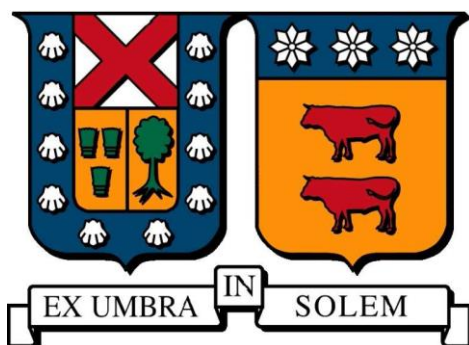


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y AMBIENTAL
VALPARAÍSO-CHILE



**“ESTUDIO DE INCLUSIÓN DE INFORMACIÓN
PROBABILÍSTICA EN LA OPTIMIZACIÓN EN
TIEMPO REAL DE PROCESOS”**

RODRIGO UNZUETA ARCE

TESIS DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA QUÍMICA

PROFESOR GUÍA: **DR. DANIEL NAVIA LÓPEZ**
PROFESOR CORREFERENTE: **DR. LUIS BERGH OLIVARES**
PROFESOR CORREFERENTE: **DR. LUIS BRICEÑO ARIAS**
PROFESOR CORREFERENTE EXTERNO: **DR. FELIPE DÍAZ ALVARADO**

DICIEMBRE 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Jaime y Vicky, por el apoyo constante e incondicional y su afecto en cada momento de mi vida. Sin ustedes, esto no habría sido posible.

A mis hermanos, aún a la distancia siempre estuvieron ahí para ayudar en lo que necesité.

A Daniel Navia, por su paciencia, apoyo y guía en este último año.

A Iván Cornejo, por su constante apoyo, aún a la distancia.

A mis amigos de la vida, por todos los buenos momentos que compartimos y que quedan por compartir.

A mis amigos de Chile y a las personas que conocí en este país, por haberme dado un hogar lejos de mi casa.

A los trabajadores de la universidad en general, por brindarnos el apoyo para desarrollar nuestras actividades de la mejor forma.

A la Universidad Técnica Federico Santa María y al Departamento de Ingeniería Química y Ambiental, por permitir el desarrollo de este trabajo.

A CONICYT por el financiamiento del proyecto FONDECYT DE INICIACIÓN N° 11160203 “Including Stochastic information in Real Time Optimization for Process Supervision”

Finalmente, me gustaría agradecer a todas las personas que por una u otra razón formaron parte de mi vida universitaria.

A mis padres, Jaime y Vicky.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo presentar un marco teórico para incluir información de variables con comportamiento estocástico en la optimización de procesos en tiempo real (*RTO*) con adaptación de modificadores (*MA*), asegurando la factibilidad de la operación con un nivel de certeza dado. En todo proceso existen de manera intrínseca incertidumbres asociadas al comportamiento aleatorio de variables involucradas y al entendimiento parcial de ciertos fenómenos. Incertezas de modelo, proceso y mercado, como el uso de modelos imperfectos, variables de perturbación y condiciones inciertas de la economía del proceso están siempre presentes y dificultan la tarea del sistema de control y optimización. El manejo de estas incertidumbres será fundamental para implementar un sistema de optimización capaz de alcanzar una condición que cumpla con las especificaciones y apunte a maximizar el beneficio económico del proceso.

La metodología propuesta se implementó en dos ejemplos: En simulación en un problema convexo de referencia y experimentalmente en un circuito de flotación *rougher* a escala laboratorio, con objetivo de aumentar la eficiencia, en términos económicos y de satisfacción de restricciones. La inclusión de información estocástica de tipo exógena permitió al sistema llegar a un punto óptimo de operación, con una mejora sustancial en la satisfacción de las restricciones del problema. Sin embargo, se observó una disminución en el beneficio económico, en comparación con una solución de optimización determinista. Se apreció una reducción del beneficio en cerca de un 2%, mientras que el cumplimiento de las restricciones aumentó de un 50 % a un 98 % al incluir la información probabilística para aquellas restricciones con efecto exógeno de variables estocásticas. Adicionalmente, se evaluó el desempeño del algoritmo al incluir perturbaciones en la alimentación, en cuyo caso la capa de optimización no pudo detectar el óptimo del proceso. La rápida variación de la variable de alimentación, en comparación a los largos tiempos de estabilización del sistema, implicó una mala

estimación de gradientes, producto de lo cual la operación no convergió a un punto óptimo.

Incluir información probabilística de variables inciertas, permitió aumentar considerablemente la satisfacción de las restricciones, a costa de una disminución en el beneficio obtenido. Este tipo de solución será de importancia cuando el no cumplimiento de las restricciones conlleve a multas o a mayores costos de reprocesamiento, por ejemplo, en el no cumplimiento de calidad o cantidad de producto. Se recomienda investigar otras metodologías que incorporen explícitamente las variables de perturbación, para mejorar la convergencia del proceso bajo perturbaciones.

ABSTRACT

This work aims to present a theoretical framework to include information of variables with stochastic behavior in real-time optimization (RTO) with modifier adaptation (MA), ensuring the feasibility of the operation with a given level of certainty. In every process, there are uncertainties intrinsically associated with the random behavior of variables involved and the partial understanding of certain phenomena. Model, process and market uncertainties, such as the use of imperfect models, disturbance variables and uncertain conditions of the process economy, are always present and make difficult the task of the control and optimization system. The management of these uncertainties will be fundamental to implement an optimization system capable of reaching a condition that meets the specifications and aims to maximize the economic benefit of the process.

The proposed methodology was implemented in two examples: In simulation in a convex benchmark problem and experimentally, and at a laboratory scale rougher flotation circuit, aiming to increase economic efficiency and constraint feasibility. The inclusion of exogenous stochastic information allowed the system to reach an optimal point of operation, with a substantial improvement in the satisfaction of the problem constraints. However, a decrease in economic profit was observed compared to a deterministic optimization solution. A reduction in profit was observed in about 2%, while the restrictions satisfaction increased from 50% to 98% by including the probabilistic information for those restrictions with exogenous effect of stochastic variables. Additionally, the performance of the algorithm was evaluated by including disturbances in feed variables. The optimization layer presented poor performance by including perturbations in the process. The fast variation of the feed variable compared to the long stabilization times of the system implied a poor estimation of gradients, product of which the operation did not converge to an optimum point.

Including probabilistic information of uncertain variables allowed to increase considerably the satisfaction of the restrictions, with the cost of decreasing in the obtained profit. This type of solution will be of importance when non-compliance with

the restrictions leads to finer or higher costs of reprocessing, for example, non-compliance with quality or quantity of product. It is recommended to investigate other methodologies that explicitly incorporate the perturbation variables, to improve the convergence of the process under perturbations.

ÍNDICE DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	i
RESUMEN.....	iii
ABSTRACT	v
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
ÍNDICE DE TABLAS	xiii
1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	1
1.1. Control y optimización de procesos	2
1.2. Fundamentos del proceso de flotación	6
1.3. Supervisión y control de circuitos de flotación	9
1.3.1. Variables relevantes en el control de la flotación	10
1.3.2. Instrumentación y nivel base de control.....	10
1.3.3. Controles avanzados y optimización en flotación.....	13
1.4. Definición de la problemática	15
1.5. Hipótesis.....	16
1.6. Objetivos	16
1.6.1. Objetivo general	16
1.6.2. Objetivos específicos	16
2. SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN EN TIEMPO REAL (RTO).....	17
2.1. Incertezas de modelo	19
2.1.1. Métodos de estimación de gradientes	23
2.2. Incertezas de proceso o mercado.....	28
2.3. Metodología propuesta: Optimización estocástica en tiempo real (sRTO) con adaptación de modificadores	32
2.4. Ejemplo de aplicación sRTO con MA: Problema convexo de referencia....	35
2.5. Ejemplo de aplicación sRTO con MA: Circuito rougher de flotación.....	37
2.5.1. Definición de modelo.....	37
2.5.2. Inclusión de incerteza de modelo.....	45
2.5.3. Condiciones de operación y límite de variables de decisión.....	46
2.5.4. Función objetivo	47

2.5.5. Restricciones	50
3. INSTALACIÓN EXPERIMENTAL.....	53
3.1. Equipos experimentales.....	53
3.2. Lógica de control.....	56
3.3. Sistema SCADA.....	58
3.4. Simulador metalúrgico	63
3.4.1. Ajuste de modelo y análisis de sensibilidad.....	63
3.4.2. Lógica del simulador metalúrgico.....	65
3.4.3. Perturbaciones de alimentación.....	67
3.5. Detector de estado estacionario y filtro de datos.....	68
3.6. Algoritmo implementado	69
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	71
4.1. Puntos óptimos	71
4.2. Resultados en simulación	78
4.3. Sistema en línea sin perturbaciones.....	88
4.3.1. Modelo optimista	89
4.3.2. Modelo pesimista	93
4.4. Sistema en línea bajo perturbaciones	97
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	103
PRODUCCIÓN CIENTÍFICA	105
REFERENCIAS	106
ANEXOS	109
Anexo A. Parámetros del modelo	109
Anexo B. Equipos e instrumentos de laboratorio.....	110
Anexo C. Lógica de control	115
Anexo D. Sensibilidad del modelo metalúrgico	116
Anexo E. Código en Matlab®.....	120

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Elementos del lazo de control.....	2
Figura 1.2. Control retroalimentado.....	3
Figura 1.3. Estructura del control jerárquico	4
Figura 1.4. Esquema del proceso de flotación en una celda autoaspirante	6
Figura 1.5. Esquema conceptual del proceso de flotación	7
Figura 1.6. Circuito RCS de flotación.....	8
Figura 1.7. Niveles de jerarquía en el sistema de control en flotación	9
Figura 1.8. Sistemas de medición de profundidad de espuma basado en flotador y sensor ultrasónico.....	11
Figura 1.9. Medidores de flujo, A) sensor térmico de flujo másico de gas, B) Tuvo venturi con medidor de diferencia de presión y C) tuvo pitot. D) Medidor de flujo de área variable o rotámetro.....	12
Figura 2.1. Optimización bajo incertezas.....	19
Figura 2.2. RTO de dos etapas.....	20
Figura 2.3. RTO con adaptación de modificadores.....	23
Figura 2.4. Ejemplo de aplicación de diferencias finitas.	24
Figura 2.5. RTO anidada.....	28
Figura 2.6. Ejemplo de adaptación de modificadores incluyendo información estocástica. Línea discontinua y línea punteada alrededor de la restricción del proceso representan una y dos desviaciones estándar de ξ , respectivamente.....	36
Figura 2.7. Proyección precio de concentrado en función de ley.	49
Figura 3.1. Especificación de las dimensiones de la celda de flotación.	53
Figura 3.2. Circuito rougher de flotación de laboratorio.	55
Figura 3.3. Ventana principal de la HMI.	59
Figura 3.4. Ventana de control.....	60
Figura 3.5. Ventana de mantención.....	61
Figura 3.6. Ventana del simulador metalúrgico.....	62
Figura 3.7. Lógica del simulador metalúrgico.	66

Figura 3.8. Señal de ley de cobre en la alimentación.....	67
Figura 3.9. Rutina Matlab®, algoritmo implementado.	70
Figura 4.1. Optimización del modelo optimista.....	72
Figura 4.2. Optimización del modelo pesimista.....	72
Figura 4.3. Optimización del proceso.	74
Figura 4.4. Optimización del proceso, incluyendo información estocástica.....	75
Figura 4.5. Función de costo y restricción de recuperación en 2 dimensiones.	76
Figura 4.6. Casos de ξ para simulación y probabilidad de cumplimiento al 97%.	77
Figura 4.7. Simulación de optimización con diferencias finitas, función de costo.....	79
Figura 4.8. Simulación, evolución de puntos de operación en RTO con diferencias finitas.....	80
Figura 4.9. Simulación, evolución de puntos de operación en sRTO con diferencias finitas.....	80
Figura 4.10. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización con diferencias finitas.	81
Figura 4.11. Simulación de optimización libre de derivadas, función de costo.....	82
Figura 4.12. Simulación, evolución de puntos de operación en RTO con optimización libre de derivadas.	82
Figura 4.13. Simulación, evolución de puntos de operación en sRTO con optimización libre de derivadas.	83
Figura 4.14. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización libre de derivadas.....	83
Figura 4.15. Simulación de optimización anidada, función de costo.....	84
Figura 4.16. Simulación, evolución de puntos de operación en RTO anidada.	85
Figura 4.17. Simulación, evolución de puntos de operación en sRTO anidada.....	86
Figura 4.18. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización anidada.	86
Figura 4.19. Comparación de evaluaciones necesarias por método de optimización.	87
Figura 4.20. Corrida experimental con diferencias finitas, variables de decisión.	88

Figura 4.21. Corrida experimental con optimización libre de derivadas, variables de decisión.	89
Figura 4.22. Evolución de la función de costo en línea con diferencias finitas y modelo 1.....	90
Figura 4.23. Evolución de restricciones en línea, con diferencias finitas y modelo 1.....	91
Figura 4.24. Evolución de la función de costo en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 1.....	92
Figura 4.25. Evolución de restricciones en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 1.....	92
Figura 4.26. Evolución de la función de costo en línea, con diferencias finitas y modelo 2.....	94
Figura 4.27. Evolución de restricciones en línea, con diferencias finitas y modelo 2.....	95
Figura 4.28. Evolución de la función de costo en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 2.....	95
Figura 4.29. Evolución de restricciones en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 2.....	96
Figura 4.30. Evolución de valores de consigna en sistema bajo perturbaciones usando diferencias finitas.....	97
Figura 4.31. Evolución de la función de costo en sistema bajo perturbaciones usando diferencias finitas.....	98
Figura 4.32. Evolución de valores de consigna en sistema bajo perturbaciones usando optimización libre de derivadas.	99
Figura 4.33. Evolución de la función de costo en sistema bajo perturbaciones usando optimización libre de derivadas.	100
Figura B.1. PLC GE Fanuc serie 90-30.	110
Figura B.2. Bomba peristáltica Masterflex.	111
Figura B.3. Transductores I/P Fairchild®.....	111
Figura B.4. Válvula reguladora de flujo SAMSON.....	112
Figura B.5. Rotámetro marca Parker.....	112

Figura B.6. Agitador mecánico IKA.	113
Figura B.7. Computador marca Gear [®] utilizado.	113
Figura B.8. Cámaras web LifeCam Studio Full HD (izquierda) y Cinema (derecha).	114
Figura C.1. Lógica de control programada en Proficy Machine Edition.	115
Figura D.1. Sensibilidad a la profundidad de espuma.	116
Figura D.2. Recuperación acumulada por celda, profundidad de espuma.	116
Figura D.3. Sensibilidad a la velocidad superficial de gas.	117
Figura D.4. Ley de concentrado por celda, velocidad superficial e gas.	117
Figura D.5. Sensibilidad al porcentaje de sólidos.	118
Figura D.6. Recuperación acumulada por celda, porcentaje de sólidos.	118
Figura D.7. Sensibilidad al porcentaje de sólidos.	119
Figura D.8. Recuperación acumulada por celda, porcentaje de sólidos.	119

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Valores de los parámetros, promedio y desviación estándar de la variable estocástica.	35
Tabla 2.2. Puntos relevantes y su evaluación en el ejemplo de proceso.	37
Tabla 2.3. Calificación por clase de tamaño.	38
Tabla 2.4. Valores fijos de variables operacionales.	47
Tabla 2.5. Límites de operación de las variables de operación.	47
Tabla 3.1. Especificación de la celda rougher piloto.	54
Tabla 3.2. Detalle de instrumentos.	56
Tabla 3.3. Lista de variables.	57
Tabla 3.4. Parámetros de control de profundidad de espuma.	57
Tabla 3.5. Valores de variable en análisis de sensibilidad.	63
Tabla 4.1. Puntos de operación óptimos [cm] de los modelos 1 y 2. Ley, recuperación y beneficio predichos por los modelos.	73
Tabla 4.2. Evaluación de puntos óptimos de los modelos en el proceso.	73
Tabla 4.3. Punto de operación óptimo [cm], resultados metalúrgicos y económicos del proceso.	74
Tabla 4.4. Punto de operación óptimo [cm], resultados metalúrgicos y económicos del proceso, con restricción estricta.	75
Tabla 4.5. Porcentaje de satisfacción de demanda, ante simulación de escenarios.	77
Tabla A.1. Parámetros de la distribución granulométrica.	109
Tabla A.2. Parámetros modelo de flotación.	109
Tabla B.1. Características del computador.	114

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La optimización es una poderosa herramienta que puede brindar ventajas comparativas en la industria de procesos al maximizar el beneficio esperado usando eficientemente los recursos disponibles. Sin embargo, existen en la práctica múltiples fuentes de incertidumbre que dificultan la tarea del sistema de optimización, como son el uso de modelos imprecisos (incerteza de modelo) y el comportamiento aleatorio de variables involucradas en el proceso (incertezas de proceso o mercado). Independientemente de la aplicación, el tratamiento de las distintas fuentes de incertezas es fundamental si se desea obtener soluciones aplicables. Existen en literatura metodologías de optimización que tratan por separado diferentes fuentes de incerteza. Por ejemplo, la optimización en tiempo real (*RTO*) busca alcanzar puntos de operación óptimos aun cuando se utilizan modelos inexactos. Por otra parte, la optimización estocástica lidia con las incertezas de proceso o mercado al tomar en cuenta el comportamiento aleatorio de variables involucradas. En este trabajo se busca desarrollar una metodología que permita incorporar la información de variables con comportamiento estocástico en la *RTO* con adaptación de modificadores, asegurando la factibilidad en la operación para un nivel de confianza dado, utilizando modelos imperfectos.

La metodología desarrollada es puesta a prueba en dos ejemplos: un problema convexo de referencia y en el circuito *rougher* en el Laboratorio de Control de Procesos del campus San Joaquín, con el objetivo de aumentar la eficiencia de la operación en términos de beneficio económico y satisfacción de restricciones. El proceso de flotación sigue sin ser comprendido completamente y aún permite mejoras sustantivas. Como tal, el control y optimización de procesos, ofrecen una oportunidad de aumentar la eficiencia del proceso, ya sea en términos económicos o de estabilidad de operación. Es importante incorporar técnicas que tomen en cuenta el comportamiento aleatorio de variables involucradas en el proceso, como variables de alimentación o de mercado, para tomar decisiones que apunten a una operación más eficiente. Actualmente, no se tiene conocimiento de aplicaciones que tomen en cuenta este tipo de incertezas en tiempo real.

El presente capítulo aborda los sistemas de control y optimización de procesos, seguido de una reseña respecto a los fundamentos del proceso de flotación, y posteriormente, el sistema de control en flotación, mencionando las variables relevantes, los instrumentos y algunas estrategias de control y optimización utilizadas. Finalizando, se exponen la motivación, hipótesis y objetivos de este trabajo.

1.1. Control y optimización de procesos

Todo proceso debe cumplir con una serie de requerimientos: este debe ser seguro, debe operar o producir según especificaciones, cumplir con regulaciones medioambientales y velar por la economía del mismo. Para cumplir con estos objetivos se debe construir el sistema de control, formado por personas (diseñadores, operadores, entre otros) y equipos (dispositivos de medición, válvulas, controladores, computadores, etc). Para cumplir con los requerimientos, el sistema de control debe ser capaz de reducir la influencia de perturbaciones externas, asegurar la estabilidad del proceso y, si es posible, optimizar el rendimiento del mismo. Pequeños cambios en un proceso pueden tener consecuencias grandes en el resultado final.

En un principio, el control de procesos se llevó a cabo sólo por los operadores, donde el manejo del proceso se basaba en la experiencia acumulada y el criterio del mismo. La evolución y tecnificación de las tecnologías de medición y control dieron origen al control automático. El control automático, como parte del sistema de control, es un conjunto de componentes destinados a regular la conducta de un determinado proceso, sin la intervención humana directa. Los lazos de control, como uno de los elementos más básicos del control automático, constan de tres acciones: medición, comparación y regulación, como se puede observar en la Figura 1.1.

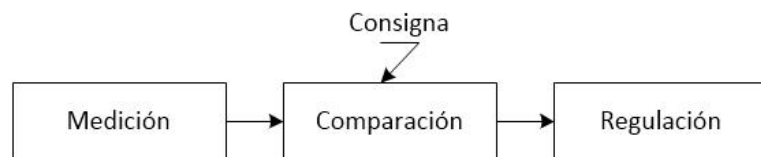


Figura 1.1. Elementos del lazo de control.

La medición implica evaluar el estado de alguna variable del proceso, que se compara con un valor de consiga o *set point* y se manipula un actuador, a modo de regular el

estado de dicha variable. El proceso descrito anteriormente se conoce como control retroalimentado (ver Figura 1.2), y busca mantener el estado de una variable, sopesando perturbaciones externas, usando el actuador como recurso para lograr dicho objetivo.

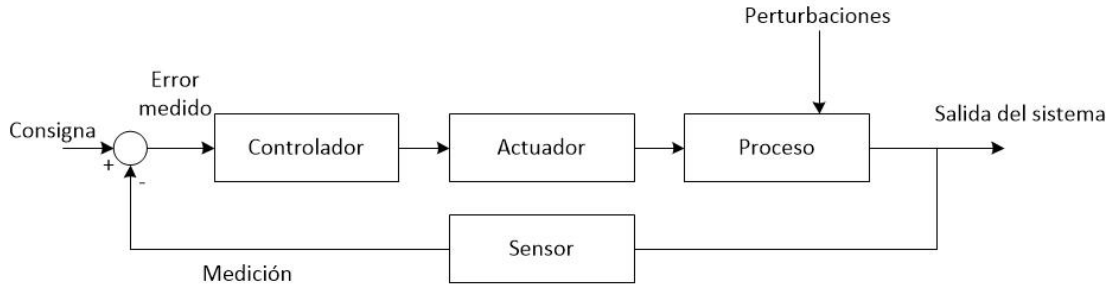


Figura 1.2. Control retroalimentado.

La función de los sistemas de control va más allá de los procesos básicos de monitoreo y regulación. Con el fin de mejorar el desempeño de procesos, se agregan nuevas funciones que descomponen la tarea de control en sub-tareas más sencillas y estructuradas jerárquicamente, conduciendo así a una mayor confiabilidad, facilidad de monitoreo y mantenimiento del sistema de control. Para llegar a una optimización a nivel de planta, se deben cumplir con ciertos objetivos parciales, como mantener la planta en un modo de operación seguro, cumplir demandas de calidad del producto y maximizar el beneficio económico en la producción. Los distintos objetivos son asignados a diferentes capas de la estructura de control. Un orden de la estructura del control jerárquico basado en la escala de tiempo en una planta química moderna se aprecia en la Figura 1.3, que va desde la capa de control regulatorio hasta la programación y planificación, donde la toma de decisiones ocurre en un periodo del orden de los segundos hasta los días o semanas, respectivamente (Navia, 2013).

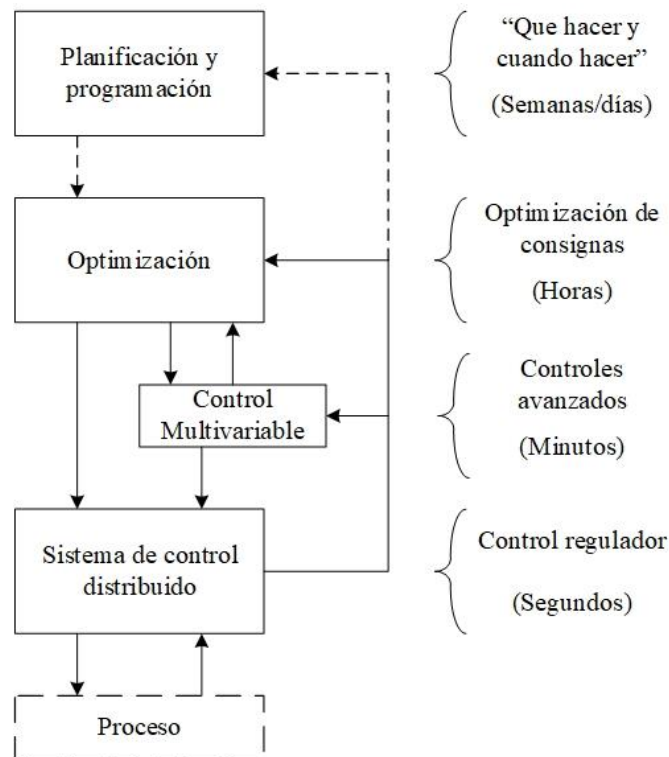


Figura 1.3. Estructura del control jerárquico (Navia, 2013)

Las principales funciones del control jerárquico se distribuyen en las siguientes capas.

Planificación y programación

Se trata de la toma de decisiones de qué hacer y cuándo hacerlo. Se basan en la economía y las previsiones hasta llegar a una programación de eventos que sean factibles. Toma en cuenta los stocks de materias primas e inventarios de productos, y establece el cronograma de la producción. Actualiza de manera intermitente los modelos y las condiciones utilizadas en la siguiente capa con información económica y de mercado.

Optimización

Ejecutada en tiempo real y a diferentes intervalos de tiempo, la capa de optimización tiene el objetivo de calcular el punto óptimo o la trayectoria óptima de operación que será aplicada como consigna en las capas inferiores. Se ocupa de implementar las decisiones de negocio en tiempo real, buscando mejorar algún criterio basado en la

economía del proceso, p. ej. maximizar el beneficio o minimizar los costos asociados a la operación para un volumen de producción dado por la capa de planificación. Trata de una estructura compleja que involucra varios elementos, como la validación de las mediciones, detección de estado estacionario, actualización de modelo y optimización basada en modelo.

Control avanzado

Opera sobre la capa de control regulatorio. Consiste en una serie de algoritmos que buscan mejorar el rendimiento del nivel base del control regulador, cuando el sistema está sujeto a perturbaciones o interacciones fuertes entre variables. Uno de los algoritmos más populares es el control predictivo por modelo (*MPC*), que proporciona control dinámico de la planta minuto a minuto y permite una cierta capacidad de optimización.

Control regulatorio

El objetivo de este control es mantener las variables de proceso en los valores de consigna definidos por el operador, o por las capas más altas de la jerarquía. Suele tener acceso directo al proceso, permitiendo registrar variables de entrada e influenciarlas mediante las acciones de control. Se basa típicamente en controles proporcional-integral-derivativo (PID).

Uno de los principales problemas que presenta la etapa de optimización del sistema de control, es la existencia intrínseca de incertidumbres asociadas al entendimiento parcial de ciertos fenómenos o a comportamientos estocásticos de algunas variables. Las incertezas de mercado, modelo y proceso, asociadas al conocimiento impreciso de la economía, junto con el entendimiento parcial de los fenómenos involucrados y a variaciones o perturbaciones en la operación dificultan la estimación de puntos de operación óptimos. El manejo de estas incertidumbres será fundamental para implementar un sistema capaz de alcanzar una condición de operación segura, que cumpla con las especificaciones y que apunte a maximizar el beneficio económico. Existen herramientas en la literatura que lidian con diferentes fuentes de incerteza: la

optimización en tiempo real para el manejo de la incertidumbre, derivada del conocimiento parcial de los modelos que rigen un proceso, y la optimización estocástica, como herramienta para hacer frente al comportamiento aleatorio de variables de proceso. Sin embargo, aún es necesario investigar nuevas metodologías de optimización que consideren simultáneamente las múltiples incertezas y que mejoren la eficiencia de los procesos.

1.2. Fundamentos del proceso de flotación

La flotación es uno de los métodos de separación más ampliamente utilizados en la industria de procesamiento de minerales. Su objetivo consiste en la separación y colección de partículas sólidas de interés, denominadas material valioso, de la ganga. El proceso se basa en la interacción entre burbujas de aire y las partículas de mineral. Un ejemplo de esto es la concentración de cobre. Para lograr la separación del material útil, es necesario modificar las propiedades superficiales del mismo mediante la adición de reactivos químicos, denominados colectores, que le confieren un carácter hidrófobo. Este carácter permite que algunas de las partículas sólidas que contienen material valioso sean colectadas y transportadas en forma selectiva por las burbujas de aire hacia el rebalse. El material no útil o ganga, abandona preferiblemente el sistema por una corriente de relave (Pino, 2012). La Figura 1.4. muestra una representación del proceso de flotación en una celda.

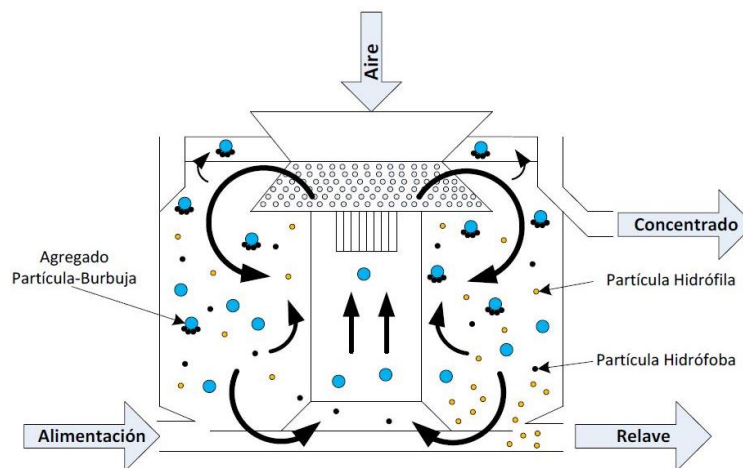


Figura 1.4. Esquema del proceso de flotación en una celda autoaspirante (Pino, 2012; Yianatos et al. 2010).

En los equipos de flotación se diferencian dos zonas de características diferentes, una zona de colección y una de limpieza. En la zona de colección ocurre el primer contacto entre las partículas de mineral con las burbujas de aire formándose el agregado partícula-burbuja, que depende de los eventos de colisión y adhesión. La zona de limpieza o separación corresponde al tramo de espuma por el cual se produce el paso de las burbujas con material colectado hasta el rebalse. Desde un punto de vista conceptual el proceso de flotación se puede considerar una secuencia de dos operaciones: una de reacción y otra de separación (Yianatos, 2007), tal como lo muestra la Figura 1.5. La etapa de reacción consistente en la mezcla de la alimentación de pulpa con los reactivos y aire, agregando energía al sistema para mantener la suspensión de partículas y formar el agregado burbuja-partícula. La etapa de separación corresponde a la formación de una zona de espuma estable que permite separar parcialmente el material colectado valioso de aquel que no lo es.

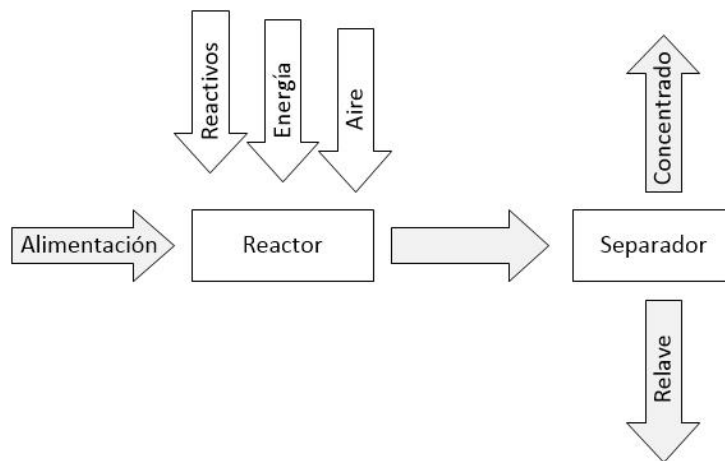


Figura 1.5. Esquema conceptual del proceso de flotación (Yianatos 2007).

La química del proceso es principalmente controlada por la adición de reactivos químicos que cumplen diferentes funciones específicas. Los principales son colectores, espumantes y depresantes. Los colectores son estructuras orgánicas que permiten que las partículas de mineral valioso se comporten de manera hidrófoba y puedan ser flotadas con aire. Los espumantes modifican las propiedades superficiales de las burbujas, a modo de reducir la coalescencia. Finalmente, los depresantes cumplen la

función de inhibir o evitar la adsorción del colector en la superficie de ciertos minerales.

En el proceso de flotación del cobre se distinguen tres tipos de circuitos, cada uno con un objetivo metalúrgico distinto. Una línea de proceso está compuesta generalmente por un circuito *rougher*, *cleaner* y *scavenger*, junto a etapas de clasificación y remolienda. El circuito *rougher*, también denominado flotación primaria, procesa la alimentación proveniente de circuitos de molienda. Su objetivo es recuperar gran parte del material valioso que ingresa al sistema, sin importar tanto el arrastre de material no valioso. A su vez, descarta la mayor parte de material no valioso en forma de relave. Posteriormente, el concentrado del *rougher* se mezcla con el concentrado del *scavenger* e ingresan a una etapa de clasificación con remolienda para aumentar el grado de liberación del material valioso y favorecer su recuperación en la etapa *cleaner*. El circuito *cleaner* es donde se realiza la limpieza del concentrado primario. En esta etapa existe una mayor selectividad en la separación del concentrado, con el objetivo de aumentar la calidad del producto, disminuyendo la recuperación de material no valioso. El material no recuperado entra en el circuito *scavenger*, donde se busca recuperar el material valioso antes de descartarlo como relave. Una configuración típica de circuitos de flotación se aprecia en la Figura 1.6.

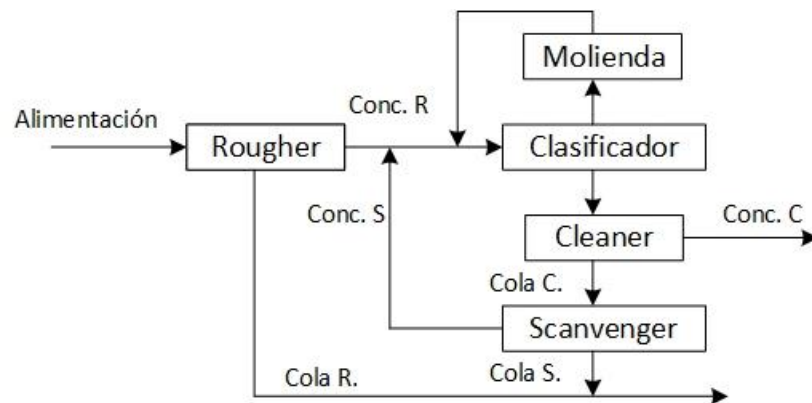


Figura 1.6. Circuito RCS de flotación.

Existe una amplia gama de equipos que se usan en flotación. Si bien existen excepciones, la mayoría de equipos se pueden agrupar en dos categorías principales: celdas mecánicas y neumáticas. Estas difieren en el mecanismo de suspensión de

partículas, donde las celdas mecánicas utilizan agitación mecánica. Por otra parte, las celdas neumáticas, generalmente en forma de columna, utilizan agua de lavado e inyección de aire mediante *spargers* (Finch & Dobby, 1990). Típicamente las celdas mecánicas son usadas como *rougher* y *scavenger*, mientras que las columnas de flotación se utilizan como *cleaner*, debido a la mayor selectividad que presenta su operación.

1.3. Supervisión y control de circuitos de flotación

A pesar de haber sido introducida industrialmente a principio de los años 1900 y luego de numerosos años de investigación y desarrollo, la flotación sigue sin ser comprendida completamente y aún permite mejoras sustantivas. Como tal, el control y optimización de procesos, ofrecen una oportunidad de aumentar las ganancias económicas.

Laurila et al. (2002) describen el control de procesos de flotación como la jerarquía de cuatro capas interconectadas, como se aprecia en la Figura 1.7.

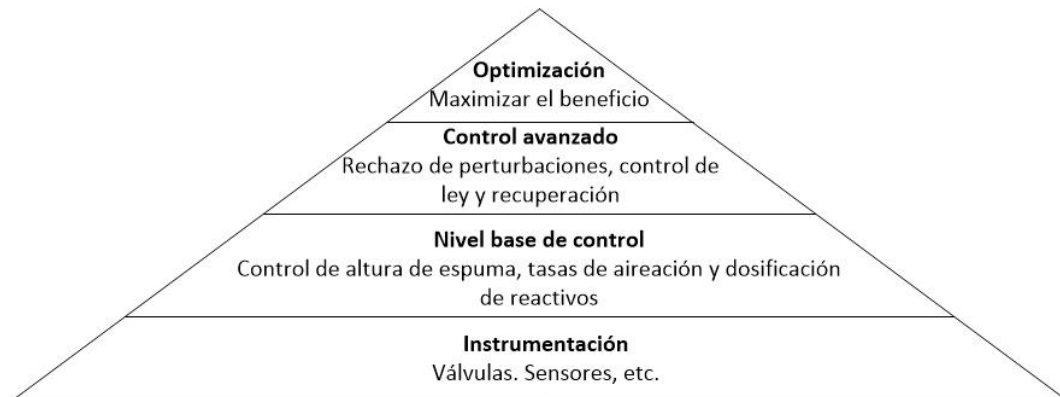


Figura 1.7. Niveles de jerarquía en el sistema de control en flotación (Laurila et al. 2002).

La instrumentación representa la base de todo el control de procesos. Como tal, el diseño y mantenimiento de la instrumentación es de extrema importancia para cualquier sistema de control de procesos. El nivel base de control se enfoca en mantener el valor de consigna de las principales variables, generalmente usando controles PID convencionales en sistemas de una entrada y una salida (*SISO*). La capa de control avanzado, implica generalmente el sopesar variables de perturbación, como lo es la variación en la composición de entrada, a modo de mantener el rendimiento del proceso en términos de ley y recuperación del material valioso. Finalmente, el nivel de

optimización busca maximizar el beneficio económico del proceso. Ambas capas buscan satisfacer su objetivo, manipulando los valores de consigna de las capas inferiores.

Las mejoras en la instrumentación y desarrollo en el control automático en flotación a partir de los años 70, permitieron la mejora del nivel base de control. Sin embargo, el desarrollo de carácter robusto y a largo plazo de sistemas de control avanzado y optimización han demostrado ser más desafiantes (McKee, 1991). Osorio et al. (1999) responsabilizan al acoplamiento entre lazos, variados tiempos de retardo, el conocimiento imperfecto de la fenomenología de flotación, la falta de instrumentación precisa y las características cambiantes de la alimentación como contribuyentes que complican los intentos de control.

1.3.1. Variables relevantes en el control de la flotación

La gran cantidad de variables involucradas y la relación compleja entre éstas hacen que el control de flotación sea muy desafiante. Laurila et al. (2002) sugieren que las variables más relevantes, desde el punto de vista del control avanzado y la optimización son los reactivos químicos y su tasa de adición (colectores, espumantes, depresantes), la profundidad de espuma, el flujo de aire, la composición mineralógica, el tamaño de partícula, porcentaje de sólidos y pH.

Medir y manipular cada variable simultáneamente, puede no ser necesario para lograr un buen resultado. Sin embargo, cada variable y su efecto en el proceso de flotación debería ser considerada. Además, se debe tener en cuenta que, aunque se tenga disponibilidad de instrumentos para medir parámetros importantes, como composición del mineral, flujos, niveles, densidad y pH, otras propiedades esenciales como grado de liberación y distribución de burbujas siguen siendo difíciles de medir o inferir (Bergh & Yianatos, 2011).

1.3.2. Instrumentación y nivel base de control

En esta sección se muestran los instrumentos que se utilizan para medir las variables relevantes y las estrategias que se ocupan para su control.

Profundidad de espuma

La profundidad de espuma es una variable relevante en flotación, un aumento en la profundidad de espuma de una celda equivale a un aumento en el tiempo de residencia de las partículas en la zona de espuma, con lo cual se incrementa el drenaje de ganga. Esto produce un concentrado de mayor ley, a costa de una reducción en la recuperación. Un método de medición de profundidad de espuma corresponde al sistema de flotador con plato objetivo y sensor ultrasónico de la Figura 1.8.

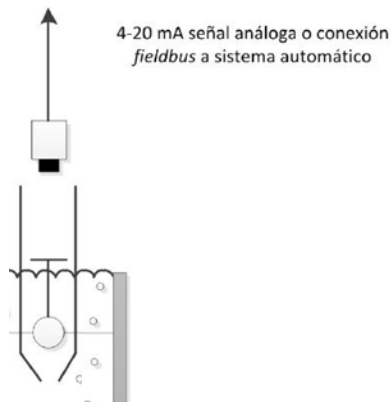


Figura 1.8. Sistemas de medición de profundidad de espuma basado en flotador y sensor ultrasónico.

Otros métodos de medición de profundidad de espuma mencionados en la literatura incluyen la medición de la presión hidrostática, radar de microondas y transmisor ultrasónico, conductividad y capacitancia (Cilliers & Shean, 2011).

Tradicionalmente se usa un control retroalimentado PI para asegurar que la profundidad de espuma mantenga su nivel de consigna. Esto se logra manipulando el flujo de colas de la celda a partir de la actuación de la válvula de colas. Esta técnica es efectiva en el control de una celda aislada, sin embargo, usarla en el control de un banco de celdas en serie puede ser problemático. Cuando cada celda intenta mantener su nivel independientemente se crean perturbaciones para las siguientes celdas. Por esta razón se han desarrollado controles prealimentados, los cuales buscan calcular y compensar las actuaciones de celdas adyacentes.

Flujo de aire

El flujo de aire estará relacionado con la velocidad superficial de gas J_g , lo cual, a su vez tiene relación con la ley y recuperación del mineral valioso. Laurila et al. (2002) reportan tres métodos comunes de medición de flujo de aire:

- Sensor térmico de flujo másico de gas
- Medidor de diferencia de presión con tubo venturi
- Transmisor de diferencia de presión con tubo pitot.

La Figura 1.9. muestra los tres métodos mencionados, más el método de medición de flujo sin señal análoga.

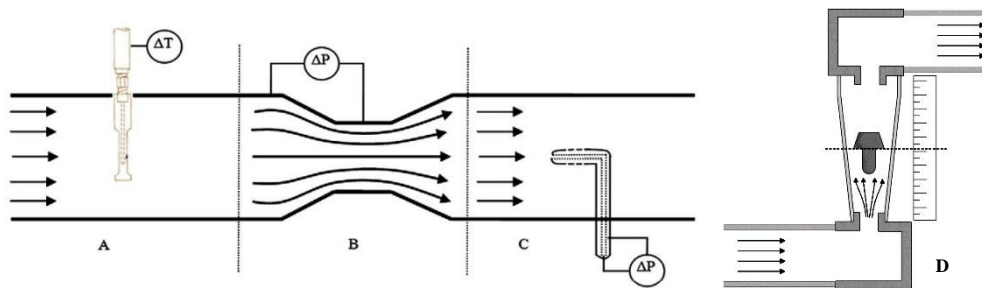


Figura 1.9. Medidores de flujo, A) sensor térmico de flujo másico de gas, B) Tuvo venturi con medidor de diferencia de presión y C) tubo pitot (Shean & Cilliers, 2011). D) Medidor de flujo de área variable o rotámetro.

La desventaja de los medidores de diferencia de presión, es que requieren grandes espacios, y secciones largas de tubería para asegurar un perfil de flujo totalmente definido. La ventaja en comparación con el medidor de flujo másico es que son económicamente más accesibles y requieren de una menor mantención. El rotámetro en cambio, es usado como alternativa económicamente accesible cuando se requiere sólo la indicación de la variable y normalmente se controla manualmente por operarios. El control de flujo de aire es menos complejo que el control de profundidad de espuma. Varios autores están de acuerdo que un control PI/PID retroalimentado es adecuado para regular el flujo de aire, manipulando una válvula de control (Shean & Cilliers, 2011). Se debe tener en cuenta que celdas mecánicas con mecanismos autoaspirantes no permiten el control de esta variable.

Flujo de colas

El flujo de colas suele medirse con medidores de flujo magnético, basados en la ley de Faraday y se trata de un método no obstructivo. Presenta problemas si hay presencia de sólidos magnéticos (ej. Magnetita). En circuitos de flotación, el flujo de colas suele manipularse para controlar el nivel en las celdas. Sin embargo, la medición aporta información valiosa para cerrar los balances de materia y para la adición de reactivos.

Otras variables

Entre otras variables medidas en línea se encuentran las concentraciones de metales, medidos con analizadores de fluorescencia de rayos X (*XRF*). La densidad, a partir de densímetros nucleares. El potencial electroquímico, pH y conductividad, se miden con equipos específicos y se regulan mediante la adición de reactivos químicos (ácidos o bases en el caso del pH y aire o nitrógeno en el caso del potencial electroquímico).

1.3.3. Controles avanzados y optimización en flotación

Los dos niveles superiores del sistema de control en flotación corresponden al control avanzado y la optimización de flotación. El control avanzado involucra el rechazo de los efectos de perturbación (por ejemplo, cambios en variables de alimentación, como ley, porcentaje de sólidos, entre otros), mientras que se intenta mantener parámetros de rendimiento como ley de concentrado y recuperación. Por otra parte, la optimización busca mejorar algún criterio económico, ya sea de maximizar el beneficio en la operación o minimizar los costos asociados a la misma. Ambos niveles tratan de cumplir su objetivo manipulando la consigna de las capas inferiores de control, por lo que su eficiencia dependerá del desempeño del nivel base del sistema de control.

Respecto a los métodos de control avanzados, que en terminología de ingeniería de control se refiere a cualquier estrategia de control más complicada que un control PID *SISO* (Cilliers & Shean, 2011), estos buscan rechazar el efecto de perturbaciones y mantener el proceso en estado estacionario. Un método eficaz para mantener los balances de materia de la planta en estado estacionario corresponde a mantener constantes la cantidad de concentrado que se colecta y las cargas de recirculación. Recircular el material en un circuito de flotación resulta en una reducción en el tiempo de residencia en cada celda, pero a su vez permite al material valioso pasar más tiempo

en el circuito completo, mejorando su recuperación total (Wills & Napier-Munn, 2006). A menudo la carga de recirculación puede ser variada para controlar perturbaciones en la alimentación. En cuanto a controles avanzados de ley y recuperación se distinguen dos tendencias: el uso de sistemas de control expertos y métodos basados en modelo. Controles predictivos y controles adaptivos son usados como algunos de los métodos basados en modelo, que se dividen en dos subcategorías según el tipo de modelo que se utiliza, ya sea fenomenológico o empírico. Dentro de los sistemas expertos, sobresalen las redes neuronales artificiales (ANN), aprendizaje inductivo automático y lógica difusa, como metodologías que automatizan y estandarizan la toma de decisión hecha por los operadores.

Finalmente, la capa de optimización, el nivel más alto en el sistema de control de flotación, tiene como objetivo maximizar la viabilidad financiera del proceso. Esto se logra determinando donde la curva teórica de ley-recuperación es más rentable y modificando los puntos de operación variando los valores de consigna de las capas inferiores de control. Hadler & Cilliers (2009) presentan un ejemplo, donde la curva ley-recuperación de un banco de cuatro celdas *rougher* se optimiza al maximizar la estabilidad de espuma en cada celda. Existen otras técnicas de optimización, como métodos basados en modelo y métodos expertos que se han usado para intentar optimizar la operación. Recientemente, Maldonado et al., (2015) proponen un método que considera modelos fenomenológicos validados mediante datos de proceso reales, con el objetivo de aumentar la recuperación en un banco de celdas mediante los perfiles de profundidad de espuma. Agregan una restricción de cumpliendo de ley mínima en el concentrado, obteniendo resultados prometedores en simulación.

A pesar de la gran cantidad de literatura dedicada al tema, Wills y Napier-Munn (2006) añaden que pocas plantas pueden afirmar tener sistemas de control completamente automatizados capaces de operar sin supervisión durante largos períodos de tiempo. Por lo tanto, la aplicación de técnicas de optimización e incluso controles avanzados en aplicaciones industriales ha sido en gran medida infructuosa. Los principales

motivos por los que las técnicas hayan sido poco eficaces según mencionan Shean & Cilliers (2011) son:

- El diseño del sistema de control es insuficiente en las etapas de diseño de plantas.
- Se requiere un amplio conocimiento de sistemas de control para desarrollar, instalar y mantener sistemas avanzados. La mayoría de operarios, metalurgistas y administradores no tienen los conocimientos de ingeniería de control.
- El comportamiento complejo, no lineal de los sistemas de flotación complican los intentos de modelado, haciendo difícil el diseño de sistemas de control efectivos y robustos que manejen los amplios rangos de operación.

Por esta última razón, es fundamental seguir investigando nuevas metodologías que sean capaces de manejar las múltiples fuentes de incertezas en los sistemas para apuntar a una operación más eficiente.

1.4. Definición de la problemática

Múltiples fuentes de incertezas están siempre presentes en los procesos industriales. El entendimiento parcial de los fenómenos involucrados junto con comportamientos aleatorios de variables implicadas y mediciones imprecisas, complican la tarea del sistema de control en cualquier proceso. Encontrar un punto óptimo de operación no es una tarea trivial, ya que es necesario incluir explícitamente las incertezas en el proceso de toma de decisiones para encontrar una solución que optimice el sistema, pese a las inherentes complejidades del mismo.

La flotación es un proceso complejo sujeto a varias fuentes de incertezas. Las características cambiantes en la alimentación, las condiciones de mercado y el entendimiento parcial de la fenomenología han hecho ineficiente la operación e infructíferos los intentos de optimización. Es necesario investigar nuevas metodologías de optimización que consideren explícitamente las múltiples incertezas y que mejoren la eficiencia del proceso, en términos económicos y de cumplimiento de objetivos operacionales.

1.5. Hipótesis

Considerando que la incertidumbre está presente en distintas formas en todo proceso, el tratamiento explícito de estas, tomando en cuenta su naturaleza de manera simultánea, permitiría obtener sistemas de ayuda a la toma de decisiones con resultados óptimos y factibles, mejorando el desempeño general del sistema a optimizar.

1.6. Objetivos

A continuación, se describen los objetivos generales y específicos de este trabajo.

1.6.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es estudiar una forma de incorporar información probabilística de aquellas variables con comportamiento estocástico en la optimización en tiempo real con adaptación de modificadores, asegurando la factibilidad de la operación con un nivel de certeza dado y validarla experimentalmente.

1.6.2. Objetivos específicos

Para satisfacer el objetivo general de esta investigación se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar una metodología que incluya información disponible de variables con comportamiento estocástico en la optimización en tiempo real con adaptación de modificadores.
- Implementar un sistema de optimización en tiempo real en un banco de celdas de flotación *rougher* a escala laboratorio.
- Evaluar el beneficio, en términos económicos y de satisfacción de restricciones, al incorporar información probabilística de las variables con comportamiento estocástico a la capa *RTO*.

2. SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN EN TIEMPO REAL (RTO)

El objetivo de la RTO es la minimización o maximización de algún desempeño operativo en estado estacionario (por ejemplo, maximizar tasa de producción o minimizar costo operativo), mientras que se satisfacen ciertas restricciones (por ejemplo, especificación de producto o límites de variables de operación).

El problema de optimización en estado estacionario para un proceso se puede formular según la Ecuación 2.1.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J_p(\mathbf{u}) \\ \text{s. t. } \mathbf{C}_p(\mathbf{u}) \leq 0 \\ \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ son las variables de decisión, \mathbf{u}^L y \mathbf{u}^U , sus límites inferior y superior, respectivamente, $\mathbf{C}_p: \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ las funciones de restricción, y $J_p: \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}$ la función de costo generalmente de carácter económico. El subíndice $(\cdot)_p$ denota variables asociadas al proceso.

El objetivo al resolver la Ecuación 2.1 es encontrar el punto óptimo de operación \mathbf{u}_p^* , que minimize la función de costo y cumpla con las restricciones del proceso. Debido a que no es posible conocer la representación exacta del sistema real, se utiliza un modelo aproximado del proceso para resolver este problema, como se aprecia en la Ecuación 2.2.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s. t. } \mathbf{C}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \\ \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ son los parámetros del modelo utilizado.

Resolver la Ecuación 2.2 entrega como solución \mathbf{u}^* , el valor óptimo de las variables de decisión en el problema de optimización basada en modelo. Asumiendo que el conjunto factible $U := \{\mathbf{u} \in [\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^U]: \mathcal{C}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0\}$ es no vacío y la función de costo es continua, se garantiza la existencia de la solución que minimiza el problema. Si el punto encontrado cumple con las condiciones suficientes de optimalidad (*SCO*), i.e., el gradiente de la función de costo es linealmente independiente y el hessiano es definido positivo, este es al menos un mínimo local.

Para encontrar la solución es indispensable contar con un modelo matemático que permita predecir el comportamiento del sistema. Se debe tener en consideración que, si bien el modelo puede tener un sustento físico, éste corresponde a una abstracción de la realidad. Producto de esto y debido a otras fuentes de incertidumbres, la solución en base a modelo \mathbf{u}^* generalmente no coincide con el óptimo del proceso \mathbf{u}_p^* .

Existen, de manera intrínseca, incertidumbres asociadas al entendimiento parcial de ciertos fenómenos o a comportamientos estocásticos de algunas variables. Un problema de optimización de procesos basada en modelos está sujeto a 4 tipos de incerteza (Forbes et al., 2002):

- a. Incertezas de mercado: Se refiere al conocimiento impreciso de la economía de proceso, como disponibilidad de materias primas, demanda del producto, entre otros.
- b. Incerteza de proceso: Se refiere al conocimiento impreciso de la operación producto de varias perturbaciones en el proceso, como variaciones no medidas, características de alimentación, etc.
- c. Incerteza de la medición: Se refiere al conocimiento impreciso de variables del proceso medidas, debido a ruido o sesgo en la medición.
- d. Incerteza en el modelo: Se refiere a predicciones imprecisas del modelo, producto de discrepancias estructurales o paramétricas con la realidad.

Un lazo típico de *RTO* basado en modelo y bajo incertezas se presenta en la Figura 2.1. A partir de los datos colectados de planta, z , y en base a la optimización de un modelo, se entregan los valores de consigna u^* al sistema de control.

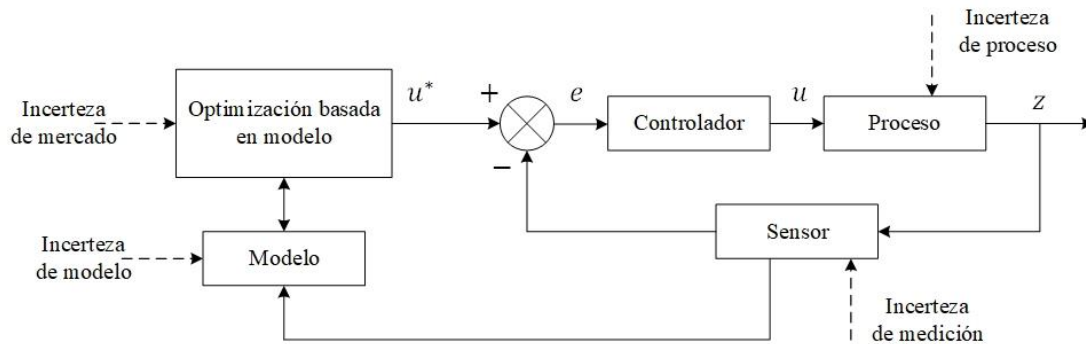


Figura 2.1. Optimización bajo incertezas.

El manejo de las incertidumbres es fundamental para implementar un sistema, que sea capaz de alcanzar una condición óptima real en un proceso. Existen algunos métodos que abordan esta problemática.

2.1. Incertezas de modelo

A raíz de las múltiples incertezas que afectan a la optimización surge la optimización en tiempo real de dos etapas como primera aproximación para sobrellevar la problemática. Posteriormente, la adaptación de modificadores cambia el enfoque, permitiendo optimizar sistemas en línea usando modelos imperfectos.

Optimización en Tiempo Real de dos Etapas

En la década de los 70 surge la metodología *RTO* de dos etapas, la cual busca tratar el problema de la incertidumbre en los procesos (Bamberger & Isermann, 1978). El método se divide en una primera etapa de estimación de parámetros y una segunda de optimización económica. En la primera etapa se tiene en consideración las incertezas del modelado, actualizando los parámetros α del modelo. Esto se implementa resolviendo la Ecuación 2.3.

$$\min_{\alpha} (\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_m)^T (\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_m) \quad (2.3)$$

$$s. t. \mathbf{y}_m = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha)$$

Donde \mathbf{y}_p son mediciones del proceso, $\mathbf{y}_m = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha)$ la predicción del modelo en función de los parámetros y las variables de decisión, para un valor de \mathbf{u} dado.

Al resolver la Ecuación 2.3 se obtiene los parámetros ajustados α^* . El siguiente paso consiste en actualizar las variables de decisión según la Ecuación 2.4.

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \alpha^*) \quad (2.4)$$

$$s. t. \mathbf{C}(\mathbf{u}, \alpha^*) \leq 0$$

$$\mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U$$

El algoritmo utilizado en la optimización de dos etapas se presenta en la Figura 2.2.

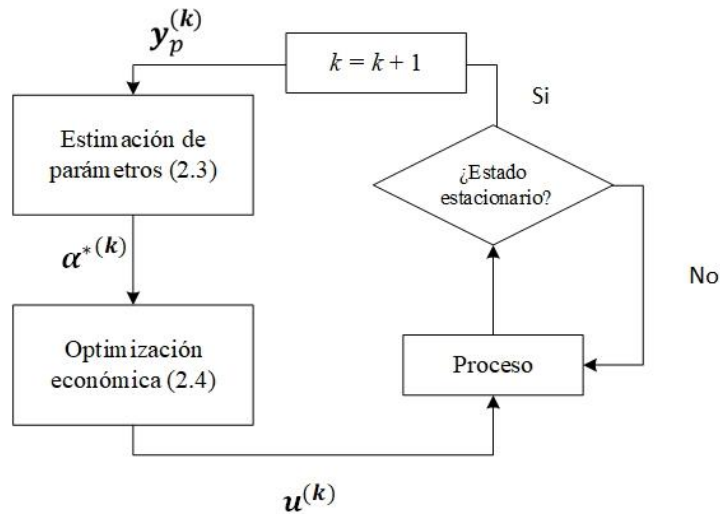


Figura 2.2. RTO de dos etapas.

Dado un estado estacionario inicial, se comparan las predicciones del modelo con los resultados en el proceso y en base a ello, se actualizan los parámetros de dicho modelo resolviendo la Ecuación 2.3. Luego, con el modelo actualizado, se busca e implementa la solución del problema de carácter económico (Ecuación 2.4.), hasta alcanzar un nuevo estado estacionario donde se repite iterativamente el procedimiento.

Adaptación de modificadores (MA)

Una desventaja del esquema clásico de optimización en dos etapas es que el óptimo del proceso puede no ser alcanzado si el modelo presenta incertidumbres estructurales, es decir incertezas respecto a los mecanismos que describen la fenomenología de los procesos. La corrección de los parámetros puede no ser suficiente para representar de manera adecuada el comportamiento del proceso. Roberts (1979) desarrolla el método “*Integrated System Optimization Parameter Estimation*” (ISOPE), donde se modifica la función objetivo del problema económico agregando un término de corrección a la diferencia de gradientes de la función de costo del modelo y del proceso. Años después, Gao & Engell (2005) y Bonvin et. al., (2009) generalizan el método de adaptación de modificadores, que asegura la convergencia a un punto que cumple con las condiciones de optimalidad del proceso. A diferencia del esquema de optimización en tiempo real de dos etapas, los parámetros del modelo α no son actualizados. En su lugar, se lleva a cabo una corrección lineal a las funciones de costo y restricciones, que se basa en los llamados modificadores. Para un punto de operación $\mathbf{u}^{(k)}$ dado, se define un modelo modificado (Ecuación 2.5).

$$J_{mod}(\mathbf{u}, \alpha, \lambda) = J(\mathbf{u}, \alpha) + \lambda^{(k)T} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}_{mod}(\mathbf{u}, \alpha, \gamma, \varepsilon) = \mathbf{C}(\mathbf{u}, \alpha) + \gamma^{(k)T} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}) + \varepsilon^{(k)}$$

Donde los modificadores $\lambda^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\gamma^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ y $\varepsilon^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_c}$ están dados por la Ecuación 2.6.

$$\lambda^{(k)} = \nabla_{\mathbf{u}} J_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} J^{(k)}$$

$$\gamma^{(k)} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k)} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon^{(k)} = \mathbf{C}_p^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)}$$

Se reescribe el problema de optimización basada en modelo según la Ecuación 2.7.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{u}} J_{mod}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) \\
& \text{s. t. } \mathbf{C}_{mod}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \leq 0 \\
& \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Esta metodología puede llevar a un ajuste excesivo cuando se opera lejos del punto óptimo. Por esta razón, se recomienda filtrar los modificadores con un filtro exponencial de primer orden (Ecuación 2.8).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^{(k)} &= (1 - \mathbf{K}_\lambda) \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} + \mathbf{K}_\lambda \left(\nabla_{\mathbf{u}} J_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} J^{(k)} \right) \\
\boldsymbol{\gamma}^{(k)} &= (1 - \mathbf{K}_\gamma) \boldsymbol{\gamma}^{(k-1)} + \mathbf{K}_\gamma \left(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k)} \right) \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} &= (1 - \mathbf{K}_\varepsilon) \boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} + \mathbf{K}_\varepsilon \left(\mathbf{C}_p^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Donde $\mathbf{K}_\lambda \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n_c n_u \times n_c n_u}$ y $\mathbf{K}_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ son las ganancias de los filtros. Los modificadores pueden ser denotados colectivamente por el vector $\boldsymbol{\Lambda}$ de n_k dimensiones, con $n_k = n_c + n_u(n_c + 1)$ (Ecuación 2.9).

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(k)T} := \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{c_1}^{(k)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{c_{n_c}}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}_{c_1}^{(k)T}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_{c_{n_c}}^{(k)T}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \right) \tag{2.9}$$

Uno de los principales problemas del método descrito, es la necesidad de disponer de información de los gradientes tanto del proceso como del modelo. Estimar las derivadas parciales del proceso no es una tarea trivial, y es necesario agregar una etapa de estimación de gradientes experimentales a partir de mediciones del proceso, como se ve en la Figura 2.3. Existe una amplia gama de métodos utilizados para estimar el gradiente del proceso. En general, se clasifican según el tipo de información utilizada para extraer el gradiente: a partir de mediciones en estado estacionario o a partir de mediciones en estado transiente (Mansour & Ellis, 2003).

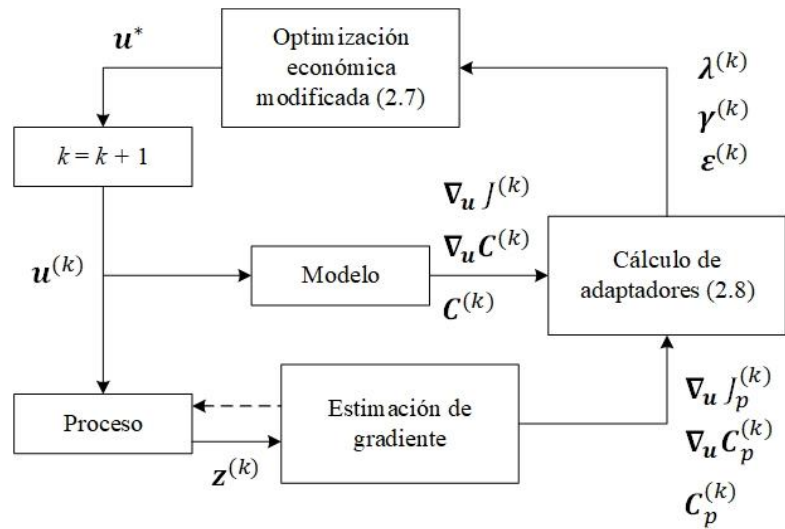


Figura 2.3. *RTO* con adaptación de modificadores.

Dentro de este trabajo, se estudia el cálculo de los gradientes a partir de mediciones del proceso en estado estacionario.

2.1.1. Métodos de estimación de gradientes

La desventaja de la metodología de adaptación de modificadores corresponde a la adición de una etapa extra de estimación de gradientes, tanto de la función de costo, como de las restricciones. A continuación, se abordan las metodologías utilizadas en este trabajo.

Método de diferencias finitas (Roberts, 1979)

Corresponde al método más sencillo para la estimación de gradientes del proceso. Consiste en realizar cambios en torno al punto actual de operación del proceso y medir la respuesta del sistema. Se deben considerar perturbaciones suficientemente grandes para no ser confundidas con el ruido inherente de medición. El método será suficientemente preciso para estimar el gradiente del proceso en sistemas pequeños con bajo ruido y de dinámica rápida.

Para el cálculo de los gradientes tanto de la función objetivo como de las restricciones, se deberá realizar un número de perturbaciones de magnitud $\Delta u_i, \forall i = 1, \dots, n_u$ igual

al número de variables de decisión que se tenga, tal como se muestra en la Ecuación 2.10.

$$\frac{\partial J_p^{(k)}}{\partial u_i} \approx \frac{J_p(\mathbf{u}^{(k)} + \Delta u_i) - J_p(\mathbf{u}^{(k)})}{\Delta u_i} \quad \forall i = 1, \dots, n_u$$

$$\frac{\partial C_p^{(k)}}{\partial u_i} \approx \frac{C_p(\mathbf{u}^{(k)} + \Delta u_i) - C_p(\mathbf{u}^{(k)})}{\Delta u_i} \quad \forall i = 1, \dots, n_u$$
(2.10)

El uso de diferencias finitas se ejemplifica gráficamente en la Figura 2.4., que representa la convergencia de un problema de optimización con adaptación de modificadores, considerando dos variables de decisión u_1 y u_2 . Partiendo desde un punto M, óptimo de un modelo definido por una función de costo y una ecuación de restricción. El algoritmo hace que el sistema se aproxime de manera iterativa al punto P (óptimo del proceso), definido por una función de costo y ecuación de restricción diferente. Se observa que en cada iteración del algoritmo se hacen dos evaluaciones de diferencias finitas, una por cada variable de decisión, para la estimación de los gradientes.

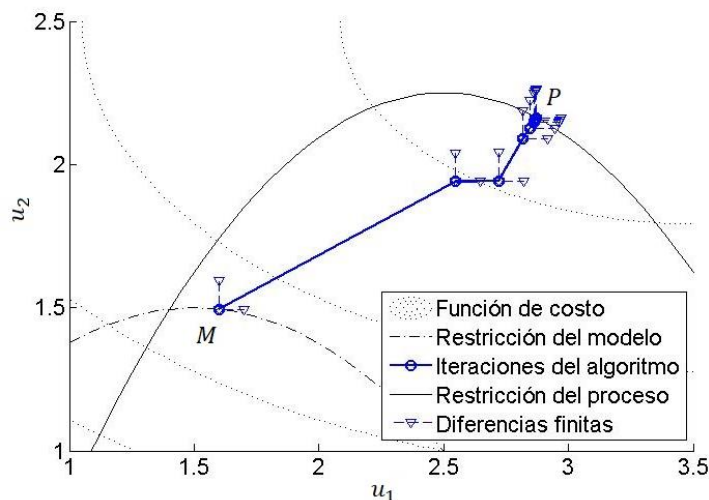


Figura 2.4. Ejemplo de aplicación de diferencias finitas.

Optimización libre de derivadas (Gao et. al., 2016)

La metodología de adaptación de modificadores es capaz de manejar modelos incorrectos para llevar la planta a un punto óptimo al aplicar correcciones empíricas de bias y gradiente a la función objetivo y restricciones de manera iterativa. Sin embargo, uno de los mayores retos es el estimar los gradientes de mediciones, frecuentemente ruidosas, sobretodo en sistemas de varias variables. El método de diferencias finitas sufre del problema de elegir un tamaño paso adecuado. Usar un paso demasiado largo reduce el efecto del ruido, a costa de un mayor error en la estimación. El método propuesto por Gao et. al., (2016) sugiere un esquema que usa una aproximación cuadrática para el mapeo del proceso y restricciones, y lo combina con la metodología de adaptación de modificadores. Teniendo un set de n_r datos para la regresión $U^{(k)} = \{\mathbf{u}^{(r_1)}, \dots, \mathbf{u}^{(r_{n_r})}\}$, la aproximación cuadrática se construye al resolver la Ecuación 2.11.

$$\min_P \sum_{i=1}^{n_r} \left(J_p(\mathbf{u}^{(r_i)}) - J_\phi(\mathbf{u}^{(r_i)}, P) \right)^2 \quad (2.11)$$

Donde $J_\phi(\mathbf{u}, P)$ es la aproximación cuadrática definida por la Ecuación 2.12.

$$J_\phi(\mathbf{u}, P) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^i a_{i,j} u_i u_j + \sum_{i=1}^{n_u} b_i u_i + c \quad (2.12)$$

Con el set de parámetros $P = \{a_{1,1}, \dots, a_{n_u, n_u}, b_1, \dots, b_{n_u}, c\}$.

La aproximación cuadrática de las funciones de restricción $\mathbf{C}_\phi(\mathbf{u})$ se construye de manera similar. Luego, los gradientes del proceso se determinan evaluando $\nabla_{\mathbf{u}} J_\phi$ y $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_\phi$ en $\mathbf{u}^{(k)}$.

La geometría del set de datos de regresión es crítica para la precisión de la aproximación cuadrática. Tres criterios son fundamentales para seleccionar un set de datos adecuado:

- a. Datos bien distribuidos y suficientemente lejanos son indispensables para identificar correctamente la curvatura.
- b. El uso de múltiples puntos cercanos puede aumentar la precisión de la estimación del gradiente.
- c. Evitar el uso de puntos antiguos en presencia de perturbaciones.

Los autores proponen un algoritmo de *screening* para seleccionar el set de datos que se usará en la regresión cuadrática. Se deben tener por lo menos $(n_u + 1)(n_u + 2)/2$ datos para hacer un ajuste apropiado.

Además, el método propuesto incluye una restricción (Ecuación 2.13) al espacio de búsqueda $B^{(k)}$ definido en base a la matriz de covarianza M del set de datos. El objetivo de esta restricción es asegurar la representatividad del ajuste.

$$B^{(k)}: (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}) \leq \gamma_B^2 \quad (2.13)$$

Donde γ_B es un parámetro de escala.

Finalmente, se incluye la comparación de la precisión del modelo cuadrático obtenido frente a la del modelo modificado (Ecuación 2.5). Si el modelo cuadrático obtenido es más preciso, es posible convertir el problema de optimización basada en modelo en uno de optimización basada en datos, definido por la Ecuación 2.14.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J_{\phi}^{(k)}(\mathbf{u}) \\ \text{s. t. } \mathbf{C}_{\phi}^{(k)} \leq 0 \\ \mathbf{u} \in B^{(k)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Resolver el problema basado en datos (Ecuación 2.14) en lugar del problema basado en modelo (Ecuación 2.7), presenta una ventaja adicional en tiempo de cálculo.

Adaptación de modificadores anidados (Navia et. al., 2015)

Modificadores anidados no se trata de una metodología de estimación de gradiente, por el contrario, es un método que permite evitar por completo esta etapa en base a una reformulación del problema.

La necesidad de perturbar el proceso para estimar continuamente los gradientes puede traer repercusiones, tanto desde el punto de vista económico como también de seguridad. Adicionalmente, las perturbaciones pueden dificultar la correcta estimación de gradientes y afectar la convergencia del algoritmo. Al calcular gradientes experimentales, el ruido en las mediciones puede amplificarse debido a las múltiples evaluaciones del proceso requeridas y al manejo algebraico para el cálculo de la curvatura experimental, lo que implicaría una degradación en la estimación de los gradientes. Si bien existen métodos de filtración de datos que lidian con el ruido en la medición, estos requieren de la manipulación de las mediciones implicando una pérdida de información. Por estos motivos, se buscan métodos que perturben lo menos posible al proceso y que sean robustos frente a diferentes escenarios.

Se reformula el problema de adaptación de modificadores como un problema de optimización anidada, el cual prescinde de la etapa de estimación de los gradientes para el cálculo de los modificadores (Navia et. al., 2015). En su lugar se itera en una capa superior de optimización utilizando los modificadores $\Lambda := (\lambda, \gamma)$ como variables de decisión, en base a una función de rendimiento. Utilizando los modificadores propuestos por la capa superior, se resuelve el problema de optimización modificado (Ecuación 2.7) y el resultado se implementa como un nuevo punto de operación en el proceso. La Ecuación 2.15 detalla el problema de optimización en la capa superior.

$$\min_{\Lambda} L_p(\mathbf{u}^{(\infty)}(\Lambda), \boldsymbol{\mu}^{(\infty)}(\Lambda)) \quad (2.15)$$

Donde L_p es la función lagrangiana dada por la Ecuación 2.16 y $\boldsymbol{\mu}$ los multiplicadores de Lagrange.

$$L_p(\mathbf{u}^{(\infty)}(\Lambda), \boldsymbol{\mu}^{(\infty)}(\Lambda)) = J_p(\mathbf{u}^{(\infty)}(\Lambda)) + \boldsymbol{\mu}^{(\infty)}(\Lambda)^T \mathbf{C}_p(\mathbf{u}^{(\infty)}(\Lambda)) \quad (2.16)$$

Como el Problema 2.15 es difícil de resolver, se aproxima la solución de manera iterativa, ejecutando un paso de minimización de dicho problema de manera reiterada, y resolviendo el problema modificado (Ecuación 2.7) en cada repetición. El algoritmo se detalla en la Figura 2.5.

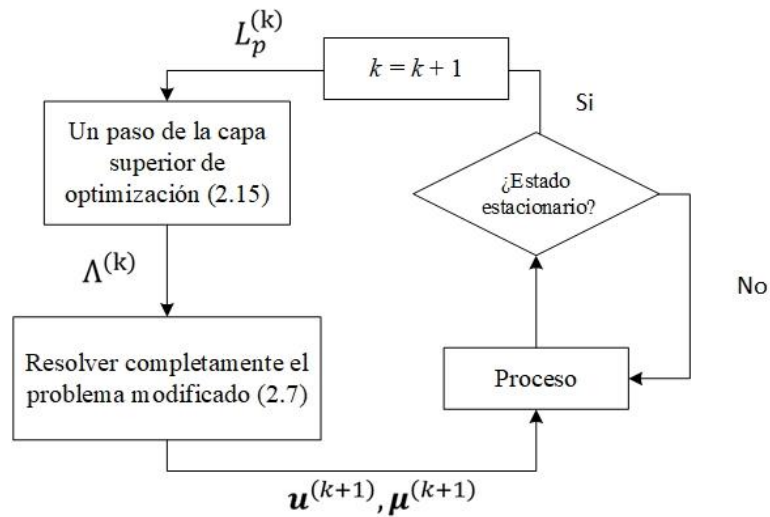


Figura 2.5. RTO anidada.

Los autores proponen usar el algoritmo de Nelder-Mead en la capa superior de optimización para la actualización de Λ , debido a que requiere de una o dos evaluaciones de la función objetivo para construir una nueva iteración, lo cual conlleva a una menor cantidad de evaluaciones del proceso por iteración.

2.2. Incertezas de proceso o mercado

Si bien la metodología de adaptación de modificadores lidia con las incertezas en el modelo, ésta no considera la información probabilística disponible de variables con comportamiento estocástico asociado a incertezas de proceso o mercado. En el caso de incertezas de mercado, el no conocimiento de los requerimientos (demanda) en tiempo real, puede llevar a la sobreproducción o subproducción del producto, implicando mayores costos de inventario o la pérdida de una oportunidad de venta mayor. Por otra

parte, las incertezas en el proceso, como variaciones en las características de alimentación, pueden repercutir en la convergencia del algoritmo de optimización. Éste es un problema mayor en casos donde la dinámica del proceso es lenta y los cambios de dichas variables ocurren a una tasa mayor. Producto de estas variaciones los métodos de estimación del gradiente, basados en la información en estado estacionario, conllevan a un error de estimación, lo que puede repercutir en la convergencia del algoritmo.

La optimización estocástica surge como posible solución a este tipo de incertezas. Usando información probabilística de las variables inciertas, permite encontrar un punto óptimo de operación que se sobrepone a la variabilidad de dichas variables.

Encontrar un punto óptimo de operación en un proceso industrial no es una tarea sencilla, no solo debido a las incertezas de modelo, sino también a otras complejidades inherentes al mismo proceso. Las perturbaciones e incertezas afectan continuamente las condiciones de operación, es por este motivo que es necesario incluir explícitamente dichas incertezas en el proceso de toma de decisión, para encontrar una solución que optimice el sistema.

El problema general de optimización (Ecuación 2.2) no toma en cuenta explícitamente la información estocástica que puede existir de las variables inciertas. Al considerarlas, el problema de optimización puede ser reescrito según la Ecuación 2.17.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \\ & \text{s. t. } \mathbf{C}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \boldsymbol{\xi} \sim \text{PDF}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\xi}}) \\ & \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_{\boldsymbol{\xi}}}$, son las variables inciertas con comportamiento estocástico.

En este trabajo asumiremos que $\boldsymbol{\xi}$ toma valores aleatorios dentro de un set Ξ y tiene una función de distribución de probabilidad (*PDF*, según sus siglas en inglés) normal de media $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\xi}}$ y matriz de correlación $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\xi}}$. Sin embargo, la metodología propuesta puede ser aplicada a variables que sigan una función de distribución de probabilidad diferente.

Para resolver el Problema 2.17 sería necesario asegurar la factibilidad para todas las posibles realizaciones de ξ , lo que requeriría considerar un número infinito de restricciones. En su lugar, se reformula el problema fijando una probabilidad dada de factibilidad β , como se presenta en la Ecuación 2.18.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} E_{\xi}\{J(\mathbf{u}, \alpha, \xi)\} \\ & s. t. \Pr\{\mathbf{C}(\mathbf{u}, \alpha, \xi) \leq 0\} \geq \beta, \xi \in \Xi, \xi \sim PDF(\boldsymbol{\mu}_{\xi}, \boldsymbol{\Sigma}_{\xi}) \\ & \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donde E_{ξ} es el operador que representa el valor esperado de J sobre ξ , \Pr es la probabilidad de ocurrencia de las restricciones y β es un nivel de confianza.

Se han propuesto varios métodos para resolver el Problema 2.18 dependiendo de cómo ξ afecta el problema de optimización (Mitra, 2013).

Incerteza exógena o separable

Dado un proceso con la función de costo $J_p(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$, el set de restricciones de desigualdad $\mathbf{C}_p(\mathbf{u}, \xi) \in \mathbb{R}^{n_c}$ y el vector de variables de decisión $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$. Asumiendo que \mathbf{C}_p es influenciado por el set de variables estocásticas $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$, descritas por la PDF $\Xi(\boldsymbol{\mu}_{\xi}, \boldsymbol{\sigma}_{\xi})$, donde $\boldsymbol{\mu}_{\xi}$ y $\boldsymbol{\sigma}_{\xi}$ son el promedio y la desviación estándar, respectivamente. Siempre que ξ sea separable de \mathbf{C}_p , el problema de optimización podrá resumirse según la Ecuación 2.19.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} J_p(\mathbf{u}) \\ & s. t. \mathbf{C}_p(\mathbf{u}) \leq \xi, \xi \in \Xi, \xi \sim PDF(\boldsymbol{\mu}_{\xi}, \boldsymbol{\sigma}_{\xi}) \\ & \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.19)$$

Problema típico cuando las restricciones representan la calidad de producto, que depende de condiciones inciertas del mercado o de la operación de unidades aguas arriba. La solución del Problema 2.19 es de dimensionalidad infinita, siempre y cuando ξ sea continuo. Para una implementación de una RTO, se debe definir una solución

particular del problema, en este caso, se ha usado un enfoque basado en la optimización probabilística (Ecuación 2.20).

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{u}} J_p(\mathbf{u}) \\
& s. t. \Pr\{\mathbf{C}_p(\mathbf{u}) \leq \boldsymbol{\xi}\} \geq \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \boldsymbol{\xi} \sim PDF(\boldsymbol{\mu}_\xi, \boldsymbol{\Sigma}_\xi) \\
& \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde $\boldsymbol{\beta}$ es un valor preseleccionado de nivel de confianza.

Como asumimos que $\boldsymbol{\xi}$ puede ser separado de \mathbf{C} , se puede reescribir el anterior problema como un problema determinista equivalente en la Ecuación 2.21.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{u}} J_p(\mathbf{u}) \\
& s. t. \mathbf{C}_p(\mathbf{u}) \leq \Xi_\beta(\boldsymbol{\mu}_\xi, \boldsymbol{\sigma}_\xi) \\
& \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Donde Ξ_β es la función de la integral de Ξ , usando $\boldsymbol{\beta}$ como límite de integración.

Notar que la variable Ξ_β entrega tanto información de la forma de la distribución de probabilidad, como del límite de certeza impuesto para resolver el problema de optimización probabilística. Suponiendo que $\boldsymbol{\xi}$ sigue una distribución normal, Ξ_β puede ser reescrito como $\boldsymbol{\mu}_\xi - \mathbf{z}_\beta \boldsymbol{\sigma}_\beta$, siendo \mathbf{z}_β el valor de la variable estándar, que cumple $\Pr(\mathbf{z} < \mathbf{z}_\beta) = \boldsymbol{\beta}$ (Mitra, 2013). Las condiciones necesarias de optimalidad (NCO) del Problema 2.21, asumiendo una distribución normal de $\boldsymbol{\xi}$, están dadas por la Ecuación 2.22.

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}^*) + \mathbf{v}^{*T} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}(\mathbf{u}^*) = 0 \\
& v_i \cdot \{\mathbf{C}_i(\mathbf{u}^*) - \mu_{\xi_i} + z_\beta \sigma_{\xi_i}\} = 0, \forall i = 1, \dots, n_g \\
& \mathbf{C}(\mathbf{u}^*) - \boldsymbol{\mu}_\xi + \mathbf{z}_\beta \boldsymbol{\sigma}_\xi \leq 0, \mathbf{v}^* \geq 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Donde \mathbf{v}^* y \mathbf{u}^* son los multiplicadores de Lagrange y las variables de decisión, respectivamente.

Dado que la Ecuación 2.21 es determinista, la solución del problema es implementable. Se debe tener en consideración que existen otras alternativas para abordar la problemática. Los métodos de *Value at Risk* y *Conditional Value at Risk* son algunos ejemplos con un enfoque diferente al señalado en el presente trabajo y que podrían ser estudiados para casos en los que la incertidumbre no es exógena.

2.3. Metodología propuesta: Optimización estocástica en tiempo real (*sRTO*) con adaptación de modificadores

En base a lo visto en los Puntos 2.1. y 2.2. existen herramientas que lidian por separado con diferentes fuentes de incerteza en la optimización basada en modelo. La optimización en tiempo real con adaptación de modificadores es útil en casos con incerteza de modelo, mientras que la optimización probabilística lidia con incertezas de mercado o proceso cuando existe información de variables con comportamiento estocástico. Desarrollar una metodología que incluya la información disponible de variables con comportamiento estocástico en la optimización en tiempo real con adaptación de modificadores ofrece una herramienta más robusta frente a sistemas con múltiples fuentes de incerteza, escenario esperable en una aplicación de interés industrial.

Si se considera disponible el modelo del proceso, con parámetros α , pero las restricciones están sujetas a variables probabilísticas. Una posible solución es considerar el problema de optimización determinístico basado en modelo, el cual está dada por la Ecuación 2.23.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \alpha) \\ & s. t. \quad \mathbf{C}(\mathbf{u}, \alpha) \leq \mu_{\xi} \\ & \quad \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \tag{2.23}$$

La solución del Problema 2.23 es el punto óptimo del modelo para el valor esperado (valor promedio) de ξ . Aplicar esta solución en el proceso puede resultar en una operación subóptima o incluso inviable, debido a la incompatibilidad del modelo. Aun suponiendo que el modelo sea capaz predecir correctamente el comportamiento real

del proceso, se esperaría que el proceso infrinja las restricciones un 50% de las veces al solo considerar el valor promedio de la variable incierta. Usando la metodología de adaptación de modificadores sería posible lidiar con el error de modelado. Sin embargo, se debe incorporar información del comportamiento estocástico de ξ al cálculo de los modificadores para llegar punto de operación óptimo y que satisfaga las restricciones sobre un nivel de confianza dado. Para incorporar el comportamiento estocástico de estas variables, se formula el siguiente teorema, hallando la definición de los modificadores para encontrar \mathbf{u}^* de manera iterativa.

Teorema 1: Definición de modificadores para incertidumbre exógena

Suponiendo que se agrega la adaptación de modificadores a la Ecuación 2.23 y converge a un punto estacionario $\mathbf{u}^{(\infty)}$ que es la solución de la Ecuación 2.24, y suponiendo que ξ sigue una distribución normal.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J_{mod} &:= J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{u} \\ s. t. \quad \mathbf{C}_{mod} &:= \mathbf{C}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\gamma}^{(k)T} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}^{(k)} \leq \boldsymbol{\mu}_{\xi} \\ &\mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}^{(k)}$ es el modificador que incluye información probabilística de la variable ξ . Si los modificadores se definen según la Ecuación 2.25 y bajo el supuesto que la solución existe, $\mathbf{u}^{(\infty)}$ es un punto que satisface la optimización con restricción probabilística del proceso con un determinado nivel de certeza $\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} &= \nabla_{\mathbf{u}} J_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} J^{(k)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(k)} &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}^{(k)} &= \mathbf{C}_p^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{z}_{\beta} \boldsymbol{\sigma}_{\xi} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Demostración

Como el Problema 2.23 es determinístico, la implementación directa de adaptación de modificadores puede hacerse. Al remplazar la definición de los modificadores (Ecuación 2.25) en las NCO de la Ecuación 2.24, se obtiene la Ecuación 2.26.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} J^{(k+1)} + \nabla_{\mathbf{u}} J_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} J^{(k)} + \mathbf{v}^{(k+1)T} \left(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k+1)} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k)} \right) &= 0 \\ \mathbf{v}_i^{(k+1)} \cdot \left\{ \mathbf{C}_i^{(k+1)} + \left[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_{p,i}^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_i^{(k)} \right] (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{C}_{p,i}^{(k)} \right. \\ \left. - \mathbf{C}_i^{(k)} - \mu_{\xi i} + z_{\beta i} \sigma_{\xi i} \right\} &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{C}^{(k+1)} + \left[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}^{(k)} \right] (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{C}_p^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}_{\xi} + \mathbf{z}_{\beta} \boldsymbol{\sigma}_{\xi} \leq 0$$

Bajo la suposición de convergencia del algoritmo, es decir, $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(\infty)}$ la anterior expresión se convierte en la Ecuación 2.27.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} J_p^{(\infty)} + \mathbf{v}^{(\infty)T} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{C}_p^{(\infty)} &= 0 \\ \mathbf{v}_i^{(\infty)} \left\{ \mathbf{C}_{p,i}^{(\infty)} - \mu_{\xi i} + z_{\beta} \sigma_{\xi i} \right\} &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \\ \mathbf{C}_p^{(\infty)} - \boldsymbol{\mu}_{\xi} + \mathbf{z}_{\beta} \boldsymbol{\sigma}_{\xi} &\leq 0, \quad \mathbf{v}^{(\infty)} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como la Ecuación 2.27 es igual a la Ecuación 2.22, se puede decir que usar los modificadores de la Ecuación 2.25 permite encontrar un punto que resuelve el problema con adaptación de modificadores (Ecuación 2.24) incorporando un nivel de cumplimiento de las restricciones, cuando variables estocásticas están involucradas. \square

Observación. La definición del modificador $\boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}^{(k)}$ de la ecuación 2.25 corresponde a una particularidad asociada al supuesto de la normalidad de la distribución de probabilidad de la variable $\boldsymbol{\xi}$. Un caso más general se puede proponer, de tal forma de definir un modificador estocástico $\boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}^{(k)} := \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + \boldsymbol{\Xi}'_{\beta}$, donde $\boldsymbol{\Xi}'_{\beta}$ da cuenta de la forma de la distribución de probabilidad, junto con el límite de confianza impuesto en la optimización probabilística.

Para evaluar el desempeño del algoritmo desarrollado se presentan dos ejemplos: un problema convexo de referencia y posteriormente, un sistema de procesos.

2.4. Ejemplo de aplicación *sRTO* con *MA*: Problema convexo de referencia

Considerando el problema de optimización (Ecuación 2.28) presentado en (Bonvin et al., 2009), en el cual se ha modificado, con respecto al original para incluir un límite estocástico ξ en la restricción de desigualdad C .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) &:= (u_1 - \alpha_1)^2 + 4(u_2 - 2.5)^2 \\ \text{s. t. } C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \xi) &:= (u_1 - \alpha_2)^2 - 4(u_2 - \alpha_4)\alpha_3 \leq \xi \\ \mathbf{u} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

El problema consiste de dos variables de decisión $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$, 4 parámetros $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]^T$, los cuales se definen para diferenciar el modelo disponible de una realidad simulada, y una restricción C dependiente de una variable aleatoria ξ , de promedio μ_ξ y desviación estándar σ_ξ . La Tabla 2.1 resume los valores de los parámetros y las características de la variable estocástica, considerados en el modelo y en el proceso.

Tabla 2.1. Valores de los parámetros, promedio y desviación estándar de la variable estocástica.

	Parámetros				Variable estocástica	
	α_1	α_2	α_3	α_4	μ_ξ	σ_ξ
Proceso	3.5	2.5	-0.4	1.0	2.0	0.1
Modelo	2.0	1.5	-0.5	0.5	2.0	-

Para encontrar el óptimo del proceso se aplica la metodología de adaptación de modificadores, partiendo del punto óptimo del modelo. Para lidiar con el comportamiento aleatorio de \mathbf{C} , se aplica el método de *sRTO* con adaptación de modificadores según la Ecuación 2.24, con los modificadores definidos en la Ecuación 2.25 y usando los filtros con una ganancia de $K_\varepsilon = K_\gamma = K_\lambda = 0.8$

(Ecuación 2.8). El problema de optimización se resuelve de manera iterativa para una probabilidad de 97.5% de satisfacción de la restricción ($z_\beta = 1.95$) y se compara con el resultado al no incluir la información probabilística y solo considerar el valor promedio de la variable estocástica.

Como se aprecia en la Figura 2.6, partiendo desde el punto óptimo del modelo (M), el algoritmo propuesto converge al óptimo del proceso (P^*). El punto alcanzado satisface la restricción un 97% de las veces. En contraste, la solución determinista, que toma en cuenta solo el valor promedio de ξ , converge en el punto (P) que solo es factible un 50% de las veces ante distintos escenarios de ξ .

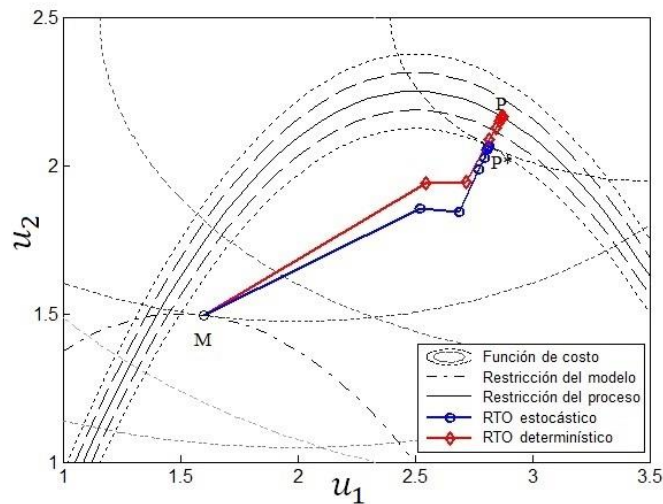


Figura 2.6. Ejemplo de adaptación de modificadores incluyendo información estocástica. Línea discontinua y línea punteada alrededor de la restricción del proceso representan una y dos desviaciones estándar de ξ , respectivamente.

La Tabla 2.2. detalla los puntos relevantes, su evaluación en la función de costo y restricción del proceso y el porcentaje de satisfacción de la restricción ante simulaciones de la variable estocástica.

Tabla 2.2. Puntos relevantes y su evaluación en el ejemplo de proceso.

	u_1	u_2	J_p	C_p	% Satisfacción de C_p
M	1.60	1.49	7.65	1.6	
P	2.87	2.16	0.85	2.0	50%
P*	2.81	2.06	1.23	1.8	97%

Al comparar los puntos óptimos del proceso alcanzados, se observa que usar la metodología propuesta aumenta el valor de la función de costo en un 44.7%, respecto a la solución determinista. Sin embargo, la satisfacción de la restricción, ante distintos escenarios de ξ , aumenta de un 50 % a un 97 %. La metodología propuesta encuentra un punto óptimo más costoso, pero que cumple significativamente más veces la restricción del proceso.

2.5. Ejemplo de aplicación *sRTO* con *MA*: Circuito *rougher* de flotación

En este trabajo se propone implementar la metodología de *RTO* con adaptación de modificadores incluyendo información estocástica en un circuito *rougher* de flotación a escala laboratorio. Debido a que la flotación es un proceso complejo no completamente comprendido, sujeto a variables inciertas y que en general se opera de manera no óptima, nace la oportunidad de estudiar el posible beneficio de implementar una capa de optimización que trate con múltiples fuentes de incertezas. Este ejemplo tiene como finalidad mostrar cómo se aplica la metodología propuesta en un sistema experimental, bajo condiciones de trabajo controladas. Bajo dichas condiciones y en base a algunos supuestos que se harán al definir las funciones objetivo y de restricción, el sistema experimental dista de una operación real de flotación, aun así, los resultados obtenidos entregarán información relevante sobre el impacto del método propuesto en sistemas complejos, tal como lo es la flotación.

2.5.1. Definición de modelo

El modelo utilizado se basa en el trabajo de Yianatos et. al. (2012), sobre modelación y simulación de circuitos *rougher* de flotación. A partir de datos de propiedades mineralógicas de alimentación, variables operacionales y parámetros de diseño del

circuito, es posible obtener los resultados metalúrgicos de interés: ley de cobre en el concentrado y recuperación por especie.

Los principales supuestos del modelo implementado se detallan a continuación.

Supuestos de alimentación

Se consideró una alimentación compuesta por una mezcla de mineral y agua, las especies mineralógicas consideradas son:

- Calcopirita ($CuFeS_2$)
- Calcosina (Cu_2S)
- Pirita (FeS_2)
- Ganga

Los minerales sulfuros de cobre son considerados especies valiosas.

Modelo de distribución de tamaño de partículas

Se considera que los sólidos están compuestos por tres clases de tamaño (fino, medio y grueso). En cada clase es posible encontrar, en distintas proporciones, cualquiera de las especies mineralógicas consideradas. Cada clase de tamaño otorgará a las especies minerales distintas propiedades de flotabilidad, lo que conlleva a que cada especie en cada tamaño tenga una recuperación distinta a las demás. Las clases de tamaño consideradas se presentan en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3. Calificación por clase de tamaño.

Malla ASTM-E 11/95	Tamaño	Clase
+100#	+150 μm	Grueso
-100+325#	45-150 μm	Medio
-325#	-45 μm	Fino

El agua es un elemento más considerado en la alimentación y en la simulación de las celdas. Se utiliza un modelo con una función de decaimiento exponencial para estimar su recuperación (Yianatos et. al., 2012).

Se considera que el único parámetro disponible para describir la granulometría del mineral que ingresa al circuito es el porcentaje de material grueso +100#. Mediante análisis granulométricos de alimentación (Carrasco, 2010) y a partir de un ajuste de Gaudin-Shuhmann (Gupta & Yan, 2006) (Ecuación 2.29) es posible determinar la relación entre el parámetro s de la distribución y el porcentaje del grueso (Ecuación 2.30).

$$Y = \left(\frac{d}{d^*}\right)^s \quad (2.29)$$

$$s = 0.0123 \cdot (+100\# [\%]) + 0.138 \quad (2.30)$$

Donde Y es el porcentaje de pasante acumulado de tamaño d , d^* un parámetro de tamaño y s un parámetro de la distribución.

Usando la Ecuación 2.31 es posible estimar el porcentaje de fracción fina -325#.

$$-325\# [\%] = \left(\frac{d_{fino}}{d_{max}}\right)^s \quad (2.31)$$

Donde d_{max} es el parámetro de tamaño dado por el diámetro máximo de alimentación al circuito y d_{fino} es el diámetro característico de la clase fina.

Por balance de materia se determina -100 + 325#, el porcentaje de material intermedio (Ecuación 2.32).

$$-100 + 325\# [\%] = 100 - (-325\#) [\%] - (+100\#) [\%] \quad (2.32)$$

Para modelar la distribución de tamaño por especie mineral se utilizaron valores reportados en planta para la calcopirita y la pirita (Carrasco, 2010). Por falta de información de planta para la especie calcosina, se asume una distribución de tamaño igual al de la especie calcopirita.

La distribución de tamaño por especie mineral se modela realizando una regresión polinomial de tercer grado respecto a al porcentaje grueso, análisis realizado en base al

trabajo de Cortés (2016). La Ecuación 2.33 muestra la forma genérica del ajuste, siendo a_i , b_i y c_i los parámetros para cada especie mineral.

$$Y_{especie_i} = a_i(+100\#)^3 + b_i(+100\#)^2 + c_i(+100\#) \quad (2.33)$$

Donde $Y_{especie_i}$ es la fracción gruesa de la especie i .

Con los modelos de distribución de tamaño de partícula es posible caracterizar la alimentación por clase de tamaño. Una vez clasificada la alimentación se procede a la modelación del circuito de flotación.

Supuestos para la modelación

- Se consideran como minerales valiosos la calcopirita y calcosina, los cuales serán recuperados mediante flotación verdadera.
- La recuperación del material no flotable (ganga), estará correlacionada con la recuperación del agua.
- El régimen de mezclado se considera como dos estanques perfectamente agitados en serie, uno pequeño y otro grande.
- Se considera que el circuito trabaja con celdas autoaspirantes por lo cual la velocidad superficial de gas en cada celda será la misma y tendrá un valor en el rango 1.2 - 1.6 cm/s.
- Las constantes cinéticas de las especies se modifican a lo largo de la línea de flotación.
- El factor de estabilidad de espuma, así como también la recuperación de agua y recuperación de espuma cambian a lo largo del banco.
- Existen recuperaciones máximas asociadas a cada una de las especies minerales valiosas por clase de tamaño, al igual que para el agua. Estas recuperaciones máximas serán constantes en todo el circuito.
- Se supone un factor de estabilidad de espuma que dependerá en forma proporcional de la cantidad de mineral valioso recuperado en la zona de colección.

- Se asume que la línea de flotación está compuesta por 7 celdas de flotación en serie en un esquema 1-1-1-1-1-1-1.

Modelo de flotación

Para efectos de modelación y análisis, se distinguen dos zonas en una celda de flotación: la zona de colección, donde se forma el agregado partícula-burbuja y se transporta a la interfaz por flotación verdadera, y la zona de limpieza (o zona de espuma), donde las partículas entrantes tienen la posibilidad de caer de nuevo a la zona de colección (Yianatos et. al., 2012). La recuperación global R_G de cada especie mineral en cada clase de tamaño dependerá de su recuperación en las zonas de colección R_C y espuma R_F , según el balance de materia del modelo de dos fases (Finch & Dobby, 1990) (Ecuación 2.34).

$$R_G = \frac{R_C R_F}{1 - R_C(1 - R_F)} \quad (2.34)$$

A continuación, se describen los modelos utilizados en cada zona de flotación.

Zona de colección

La recuperación en la zona de colección se describe a partir de la expresión general que se muestra en la Ecuación 2.35 (Yianatos, 2007, Yianatos et al., 2012).

$$R_C = R_{MAX} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - e^{-k \cdot t}) \cdot E(t) \cdot F(k) dt dk \quad (2.35)$$

Donde R_{MAX} es la recuperación máxima de flotación en tiempo infinito, $(1 - e^{-k \cdot t})$ representa la recuperación de mineral de un proceso de primer orden con constante cinética k invariante como función del tiempo, $E(t)$ es la función distribución de tiempo de residencia para el proceso continuo con diferente nivel de mezclado y $F(k)$ es la función distribución de la constante cinética para especies minerales con diferentes velocidades de flotación.

Los diferentes términos se explican a continuación.

Función distribución de tiempo de residencia

Se caracteriza la hidrodinámica de la celda de flotación a través de la función distribución de tiempo de residencia. Diversos estudios basados en evidencia experimental demuestran que el modelo de estanque grande y estanque pequeño en serie (*LSTS*) permite representar de manera adecuada el comportamiento hidrodinámico en las celdas de flotación (Yianatos et. al., 2008a, Yianatos et. al., 2012). Este modelo consiste en considerar la celda de flotación como un mezclador perfecto grande en serie con un mezclador perfecto pequeño, los cuales tiene tiempos de residencia τ_l y τ_s , respectivamente y se incluye un tiempo muerto τ_p . El modelo de función distribución de tiempo de residencia resultante se muestra en la Ecuación 2.36.

$$E(t) = \frac{\exp\left(-\frac{t-\tau_p}{\tau_s}\right) - \exp\left(-\frac{t-\tau_p}{\tau_l}\right)}{\tau_s - \tau_l} \quad (2.36)$$

La razón entre τ_s y τ_l es cercana a 0.1 en celdas mecánicas. Para el cálculo de los tiempos de residencia se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones (Ecuación 2.37).

$$\begin{aligned} \tau_s + \tau_l = \tau &:= \frac{\text{Volumen efectivo de la celda [m}^3\text{]}}{\text{Caudal de alimentación [m}^3\text{min}^{-1}\text{]}} \\ \frac{\tau_s}{\tau_l} &= 0.1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donde τ es el valor del tiempo de residencia nominal de la celda de flotación.

Función distribución de constantes cinéticas

Existen varios modelos propuestos para evaluar la distribución de la tasa de flotación. Debido a su flexibilidad y al bajo número de parámetros necesarios se elige trabajar con el modelo rectangular definido en la Ecuación 2.38.

$$F_i^n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k_{max,i}^n} & , si \ 0 < k \leq k_{max,i}^n \\ 0 & , si \ k > k_{max,i}^n \end{cases} \quad (2.38)$$

Donde i representa la clase de tamaño de la especie mineral y n el número de celda.

Modelo de constantes cinéticas

Debido a que el mineral con las constantes cinéticas más altas es recuperado en las primeras celdas en la línea de flotación, se produce un comportamiento distribuido y decreciente para cada especie mineral a lo largo del circuito. La Ecuación 2.39 representa la caracterización del decrecimiento (Carrasco, 2010).

$$k_{razón} = \frac{k_{max,i}^n}{k_{max,i}^1} = \exp\left(-\left(\frac{n-1}{\delta_i}\right)^\chi\right) \quad (2.39)$$

Donde $k_{razón}$ representa la razón entre la constante cinética de la clase i en la celda n y la constante cinética de la misma clase en la primera celda, δ_i y χ son parámetros de ajuste.

Recuperación en la zona de colección

Tomando en cuenta las funciones de distribución descritas previamente, se resuelve la ecuación 2.35, para llegar a una expresión explícita de la recuperación (Ecuación 2.40).

$$R_{C,i}^n = R_{max,i} \left(1 - \frac{1}{k_{max,i}^n (\tau_s^n - \tau_l^n)} \ln\left(\frac{1 + k_{max,i}^n \tau_s^n}{1 + k_{max,i}^n \tau_l^n}\right)\right) \quad (2.40)$$

Respecto a la zona de espuma, las ecuaciones utilizadas para describir el comportamiento en esta zona se detallan a continuación.

Zona de Espuma

La Ecuación 2.41 es usada comúnmente para modelar la recuperación en la zona de espuma (Gorain et. al., 1998).

$$R_f^n = \alpha_{max} \cdot \exp\left(-\frac{\tau_f^n}{\beta_n}\right) \quad (2.41)$$

Donde α_{max} es la recuperación máxima en la zona de espuma, β_n es el factor de estabilidad de espuma en la celda n y τ_f^n es el tiempo de residencia medio del gas en la zona de espuma en la celda n , dado por la Ecuación 2.42.

$$\tau_f^n = \frac{H_f^n \varepsilon_g^n}{J_g^n} \quad (2.42)$$

Donde H_f^n es la profundidad de espuma, ε_g^n es la concentración media de gas en la zona de espuma y J_g^n es la velocidad superficial del gas (Ecuación 2.43) en la celda n .

$$J_g \left[\frac{cm}{s} \right] = \frac{\text{Flujo de aire que ingresa a la celda } [cm^3 s^{-1}]}{\text{Area transversal de la celda } [cm^2]} \quad (2.43)$$

Según información empírica, la estabilidad de la espuma en cada celda disminuye a medida que se avanza a lo largo del circuito, mientras que la selectividad de la espuma aumenta (Yianatos et. al., 2012). El factor de espuma se puede representar mediante la Ecuación 2.44.

$$\beta_n = \psi \cdot M_n \cdot R_C^n \quad (2.44)$$

Donde M_n corresponde a la cantidad de mineral valioso que ingresa a la celda n , R_C^n es la recuperación en la zona de colección de este mineral y ψ es un parámetro de ajuste.

Recuperación de agua

La recuperación de agua R_W se define como fracción de agua de alimentación W_F reportada en el concentrado W_C , según la Ecuación 2.45.

$$R_W = \frac{W_C}{W_F} \quad (2.45)$$

La recuperación de agua se puede modelar en función la de profundidad de espuma, la estabilidad de la espuma y la velocidad superficial de gas (Ecuación 2.46) (Yianatos et. al., 2012).

$$R_W^n = \xi_W \cdot \exp \left(- \frac{(H_f^n)^{\gamma_W}}{(\beta_n)^\eta \cdot J_g} \right) \quad (2.46)$$

Donde ξ_W es la máxima recuperación de agua, γ_W y η son parámetros de ajuste.

Recuperación de ganga

Un gran número de estudios han demostrado una fuerte correlación entre la recuperación de ganga y la recuperación de agua (Yianatos & Contreras, 2010). Para efectos de modelación se define un parámetro denominado factor de arrastre EF_i , la recuperación de ganga $R_{G,i}^n$ se modela a partir de éste, según la Ecuación 2.47.

$$R_{G,i}^n = EF_i \cdot R_W^n \quad (2.47)$$

El factor de arrastre por clase de tamaño i puede ser modelado a partir de la Ecuación 2.48 (Yianatos & Contreras, 2010).

$$EF_i = \exp\left(-0.693 \left(\frac{d_{p,i}}{\delta_g}\right)^\Phi\right) \quad (2.48)$$

Donde $d_{p,i}$ es el tamaño de partícula de la clase i , δ_g es un parámetro que corresponde al tamaño de partícula medio para $EF_i = 0.5$ y Φ es un parámetro de drenaje.

2.5.2. Inclusión de incerteza de modelo

A modo de incluir incertezas de modelo, se proponen diferencias en los valores de los parámetros relevantes usados en el modelo de la capa de optimización y el modelo usado en el simulador del proceso. A partir de este punto, se entenderá como “proceso” a los resultados obtenidos mediante el modelo del proceso y “modelo” como el modelo utilizado en la capa de optimización. Este trabajo solo considera diferencias paramétricas entre el modelo y el proceso, no se incluyen diferencias estructurales. Al abordar otros tipos de incertezas, se opta por hacer una primera aproximación al problema considerando únicamente cambios paramétricos. Se propone incluir cambios estructurales entre el modelo y el proceso en trabajos futuros. De todas formas, la metodología de *RTO* con adaptación de modificadores permite obtener convergencia a un óptimo local incluso en caso de incertidumbre estructural del modelo, por lo que se espera que los resultados no varíen, desde el punto de vista de la incertidumbre de modelo.

Se elige el conjunto de parámetros que más afectan a los resultados metalúrgicos, en términos de ley y recuperación de cobre ante una variación porcentual de los mismos. En base a ellos, se definen dos modelos, uno optimista y uno pesimista, con conjuntos de parámetros diferentes. El modelo optimista estima una recuperación mayor de las especies de interés y por lo tanto predice una ley y recuperación mayor de cobre, en comparación a los resultados obtenidos en el proceso. En contrapartida, el modelo pesimista prevé una recuperación menor de las especies de interés, por lo que predice menores leyes y recuperaciones de cobre.

Para el modelo optimista, se consideraron valores mayores en los parámetros de recuperación en tiempo infinito de las especies de interés, tanto en la zona de colección como en la zona de espuma. La Ecuación 2.49 presenta el cambio considerado en los parámetros de modelo, donde $(\cdot)_p$ denota el parámetro usado por proceso y $(\cdot)_{M1}$ los parámetros del modelo optimista, también referido como “modelo 1”.

$$\begin{aligned}(\alpha_{max})_{M1} &= 1.05 \cdot (\alpha_{max})_p \\(R_{max,i})_{M1} &= 1.05 \cdot (R_{max,i})_p\end{aligned}\tag{2.49}$$

Por otra parte, los parámetros usados por el modelo pesimista (modelo 2) se definen según la Ecuación 2.50.

$$\begin{aligned}(\alpha_{max})_{M2} &= 0.95 \cdot (\alpha_{max})_p \\(R_{max,i})_{M2} &= 0.95 \cdot (R_{max,i})_p\end{aligned}\tag{2.50}$$

Todos los demás parámetros usados por los modelos optimista y pesimista, son equivalentes a los usados por el simulador del proceso, ver Anexo A.

2.5.3. Condiciones de operación y límite de variables de decisión

Se define el valor de las variables de operación relevantes. El presente trabajo hace la suposición que las variables de alimentación permanecen invariantes a lo largo de la operación, ya que el objetivo es evaluar el efecto que tienen las incertidumbres de modelo y mercado en la optimización de procesos, y como puede mejorarse el

cumplimiento de las restricciones. Posteriormente, para ver el efecto de los cambios en las variables de alimentación sobre el algoritmo de optimización, se agregan perturbaciones que imitan el comportamiento real de un sistema de flotación, para evaluar las limitaciones de este desarrollo. Se asume que las celdas de flotación son celdas mecánicas autoaspirantes, por lo que la velocidad superficial de gas no es controlable y su valor se asume constante.

La Tabla 2.4, resume el valor de las principales variables operacionales utilizado.

Tabla 2.4. Valores fijos de variables operacionales.

Variable	Valor	Unidad
Velocidad superficial de gas J_g (en cada celda)	1.5	[<i>cm/s</i>]
Flujo de alimentación de sólidos +100#	165	[<i>kg/h</i>]
Porcentaje de sólidos	20	[%]
Ley de Cobre en la alimentación	40	[%]
	0.38	[%]

Se define la profundidad de espuma en cada celda como el conjunto de variables de decisión. La Tabla 2.5, muestra los límites considerados de las variables de restricción.

Tabla 2.5. Límites de operación de las variables de operación.

Variable de decisión	Límite inferior, u^L	Límite superior, u^U
Profundidad de espuma en cada celda.	3 [<i>cm</i>]	15 [<i>cm</i>]

Dados los parámetros del modelo, el valor de las variables operacionales y un valor de las variables de decisión, el modelo es capaz de predecir la recuperación de las diferentes especies y la ley de cobre en el concentrado del circuito. En base a estos resultados se define una función de costo en términos de beneficio económico.

2.5.4. Función objetivo

Lo flotación *rougher* es una etapa primaria de flotación, en ella se logran altas recuperaciones del material valioso a la vez que se elimina gran parte de la ganga. El concentrado de esta etapa es de baja ley y requiere etapas de limpieza posterior. De esta forma el producto de esta etapa no tiene las características necesarias para ser

comercializado como concentrado en sistemas reales. Por este motivo y para efectos de este trabajo, se asigna un valor ficticio de venta al concentrado *rougher*, que toma en consideración los costos de procesamiento necesarios para la limpieza y refinación del mismo.

Se implementa una optimización de carácter económico, que busca maximizar el beneficio en la operación, tomando en cuenta los ingresos asociados al valor del concentrado. Si bien en sistemas reales se toman en consideración el beneficio o costo por la flotación de las distintas especies químicas como el Hierro o Arsénico, que podría repercutir en la operación de etapas posteriores, en este trabajo se hace la suposición de que el beneficio está dado únicamente por venta de concentrado de cobre. Tampoco se considera explícitamente la pérdida por material valioso no flotado que abandona el sistema como relave en un circuito *RCS* convencional. Estas consideraciones están fuera de los alcances de esta tesis, pero se propone tomar en cuenta estos factores en trabajos futuros. Bajo estas suposiciones y debido a que los costos de operación no dependen de las variables de decisión, el beneficio de la operación se expresa según la Ecuación 2.51.

$$\text{Beneficio} = \text{Ingresos} \quad (2.51)$$

Donde los ingresos, expresados en unidades de beneficio económico por unidad de tiempo, dependen del flujo de concentrado F_{conc} y de su valor o precio P_{conc} (Ecuación 2.52).

$$\text{Ingresos} = F_{conc} \cdot P_{conc} \quad (2.52)$$

El modelo utilizado determina el flujo de concentrado en función de las variables operacionales y variables de decisión. Con respecto al valor del concentrado, existe una relación directamente proporcional entre la ley y su precio (Sonami, 2016). El producto del circuito *rougher* es un concentrado de baja ley que debe seguir a otras etapas de limpieza, previo a la refinación, con esto en mente y considerando los siguientes supuestos:

- Costo refinación: 12.5 c/lb
- Pérdida metalúrgica: 3.8 %
- Ley de concentrado: 26.21 %
- Recuperación: 90.98 %
- Cargo flotación: 29.85 [US\$/Ton min]
- Cargo stock: 2.32 [US\$/Ton min]
- Precio cobre 247.03 [cUS\$/lb]

Se proyecta el precio de concentrado en dólares por tonelada de concentrado en función de su ley (Sonami, 2016), como se aprecia en la Figura 2.7.

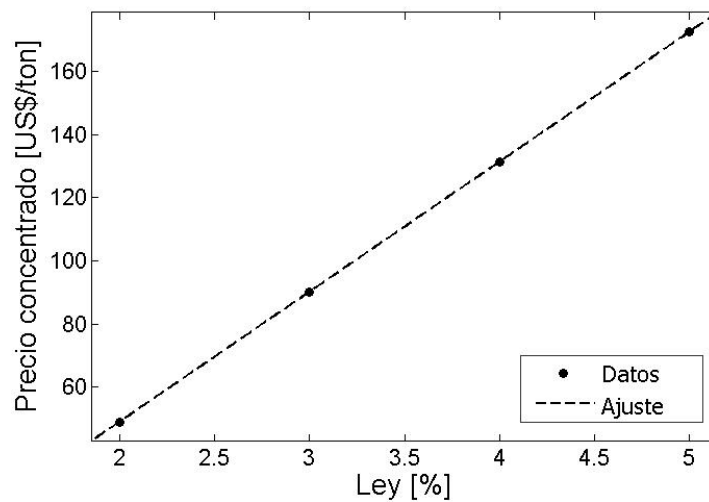


Figura 2.7. Proyección precio de concentrado en función de ley.

La ecuación de ajuste de carácter lineal obtenido corresponde a la Ecuación 2.53.

$$P_{conc} = 40.91 \cdot Ley_{conc} - 32.34 \quad (2.53)$$

La definición de función objetivo descrita a continuación se utiliza de manera particular para esta investigación, ya que permite observar el efecto de incluir la información estocástica en la RTO, al estar activa la restricción con influencia de este tipo de incertidumbre. En otros trabajos, Maldonado et. al. (2015) proponen una función objetivo que busca maximizar la recuperación de cobre global, por otra parte, Maldonado et. al. (2007), minimizan la ley de cobre en las colas de cada grupo de celdas.

Se busca maximizar el beneficio, equivalente a minimizar el negativo del beneficio, la función de costo queda determinada por la Ecuación 2.54.

$$\max_{H_f} \text{Beneficio} = \min_{H_f} (-F_{conc} \cdot P_{conc}) \quad (2.54)$$

Por lo tanto, se busca la configuración de profundidad de espuma en el circuito que maximice la utilidad, definida como el valor del concentrado.

2.5.5. Restricciones

Se consideran restricciones de carácter operacional, se asignan límites inferiores a los resultados metalúrgicos de ley (*Ley*) y recuperación (*Rec*) de cobre. En el caso de la ley se asume que, para una correcta operación en etapas posteriores, el concentrado obtenido en el circuito *rougher* debe cumplir con una calidad mínima, definida por un valor de ley mínimo.

Para efectos de este trabajo, se asume que el límite inferior de ley de concentrado requerido por el sistema está definido en base a los valores de diseño del mismo. Considerando la posibilidad de operar con leyes de concentrado levemente menores al valor esperado de diseño, se asigna un límite de ley mínimo $Ley^{LB} = 3.25$ [%], siendo el valor de diseño $Ley^{dis} = 3.6$ [%].

Por otra parte, considerando que el cobre no recuperado es descartado como relave de la planta y debido a la definición particular de función objetivo propuesta, se añade una restricción que limita la recuperación mínima del proceso a modo de delimitar las pérdidas de material valioso. En otros trabajos, la recuperación de cobre es incluida dentro de la función objetivo, como criterio a maximizar.

Un circuito de flotación real sigue un plan de producción, cuyo cumplimiento se condiciona por diversos factores, como la dureza del material, el contenido de arcillas, la composición mineral, etc. Como caso ilustrativo, en este trabajo se asume que la demanda del circuito, en vez de seguir un plan de producción, es incierta. A modo de incluir incertezas de tipo exógenas al problema, se asume que existe la necesidad de satisfacer una demanda mínima que depende de condiciones de mercado y que por lo tanto es incierta. Ante un primer escenario de variables de alimentación constantes, la

demanda se traduce en una recuperación mínima incierta. Se asume que, si bien el valor de la demanda es desconocido en tiempo real, es posible contar con información histórica que permita estimar la distribución de probabilidad de ocurrencia de la demanda.

A efectos de este trabajo, se consideró que se cuenta con la información suficiente de la demanda histórica de cobre y que ésta presenta una distribución de probabilidad normal con media $\mu_\xi = 13.4 [kg^{Cu}/día]$ y una desviación estándar de $\sigma_\xi = 0.1 [kg^{Cu}/día]$. En el caso de una alimentación y ley de alimentación constantes, la demanda se traduce en un límite de recuperación mínima con media $\mu_\xi = 89 [\%]$ y una desviación estándar de $\sigma_\xi = 0.5 [\%]$, dados los valores definidos en la Sección 2.5.3 de variables operacionales.

En base a lo discutido, se plantea el problema a optimizar según la Ecuación 2.55, donde $(\cdot)_p$ denota variables asociadas al proceso.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{H}_f} (-F_{conc} \cdot P_{conc})_p \\
& s. t. (Ley)_p \geq Ley^{LB} \\
& (Rec)_p \geq \xi, \xi \in \Xi, \xi \sim PDF(\mu_\xi, \sigma_\xi) \\
& 3 \leq H_{f,i} [cm] \leq 15, \forall i = 1, \dots, 7
\end{aligned} \tag{2.55}$$

El flujo de concentrado, la ley y recuperación de cobre en el concentrado se estimarán mediante los modelos propuestos en la Sección 2.5.1. Se agrega la expresión con adaptación de modificadores y se aplica la metodología de optimización estocástica propuesta. El problema de optimización aplicada al circuito *rougher* se formula según la Ecuación 2.56.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{H}_f} \left[- \left(F_{conc}(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \cdot P_{conc}(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \right) + \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{H}_f \right] \\
& s. t. Ley^{LB} - Ley(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\gamma}_{Ley}^{(k)T} (\mathbf{H}_f - \mathbf{H}_f^{(k)}) + \varepsilon_{Ley}^{(k)} \leq 0 \\
& \mu_\xi - Rec(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\gamma}_{Rec}^{(k)T} (\mathbf{H}_f - \mathbf{H}_f^{(k)}) + \varepsilon_{Rec\beta}^{(k)} \leq 0 \\
& 3 \leq H_{f,i} [cm] \leq 15, \forall i = 1, \dots, 7
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Los modificadores quedan definidos por la Ecuación 2.57.

$$\begin{aligned}
 \lambda^{(k)} &= \nabla_{\mathbf{u}}(-F_{conc} \cdot P_{conc})_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}}(-F_{conc} \cdot P_{conc})^{(k)} \\
 \gamma_{Ley}^{(k)} &= \nabla_{\mathbf{u}}(Ley)_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}}Ley^{(k)} \\
 \gamma_{Rec}^{(k)} &= \nabla_{\mathbf{u}}(Rec)_p^{(k)} - \nabla_{\mathbf{u}}Rec^{(k)} \\
 \varepsilon_{Ley}^{(k)} &= (Ley)_p^{(k)} - Ley^{(k)} \\
 \varepsilon_{Rec\beta}^{(k)} &= (Rec)_p^{(k)} - Rec^{(k)} + z_{\beta}\sigma_{\xi}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

El problema 2.56 se resuelve de manera iterativa. Se comparan las metodologías de modificadores anidados, optimización libre de derivadas y diferencias finitas para la estimación del gradiente. En cada iteración la capa de optimización propondrá nuevos valores de consigna de profundidad de espuma en cada celda, en base al beneficio, ley y recuperación de cobre observados. El sistema luego esperará un nuevo estado estacionario para actualizar la iteración.

La instalación experimental utilizada se detalla en el Capítulo 3 y los resultados obtenidos se presentan en el Capítulo 4.

3. INSTALACIÓN EXPERIMENTAL

Este capítulo contiene la descripción de los materiales y procedimientos utilizados en este trabajo. Particularmente, la descripción del circuito *rougher* de laboratorio como equipo experimental, además de los sistemas de supervisión y control aplicados. Incluye una descripción de la lógica de control, el sistema SCADA (*Supervisor Control and Data Acquisition*), detalles del simulador metalúrgico y detector de estado estacionario implementados.

3.1. Equipos experimentales

El equipo experimental es un circuito *rougher* de flotación de laboratorio situado en las dependencias del Departamento de Ingeniería Química y Ambiental de la UTFSM, campus San Joaquín. El sistema está compuesto físicamente por 3 celdas de flotación en serie y otras 4 celdas simuladas en un sistema 1-1-1-1-1-1, donde la cola de cada celda es la alimentación de la siguiente. Los concentrados son obtenidos en los rebalses superiores y la inyección de aire forzado se realiza por la parte inferior de cada celda por medio de difusores. La Figura 3.1. muestra las dimensiones de las celdas utilizadas.

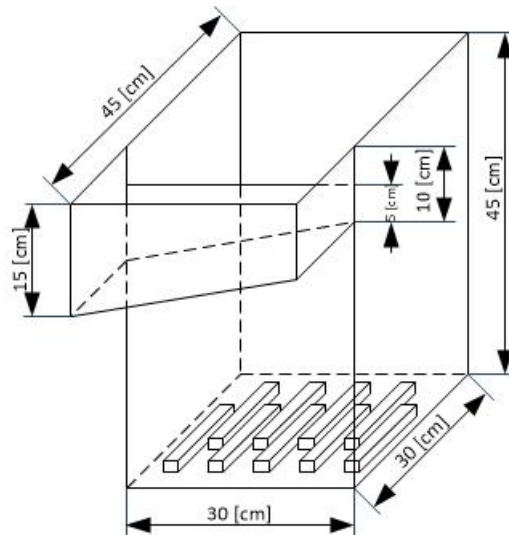


Figura 3.1. Especificación de las dimensiones de la celda de flotación.

La Tabla 3.1 detalla las principales características constructivas de las celdas en el circuito de laboratorio.

Tabla 3.1. Especificación de la celda *rougher* piloto.

Variable	Detalle
Largo	30 cm
Ancho	30 cm
Alto	45 cm
Volumen	36 L
Cantidad	3 reales, 4 simuladas
Material	Acrílico 5 mm
Rebalse	Un lado
Sistema de inyección de aire	Forzado
Tipo de difusor	Piedra porosa
Número de difusores	9 por celda
Tipo de agitación	Mecánica

Se consideraron 7 celdas de flotación en serie, sin embargo, el montaje experimental solo cuenta con 3 celdas físicas como se observa en la Figura 3.2. La primera celda TK-101 se alimenta con una mezcla de agua y espumante (MIBC) impulsada por la bomba peristáltica P-101 desde el estanque TK-104. La cola de la primera celda alimenta a la segunda celda TK-102 y la de la segunda pasa a la tercera TK-103. Finalmente, la cola de la tercera celda se descarga en el estanque TK-104. Los concentrados de las tres celdas se juntan y se descargan el estanque TK-104. Aire comprimido de la matriz de aire alimenta el sistema de difusores de cada celda pasando previamente por un regulador de presión. Se supondrá que la cola de la tercera celda física alimenta a la primera de 4 celdas en serie simuladas.

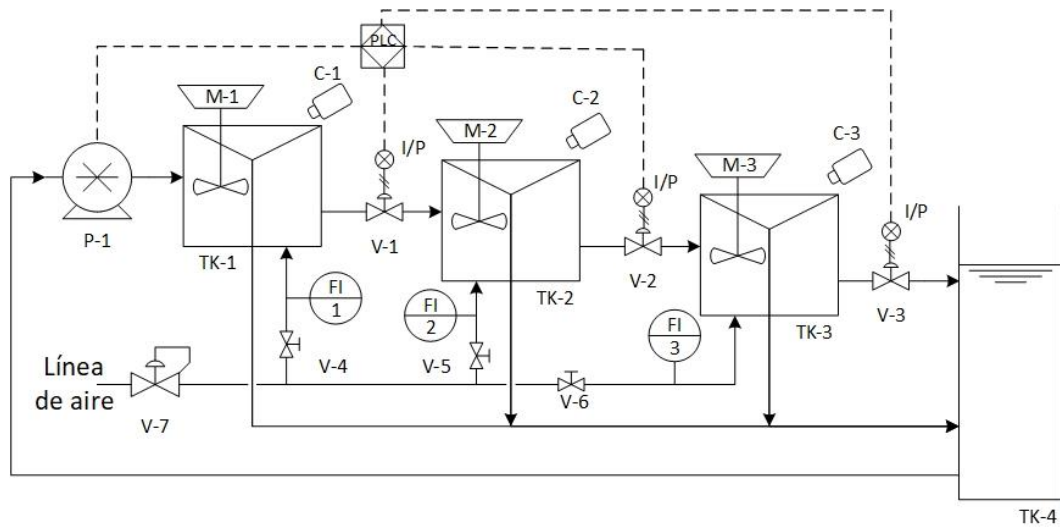


Figura 3.2. Circuito *rougher* de flotación de laboratorio.

El sistema de control está compuesto por medidores, actuadores y el controlador lógico programable. A continuación, se detallan los elementos relevantes.

Controlador lógico programable (PLC)

Es el cuerpo central del sistema de control distribuido o *DCS* según sus siglas en inglés. Se encarga de coleccionar y enviar las señales a los medidores y actuadores, respectivamente, junto con calcular las acciones de control y complementarias. El *PLC* utilizado en el presente trabajo corresponde a la marca *General Electric*[®], modelo *GE Fanuc* serie 90-30. El dispositivo permite programar e implementar la lógica de control para el proceso. Los componentes básicos del *PLC* son: placa base, fuente de poder, *CPU*, Módulos de entrada/salida y módulos opcionales.

Instrumentos

Entre los elementos presentes en el laboratorio se encuentran; una bomba peristáltica con doble cabezal, transductores *I/P*, válvulas neumáticas de control, rotámetros de flujo de aire y agitadores. Se incorporan adicionalmente cámaras web para la extracción de la medición de profundidad de espuma basada en visión artificial. Los equipos e instrumentos utilizados se detallan en la Tabla 3.2, para un mayor detalle ver Anexo B.

Tabla 3.2. Detalle de instrumentos.

Equipo/Instrumento	TAG	Descripción
Bomba peristáltica	P-1	Bomba <i>Masterflex</i> modelo L/S 77916-1 con dos cabezales modelo 77800-52 de 0 a 80 mL/s.
Celdas de acrílico	TK-1/2/3	Celdas de flotación de 36 L.
Estanque	TK-4	Estanque de alimentación de 150 L.
Agitadores	M-1/2/3	Agitadores mecánicos IKA RW-20 manuales de 60 a 2000 rpm.
Transductores	I/P	Transductores I/P <i>Fairchild</i> [®] <i>Electro-Pneumatic Transducers</i> modelos TA6000-401 y TTFI7800-401. Señal de 4-20 mA a 3-15 psi.
Válvulas de diafragma	V-1/2/3	Válvulas de control de nivel, <i>SAMSON</i> modelo 3241, de hierro fundido, Cv de 5 gal/min, con actuador neumático modelo 3271.
Rotámetro	FI-1/2/3	Rotámetro de aire <i>Parker</i> modelo LF-3135E de 20 y 135 L/min.
Válvulas de bola	V-4/5/6	Válvulas de paso de aire de 10 mm.
Regulador de presión	V-7	Fija presión de ingreso a circuito, presión máxima 10 bar.
Cámaras web	C-1/2/3	Cámaras <i>Microsoft</i> [®] LifeCam para la medición de nivel basada en visión artificial, captura de imagen o video a 1080p full-HD y 720p HD.

Se utiliza la metodología y el algoritmo desarrollado en Unzueta (2016), para extraer y exportar la medición de profundidad de espuma al sistema de control. Se utiliza un sistema de visión artificial basada en Filtros de Haar (Viola & Jones, 2004) para la extracción de la medición y el protocolo de comunicación de intercambio dinámico de datos (*DDE*) para la exportación al sistema de control.

3.2. Lógica de control

La lógica de control se programó en lenguaje tipo escalera (*Ladder*) usando el programa *Proficy Machine Edition 7.0* de *General Electrics*[®], ver Anexo C. La lógica de control implementada permite manipular la bomba de alimentación y las válvulas

reguladoras de flujo. El algoritmo de visión artificial exporta la medición de profundidad de espuma en cada celda al *PLC* usando *DDE*.

La Tabla 3.3 resume los elementos presentes en la lógica de control.

Tabla 3.3. Lista de variables.

Elemento	TAG	Dirección PLC	Módulo
Bomba peristáltica	P-1	%AQ0004	ALG392
Válvula cola 1	V-1	%AQ0001	ALG392
Válvula cola 2	V-2	%AQ0002	ALG392
Válvula cola 3	V-3	%AQ0003	ALG392
Profundidad de espuma 1	-	%R0801	-
Profundidad de espuma 2	-	%R0803	-
Profundidad de espuma 3	-	%R0805	-
<i>Set point</i> profundidad de espuma 1	-	%R0800	-
<i>Set point</i> profundidad de espuma 2	-	%R0802	-
<i>Set point</i> profundidad de espuma 3	-	%R0804	-

Se utiliza controles PI para mantener la profundidad de espuma regulando el flujo de colas en cada celda. Los parámetros del controlador se eligen usan el método de la curva de reacción de Cohen-Coon y se ajustan posteriormente de forma manual. La Tabla 3.4 detalla los parámetros utilizados por cada lazo de control.

Tabla 3.4. Parámetros de control de profundidad de espuma.

Celda	Parámetro proporcional (K_p)	Parámetro integral (τ_r)
Celda 1	6.0	10.0
Celda 2	7.5	4.0
Celda 3	9.0	4.0

El control PI no es suficiente para mantener el valor de consigna de la profundidad de espuma en cada celda debido al grado de acople que existe en el sistema en serie. Las perturbaciones que sufre cada celda afectarán a las celdas continuas, por lo que se necesita algún tipo de control más avanzado que un control PI. Se programa un control prealimentado que toma en consideración las acciones de control de las celdas

continuas y corrige la acción del control retroalimentado, de manera similar al visto en Durán (2014).

3.3. Sistema SCADA

Para el monitoreo y el control del sistema, se creó una Interfaz Humano-Máquina (*HMI*) que permite supervisar y manipular las variables del equipo de forma remota desde la sala de control. La interfaz se desarrolló en el programa *Wonderware® InTouch* 12.0, creando varias ventanas interactivas para monitorear la planta, los controladores, el sistema de optimización en tiempo real y el simulador metalúrgico. Las variables se vinculan con la dirección correspondiente en el *PLC*, al cual se comunica a través del *I/O Server* de *General Electrics®* llamado *GE Fanuc Host Communications (GEHCS)*.

Se detallan las ventanas creadas como interfaz.

Ventana Principal

La ventana principal de la interfaz gráfica (Figura 3.3) permite el monitoreo en línea de la operación del sistema completo, así como la manipulación de los actuadores, la modificación de los valores de consigna y el prendido o apagado del control automático. También se incluyen las variables relevantes de alimentación que son usadas por el simulador metalúrgico, así como los resultados metalúrgicos globales.

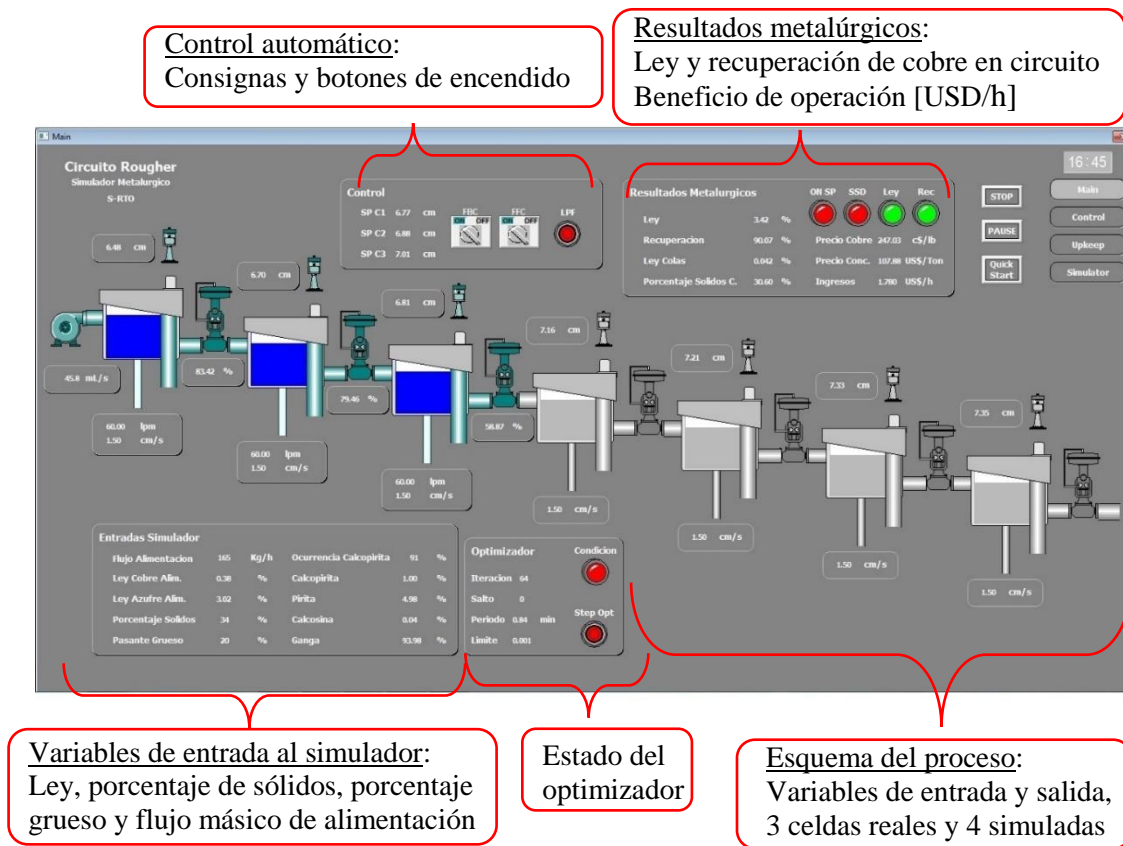


Figura 3.3. Ventana principal de la HMI.

Ventana de control

La ventana de control (Figura 3.4) permite monitorear el control de nivel en las tres celdas de flotación. Presenta los gráficos a tiempo real de la profundidad de espuma y porcentaje de apertura de válvula de colas en cada celda. Permite modificar los parámetros de cada controlador, así como activarlos y desactivarlos. Incorpora información sobre la medición basada en visión artificial.

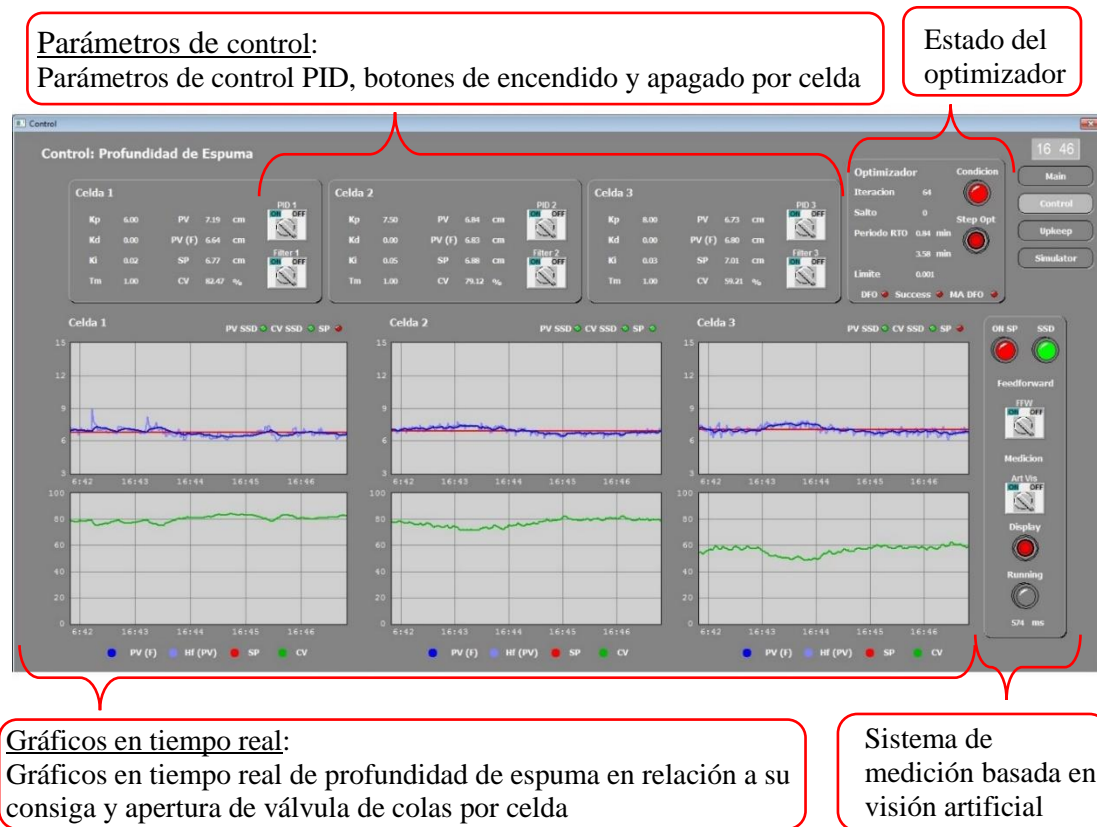


Figura 3.4. Ventana de control.

Ventana de mantención

Permite modificar los parámetros y monitorear los resultados de las aplicaciones implementadas, como los filtros de pasa baja, el detector de estado estacionario, el control prealimentado, el simulador metalúrgico, el sistema de visión artificial y el sistema de optimización en tiempo real, ver Figura 3.5.

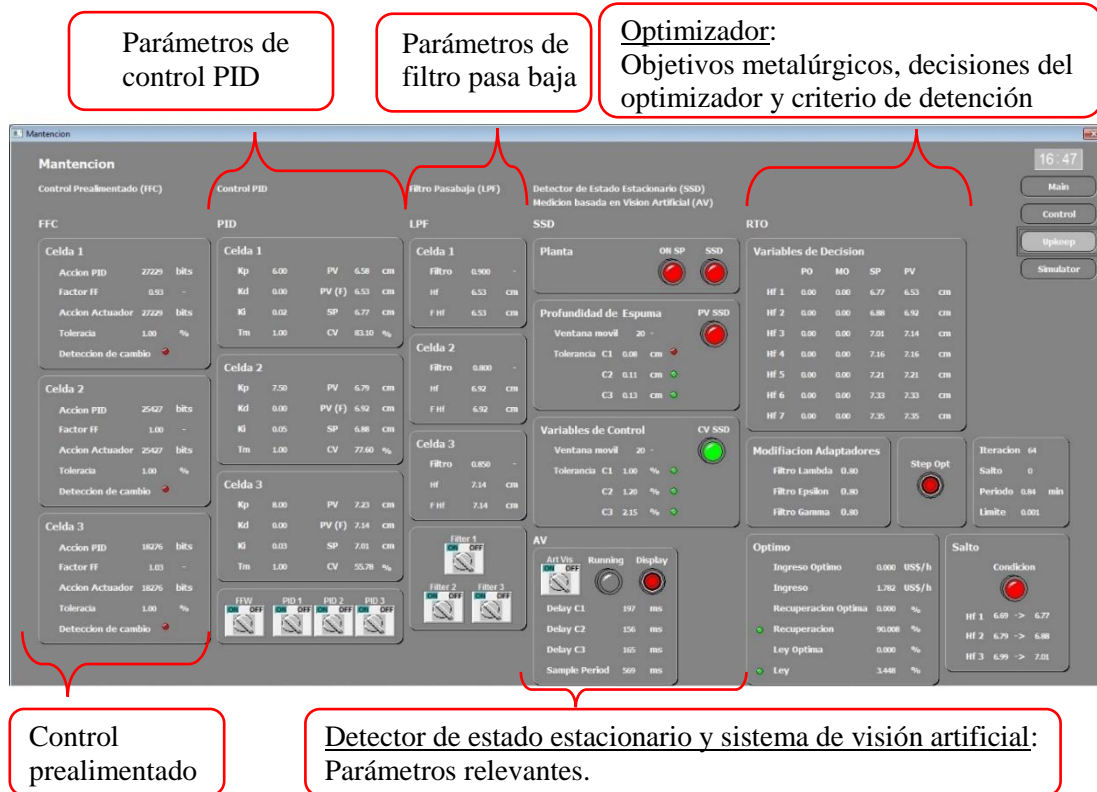


Figura 3.5. Ventana de mantención.

Simulador

La ventana del simulador metalúrgico (Figura 3.6) permite visualizar y modificar las propiedades de la alimentación: ley de cabeza de las especies de interés, porcentaje de sólidos, densidad de sólidos y porcentaje grueso. También, permite monitorear la ley y recuperación global de las especies de interés y el beneficio económico en el sistema. Se incluye información de la optimización en tiempo real, como el criterio de detención, el número de iteraciones y los resultados en relación con el óptimo teórico.



Gráficos en tiempo real de objetivos metalúrgicos (ley y recuperación de cobre en el concentrado) y beneficio económico de la operación [USD/h]

Figura 3.6. Ventana del simulador metalúrgico.

3.4. Simulador metalúrgico

El simulador metalúrgico implementado tiene la función de emular el comportamiento operacional de un circuito de flotación *rougher*. El modelo matemático utilizado por el simulador corresponde a la metodología descrita en la Sección 2.5.1. A partir de datos de propiedades mineralógicas de alimentación, variables operacionales y parámetros de diseño del circuito, es posible obtener los resultados metalúrgicos de interés: ley de cobre en el concentrado y recuperación por especie. El simulador se programa en Matlab®, se incluyen en el script las ecuaciones del modelo utilizado y por medio del protocolo de comunicación *DDE* se exportan los resultados al *SCADA*.

3.4.1. Ajuste de modelo y análisis de sensibilidad

Los parámetros del modelo se ajustan en base a los parámetros de Cortés (2016). Se realiza un análisis de sensibilidad del modelo, el cual indica cómo se comporta el simulador implementado ante cambios en las distintas variables modificables en el proceso *rougher*. Las variables a las que se aplicó el análisis de sensibilidad se muestran en la Tabla 3.5, donde se ven variables operacionales y de la alimentación.

Tabla 3.5. Valores de variable en análisis de sensibilidad.

Variable	Valor mínimo	Valor máximo	Valor fijo
Profundidad de espuma [cm]	3	15	9
Velocidad superficial de gas [cm/s]	1.2	1.6	1.5
Ley de Cu alimentación [%]	0.25	0.8	0.38
Sólidos en alimentación [%]	30	45	34
Gruoso (%+100#) [%]	18	26	20

Los resultados metalúrgicos, en términos de ley y recuperación de cobre en el concentrado, varían en función de las variables mencionadas. A continuación, se realiza un breve comentario de los principales efectos en los resultados metalúrgicos observados, las curvas relacionadas se encuentran en el Anexo D.

Cambio en profundidad de espuma

Como se espera fenomenológicamente, un aumento en la profundidad de espuma implica una mejora en la limpieza del mineral y un aumento en la ley de cobre en el concentrado, a costa de una reducción en la recuperación global.

Cambio en la velocidad superficial de gas

Un aumento en la velocidad superficial de gas implica una mayor un mayor arrastre de partículas hacia la zona de rebalse, lo cual aumenta el material colectado en la celda, tanto valioso como no valioso. Esto provoca un aumento en la recuperación global, pero una disminución en la ley de cobre en el concentrado.

Sensibilidad de ley de cobre del flujo de alimentación

El aumento de la ley de cobre de alimentación no genera cambios significativos en la recuperación global de las líneas de celdas, pero en lo que respecta a ley de cobre del concentrado se observa de manera importante, esto se debe a que existe mayor proporción de material valioso a recuperar.

Sensibilidad de porcentaje de sólidos de alimentación

El modelo utilizado no incluye de manera directa el efecto de la densidad de la pulpa sobre la cinética de flotación. Sin embargo, ésta afecta directamente la cantidad de mineral que ingresa a las celdas, lo cual provoca que exista mayor cantidad de sólidos implicando un leve aumento en la recuperación global, a costa de una disminución poco significativa la ley de cobre del concentrado.

Sensibilidad de porcentaje de sólidos gruesos de alimentación

No se observan cambios significativos en ley y recuperación dentro del rango evaluado. Se podría esperar una disminución de recuperación ante un aumento en la fracción gruesa, debido a la cinética de flotación más desfavorable para el material grueso. Respecto a la ley, si bien se espera la reducción de la recuperación del material valioso, también se reduce la recuperación de material no valioso asociado a la fracción gruesa. Los efectos superpuestos pueden explicar que no exista un cambio significativo.

3.4.2. Lógica del simulador metalúrgico

El objetivo del simulador implementado es representar el comportamiento metalúrgico de un circuito de flotación *rougher* constituido por un banco de celdas en serie en una configuración 1-1-1-1-1-1-1.

En el circuito de flotación las variables en cada celda se ven afectadas por el proceso en las celdas anteriores. Debido a esto, es que la resolución del circuito se programa de manera secuencial, donde inicialmente se resuelve la operación de la primera celda en base a las variables de alimentación, y posteriormente se resuelven las celdas continuas. Finalmente, se agregan los resultados de todas las celdas y se calcula la ley de cobre en el concentrado y colas y la recuperación global de cobre.

El simulador metalúrgico del sistema se programa en MatLab®, la Figura 3.7. representa la lógica del simulador implementado.

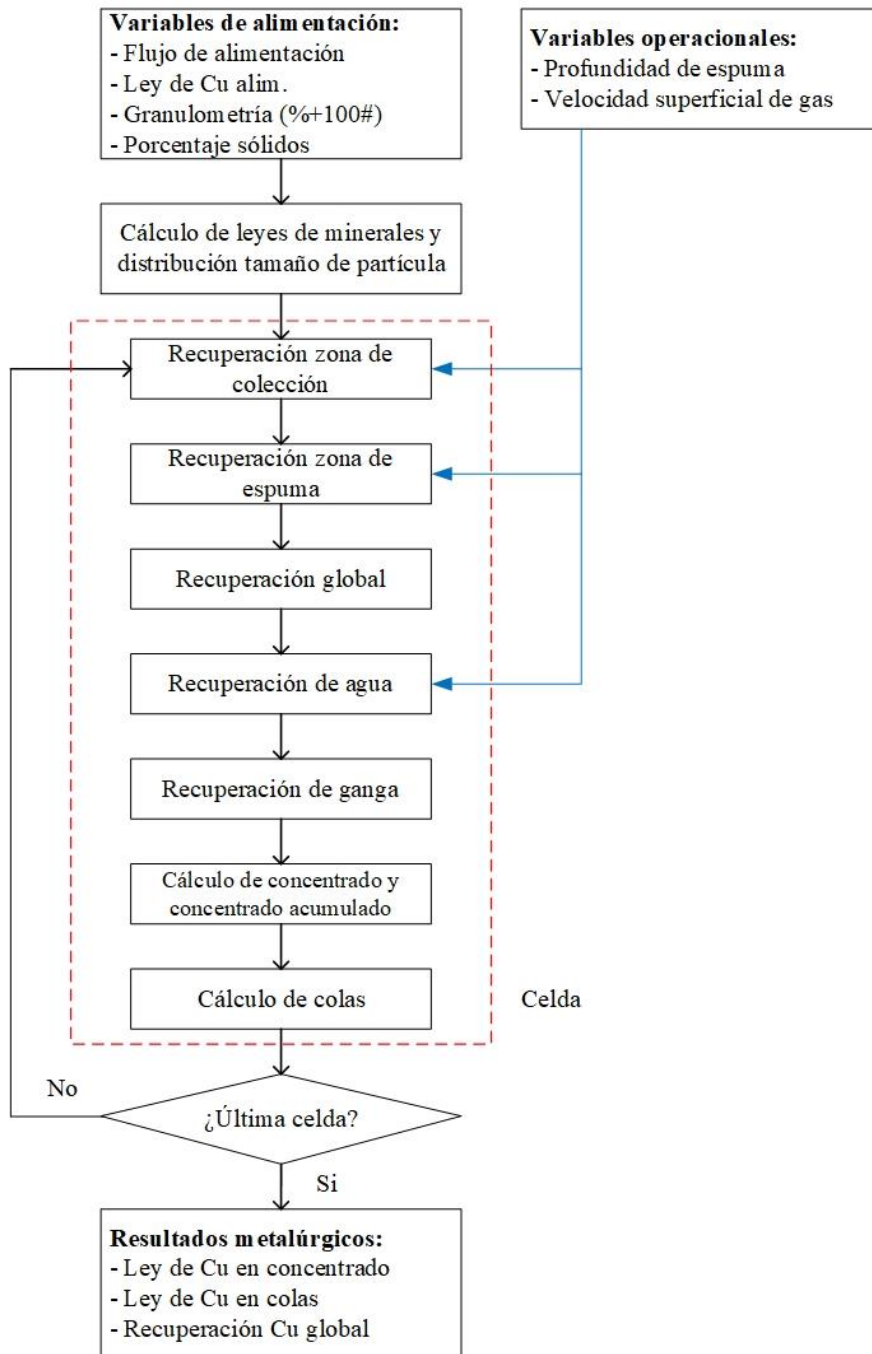


Figura 3.7. Lógica del simulador metalúrgico.

3.4.3. Perturbaciones de alimentación

Las variables de alimentación presentan variaciones importantes en la operación en línea. Con base en lo visto en el análisis de sensibilidad, estas variaciones afectarán en distinta medida los resultados metalúrgicos obtenidos en el circuito de flotación. Para poner a prueba el sistema de optimización propuesto en este trabajo, se debe someter el proceso a perturbaciones que emulen situaciones reales de operación. En este contexto, se busca recrear una señal de carácter aleatorio de las variables de alimentación que perturbarán el sistema. Para efectos de este trabajo se aborda la ley de cobre en la alimentación como la principal perturbación, debido a su gran frecuencia y magnitud de variación en sistemas reales, además de su fuerte efecto en los principales resultados metalúrgicos del circuito de flotación.

La señal se modela como un proceso de Markov (Honerkamp, 2013) definido por la Ecuación 3.1.

$$x_f^{(t)} = x_f^{(t-1)} + \Gamma w^{(t)} \quad (3.1)$$

Donde $x_f^{(t)}$, es la señal en tiempo t , $w^{(t)}$ sigue la distribución normal estándar y Γ es una magnitud ajustada para emular los cambios reales entre dos mediciones.

La Figura 3.8. Muestra una señal simulada en comparación con los datos de planta utilizados.

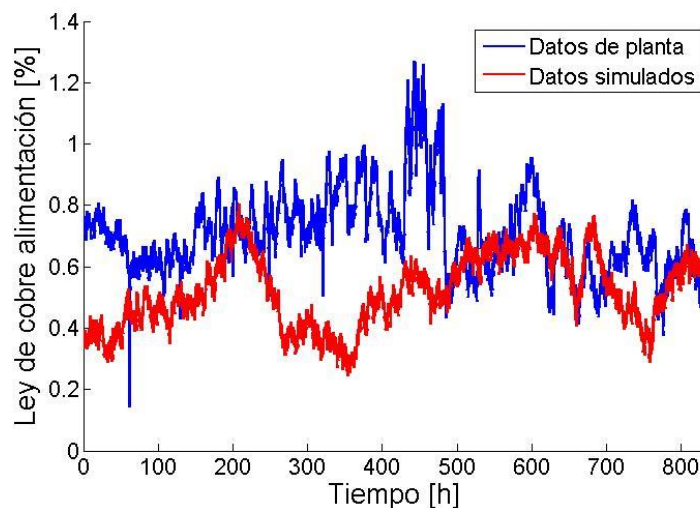


Figura 3.8. Señal de ley de cobre en la alimentación.

El sistema simulado considera en promedio una menor ley de alimentación, en comparación a los datos de planta utilizados. Si bien los sistemas son distintos, se espera que las variaciones sean similares. Para efectos de este trabajo, la señal obtenida es suficiente y solo se utiliza para análisis de desempeño del algoritmo bajo escenarios de perturbaciones. Imitar el comportamiento del circuito a escala industrial está fuera de los alcances de este trabajo. Sin embargo, evaluar el desempeño del algoritmo propuesto bajo situaciones similares a las vistas en la industria, permite evaluar las limitaciones de este desarrollo.

3.5. Detector de estado estacionario y filtro de datos

Es necesario identificar el momento en el cuál el sistema se encuentra en estado estacionario, debido a que en este punto los resultados metalúrgicos obtenidos mediante el simulador son representativos y los algoritmos de optimización tienen sustento teórico. Para esto se utiliza un algoritmo de detección de estado estacionario basado en la desviación estándar móvil (Kim et. al., 2008).

Debido al ruido presente en la medición de profundidad de espuma, se implementa un filtro exponencial de primer orden, ver Ecuación 3.2.

$$y_f^{(i)} = \lambda_f \cdot y_m^{(i)} + (1 - \lambda_f) \cdot y_f^{(i-1)} \quad (3.2)$$

Donde y_{m_i} es la variable medida en planta en el tiempo i , y_{f_i} el valor filtrado y λ_f la constante de filtro, la cual es ajustada experimentalmente.

El sistema se considera en estado estacionario cuando se cumple la Ecuación 3.3.

$$\sigma_Y^{(i)} \leq \sigma^{UB} \quad (3.3)$$

Donde $\sigma_Y^{(i)}$ es la desviación estándar del conjunto $Y^{(i)} := \{y_f^{(i)}, y_f^{(i-1)}, \dots, y_f^{(i-N)}\}$ en tiempo i , siendo $N + 1$ el largo de la ventana móvil y σ^{UB} el límite de detección, ambos parámetros ajustados experimentalmente.

Debido a que es posible encontrar zonas de estado estacionario, apartadas del valor de consigna y^{sp} , se incluye un detector de error respecto al mismo, tolerando un límite e^{UB} ajustado experimentalmente, ver Ecuación 3.4.

$$\left| \frac{y_f^{(i)} - y^{sp}}{y^{sp}} \right| \leq e^{UB} \quad (3.4)$$

Se implementa el detector de estado estacionario y detector de error en la medición de profundidad de espuma en cada celda. Una vez se detecte el estado estacionario y se satisfaga el criterio de error mínimo en cada celda, se considerará que el sistema completo está en estado estacionario.

3.6. Algoritmo implementado

Las etapas descritas de detección de estado estacionario, filtro pasa baja y simulador metalúrgico se programan en Matlab[®]. La rutina generada se encarga secuencialmente del cálculo de las diferentes aplicaciones y la comunicación con el *SCADA*, para la importación o exportación de información desde o hacia la *HMI* y consecuentemente al sistema de control. Se utiliza el protocolo de comunicación *DDE* para la comunicación entre Matlab[®] y *Wonderware[®] InTouch*. El código usado en Matlab[®] se adjunta en el Anexo E. La Figura 3.9. muestra la secuencia usada en la rutina programada, donde la línea segmentada indica flujo de información desde o hacia la *HMI*.

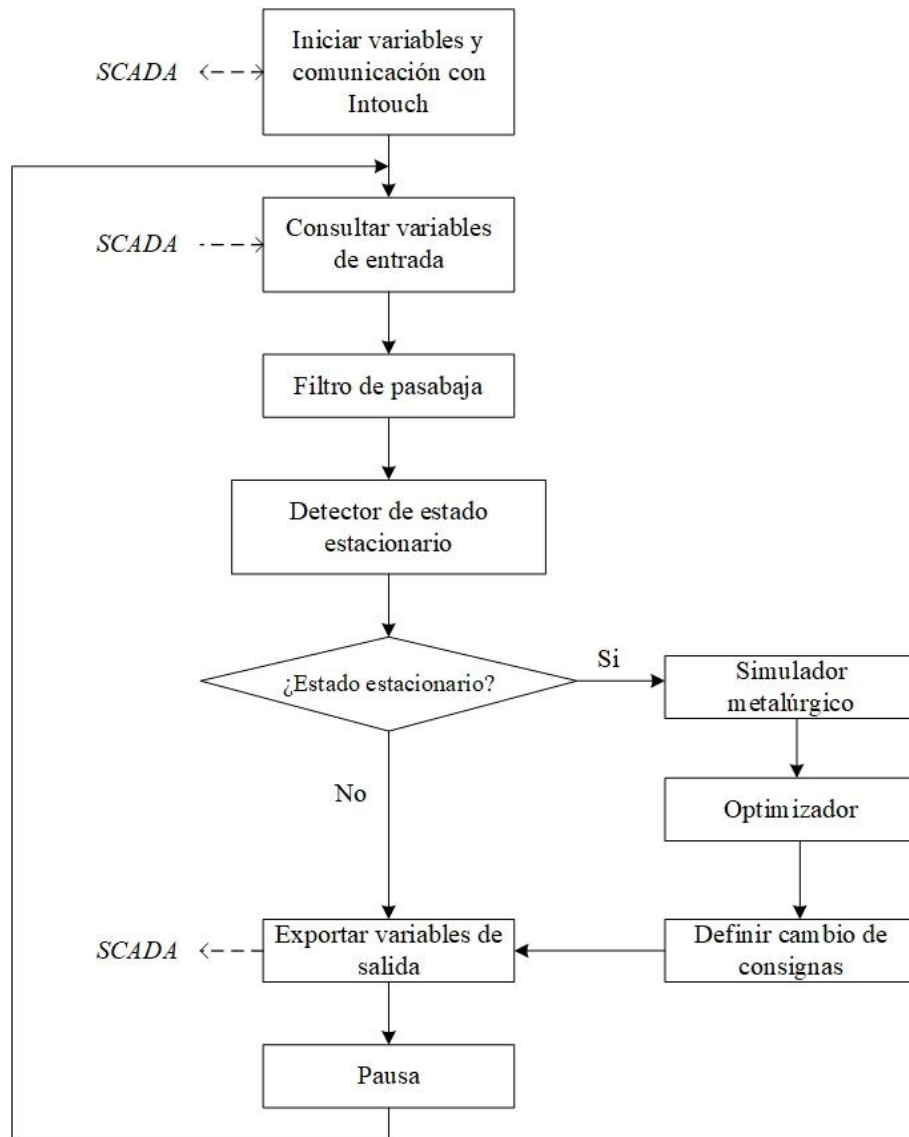


Figura 3.9. Rutina Matlab®, algoritmo implementado.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este capítulo contiene los resultados obtenidos en este trabajo al aplicar la metodología propuesta de *sRTO* con adaptación de modificadores en el circuito *rougher* de laboratorio. Particularmente, los puntos óptimos de operación que serán el objetivo a alcanzar por el sistema, los resultados en simulación que definirán los algoritmos a ser utilizados en línea y los resultados en línea que muestran el desempeño de los algoritmos de optimización para alcanzar puntos de operación económicamente óptimos y que satisfacen criterios de calidad y cantidad de producto. Los resultados en línea se dividen en dos escenarios, uno sin perturbaciones y un segundo con perturbaciones en variables de alimentación.

4.1. Puntos óptimos

Los puntos óptimos se dividen en dos: óptimo de modelo y óptimo de proceso. El óptimo del modelo define el punto de partida de los algoritmos de optimización y el valor de consigna inicial del sistema. Por otra parte, el óptimo del proceso se refiere al valor objetivo al que se espera el sistema converja. Este representa una operación óptima en términos de beneficio económico y de satisfacción de restricciones, cumpliendo los límites de ley y recuperación de cobre definidos en el circuito. Se consideró una condición constante de las variables de alimentación, los valores utilizados son los mencionados en la Sección 2.5.3 en la Tabla 2.4.

Óptimos del modelo

En primera instancia se define un punto inicial, dado por el punto de operación óptimo del modelo (Ecuación 4.1).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{H}_f} & -F_{conc}(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \cdot P_{conc}(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s. t. } & Ley(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \geq Ley^{LB} \\ & Rec(\mathbf{H}_f, \boldsymbol{\alpha}) \geq \mu_{\xi} \\ & 3 \leq H_{f,i} [cm] \leq 15, \forall i = 1, \dots, 7 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se resuelve el problema de optimización mediante el algoritmo *Sequential quadratic programming (SQP)* preprogramado en *Matlab*[®], utilizando ambos modelos matemáticos (optimista y pesimista) definidos en la Sección 2.5.2.

El algoritmo se inicia en un punto de operación arbitrario dado por $H_{f,i} = 9$ [cm], $\forall i = 1, \dots, 7$, el punto medio del rango de operación de la profundidad de espuma. Respecto la restricción de recuperación se asume un escenario de demanda promedio (μ_{ξ}). Para los modelos *M1* y *M2*, la progresión del algoritmo se observa en la Figura 4.1. y Figura 4.2., respectivamente.

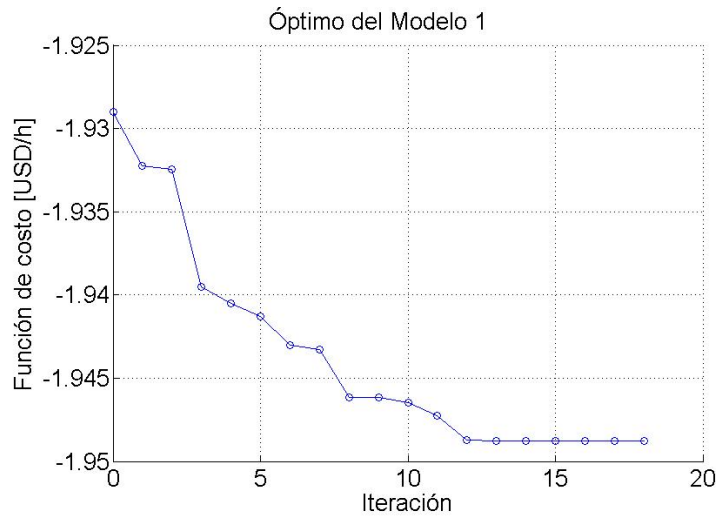


Figura 4.1. Optimización del modelo optimista.

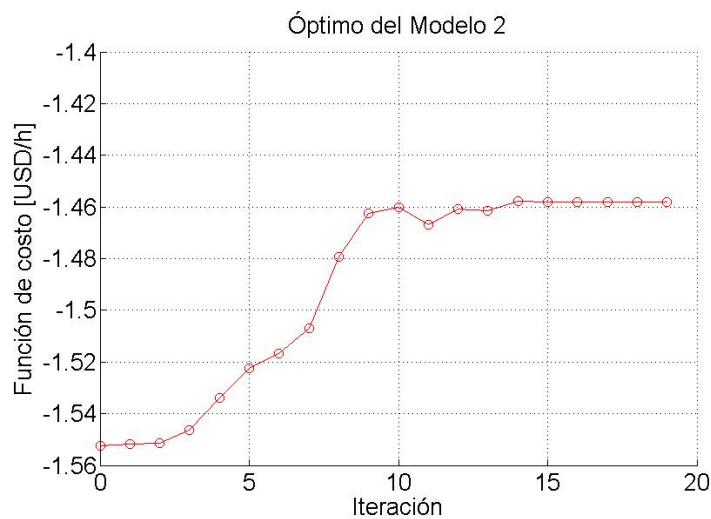


Figura 4.2. Optimización del modelo pesimista.

El óptimo del modelo 1 se encuentra satisfactoriamente, en cambio, no se encuentra un punto factible en el modelo 2. Se deben relajar las restricciones en dicho modelo, hasta encontrar un punto que satisfaga las restricciones. Al ser la recuperación el objetivo primario en un circuito *rougher* convencional, se reduce el límite inferior de la ley, manteniendo el límite en la restricción de recuperación. Los puntos de operación encontrados, así como sus predicciones de resultados metalúrgicos y beneficio, I, se resumen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Puntos de operación óptimos [cm] de los modelos 1 y 2. Ley, recuperación y beneficio predichos por los modelos.

	$H_{f,1}$	$H_{f,2}$	$H_{f,3}$	$H_{f,4}$	$H_{f,5}$	$H_{f,6}$	$H_{f,7}$	Ley [%]	Rec. [%]	I [USD/h]
$M1^*$	9.4	9.3	9.3	9.3	9.2	9.1	8.9	4.87	90.58	1.949
$M2^*$	4.7	5.0	5.3	5.6	5.9	6.1	6.4	2.18	89.00	1.458

Como se esperaba, el modelo 1 predice una situación optimista $M1^*$, donde la ley y recuperación son mayores a los límites establecidos. En cambio, el modelo pesimista $M2$ estima una baja ley para alcanzar el objetivo de recuperación predicho, en consecuencia, prevé un beneficio 25% menor que el modelo 1.

Se evalúa el desempeño de los puntos óptimos encontrados en el proceso simulado. Los resultados metalúrgicos en relación a sus límites inferiores y el beneficio real en el proceso, para cada punto de operación se resume en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Evaluación de puntos óptimos de los modelos en el proceso.

	Ley [%]	Límite Ley [%]	Rec. [%]	Límite Rec. [%]	I [USD/h]
$M1^*$ en P	3.93	3.25	88.43	89.00	1.815
$M2^*$ en P	2.86	3.25	91.18	89.00	1.696

Se observan resultados desfavorables al aplicar los óptimos del modelo en el proceso. En primera instancia, un modelo optimista estima recuperar más de lo que realmente se está recuperando, por lo tanto, presenta problemas para satisfacer la restricción de recuperación. Por otra parte, el modelo pesimista, tenderá a aumentar la recuperación a costa de violar la restricción de la ley. Ambos puntos óptimos de los modelos, implican una operación infactible en la planta. Se justifica entonces aplicar la

metodología optimización con adaptación de modificadores para intentar llegar a un punto de operación factible y óptimo en el proceso, aun partiendo desde modelos incorrectos.

Puntos óptimos del proceso

Dado que el proceso, en términos metalúrgicos, es simulado y se cuenta con el modelo matemático que lo emula, es posible encontrar de antemano el punto de operación que lo optimiza. Nuevamente utilizando el algoritmo *SQP*, se encuentra el punto de operación óptimo teórico del proceso, al resolver la Ecuación 4.1 usando el modelo del proceso. La Figura 4.3., muestra la progresión del algoritmo de búsqueda, partiendo desde el mismo punto arbitrario, utilizado en la optimización de los modelos.

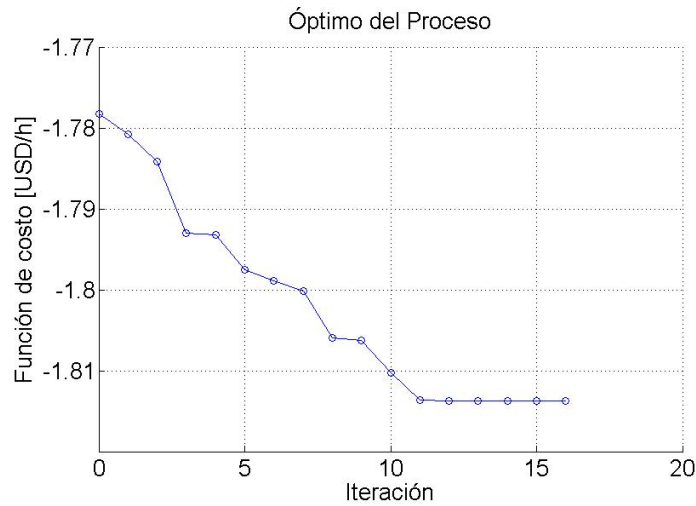


Figura 4.3. Optimización del proceso.

El algoritmo encuentra un punto óptimo que satisface las restricciones. La Tabla 4.3 detalla los valores operacionales resultantes.

Tabla 4.3. Punto de operación óptimo [cm], resultados metalúrgicos y económicos del proceso.

	$H_{f,1}$	$H_{f,2}$	$H_{f,3}$	$H_{f,4}$	$H_{f,5}$	$H_{f,6}$	$H_{f,7}$	Ley [%]	Rec. [%]	I [USD/h]
P^*	7.6	7.8	8.1	8.3	8.6	9.0	9.2	3.82	89.0	1.814

Como resultado se llega a un punto de operación donde la restricción de recuperación está activa, esto será relevante al incluir incertezas de mercado, suponiendo que la

demanda del producto es incierta, por ende, la recuperación mínima requerida es incierta. El óptimo del proceso P^* , se usará como referencia, al momento de comparar el desempeño de los algoritmos propuestos.

Finalmente, se busca un segundo punto óptimo del proceso, que satisfaga una restricción más estricta respecto a la recuperación, dada por $Rec^L = \mu_\xi + 2 \cdot \sigma_\xi$. Se resuelve la Ecuación 4.1 utilizando el modelo del proceso e incluyendo la restricción más estricta. La Figura 4.4 muestra las iteraciones del algoritmo SQP, partiendo desde el mismo punto arbitrario.

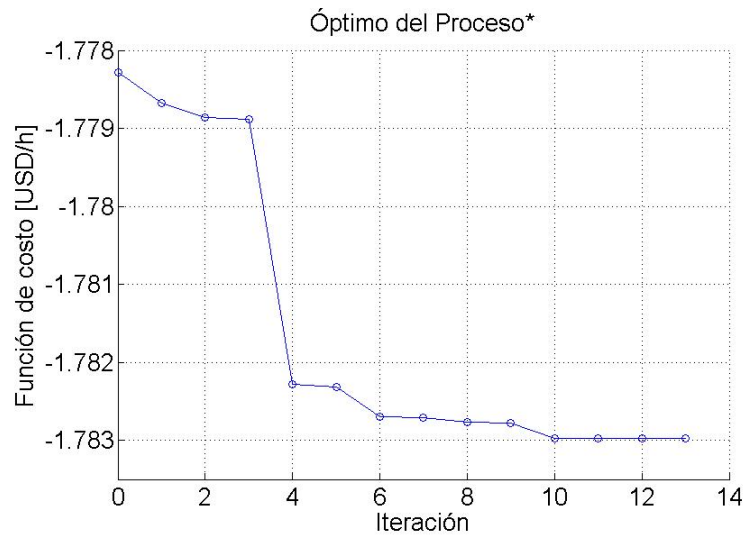


Figura 4.4. Optimización del proceso, incluyendo información estocástica.

Se alcanza un punto óptimo factible P_ξ^* . El detalle de los valores de operación, los resultados metalúrgicos y económicos se muestra en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Punto de operación óptimo [cm], resultados metalúrgicos y económicos del proceso, con restricción estricta.

	$H_{f,1}$	$H_{f,2}$	$H_{f,3}$	$H_{f,4}$	$H_{f,5}$	$H_{f,6}$	$H_{f,7}$	Ley [%]	Rec. [%]	I [USD/h]
P_ξ^*	6.8	6.9	7.0	7.1	7.2	7.3	7.3	3.45	90	1.783

Al considerar una restricción más estricta el beneficio del proceso cae un 2%, debido a la disminución en la ley que implica un menor valor económico del concentrado.

Se debe tener en consideración que los puntos óptimos del proceso obtenidos corresponden a un caso bajo condiciones de alimentación constantes. Se espera que los puntos de operación óptimos, así como los resultados metalúrgicos, varíen en caso de perturbaciones en las variables de alimentación.

Justificación de óptimos teóricos

A modo de tener una apreciación gráfica de la función objetivo y los puntos óptimos encontrados, se genera la Figura 4.5, que muestra las curvas de nivel de la función de costo y la restricción de recuperación de cobre del 90 [%] en dos de las siete dimensiones del problema. Modificando la profundidad de espuma en las celdas 1 y 3 en un sistema simulado, se calculan la ley y recuperación de cobre en el concentrado y el beneficio de la operación.

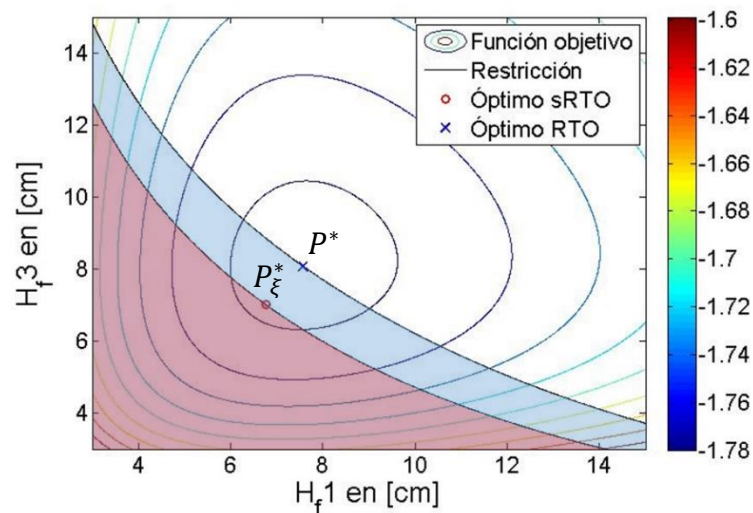


Figura 4.5. Función de costo y restricción de recuperación en 2 dimensiones. Áreas demarcadas representan zonas factibles.

Si bien lo observado en la Figura 4.5 es una simplificación del problema completo, al considerar solo dos de las siete dimensiones, presenta una idea general del comportamiento de la función de costo y la importancia de la restricción de recuperación.

Para estimar el cumplimiento de la restricción de recuperación, usada para ilustrar el desarrollo teórico de este trabajo al asumir que depende de una demanda incierta, se

realizan múltiples simulaciones con diferentes realizaciones de la variable estocástica y se estima la probabilidad de cumplimiento de la restricción. Si bien no se conoce en tiempo real el valor de la demanda, en base a información del pasado, es posible estimar una probabilidad de ocurrencia. La Figura 4.6 muestra un histograma de los valores aleatorios de ξ utilizados en 10,000 simulaciones de Monte-Carlo.

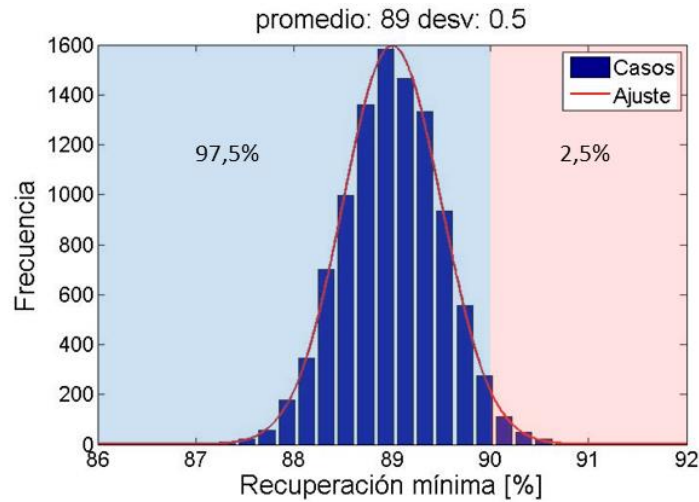


Figura 4.6. Casos de ξ para simulación y probabilidad de cumplimiento al 97%.

Ante los diferentes escenarios de ξ se estima el porcentaje de satisfacción de la restricción de demanda para ambos puntos de operación óptimos obtenidos. Los resultados obtenidos se aprecian en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Porcentaje de satisfacción de demanda, ante simulación de escenarios.

Punto	I [USD/h]	Recuperación [%]	% de satisfacción de demanda
P^*	1.814	89	50.2%
P_{ξ}^*	1.783	90	97.9%

Al comparar los puntos de operación óptimos teóricos y su grado de satisfacción de la demanda ante diferentes escenarios simulados se observa que, el incluir información estocástica y por lo tanto considerar una restricción más estricta, mejora considerablemente la probabilidad de satisfacer dicha demanda. El porcentaje de veces que se satisface la restricción aumenta de un 50% a casi un 98% de las veces al considerar un escenario más estricto, sin embargo, se observa la reducción en el

beneficio de la operación en cerca de un 2%. Existirá un compromiso entre el beneficio de la operación y el cumplimiento de las restricciones, el incluir la información estocástica representa un enfoque más conservador para el cumplimiento de las restricciones, lo cual será de mayor importancia cuando el no cumplimiento de las mismas tenga consecuencias negativas sobre la seguridad o la economía del proceso, por ejemplo, en caso de multas por el no cumplimiento de calidad o cantidad de producto.

Ambos puntos óptimos representan los puntos de operación objetivo a los que se debe apuntar: P^* corresponde al punto de operación de mayor beneficio económico, y P_{ξ}^* a un punto óptimo más conservador con las restricciones. El objetivo del algoritmo de optimización será alcanzar estos puntos de operación, utilizando modelos imperfectos, mediciones reales de laboratorio y bajo escenarios que emulen una operación de planta real.

4.2. Resultados en simulación

Previo a una implementación en línea, se prueban los algoritmos de optimización en tiempo real en un sistema simulado. Dada la ventaja de un entorno simulado, que evita los tiempos de espera de los transientes de un sistema real, es posible obtener una primera representación del desempeño de los algoritmos. Los resultados en simulación entregan una idea de lo que se esperaría obtener como resultado en el sistema real y permiten evaluar el desempeño de los algoritmos, antes de ser puestos en línea.

Como punto de partida se utiliza el punto óptimo del modelo 1 ($M1^*$) visto en la Tabla 4.1. Se prueban los algoritmos de optimización con adaptación de modificadores, usando diferencias finitas (FD) y el método de optimización libre de derivadas (DFO), para estimar los gradientes del proceso. Finalmente, se resuelve el problema de adaptación de modificadores anidados (NMA). Para cada método, se compara la solución del problema de optimización convencional (RTO) con el método de optimización estocástico ($sRTO$), el cual incluye información probabilística de la variable incierta ξ en las restricciones.

Diferencias finitas en simulación

La evaluación de la función de costo en cada iteración del algoritmo se aprecia en la Figura 4.7, se incluye información, sobre la factibilidad de cada iteración, es decir, si se satisfacen las restricciones. La línea segmentada y línea punteada representan la evaluación de la función de costo en los valores óptimos teóricos P^* y P_{ξ}^* , respectivamente.

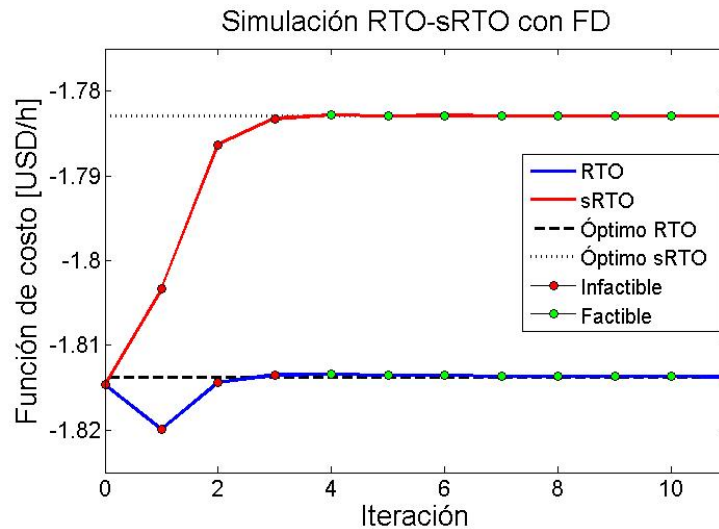


Figura 4.7. Simulación de optimización con diferencias finitas, función de costo.

Se observa que, partiendo desde el mismo punto de operación inicial, el algoritmo de optimización con adaptación de modificadores usando diferencias finitas, alcanza el punto óptimo de operación en cerca de 6 iteraciones, ya sea para el problema convencional como para el estocástico. Se debe tener en cuenta que cada iteración, representa la evaluación del proceso en $n_u + 1 = 8$ estados estacionarios. La evolución de los puntos de operación en cada celda se observa en la Figura 4.8, para el caso de la *RTO* y Figura 4.9, para el caso de la *sRTO*.

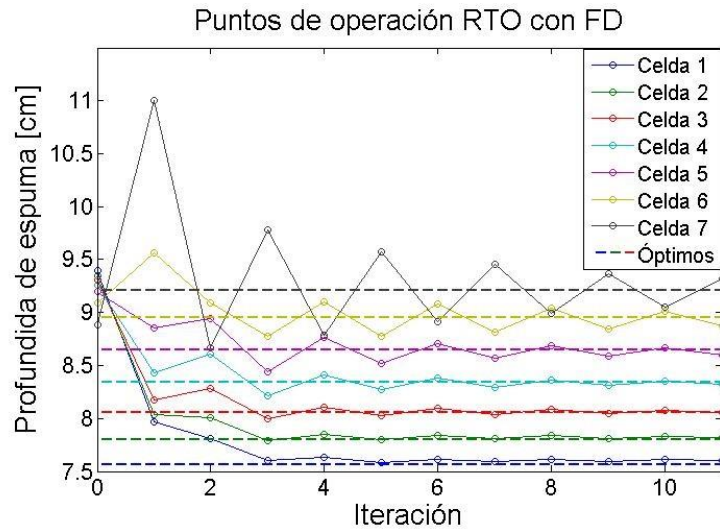


Figura 4.8. Simulación, evolución de puntos de operación en *RTO* con diferencias finitas.

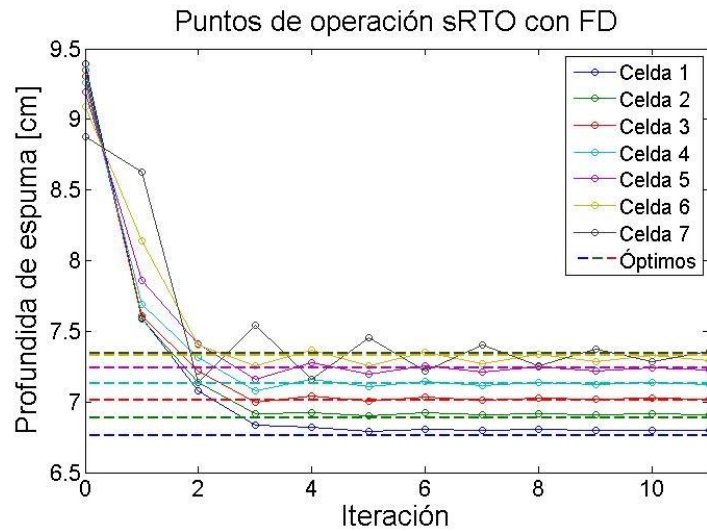


Figura 4.9. Simulación, evolución de puntos de operación en *sRTO* con diferencias finitas.

Se observa en ambas figuras, como la consigna de las variables de operación se aproximan de manera oscilatoria a su valor óptimo teórico. Los puntos alcanzados en las últimas iteraciones presentan un error menor a 0.1 [cm] respecto a su valor óptimo, equivalente a menos de 1% respecto al *spam*. El desempeño del algoritmo es satisfactorio, se podrá reducir la oscilación aumentando el valor de filtrado de los modificadores, a costa de una convergencia más lenta.

Finalmente, se grafican los estados de las restricciones por iteración. La Figura 4.10. muestra la evolución de los resultados metalúrgicos en comparación con los límites definidos. Se incluye la representación del límite probabilístico, graficando su valor medio y su valor \pm dos desviaciones estándar.

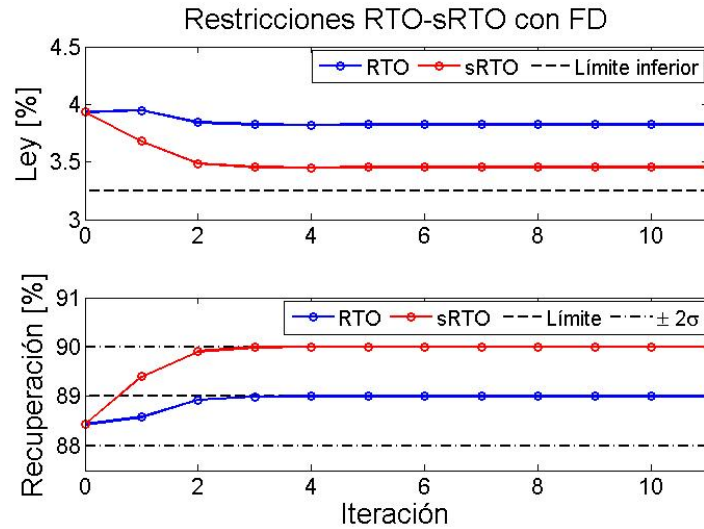


Figura 4.10. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización con diferencias finitas.

Partiendo de un punto infactible, se logra una operación factible luego de 6 iteraciones, para ambas optimizaciones. El cambio propuesto en la definición de los modificadores permite alcanzar un punto de operación con una restricción más estricta, lo que se espera aumente los casos de cumplimiento de la restricción ante distintas realizaciones de la variable incierta ξ .

Optimización libre de derivadas en simulación

Se repite el experimento en simulación, se inician la *RTO* y *sRTO* estimando el gradiente con diferencias finitas, luego al contar con suficientes puntos evaluados inicia la optimización libre de derivadas usando la aproximación cuadrática (Ecuación 2.12) para estimar el gradiente. La evolución del algoritmo se muestra en la Figura 4.11., donde la línea negra vertical señala el comienzo de la optimización libre de derivadas. La línea segmentada y línea punteada representan la evaluación de la función de costo en los valores óptimos teóricos P^* y P_{ξ}^* , respectivamente.

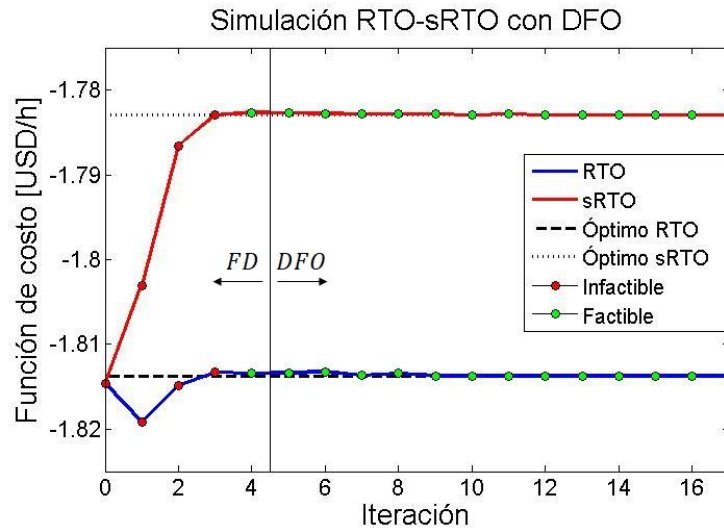


Figura 4.11. Simulación de optimización libre de derivadas, función de costo.

Luego de 4 iteraciones de diferencias finitas, una vez se tienen $(n_u + 1)(n_u + 2)/2 = 36$ evaluaciones en estado estacionario, inicia la optimización libre de derivadas. Si bien el punto alcanzado con diferencias finitas queda próximo al punto óptimo, un par de iteraciones del método mejoran la proximidad al óptimo real. Esto se ve de manera más clara en la Figura 4.12, para el caso de *RTO* y Figura 4.13, en el caso de la *sRTO*, que muestran la evolución de los valores de consigna de la profundidad de espuma en cada celda.

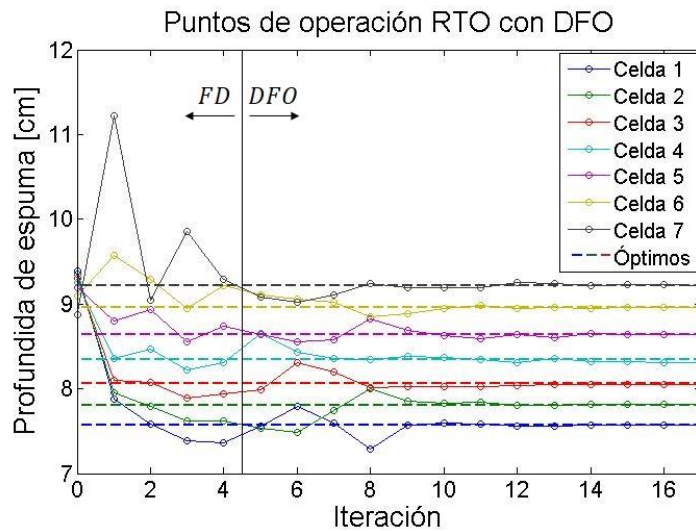


Figura 4.12. Simulación, evolución de puntos de operación en *RTO* con optimización libre de derivadas.

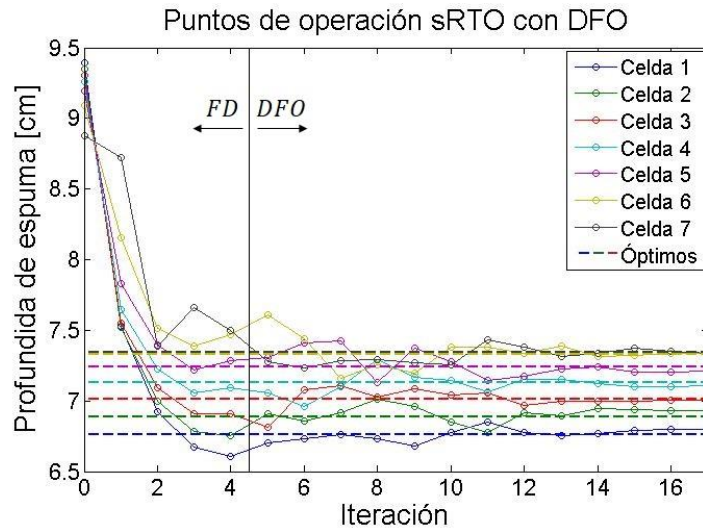


Figura 4.13. Simulación, evolución de puntos de operación en *sRTO* con optimización libre de derivadas.

La evolución de los puntos de operación, muestran una aproximación más suave y en menos iteraciones al valor óptimo teórico, logrando un error menor a 0.05 [cm] respecto al mismo, equivalente a 0,5% del *spam*.

En cuanto a la violación de las restricciones, la Figura 4.14. muestra los resultados metalúrgicos en comparación con los límites establecidos.

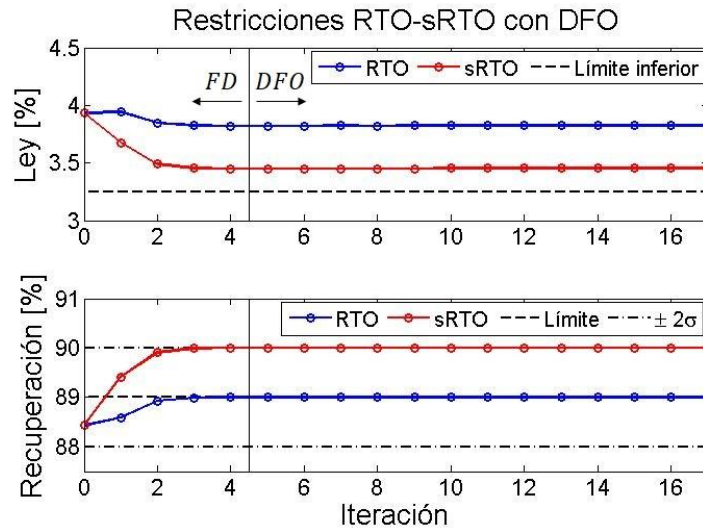


Figura 4.14. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización libre de derivadas.

La evolución de las restricciones es análoga al caso con diferencias finitas, la mayor diferencia es el menor número de evaluaciones del proceso en estados estacionarios, pues una vez inicia la optimización libre de derivadas cada iteración del algoritmo equivale a una única evaluación del proceso. Nuevamente, la optimización estocástica (*sRTO*) alcanza un objetivo más conservador con respecto a las restricciones.

Adaptación de modificadores anidados en simulación

El último algoritmo probado en simulación, previo a una implementación en línea, es la optimización anidada. Se toma en cuenta los resultados de la optimización con adaptación modificadores en la capa interna y no la capa de optimización externa que manipula los modificadores, debido a que dichos resultados son más relevantes a nivel de proceso. La Figura 4.15. muestra la evolución de la función de costo al evaluar el resultado propuesto por el algoritmo interno. Se menciona lo anterior, debido a que una iteración del problema de optimización externo equivale a múltiples evaluaciones del problema interno, por ende, múltiples evaluaciones del proceso en estado estacionario. La línea segmentada y línea punteada representan la evaluación de la función de costo en los valores óptimos teóricos P^* y P_{ξ}^* , respectivamente.

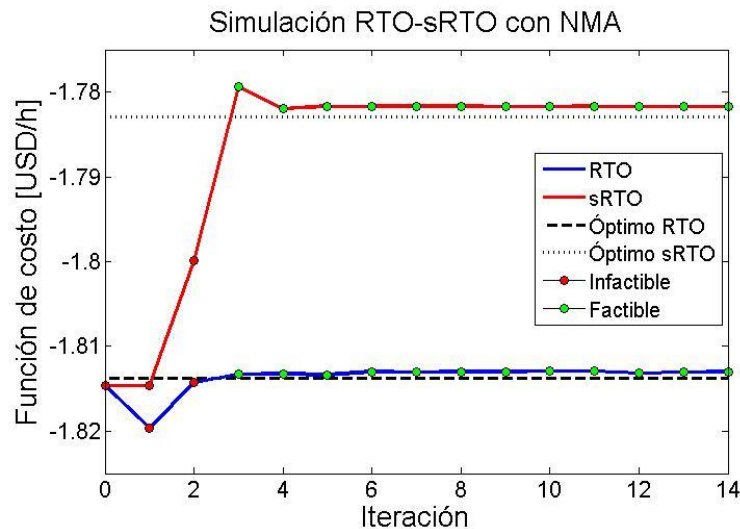


Figura 4.15. Simulación de optimización anidada, función de costo.

Se observa que el algoritmo converge a un punto subóptimo, aunque cercano al valor teórico, tanto en el caso estocástico como en el convencional. Si bien no converge a un

valor óptimo real, presenta un gran beneficio en comparación con otros métodos de optimización en tiempo real, que es la convergencia en una menor cantidad de iteraciones, dado que en este caso cada iteración corresponde a una única evaluación del proceso en estado estacionario.

La Figura 4.16. y Figura 4.17. muestran la evolución de los valores de consigna del sistema en relación con sus valores óptimos teóricos. Como mejor se aprecia en el caso de optimización estocástica, las variables de decisión convergen a un valor distinto de su óptimo, lo cual conlleva a una operación subóptima. Se debe tener en consideración, que, si bien el óptimo no es alcanzado, el punto de operación obtenido representa una mejora en comparación con el punto inicial (óptimo del modelo). A efectos de operación, llegar a un punto mejor puede ser suficiente, por lo que una operación subóptima es en la práctica realizable. Para efectos de este trabajo y considerando el desempeño de otros algoritmos estudiados, la no convergencia al óptimo teórico del proceso hace poco deseable aplicar este algoritmo en el equipo experimental.

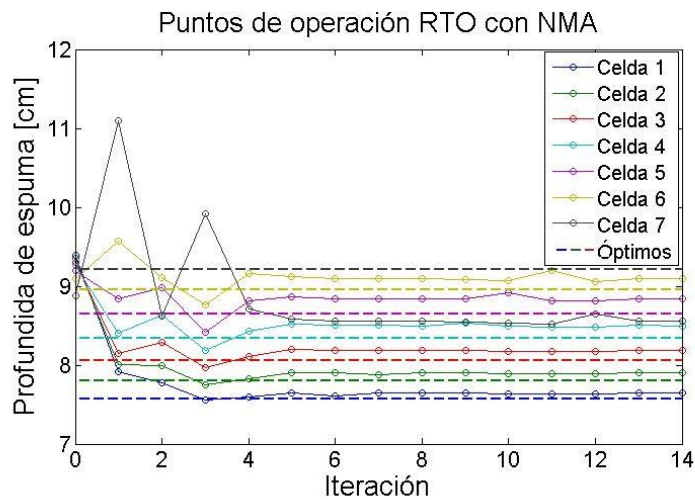


Figura 4.16. Simulación, evolución de puntos de operación en *RTO* anidada.

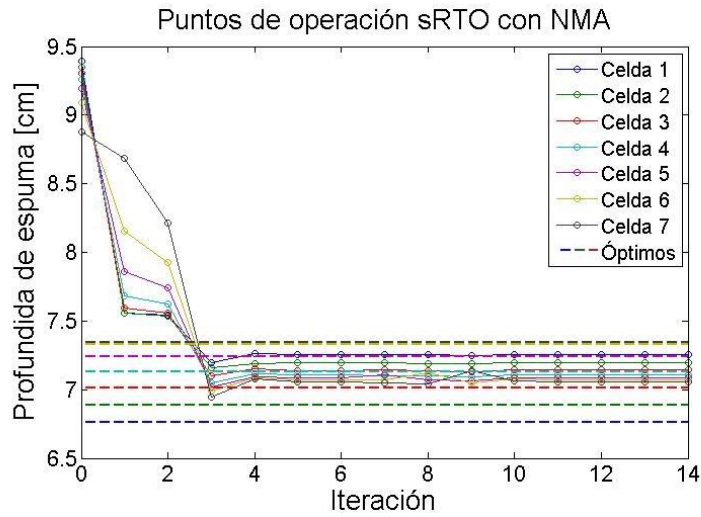


Figura 4.17. Simulación, evolución de puntos de operación en *sRTO* anidada.

Aparentemente el algoritmo de Nelder-Mead en la capa externa de optimización se estanca en un valor subóptimo, aumentar el número de iteraciones o reiniciar el algoritmo no mejora el resultado obtenido. Se observa un error mayor a 1 [cm] respecto al valor óptimo teórico, equivalente a 8% respecto al *spam*.

Respecto a las restricciones, la Figura 4.18. detalla el valor de los resultados metalúrgicos esperados en cada iteración en comparación a sus límites predefinidos. Los puntos subóptimos alcanzados satisfacen las restricciones a partir de la tercera iteración.

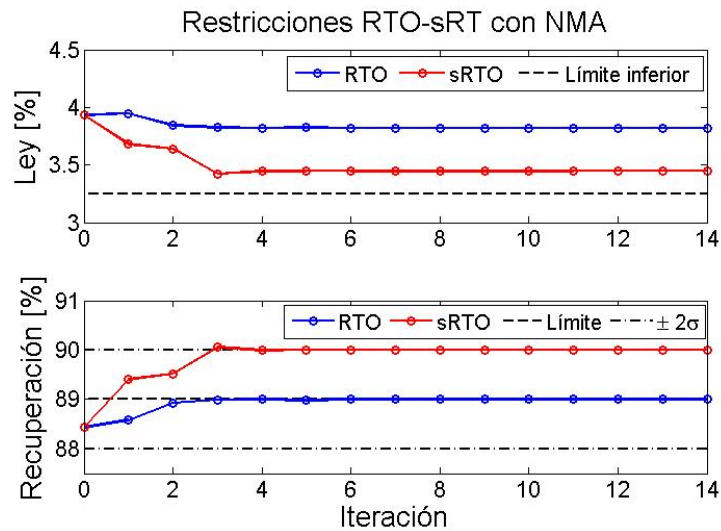


Figura 4.18. Simulación, evolución de resultados metalúrgicos en optimización anidada.

A pesar de la ventaja del bajo número de evaluaciones del proceso necesarias por el algoritmo de optimización anidado, debido al error con respecto al punto de operación óptimo teórico se descarta el uso del algoritmo en el sistema en línea.

Para tener una mejor idea de la cantidad de evaluaciones del proceso necesarias por cada método, se grafica la evolución de la función de costo en función al número de evaluaciones requeridas, como se aprecia en la Figura 4.19.

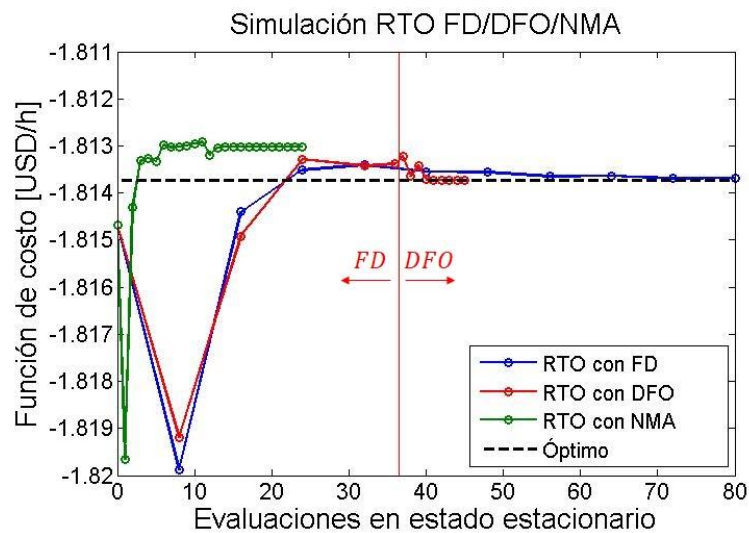


Figura 4.19. Comparación de evaluaciones necesarias por método de optimización.

Se aprecia el beneficio de la optimización anidada, la cual requiere significativamente menos evaluaciones del proceso hasta llegar a un punto de convergencia. Sin embargo, el punto de convergencia alcanzado es subóptimo, en contrapartida los métodos de diferencias finitas y optimización libre de derivada alcanzan el valor requerido, pero requieren un mayor número de evaluaciones del proceso (Gao et. al., 2015, Navia 2015).

En operación real el tiempo disponible para encontrar un mejor punto de operación y las perturbaciones que se pueden hacer representan una restricción, asimismo puntos de operación mejores son realizables, aun cuando el óptimo no es alcanzado. Desde este punto de vista, modificadores anidados presenta una ventaja importante frente a otros métodos de optimización.

4.3. Sistema en línea sin perturbaciones

Se implementan los algoritmos de optimización con adaptación de modificadores, usando diferencias finitas y optimización libre de derivadas, como métodos de estimación del gradiente. Se pone a prueba el sistema partiendo con el óptimo de cada modelo ($M1^*$ y $M2^*$) como valor de consigna inicial. Una vez el sistema detecta un estado estacionario, los datos ingresan al optimizador el cual devuelve un nuevo valor de consigna al sistema. Se recuerda que, si bien el sistema cuenta con 7 variables de decisión, una por cada celda, solo 3 celdas son reales y presentan comportamiento dinámico. La Figura 4.20. muestra el comportamiento típico observado de las variables de decisión en las tres celdas reales, en un experimento de optimización en tiempo real con diferencias finitas. Análogamente, la Figura 4.21., muestra las mismas variables de decisión en un experimento con optimización libre de derivadas.

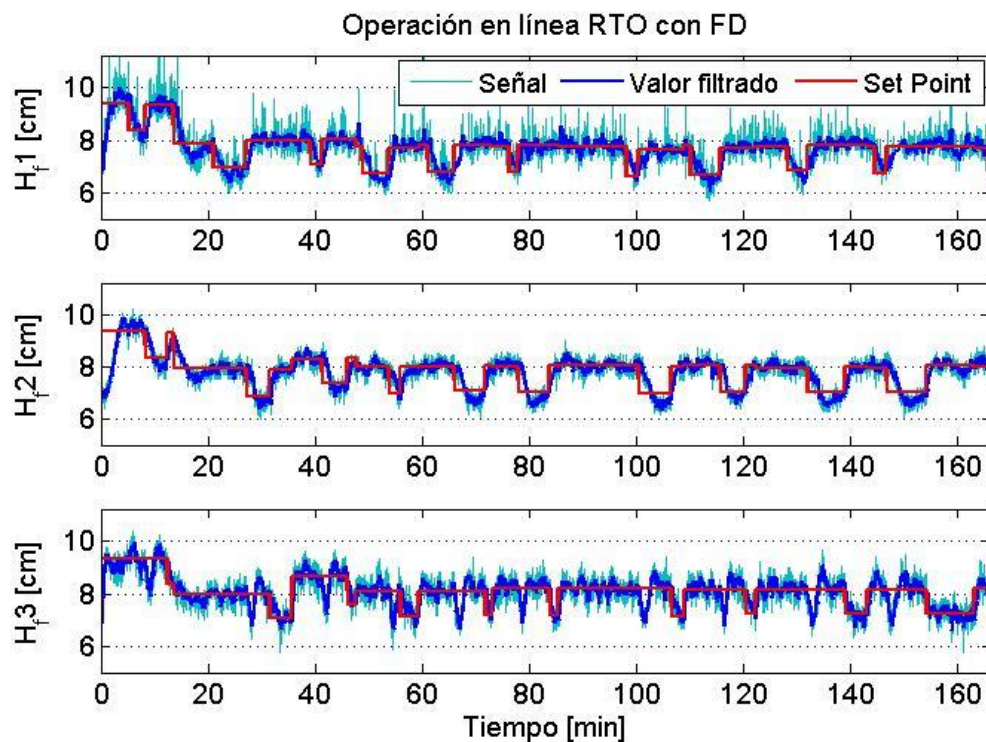


Figura 4.20. Corrida experimental con diferencias finitas, variables de decisión.

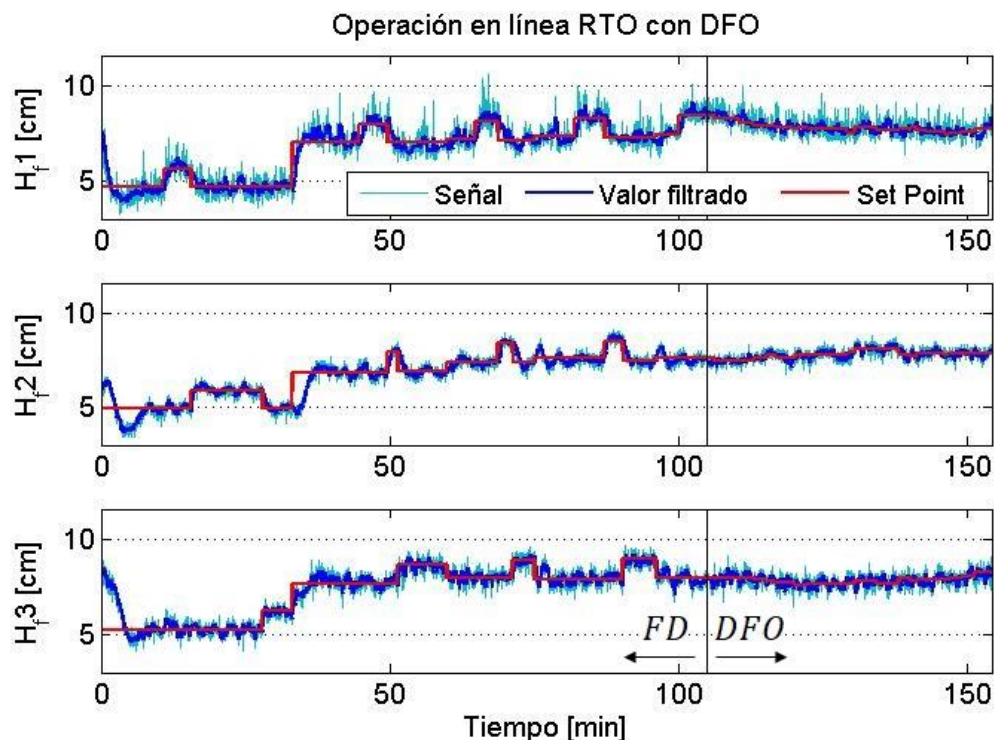


Figura 4.21. Corrida experimental con optimización libre de derivadas, variables de decisión. Los tiempos de estabilización observados varían ampliamente en un rango de 3 a 10 [min], en promedio el sistema se estabiliza en un periodo de 6 [min]. En el caso de la optimización libre de derivadas, el sistema demora menos en estabilizarse una vez terminó la etapa de diferencias finitas, esto debido a que los cambios propuestos por la capa de optimización son menores en magnitud.

4.3.1. Modelo optimista

En primer lugar, se pone a prueba el modelo optimista, el mismo usado en los escenarios bajo simulación. Se usa inicialmente diferencias finitas (*FD*) como método de estimación del gradiente y se compara el desempeño entre una optimización convencional (*RTO*), que presume un valor medio en la restricción de recuperación, y una optimización estocástica (*sRTO*), que incluye el cambio en la definición de los modificadores propuestos en esta tesis. Posteriormente, se compara el desempeño entre ambas optimizaciones usando la metodología libre de derivadas (*DFO*), para la estimación del gradiente.

Diferencias finitas

Se grafica la evolución de la función de costo, el negativo de la función de beneficio, en el tiempo, ver Figura 4.22. La curva azul representa el problema de optimización con adaptación de modificadores convencional, asumiendo un valor promedio de la variable probabilística ξ . En cambio, la curva roja representa la evolución del algoritmo, incluyendo la información estocástica. Los marcadores circulares representan una iteración del algoritmo, y corresponden a puntos en estado estacionario, su color entrega información sobre la factibilidad del estado estacionario alcanzado. La línea segmentada y línea con guion y punto representan la evaluación de la función de costo en los valores óptimos teóricos P^* y P_{ξ}^* , respectivamente.

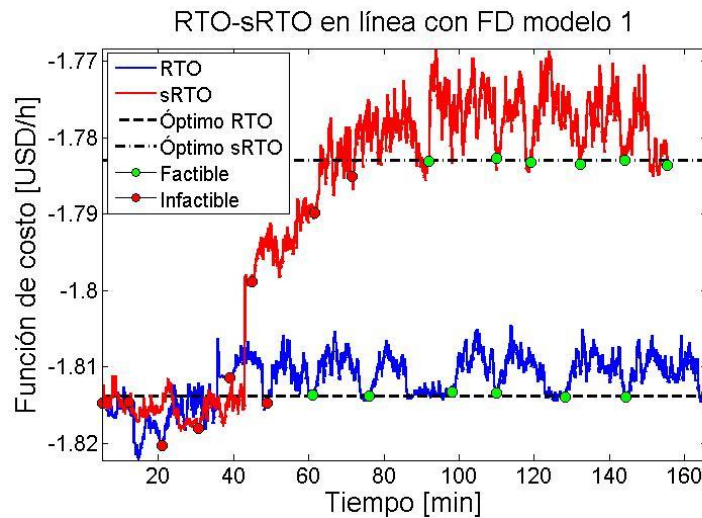


Figura 4.22. Evolución de la función de costo en línea con diferencias finitas y modelo 1.

La evolución de las iteraciones es similar a lo visto bajo simulación, los algoritmos son capaces de alcanzar valores muy cercanos al óptimo teórico. Destaca la necesidad de perturbar el sistema, para el cálculo del gradiente mediante diferencias finitas, que llevan a operar en zonas subóptimas entre dos iteraciones.

Respecto a los objetivos metalúrgicos, su evolución respecto a los límites propuestos se aprecia en la Figura 4.23., donde la línea segmentada representa el valor medio del límite inferior de la restricción y la línea punteada es el valor medio $\pm 2 \sigma_{\xi}$ de la restricción de recuperación.

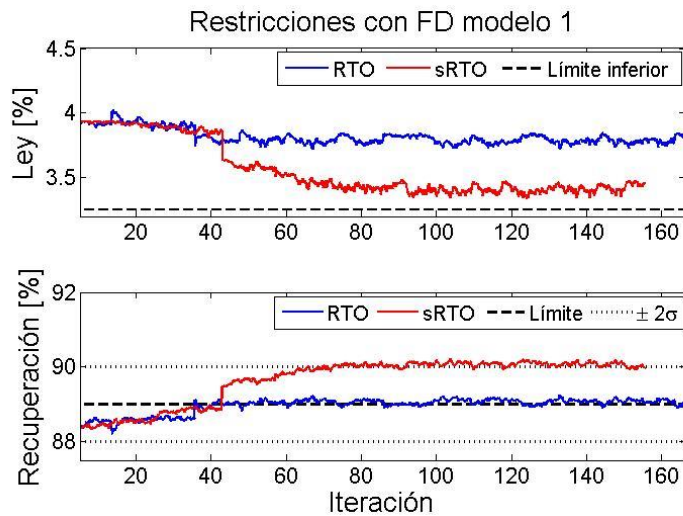


Figura 4.23. Evolución de restricciones en línea, con diferencias finitas y modelo 1.

Luego de 6 iteraciones el algoritmo alcanza un punto de operación que satisface los límites mínimos de ley y recuperación propuestos, tanto en el caso determinista como en el estocástico. Las perturbaciones producto de las diferencias finitas son tal que satisfacen las restricciones, entrando en zonas de operación subóptima pero factible.

Optimización libre de derivadas

Análogamente a diferencias finitas, se evalúa la evolución de la función de costo en el tiempo, inicialmente estimando los gradientes del proceso y restricciones con diferencias finitas hasta contar con suficientes evaluaciones en estado estacionario y pasar a la optimización libre de derivadas. La Figura 4.24. representa los resultados obtenidos, para el caso determinista (línea azul) y caso estocástico (línea roja).

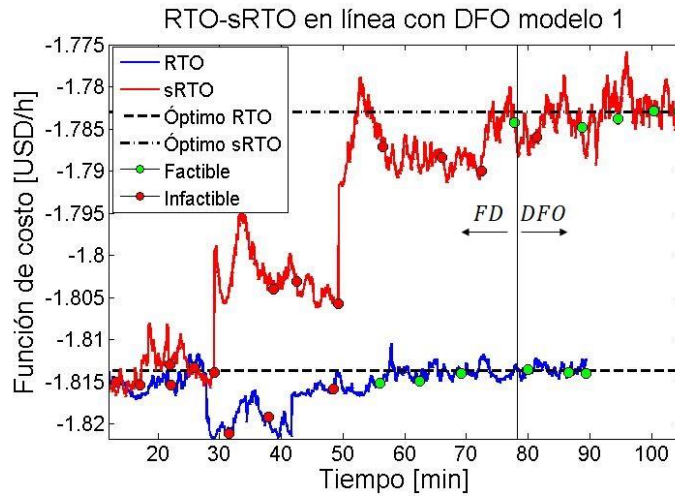


Figura 4.24. Evolución de la función de costo en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 1.

Al igual que en el método anterior, se llega un valor de operación cercano al óptimo teórico. La principal diferencia es que una vez inicia el método optimización libre de derivadas, se reducen considerablemente el número de perturbaciones hechas por el sistema de optimización en el proceso, lo cual implica una operación más estable en comparación a cuando se usan diferencias finitas. También destaca el menor tiempo necesario para llegar a un valor cercano al punto óptimo dada la misma razón.

En cuando a las restricciones, la Figura 4.25. representa los valores de los resultados metalúrgicos obtenidos en relación a los límites predefinidos.

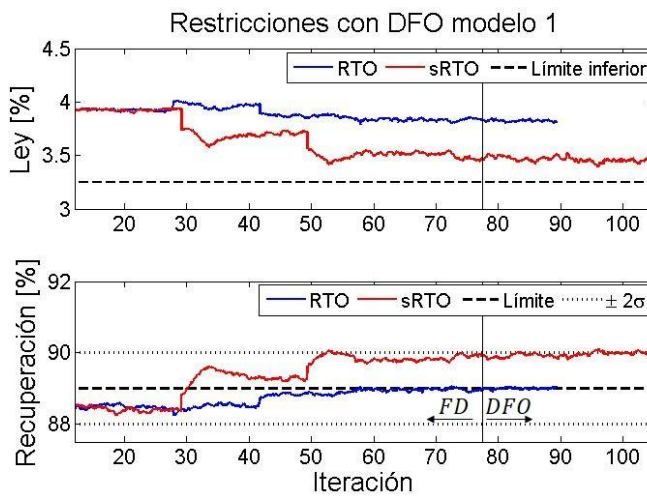


Figura 4.25. Evolución de restricciones en línea, optimización libre de derivadas y modelo 1.

El efecto de la reducción de las perturbaciones, producto de las decisiones de la capa de optimización, es más evidente cuando se observan el estado de los resultados metalúrgicos, donde existe oscilación mucho menor en los últimos minutos de operación (cuando ya no se utiliza diferencias finitas).

4.3.2. Modelo pesimista

Posteriormente se repiten los experimentos con el modelo pesimista (modelo 2), usando inicialmente diferencias finitas (*FD*) como método de estimación del gradiente y se comparando el desempeño entre la optimización convencional (*RTO*) y la optimización estocástica (*sRTO*). Luego, se compara el desempeño entre ambas optimizaciones usando la metodología libre de derivadas (*DFO*), para la estimación del gradiente.

Diferencias finitas

La Figura 4.26. muestra la evolución de la función de costo en el tiempo, la curva azul representa el problema de optimización con adaptación de modificadores convencional y la curva roja representa la evolución del algoritmo incluyendo la información estocástica. Los marcadores circulares representan una iteración del algoritmo, y corresponden a puntos en estado estacionario, su color entrega información sobre la factibilidad del estado estacionario alcanzado. La línea segmentada y línea con guion y punto representan la evaluación de la función de costo en los valores óptimos teóricos P^* y P_{ξ}^* , respectivamente.

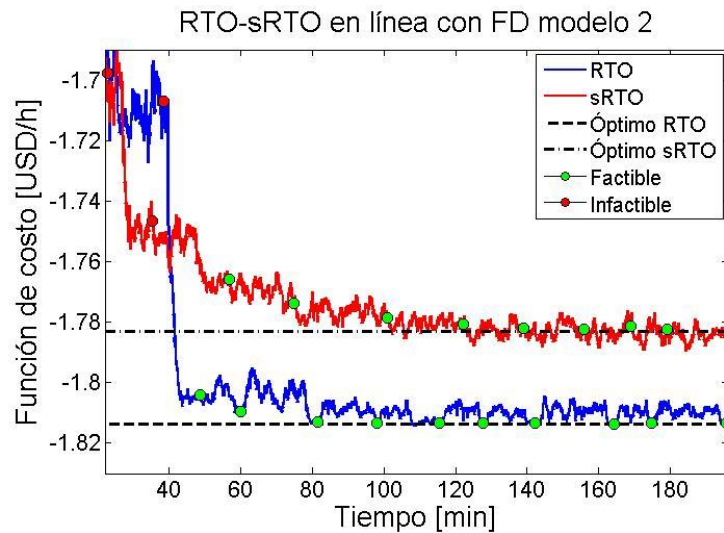


Figura 4.26. Evolución de la función de costo en línea, con diferencias finitas y modelo 2. Nuevamente, la evolución las iteraciones del algoritmo de optimización con adaptación de modificadores, tanto en el problema determinista como en el estocástico, convergen al valor óptimo teórico, incluso usando un modelo pesimista.

En cuanto a las restricciones, se observa un comportamiento análogo al visto cuando se usa el modelo optimista, en la Figura 4.27. La mayor diferencia se aprecia en el caso de optimización estocástica, donde el paso utilizado por las diferencias finitas genera puntos de operación infactible, donde se observan recuperaciones levemente menores al límite predefinido. Cambiar el tamaño o la dirección del paso puede solucionar el problema de entrar en zonas de operación infactible.

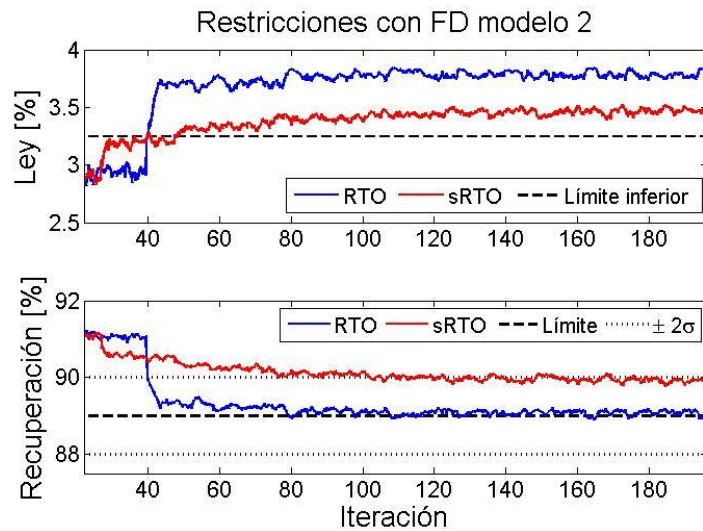


Figura 4.27. Evolución de restricciones en línea, con diferencias finitas y modelo 2.

Nuevamente se observa la relativamente rápida convergencia del algoritmo de optimización a una zona factible de operación.

Optimización libre de derivadas

Finalmente, se estudia la convergencia del método de optimización libre de derivadas usando el modelo pesimista. La Figura 4.28. representa la evolución de la función de costo para el caso determinista (línea azul) y caso estocástico (línea roja).

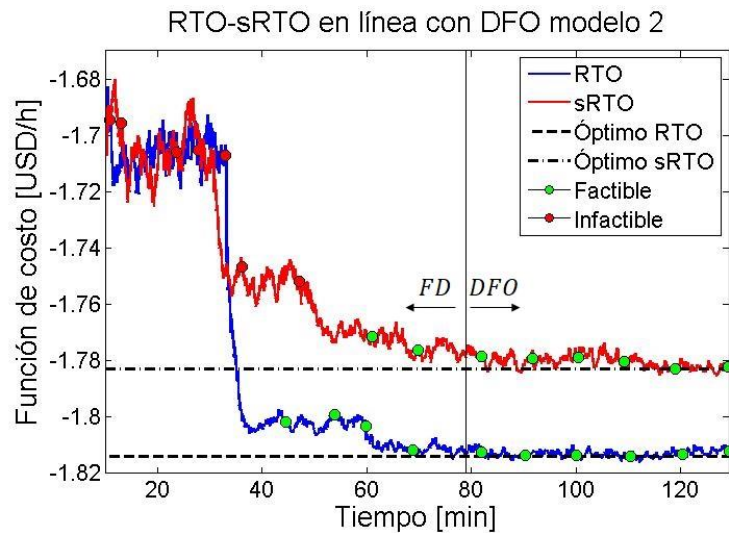


Figura 4.28. Evolución de la función de costo en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 2.

Análogamente al caso usando el modelo optimista, se aprecia una rápida convergencia al valor óptimo teórico en ambos casos (determinista y estocástico). También es posible apreciar, la menor oscilación en los últimos minutos producto del método utilizado.

Los resultados metalúrgicos presentaron un comportamiento similar al visto en el caso del modelo optimista. La Figura 4.29. muestra los 2 principales resultados metalúrgicos en el tiempo y en relación a los límites predefinidos.

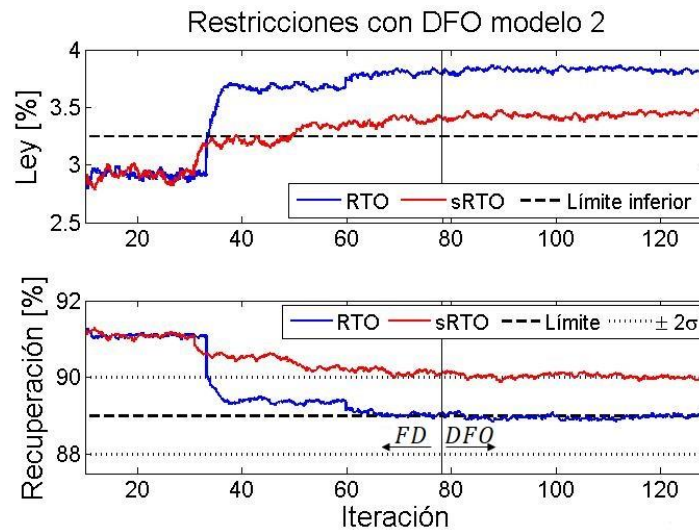


Figura 4.29. Evolución de restricciones en línea, usando optimización libre de derivadas y el modelo 2.

En base a los resultados anteriores es posible destacar que, mediante la metodología propuesta de optimización en tiempo real con adaptación de modificadores, incluyendo información probabilística de variables inciertas, es posible alcanzar un punto óptimo de operación que satisface las restricciones con un nivel de confianza dado. El sistema es capaz de manejar de manera exitosa incertezas de naturaleza estocástica y de modelo. Empleando modelos imperfectos, mediciones reales de laboratorio y ante variables de mercado inciertas, el algoritmo propuesto permite convergencia a una operación cercana al óptimos del proceso.

4.4. Sistema en línea bajo perturbaciones

Finalmente, se pone a prueba el sistema de optimización en tiempo real en una situación bajo perturbaciones, de magnitud y frecuencia similar a las observadas en una planta de flotación real. En primera instancia se incluyen solo perturbaciones en la ley de alimentación, debido a la sensibilidad del modelo metalúrgico, de la función de costo y restricciones frente a esta variable. Ante una misma señal de perturbación se observa la respuesta del sistema de laboratorio en línea frente a las decisiones de la capa de optimización estimando el gradiente con diferencias finitas y posteriormente, usando el método de optimización libre de derivadas.

Diferencias finitas

Para tener una mejor idea de las acciones de control propuestas por la capa de optimización se presentan los resultados en cada iteración del algoritmo. La Figura 4.30. muestra los valores de consigna propuestos por la capa de optimización en comparación con los valores óptimos teóricos calculados en cada iteración, los cuales consideran el valor real de la ley de alimentación.

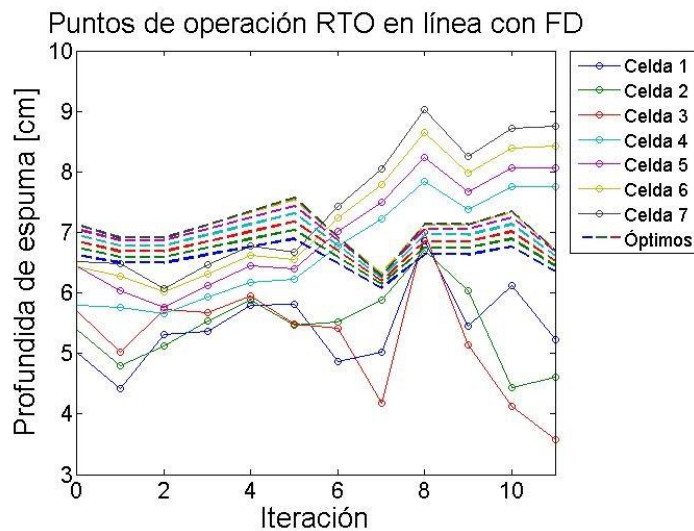


Figura 4.30. Evolución de valores de consigna en sistema bajo perturbaciones usando diferencias finitas.

Teniendo en cuenta que la ley de cobre de alimentación cambia en el tiempo, es de esperarse que cambie el punto óptimo de operación. Se pueden apreciar múltiples

cambios de ley de alimentación entre dos iteraciones del optimizador, sobre todo si se considera que al usar diferencias finitas se requiere evaluar el proceso en múltiples estados estacionarios entre cada iteración. Producto de estos cambios de ley de alimentación entre diferentes estados estacionarios, la estimación de los gradientes se ve afectada. Al usar diferencias finitas se asume que el cambio que se observa en el proceso, es efecto del salto en escalón de la variable de decisión. Sin embargo, al haber perturbaciones de otras variables, la suposición anterior deja de ser verdadera, lo cual conlleva a una mala estimación de los gradientes y por ende a toma de decisiones incorrectas en la capa de optimización. Así, los valores de consigna propuestos por el optimizador divergen con respecto a los óptimos teóricos. Esto también se observa en la Figura 4.31, donde tampoco existe una convergencia en el beneficio de operación al punto óptimo. Más aún, se observa que en la mayoría de las iteraciones las restricciones de ley y recuperación de cobre no se satisfacen.

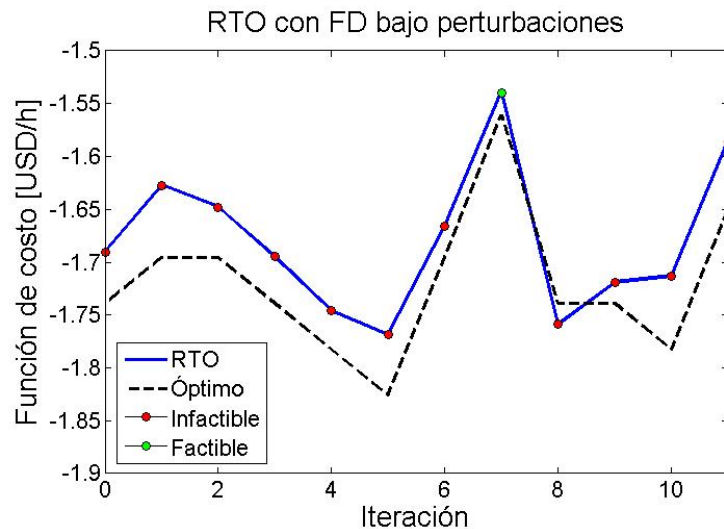


Figura 4.31. Evolución de la función de costo en sistema bajo perturbaciones usando diferencias finitas.

Nuevamente es de esperar que el punto óptimo de operación cambie producto de las perturbaciones en la ley de alimentación, así que el beneficio óptimo cambia en cada iteración. Se esperaría que las decisiones de la RTO converjan hacia el óptimo, a medida que el número de iteraciones aumenta, la metodología de diferencias finitas parece no ser adecuada para la optimización en tiempo real en sistemas bajo

perturbaciones. Debido a la dinámica lenta del proceso y la frecuencia y magnitud de cambio de las perturbaciones, se recomienda buscar otra alternativa para la etapa de estimación del gradiente o considerar los cambios en las perturbaciones explícitamente para evaluar las derivadas parciales.

Optimización libre de derivadas

La optimización libre de derivadas presenta la ventaja de necesitar menos evaluaciones en estado estacionario para llevar el proceso a un óptimo de operación, lo que podría representar una ventaja en sistemas bajo perturbaciones. Se prueba el desempeño de la metodología frente a las mismas perturbaciones de ley de alimentación. La Figura 4.32. muestra los valores de consigna propuesto por la capa de optimización, la línea vertical negra denota el inicio de la optimización libre de derivadas.

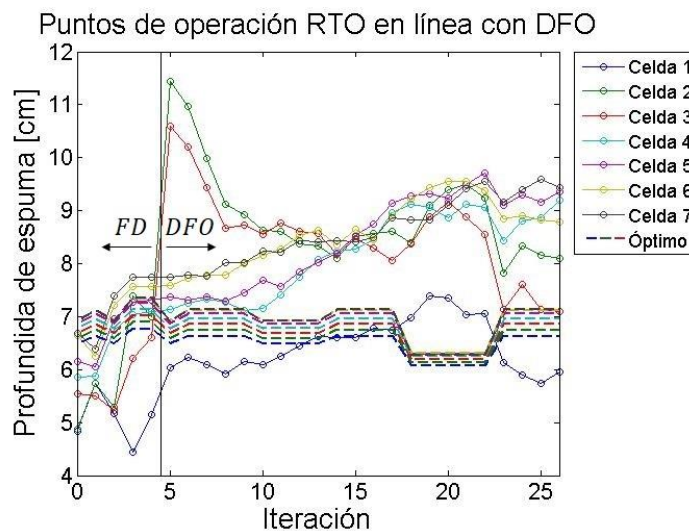


Figura 4.32. Evolución de valores de consigna en sistema bajo perturbaciones usando optimización libre de derivadas.

Similar al método con diferencias finitas, la optimización libre de derivadas no es capaz de manejar las perturbaciones del sistema. El sistema de optimización toma de decisiones incorrectas, alejándose del óptimo de operación. La Figura 4.33, muestra la evolución de la función objetivo a lo largo del experimento.

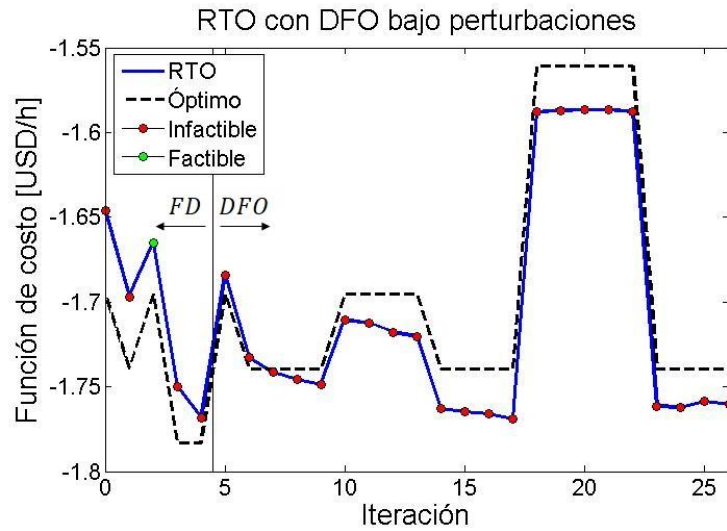


Figura 4.33. Evolución de la función de costo en sistema bajo perturbaciones usando optimización libre de derivadas.

La capa de optimización es incapaz de hacer converger al sistema a una zona de operación óptima frente a las perturbaciones en el sistema. Incluso es incapaz de alcanzar una zona de operación factible que cumpla con la calidad y cantidad de producto requerido. La metodología de optimización libre de derivada, no soluciona el efecto de las perturbaciones, pues se basa en puntos de operación anteriores para hacer un ajuste cuadrático. Las constantes perturbaciones hacen que los puntos pasados dejen de ser representativos, llevando nuevamente a una incorrecta estimación de los gradientes y por lo tanto a una mala toma de decisión respecto a los valores de las consignas.

Identificación de la problemática

Las metodologías de estimación del gradiente basadas en datos pueden resumirse según la Ecuación 4.2, para el mapeo de los gradientes en función de las variables del proceso $\mathbf{y}_p^{(k)}$ y variables de decisión $\mathbf{u}^{(k)}$.

$$\frac{\partial y_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k-n)}, \mathbf{y}_p^{(k)}, \dots, \mathbf{y}_p^{(k-n)}) \quad (4.2)$$

Donde el mapeo $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$, dependerá de la metodología que se utilice en la estimación experimental de los gradientes.

Independiente del método que se utilice para la estimación de la curvatura experimental del proceso incierto, no existe un tratamiento explícito del efecto que tienen las perturbaciones en la estimación de este gradiente. Lo anterior podría comprometer la detección del punto deseado debido a una estimación errónea del efecto que tienen las variables de decisión sobre la respuesta del proceso. Este análisis se basa en el hecho que la variable de salida del proceso no solamente depende con respecto a \mathbf{u} , si no que también con respecto a las variables de perturbación ξ_{pert} (Ecuación 4.3).

$$\mathbf{y}_P = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \xi_{pert}) \quad (4.3)$$

Por lo tanto, el gradiente de \mathbf{y}_P con respecto a las variables de decisión \mathbf{u} sólo sería válido bajo los escenarios donde, \mathbf{y}_P no dependa del valor de ξ_{pert} o cuando ξ_{pert} no cambie entre los datos que se utilizan para estimar los gradientes mediante $\psi(\cdot)$.

Debido a que ninguno de los dos escenarios se cumple en el sistema implementado bajo las perturbaciones propuestas, es de esperar observar un error importante en la etapa de estimación del gradiente. Este error, implica una mala estimación de los modificadores, lo que no permite obtener los puntos de operación que satisfacen las *NCO* del proceso, ya que este es el principal supuesto del método de *RTO* con adaptación de modificadores. Como posible solución a este problema, se propone incluir información disponible de las perturbaciones en los modelos de mapeo de las variables de salida. Con este se mejoraría la representatividad del modelo, posiblemente a costa de la necesidad de evaluar el proceso en más puntos en estado estacionario para realizar el ajuste.

Conjetura con respecto a adaptación de modificadores anidados

En base a la discusión anterior, debido al problema inherente en la estimación del gradiente cuando existen perturbaciones con comportamiento aleatorio, es de esperar que metodologías que obvian la etapa de estimación del gradiente tengan un mejor desempeño. Con esto en consideración, la metodología de optimización en tiempo real con modificadores anidados, podría representar una ventaja frente a los otros métodos. Sin embargo, como se observa en los resultados obtenidos, las perturbaciones podrían

cambiar la localización del óptimo. Lo cual representa un problema si el algoritmo de optimización en la capa superior es determinístico, tal como es el método de Nelder-Mead, utilizado en este trabajo. Esto implica que zonas de operación ya evaluadas por el algoritmo no serán reevaluadas, siendo esto un problema si existe la posibilidad de que el óptimo se desplace a dicha zona. Por lo tanto, el uso de otros algoritmos que no presenten problemas de convergencia y permitan lidiar con este problema, permitirían estimar el óptimo de un proceso incierto con cambios en las perturbaciones. Por ejemplo, se puede implementar el algoritmo de Nelder-Mead con un factor de olvido o un método de optimización estocástico que prescindiera del cálculo de derivadas y que requiera de pocas iteraciones, por ende, menos evaluaciones del proceso.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrolló una metodología que incluye información de variables exógenas con comportamiento estocástico en una capa *RTO* con adaptación de modificadores. Al incluir de manera explícita la información de dichas variables en la definición de los modificadores, es posible alcanzar un punto de operación óptimo que satisface las restricciones para un nivel de confianza dado.

Se implementó exitosamente el sistema *sRTO* con adaptación de modificadores propuesto en un circuito de flotación *rougher* a escala laboratorio. El sistema logró efectivamente alcanzar un punto económicamente óptimo de operación, que satisface los objetivos metalúrgicos para un nivel de certeza dado, al incluir información de variables estocásticas exógenas. Sin embargo, el sistema propuesto demostró un pobre desempeño bajo perturbaciones de alimentación, debido a una mala estimación de los gradientes experimentales.

En escenarios sin perturbaciones y sujeto a variables de mercado inciertas, como lo es la demanda de producto, el incluir información probabilística en la definición de los modificadores mejoró considerablemente el desempeño en la operación del circuito en línea, alcanzando puntos de operación cercanos al óptimo. El incluir información estocástica permitió alcanzar un punto de operación que satisface la demanda incierta 98 % de las veces. Por el contrario, al solo considerar un valor promedio de dicha variable, se alcanzó un punto de operación que, si bien es un 2% económicamente más benéfico, solo satisface la demanda un 50% de las veces. Existirá entonces un compromiso entre beneficio económico y el porcentaje de satisfacción de restricciones. La metodología propuesta presentó un enfoque más conservador con respecto al cumplimiento de las restricciones, ideal en casos donde el no cumplimiento de parámetros de calidad o cantidad conllevan a multas o a mayores costos de procesamiento.

Bajo perturbaciones, la rápida variación de las variables de alimentación en comparación a los largos tiempos de estabilización del sistema, conllevan a una mala estimación de gradientes, producto de lo cual la operación no convergió a un punto

óptimo. Sin embargo, el problema de convergencia radica en las metodologías existentes para la estimación de la curvatura experimental y no en la propuesta de inclusión de información probabilística en las restricciones de proceso.

Se probaron tres algoritmos de optimización diferentes, con técnicas distintas de estimación de los gradientes: diferencias finitas, optimización libre de derivadas y modificadores anidados. Las dos primeras técnicas lograron llevar al proceso a un punto de operación óptimo, mientras que la tercera, converge en menos tiempo, pero a un punto subóptimo, debido a un posible estancamiento del algoritmo de optimización de la capa superior.

Como recomendaciones se propone evaluar el desempeño de la metodología con otras técnicas de estimación de gradientes. Otro posible enfoque, es incluir explícitamente información de las perturbaciones en la etapa de estimación del gradiente, de tal forma que se aislen los efectos de las perturbaciones frente a los cambios realizados en el proceso por la capa de optimización.

PRODUCCIÓN CIENTÍFICA

Este trabajo dio lugar a dos presentaciones en congreso.

Navia, D., Unzueta, R., Bergh, L., Cornejo, I., & de Prada, C. (2017). *Including Stochastic Information in Real Time Optimization with Modifier Adaptation Methodolgy*. Paper presented at the 10th World Congress of Chemical Engineering, Barcelona, Spain.

Navia, D., Unzueta, R., Bergh, L., & Cornejo, I. (2017). *Efecto de la Inclusión de Información Estocástica en la Optimización en Tiempo Real Mediante Adaptación de Modificadores*. Paper presented at the XX Congreso Chileno de Ingeniería Química, Santiago de Chile.

REFERENCIAS

- Bamberger, W., Isermann, R., 1978. *Adaptative on-line steady-state optimization of slow dynamic processes*. Automatica, 223-230.
- Bergh, L.G., Yianatos, J.B., 2011. *The long way toward multivariate predictive control of flotation processes*. Journal of Process Control, 21, 226–234.
- Bonvin, D., Marchetti, A., Chachuat, B., 2009. *Modifier-adaptation methodology for real-time optimization*. Industrial & Engineering Chemistry Research, 48, 6022-6033.
- Carrasco, C., 2010. *Modelación zona de colección y espuma para la supervisión y control de un banco de flotación industrial*. Memoria Ingeniería Civil Química UTFSM: Valparaíso.
- Cortés, C., 2016. *Operación híbrida de una planta piloto de flotación RCS*. Tesis Magister Ingeniería Química UTFSM: Valparaíso.
- Durán, J.P., 2014. *Desarrollo de una estrategia de control para un circuito de flotación rougher piloto*. Memoria Ingeniería Civil Química UTFSM: Valparaíso.
- Finch, J. A., & Dobby, G. S., 1990. *Column flotation*. Oxford: Pergamon Press.
- Forbes, F., Zhang, Y., Monder, D., 2002. *Real-time optimization under parametric uncertainty: a probability constrained approach*. Journal of Process Control, 12, 373-389.
- Gao, W., Engell, S., 2005. *Iterative set-point optimization of batch chromatography*. Computers & Chemical Engineering, 29, 1401–1409.
- Gao, W., Wenzel, S., Engell, S., 2015. *Comparison of modifier adaptation schemes in real-time optimization*. IFAC-PapersOnLine 48-8, 182-187.
- Gao, W., Wenzel, S., Engell, S., 2016. *A reliable modifier-adaptation strategy for real-time optimization*. Computers & Chemical Engineering, 91, 318-328.
- Gorain, B., Harris, M., Franzidis, J.P., Manlapig, E., 1998. *The effect of froth residence time on kinetics of flotation*. Minerals Engineering, 11 (7), 627-638.
- Gupta, A., Yan, D.S., 2006. *Mineral processing design and operation – An introduction*. Amsterdam: Elsevier.

- Hadler, K., Cilliers, J.J., 2009. *The relationship between the peak in air recovery and flotation bank performance*. Minerals Engineering 22, 451–455.
- Honerkamp, J., 1993. *Stochastic Dynamical Systems: Concepts, Numerical Methods, Data Analysis*. VCH Publishers, 1st edition, New York.
- Kim, M., Yoon, S.H., Domanski, P.A., Payne, W.V., 2008. *Design of a steady-state detector for fault detection and diagnosis of a residential air conditioner*. International Journal of Refrigeration, 31(5), 790-799.
- Laurila, H., Karesvuori, J., Tiili, O., 2002. *Strategies for instrumentation and control of flotation circuits*. Mineral Processing Plant Design, Practice and Control, Volume 1, pp. 2174–2195. ISBN-10: 0873352238.
- Maldonado, M., Sbarbaro, D., Lizama, E., 2007. *Optimal control of a rougher flotation process based on Dynamic programming*. Miner. Eng. 20, 221-232.
- Maldonado, M., Seguel, F., Soto, I., Krommenacker N., Becerra Yoma, N., 2015. *Optimizing flotation bank performance through froth depth profiling: Revisited*. Minerals Engineering, Volume 77, pp. 179-184.
- Mansour, M., Ellis, J., 2003. *Comparison of methods for estimating real process derivatives in on-line optimization*. Applied Mathematical Modelling, 275-291.
- McKee, D.J., 1991. *Automatic flotation control – a review of 20 years of effort*. Minerals Engineering 4 (7–11), 653–666.
- Mitra, K., 2013. *Chance constrained programming to handle uncertainty in nonlinear process models*. Multi-Objective Optimization in Chemical Engineering: Developments and Applications, 1st edition. Chapter 7.
- Navia, D., 2013. *Handling uncertainties in process optimization*. PhD Thesis Universidad de Valladolid: Valladolid.
- Navia, D., Briceño, L., Gutiérrez, G., de Prada, C., 2015. *Modifier-adaptation methodology for real-time optimization reformulated as a nested optimization problem*. Industrial & Engineering Chemistry Research, 54, 12054-12071.
- Osorio, D., Pérez-correa, J.R., Cipriano, A., 1999. *Assessment of expert fuzzy controllers for conventional flotation plants*. Minerals Engineering 12 (11), 1327–1338.

- Pino, C., 2012. *Modelación del circuito de limpieza de una planta RCS para la evaluación de estrategias operacionales*. Tesis Magister Ingeniería Química UTFSM: Valparaíso.
- Roberts, P. (1979). *An algorithm for steady-state system optimization and parameter-estimation*. International Journal of Systems Science, 719-734.
- Shean, B.J., Cilliers, J.J., 2011. *A review of froth flotation control*. International Journal of Mineral Processing, Volume 100, pp. 57-71.
- Sonami., 2016. Recuperado el 15 de octubre de 2016. <http://www.sonami.cl>.
- Unzueta, R., 2016. *Sistema de medición basado en visión artificial para circuito rougher de laboratorio*. Memoria Ingeniería Civil Química UTFSM: Santiago.
- Viola, P., Jones, M.J., 2004. *Robusto real-time face detection*. International Journal of Computer Vision, 57(2), 137-154.
- Wills, B.A., Napier-Munn, T.J., 2006. *Wills' Mineral Processing Technology*, 7th edition. Elsevier, pp. 267-344. Chapter 12.
- Yianatos, J., 2007. *Fluid flow and kinetic modelling in flotation related processes Columns and Mechanically Agited Cells - A Review*. Trans. ICHEME, Chemical Engineering Research and Design, Volume 85(A12), pp. 1591-1603.
- Yianatos, J., 2008. *Flotación de Minerales*. Apuntes. Valparaíso: UTFSM.
- Yianatos, J., Carrasco, C., Bergh, L., Vinnett, L., Torres, C., 2012. *Modelling and simulation of rougher flotation circuits*. International Journal of Mineral Processing, 112-113, 63-70.
- Yianatos, J., Contreras, F. & Díaz, F., 2010. *Gas holdup and RTD measurement in an industrial flotation cell*. Minerals Engineering, Volumen 23, pp. 125-130.
- Yianatos, J., Contreras, F., 2010. *Particle entrainment model for industrial flotation cells*. Powder Technology, Volume 197, pp. 260-267.

ANEXOS

Anexo A. Parámetros del modelo

Tabla A.1. Parámetros de la distribución granulométrica.

Especie	a_i	b_i	c_i
Calcopirita	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	0.79
Calcosina	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	0.79
Pirita	$1.27 \cdot 10^{-5}$	$5.05 \cdot 10^{-3}$	1.38

Tabla A.2. Parámetros modelo de flotación.

Parámetro	Grueso	Medio	Fino	Ecuación
δ_i	24	20	7.2	(2.39)
χ	4.8	2.4	1.2	(2.39)
R_{max}	45	47	44	(2.40)
α_{max}	70	82	85	(2.41)
ψ	3	3	3	(2.44)
ξ_w	60	60	60	(2.46)
γ_w	0.66	0.66	0.66	(2.46)
η	1.4	1.4	1.4	(2.46)
δ_g	85	55	4	(2.48)
Φ	0.1	0.1	0.1	(2.48)

Anexo B. Equipos e instrumentos de laboratorio

PLC

El *PLC* utilizado corresponde a la marca *General Electric*[®], modelo GE Fanuc serie 90-30 (ver Figura B.1). Los componentes básicos del *PLC* son: placa base, fuente de poder, *CPU*, Módulos de entrada/salida y módulos opcionales.



Figura B.1. PLC GE Fanuc serie 90-30.

"General electric", <http://www.geautomation.com/products/series-90-30>, visto 22/05/2017.

Los elementos utilizados del *PLC* en este trabajo se listan a continuación:

- i. Placa base: IC693CHS391,
- ii. Fuente de Poder: IC693PWR330
- iii. *CPU*: IC693CPU372
- iv. Módulo de salidas análogas: IC693ALG392

Bomba peristáltica

Bomba peristáltica marca *Masterflex* modelo L/S 77916-10 (Figura B.2), con dos cabezales modelo 77800-52. El rango de operación es de 0 a 600 rpm, equivalente a 0 a 80 mL/s en señal de 4-20 mA.



Figura B.2. Bomba peristáltica Masterflex.

Transductor I/P

Transductor I/P marca *Fairchild*[®] *Electro-Pneumatic Transducers* modelos TA6000-401 y TTFI7800-401 (Figura B.3). Operan con señal de entrada de 4-20 mA y salida de 3-15 psig. Requieren un suministro de aire comprimido entre 20 y 120 psig. Este dispositivo es vital para el accionamiento de las válvulas neumáticas.



Figura B.3. Transductores I/P Fairchild[®].

Válvula y actuador

Válvula marca *SAMSON* modelo 3241, de hierro fundido, 15 mm de diámetro, C_v de 5 gal/min y con actuador neumático modelo 3271, ver Figura B.4. Realiza la función de variar el caudal de descarga de cada celda al comportarse como un orificio de área variable.



Figura B.4. Válvula reguladora de flujo SAMSON.

Rotámetro

Los rotámetros instalados son marca *Parker* modelo LF-3135E (Figura B.5). Son capaces de medir flujo de aire entre 20 y 135 L/min en condición normal. Constan de un elemento flotador en forma de elipsoide y una estructura de plástico graduado.

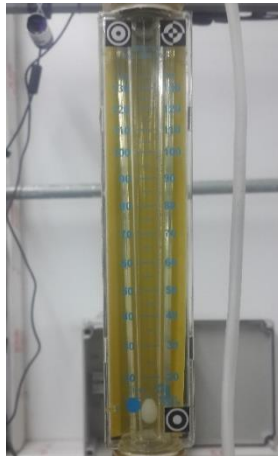


Figura B.5. Rotámetro marca Parker.

Agitador mecánico

Los agitadores usados corresponden a equipos marca IKA, modelo RW-20 Digital, ver Figura B.6. Su función es generar el mezclado del fluido y permitir una dispersión homogénea del aire. Se encienden y apagan manualmente, operan a 700 rpm fijo, aun cuando el rango puede variar de 60 a 2000 rpm.

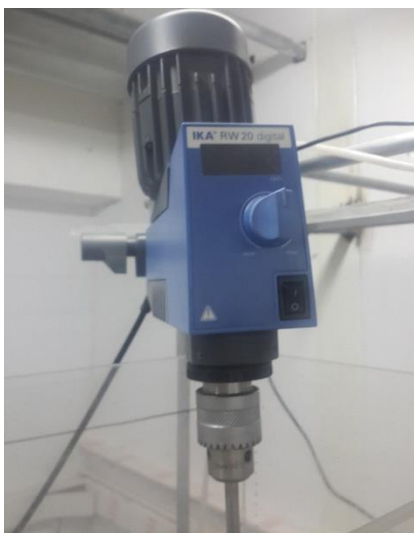


Figura B.6. Agitador mecánico IKA.

Computador

Adicionalmente, se trabaja con computadores *Gear*[®] (Figura B.7), responsables de manejar la interfaz gráfica y ejecutar las rutinas de procesamiento de imágenes.



Figura B.7. Computador marca *Gear*[®] utilizado.
“*Gear*”, <http://www.gear.cl/productos.php>, visto 22/05/2017.

Las principales características de dichos computadores se detallan en la Tabla B.1.

Tabla B.1. Características del computador.

Ítem	Detalle
Marca	Gear®
Modelo	SLIM-75i
Sistema Operativo	Windows 7
Procesador	Intel® i5
Cantidad de núcleos	Dual Core
Tarjeta de video	Nvidia 210 zotak
RAM	4GB DDR3
Puerto USB	6 USB 2.0

Webcam

Las cámaras web incorporadas al sistema, para la medición basada en visión artificial, son marca *Microsoft*® modelo LifeCam Studio Full HD y modelo LifeCam Cinema (Figura B.8), con capacidad para capturar imágenes y video en alta definición 1080p HD y 720p HD, respectivamente.



Figura B.8. Cámaras web LifeCam Studio Full HD (izquierda) y Cinema (derecha).
“Microsoft”, <https://www.microsoft.com/hardware/es-es/p/lifecam-studio>, visto 23/05/2017.
“Microsoft”, <https://www.microsoft.com/hardware/es-es/p/lifecam-cinema>, visto 23/05/2017.

Anexo C. Lógica de control

La lógica del PLC fue programada en el software Proficy Machine Edition, se aprecia en la Figura C.1.

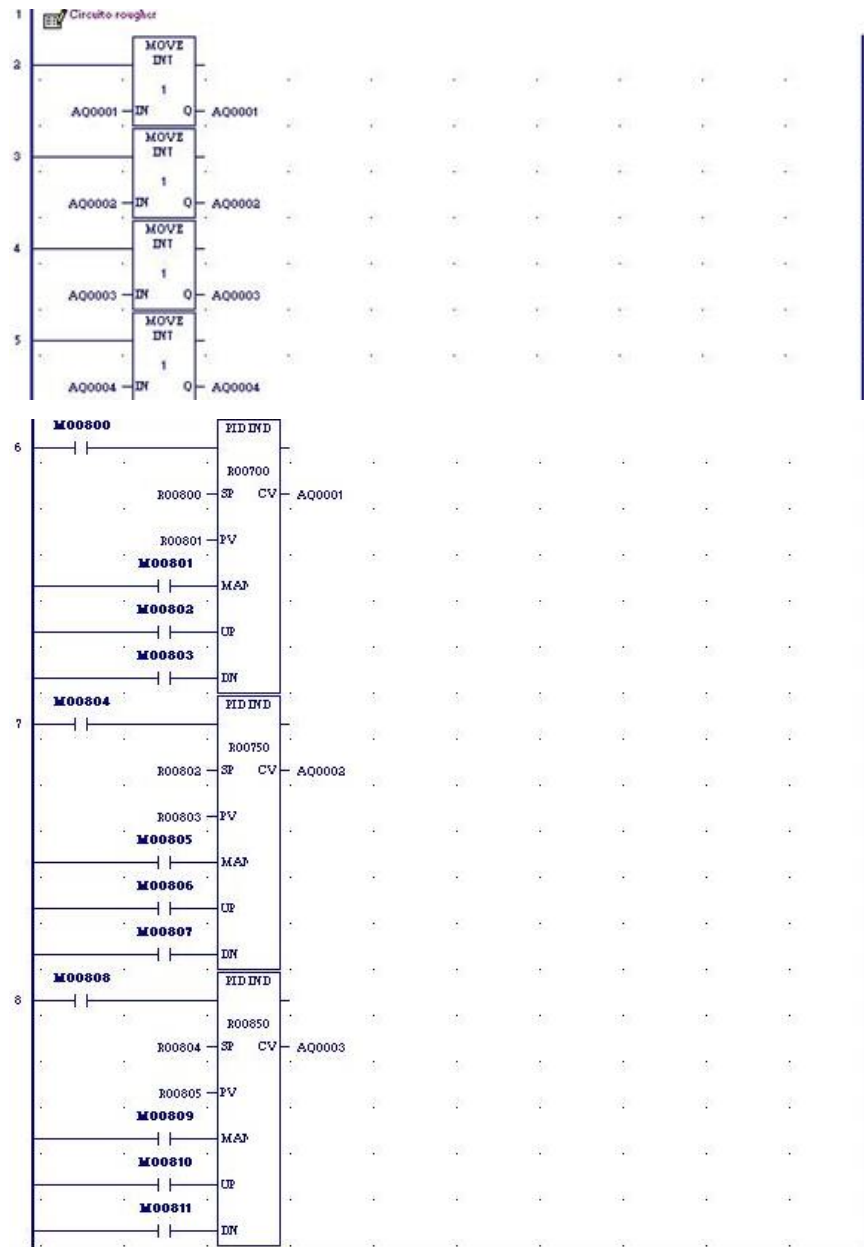


Figura C.1. Lógica de control programada en Proficy Machine Edition.

Anexo D. Sensibilidad del modelo metalúrgico

Profundidad de espuma

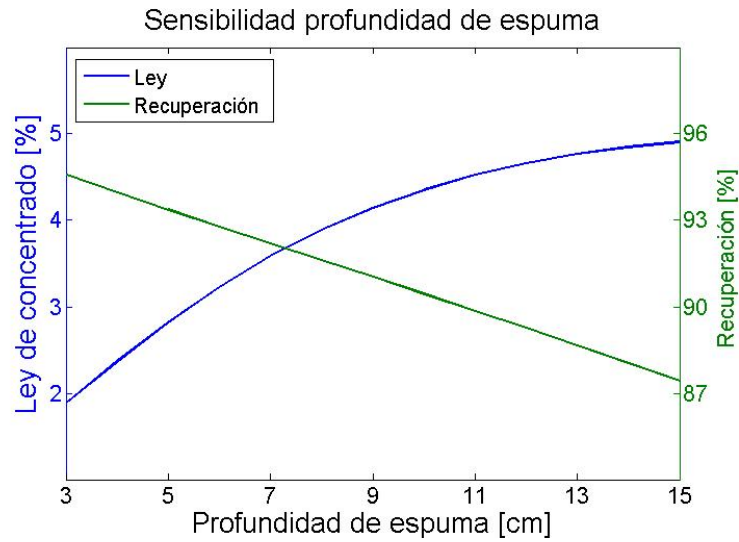


Figura D.1. Sensibilidad a la profundidad de espuma.

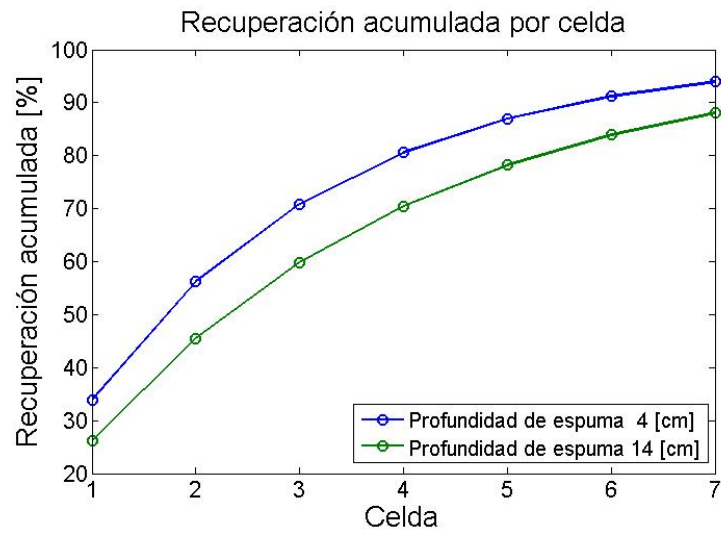


Figura D.2. Recuperación acumulada por celda, profundidad de espuma.

Velocidad superficial de gas

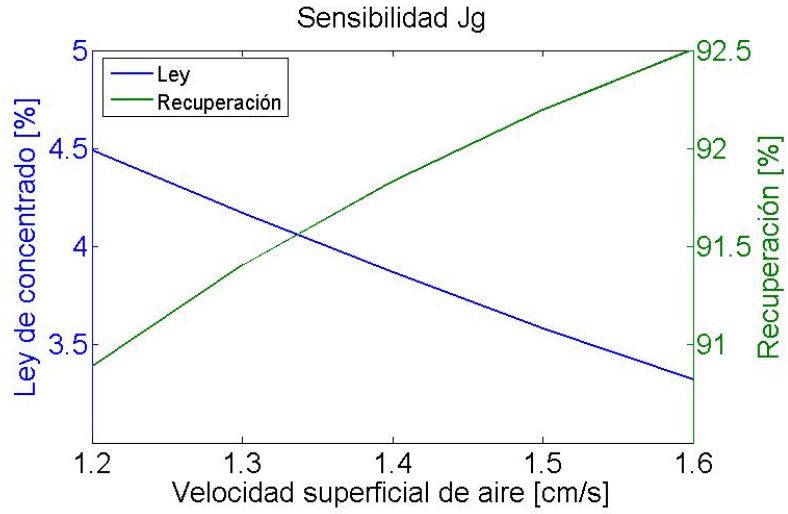


Figura D.3.Sensibilidad a la velocidad superficial de gas.

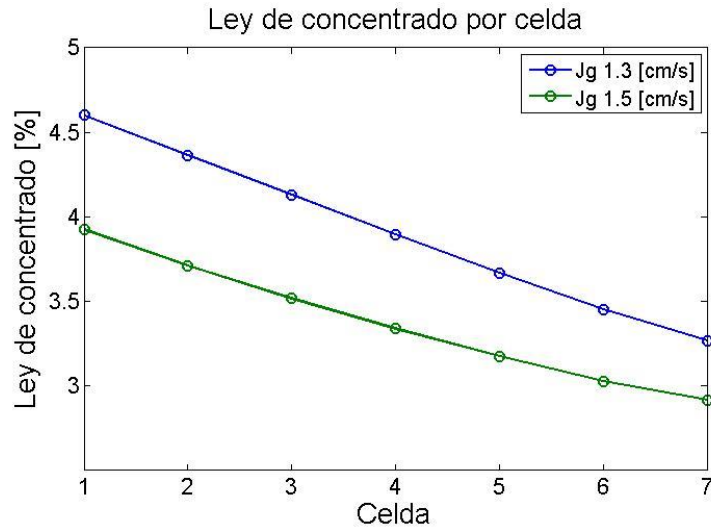


Figura D.4. Ley de concentrado por celda, velocidad superficial e gas.

Porcentaje de sólidos

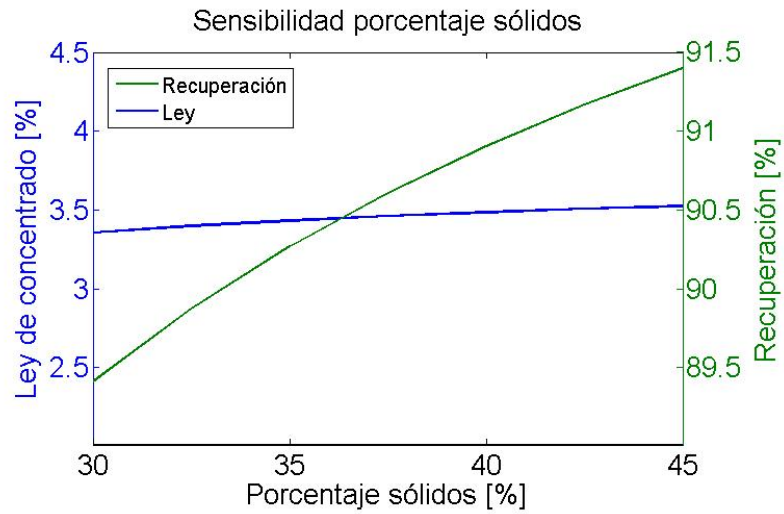


Figura D.5. Sensibilidad al porcentaje de sólidos.

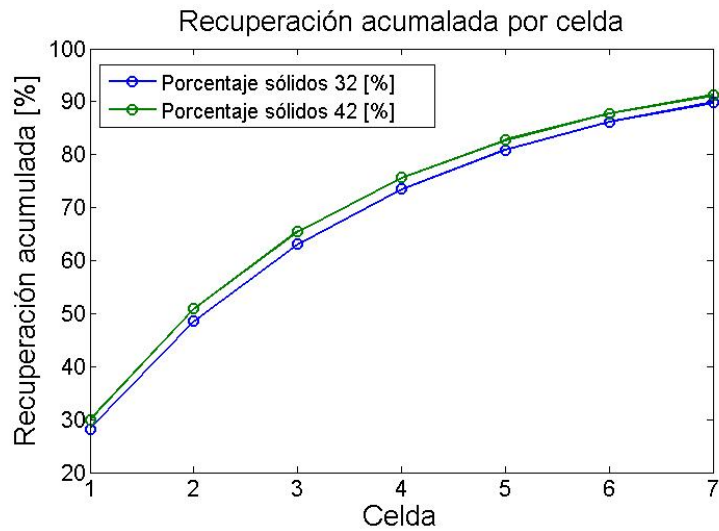


Figura D.6. Recuperación acumulada por celda, porcentaje de sólidos.

Porcentaje de gruesos

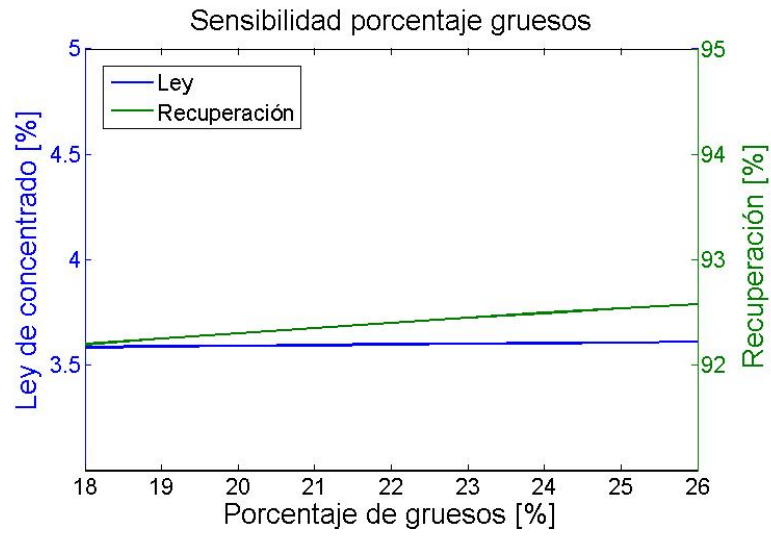


Figura D.7. Sensibilidad al porcentaje de sólidos.

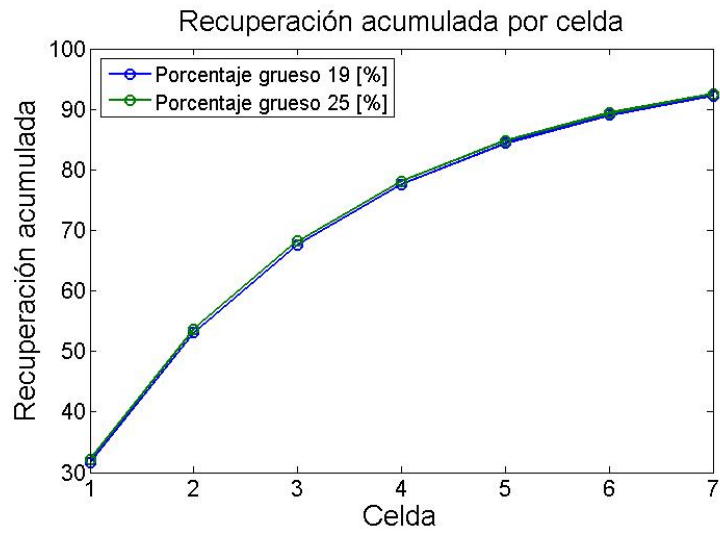


Figura D.8. Recuperación acumulada por celda, porcentaje de sólidos.

Anexo E. Código en Matlab®

Main

```
Clear all; clc; close all

%% Abrir canal con Intouch
channel = ddeinit('view','tagname');

%% Iniciar variables
SSD_n = zeros(1,2);
temp_SSD_n = zeros(1,2);
SSD_n(1) = ddereq(channel,'SSD1_n');
SSD_n(2) = ddereq(channel,'SSD2_n');
Hf_vm = 12*rand(SSD_n(1),3)+3;
V_vm = 100*rand(SSD_n(2),3);
Filtro_SU = zeros(10,3);
SSD_Hf_t = zeros(1,3);
SSD_V_t = zeros(1,3);
Datos = zeros(14400,34);
Hf = zeros(7,1);
sF = zeros(3,1);
LPF = zeros(3,1);
FO_k = zeros(300,1);
g_k = zeros(300,5);
u_k = zeros(300,7);
time_k = zeros(300,1);
time_kk = zeros(30,1);
u_kk = zeros(30,7);
FO_kk = zeros(30,1);
g_kk = zeros(30,5);
sub_k = zeros(30,1);
du_m = .05;
du = zeros(7,1);
R_lb = 89;
L_lb = 3.35;
k = 0;
kk = 1;
step = 1;
flag_MA = 0;
lambda = zeros(7,1);
epsilon = zeros(4,1);
gamma = zeros(4,7);
paso = 1;

%% Leer profundidad de espuma
Hf(1,1) = ddereq(channel,'Hf1_rvm')/100;
Hf(2,1) = ddereq(channel,'Hf2_rvm')/100;
Hf(3,1) = ddereq(channel,'Hf3_rvm')/100;
```

```

PV_Hf = Hf(1:3);
ii = 1;

%% Optimo del modelo y del proceso
% Límites de variables de decisión
Hf_lb = .03; % Límite inferior de profundidad de espuma [m]
Hf_ub = .15; % Límite superior de profundidad de espuma [m]
u_lb = Hf_lb*ones(7,1); % Vector de límite inferior
u_ub = Hf_ub*ones(7,1); % Vector de límite superior

% Variables de operación
Hf0 = .07; % altura de espuma inicial en cada celda [m]
u0 = Hf0*ones(7,1); % Vector de variables de decisión 0
Jg(1,1) = ddereq(channel, 'Jg1m')/100; % Jg cm/s
Jg(1,2) = ddereq(channel, 'Jg2m')/100;
Jg(1,3) = ddereq(channel, 'Jg3m')/100;
Jg(1,4) = ddereq(channel, 'Jg4m')/100;
Jg(1,5) = ddereq(channel, 'Jg5m')/100;
Jg(1,6) = ddereq(channel, 'Jg6m')/100;
Jg(1,7) = ddereq(channel, 'Jg7m')/100;
F_A = ddereq(channel, 'F_A')/1000; % Flujo alim. seco ton/h
L_Cu_A = ddereq(channel, 'L_Cu_Am')/100; % Ley de ali. Cu -
p_sol = ddereq(channel, 'p_sol'); % Porcentaje de solidos -
PPG = ddereq(channel, 'PPG'); % Porcentaje Pasante Grueso -
O_calc = ddereq(channel, 'O_calc'); % Fracción calc-cals
L_S_A = ddereq(channel, 'L_S_Am')/100; % Ley de S
% Vector de Variables de Operación (VO)
VO = [L_Cu_A/100, F_A, p_sol/100, PPG/100, L_S_A/100, ...
      O_calc/100, Jg];
% Método de optimización
options = optimset('Algorithm', 'sqp');
% óptimo del proceso (u_star_p)
[u_star_p, FO_p, flag_p] = fmincon(@(u) FO_RF(u, VO, 1), u0, ...
    [], [], [], [], u_lb, u_ub, @(u) g_RF(u, VO, 1), options);
% Restricciones (g)
[g_p, ~] = g_RF(u_star_p, VO, 1);
% Resultados metalúrgicos (RM)
[RM_p, ~, ~, ~, ~, ~, ~, ~] = modelo_RF(u_star_p, VO, 1);
% óptimo del modelo (u_star_m)
[u_star_m, FO_m, flag_m] =
fmincon(@(u) FO_RF(u, VO, 0), u0, [], [], [], ...
    [], [], u_lb, u_ub, @(u) g_RF(u, VO, 0), options);

%% Simulador y Optimizador en línea
while (1)
    pause (1)
    % Datos de entrada
    Q = ddereq(channel, 'Fm')/100; % Flujo vol.
    V(1,1) = ddereq(channel, 'V1m')/100; % %Val 1

```

```

V(1,2) = ddereq(channel, 'V2m')/100;
V(1,3) = ddereq(channel, 'V3m')/100;
Hf_SP(1,1) = ddereq(channel, 'Hf1_SPm')/100; % SP de Hf cm
Hf_SP(2,1) = ddereq(channel, 'Hf2_SPm')/100;
Hf_SP(3,1) = ddereq(channel, 'Hf3_SPm')/100;
Hf(1,1) = ddereq(channel, 'Hf1_rvm')/100; % Hf en cm
Hf(2,1) = ddereq(channel, 'Hf2_rvm')/100;
Hf(3,1) = ddereq(channel, 'Hf3_rvm')/100;
Hf(4,1) = ddereq(channel, 'Hf4m')/100;
Hf(5,1) = ddereq(channel, 'Hf5m')/100;
Hf(6,1) = ddereq(channel, 'Hf6m')/100;
Hf(7,1) = ddereq(channel, 'Hf7m')/100;
Jg(1,1) = ddereq(channel, 'Jg1m')/100; % Jg cm/s
Jg(1,2) = ddereq(channel, 'Jg2m')/100;
Jg(1,3) = ddereq(channel, 'Jg3m')/100;
Jg(1,4) = ddereq(channel, 'Jg4m')/100;
Jg(1,5) = ddereq(channel, 'Jg5m')/100;
Jg(1,6) = ddereq(channel, 'Jg6m')/100;
Jg(1,7) = ddereq(channel, 'Jg7m')/100;
F_A = ddereq(channel, 'F_A')/1000; % Flujo alim. seco ton/h
L_Cu_A = ddereq(channel, 'L_Cu_Am')/100; % Ley de alim. Cu-
p_sol = ddereq(channel, 'p_sol'); % Porcentaje de solidos -
PPG = ddereq(channel, 'PPG'); % Porcentaje Pasante Gueso -
O_calc = ddereq(channel, 'O_calc');
L_S_A = ddereq(channel, 'L_S_Am')/100;

% LPF (Low-Pass Filter)
sF(1,1) = ddereq(channel, 'Ftr1');
sF(2,1) = ddereq(channel, 'Ftr2');
sF(3,1) = ddereq(channel, 'Ftr3');
LPF(1,1) = ddereq(channel, 'LPF1m')/1000;
LPF(2,1) = ddereq(channel, 'LPF2m')/1000;
LPF(3,1) = ddereq(channel, 'LPF3m')/1000;
Hf_ff = sF.*(LPF.*PV_Hf+(1-LPF).*Hf(1:3))+(1-sF).*PV_Hf;
PV_Hf = Hf_ff;
out_Hf1_ff = ddepoke(channel, 'Hf1_ff', Hf_ff(1));
out_Hf2_ff = ddepoke(channel, 'Hf2_ff', Hf_ff(2));
out_Hf3_ff = ddepoke(channel, 'Hf3_ff', Hf_ff(3));

%% SSD (Steady State Detector)
% SSD Hf
temp_SSD_n(1) = ddereq(channel, 'SSD1_n');
if temp_SSD_n(1)~= SSD_n(1)
    Hf_vm = 12*rand(temp_SSD_n(1),3)+3;
    SSD_n(1) = temp_SSD_n(1);
end
SSD_Hf_t(1,1) = ddereq(channel, 'SSD_Hf1_tm')/100;
SSD_Hf_t(1,2) = ddereq(channel, 'SSD_Hf2_tm')/100;
SSD_Hf_t(1,3) = ddereq(channel, 'SSD_Hf3_tm')/100;

```

```

Hf_vm = [Hf_vm(2:end,:);Hf_ff'];
Hf_sd = std(Hf_vm);
SSD_Hf = Hf_sd<=SSD_Hf_t;
out_SS_Hf1 = ddepoke(channel, 'SSD_Hf1',double(SSD_Hf(1)));
out_SS_Hf2 = ddepoke(channel, 'SSD_Hf2',double(SSD_Hf(2)));
out_SS_Hf3 = ddepoke(channel, 'SSD_Hf3',double(SSD_Hf(3)));
SSD1 = prod(SSD_Hf);
out_SS_Hf = ddepoke(channel, 'SSD1',SSD1);
% SSD V
temp_SSD_n(2) = ddereq(channel, 'SSD2_n');
if temp_SSD_n(2)~= SSD_n(2)
    V_vm = 100*rand(temp_SSD_n(2),3);
    SSD_n(2) = temp_SSD_n(2);
end
SSD_V_t(1,1) = ddereq(channel, 'SSD_V1_tm')/100;
SSD_V_t(1,2) = ddereq(channel, 'SSD_V2_tm')/100;
SSD_V_t(1,3) = ddereq(channel, 'SSD_V3_tm')/100;
V_vm = [V_vm(2:end,:);V];
V_sd = std(V_vm);
SSD_V = V_sd<=SSD_V_t;
out_SS_V1 = ddepoke(channel, 'SSD_V1',double(SSD_V(1)));
out_SS_V2 = ddepoke(channel, 'SSD_V2',double(SSD_V(2)));
out_SS_V3 = ddepoke(channel, 'SSD_V3',double(SSD_V(3)));
SSD2 = prod(SSD_V);
out_SS_V = ddepoke(channel, 'SSD2',SSD2);
if SSD1 && SSD2
    SS = 1;
else
    SS = 0;
end
% ED
ED = abs(Hf_ff-Hf_SP)./Hf_SP*100<=1.5;
out_ON_SP1 = ddepoke(channel, 'ON_SP1',double(ED(1)));
out_ON_SP2 = ddepoke(channel, 'ON_SP2',double(ED(2)));
out_ON_SP3 = ddepoke(channel, 'ON_SP3',double(ED(3)));
out_ON_SP = ddepoke(channel, 'ON_SP',prod(ED));

% Simulador
VO = [L_Cu_A/100,F_A,p_sol/100,PPG/100,L_S_A/100,...
    O_calc/100,Jg];
Hf_m = [Hf_ff;Hf(4:end)];
[RM_p,Cc_acc,Gc_acc,Wc_acc,Tt,Gt,Wt,RMc] =...
    modelo_RF(Hf_m/100,VO,1);
L_Cu = RM_p(1)*100;
R_Cu = RM_p(2)*100;
L_Cu_t = RM_p(3)*100;
p_sol_t = RM_p(4)*100;
p_sol_c = RM_p(5)*100;
RMc = RMc*100;

```

```

P_Cu = 247.03; % P Cu Bolsa de Metales 18/11/16 [cUs$/lb]
P_c = -32.341-6.72394*L_Cu+6.9553e-4*...
      P_Cu+.19284*L_Cu*P_Cu; % P concentrado [US$/Ton]
F_c = sum(sum([Cc_acc;Gc_acc])); % Concentrado [Ton/h]
I = F_c*P_c; % ingresos

Ff = Cc_acc+Tt; % Flujo de alim. especie por tamaño ton/h
Gf = Gc_acc+Gt; % Ganga de alim. por tamaño ton/h
L_min = sum(Ff,2)/F_A*100;
L_gang = sum(sum(Gf))/F_A*100;

```

```

%% RTO

```

```

if SS && prod(ED) % Condición en estado estacionario

```

```

    % Diferencias finitas

```

```

    du(step,1) = paso;

```

```

    if step == 1

```

```

        % gradiente del modelo (simulado)

```

```

        u0 = Hf_m;

```

```

        f_m_k = FO_RF(u0/100,VO,0);

```

```

        [g_m_k,~] = g_RF(u0/100,VO,0);

```

```

        df_m = zeros(7,1);

```

```

        dg_m = zeros(4,7);

```

```

        for i=1:7

```

```

            if i == 1

```

```

                u0(i) = u0(i)+ du_m;

```

```

            else

```

```

                u0(i) = u0(i)+du_m;

```

```

                u0(i-1) = u0(i-1)-du_m;

```

```

            end

```

```

            f_m = FO_RF(u0/100,VO,0);

```

```

            [g_m,~] = g_RF(u0/100,VO,0);

```

```

            df_m(i,:) = (f_m-f_m_k)/du_m*100;

```

```

            dg_m(:,i) = (g_m-g_m_k)/du_m*100;

```

```

            if i == 7

```

```

                u0(i) = u0(i)- du_m;

```

```

            end

```

```

        end

```

```

        % gradiente del proceso

```

```

        f_p_k = -I;

```

```

        g_p_k = g_RF(Hf_m/100,VO,1);

```

```

        df_p = zeros(7,1);

```

```

        dg_p = zeros(4,7);

```

```

        for i=4:7

```

```

            if i == 4

```

```

                u0(i) = u0(i)+ du(i);

```

```

            else

```

```

                u0(i) = u0(i)+du(i);

```

```

        u0(i-1) = u0(i-1)-du(i-1);
    end
    f_p = FO_RF(u0/100,VO,1);
    [g_p,~] = g_RF(u0/100,VO,1);
    df_p(i,:) = (f_p-f_p_k)/du(i)*100;
    dg_p(:,i) = (g_p-g_p_k)/du(i)*100;
    k = k+1;
    if i == 7
        u0(i) = u0(i)- du(i);
    end
end

% dar paso
out_Hf1_SP = ddepoke(channel, 'Hf1_SP', ...
    u0(1)+du(1));
step = step+1;
elseif step == 2

    df_p(step-1,:) = (-I-f_p_k)/(Hf_m(1)-u0(1))*100;
    g_p = g_RF(Hf_m/100,VO,1);
    dg_p(:,step-1) = (g_p-g_p_k)/(Hf_m(1)-u0(1))*100;

    out_Hf1_SP = ddepoke(channel, 'Hf1_SP', u0(1));
    out_Hf2_SP = ddepoke(channel, 'Hf2_SP', ...
        u0(2)+du(2));
    step = step+1;
elseif step == 3
    df_p(step-1,:) = (-I-f_p_k)/(Hf_m(2)-u0(2))*100;
    g_p = g_RF(Hf_m/100,VO,1);
    dg_p(:,step-1) = (g_p-g_p_k)/(Hf_m(2)-u0(2))*100;

    out_Hf2_SP = ddepoke(channel, 'Hf2_SP', u0(2));
    out_Hf3_SP = ddepoke(channel, 'Hf3_SP', ...
        u0(3)+du(3));
    step = step+1;
elseif step == 4
    df_p(step-1,:) = (-I-f_p_k)/(Hf_m(3)-u0(3))*100;
    g_p = g_RF(Hf_m/100,VO,1);
    dg_p(:,step-1) = (g_p-g_p_k)/(Hf_m(3)-u0(3))*100;
    flag_MA = 1;
    step = step+1;
end
if flag_MA
    % filtros de modificadores
    d = ddereq(channel, 'd')/100;
    b = ddereq(channel, 'b')/100;
    q = ddereq(channel, 'q')/100;
    lambda = (1-d)*lambda + d*(df_p-df_m);
    epsilon = (1-b)*epsilon + b*(g_p_k-g_m);

```

```

gamma = (1-q)*gamma + q*(dg_p-dg_m);
% Resolver problema modificado
[u_MA,FO_MA,~] = fmincon(@(u)FOM_RF(u,...
    VO,lambda,0),u0/100,...
    [],[],[],[],u_lb,u_ub,...
    @(u)gm_RF(u,VO,epsilon,...
    gamma,u0/100,0),options);
% Salidas set points
out_Hf1_SP = ddepoke(channel,'Hf1_SP',...
    u_MA(1)*100);
out_Hf2_SP = ddepoke(channel,'Hf2_SP',...
    u_MA(2)*100);
out_Hf3_SP = ddepoke(channel,'Hf3_SP',...
    u_MA(3)*100);
out_Hf4 = ddepoke(channel,'Hf4',u_MA(4)*100);
out_Hf5 = ddepoke(channel,'Hf5',u_MA(5)*100);
out_Hf6 = ddepoke(channel,'Hf6',u_MA(6)*100);
out_Hf7 = ddepoke(channel,'Hf7',u_MA(7)*100);
out_kk = ddepoke(channel,'kk',kk-1);
flag_MA = 0;
step = 1;
cond = norm(u0/100-u_MA);
limite = ddereq(channel,'limite_RTO');
if cond <= limite;
    out_Cond = ddepoke(channel,'Cond',1);
else
    out_Cond = ddepoke(channel,'Cond',0);
end
end
out_Hf1_pr = ddepoke(channel,'Hf1_pr',Hf_m(1));
out_Hf2_pr = ddepoke(channel,'Hf2_pr',Hf_m(2));
out_Hf3_pr = ddepoke(channel,'Hf3_pr',Hf_m(3));
out_salto = ddepoke(channel,'salto',step-1);
out_opt = ddepoke(channel,'opt',0);
k = k+1;
reloj=tic;
end

% Exportar datos
out_L_calc = ddepoke(channel,'L_calc',L_min(1));
out_L_cals = ddepoke(channel,'L_cals',L_min(2));
out_L_pir = ddepoke(channel,'L_pir',L_min(3));
out_L_gang = ddepoke(channel,'L_gang',L_gang);
out_L_Cu = ddepoke(channel,'L_Cu',L_Cu);
out_R_Cu = ddepoke(channel,'R_Cu',R_Cu);
out_L_Cu_t = ddepoke(channel,'L_Cu_t',L_Cu_t);
out_p_sol_c = ddepoke(channel,'p_sol_c',p_sol_c);
out_L_Cu1 = ddepoke(channel,'L_Cu1',RMc(1,1));
out_L_Cu2 = ddepoke(channel,'L_Cu2',RMc(2,1));

```

```

out_L_Cu3 = ddepoke(channel, 'L_Cu3', RMc(3,1));
out_L_Cu4 = ddepoke(channel, 'L_Cu4', RMc(4,1));
out_L_Cu5 = ddepoke(channel, 'L_Cu5', RMc(5,1));
out_L_Cu6 = ddepoke(channel, 'L_Cu6', RMc(6,1));
out_L_Cu7 = ddepoke(channel, 'L_Cu7', RMc(7,1));
out_R_Cu1 = ddepoke(channel, 'R_Cu1', RMc(1,2));
out_R_Cu2 = ddepoke(channel, 'R_Cu2', RMc(2,2));
out_R_Cu3 = ddepoke(channel, 'R_Cu3', RMc(3,2));
out_R_Cu4 = ddepoke(channel, 'R_Cu4', RMc(4,2));
out_R_Cu5 = ddepoke(channel, 'R_Cu5', RMc(5,2));
out_R_Cu6 = ddepoke(channel, 'R_Cu6', RMc(6,2));
out_R_Cu7 = ddepoke(channel, 'R_Cu7', RMc(7,2));
out_L_Cu_t1 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t1', RMc(1,3));
out_L_Cu_t2 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t2', RMc(2,3));
out_L_Cu_t3 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t3', RMc(3,3));
out_L_Cu_t4 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t4', RMc(4,3));
out_L_Cu_t5 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t5', RMc(5,3));
out_L_Cu_t6 = ddepoke(channel, 'L_Cu_t6', RMc(6,3));
out_F_A2 = ddepoke(channel, 'F_A2', RMc(2,4)*10);
out_F_A3 = ddepoke(channel, 'F_A3', RMc(3,4)*10);
out_F_A4 = ddepoke(channel, 'F_A4', RMc(4,4)*10);
out_F_A5 = ddepoke(channel, 'F_A5', RMc(5,4)*10);
out_F_A6 = ddepoke(channel, 'F_A6', RMc(6,4)*10);
out_F_A7 = ddepoke(channel, 'F_A7', RMc(7,4)*10);
out_P_c = ddepoke(channel, 'P_c', P_c);
out_I = ddepoke(channel, 'I', I);
end

```

Simulador Metalúrgico

```

function [RM, Cc_acc, Gc_acc, Wc_acc, Tt, Gt, Wt, RMc]=...
    modelo_RF(u, VO, modo)

%% Características de la alimentación a circuito
l_Cu_A = VO(1); % Ley de Cobre alimentación [-]
F_A = VO(2); % Flujo de alim. sólidos (seco) [ton/h]
p_sol = VO(3); % Porcentaje de sólidos [%]
pp = zeros(1,3);
pp(3) = VO(4); % [%]grueso en sólidos de alimentación [-]
n = length(u); % numero de celdas en serie
Hf = u; % Vector de profundidad de espuma [m]
l_S_A = VO(5); % Ley asufre en la alimentación [p-p]
o_calp = VO(6); % Ocurrencia de Calcopirita
o_cals = 1-o_calp; % Ocurrencia de Calcosina
l_calp_A = l_Cu_A*o_calp*183.53/63.55; % Ley Calcopi[p-p]
l_cals_A = l_Cu_A*o_cals*(2*63.55+32.065)/2/63.55; % Ley
de Calcosina [p-p]
l_pir_A = (l_S_A-l_calp_A*2*32.065/183.525-l_cals_A*...
    32.065/(2*63.55+32.065))*119.975/2/32.065; % Ley
Pirita [p-p]

```

```

d_max = 210; % Diametro máximo alimentación [um]
d_f = 37; % Diámetro clase fino [um]
s = 1.23*pp(3)+0.138; % Parámetro "s" distr. tamaños
pp(1) = (d_f/d_max)^s; % Porcentaje de finos alim. [-]
pp(2) = 1-pp(3)-pp(1); % Porcentaje de medios alim. [-]
pas_calp_f = -1.16*pp(1)^3+1.366*pp(1)^2+.7941*...
    pp(1)-1.3*10^-16;%Acumulativo pasante calcopirita fino
pas_calp_m = -1.16*(pp(2)+pp(1))^3+1.366*...
    (pp(2)+pp(1))^2+.7941*(pp(2)+pp(1))-1.3*10^-...
    16;%Acumulativo pasante calcopirita intermedio
pp_calp = [pas_calp_f,pas_calp_m-pas_calp_f,1-pas_calp_m];
pas_cals_f = -1.023*pp(1)^3+1.29*pp(1)^2+.7328*pp(1)- ...
    1.348*10^-16;%Acumulativo pasante calcosina fino
pas_cals_m = -1.023*(pp(2)+pp(1))^3+1.29*...
    (pp(2)+pp(1))^2+.7328*(pp(2)+pp(1))-1.348*10^-...
    16;%Acumulativo pasante calcosina intermedio
pp_cals = [pas_cals_f,pas_cals_m-pas_cals_f,1-pas_cals_m];
pas_pir_f = .1273*pp(1)^3-.5051*pp(1)^2+1.38*pp(1)+ ...
    5.91*10^-17;%Acumulativo pasante pirita fino
pas_pir_m = .1273*(pp(2)+pp(1))^3-...
    .5051*(pp(2)+pp(1))^2+1.38*(pp(2)+pp(1))+5.91*10^-...
    17;%Acumulativo pasante pirita fino
pp_pir = [pas_pir_f,pas_pir_m-pas_pir_f,1-pas_pir_m];
Ff_calp = F_A*1_calp_A*pp_calp; % vector alim. Calcopirita
Ff_cals = F_A*1_cals_A*pp_cals; % calcosina (F-M-G)
Ff_pir = F_A*1_pir_A*pp_pir; % pirita (F-M-G) [ton/h]
Ff = [Ff_calp;Ff_cals;Ff_pir]; % Matriz de flujos de
alimentación (Calp;Cals;Pir) [ton/h]
ga_f = .0085; % Ganga asociada al mineral valioso fino
ga_m = .009; % Ganga asociada al mineral valioso medio
ga_g = .095; % Ganga asociada al mineral valioso grueso
ga = [ga_f,ga_m,ga_g]; % vector
Gf_a = sum(Ff(1:2,:)).*ga; % Flujo de ganga asociada en
alimentación (F-M-G) [ton/h]
Gf_l = F_A*pp-sum(Ff)-Gf_a; % Flujo de ganga libre en
alimentación (F-M-G) [ton/h]
Gf = [Gf_l;Gf_a]; % Flujo de ganga en alimentación
(libre;asociada) (F-M-G) [ton/h]
Wf = F_A/p_sol*(1-p_sol); % Agua en la alim. [ton/h]
Ff0 = Ff; %variables iniciales
Gf0 = Gf; %variables iniciales
Wf0 = Wf; %variables iniciales

%% banco
Jg = VO(7:end);
Eg = 0.85*ones(1,n); % Hold up en espuma [v-v]
Cc = zeros(3,3,n); % Concentrado por celda
Gc = zeros(2,3,n); % Ganga en concentrado por celda
Wc = zeros(1,n); % Agua en concentrado por celda

```

```

Cc_acc = zeros(3,3); % Concentrado acumulado
Gc_acc = zeros(2,3); % Ganga en concentrado acumulada
Wc_acc = zeros(1,1); % Agua en concentrado acumulada
RMc = zeros(n,4);
for i=1:n
    %% Celda i
    [Cc(:, :, i), Gc(:, :, i), Wc(:, i), Tt, Gt, Wt] = ...
        celda_r(Ff0, Gf0, Wf0, Hf(i), Eg(i), Jg(i), i, modo);
    l_Cu_i = sum(Cc(:, :, i), 2) .* [63.55/183.525, 2*...
        63.55/(2*63.55+32.065), 0] ./ ...
        (sum(sum(Cc(:, :, i))) + ... sum(sum(Gc(:, :, i))));
    F_Ai = (sum(sum(Ff0)) + sum(sum(Gf0)));
    l_Cu_Ai = sum(Ff0, 2) .* [63.55/183.525, 2*63.55/...
        (2*63.55+32.065), 0] ./ F_Ai;
    R_Cu_i = (sum(sum(Cc(:, :, i))) + ...
        sum(sum(Gc(:, :, i)))) * l_Cu_i / F_Ai / l_Cu_Ai;
    l_Cu_ti = sum(Tt, 2) .* [63.55/183.525, 2*63.55/...
        (2*63.55+32.065), 0] ./ (sum(sum(Tt)) + sum(sum(Gt)));
    RMc(i, :) = [l_Cu_i, R_Cu_i, l_Cu_ti, F_Ai];
    Ff0 = Tt; % Alimentación a la siguiente celda
    Gf0 = Gt; % Alimentación a la siguiente celda ganga
    Wf0 = Wt; % Alimentación a la siguiente celda agua
    Cc_acc = Cc_acc + Cc(:, :, i); % Concentrado acumulado
    Gc_acc = Gc_acc + Gc(:, :, i); % Ganga en concentrado acc.
    Wc_acc = Wc_acc + Wc(:, i); % Agua en concentrado acc.
end

l_Cu_c = sum(Cc_acc, 2) .* [63.55/183.525, 2*63.55/...
    (2*63.55+32.065), 0] ./ (sum(sum(Cc_acc)) + ...
    sum(sum(Gc_acc)));
R_Cu = (sum(sum(Cc_acc)) + sum(sum(Gc_acc))) * ...
    l_Cu_c / F_A / l_Cu_A;
l_Cu_t = sum(Tt, 2) .* [63.55/183.525, 2*63.55/...
    (2*63.55+32.065), 0] ./ (sum(sum(Tt)) + sum(sum(Gt)));
p_sol_t = sum(sum([Tt; Gt])) / (sum(sum([Tt; Gt])) + Wt);
p_sol_c = sum(sum([Cc_acc; Gc_acc])) / ...
    (sum(sum([Cc_acc; Gc_acc])) + Wc_acc);
RM = [l_Cu_c, R_Cu, l_Cu_t, p_sol_t, p_sol_c]; % Resultados
Metalúrgicos

end
function [Cc, Gc, Wc, Tt, Gt, Wt] = celda_r(Ff, Gf, Wf, Hf, Eg, Jg, i, modo)

persistent k0
%% alimentación celda
rho_calp = 4.2; % Densidad de calcopirita [ton/m3]
rho_cals = 5.65; % Densidad de calcosina [ton/m3]
rho_pir = 5; % Densidad de piritita [ton/m3]
rho_ga = 3.5; % Densidad de ganga [ton/m3]

```

```

rho_min = [rho_calp,rho_cals,rho_pir,rho_ga]; % vector
rho_sol = sum(([(sum(Ff,2))',sum(sum(Gf))].*rho_min)./...
    (sum(sum(Ff))+sum(sum(Gf)))); % Dens sol.[ton/m3]
rho_liq = 1; % Densidad de líquido [ton/m3]
ga_f = .0085; % Ganga asociada al mineral valioso fino
ga_m = .009; % Ganga asociada al mineral valioso medio
ga_g = .095; % Ganga asociada al mineral valioso grueso
ga = [ga_f,ga_m,ga_g]; % vector
d_f = 37; % Diametro medio de particula fina (F) [um]
d_m = 97; % Diametro medio de particula media (M) [um]
d_g = 180; % Diametro medio de particula gruesa (G) [um]
dd = [d_f,d_m,d_g]; % vector
delta_f = 7.2; % Parámetro delta para finos
delta_m = 20; % Parámetro delta para medios
delta_g = 24; % Parámetro delta para gruesos
delta = [delta_f,delta_m,delta_g]; % vector
delta = [delta;delta;delta]; % matriz
X_f = 4.8; % Parámetro ajuste finos.
X_m = 2.4; % Parámetro ajuste medios.
X_g = 1.2; % Parámetro ajuste gruesos.
X = [X_f,X_m,X_g]; % vector
X = [X;X;X]; % matriz
% Cálculo de constante cinetica en la primera celda
if i==1
    P_Kc = [.0014,.0011,.0009]; % Par flotación Klimpel
    D32 = 0.77*exp(0.77*Jg); % Diámetro sauter de burbuja
    SB = 6*(Jg^1.8*60)/(D32/10); % Flujo sup. de burbuja
    k0 = P_Kc*SB; % k (cinetica) primera celda
    k0 = [k0;k0;k0]; % matriz
end

%% Parametros
R_max = [.44,.47,.45;.40,.43,.41;.43,.46,.44];
if ~modo
    R_max = R_max*.95;
end
var_R = 0; % Variación por celda en serie
k = k0.*exp(-((i-1)./delta).^X); %k (cinetica) celda i
a_max = [0.83,0.80,0.78;0.85,0.82,0.80;0.80,0.78,0.75];
if ~modo
    a_max = a_max*.95;
end
chi_w = .6;%0.3766;
gamma = 0.66;%0.37917;
etha = 1.4;
if ~modo
    etha = etha*0.95;
end
psi = 300;

```

```

par = .22;
par_b = .3182;
delta_g = [4.3 5.5 8.5];
phi = [.1 .1 .1];
A = 0.3*0.3; % Area transversal [m2]
At = 0.4; % Altura de celda hasta revalse [m]
Etha_V = .85; % Volumen efectivo de celda [-]

%% Modelo zona de colección
F_A = sum(sum(Ff))+sum(sum(Gf)); % Flujo sól. alimentación
p_sol = F_A/(F_A+Wf); % Porcentaje de sólidos alimentación
rho_pulp = (p_sol/rho_sol+(1-p_sol)/rho_liq)^-1; %
Densidad de pulpa
Q_A = F_A/p_sol/rho_pulp; % Flujo vol. de alimentación
taus = Etha_V*A*(At-Hf)/Q_A*60*0.1; % Tiempo residencia s
taul = Etha_V*A*(At-Hf)/Q_A*60*0.9; % Tiempo residencia l
Rc = (R_max+var_R*(i-1)).*(1-(1./(k.*(taus-...
    taul))).*log((1+k.*taus)./(1+k.*taul))); % Rc
Beta = sum(sum(Ff(1:2,:)).*Rc(1:2,:))*psi*exp(par_b*i);

%% Modelo zona de espuma
tauf = Hf*100*Eg/Jg/60; % Tiempo de res. zona de espuma
Rf = a_max.*exp(-tauf/Beta); % Recuperación zona de espuma

%% Recuperacion en celda
R = Rc.*Rf./(1-Rc.*(1-Rf)); % Rec. en celda por especie
Cc = Ff.*R; % Flujo masico por especie concentrado
Rw = chi_w*exp(-par*((Hf*100)^gamma)/(Beta^etha)/Jg);
Wc = Rw*Wf; % Flujo de agua concentrado
Efi = exp(-0.693.*(dd./delta_g).^phi); % factor efi ganga
Gc_l = Rw.*Efi.*Gf(1,:); % Flujo de ganga libre en conc.
Gc_a = sum(Cc(1:2,:)).*ga; % Flujo ganga asociada en conc.
Gc = [Gc_l;Gc_a]; % Flujo de ganga en concentrado

%% Colas
Tt = Ff - Cc; % Flujo masico por especie colas
Wt = Wf - Wc; % Flujo de agua colas
Gt = Gf - Gc; % Flujo de ganga en las colas
end

```

Función objetivo

```

function [FO]=FO_RF(u,VO,modo)

[RM,Cc_acc,Gc_acc,~,~,~,~,~] = modelo_RF(u,VO,modo);
l_Cu_c = RM(1);
P_Cu = 247.03; % P Cu Bolsa de Metales 18/11/16 [cUs$/lb]
P_c = -32.341-672.394*l_Cu_c+6.9553e-4*...
    P_Cu+19.284*l_Cu_c*P_Cu; % P concentrado [US$/Ton]

```

```

%% Ingresos
F_c = sum(sum([Cc_acc;Gc_acc])); % F conc.(seco) [Ton/h]
I = F_c*P_c; % Ingreso [US$/h]

%% Función objetivo
FO = -I;
end

```

Función objetivo modificada

```

function [FO]=FOm_RF(u,VO,lambda,modo)

[RM,Cc_acc,Gc_acc,~,~,~,~,~] = modelo_RF(u,VO,modo);
l_Cu_c = RM(1);
P_Cu = 247.03; % P Cu Bolsa de Metales 18/11/16 [cUs$/lb]
P_c = -32.341-672.394*l_Cu_c+6.9553e-4*...
      P_Cu+19.284*l_Cu_c*P_Cu; % P concentrado [US$/Ton]

%% Ingresos
F_c = sum(sum([Cc_acc;Gc_acc])); % F conc.(seco) [ton/h]
I = F_c*P_c; % Ingreso [US$/h]

%% Función objetivo
FO = -I;
FO = FO + lambda'*u;
end

```

Función de restricciones

```

function [g,h] = g_RF(u,VO,modo,chi)

g = zeros(4,1); % Valor inicial restricción de desigualdad
h = []; % Valor inicial restricción de igualdad
[RM,~,~,~,~,~,~,~] = modelo_RF(u,VO,modo);
l_Cu_c = RM(1); % Ley de concentrado [-]
R_Cu = RM(2); % Recuperación de cobre [-]

%% Restricciones
g(1) = R_Cu-1; % Recuperación max
g(2) = .89-R_Cu+chi; % Recuperación min
g(3) = l_Cu_c-.345; % Ley concentrado max
g(4) = .0325-l_Cu_c; % Ley concentrado min
end

```

Función de restricciones modificadas

```

function [g,h] = gm_RF(u,VO,epsilon,gamma,uk,modo,chi)

g = zeros(4,1); % Valor inicial restricción de desigualdad
h = []; % Valor inicial restricción de igualdad

```

```

[RM,~,~,~,~,~,~,~,~] = modelo_RF(u,VO,modo);
l_Cu_c = RM(1); % Ley de concentrado [-]
R_Cu = RM(2); % Recuperación de cobre [-]

%% Restricción
g(1) = R_Cu-1; % Recuperación max
g(2) = .89-R_Cu+chi; % Recuperación min
g(3) = l_Cu_c-.345; % Ley concentrado max
g(4) = .0325-l_Cu_c; % Ley concentrado min
g = g+epsilon+gamma*(u-uk);
end

```