espacio uniforme con tamaño de paso  $h = 0.1$ . Así, se

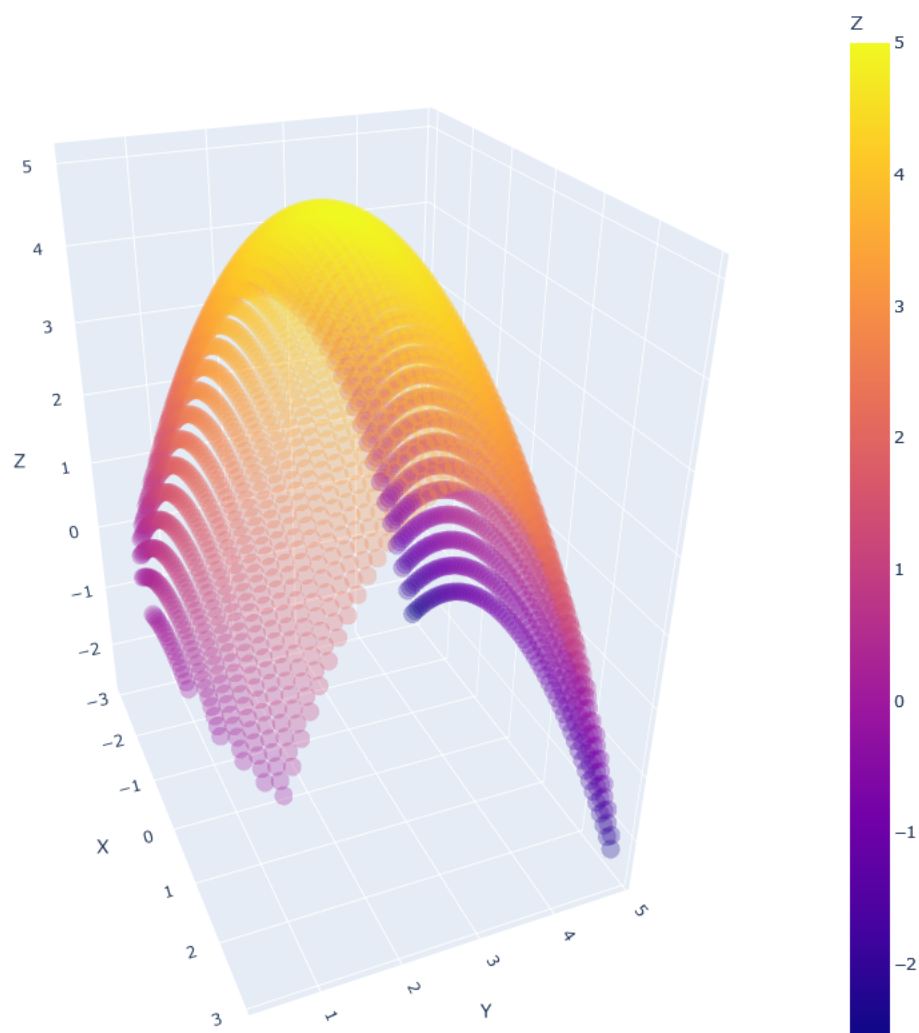
obtiene el siguiente pozo óptimo,



**Figura 3.1.** Gráfica de pozo óptimo de  $\mathbb{R}^2$  con altura dada por su valor en la función beneficio neto  $g$ .

En esta implementación se puede ver que la extracción cubre casi todo el espacio  $E$  menos una esquina cuyo valor no valía la pena extraer por su costo en la función de beneficio neto. El valor de la extracción óptima de este pozo es de 5.94996472.

2. En esta implementación nuestro espacio  $E := [-3, 3] \times [0, 5]$ ,  $\Gamma((\bar{x}, \bar{y})) = \{(x, y) \in E : 5|x - \bar{x}| + \bar{y} \leq y\}$  y  $g((x, y)) = -0.2x^2 - (y - 2.5)^2 + 5$ , con un tamaño de paso  $h = 0.1$ . Con esto se genera el siguiente pozo óptimo:



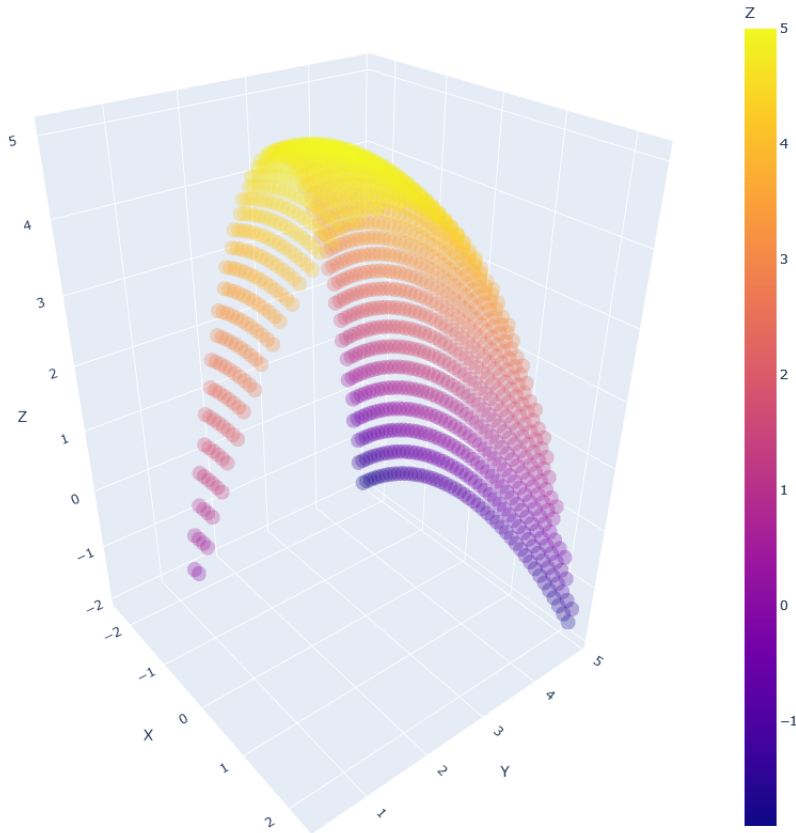
**Figura 3.2.** Gráfica del pozo óptimo de  $\mathbb{R}^2$  con altura dada por su valor en la función beneficio neto  $g$ .

En esta implementación se ve que se extrae casi todo el espacio  $E$  disponible, menos un subconjunto cercano al eje  $X$  donde el valor de la función beneficio neto ya era negativa. Otra cosa que se puede observar es que dada la implementación de este problema a priori no se ve una estructura de pozo dada por la función  $\Gamma$ , esto debido a que los puntos fuera de la frontera de  $E$  no se consideran en el problema de optimización. Es por esto que idealmente para generar una estructura de pozo se recomienda agregar algún tipo de penalización a la función  $g$  en la frontera del conjunto  $E$  de tal manera que se respete la estructura de pozo.

3. En esta implementación agregamos la penalización anteriormente mencionada, modificando así la función de beneficio neto a

$$g((x, y)) = \begin{cases} -0.2x^2 - (y - 2.5)^2 + 5 & \text{si } x \leq 2.4 \\ -100 & \text{si } x > 2.4 \end{cases}$$

Con esta modificación de la función, se mantienen los mismos parámetros que la implementación anterior y se consigue el siguiente pozo óptimo:



**Figura 3.3.** Gráfica del pozo óptimo con penalización en la frontera de  $E$  para la imposición de la estructura de pozo.

En este resultado podemos claramente ver que se mantiene la estructura de pozo y que es eficaz la penalización sobre la función  $g$  sobre la frontera para este objetivo.

### 3.2. Problema restringido

En esta sección realizaremos una implementación numérica para el caso donde tenemos una restricción sobre nuestra variable  $q$ , la cual representa el material no beneficioso extraído, esto debido a que se asegura la existencia de un pozo y además dada nuestra implementación podemos asegurar la optimalidad de este pozo en cuestión debido a la discretización.

Sean  $E \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto compacto con la función beneficio neto  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos los espacios de medida  $(X, \mu), (\tilde{X}, \tilde{\mu})$  y  $(Y, \nu), (\tilde{Y}, \tilde{\nu})$  y la matriz de costo  $C$  dada por la función de costo  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de la misma manera que en la sección anterior. Definiremos el siguiente problema

$$\max_{(p,q) \in R_k(C)} \langle p, \tilde{\mu} \rangle - \langle q, \tilde{\nu} \rangle \quad (\text{D-Cqn})$$

donde

$$R_k(C) := \{(p, q) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^m : \forall (i, j) \in [[n]] \times [[m]], p \oplus -q \leq C \wedge h^2 \sum_{i=1}^m q_i \leq k\}$$

Lo cual equivaldría a una discretización del problema (D-Cq).

Con esto, veamos que el problema discretizado del problema de pozo se puede escribir de la siguiente manera.

$$\max \sum_{x \in F} h^2 g(x) \quad (\text{P-Cqn})$$

$$\text{s.a } F \in S(\tilde{E})$$

$$\sum_{x \in F} h^2 \leq k$$

Donde  $S(\tilde{E})$  se define como el conjunto de pozos dados por el preorden  $\succsim_\Gamma$  en el espacio discretizado  $\tilde{E}$ .

**Observación 3.2.1.** *Veamos que efectivamente la estructura de la solución de (D-Cqn) es de la forma de una  $c$ -conjugada, esto debido a que análogamente que el problema (D-Cq), la restricción de capacidad que se impone, no afecta a la restricción de competitividad. Así,*

se consigue que la solución de este problema viene con la siguiente estructura

$$\begin{aligned} p^{\bar{c}}(y) &= \text{máx}\{0, \sup_{x:y \in \Gamma(x)} p(x)\} \quad y \in \tilde{E}^-, \\ p^{\bar{c}}(w) &= \text{máx}\{0, \sup_{x \in E^+} p(x) - 1\}, \\ q^c(x) &= \text{mín}\{1, \inf_{y \in \Gamma(x)} q(y)\} \quad x \in \tilde{E}^+, \\ q^c(\alpha) &= \text{mín}\{0, \inf_{y \in \tilde{E}^-} q(y)\}. \end{aligned}$$

Con esta estructura, se consigue análogamente a la demostración de la proposición 2.2.3 el siguiente resultado

**Proposición 3.2.1.** Sean  $(p, q)$  solución de (D-Cqn), entonces para  $y'', y' \in \tilde{E}^-$  y  $x'', x' \in \tilde{E}^+$  se cumple que

$$y'' \succsim_{\Gamma} y' \succsim_{\Gamma} x' \succsim_{\Gamma} x'' \Rightarrow q(y'') \geq q(y') \geq p(x') \geq p(x'').$$

Así, con este resultado, se puede enunciar el siguiente teorema que genera la conexión entre los problemas (D-Cqn) y (P-Cqn).

**Teorema 3.2.1.** Para la solución  $(p, q)$  del problema (D-Cqn) el conjunto

$$F := \{x \in \tilde{E}^+ : p(x) = 1\} \cup \{y \in \tilde{E}^- : q(y) = 1\},$$

es un pozo, y efectivamente es óptimo, por lo que los problemas (D-Cqn) y (P-Cqn) coinciden, es decir  $\text{máx}(D-Cqn) = \text{máx}(P-Cqn)$

**Demostración:**

La demostración en este caso es más sencilla que en el caso continuo, debido a que  $(p, q)$  toma valores 1 o 0, por lo que dada la proposición anterior, se tiene que  $F$  efectivamente es un pozo, y por lo tanto

$$J(p, q) = \langle p, \mu \rangle - \langle q, \nu \rangle = \sum_{x \in F^+} h^2 g(x) - \sum_{y \in F^-} h^2 g(y) = \sum_{x \in F} g(x) h^2$$

Esto debido a que en todo punto donde  $p$  y  $q$  no sean 1, toman el valor 0. Con esto, se consigue que

$$J(p, q) = \sum_{x \in F} g(x) h^2 \leq \text{máx}(P-Cqn)$$

Pero además, si tomamos un pozo  $G \in S(\tilde{E})$ , este se puede representar con un par de

funciones (vectores)  $(p_G, q_G)$  como

$$p_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{si } x \notin G \end{cases} \quad q_G(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in G \\ 0 & \text{si } y \notin G \end{cases}$$

Con esto se tiene que  $J(p_G, q_G) = \sum_{x \in G} h^2 g(x)$ , por lo que para los pozos  $G$  que cumplan la restricción de capacidad, es decir  $\sum_{x \in G^-} h^2 \leq k$ , se cumple que

$$k \geq h^2 \sum_{x \in G^-} q_G(x) = \sum_{x \in G^-} h^2$$

Por lo que todo pozo factible del problema (P-Cqn) se puede representar por un par  $(p, q)$  del problema (D-Cqn). Es decir

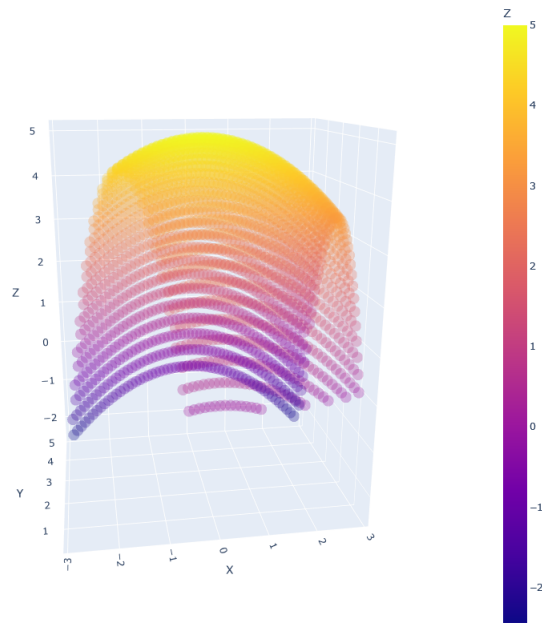
$$\text{máx (P-Cqn)} \leq \text{máx (D-Cqn)}$$

Con esto se consigue que ambos problemas coinciden, y por lo tanto  $F$  es un pozo óptimo.

### 3.2.1. Implementación numérica

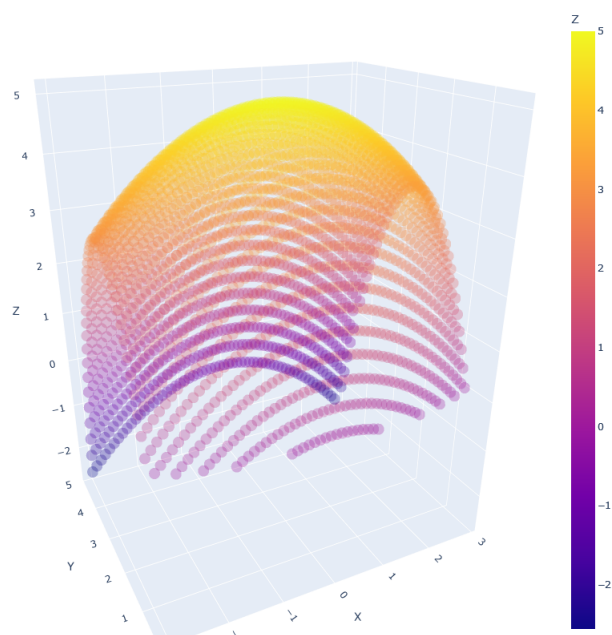
En la implementación numérica de este problema no dista mucho de la del problema irrestricto, sólo se agrega una nueva restricción de capacidad. Dentro de la simulación que se realizó, se encuentra lo siguiente:

1. En esta implementación tomamos el espacio  $E := [-3, 3] \times [0, 5]$ . Nuestra multifunción que nos genera el preorden viene dada por  $\Gamma((\bar{x}, \bar{y})) := \{(x, y) \in E : 2|\bar{x} - x| + \bar{y} \leq y\}$ . Y la función de beneficio neto viene dada por  $g(x, y) = -0.2x^2 - (y - 2.5)^2 + 5$ , con el parámetro de capacidad  $k = 2$ . Con esto, se realizó un mallado del espacio uniforme con tamaño de paso  $h = 0.1$ . Así se obtiene el siguiente pozo:



**Figura 3.4.** Gráfica de pozo óptimo con restricción de capacidad en  $\mathbb{R}^2$  con altura dada por su función en la función beneficio neto  $g$ .

Por otro lado, realizando la comparativa con el pozo óptimo dado por la misma instancia pero sin restricción de capacidad viene a tomar la siguiente forma



**Figura 3.5.** Gráfica de pozo óptimo sin restricción de capacidad en  $\mathbb{R}^2$  con altura dada por su función beneficio neto  $g$ .

Comparativamente se puede ver como la restricción de capacidad afecta a un trozo de la superficie, pero sigue manteniendo la forma de pozo impuesta por la multifunción  $\Gamma$ .

# CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

### 4.1. Conclusiones

Dentro de esta tesis hemos presentado un modelo de transporte óptimo para un problema de extracción y las herramientas para poder expandir el modelo y hacerlo más realista, consiguiendo una restricción ecológica de capacidad para los desechos, la cual funciona de forma numérica.

En el capítulo 2 hemos desarrollado dos modelos, los cuales agregan restricciones de capacidad para nuestro problema de extracción, así de esta manera, conseguimos sus condiciones de optimalidad y caracterizamos un pozo. Algo que se puede observar en estos modelos es que si el parámetro  $K$  es más grande que el volumen del dominio  $E$ , la restricción de capacidad no se activa y se vuelve al mismo modelo original.

En el capítulo 3 implementamos dos modelos numéricamente en Python, el modelo de [Ekeland and Queyranne, 2015], y el presentado en este trabajo en la Sección 2.2.2, consiguiendo la optimalidad de nuestro modelo a través de la discretización del espacio.

## 4.2. Problemas Abiertos

### 4.2.1. Extracción de varias etapas

La extracción de varias etapas se caracteriza por tener varias funciones beneficio/costo  $g_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ , así, un caso sencillo a analizar es cuando se tienen dos de estas, con lo que se consigue el siguiente problema de extracción

$$\begin{aligned} & \text{máx} \int_F g_1(z) dz + \int_G g_2(z) dz \\ \text{s.a} \quad & E_1 = E \setminus F \\ & F \in S(E) \\ & G \in S(E_1). \end{aligned}$$

Por lo que surge la pregunta,

**P1:** ¿Cómo podemos modelar esta extracción de varias etapas utilizando transporte óptimo?

Dentro de la literatura existe el transporte óptimo multimarginal, por lo que quizás la respuesta a este problema puede surgir desde este esquema.

### 4.2.2. Optimalidad del pozo con restricción de capacidad

Dentro del trabajo realizado se puede ver que a través de la discretización del espacio se consigue la optimalidad del pozo, por lo que surge la pregunta

**P2:** ¿Es posible conseguir la optimalidad de pozo a través del esquema de transporte óptimo con las restricciones de capacidad?

La respuesta de esta pregunta puede ir a través de la restricción que se realizó en el Capítulo 3, donde se restringen los valores de  $p(x)$  y  $q(y)$  a 0 ó 1. Es posible que al conseguir el problema dual con esta nueva restricción se pierda alguna característica, pero al menos pasando al límite el problema discretizado esta sugiere ser la vía para responder esta pregunta.

---

---

# ANEXOS

## Anexo de pseudocódigos de implementaciones numéricas

Los siguientes pseudocódigos representan la implementación numérica utilizada en este trabajo. En caso de que se busque realizar la implementación numérica, simplemente no agregar la restricción de capacidad.

---

**Algoritmo 1** Calcular pozo óptimo con restricción de capacidad  $F \subseteq E$

---

**Require:**  $h > 0, g(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, a, b, K \in \mathbb{R}, \Gamma : E \rightrightarrows E$

```
1:  $E \leftarrow [a : b : h, a : b : h]$  ▷ Create the arrays for E,X,Y
2:  $X \leftarrow$  empty array
3:  $Y \leftarrow$  empty array
4: for  $x \in E$  do
5:   if  $g(x) > 0$  then
6:     Append x to X
7:   end if
8:   if  $g(x) < 0$  then
9:     Append x to Y
10:  end if
11: end for
12:  $c \leftarrow$  array of  $\text{len}(X) \times \text{len}(Y)$  full of  $+\infty$  ▷ Create the matrix C for the transport
13:  $i \leftarrow 0$ 
14: for  $x \in X$  do
15:    $j \leftarrow 0$ 
16:   for  $y \in Y$  do
17:     if  $y \in \Gamma(x)$  then
18:        $c[i, j] \leftarrow 0$ 
19:     end if
20:      $j \leftarrow j + 1$ 
21:   end for
```

---

```
22:    $i \leftarrow i + 1$ 
23: end for
24:  $\mu \leftarrow$  array of  $\text{len}(X)+1$ 
25:  $\nu \leftarrow$  array of  $\text{len}(Y)+1$ 
26:  $i \leftarrow 0$ 
27: for  $x \in X$  do
28:    $\mu[i] \leftarrow h^2g(x)$ 
29:    $i \leftarrow i + 1$ 
30: end for
31:  $j \leftarrow 0$ 
32: for  $y \in Y$  do
33:    $\nu[j] \leftarrow h^2|g(x)|$ 
34: end for
35:  $\alpha \leftarrow \text{sum}(\nu)$ 
36:  $w \leftarrow \text{sum}(\mu)$ 
37:  $\mu[i + 1] \leftarrow \alpha$ 
38:  $\nu[j + 1] \leftarrow w$ 
39:  $X[i + 1] \leftarrow \text{"alpha"}$ 
40:  $Y[j + 1] \leftarrow \text{"w"}$ 
41: Solve the LP problem  $\max_{p,q} p \cdot \mu - q \cdot \nu$  with constraints  $p[i] - q[j] \leq c[i, j]$  and
    $\sum_j h^2q[j] \leq K$ 
```

---

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [Alvarez et al., 2011] Alvarez, F., Amaya, J., Griewank, A., and Strogies, N. (2011). A continuous framework for open pit mine planning. *Mathematical methods of operations research*, 73(1):29–54.
- [Amaya et al., 2021] Amaya, J., Hermosilla, C., and Molina, E. (2021). Optimality conditions for the continuous model of the final open pit problem. *Optimization Letters*, 15(3):991–1007.
- [Boland et al., 2006] Boland, N., Fricke, C., and Froyland, G. (2006). A strengthened formulation for the open pit mine production scheduled problem. *Preprint, University of Melbourne, Parkville, VIC*, 3010.
- [Caccetta, 2007] Caccetta, L. (2007). Application of optimisation techniques in open pit mining. In *Handbook of operations research in natural resources*, pages 547–559. Springer.
- [Caccetta and Hill, 2003] Caccetta, L. and Hill, S. P. (2003). An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of global optimization*, 27(2):349–365.
- [Ekeland and Queyranne, 2015] Ekeland, I. and Queyranne, M. (2015). Optimal pits and optimal transportation. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(6):1659–1670.
- [Hochbaum and Chen, 2000] Hochbaum, D. S. and Chen, A. (2000). Performance analysis and best implementations of old and new algorithms for the open-pit mining problem. *Operations Research*, 48(6):894–914.
- [Pass, 2015] Pass, B. (2015). Multi-marginal optimal transport: theory and applications. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(6):1771–1790.
- [Pennanen and Perkkiö, 2019] Pennanen, T. and Perkkiö, A.-P. (2019). Convex duality in nonlinear optimal transport. *Journal of Functional Analysis*, 277(4):1029–1060.
- [Peyre and Cuturi, 2019] Peyre, G. and Cuturi, M. (2019). Computational optimal transport. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 11(5-6):355–607.

- [Santambrogio, 2015] Santambrogio, F. (2015). *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Springer International Publishing.
- [Villani, 2008] Villani, C. (2008). *Optimal transport: old and new*, volume 338. Springer Science & Business Media.