



# UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Tesis de Magíster

## Estimación del estado de carga en baterías Li-ion usando una aproximación lineal por partes y el Filtro Suma de Gaussianas

Tesis para optar al grado/título de  
**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica**

Alumno  
**Ignacio Eduardo Alcántara Rojas**

Guía de Tesis  
**Dr. Juan Carlos Agüero**

Co-Guía de Tesis  
**Dr. César Silva Jiménez**  
**Dr. Ángel Cedeño Nieto**

27 de agosto de 2025, Valparaíso, Chile



## CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

### 1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

**Tipo de monografía (marcar una opción):**  Memoria o trabajo de título;  Tesis de Postgrado;

**Título del trabajo:** Estimación del estado de carga en baterías Li-ion usando una aproximación lineal por partes y el Filtro Suma de Gaussianas.

**Nombre del candidato(a):** Ignacio Eduardo Alcántara Rojas

**Carrera / Grado:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

**Campus:** Casa Central Valparaíso ; **Departamento:** Electrónica

### 2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Juan Carlos Agüero Vásquez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

### 3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

6 meses;  12 meses;  2 años;  3 años;  5 años;  10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

### 4.- FIRMAS

**Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:**

Fecha: 27/08/2025 ; Firma: 

**Estudiante o Candidato(a):**

Fecha: 27/08/2025 ; Firma: 

*Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.*

---

---

# AGRADECIMIENTOS

El hecho de presentar este documento da en cuenta el largo camino que he recorrido para llegar aquí, el cual, con sus altos y bajos, ha sido posible sólo gracias a las personas que han estado a lo largo de esta empresa.

En primer lugar y siendo la persona a la que le debo todo, quisiera agradecer a mi madre Claudia, la cual ha sido el pilar fundamental de mi vida y la persona que más me ha apoyado en este camino, viéndome crecer desde una persona que casi repite un curso hasta un titulado con grado y postgrado. Espero que estés orgullosa de lo que has logrado con tu hijo, es todo gracias a tu apoyo y amor incondicional.

Gracias también a mi familia, a mi hermano Sebastián, mi eterno mejor amigo y enemigo, a mis abuelos Rosa y Manuel, a mis tíos Cristian, Marco y Angelo, y al “recién” llegado Jorge y su familia, los cuales estuvieron ahí como un fuerte núcleo familiar sobre el cual poder apoyarse, y a quienes les debo gran parte de lo que soy hoy como persona. Asimismo le doy gracias a mis compañeros de electrónica y a aquellos que conocí recorriendo este camino. Gracias en especial al Dream Team de laboratorio Juan José y Benjamín, con quienes pasé horas de informes y trabajos. Agradezco a Jose y a Gato por su amistad y las tardes que pasamos jugando y volviendo a ser niños, y a Alexander que se hizo un lugar dentro de mi círculo.

Agradezco también a mis profesores Juan Carlos Agüero, César Silva y Ángel Cedeño, los cuales no sólo me otorgaron el tema de tesis, sino que estuvieron guiándome en todo el proceso a través de su sabiduría y conocimientos. Asimismo quisiera agradecer a todos aquellos profesores que fueron parte de mi formación como profesional.

Finalmente, este trabajo fue posible gracias a la financiación de los siguientes proyectos e instituciones: FONDECYT 3240181, 1211630 y 1211676; Basal Project FB0008 Advanced Center for electrical and Electronic Engineering (AC3E); ANID PIA/APOYO project AFB180002; y la UTFSM y su departamento de electrónica y Dirección de Postgrado y Programas (DPP).

---

---

# RESUMEN

Los métodos basados en modelos para la estimación del estado de carga (SOC) en baterías de ion-litio son ampliamente utilizados debido a su alta precisión, siempre que se disponga de un modelo adecuado del sistema. En este trabajo de tesis, se desarrolla un novedoso algoritmo de filtrado basado en modelos para estimar el estado de carga de baterías de ion-litio.

Para establecer un modelo representativo del sistema de interés, se consideran modelos de circuito equivalente con una y dos mallas RC, con y sin estimación de la resistencia óhmica, así como una aproximación lineal por partes de la relación no lineal entre el voltaje de circuito abierto (OCV) y el estado de carga. Asimismo, se lleva a cabo una identificación de los parámetros del sistema mediante métodos de optimización, tales como mínimos cuadrados, ajuste de curvas y análisis del comportamiento dinámico de la batería ante estímulos apropiados.

Posteriormente, se desarrolla el Filtro Suma de Gaussianas (GSF), contemplando el modelo en variables de estado propuesto para el sistema de batería. Este algoritmo se implementa en un estudio de simulación que considera una descarga constante. Para validar los resultados, se emplean datos reales de baterías sometidas a diversas pruebas con perfiles dinámicos. El desempeño del algoritmo de filtrado propuesto se compara con dos filtros basados en modelos ampliamente utilizados: el Filtro de Kalman Extendido (EKF) y el Filtro de Partículas (PF).

## Palabras clave

Batería Li-ion, Estado de carga, Aproximación lineal por partes, Método basado en modelos, Filtro Suma de Gaussianas, Estimación bayesiana, Filtro de Kalman Extendido, Filtro de Partículas.

---

---

# ABSTRACT

Model-based methods for estimating the state of charge (SOC) in lithium-ion batteries are widely used due to their high accuracy, provided that a suitable system model is available. In this thesis, a novel model-based filtering algorithm is developed to estimate the SOC of lithium-ion batteries.

To establish a representative model of the system, equivalent circuit models with one and two RC branches are considered, with and without estimation of ohmic resistance. A piecewise linear approximation is also applied to represent the nonlinear relationship between the open-circuit voltage (OCV) and the state of charge. Furthermore, system parameter identification is carried out using optimization methods such as least squares, curve fitting, and analysis of the battery's dynamic response to appropriate stimuli.

Subsequently, the Gaussian Sum Filter (GSF) is developed based on the proposed state-space model of the battery system. This algorithm is implemented in a simulation study considering a constant discharge scenario. To validate the results, real battery data under various dynamic test profiles are used. The performance of the proposed filtering algorithm is compared with two widely used model-based filters: the Extended Kalman Filter (EKF) and the Particle Filter (PF).

## Keywords

Li-ion battery, State of charge, Piecewise linear approximation, Model-based method, Gaussian Sum Filter, Bayesian estimation, Extended Kalman Filter, Particle Filter.

---

---

# ÍNDICE

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>III</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>1</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
1.1. Estimación del SOC en baterías de litio . . . . .	3
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Modelos de baterías Li-ion . . . . .	4
1.4. Definición del Problema . . . . .	7
1.4.1. Estimador de estados . . . . .	7
1.4.2. Implementación y comparación con otros filtros . . . . .	7
1.5. Publicaciones asociadas . . . . .	8
1.6. Estructura del documento . . . . .	8
<b>2. CONCEPTOS PRELIMINARES</b>	<b>9</b>
2.1. Estimación de estados . . . . .	9
2.2. Filtraje bayesiano . . . . .	10
2.3. Modelo suma de gaussianas . . . . .	11
<b>3. MODELADO DEL SISTEMA</b>	<b>12</b>
3.1. Modelo de la batería en variables de estado . . . . .	12
3.1.1. Caso 1RC-ECM . . . . .	14
3.1.2. Caso 2RC-ECM . . . . .	15
3.1.3. Estimación de $R_0$ y el SOH . . . . .	16
3.1.4. Caso 1RC-ECM + $R_0$ . . . . .	16
3.1.5. Caso 2RC-ECM + $R_0$ . . . . .	17
3.2. Datos experimentales de la batería . . . . .	17
3.3. Identificación de la curva OCV-SOC . . . . .	18
3.4. Identificación de parámetros . . . . .	21
<b>4. FILTRO SUMA DE GAUSSIANAS</b>	<b>25</b>
4.1. PDF para ecuaciones de filtraje . . . . .	25
<b>IV</b>	

4.2. Función de densidad de probabilidad $p(y_t x_t)$ . . . . .	25
4.3. Filtro Suma de Gaussianas . . . . .	28
4.3.1. Reducción de Gaussianas . . . . .	31
4.3.2. Algoritmo del GSF . . . . .	34
<b>5. PRUEBAS Y RESULTADOS</b>	<b>35</b>
5.1. Métricas de comparación . . . . .	35
5.2. Resultados de Simulación . . . . .	36
5.3. Resultados con datos de batería real . . . . .	39
5.3.1. Caso 1RC ECM . . . . .	39
5.3.2. Caso 2RC ECM . . . . .	40
5.3.3. Caso 1RC ECM + $R_0$ . . . . .	42
5.3.4. Caso 2RC ECM + $R_0$ . . . . .	44
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
<b>A. APÉNDICES</b>	<b>48</b>
A.1. Cuadratura de Gauss-Legendre . . . . .	48
A.2. Ley de Distributividad Generalizada . . . . .	49
A.3. Filtro de Kalman Extendido . . . . .	49
A.4. Filtro de Partículas . . . . .	50
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>51</b>

---

---

# Índice de figuras

1.1. Representación gráfica del SOC . . . . .	2
1.2. Clasificación de métodos de estimación del SOC . . . . .	3
1.3. PDE representando dinámicas de batería en el EM [20] . . . . .	5
1.4. Distintos tipos de ECM. . . . .	6
1.5. No linealidad OCV-SOC . . . . .	6
2.1. Modelo de suma de gaussianas . . . . .	11
3.1. Precisión de la PWLA a medida que $K$ incrementa . . . . .	13
3.2. 1RC ECM . . . . .	14
3.3. 2RC ECM . . . . .	15
3.4. Señales de corriente y voltaje en el OCV LC test . . . . .	18
3.5. Curva OCV-SOC obtenida . . . . .	19
3.6. Curva OCV-SOC para casos de sobredescarga y sobrecarga . . . . .	20
3.7. Curva OCV-SOC para $-100\% < \Theta < 140\%$ . . . . .	20
3.8. <i>IC test</i> . . . . .	21
3.9. Localización de pulsos . . . . .	22
3.10. Estimación inicial . . . . .	22
3.11. Ajuste de curvas . . . . .	23
3.12. Ajuste de curvas . . . . .	24
4.1. Crecimiento exponencial de componentes gaussianas . . . . .	31
5.1. Señales de entrada y salida del sistema . . . . .	36
5.2. Simulación: Error de estimación . . . . .	36
5.3. Simulación: $p(\Theta_t y_t)$ para algunos instantes de tiempo. . . . .	37
5.4. Simulación: RMSE en 50 iteraciones de Montecarlo . . . . .	38
5.5. Perfiles de corriente dinámicos utilizados. . . . .	38
5.6. Error de estimación del SOC. Caso 1RC. . . . .	40
5.7. Error de estimación del SOC. Caso 2RC. . . . .	41
5.8. Estimación de $R_0$ . . . . .	43
5.9. Error de estimación del SOC. Caso 1RC + $R_0$ . . . . .	43
5.10. Error de estimación del SOC. Caso 2RC + $R_0$ . . . . .	45
5.11. Comparación de error entre experimentos . . . . .	46

# INTRODUCCIÓN

Los recientes avances tecnológicos en energías renovables, micro-redes eléctricas y electromovilidad, ha generado un creciente interés en las baterías de ion-litio (Li-ion), las cuales juegan un papel fundamental en las aplicaciones mencionadas. Los sistemas de gestión de baterías (*Battery Management System*, BMS), son los encargados de administrar el uso, carga y descarga de estas baterías.

Entre los parámetros más importantes que requieren los BMS, se encuentra el estado de carga (*State of Charge*, SOC), el cual se define como la cantidad de energía que posee la batería en un instante de tiempo determinado. Es posible calcular el SOC mediante la ecuación (1.1) [1]:

$$\Theta(t) = \Theta(t_0) - \frac{\eta}{Q_N} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

donde  $\Theta(t)$  es el SOC,  $\eta$  representa la eficiencia de Coulomb, que se refiere a la relación entre la capacidad de descarga y la de carga de la batería en un ciclo (típicamente  $\eta = 1$ ),  $Q_N$  es la capacidad nominal de la batería en  $As$ , e  $I(t)$  es la corriente de descarga en  $A$ . La figura 1.1 muestra gráficamente el concepto de SOC.

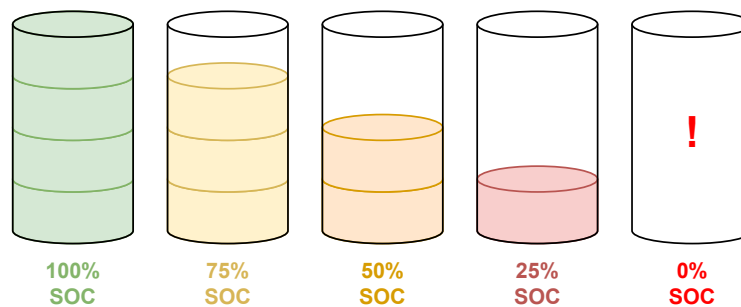


Figura 1.1: Representación gráfica del SOC

Los métodos de estimación del SOC en baterías de Litio utilizados por distintos autores son diversos, y en la siguiente sección se entrará en detalle respecto a ellos.

## 1.1. Estimación del SOC en baterías de litio

Los métodos de estimación del SOC tradicionales son dos: la medición del Voltaje de Circuito Abierto (*Open Circuit Voltage*, OCV), el cual se basa en la curva no lineal que existe entre el OCV y el SOC, y el método de *Coulomb Counting*, basado en la ecuación (1.1). Si bien se ha intentado mejorar la estimación otorgada por estos métodos [2,3], ante la necesidad de una mejor precisión de estimación es que, a partir de estos métodos, se comenzaron a desarrollar otros que pueden ser englobados en tres grupos: los métodos basados en modelos, métodos basados en datos, y métodos híbridos.

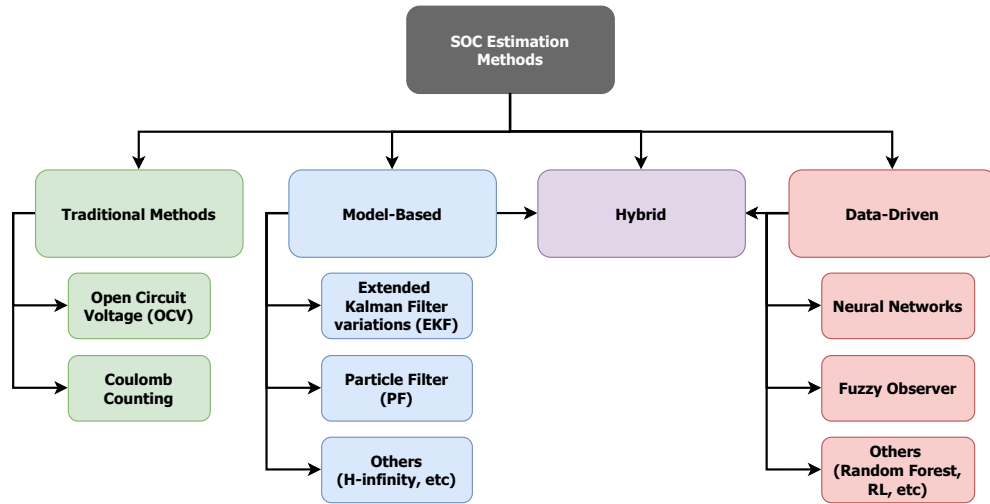


Figura 1.2: Clasificación de métodos de estimación del SOC

Entre los métodos basados en modelos, uno de los más utilizados es el Filtro de Kalman Extendido (*Extended Kalman Filter*, EKF) debido a su simplicidad de implementación. El uso de este filtro va desde su versión base [4], hasta la utilización de versiones como el *Unscented Kalman Filter* (UKF) [5] o el *Adaptive Extended Kalman Filter* (AEKF) [6]. Si bien este método de estimación es funcional, sus limitaciones en la precisión de la estimación obtenida han motivado a diversos autores a buscar métodos alternativos de estimación. Uno de estos es el Filtro de Partículas (*Particle Filter*, PF) [7, 8], el cual entrega mejores resultados que el EKF debido a su capacidad de representar funciones de densidad de probabilidad (*Probability Density Function*, PDF) más complejas. Esto provoca que el costo computacional incremente con el número de partículas utilizado.

Otros métodos de estimación basados en modelos incluyen el observador H-infinito [9] o el observador en modo deslizante [10], los cuales a través de un mejor entendimiento de la no-linealidad entre el OCV y el SOC, mejoran la precisión de estimación a costa de una mayor complejidad computacional.

Estos métodos requieren que el modelo sea lo suficientemente preciso y que exista una buena estimación inicial del estado. Es por esto que, gracias al avance en materia

de aprendizaje de máquinas, se han desarrollado métodos basados en datos, como redes neuronales [11], observadores difusos [12] y bosque aleatorio [13]. Estos métodos entregan una estimación precisa del SOC siempre y cuando exista una gran cantidad de datos disponibles, lo que conlleva largos tiempos de recopilación y procesamiento de datos, así como un incremento en los recursos requeridos.

Para mitigar los inconvenientes de ambos métodos, se han desarrollado métodos híbridos que los combinan, con la ventaja de necesitar menos datos que los métodos basados solamente en datos, mientras proporcionan mayor robustez a las incertidumbres del modelo que los métodos basados exclusivamente en modelos. Como ejemplos de métodos híbridos, se tienen autores que han utilizado el EKF con *Reinforcement Learning* o *Extreme Gradient Boosting* [14, 15].

La figura 1.2 muestra un diagrama resumen de la clasificación de los métodos de estimación del SOC.

## 1.2. Motivación

Dado lo expuesto en la sección anterior, los métodos de estimación del SOC basados en modelos son sumamente importantes no solo por ser una opción viable por sí solos, sino también porque pueden mejorar de forma significativa el desempeño de los métodos híbridos que requieren de un sistema basado en modelos preciso. En particular, en el Control Predictivo por Modelos Estocástico (*Stochastic Model Predictive Control*, SMPC), la PDF del estado dado los datos es necesaria para cumplir restricciones estocásticas (*chance constraints*), fundamentales para el control óptimo del sistema [16].

Las aplicaciones de este tipo de control utilizando modelos basados en mezclas de gaussianas (*Gaussian Mixture Model*, GMM) [17] y en BMS [18] evidencian la necesidad de contar con un método de estimación que, además de ser preciso y capaz de abordar la no linealidad del sistema, tenga un costo computacional razonable. En este contexto, es importante destacar que métodos como el Filtro de Partículas, aunque potentes, presentan una elevada carga computacional, lo que limita su aplicación práctica en tiempo real. Por ello, se requiere una alternativa que proporcione una representación adecuada de la PDF del estado sin incurrir en los altos costos computacionales del PF.

## 1.3. Modelos de baterías Li-ion

Los métodos de estimación del SOC en baterías de Li-ion requieren de un modelo de esta. Por ejemplo, autores han utilizado el modelo electroquímico (*Electrochemical Model*, EM) [19], el cual se basa en ecuaciones diferenciales parciales (*Partial Differential Equations*, PDE) para describir dinámicas de la batería (Figura 1.3), como la difusión de los iones de Litio a través del electrolito, o la transferencia de carga en la interfaz electrodo-electrolito. Si bien este modelo es preciso, conlleva un alto costo computacional y no es apto para implementaciones en tiempo real.

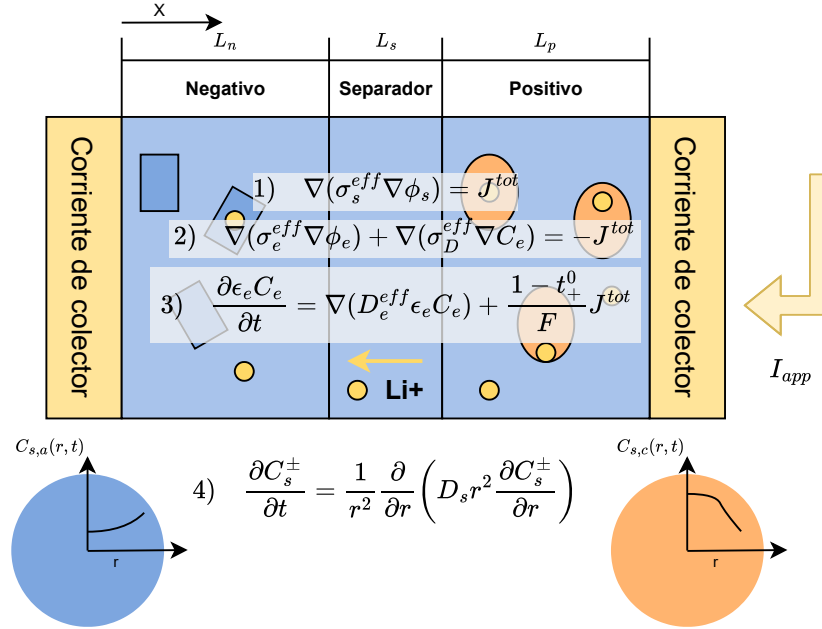


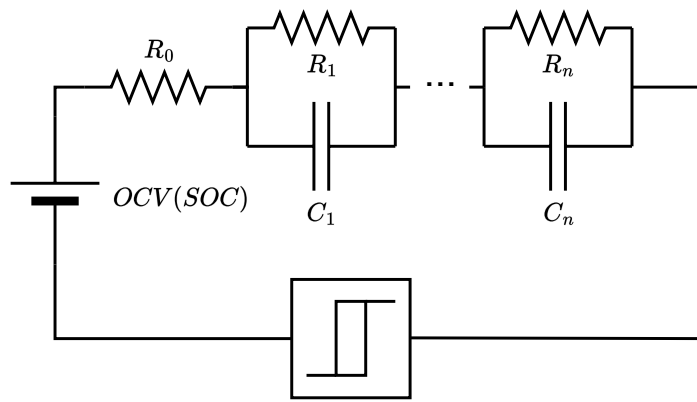
Figura 1.3: PDE representando dinámicas de batería en el EM [20]

Por otra parte, se tiene el Modelo de Circuito Equivalente (*Equivalent Circuit Model*, ECM) [21], uno de los modelos más utilizados debido a su versatilidad en coste computacional y simplicidad de implementación.

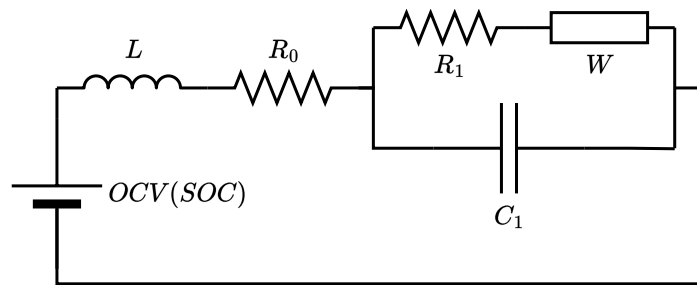
El número y tipo de componentes utilizados en el ECM determinará la precisión y complejidad del modelo. Los principales componentes que pueden (o no) presentar los ECM son: Una resistencia en serie  $R_0$ , la cual modela las pérdidas óhmicas de la batería; un número  $n$  de mallas RC que modelan las dinámicas de la batería; un bloque de histéresis, que modela las inconsistencias del OCV en los ciclos de carga y descarga; inductores representando comportamientos inductivos en la batería que pueden ser significativos; y elementos de Warburg que modelan comportamientos de la batería a distintas frecuencias. La figura 1.4 muestra ejemplos de ECM.

Los parámetros de un ECM pueden determinarse de distintas formas, desde métodos de optimización clásicos, como el algoritmo de Mínimos Cuadrados [22], hasta utilizando métodos de Espectroscopía de Impedancia Electroquímica [23]. El método a utilizar determinará la precisión del modelo, y por ende, la precisión de la estimación del SOC.

Sin duda los modelos más utilizados de ECM para la estimación del SOC son el 1RC y el 2RC, el primero debido a su fiabilidad, y el segundo debido a su precisión [24]. Incrementar el número de mallas RC aumenta el costo computacional asociado sin necesariamente mejorar la precisión de la estimación. Asimismo, agregar un bloque de histéresis no necesariamente mejora la precisión de estimación, puesto que se incrementa el orden del sistema, lo que conlleva a más parámetros a identificar, y por ende crece la probabilidad de un sobreajuste de parámetros, reduciendo la fiabilidad del modelo [24].



(a) nRCH ECM



(b) Adaptive Randles ECM

Figura 1.4: Distintos tipos de ECM.

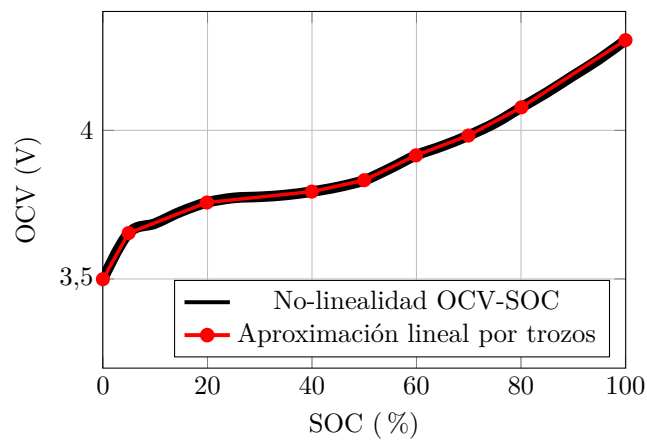


Figura 1.5: No linealidad OCV-SOC

## 1.4. Definición del Problema

Se busca estimar el SOC de una batería Li-ion (a partir de ahora denominado  $\Theta$ ), modelada mediante un circuito equivalente como el de la figura 1.4a, en el caso 1RC o 2RC sin histéresis, donde la primera malla buscará modelar las dinámicas más inmediatas de la batería, mientras que la segunda malla modelará los fenómenos a largo plazo de esta.

Para lograr este cometido, se debe obtener la curva no lineal que relaciona el OCV con SOC a través de métodos analíticos y de optimización. La figura 1.5 muestra un ejemplo del comportamiento de esta curva.

### 1.4.1. Estimador de estados

Una vez caracterizado el comportamiento dinámico de la batería, es necesario contar con un estimador que permita inferir el SOC a partir de las señales disponibles. Para esto, se considera el uso del Filtro Suma de Gaussianas (*Gaussian Sum Filter*, GSF) [25], que permite abordar la no linealidad presente en el sistema.

Este filtro considera el siguiente modelo en variables de estado:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t + \mathbf{w}_t, \quad (1.2)$$

$$r_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}u_t + n_t, \quad (1.3)$$

$$z_t = g(r_t), \quad (1.4)$$

$$y_t = z_t + \zeta_t, \quad (1.5)$$

con  $\mathbf{x}_t$  el estado del sistema,  $r_t$  una señal intermedia (no medible),  $z_t$  la señal no lineal (no medible),  $y_t$  la señal de salida no lineal,  $\mathbf{w}_t$ ,  $n_t$  y  $\zeta_t$  ruidos del sistema, y  $u_t$  la señal de entrada. Las matrices del sistema son  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ .

El problema consiste en desarrollar las ecuaciones de filtraje derivadas de este sistema y adaptarlas al modelo ECM de batería propuesto anteriormente.

### 1.4.2. Implementación y comparación con otros filtros

Luego, se obtendrán datos de baterías reales, alojados en repositorios públicos proporcionados por otros autores. A partir de estos datos, se debe realizar una identificación de parámetros para el modelo de batería a utilizar, desde sus componentes pasivos hasta la no linealidad OCV-SOC.

A partir del modelo construido, se debe implementar el algoritmo propuesto para la estimación del SOC. Finalmente, se deben utilizar también el Filtro de Kalman Extendido y el Filtro de Partículas, ampliamente utilizados en la literatura, con los mismos datos de baterías. Esto permitirá establecer una comparación entre los tres filtros en términos de tiempo de cómputo y precisión de estimación del SOC, con el objetivo de evaluar el desempeño del Filtro Suma de Gaussianas frente a los métodos tradicionales.

## 1.5. Publicaciones asociadas

Parte de los resultados presentados en esta tesis han sido previamente publicados en la siguiente contribución:

- Alcántara, I. E., Cedeño, A. L., Silva, C. A., & Agüero, J. C. (2024). Li-Ion Battery SOC Estimation via Gaussian Sum Filtering and Piecewise Linear Approximation. In 2024 IEEE ANDESCON (pp. 1-6). IEEE.

**Abstract:** Model-based methods for state of charge estimation in Lithium-Ion batteries have been widely employed. In this paper a novel filtering model-based algorithm is developed to estimate the state of charge. An 1RC equivalent circuit model and a piecewise linear approximation of the relationship between Open Circuit Voltage and State Of Charge are utilized for modelling the system of interest. A simulation study that consideres pulsed current discharge is developed. To validate these results, real battery data are utilized under various dynamic test profiles. The performance of the proposed filtering algorithm is compared with Extended Kalman Filter and Particle Filter.

## 1.6. Estructura del documento

El resto del trabajo se estructura de la siguiente forma: El capítulo 2 presenta algunos conceptos preliminares para continuar con el trabajo. Después, el capítulo 3 muestra el modelado del sistema de la batería, desde el modelo a elegir y los datos de batería utilizados hasta la identificación de parámetros del modelo. Luego, el capítulo 4 se enfoca la obtención del Filtro Suma de Gaussianas a partir de las ecuaciones de filtraje bayesiano, para luego desarrollar las ecuaciones del algoritmo a utilizar. A continuación, el capítulo 5 muestra los resultados de simulación con datos de batería simulados y reales, estableciendo comparaciones entre los filtros implementados a través de métricas de comparación. Finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones del trabajo.

# CONCEPTOS PRELIMINARES

Este capítulo presenta algunos conceptos preliminares necesarios para contextualizar las técnicas utilizadas en esta tesis. Se introduce el concepto de estimación de estados para sistemas dinámicos, así como el estimador óptimo a utilizar. Luego, se presenta el concepto de filtraje bayesiano, el cual se presenta como una forma de obtener la estimación del estado a través de las funciones de densidad de probabilidad de las mediciones y de la predicción del estado. Finalmente, se introduce el modelo de suma de gaussianas para representar funciones de densidad de probabilidad no gaussianas a través de componentes gaussianas.

## 2.1. Estimación de estados

El concepto de estimación de estados viene de la necesidad de obtener el estado no medible de un sistema en algún instante de tiempo, a partir de las mediciones de la salida del mismo. Dentro de las formas de abordar este problema, se encuentra la estimación determinista, la cual está basada en el supuesto de que la medición y las variables de estado del sistema son deterministas. Un ejemplo de este tipo de estimación es el observador de Luenberger, el cual empieza como un estimador de estados para sistemas lineales determinísticos [26], para luego ser implementado en sistemas no lineales [27] y, finalmente, obtener su versión adaptiva para abordar el problema de estimación en sistemas estocásticos [28].

Otra aproximación para el problema de estimación de estados es a través de la maximización/minimización de algún criterio de optimalidad, tales como el criterio de máxima verosimilitud o de máximo a posteriori. En este trabajo, se utiliza el criterio de media condicional, en el cual se busca minimizar la varianza del error de estimación  $e = x - \hat{x}$ , donde  $x$  representa el estado verdadero y  $\hat{x}$  la estimación de este. Luego, el estimador óptimo que minimiza la varianza del error de estimación corresponde a la media condicional [29]:

$$\mathbb{E}\{x|y\} = \arg \min_{\hat{x}} \mathbb{E}\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T | y\}. \quad (2.1)$$

De esta forma, es necesario obtener la PDF del estado dadas las mediciones,  $p(x|y)$ , para así obtener una estimación óptima del estado que minimiza la varianza del error de estimación.

## 2.2. Filtraje bayesiano

El filtraje bayesiano es una forma óptima de estimar los estados de un sistema mediante mediciones ruidosas de la salida de este. A partir del teorema de Bayes, es posible caracterizar la PDF de los estados  $x_{1:N}$  dadas las mediciones  $y_{1:N}$ :

$$p(x_{1:N}|y_{1:N}) = \frac{p(y_{1:N}|x_{1:N})p(x_{1:N})}{p(y_{1:N})}, \quad (2.2)$$

donde  $p(x_{1:N})$  es la distribución a priori del estado,  $p(y_{1:N}|x_{1:N})$  es la PDF de las mediciones, y  $p(y_{1:N})$  es la constante de normalización.

Caracterizar esta PDF a medida que llegan nuevos resultados resulta en un coste computacional elevado cuando  $N$  crece, debido a la necesidad de calcular esta PDF a partir del nuevo resultado y de todas las mediciones anteriores. Es por esto que, aprovechando la propiedad markoviana de los sistemas dinámicos, es posible obtener una PDF que sólo dependa del estado actual.

Las ecuaciones que caracterizan a un proceso markoviano son las siguientes [30]:

$$p(y_t|x_t, y_{1:t-1}) = p(y_t|x_t), \quad (2.3)$$

$$p(x_{t+1}|x_t, y_{1:t}) = p(x_{t+1}|x_t), \quad (2.4)$$

las cuales se traducen en que la salida de un sistema no depende de su pasado, y que el estado de este en algún instante sólo depende del estado en el instante anterior. De esta forma, para un proceso en espacio de estados genérico, se tienen las ecuaciones de filtraje [31]:

$$\textbf{Corrección:} \quad p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{p(y_t|y_{1:t-1})}, \quad (2.5)$$

$$\textbf{Predicción:} \quad p(x_{t+1}|y_{1:t}) = \int p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{1:t})dx_t, \quad (2.6)$$

donde la constante de normalización está dada por:

$$p(y_t|y_{1:t-1}) = \int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t. \quad (2.7)$$

Es importante notar que para usar estas ecuaciones de filtraje, es necesario conocer  $p(x_{t+1}|x_t)$  y  $p(y_t|x_t)$ . En general, para sistemas lineales con ruidos gaussianos, es posible obtener estas PDF directamente del modelo del sistema, mas el caso a tratar en este trabajo corresponde a un sistema no lineal cuyos ruidos gaussianos pasan a través de dicha no linealidad, lo que dificulta la obtención de estas PDF.

De esta forma, se enfatiza la necesidad de obtener una expresión para  $p(y_t|x_t)$ , PDF que podría no ser gaussiana debido a la no linealidad por la cual pasan los ruidos. Es por esto que es necesario un modelo capaz de representar PDFs que no sean gaussianas.

### 2.3. Modelo suma de gaussianas

Una forma de aproximar distribuciones de probabilidad es el modelo de suma de gaussianas (*Gaussian Mixture Models*, GMM) [32, 33], el cual permite dicha aproximación mediante una superposición de PDFs gaussianas de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=1}^M \gamma_k \mathcal{N}(x; \mu_k, \Sigma_k), \quad (2.8)$$

con

$$0 \leq \gamma_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^M \gamma_k = 1,$$

La figura 2.1 muestra un ejemplo del modelo de suma de gaussianas de forma gráfica, a través de la mezcla  $p(x) = 0,4\mathcal{N}(x; -3, 0,49) + 0,2\mathcal{N}(x; 0, 0,36) + 0,4\mathcal{N}(x; 3, 0,81)$ .

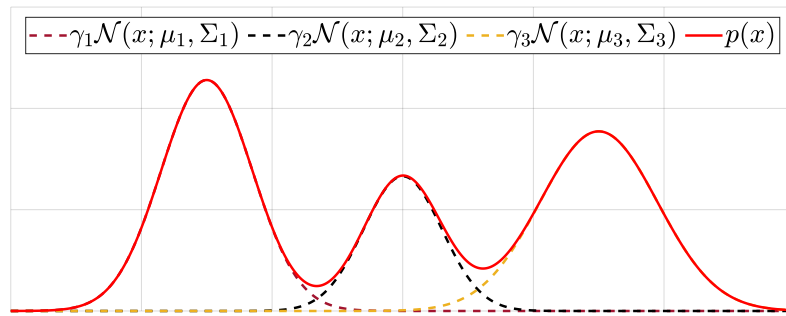


Figura 2.1: Modelo de suma de gaussianas

De esta forma, es posible representar funciones de distribución de probabilidad no gaussianas a través de una suma de gaussianas ponderadas mediante algún peso, lo cual es útil en el caso de este trabajo, donde la PDF de la salida dado el estado  $p(y_t|x_t)$  no es gaussiana.

# MODELADO DEL SISTEMA

Este capítulo presenta el modelado del sistema. En primer lugar, se obtiene el modelo de la batería en variables de estado para los casos con 1 malla RC y 2 mallas RC. Luego, se introduce la estimación de la resistencia óhmica y el concepto de estado de salud de la batería y su relación con la resistencia óhmica, para luego incluir la estimación de esta en el modelo de la batería. A continuación se expone la obtención de los datos de batería a utilizar, para luego identificar la no linealidad OCV-SOC y finalmente, mostrar el proceso de identificación de parámetros.

## 3.1. Modelo de la batería en variables de estado

Para desarrollar las ecuaciones del Filtro Suma de Gaussianas, es necesario reescribir el sistema dado por las ecuaciones (1.2)-(1.5) que considera Cedeño et. al [25], y adecuarlo al sistema de la batería. Se considera el siguiente sistema en variables de estado:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t + \mathbf{w}_t, \quad (3.1)$$

$$r_t = \mathbf{C}_a\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t + n_t, \quad (3.2)$$

$$s_t = \mathbf{C}_b\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t + v_t, \quad (3.3)$$

$$z_t = g(r_t), \quad (3.4)$$

$$y_t = z_t + s_t, \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{x}$  corresponde al estado,  $r_t$  y  $s_t$  son señales intermedias no medibles,  $z_t$  denota la salida de la no-linealidad (OCV),  $y_t$  es el voltaje en los terminales de la batería, y  $u_t$  corresponde a la corriente de descarga. Además, los ruidos distribuyen según:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ n_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ n_t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \right), \quad (3.6)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(v_t; 0, P), \quad (3.7)$$

con  $\mathcal{N}(\mathbf{n}; 0, \Sigma)$  representando una distribución Gaussiana de media cero y matriz de covarianza  $\Sigma$  de la variable aleatoria  $\mathbf{n}$ . Además,  $v_t$  es no correlacionado con  $\mathbf{w}_t$  y  $n_t$ , y el estado inicial es una variable aleatoria que distribuye tal que  $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{P}_1)$ , no correlacionada con  $\mathbf{w}_t$ ,  $n_t$ , ni  $v_t$ . El estado  $\mathbf{x}$  y las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_b$ ,  $\mathbf{D}_a$  y  $\mathbf{D}_b$  dependerán del ECM a utilizar.

Luego,  $g(r_t)$  corresponde a la curva no lineal que relaciona el OCV con el SOC. Esta puede ser aproximada mediante una aproximación lineal por partes (*Piecewise Linear*

Approximation, PWLA) de la siguiente forma:

$$\hat{g}(r_t) = \begin{cases} a_1 r_t + b_1 & \text{if } \Omega_1, \\ a_2 r_t + b_2 & \text{if } \Omega_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_K r_t + b_K & \text{if } \Omega_K, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde los conjuntos  $\Omega_i = \{r_t | \theta_{i-1} \leq r_t < \theta_i\}$  son intervalos disjuntos con  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_K = 1$ , e  $i = 1, \dots, K$ . Las constantes  $a_i$  y  $b_i$  son la pendiente y el intercepto del  $i$ -ésimo segmento que aproxima a  $g$ . La figura 3.1 muestra que la PWLA puede volverse muy precisa a medida que el número de líneas  $K$  aumenta.

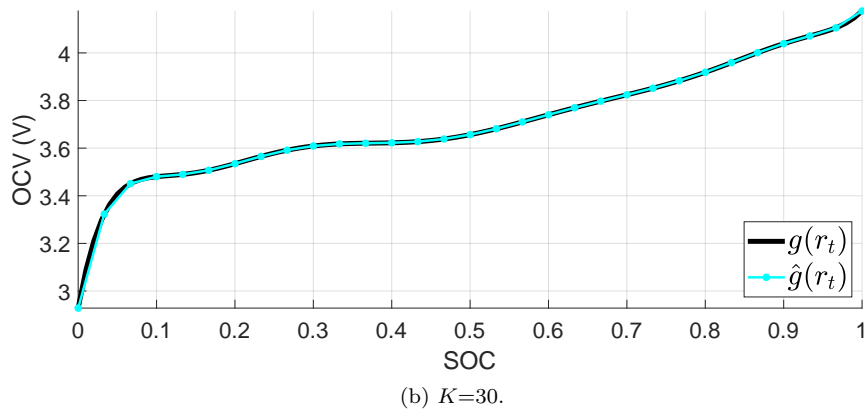
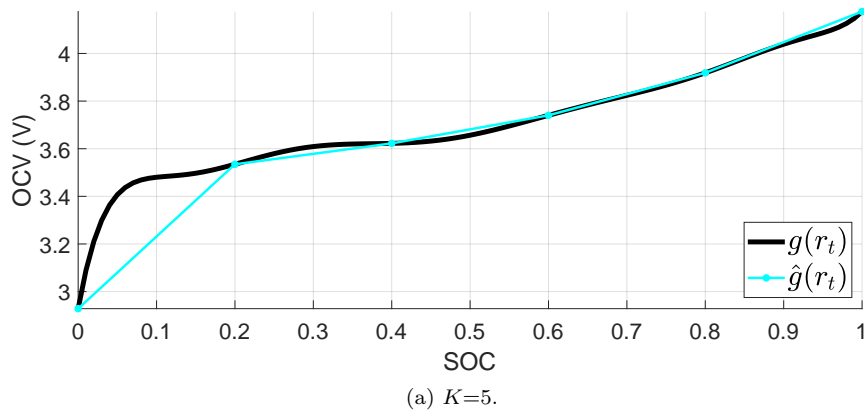


Figura 3.1: Precisión de la PWLA a medida que  $K$  incrementa

### 3.1.1. Caso 1RC-ECM

Se tiene el ECM de una malla RC de la figura 3.2.

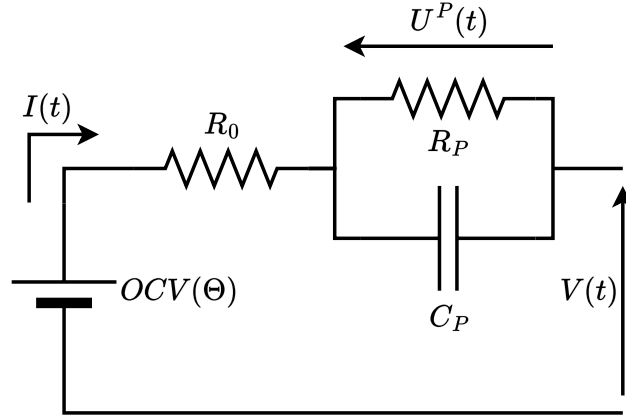


Figura 3.2: 1RC ECM

A través del cálculo del SOC (1.1), las ecuaciones de Kirchoff del circuito y una discretización del modelo, es posible obtener una representación del sistema en espacio de estados [15]:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{t+1} \\ U_{t+1}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_t \\ U_t^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \end{bmatrix} I_t, \quad (3.9)$$

$$V_t = \text{OCV}(\Theta_t) - U_t^P - I_t R_0, \quad (3.10)$$

donde  $R_0$  corresponde a la resistencia óhmica que modela las pérdidas eléctricas de la batería;  $R_P$  y  $C_P$  corresponden a la resistencia y capacitancia de polarización respectivamente, que modelan la dinámica producida por los procesos transferencia de carga y polarización de la batería;  $I_t$  es la corriente de descarga;  $V_t$  el voltaje en los terminales de la batería;  $U_t^P$  es el voltaje en las malla de polarización;  $\Theta_t$  es el SOC y  $\text{OCV}(\Theta_t)$  el voltaje de circuito abierto de la batería en función del SOC;  $T$  es el período de muestreo en  $s$ ;  $\tau_P = R_P C_P$  la constante de tiempo de la malla de polarización, y  $Q_N$  la capacidad de la batería en  $As$ .

De esta forma, para el caso 1RC-ECM se tiene el sistema (3.1)-(3.5), con el estado  $\mathbf{x}_t = [\Theta_t \ U_t^P]^T$  y las matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_a &= [1 \ 0], & \mathbf{C}_b &= [0 \ -1], \\ \mathbf{D}_a &= 0, & \mathbf{D}_b &= -R_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Caso 2RC-ECM

Se tiene el ECM de dos mallas RC de la figura 3.3.

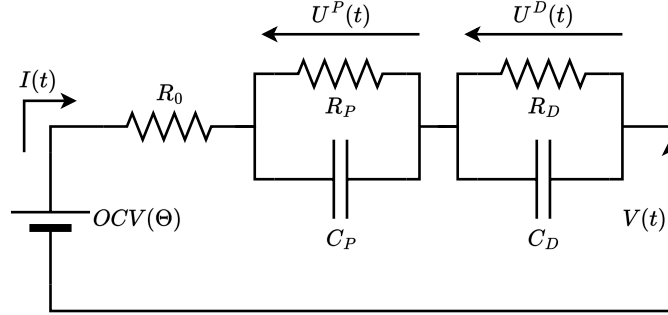


Figura 3.3: 2RC ECM

Procediendo de forma similar al caso 1RC, se obtiene el siguiente sistema en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{t+1} \\ U_{t+1}^P \\ U_{t+1}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T/\tau_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_t \\ U_t^P \\ U_t^D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \\ R_D(1 - e^{-T/\tau_D}) \end{bmatrix} I_t, \quad (3.12)$$

$$V_t = \text{OCV}(\Theta_t) - U_t^P - U_t^D - I_t R_0, \quad (3.13)$$

donde se tienen las variables y parámetros del caso 1RC, en adición a aquellas involucradas con la segunda malla RC:  $R_D$  y  $C_D$ , que corresponden a la resistencia y capacitancia de difusión respectivamente, las cuales modelan la dinámica producida por la difusión de iones de la batería;  $U^D(t)$  es el voltaje en la malla RC; y  $\tau_D = R_D C_D$  la constante de tiempo asociada a esta.

De esta forma, para el caso 2RC-ECM se tiene el sistema (3.1)-(3.5), con el estado  $\mathbf{x}_t = [\Theta_t \ U_t^P \ U_t^D]^T$  y las matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T/\tau_D} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \\ R_D(1 - e^{-T/\tau_D}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_a &= [1 \ 0 \ 0], & \mathbf{C}_b &= [0 \ -1 \ -1], \\ \mathbf{D}_a &= 0, & \mathbf{D}_b &= -R_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.1.3. Estimación de $R_0$ y el SOH

La precisión de estimación del SOC varía dependiendo de muchos factores: La forma de obtención de la curva OCV-SOC, el modelo a utilizar, el número de componentes RC escogidos para el ECM, la incertidumbre respecto a la identificación de parámetros del modelo en variables de estado, etc. Es por esto que existen autores que han integrado la estimación en tiempo real de la resistencia óhmica  $R_0$  para mejorar los resultados de la estimación [34].

Este método consiste en tomar  $R_0$  como otra variable de estado más, y modificar las matrices del sistema en consecuencia. Así, es posible mejorar la estimación del SOC sin realizar pasos extra en la identificación de parámetros ni tomando más mediciones, otorgando precisión extra a partir de la ligera modificación del modelo en variables de estado.

Por otra parte, es conocido que a medida de que la batería va sufriendo ciclos de carga y descarga, su capacidad total se ve afectada, disminuyendo con el paso de los ciclos. El estado de salud (*State of Health*, SOH) es otro parámetro importante de las baterías Li-ion, y se define como el cambio en la capacidad  $Q_N$  de la batería a través del tiempo respecto a su capacidad inicial  $Q_0$ , cuando la batería está nueva [35]:

$$\text{SOH} = \frac{Q_N}{Q_0} \times 100 \%. \quad (3.15)$$

Definir el SOH en este caso es importante, debido a que es posible realizar una estimación de este basándose solamente en la estimación de la resistencia óhmica  $R_0$  [36]:

$$\text{SOH}_{R_i} = \left( 1 + \frac{R_i - R_0}{R_i} \right) \times 100 \%, \quad (3.16)$$

donde  $\text{SOH}_{R_i}$  corresponde al valor del SOH, y  $R_i$ ,  $R_0$  son la resistencia interna de la batería nueva y la resistencia interna actual, respectivamente.

Así, es interesante incluir la resistencia óhmica  $R_0$  tanto por la mejora en la precisión de estimación, así como por la posibilidad de estimar el SOH a partir de la obtención de  $R_0$ . Las siguientes dos secciones muestran el modelo en variables de estado del sistema con la inclusión de  $R_0$ .

### 3.1.4. Caso 1RC-ECM + $R_0$

Se tiene el ECM de una malla RC de la figura 3.2 y su representación en variables de estado (3.9)-(3.10). Es posible reescribir el sistema incluyendo  $R_0^1$  como una variable de estado del sistema:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{t+1} \\ U_{t+1}^P \\ R_{t+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_t \\ U_t^P \\ R_t^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P (1 - e^{-T/\tau_P}) \\ 0 \end{bmatrix} I_t, \quad (3.17)$$

$$V_t = \text{OCV}(\Theta_t) - U_t^P - I_t R_0. \quad (3.18)$$

<sup>1</sup>Se utiliza el abuso de notación  $R_t^0$  para denotar la resistencia  $R_0$  en el instante  $t$ .

Así, para el caso 1RC-ECM +  $R_0$  se tiene el sistema (3.1)-(3.5), con el estado  $\mathbf{x}_t = [\Theta_t \ U_t^P \ R_t^0]^T$  y las matrices<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_a &= [1 \ 0 \ 0], & \mathbf{C}_b &= [0 \ -1 \ -I_t], \\ \mathbf{D}_a &= 0, & \mathbf{D}_b &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.1.5. Caso 2RC-ECM + $R_0$

Se tiene el ECM de una malla RC de la figura 3.3 y su representación en variables de estado (3.12)-(3.13). Es posible reescribir el sistema incluyendo  $R_0$ :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{t+1} \\ U_{t+1}^P \\ U_{t+1}^D \\ R_{t+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T/\tau_D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_t \\ U_t^P \\ U_t^D \\ R_t^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \\ R_D(1 - e^{-T/\tau_D}) \\ 0 \end{bmatrix} I_t, \quad (3.20)$$

$$V_t = \text{OCV}(\Theta_t) - U_t^P - U_t^D - I_t R_0. \quad (3.21)$$

Así, para el caso 2RC-ECM +  $R_0$  se tiene el sistema (3.1)-(3.5), con el estado  $\mathbf{x}_t = [\Theta_t \ U_t^P \ U_t^D \ R_t^0]^T$  y las matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-T/\tau_P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T/\tau_D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -T/Q_N \\ R_P(1 - e^{-T/\tau_P}) \\ R_D(1 - e^{-T/\tau_D}) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_a &= [1 \ 0 \ 0 \ 0], & \mathbf{C}_b &= [0 \ -1 \ -1 \ -I_t], \\ \mathbf{D}_a &= 0, & \mathbf{D}_b &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

## 3.2. Datos experimentales de la batería

Se emplean datos de batería obtenidas por diversos autores, los cuales utilizan una batería Samsung INR 18650-20R [37], cuyas especificaciones básicas se muestran en la tabla 3.1.

Para el caso del sistema simulado, los datos son obtenidos a partir del repositorio de la NASA [38, 39], los cuales aportan perfiles de carga y descarga más tradicionales. Luego, para el caso con datos reales de batería, se utilizaron registros disponibles a través del acceso abierto proporcionado por el *Center for Advanced Life Cycle Engineering* (CALCE), Universidad de Maryland [34], los cuales aportan un perfil de descarga más complejo.

<sup>2</sup>Se utiliza otro abuso de notación, omitiendo  $t$  en  $\mathbf{C}_b$  a pesar de que es variable en el tiempo.

Batería	Samsung INR 18650-20R
Capacidad nominal	2000 mAh
Voltaje nominal	3.6 V
Voltaje de corte superior	4.2 V
Voltaje de corte inferior	2.5 V
Corriente máxima	22 A (a 25°C)
Temperatura de uso	0-50 °C

Tabla 3.1: Especificaciones de la batería Samsung INR 18650-20R

### 3.3. Identificación de la curva OCV-SOC

La obtención de la no-linealidad OCV-SOC puede realizarse de múltiples formas y una de ellas es mediante la descarga de esta a partir de un  $C$ -rate bajo. El  $C$ -rate denota la corriente necesaria para descargar una batería en un tiempo determinado, y está relacionado con la capacidad nominal de la batería [40]. En particular, un ratio 1C indica la corriente necesaria para descargar la batería en una hora, 0.5C la necesaria para descargar la batería en 2 horas, y de manera análoga para otros valores de  $C$ -rate.

Así, es posible obtener la curva OCV-SOC a partir de cargar y descargar la batería a corrientes bajas (*Low Current test*, LC), como 0.04C, 0.01C, etc. La figura 3.4 muestra las señales de corriente y voltaje a un  $C$ -rate de 0.05C.

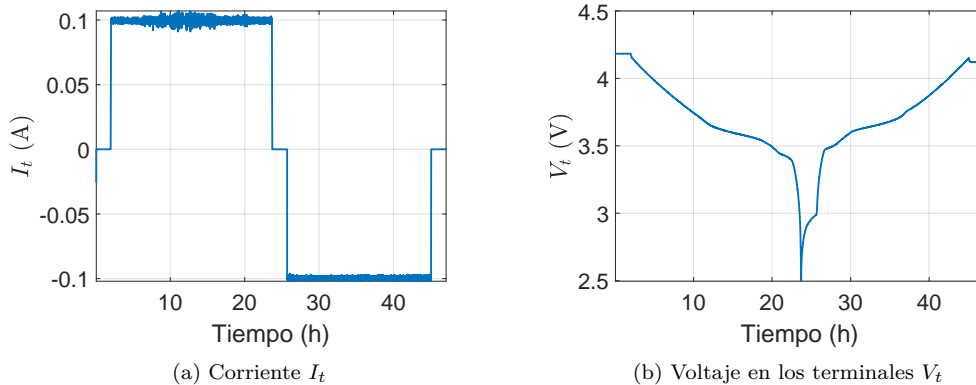


Figura 3.4: Señales de corriente y voltaje en el OCV LC test

Al estar trabajando con corrientes muy bajas respecto a la corriente nominal, es posible obviar la caída de voltaje óhmica en  $R_0$ , así como el comportamiento dinámico de la batería debido a las mallas de polarización y difusión, y aproximar el voltaje  $V_t$  en los terminales de la batería como el voltaje de circuito abierto OCV. Asimismo, es posible utilizar (1.1) para obtener el SOC, y así construir la curva no-lineal que relaciona el OCV con el SOC.

Cabe mencionar que el comportamiento de la curva OCV-SOC varía según si la batería se carga o se descarga. Es por esto que, por simplicidad, se utilizará el promedio obtenido entre estas dos curvas, según muestra la figura 3.5a.

Así, es posible ajustar esta curva a un polinomio de grado 9 (Figura 3.5b), tal que la curva OCV-SOC a utilizar corresponde a:

$$g(\Theta) = \alpha_9\Theta^9 + \alpha_8\Theta^8 + \alpha_7\Theta^7 + \alpha_6\Theta^6 + \alpha_5\Theta^5 + \alpha_4\Theta^4 + \alpha_3\Theta^3 + \alpha_2\Theta^2 + \alpha_1\Theta + \alpha_0, \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_9 &= 2432,02974240497, & \alpha_8 &= -11733,0588179141, \\ \alpha_7 &= 23935,595504352, & \alpha_6 &= -26846,6590989558, \\ \alpha_5 &= 18023,4299039232, & \alpha_4 &= -7393,00310798008, \\ \alpha_3 &= 1817,89595072217, & \alpha_2 &= -253,509864902856, \\ \alpha_1 &= 18,5274909641379, & \alpha_0 &= 2,92833228838401. \end{aligned}$$

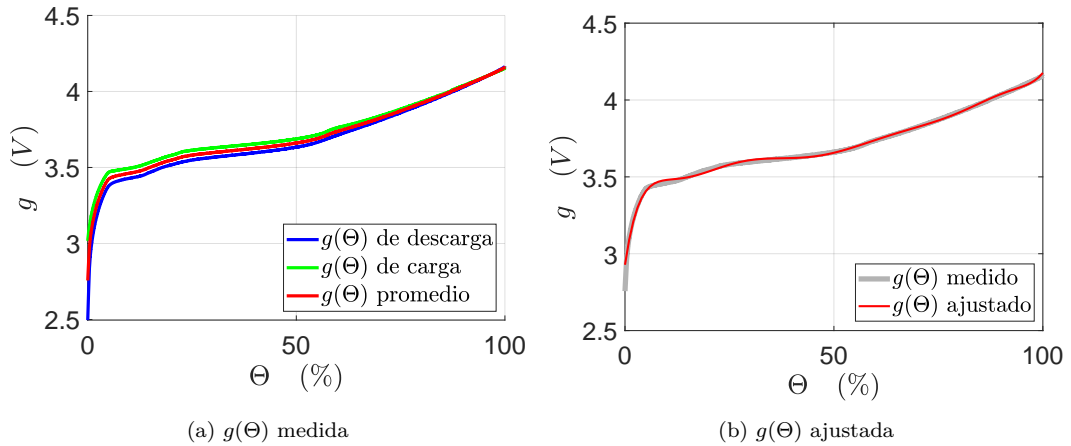


Figura 3.5: Curva OCV-SOC obtenida

Es importante mencionar que, a pesar de que el sentido físico de una batería diga que no se pueda cargar a más de 100% ni descargarse a menos del 0%, es necesario contar con una curva OCV-SOC para  $\Theta < 0$  y  $\Theta > 1$  para efectos de cómputo y casos borde. Las baterías Li-ion consideran un voltaje de operación para operar con un SOC entre el 0% y el 100%. Al bajar del mínimo voltaje de operación se considera una sobre-descarga de la batería, y al sobrepasar el voltaje máximo de operación, se considera una sobrecarga de esta.

Guo et. al [41] realizaron estudios de sobredescarga de baterías, caracterizando la curva según se muestra en la figura 3.6a. Asimismo, Golubkov et. al [42] realizaron estudios de sobrecarga de baterías, caracterizando también la no linealidad según se muestra en la figura 3.6b. A partir de esta información, es posible observar el comportamiento de una curva OCV-SOC para  $-100\% < \Theta < 140\%$ , según se observa en la figura 3.7.

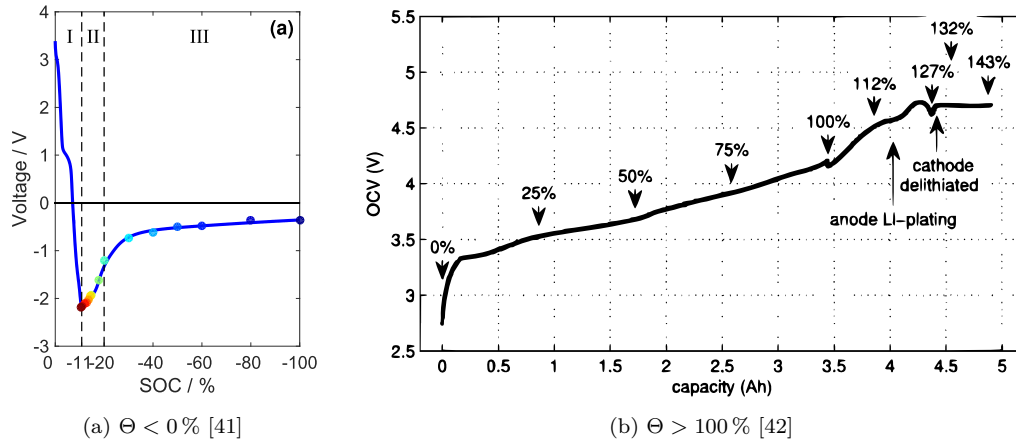


Figura 3.6: Curva OCV-SOC para casos de sobredescarga y sobrecarga

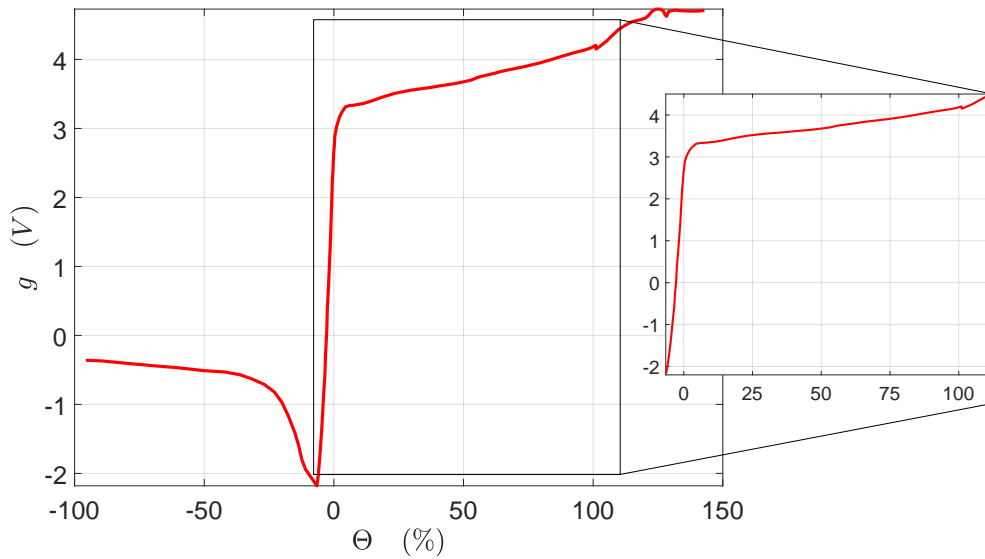


Figura 3.7: Curva OCV-SOC para  $-100\% < \Theta < 140\%$

Es preciso mencionar que se considera una operación normal de batería ( $0\% < \Theta < 100\%$ ), por lo que considerando cálculos que sobrepasen en 10% los límites de SOC, se considera la extensión de la curva OCV-SOC para  $-10\% < \Theta < 110\%$ , de esta manera se consideran los casos bordes de ligera sobrecarga y sobre-descarga. Luego, considerando la PWLA (3.8), se asume una extrapolación de la primera y última recta de la aproximación: para  $r_t < -0,1$  se utiliza  $a_1, b_1$ , y para  $r_t > 1,1$  se utiliza  $a_K, b_K$ .

### 3.4. Identificación de parámetros

Es posible realizar la identificación de parámetros de múltiples maneras, como fue mencionado en la introducción. En particular, este trabajo abordará el problema a partir del ajuste de curvas en mediciones de corriente incremental (*Incremental current*, IC), las cuales consisten en descargar (o cargar) la batería a partir de pulsos de corriente con suficiente tiempo de relajación entre pulsos, hasta agotar (o llenar) la carga de la batería. Las mediciones de IC utilizadas en este trabajo se muestran en la figura 3.8.

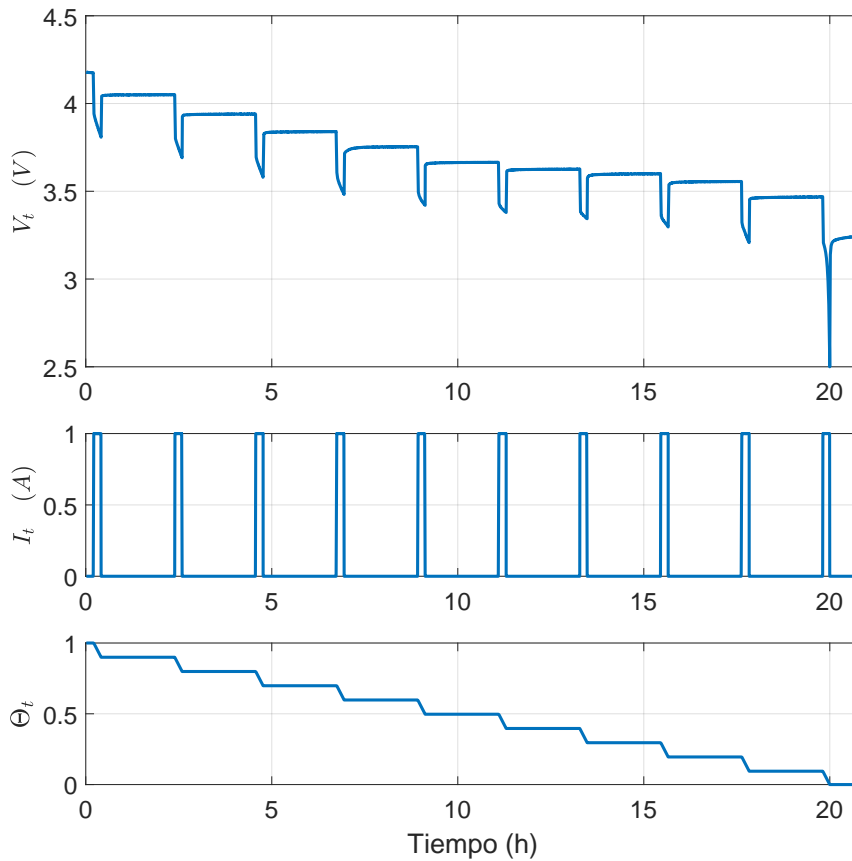


Figura 3.8: *IC test*

Para realizar la estimación de parámetros, se utiliza una herramienta de identificación de parámetros en MATLAB [43], la cual se puede desglosar en los siguientes pasos:

#### 1. Localizar las transiciones entre pulsos.

Las transiciones entre los pulsos de corriente y los estados de reposo de la batería nos permiten ver la disipación de energía a través de la resistencia óhmica, así como el

comportamiento dinámico de la batería (Figura 3.9). Es por esto que identificar los instantes en que la batería realiza la transición desde un estado de descarga a uno de reposo, permite realizar la identificación de parámetros.

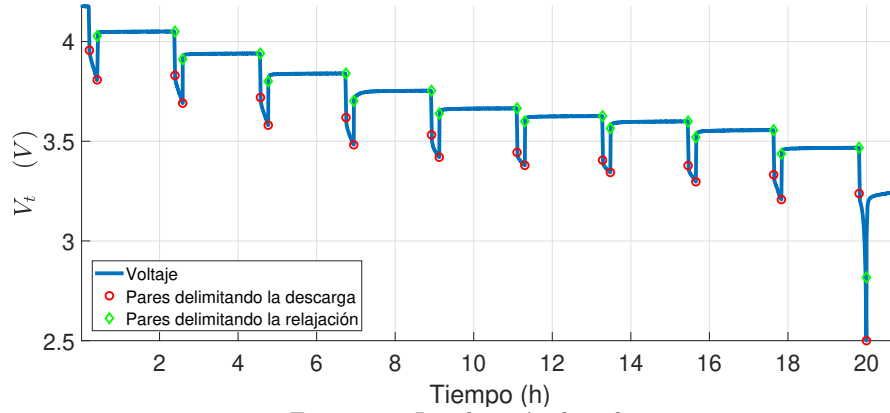


Figura 3.9: Localización de pulsos

## 2. Remover el ruido.

Para obtener mejores resultados, se aplica un filtro de media móvil a los datos obtenidos, regido por operaciones lógicas que impiden la pérdida de las transiciones bruscas entre períodos de descarga y relajación.

## 3. Establecer valores iniciales.

Para llevar a cabo la optimización, se comienza estableciendo valores iniciales para los parámetros. En caso de la resistencia óhmica  $R_0$ , esta se estima a partir de la caída de voltaje al interrumpir la descarga (Figura 3.10). Luego, se asumen los valores de los componentes de las mallas según criterios heurísticos de datos experimentales y restricciones [43].

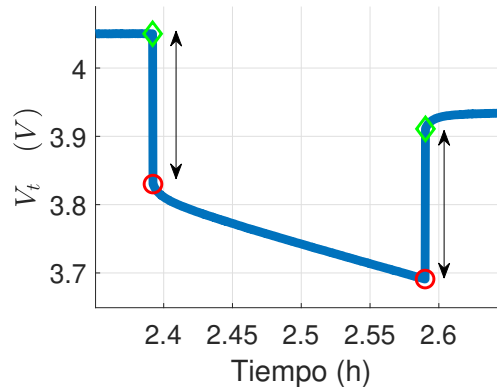


Figura 3.10: Estimación inicial

#### 4. Llevar a cabo la optimización para cada curva.

Uno de los métodos más extendidos en la academia es el algoritmo de mínimos cuadrados [44]. Resolviendo este problema, es posible ajustar las curvas de voltaje en los terminales (Figura 3.11), y obtener los parámetros del modelo de batería.

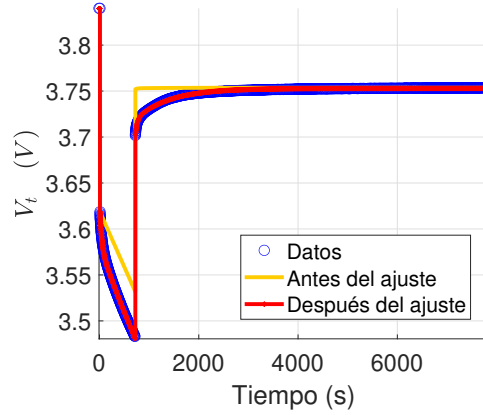


Figura 3.11: Ajuste de curvas

El método de mínimos cuadrados consiste en estimar el vector de parámetros  $\alpha$  a través de las mediciones de la entrada y salida del sistema  $I_t, V_t$  de la siguiente forma:

$$V_t = \varphi_t^T \alpha + \tilde{n}_t, \quad (3.24)$$

donde  $\tilde{n}_t$  es un vector de ruido,  $\varphi_t^T$  es el vector de regresores y  $\alpha$  es el vector de parámetros, con los dos últimos dados por [22]<sup>3</sup>:

$$\varphi_t^T = [V_{t-1} \quad I_t \quad -I_{t-1}], \quad (3.25)$$

$$\alpha = [e^{-T/(R_P C_P)} \quad R_0 \quad R_P]^T. \quad (3.26)$$

Si se tienen  $N$  mediciones,  $\mathcal{V} = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N]^T$  y  $\Phi = [\varphi_1^T \ \varphi_2^T \ \dots \ \varphi_N^T]^T$ , entonces:

$$\mathcal{V} = \Phi \alpha + \tilde{n}_t. \quad (3.27)$$

Así, el problema de mínimos cuadrados consiste en minimizar la función de costo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha) &= \sum_{t=1}^N (V_t - \varphi_t^T \alpha)^2, \\ &= (\mathcal{V} - \Phi \alpha)^T (\mathcal{V} - \Phi \alpha). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por lo que el estimador de mínimos cuadrados viene dado por:

$$\alpha_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{V}. \quad (3.29)$$

<sup>3</sup>Ejemplo para el caso 1RC

Finalmente, se validan los parámetros obtenidos a través de una comparación entre los datos empíricos y los datos del sistema simulado (Figura 3.12). Para validar el modelo, se utiliza el voltaje residual, el cual está dado por la resta entre el voltaje medido y el voltaje obtenido al utilizar el modelo. La media y el máximo voltaje residual corresponden a 2.4 mV y 594.5 mV, respectivamente. El modelo cumple con arrojar un error mínimo en casi todo el tiempo empleado, salvo para  $t \geq 19,8 h$ , en donde el voltaje residual alcanza su máximo. Esta diferencia de 0.5 V puede repercutir en la precisión del estimador del SOC empleado para  $\Theta \rightarrow 0$ , y podrá arrojar resultados respecto al desempeño de los algoritmos de filtraje para una incertidumbre en el modelo para estos valores del SOC.

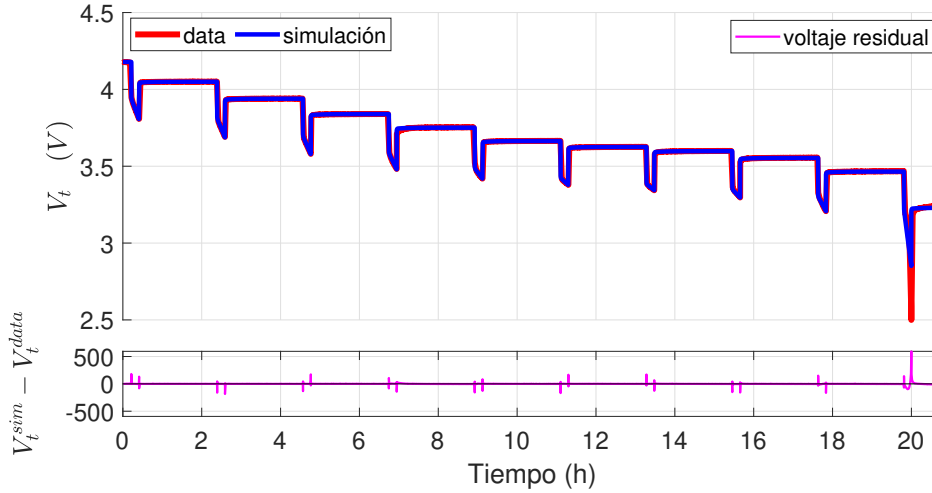


Figura 3.12: Ajuste de curvas

La tabla 3.2 muestra los parámetros identificados para cada modelo.

$Q_N$	$R_0$	$R_P$	$\tau_P$
6300 As	106.7 m $\Omega$	53.35 m $\Omega$	86.6 s

(a) Simulación - 1RC ECM - Dataset [39]

$Q_N$	$R_0$	$R_P$	$\tau_P$
7200 As	229 m $\Omega$	21 m $\Omega$	50.4 s

(b) Experimental - 1RC ECM - Dataset [34]

$Q_N$	$R_0$	$R_P$	$\tau_P$	$R_D$	$\tau_D$
7200 As	234 m $\Omega$	16 m $\Omega$	24.45 s	13 m $\Omega$	1000 s

(c) Experimental - 2RC ECM - Dataset [34]

Tabla 3.2: Parámetros identificados

Con los parámetros del sistema identificados, el siguiente capítulo muestra el desarrollo de las ecuaciones del Filtro Suma de Gaussianas a partir del modelo del sistema.

# FILTRO SUMA DE GAUSSIANAS

Este capítulo presenta el algoritmo Suma de Gaussianas. Se comienza por determinar las PDFs necesarias para resolver las ecuaciones de filtraje bayesiano. Luego, se realiza la demostración de la obtención de la PDF de la salida dado el estado, para finalmente, presentar y demostrar las ecuaciones del filtro suma de gaussianas para el sistema de batería Li-ion.

### 4.1. PDF para ecuaciones de filtraje

Para obtener un estimador óptimo del estado dadas las mediciones se utilizan las ecuaciones de filtraje bayesiano (2.5)-(2.6) introducidas anteriormente, y como ya fue mencionado, es necesario conocer  $p(x_{t+1}|x_t)$  y  $p(y_t|x_t)$  para resolver estas ecuaciones.

A partir del modelo en espacio de estados (3.1)-(3.5), y debido a que la naturaleza de los ruidos es gaussiana, las PDFs  $p(x_{t+1}|x_t)$ ,  $p(r_t|x_t)$  y  $p(s_t|x_t)$  están dadas por:

$$p(x_{t+1}|x_t) = \mathcal{N}(x_{t+1}; \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t, \mathbf{Q}), \quad (4.1)$$

$$p(r_t|x_t) = \mathcal{N}(r_t; \mathbf{C}_a\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t, R), \quad (4.2)$$

$$p(s_t|x_t) = \mathcal{N}(s_t; \mathbf{C}_b\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t, P). \quad (4.3)$$

Luego, es necesario obtener una expresión para la PDF  $p(y_t|x_t)$ , la cual no puede ser obtenida directamente a través del modelo, debido a la no linealidad involucrada en el sistema.

### 4.2. Función de densidad de probabilidad $p(y_t|x_t)$

Obteniendo las PDFs (4.1)-(4.3) que caracterizan al sistema, a través de la PWLA (3.8) y de la cuadratura de Gauss-Legendre, es posible obtener  $p(y_t|x_t)$  para resolver las ecuaciones de filtraje bayesiano (2.5)-(2.6).

**Teorema 4.2.1.** *Considere el sistema en espacio de estados (3.1)-(3.5), con  $g(r_t)$  una función no lineal monótona, que es aproximada por una PWLA  $\hat{g}(r_t)$  dada por (3.8). Luego, la función de probabilidad de la variable aleatoria  $y_t$  dada una realización del estado  $x_t$  puede ser aproximada por*

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) \approx \sum_{j=1}^{\kappa} \beta_j^T \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i), \quad (4.4)$$

con  $\mathcal{K} = KL$ ,  $L$  es el número de puntos utilizados por la regla de cuadratura de Gauss-Legendre,  $j$  un nuevo índice que combina cada par  $(i, \tau)$  tal que  $j = (\tau - 1)K + i$ , donde además

$$\mathbf{C}_i = a_i \mathbf{C}_a + \mathbf{C}_b, \quad \mathbf{D}_i = a_i \mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b, \quad R_i = a_i^2 R + P, \quad (4.5)$$

y

$$\beta_t^\tau = \omega_\tau \mathcal{N}\left(\lambda_t^\tau; 0, \frac{RP}{R_i}\right) \frac{q_t^1 - q_t^0}{2}, \quad (4.6)$$

$$\lambda_t^\tau = \frac{q_t^1 - q_t^0}{2} \Psi_\tau + \frac{q_t^1 + q_t^0}{2}, \quad (4.7)$$

$$q_t^0 = \theta_{i-1} - \frac{(a_i R y_t + [P \mathbf{C}_a - a_i R \mathbf{C}_b] \mathbf{x}_t + [P \mathbf{D}_a - a_i R \mathbf{D}_b] u_t - a_i R b_i)}{R_i}, \quad (4.8)$$

$$q_t^1 = \theta_i - \frac{(a_i R y_t + [P \mathbf{C}_a - a_i R \mathbf{C}_b] \mathbf{x}_t + [P \mathbf{D}_a - a_i R \mathbf{D}_b] u_t - a_i R b_i)}{R_i}, \quad (4.9)$$

con  $\Psi_\tau$ ,  $\omega_\tau$  dados por la regla de cuadratura de Gauss-Legendre.

*Demostración.* Se tiene el sistema (3.1)-(3.5). Considere:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ s_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ s_t \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

con lo que la PDF  $p(y_t | \mathbf{x}_t)$  se puede obtener marginalizando la PDF de (4.10), es decir:

$$p(y_t | \mathbf{x}_t) = \int p(y_t, s_t | \mathbf{x}_t) ds_t. \quad (4.11)$$

Usando el teorema de transformación de variable aleatoria [45, p. 130] se obtiene:

$$p(y_t | \mathbf{x}_t) = \int p_{z_t | \mathbf{x}_t}(z_t) p_{s_t | \mathbf{x}_t}(y_t - z_t) dz_t. \quad (4.12)$$

Luego, considerando (3.2), (3.4) y la PWLA (3.8), junto con el teorema de transformación de variable aleatoria, se tiene que:

$$p(z_t | \mathbf{x}_t) = \frac{1}{|a_i|} \mathcal{N}\left(\frac{z_t - b_i}{a_i}; \mathbf{C}_a \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t, R\right) \mathcal{I}\left\{\frac{z_t - b_i}{a_i} \in \Omega_i\right\}, \quad (4.13)$$

donde  $\mathcal{I}$  la función indicatriz, que corresponde a 1 si  $\frac{z_t - b_i}{a_i} \in \Omega_i$  y 0 en otro caso. Así, utilizando (4.12) y (4.13) se tiene que:

$$p(y_t | \mathbf{x}_t) = \frac{1}{|a_i|} \int \mathcal{N}\left(\frac{z_t - b_i}{a_i}; \mathbf{C}_a \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t, R\right) \mathcal{I}\left\{\frac{z_t - b_i}{a_i} \in \Omega_i\right\} \times \mathcal{N}(y_t - z_t; \mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t, P) dz_t. \quad (4.14)$$

Dado que la función indicatriz confina la integral al intervalo perteneciente a  $\Omega_i$ , con  $\Omega_i = \{r_t | \theta_{i-1} \leq r_t \leq \theta_i\}$ , se tiene la PDF de la salida dado el estado:

$$p(y_t | \mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \int_{\Omega_i} \mathcal{N}(r_t; \mathbf{C}_a \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t, R) \mathcal{N}(y_t - a_i r_t - b_i; \mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t, P) dr_t. \quad (4.15)$$

Se define  $m_t = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_a u_t$  y  $\sigma_t = y_t - (\mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t + b_i)$ . La integral tiene la forma:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \int_{\Omega_i} \frac{1}{2\pi\sqrt{RP}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(r_t - m_t)^2}{R} + \frac{(\sigma_t - a_i r_t)^2}{P} \right] \right\} dr_t,$$

la cual, al ser desarrollada, corresponde a:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \int_{\Omega_i} \frac{1}{2\pi\sqrt{RP}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\rho_1 r_t^2 - 2\rho_2 r_t + \rho_3) \right\} dr_t, \quad (4.16)$$

con

$$\rho_1 = \frac{a_i^2 R + P}{RP}, \quad \rho_2 = \frac{Pm_t + a_i R \sigma_t}{RP}, \quad \rho_3 = \frac{Pm_t^2 + R\sigma_t^2}{RP}.$$

Se puede demostrar que

$$\rho_1 r_t^2 - 2\rho_2 r_t + \rho_3 = \rho_1 \left( r_t - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + \left( \rho_3 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1} \right),$$

por lo que, realizando el cambio de variable

$$\bar{r}_t = r_t - \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad d\bar{r}_t = dr_t,$$

la ecuación (4.16) queda expresada como:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \int_{\theta_{i-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}^{\theta_i - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{1}{2\pi\sqrt{RP}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \rho_3 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\rho_1 \bar{r}_t^2) \right\} d\bar{r}_t. \quad (4.17)$$

Se definen

$$q_t^1 = \theta_i - \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad q_t^0 = \theta_{i-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Luego, al desarrollar  $\left( \rho_3 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1} \right)$  y utilizar completación de cuadrados, se tiene:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \int_{q_t^0}^{q_t^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{a_i^2 R + P}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[y_t - (a_i m_t + \mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t + b_i)]^2}{a_i^2 R + P} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{RP}{a_i^2 R + P}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{a_i^2 R + P}{RP} \bar{r}_t^2 \right\} \exp\{k\} d\bar{r}_t, \quad (4.18)$$

con  $\exp\{k\}$  un término independiente de  $y_t$ , por lo que sólo escala la PDF. Luego, se definen

$$\mathbf{C}_i = a_i \mathbf{C}_a + \mathbf{C}_b, \quad \mathbf{D}_i = a_i \mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b, \quad R_i = a_i^2 R + P,$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_i m_t + \mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t + b_i &= a_i \mathbf{C}_a \mathbf{x}_t + a_i \mathbf{D}_a u_t + \mathbf{C}_b \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_b u_t + b_i, \\ &= (a_i \mathbf{C}_a + \mathbf{C}_b) \mathbf{x}_t + (a_i \mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b) u_t + b_i, \\ &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i. \end{aligned}$$

Las exponenciales de (4.18) tienen distribución gaussiana:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^K \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i) \int_{q_t^0}^{q_t^1} \mathcal{N}\left(\bar{r}_t; 0, \frac{RP}{R_i}\right) d\bar{r}_t. \quad (4.19)$$

Los límites de integración  $q_t^0$  y  $q_t^1$  son afines sobre  $y_t$  y  $\mathbf{x}_t$ , por lo que se busca aproximar esta integral a través de la cuadratura de Gauss-Legendre (Ver apéndice A.1). Así, para que la integral esté mapeada sobre el intervalo  $[-1, 1]$ , se utiliza el cambio de variable:

$$\bar{r}_t = \frac{q_t^1 - q_t^0}{2} \hat{r}_t + \frac{q_t^1 + q_t^0}{2}, \quad d\bar{r}_t = \frac{q_t^1 - q_t^0}{2} d\hat{r}_t,$$

con lo que (4.19) queda tal que

$$\begin{aligned} p(y_t|\mathbf{x}_t) &= \sum_{i=1}^K \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i) \\ &\times \int_{-1}^1 \mathcal{N}\left(\frac{q_t^1 - q_t^0}{2} \hat{r}_t + \frac{q_t^1 + q_t^0}{2}; 0, \frac{RP}{R_i}\right) \frac{q_t^1 - q_t^0}{2} d\hat{r}_t, \end{aligned} \quad (4.20)$$

de esta forma, es posible aproximar esta integral con la cuadratura de Gauss-Legendre:

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) \approx \sum_{i=1}^K \sum_{\tau=1}^L \beta_t^\tau \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i), \quad (4.21)$$

con

$$\begin{aligned} \beta_t^\tau &= \omega_\tau \mathcal{N}\left(\lambda_t^\tau; 0, \frac{RP}{R_i}\right) \frac{q_t^1 - q_t^0}{2}, \\ \lambda_t^\tau &= \frac{q_t^1 - q_t^0}{2} \Psi_\tau + \frac{q_t^1 + q_t^0}{2}, \\ q_t^0 &= \theta_{i-1} - \frac{(a_i R y_t + [P\mathbf{C}_a - a_i R\mathbf{C}b]\mathbf{x}_t + [P\mathbf{D}_a - a_i R\mathbf{D}b]u_t - a_i R b_i)}{R_i}, \\ q_t^1 &= \theta_i - \frac{(a_i R y_t + [P\mathbf{C}_a - a_i R\mathbf{C}b]\mathbf{x}_t + [P\mathbf{D}_a - a_i R\mathbf{D}b]u_t - a_i R b_i)}{R_i}, \end{aligned}$$

donde  $\Psi_\tau$ ,  $\omega_\tau$  están dados por la regla de cuadratura de Gauss-Legendre, y  $L$  es el número de puntos utilizados en esta. Finalmente, es posible combinar ambas sumatorias (Ver apéndice A.2):

$$p(y_t|\mathbf{x}_t) \approx \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} \beta_j^\tau \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i), \quad (4.22)$$

donde  $\mathcal{K} = KL$ , y el nuevo índice  $j$  es tal que  $j = (\tau - 1)K + i$ .  $\square$

### 4.3. Filtro Suma de Gaussianas

A continuación, se detallan los pasos a seguir para implementar el Filtro Suma de Gaussianas.

**Teorema 4.3.1.** *Considere el sistema (3.1)-(3.5), la PWLA (3.8) y la PDF (4.4). Entonces, el Filtro Suma de Gaussianas está dado por el siguiente procedimiento:*

**Inicialización:** *La función de densidad de probabilidad del estado en  $t = 1$  está dada por:*

$$p(\mathbf{x}_1) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{P}_1). \quad (4.23)$$

Luego, para  $t = 1, \dots, N$ , se tienen los siguientes pasos:

**Etapa de corrección:** *La función de densidad de probabilidad para el estado actual  $\mathbf{x}_t$  dadas las mediciones de la salida  $y_1, \dots, y_t$  está expresada por:*

$$p(\mathbf{x}_t | y_{1:t}) = \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^k \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \boldsymbol{\Sigma}_{t|t}^k), \quad (4.24)$$

donde  $M_{t|t} = KLM_{t|t-1}$ ,  $M_{t|t-1}$  representa el número de componentes gaussianas en la etapa de predicción,  $\gamma_{t|t}^k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{t|t}^k$  corresponden al peso, media y matriz de covarianza para la  $k$ -ésima componente gaussiana, respectivamente, las cuales se calculan de la siguiente forma:

$$\gamma_{t|t}^k = \left( \bar{\gamma}_{t|t}^k \right) \left( \sum_{s=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^s \right)^{-1}, \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^\ell + \mathbf{K}_t^{i\ell} \left[ y_t - (\mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^\ell + \mathbf{D}_i u_t + b_i) \right], \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t^{i\ell} \mathbf{C}_i) \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}^\ell, \quad (4.27)$$

$$\bar{\gamma}_{t|t}^k = \beta_t^\tau \gamma_{t|t-1}^\ell \mathcal{N} \left( y_t; \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^\ell + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i + \mathbf{C}_i \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}^\ell \mathbf{C}_i^T \right), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_t^{i\ell} = \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}^\ell \mathbf{C}_i^T \left( R_i + \mathbf{C}_i \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}^\ell \mathbf{C}_i^T \right)^{-1}, \quad (4.29)$$

inicializadas por  $M_{1|0} = 1$ ,  $\gamma_{1|0} = 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{1|0} = \boldsymbol{\mu}_1$ , y  $\boldsymbol{\Sigma}_{1|0} = \mathbf{P}_1$ .

**Etapa de predicción:** *La función de densidad de probabilidad para el estado futuro  $\mathbf{x}_{t+1}$ , dadas las mediciones  $y_1, \dots, y_t$  se expresan como:*

$$p(\mathbf{x}_{t+1} | y_{1:t}) = \sum_{k=1}^{M_{t+1|t}} \gamma_{t+1|t}^k \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^k, \boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t}^k \right), \quad (4.30)$$

donde  $\gamma_{t+1|t}^k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^k$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t}^k$  están dadas por:

$$\gamma_{t+1|t}^k = \gamma_{t|t}^k, \quad (4.31)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^k = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k + \mathbf{B} u_t, \quad (4.32)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t+1|t}^k = \mathbf{Q} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{t|t}^k \mathbf{A}^T. \quad (4.33)$$

*Demostración.* Considere las ecuaciones de filtraje bayesiano (2.5)-(2.6). La constante de normalización está dada por

$$p(y_t | y_{1:t-1}) = \int p(y_t | x_t) p(x_t | y_{1:t-1}) dx_t, \quad (4.34)$$

y note que el producto  $p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})$  se debe calcular para la ecuación de corrección y predicción.

La ecuación de la etapa de corrección  $p(x_t|y_{1:t})$  es producto de dos gaussianas, por lo que el resultado es una suma de gaussianas (Ver apéndice A.2). Asimismo, la ecuación de la etapa de predicción  $p(x_{t+1}|y_{1:t})$  es un modelo de suma de gaussianas, dado que viene del producto entre dos sumas de gaussianas. Así, dado que las ecuaciones de filtraje son recursivas, y dado que  $p(x_t|y_{1:t-1})$  es la versión retrasada de  $p(x_{t+1}|y_{1:t})$ , se asume que  $p(x_t|y_{1:t-1})$  tiene forma gaussiana:

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \sum_{\ell=1}^{M_{t|t-1}} \gamma_{t|t-1}^{\ell} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell}, \Sigma_{t|t-1}^{\ell}), \quad (4.35)$$

por lo que el producto  $p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})$ , considerando el teorema 4.2.1, está dado por:

$$p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} \sum_{\ell=1}^{M_{t|t-1}} \beta_j^T \gamma_{t|t-1}^{\ell} \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell}, \Sigma_{t|t-1}^{\ell}). \quad (4.36)$$

Se puede establecer la siguiente igualdad [46]:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}(y_t; \mathbf{C}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell}, \Sigma_{t|t-1}^{\ell}) \\ = & \mathcal{N}\left(y_t; \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell} + \mathbf{D}_i u_t + b_i, R_i + \mathbf{C}_i \Sigma_{t|t-1}^{\ell} \mathbf{C}_i^T\right) \\ & \times \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell} + \mathbf{K}_t^{i\ell} (y_t - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{\ell} - \mathbf{D}_i u_t - b_i), (\mathbb{I} - \mathbf{K}_t^{i\ell} \mathbf{C}_i) \Sigma_{t|t-1}^{\ell}\right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

con

$$\mathbf{K}_t^{i\ell} = \Sigma_{t|t-1}^{\ell} \mathbf{C}_i^T \left( R_i + \mathbf{C}_i \Sigma_{t|t-1}^{\ell} \mathbf{C}_i^T \right)^{-1}. \quad (4.38)$$

Así, reemplazando (4.37) en (4.36) y utilizando (A.7), se sigue tal que:

$$p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1}) = \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^k \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k), \quad (4.39)$$

con  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k$ ,  $\Sigma_{t|t}^k$  y  $\bar{\gamma}_{t|t}^k$  definidos en (4.26), (4.27) y (4.28) respectivamente, además de  $M_{t|t} = \mathcal{K} M_{t|t-1}$  y  $k = (\ell - 1)\mathcal{K} + j$ . Así, la constante de normalización viene dada por:

$$p(y_t|y_{1:t-1}) = \int \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^k \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k) d\mathbf{x}_t = \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^k, \quad (4.40)$$

por lo que la ecuación de corrección del filtro suma de gaussianas viene dado por:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^k \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k), \quad (4.41)$$

con  $\gamma_{t|t}^k$  dado por (4.25). Luego, la ecuación de predicción del filtro sigue tal que:

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|y_{1:t}) &= \int p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{1:t})dx_t \\ &= \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^k \int \left[ \mathcal{N}(x_{t+1}; \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t, \mathbf{Q}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k) \right] dx_t. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Luego, estableciendo la siguiente igualdad [46]:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(x_{t+1}; \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t, \mathbf{Q}) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k) \\ &= \mathcal{N}\left(x_{t+1}; \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k + \mathbf{B}u_t, \mathbf{Q} + \mathbf{A}\Sigma_{t|t}^k\mathbf{A}^T\right) \\ &\quad \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_t^k, \boldsymbol{\Gamma}_t^k), \end{aligned} \quad (4.43)$$

la ecuación de predicción del filtro suma de gaussianas está dada por:

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|y_{1:t}) &= \int p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{1:t})dx_t, \\ &= \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^k \mathcal{N}\left(x_{t+1}; \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^k + \mathbf{B}u_t, \mathbf{Q} + \mathbf{A}\Sigma_{t|t}^k\mathbf{A}^T\right) \underbrace{\int [\mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_t^k, \boldsymbol{\Gamma}_t^k)] dx_t}_{=1}, \\ &= \sum_{k=1}^{M_{t+1|t}} \gamma_{t+1|t}^k \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^k, \Sigma_{t+1|t}^k\right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

con  $\gamma_{t+1|t}^k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^k$  y  $\Sigma_{t+1|t}^k$  dados por (4.31), (4.32) y (4.33) respectivamente, así como  $M_{t+1|t} = M_{t|t}$ .  $\square$

### 4.3.1. Reducción de Gaussianas

Implementar el Filtro Suma de Gaussianas da lugar a que, en cada iteración en la etapa de corrección, el número de componentes gaussianas  $M_{t|t}$  crezca exponencialmente según el número de rectas utilizadas en la PWLA y el número de puntos de Gauss-Legendre escogidos. Esto se muestra de forma visual en la figura 4.1

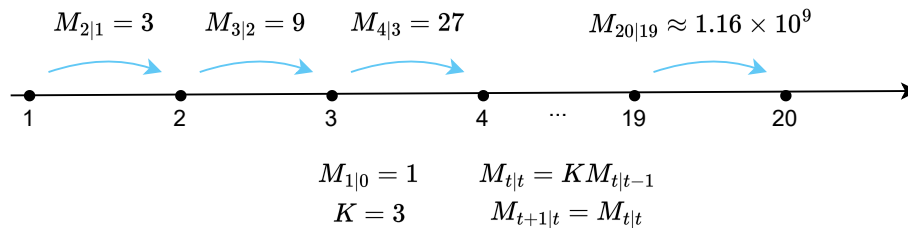


Figura 4.1: Crecimiento exponencial de componentes gaussianas

Este crecimiento exponencial logra que el costo computacional incremente exorbitantemente, lo que haría la implementación de este filtro inviable (véase [47, 48]). Es por esto que se han desarrollado algoritmos de reducción de gaussianas (*Gaussian Mixture Reduction*, GMR), las cuales se pueden clasificar principalmente en 3: Los algoritmos *greedy*, aquellos basados en optimización, y los basados en *clustering* [49].

Los algoritmos *greedy* reducen la mezcla de gaussianas a través de la fusión de estas [50] o su eliminación [51], hasta alcanzar el número deseado de componentes. Estos métodos se caracterizan por ser fáciles de implementar y tener un bajo costo computacional, pero pueden llevar a soluciones subóptimas debido a la naturaleza local de las decisiones.

Luego, los métodos basados en optimización se basan en que el problema de reducción de gaussianas se encuentra naturalmente formulado como un problema de optimización, los cuales buscan encontrar una solución óptima a través de la minimización de métricas como el error cuadrático integrado entre las funciones [52, 53]. Estos métodos conllevan una mayor precisión y control sobre la reducción, pero representa un mayor costo computacional.

Finalmente, los algoritmos basados en *clustering* surgen como un punto medio entre los dos mencionados anteriormente, ofreciendo un menor costo computacional que los métodos de optimización, así como mayor precisión que los métodos *greedy*. Un ejemplo de este tipo de métodos se inspira en el algoritmo *k-means* del espacio Euclidiano y lo adapta al espacio de las distribuciones gaussianas [54].

En este trabajo, se aborda el problema GMR a través de un método propuesto por Balenzuela, et al. [55], que consiste en combinar componentes gaussianas preservando los dos primeros momentos de cada una. Se tiene una distribución de suma de gaussianas tal que:

$$p(y) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathcal{N}(y; \mu_i, \Sigma_i), \quad (4.45)$$

donde se combinan dos componentes gaussianas con pesos  $\alpha_{i,j}$ , media  $\mu_{i,j}$  y covarianza  $\Sigma_{i,j}$  en una sola componente con parámetros  $(\alpha_{ij}, \mu_{ij}, \Sigma_{ij})$ , a través de una función  $\mathcal{M}\{\cdot\}$ :

$$(\alpha_{ij}, \mu_{ij}, \Sigma_{ij}) = \mathcal{M}\{(\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i), (\alpha_j, \mu_j, \Sigma_j)\}, \quad (4.46)$$

tal que

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j, \quad (4.47)$$

$$\mu_{ij} = \bar{\alpha}_i \mu_i + \bar{\alpha}_j \mu_j, \quad (4.48)$$

$$\Sigma_{ij} = \bar{\alpha}_i \Sigma_i + \bar{\alpha}_j \Sigma_j + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j [\mu_i - \mu_j][\mu_i - \mu_j]^T, \quad (4.49)$$

con

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}, \quad \bar{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j},$$

esto con el objetivo de minimizar la función de disimilitud:

$$\mathcal{D}(i, j) = \frac{1}{2}[\alpha_{ij} \ln \det\{\Sigma_{ij}\} - \alpha_i \ln \det\{\Sigma_i\} - \alpha_j \ln \det\{\Sigma_j\}], \quad (4.50)$$

donde  $\mathcal{D}(i, i) = 0$  y  $\mathcal{D}(i, j) = \mathcal{D}(j, i)$ . De esta forma, es posible reducir el número de componentes gaussianas de  $M$  a  $J$ , con  $M \geq J \geq 1$ .

Así, el algoritmo 1 muestra el procedimiento para llevar a cabo la reducción de la suma de gaussianas, donde  $UB$ ,  $LB$  son el límite superior e inferior de componentes gaussianas, respectivamente;  $\mathcal{G}$  es el conjunto de parámetros que definen la distribución de suma de gaussianas a reducir;  $\mathcal{I}$  es el conjunto de índices  $\{1, \dots, M\}$ ;  $\mathcal{M}\{(\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i), (\alpha_j, \mu_j, \Sigma_j)\}$  es la función que combina las componentes gaussianas con parámetros  $(\alpha_{i,j}, \mu_{i,j}, \Sigma_{i,j})$  en una componente con parámetros  $(\alpha_{ij}, \mu_{ij}, \Sigma_{ij})$ .

---

**Algoritmo 1:** Reducción de gaussianas
 

---

**Entrada:**  $UB > 0$ ,  $LB \leq UB$ ,  $\mathcal{G} = \{\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i\}_{i=1}^M$   
 $k = M$ ;  
 $\mathcal{I} = \{1, \dots, M\}$ ;  
**if**  $i \geq j$  **then**  
 |  $\mathcal{D}(i, j) = \infty$ ;  
**else**  
 |  $\mathcal{D}(i, j) = \frac{1}{2}[\alpha_{ij} \ln \det\{\Sigma_{ij}\} - \alpha_i \ln \det\{\Sigma_i\} - \alpha_j \ln \det\{\Sigma_j\}]$ ;  
**end**  
**while**  $k > UB$  **or** ( $k > LB$  **and**  $\mathcal{D}(i, j) \leq \epsilon$ ) **do**  
 |  $(i^*, j^*) = \arg \min_{i,j} \mathcal{D}(i, j)$ ;  
 | Reemplazar la  $i^*$ ésima componente de  $\mathcal{G}$  por la combinación  
 |  $\mathcal{M}\{(\alpha_{i^*}, \mu_{i^*}, \Sigma_{i^*}), (\alpha_{j^*}, \mu_{j^*}, \Sigma_{j^*})\}$ , y eliminar la  $j^*$ ésima componente de  $\mathcal{G}$ ;  
 | Eliminar la  $j^*$ ésima fila y columna de la matriz  $\mathcal{D}$ ;  
 | Eliminar el  $j^*$ ésimo índice de  $\mathcal{I}$ ;  
 | **if**  $i \geq j$  **then**  
 | |  $\mathcal{D}(i, j) = \infty$ ;  
 | **else**  
 | |  $\mathcal{D}(i, j) = \frac{1}{2}[\alpha_{ij} \ln \det\{\Sigma_{ij}\} - \alpha_i \ln \det\{\Sigma_i\} - \alpha_j \ln \det\{\Sigma_j\}]$ ;  
 | **end**  
**end**  
**Salida:**  $\mathcal{G} = \{\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i\}_{i=1}^J$

---

### 4.3.2. Algoritmo del GSF

De esta forma, el algoritmo 2 muestra el pseudocódigo del Filtro Suma de Gaussianas, donde  $p(x_1)$  es la distribución de probabilidad del estado en  $t = 1$ , caracterizada por los parámetros  $(x_1, \mu_1, P_1)$ ;  $M_{t|t}$ ,  $\gamma_{t|t}$ ,  $\hat{x}_{t|t}$  y  $\Sigma_{t|t}$  son el número de componentes gaussianas, peso, media y covarianza de las componentes gaussianas, respectivamente;  $\{\Psi_\tau, \omega_\tau\}_{\tau=1}^L$  están dados por la cuadratura de Gauss-Legendre; y  $K$  es el número de rectas utilizadas en la PWLA.

---

#### Algoritmo 2: Filtro Suma de Gaussianas

---

```

Entrada:  $p(x_1)$ ,  $M_{1|0}$ ,  $\gamma_{1|0}$ ,  $\hat{x}_{1|0}$ ,  $\Sigma_{1|0}$ ,  $\{\Psi_\tau, \omega_\tau\}_{\tau=1}^L$ ,  $K$ 
 $M_{1|0} = 1$ ;  $\gamma_{1|0} = 1$ ;  $\hat{x}_{1|0} = \mu_1$ ;  $\Sigma_{1|0} = P_1$ ; /* Etapa de inicialización */
for  $t = 1$  to  $N$  do
    Calcular  $\beta_t^r$  y  $\lambda_t^r$  según el Teorema 4.2.1;
     $M_{t|t} = \mathcal{K}M_{t|t-1}$ ; /* Etapa de corrección */
    for  $\ell = 1$  to  $M_{t|t-1}$  do
        for  $j = 1$  to  $\mathcal{K}$  do
             $k = (\ell - 1)\mathcal{K} + j$ ;
            Calcular  $\gamma_{t|t}^k$ ,  $\hat{x}_{t|t}^k$  y  $\Sigma_{t|t}^k$  según el Teorema 4.3.1;
        end
    end
    Obtener  $\hat{x}_{t|t} = \mathbb{E}\{x_t|y_{1:t}\}$ ,  $\Sigma_{t|t} = \mathbb{E}\{(x_t - \hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t})^T|y_{1:t}\}$ ;
    Reducción de Gaussianas con el algoritmo 1 utilizando  $\gamma_{t|t}^k$ ,  $\hat{x}_{t|t}^k$  y  $\Sigma_{t|t}^k$ ;
     $M_{t+1|t} = M_{t|t}$ ; /* Etapa de predicción */
    for  $k = 1$  to  $M_{t+1|t}$  do
        Calcular  $\gamma_{t+1|t}^k$ ,  $\hat{x}_{t+1|t}^k$  y  $\Sigma_{t+1|t}^k$  según el Teorema 4.3.1;
    end
end
Salida:  $\hat{x}_{t|t}$ ,  $\Sigma_{t|t}$ ,  $p(x_t|y_{1:t})$ ,  $p(x_{t+1}|y_{1:t})$ 

```

---

# PRUEBAS Y RESULTADOS

En este capítulo, se implementan los 3 filtros GSF, EKF y PF para realizar la estimación del SOC en baterías de Li-ion a través de un sistema de batería simulado, y pruebas con datos de batería reales con perfiles dinámicos de corriente utilizados en la literatura. Se establecen las métricas de comparación entre filtros, y se obtienen resultados para los casos simulado, modelo 1RC, modelo 2RC, modelo 1RC+ $R_0$  y modelo 2RC+ $R_0$ , estableciendo conclusiones a partir de los datos obtenidos.

### 5.1. Métricas de comparación

Para comparar los resultados obtenidos a través del GSF, el EKF, y el PF, se utilizan métricas de comparación de error, así como métricas de tiempo de computación. En primer lugar, el error de estimación del SOC es calculado a partir de la estimación otorgada por los filtros y el estado verdadero en cada instante de tiempo  $t$ :

$$\Delta\Theta_t = \Theta_t - \hat{\Theta}_t. \quad (5.1)$$

Luego, otra métrica de comparación de error utilizada es la raíz del error cuadrático medio (*Root Mean Square Error*, RMSE), calculada a partir de la estimación otorgada por los filtros y el estado verdadero a lo largo de todo el tiempo  $t = 1, \dots, N$ :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\Theta_t - \hat{\Theta}_t|^2}. \quad (5.2)$$

Finalmente, como métrica de tiempo de computación, se utiliza el tiempo de computación promedio por instante de tiempo, que se calcula promediando en tiempo total de cómputo entre los instantes de tiempo utilizados.

Es preciso mencionar que, para el caso de estimación del SOC con datos de batería real (sin simulación directa del sistema), no es posible acceder al estado verdadero  $\Theta_t$ , por lo que se utiliza el método de *Coulomb Counting* para obtener una aproximación del estado verdadero, a través del cálculo directo del SOC (1.1).

## 5.2. Resultados de Simulación

Para obtener los resultados a partir del sistema simulado, se utiliza el sistema (3.1)-(3.5), con las matrices de espacio de estados (3.11), y los parámetros de la tabla 3.2a. Asimismo,  $T = 1s$  y los ruidos están caracterizados por las matrices  $\mathbf{Q} = 10^{-7}\mathbf{I}_2$ ,  $R = 10^{-6}$  y  $P = 10^{-6}$ . Se utiliza un perfil de descarga simple, con  $I_t$  una corriente constante de  $1A$ , según muestra la figura 5.1, hasta que la batería queda completamente descargada.

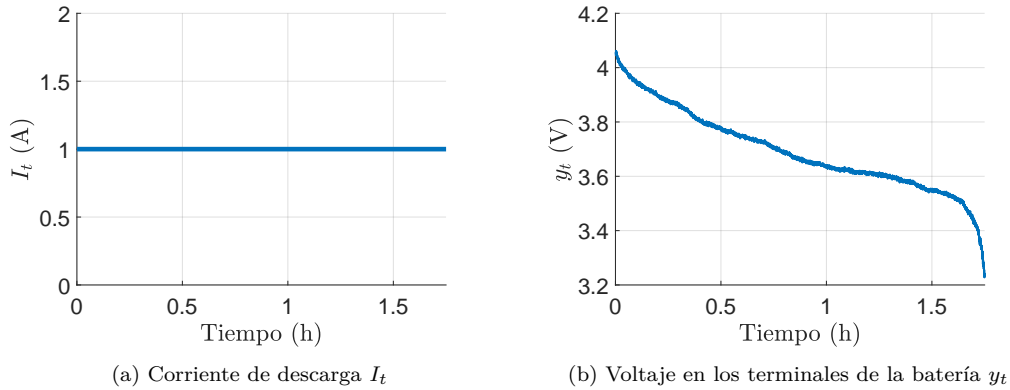


Figura 5.1: Señales de entrada y salida del sistema

Para la estimación del SOC, se utiliza el GSF desarrollado en el capítulo 4 con una PWLA usando  $K = 15$  líneas, una condición inicial  $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; [1 \ 0]^T, 100\mathbf{Q})$ , las matrices de covarianza del ruido mencionadas anteriormente, y  $R = 10$ . Asimismo, se utilizan también el EKF y el PF (Ver apéndices A.3 y A.4), con este último usando la misma PWLA que el GSF, y utilizando 100 partículas.

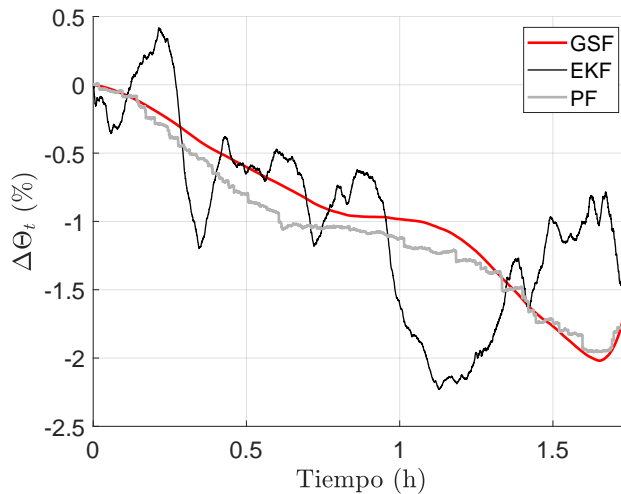


Figura 5.2: Simulación: Error de estimación

La figura 5.2 muestra el error de estimación del SOC a lo largo del experimento. Es posible observar que el comportamiento de la estimación otorgada por el GSF es muy similar al obtenido mediante el PF.

Luego, la figura 5.3 muestra la PDF del estado dadas las mediciones  $p(\Theta_t|y_t)$  para algunos instantes de tiempo. Es posible observar que las PDF obtenidas mediante el GSF y el PF son muy similares entre sí, mientras que aquellas obtenidas mediante el EKF difieren de las otras. Esto nos da un indicativo de la capacidad del GSF para otorgar información sobre la PDF del estado, similar a la otorgada por el PF.

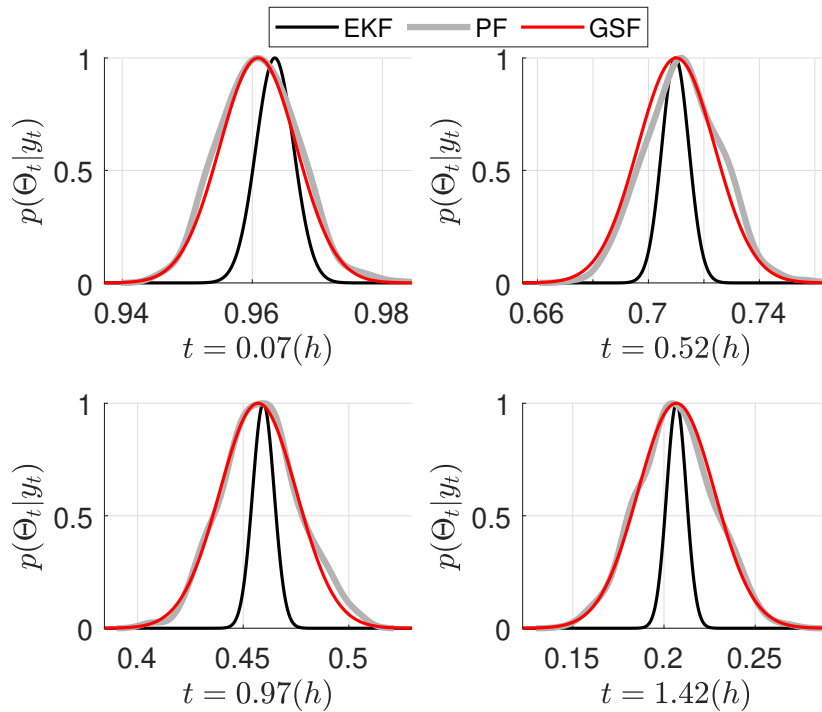


Figura 5.3: Simulación:  $p(\Theta_t|y_t)$  para algunos instantes de tiempo.

Finalmente, se realiza un estudio de Monte Carlo con 50 experimentos, donde la figura 5.4 muestra un diagrama de cajas del RMSE obtenido por cada filtro. Es posible observar que el GSF arroja resultados muy similares a los del PF, con estadísticas de media de 0.87% y 0.84% respectivamente, siendo menores que la media de RMSE arrojado por el EKF, correspondiente a 1.22%. Luego, el tiempo de cómputo promedio por cada instante de tiempo para el GSF, PF y EKF, es de 5.37ms, 7.51ms y 1.13ms respectivamente. De esta forma, el GSF otorga resultados muy similares a los del PF en un tiempo de cómputo menor, siendo estos resultados más precisos que los del EKF.

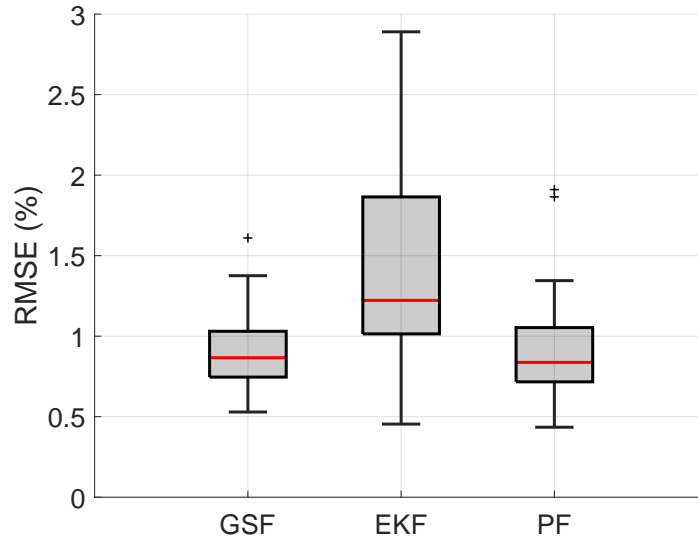


Figura 5.4: Simulación: RMSE en 50 iteraciones de Montecarlo

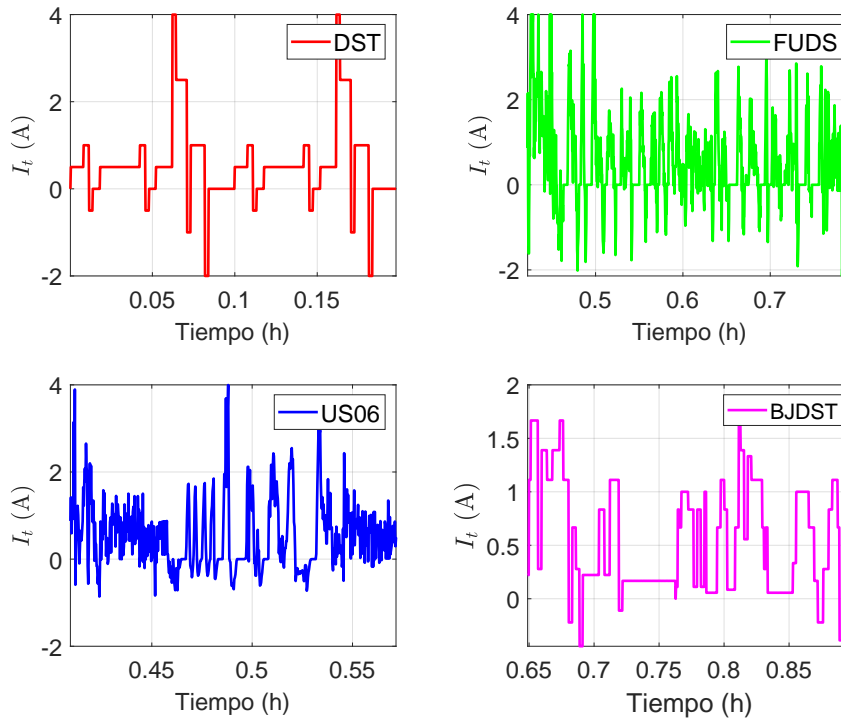


Figura 5.5: Perfiles de corriente dinámicos utilizados.

### 5.3. Resultados con datos de batería real

Para validar los resultados de la simulación, se utilizan los datos experimentales proporcionados por el CALCE, los cuales se describen en la sección 3.2. Los perfiles de descarga empleados son los siguientes: *Dynamic Stress Test* (DST), *Federal Urban Driving Schedule* (FUDS), *US06 Highway Driving Schedule* (US06) y *Beijing Dynamic Stress Test* (BJDST). Estos perfiles están diseñados para someter a la batería a condiciones dinámicas realistas, ya que se obtienen de vehículos eléctricos cuyas baterías presentaron dichos perfiles de descarga. Todas las pruebas se realizan con un SOC del 80 % a una temperatura de 25°C, hasta que la batería queda completamente descargada. La figura 5.5 ilustra los perfiles de descarga utilizados en esta sección.

#### 5.3.1. Caso 1RC ECM

Se utiliza el sistema (3.1)-(3.5), con las matrices de espacio de estados (3.11), y los parámetros de la tabla 3.2b. Asimismo,  $T = 1s$ , y considerando un error inicial de un 2.5 % y 1V para el SOC y el voltaje en la malla RC, respectivamente, la condición inicial está dada por:

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_1; \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,025)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \quad (5.3)$$

Asimismo, los ruidos están caracterizados por las matrices de covarianza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \max(|d\Theta|)^2 & 0 \\ 0 & \max(|dU_1|)^2 \end{bmatrix}, \quad P = \text{Cov}(y_t),$$

y con  $R = 10$ .

Así, utilizando  $K = 20$  líneas para la PWLA, el error es calculado utilizando (5.1), y los resultados de estimación para los 4 perfiles dinámicos de corriente se muestran en la figura 5.6. Es posible observar que existe una propagación de incertidumbre por un período prolongado, lo cual incrementa el error acumulado a lo largo del tiempo, afectando principalmente al EKF. Por otro lado, el GSF y el PF logran mitigar de mejor manera el error acumulado, obteniendo una fracción del error obtenido por el EKF.

Para observar de mejor manera el desempeño de los 3 filtros, la tabla 5.1 muestra el RMSE y el error máximo de los 3 filtros sobre los 4 perfiles de corriente. Es posible observar que el GSF obtiene resultados de error muy similares a los del PF, con la ventaja de requerir menos tiempo computacional. Mientras el PF utiliza entre 13.15ms y 18.78ms de tiempo de cómputo promedio por instante de tiempo, el GSF utiliza 9.1ms por instante de tiempo, lo cual representa un tiempo de computación entre 1.5 y 2 veces más rápido que el PF, otorgando resultados similares.

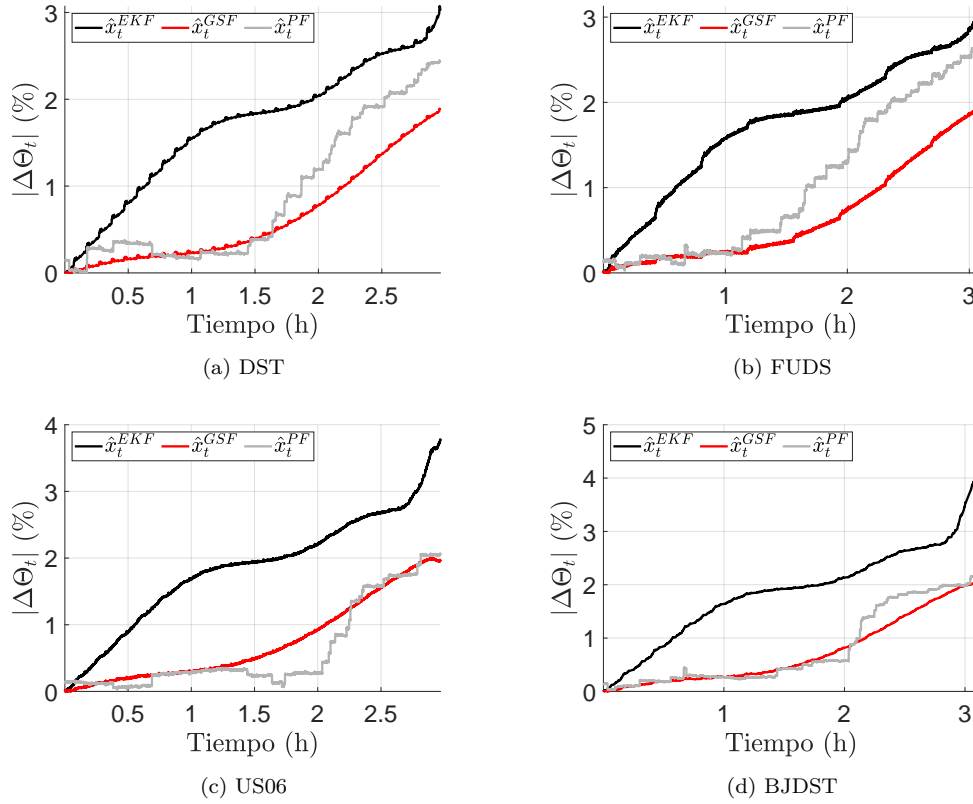


Figura 5.6: Error de estimación del SOC. Caso 1RC.

<i>Dynamic Test Profile</i>	Métrica	EKF	GSF	PF
DST	RMSE(%)	1.83	0.82	1.20
	MAX(%)	2.98	1.87	2.50
FUDS	RMSE(%)	1.88	0.85	1.25
	MAX(%)	3.03	1.92	2.39
US06	RMSE(%)	2.01	0.94	0.92
	MAX(%)	3.59	1.99	2.06
BJDST	RMSE(%)	2.03	0.94	1.05
	MAX(%)	3.88	2.00	2.20

Tabla 5.1: Resultados de error de estimación del SOC. Caso 1RC.

### 5.3.2. Caso 2RC ECM

Para observar el efecto de agregar una segunda malla dinámica RC al modelo de batería, se utiliza el sistema (3.1)-(3.5), con las matrices de espacio de estados (3.14), y los parámetros de la tabla 3.2c. Asimismo,  $T = 1s$ , y considerando un error inicial de un 2.5% y 1V para

el SOC y el voltaje en las mallas RC, respectivamente, la condición inicial está dada por:

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_1; \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,025)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \quad (5.4)$$

Asimismo, los ruidos están caracterizados por las matrices de covarianza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \text{máx}(|d\Theta|)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}(|dU_1|)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}(|dU_2|)^2 \end{bmatrix}, \quad P = \text{Cov}(y_t),$$

y con  $R = 10$ .

El error de estimación se muestra en la figura 5.7. A simple vista, es posible observar que utilizar una segunda malla RC para el modelo del sistema disminuye el error en todos los experimentos en comparación con el caso 1RC, lo cual es comprobado por los resultados de error de la tabla 5.2. Respecto a la comparación entre filtros, el GSF y el PF siguen obteniendo resultados similares, ambos otorgando una mayor precisión que el EKF.

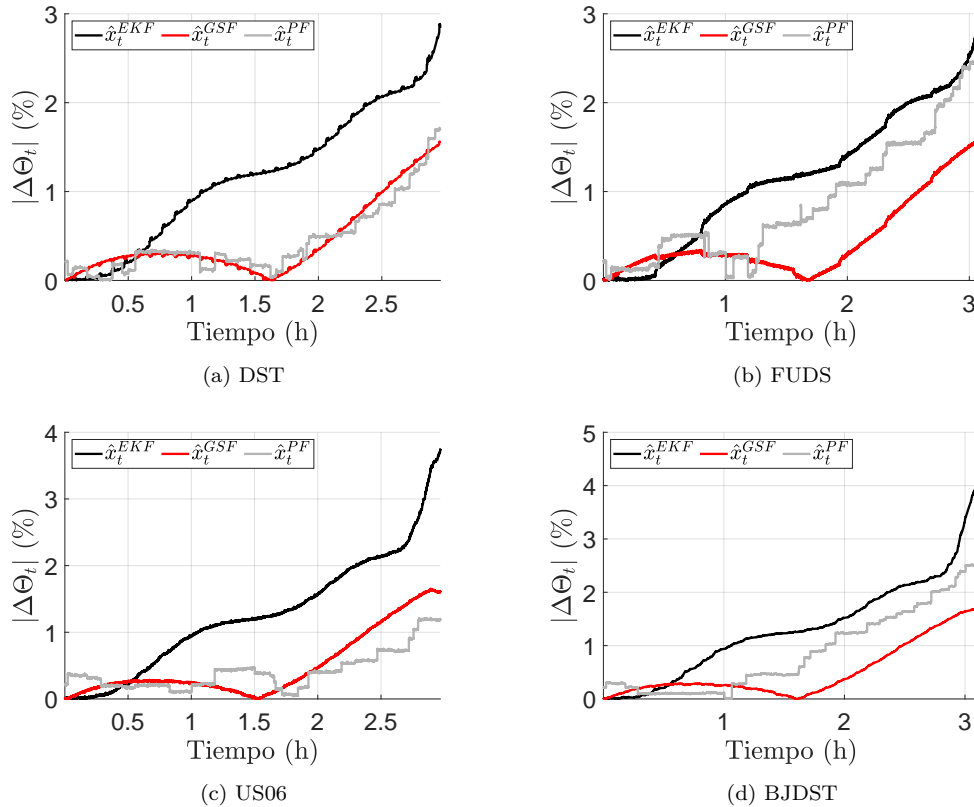


Figura 5.7: Error de estimación del SOC. Caso 2RC.

<i>Dynamic Test Profile</i>	Métrica	EKF	GSF	PF
DST	RMSE(%)	1.37	0.60	0.57
	MAX(%)	2.78	1.54	1.61
FUDS	RMSE(%)	1.36	0.62	0.86
	MAX(%)	2.81	1.58	2.07
US06	RMSE(%)	1.51	0.68	0.44
	MAX(%)	3.55	1.63	1.05
BJDST	RMSE(%)	1.57	0.70	1.12
	MAX(%)	3.84	1.66	2.32

Tabla 5.2: Resultados de error de estimación del SOC. Caso 2RC.

### 5.3.3. Caso 1RC ECM + $R_0$

En este caso, se busca mejorar la precisión de estimación del SOC a través de la estimación de la resistencia óhmica  $R_0$ . Se utiliza el sistema (3.1)-(3.5), con las matrices de espacio de estados (3.19), y los parámetros de la tabla 3.2b. Asimismo,  $T = 1s$ , y se considera un error inicial de un 2.5 %, 1V y 50mΩ para el SOC, el voltaje en las mallas RC y la resistencia  $R_0$ , respectivamente. Dado que la estimación inicial de  $R_0$  en la identificación de parámetros es de 229mΩ, la condición inicial está dada por:

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_1; \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,025)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (0,05)^2 \end{bmatrix} \right). \quad (5.5)$$

Asimismo, los ruidos están caracterizados por las matrices de covarianza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \max(|d\Theta|)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \max(|dU_1|)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-7} \end{bmatrix}, \quad P = \text{Cov}(y_t),$$

y con  $R = 10$ .

En primer lugar, la figura 5.8 muestra la estimación de  $R_0$  a lo largo del tiempo para el EKF y el GSF. Es posible observar que existía incertidumbre en el modelo, debido a que la estimación inicial de  $R_0$  converge a un valor cercano a los 100-110mΩ, y no se establece en los 220mΩ identificados en primer lugar.

Luego, la figura 5.9 muestra el error de estimación. Es posible observar una drástica disminución del error respecto al caso 1RC, debido a la estimación en tiempo real de la resistencia óhmica  $R_0$ , debido a que no existe una acumulación de incertidumbre tan drástica a lo largo del tiempo. Asimismo, es posible observar que el EKF presenta un abrupto crecimiento del error para los últimos instantes de tiempo, es decir, para  $\Theta < 10\%$ . Esto se debe al cambio abrupto en la curva OCV-SOC para  $0 < \Theta < 10\%$ , que el GSF y el PF manejan de mejor manera debido al mayor conocimiento que tienen respecto a la no linealidad. Luego, la tabla 5.3 muestra los resultados de error obtenidos utilizando este modelo, ilustrando de manera numérica la disminución del error que se tiene en todos los casos en comparación a la tabla 5.1.

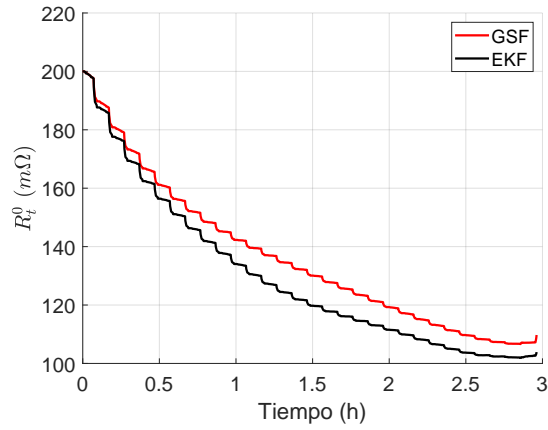


Figura 5.8: Estimación de  $R_0$

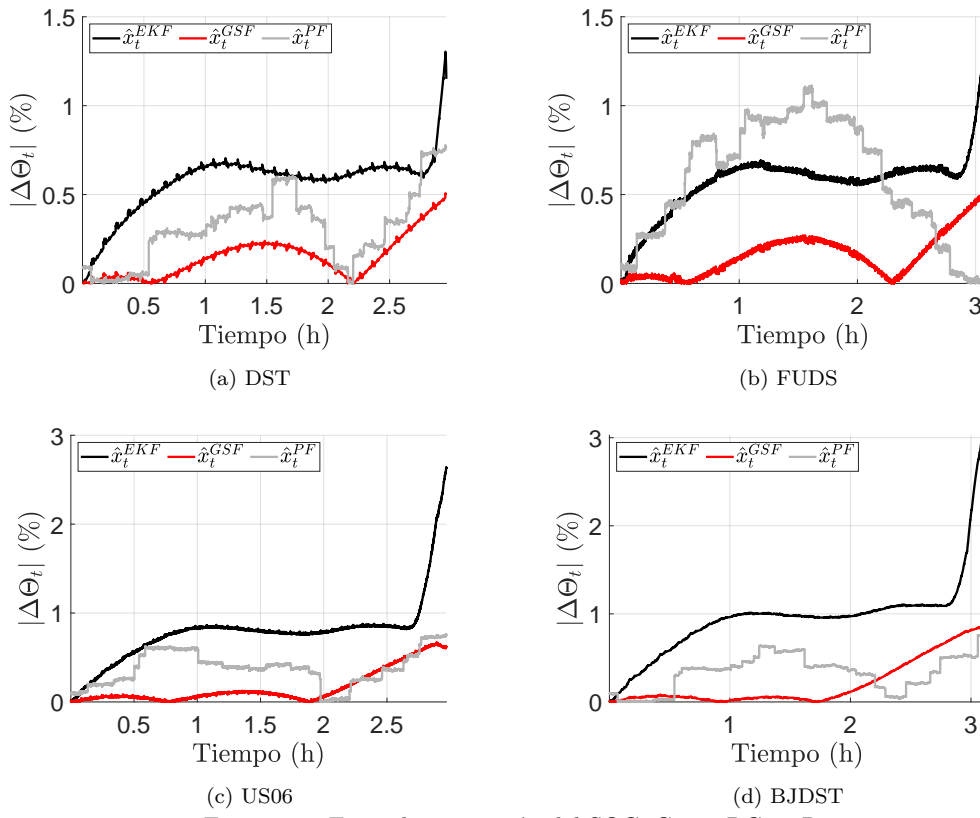


Figura 5.9: Error de estimación del SOC. Caso 1RC +  $R_0$ .

<i>Dynamic Test Profile</i>	Métrica	EKF	GSF	PF
DST	RMSE(%)	0.58	0.18	0.39
	MAX(%)	1.17	0.48	0.90
FUDS	RMSE(%)	0.58	0.20	0.70
	MAX(%)	1.21	0.50	1.15
US06	RMSE(%)	0.84	0.24	0.39
	MAX(%)	2.43	0.65	0.73
BJDST	RMSE(%)	1.03	0.32	0.41
	MAX(%)	2.82	0.83	0.75

Tabla 5.3: Resultados de error de estimación del SOC. Caso 1RC +  $R_0$ .

### 5.3.4. Caso 2RC ECM + $R_0$

Para finalizar, se añade la estimación de la resistencia óhmica  $R_0$  al caso 2RC. Se utiliza el sistema (3.1)-(3.5), con las matrices de espacio de estados (3.22), y los parámetros de la tabla 3.2c. Asimismo,  $T = 1s$ , y se considera un error inicial de un 2.5%, 1V y 50mΩ para el SOC, el voltaje en las mallas RC y la resistencia  $R_0$ , respectivamente. La condición inicial está dada por:

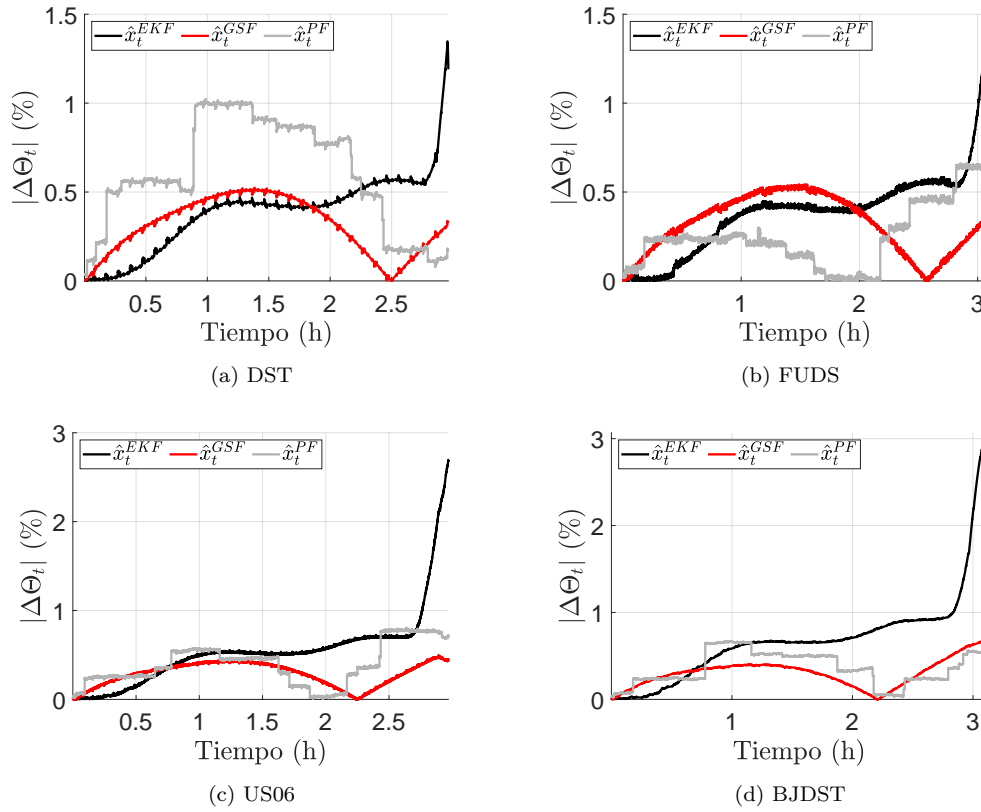
$$\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_1; \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,025)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0,05)^2 \end{bmatrix} \right). \quad (5.6)$$

Asimismo, los ruidos están caracterizados por las matrices de covarianza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \text{máx}(|d\Theta|)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}(|dU_1|)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}(|dU_2|)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-7} \end{bmatrix}, \quad P = \text{Cov}(y_t),$$

y con  $R = 10$ .

La figura 5.10 muestra el error de estimación para este caso, y la tabla 5.4 presenta de forma numérica el error obtenido por cada filtro para cada perfil. De nuevo, es posible observar un comportamiento similar al caso 1RC+ $R_0$  vs 1RC, obteniendo una disminución del error significativa respecto al caso 2RC para todos los filtros, y el EKF presenta el mismo crecimiento del error abrupto para  $\Theta < 10\%$  que el GSF y el PF logran evitar. Sin embargo, es posible observar que no existe una mejora significativa del RMSE en este caso respecto al caso 1RC+ $R_0$ , es más, en algunos casos incluso aumenta el error obtenido. Esto podría ser explicado por el aumento del orden del sistema, el cual incrementa la incertidumbre del modelo que la identificación de  $R_0$  en el caso 1RC había logrado disminuir. Así, al incrementar la complejidad del modelo para un sistema que otorgaba buenas estimaciones, se aumenta la incertidumbre en general, pudiendo incluso aumentar el error de estimación en ciertos experimentos.

Figura 5.10: Error de estimación del SOC. Caso 2RC +  $R_0$ .

<i>Dynamic Test Profile</i>	Métrica	EKF	GSF	PF
DST	RMSE(%)	0.43	0.35	0.68
	MAX(%)	1.21	0.53	1.04
FUDS	RMSE(%)	0.43	0.36	0.30
	MAX(%)	1.25	0.55	0.66
US06	RMSE(%)	0.66	0.31	0.44
	MAX(%)	2.48	0.47	0.75
BJDST	RMSE(%)	0.83	0.33	0.42
	MAX(%)	2.86	0.64	0.71

Tabla 5.4: Resultados de error de estimación del SOC. Caso 2RC +  $R_0$ .

Para una mejor visualización del error obtenido para cada experimento, la figura 5.11 muestra un diagrama de calor que refleja el error de estimación al aumentar el orden del sistema, y al incluir la estimación de la resistencia óhmica. Es importante mencionar que la intensidad de color no es en base al error global, sino a los errores máximos y mínimos obtenidos para cada experimento DST, FUDS, US06 y BJDST por separado.

Error de estimación			1RC			2RC		
			EKF	GSF	PF	EKF	GSF	PF
Sin $R_0$	DST	RMSE (%)	1.83	0.82	1.20	1.37	0.60	0.57
		MAX (%)	2.98	1.87	2.50	2.78	1.54	1.61
	FUDS	RMSE (%)	1.88	0.85	1.25	1.36	0.62	0.86
		MAX (%)	3.03	1.92	2.39	2.81	1.58	2.07
	US06	RMSE (%)	2.01	0.94	0.92	1.51	0.68	0.44
		MAX (%)	3.59	1.99	2.06	3.55	1.63	1.05
	BJDST	RMSE (%)	2.03	0.94	1.05	1.57	0.70	1.12
		MAX (%)	3.88	2.00	2.20	3.84	1.66	2.32
Con $R_0$	DST	RMSE (%)	0.58	0.18	0.39	0.43	0.35	0.68
		MAX (%)	1.17	0.48	0.90	1.21	0.53	1.04
	FUDS	RMSE (%)	0.58	0.20	0.70	0.43	0.36	0.30
		MAX (%)	1.21	0.50	1.15	1.25	0.55	0.66
	US06	RMSE (%)	0.84	0.24	0.39	0.66	0.31	0.44
		MAX (%)	2.43	0.65	0.73	2.48	0.47	0.75
	BJDST	RMSE (%)	1.03	0.32	0.41	0.83	0.33	0.42
		MAX (%)	2.82	0.83	0.75	2.86	0.64	0.71

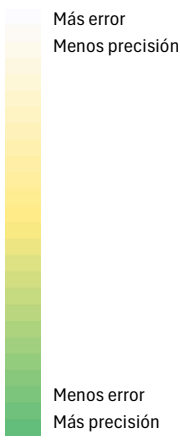


Figura 5.11: Comparación de error entre experimentos

Es posible observar de forma visual, como fue mencionado anteriormente, que la precisión de estimación aumenta tanto al pasar del modelo 1RC al modelo 2RC, como al realizar estimación de  $R_0$  tanto para 1RC como para 2RC. Luego, la mejora no es tan clara al realizar estimación de  $R_0$  y elevar el orden del modelo de 1RC a 2RC. Todo esto es debido a los motivos expuestos en la sección de cada uno de los experimentos.

# CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis, fue desarrollado el Filtro Suma de Gaussianas (GSF) para estimar el estado de carga (SOC) en baterías de ion-litio (Li-ion), esto a partir de un sistema obtenido a través de técnicas de identificación de modelos en base a datos obtenidos de baterías reales.

El filtro desarrollado fue implementado en casos de descarga constante y diversos perfiles de descarga dinámicos de corriente asociados al uso real de vehículos eléctricos. Asimismo, fueron implementados el Filtro de Kalman Extendido (EKF) y el Filtro de Partículas (PF) para validar el desempeño del filtro, a través de métricas de error de estimación y tiempo de cómputo.

Respecto al modelo de batería utilizada, el caso 2RC es más preciso que el 1RC, y la inclusión de la resistencia óhmica del sistema en la estimación mejora la precisión de los resultados, disminuyendo la incertidumbre del sistema. A pesar de las posibles diferencias entre el modelo utilizado, la estimación del SOC obtenida por el GSF es más precisa que la arrojada por el EKF en todos los casos. A pesar de que requiere más recursos computacionales, no es tan demandante como el PF, ofreciendo una precisión de estimación e información acerca de la función de densidad de probabilidad (PDF) del SOC comparable a este último.

### Trabajo futuro

Un paso lógico en esta línea de investigación es validar el desempeño del filtro propuesto en baterías reales. La implementación en sistemas físicos no solo permite verificar la viabilidad práctica del método, sino que también aporta evidencia empírica sobre su robustez y precisión bajo condiciones operativas reales. Este tipo de validación es fundamental para avanzar hacia su adopción en aplicaciones comerciales o industriales.

Dado que el SOC es una variable clave en los sistemas de gestión de baterías (BMS), uno de los pasos siguientes es implementar el GSF en BMS que utilicen métodos de control estocástico, los cuales podrían beneficiarse de la información de la PDF entregada por el filtro.

Por último, es factible explorar esquemas híbridos de estimación del SOC, que combinen el GSF como componente basado en modelos con técnicas de estimación basadas en datos. Este enfoque podría aprovechar las fortalezas de ambos mundos para mejorar aún más la precisión y adaptabilidad del estimador frente a distintas condiciones de operación y degradación de la batería.

# APÉNDICES

## A.1. Cuadratura de Gauss-Legendre

La cuadratura de Gauss-Legendre es un método de aproximación numérica para integrales definidas en el intervalo  $[-1, 1]$  [56]:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{\tau=1}^L \omega_{\tau} h(\psi_{\tau}), \quad (\text{A.1})$$

con  $\omega_{\tau}$  y  $\psi_{\tau}$  son los pesos y raíces de los polinomios de Legendre de grado  $L$ , respectivamente, que aproximan  $f(x)$  y están dados por:

$$P_L(x) = \frac{1}{2^L} \begin{cases} \sum_{k=0}^{(L-1)/2} (-1)^k \frac{(2L-2k)!}{k!(L-k)!(L-2k)!} x^{L-2k} & \text{si } L \text{ impar,} \\ \sum_{k=0}^{L/2} (-1)^k \frac{(2L-2k)!}{k!(L-k)!(L-2k)!} x^{L-2k} & \text{si } L \text{ par,} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde los ceros  $\psi_{\tau}$  del polinomio  $P_L(x)$  permiten encontrar los pesos  $\omega_{\tau}$  [57]:

$$\omega_{\tau} = \frac{2}{(1 - \psi_{\tau}^2) [P'_L(\psi_{\tau})]^2}. \quad (\text{A.3})$$

Algunas reglas de menor orden son las siguientes:

Número de puntos $L$	Raíces $\psi_{\tau}$	Pesos $\omega_{\tau}$
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$

Tabla A.1: Puntos y pesos de cuadratura de Gauss-Legendre para  $L = 1, 2, 3$

En el caso utilizado en este trabajo, la integral a aproximar se encuentra en el intervalo  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Para mapear esta integral al intervalo  $[-1, 1]$ , se realiza el cambio de variable:

$$x = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} r + \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}, \quad dx = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} dr. \quad (\text{A.4})$$

De esta forma, nuestra integral en  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  se mapea sobre  $[-1, 1]$ :

$$\int_{\theta_{i-q}}^{\theta_i} f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}r + \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}\right) \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} dr, \quad (\text{A.5})$$

por lo que la aproximación mediante cuadratura de Gauss-Legendre para una integral sobre el intervalo  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  viene dada por:

$$\int_{\theta_{i-q}}^{\theta_i} f(x)dx \approx \sum_{\tau=1}^L \omega_{\tau} f\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\psi_{\tau} + \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}\right) \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}. \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Ley de Distributividad Generalizada

Es posible establecer el producto de dos sumatorias como una sola sumatoria [58, p. 35]:

$$\left(\sum_{j=1}^K a_j\right) \left(\sum_{k=1}^M b_k\right) = \sum_{\ell=1}^{KM} a_j b_k, \quad (\text{A.7})$$

donde se puede obtener una expresión general para  $\ell$  en función de  $j$  y  $k$ :

$$\begin{array}{llll} k = 1 & j = 1, \dots, K & \rightarrow & \ell = 1, \dots, K \\ k = 2 & j = 1, \dots, K & \rightarrow & \ell = K + 1, \dots, 2K \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k = M & j = 1, \dots, K & \rightarrow & \ell = (M - 1)K + 1, \dots, KM \end{array}$$

Así, el índice  $\ell$  está dado por  $\ell = (k - 1)K + j$ .

## A.3. Filtro de Kalman Extendido

El Filtro de Kalman Extendido [59] es una implementación sub-óptima del Filtro de Kalman estándar, el cual es uno de los métodos de estimación de estados basados en modelos más utilizados para estimar el SOC en baterías Li-ion. Se contempla el sistema Wiener en espacio de estados de la batería:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t, \quad (\text{A.8})$$

$$y_t = g(x_t) + Du_t + v_t, \quad (\text{A.9})$$

con  $w_t \sim \mathcal{N}(w_t; 0, Q)$ ,  $v_t \sim \mathcal{N}(v_t; 0, P)$ , y con la no linealidad  $g(\cdot)$  dada por la curva OCV-SOC, por la cual pasa sólo el primer estado:

$$g(x_t) = OCV([1 \ 0 \ \dots \ 0]x_t). \quad (\text{A.10})$$

La idea es aproximar la no linealidad  $g(\cdot)$  mediante serie de Taylor de primer orden:

$$g(x_t) = g(\hat{x}_{t|t-1}) + C_t(x_t - \hat{x}_{t|t-1}), \quad (\text{A.11})$$

con  $C_t$  el Jacobiano de  $g(\cdot)$ , el cual viene dado por:

$$C_t = \left. \frac{\partial g(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t|t-1}}. \quad (\text{A.12})$$

Así, el sistema puede reescribirse como un sistema lineal variante en el tiempo:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t, \quad (\text{A.13})$$

$$y_t = C_t x_t + Du_t + v_t, \quad (\text{A.14})$$

por lo que las ecuaciones de corrección del Filtro de Kalman Extendido vienen dadas por:

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t^T (P + C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T)^{-1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t [y_t - g(\hat{x}_{t|t-1}) - Du_t], \quad (\text{A.16})$$

$$\Sigma_{t|t} = (I - K_t C_t) \Sigma_{t|t-1}, \quad (\text{A.17})$$

y las ecuaciones de predicción están dadas por:

$$\hat{x}_{t+1|t} = A\hat{x}_{t|t} + Bu_t, \quad (\text{A.18})$$

$$\Sigma_{t+1|t} = Q + A\Sigma_{t|t}A^T. \quad (\text{A.19})$$

#### A.4. Filtro de Partículas

El Filtro de Partículas [60], también conocido como muestreo secuencial de importancia, es un algoritmo utilizado para resolver de forma aproximada problemas de estimación en sistemas dinámicos con observaciones ruidosas. Este método representa la distribución a posteriori del estado de un proceso a partir de observaciones  $p(x_t|y_{1:t})$ , sin requerir suposiciones estrictas sobre el modelo ni sobre las distribuciones iniciales, mediante pesos y muestras (partículas) tal que:

$$p(x_t|y_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^{N_p} k_t^{(i)} \delta(x_t - x_t^{(i)}), \quad (\text{A.20})$$

con  $N_p$  el número de partículas,  $k_t^{(i)}$  el  $i$ -ésimo peso,  $x_t^{(i)}$  la  $i$ -ésima partícula muestreada de la PDF  $p(x_t|y_{1:t})$ , y  $\delta(\cdot)$  es la función delta de Dirac. Las partículas son generadas a partir de una distribución de importancia, y los pesos se calculan según:

$$k_t^{(i)} \propto k_{t-1}^{(i)} \frac{p(y_t|x_t^{(i)})p(x_t^{(i)}|x_{t-1}^{(i)})}{q(x_t|x_{t-1}^{(i)}, y_t)}, \quad (\text{A.21})$$

con  $q(x_t|x_{t-1}^{(i)}, y_t)$  la distribución de importancia y  $k_{t-1}^{(i)}$  los pesos de importancia en la iteración anterior. Dado que obtener la distribución de importancia no es una tarea sencilla, en este trabajo se utiliza el *bootstrap filter*, el cual utiliza  $p(x_t|x_{t-1})$  como distribución de importancia, logrando que los pesos resulten tal que  $k_t^{(i)} \propto p(y_t|x_t^{(i)})$ .

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Piller, M. Perrin, and A. Jossen, “Methods for state-of-charge determination and their applications,” *Journal of power sources*, vol. 96, no. 1, pp. 113–120, 2001.
- [2] I. Baccouche, S. Jemmali, A. Mlayah, B. Manai, and N. E. B. Amara, “Implementation of an improved coulomb-counting algorithm based on a piecewise soc-ocv relationship for soc estimation of li-ionbattery,” *arXiv preprint arXiv:1803.10654*, 2018.
- [3] K. S. Ng, C.-S. Moo, Y.-P. Chen, and Y.-C. Hsieh, “Enhanced coulomb counting method for estimating state-of-charge and state-of-health of lithium-ion batteries,” *Applied energy*, vol. 86, no. 9, pp. 1506–1511, 2009.
- [4] Z. Chen, Y. Fu, and C. C. Mi, “State of charge estimation of lithium-ion batteries in electric drive vehicles using extended kalman filtering,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 62, no. 3, pp. 1020–1030, 2012.
- [5] W. He, N. Williard, C. Chen, and M. Pecht, “State of charge estimation for electric vehicle batteries using unscented kalman filtering,” *Microelectronics Reliability*, vol. 53, no. 6, pp. 840–847, 2013.
- [6] Z. He, Z. Yang, X. Cui, and E. Li, “A method of state-of-charge estimation for ev power lithium-ion battery using a novel adaptive extended kalman filter,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 69, no. 12, pp. 14 618–14 630, 2020.
- [7] S. Schwunk, N. Armbruster, S. Straub, J. Kehl, and M. Vetter, “Particle filter for state of charge and state of health estimation for lithium–iron phosphate batteries,” *Journal of Power Sources*, vol. 239, pp. 705–710, 2013.
- [8] A. Tulsyan, Y. Tsai, R. B. Gopaluni, and R. D. Braatz, “State-of-charge estimation in lithium-ion batteries: A particle filter approach,” *Journal of Power Sources*, vol. 331, pp. 208–223, 2016.
- [9] C. Lin, H. Mu, R. Xiong, and W. Shen, “A novel multi-model probability battery state of charge estimation approach for electric vehicles using h-infinity algorithm,” *Applied Energy*, vol. 166, pp. 76–83, 2016.
- [10] M. Gholizadeh and F. R. Salmasi, “Estimation of state of charge, unknown nonlinearities, and state of health of a lithium-ion battery based on a comprehensive unobservable model,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 3, pp. 1335–1344, 2013.

- [11] Y. Shen, “Adaptive online state-of-charge determination based on neuro-controller and neural network,” *Energy Conversion and Management*, vol. 51, no. 5, pp. 1093–1098, 2010.
- [12] C. Hametner and S. Jakubek, “State of charge estimation for lithium ion cells: Design of experiments, nonlinear identification and fuzzy observer design,” *Journal of Power Sources*, vol. 238, pp. 413–421, 2013.
- [13] Y. Li, C. Zou, M. Berecibar, E. Nanini, J. C. Chan, P. Van den Bossche, J. Van Mierlo, and N. Omar, “Random forest regression for online capacity estimation of lithium-ion batteries,” *Applied Energy*, vol. 232, pp. 197–210, 2018.
- [14] M. Kim, K. Kim, J. Kim, J. Yu, and S. Han, “State of charge estimation for lithium ion battery based on reinforcement learning,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 28, pp. 404–408, 2018.
- [15] X. Liu, K. Li, J. Wu, Y. He, and X. Liu, “An extended kalman filter based data-driven method for state of charge estimation of li-ion batteries,” *Journal of Energy Storage*, vol. 40, p. 102655, 2021.
- [16] A. Mesbah, “Stochastic model predictive control: An overview and perspectives for future research,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 36, no. 6, pp. 30–44, 2016.
- [17] F. Weissel, M. F. Huber, and U. D. Hanebeck, “Stochastic nonlinear model predictive control based on gaussian mixture approximations,” in *Informatics in Control, Automation and Robotics: Selected Papers from the International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2007*. Springer, 2009, pp. 239–252.
- [18] A. Pozzi and D. M. Raimondo, “Stochastic model predictive control for optimal charging of electric vehicles battery packs,” *Journal of Energy Storage*, vol. 55, p. 105332, 2022.
- [19] M. Corno, N. Bhatt, S. M. Savaresi, and M. Verhaegen, “Electrochemical model-based state of charge estimation for li-ion cells,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 1, pp. 117–127, 2014.
- [20] W. Guo, Z. Sun, S. B. Vilsen, J. Meng, and D. I. Stroe, “Review of “grey box” lifetime modeling for lithium-ion battery: Combining physics and data-driven methods,” *Journal of Energy Storage*, vol. 56, p. 105992, 2022.
- [21] H. He, R. Xiong, and J. Fan, “Evaluation of lithium-ion battery equivalent circuit models for state of charge estimation by an experimental approach,” *energies*, vol. 4, no. 4, pp. 582–598, 2011.
- [22] S. A. Raihan and B. Balasingam, “Recursive least square estimation approach to real-time parameter identification in li-ion batteries,” in *2019 IEEE Electrical Power and Energy Conference (EPEC)*. IEEE, 2019, pp. 1–6.
- [23] U. Westerhoff, T. Kroker, K. Kurbach, and M. Kurrat, “Electrochemical impedance spectroscopy based estimation of the state of charge of lithium-ion batteries,” *Journal of Energy Storage*, vol. 8, pp. 244–256, 2016.

- [24] X. Lai, Y. Zheng, and T. Sun, “A comparative study of different equivalent circuit models for estimating state-of-charge of lithium-ion batteries,” *Electrochimica Acta*, vol. 259, pp. 566–577, 2018.
- [25] A. L. Cedeño, R. Orellana, R. Carvajal, and J. C. Agüero, “A Bayesian Filtering Method for Wiener State-Space Systems Utilizing a Piece-wise Linear Approximation,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 56, no. 2, pp. 10 246–10 251, 2023.
- [26] D. Luenberger, “Observers for multivariable systems,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 11, no. 2, pp. 190–197, 2003.
- [27] M. Zeitz, “The extended luenberger observer for nonlinear systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 9, no. 2, pp. 149–156, 1987.
- [28] X. Hu, F. Sun, and Y. Zou, “Estimation of state of charge of a lithium-ion battery pack for electric vehicles using an adaptive luenberger observer,” *Energies*, vol. 3, no. 9, pp. 1586–1603, 2010.
- [29] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal filtering*. Courier Corporation, 2005.
- [30] S. Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, 2013, vol. 3.
- [31] T. Söderström, *Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and Control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [32] G. J. McLachlan and D. Peel, *Finite mixture models*. John Wiley & Sons, 2000.
- [33] S. Frühwirth-Schnatter, G. Celeux, and C. P. Robert, *Handbook of mixture analysis*. CRC press, 2019.
- [34] F. Zheng, Y. Xing, J. Jiang, B. Sun, J. Kim, and M. Pecht, “Influence of different open circuit voltage tests on state of charge online estimation for lithium-ion batteries,” *Applied energy*, vol. 183, pp. 513–525, 2016.
- [35] J. Remmlinger, M. Buchholz, M. Meiler, P. Bernreuter, and K. Dietmayer, “State-of-health monitoring of lithium-ion batteries in electric vehicles by on-board internal resistance estimation,” *Journal of power sources*, vol. 196, no. 12, pp. 5357–5363, 2011.
- [36] P. A. Topan, M. N. Ramadan, G. Fathoni, A. I. Cahyadi, and O. Wahyunggoro, “State of charge (soc) and state of health (soh) estimation on lithium polymer battery via kalman filter,” in *2016 2nd International Conference on Science and Technology-Computer (ICST)*. IEEE, 2016, pp. 93–96.
- [37] Samsung SDI Co. Ltd. Energy Business Division, *Lithium-ion rechargeable cell for power tools. Model name: INR18650-20R*, 2011.
- [38] B. Bole, C. S. Kulkarni, and M. Daigle, “Adaptation of an electrochemistry-based lithium battery model to account for deterioration observed under randomized use,” in *Annual conference of the PHM society*, vol. 6, no. 1, 2014.

- [39] B. Bole, C. Kulkarni, and M. Daigle, “Randomized battery usage data set,” <https://www.nasa.gov/content/prognostics-center-of-excellence-data-set-repository>, 2014, nASA Prognostics Data Repository, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA.
- [40] MIT Electric Vehicle Team, *A Guide to Understanding Battery Specifications*, 2008.
- [41] R. Guo, L. Lu, M. Ouyang, and X. Feng, “Mechanism of the entire overdischarge process and overdischarge-induced internal short circuit in lithium-ion batteries,” *Scientific reports*, vol. 6, no. 1, p. 30248, 2016.
- [42] A. W. Golubkov, S. Scheikl, R. Planteu, G. Voitic, H. Wiltsche, C. Stangl, G. Fauler, A. Thaler, and V. Hacker, “Thermal runaway of commercial 18650 li-ion batteries with lfp and nca cathodes—impact of state of charge and overcharge,” *Rsc Advances*, vol. 5, no. 70, pp. 57 171–57 186, 2015.
- [43] R. Jackey, M. Saginaw, P. Sanghvi, J. Gazzarri, T. Huria, and M. Ceraolo, “Battery model parameter estimation using a layered technique: An example using a lithium iron phosphate cell,” SAE Technical Paper, Tech. Rep., 2013.
- [44] T. Zahid and W. Li, “A comparative study based on the least square parameter identification method for state of charge estimation of a lifepo4 battery pack using three model-based algorithms for electric vehicles,” *Energies*, vol. 9, no. 9, p. 720, 2016.
- [45] A. Papoulis and S. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [46] G. Kitagawa and W. Gersch, *Smoothness priors analysis of time series*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 116.
- [47] A. L. Cedeño, R. A. González, B. I. Godoy, R. Carvajal, and J. C. Agüero, “On filtering and smoothing algorithms for linear state-space models having quantized output data,” *Mathematics*, vol. 11, no. 6, p. 1327, 2023.
- [48] A. L. Cedeño, R. Alborno, R. Carvajal, B. I. Godoy, and J. C. Agüero, “A two-filter approach for state estimation utilizing quantized output data,” *Sensors*, vol. 21, no. 22, p. 7675, 2021.
- [49] Q. Zhang, A. G. Zhang, and J. Chen, “Gaussian mixture reduction with composite transportation divergence,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 70, no. 7, pp. 5191–5212, 2023.
- [50] A. R. Runnalls, “Kullback-leibler approach to gaussian mixture reduction,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, no. 3, pp. 989–999, 2007.
- [51] I. Arasaratnam, S. Haykin, and R. J. Elliott, “Discrete-time nonlinear filtering algorithms using gauss–hermite quadrature,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 5, pp. 953–977, 2007.
- [52] M. F. Huber and U. D. Hanebeck, “Progressive gaussian mixture reduction,” in *2008 11th International Conference on Information Fusion*. IEEE, 2008, pp. 1–8.

- 
- [53] J. L. Williams, “Gaussian mixture reduction of tracking multiple maneuvering targets in clutter,” *Master’s thesis, Air Force Institute of Technology*, 2003.
- [54] D. Schieferdecker and M. F. Huber, “Gaussian mixture reduction via clustering,” in *2009 12th international conference on information fusion*. IEEE, 2009, pp. 1536–1543.
- [55] M. P. Balenzuela, J. Dahlin, N. Bartlett, A. G. Wills, C. Renton, and B. Ninness, “Accurate gaussian mixture model smoothing using a two-filter approach,” in *2018 IEEE conference on decision and control (CDC)*. IEEE, 2018, pp. 694–699.
- [56] H. Cohen, *Numerical approximation methods*. Springer, 2011.
- [57] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1965, vol. 55.
- [58] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 1990.
- [59] A. Gelb *et al.*, *Applied optimal estimation*. MIT press, 1974.
- [60] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. Smith, “Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation,” in *IEE proceedings F (radar and signal processing)*, vol. 140, no. 2. IET, 1993, pp. 107–113.