DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS PUCV-USM





Fotoproducción de pares fotón–mesón en procesos difractivos

Ivan Zemliakov

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

PROFESOR GUÍA: MARAT SIDDIKOV

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☑ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Fotoproducción de pares fotón-mesón en procesos difractivos

Nombre del candidato(a): Ivan Zemliakov

Carrera / Grado: Doctorado en Ciencias Físicas

Campus: Casa Central **Departamento:** Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Marat Siddikov, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☑ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por **(marcar una opción):**

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 01/10/2026 **Firma:**

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 01/10/2026 **Firma:**

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Resumen

Esta tesis está dedicada a la fotoproducción exclusiva de pares fotón–cuarkonio pesados en procesos difractivos para los canales $\gamma p \to \gamma \eta_c p$ y $\gamma p \to \gamma \chi_{cJ} p$, los cuales permiten explorar la dinámica gluónica del protón en dos regímenes cinemáticos complementarios: el correspondiente a energías moderadas del sistema γp, descrito mediante factorización colineal, y el de energías altas, donde resulta apropiado el formalismo del Condensado de Vidrio de Color (CGC por sus siglas en inglés) en términos de la amplitud dipolar.

Como resultado principal de este trabajo, se derivan las amplitudes de fotoproducción exclusiva para ambos canales en los dos marcos teóricos y se obtienen predicciones para observables diferenciales e integrados. Se encuentra que, tanto en la factorización colineal como en el CGC, las secciones eficaces diferenciales están dominadas por la región de pequeños momentos transferidos. Las secciones eficaces integradas indican, además, que estos canales pueden tener relevancia experimental en la cinemática del EIC y del LHC, siendo $\gamma \chi_{c2}$ el canal con mejores perspectivas entre los estados χ_{cJ}.

Además de esto, se analiza el papel de estos procesos como un posible fondo para la fotoproducción exclusiva de η_c y χ_{cJ}, discutida tradicionalmente en el contexto de la búsqueda del odderón. Se muestra que la producción exclusiva de pares fotón–mesón puede constituir una contribución de fondo importante si el fotón final no se reconstruye. Además del mecanismo directo, se toman en cuenta las contribuciones procedentes de desintegraciones radiativas de estados de cuarkonio más pesados. En particular, los canales $J/\psi \to \gamma \eta_c$ y $\psi(2S) \to \gamma \chi_{cJ}$ generan contribuciones grandes que pueden superar la señal esperada del mecanismo mediado por el odderón en regiones cinemáticas relevantes.

Esta tesis fue financiada con el apoyo de la beca de doctorado nacional ANID Folio 21250067, beca interna de USM y proyectos Fondecyt 1220242 y 1251975.

Contenido

1. Introducción **3**

2. Herramientas teóricas para el cálculo de procesos exclusivos **10**

2.1. Factorización colineal y las GPDs 10

2.2. Fotoproducción exclusiva en el marco de la factorización colineal 21

2.3. Régimen de x_{Bj} pequeña: el modelo de CGC 25

3. Cálculo de amplitudes para la fotoproducción exclusiva de pares fotón-mesón **40**

3.1. Fotoproducción de pares $\gamma\eta_c$ en el marco de la factorización colineal 43

3.2. Fotoproducción de pares $\gamma\chi_{cJ}$ en el marco de la factorización colineal 48

3.3. Cálculo en el marco del CGC 52

4. Predicciones fenomenológicas y discusión **69**

4.1. Observables diferenciales 69

4.2. Observables integradas 81

4.3. Comparación con la fotoproducción de η_c y χ_{cJ} 86

5. Conclusión **89**

Apéndice A. Funciones de coeficiente para $\gamma\chi_{cJ}$ **91**

Referencias **109**

1. Introducción

Comprender la dinámica colectiva de los partones dentro del protón y, en general, de los núcleos, sigue siendo uno de los problemas centrales de la física de partículas. En la práctica, esta dinámica puede parametrizarse mediante distribuciones partónicas (PDFs por sus siglas en inglés) [1] y multipartónicas [2] universales, cuya extracción a partir de datos experimentales es posible gracias a diversos teoremas de factorización [3, 4] que separan contribuciones perturbativas de corta distancia de contribuciones no perturbativas de larga distancia, absorbidas en funciones universales del blanco nuclear. Al mismo tiempo, en el régimen de altas energías (o, equivalentemente, de grandes densidades gluónicas), la descripción del contenido hadrónico admite un lenguaje complementario: la interacción de proyectiles rápidos con el blanco puede expresarse en términos de operadores no locales asociados a líneas de Wilson en el marco del CGC [5]. Aunque estos correladores no describen el comportamiento de un partón individual, contienen propiedades colectivas del campo gluónico y proporcionan una representación de la estructura del protón y del núcleo en el régimen de pequeña x_{Bj}[1]. En este sentido, tanto la descripción partónica como el CGC forman parte de una misma agenda: construir una caracterización cuantitativa de la materia hadrónica en distintos dominios cinemáticos.

Por el carácter no perturbativo de la interacción fuerte, el contenido interno tanto de los nucleones como de los núcleos es extraordinariamente complejo. En consecuencia, ni las distribuciones partónicas en el régimen colineal, ni sus extensiones, ni tampoco los correladores de líneas de Wilson en el CGC pueden calcularse desde primeros principios en todo el espacio cinemático. Aunque ciertas distribuciones pueden evaluarse en modelos simplificados [6], la única vía fiable para "mirar dentro" de un sistema fuertemente acoplado es la interpretación de datos experimentales mediante marcos teóricos adecuados y parametrizaciones consistentes.

Un ingrediente clave para acceder a la estructura interna del protón y de los núcleos es seleccionar observables en los que la dinámica no perturbativa aparezca de forma controlada. En este sentido, los procesos difractivos constituyen un caso particularmente valioso. En QCD de altas energías, la difracción se asocia a la producción de un sistema final con una gran brecha de rapidez, es decir, una región amplia en la rapidez relativista de las partículas salientes sin producción de hadrones. Dentro de los procesos con una brecha de rapidez es útil distinguir entre reacciones inclusivas y exclusivas. En un proceso inclusivo se mide solo una parte del estado final y se suma sobre el resto de la actividad hadrónica no observada. En cambio, en un proceso exclusivo el estado final medido está completamente especificado (por ejemplo, un conjunto definido de partículas). Esta clasificación no es un detalle terminológico, sino que determina cuánta información cinemática está fija y cuál puede ser la conexión entre el observable y la estructura del blanco.

La relevancia de los procesos difractivos y exclusivos se refleja en una actividad experi-

[1] La variable de Bjorken.

mental extensa y creciente. En particular, durante las últimas décadas se ha desarrollado un programa experimental internacional de imagen tridimensional (o tomografía) del nucleón, basado en mediciones sistemáticas de procesos exclusivos, con el objetivo de cartografiar la distribución espacial y las correlaciones partónicas [7–9]. Principalmente, este programa se apoya en la dispersión Compton profundamente virtual (DVCS, por sus siglas en inglés) y en la producción profundamente virtual de mesones (DVMP, por sus siglas en inglés), estudiadas en instalaciones de blanco fijo. Entre ellas destacan el experimento COMPASS en el CERN y su extensión COMPASS-II, donde la DVCS y la producción exclusiva de mesones constituyen canales centrales del programa dedicado al estudio y a la extracción de las Distribuciones de Partones Generalizadas (GPDs, por sus siglas en inglés) [7, 10, 11]. Asimismo, Jefferson Lab constituye uno de los hitos más importantes de este programa. Tras la actualización a 12 GeV [12], el espectrómetro CLAS12 permite mediciones de alta luminosidad y gran aceptancia para estudiar sistemáticamente canales exclusivos sensibles a la estructura tridimensional del nucleón: la DVCS y la DVMP, así como un conjunto amplio de reacciones exclusivas inducidas por fotones (fotoproducción). En conjunto, el programa de JLab proporciona restricciones complementarias sobre la estructura del nucleón para x_{Bj} moderado, con especial sensibilidad a correlaciones espaciales y a observables de espín [13, 14].

Por otro lado, existe una dirección complementaria centrada en la dinámica de gluones a pequeña x_{Bj} y en el régimen de alta densidad, donde se espera la aparición de fenómenos colectivos como la saturación. En este caso, la descripción efectiva en términos de CGC proporciona un marco adecuado para organizar la fenomenología de altas energías y conectar observables medibles con correladores universales del blanco [5, 15]. Experimentalmente, esta línea de investigación se desarrolla en varias direcciones. En colisiones hadrónicas pA y dA a altas energías (RHIC y LHC), en particular en la cinemática hacia adelante, se accede a los gluones a pequeña x_{Bj} del núcleo mediante observables inclusivos y semi–inclusivos (producción de hadrones y jets hacia adelante, Drell-Yan, etc.), que son sensibles a efectos colectivos asociados a altas densidades gluónicas [16–19]. Otros estudios se basan en procesos fotoinducidos en colisiones ultraperiféricas (UPCs, por sus siglas en inglés) en sistemas pp, pA y AA, donde el campo electromagnético de un haz relativista actúa como fuente de fotones casi reales, y la fotoproducción exclusiva de cuarkonios pesados prácticamente permite observar directamente la distribución gluónica a pequeña x_{Bj} en protones y núcleos [20–22]. La gran relevancia actual de los procesos difractivos queda especialmente subrayada por el programa del LHC en la fase de Alta Luminosidad (HL-LHC, por sus siglas en inglés) [23]. En paralelo al aumento de luminosidad, se ha desarrollado instrumentación dedicada para la física difractiva y exclusiva, en particular el etiquetado de protones mediante detectores cercanos al haz (por ejemplo, AFP en ATLAS y PPS/CT–PPS en CMS–TOTEM), cuyo objetivo es identificar canales exclusivos (como la fotoproducción exclusiva) [24–27].

Un hito decisivo de la próxima década en la física de la estructura hadrónica será el

Electron–Ion Collider (EIC), destinado a explorar la materia hadrónica en colisiones electrón–protón y electrón–núcleo. A diferencia de un colisionador hadrónico, el EIC ofrece un estado inicial mucho más limpio y bien definido, donde el proyectil leptónico no tiene estructura hadrónica adicional y la interacción se controla mediante el intercambio electromagnético. Junto con la alta luminosidad y la posibilidad de variar las energías y la polarización de los haces, esto permite cartografiar observables en un rango amplio de x_{Bj} y de Q^2 (la virtualidad del fotón intercambiado), con una separación más clara de mecanismos y menores incertidumbres sistemáticas. En particular, el programa del EIC incluye de forma destacada canales exclusivos y difractivos, sensibles a la estructura tridimensional del protón y del núcleo y a la transición hacia el régimen de pequeña x_{Bj}, con requisitos experimentales y conceptos de detectores desarrollados para este objetivo [9, 28].

En esta tesis el enfoque se centra en la fotoproducción exclusiva en procesos difractivos. La razón es que la fotoproducción constituye una clase de procesos especialmente favorables para estudiar la estructura hadrónica: combina un proyectil electromagnético bien definido con una gran sensibilidad a la dinámica gluónica del blanco, y permite trabajar en cinemáticas complementarias, desde el régimen de x_{Bj} moderado hasta el dominio de pequeña x_{Bj} accesible a altas energías. Por otro lado, en presencia de una escala dura (por ejemplo, la masa de un estado de cuarkonio pesado o una virtualidad del fotón suficientemente grande), la parte de corta distancia puede tratarse perturbativamente, mientras que la información no perturbativa del protón o del núcleo queda concentrada en objetos universales. Dependiendo del dominio cinemático, esta separación admite descripciones complementarias. En el régimen de pequeña x_{Bj}, la formulación en el marco del CGC organiza la dinámica de altas energías en términos de correladores universales del blanco. Para una amplia clase de observables exclusivos, la información no perturbativa se codifica en amplitudes de dispersión del dipolo [29] (cuya definición y propiedades se discutirán más adelante). En cambio, a x_{Bj} moderado es natural utilizar la descripción partónica basada en teoremas de factorización. La factorización colineal proporciona un esquema donde los coeficientes de corta distancia se calculan perturbativamente y la estructura hadrónica se parametriza mediante las GPDs [10], que se introducirán en las siguientes secciones.

La fotoproducción exclusiva cuenta con una base experimental muy amplia y con una fenomenología bien desarrollada. En el blanco del protón, mediciones en HERA (H1 y ZEUS) establecieron con alta precisión la dependencia energética y las secciones eficaces diferenciales $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ en canales como $\gamma p \to J/\psi\, p$, la producción difractiva de mesones ligeros y la fotoproducción exclusiva de Υ (mesón formado por $b\bar{b}$), proporcionando un conjunto de referencia para la descripción cuantitativa de procesos exclusivos [30–33]. Posteriormente, los estudios de UPCs en el LHC extendieron este programa a energías sin precedentes: en colisiones $PbPb$ se midieron secciones eficaces coherentes de J/ψ sensibles a la distribución gluónica nuclear a pequeña x_{Bj} [34, 35], mientras que en pPb (y también en pp) se accedió a la fotoproduc-

ción exclusiva sobre protones en un rango de energías fotón–protón mucho más amplio que en HERA, alcanzando valores de $W_{\gamma p}$ del orden del TeV [36]. Esta riqueza de mediciones, que cubre varios órdenes de magnitud en energía y proporciona información diferencial en t, ha impulsado el desarrollo de la fenomenología en marcos complementarios. En el régimen de pequeña x_{Bj}, el CGC permite describir los observables integrados y diferenciales de la fotoproducción exclusiva: la dependencia energética de las secciones eficaces, la pendiente y la forma de $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ mediante la amplitud dipolar ajustada a los datos de dispersión inelástica profunda (DIS por sus siglas en inglés) y confrontada con canales exclusivos [38, 39]. En el marco de la factorización colineal a valores moderados de x_{Bj}, la fenomenología basada en las GPDs proporciona una descripción sistemática de un amplio conjunto de procesos exclusivos. Los canales canónicos de la DVCS y de la DVMP constituyen la base experimental más utilizada para extraer y restringir parametrizaciones de las GPDs, pero el mismo formalismo se aplica también a la fotoproducción exclusiva cuando existe una escala dura adecuada, lo que permite describir secciones eficaces, asimetrías de espín y dependencias en t para diversos canales. Además, estas parametrizaciones hacen posible extraer información sobre la distribución espacial de partones en el plano transversal a través de la representación en parámetro de impacto [40]. En ambos casos, la idea central es que, una vez fijados los objetos no perturbativos universales (la amplitud dipolar o las GPDs) a partir de conjuntos amplios de datos, estos constituyen una base cuantitativa para describir y comparar procesos exclusivos diferentes sin reajustar de cero cada canal.

Aun así, la reconstrucción de las GPDs a partir de datos experimentales no es única. En la práctica, los observables acceden a combinaciones de las GPDs con kernels perturbativos, de modo que un conjunto finito de mediciones puede dejar direcciones del espacio funcional pobremente determinadas: distintas parametrizaciones pueden describir los mismos datos con una calidad comparable. Este hecho se ha discutido en la literatura como el problema de "shadow GPD" [41], en el sentido de que existen modos (o combinaciones) de las GPDs que contribuyen muy poco a las amplitudes accesibles en los observables medidos y, por lo tanto, permanecen débilmente restringidas. En términos prácticos, esto significa que una buena descripción de un subconjunto de datos no garantiza una determinación estable de las GPDs como funciones: diversas formas funcionales pueden ser casi indistinguibles para los observables disponibles. Por lo tanto, se vuelve esencial incorporar canales adicionales capaces de imponer restricciones complementarias y reducir degeneraciones en la extracción. En particular, resulta importante disponer de observables cuya sensibilidad enfatice otras combinaciones de las GPDs respecto a la DVCS y a la DVMP, y que exploren la dependencia cinemática en x_{Bj} y en el momento transferido t.

Un aspecto especialmente delicado es el sector gluónico. En la mayor parte de la fenomenología "clásica", la información se obtiene principalmente de canales donde la contribución dominante está controlada por cuarks, y la sensibilidad directa a las GPDs gluónicas es más

limitada. De hecho, se ha destacado que la DVCS y la DVMP por sí solas no proporcionan restricciones suficientes sobre la forma funcional de las GPDs, y que esto se vuelve particularmente relevante al intentar fijar con precisión la parte gluónica [37]. En consecuencia, incluso con bases de datos extensas, es deseable contrastar la consistencia de las parametrizaciones gluónicas en procesos exclusivos distintos, donde la dinámica de los gluones entra de manera más directa. Esto es especialmente pertinente para nuestro caso de interés, donde la dinámica gluónica juega un papel central y es crucial controlar las incertidumbres al comparar diferentes observables.

Desde la perspectiva de pequeña x_{Bj}, la situación es análoga pero con un énfasis distinto. El éxito fenomenológico del modelo del CGC al describir una gran variedad de datos [38, 39] no garantiza la universalidad del objeto no perturbativo que se ajusta: gran parte de las confrontaciones se apoya en un conjunto relativamente homogéneo de canales, y además existen parametrizaciones con supuestos dinámicos muy diferentes (por ejemplo, esquemas inspirados en la evolución tipo DGLAP frente a construcciones basadas en soluciones asintóticas de la dinámica de pequeña x_{Bj}) que pueden describir los mismos datos con una calidad comparable [42]. A esto se suma que los cálculos a siguiente orden (NLO, por sus siglas en inglés) no necesariamente implican cambios drásticos en las curvas una vez que se reajustan los parámetros no perturbativos a los mismos datos. De hecho, en la fotoproducción exclusiva se ha observado que, tras el ajuste, las predicciones a LO y a NLO pueden resultar muy similares a nivel de secciones eficaces, mientras que el impacto principal de las correcciones de orden superior se manifiesta en un desplazamiento apreciable de los parámetros extraídos [43] (un comportamiento análogo se encuentra también en los ajustes a NLO del DIS [44, 45]). Esto plantea una pregunta metodológica importante: hasta qué punto un ajuste a LO puede absorber, a través de los parámetros no perturbativos, parte de la física de orden superior.

Cabe destacar que uno de los objetivos centrales en el régimen de x_{Bj} pequeña es identificar el inicio del régimen no lineal, asociado a la saturación de gluones. Sin embargo, en varios observables de la fotoproducción exclusiva el crecimiento con la energía se describe bien mediante leyes efectivas tipo potencia en el rango actualmente accesible, sin una señal inequívoca de saturación [36]. En otras palabras, aun cuando el marco del CGC organiza de forma natural la fenomenología de altas energías, la escala a la que deberían aparecer desviaciones claras del comportamiento tipo potencia, y qué observables son más sensibles, siguen siendo preguntas abiertas y dependen de la dinámica de la amplitud dipolar. Esto refuerza la necesidad de diversificar el conjunto de canales exclusivos considerados, para someter a prueba las hipótesis dinámicas.

A la luz de los problemas discutidos en los párrafos anteriores, en esta tesis se propone estudiar un conjunto de observables difractivos exclusivos basados en fotoproducción. Este trabajo se centra en mesones pesados porque su masa introduce una escala dura natural incluso para fotones casi reales ($Q^2 = 0$), lo que permite mantener una cinemática favorable sin

imponer restricciones adicionales. En particular, la presencia de una escala dura asociada a la masa del cuarkonio evita la aparición de singularidades no integrables[2], que pueden señalar una ruptura de la factorización colineal en canales con mesones ligeros (por ejemplo, en la producción exclusiva de $\pi^0\gamma$) [46]. Además, al tratarse del mismo tipo de observable en un rango amplio de energías, se abre la posibilidad de comparar de manera controlada la transición entre los regímenes de x_{Bj} moderada y x_{Bj} pequeña. Con este objetivo, se estudia la fotoproducción exclusiva de pares fotón–cuarkonio pesado en los canales

$$\gamma + p \to \gamma + \eta_c + p, \qquad \gamma + p \to \gamma + \chi_{cJ} + p\,,$$

los cuales están mediados por un intercambio C-par (pomerón) y se considera como blanco el protón. Desde el punto de vista fenomenológico, esta elección reduce incertidumbres no perturbativas que, en la práctica, son mucho mayores para blancos nucleares: (i) en el marco de las GPDs, aunque existe un formalismo teórico para construir las GPDs nucleares [47,48], no hay parametrizaciones globales comparables en constricción experimental con las disponibles para el protón; (ii) en el CGC se usan extensiones a núcleos pero la amplitud dipolar nuclear y su perfil en parámetro de impacto están menos definidos y suelen depender de "ansatz" y modelos con ajustes limitados [49, 50].

Adicionalmente, la presencia de un fotón extra en el estado final no es un detalle técnico sino una ventaja conceptual: permite el acceso a una clase amplia de distribuciones diferenciales y asimetrías. Por un lado, aparecen nuevas variables angulares continuas en el espacio de fases, cuyas distribuciones aportan información independiente. Por otro lado, se pueden construir observables basados en estados de polarización (combinaciones helicidad-helicidad o asimetrías de espín), que seleccionan estructuras distintas del subproceso duro. En conjunto, estas dos vías (dependencias angulares y selectores de polarización) aumentan la capacidad de discriminar mecanismos y de poner a prueba las estructuras perturbativas y no perturbativas.

La elección de $\gamma\eta_c$ y $\gamma\chi_{cJ}$ es también deliberada. En la amplitud de fotoproducción a LO, el fotón inicial tiene $C = -1$, por lo tanto el intercambio en el canal t está determinado por la paridad de carga de las partículas producidas en el estado final. Por ejemplo, para $\gamma J/\psi$, dado que $C(J/\psi) = -1$, resulta $C(\gamma J/\psi) = +1$. En consecuencia, este proceso no puede tener un intercambio con $C = +1$ en el canal t y queda asociado a intercambios con $C = -1$, en particular al odderón. En muchos escenarios fenomenológicos el odderón resulta subdominante, ya sea por un acoplamiento efectivo pequeño al protón y/o por efectos no lineales a x_{Bj} pequeña que tienden a suprimir su contribución en la región de saturación [51]. En cambio, los canales $\eta_c\gamma$ y $\chi_{cJ}\gamma$ permiten contribuciones dominantes C-pares (pomerón), lo que los hace particularmente favorables desde el punto de vista experimental y para realizar estudios sistemáticos de la estructura gluónica del blanco. Un rasgo adicional, específico de la familia χ_{cJ}, es la existencia de varios estados con espines distintos y masas cercanas. Esto permite diseñar

[2]En el desarrollo de esta tesis se verificará explícitamente esta propiedad para los canales estudiados

pruebas internas particularmente informativas: manteniendo una cinemática comparable, se puede analizar cómo cambian las secciones eficaces diferenciales y las distribuciones angulares al variar J, lo que ofrece un control sobre la sensibilidad a proyecciones de espín/helicidad y sobre la estructura del subproceso duro.

Finalmente, estos canales son también relevantes en el marco de los estudios a x_{Bj} pequeña que complementan la tomografía gluónica "estándar" basada en intercambios C-par. En particular, la producción exclusiva de η_c y χ_{cJ} se ha propuesto como una de las vías más prometedoras para acceder a las contribuciones C-impares (asociadas al odderón) en colisiones electrón-hadrón [52–55], y el programa del EIC ha renovado el interés en observables basados en cuarkonios pesados, tanto en su rol de herramientas de estructura como para aislar posibles contribuciones no convencionales en el sector gluónico [28]. En este contexto, los canales $\eta_c\gamma$ y $\chi_{cJ}\gamma$ cumplen un rol importante porque pueden representar un fondo relevante para las búsquedas del odderón si el fotón asociado no se reconstruye. Esto puede ocurrir, por ejemplo, debido a que la aceptancia de los detectores de fotones es menor que la unidad y depende de la región cinemática. Por tanto, resulta necesario identificar las regiones cinemáticas dominantes y caracterizar la señal a nivel de distribuciones (en particular, en variables angulares y en momentos transferidos), con el fin de evaluar y controlar este fondo. En conjunto, el estudio sistemático de la fotoproducción exclusiva de pares fotón–cuarkonio pesado ofrece una excelente oportunidad para: (i) realizar pruebas del tratamiento de cuarkonios pesados en cromodinámica cuántica no relativista (NRQCD por sus siglas en inglés), aprovechando que se trata de la misma topología exclusiva pero con diferentes estados finales (η_c y el multiplete χ_{cJ}) y (ii) proporcionar predicciones directamente relevantes para el programa experimental de los próximos años, en particular para el EIC y para el LHC en colisiones ultraperiféricas (donde se usan las predicciones en el régimen de x_{Bj} pequeña basadas en el CGC).

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan los marcos teóricos y las herramientas necesarias. Primero se resume la factorización colineal para procesos exclusivos y su formulación en términos de las GPDs. Luego se introduce el modelo a x_{Bj} pequeña basado en el CGC, enfatizando las cantidades no perturbativas relevantes y su conexión con observables exclusivos. En la sección 3 se derivan las amplitudes y secciones eficaces para los canales $\eta_c\gamma$ y $\chi_{cJ}\gamma$ en dos regímenes complementarios: (i) dentro de la factorización colineal (con GPDs gluónicas) y (ii) en el marco de x_{Bj} pequeña (CGC). En la sección 4 se presentan los resultados numéricos y su interpretación fenomenológica, incluyendo distribuciones diferenciales, dependencias angulares y estimaciones para cinemáticas relevantes en el EIC y en colisiones ultraperiféricas en el LHC. Por último, en la sección 5 se resumen las conclusiones principales. Finalmente, en el Apéndice A se presentan las expresiones explícitas de las funciones de coeficiente, omitidas en el texto principal por su extensión.

Los resultados presentados en esta tesis han sido publicados parcialmente en [56–58].

2. Herramientas teóricas para el cálculo de procesos exclusivos

En esta sección se introducen las herramientas teóricas que se utilizan a lo largo de la tesis para describir procesos exclusivos difractivos en dos regímenes cinemáticos complementarios. En el marco de la factorización colineal, la dinámica no perturbativa del blanco se parametriza en términos de las GPDs y el subproceso duro se calcula perturbativamente. A x_{Bj} pequeña se utiliza el formalismo de CGC, donde la información no perturbativa se codifica en la amplitud dipolar.

En todo el manuscrito se trabaja en unidades naturales con $\hbar = c = 1$ y se adopta la notación de coordenadas de cono de luz, donde para un 4-vector $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ se definen $v^\pm = (v^0 \pm v^3)/\sqrt{2}$ y $\mathbf{v}_\perp = (v^1, v^2)$, de modo que $v^\mu = (v^+, v^-, \mathbf{v}_\perp)$ y el producto escalar se escribe como $v \cdot w = v^+ w^- + v^- w^+ - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{w}_\perp$.

2.1. Factorización colineal y las GPDs

En QCD, la factorización colineal constituye una descripción sistemática de la amplitud como una expansión en potencias de $\lambda \equiv \Lambda_{\mathrm{QCD}}/Q$, donde Q es una escala dura que permite separar un subproceso de corta distancia (calculable en QCD perturbativa) de la dinámica de larga distancia. Bajo condiciones estándar (en particular, la organización de los grados de libertad relevantes en regiones de momento duro y suave, y la ausencia de contribuciones que generen correlaciones no factorizables), los teoremas de factorización establecen que, a orden dominante en λ, la contribución líder se puede escribir como una convolución entre un coeficiente duro y un elemento hadrónico universal que parametriza la física no perturbativa [3,4]. En esta descripción, el hadrón se describe como un sistema compuesto por constituyentes partónicos (cuarks y gluones) que, en un sistema de referencia donde el hadrón posea un gran impulso longitudinal, transportan fracciones de dicho momento. La información sobre su dinámica de larga distancia se codifica en correladores universales definidos en el cono de luz, cuyos límites apropiados reproducen las PDFs y, en cinemática no diagonal, las GPDs [3,10,59].

Las contribuciones dominantes provienen de configuraciones en las cuales el momento del partón activo (es decir, el constituyente que participa directamente en el subproceso duro, mientras que el resto forma el remanente espectador descrito por el elemento no perturbativo) es casi paralelo al momento del hadrón: su componente longitudinal es de gran magnitud, mientras que su momento transversal y su virtualidad están controlados por escalas hadrónicas. En una base de cono de luz con dos vectores nulos $n_+ = (1, 0, \mathbf{0}_\perp)$, $n_- = (0, 1, \mathbf{0}_\perp)$ tales que $n_+^2 = n_-^2 = 0$ y $n_+ \cdot n_- = 1$, el momento del partón activo, colineal al hadrón que se mueve en la dirección «+», escala como

$$k^\mu \sim Q\big(1,\ \lambda^2,\ \boldsymbol{\lambda}\big), \qquad k^2 \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}^2, \tag{2.1}$$

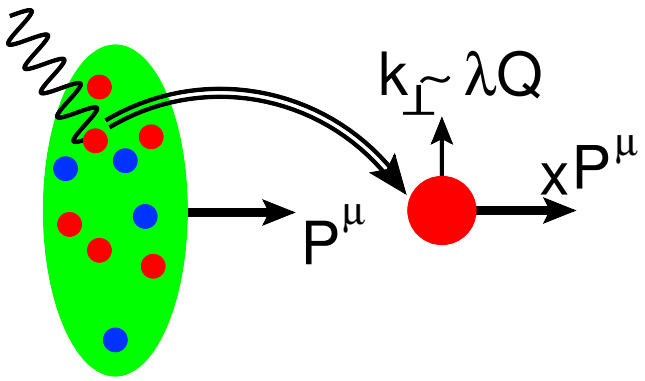


Figura 1: Descomposición del momento del partón activo en coordenadas de cono de luz; la componente paramétricamente pequeña $k^- = \mathcal{O}(\Lambda^2_{\rm QCD}/Q)$ se omite en el esquema.

mientras que el subproceso duro está caracterizado por Q^2 [60]. Esta jerarquía permite realizar una expansión controlada en potencias de λ: a orden dominante, la parte perturbativa resulta insensible a $\mathbf{k}_\perp$ y a k^-, las cuales aparecen como correcciones de orden superior (expansión de twist [3]).

De forma equivalente, se puede formular la descomposición cinemática

$$k^\mu = x\,P^\mu + \boldsymbol{k}^\mu_\perp + k^-\,n^\mu, \qquad x = \frac{k^+}{P^+}, \tag{2.2}$$

donde P^μ es el momento del hadrón. La variable x se interpreta como la fracción longitudinal del momento del hadrón que transporta el partón activo, mientras que $\boldsymbol{k}^\mu_\perp$ parametriza su movimiento transversal intrínseco dentro del hadrón (véase la Fig. 1). Esta descomposición permite formular de manera precisa lo que se entiende por aproximación colineal: en la sección dura se sustituye el momento del partón por su proyección longitudinal dominante, $k^\mu \to x\,P^\mu$, mientras que las dependencias residuales en $\boldsymbol{k}^\mu_\perp$ y en k^- se organizan sistemáticamente como correcciones de twist superior, suprimidas por potencias de λ. En este sentido, los efectos del movimiento transversal intrínseco y de las correlaciones multipartón no se excluyen, sino que se parametrizan en objetos no perturbativos de orden superior cuando se requiere una precisión más allá del orden dominante.

Con las ideas generales de la factorización colineal establecidas, se pasa ahora al ejemplo más simple, que sirve como referencia para las construcciones posteriores: los procesos inclusivos. En un proceso inclusivo no se impone una restricción detallada sobre el estado final hadrónico (se efectúa la suma sobre todos los estados X posibles), de modo que el observable depende de un número reducido de variables externas y resulta insensible a la estructura del remanente hadrónico. Un ejemplo canónico es la DIS: $e^-(k) + p(P) \to e^-(k') + X$ (véase el panel izquierdo de la Fig. 2), donde se mide el leptón dispersado y se efectúa la suma sobre el estado hadrónico X. En el régimen con una escala dura $Q^2 = -q^2 \gg \Lambda^2_{\rm QCD}$, con $q = k - k'$, el teorema

de factorización para la sección eficaz total permite formular la contribución dominante como

$$\sigma\big(e^- p \to e^- X\big) = \sum_{i=q,\bar{q},g} \int_0^1 dx\; \hat{\sigma}_i(e^- p \to e^- X)\, f_{i/p}(x,\mu) \;+\; \mathcal{O}\big(\lambda^2\big)\,, \tag{2.3}$$

donde $\hat{\sigma}_i\big(e^- p \to e^- X\big)$ es el coeficiente de corta distancia (calculable en serie en la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s(\mu)$) asociado a la dispersión sobre un partón de tipo i que transporta una fracción longitudinal x del protón. Dicho coeficiente depende de la escala dura Q y de la escala de renormalización μ, mientras que la función $f_{i/p}(x,\mu)$ constituye la PDF correspondiente. En la práctica, se elige típicamente una escala μ del orden de Q para evitar la aparición de factores logarítmicos grandes, como $\ln(Q^2/\mu^2)$, en el coeficiente duro y mejorar la convergencia de la expansión perturbativa [3,61]. La dependencia residual en la escala μ de las PDFs se encuentra gobernada por ecuaciones de renormalización que toman la forma de las ecuaciones de evolución de Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi (DGLAP) [62–64]

$$\frac{d}{d\ln\mu^2} f_{i/p}(x,\mu) = \frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \sum_{j=q,\bar{q},g} \int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{ij}\left(\frac{x}{z}\right)\, f_{j/p}(z,\mu)\,, \tag{2.4}$$

donde $P_{ij}(y)$ representan las funciones de división o *splitting* (kernels de evolución) calculables perturbativamente. En términos físicos, $P_{ij}(y)\,dy$ cuantifica la probabilidad diferencial de que un partón de tipo j emita radiación colineal y se "resuelva" como un partón de tipo i que porta una fracción y del momento longitudinal del partón del cual procede. La convolución en (2.4) implementa que un partón observado con fracción x se puede originar a partir de un partón más energético, tras una cadena de emisiones colineales [3,61].

En el nivel intuitivo del modelo de partones, $f_{i/p}(x,\mu)$ se interpreta como una densidad en la fracción longitudinal x: $f_{i/p}(x,\mu)\,dx$ proporciona el número medio de partones del tipo i con $x \in [x, x+dx]$ a la escala μ. En particular, para cuarks la diferencia cuark–anticuark obedece la regla de suma

$$\int_0^1 dx\, \Big[f_{q/p}(x,\mu) - f_{\bar{q}/p}(x,\mu)\Big] = N_q, \tag{2.5}$$

con $N_u = 2$ y $N_d = 1$ en el protón [3,61].

La definición rigurosa de las PDFs se formula en términos de elementos de matriz de operadores bilocales sobre el cono de luz. En primer orden en λ, toda la dependencia no perturbativa del hadrón puede aislarse en un subgrafo colineal universal. Una vez identificada esta contribución colineal, esta se puede representar como un correlador de campos separados a lo largo de una dirección de cono de luz, cuya transformada de Fourier proyecta la fracción longitudinal x. Para mantener la invariancia de gauge, los campos separados se deben conectar mediante una línea de Wilson [3,65]. Por ejemplo, para cuarks no polarizados en un protón:

$$f_{q/p}(x,\mu) = \int \frac{dz^-}{4\pi}\, e^{ixP^+z^-}\, \langle p|\, \bar{\psi}(0)\, \gamma^+\, W[0,z^-]\, \psi(z^-)\, |p\rangle. \tag{2.6}$$

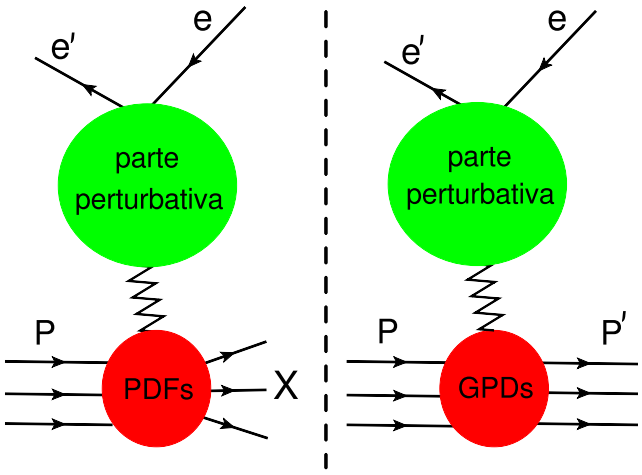


Figura 2: Comparación esquemática entre dispersión ep inclusiva y exclusiva. **Izquierda:** proceso inclusivo (DIS), en el que el protón se disocia y el estado hadrónico final se trata de forma inclusiva (se indica como X). **Derecha:** proceso exclusivo, en el que el protón permanece intacto pero cambia su 4-momento ($P \to P'$) y se produce un estado final especificado.

La presencia de dos campos, $\bar{\psi}(0)$ y $\psi(z^-)$, refleja precisamente que se trata de un correlador bilocal: en la descripción partónica, esta formulación corresponde a extraer un cuark del hadrón y reinsertarlo, de modo que se mantiene la coherencia con el estado hadrónico.

La definición (2.6) constituye, en esencia, un elemento de matriz diagonal en el momento del hadrón, $\langle p|\cdots|p\rangle$, adecuado para los observables inclusivos. Sin embargo, los procesos exclusivos requieren la descripción de una situación en la que el hadrón permanece intacto pero cambia su 4-momento $P \to P'$ (la cual se ilustra esquemáticamente en la Fig. 2). El análogo natural de (2.6) en esa cinemática se obtiene sustituyendo el elemento de matriz diagonal por uno no diagonal, $\langle p'|\cdots|p\rangle$, lo que conduce de forma directa a las GPDs, las cuales constituyen el objeto apropiado en la descripción colineal de procesos exclusivos. En este caso, surgen nuevas variables cinemáticas: el momento transferido $\Delta = P' - P$ y su cuadrado $t = \Delta^2$, así como el momento promedio $\bar{P} = (P + P')/2$. La interacción con el blanco también modifica la componente longitudinal del protón. Por lo tanto, además de la variable t, es esencial caracterizar la desviación de la transición respecto al límite hacia adelante. Esta desviación se cuantifica mediante la asimetría longitudinal (*skewness*), definida como

$$\xi \equiv \frac{P^+ - P'^+}{P^+ + P'^+} = -\frac{\Delta^+}{2\bar{P}^+}\,. \tag{2.7}$$

La variable ξ cuantifica el desbalance del momento longitudinal entre los estados inicial y final: $\xi = 0$ corresponde al límite hacia adelante (*forward limit*), mientras que valores crecientes de la variable ξ representan una transición con un carácter no diagonal cada vez más de manifiesto. En la región física con $P^+ > 0$ y $P'^+ > 0$ se cumple que $0 \leq \xi < 1$ (por convención, se toma habitualmente $\xi \geq 0$).

La generalización natural de las PDFs consiste en promover el correlador bilocal en el cono

de luz a un elemento de matriz no diagonal (no forward), evaluado entre estados hadrónicos con momentos distintos [66,67]. En QCD, sin embargo, el operador bilocal $\bar{q}(-z/2)\,\Gamma\,q(z/2)$ no es invariante de gauge por sí solo. Por eso, se deben conectar ambos puntos mediante un enlace de Wilson (o línea de gauge), que resume la interacción de gauge a lo largo de la trayectoria y garantiza la invariancia de gauge [10, 59]. En notación compacta, dicho enlace se define como la exponencial ordenada de trayectoria

$$W[a,b] \equiv \mathcal{P}\exp\left[ig_s\int_b^a d\zeta\; A_a^+(\zeta)t^a\right], \tag{2.8}$$

donde g_s constituye la constante de acoplamiento fuerte (con $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$), t^a representa los generadores de SU(3), $\mathcal{P}$ denota el ordenamiento a lo largo de la trayectoria, mientras que $A^\mu(x)$ constituye el campo gluónico.

Con esta prescripción, el correlador quiral-par no polarizado de cuarks se define como [10]

$$F^q(x,\xi,t) \equiv \int \frac{dz^-}{4\pi}\, e^{ix\,\bar{P}^+z^-}\,\left\langle p'\left|\bar{q}\Big(-\frac{z}{2}\Big)\,\gamma^+\,W\Big[-\frac{z}{2},\frac{z}{2}\Big]\;q\Big(\frac{z}{2}\Big)\right|p\right\rangle\Bigg|_{z^+=0,\;\mathbf{z}_\perp=\mathbf{0}}. \tag{2.9}$$

Para un blanco de espín 1/2, la descomposición más general compatible con las simetrías a twist dominante involucra dos estructuras de Dirac independientes, las cuales definen las GPDs H^q y E^q:

$$F^q(x,\xi,t) = \frac{1}{2\bar{P}^+}\,\bar{u}(p')\left[\gamma^+\,H^q(x,\xi,t) + \frac{i\sigma^{+\mu}\Delta_\mu}{2m_p}\,E^q(x,\xi,t)\right]u(p)\,, \tag{2.10}$$

donde m_p es la masa del protón y $\sigma^{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$.

De forma análoga se definen las GPDs gluónicas mediante el operador de campo [10]:

$$F^g(x,\xi,t) \equiv \frac{1}{\bar{P}^+}\int \frac{dz^-}{2\pi}\, e^{ix\,\bar{P}^+z^-}\,\left\langle p'\left|F^{+\mu}\Big(-\frac{z}{2}\Big)\;W\Big[-\frac{z}{2},\frac{z}{2}\Big]\;F^+_{\ \mu}\Big(\frac{z}{2}\Big)\right|p\right\rangle\Bigg|_{z^+=0,\;\mathbf{z}_\perp=\mathbf{0}}, \tag{2.11}$$

y su descomposición a twist dominante define H^g y E^g:

$$F^g(x,\xi,t) = \frac{1}{2\bar{P}^+}\,\bar{u}(p')\left[\gamma^+\,H^g(x,\xi,t) + \frac{i\sigma^{+\mu}\Delta_\mu}{2m_p}\,E^g(x,\xi,t)\right]u(p)\,. \tag{2.12}$$

Cabe señalar que el conjunto completo de las GPDs a twist dominante es más amplio. Además de los sectores vectoriales (quiral-par) H y E, existe el sector axial (quiral-par) definido mediante el operador con $\gamma^+\gamma_5$, el cual introduce las GPDs de helicidad $\widetilde{H}$ y $\widetilde{E}$. Asimismo, hay GPDs quiral-impares ("de transversidad") asociadas a estructuras de tipo $\sigma^{+i}\gamma_5$, usualmente denotadas por H_T, E_T, $\widetilde{H}_T$ y $\widetilde{E}_T$ [10,59]. El acceso experimental a estas distribuciones requiere, por lo general, observables sensibles a la polarización y, en muchos canales, contribuciones subdominantes o asimetrías con estadística más exigente (véanse, por ejemplo, propuestas para acceder a GPDs de transversidad en reacciones exclusivas [68, 69]). Como se mostrará en las secciones siguientes para los procesos fotón-cuarkonio considerados, a orden líder en α_s

la dinámica está dominada por la GPD gluónica no polarizada H_g . Por estas razones, no se discutirán en detalle las GPDs de helicidad ni las quiral-impares (de transversidad). En lo que sigue, el análisis se centrará en el sector quiral-par a twist dominante y en particular en las GPDs gluónicas.

A diferencia de las PDFs, las GPDs dependen simultáneamente de tres variables cinemáticas: la fracción longitudinal x, la asimetría ξ y el momento transferido t. Esta dependencia adicional codifica información mucho más rica que la contenida en las PDFs: las GPDs proporcionan una "imagen 3D" del hadrón al correlacionar el momento longitudinal de los partones con su distribución en el plano transversal [10, 59, 70]. En general, para $\xi \neq 0$ las GPDs no admiten una interpretación probabilística tan directa como las PDFs. El correlador no forward puede interpretarse como un solapamiento (o interferencia) entre configuraciones partónicas distintas del protón: aparece el producto $\psi^*_{x+\xi}\,\psi_{x-\xi}$, en contraste con el caso forward de las PDFs, donde se obtiene $|\psi_x|^2$ y surge una interpretación de densidad de probabilidad [71]. Sin embargo, existe una interpretación particularmente transparente en el caso $\xi = 0$. Por ejemplo, para una transferencia de momento puramente transversal, la transformada de Fourier respecto de $\Delta_\perp$ permite interpretar $H(x, 0, -\Delta_\perp^2)$ como una densidad de partones en el espacio del parámetro de impacto $\mathbf{b}_\perp$ [70, 72].

A pesar de esta mayor complejidad, las GPDs se conectan con objetos bien conocidos en ciertos límites, lo que ofrece restricciones importantes para su construcción y parametrización. Al tomar el límite hacia adelante, $\Delta \to 0$ (esto es, $t \to 0$ y $\xi \to 0$), el elemento de matriz se vuelve diagonal y las GPDs se reducen a las PDFs:

$$H^q(x,0,0) = \begin{cases} q(x), & x > 0, \\ -\bar{q}(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad H^g(x,0,0) = x\,g(x)\,, \tag{2.13}$$

donde el caso $x < 0$ codifica la contribución de los anticuarks. Por el contrario, las GPDs de tipo E multiplican en (2.10) y (2.12) una estructura de cambio de helicidad del protón $\sigma^{+\mu}\Delta_\mu$, la cual resulta explícitamente proporcional a la transferencia Δ. Por lo tanto, en el límite estrictamente forward ($\Delta \to 0$) esta contribución desaparece del correlador y no se puede identificar con ninguna PDF: E describe información genuinamente nueva asociada a las transiciones no diagonales y a la estructura del momento angular del blanco [10, 59]. Esta misma estructura implica una supresión cinemática a pequeños valores de t, de modo que en muchos observables no polarizados la contribución de E resulta subdominante. Por lo tanto, el acceso a E se investiga habitualmente en observables de espín, tales como asimetrías con blanco polarizado [73].

La presencia de una asimetría ξ conduce a que el dominio de variación de la variable $x \in [-1, 1]$ se divida naturalmente en tres regiones cinemáticas con interpretaciones físicas distintas [10] (esta estructura se ilustra esquemáticamente en la Fig. 3). Cuando $|x| > \xi$, ambos partones (el inicial y el final) poseen momentos longitudinales del mismo signo: ambos

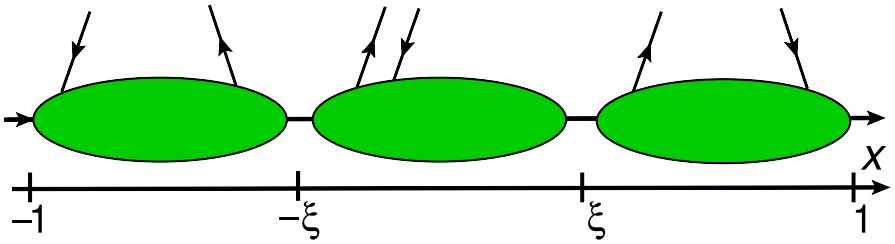


Figura 3: Estructura por regiones de las GPDs en la variable x.

positivos (si $x > \xi$) o ambos negativos (si $x < -\xi$). En este caso, la GPD describe el proceso de emisión y posterior reabsorción de un partón por el blanco, lo cual es topológicamente equivalente a la dinámica descrita por las PDFs. Estas regiones se denominan regiones de DGLAP y su evolución está gobernada por ecuaciones análogas a la ecuación (2.4). Una situación fundamentalmente distinta surge en la región central $|x| < \xi$, conocida como la región de ERBL (Efremov-Radyushkin-Brodsky-Lepage) [10]. En este régimen, uno de los partones tiene momento positivo y el otro negativo, lo que puede interpretarse como la emisión simultánea de un par cuark-anticuark (o dos gluones) por el nucleón. Desde el punto de vista físico, la GPD en esta región se comporta de manera similar a una amplitud de distribución (DA, por sus siglas en inglés) de un mesón, describiendo la transición del nucleón hacia el estado final mediante la formación de una configuración de partones coherente.

La evolución ERBL sigue siendo una ecuación integral de tipo convolución y, en ese sentido, es formalmente análoga a la evolución DGLAP. Sin embargo, el significado del kernel es diferente: no puede interpretarse simplemente como una probabilidad de división ("splitting", por analogía con $P_{ij}(y)$ en (2.4)), sino que se entiende como un kernel de renormalización (dimensiones anómalas) de los operadores en la cinemática no forward [10, 74]. En particular, se puede mostrar que la evolución de las distribuciones no forward puede formularse a partir de la ecuación del grupo de renormalización de operadores de cono de luz, de modo que las ecuaciones tipo DGLAP y tipo ERBL emergen como límites cinemáticos de un mismo objeto [74].

Hasta aquí se han introducido las GPDs como correladores no forward en el cono de luz, se ha discutido su estructura por regiones (DGLAP/ERBL), y se ha enfatizado que su dependencia en la escala se encuentra controlada por la renormalización de operadores (lo cual unifica, en distintos límites cinemáticos, las ecuaciones tipo DGLAP y ERBL). Sin embargo, para utilizar este formalismo en cálculos de amplitudes y secciones eficaces es necesario disponer de una representación explícita de las GPDs en función de (x, ξ, t) a una escala de referencia, compatible con las restricciones generales y con la información experimental disponible. En aplicaciones fenomenológicas, las GPDs se deben modelar o ajustar con una cantidad limitada de datos y cumplir restricciones teóricas que guían cualquier parametrización razonable [10, 59] (algunas de estas restricciones ya se han comentado anteriormente; a continuación se resaltan otras condiciones especialmente relevantes para la construcción de parametrizaciones):

- **Simetrías:** las GPDs satisfacen relaciones de simetría que dependen del tipo de operador (vectorial, axial, transversal). Para el sector quiral-par no polarizado, se cumplen las siguientes relaciones:

$$H(x,\xi,t) = H(x,-\xi,t), \qquad E(x,\xi,t) = E(x,-\xi,t), \tag{2.14}$$

junto con

$$H^g(-x,\xi,t) = H^g(x,\xi,t), \qquad E^g(-x,\xi,t) = E^g(x,\xi,t). \tag{2.15}$$

- **Reglas de suma:** los momentos en la variable x de las GPDs están relacionados con factores de forma del hadrón. En particular, los primeros momentos reproducen los factores de forma electromagnéticos del nucleón. De manera análoga, los segundos momentos proporcionan acceso a los factores de forma del tensor energía-momento, que codifican la distribución de momento, espín y las propiedades mecánicas del hadrón [66,67,75,76]. Estas relaciones imponen correlaciones no triviales entre la normalización en x y el perfil en t de cualquier parametrización.

- **Polinomialidad:** los momentos de Mellin en la variable x de una GPD de twist–2 son polinomios en ξ de grado acotado por el orden del momento. Para $n \geq 1$,

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^{n-1}\, F(x,\xi,t) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}(t)\, \xi^k, \tag{2.16}$$

donde F denota genéricamente una GPD quiral-par no polarizada. Esta propiedad refleja la invariancia de Lorentz del elemento de matriz no forward: al expandir el operador no local del cono de luz en una torre de operadores locales simétricos y sin traza, cada momento queda descrito por un número finito de estructuras tensoriales, lo que se traduce en una dependencia polinómica en ξ para cada momento [67, 77].

- **Positividad:** las GPDs deben satisfacer condiciones de positividad, las cuales se obtienen al considerar la positividad de la norma de combinaciones lineales de estados hadrónicos generados por operadores de cuarks y gluones. Estas desigualdades relacionan a las GPDs con las PDFs y proporcionan restricciones no triviales sobre la forma de cualquier parametrización. En particular, para las GPDs no polarizadas del nucleón se han derivado relaciones específicas para H y E, tanto en el sector de cuarks como en el de gluones [78,79]. En el caso general, estas relaciones presentan una forma compleja. Sin embargo, para $\xi = 0$ su interpretación resulta más transparente en la representación del parámetro de impacto [70]. Dado que en esta tesis el análisis se centrará principalmente en las GPDs gluónicas, se introduce en este límite

$$\mathcal{H}^g(x,\boldsymbol{b}_\perp) = \int \frac{d^2\boldsymbol{\Delta}_\perp}{(2\pi)^2}\, e^{-i\boldsymbol{b}_\perp\cdot\boldsymbol{\Delta}_\perp} H^g(x,0,-\boldsymbol{\Delta}_\perp^2). \tag{2.17}$$

En esta representación, la positividad impone restricciones sobre estas distribuciones: en particular, la densidad gluónica no polarizada debe ser no negativa

$$\mathcal{H}^g(x, \boldsymbol{b}_\perp) \geq 0. \tag{2.18}$$

Existen también desigualdades análogas que involucran simultáneamente H^g y E^g, pero su forma explícita es más complicada y no se escribirán aquí.

En los primeros desarrollos fenomenológicos de las GPDs se adoptó la estrategia de partir de las PDFs conocidas y extenderlas al caso no forward mediante hipótesis simples para la dependencia en ξ y t. En su versión más elemental, esto condujo al estudio del límite de asimetría cero (*zero skewness*), en el cual la dependencia de las GPDs se asocia principalmente al momento transferido t en el límite $\xi \to 0$. En particular, en este límite se explota que la restricción diagonal (*forward*) fija de manera directa la dependencia en la variable x, $F(x, 0, 0) = f(x)$, donde $f(x)$ es la PDF correspondiente (con la convención apropiada para cuarks o gluones). De este modo, el enfoque tenía como objetivo maximizar el contenido "conocido" (proveniente de la DIS) y relegar la información genuinamente no diagonal (*no forward*) a una elección para la dependencia en t (y, en extensiones de pequeñas asimetrías (*skewness*), a una prescripción controlada para ξ) [80–82]:

$$F(x, \xi, t) \xrightarrow{\xi \to 0} F(x, 0, 0)\, A(t). \tag{2.19}$$

En formulaciones más refinadas para $\xi \ll 1$ se introduce a veces un factor de asimetría (*skewness*), $R(\xi)$ [81]. Sin embargo, en general la dependencia en la variable ξ no se reduce a una simple factorización, sino que modifica la estructura en x [82]. Este tipo de *ansatz* resulta de utilidad como estimación inicial para valores pequeños de ξ, pero resulta insuficiente cuando se requiere una descripción global consistente en (x, ξ), en cuyo caso la relación simple con las PDFs deja de ser automática y se deben introducir construcciones más estructuradas [82,83].

El siguiente paso conceptual consistió en proponer una construcción práctica que implemente de forma automática las propiedades generales de las GPDs en una parametrización. Una herramienta especialmente eficiente la constituye la representación en términos de distribuciones dobles (DDs), introducida por Radyushkin y desarrollada en paralelo a la formulación de Ji para distribuciones no forward [66, 67]. En esta representación, el objeto fundamental que se parametriza no es directamente una GPD $F(x, \xi, t)$, sino una función $f(\beta, \alpha, t)$ (la cual constituye una DD). La GPD se obtiene entonces como la proyección lineal

$$F(x, \xi, t) = \int_{-1}^{1} d\beta \int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|} d\alpha\, \delta(x - \beta - \xi\alpha)\, f(\beta, \alpha, t). \tag{2.20}$$

Aquí β se asocia a la fracción longitudinal respecto del momento promedio del hadrón, mientras que α parametriza cómo se distribuye el momento transferido longitudinal entre los partones. La ventaja práctica no radica en reemplazar una función desconocida por otra, sino en que la

forma (2.20) permite imponer diversas propiedades. Para analizar cómo interviene la información diagonal (*forward*), resulta de utilidad considerar primero $t = 0$. En este caso, el límite $\xi \to 0$ implica que la proyección de la DD sobre x viene dada por

$$F(x, 0, 0) = \int_{-1+|x|}^{1-|x|} d\alpha \; f(x, \alpha, 0). \tag{2.21}$$

Esta relación fija solamente la integral en α de la DD, pero no determina de manera única su forma como función de α: distintas funciones $f(x, \alpha, 0)$ pueden presentar la misma proyección integrada y, por tanto, reproducir el mismo $F(x, 0, 0)$. En otras palabras, en el límite $\xi = 0$ la variable α queda "no resuelta" y se debe modelar. Una manera natural de proceder consiste en separar el contenido con mayor grado de caracterización y describir el resto mediante un perfil en α. Por este motivo, se introduce el *ansatz* factorizado de tipo "PDF $\times$ perfil"

$$f(\beta, \alpha, 0) = f_{\mathrm{PDF}}(\beta)\, \pi(\beta, \alpha), \qquad \int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|} d\alpha \; \pi(\beta, \alpha) = 1, \tag{2.22}$$

de modo que el límite forward se satisface por construcción y la deformación en la variable ξ queda controlada por la elección del perfil $\pi(\beta, \alpha)$ [82].

La extensión a $t \neq 0$ requiere una hipótesis adicional sobre la correlación entre t y las variables longitudinales, puesto que el formalismo de la DD por sí solo no fija cómo debe depender $f(\beta, \alpha, t)$ de la variable t. Una posibilidad consiste en asumir una factorización simple en t o, alternativamente, la introducción de una parametrización de tipo Regge. En este esquema, la distribución diferencial en t adquiere una pendiente más pronunciada al aumentar la energía (o, de forma equivalente, al disminuir x_{Bj}), lo cual se parametriza mediante una pendiente exponencial

$$\frac{d\sigma}{dt} \;\propto\; e^{-\,b(W)\,|t|}, \qquad b(W) = b_0 + 4\,\alpha' \,\ln\!\left(\frac{W}{W_0}\right), \tag{2.23}$$

donde $W \equiv W_{\gamma p}$ es la energía en el centro de masas del sistema γp y W_0 representa una escala de referencia. El incremento de $b(W)$ con W se observa experimentalmente, por ejemplo, en la producción exclusiva de mesones vectoriales en HERA, lo cual permite extraer α' mediante ajustes a los datos [32, 84, 85].

Una realización concreta de un marco basado en las DDs, complementado con una dependencia en t de tipo Regge, lo constituye el modelo de Goloskokov-Kroll (GK). Este modelo se desarrolló y contrastó inicialmente en el análisis de la producción exclusiva de mesones vectoriales (ρ, ϕ, ω) para un conjunto amplio de observables [86–88]. Posteriormente, este marco se extendió a canales pseudoescalares y a efectos de transversidad [89–91]. Para los objetivos de este trabajo, el interés práctico del modelo GK radica en dos aspectos. Por un lado, constituye una parametrización de GPDs ajustada y restringida por una amplia base de datos de producción exclusiva de mesones, con capacidad para describir la dependencia en Q^2, W y t de numerosos observables. Por otro lado, y de forma especialmente relevante para esta tesis,

el modelo de GK proporciona la parametrización del sector gluónico, en especial de las GPDs no polarizadas $H^g(x,\xi,t)$ y $E^g(x,\xi,t)$ [88], las cuales controlan la contribución dominante en procesos difractivos sensibles a gluones en el régimen de x_{Bj}.

En la parametrización de GK se introduce una DD para cada contribución partónica $i =$ {gluón, cuark del mar, cuark de valencia},

$$f_i(\beta,\alpha,t) = e^{b_i t}\,|\beta|^{-\alpha_i' t}\,h_i(\beta)\,\frac{\Gamma(2n_i+2)}{2^{2n_i+1}\Gamma^2(n_i+1)}\,\frac{\left[(1-|\beta|)^2-\alpha^2\right]^{n_i}}{(1-|\beta|)^{2n_i+1}}, \tag{2.24}$$

de modo que la GPD correspondiente $H^i(x,\xi,t)$ se obtiene insertando f_i en la proyección DD (2.20). La fracción con funciones Γ (función gamma de Euler) no introduce una dependencia adicional, su función consiste en fijar la normalización del perfil en la variable α para un valor dado de n_i. Por otra parte, la dependencia en t se modela mediante el factor $e^{b_i t}|\beta|^{-\alpha_i' t} = \exp\left[t\,(b_i + \alpha_i' \ln(1/|\beta|))\right]$, el cual introduce una correlación entre la variable t y la variable β, lo que se manifiesta en una pendiente en t más pronunciada en la región de x_{Bj} pequeña. El límite (*forward*) en la ec. (2.24) se implementa al fijar $h_i(\beta)$ en términos de las PDFs. Para gluones no polarizados se emplea [88]

$$h_g(\beta) = |\beta|\,g(|\beta|). \tag{2.25}$$

En la parametrización (2.25) se inserta de forma directa la PDF gluónica $g(x)$, de modo que se heredan las tendencias fenomenológicas de $g(x)$ (en particular, el crecimiento hacia valores de x_{Bj} menores). De este modo, la información longitudinal principal se ancla en ajustes globales de las PDFs, mientras que la dependencia no forward se controla mediante un conjunto reducido de parámetros del "ansatz" (2.24) (como b_i, α_i', etc.), fijados por ajustes a datos experimentales.

En resumen, el modelo de GK proporciona una parametrización de las GPDs compatible con las restricciones estructurales de la formulación en las DDs, con una dependencia en t motivada fenomenológicamente, y restringida por un amplio conjunto de datos de producción exclusiva. En esta tesis se empleará esta parametrización para modelar la GPD gluónica no polarizada $H^g(x,\xi,t)$ en el régimen de x_{Bj} intermedio pertinente a la fotoproducción exclusiva de pares cuarkonio-fotón. El modelo de GK permite incorporar, de igual modo, la GPD gluónica $E^g(x,\xi,t)$. En muchos análisis a x_{Bj} pequeña su contribución se descarta en observables no polarizados y se prevé que resulte numéricamente reducida [87, 88]. Sin embargo, para los cálculos de mayor precisión, en esta tesis se incluirá E^g siguiendo la construcción explícita a partir de las DDs de forma análoga a la ec. (2.24), así como las restricciones de positividad y las reglas de suma propuestas por Goloskokov y Kroll [92].

Tras analizar las GPDs a nivel formal, se pasa a la siguiente etapa: mostrar cómo estas funciones intervienen en los observables físicos. En la fotoproducción exclusiva a twist dominante, la amplitud se escribe como una convolución entre un núcleo duro calculable en QCD perturbativa y las GPDs del blanco. En lo que sigue, se presenta esta formulación en el marco

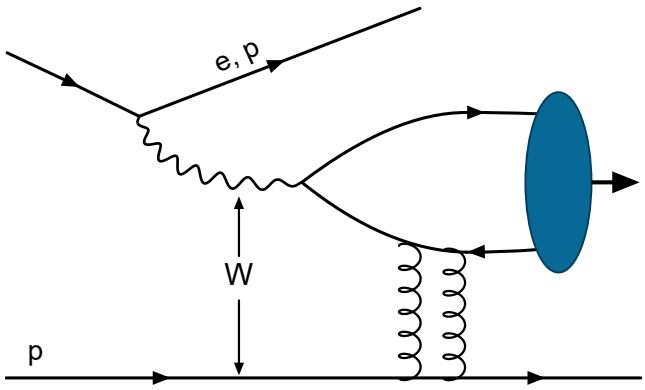


Figura 4: Esquema del proceso exclusivo $\gamma p \to V\, p$ a energía W del sistema γp.

de la factorización colineal y se discuten los aspectos técnicos del cálculo del coeficiente perturbativo para la amplitud: su definición, la estructura de singularidades, y la dependencia en la escala de factorización.

2.2. Fotoproducción exclusiva en el marco de la factorización colineal

La descripción de procesos exclusivos difractivos en términos de las GPDs se apoya, como ya se discutió anteriormente, en la existencia de una escala dura que justifica la aplicabilidad de la factorización colineal. En lo que sigue el análisis se centrará en la fotoproducción exclusiva de cuarkonio pesado, donde la escala dura está fijada por la masa del cuarkonio. El caso de referencia es el canal exclusivo

$$\gamma p \to J/\psi\, p, \tag{2.26}$$

que es particularmente conveniente desde el punto de vista teórico. La Fig. 4 muestra un esquema del mecanismo difractivo dominante para este tipo de procesos.

El J/ψ es un estado con paridad $C = -1$, y en fotoproducción esto implica que el intercambio en el canal t debe tener $C = +1$. En la región de alta energía esto selecciona el intercambio difractivo tipo pomerón, mientras que contribuciones con $C = -1$, como el intercambio de odderón o de un fotón, está prohibido por la conservación de la C-paridad[3]. Además, el canal (2.26) es especialmente atractivo desde el punto de vista experimental, ya que el J/ψ posee modos de decaimiento leptónicos limpios y fáciles de reconstruir [93], por ejemplo, $\mathcal{B}(J/\psi \to \mu^+\mu^-) \simeq 5{,}96\,\%$, lo que permite reconstruir el J/ψ a partir de un par de muones, los cuales se identifican con alta pureza en los detectores modernos.

El interés teórico por el canal (2.26) como herramienta para explorar el contenido gluónico del protón a x_{Bj} pequeña se consolidó con los tratamientos perturbativos de la fotoproducción difractiva de cuarkonio pesado. En particular, en un trabajo seminal, Ryskin mostró que, en el límite de pequeño $|t|$ y a energías altas, la sección eficaz depende de manera directa de la

[3]También son posibles intercambios reggeónicos con $C = +1$ asociados a estados mesónicos (p. ej. f/a), pero su contribución es típicamente suprimida a energías medias y altas frente al intercambio pomerónico.

distribución gluónica del protón, lo que puede resumirse esquemáticamente como [94]

$$\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t\simeq 0} \propto \left[x\, g(x,\mu^2)\right]^2 . \tag{2.27}$$

Aunque esta aproximación captura correctamente la idea física de que la amplitud está controlada por la PDF gluónica a x_{Bj} pequeña y explica cualitativamente el crecimiento de la sección eficaz con la energía, su formulación en términos de las PDFs es, en general, insuficiente para una descripción sistemática de un proceso exclusivo [95]. En un canal exclusivo el protón cambia su momento ($t \neq 0$) y, de forma esencial, la distribución partónica que interviene es *no forward*: los gluones que entran y salen del blanco llevan fracciones longitudinales distintas, lo que introduce *skewness* y exige un objeto no perturbativo más general que $g(x)$.

Estas cuestiones se tratan en el marco de la factorización colineal para procesos exclusivos, donde la amplitud hadrónica se expresa como una convolución entre un bloque perturbativo de corta distancia y distribuciones partónicas generalizadas del blanco. En particular, para la fotoproducción exclusiva de J/ψ la representación factorizada fue establecida en [96]. A LO, la contribución dominante en la región de x_{Bj} pequeña proviene del canal gluónico, mientras que el análisis a un bucle permite incorporar correcciones radiativas y, además, contribuciones asociadas al sector singlete de cuarks [96]. Más recientemente, se han desarrollado formulaciones sistemáticas a NLO dentro del esquema $\overline{\mathrm{MS}}$ basadas en la evaluación completa de diagramas de Feynman [97].

En este marco teórico, la amplitud hadrónica se construye a partir de un bloque perturbativo y de un correlador gluónico *no forward* que codifica la estructura del protón. Más precisamente, el coeficiente duro se obtiene calculando la parte perturbativa con dos gluones colineales externos amputados, manteniendo abiertos sus índices de color y de Lorentz. La información no perturbativa necesaria para reconstruir la amplitud completa se introduce entonces a través del elemento de matriz *no forward* del sector gluónico del protón [96]

$$\begin{aligned}\int \frac{d\lambda\,(Pn_-)}{2\pi}\, e^{ix(Pz)} \langle p'|A^a_\mu(-z/2)\, A^b_\nu(z/2)|p\rangle\Big|_{z=\lambda n_-} &= \frac{-g_{\perp\mu\nu}\delta^{ab}}{2(N_c^2-1)} \\ &\times \frac{F^g(x,\xi,t)}{(x-\xi+i\varepsilon)(x+\xi-i\varepsilon)} .\end{aligned} \tag{2.28}$$

Aquí, el tensor transversal

$$g^{\mu\nu}_\perp = g^{\mu\nu} - \frac{n^\mu_+ n^\nu_- + n^\mu_- n^\nu_+}{n_+\cdot n_-} \tag{2.29}$$

proyecta cualquier estructura de Lorentz sobre el subespacio transversal ortogonal a n_+ y n_-, reproduciendo así el contenido de la suma sobre polarizaciones gluónicas transversales [59]. La amplitud hadrónica se obtiene entonces contrayendo el bloque perturbativo con el correlador *no forward* anterior. Al parametrizar este último en términos de la GPD gluónica, la amplitud toma la forma de una convolución con la distribución hadrónica correspondiente [96].

En LO la amplitud relevante para el canal gluónico se escribe en forma factorizada como una convolución en la fracción longitudinal partónica $x \in [-1,1]$. En este orden, la contribución

dominante proviene de la GPD gluónica, por lo que basta escribir explícitamente el término proporcional a $H_g(x,\xi,t)$ [96]:

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi\sqrt{4\pi\alpha}\, e_q\,(\epsilon_V^*\cdot\epsilon_\gamma)}{N_c}\left(\frac{\langle O_1\rangle_{J/\psi}}{m_c^3}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1} dx\; T_g(x,\xi)\, H_g(x,\xi,t)\,, \tag{2.30}$$

donde e_q es la carga eléctrica del cuark pesado en unidades de $|e|$ (en este caso, $e_q = e_c = 2/3$), N_c es el número de colores, α es la constante de estructura fina electromagnética y ϵ_γ y ϵ_V denotan los vectores de polarización del fotón y del J/ψ, respectivamente. El factor $\langle O_1\rangle_{J/\psi}$ parametriza la información no perturbativa asociada a la formación del estado ligado (y puede interpretarse, a este nivel, como un coeficiente numérico relacionado con el elemento de matriz de NRQCD). Finalmente, m_c denota la masa del cuark charm, que fija la escala dura que caracteriza al subproceso. El coeficiente gluónico puede expresarse en términos de la amplitud partónica $\gamma g \to (c\bar{c})\, g$ como

$$T_g(x,\xi) = \frac{\alpha_s}{(x-\xi+i\varepsilon)\,(x+\xi-i\varepsilon)}\,. \tag{2.31}$$

En el coeficiente $T_g(x,\xi)$ se desprecian las correcciones suprimidas por $M_{J/\psi}^2$; en otras palabras, se toma $t \to 0$ y $m_p \to 0$ (donde m_p es la masa del protón), manteniendo la dependencia en $t = \Delta^2$ únicamente en la GPD $H_g(x,\xi,t)$. Asimismo, se trabaja en el límite de fotoproducción real, $Q^2 = 0$, lo cual es natural desde el punto de vista experimental: en la aproximación de fotón equivalente el flujo de fotones virtuales está fuertemente concentrado en valores pequeños de Q^2 (esquemáticamente, $dN_\gamma/dQ^2 \propto 1/Q^2$) [20].

Un punto importante para la consistencia del formalismo es la estructura analítica de la convolución en x. En (2.31) aparecen dos singularidades simples dentro del dominio de integración: $x = \xi \quad$ y $\quad x = -\xi$ con la prescripción de Feynman indicada. Es crucial notar que estas singularidades son integrables y no generan una configuración que pudiera invalidar la factorización colineal. De hecho, los dos polos están en puntos distintos del eje ($x = \pm\xi$), y la prescripción $i\varepsilon$ define cómo deformar el contorno alrededor de cada uno de ellos.

Es importante enfatizar que la ausencia de singularidades no integrables en (2.31) no está garantizada en los procesos exclusivos. En fotoproducción exclusiva pueden surgir configuraciones cinemáticas en las que las singularidades del coeficiente duro y de los propagadores involucrados producen divergencias no integrables en la convolución colineal. Un ejemplo ilustrativo se encuentra en el análisis de twist-3 para la fotoproducción de cuarkonio pesado: en [98] se observa que, para ciertos canales (por ejemplo, la producción del mesón h_c a twist-3), la expresión contiene singularidades no integrables. Un ejemplo particularmente relevante aparece en un proceso muy cercano a los que se analizarán más adelante: la fotoproducción exclusiva de un par $\gamma\pi^0$ con la gran masa invariante, se ha demostrado que el canal gluónico de intercambio de dos gluones en el canal-t rompe la factorización colineal [46]. Este mecanismo produce singularidades no integrables que no pueden eliminarse mediante deformaciones de contorno ni reabsorberse en las GPDs. En este caso, sin embargo, la situación es diferente.

Como se mostrará más adelante, la presencia de un mesón pesado en el estado final modifica la estructura analítica del coeficiente duro: la masa del mesón pesado impide la formación de las singularidades no integrables en la cinemática considerada.

A la luz de lo anterior, en el presente trabajo se adoptará la misma estrategia utilizada en el caso canónico $\gamma p \to J/\psi\, p$ [96, 97]. En primer lugar, se calcula el subproceso perturbativo en el límite colineal y en la aproximación de cuark pesado, con dos gluones colineales externos amputados. A continuación, este resultado se contrae con el correlador gluónico *no forward* del protón, en la forma indicada en la ec. (2.28), lo que permite reconstruir la amplitud hadrónica dentro del formalismo de factorización colineal. Finalmente, al parametrizar dicho correlador en términos de las GPDs gluónicas, la amplitud se expresa como una convolución con la distribución hadrónica correspondiente; en la aproximación fenomenológica adoptada en esta tesis, se retendrá la contribución dominante asociada a $H_g(x, \xi, t)$.

Este marco teórico ha sido ampliamente utilizado en la literatura para describir la fotoproducción exclusiva de cuarkonios en el esquema colineal basado en las GPDs. A nivel fenomenológico, permite reproducir tanto la dependencia con la energía como la forma de la distribución diferencial en t en un amplio rango cinemático [73, 99, 100].

Sin embargo, el marco teórico basado en la factorización colineal presenta limitaciones importantes. Una de ellas es la gran incertidumbre asociada a la elección de las escalas de renormalización y factorización, que se manifiesta en fotoproducción de J/ψ a altas energías, donde la serie perturbativa puede volverse inestable a NLO. Este problema y su impacto en la descripción de los datos se analizan con más detalle en [101]. En el contexto de esta tesis, dicha limitación es menos crítica por dos razones. Primero, los resultados de esta tesis se presentarán a LO, donde la sensibilidad dominante está asociada a la elección de la escala de factorización μ_F y, por eso, es más moderada [101]. Segundo, en LO se adoptará una elección físicamente motivada de la escala de factorización, $\mu_F = m_c$. Se ha mostrado que con esta elección dobles logaritmos del tipo $\alpha_s \ln(1/\xi) \ln(\mu_F^2)$ quedan efectivamente reabsorbidos en la convolución de LO con la GPD, lo que mejora la estabilidad perturbativa de la predicción [102, 103].

Una limitación más fundamental aparece al ir hacia una pequeña x_{Bj}, un régimen inevitable en la descripción de procesos a altas energías, por ejemplo en el LHC, donde se exploran valores de x_{Bj} cada vez menores [36]. En este dominio surgen contribuciones dominadas por grandes logaritmos de alta energía, $\ln(1/x_{\mathrm{Bj}})$, que no se reordenan en la formulación colineal a orden fijo en α_s. Estos términos pueden dominar la serie perturbativa y requieren una reorganización del cálculo más allá de NLO, en la forma de una resumación de alta energía. Es importante subrayar que la evolución tipo DGLAP reordena sistemáticamente logaritmos colineales, mientras que los logaritmos de alta energía $\ln(1/x_{\mathrm{Bj}})$ requieren, en general, una resumación independiente [104]. En este sentido, no se trata sólo de mejorar una aproximación a orden fijo, sino de emplear un marco de alta energía que incorpore la dinámica colectiva de gluones a pequeña x_{Bj} y la evolución en rapidez (incluyendo, cuando corresponda, efectos no

lineales de saturación). Esto establece el puente conceptual hacia el formalismo del CGC, que se presentará a continuación.

2.3. Régimen de x_{Bj} pequeña: el modelo de CGC

Al aumentar la energía del sistema γp, se entra en la región de x_{Bj} pequeña, típicamente entendida como $x_{\mathrm{Bj}} < 10^{-2}$ [29]. En la fotoproducción exclusiva de cuarkonio pesado, el acceso a la región de x_{Bj} pequeña ocurre en un amplio rango de energías: en HERA se estudió $\gamma p \to J/\psi\, p$ en un amplio intervalo de energías, típicamente hasta $W \lesssim 290$ GeV (ZEUS) y hasta $W \lesssim 305$ GeV (H1) [30,31], mientras que en el LHC, a partir de la producción exclusiva en pp, se alcanza W del orden del TeV [36]. En consecuencia, a nivel de orden de magnitud, $x_{\mathrm{Bj}} \sim M_{J/\psi}^2/W^2$ puede descender muy por debajo de 10^{-3} (hasta $x_{\mathrm{Bj}} \sim 2\times 10^{-6}$ para la mayor energía efectiva). En este régimen, la aproximación colineal pierde su transparencia: en lugar de un fuerte ordenamiento colineal en $\boldsymbol{k}_\perp$ (característico de la evolución tipo DGLAP), la dinámica a x_{Bj} pequeña está dominada por emisiones gluónicas sin un ordenamiento colineal pronunciado y, por lo tanto, se requiere la resumación de logaritmos de alta energía que provienen de la integración sobre la rapidez de gluones en estados intermedios [29, 104].

En estas condiciones, la descripción en términos de partones casi colineales deja de ser la forma más adecuada de organizar la teoría: la dinámica a x_{Bj} pequeña está controlada por modos gluónicos separados en rapidez, y los efectos asociados a la radiación a alta energía se acumulan sistemáticamente cuando se incrementa W. Por eso, resulta natural adoptar un lenguaje efectivo que haga explícita esta estructura en rapidez y que permita describir el blanco en términos apropiados a x_{Bj} pequeña. En esta línea, el CGC ofrece un marco efectivo especialmente adecuado para formular la dinámica a x_{Bj} pequeña, haciendo explícita la separación en rapidez de los grados de libertad y proporcionando una descripción consistente del blanco en el límite de alta energía [5, 29, 104, 106].

Una característica clave del CGC es la separación de grados de libertad según su momento longitudinal (o, equivalentemente, su rapidez), introduciendo un corte Λ que distingue modos "rápidos" de x grande y modos "lentos" de x pequeña. Los modos rápidos se representan por una densidad efectiva de carga de color ρ^a, mientras que los modos lentos se describen por un campo gluónico semiclásico A^a_μ generado por las fuentes "rápidas". Por dilatación temporal, en el marco de reposo del blanco las fuentes asociadas a partones de x grande evolucionan muy lentamente comparadas con los modos gluónicos de x pequeña que se estudian explícitamente. En otras palabras, para la dinámica de los modos lentos, las fuentes rápidas pueden tratarse como aproximadamente fijas [106, 107]. Además, debido a la contracción de Lorentz, el blanco ultrarrelativista aparece como un sistema "aplanado" en la dirección del movimiento: su campo se concentra en una región estrecha de coordenada de cono de luz, lo que conduce a la imagen de un campo efectivo tipo lámina ("pancake") [107].

Para una configuración dada de fuentes ρ^a, el campo de gauge $A^a_\mu[\rho]$ se obtiene como

solución clásica de las ecuaciones de Yang–Mills con corriente externa [29, 106, 107]:

$$(D_\nu F^{\nu\mu})^a(x) = J^{\mu,a}(x), \qquad J^{\mu,a}(x) = \delta^{\mu+}\,\rho^a(x^-, \boldsymbol{x}_\perp), \tag{2.32}$$

donde D_ν es la derivada covariante en la representación adjunta de $SU(3)_c$. El factor $\delta^{\mu+}$ indica que la corriente del blanco está dominada por su componente "+", como corresponde a cargas de color que se mueven con velocidad ultrarelativista a lo largo de la dirección "+". En consecuencia, el campo gluónico generado por estas fuentes aparece, en el límite de alta energía, fuertemente localizado en la coordenada de cono de luz (y extendido en el plano transversal), lo que motiva la imagen de una lámina de color que el proyectil (por ejemplo $q\bar{q}$) atraviesa instantáneamente.

En el CGC, las configuraciones de ρ^a se describen estadísticamente mediante un funcional de peso $W_Y[\rho]$, que define un ensamble efectivo del blanco a una rapidez Y. Los observables se calculan promediando operadores funcionales del campo clásico sobre dicho ensamble:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_Y = \int \mathcal{D}\rho\, W_Y[\rho]\, \mathcal{O}[A_\mu[\rho]]\,. \tag{2.33}$$

Como consecuencia, la evolución con la energía se codifica en una evolución en Y del funcional $W_Y[\rho]$ [29, 106, 107].

En aplicaciones fenomenológicas, sin embargo, no se trabaja directamente con $W_Y[\rho]$: la información del blanco entra de forma más compacta a través de correladores de líneas de Wilson y, en particular, de la amplitud dipolar, que es el objeto que aparece en las amplitudes de dispersión. En este sentido, los modelos microscópicos para el ensamble del blanco son relevantes porque fijan una forma concreta para dichos correladores [106, 107]. Una elección particularmente famosa y exitosa en la fenomenología a x_{Bj} pequeña es el modelo de McLerran–Venugopalan (MV), que se usa frecuentemente como condición inicial del CGC [5, 108]: al ser numerosas y aproximadamente independientes, las contribuciones de las fuentes se suman como un paseo aleatorio en el espacio de color, lo cual conduce (por una versión funcional del teorema central del límite) a un funcional aproximadamente gaussiano. El MV asume una distribución gaussiana y local de las fuentes, sin correlaciones en las coordenadas longitudinales y transversales, y sin dirección preferida en el espacio de color. En su forma más utilizada [107], el funcional del MV se escribe como

$$W_{\mathrm{MV}}[\rho] \;=\; \mathcal{N}_{\mathrm{MV}}\, \exp\!\left[-\frac{1}{2}\int dx^-\, d^2\boldsymbol{x}_\perp\, \frac{\rho^a(x^-, \boldsymbol{x}_\perp)\,\rho^a(x^-, \boldsymbol{x}_\perp)}{\mu^2(x^-)}\right], \tag{2.34}$$

donde la constante de normalización $\mathcal{N}_{\mathrm{MV}}$ se fija por $\int \mathcal{D}\rho\, W_{\mathrm{MV}}[\rho] = 1$ y $\mu^2(x^-)$ controla la densidad de carga de color y fija la intensidad típica del campo gluónico clásico generado por el blanco [107, 108]. Para un núcleo grande, $\mu^2(x^-)$ crece con el espesor nuclear y, en aproximación geométrica simple, escala como $\mu^2 \propto A^{1/3}$. Esta propiedad hace que el MV sea un candidato natural para describir un blanco denso en el sentido clásico [106, 107].

Un punto importante es que el MV no pretende dar directamente observables, sino proporcionar una condición inicial a una cierta rapidez (o x_0) para el ensamble efectivo del blanco: a partir de $W_{\mathrm{MV}}[\rho]$ se construyen correladores de líneas de Wilson, y en particular el correlador dipolar que entra en los procesos de dispersión. En este sentido, el MV constituye un eslabón entre un modelo microscópico (fuentes clásicas) y una descripción efectiva del blanco a altas energías [106, 107]. Al mismo tiempo, conviene subrayar sus limitaciones prácticas: el MV no determina por sí solo la evolución en rapidez (que debe incorporarse posteriormente) ni fija de manera única la dependencia en el parámetro de impacto sin hipótesis adicionales sobre la geometría del blanco [29, 107]. Por lo tanto, en aplicaciones a procesos exclusivos como $\gamma p \to J/\psi\, p$, suele ser más eficiente parametrizar directamente la amplitud dipolar (o los correladores equivalentes) y dejar encapsulada en ella la información no perturbativa del blanco. Con este objetivo, el paso esencial consiste en especificar cómo un proyectil rápido (en particular, el dipolo $q\bar{q}$) interacciona con el campo de gauge efectivo A_μ del blanco, lo cual conduce a la aproximación eikonal. Para explicitar las razones cinemáticas que justifican esta aproximación, consideremos el caso relevante para la fotoproducción: la interacción de un proyectil rápido (el dipolo $q\bar{q}$) con el campo gluónico. En este proceso, el fotón fluctúa en un par $q\bar{q}$ antes de interactuar con el blanco. En cinemática de cono de luz se introduce la longitud de coherencia l_c, que define la distancia longitudinal a lo largo de la cual esta fluctuación se mantiene coherente. Para un estado $q\bar{q}$ se estima

$$l_c = \frac{2\nu}{Q^2 + M_{q\bar{q}}^2}, \tag{2.35}$$

donde ν y Q^2 son la energía y la virtualidad del fotón, y $M_{q\bar{q}}$ es la masa invariante del par [105]. Por ejemplo, para la fotoproducción de J/ψ con $Q^2 = 0$ y $W = 100$ GeV se obtiene $l_c \approx 220$ fm, mientras que el tamaño característico del protón es del orden de 1 fm. En este régimen, la fluctuación $\gamma \to q\bar{q}$ se forma y se propaga a escalas longitudinales mucho mayores que la extensión del blanco, por lo que, durante el cruce, la configuración transversal del dipolo puede tratarse como aproximadamente fija [109]. Además, en el límite de alta energía la interacción ocurre en un intervalo muy corto de tiempo, lo que permite idealizar el campo del blanco como una onda de choque instantánea [110].

Esta descripción del blanco como una onda de choque refleja una clara separación de escalas: mientras el cruce ocurre en un intervalo de tiempo muy corto, la evolución interna del proyectil puede ignorarse durante la interacción. Como consecuencia, el movimiento del proyectil se aproxima por una trayectoria rectilínea y la interacción con el campo se codifica en un factor eikonal. En estas condiciones, el efecto dominante de la interacción con el campo de gauge no es producir una gran desviación del proyectil ni una transferencia del momento, sino modificar su amplitud mediante la acumulación de una fase a lo largo del recorrido. Esta idea es completamente análoga a la aproximación eikonal en mecánica cuántica o en teoría de dispersión en un potencial externo, donde la amplitud se multiplica por un factor

$\exp\big[i\int dt\, V(\boldsymbol{x}(t))\big]$: en QCD el papel del "potencial" lo juega el campo de gauge A_μ y la fase se convierte en una matriz no abeliana en el espacio de color [110].

Más precisamente, un cuark rápido que atraviesa el campo del blanco a coordenada transversal fija $\boldsymbol{x}_\perp$ adquiere el factor eikonal descrito por una línea de Wilson. De hecho, esta línea es el caso particular del operador $W[a,b]$ definido en la ec. (2.8), cuando la trayectoria se toma a lo largo de x^- y con $\boldsymbol{x}_\perp$ fija. Para describir la dispersión, se toma la línea a lo largo de toda la trayectoria del proyectil [107]:

$$U(\boldsymbol{x}_\perp) \;\equiv\; W[+\infty,-\infty]\Big|_{\boldsymbol{x}_\perp} = \mathcal{P}\exp\left[ig_s\int_{-\infty}^{+\infty} dx^-\, A_a^+(x^-,\boldsymbol{x}_\perp)\,t^a\right]. \tag{2.36}$$

La interpretación física de la línea de Wilson es especialmente clara al expandir la exponencial:

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{x}_\perp) = \mathbf{1} &+ ig_s\int dx^-\, A_a^+(x^-,\boldsymbol{x}_\perp)\,t^a \\ &+ \frac{(ig_s)^2}{2!}\mathcal{P}\int dx_1^- dx_2^-\, A_a^+(x_1^-,\boldsymbol{x}_\perp)t^a\, A_b^+(x_2^-,\boldsymbol{x}_\perp)t^b + \cdots . \end{aligned} \tag{2.37}$$

de modo que el término de orden cero es la contribución trivial, mientras que el término de orden n en g_s contiene exactamente n inserciones del campo A_μ^+ en la línea del cuark. En consecuencia, la exponencial ordenada resume a todos los órdenes las interacciones múltiples del cuark con el campo del blanco durante el cruce de la onda de choque. Por analogía, un anticuark que atraviesa el blanco a coordenada transversal fija $\boldsymbol{y}_\perp$ adquiere el factor conjugado $U^\dagger(\boldsymbol{y}_\perp)$. En consecuencia, la dispersión eikonal de un dipolo $q\bar{q}$ se construye a partir de combinaciones invariantes de gauge de los factores U y $U^\dagger$ (cuya forma explícita introduciremos a continuación).

Para un gluón rápido el razonamiento es análogo, pero la línea de Wilson debe construirse en la representación adjunta, porque el gluón transforma según esta representación del grupo de color. En este caso [107]

$$U_A^{ab}(\boldsymbol{x}_\perp) = \left[\mathcal{P}\exp\left(ig_s\int_{-\infty}^{+\infty} dx^-\, A_c^+(x^-,\boldsymbol{x}_\perp)\,T^c\right)\right]^{ab}, \qquad (T^c)^{ab} = -if^{acb}, \tag{2.38}$$

donde T^c son los generadores en la representación adjunta y f^{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)_c$, definidas por $[t^a,t^b] = if^{abc}t^c$.

En la aplicación a la fotoproducción exclusiva de cuarkonio, el proyectil relevante es el dipolo $q\bar{q}$ producido por el fotón, con el cuark en la representación fundamental y el anticuark en la conjugada, de modo que la combinación física que participa en un proceso exclusivo es un singlete de color. En el límite eikonal, toda la información no perturbativa del blanco que entra en la amplitud queda encapsulada en correladores de dos líneas de Wilson en la representación fundamental, evaluados a coordenadas transversas fijas. En particular, se define la matriz S del dipolo como [106]

$$S_Y(\boldsymbol{x}_\perp,\boldsymbol{y}_\perp) \;=\; \frac{1}{N_c}\,\big\langle \mathrm{Tr}\big[U(\boldsymbol{x}_\perp)\,U^\dagger(\boldsymbol{y}_\perp)\big]\big\rangle_Y\,, \tag{2.39}$$

que puede interpretarse como la probabilidad de que el dipolo atraviese el campo gluónico del blanco sin ser dispersado. Aquí la notación $\langle\cdots\rangle_Y$ denota el promedio sobre el ensamble efectivo de campos de color del blanco a la rapidez Y, definido en la ec. (2.33). Este promedio es el punto de entrada de toda la información no perturbativa sobre la estructura gluónica del blanco y su evolución en Y

$$S_Y(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) \;=\; \frac{1}{N_c}\int \mathcal{D}\rho\, W_Y[\rho]\, \mathrm{Tr}\big[U_\rho(\boldsymbol{x}_\perp)\, U_\rho^\dagger(\boldsymbol{y}_\perp)\big]\,, \tag{2.40}$$

donde U_ρ se construye con el campo clásico $A_\mu[\rho]$ correspondiente a la configuración de fuentes ρ [29,106,107]. De este modo, toda la información no perturbativa sobre la estructura gluónica del blanco y su evolución queda codificada en $W_Y[\rho]$ y se transmite a los observables mediante correladores de líneas de Wilson. En general, para la matriz S definida en (2.39) se introduce la descomposición en componentes C-par (pomerón) y C-impar (odderón) [111]

$$\frac{1}{N_c}\left\langle \mathrm{Tr}\big[U(\boldsymbol{x}_\perp)\, U^\dagger(\boldsymbol{y}_\perp)\big]\right\rangle_Y \;=\; 1 - N_Y(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) + i\, O_Y(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp), \tag{2.41}$$

donde N_Y es C-par y O_Y es C-impar.

En los procesos considerados en esta tesis, la amplitud está dominada por intercambios C-pares en el canal t, de acuerdo con la discusión del capítulo introductorio. Por lo tanto, la contribución relevante del correlador dipolar es su parte real, y la cantidad que entra en las amplitudes se escribe como

$$N_Y(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp) \;=\; 1 - \mathrm{Re}\, S_Y(\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{y}_\perp), \tag{2.42}$$

mientras que la parte imaginaria, asociada al intercambio C–impar (odderón), no contribuye en el canal considerado. En la interpretación eikonal, N_Y puede entenderse como la probabilidad efectiva de dispersión del dipolo mediada por intercambios C-pares (tipo pomerón).

Para fijar la notación, conviene explicitar las variables de las que depende la amplitud dipolar (2.42). A partir de las coordenadas transversas del cuark y del anticuark, es natural introducir el vector de separación transversal del dipolo [106]

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{y}_\perp, \tag{2.43}$$

que describe el tamaño (y la orientación) del dipolo, y el parámetro de impacto

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{y}_\perp}{2},$$

que localiza el centro del dipolo en el plano transversal con respecto al blanco (véase la Fig. 5). En esta representación, la amplitud se escribe como $N_Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ (o equivalentemente $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$, con $Y \simeq \ln(x_0/x_{\mathrm{Bj}})$, según la convención adoptada).

La parametrización de $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ a una rapidez inicial tiene la forma fuertemente restringida por propiedades generales de la dispersión a alta energía y por la fenomenología

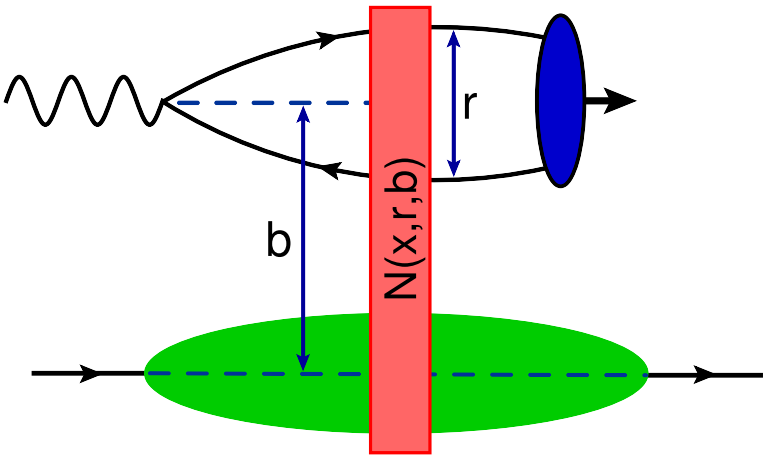


Figura 5: Variables geométricas que parametrizan la amplitud dipolar en el espacio transversal: el tamaño del dipolo $\boldsymbol{r}$ y su parámetro de impacto $\boldsymbol{b}$.

difractiva. En particular, la dependencia en $\boldsymbol{r}$ se fija por dos límites bien establecidos. Para dipolos pequeños ($r \to 0$), la neutralidad de color del par $q\bar{q}$ implica una cancelación de su interacción con el blanco nuclear: al colapsar el dipolo, el cuark y el anticuark se vuelven transparentes para el campo gluónico. En la formulación eikonal, esto se refleja en la expansión de las líneas de Wilson alrededor del centro del dipolo: el término lineal se cancela y la primera contribución no trivial es cuadrática en la separación, de donde se obtiene el comportamiento $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r} \to 0, \boldsymbol{b}) \propto r^2$ (transparencia de color) [106, 110, 112]. En el extremo opuesto, para dipolos suficientemente grandes (a Y y $\boldsymbol{b}$ fijos), la interacción con el campo gluónico del blanco se vuelve fuerte y la probabilidad de atravesarlo sin dispersión disminuye notablemente. En consecuencia, la matriz S tiende a cero y la amplitud dipolar satisface $N_Y \to 1$, lo que corresponde al límite de "disco negro".

La dependencia de $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ en el parámetro de impacto $\boldsymbol{b}$, por su parte, codifica la geometría transversal del blanco. En procesos exclusivos, esta geometría se proyecta sobre la distribución en momento transferido t (a través de la transformada de Fourier en $\boldsymbol{b}$), por lo que los datos de $d\sigma/dt$ proporcionan una restricción directa sobre el perfil en impacto. Esta conexión motivó el desarrollo de modelos dipolares con dependencia explícita en $\boldsymbol{b}$ (por ejemplo, los modelos tipo IP-Sat/bCGC), ajustados simultáneamente a observables inclusivos y exclusivos [38, 39].

La evolución en x_{Bj} de la amplitud dipolar no queda fijada por la geometría transversal del blanco, sino por la dinámica radiativa de QCD a alta energía. Al disminuir x_{Bj} (o, equivalentemente, al aumentar la rapidez Y), se abre un amplio espacio de fases en rapidez para emisiones gluónicas, y en la expansión perturbativa aparecen contribuciones grandes con logaritmos de energía. Entre ellas, en el límite de x_{Bj} pequeña, dominan los términos de la forma $(\alpha_s \ln(1/x_{\mathrm{Bj}}))^n$ [29]. Cuando el producto $\alpha_s \ln(1/x_{\mathrm{Bj}})$ deja de ser pequeño y se vuelve del orden de la unidad, la expansión a orden fijo en α_s deja de ser convergente, ya que contribuciones de

todos los órdenes en n pueden resultar igualmente importantes. En esta situación, se vuelve necesaria la resumación sistemática de los logaritmos dominantes de energía; dicha resumación conduce a la ecuación de Balitsky–Fadin–Kuraev–Lipatov (BFKL) [113–115]. A nivel diagramático, esta resumación está asociada a contribuciones de tipo "escalera": emisiones sucesivas fuertemente ordenadas en rapidez (pero no necesariamente en momento transversal) generan un factor logarítmico por cada intervalo de rapidez. En otras palabras, BFKL reorganiza la serie perturbativa en potencias de $\alpha_s \ln(1/x_{\rm Bj})$ y describe la evolución del intercambio gluónico C-par en el canal t en el límite de alta energía.

Dado que el objeto básico es la amplitud dipolar $N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, resulta natural escribir la ecuación BFKL en su formulación en coordenadas transversas (formalismo dipolar) [107]:

$$\frac{\partial N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2}\int d^2\boldsymbol{z}\,\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^2}\Big[N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + N_Y(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) - N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big]. \tag{2.44}$$

El núcleo de esta integral codifica la probabilidad de emisión en el límite de alta energía. En este sentido, BFKL es una ecuación de evolución en rapidez (análoga, en espíritu, a una ecuación de grupo de renormalización, aunque la variable de evolución es $Y \simeq \ln(1/x_{\rm Bj})$) [116]. Además, la estructura del núcleo refleja la cancelación entre contribuciones reales y virtuales, lo que asegura la consistencia probabilística de la evolución [107]. Esta ecuación captura la física esencial del régimen diluido a pequeño $x_{\rm Bj}$: la amplitud crece con la rapidez debido a la proliferación de emisiones gluónicas. Sin embargo, precisamente este crecimiento, que en el marco BFKL persiste al disminuir $x_{\rm Bj}$, señala el límite de validez de la evolución lineal como descripción completa, al entrar en contradicción con las restricciones de unitaridad de la amplitud de dispersión [110, 117]. Esta contradicción sugiere que, al disminuir suficientemente $x_{\rm Bj}$, la hipótesis de evolución puramente lineal deja de ser adecuada: la descripción en términos de emisiones gluónicas independientes debe complementarse con efectos no lineales de saturación, asociados a la recombinación efectiva de gluones, que frenan el crecimiento de la amplitud.

En el formalismo de líneas de Wilson, estos efectos no lineales se describen mediante la evolución en rapidez de correladores de líneas de Wilson de orden creciente (dos, cuatro, etc), que forman una cadena acoplada de ecuaciones conocida como jerarquía de Balitsky [109]. En general, la ecuación para un correlador dado involucra correladores de orden superior. En la aproximación de campo medio (esto es, al factorizar correladores de orden superior, lo cual se justifica en el límite de gran N_c), la jerarquía se cierra y se obtiene una ecuación cerrada para la amplitud dipolar, la ecuación de Balitsky-Kovchegov (BK) [107, 110, 118, 119]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2}\int d^2\boldsymbol{z}\,&\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^2}\\ &\times\Big[N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + N_Y(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) - N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - N_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\,N_Y(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\Big].\end{aligned} \tag{2.45}$$

La interpretación física de (2.45) puede resumirse esquemáticamente como se muestra en la Fig. 6. Los tres primeros términos entre corchetes reproducen precisamente la evolución lineal

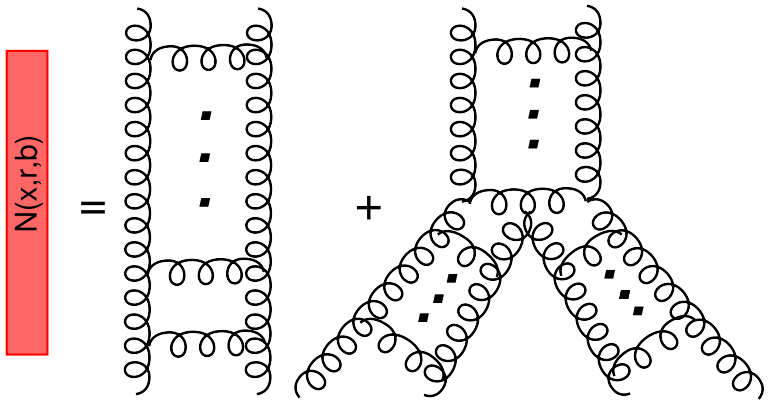


Figura 6: Esquema del contenido físico de la ecuación BK (2.45) para la amplitud dipolar $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ en el límite de x pequeña: una contribución lineal tipo BFKL (escalera) y una contribución no lineal tipo abanico asociada a la saturación.

tipo BFKL (estructura de escalera), responsable del crecimiento de la amplitud al aumentar Y. La diferencia esencial con BFKL es el término cuadrático $N_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\, N_Y(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, que introduce la corrección no lineal de saturación. En lenguaje diagramático, este término resume contribuciones tipo abanico, asociadas a efectos de la recombinación. Estos efectos compensan parcialmente el crecimiento generado por la evolución lineal y conducen a la unitarización de la amplitud dipolar. En este sentido, la ecuación BK puede verse como la extensión no lineal mínima de BFKL en el formalismo dipolar. Al mismo tiempo, BK conserva el límite diluido: cuando $N_Y \ll 1$, el término no lineal puede despreciarse y (2.45) se reduce a la ecuación BFKL (2.44). Esta propiedad asegura la compatibilidad entre la descripción perturbativa de pequeña densidad y la dinámica de saturación necesaria a energías suficientemente altas. Finalmente, aunque el núcleo integral de la ec. (2.44) parece singular cuando $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{y}$, la combinación completa entre términos del corchete garantiza la cancelación de estas singularidades en la evolución de una amplitud física, de modo que la ecuación resulta bien definida [107, 110].

A pesar de su papel central, la ecuación BK no tiene una solución analítica en la forma general. No obstante, se conocen propiedades asintóticas importantes de sus soluciones en distintos regímenes (diluido y de saturación), obtenidas mediante análisis asintótico y soluciones aproximadas [110, 120, 121]. Esto motiva el uso de parametrizaciones para la amplitud dipolar $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ que incorporan las restricciones generales discutidas arriba (transparencia de color, saturación, dependencia en $\boldsymbol{b}$ y comportamiento asintótico). Históricamente, los primeros modelos de saturación exitosos en el marco dipolar (como el modelo de Golec-Biernat–Wüsthoff) reprodujeron la transición entre el régimen diluido y el régimen saturado, y describieron correctamente una parte importante de los datos de DIS a x_{Bj} pequeña [122]. Una limitación importante de estos modelos para aplicaciones a procesos exclusivos es la ausencia de una dependencia realista en el parámetro de impacto $\boldsymbol{b}$ (crucial para la distribución en t) y, en su versión original, de una evolución explícita de la distribución gluónica [123]. En esta misma

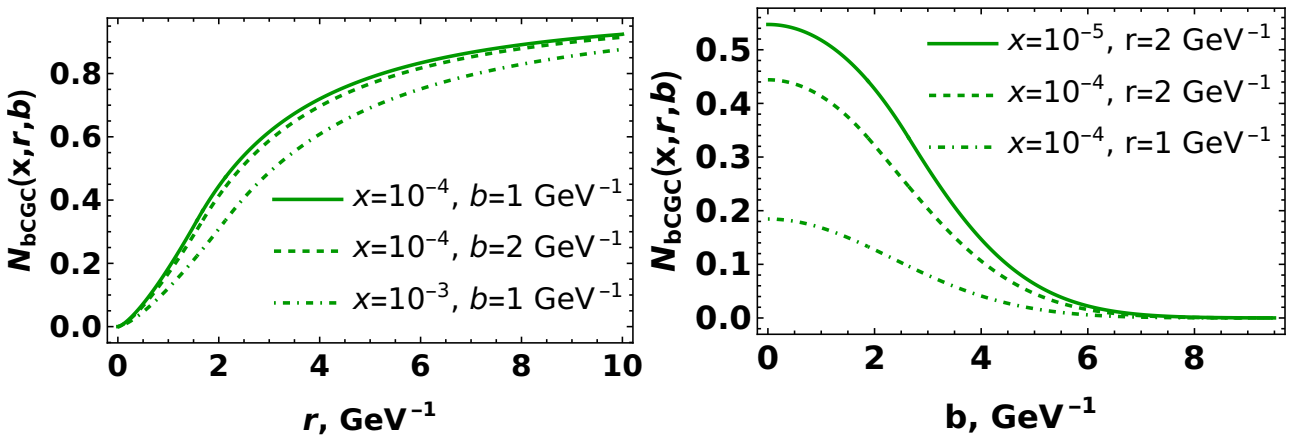


Figura 7: Dependencias de la amplitud dipolar en la parametrización bCGC. Panel izquierdo: $N_{\mathrm{bCGC}}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ como función del tamaño dipolar $\boldsymbol{r}$, mostrando la transición desde transparencia de color ($N \ll 1$ cuando $\boldsymbol{r} \to 0$) hacia el límite de disco negro ($N \to 1$ para valores grandes de $\boldsymbol{r}$). Panel derecho: $N_{\mathrm{bCGC}}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ como función del parámetro de impacto $\boldsymbol{b}$, reflejando el decaimiento exponencial del perfil transversal del blanco.

dirección, el modelo IP-Sat, introducido por Kowalski y Teaney [39], combina una densidad gluónica con evolución DGLAP con una unitarización eikonal de la amplitud dipolar, e incorpora además un perfil explícito en el parámetro de impacto del protón. Esta construcción lo hace especialmente útil para describir observables inclusivos y exclusivos.

En esta tesis, sin embargo, se adoptará la parametrización bCGC, ya que su construcción está motivada directamente por los comportamientos asintóticos esperados de la evolución no lineal tipo BK en los regímenes diluido y de saturación, e incorpora explícitamente la dependencia en el parámetro de impacto $\boldsymbol{b}$ [124, 125]. Esta elección resulta especialmente adecuada para el régimen de fotoproducción ($Q^2 \simeq 0$), donde la contribución de dipolos de tamaño intermedio y grande, así como la transición hacia saturación, desempeñan un papel central. Para formular esta interpolación de manera compacta, se introduce la escala de saturación $Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b})$, que fija la frontera entre el régimen diluido y el régimen no lineal. De forma cualitativa, para tamaños dipolares tales que $r\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b}) \ll 1$ domina la transparencia de color, mientras que para $r\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b}) \gtrsim 1$ los efectos de saturación se vuelven importantes. En otras palabras, Q_s crece al disminuir x_{Bj} (y depende de $\boldsymbol{b}$ a través de la geometría del blanco), cuantificando la escala transversal característica a partir de la cual la evolución lineal deja de ser suficiente.

En la parametrización bCGC, la amplitud dipolar se escribe en dos regiones, determinadas por la variable adimensional $r\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b})$, de la forma [124, 125]:

$$N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} N_0 \left(\dfrac{\boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b})}{2} \right)^{2\,\gamma_{\mathrm{eff}}} & \text{si } \boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b}) \leq 2, \\ 1 - \exp\Big[- A\, \ln^2\big(B\, \boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b})\big) \Big] & \text{si } \boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b}) > 2, \end{cases} \tag{2.46}$$

donde, $Y \equiv \ln\left(\frac{1}{x_{\rm Bj}}\right)$ y $\gamma_{\rm eff} = \left(\gamma_s + \frac{1}{\kappa\,\lambda\,Y}\,\ln\left(\frac{2}{\boldsymbol{r}\,Q_s(x_{\rm Bj},\boldsymbol{b})}\right)\right)$. La dependencia en $x_{\rm Bj}$ y en el parámetro de impacto se introduce mediante la escala de saturación local [42]

$$Q_s(x_{\rm Bj},\boldsymbol{b}) = \left(\frac{x_0}{x_{\rm Bj}}\right)^{\lambda/2} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{b}^2}{4\,\gamma_s\,B_{\rm CGC}}\right), \tag{2.47}$$

Los parámetros numéricos del modelo (N_0, γ_s, κ, λ, x_0 y $B_{\rm CGC}$) se toman del ajuste fenomenológico en [42].

La parametrización (2.46) incorpora explícitamente las propiedades físicas discutidas anteriormente. En la región diluida, la primera rama reproduce el comportamiento de transparencia de color, $N \ll 1$, y contiene además la corrección logarítmica del exponente efectivo, introducida para reproducir el comportamiento BFKL cerca de la frontera de saturación. En cambio, para $\boldsymbol{r}\,Q_s > 2$, la segunda rama aproxima el comportamiento esperado en el régimen de saturación profunda, donde la amplitud tiende al límite unitario $N \to 1$. La escala de saturación local $Q_s(x_{\rm Bj},\boldsymbol{b})$ crece al disminuir $x_{\rm Bj}$ y es mayor hacia la región central del blanco, $\boldsymbol{b} \to 0$, de modo que la transición entre ambos regímenes depende simultáneamente de la energía, del tamaño dipolar y de la geometría transversal. Por construcción, la parametrización es continua en el punto $\boldsymbol{r}\,Q_s = 2$, y los parámetros A y B quedan fijados por la continuidad de la amplitud y de su derivada logarítmica. La dependencia cualitativa de $N_{\rm bCGC}(x_{\rm Bj},\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$ en cada variable se ilustra en las Figs. 7 y 8.

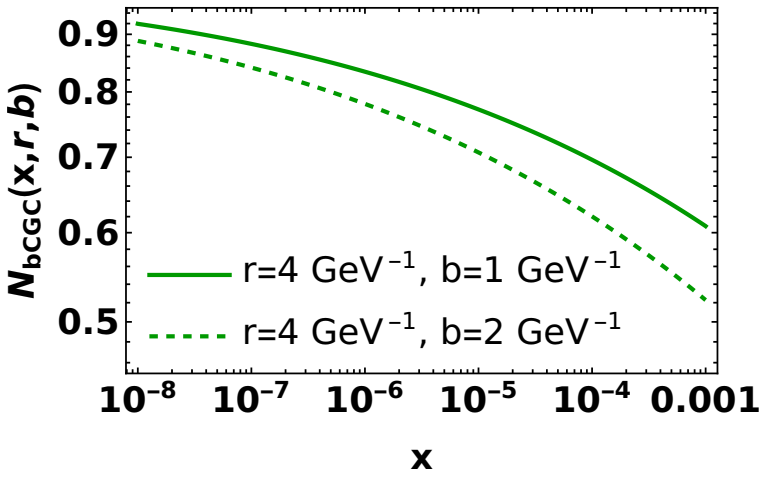


Figura 8: Dependencia en $x_{\rm Bj}$ de la amplitud dipolar en la parametrización bCGC: $N_{\rm bCGC}(x,\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$ como función de x. Al disminuir x, la amplitud crece y muestra una tendencia al aplanamiento, consistente con el régimen de saturación.

Hasta este punto se ha discutido la dinámica no perturbativa que controla la interacción a alta energía: cómo el campo gluónico del blanco, descrito en el marco CGC, queda encapsulado en correladores de líneas de Wilson y conduce a la amplitud dipolar $N(x_{\rm Bj},\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$, cuya evolución a $x_{\rm Bj}$ pequeña se organiza mediante las ecuaciones BFKL/BK. Para hacer más explícito el origen de la representación dipolar usada en la fenomenología, conviene considerar primero el

caso más simple de fotoproducción exclusiva de un mesón vectorial pesado,

$$\gamma + p \to V + p \tag{2.48}$$

En este proceso, el mecanismo dominante a alta energía consiste en la fluctuación del fotón en un par $q\bar{q}$, la dispersión eikonal de este dipolo sobre la onda de choque del blanco y la posterior proyección del estado $q\bar{q}$ sobre el mesón vectorial final (véase la Fig. 5). La interacción eikonal con el blanco se describe mediante las reglas de Feynman del CGC [126, 127]. Para un cuark y un anticuark con momentos ℓ, ℓ' antes y después de la interacción, los vértices efectivos toman la forma

$$T^{Q}_{\sigma,\sigma';\,i,i'} = 2\pi\delta(\ell_Q^+ - \ell_Q'^+)\,\gamma^+_{\sigma'\sigma}\int d^2\boldsymbol{z}\, e^{i(\boldsymbol{\ell}_Q - \boldsymbol{\ell}'_Q)\cdot\boldsymbol{z}}\,[U(\boldsymbol{z}) - 1]_{i'i}\,, \tag{2.49}$$

$$T^{\bar{Q}}_{\sigma,\sigma';\,i,i'} = -2\pi\delta(\ell_{\bar{Q}}^+ - \ell_{\bar{Q}}'^+)\,\gamma^+_{\sigma\sigma'}\int d^2\boldsymbol{z}\, e^{i(\boldsymbol{\ell}_{\bar{Q}} - \boldsymbol{\ell}'_{\bar{Q}})\cdot\boldsymbol{z}}\,\big[U^\dagger(\boldsymbol{z}) - 1\big]_{ii'}\,. \tag{2.50}$$

Aquí σ, σ' son índices de Dirac de la línea de cuark o anticuark, mientras que i, i' son índices de color en la representación fundamental del grupo $SU(N_c)$. Para el anticuark aparece la matriz conjugada hermítica $U^\dagger(\boldsymbol{z})$. El prefactor $2\pi\delta(\ell_i^+ - \ell_i'^+)$ $(i = Q, \bar{Q})$ expresa la conservación de la componente longitudinal "+" del momento en la aproximación eikonal: el partón atraviesa la onda de choque sin cambiar su gran momento longitudinal. El factor γ^+ refleja la forma eikonal del vértice fermión–gluón: en el límite de alta energía el campo del blanco está dominado por su componente A^-, y por eso la estructura $\gamma^\mu A_\mu$ se reduce a una contribución proporcional a $\gamma^+ A^-$. La dinámica no perturbativa del blanco queda entonces codificada en la línea de Wilson, mientras que la estructura espinorial del acoplamiento se simplifica drásticamente.

En las eqc. (2.49) y (2.50) los vértices se escriben con índices de Dirac abiertos. Por esta razón, aún no se ha hecho explícita su acción en la base de helicidad. Esta propiedad aparece solamente al insertar dichos vértices en la amplitud completa y contraerlos con los espinores asociados a las líneas de cuark y anticuark. Una vez que los numeradores de los propagadores se reescriben como sumas sobre estados intermedios, la estructura $\gamma^+_{\sigma'\sigma}$ queda proyectada sobre elementos de matriz del tipo $\bar{u}_{h'}(\ell')\gamma^+ u_h(\ell)$ o $\bar{v}_h(\ell)\gamma^+ v_{h'}(\ell')$. En ese paso se pueden usar las identidades [129]

$$\bar{u}_{h_1}(p)\gamma^+ u_{h_2}(q) = 2\delta_{h_1 h_2}\sqrt{p^+ q^+}, \qquad \bar{v}_{h_1}(p)\gamma^+ v_{h_2}(q) = 2\delta_{h_1 h_2}\sqrt{p^+ q^+}, \tag{2.51}$$

que muestran que la interacción eikonal con la onda de choque es diagonal en la base de helicidad y no cambia las coordenadas transversales.

A orden líder, la amplitud para (2.48) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\gamma p\to Vp} = e\,e_q \int d^2\boldsymbol{x}_0\, d^2\boldsymbol{x}_1 \int \frac{d^4k_0}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_0'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_1'}{(2\pi)^4}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_0 + k_1 - q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_0' + k_1' - p_V)\\ \times (2\pi)\delta(k_0^+ - k_0'^+)\,(2\pi)\delta(k_1^+ - k_1'^+)\,e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}_0')\cdot\boldsymbol{x}_0} e^{i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_1')\cdot\boldsymbol{x}_1}\,\phi_V\Big(z, \boldsymbol{k}_\perp^{(\mathrm{rel})}\Big)\\ \times \Big\langle \mathrm{Tr}\Big[\hat{\varepsilon}_\gamma(q)\,S(-k_1)\,\gamma^+\,U^\dagger(\boldsymbol{x}_1)\,S(-k_1')\,\Gamma_V^{(\lambda_V)}(k_1', k_0')\,S(k_0')\,\gamma^+\,U(\boldsymbol{x}_0)\,S(k_0)\Big]\Big\rangle_Y\,.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Aquí q y p_V son, respectivamente, los 4-momentos del fotón inicial y del mesón vectorial final. Las variables $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}_1$ denotan las coordenadas transversas del cuark y del anticuark en que atraviesan la onda de choque del blanco, de modo que la amplitud está escrita en una representación mixta: coordenadas transversas para la interacción con el blanco y momentos de cono de luz para los partones. Los momentos k_0 y k_1 corresponden al cuark y al anticuark en el estado intermedio generado por la fluctuación del fotón, mientras que k_0' y k_1' describen los momentos del par $q\bar{q}$ después de la interacción eikonal con el blanco y antes de su hadronización en el mesón final. El factor $\delta^{(4)}(k_0 + k_1 - q)$ expresa la conservación del 4-momento en la transición $\gamma \to q\bar{q}$, mientras que $\delta^{(4)}(k_0' + k_1' - p_V)$ implementa la conservación del 4-momento en la proyección del par sobre el estado mesónico. Por su parte, las $\delta(k_0^+ - k_0'^+)$ y $\delta(k_1^+ - k_1'^+)$ reflejan la conservación de la componente longitudinal "+" en la aproximación eikonal. Los factores exponenciales $e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}_0')\cdot\boldsymbol{x}_0}$ y $e^{i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_1')\cdot\boldsymbol{x}_1}$ aparecen al pasar a la representación mixta y relacionan la transferencia de momento transversal con las coordenadas transversas fijas de los partones al cruzar el blanco. El prefactor $e\, e_q$ proviene del acoplamiento electromagnético del fotón al cuark pesado, donde e es la carga elemental y e_q es la carga fraccionaria del cuark en unidades de e. La parte escalar de la función de onda del mesón se representa por $\phi_V\left(z, \boldsymbol{k}_\perp^{(\mathrm{rel})}\right)$, mientras que $\Gamma_V^{(\lambda_V)}(k_1', k_0')$ denota la estructura de Dirac que proyecta el estado $q\bar{q}$ sobre el mesón vectorial con helicidad λ_V. La variable

$$z = \frac{k_0'^+}{p_V^+} \tag{2.53}$$

es la fracción de momento longitudinal del mesón llevada por el cuark y $\boldsymbol{k}_\perp^{(\mathrm{rel})}$ es el momento relativo transversal del par $q\bar{q}$ en el estado final. Asimismo, $\hat{\varepsilon}_\gamma(q) \equiv \gamma^\mu \varepsilon_{\gamma,\mu}(q)$, con $\varepsilon_\gamma(q)$ el vector de polarización del fotón inicial, y $S(p)$ es el propagador fermiónico libre, cuya forma explícita se escribirá después.

Partiendo de la representación más elemental de la amplitud, como (2.52), y efectuando las integrales sobre las componentes "−" de los momentos internos, usando las funciones delta que fijan las componentes conservadas en la interacción eikonal, y reorganizando las cadenas espinoriales en términos de estados intermedios on-shell, la amplitud puede reescribirse en una forma mucho más compacta. El resultado de estas operaciones es la representación dipolar usual, en la cual toda la dinámica del blanco queda contenida en la amplitud dipolar, mientras que la parte dependiente del proyectil se expresa mediante el solapamiento de las funciones de onda en el frente de luz del estado inicial y del estado final.

En este sentido, la fórmula dipolar no debe entenderse como un postulado independiente, sino como una forma reorganizada del resultado a orden líder en el marco del CGC. Esta reorganización es conveniente porque permite separar de manera sistemática los bloques universales asociados al blanco de los bloques perturbativos asociados al proyectil. En la práctica, este lenguaje de funciones de onda es usual no sólo para la fenomenología a LO, sino también

para extensiones a NLO [44]. En particular, para la producción exclusiva $\gamma p \to Vp$ (con V un estado vectorial pesado), la amplitud puede escribirse como una convolución del solapamiento de funciones de onda del fotón y del estado final con la amplitud dipolar del blanco. En la notación estándar [38]

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma p \to Vp}(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2, \boldsymbol{\Delta}) = i \int d^2\boldsymbol{r} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} \int d^2\boldsymbol{b} \, \left(\Psi_V^\dagger \Psi_\gamma\right)_{T,L} e^{-i[\boldsymbol{b}-(1-z)\boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{\Delta}} \, N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}), \quad (2.54)$$

donde $\boldsymbol{\Delta}$ es el momento transferido ($t = -\boldsymbol{\Delta}^2$). La exponencial no forward refleja la relación entre la variable conjugada al momento transferido y la geometría transversal del dipolo.

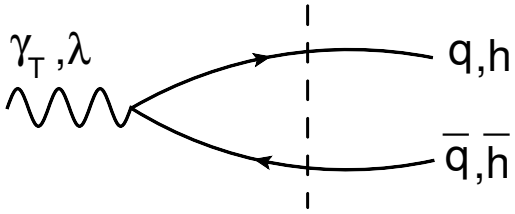


Figura 9: Diagrama correspondiente a la función de onda del fotón, con el vértice electromagnético y el denominador de energía del estado intermedio $q\bar{q}$ (línea discontinua).

El origen perturbativo de la función de onda del fotón puede entenderse a partir del diagrama de orden líder mostrado en la Fig. 9, que representa la transición $\gamma(q) \to q(k)\,\bar{q}(k')$. A orden líder, el numerador de esta amplitud está determinado por el vértice electromagnético

$$V_{h\bar{h},\lambda}^{\gamma \to q\bar{q}} = e\, e_q\, \bar{u}_h(k)\, \not{\epsilon}_\lambda(q)\, v_{\bar{h}}(k'), \quad (2.55)$$

donde e_q es la carga fraccionaria del cuark.

Al realizar la integración correspondiente sobre estas componentes, la contribución del estado intermedio adquiere la forma característica de la teoría de perturbaciones ordenada en el tiempo del cono de luz, en la que cada estado intermedio viene acompañado por un denominador de energía [129]. Para el estado intermedio $q\bar{q}$, este denominador está dado por

$$\mathrm{ED}_{q\bar{q}} \equiv q^- - k^- - k'^-. \quad (2.56)$$

Aquí k^- y k'^- se evalúan imponiendo la relación sobre la capa de masas para los partones intermedios,

$$k^- = \frac{\boldsymbol{k}^2 + m_q^2}{2k^+}, \qquad k'^- = \frac{\boldsymbol{k}'^2 + m_q^2}{2k'^+}. \quad (2.57)$$

Finalmente, la función de onda del fotón en espacio de momentos puede escribirse como

$$\Psi_{h\bar{h},\lambda}^{\gamma} = \frac{V_{h\bar{h},\lambda}^{\gamma \to q\bar{q}}}{\mathrm{ED}_{q\bar{q}}}. \quad (2.58)$$

Si además se introduce la descomposición longitudinal usual

$$k^+ = z\, q^+, \qquad k'^+ = (1-z)\, q^+, \qquad q^- = -\frac{Q^2}{2q^+},$$

el denominador de energía toma la forma

$$\mathrm{ED}_{q\bar{q}} = -\frac{\boldsymbol{k}^2 + m_q^2 + z(1-z)Q^2}{2z(1-z)q^+}. \tag{2.59}$$

Pasando ahora al espacio de coordenadas transversas mediante la transformación de Fourier con respecto a $\boldsymbol{k}$, se obtiene la representación $(z, \boldsymbol{r})$ de la función de onda del fotón. En la fotoproducción real de interés en esta tesis se tiene $Q^2 = 0$ y la contribución longitudinal se anula ya a orden líder, puesto que $\Psi_L^\gamma \propto Q$, mientras que la polarización transversal permanece finita. Por eso, la función de onda relevante para las aplicaciones fenomenológicas es la transversal, que en el límite del fotón real puede escribirse como [38]

$$\begin{aligned}\Psi^\gamma_{h\bar{h},\,\lambda=\pm1}(\boldsymbol{r}, z) = \pm e\, e_q \sqrt{2N_c}\, \Big\{ i\, e^{\pm i\theta_r} \big[z\, \delta_{h,\pm}\delta_{\bar{h},\mp} - (1-z)\, \delta_{h,\mp}\delta_{\bar{h},\pm} \big]\, \partial_r \\ + m_q\, \delta_{h,\pm}\delta_{\bar{h},\pm} \Big\}\, \frac{K_0(m_q r)}{2\pi},\end{aligned} \tag{2.60}$$

donde θ_r es el ángulo azimutal del vector $\boldsymbol{r}$ y $r \equiv |\boldsymbol{r}|$.

El análisis de (2.60) en distintos límites permite entender qué configuraciones dipolares dominan en la amplitud y cómo se regula el comportamiento de corta y larga distancia. Para $r \to 0$, la parte proporcional a $\partial_r K_0(m_q r)$ se comporta como $1/r$, mientras que el término proporcional a $K_0(m_q r)$ presenta sólo una singularidad logarítmica. Estas singularidades de corta distancia no generan divergencias en la amplitud física, ya que el factor dipolar satisface $N(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}) \sim r^2$ en el límite de transparencia de color, compensando el comportamiento singular de la función de onda en el origen. En el extremo opuesto, para $r \to \infty$, las funciones de Bessel modificadas decrecen exponencialmente, de modo que la función de onda del fotón suprime de forma natural dipolos muy grandes. Finalmente, en el caso $Q^2 = 0$ y $m_q \neq 0$, la función de onda del fotón no presenta singularidades cuando $z \to 0, 1$; cualquier sensibilidad a esas regiones proviene entonces del modelo adoptado para la función de onda del mesón, no de una divergencia intrínseca del factor fotónico.

Formalmente, la construcción de la función de onda del estado final exclusivo sigue la misma lógica que en el caso del fotón: se trata de una amplitud en el frente de luz asociada a una configuración partónica dada y calculada con las mismas reglas de perturbaciones en el cono de luz. La diferencia esencial es que, mientras la función de onda del fotón queda fijada por el vértice electromagnético, la del mesón depende de la descripción adoptada para el estado ligado. En esta tesis, la descripción del estado ligado se presentará en conexión directa con los casos concretos que se estudiarán en la sección siguiente. De este modo, la relación entre el subproceso perturbativo y el cuarkonio pesado observado se introducirá según los números cuánticos del estado final.

Con esto, la amplitud exclusiva en el marco del CGC se organiza en la forma factorizada de (2.54): el solapamiento de funciones de onda contiene la información perturbativa y dependiente del proceso, mientras que la dinámica no perturbativa del blanco queda codificada en la

amplitud dipolar $N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$. En particular, la dependencia energética (o, equivalentemente, en x_{Bj}) está controlada por la evolución de N, y la dependencia en el momento transferido se genera a través de la estructura en parámetro de impacto y de la fase no forward. Las funciones de onda, por su parte, fijan la sensibilidad a las escalas duras, a las masas de los cuarks, a la estructura de espín/helicidad y al reparto longitudinal de momento dentro del dipolo. Cuáles variables cinemáticas adquieren mayor relevancia depende del canal concreto, y se discutirá al realizar el cálculo de los procesos estudiados en esta tesis.

3. Cálculo de amplitudes para la fotoproducción exclusiva de pares fotón-mesón

En esta sección se derivarán las amplitudes para la fotoproducción exclusiva del proceso

$$\gamma(q) + p(P) \to \gamma(k) + \mathcal{Q}(p_{\mathcal{Q}}) + p(P'), \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{Q}$ denota, según el canal considerado, un estado de cuarkonio pesado del tipo η_c o χ_{cJ}. Antes de presentar el cálculo en los marcos de la factorización colineal y del CGC, conviene fijar la cinemática común. En lo que sigue se mantendrá la notación de coordenadas de cono de luz introducida en la Sección 2 y se trabajará en el sistema de colisión fotón-protón, en el cual el protón incidente y el fotón cuasirreal inicial se propagan en direcciones opuestas a lo largo del eje longitudinal, donde la masa del cuarkonio $M_{\mathcal{Q}}$ proporciona la escala dura que caracteriza al proceso. Asimismo, se utilizará el gauge de cono de luz $A^+ = 0$.

Con estas convenciones, la descomposición de los momentos puede escribirse como [132,133]

$$q^\mu = \left(\sqrt{\frac{s}{2}}, 0, \mathbf{0}_\perp\right), \tag{3.2}$$

$$P^\mu = \left(\frac{m_N^2}{\sqrt{2s}(1+\xi)}, (1+\xi)\sqrt{\frac{s}{2}}, \mathbf{0}_\perp\right), \tag{3.3}$$

$$P'^\mu = \left(\frac{m_N^2 + \boldsymbol{\Delta}_\perp^2}{\sqrt{2s}(1-\xi)}, (1-\xi)\sqrt{\frac{s}{2}}, \boldsymbol{\Delta}_\perp\right), \tag{3.4}$$

$$\Delta^\mu = P'^\mu - P^\mu = \left(\frac{2\xi m_N^2 + (1+\xi)\boldsymbol{\Delta}_\perp^2}{\sqrt{2s}(1-\xi^2)}, -2\xi\sqrt{\frac{s}{2}}, \boldsymbol{\Delta}_\perp\right), \tag{3.5}$$

$$p_{\mathcal{Q}}^\mu = \left(\alpha_{\mathcal{Q}}\sqrt{\frac{s}{2}}, \frac{\mathbf{p}_{\mathcal{Q}\perp}^2 + M_{\mathcal{Q}}^2}{\alpha_{\mathcal{Q}}\sqrt{2s}}, \mathbf{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right), \tag{3.6}$$

$$k^\mu = \left((1-\alpha_{\mathcal{Q}})\sqrt{\frac{s}{2}}, \frac{\mathbf{k}_\perp^{\gamma\,2}}{(1-\alpha_{\mathcal{Q}})\sqrt{2s}}, \mathbf{k}_\perp^\gamma\right), \tag{3.7}$$

donde se han introducido las variables transversales

$$\mathbf{p}_{\mathcal{Q}\perp} = -\mathbf{p}_\perp - \frac{\boldsymbol{\Delta}_\perp}{2}, \qquad \mathbf{k}_\perp^\gamma = \mathbf{p}_\perp - \frac{\boldsymbol{\Delta}_\perp}{2}, \qquad \mathbf{p}_\perp = \frac{\mathbf{k}_\perp^\gamma - \mathbf{p}_{\mathcal{Q}\perp}}{2}. \tag{3.8}$$

Aquí, ξ es la variable skewness asociada a la transición no diagonal del protón, mientras que $\alpha_{\mathcal{Q}}$ parametriza la fracción longitudinal del momento del par final transportada por el cuarkonio.

Los invariantes de Mandelstam relevantes se escriben entonces como

$$S_{\gamma N} \equiv W^2 = (q+P)^2 = s(1+\xi) + m_N^2, \tag{3.9}$$

y

$$t = \Delta^2 = -\frac{1+\xi}{1-\xi}\boldsymbol{\Delta}_\perp^2 - \frac{4\xi^2 m_N^2}{1-\xi^2}. \tag{3.10}$$

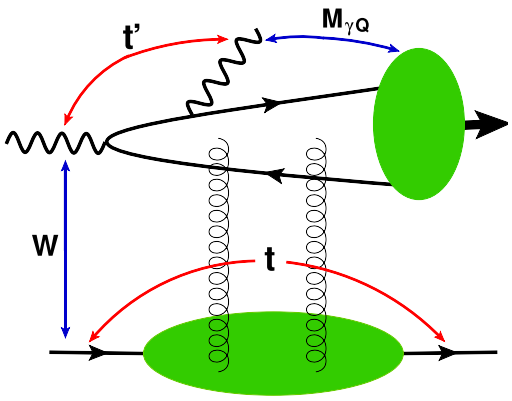


Figura 10: Representación esquemática de la cinemática del proceso exclusivo $\gamma p \to \gamma\, \mathcal{Q}\, p$, con la definición de los invariantes W^2, t, t' y de la masa invariante $M^2_{\gamma\mathcal{Q}}$. Las líneas azules conectan los pares de partículas cuyos momentos se suman para formar los invariantes indicados, mientras que las líneas rojas representan diferencias de momentos, tomadas como el momento de la partícula situada a la derecha menos el de la situada a la izquierda.

Para describir la cinemática interna del par fotón–cuarkonio se introducen además las variables

$$t' = (k-q)^2, \qquad M^2_{\gamma\mathcal{Q}} = (k+p_{\mathcal{Q}})^2, \tag{3.11}$$

que se presentan esquemáticamente en la Fig. 10.

En el dominio cinemático que se considerará en lo que sigue, donde

$$m_N,\ |\boldsymbol{\Delta}_\perp|,\ |t| \ll M_{\mathcal{Q}},\, M_{\gamma\mathcal{Q}}, \tag{3.12}$$

las expresiones anteriores admiten una simplificación adicional

$$-t' \approx \alpha_{\mathcal{Q}} M^2_{\gamma\mathcal{Q}} - M^2_{\mathcal{Q}},\ M^2_{\gamma\mathcal{Q}} \approx 2s\,\xi, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{p}^2_\perp \approx (1-\alpha_{\mathcal{Q}})\left(\alpha_{\mathcal{Q}} M^2_{\gamma\mathcal{Q}} - M^2_{\mathcal{Q}}\right) = (-t')(1-\alpha_{\mathcal{Q}}). \tag{3.14}$$

La condición física $t' \leq 0$, junto con $\mathbf{p}^2_\perp \geq 0$, implica que

$$\frac{M^2_{\mathcal{Q}}}{M^2_{\gamma\mathcal{Q}}} \leq \alpha_{\mathcal{Q}} \leq 1. \tag{3.15}$$

Finalmente, en el gauge de cono de luz $A^+ = 0$ los vectores de polarización de los fotones reales se definen como

$$\varepsilon_T^{(\lambda=\pm1)\mu}(\ell) = \left(0,\, \frac{\mathbf{e}^{(\lambda)}_\perp \cdot \boldsymbol{\ell}_\perp}{\ell^+},\, \mathbf{e}^{(\lambda)}_\perp\right), \qquad \mathbf{e}^{(\lambda)}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i\lambda). \tag{3.16}$$

Con la cinemática fijada, ahora se puede introducir la forma general de la sección eficaz diferencial como [132, 133]

$$\frac{d\sigma^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}}{dt\, dt'\, dM_{\gamma\mathcal{Q}}} \approx \frac{\left|A^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right|^2}{128\,\pi^3\, W^4\, M_{\gamma\mathcal{Q}}}, \tag{3.17}$$

donde $A^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}$ denota la amplitud del proceso, mientras que λ y σ representan las helicidades de los fotones inicial y final, respectivamente. Para los estados χ_{cJ}, el índice H denota además la helicidad del cuarkonio, para el mesón pseudoscalar η_c este índice es trivial y puede omitirse.

Es importante subrayar que la presencia explícita del factor $1/W^4$ en (3.17) depende de la convención de normalización adoptada para los estados externos y, en consecuencia, para la amplitud. En la ec. (3.17) se usa la normalización relativista estándar [134]

$$\langle p',\lambda'|p,\lambda\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{3.18}$$

por eso la sección eficaz diferencial escrita en términos de la amplitud invariante contiene explícitamente el factor $1/W^4$. En el cálculo en el marco del CGC se utilizará, en cambio, la convención habitual del formalismo del cono de luz [129], en la que este factor cinemático queda absorbido en la definición de la amplitud. Por esta razón, en las expresiones correspondientes el factor $1/W^4$ no aparece explícitamente, aunque ambas convenciones conducen a la misma sección eficaz física.

En el caso de la electroproducción $ep\to e\,\gamma\,\mathcal{Q}\,p$, la sección eficaz se obtiene contrayendo el tensor leptónico con las amplitudes hadrónicas correspondientes

$$\frac{d\sigma^{(\sigma,H)}_{ep\to e\gamma\mathcal{Q}p}}{d\Omega} \approx \frac{1}{Q^4}\sum_{\lambda,\bar\lambda} L_{\lambda\bar\lambda}\left(A^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right)^* A^{(\bar\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\,\frac{1}{128\,\pi^3\,W^4\,M_{\gamma\mathcal{Q}}}, \tag{3.19}$$

donde Q^2 es la virtualidad del fotón intercambiado y

$$d\Omega \equiv d\ln W^2\,dQ^2\,dt\,dt'\,dM_{\gamma\mathcal{Q}}\,d\phi \tag{3.20}$$

denota el elemento de volumen de fase diferencial. Aquí, ϕ es el ángulo azimutal entre el plano leptónico, definido por los momentos del electrón inicial y final, y el plano hadrónico, definido por los momentos del protón final y del sistema final $\gamma\,\mathcal{Q}$. La presencia de componentes no diagonales del tensor leptónico en la base de helicidades induce una dependencia no trivial en el ángulo ϕ. En consecuencia, la sección eficaz de electroproducción puede descomponerse como [135, 136]

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{ep\to e\gamma\mathcal{Q}p}}{d\Omega} = \epsilon\,\frac{d\sigma^{(L)}}{d\Omega} + \frac{d\sigma^{(T)}}{d\Omega} + \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}\cos\phi\,\frac{d\sigma^{(LT)}}{d\Omega} + \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}\sin\phi\,\frac{d\sigma^{(L'T)}}{d\Omega}\\ + \epsilon\cos 2\phi\,\frac{d\sigma^{(TT)}}{d\Omega} + \epsilon\sin 2\phi\,\frac{d\sigma^{(T'T)}}{d\Omega},\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde los índices L, T y T' distinguen las contribuciones de polarizaciones longitudinales, transversales y sus interferencias y

$$\epsilon \approx \frac{1-y}{1-y+y^2/2} \tag{3.22}$$

es el cociente usual de los flujos de fotones longitudinales y transversales, mientras que y es la fracción de la energía del electrón transferida al fotón virtual (inelasticidad)

$$y = \frac{W^2+Q^2-m_N^2}{s_{ep}-m_N^2}\,. \tag{3.23}$$

En la región de pequeña virtualidad Q^2 la contribución de los fotones longitudinales puede despreciarse en primera aproximación. En este caso, la expresión (3.21) se simplifica a

$$\frac{d\sigma_{ep\to e\gamma\mathcal{Q}p}}{d\Omega} \approx \frac{d\sigma^{(T)}}{d\Omega}\left(1 + c_2\cos 2\phi + s_2 \sin 2\phi\right). \tag{3.24}$$

La contribución dominante, independiente del ángulo, puede relacionarse con la sección eficaz de fotoproducción (3.17) mediante la aproximación de fotón equivalente [137–139]

$$\frac{d\sigma^{(T)}}{d\ln W^2\, dQ^2\, dt\, dt'\, dM_{\gamma\mathcal{Q}}\, d\phi} \approx \frac{\alpha_{\rm em}}{2\pi}\frac{2}{Q^2}\left(1 - y + \frac{y^2}{2} - (1-y)\frac{Q^2_{\rm mín}}{Q^2}\right)\frac{d\sigma_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}}{dt\, dt'\, dM_{\gamma\mathcal{Q}}}, \tag{3.25}$$

con $Q^2_{\rm mín} = m_e^2 y^2/(1-y)$ y m_e es la masa del electrón. Los coeficientes angulares c_2 y s_2 contienen la interferencia entre amplitudes con distintas helicidades del fotón inicial

$$c_2 = \frac{2\epsilon\,\mathrm{Re}\left[\left(A^{(-,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right)^* A^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right]}{\left|A^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right|^2 + \left|A^{(-,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right|^2}, \qquad s_2 = \frac{2\epsilon\,\mathrm{Im}\left[\left(A^{(-,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right)^* A^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right]}{\left|A^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right|^2 + \left|A^{(-,+,H)}_{\gamma p\to\gamma\mathcal{Q}p}\right|^2}. \tag{3.26}$$

Por lo tanto, las variables s_2 y c_2 constituyen observables complementarios, ya que permiten acceder de manera indirecta a la helicidad del fotón intercambiado.

En el marco del CGC, la amplitud obtenida directamente a partir de la convolución dipolar es puramente imaginaria (véase, por ejemplo, la ec. (2.54)). Para la fenomenología de procesos exclusivos a $x_{\rm Bj}$ pequeña, es habitual complementar esta expresión con la correspondiente restauración de la parte real de la amplitud [140, 141]. Si denotamos por $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ la amplitud obtenida directamente del formalismo dipolar, la inclusión de esta corrección conduce a

$$\mathcal{A} = (\beta + i)\,\mathrm{Im}\mathcal{A}, \tag{3.27}$$

donde

$$\beta \equiv \frac{\mathrm{Re}\,\mathcal{A}}{\mathrm{Im}\,\mathcal{A}} = \tan\left(\frac{\pi\theta}{2}\right), \qquad \theta \equiv \frac{\partial \ln \mathcal{A}}{\partial \ln(1/x)}. \tag{3.28}$$

Además, en la misma región de $x_{\rm Bj}$ pequeña suele introducirse un factor adicional de skewness, que tiene en cuenta la no diagonalidad longitudinal del intercambio en el canal t [142]. En tal caso, la amplitud corregida se escribe finalmente como

$$\mathcal{A} = R_g(\gamma)\,(\beta + i)\,\mathrm{Im}\mathcal{A}, \tag{3.29}$$

con

$$R_g(\gamma) = \frac{2^{2\gamma+3}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma + 5/2)}{\Gamma(\gamma+4)}, \qquad \gamma \equiv \frac{\partial \ln[xg(x,\mu^2)]}{\partial \ln(1/x)}. \tag{3.30}$$

3.1. Fotoproducción de pares $\gamma\eta_c$ en el marco de la factorización colineal

En esta subsección se derivará la amplitud para la fotoproducción exclusiva del par $\eta_c\gamma$ en el marco de la factorización colineal. Como ya se discutió en la parte de cinemática, se

trabajará en el régimen en el que m_N, $|t|$ y $|\boldsymbol{\Delta}_\perp|$ son pequeños frente a la escala dura fijada por M_{η_c}. En esta región, la masa del protón y la transferencia de momento t pueden despreciarse en el cálculo de las funciones de coeficiente y retenerse únicamente en las GPDs del blanco [96]. En consecuencia, los gluones activos se consideran colineales al momento del protón promedio $\bar{P} = (P + P')/2$, de modo que sus momentos se parametrizan sólo por sus fracciones longitudinales y no llevan componente transversal:

$$k_i^\mu = \big(0,\, (x+\xi)\,\bar{P}^-,\, \mathbf{0}_\perp\big), \qquad k_f^\mu = \big(0,\, (x-\xi)\,\bar{P}^-,\, \mathbf{0}_\perp\big), \tag{3.31}$$

donde x es la fracción longitudinal del momento promedio transportada por el gluón activo. Para un blanco no polarizado, la dependencia espinorial puede resumirse en combinaciones análogas a las que aparecen en DVCS y en fotoproducción exclusiva de un solo mesón pesado. En particular, al promediar sobre espines del protón, el cuadrado de la amplitud puede escribirse en términos de "form factors" [143]:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spins}} \left|A^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\eta_c\gamma p}\right|^2 = 4(1-\xi^2)\,\left|\mathcal{H}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}\right|^2 - 2\xi^2\,\mathrm{Re}\Big[\mathcal{H}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}\left(\mathcal{E}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}\right)^*\Big] \\ - \left(\xi^2 + \frac{t}{4m_N^2}\right)\left|\mathcal{E}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}\right|^2 .\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde se han introducido las convoluciones ("Compton form factors")

$$\mathcal{H}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}(\xi,t) = \int_{-1}^{1} dx\; C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}(x,\xi)\, H_g(x,\xi,t), \quad \mathcal{E}^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}(\xi,t) = \int_{-1}^{1} dx\; C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\eta_c}(x,\xi)\, E_g(x,\xi,t). \tag{3.33}$$

que generalizan las combinaciones conocidas de DVCS al caso $2 \to 3$. En el caso de η_c no hay polarización final del cuarkonio; por tanto, en lo que sigue para el caso de $\gamma\eta_c$ se reemplaza la combinación (λ, σ, H) por (λ, σ) y se omitirá el índice H en las amplitudes y en las CFFs.

Dado que ambos fotones externos son cuasi reales, sus polarizaciones físicas son únicamente transversales, $\lambda, \sigma = \pm$. En consecuencia, el conjunto de amplitudes posibles se reduce a dos estructuras independientes: una sin cambio de helicidad (cuando las helicidades del fotón inicial y del fotón final coinciden, $\lambda = \sigma$) y otra con cambio de helicidad (cuando cambian de signo, $\lambda = -\sigma$). Las funciones de coeficiente se evaluarán para las combinaciones $(\lambda, \sigma) = (++)$ y $(+-)$. Las otras dos, $(--)$ y $(-+)$, no son independientes: se obtienen a partir de las anteriores mediante conjugación compleja, como consecuencia de la invariancia del proceso bajo la C-paridad.

Las funciones de coeficiente $C^{(\lambda,\sigma)}_{\gamma\eta_c}(x,\xi)$ reciben contribuciones de un conjunto total de 24 amplitudes partónicas a LO. Sin embargo, es suficiente calcular explícitamente sólo los 6 diagramas mostrados en la Fig. 11, lo cual se realiza en *Wolfram Mathematica* utilizando el paquete `FeynCalc` [144–147]. Las contribuciones restantes se obtienen a partir de estas seis mediante las sustituciones $x \to -x$ y $z \to 1 - z$, donde z denota la fracción longitudinal del

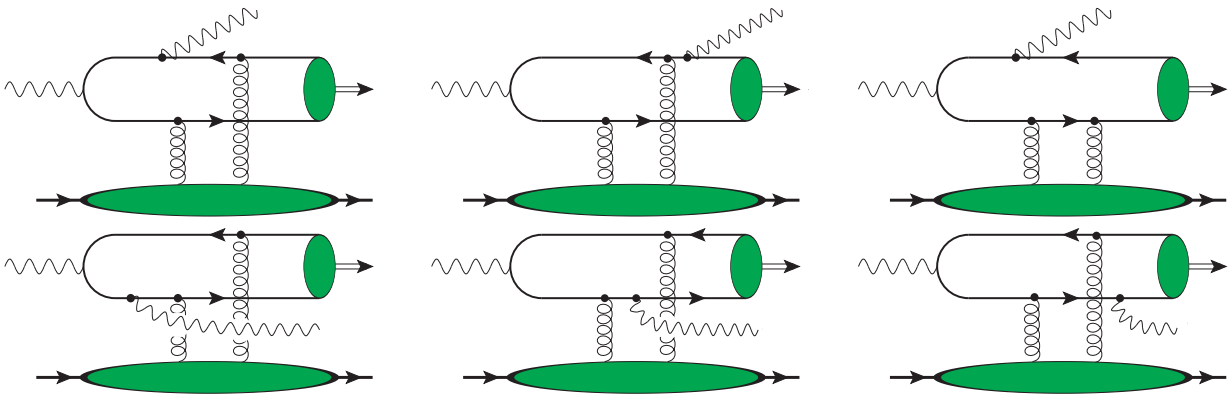


Figura 11: Diagramas de Feynman que contribuyen a la fotoproducción exclusiva del par fotón-mesón a orden líder. A partir de los 6 diagramas representados, los restantes se obtienen mediante el intercambio de las líneas de cuark y anticuark pesados (conjugación de carga) y la permutación de las líneas gluónicas en el canal t. En total, son 24 diagramas que contribuyen. Figura adaptada de la Fig. 4 de [57].

momento del par $c\bar{c}$ transportada por el cuark. El significado cinemático de estas transformaciones se ilustra esquemáticamente en la Fig. 12.

Un paso clave del cálculo consiste en elegir un esquema fenomenológico para describir la formación del cuarkonio a partir del par pesado $c\bar{c}$ producido a corta distancia. En este caso existe una ventaja esencial: al tratarse de cuarks pesados, la producción del estado ligado puede organizarse mediante una expansión sistemática en la velocidad relativa v del par, lo que permite sustituir una descripción totalmente no perturbativa (por ejemplo, una integración explícita sobre la fracción longitudinal interna z del par $c\bar{c}$) por una proyección en el marco de NRQCD [148–150].

En NRQCD, el par $c\bar{c}$ se produce perturbativamente y, a continuación, se proyecta sobre una jerarquía de estados de Fock caracterizados por sus números cuánticos ${}^{2S+1}L_J^{[c]}$ (espín, momento orbital y representación de color). La probabilidad de que este estado partónico evolucione hacia el cuarkonio físico se codifica en elementos de matriz de larga distancia (LDMEs por sus siglas en inglés), mientras que la dinámica de corta distancia queda contenida en coeficientes calculables en QCD perturbativa. De este modo, la amplitud (o la sección eficaz) se expresa como una suma de contribuciones ordenadas en potencias de v, donde toda la información no perturbativa queda concentrada en los LDMEs, que se determinan a partir de datos experimentales.

Para la partícula pseudoscalar η_c, el término dominante en la expansión en v corresponde al canal singlete de color ${}^1S_0^{[1]}$. Por eso, a orden líder en v la proyección del par pesado sobre el estado ligado se reduce a un único LDME $\langle O_{\eta_c}\rangle \equiv \left\langle O_{\eta_c}^{[1]}({}^1S_0)\right\rangle \simeq 0{,}3$ GeV^3 [152], mientras que contribuciones asociadas a configuraciones de Fock subdominantes aparecen suprimidas por potencias adicionales de v.

En el cálculo explícito del subproceso duro resulta conveniente implementar la proyección del par pesado sobre el estado ligado mediante un proyector de NRQCD. A orden líder en v, para un estado singlete de color ${}^1S_0^{[1]}$ el proyector espín–color puede escribirse como [149,150] (en nuestro caso, el estado ligado es η_c, por lo que adoptamos la notación correspondiente)

$$\widehat{\mathcal{P}}^{ij}_{SS_z} = -\sqrt{\frac{\langle O_{\eta_c}\rangle}{m_{\eta_c}}}\,\frac{1}{8m_{\eta_c}}\left(\frac{\hat{p}_{\eta_c}}{2}-\frac{\hat{\delta}_{\eta_c}}{2}-m_c\right)\gamma_5\left(\frac{\hat{p}_{\eta_c}}{2}+\frac{\hat{\delta}_{\eta_c}}{2}+m_c\right)\otimes\frac{\delta^{ij}}{\sqrt{N_c}}\,, \tag{3.34}$$

donde $\hat{a}\equiv\gamma^\mu a_\mu$, y $\delta_{\eta_c}=k_c-k_{\bar{c}}$ es el momento relativo del par. Los índices i,j son índices de color del par.

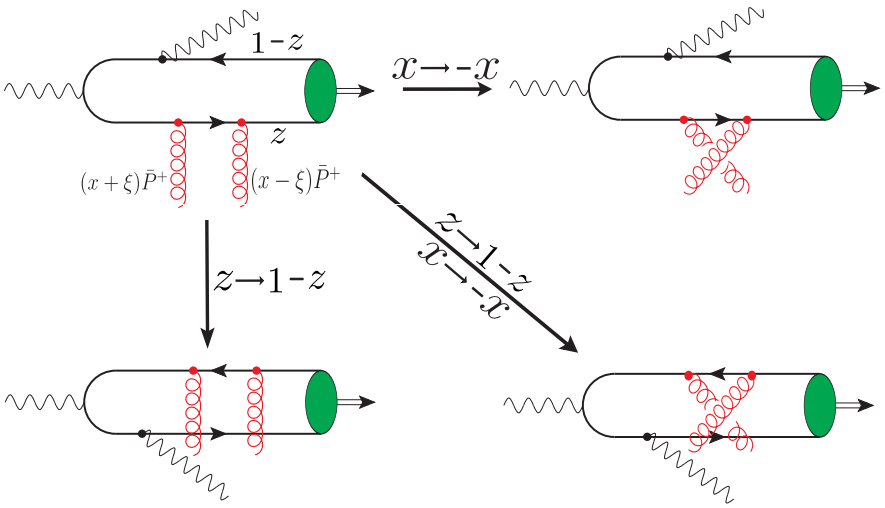


Figura 12: Ilustración, en el ejemplo de un diagrama representativo, de cómo se generan las contribuciones restantes a partir de las simetrías del subproceso. Las operaciones $z\to 1-z$ (intercambio cuark-anticuark pesado) y $x\to -x$ (permutación de las líneas gluónicas en el canal-t) relacionan los distintos diagramas del conjunto mostrado en la Fig. 11.

El cálculo de las funciones de coeficiente se ha realizado a orden líder (LO) a partir del conjunto completo de 24 diagramas de Feynman discutidos anteriormente, empleando las reglas de Feynman de QCD en el cono de luz [10,129,130] implementadas en `FeynCalc`. La estrategia seguida es la detallada en la subsección 2.2: se calcula primero el subproceso duro con gluones amputados, se proyecta sobre polarizaciones transversales mediante la contracción con $g_\perp^{\mu\nu}$, y se incorpora el factor numérico asociado al correlador gluónico de la ec. (2.28). En toda esta evaluación se fija la constante de acoplamiento fuerte, $\alpha_s\to\alpha_s(m_c)$, apropiada para el sistema pesado, y se toma la masa del cuarkonio a orden líder como $m_Q\simeq 2m_c$. Además, en el resultado final se adopta el límite no relativista estricto $\delta_{\eta_c}\to 0$, de modo que el cuark y el anticuark comparten el momento del cuarkonio por igual, $k_c=k_{\bar{c}}=p_{\eta_c}/2$.

El resultado puede expresarse en forma compacta, la dependencia cinemática queda reducida a un número pequeño de variables adimensionales: $\alpha_{\mathcal{Q}}\equiv\alpha$ (y $\bar{\alpha}\equiv 1-\alpha$), $r\equiv M_{\gamma\eta_c}/M_{\eta_c}$ y $\zeta\equiv x/\xi$ (y no de $M_{\gamma\eta_c}$, M_{η_c}, x y ξ por separado). Con estas definiciones, el resultado final de la evaluación a LO es [151]:

$$C^{(++)}_{\gamma\eta_c}(r,\alpha,\zeta) = \frac{4\,\bar{\alpha}\,\mathfrak{C}_{\eta_c}}{\xi^2\alpha^2(1+\bar{\alpha})^2(r^2-1)\left(\bar{\alpha}+\frac{1}{r^2}\right)}\,\frac{1}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)(\zeta+\kappa-i0)(\zeta-\kappa+i0)}$$
$$\times\left[\alpha^2(1+\bar{\alpha})(\zeta^2+1)+\frac{(\alpha^2-4)\zeta^4-2(\alpha^3-4\alpha+2)\zeta^2-\alpha(2\alpha^2+\alpha-4)}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\,r^2}\right.$$
$$+\frac{(1+\bar{\alpha})^2\zeta^4+\alpha(\alpha^2+3\alpha-12)\zeta^2+\alpha(3\alpha^2+8\alpha-4)}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\,r^4}$$
$$+\frac{-\alpha((\alpha-4)\zeta^2+11\alpha+8)+8\zeta^2+4}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\,r^6}$$
$$\left.-\frac{4(\zeta^2-3\alpha)}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\,r^8}-\frac{4}{(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\,r^{10}}\right], \tag{3.35}$$

$$C^{(+-)}_{\gamma\eta_c}(r,\alpha,\zeta) = \frac{4\,\mathfrak{C}_{\eta_c}}{\xi^2\alpha^2(1+\bar{\alpha})^2(r^2-1)\left(\bar{\alpha}+\frac{1}{r^2}\right)}\,\frac{1}{(\zeta+1-i0)^2(\zeta-1+i0)^2(\zeta+\kappa-i0)(\zeta-\kappa+i0)}$$
$$\times\left[\frac{\alpha^2(3\alpha^2+\alpha-3)-2\bar{\alpha}(\alpha^3-4\alpha+2)\zeta^2-(1+\bar{\alpha})^2(1-\alpha\bar{\alpha})\zeta^4}{r^2}\right.$$
$$-\frac{\alpha(3\alpha^3+5\alpha^2-2\alpha-8)-\bar{\alpha}(\alpha^3+3\alpha^2-8)\zeta^2+\bar{\alpha}(1+\bar{\alpha})^2\zeta^4}{r^4}$$
$$\left.+\frac{-\bar{\alpha}\alpha(\alpha+4)\zeta^2+\alpha(\alpha+3)(11\alpha-4)-4}{r^6}-\frac{4(3\alpha^2+7\alpha-2-\bar{\alpha}\zeta^2)}{r^8}+\frac{4(\alpha+3)}{r^{10}}\right], \tag{3.36}$$

donde $\kappa = 1-\dfrac{1-1/r^2}{1-\alpha/2} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{2-\alpha r^2}{2-\alpha}$ y

$$\mathfrak{C}_{\eta_c} = \frac{4}{9N_c m_c}\pi^2\alpha_{\rm em}\alpha_s\left(m_c\right)\sqrt{\langle\mathcal{O}_{\eta_c}\rangle/m_c^3}. \tag{3.37}$$

Las funciones (3.35)–(3.36) presentan polos en la región ERBL en $\zeta = \pm 1 \mp i0$ y $\zeta = \pm\kappa \mp i0$ (equivalentemente $x = \pm\xi$ y $x = \pm\kappa\xi$), lo cual determina las regiones dominantes de las integrales de convolución con las GPDs gluónicas. En el límite de gran masa invariante $r \gg 1$ se observa, además, que la amplitud con cambio de helicidad está suprimida por un factor $\sim 1/r^2$ frente a la amplitud sin cambio de helicidad, simplificando la fenomenología a altas energías.

Es importante subrayar que, a pesar de la presencia de polos en las funciones de coeficiente $C^{(\lambda,\sigma)}_{\gamma\eta_c}(r,\alpha,\zeta)$, las convoluciones que definen los factores (3.33) no presentan singularidades no integrables y están bien definidas. En particular, la prescripción estándar de Feynman $m_c^2 \to m_c^2 - i0$ en los denominadores fija la posición de los polos de tal manera que, a lo largo del contorno de integración en x, no aparecen polos situados en lados opuestos que bloqueen la deformación del contorno. En consecuencia, la factorización colineal resulta aplicable para este proceso en la cinemática considerada, y las expresiones obtenidas pueden utilizarse directamente en cálculos numéricos y en análisis fenomenológico.

3.2. Fotoproducción de pares $\gamma\chi_{cJ}$ en el marco de la factorización colineal

En esta subsección se extiende el cálculo al canal $\gamma p \to \gamma\, \chi_{cJ}\, p$ dentro del mismo marco colineal. A LO, el subproceso duro tiene el mismo conjunto de diagramas, en total contribuyen 24 amplitudes partónicas. Sin embargo, de manera análoga al caso $\eta_c\gamma$, es suficiente evaluar explícitamente sólo los 6 diagramas mostrados en la Fig. 11, los restantes se reconstruyen mediante las simetrías del subproceso, implementadas por las sustituciones $x \to -x$ y $z \to 1-z$, como se ilustra en la Fig. 12.

A diferencia del canal pseudoscalar, en la producción de χ_{cJ} aparece explícitamente la helicidad del cuarkonio, que denotaremos por H (con $H = -J, \ldots, J$). Por eso, tanto las amplitudes como las funciones de coeficiente del subproceso duro llevan tres índices: $A^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\gamma\chi_{cJ}p}$ y $C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$. En particular, la conjugación de carga relaciona las combinaciones de helicidades según $(\lambda,\sigma,H) \to (-\lambda,-\sigma,-H)$, lo que reduce el número de estructuras independientes que deben evaluarse de forma explícita.

La principal dificultad técnica respecto del caso $\gamma\eta_c$ proviene de los números cuánticos del estado final: la multipleta χ_{cJ} está dominada, a orden líder en v, por el canal singlete de color ${}^3P_J^{[1]}$ (esto es, $L=1$). En consecuencia, la proyección NRQCD para estados P incluye operadores diferenciales: el proyector requiere tomar derivada de la amplitud partónica completa respecto de componentes del momento relativo del par $c\bar{c}$. Por esta razón no es posible imponer desde el inicio $z = 1/2$ (o momento relativo nulo), ya que para un estado de onda P dicha proyección anula la contribución, es necesario mantener el momento relativo en la amplitud. Se introduce por tanto la diferencia entre k_c y $k_{\bar{c}}$ en términos de z y $\boldsymbol{k}_\perp$

$$k_c^\mu - k_{\bar{c}}^\mu = \left(\quad \sqrt{2}p^-_{\chi_c}\,(2z-1)\,, \frac{(1-2z)\left(M^2_{\chi_c} + \boldsymbol{p}^2_{\perp\chi_c}\right) - 2\,\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{p}_{\perp\chi_c}}{\sqrt{2}p^-_{\chi_c}}, \quad \boldsymbol{k}_\perp \right). \tag{3.38}$$

En el límite de cuark pesado la función de onda está fuertemente concentrada alrededor de $z = \frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{k}_\perp = \boldsymbol{0}$, lo cual justifica una expansión de la amplitud partónica en potencias de $(1-2z)$ y $\boldsymbol{k}_\perp$. Al sumar cada diagrama con el diagrama relacionado por conjugación de carga se cancelan los términos impares en $(1-2z)$ y en $\boldsymbol{k}_\perp$, de modo que la primera contribución no nula en la expansión comienza en orden cuadrático.

Con el fin de conectar esta expansión con el formalismo de NRQCD para estados de onda P, es conveniente introducir primero un objeto más general: la función de onda de cuarkonio a twist dominante en el cono de luz (LCWF por sus siglas en inglés) [153–155], definida como invariante de gauge. En el espacio de momentos, la LCWF de twist dominante se define como la transformada de Fourier de un operador bilocal cuark-anticuark con la línea de Wilson

$$\begin{aligned}\Phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp) = \int d^2\boldsymbol{r}_\perp\, e^{-i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp} \int \frac{d\lambda}{2\pi}\, e^{iz\,p^+_{\chi_c}\lambda} \Big\langle 0\Big|\bar{\Psi}\big(-\tfrac{\lambda}{2}n_- - \tfrac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\big) \\ \times\ \Gamma_{\chi_{cJ}}\,\mathcal{L}\big(-\tfrac{\lambda}{2}n_- - \tfrac{\boldsymbol{r}_\perp}{2},\ \tfrac{\lambda}{2}n_- + \tfrac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\big)\ \Psi\big(\tfrac{\lambda}{2}n_- + \tfrac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\big)\Big|\chi_{cJ}(p_\chi)\Big\rangle,\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\mathcal{L}(x,y) \equiv \mathcal{P}\exp\left\{ig\int_y^x d\zeta\, A_a^+(\zeta)\, t^a + ie\int_y^x d\zeta\, A_{\rm em}^+(\zeta)\right\}. \tag{3.40}$$

donde la línea de Wilson asegura la invariancia de gauge (incluyendo el término electromagnético para garantizar la invariancia de gauge local en presencia de un fotón externo).

La matriz $\Gamma_{\chi_{cJ}}$ codifica los números cuánticos del estado de onda P J y H [55]

$$\Gamma_{\chi_{cJ}} = \begin{cases} 1, & J=0 \\ i\gamma_5\,\gamma_\mu\, E^\mu, & J=1 \\ \dfrac{1}{2}\big(\gamma_\mu\delta_{\chi_c\,\nu} + \gamma_\nu\delta_{\chi_c\,\mu}\big)\, E^{\mu\nu}, & J=2 \end{cases} \tag{3.41}$$

donde $\delta^\mu_{\chi_c}$ es el momento relativo (3.38). El vector E^μ tiene la forma

$$E^\mu_{H=\pm1} = \left(\, 0, \frac{\boldsymbol{e}_{\perp H}\cdot\boldsymbol{p}_{\chi_c\perp}}{p^+_{\chi_c}},\, \boldsymbol{e}_{\perp H}\right), \qquad \boldsymbol{e}_{\perp H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, iH), \tag{3.42}$$

$$E^\mu_{H=0} = \frac{1}{M_{\chi_c}}\left(p^+_{\chi_c},\, \frac{\boldsymbol{p}^2_{\chi_c\perp} - M^2_{\chi_c}}{2p^+_{\chi_c}},\, \boldsymbol{p}_{\chi_c\perp}\right). \tag{3.43}$$

y el tensor de polarización de $J=2$ se construye a partir de productos simetrizados y sin traza:

$$E^{\mu\nu} = \begin{cases} E^\mu_{\pm1}E^\nu_{\pm1}, & H=\pm2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(E^\mu_{\pm1}E^\nu_0 + E^\mu_0 E^\nu_{\pm1}\Big), & H=\pm1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(E^\mu_{+1}E^\nu_{-1} + E^\mu_{-1}E^\nu_{+1} + 2E^\mu_0 E^\nu_0\Big), & H=0 \end{cases} \tag{3.44}$$

Para estados de onda P, la proyección del par pesado sobre el cuarkonio es lineal en el momento relativo del sistema. Para demostrarlo, reescribimos la estructura espinorial $\bar u(k_c)\,\Gamma_{\chi_{cJ}}\,v(k_{\bar c})$ utilizando las ecuaciones de Dirac para los espinores externos

$$\begin{aligned} \bar u(k_c)\,\Gamma_{\chi_{cJ}}\,v(k_{\bar c}) &= \frac{1}{2m_c}\,\bar u(k_c)\Big(\not k_c\,\Gamma_{\chi_{cJ}} - \Gamma_{\chi_{cJ}}\not k_{\bar c}\Big)v(k_{\bar c}) \\ &= \frac{1}{4m_c}\,\bar u(k_c)\Big(\not p_{\chi_c}\Gamma_{\chi_{cJ}} - \Gamma_{\chi_{cJ}}\not p_{\chi_c} + \not\delta_{\chi_c}\Gamma_{\chi_{cJ}} + \Gamma_{\chi_{cJ}}\not\delta_{\chi_c}\Big)v(k_{\bar c}). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Para las estructuras $\Gamma_{\chi_{cJ}}$ de onda P, los términos proporcionales a p_{χ_c} se cancelan por las condiciones de ortogonalidad $E_H\cdot p_{\chi_c}$, y el resultado se escribe finalmente como

$$\bar u(k_c)\,\Gamma_{\chi_{cJ}}\,v(k_{\bar c}) = \frac{\delta^\mu_{\chi_c}}{4m_c}\,\bar u(k_c)\Big(\gamma_\mu\Gamma_{\chi_{cJ}} + \Gamma_{\chi_{cJ}}\gamma_\mu\Big)v(k_{\bar c}), \tag{3.46}$$

lo que muestra que la proyección de onda P es lineal en el momento relativo y, por tanto, se anula en el límite $\delta_{\chi_c}\to 0$, como corresponde a $L=1$.

El siguiente paso consiste en conectar la descripción en términos de la LCWF con la factorización de NRQCD para expresar la información no perturbativa contenida en $\Phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)$ en términos del LDME dominante del canal ${}^3P_J^{[1]}$. Partimos de la definición invariante de gauge (3.39). En el límite de cuark pesado, la LCWF $\Phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)$ está fuertemente localizada en la

vecindad de $z = \frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{k}_\perp = \mathbf{0}$. Por eso, en procesos con una escala dura, el resultado de la convolución está dominado por esa región y el subproceso duro puede expandirse en potencias de $(1-2z)$ y de $\boldsymbol{k}_\perp$ alrededor del punto no relativista. El resultado final se organiza entonces en términos de momentos de la LCWF, que pueden identificarse con operadores locales (en espacio de coordenadas el momento $\delta_{\chi_c\,\mu}$ se reemplaza por $i\overleftrightarrow{\partial}_\mu$)

$$\begin{aligned}\int dz \int \frac{d^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\,\Phi_{\chi_c}(z,\,\boldsymbol{k}_\perp) = \lim_{\lambda,\,\boldsymbol{r}_\perp\to 0}\Big\langle 0\Big|\bar\Psi\left(-\frac{\lambda}{2}n_- - \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\right)\gamma^\mu_{\chi_{cJ}}\,i\overleftrightarrow{\partial}_\mu \\ \times\,\mathcal{L}\left(-\frac{\lambda}{2}n_- - \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\,;\,\frac{\lambda}{2}n_- + \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\right)\Psi\left(\frac{\lambda}{2}n_- + \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{2}\right)\Big|\chi_c(p)\Big\rangle \\ = \Big\langle 0\Big|\bar\Psi(0)\,\gamma^\mu_{\chi_{cJ}}\,\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}_\mu\,\Psi(0)\Big|\chi_c(p)\Big\rangle. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

donde $\Gamma_{\chi_{cJ}}$ de define mediante $\Gamma^{(\mathrm{eff})}_{\chi_{cJ}} = \left(\gamma^\mu\Gamma_{\chi_{cJ}} + \Gamma_{\chi_{cJ}}\gamma^\mu\right)/4m = \gamma^\mu_{\chi_{cJ}}\delta_{\chi_c\,\mu}\overleftrightarrow{D}_\perp$, en particular $\gamma^\mu_{\chi_{c0}} \equiv \gamma^\mu/2m$, $\gamma^\mu_{\chi_{c1}} \equiv \left[\gamma^\mu,\,\hat E_H\right]\gamma^5/4m$, $\gamma^\mu_{\chi_{c2}} = E^{\mu\nu}\gamma_\nu$ y $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu + 2igA^a_\mu t_a + 2ieA_\mu$ es la derivada covariante.

En el límite no relativista, la matriz (3.47) se identifica con LDMEs [153–155]

$$\left|\Big\langle 0\Big|\bar\psi(0)\,\gamma^\mu_{\chi_{cJ}}\,i\overleftrightarrow{D}_\mu\,\psi(0)\Big|\,\chi_c(p)\Big\rangle\right|^2 = \frac{1}{4m_c^2}\left|\big\langle 0\big|\bar\psi(0)\,\mathcal{J}_J\big|\,\chi_c(p)\big\rangle\right|^2, \qquad (3.48a)$$

$$\mathcal{J}_0 \equiv \left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^\mu_\top\gamma^\top_\mu\right)\chi, \qquad \left|\big\langle 0\big|\bar\psi(0)\,\mathcal{J}_0\big|\,\chi_c(p)\big\rangle\right|^2 = \left\langle\mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}\left({}^3P^{[1]}_0\right)\right\rangle, \qquad (3.48b)$$

$$\mathcal{J}_1 \equiv \psi^\dagger\left(-\frac{i}{4}\overleftrightarrow{D}^\nu_\top\left[\gamma^\top_\nu,\gamma^\top_\mu\right]\right)\gamma_5\chi, \qquad \left|\big\langle 0\big|\mathcal{J}_1\big|\,\chi_c(p)\big\rangle\right|^2 = \left\langle\mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}\left({}^3P^{[1]}_1\right)\right\rangle, \qquad (3.48c)$$

$$\mathcal{J}_2 \equiv \psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^{(\mu}_\top\gamma^{\nu)}_\top\right)\chi, \qquad \left|\big\langle 0\big|\mathcal{J}_2\big|\,\chi_c(p)\big\rangle\right|^2 = \left\langle\mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}\left({}^3P^{[1]}_2\right)\right\rangle, \qquad (3.48d)$$

donde el símbolo $\top$ denota la componente de un vector transversal a $p^\mu_{\chi_c}$, esto es, $v^\mu_\top = \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu_{\chi_c}p^\nu_{\chi_c}}{M^2_{\chi_c}}\right)v^\nu$ y $a^{(\mu}_\top b^{\nu)}_\top = \frac{a^\mu_\top b^\nu_\top + a^\nu_\top b^\mu_\top}{2} - \frac{a_\top\cdot b_\top}{3}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu_{\chi_c}p^\nu_{\chi_c}}{M^2_{\chi_c}}\right)$. Los operadores $\psi^\dagger$ y χ son operadores espinoriales de Pauli que crean, respectivamente, un cuark y un anticuark. La presencia de campos de gauge en la derivada covariante $\overleftrightarrow{D}_\mu$ implica que el mesón χ_c debe considerarse como una mezcla de componentes de Fock $|\bar QQ\rangle$, $|\bar QQg\rangle$ y $|\bar QQ\gamma\rangle$. Sólo en el gauge de cono de luz (que se utiliza en los cálculos) es posible despreciar las contribuciones de $|\bar QQg\rangle$ y $|\bar QQ\gamma\rangle$.

Las expresiones explícitas de los proyectores de NRQCD para estados de onda P incluyen operadores diferenciales, lo que en la práctica exige tomar derivadas de la amplitud partónica del proceso completo con respecto a componentes del momento relativo $\delta^\mu_{\chi_c}$ y conduce a expresiones notablemente extensas. Por esta razón, en lugar de aplicar NRQCD de forma directa a nivel de la amplitud completa, parametrizamos la función de onda no perturbativa $\Phi_{\chi_{cJ}}(z,\,\boldsymbol{k}_\perp)$ mediante el ansatz

$$\Phi_{\chi_{cJ}}(z,\,\boldsymbol{k}_\perp) = \bar u\left(\frac{p_{\chi_{cJ}}}{2} + \frac{\delta_{\chi_c}}{2}\right)\Gamma_{\chi_{cJ}}v\left(\frac{p_{\chi_{cJ}}}{2} - \frac{\delta_{\chi_c}}{2}\right)\phi_{\chi_{cJ}}(z,\,\boldsymbol{k}_\perp), \qquad (3.49)$$

donde la función de onda escalar en el cono de luz $\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)$ contiene la información radial del estado ligado. En la aproximación no relativista, $\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)$ se relaciona con la función de onda de χ_{cJ} en el sistema de reposo de χ_{cJ} mediante [156]

$$\frac{dz\,d^2\boldsymbol{k}_\perp}{z(1-z)\,16\pi^3}\,\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)=\frac{1}{4\pi^2\sqrt{M_{\chi_c}}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,d^3k\,\frac{u(k)}{k^2},\qquad k_z\equiv M_{\chi_c}\left(z-\frac{1}{2}\right),\tag{3.50}$$

donde $u(k)/k$ es la parte radial de la función de onda de χ_{cJ} en reposo en el espacio de momentos. Usando la identidad

$$\int_0^\infty dk\,k^2\,u(k)=3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,R'(0)=\sqrt{2M_{\chi_c}}\int\frac{dz\,d^2\boldsymbol{k}_\perp}{z(1-z)\,8\pi^2}\,\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)\left[M_{\chi_c}^2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\boldsymbol{k}_\perp^2\right],\tag{3.51}$$

donde $R'_{\chi_c}(0)$ es la pendiente de la función radial del estado χ_c, se puede relacionar la función de onda en el cono de luz con los elementos de matriz de NRQCD

$$\left\langle\mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}\left({}^3P_J^{[1]}\right)\right\rangle=6N_c\,(2J+1)\,\frac{\left|R'_{\chi_c}(0)\right|^2}{4\pi}.\tag{3.52}$$

Las relaciones (3.49)-(3.52) permiten expresar la formación no perturbativa del estado de onda P χ_{cJ} en términos de $\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp)$ y, en el límite no relativista, en función de un único parámetro universal, el LDME ${}^3P_J^{[1]}$ (equivalentemente, $R'_{\chi_c}(0)$). A partir de aquí, el subproceso duro queda caracterizado por funciones de coeficiente partónicas que dependen de las variables internas del par pesado, $c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}=c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}(x,\xi;z,\boldsymbol{k}_\perp)$, mientras que la transición hacia el cuarkonio físico se incorpora mediante la convolución en z y $\boldsymbol{k}_\perp$ con la función escalar $\phi_{\chi_{cJ}}$

$$C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}(x,\xi)=\int_0^1 dz\int\frac{d^2\boldsymbol{k}_\perp}{z(1-z)\,16\pi^3}\,c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}(x,\xi;z,\boldsymbol{k}_\perp)\,\phi_{\chi_{cJ}}(z,\boldsymbol{k}_\perp).\tag{3.53}$$

En este caso, la dependencia en z y $\boldsymbol{k}_\perp$ es cuadrática. En consecuencia, la integración en (3.53) se reduce a los momentos de la LCWF que aparecen en (3.51), los cuales quedan determinados por la pendiente de la función radial $R'_{\chi_c}(0)$. A su vez, $R'_{\chi_c}(0)$ se expresa en términos del LDME $\langle\mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}({}^3P_J^{[1]})\rangle$ mediante (3.52), cuyos valores numéricos se tomarán de [152].

Al igual que en el caso de $\gamma\eta_c$, el resultado final para las funciones de coeficiente puede escribirse de forma compacta en términos de las variables adimensionales r, α y x/ξ:

$$C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}(r,\alpha,x/\xi)=\frac{m_c^2}{M_{\chi_c}^2}\,c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}+d^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}\approx\frac{1}{4}\,c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}+d^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}.\tag{3.54}$$

Aquí los términos $c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$ y $d^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$ corresponden, respectivamente, a las contribuciones que provienen de la expansión en $\left(z-\frac{1}{2}\right)$ y en $\boldsymbol{k}_\perp$. Las expresiones explícitas de $c^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$ y $d^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$ se incluyen en el Apéndice A.

En resumen, para los canales $\gamma\chi_{cJ}$ el numerador presenta una dependencia pronunciada del espín J y de la helicidad H, mientras que el denominador queda fijado por la cinemática. En particular, se obtiene la misma estructura analítica de polos que en el caso $\gamma\eta_c$: las funciones

de coeficiente presentan singularidades en $\zeta = \pm 1 \mp i0$ y $\zeta = \pm\kappa \mp i0$. Junto con esto, para $\gamma\chi_{cJ}$ los polos en $\zeta = \pm\kappa \mp i0$ son de segundo orden, como consecuencia de la naturaleza de onda P, que corresponde a una derivada adicional con respecto al momento relativo del par $c\bar{c}$. A pesar de esta mayor complejidad algebraica, la estructura de polos sigue siendo integrable y las funciones coeficientes están bien definidas, por lo que pueden usarse directamente en el cálculo de las convoluciones con GPDs y, en consecuencia, en la predicción de secciones eficaces para $\gamma\chi_{cJ}$.

3.3. Cálculo en el marco del CGC

Pasamos ahora al cálculo de los canales $\gamma p \to \gamma\eta_c p$ y $\gamma p \to \gamma\chi_{cJ} p$ en el marco del CGC. A LO en α_s, la amplitud de ambos procesos puede escribirse como la suma de dos contribuciones, correspondientes a la emisión del fotón final antes y después de la interacción del sistema $c\bar{c}$ con el blanco, como se muestra en la Fig. 13,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \tag{3.55}$$

Aquí $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ corresponden, respectivamente, a los diagramas con emisión del fotón antes y después de la interacción. La interacción directa del fotón emitido con la onda de choque está suprimida por $\mathcal{O}(\alpha_{\text{em}})$, por lo tanto ambas contribuciones quedan determinadas por la amplitud dipolar $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$. A diferencia de la factorización colineal, en el marco del CGC no aparece una contribución asociada a la emisión del fotón durante la interacción con el blanco, ya que la onda de choque se trata como una interacción instantánea.

Se introducen las fracciones de momento longitudinal z_0, z_1 y z_2 (véase la Fig. 13), donde z_2 corresponde al fotón emitido, mientras que z_0 y z_1 denotan las fracciones de momento del cuark y del anticuark cuando atraviesen la onda de choque. Para los diagramas en los que el fotón se emite antes de la interacción, estas variables satisfacen

$$z_0 + z_1 + z_2 = 1, \qquad z_0 + z_1 = \alpha, \tag{3.56}$$

mientras que para los diagramas con emisión posterior se tiene simplemente

$$z_0 + z_1 = 1. \tag{3.57}$$

En ambos casos, la diferencia entre los canales $\gamma\eta_c$ y $\gamma\chi_{cJ}$ entra en la estructura explícita de los vértices partónicos, cuya construcción se realizará a partir de las funciones de onda correspondientes.

En ambos canales, la información no perturbativa asociada a la formación del cuarkonio se introduce mediante LCWF del tipo (3.49)

$$\Phi_{\mathcal{Q}}\left(z, \boldsymbol{k}_\perp\right) = \bar{u}\left(k_c\right) \Gamma_{\mathcal{Q}} v\left(k_{\bar{c}}\right) \phi_{\mathcal{Q}}\left(z, \boldsymbol{k}_\perp\right), \tag{3.58}$$

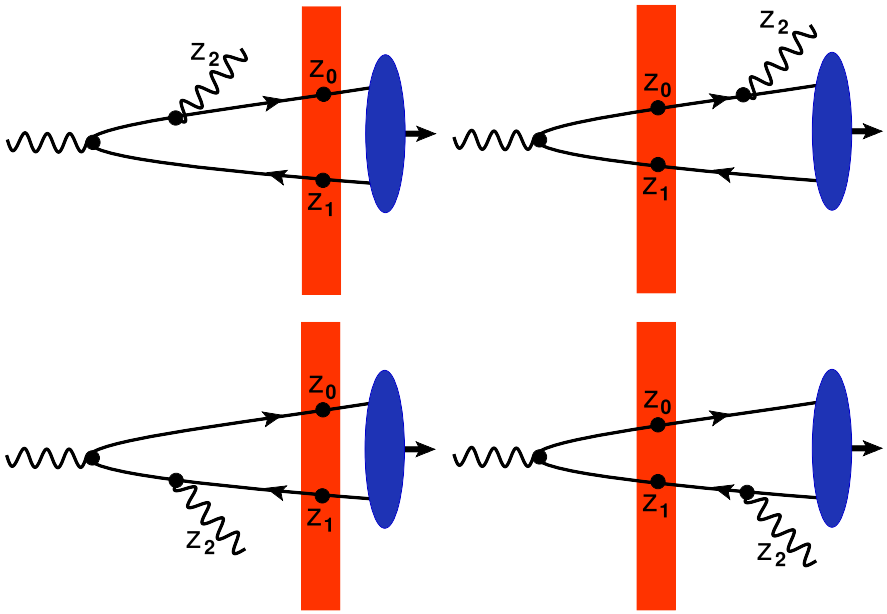


Figura 13: Diagramas que contribuyen a la fotoproducción exclusiva de $\gamma\eta_c$ y $\gamma\chi_{cJ}$ a LO en el marco del CGC. Los diagramas de la izquierda corresponden a la emisión del fotón final antes de la interacción del sistema $c\bar{c}$ con la onda de choque, mientras que los de la derecha describen la emisión después de dicha interacción.

donde la diferencia $k_c^\mu - k_{\bar{c}}^\mu$ se parametriza en la ec.(3.38). En ambos canales se adoptará para la parte escalar de la función de onda una parametrización gaussiana en el espacio de coordenadas transversales, relacionada con su representación en espacio de momentos mediante la transformada de Fourier $\phi_{\mathcal{Q}}(z,\mathbf{k}_\perp) = \int d^2\boldsymbol{r} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\phi_{\mathcal{Q}}(z,\mathbf{r})$. Esta parametrización tiene la forma [42, 54, 55, 157]

$$\phi_{\mathcal{Q}}(z,\mathbf{r}) = N_{\mathcal{Q}}\, z\bar{z}\, \exp\left[-\frac{m_c^2 R_{\mathcal{Q}}^2}{8z\bar{z}} - \frac{2z\bar{z}}{R_{\mathcal{Q}}^2}\,\mathbf{r}^2 + \frac{m_c^2 R_{\mathcal{Q}}^2}{2}\right], \qquad \bar{z}\equiv 1-z, \tag{3.59}$$

donde, para el mesón η_c , $R_{\eta_c} = 1{,}58\ \text{GeV}^{-1}$, $N_{\eta_c} = 0{,}55\ \text{GeV}^{-1}$ y, para los estados χ_{cJ}, $R_{\chi_{c0}} = 1{,}54\ \text{GeV}^{-1}$, $R_{\chi_{c1}} \approx R_{\chi_{c2}} = 1{,}48\ \text{GeV}^{-1}$, $N_{\chi_{c0}} = 1{,}15\ \text{GeV}^{-1}$, $N_{\chi_{c1}} = 1{,}39\ \text{GeV}^{-1}$, $N_{\chi_{c2}} = 0{,}60\ \text{GeV}^{-1}$. Para los estados χ_{cJ}, las matrices $\Gamma_{\chi_{cJ}}$ ya fueron introducidas en la subsección 3.2. Para el estado pseudoscalar η_c se utiliza [54]

$$\Gamma_{\eta_c} = -i\gamma_5. \tag{3.60}$$

Empezamos con la contribución $\mathcal{A}_1$, correspondiente a la emisión del fotón final antes de la interacción con el blanco. Los dos diagramas de la izquierda en la Fig. 13 se relacionan entre sí por el intercambio $q \leftrightarrow \bar{q}$ y tras cambiar las variables de integración, ambos pueden escribirse en una forma común. Denotamos por $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ las coordenadas transversales del cuark, el anticuark y el fotón emitido, respectivamente, en correspondencia con las fracciones longitudinales z_0, z_1 y z_2. Por lo tanto, resulta conveniente introducir las variables

$$\boldsymbol{r}_{10} \equiv \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{b}_{10} \equiv \frac{z_0\boldsymbol{x}_0 + z_1\boldsymbol{x}_1}{z_0+z_1}, \qquad \boldsymbol{r}_\gamma \equiv \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}_{10}. \tag{3.61}$$

Aquí $\boldsymbol{r}_{10}$ es el tamaño dipolar del par $c\bar{c}$, $\boldsymbol{b}_{10}$ es su parámetro de impacto y $\boldsymbol{r}_\gamma$ mide la separación transversal entre el fotón final y el centro transversal del par $c\bar{c}$. Como en esta clase de diagramas el fotón se emite antes de la interacción con el blanco, el par $c\bar{c}$ que hadroniza en el estado final transporta una fracción total α del momento longitudinal del fotón inicial, mientras que el fotón observado lleva la fracción complementaria $\bar{\alpha}$. En consecuencia, se tiene $z_1 = \alpha - z_0,\ z_2 = \bar{\alpha}$, de modo que la integración longitudinal puede expresarse únicamente en términos de z_0. Los límites $0 \leq z_0 \leq \alpha$ corresponden a los dos casos extremos en los que toda la fracción longitudinal del par $c\bar{c}$ es transportada, respectivamente, por el anticuark o por el cuark.

En esta cinemática, la contribución $\mathcal{A}_1$ se escribe como

$$\mathcal{A}_1^{(\lambda;\,\sigma,\,H)} = \int_0^\alpha dz_0 \prod_{k=0}^{2} \left(d^2\boldsymbol{x}_k\right)\ \Phi_{\mathcal{Q}}^{(h,\bar{h})\dagger}\left(\frac{z_0}{z_0+z_1},\,\boldsymbol{r}_{10}\right)\ \Psi_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}^{(\lambda,\sigma,h,\bar{h})}\left(z_0,\,z_1,\,z_2,\boldsymbol{x}_0,\,\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2\right)\times \tag{3.62}$$

$$\times\,\mathcal{N}\left(x,\,\boldsymbol{r}_{10},\ \boldsymbol{b}_{10}\right)\exp\left[-i\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\cdot\left(\boldsymbol{b}_{10}-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\boldsymbol{r}_\gamma\right)-i\boldsymbol{k}_\perp^\gamma\cdot\boldsymbol{x}_2\right].$$

En esta expresión, el argumento longitudinal de la función de onda del cuarkonio es la fracción de momento del cuark con respecto al propio mesón,

$$\frac{k_c^+}{p_{\mathcal{Q}}^+} = \frac{z_0}{z_0+z_1}. \tag{3.63}$$

La fase exponencial se obtiene al proyectar la amplitud sobre el estado final observado en coordenadas transversales. En primer lugar, introducimos $\boldsymbol{b}_{10}$, que representa el centro transversal del dipolo $c\bar{c}$, y luego desplazamos la coordenada del fotón como $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_{10} + \boldsymbol{r}_\gamma$, de modo que $\boldsymbol{r}_\gamma$ mide la posición transversal del fotón final con respecto al centro del dipolo. Para el cuarkonio, resulta entonces natural definir su centro transversal $\boldsymbol{X}_{\mathcal{Q}}$ mediante

$$\alpha\,\boldsymbol{X}_{\mathcal{Q}} + \bar{\alpha}\,\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_{10}, \tag{3.64}$$

de donde

$$\boldsymbol{X}_{\mathcal{Q}} = \boldsymbol{b}_{10} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\boldsymbol{r}_\gamma. \tag{3.65}$$

Entonces la fase toma la forma introducida en (3.62).

Para calcular explícitamente la función de onda $\Psi_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}^{(\lambda,\sigma,h,\bar{h})}$, se debe considerar el propagador del cuark (aparece entre los dos vértices electromagnéticos)

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i0}. \tag{3.66}$$

En variables del cono de luz, su denominador se descompone como [129, 130]

$$p^2-m^2+i0 = 2p^+\left(p^- - \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2+m^2}{2p^+} + i0\,\mathrm{sgn}(p^+)\right). \tag{3.67}$$

Para $p^+ > 0$, usando la relación de completitud

$$\sum_h u_h(\tilde{p})\bar{u}_h(\tilde{p}) = \not{\tilde{p}} + m, \tag{3.68}$$

con

$$\tilde{p}^\mu = \left(p^+,\, \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2 + m^2}{2p^+},\, \boldsymbol{p}_\perp\right), \tag{3.69}$$

el numerador del propagador puede reescribirse como

$$\not{p} + m = \sum_h u_h(\tilde{p})\bar{u}_h(\tilde{p}) + \gamma^+\left(p^- - \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2 + m^2}{2p^+}\right). \tag{3.70}$$

Por lo tanto,

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0} = \frac{i}{2p^+\,(p^- - \tilde{p}^- + i0)}\sum_h u_h(\tilde{p})\bar{u}_h(\tilde{p}) + \frac{i\gamma^+}{2p^+}. \tag{3.71}$$

Por analogía, para $p^+ < 0$ se obtiene

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0} = \frac{-\,i}{2p^+\,(p^- - \tilde{p}^- - i0)}\sum_h v_h(-\tilde{p})\bar{v}_h(-\tilde{p}) + \frac{i\gamma^+}{2p^+}. \tag{3.72}$$

La función de onda $\Psi^{(\lambda,\sigma,h,\bar{h})}_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}$ recibe cuatro contribuciones distintas. Dos de ellas corresponden a la emisión del fotón final desde la línea del cuark y se originan, respectivamente, en el primer y el segundo término del lado derecho de (3.71), son la parte ordinaria y la parte instantánea del propagador intermedio. Las otras dos contribuciones se obtienen cuando la emisión tiene lugar desde la línea del anticuark, y se descomponen en una contribución regular y una instantánea. Para la emisión desde el cuark, las dos configuraciones básicas se muestran en la Fig. 14. Las contribuciones análogas con emisión desde el anticuark se obtienen de manera completamente similar.

De manera análoga a la construcción presentada en la subsección 2.3, en particular en torno a las ecs. (2.55)–(2.58), los numeradores de estas contribuciones quedan determinados por las correspondientes estructuras espinoriales asociadas a los vértices electromagnéticos y al propagador fermiónico intermedio. Para la emisión desde la línea del cuark tenemos

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}^*_\gamma(k)\left(\hat{k}_c + \hat{k} + m\right)\hat{\varepsilon}_\gamma(q)\,v_{\bar{h}}(q - k - k_c)\,, \tag{3.73}$$

y

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}^*(k)\,\gamma^+\hat{\varepsilon}(q)\,v_{\bar{h}}(q - k - k_c)\,, \tag{3.74}$$

que corresponden, respectivamente, a la parte ordinaria y a la parte instantánea del propagador intermedio. Para la emisión desde la línea del anticuark contribuyen las estructuras

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}_\gamma(q)\left(\hat{q} - \hat{k}_c - m\right)\hat{\varepsilon}^*(k)\,v_{\bar{h}}(q - k - k_c)\,, \tag{3.75}$$

y

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}(q)\gamma^+\hat{\varepsilon}^*(k)\,v_{\bar{h}}(q - k - k_c)\,. \tag{3.76}$$

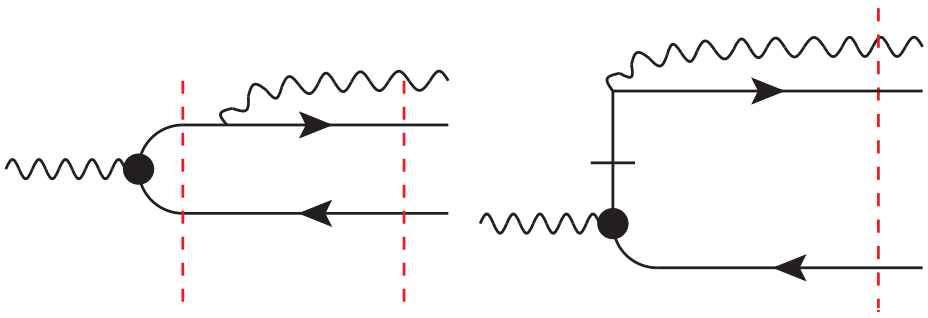


Figura 14: Contribuciones a la función de onda $\Psi_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}$ asociadas a la emisión del fotón final desde la línea del cuark. A la izquierda se muestra la contribución ordinaria, con un propagador fermiónico intermedio y dos denominadores de energía del cono de luz. A la derecha se muestra la contribución instantánea del propagador, con un único denominador de energía. La línea fermiónica vertical con una pequeña barra horizontal denota la parte instantánea del propagador del cuark. Las líneas verticales rojas indican los estados intermedios que generan los correspondientes denominadores de energía.

Las contribuciones asociadas al primer término de (3.71) contienen dos estados intermedios como se muestra en la Fig.14 y, por lo tanto, tienen dos denominadores de energía del cono de luz. En cambio, la contribución instantánea, proveniente del segundo término de (3.71), es local en el tiempo del cono de luz y sólo lleva un denominador del estado intermedio. Para la emisión del fotón final desde la línea del cuark, los denominadores son

$$\mathrm{ED}_1^{(1)} = q^- - \frac{(\boldsymbol{k}_c + \boldsymbol{k}_\perp^\gamma)^2 + m_c^2}{2(k_c^+ + k^+)} - \frac{\boldsymbol{k}_{\bar{c}}^2 + m_c^2}{2k_{\bar{c}}^+} = -\frac{\boldsymbol{P}^2 + m_c^2}{2q^+ z_1 \bar{z}_1}, \tag{3.77}$$

$$\mathrm{ED}_1^{(2)} = q^- - \frac{\boldsymbol{k}_c^2 + m_c^2}{2k_c^+} - \frac{\boldsymbol{k}_{\bar{c}}^2 + m_c^2}{2k_{\bar{c}}^+} - \frac{(\boldsymbol{k}_\perp^\gamma)^2}{2k^+} = -\frac{\boldsymbol{P}^2}{2q^+ z_1 \bar{z}_1} - \frac{\boldsymbol{K}^2 \bar{z}_1}{2q^+ z_0 z_2} - \frac{m_c^2(z_0 + z_1 z_2)}{2q^+ z_0 z_1 \bar{z}_1}, \tag{3.78}$$

donde

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{k}_{\bar{c}} + z_1 \boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{K} = \frac{z_0}{z_0 + z_2}\left(\boldsymbol{k}_\perp^\gamma - \frac{z_2}{z_0}\boldsymbol{k}_c\right). \tag{3.79}$$

Para la emisión desde la línea del anticuark se obtiene

$$\mathrm{ED}_2^{(1)} = -\frac{\boldsymbol{P}^2 + m_c^2}{2q^+ z_0 \bar{z}_0}, \tag{3.80}$$

$$\mathrm{ED}_2^{(2)} = -\frac{\boldsymbol{P}^2}{2q^+ z_0 \bar{z}_0} - \frac{\boldsymbol{K}^2 \bar{z}_0}{2q^+ z_1 z_2} - \frac{m_c^2(z_1 + z_0 z_2)}{2q^+ z_1 z_0 \bar{z}_0}, \tag{3.81}$$

donde

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}_c - z_0 \boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{K} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}\left(\boldsymbol{k}_\perp^\gamma - \frac{z_2}{z_1}\boldsymbol{k}_{\bar{c}}\right). \tag{3.82}$$

En consecuencia, las contribuciones con emisión desde el cuark están divididas por el producto $\mathrm{ED}_1^{(1)}\mathrm{ED}_1^{(2)}$ en la parte ordinaria y por $\mathrm{ED}_1^{(2)}$ en la parte instantánea (un caso similar se explica en los detalles en [131]). Para la emisión desde el anticuark aparecen $\mathrm{ED}_2^{(1)}\mathrm{ED}_2^{(2)}$ y $\mathrm{ED}_2^{(2)}$, respectivamente.

Para evaluar la amplitud (3.62) en la representación mixta, resulta conveniente reorganizar primero el factor de fase de Fourier que aparece al pasar del espacio de momentos al espacio de coordenadas transversales. La transformada de Fourier de la función de onda $\Psi_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}$ contiene el factor exponencial $\exp\big(i\sum_{a=0}^{2}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{r}_a\big)$. Con el fin de identificar las combinaciones cinemáticas naturales para el problema de tres cuerpos, se han introducido las variables $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{K}$[4], que permiten separar el movimiento relativo dentro de los subsistemas relevantes.

Para la emisión desde la línea del cuark, el exponente puede reescribirse como

$$\sum_{a=0}^{2}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{P}\cdot\left(\frac{z_0\boldsymbol{r}_0+z_2\boldsymbol{r}_2}{z_0+z_2}-\boldsymbol{r}_1\right)+\boldsymbol{q}\cdot(z_0\boldsymbol{r}_0+z_1\boldsymbol{r}_1+z_2\boldsymbol{r}_2)\,. \tag{3.83}$$

Esta descomposición muestra que $\boldsymbol{K}$ es conjugada de Fourier a la distancia entre el fotón y el cuark emisor, mientras que $\boldsymbol{P}$ es conjugada a la distancia entre el anticuark y el centro transversal del subsistema cuark–fotón. En este sentido, los coeficientes que acompañan a $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{q}$ juegan el papel de coordenadas de Jacobi del problema de tres cuerpos. De manera completamente análoga, para la emisión desde la línea del anticuark se obtiene

$$\sum_{a=0}^{2}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\boldsymbol{P}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0-\frac{z_1\boldsymbol{r}_1+z_2\boldsymbol{r}_2}{z_1+z_2}\right)+\boldsymbol{q}\cdot(z_0\boldsymbol{r}_0+z_1\boldsymbol{r}_1+z_2\boldsymbol{r}_2)\,. \tag{3.84}$$

Esta elección de variables simplifica la transformada de Fourier necesaria para obtener las funciones de onda en el espacio de coordenadas transversales.

Para combinar las contribuciones asociadas a la emisión desde la línea del cuark y desde la línea del anticuark, resulta conveniente reparametrizar las fracciones longitudinales en términos de la variable ζ, que representa la fracción de momento del cuark en el subproceso $\gamma\to q\bar{q}$. En el caso de la emisión desde la línea del cuark, introducimos

$$z_0=\zeta-\bar{\alpha},\qquad z_1=1-\zeta,\qquad z_2=1-\alpha \tag{3.85}$$

y para la emisión desde la línea del anticuark

$$z_0=1-\zeta,\qquad z_1=\zeta-\bar{\alpha},\qquad z_2=1-\alpha. \tag{3.86}$$

Los límites de integración se deducen de la positividad de las componentes "+" de los partones (c y $\bar{c}$) en el estado intermedio, así tenemos $\bar{\alpha}\le\zeta\le 1$.

Sin embargo, la evaluación directa de la transformada de Fourier de $\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r}_{10},\boldsymbol{b}_{10})$ no es conveniente, ya que esta amplitud expone el comportamiento de saturación y el límite $r_{10}\to\infty$ no conmuta, en general, con el límite $b_{10}\to\infty$. En cambio, este problema desaparece para el producto $\phi_{\mathcal{Q}}(z,\boldsymbol{r}_{10})\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r}_{10},\boldsymbol{b}_{10})$, dado que las funciones de onda del cuarkonio y sus derivadas están fuertemente suprimidas a grandes distancias. Por esta razón, resulta natural

[4]Aquí se sigue la notación de [131].

introducir las imágenes de Fourier del producto $\mathcal{N}\phi_{\mathcal{Q}}$, en lugar de transformar por separado la amplitud dipolar. Para η_c y χ_{cJ} definimos

$$n_{\Phi_{\mathcal{Q}}}(x,\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{s},z)=\int d^2\boldsymbol{b}\,d^2\boldsymbol{r}\,e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}}e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})\,\phi_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{r},z)\,, \tag{3.87}$$

$$n^{(\pm)}_{\Phi_{\mathcal{Q}}}(x,\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{s},z)=\int d^2\boldsymbol{b}\,d^2\boldsymbol{r}\,e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}}e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})\,e^{\pm i\phi_r}\,\partial_r\phi_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{r},z) \tag{3.88}$$

y solamente para el mesón χ_{cJ}

$$n^{(2,\pm2)}_{\Phi_{\chi c}}(x,\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{s},z)=\int d^2\boldsymbol{b}\,d^2\boldsymbol{r}\,e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}}e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})\,e^{\pm2i\phi_r}\,\Delta_r^{(-)}\phi_{\chi_c}(\boldsymbol{r},z)\,, \tag{3.89}$$

$$n^{(2,0)}_{\Phi_{\chi c}}(x,\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{s},z)=\int d^2\boldsymbol{b}\,d^2\boldsymbol{r}\,e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}}e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\mathcal{N}(x,\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})\,\Delta_r^{(+)}\phi_{\chi_c}(\boldsymbol{r},z)\,, \tag{3.90}$$

donde

$$\Delta_r^{(+)}\equiv\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r,\qquad \Delta_r^{(-)}\equiv\partial_r^2-\frac{1}{r}\partial_r. \tag{3.91}$$

Las funciones ϕ_{η_c}, ϕ_{χ_c} y las derivadas aparecen en las definiciones anteriores a partir de las funciones de onda del mesón pesado en la forma explícita. En lo que sigue se adoptarán las parametrizaciones fenomenológicas de [55, 158].

Para evaluar explícitamente la amplitud (3.62), es necesario calcular, por una parte, las estructuras espinoriales (3.77)–(3.81) que determinan la función de onda $\Psi^{(\lambda,\sigma,h,\bar{h})}_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}$, y por otra, LCWF del mesón final (3.58). El denominador de energía asociado a (3.58) se obtiene por analogía con el caso de la función de onda del fotón considerado en (2.59) anteriormente. La evaluación explícita de las cadenas de espinores como la convolución con la función de onda del cuarkonio fueron realizadas en *Mathematica* usando la forma explícita de los espinores [129, 130].

Con todas estas definiciones, la sustitución de las estructuras espinoriales, los denominadores de energía y las funciones n_Φ en la expresión general (3.62) permite obtener directamente las amplitudes de helicidad del proceso. En lugar de escribir explícitamente las funciones de onda intermedias y sus convoluciones, se presentan a continuación las expresiones finales para las amplitudes, ya simplificadas en términos de las variables ζ, $\boldsymbol{P}_{(i)}$, $\boldsymbol{K}_{(i)}$ y de las funciones n_Φ. En el caso del canal $\eta_c\gamma$, las amplitudes independientes son $\mathcal{A}^{(+,+)}$ y $\mathcal{A}^{(+,-)}$, mientras que las restantes se obtienen por conjugación compleja. Para los estados χ_{cJ} existe la relación $\left[\mathcal{A}^{(\lambda;\,\sigma,\,H)}\right]^*=\mathcal{A}^{(-\lambda;\,-\sigma,\,-H)}$[5].

En el caso del canal $\eta_c\gamma$, las amplitudes independientes toman la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(+,+)}_{1,\eta_c}&=\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\times \\ &\times\left\{\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\frac{4i\pi\,\alpha^2 n_{\Phi_{\eta_c}}(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z)\left[2m_c^2\bar{\alpha}^2-\,(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\right]}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.\end{aligned} \tag{3.92}$$

[5] Es la misma relación que existe en el marco de la factorización colineal

$$+\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\frac{8\pi\,\alpha^2\bar{\alpha}^2\zeta n^{(-)}_{\Phi_{\eta_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}^{(+,-)}_{1,\eta_c}=\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\times \tag{3.93}$$
$$\times\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\frac{8\pi\alpha^2\bar{\zeta}\;n^{(-)}_{\Phi_{\eta_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left(P_{(1)x}-iP_{(1)y}\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

donde $z=\dfrac{\zeta-\bar{\alpha}}{\alpha}$, $\bar{\kappa}=e^2e_c^2/\pi=16\alpha_{\rm em}/9$ y también se han introducido las siguientes notaciones abreviadas

$$\boldsymbol{K}_{(1)}=\frac{\boldsymbol{\ell}\bar{\alpha}+\zeta\left(\alpha\boldsymbol{k}^\gamma_\perp-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right)}{\zeta-\bar{\alpha}}=\frac{\boldsymbol{P}_{(1)}\bar{\alpha}}{\zeta-\bar{\alpha}}+\frac{\left(\alpha\boldsymbol{k}^\gamma_\perp-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right)}{\alpha}, \tag{3.94}$$

$$\boldsymbol{P}_{(1)}=\boldsymbol{\ell}+\frac{\bar{\zeta}}{\alpha}\left(\alpha\boldsymbol{k}^\gamma_\perp-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right). \tag{3.95}$$

Para los mesones χ_{c0} y χ_{c1}, las amplitudes independientes se escriben como

$$\mathcal{A}^{(+;+)}_{1,\,\chi_{c0}}=4\pi\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.96}$$
$$\times\Bigg\{\frac{\alpha\bar{\alpha}\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\left[(\zeta-\bar{\alpha})\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)-\bar{\alpha}m_c^2\right]n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}$$
$$-\frac{i\,\alpha\bar{\alpha}^2\zeta\,n^{(-)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}^{(+;-)}_{1,\,\chi_{c0}}=-4i\pi\bar{\kappa}m_c\alpha^2\bar{\alpha}^2\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}^3}{\zeta-\bar{\alpha}}}n^{(+)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.97}$$
$$\times\frac{\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}^{(+;+,+1)}_{1,\,\chi_{c1}}=4\pi\bar{\kappa}\alpha\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{2\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\zeta\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\times \tag{3.98}$$
$$\times\frac{\left(\bar{\zeta}\bar{\alpha}\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)(2\zeta-\bar{\alpha})n^{(-)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)-i\zeta m_c^2 n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}^{(+;-,+1)}_{1,\,\chi_{c1}}=-4i\pi\bar{\kappa}m_c^2\alpha\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.99}$$

$$\times \frac{\zeta\left(K_{(1)x}+iK_{(1)y}\right)\sqrt{2\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)}\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c1}}^{(+;+,0)}=-4\bar{\alpha}\alpha^2\pi\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.100}$$
$$\times\left\{\frac{\bar{\alpha}\zeta m_c\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)n_{\Phi_{\chi_c}}^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.$$
$$\left.-i\frac{n_{\Phi_{\chi_c}}^{(2,\,0)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left[(\zeta-\bar{\alpha})\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)+m_c^2\bar{\alpha}\right]}{m_c\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right\},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c1}}^{(+;-,0)}=-4\pi\bar{\kappa}m_c\bar{\alpha}^2\alpha^2\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}^3}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.101}$$
$$\times\frac{n_{\Phi_{\chi_c}}^{(+)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c1}}^{(+;+,-1)}=4\pi\bar{\kappa}\alpha\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\,n_{\Phi_{\chi_c}}^{(+)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.102}$$
$$\times\frac{\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\zeta\left(2\zeta-1\right)\sqrt{2\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)}}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c1}}^{(+;-,-1)}=4\pi\bar{\kappa}\alpha^2\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{2\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.103}$$
$$\times\frac{\zeta^2\,\left(K_{(1)x}+iK_{(1)y}\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)n_{\Phi_{\chi_c}}^{(+)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c1}}^{(+;-,-1)}=0. \tag{3.104}$$

Finalmente, para el mesón χ_{c2} se tienen

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;+,+2)}=8i\pi\bar{\kappa}\,\alpha\bar{\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}^3}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.105}$$
$$\times\frac{\left[m_c^2\bar{\alpha}+\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)(\zeta-\bar{\alpha})\right]n_{\Phi_{\chi_c}}^{(2,\,-2)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;-,+2)}=8\pi\bar{\kappa}m_c^2\bar{\alpha}^2\alpha^2\int_{\bar{\alpha}}^{1}d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}^3}{\zeta-\bar{\alpha}}}n_{\Phi_{\chi_c}}^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.106}$$

$$\times \frac{\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)}{\left(\bar{\zeta}+\bar{\alpha}\right)^2\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;+,+1)}=8im_c\pi\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\zeta\times \tag{3.107}$$

$$\times\left\{\frac{\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)(\zeta-\bar{\alpha})\left(8\zeta^3+4\zeta^2(\alpha-4)-6\zeta(\alpha-2)+3\alpha-4\right)n_{\Phi_{\chi_c}}^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.$$

$$\left.-\,i\,\frac{\zeta m_c^2\alpha n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,z\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right\},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;-,+1)}=8\pi\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\zeta\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\times \tag{3.108}$$

$$\times\left\{\frac{\alpha\left(\alpha-\bar{\zeta}\right)m_c^2 n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{i\zeta\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)^2 n_{\Phi_{\chi_c}}^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right\},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;+,0)}=-4\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\bar{\kappa}\alpha\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.109}$$

$$\times\left\{\frac{2m_c^2\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left[\bar{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)+m_c\left(m_c\bar{\alpha}^2-\zeta^2\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\right)\right]}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.$$

$$-\frac{2im_c^2\zeta\alpha_{\chi_c}\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\bar{\alpha}^2 n_{\Phi_{\chi_c}}^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}$$

$$\left.-\frac{3\zeta\alpha\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\left[\bar{\zeta}\left(2\zeta+\alpha\right)-1\right]n_{\Phi_{\chi_c}}^{(2,0)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right\},$$

$$\mathcal{A}_{1,\,\chi_{c2}}^{(+;-,0)}=4\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\bar{\kappa}\alpha\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.110}$$

$$\times\left\{\frac{2\zeta m_c^3\left(K_{(1)x}+iK_{(1)y}\right)(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)n_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}+\right.$$

$$\left.-\frac{2i\alpha\bar{\alpha}^2\bar{\zeta}m_c^2\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)n_{\Phi_{\chi_c}}^{(+)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\;-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}_{(1)}^2+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}_{(1)}^2+(\zeta-\bar{\alpha})\;\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(1)}^2+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\right.$$

$$-\frac{3\alpha\zeta^2\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\left(K_{(1)x}+iK_{(1)y}\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)n^{(2,0)}_{\Phi_{\chi c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}^{(+;+,-1)}_{1,\,\chi_{c2}}=8i\pi\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\zeta\bar{\zeta}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}n^{(+)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.111}$$
$$\times\frac{\left(K_{(1)x}-iK_{(1)y}\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\left(8\zeta^3+4\zeta^2(3\alpha-4)-6\zeta(\alpha-2)\bar{\alpha}+(\alpha-4)\bar{\alpha}^2\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}^{(+;-,-1)}_{1,\,\chi_{c2}}=32i\pi\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\zeta^2\bar{\zeta}\sqrt{\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})}n^{(+)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\times \tag{3.112}$$
$$\times\frac{\left(K_{(1)x}+iK_{(1)y}\right)\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}^{(+;+,-2)}_{1,\,\chi_{c2}}=-8i\alpha\bar{\alpha}\pi\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta-\bar{\alpha}}}\times \tag{3.113}$$
$$\times\Bigg\{\frac{n^{(2,+2)}_{\Phi_{\chi_c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)\left[(\zeta-\bar{\alpha})\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)+m_c^2\bar{\alpha}\right](\zeta-\bar{\alpha})}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}$$
$$+\frac{im_c^2\zeta\alpha\bar{\alpha}\left(P_{(1)x}+iP_{(1)y}\right)n^{(+)}_{\Phi_{\chi c}}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp,\,z\right)}{\left(\boldsymbol{P}^2_{(1)}+m_c^2\right)\left(\bar{\zeta}\,\zeta^2\boldsymbol{K}^2_{(1)}+(\zeta-\bar{\alpha})\,\bar{\alpha}\boldsymbol{P}^2_{(1)}+\alpha\bar{\alpha}\zeta m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}^{(+;-,-2)}_{1,\,\chi_{c2}}=0. \tag{3.114}$$

Consideremos ahora la contribución $\mathcal{A}_2$, correspondiente a la emisión del fotón final después de la interacción con el blanco. En este caso, la amplitud se expresa en términos del producto de dos funciones de onda: la función de onda del fotón, ya introducida en (2.60), y la amplitud de transición $\Psi_{\gamma\mathcal{Q}\to\bar{c}c}$. Como se muestra en la Fig. 15, para la emisión desde la línea del cuark aparecen nuevamente una contribución ordinaria y una contribución instantánea, mientras que las contribuciones análogas con emisión desde la línea del anticuark se obtienen de manera completamente similar.

En términos de las funciones de onda y la amplitud dipolar, la contribución $\mathcal{A}_2$ toma la forma análoga a la ec. (3.62)

$$\mathcal{A}_2^{(\lambda,\sigma)}=\int_0^\alpha dz_0\prod_{k=0}^{2}\left(d^2\boldsymbol{r}_k\right)\,\Psi^{(\sigma,h,\bar{h})\dagger}_{\gamma\,\chi_c\to\bar{c}c}\left(z_0,\,z_1,\,z_2,\,\boldsymbol{r}_0,\,\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{r}_2\right)\Psi^{(\lambda,\,h,\bar{h})}_{\gamma}\left(\frac{z_0}{z_0+z_1},\,\boldsymbol{r}_{10}\right)\times \tag{3.115}$$
$$\times\mathcal{N}\left(x,\,\boldsymbol{r}_{10},\,\boldsymbol{b}_{10}\right)\exp\left[-i\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\cdot\left(\boldsymbol{b}_{10}-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\boldsymbol{r}_\gamma\right)-i\boldsymbol{k}^\gamma_\perp\cdot\left(\boldsymbol{r}_\gamma+\boldsymbol{b}_{10}\right)\right].$$

El cálculo de $\Psi_{\bar{c}c\to\gamma\mathcal{Q}}$ sigue la misma lógica que en el caso de $\mathcal{A}_1$: el propagador intermedio se descompone en una parte ordinaria y una parte instantánea, y los numeradores se obtienen

a partir de las ecs. (3.73)–(3.76) reemplazando el vértice del fotón inicial, de momento q, por el vértice de mesón $\Gamma_{\mathcal{Q}}$. Para la emisión desde la línea del cuark se reciben las estructuras

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}_\gamma(k)\left(\hat{k}_c-\hat{k}+m\right)\Gamma_{\mathcal{Q}}\,v_{\bar{h}}(q+k-k_c)\,, \tag{3.116}$$

y

$$\bar{u}_h(k_c)\,\hat{\varepsilon}_\gamma(k)\,\gamma^+\Gamma_{\mathcal{Q}}\,v_{\bar{h}}(q+k-k_c)\,. \tag{3.117}$$

Las contribuciones con emisión desde la línea del anticuark se obtienen de forma análoga, a saber

$$\bar{u}_h(k_c)\,\Gamma_{\mathcal{Q}}\left(\hat{q}-\hat{k}_c-m\right)\hat{\varepsilon}(k)\,v_{\bar{h}}(q+k-k_c)\,, \tag{3.118}$$

y

$$\bar{u}_h(k_c)\,\Gamma_{\mathcal{Q}}\gamma^+\hat{\varepsilon}(k)\,v_{\bar{h}}(q+k-k_c)\,. \tag{3.119}$$

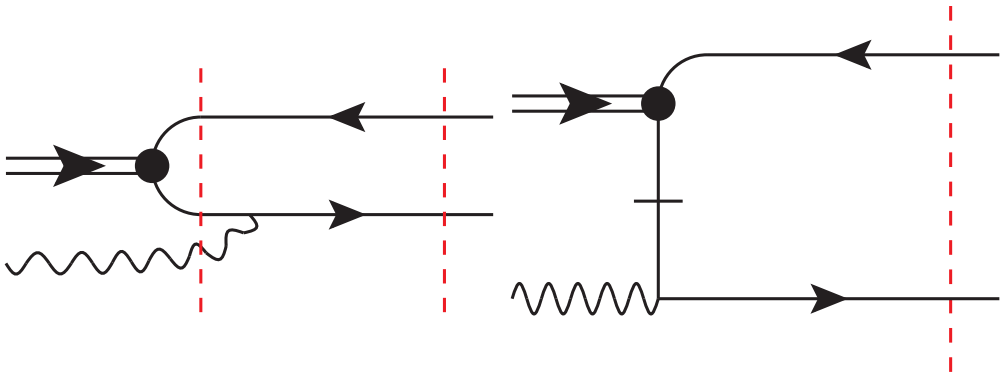


Figura 15: Contribuciones a la función de onda $\Psi_{\gamma\mathcal{Q}\to\bar{c}c}$ asociadas a la emisión del fotón final desde la línea del cuark. A la izquierda se muestra la contribución ordinaria, con un propagador fermiónico intermedio y dos denominadores de energía del cono de luz. A la derecha se muestra la contribución instantánea del propagador, con un único denominador de energía.

Los denominadores de energía para $\Psi_{\gamma\mathcal{Q}\to\bar{c}c}$ se construyen siguiendo la misma lógica que en el caso de $\Psi_{\gamma\to\gamma\bar{c}c}$, pero con la cinemática distinta. En particular, además del reemplazo $k^\mu\to-k^\mu$ para el fotón final, mantenemos la parametrización longitudinal introducida anteriormente, con z_0 y z_1 definidos por la condición (3.57). Para la emisión desde la línea del cuark, los denominadores toman la forma

$$\widetilde{\mathrm{ED}}_1^{(1)}=-\frac{\boldsymbol{P}^2+m_c^2(1-2z_1)^2}{p_{\mathcal{Q}}^+z_1\bar{z}_1}, \tag{3.120}$$

$$\widetilde{\mathrm{ED}}_1^{(2)}=-\frac{\boldsymbol{P}^2}{p_{\mathcal{Q}}^+z_1\bar{z}_1}-\frac{\boldsymbol{K}^2\bar{z}_1}{p_{\mathcal{Q}}^+z_0z_2}+\frac{m_c^2(z_2+4z_0z_1-1)}{p_{\mathcal{Q}}^+z_0z_1}, \tag{3.121}$$

donde

$$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{k}_{\bar{c}}+z_1\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp},\qquad \boldsymbol{K}=\frac{z_0}{z_0+z_2}\left(\boldsymbol{k}_\perp^\gamma-\frac{z_2}{z_0}\boldsymbol{k}_c\right). \tag{3.122}$$

Cuando la emisión tiene lugar desde la línea del anticuark, los denominadores adoptan la forma

$$\widetilde{\mathrm{ED}}_2^{(1)} = -\frac{\boldsymbol{P}^2 + m_c^2(1-2z_0)^2}{p_{\mathcal{Q}}^+ z_0 \bar{z}_0}, \tag{3.123}$$

$$\widetilde{\mathrm{ED}}_2^{(2)} = -\frac{\boldsymbol{P}^2}{p_{\mathcal{Q}}^+ z_0 \bar{z}_0} - \frac{\boldsymbol{K}^2 \bar{z}_0}{p_{\mathcal{Q}}^+ z_1 z_2} + \frac{m_c^2(z_2 + 4z_0 z_1 - 1)}{p_{\mathcal{Q}}^+ z_0 z_1}, \tag{3.124}$$

donde

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}_c - z_0 \boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}, \qquad \boldsymbol{K} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}\left(\boldsymbol{k}_\perp^\gamma - \frac{z_2}{z_1}\boldsymbol{k}_{\bar{c}}\right). \tag{3.125}$$

Al igual que en el caso de $\mathcal{A}_1$, reparametrizamos las fracciones longitudinales en términos de la variable ζ. Aunque ζ conserva la misma interpretación física, la cinemática de $\mathcal{A}_2$ hace que su definición explícita tenga una forma distinta. Para la contribución con emisión desde la línea del cuark, definimos

$$\zeta = \frac{k_c^+}{k_c^+ + k_{\bar{c}}^+} = \frac{z_0}{z_0 + z_1}, \tag{3.126}$$

mientras que para la contribución con emisión desde la línea del anticuark se tiene

$$\zeta = \frac{k_{\bar{c}}^+}{k_c^+ + k_{\bar{c}}^+} = 1 - \frac{z_0}{z_0 + z_1}. \tag{3.127}$$

En ambos casos, la condición de positividad de las componentes "+" en el estado intermedio exige que

$$\zeta \geq \frac{k^+}{q^+} = \bar{\alpha}. \tag{3.128}$$

Como se mencionó anteriormente, la transformada de Fourier de la amplitud dipolar $\mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ presenta ciertas dificultades numéricas debido a su saturación a grandes distancias. Por el contrario, el producto $\mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})\,\Psi^\gamma(\zeta, \boldsymbol{r})$ posee una imagen de Fourier bien definida: las funciones de Bessel K_0 y K_1 suprimen el integrando a grandes r, mientras que la transparencia de color, es decir, la supresión de $\mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$ a pequeñas distancias, garantiza la convergencia de las integrales también en el límite $\boldsymbol{r} \to 0$ como se mencionó en la subsección 2.3. Por esta razón, se introducen las funciones

$$n_0(x, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{s}) = \int d^2\boldsymbol{b}\, d^2\boldsymbol{r}\, e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\, \mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})\, K_0(m\boldsymbol{r}), \tag{3.129}$$

$$n_1^{(\pm)}(x, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{s}) = \int d^2\boldsymbol{b}\, d^2\boldsymbol{r}\, e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b}}\, \mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})\, K_1(m\boldsymbol{r}) e^{\pm i\phi_r}. \tag{3.130}$$

En términos de estas funciones, el producto $\mathcal{N}(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})\,\Psi^\gamma(\zeta, \boldsymbol{r})$ puede reescribirse mediante las correspondientes transformadas inversas de Fourier. Con estas definiciones, la parte $\mathcal{A}_2$ se expresa en términos de n_0 y $n_1^{(\pm)}$. Para el mesón η_c, las amplitudes correspondientes son

$$\mathcal{A}_{2,\eta_c}^{(+,+)} = \bar{\kappa} m_c \int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \times \tag{3.131}$$

$$\times \left\{ \frac{-i n_0(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp)\, \bar{\zeta}\sqrt{\bar{\zeta}(\zeta - \bar{\alpha})}\left[\zeta\,\bar{\alpha}\left(\alpha^2 \boldsymbol{P}_{(2)}^2 + \left(\alpha - 2\bar{\zeta}\right)^2 m_c^2\right) - 2m_c^2 \alpha^2 \bar{\alpha}^2\right] \phi_{\eta_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)}{\alpha^2\left(\bar{\zeta}(\zeta - \bar{\alpha})^2 \boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta - \bar{\alpha})\left(\alpha - 4\zeta\,\bar{\zeta}\right) m_c^2\right)} \right.$$

$$+\frac{2m_c\zeta\bar{\zeta}\sqrt{\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})}\bar{\alpha}^2 n_1^{(+)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\phi_{\eta_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\eta_c}^{(+,-)}=\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\times \tag{3.132}$$
$$\times\frac{2m_c\,\zeta\bar{\zeta}\bar{\alpha}^2\sqrt{\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})}n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\phi_{\eta_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)},$$

donde

$$\boldsymbol{K}_{(2)}=-\frac{\boldsymbol{\ell}\bar{\alpha}}{\zeta}+\frac{(\zeta-\bar{\alpha})}{\alpha^2\zeta}\left(\alpha\boldsymbol{k}_\perp^\gamma-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right)=-\frac{\boldsymbol{P}_{(2)}\bar{\alpha}}{\zeta}+\frac{\left(\alpha\boldsymbol{k}_\perp^\gamma-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right)}{\alpha}, \tag{3.133}$$

$$\boldsymbol{P}_{(2)}=\boldsymbol{\ell}+\frac{\bar{\zeta}}{\alpha^2}\left(\alpha\boldsymbol{k}_\perp^\gamma-\bar{\alpha}\boldsymbol{p}_{\mathcal{Q}\perp}\right). \tag{3.134}$$

Para los mesones χ_{c0} y χ_{c1}, se obtienen las siguientes amplitudes independientes

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c0}}^{(+;+)}=-2m_c\alpha\bar{\alpha}\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^3}}{(\zeta-\bar{\alpha})^2}\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\times \tag{3.135}$$
$$\times\Bigg\{\frac{\zeta n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2+m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}$$
$$+\frac{m_c\bar{\alpha}\left(m_c n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(z_c-\frac{1}{2}\right)+i\zeta\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c0}}^{(+;-)}=2i\bar{\kappa}m_c^2\alpha\bar{\alpha}^2\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^5} \tag{3.136}$$
$$\times\frac{\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c1}}^{(+;+,+1)}=2m_c\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{2\,\zeta\,\bar{\zeta}^3}\,(K_x+iK_y)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.137}$$
$$\times\left[\left((2\zeta-1)\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)(\zeta-\bar{\alpha})\,n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)-i\zeta m_c n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)(2\zeta+\alpha-2)\right)\right],$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c1}}^{(+;-,+1)}=-2im_c\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\sqrt{2\,\zeta\,\bar{\zeta}^3}\left(K_{(2)x}-iK_{(2)y}\right)(2\zeta+\alpha-2)\,\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.138}$$

$$\times \left[m_c n_0 \left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)(\zeta-\bar{\alpha}) + i\zeta\alpha \left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right) n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right],$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c1}}^{(+;+,0)} = i\alpha\,\bar{\alpha}\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}}}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.139}$$

$$\times \left\{ m_c n_0\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left[\bar{\alpha}\alpha^2\bar{\zeta}\left(m_c^2(z_c-1/2)^2 - \boldsymbol{P}_{(2)}^2\right) - \alpha\zeta\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2 + m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]\right.$$

$$\left. + \, i\, n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)\quad \left(2m_c^2\bar{\alpha}\alpha^2\zeta\,\bar{\zeta} - \alpha\zeta^2\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2 + m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)\right\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c1}}^{(+;-,0)} = \bar{\kappa}\alpha\bar{\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^3}\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.140}$$

$$\times\, n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\zeta\alpha\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2 + m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\bar{\zeta}m_c^2\bar{\alpha}\right),$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c1}}^{(+;+,-1)} = -2\bar{\kappa}m_c\bar{\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\times \tag{3.141}$$

$$\times \frac{\left[\sqrt{2\zeta\,\bar{\zeta}^5}\,(\zeta-\bar{\alpha})\left(K_{(2)x}+iK_{(2)y}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)(2\zeta-\bar{\alpha})\,n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right]}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)},$$

$$\mathcal{A}_{2\,\chi_{c1}}^{(+;-,-1)} = 0. \tag{3.142}$$

Queda finalmente el caso del mesón χ_{c2}, para el cual

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;+,+2)} = 4m_c^2\bar{\alpha}^2\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^5}\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)^2 n_0\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}, \tag{3.143}$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;-,+2)} = 4i\bar{\kappa}m_c\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \frac{\alpha\bar{\alpha}\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^5}\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.144}$$

$$\times \left(\zeta\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2 + m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right) - m_c^2\bar{\alpha}\right),$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;+,+1)} = -\frac{\bar{\kappa}}{2\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}\left(K_{(2)x}+iK_{(2)y}\right)}{\left(\bar{\zeta}\,(\zeta-\bar{\alpha})^2\,\boldsymbol{K}_{(2)}^2 - \zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\zeta-\bar{\alpha})\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.145}$$

$$\times \left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha^2\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)\left\{\zeta m_c\alpha n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)(2\zeta+\alpha-2)\right.$$
$$\left.+i\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(8\zeta^3+4\zeta^2(\alpha-4)-6\zeta(\alpha-2)+3\alpha-4\right)\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;-,+1)}=-\frac{\bar{\kappa}}{2\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}}\left(K_{(2)x}+iK_{(2)y}\right)(2\zeta+\alpha-2)}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.146}$$
$$\times\left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha^2\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)\times$$
$$\times\left(m_c\alpha n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)+i\zeta(2\zeta+\alpha-2)^2\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right),$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;+,0)}=\frac{\bar{\kappa}\bar{\alpha}}{2\sqrt{6}\alpha}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta/\bar{\zeta}}}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.147}$$
$$\times\left\{n_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)(1-2z_c)\times\right.$$
$$\times\left(m_c^4\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}\alpha\right)\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}(1-2\zeta)\alpha\right)+2m_c^2\alpha^4\boldsymbol{P}_{(2)}^2+\alpha^4\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)^2\right)$$
$$+in_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\alpha^2\left(\left(P_{(2)x}+iP_{(2)y}\right)/m_c\right)\left[8\zeta\,\bar{\zeta}^2m_c^4\bar{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\zeta^2\alpha\left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+2\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)\left(m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2+\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)\right]\right\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;-,0)}=\frac{\bar{\kappa}\alpha\bar{\alpha}}{2\sqrt{6}m_c}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{i\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)n_1^{(-)}\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}}}{(\zeta-\bar{\alpha})} \tag{3.148}$$
$$\times\left\{\frac{\zeta\alpha\left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+2\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2+m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\right.$$
$$\left.-\frac{8\bar{\zeta}^2m_c^4\bar{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\right\},$$

$$\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;+,-1)}=\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^1 d\zeta\int\frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\,\boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\bar{\zeta}\zeta}\left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha^2\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right)}{4\alpha\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.149}$$
$$\times\left\{m_cn_0\left(x,\,\boldsymbol{\ell},\,-\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left[\bar{\alpha}^2\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)\left(\alpha-4\bar{\zeta}\right)-\alpha\left(K_{(2)x}+iK_{(2)y}\right)\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-2\bar{\zeta}\right)\right]\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- i n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left[2m_c^2\bar{\alpha}^2\alpha\right. \\
&\left.-(2\zeta-1)\left(K_{(2)x}+iK_{(2)y}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)\left(4\bar{\zeta}^2(2\zeta-1)+\alpha^3-6\bar{\zeta}\alpha^2-3\bar{\zeta}^2(4\zeta-3)\alpha\right)\right]\Big\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;-,-1)} = 2i\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\frac{\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right) n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\zeta\bar{\zeta}\right)^{3/2}}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\times \tag{3.150}
$$

$$
\times\left(K_{(2)x}-iK_{(2)y}\right)\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(z_c-1/2\right)\left(m_c^2\left(-4\bar{\zeta}^2+\alpha^2+4\bar{\zeta}\alpha\right)+\alpha^2\boldsymbol{P}_{(2)}^2\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;+,-2)} = -4m_c\bar{\alpha}\bar{\kappa}\int_{\bar{\alpha}}^{1} d\zeta \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2}\phi_{\chi_c}\left(z,\, \boldsymbol{P}_{(2)}\right)\sqrt{\zeta\,\bar{\zeta}^3}\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)\times \qquad (3.151)\\
\times\left\{\frac{m_c\bar{\alpha}\left(\left(P_{(2)x}-iP_{(2)y}\right)n_0\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)-i\zeta m_c\alpha n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\right)}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\right.\\
\left.+\frac{i\alpha\zeta^2 n_1^{(-)}\left(x,\, \boldsymbol{\ell},\, -\boldsymbol{\Delta}_\perp\right)\left(\boldsymbol{P}_{(2)}^2+m_c^2\left(z_c-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(\bar{\zeta}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)^2\boldsymbol{K}_{(2)}^2-\zeta\,\alpha\bar{\alpha}\boldsymbol{P}_{(2)}^2-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\zeta-\bar{\alpha}\right)\left(\alpha-4\zeta\,\bar{\zeta}\right)m_c^2\right)}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A}_{2,\,\chi_{c2}}^{(+;-,-2)} = 0. \tag{3.152}
$$

Algunas de las expresiones presentadas para $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, parecen contener una singularidad de la función integrando en el límite inferior $\zeta = \bar{\alpha}$. Sin embargo, esta singularidad es regularizada por la propia función de onda del cuarkonio. De hecho, en este límite el primer argumento la función escalar $\phi_{\mathcal{Q}}(z, \boldsymbol{P}_{(2)})$ tiende a 0. A partir de la parametrización explícita (3.59), se ve que el factor exponencial suprime la región $z \to 0$. Por lo tanto, las singularidades en los extremos del intervalo de integración no generan divergencias en las amplitudes.

Al igual que en el marco de la factorización colineal, es posible expandir las amplitudes alrededor del punto $z_{\chi_c} = 1/2$, $\boldsymbol{P} = 0$ e identificar el primer término no nulo con los elementos de LDME NRQCD introducidos en la subsección 3.1. En este límite, el formalismo del CGC también puede formularse en términos de la descripción no relativista del cuarkonio. Sin embargo, la implementación explícita de esta expansión produce expresiones extraordinariamente largas, ya que requiere expandir los integrandos y tomar derivadas de las funciones que definen las amplitudes. Por esta razón, en esta tesis se trabajará directamente con las expresiones completas de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, integrando explícitamente sobre $d^2\ell\, d\zeta$ en el espacio de momentos y preservando así toda la dependencia cinemática del problema.

4. Predicciones fenomenológicas y discusión

El objetivo de esta sección es presentar la descripción fenomenológica de la fotoproducción exclusiva de los pares $\gamma\eta_c$ y $\gamma\chi_{cJ}$ en dos regímenes cinemáticos complementarios. Como se discutió en las secciones anteriores, cuando existe una escala dura adecuada la descripción natural a x_{Bj} moderado se formula en el marco de la factorización colineal, donde la amplitud se expresa en términos de las GPDs gluónicas. En esta tesis, para la descripción colineal se utiliza la parametrización de GK, introducida en la subsección 2.1, con la escala de factorización fijada en $\mu = m_c$. En el límite de x_{Bj} pequeña resulta más conveniente utilizar el formalismo del CGC, en el cual la información no perturbativa del blanco nuclear queda codificada en la amplitud dipolar. En este análisis se usa la parametrización bCGC, definida en la ec. (2.46), cuyas propiedades y ventajas fenomenológicas fueron discutidas en la sección 2.3.

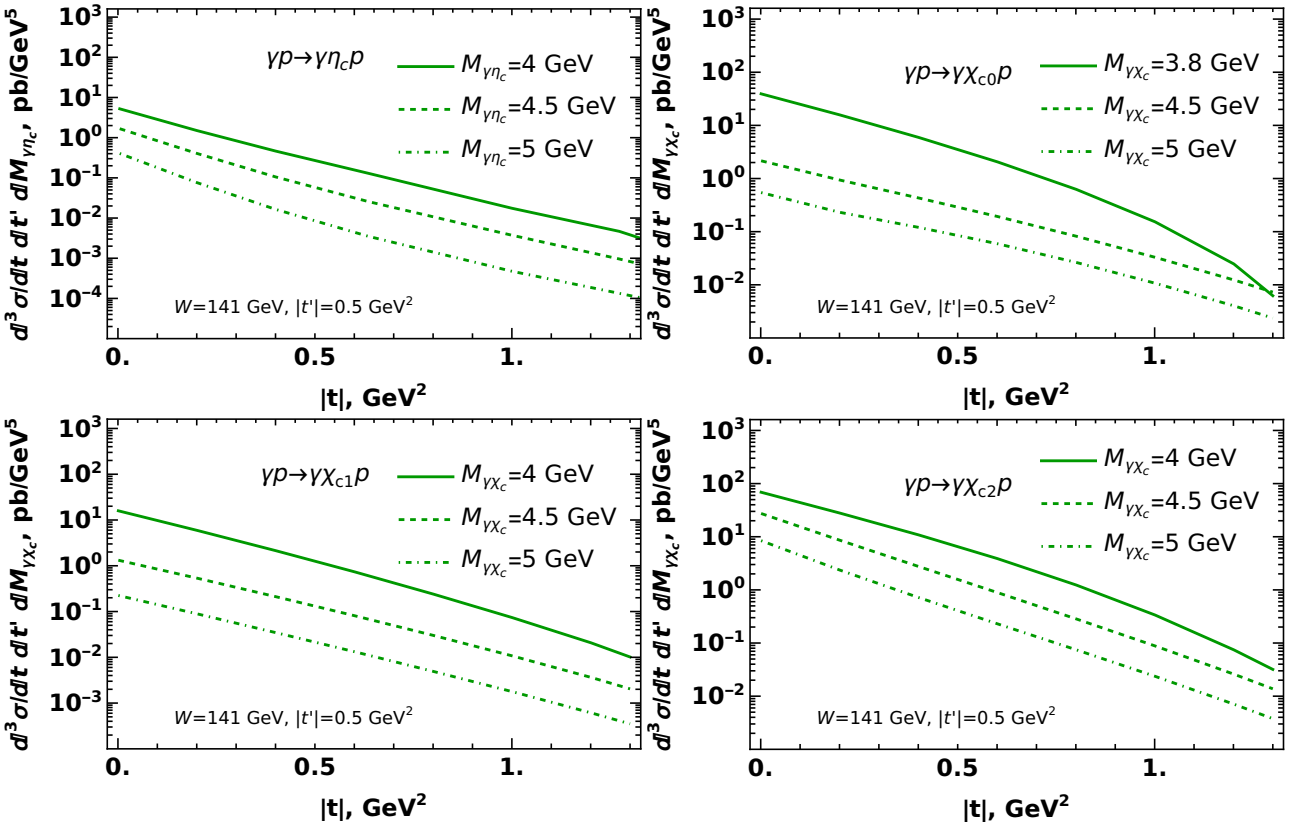


Figura 16: Dependencia de la sección eficaz diferencial en el momento transferido $|t|$ en el marco del CGC.

4.1. Observables diferenciales

Comenzamos la presentación de los resultados con el análisis de la sección eficaz diferencial, prestando atención a su dependencia en cuatro variables cinemáticas: el momento transferido invariante t, la variable $|t'|$ definida en la ec. (3.11), la masa invariante del par producido

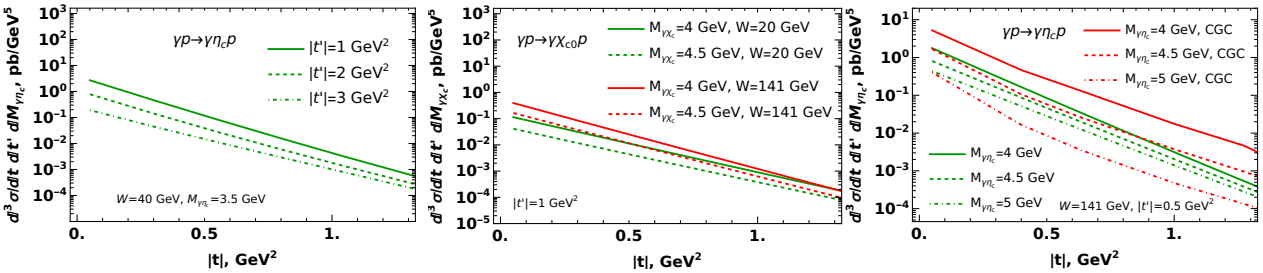


Figura 17: Dependencia en $|t|$ de la sección eficaz diferencial. Panel izquierdo: resultados para distintos valores de $|t'|$ en el marco de la factorización colineal. Panel central: comparación de los resultados para $W = 20$ y $W = 141$ GeV en el marco de la factorización colineal. Panel derecho: comparación entre los resultados obtenidos en la factorización colineal (líneas verdes) y en el marco del CGC (líneas rojas).

$M_{\gamma\mathcal{Q}}$, donde $\mathcal{Q}$ denota η_c o χ_{cJ}, y la energía en el sistema γp, caracterizada por la variable W definida en la ec. (3.9).

La dependencia en t resulta ser la más simple de interpretar: tanto en el marco de la factorización colineal como en el formalismo del CGC, la sección eficaz cae rápidamente al aumentar $|t|$, como se muestra en las Figs. 16 y 17. Este comportamiento es natural en los procesos exclusivos: el aumento de $|t|$ reduce la probabilidad de que el protón permanezca intacto en el estado final. Desde el punto de vista cinemático, esta caída pronunciada implica que la producción está dominada por la región de pequeño momento transferido, donde $|t|$ y $\boldsymbol{\Delta}_\perp^2$ son pequeños. En este caso, el fotón final y el cuarkonio se producen predominantemente con momentos transversales de magnitudes comparables y orientados en direcciones opuestas (3.8). Por esta razón, en lo que sigue se concentrará la atención en la región que aporta la contribución dominante correspondiente a $\boldsymbol{\Delta}_\perp^2 = 0$ o $|t| = |t_{\text{mín}}| = \dfrac{4\xi^2 m_N^2}{1-\xi^2}$. En los gráficos donde no se indique explícitamente el valor de t, se asumirá por defecto este valor.

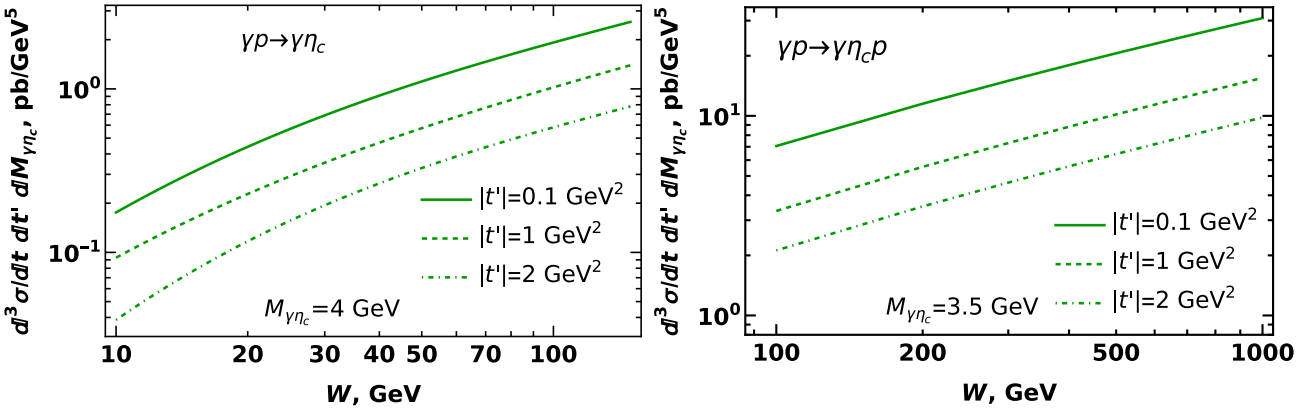


Figura 18: Dependencia de la sección eficaz diferencial en la energía W para $\gamma\eta_c$ en la factorización colineal (panel izquierdo) y en el marco del CGC (panel derecho).

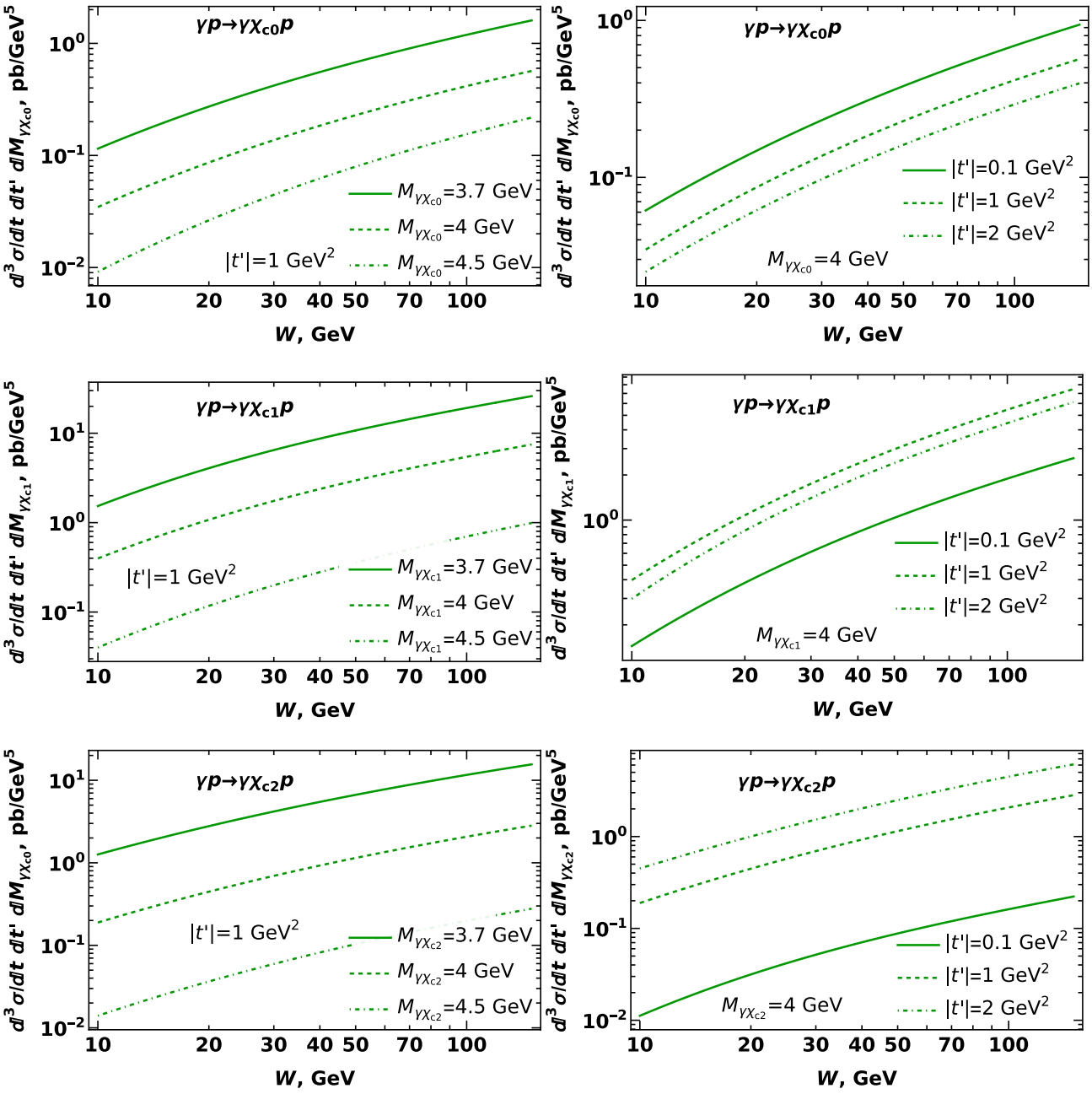


Figura 19: Dependencia de la sección eficaz diferencial en la energía W para $\gamma\chi_{cJ}$ en la factorización colineal.

La forma de la dependencia en t está determinada por la parametrización de la parte no perturbativa del blanco. En particular, tanto en la factorización colineal como en el formalismo del CGC, la dependencia en el momento transferido presenta un carácter de tipo Regge, de modo que al aumentar la energía la pendiente en t se vuelve más pronunciada (como ya se discutió en la subsección 2.1). Este comportamiento puede verse explícitamente en el panel central de la Fig. 17, donde se comparan los resultados obtenidos para $W = 20$ y $W = 141$ GeV. En el formalismo del CGC la forma de la dependencia en t está gobernada principalmente por la dependencia en el parámetro de impacto de la amplitud dipolar o,

equivalentemente, por las funciones n introducidas en la sección 3.3. En consecuencia, en ambos marcos teóricos la dependencia en t está controlada principalmente por el objeto no perturbativo del blanco, mientras que la dependencia en $|t'|$ y $M_{\gamma\mathcal{Q}}$ variables cinemáticas está factorizada que se observa claramente en las Figs. 16 y 17. Sin embargo, una excepción importante aparece cuando $M_{\gamma\mathcal{Q}} \to M_{\mathcal{Q}}$: en este límite, la dependencia en t se vuelve más empinada debido a una restricción puramente cinemática: la región permitida de t está acotada por

$$|t| \leq M_{\gamma\mathcal{Q}}^2 - M_{\mathcal{Q}}^2 - |t'|. \tag{4.1}$$

Por lo tanto, cuando $M_{\gamma\mathcal{Q}}$ tiende a $M_{\mathcal{Q}}$, el intervalo permitido de $|t|$ se reduce y aparece una supresión adicional (véase el panel derecho de la Fig. 17).

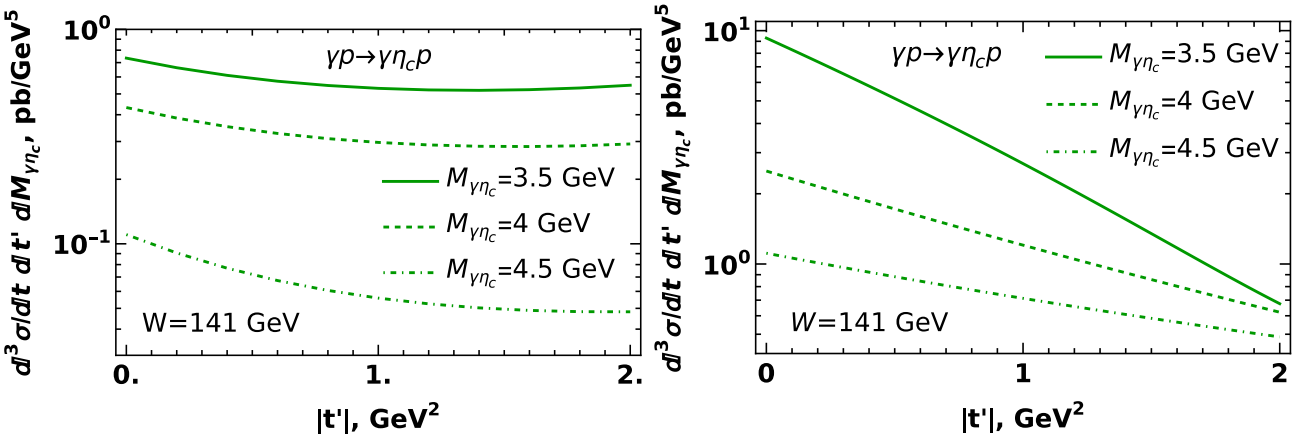


Figura 20: Dependencia de la sección eficaz diferencial en el momento transferido $|t'|$ para $\gamma\eta_c$ en el marco del CGC (panel izquierdo) y de la factorización colineal (panel derecho).

En el panel derecho de la Fig. 17 se comparan directamente los resultados obtenidos en la factorización colineal y en el CGC para el canal $\gamma p \to \gamma\eta_c p$ en una misma configuración cinemática. Se observa que las dependencias en t son muy similares en ambos casos y las secciones eficaces diferenciales tienen el mismo orden de magnitud. Diferencias cuantitativas de este tipo son razonables, ya que las dos descripciones se construyen a partir de objetos no perturbativos distintos y ajustados a conjuntos de datos diferentes. Además, la cinemática correspondiente a $W = 141$ GeV se encuentra ya en una región donde la formulación de x_{Bj} pequeña resulta más adecuada, mientras que la descripción basada en GPDs debe entenderse aquí como una extrapolación del formalismo colineal hacia energías relativamente altas. Al descender a energías más moderadas la formulación del CGC deja de encontrarse en su dominio natural de aplicación. En este sentido, no existe un valor de W en el que ambos enfoques deberían coincidir: sus regiones de validez se solapan sólo parcialmente y la comparación entre ellos debe entenderse sobre todo como una verificación de consistencia cualitativa y de orden de magnitud.

La dependencia en la energía W constituye otra observable cuya forma está determinada

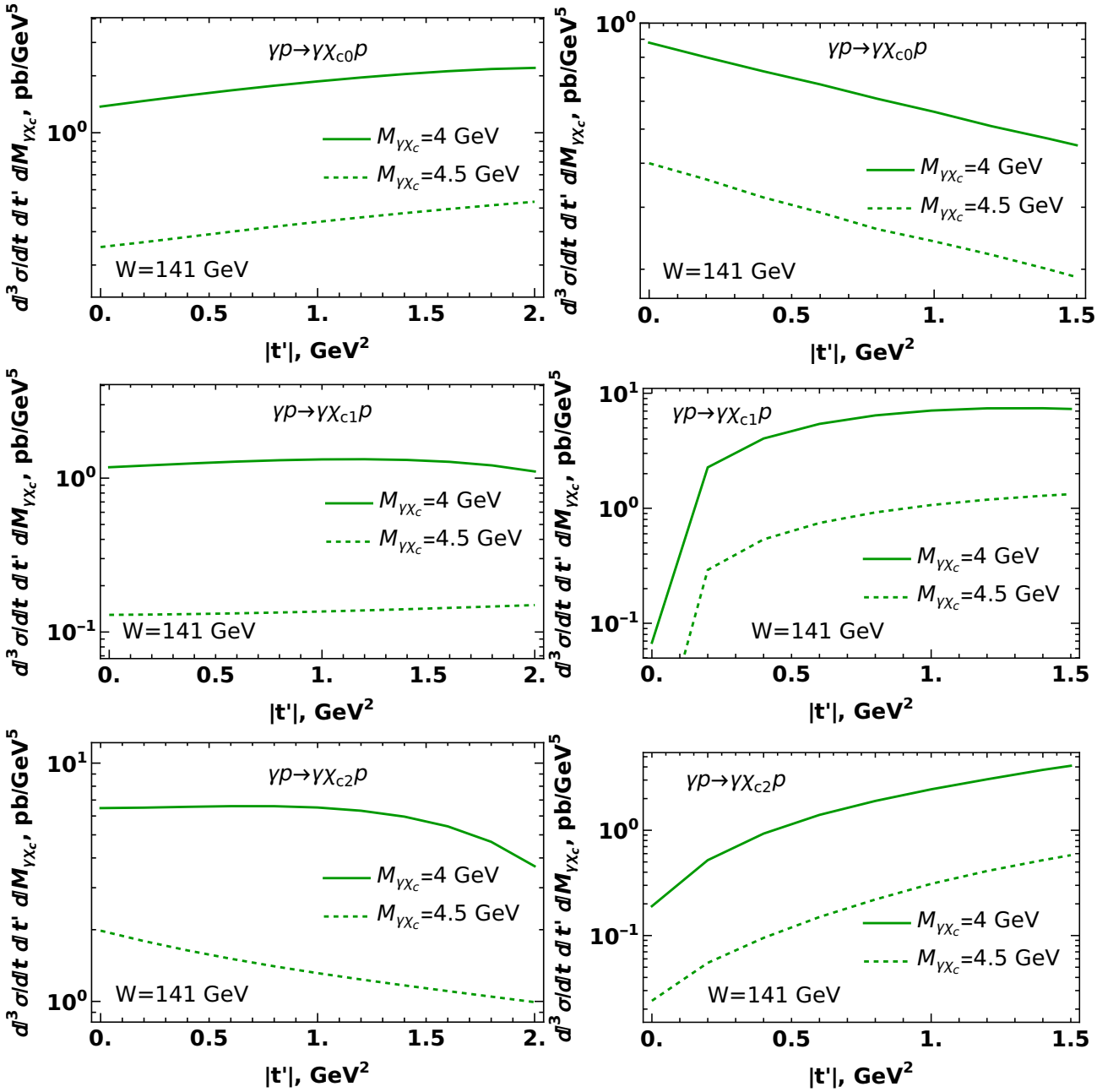


Figura 21: Dependencia de la sección eficaz diferencial en $|t'|$ para $\gamma\chi_{cJ}$. La columna izquierda corresponde a los resultados obtenidos en el marco del CGC, mientras que la columna derecha muestra los resultados en la factorización colineal.

principalmente por la parametrización de la parte no perturbativa del blanco. En las Figs. 18 y 19 se observa que la sección eficaz diferencial crece con W tanto en la factorización colineal como en el marco del CGC. Además, la dependencia es aproximadamente lineal en coordenadas doble logarítmicas, lo que indica un comportamiento de tipo potencia.

En la factorización colineal, este crecimiento puede entenderse a partir de que la amplitud recibe su contribución dominante de la GPD gluónica en la región $|x| \sim \xi \sim 1/W^2$. Dado que en la parametrización utilizada la GPD crece al disminuir x, y que en la región de x pequeña puede aproximarse esquemáticamente como $H_g(x,\xi,t) \sim x^{-\delta_g}$, la convolución con las

funciones de coeficiente implica un crecimiento de tipo

$$\frac{d\sigma(W)}{dt\,dt'\,dM_{\gamma\mathcal{Q}}} \sim \xi^{-2\delta_g} \sim W^{4\delta_g}, \tag{4.2}$$

donde $\delta_g \approx 0{,}2 - 0{,}3$.

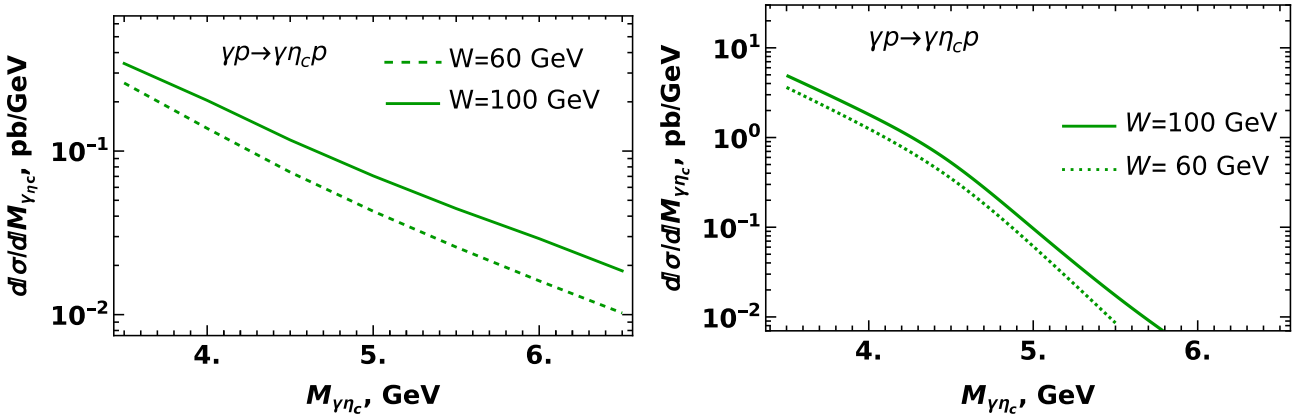


Figura 22: Dependencia de la sección eficaz diferencial en la masa invariante $M_{\gamma\eta_c}$ en el marco de la factorización colineal (panel izquierdo) y del CGC (panel derecho).

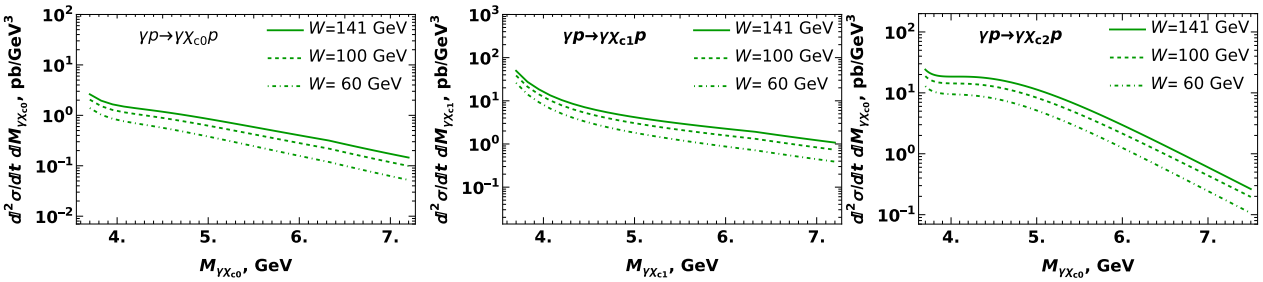


Figura 23: Dependencia de la sección eficaz diferencial en la masa invariante $M_{\gamma\chi_{cJ}}$ en el marco de la factorización colineal.

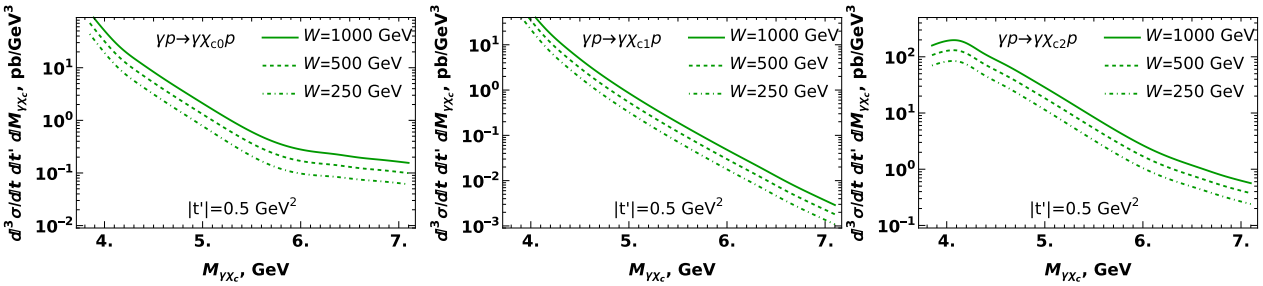


Figura 24: Dependencia de la sección eficaz diferencial en la masa invariante $M_{\gamma\chi_{cJ}}$ en el marco del CGC.

En el marco del CGC, el crecimiento con la energía también se describe por una ley de potencia

$$\frac{d\sigma(W)}{dt\,dt'\,dM_{\gamma\mathcal{Q}}} \sim x^{-\lambda} \sim W^{2\alpha}, \tag{4.3}$$

donde α depende sólo débilmente de las demás variables cinemáticas. En este caso, el origen de la dependencia en W puede entenderse a partir de la parametrización bCGC introducida en la ec. (2.46). En la rama de pequeños dipolos[6], $\boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b}) \leq 2$, la amplitud dipolar toma la forma

$$N(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}) \propto \left(\boldsymbol{r}\, Q_s(x_{\mathrm{Bj}}, \boldsymbol{b})\right)^{2\gamma_{\mathrm{eff}}} . \tag{4.4}$$

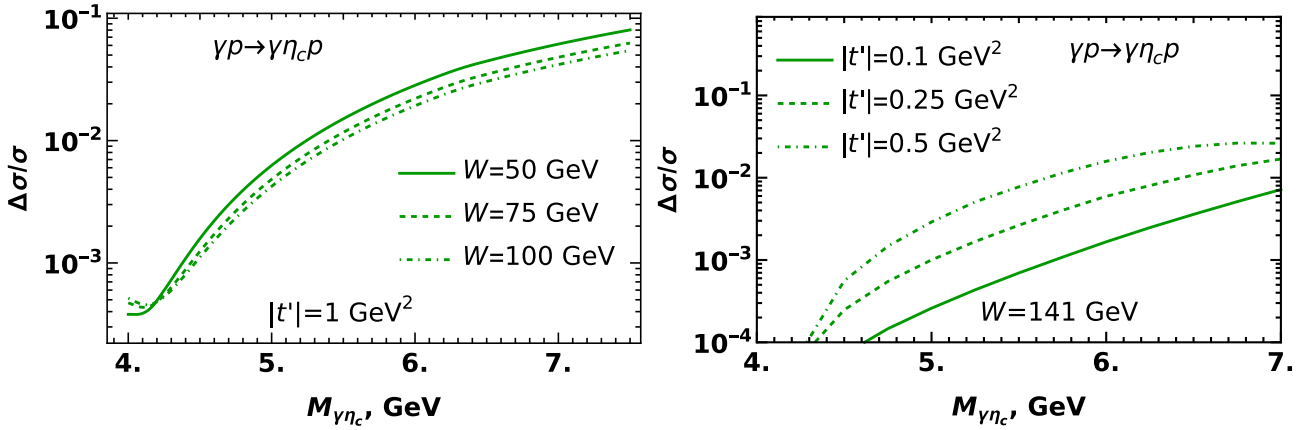


Figura 25: Relación entre las secciones eficaces con y sin cambio de helicidad del fotón como función de la masa invariante del sistema $\gamma\eta_c$ en el marco de la factorización colineal (panel izquierdo) y del CGC (panel derecho).

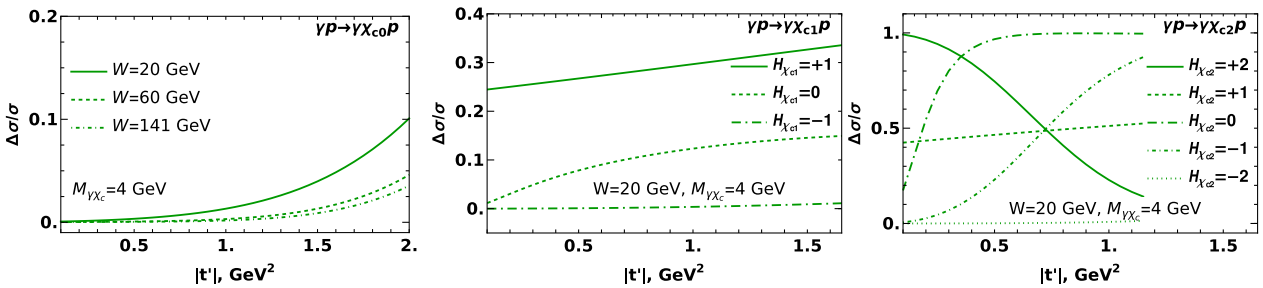


Figura 26: Relación entre las secciones eficaces con y sin cambio de helicidad del fotón como función de la masa invariante del sistema $\gamma\chi_{cJ}$ en el marco de la factorización colineal.

En este modelo Q_s aumenta al disminuir x_{Bj}, la amplitud crece con la energía, reflejando el aumento de la densidad gluónica a x pequeña. La dependencia energética extraída numéricamente es compatible con la estructura de la rama de $\boldsymbol{r}$ pequeño, y puede resumirse mediante un exponente efectivo

$$\alpha \approx 2\lambda \left\langle \gamma_{\mathrm{eff}} \right\rangle, \tag{4.5}$$

donde para los valores relevantes en este análisis $\alpha \sim 0{,}3 - 0{,}4$. Por lo tanto, aunque la interpretación detallada del exponente efectivo difiere de la empleada en la factorización colineal,

[6]Esta es precisamente la región relevante en este caso, ya que el dipolo está formado por cuarks pesados y, por lo tanto, su tamaño transversal característico es pequeño, estando controlado por la masa del cuark pesado.

en ambos marcos teóricos el crecimiento con W está controlado principalmente por el comportamiento a x pequeña del objeto no perturbativo del blanco. En este sentido, la variable W ocupa un lugar similar al de la dependencia en t: en ambos casos, la forma global de la curva está gobernada principalmente por la estructura no perturbativa incorporada en la parametrización empleada.

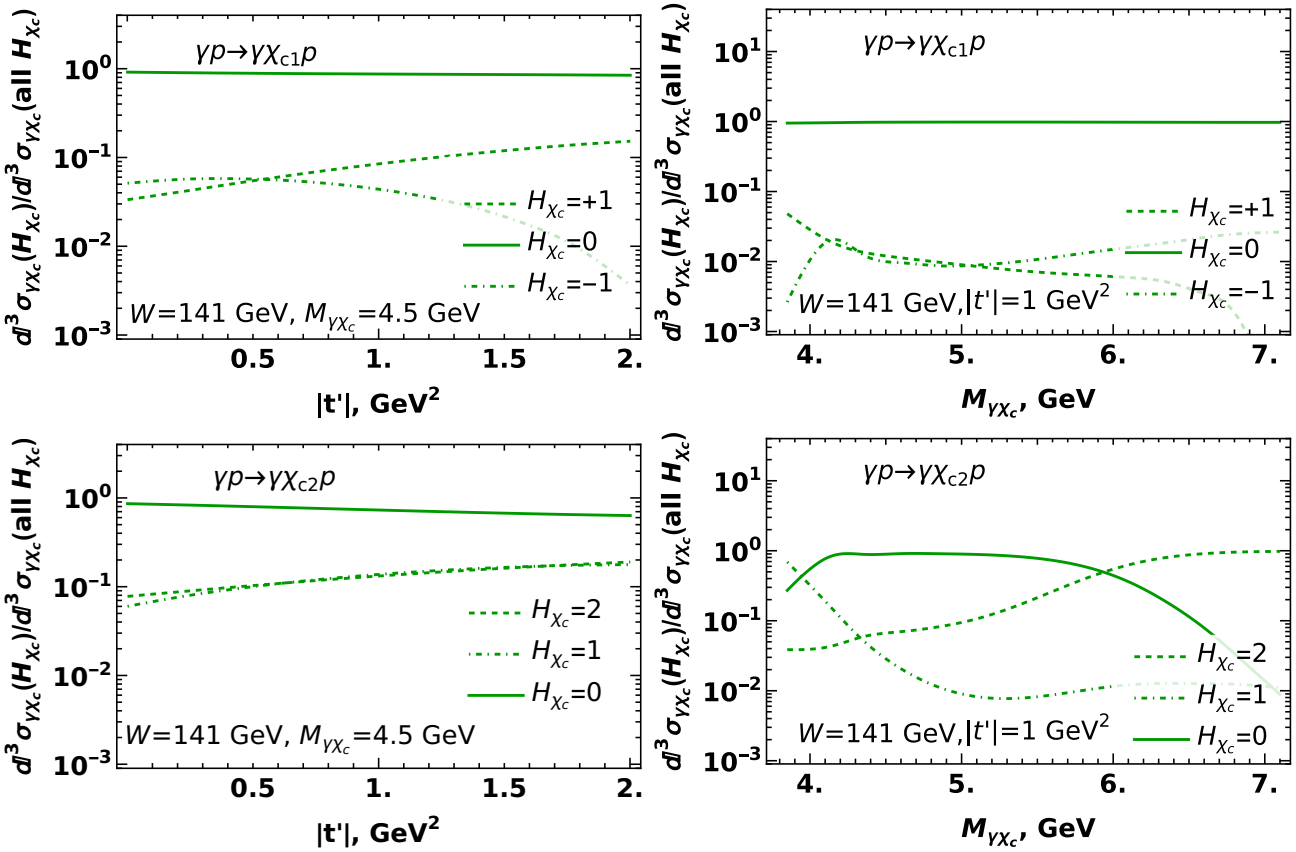


Figura 27: Las contribuciones relativas de las distintas componentes de helicidad de χ_{c1} y χ_{c2} a la sección eficaz diferencial, como función de las variables cinemáticas t' y $M_{\gamma\chi_c}$ (en el marco del CGC). En la línea inferior (correspondiente a χ_{c2}) no se muestran las contribuciones, numéricamente despreciables, de las componentes con helicidad negativa.

Hasta este momento se han considerado dos variables, t y W, cuya dependencia está gobernada en gran medida por la parametrización de la parte no perturbativa del blanco. En ambos casos, tanto en la factorización colineal como en el marco del CGC, la forma global de las curvas refleja principalmente la estructura incorporada en las GPDs gluónicas o en la amplitud dipolar. La situación cambia al pasar a la variable t'. En este caso, la dependencia ya no está determinada principalmente por el objeto no perturbativo del blanco, sino por la parte perturbativa de la amplitud, es decir, por las funciones de coeficiente y las funciones de onda del estado final. Por ello, la dependencia en $|t'|$,mostrada en las Figs. 20 y 21, es menos universal que la observada para t y W, y resulta más sensible a las diferencias estructurales. Además, t' está relacionado con los momentos transversales del mesón y del fotón en el estado

final y, por lo tanto, con su orientación relativa. En particular, los valores extremos $|t'|_{\text{mín}} \simeq 0$ y $|t'|_{\text{máx}} = M_{\gamma\mathcal{Q}}^2 - M_{\mathcal{Q}}^2$ corresponden a configuraciones límite en las que el momento transversal relativo se anula.

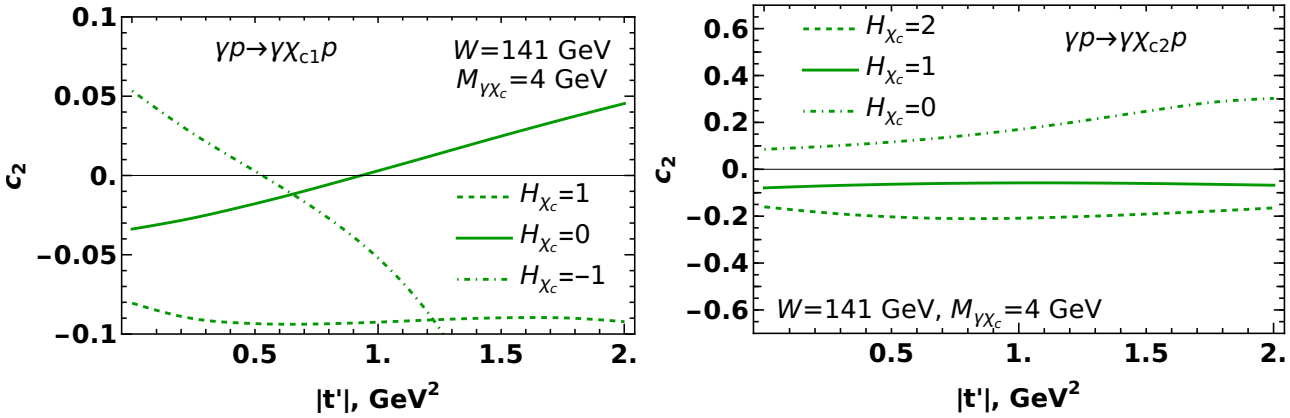


Figura 28: Los armónicos angulares c_2 de la sección eficaz de electroproducción (3.24), para distintas componentes de helicidad de los mesones χ_{c1} y χ_{c2} en el marco del CGC (consideramos que la polarización del fotón final es "-1"). En el panel derecho (correspondiente a χ_{c2}) no se muestran las asimetrías de las contribuciones con H_{χ_c} negativas porque son numéricamente despreciables. Además, se supone que el parámetro ϵ, definido en (3.22), tiene el valor $\epsilon = 0{,}5$.

La masa invariante $M_{\gamma\mathcal{Q}}$ es la otra variable muy importante que está determinada por la parte perturbativa del blanco. En la factorización colineal, la dependencia en $M_{\gamma\mathcal{Q}}$ está dominada por factores cinemáticos presentes en las funciones de coeficiente. En particular, para el canal $\gamma\eta_c$ la fuerte disminución de la sección eficaz diferencial con $M_{\gamma\eta_c}$ proviene del factor $1/(r^2-1) = M_{\eta_c}^2/\left(M_{\gamma\eta_c}^2 - M_{\eta_c}^2\right)$, que aparece en las funciones de coeficiente (3.35)–(3.36), junto con el factor adicional $\sim 1/M_{\gamma\eta_c}$ presente en la sección eficaz diferencial (3.17). Como resultado, el panel izquierdo de la Fig. 22 muestra una caída pronunciada, parecida a una ley de potencia negativa. Para los canales $\gamma\chi_{cJ}$, mostrados en la Fig. 23, la tendencia general es análoga: la sección eficaz disminuye al crecer $M_{\gamma\chi_{cJ}}$, aunque en este caso la dependencia es más compleja. Por un lado, las funciones de coeficiente tienen una estructura más elaborada que en el canal $\gamma\eta_c$, lo que modifica la forma detallada de la supresión. Por otro lado, al aumentar $M_{\gamma\chi_{cJ}}$ se amplía el intervalo cinemáticamente permitido para la variable longitudinal $\alpha_{\mathcal{Q}}$ definido en la ec. (3.15), ya que disminuye su valor mínimo. El consiguiente aumento del volumen de fase atenúa parcialmente la caída de la sección eficaz, pero no es suficiente para compensarla y por lo tanto la dependencia global con la masa invariante sigue siendo decreciente.

La masa invariante $M_{\gamma\mathcal{Q}}$, junto con la masa del cuarkonio, fija una escala dura característica del proceso y, en particular, controla los momentos transversales relevantes en la amplitud. En el formalismo del CGC, esta propiedad se manifiesta transparentemente, ya que las amplitudes se escriben como convoluciones entre las funciones n y las funciones de onda del cuarkonio

en el espacio de momentos. Al aumentar $M_{\gamma\mathcal{Q}}$, los máximos de estas funciones se separan en el espacio de momentos transversales, de modo que su solapamiento disminuye rápidamente. Dado que en las parametrizaciones empleadas ambas funciones decrecen fuertemente a grandes momentos transversales, esto produce una supresión muy marcada de la sección eficaz al crecer $M_{\gamma\mathcal{Q}}$. Para el canal $\gamma\eta_c$, esta tendencia se manifiesta explícitamente en el panel derecho de la Fig. 22 de forma parecida a una supresión exponencial. En los canales $\gamma\chi_{cJ}$, mostrados en la Fig. 24, la disminución con la masa invariante es menos simple que en el caso de η_c debido a la estructura más complicada de las amplitudes correspondientes a los estados de onda P.

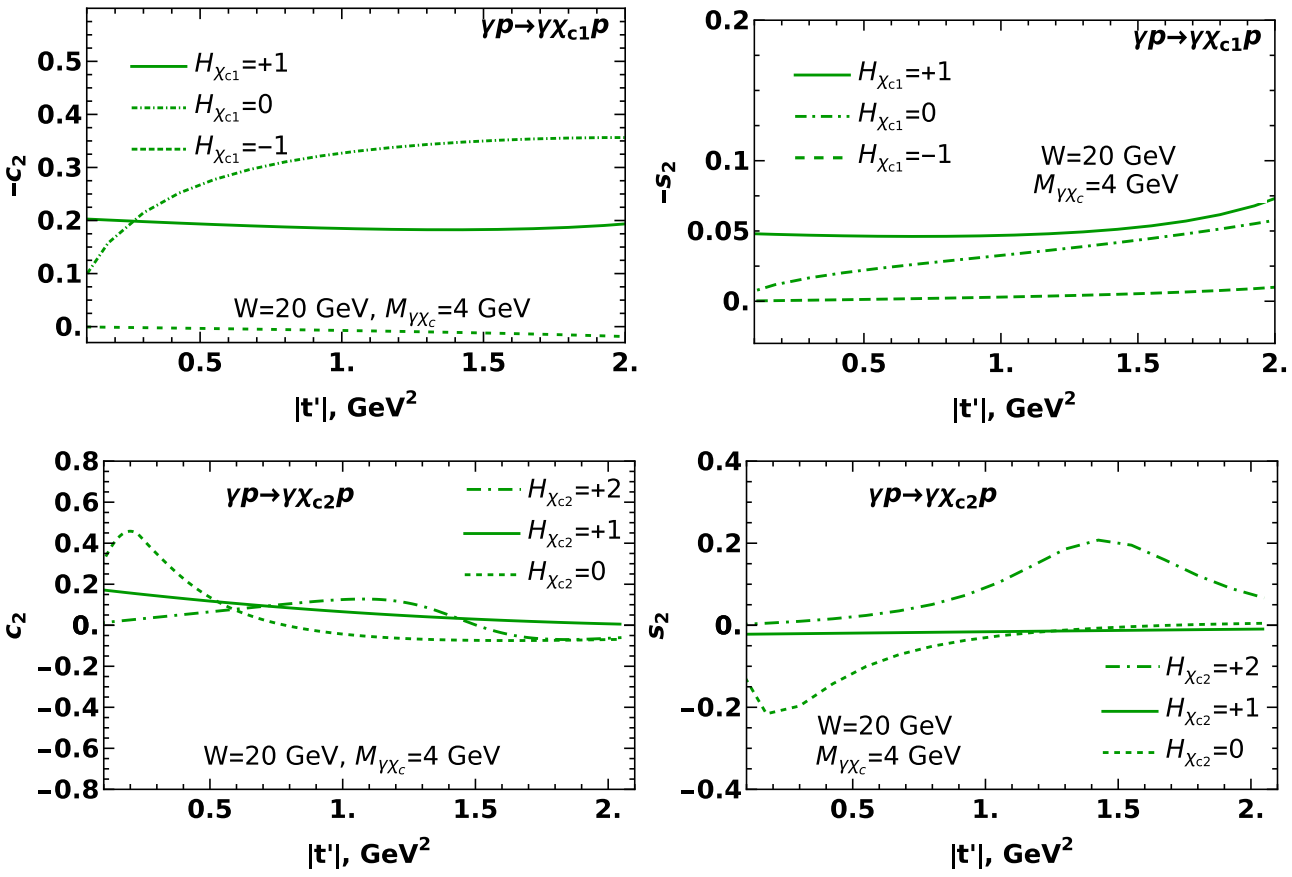


Figura 29: Los armónicos angulares c_2 y s_2 de la sección eficaz de electroproducción (3.24), para distintas componentes de helicidad de los mesones χ_{c1} y χ_{c2} en el marco de la factorización colineal (consideramos que la polarización del fotón final es "-1"). No se muestran las asimetrías de las contribuciones con H_{χ_c} negativas porque son numéricamente despreciables.

Finalmente, se analiza la contribución relativa de distintas combinaciones de polarización del fotón y del cuarkonio a la sección eficaz no polarizada. En las Figs. 25 y 26 se muestra la fracción de la contribución con cambio de helicidad del fotón en la sección eficaz total,

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \equiv \frac{d\sigma^{(+,-,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p}}{d\sigma^{(+,-,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p} + d\sigma^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p}} = \frac{\left|\mathcal{A}^{(+,-,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p}\right|^2}{\left|\mathcal{A}^{(+,-,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p}\right|^2 + \left|\mathcal{A}^{(+,+,H)}_{\gamma p\to\mathcal{Q}\gamma p}\right|^2}, \tag{4.6}$$

donde $(+,-)$ y $(+,+)$ corresponden, respectivamente, a las contribuciones con y sin cambio de helicidad del fotón. Cuando el momento transversal relativo de las partículas finales tiende a cero, $\boldsymbol{p}_\perp \to 0$, el mesón y el fotón se producen casi colinealmente con el eje de colisión y las helicidades coinciden con la proyección del momento angular sobre dicho eje. En este límite, las combinaciones de polarizaciones que no satisfacen la regla de conservación de helicidad, $H_{\gamma,\text{in}} = H_{\gamma,\text{out}} + H_{\mathcal{Q}}$, quedan fuertemente suprimidas. Dado que tanto el límite $|t'| \to 0$ como el límite $M_{\gamma\mathcal{Q}} \to M_{\mathcal{Q}}$ corresponden a $\boldsymbol{p}_\perp \to 0$ (véase la ec. (3.14)), se espera que la fracción con cambio de helicidad sea pequeña.

Esto es precisamente lo que se observa para el canal $\gamma\eta_c$. Como se muestra en ambos paneles de la Fig. 25, la relación $\Delta\sigma/\sigma$ tiende a ser muy pequeña cuando el momento transversal relativo es pequeño. Sin embargo, incluso en la región de gran $M_{\gamma\mathcal{Q}}$ permanece subdominante, sin superar el orden de diez por ciento. Esto confirma que, para $\eta_c\gamma$, la contribución con cambio de helicidad del fotón sigue siendo una corrección relativamente pequeña.

Para los canales $\gamma\chi_{cJ}$ el resultado es mucho más sensible de la proyección de espín del cuarkonio. Para χ_{c0}, el comportamiento es esencialmente análogo al de η_c: en el límite de pequeño $\boldsymbol{p}_\perp$ domina la contribución sin cambio de helicidad, mientras que la componente con cambio de helicidad permanece suprimida. En el caso de χ_{c1} aparecen ya tres proyecciones posibles, y la regla de conservación de helicidad distingue entre ellas. La componente con $H_{\chi_{c1}} = 0$ se comporta de manera similar a χ_{c0}, con una contribución con cambio de helicidad relativamente pequeña a pequeño $|t'|$. Para $H_{\chi_{c1}} = +1$, en cambio, tanto la contribución con cambio de helicidad como la contribución sin cambio de helicidad violan la regla de helicidad por una unidad, de modo que ninguna de las dos domina y la relación $\Delta\sigma/\sigma$ permanece en un nivel no despreciable. Por el contrario, para $H_{\chi_{c1}} = -1$ la contribución con cambio de helicidad viola la regla por dos unidades y queda fuertemente suprimida, lo que explica su pequeñez numérica.

El mismo criterio de conservación de helicidad permite interpretar también el caso de χ_{c2}. Para la proyección $H_{\chi_{c2}} = +2$, la contribución con cambio de helicidad es precisamente la que satisface la regla de conservación en el límite de pequeño $\boldsymbol{p}_\perp$, mientras que la componente sin cambio de helicidad queda suprimida. La situación opuesta ocurre para $H_{\chi_{c2}} = -2$, que representa la componente de menor contribución. Para $H_{\chi_{c2}} = 0$, la curva vuelve a ser similar a la de η_c y χ_{c0}, aunque con una variación más fuerte al aumentar $|t'|$, mientras que para $H_{\chi_{c2}} = +1$ el comportamiento es más parecido al ya descrito para $H_{\chi_{c1}} = +1$.

En la Fig. 27 se muestran las contribuciones relativas de las distintas proyecciones de helicidad del cuarkonio a la sección eficaz no polarizada. En este caso las componentes dominantes son aquellas para las cuales al menos una de las amplitudes (con o sin cambio de helicidad del fotón) satisface la regla de conservación de helicidad en el límite de pequeño $\boldsymbol{p}_\perp$. En este sentido, la jerarquía observada entre las diferentes proyecciones de espín constituye una verificación adicional de que la conservación de helicidad define la estructura de las amplitudes.

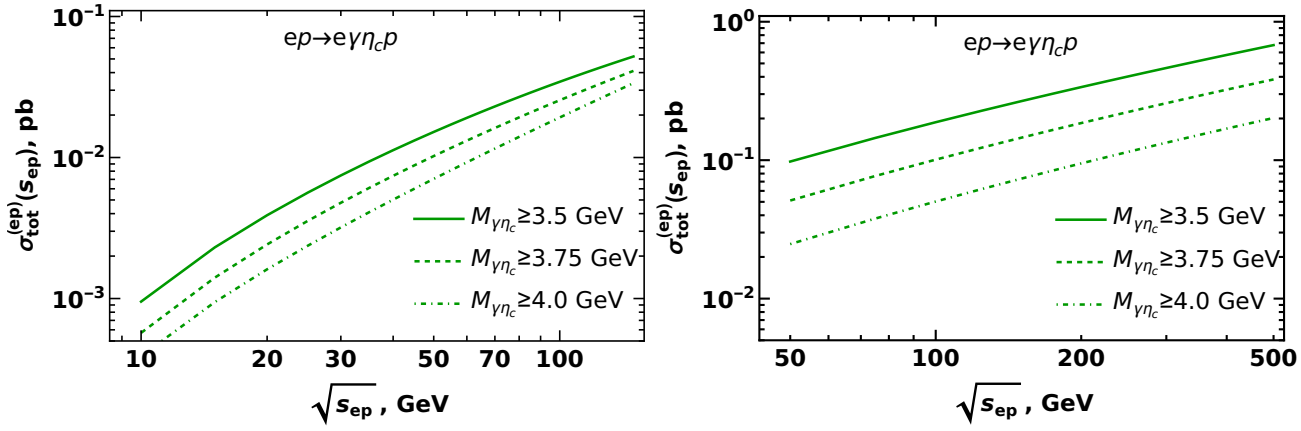


Figura 30: Predicciones para la sección eficaz total de la electroproducción de $\gamma\eta_c$ en función de la energía $\sqrt{s_{ep}}$, para distintos cortes en la masa invariante de los pares $\gamma\eta_c$. El flujo de fotones se integró sobre la virtualidad hasta $Q^2_{\max} \approx 1\,\mathrm{GeV}^2$. Panel izquierdo: la factorización colineal; Panel derecho: el modelo del CGC.

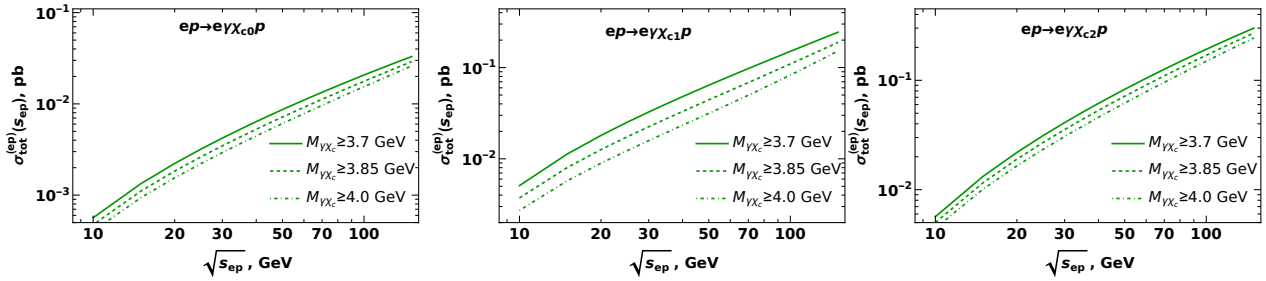


Figura 31: Predicciones en el marco de la factorización colineal para la sección eficaz total de la electroproducción de $\gamma\chi_{cJ}$ en función de la energía $\sqrt{s_{ep}}$, para distintos cortes en la masa invariante de los pares $\gamma\chi_{cJ}$.

Sin embargo, la relación $\Delta\sigma/\sigma$ no constituye por sí misma una observable directamente accesible. Por ejemplo, en una colisión ep, el fotón inicial es virtual y no se observa directamente. En consecuencia, la información sobre las amplitudes con y sin cambio de helicidad del fotón sólo puede extraerse indirectamente, a través de los armónicos angulares c_2 y s_2 definidos en la ec. (3.26). Estos coeficientes contienen la interferencia entre amplitudes con distintas helicidades del fotón inicial y, por lo tanto, proporcionan un medio de exploración experimental de la misma estructura de helicidad analizada antes a nivel de fotoproducción.

Por esta razón, en las Figs. 28 y 29 se muestran los armónicos c_2 y s_2 para los canales con χ_{c1} y χ_{c2}. El caso de χ_{c0} no se incluye aquí porque, al ser de un estado sin espín, la sección eficaz no es sensible al signo de la helicidad final en la misma medida que para χ_{c1} y χ_{c2}, y en consecuencia no genera una estructura angular igualmente informativa en estos observables.

En la factorización colineal, una asimetría angular grande sólo puede aparecer cuando las amplitudes que interfieren son comparables en magnitud. Esto ocurre en el canal χ_{c2} en la

región de pequeño $|t'|$, donde los modos con y sin cambio de helicidad dejan contribuciones del mismo orden. En cambio, para las componentes en las que una de las dos amplitudes domina sobre la otra, los armónicos angulares quedan más suprimidos. Por ello, la estructura observada en la Fig. 29 constituye una reformulación, en términos de observables accesibles en electroproducción, de la misma jerarquía entre amplitudes con y sin cambio de helicidad discutida más arriba.

En el marco del CGC, la amplitud obtenida directamente del formalismo dipolar es imaginaria, mientras que la parte real se restaura sólo como una corrección suplementaria mediante la ec. (3.27). Por esta razón, las fases complejas de las amplitudes que interfieren son casi idénticas y, en consecuencia, el armónico s_2, proporcional al producto de la parte imaginaria y de la parte real, resulta numéricamente muy pequeño. Esto explica por qué en la Fig. 28 se muestra únicamente el coeficiente c_2. Por el contrario, el armónico c_2 es sensible a la relación entre las amplitudes con y sin cambio de helicidad, aunque en la región cinemática de mayor interés sigue siendo moderado.

4.2. Observables integradas

Hasta ahora el análisis se ha concentrado principalmente en secciones eficaces diferenciales, ya que son las más informativas para analizar en detalle la estructura de las amplitudes y su dependencia en las distintas variables cinemáticas. Sin embargo, desde el punto de vista experimental estas observables son también las más exigentes, porque la estadística disponible debe repartirse sobre un espacio de fases multidimensional. Dado que los canales estudiados en esta tesis presentan secciones eficaces menores que las de procesos exclusivos más estándares, como la fotoproducción de J/ψ [30, 31, 34–36], el análisis detallado de distribuciones diferenciales requerirá una estadística alta. Por esta razón, se presentan aquí las predicciones para secciones eficaces integradas, que proporcionan la mayor prioridad para los estudios experimentales.

Para todos los canales considerados es necesario imponer un corte inferior sobre la masa invariante $M_{\gamma\mathcal{Q}}$. La razón es que una señal experimental con un cuarkonio pesado y un fotón en el estado final no necesariamente corresponde a la producción directa del par $\gamma\mathcal{Q}$. De hecho, estados de cuarkonio más pesados pueden producirse primero y desintegrarse radiativamente después en canales que contengan $\mathcal{Q} + \gamma$, imitando así la señal de interés y contaminando la extracción del mecanismo directo estudiado en esta tesis. Por ejemplo, para el canal $\gamma\eta_c$ pueden contribuir procesos con estados intermedios más pesados (por ejemplo J/ψ) que se desintegran radiativamente en $\eta_c + \gamma$, mientras que para $\gamma\chi_{cJ}$ existen contribuciones análogas como $\psi(2S) \to \gamma\chi_{cJ}$.

Sin embargo, como ya había sido mencionado antes, se puede erradicar esta contaminación al imponer un corte sobre la masa invariante del par fotón–mesón. Si el sistema $\gamma\mathcal{Q}$ proviene de la desintegración radiativa de un estado intermedio, entonces su masa invariante queda acotada por la masa de dicho estado superior. Por lo tanto, al seleccionar eventos con valores

suficientemente grandes de $M_{\gamma\mathcal{Q}}$, se suprime la contribución de estos procesos y se aísla la producción directa. Dado que la elección de este corte no es única, en las Figs. 30 y 31 se presentan resultados para varios valores posibles de $(M_{\gamma\mathcal{Q}})_{\text{mín}}$. Se observa que, al variar este umbral, las curvas conservan la misma dependencia con la energía, mientras que el efecto principal del corte consiste en una reducción global de la sección eficaz. En este sentido, la elección de $(M_{\gamma\mathcal{Q}})_{\text{mín}}$ no queda fijada por la teoría, sino que deberá ajustarse de acuerdo con los parámetros del análisis experimental.

En la factorización colineal, la dependencia energética de la sección eficaz total para $\gamma\eta_c$ es consistente con la ley de potencia. Para el corte $M_{\gamma\eta_c} \geq 3{,}5\,\text{GeV}$[7], al integrar el flujo de fotones cuasi reales sobre la virtualidad hasta $Q^2_{\text{max}} \simeq 1\,\text{GeV}^2$, se obtiene para la electroproducción en la energía máxima del EIC

$$\sigma^{(ep)}_{\text{tot}}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\text{GeV},\ M_{\gamma\eta_c} \geq 3{,}5\,\text{GeV}\right) \approx 49\,\text{fb}. \tag{4.7}$$

Para una luminosidad instantánea típica del EIC, $\mathcal{L} = 10^{34}\,\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ [28], esta predicción corresponde a una producción de $dN/dt \approx 42$ eventos/día y aproximadamente $4{,}9 \times 10^3$ pares $\gamma\eta_c$ producidos por cada $100\,\text{fb}^{-1}$ de luminosidad integrada.

El mesón η_c no se detecta directamente, sino a través de sus modos de decaimiento. A diferencia del J/ψ, no dispone de un canal leptónico como $J/\psi \to \mu^+\mu^-$ o e^+e^-. En consecuencia, la identificación del η_c debe basarse en canales hadrónicos. Entre los modos frecuentemente utilizados se encuentran $\eta_c(1S) \to K^+K^-\pi^0$, $\eta_c(1S) \to K^0_S K^\pm\pi^\mp$, $\eta_c(1S) \to 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$ y $\eta_c(1S) \to p\bar{p}$ [159, 160]. Desde el punto de vista experimental, los canales con kaones suelen ofrecer un compromiso razonable entre fracción de decaimiento y posibilidad de reconstrucción, mientras que estados finales puramente píonicos tienden a sufrir fondos combinatorios hadrónicos más severos. Por esta razón, como estimación representativa se considera el modo [159, 160]

$$\text{Br}\left(\eta_c(1S) \to K^0_S K^+\pi^-\right) = 2{,}6\,\%. \tag{4.8}$$

Con este canal, se obtiene $dN/dt \approx 32$ eventos/mes, o alrededor de 127 eventos reconstruidos por cada $100\,\text{fb}^{-1}$. Estas cifras deben entenderse como una estimación basada en un único modo de decaimiento; si en un análisis experimental se lograra reconstruir eficientemente varios canales hadrónicos del η_c, el número total de eventos detectados podría ser mas grande.

En el marco del CGC, la dependencia energética de la sección eficaz total para $\gamma\eta_c$ también sigue una ley de potencia, nuevamente en concordancia con el comportamiento diferencial discutido anteriormente. Al integrar el flujo de fotones hasta $Q^2_{\text{max}} \simeq 1\,\text{GeV}^2$, se obtiene para la electroproducción a una energía máxima del EIC

$$\sigma^{(ep)}_{\text{tot}}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\text{GeV},\ M_{\gamma\eta_c} \geq 3{,}5\,\text{GeV}\right) \approx 256\,\text{fb}. \tag{4.9}$$

[7] En este caso, la motivación principal para imponer un corte sobre $M_{\gamma\eta_c}$ es eliminar la posible contribución asociada al $J/\psi \to \gamma\eta_c$.

Para la misma luminosidad instantánea del EIC, esta sección eficaz corresponde a una cantidad de aproximadamente 221 eventos por día y a cerca de $2{,}6 \times 10^4$ pares $\gamma\eta_c$ producidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$ de luminosidad integrada. Utilizando nuevamente el modo de decaimiento $\eta_c(1S) \to K_S^0 K^+\pi^-$, la produccion esperada es 171 eventos por mes.

En los canales $\gamma\chi_{cJ}$ se introduce, por la misma razón que en el caso de $\gamma\eta_c$, un corte inferior sobre la masa invariante $M_{\gamma\chi_{cJ}}$, con el fin de eliminar la posible contaminación procedente de desintegraciones radiativas de estados más pesados.[8] En la Fig. 31 se muestran las predicciones correspondientes para distintos valores de este umbral. En la factorización colineal, la dependencia energética de las secciones eficaces totales de fotoproducción para $\gamma\chi_{cJ}$ sigue leyes de potencia, en acuerdo con el comportamiento ya observado para los observables diferenciales. Para la energía máxima del EIC tenemos

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\mathrm{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c0}\right) \approx 31\,\mathrm{fb}, \tag{4.10}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\mathrm{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c1}\right) \approx 230\,\mathrm{fb}, \tag{4.11}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\mathrm{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c2}\right) \approx 250\,\mathrm{fb}. \tag{4.12}$$

Para una luminosidad instantánea típica del EIC, estas cifras corresponden aproximadamente a 27, 199 y 216 eventos por día para χ_{c0}, χ_{c1} y χ_{c2}, respectivamente, o a $3{,}1 \times 10^3$, $2{,}3 \times 10^4$ y $2{,}5 \times 10^4$ eventos producidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$ de luminosidad integrada.

A diferencia del caso de η_c, los estados χ_{cJ} ofrecen una vía experimental más favorable a través de sus desintegraciones radiativas en $J/\psi\,\gamma$, seguidas del canal leptónico $J/\psi \to \mu^+\mu^-$. En particular, usando las fracciones de desintegración [159]

$$\mathrm{Br}(\chi_{c0} \to J/\psi\,\gamma) \approx 1{,}4\,\%,\ \ \mathrm{Br}(\chi_{c1} \to J/\psi\,\gamma) \approx 34{,}3\,\%,\ \ \mathrm{Br}(\chi_{c2} \to J/\psi\,\gamma) \approx 19\,\%, \tag{4.13}$$

junto con

$$\mathrm{Br}\big(J/\psi \to \mu^+\mu^-\big) \approx 5{,}9\,\%, \tag{4.14}$$

se obtienen tasas de detección muy diferentes para los tres estados. Para χ_{c0}, la pequeña fracción de desintegración radiativa limita fuertemente la detectabilidad y conduce a una señal muy reducida, del orden de 0,65 eventos por mes y 2,5 eventos reconstruidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$. En cambio, para χ_{c1} y χ_{c2} las fracciones de desintegración son mucho mayores, lo que permitiría producir alrededor de 120 y 73 eventos por mes, respectivamente, o aproximadamente 460 y 280 eventos reconstruidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$.

En el marco del CGC, las secciones eficaces totales de electroproducción son

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\mathrm{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c0}\right) \approx 0{,}45\,\mathrm{pb}, \tag{4.15}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\mathrm{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c1}\right) \approx 0{,}41\,\mathrm{pb}, \tag{4.16}$$

[8] En particular, para eliminar la posible contribución asociada al proceso $\psi(2S) \to \gamma\chi_{cJ}$.

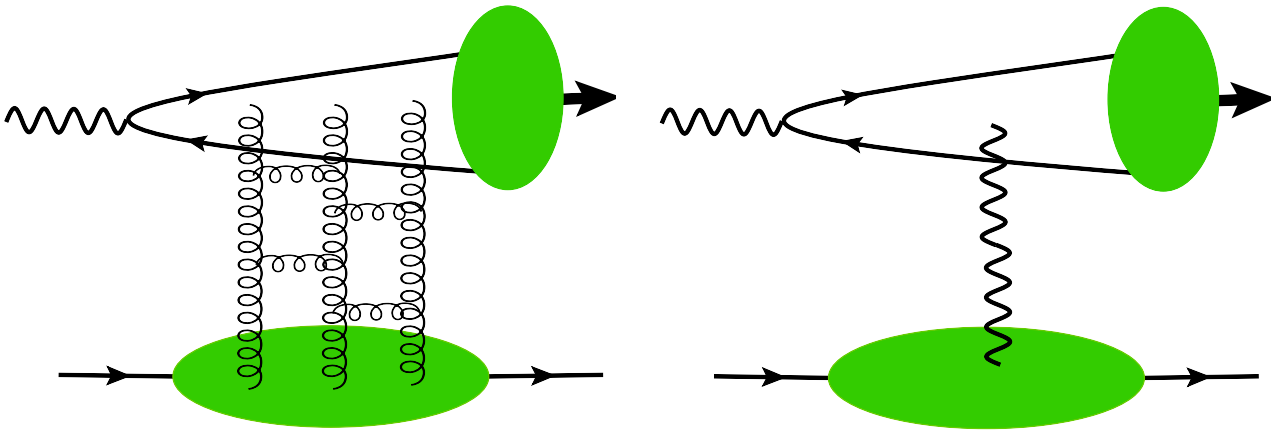


Figura 32: Diagramas esquemáticos de dos mecanismos alternativos de producción exclusiva: a la izquierda, el canal mediado por intercambio de odderón; a la derecha, el mecanismo de Primakoff asociado al intercambio de un fotón.

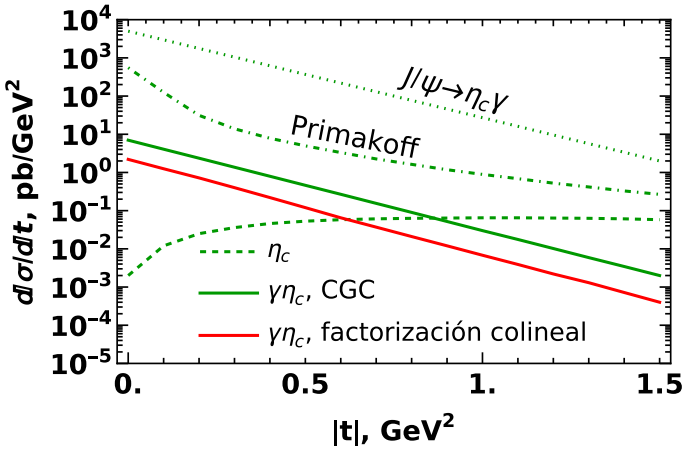


Figura 33: Comparación de la sección eficaz diferencial para la fotoproducción exclusiva $\gamma p \to \gamma\eta_c p$(con el fotón final no detectado) y $\gamma p \to \eta_c p$ a $W = 98\,\text{GeV}$, o equivalentemente $x_{Bj} = 10^{-3}$. La curva superior corresponde a la contribución de desintegración radiativa $\gamma p \to J/\psi p \to \gamma\eta_c p$. La curva etiquetada como Primakoff muestra la fotoproducción de η_c a través de intercambio electromagnético. La curva punteada inferior corresponde a la fotoproducción mediada por odderón, $\gamma p \to \eta_c p$, cuya sección eficaz se toma de [54, 158]. Las curvas sólidas muestran el mecanismo directo $\gamma p \to \gamma\eta_c p$.

$$\sigma_{\text{tot}}^{(ep)}\left(\sqrt{s_{ep}} = 141\,\text{GeV},\ M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\text{GeV}; \gamma\chi_{c2}\right) \approx 2{,}5\,\text{pb}. \tag{4.17}$$

Estas cifras corresponden, para una luminosidad instantánea típica del EIC, a unos 380, 353 y 2100 eventos por día, respectivamente, o a $4{,}5 \times 10^4$, $4{,}1 \times 10^4$ y $2{,}5 \times 10^5$ eventos producidos por cada $100\,\text{fb}^{-1}$ de luminosidad integrada.

Después de incluir las desintegraciones $\chi_{cJ} \to J/\psi\,\gamma$ seguidas de $J/\psi \to \mu^+\mu^-$, se obtienen tasas de detección significativamente mayores que en el modelo colineal. En particular, para χ_{c0}, χ_{c1} y χ_{c2} se encuentran aproximadamente 9,1, 211 y 695 eventos detectados por mes,

respectivamente, lo que corresponde a unos 36, 816 y 2750 eventos reconstruidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$. En este sentido, dentro del marco del CGC el canal $\gamma\chi_{c2}$ destaca como el más prometedor desde el punto de vista experimental, tanto por el tamaño de la sección eficaz integrada como por la combinación favorable de su producción y su cadena de desintegración observable.

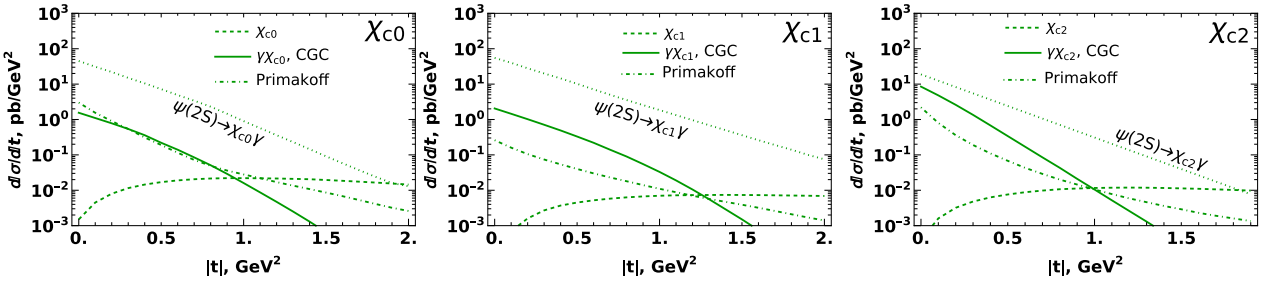


Figura 34: Comparación de la sección eficaz diferencial para distintos mecanismos que contribuyen a la electroproducción exclusiva de χ_{cJ} y de $\gamma\chi_{cJ}$ (con el fotón final no detectado) a $\sqrt{s_{ep}} = 140\,\mathrm{GeV}$. Las curvas sólidas corresponden al proceso directo $ep \to e\gamma\chi_{cJ}p$ calculado en el marco del CGC. Las curvas punteadas superiores corresponden a la contribución de pares $\gamma\chi_{cJ}$ procedentes de la desintegración radiativa $\psi(2S) \to \gamma\chi_{cJ}$. Las curvas para la electroproducción exclusiva $ep \to e\chi_{cJ}p$ mediada por odderón y el mecanismo de Primakoff se toman de [55].

El tamaño relativamente grande de las secciones eficaces integradas en el marco del CGC sugiere además que los canales $\gamma\chi_{cJ}$ podrían estudiarse no sólo en el EIC, sino también en colisiones ultraperiféricas en el LHC. A diferencia del caso $\gamma\eta_c$, donde la producción en pp resulta demasiado pequeña para hacer estimaciones robustas sin un análisis más detallado del flujo fotónico, para $\gamma\chi_{cJ}$ las secciones eficaces predichas permanecen suficientemente grandes. En particular, para colisiones ultraperiféricas pp a $\sqrt{s_{pp}} = 13\,\mathrm{TeV}$, las estimaciones muestran que las siguientes secciones eficaces integradas

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(pp)}\left(M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c0}\right) \approx 0{,}3\,\mathrm{pb}, \tag{4.18}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(pp)}\left(M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c1}\right) \approx 0{,}25\,\mathrm{pb}, \tag{4.19}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(pp)}\left(M_{\gamma\chi_c} \geq 3{,}7\,\mathrm{GeV}; \gamma\chi_{c2}\right) \approx 1{,}7\,\mathrm{pb}. \tag{4.20}$$

Estas cifras corresponden aproximadamente a 253, 215 y 1088 eventos por día para χ_{c0}, χ_{c1} y χ_{c2}, respectivamente, o a 3×10^4, $2{,}5 \times 10^4$ y $1{,}7 \times 10^5$ eventos producidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$ de luminosidad integrada. Al considerar las cadenas de desintegración $\chi_{cJ} \to J/\psi\,\gamma$ seguidas de $J/\psi \to \mu^+\mu^-$, se obtienen aproximadamente 6, 129 y 359 eventos detectados por mes, respectivamente. Esto corresponde a unos 24, 500 y 1421 eventos reconstruidos por cada $100\,\mathrm{fb}^{-1}$.

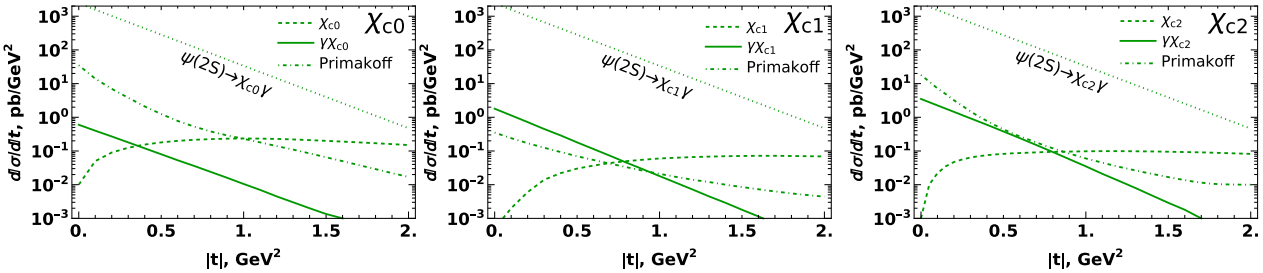


Figura 35: Comparación de la sección eficaz diferencial para distintos mecanismos que contribuyen a la fotoproducción exclusiva de χ_{cJ} y de $\gamma\chi_{cJ}$ (con el fotón final no detectado) a $W = 35\,\text{GeV}$ (o $x_{Bj} = 10^{-2}$). Las curvas sólidas corresponden al proceso directo $\gamma p \to \gamma\chi_{cJ}p$ calculado en el marco de la factorización colineal. Las curvas punteadas superiores corresponden a la contribución de pares $\gamma\chi_{cJ}$ procedentes de la desintegración radiativa $\psi(2S) \to \gamma\chi_{cJ}$. Las curvas para la fotoproducción exclusiva $\gamma p \to \chi_{cJ}p$ mediada por odderón y el mecanismo de Primakoff se toman de [55].

4.3. Comparación con la fotoproducción de η_c y χ_{cJ}

Como se mencionó anteriormente, los procesos $\gamma p \to \eta_c p$ y $\gamma p \to \chi_{cJ}p$ requieren intercambio C-impar en el canal-t y, por esta razón, ocupan un lugar destacado entre los canales propuestos para la búsqueda del odderón [53–55, 158, 161–163]. La relevancia de este intercambio radica en que está asociado a contribuciones C-impares en la difracción a altas energías, cuya descripción fenomenológica sigue siendo mucho menos establecida que la de los intercambios C-pares. Aunque en QCD no existe ninguna razón que prohíba la existencia del odderón, su identificación experimental ha resultado considerablemente más difícil que la de los intercambios C-pares. En los últimos años se han obtenido indicios experimentales de una contribución no nula del odderón a partir de la comparación entre la dispersión elástica pp y $p\bar{p}$ [164, 165]. Sin embargo, la interpretación de estos resultados depende de extrapolaciones y de supuestos fenomenológicos adicionales. Por lo tanto, la búsqueda del odderón sigue siendo una cuestión abierta y de gran actualidad, lo que ha motivado la exploración de observables en los que el intercambio C-impar contribuya de forma más directa y con menor contaminación de mecanismos competidores. Entre las propuestas más prometedoras en esta dirección se encuentra la fotoproducción exclusiva de mesones pesados con paridad de carga positiva, en particular η_c y χ_{cJ}.

En este contexto, los canales estudiados en esta tesis merecen una discusión aparte, ya que pueden constituir una contribución de fondo importante para la identificación experimental de la fotoproducción exclusiva de η_c y χ_{cJ}. Por ejemplo, en el programa experimental del EIC, la identificación de procesos exclusivos requiere una cobertura lo más amplia posible y una reconstrucción eficiente de las partículas finales, en particular en las regiones adelantadas y para estados neutros [28]. En particular, la aceptancia para fotones depende de la geometría

del detector, de la cobertura angular efectiva y del desempeño de los sistemas calorimétricos, por lo que en cualquier caso será menor que uno. En consecuencia, si el fotón final no es detectado, los eventos $\gamma p \to \gamma \eta_c p$ y $\gamma p \to \gamma \chi_{cJ} p$ pueden confundirse con los canales sin fotón adicional.

De hecho, el análisis completo debe incluir, por una parte, los mecanismos que producen directamente el estado final $\mathcal{Q}$, en particular la producción mediada por odderón y el mecanismo electromagnético de Primakoff, y, por otra, la producción exclusiva de pares $\gamma\mathcal{Q}$, que puede contaminar la fotoproducción de $\mathcal{Q}$ cuando el fotón final no está reconstruido. Los mecanismos del primer tipo se ilustran esquemáticamente en la Fig. 32.

En el caso de η_c, la comparación cuantitativa mostrada en la Fig. 33 indica que la contribución más grande dentro de los canales del tipo $\gamma\eta_c$ proviene de la fotoproducción de J/ψ seguida de la desintegración radiativa $J/\psi \to \eta_c\gamma$, que se estima en el marco del CGC (modelo dipolar) [42], utilizando la fracción de desintegración

$$\mathrm{Br}\,(J/\psi \to \gamma\eta_c) = 1{,}7 \pm 0{,}4\,\% \tag{4.21}$$

tomada de [159]. Si tanto el fotón asociado como el mesón se reconstruyen, esta contribución puede separarse del mecanismo directo mediante un corte apropiado sobre la masa invariante $M_{\gamma\eta_c}$.

Dado que la desintegración radiativa $J/\psi \to \eta_c\gamma$, supera en varios órdenes de magnitud la señal esperada del mecanismo mediado por odderón, incluso una fracción pequeña de eventos en los que el fotón no sea reconstruido puede resultar muy importante. En la actualidad no es posible estimar con fiabilidad contribuciones análogas procedentes de estados excitados más pesados, debido a las incertidumbres significativas en sus funciones de onda. No obstante, es razonable esperar que tales contribuciones sean menores, tanto por sus secciones eficaces de producción más pequeñas como por menores fracciones de desintegración.

La siguiente contribución en magnitud para $\gamma\eta_c$, representada por las curvas sólidas en la Fig. 33, corresponde a la producción directa. En la región de pequeño momento transferido, típicamente para $|t| < 1\,\mathrm{GeV}^2$, este mecanismo supera a la fotoproducción mediada por odderón. En consecuencia, aun cuando su contribución decrece hacia valores mayores de $|t|$, puede generar un fondo importante para la búsqueda experimental del odderón si el fotón final no es reconstruido.

Frente al caso de η_c, los estados χ_{cJ} presentan algunas características adicionales que los hacen más favorables para la búsqueda del odderón. En comparación con η_c, la contribución del mecanismo electromagnético de Primakoff es, en general, relativamente menos importante para los estados χ_{cJ}, de modo que la región en la que la contribución mediada por odderón se vuelve comparable a la electromagnética aparece ya a menores valores de $|t|$. En el caso de χ_{c1}, esta supresión está asociada, además, a la desaparición del acoplamiento a dos fotones en el límite hacia adelante, debido al teorema de Landau–Yang [55].

La comparación con los mecanismos de producción exclusiva mediados por odderón y por el mecanismo de Primakoff se muestra en dos regímenes cinemáticos complementarios: en la Fig. 34, para la electroproducción exclusiva a $\sqrt{s_{ep}} = 140\,\mathrm{GeV}$ dentro del marco del CGC, y en la Fig. 35, para la fotoproducción exclusiva a $W = 35\,\mathrm{GeV}$ (equivalentemente $x_{Bj} = 10^{-2}$) en el marco de la factorización colineal.

Como en el caso de η_c, la contribución más grande dentro de los canales considerados proviene de la desintegración radiativa de un estado de charmonio más pesado, en este caso $\psi(2S) \to \chi_{cJ}\gamma$. Para las fracciones de desintegración se usan los valores [159]

$$\mathrm{Br}\left(\psi(2S) \to \chi_{c0}\gamma\right) = 9{,}79 \pm 0{,}2\,\%, \tag{4.22}$$

$$\mathrm{Br}\left(\psi(2S) \to \chi_{c1}\gamma\right) = 9{,}75 \pm 0{,}24\,\%, \tag{4.23}$$

$$\mathrm{Br}\left(\psi(2S) \to \chi_{c2}\gamma\right) = 9{,}52 \pm 0{,}2\,\%. \tag{4.24}$$

Para estimar $\gamma p \to \psi(2S)p$ se utiliza la sección eficaz de fotoproducción de $\psi(2S)$ obtenida en el marco del CGC en [166].

Las curvas sólidas de las Figs. 34 y 35 corresponden a la producción directa de pares $\gamma\chi_{cJ}$. Este mecanismo supera la contribución mediada por odderón en la región de pequeño $|t|$, típicamente para $|t| \lesssim 1\,\mathrm{GeV}^2$, y sólo pierde importancia relativa a momentos transferidos mayores. Por ello, al igual que en el caso de η_c, la producción exclusiva de pares $\gamma\chi_{cJ}$ debe considerarse como una contribución de fondo potencialmente importante cuando el fotón final no es reconstruido.

5. Conclusión

En esta tesis se estudió sistemáticamente la fotoproducción exclusiva de pares fotón–cuarkonio pesado en los canales $\gamma p \to \gamma \eta_c p$ y $\gamma p \to \gamma \chi_{cJ} p$, con el objetivo de construir un conjunto de observables sensibles a la dinámica gluónica del protón en dos regímenes cinemáticos complementarios. La estrategia consistió en describir estos procesos, por una parte, dentro del marco de la factorización colineal en términos de las GPDs gluónicas y, por otra, en el formalismo de x_{Bj} pequeña basado en el CGC. Esta doble descripción fue introducida como una herramienta para explorar la transición entre el régimen de x_{Bj} moderado y el dominio de altas energías, donde la amplitud dipolar y los efectos colectivos de gluones juegan un papel central.

Uno de los resultados centrales de esta tesis fue la derivación de expresiones explícitas para las amplitudes de fotoproducción exclusiva de pares $\gamma\eta_c$ y $\gamma\chi_{cJ}$ en ambos marcos teóricos. En la factorización colineal, esto implicó obtener las funciones de coeficiente perturbativas y formular las amplitudes como convoluciones con las GPDs gluónicas H_g y E_g. En el marco del CGC, las amplitudes se escribieron en términos del solapamiento de funciones de onda y de la amplitud dipolar, que codifica la dinámica no perturbativa del blanco en el régimen de x_{Bj} pequeña. La importancia de este resultado radica en que establece una formulación general de las amplitudes, separada de la elección particular de las parametrizaciones fenoménicas. Por lo tanto, las expresiones derivadas en esta tesis pueden usarse también con otras parametrizaciones de H_g, E_g o de la amplitud dipolar, incluidas las que puedan proponerse en trabajos futuros.

En los observables diferenciales, tanto la factorización colineal como el CGC muestran que las secciones eficaces están dominadas por la región de valores pequeños del momento transferido. Además, la cinemática del estado final indica que el fotón y el cuarkonio se producen preferentemente con momentos transversales comparables. Estos resultados permiten identificar la región cinemática que aporta la contribución dominante a los procesos estudiados.

Las secciones eficaces integradas indican, a su vez, que los canales analizados pueden tener relevancia experimental, en particular en la cinemática del EIC. En el caso de $\gamma\eta_c$, las predicciones obtenidas muestran que, aunque su observación es más desafiante que en canales estándar basados en J/ψ, no queda fuera del alcance experimental. Para $\gamma\chi_{cJ}$, los resultados son aún más favorables, especialmente para χ_{c2}, que constituye el canal con mejores perspectivas. Al mismo tiempo, la comparación entre las predicciones obtenidas en la factorización colineal y en el CGC muestra diferencias apreciables en la normalización, aunque en general permanecen dentro del mismo orden de magnitud. Por eso, la confrontación experimental con estos observables puede aportar información útil sobre la región de aplicabilidad de ambos marcos teóricos.

Dado que el formalismo del CGC puede extenderse al régimen de energías más altas, los

resultados obtenidos para los canales $\gamma\chi_{cJ}$ permiten formular predicciones también para colisiones ultraperiféricas en el LHC. En particular, las secciones eficaces obtenidas para estos canales son suficientemente grandes como para esperar una estadística razonable, al menos en observables integrados. Esto confirma que la relevancia fenomenológica de los resultados obtenidos en esta tesis no se limita al EIC, sino que puede extenderse también a otros programas dedicados a la fotoproducción exclusiva.

Apéndice A Funciones de coeficiente para $\gamma\chi_{cJ}$

En este Apéndice se presentan las expresiones explícitas de las funciones de coeficiente del subproceso partónico para la producción $\gamma p \to \chi_{cJ}\gamma p$ [9]. Debido a la simetría de paridad, las funciones de coeficiente que difieren por una inversión global del signo de todas las helicidades se relacionan a través de

$$C^{(-\lambda,-\sigma,-H)}_{\gamma p\to\chi_{cJ}\gamma p} = \left(C^{(\lambda,\sigma,H)}_{\gamma p\to\chi_{cJ}\gamma p}\right)^*, \tag{A.1}$$

lo cual implica que sólo la mitad de las combinaciones posibles son independientes. Por convención, para cada helicidad H se fija la helicidad del fotón inicial como "+", mientras que el fotón emitido puede tener helicidad "+" o "−". Se hará referencia a estas dos contribuciones como componentes sin cambio y con cambio de helicidad, $C^{(+,+,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$ y $C^{(+,-,H)}_{\gamma\chi_{cJ}}$, respectivamente. Las componentes restantes se reconstruyen mediante la conjugación compleja.

En lo que sigue se usa la notación $\alpha \equiv \alpha_{\chi_c}$ y la constante $\mathfrak{C}_{\chi_c}$ se define por

$$\mathfrak{C}_{\chi_c} = \frac{4}{9N_c}\pi^2\alpha_{\rm em}\alpha_s\left(m_c\right)\pi\sqrt{\frac{3\left\langle \mathcal{O}^{[1]}_{\chi_c}\left({}^3P^{[1]}_J\right)\right\rangle}{2m_c^5 N_c(2J+1)}}. \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
&c^{(++)}_{\gamma\chi_{c0}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right) = \qquad\qquad (A.3)\\
&-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\alpha^2\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\left(\alpha^6-3\alpha^5-13\alpha^4+68\alpha^3-68\alpha^2+16\alpha\right)\zeta^4+\alpha^7+10\alpha^6+84\alpha^5-227\alpha^4+122\alpha^3+120\alpha^2\\
&+\left(43\alpha^7-273\alpha^6+665\alpha^5-834\alpha^4+754\alpha^3-584\alpha^2+328\alpha-96\right)\zeta^3-144\alpha+32\\
&+\left(-149\alpha^7+713\alpha^6-1473\alpha^5+1844\alpha^4-1474\alpha^3+628\alpha^2+8\alpha-96\right)\zeta^2+\left(105\alpha^7-323\alpha^6\right.\\
&\left.+487\alpha^5-290\alpha^4-286\alpha^3+560\alpha^2-256\alpha\right)\zeta+\frac{1}{r^2}\Big[\left(4\alpha^5-14\alpha^4+2\alpha^3+16\alpha^2-8\alpha\right)\zeta^4\\
&+\left(-48\alpha^6+252\alpha^5-468\alpha^4+306\alpha^3-56\alpha^2+40\alpha-32\right)\zeta^3\\
&+\left(264\alpha^6-1044\alpha^5+1624\alpha^4-1602\alpha^3+1256\alpha^2-664\alpha+160\right)\zeta^2-8\alpha^6-52\alpha^5-150\alpha^4\\
&-\left(272\alpha^6-696\alpha^5+960\alpha^4-782\alpha^3+48\alpha^2+384\alpha-192\right)\zeta+640\alpha^3-624\alpha^2+168\alpha+32\Big]\\
&+\frac{1}{r^4}\Big[\left(-5\alpha^4+24\alpha^3-36\alpha^2+16\alpha\right)\zeta^4+\left(31\alpha^5-134\alpha^4+222\alpha^3-144\alpha^2-8\alpha+32\right)\zeta^3\\
&+\left(-249\alpha^5+780\alpha^4-710\alpha^3+192\alpha^2-104\alpha+96\right)\zeta^2+25\alpha^5+125\alpha^4-18\alpha^3\\
&+\left(369\alpha^5-670\alpha^4+642\alpha^3-656\alpha^2+344\alpha-32\right)\zeta-524\alpha^2+552\alpha-160\Big]\\
&+\frac{1}{r^6}\Big[\left(-10\alpha^4+38\alpha^3-64\alpha^2+72\alpha-32\right)\zeta^3+\left(142\alpha^4-410\alpha^3+320\alpha^2+48\alpha-96\right)\zeta^2\\
&+\left(-302\alpha^4+338\alpha^3+40\alpha^2+24\alpha-96\right)\zeta-38\alpha^4-126\alpha^3+216\alpha^2+32\alpha-96\Big]\\
&+\frac{4\left(7\alpha^3+9\alpha^2-\left(10\alpha^3-33\alpha^2+40\alpha-16\right)\zeta^2+\left(39\alpha^3-42\alpha^2-22\alpha+24\right)\zeta-30\alpha+16\right)}{r^8}
\end{aligned}$$

[9] se basa en los cálculos publicados en [57]

$$+\frac{8\bar{\alpha}\left((5\alpha-4)\zeta+\alpha\right)}{r^{10}}\Big\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d^{(++)}_{\gamma\chi_{c0}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.4}$$

$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\alpha^4\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$\times\Big\{\ \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{8}\left[-5\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\alpha^2+2\bar{\alpha}\right)\zeta^4+\left(1+\bar{\alpha}\right)\left(8\alpha^5-45\alpha^4+100\alpha^3-126\alpha^2+92\alpha-40\right)\zeta^3\right.$$

$$+\left(16\alpha^6-91\alpha^5+212\alpha^4-254\alpha^3+156\alpha^2-24\alpha-24\right)\zeta^2-\alpha\left(8\alpha^5-31\alpha^4+42\alpha^3\right.$$

$$\left.+2\alpha^2-56\alpha+40\right)\zeta-\left(\alpha^5+7\alpha^4-12\alpha^3-26\alpha^2+64\alpha-32\right)\Big]+\frac{1}{8r^2}\Big[\left(-\alpha^7-\alpha^6+29\alpha^5-88\alpha^4\right.$$

$$\left.+124\alpha^3-96\alpha^2+32\alpha\right)\zeta^4+\left(-19\alpha^8+157\alpha^7-513\alpha^6+914\alpha^5-1054\alpha^4+872\alpha^3-520\alpha^2+160\alpha\right)\zeta^3$$

$$+\left(69\alpha^8-449\alpha^7+1209\alpha^6-1772\alpha^5+1514\alpha^4-628\alpha^3-72\alpha^2+128\alpha\right)\zeta^2$$

$$+\left(-49\alpha^8+239\alpha^7-463\alpha^6+370\alpha^5+82\alpha^4-352\alpha^3+176\alpha^2\right)\zeta-\alpha^8-10\alpha^7-24\alpha^6+187\alpha^5$$

$$-182\alpha^4-160\alpha^3+288\alpha^2-96\alpha\Big]+\frac{1}{4r^4}\Big[\left(3\alpha^5-15\alpha^4+24\alpha^3-12\alpha^2\right)\zeta^4+\left(8\alpha^7-70\alpha^6+214\alpha^5\right.$$

$$\left.-317\alpha^4+276\alpha^3-172\alpha^2+96\alpha-32\right)\zeta^3+\left(-52\alpha^7+338\alpha^6-840\alpha^5+1105\alpha^4-928\alpha^3\right.$$

$$\left.+508\alpha^2-96\alpha-32\right)\zeta^2+\left(56\alpha^7-276\alpha^6+508\alpha^5-419\alpha^4+8\alpha^3+280\alpha^2-160\alpha\right)\zeta$$

$$+4\alpha^7+16\alpha^6-5\alpha^5-242\alpha^4+404\alpha^3-116\alpha^2-96\alpha+32\Big]+\frac{1}{8r^6}\Big[\left(\alpha^5-12\alpha^4+44\alpha^3-64\alpha^2+32\alpha\right)\zeta^4$$

$$+\left(-7\alpha^6+74\alpha^5-242\alpha^4+360\alpha^3-280\alpha^2+96\alpha\right)\zeta^3$$

$$+\left(73\alpha^6-532\alpha^5+1238\alpha^4-1256\alpha^3+696\alpha^2-352\alpha+128\right)\zeta^2$$

$$+\left(-121\alpha^6+642\alpha^5-1030\alpha^4+760\alpha^3-280\alpha^2-96\alpha+128\right)\zeta$$

$$-25\alpha^6-41\alpha^5+142\alpha^4+444\alpha^3-1032\alpha^2+512\alpha\Big]+\frac{1}{4r^8}\Big[\left(\alpha^5-11\alpha^4+36\alpha^3-60\alpha^2+64\alpha-32\right)\zeta^3$$

$$+\left(-15\alpha^5+141\alpha^4-352\alpha^3+320\alpha^2-64\alpha-32\right)\zeta^2$$

$$+\left(35\alpha^5-233\alpha^4+296\alpha^3-68\alpha^2-32\right)\zeta+19\alpha^5+7\alpha^4-108\alpha^3-8\alpha^2+192\alpha-96\Big]$$

$$+\frac{1}{2r^{10}}\left(\left(2\alpha^4-21\alpha^3+60\alpha^2-72\alpha+32\right)\zeta^2\right.$$

$$+\left(-7\alpha^4+62\alpha^3-78\alpha^2-8\alpha+32\right)\zeta-7\alpha^4+3\alpha^3+26\alpha^2-24\alpha\Big)$$

$$\left.-\bar{\alpha}\frac{\left(\alpha^2+8\bar{\alpha}\right)\zeta+\alpha^2}{r^{12}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c^{(+-)}_{\gamma\chi_{c0}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.5}$$

$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1-\alpha\,r^2\right)}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$\times\Big\{\ -\bar{\alpha}\left[8\alpha\left(2-\alpha\right)^2\zeta^4+\left(16\alpha^5-87\alpha^4+174\alpha^3-192\alpha^2+112\alpha\right)\zeta^3-\alpha^2\left(32\alpha^3-109\alpha^2+142\alpha\right)\zeta^2\right.$$

$$\left.+92\alpha^2\zeta^2+\left(16\alpha^5-21\alpha^4+18\alpha^3+12\alpha^2+8\alpha-16\right)\zeta-\alpha^4+6\alpha^3+24\alpha^2-24\alpha\right]$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\left(4\alpha^3-16\alpha^2+16\alpha\right)\zeta^4+\left(-25\alpha^5+130\alpha^4-208\alpha^3+128\alpha^2-56\alpha+32\right)\zeta^3\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(115\alpha^5-446\alpha^4+672\alpha^3-560\alpha^2+184\alpha+32\right)\zeta^2\\
&+\left(-91\alpha^5+182\alpha^4-172\alpha^3+16\alpha^2+72\alpha\right)\zeta+\alpha^5+6\alpha^4-72\alpha^3+48\alpha^2+56\alpha-32\big]\\
&+\frac{1}{r^4}\big[\left(-4\alpha^3+16\alpha^2-16\alpha\right)\zeta^4+\left(17\alpha^4-66\alpha^3+72\alpha^2-8\alpha-32\right)\zeta^3\\
&+\left(-135\alpha^4+386\alpha^3-308\alpha^2+152\alpha-96\right)\zeta^2\\
&+\left(187\alpha^4-290\alpha^3+248\alpha^2-56\alpha-96\right)\zeta-5\alpha^4+6\alpha^3+132\alpha^2-152\alpha\big]\\
&+\frac{4}{r^6}\big[(-2\alpha^3+6\alpha^2-8\alpha+8)\zeta^3+(21\alpha^3-44\alpha^2+4\alpha+24)\zeta^2+(-45\alpha^3+34\alpha^2-12\alpha+24)\zeta\\
&+2\alpha^3-12\alpha^2-12\alpha+24\big]\\
&-\frac{4\left((8\alpha^2-20\,\alpha+16)\zeta^2+(6-25\alpha)\,\alpha\,\zeta+(\alpha-10)\,\alpha+20\,\zeta+8\right)}{r^8}+\frac{32\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d^{(+-)}_{\gamma\chi_{c0}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \qquad\qquad (A.6)\\
&-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1/r^2-\alpha\right)}{\alpha^2r^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\frac{\bar{\alpha}}{8}\left[4(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+\left(8\alpha^5-47\alpha^4+106\alpha^3-132\alpha^2+96\alpha-16\right)\zeta^3+\alpha^2\left(-16\alpha^3+61\alpha^2-94\alpha\right)\zeta^2\right.\\
&\left.+68\alpha^2\zeta^2+\left(8\alpha^5-13\alpha^4+14\alpha^3-8\alpha^2+24\alpha-16\right)\zeta-\alpha\left(\alpha^3-2\alpha^2-24\alpha+24\right)\right]+\\
&+\frac{1}{8r^2}\left[\left(17\alpha^5-94\alpha^4+180\alpha^3-160\alpha^2+96\alpha-32\right)\zeta^3-\alpha^5-6\alpha^4+60\alpha^3-24\alpha^2-64\alpha+32\right.\\
&\left.+\left(-67\alpha^5+278\alpha^4-480\alpha^3+488\alpha^2-240\alpha+32\right)\zeta^2+\alpha\left(51\alpha^4-114\alpha^3+112\alpha^2-48\right)\zeta\right]\\
&+\frac{1}{8r^4}\left[4(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4-\left(17\alpha^4-78\alpha^3+124\alpha^2-80\alpha+16\right)\zeta^3+\left(103\alpha^4-330\alpha^3+348\alpha^2-208\alpha\right)\zeta^2+\right.\\
&\left.+\,64\zeta^2+\left(-123\alpha^4+222\alpha^3-220\alpha^2+80+16\right)\zeta+\alpha\left(5\alpha^3-6\alpha^2-132\alpha+128\right)\right]\\
&+\frac{1}{2r^6}\left[2(2-\alpha)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3-\alpha\left(21\alpha^2-56\alpha+36\right)\zeta^2+\left(37\alpha^3-42\alpha^2+20\alpha-8\right)\zeta+\right.\\
&\left.-\left(2\alpha^3-12\alpha^2-16\alpha+16\right)\right]\\
&-\frac{4\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2-\left(25\alpha^2-18\alpha+8\right)\zeta+\left(\alpha^2-10\alpha\right)}{2r^8}-\frac{4\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

Funciones de coeficiente para $\gamma\chi_{c1}$

$$
\begin{aligned}
&c^{(++,-1)}_{\gamma\chi_{c1}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \qquad\qquad (A.7)\\
&\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha\,r^2-1\right)}}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\ -4\alpha^7\bar{\zeta}^2\zeta+\alpha^6\left(25\zeta^3-23\zeta^2+3\zeta-5\right)-\alpha^5\left(67\zeta^3-9\zeta^2-7\zeta-3\right)\\
&+\alpha^4\left(15\zeta^4+49\zeta^3+103\zeta^2-17\zeta-22\right)+\alpha^3\left(-90\zeta^4+16\zeta^3-208\zeta^2+4\zeta+54\right)\\
&+4\alpha^2\left(33\zeta^4-21\zeta^3+20\zeta^2+12\zeta+4\right)-8\alpha\left(7\zeta^4-20\zeta^3-15\zeta^2+6\zeta+10\right)-32\left(3\zeta^3+3\zeta^2-1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \alpha\bar{\alpha}r^2\left(4\alpha^5\bar{\zeta}^2\zeta + \alpha^4\left(-23\zeta^3+33\zeta^2-13\zeta+3\right) + \alpha^3\left(\zeta^4+58\zeta^3-68\zeta^2+30\zeta-5\right)\right.\\
&\left.-2\alpha^2\left(7\zeta^4+31\zeta^3-35\zeta^2+23\zeta-10\right) + 4\alpha\left(13\zeta^4+12\zeta^3-9\zeta^2+8\zeta-8\right) - 8\left(5\zeta^4+3\zeta^3-2\zeta^2-2\right)\right)\\
&+\frac{1}{r^2}\left[2\alpha^6\left(5\zeta^3-17\zeta^2+11\zeta+1\right) - \alpha^5\left(\zeta^4+54\zeta^3-136\zeta^2+50\zeta-17\right)\right.\\
&-\alpha^4\left(\zeta^4-138\zeta^3+248\zeta^2-74\zeta+27\right) + 2\alpha^3\left(15\zeta^4-50\zeta^3+72\zeta^2-44\zeta+47\right)\\
&\left.-4\alpha^2\left(13\zeta^4+11\zeta^3-41\zeta^2-31\zeta+64\right) + 8\alpha\left(3\zeta^4-48\zeta^2-31\zeta+22\right) + 48\zeta\left(\zeta^2+5\zeta+4\right)\right]\\
&+\frac{1}{r^4}\left[-4\alpha^5\left(2\zeta^3-13\zeta^2+12\zeta+3\right) + \alpha^4\left(\zeta^4+35\zeta^3-167\zeta^2+69\zeta-2\right)\right.\\
&-2\alpha^3\left(3\zeta^4+40\zeta^3-112\zeta^2+34\zeta-5\right)\\
&\left.+4\alpha^2\left(3\zeta^4+21\zeta^3-27\zeta^2+15\zeta-8\right) - 8\alpha\left(\zeta^4-14\zeta^2-18\zeta-25\right) - 32\left(\zeta^3+4\zeta^2+6\zeta+5\right)\right]\\
&+\frac{2}{r^6}\left[\alpha^4\left(\zeta^3-17\zeta^2+27\zeta+13\right) - \alpha^3\left(5\zeta^3-49\zeta^2+11\zeta+25\right) + 2\alpha^2\left(5\zeta^3-22\zeta^2-17\zeta+6\right)\right.\\
&\left.-12\alpha\left(\zeta^3+2\zeta^2+2\zeta+3\right) + 8(\zeta+1)^2(\zeta+3)\right]\\
&+\frac{4\left(2\alpha^3\left(\zeta^2-4\zeta-3\right)+\alpha^2\left(-9\zeta^2+5\zeta+16\right)+2\alpha\left(7\zeta^2+8\zeta-3\right)-8\zeta(\zeta+2)\right)}{r^8}\\
&\left.+\frac{8\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)(\zeta+1)}{r^{10}}\right\} + \Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d^{(++,-1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi) = \qquad\qquad (A.8)\\
&\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha\, r^2-1\right)}}{\alpha^4\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\left\{\ \frac{\bar{\alpha}\alpha^2}{8}\left[4\alpha^5\bar{\zeta}^2\zeta + \alpha^4\bar{\zeta}\left(27\zeta^2-14\zeta+3\right) + \alpha^3\left(\zeta^4+82\zeta^3-100\zeta^2+38\zeta-5\right)\right.\right.\\
&\left.-2\alpha^2\left(7\zeta^4+59\zeta^3-59\zeta^2+27\zeta-10\right) + 4\alpha\left(9\zeta^4+24\zeta^3-13\zeta^2+12\zeta-8\right) - 8\left(3\zeta^4+5\zeta^3+2\zeta-2\right)\right]\\
&+\frac{\alpha}{8r^2}\left[-4\alpha^7\bar{\zeta}^2\zeta - \alpha^6\bar{\zeta}(3\zeta+1)(3\zeta+5) + \alpha^5\left(37\zeta^3-151\zeta^2+63\zeta+3\right)\right.\\
&+\alpha^4\left(7\zeta^4-215\zeta^3+439\zeta^2-105\zeta-30\right)\\
&+\alpha^3\left(-10\zeta^4+404\zeta^3-632\zeta^2+72\zeta+6\right) - 4\alpha^2\left(9\zeta^4+113\zeta^3-96\zeta^2+4\zeta-38\right)\\
&\left.+8\alpha\left(9\zeta^4+44\zeta^3+5\zeta^2+4\zeta-24\right) - 32\left((\zeta+1)(\zeta+3)\zeta^2+\zeta-2\right)\right]\\
&+\frac{1}{8r^4}\left[-2\alpha^7\bar{\zeta}\left(5\zeta^2-12\zeta-1\right) - \alpha^6(\zeta+1)\left(\zeta^3+21\zeta^2-29\zeta-17\right)\right.\\
&-\alpha^5\left(\zeta^4+46\zeta^3-280\zeta^2+158\zeta+27\right)\\
&+2\alpha^4\left(7\zeta^4+118\zeta^3-336\zeta^2+68\zeta+111\right) - 4\alpha^3\left(5\zeta^4+71\zeta^3-233\zeta^2-31\zeta+100\right)\\
&\left.+8\alpha^2\left(\zeta^4+22\zeta^3-96\zeta^2-53\zeta+8\right) + 16\alpha\left(-9\zeta^3+11\zeta^2+16\zeta+12\right) + 64\left(\zeta^3+\zeta^2-1\right)\right]\\
&+\frac{1}{8r^6}\left[-4\alpha^6\left(2\zeta^3-13\zeta^2+12\zeta+3\right) + \alpha^5\left(\zeta^4+3\zeta^3+25\zeta^2-155\zeta-2\right)\right.\\
&+2\alpha^4\left(\zeta^4+42\zeta^3-228\zeta^2+192\zeta-15\right)\\
&-4\alpha^3\left(7\zeta^4+55\zeta^3-153\zeta^2+73\zeta+70\right) + 8\alpha^2\left(7\zeta^4+26\zeta^3-46\zeta^2+20\zeta+93\right)\\
&\left.-32\alpha\left(\zeta^4+2\zeta^3-9\zeta^2-3\zeta+13\right) - 128\zeta(\zeta+1)\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4r^8}\left[\alpha^5\left(\zeta^3-17\zeta^2+27\zeta+13\right)+\alpha^4\left(3\zeta^3-31\zeta^2+125\zeta-25\right)+\alpha^3(76-2\zeta(11(\zeta-10)\zeta+125))\right.$$
$$\left.+4\alpha^2\left(11\zeta^3-62\zeta^2+16\zeta-1\right)-8\alpha\left(7\zeta^3-5\zeta^2+\zeta+21\right)+32\left(\zeta^3+\zeta^2+\zeta+3\right)\right]$$
$$+\frac{2\alpha^4((\zeta-4)\zeta-3)+\alpha^3(\zeta(7\zeta-43)+16)-6\alpha^2(7(\zeta-2)\zeta+5)+8\alpha\left(8\zeta^2+3\right)-32\zeta(\zeta+1)}{2r^{10}}$$
$$\left.-\frac{\bar{\alpha}(\alpha((\alpha+6)\zeta+\alpha-2)-8\zeta)}{r^{12}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c^{(+-,-1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.9}$$
$$\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha\,r^2-1\right)}\left(\alpha r^2-1\right)}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)(\zeta-\kappa+i0)^2}\times$$
$$\times\left\{\ \alpha^3\left(-(\zeta-1)^2\right)(3\zeta+1)+4\alpha^2\left(5\zeta^3-7\zeta^2+3\zeta-1\right)-4\alpha\left(11\zeta^3-9\zeta^2+4\zeta-2\right)+16\left(2\zeta^3+\zeta\right)\right.$$
$$-\frac{\alpha^3\bar{\zeta}^2(5\zeta-1)-2\alpha^2\bar{\zeta}^2(9\zeta+5)+4\alpha\zeta\left(3\zeta^2-11\zeta+4\right)+8\left(\zeta^3+9\zeta^2+2\zeta+2\right)}{r^2}$$
$$+\frac{2\alpha^2\left(\zeta^3-13\zeta^2+15\zeta-3\right)+4\alpha\left(-2\zeta^3+10\zeta^2+\zeta-5\right)+8\left(\zeta^3+3\zeta^2+4\zeta+2\right)}{r^4}$$
$$\left.+\frac{4\left(\alpha\left(2\zeta^2-9\zeta+3\right)-2\left(2\zeta^2+\zeta-1\right)\right)}{r^6}-\frac{8\bar{\zeta}}{r^8}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d^{(+-,-1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.10}$$
$$\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha\,r^2-1\right)}\left(\alpha-1/r^2\right)}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)(\zeta-\kappa+i0)}\times$$
$$\times\ \frac{1}{8}\left[(\alpha-2)\zeta^2\left(3\alpha-4+\frac{\alpha-2}{r^2}-\frac{2}{r^4}\right)-2\zeta\left(\alpha-\frac{2}{r^2}\right)\left(\alpha-3+\frac{\alpha}{r^2}-\frac{1}{r^4}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(\alpha(\alpha+4)-8-\frac{4\alpha}{r^2}+\frac{4}{r^4}\right)\right]+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c^{(++,0)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi) \tag{A.11}$$
$$=-\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)(\zeta-1+i0)(\zeta-\kappa+i0)^2}\times$$
$$\times\left\{\ \left(\alpha^6-9\alpha^5+5\alpha^4+70\alpha^3-140\alpha^2+72\alpha\right)\zeta^4+\alpha^7+10\alpha^6+72\alpha^5-195\alpha^4+10\alpha^3+168\alpha^2-64\alpha\right.$$
$$+\left(35\alpha^7-227\alpha^6+557\alpha^5-650\alpha^4+508\alpha^3-448\alpha^2+224\alpha\right)\zeta^3+\zeta^2\left(-117\alpha^7+597\alpha^6-1283\alpha^5\right.$$
$$\left.+1614\alpha^4-1220\alpha^3+324\alpha^2+88\alpha\right)+\left(81\alpha^7-301\alpha^6+495\alpha^5-350\alpha^4-120\alpha^3+216\alpha^2-16\alpha\right)\zeta$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[\left(4\alpha^5-12\alpha^4-8\alpha^3+48\alpha^2-32\alpha\right)\zeta^4+\left(-44\alpha^6+242\alpha^5-474\alpha^4+314\alpha^3+52\alpha^2-8\alpha-80\right)\zeta^3\right.$$
$$+\left(224\alpha^6-916\alpha^5+1404\alpha^4-1286\alpha^3+1052\alpha^2-408\alpha-80\right)\zeta^2-8\alpha^6-48\alpha^5-120\alpha^4$$
$$\left.+\left(-220\alpha^6+614\alpha^5-838\alpha^4+686\alpha^3+60\alpha^2-320\alpha\right)\zeta+550\alpha^3-332\alpha^2-80\alpha+32\right]$$
$$+\frac{1}{r^4}\left[\left(-5\alpha^4+26\alpha^3-44\alpha^2+24\alpha\right)\zeta^4+\left(31\alpha^5-148\alpha^4+272\alpha^3-216\alpha^2+64\right)\zeta^3+\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-233\alpha^5+792\alpha^4-760\alpha^3+104\alpha^2-112\alpha+224\right)\zeta^2\\
&+\left(321\alpha^5-620\alpha^4+520\alpha^3-608\alpha^2+256\alpha+160\right)\zeta+25\alpha^5+101\alpha^4-50\alpha^3-484\alpha^2+408\alpha\big]\\
&+\frac{1}{r^6}\big[\left(-10\alpha^4+42\alpha^3-76\alpha^2+88\alpha-48\right)\zeta^3+\left(142\alpha^4-470\alpha^3+436\alpha^2+56\alpha-176\right)\zeta^2\\
&+\left(-286\alpha^4+382\alpha^3+76\alpha^2+8\alpha-208\right)\zeta-38\alpha^4-74\alpha^3+212\alpha^2+56\alpha-144\big]\\
&+\frac{\left(-40\alpha^3+148\alpha^2-200\alpha+96\right)\zeta^2+\left(156\alpha^3-224\alpha^2-80\alpha+160\right)\zeta+28\alpha^3-12\alpha^2-88\alpha+64}{r^8}\\
&+\frac{\left(-40\alpha^2+88\alpha-48\right)\zeta-8\alpha^2+24\alpha-16}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(++,0)}_{\gamma\chi_{c1}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}r^2}{\alpha^3\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\ \frac{\bar\alpha\alpha^2}{4}\left[\alpha\bar\alpha\left(2-\alpha\right)\left(\zeta^4+1\right)+\left(2\alpha^5-13\alpha^4+31\alpha^3-36\alpha^2+20\alpha-4\right)\zeta^3\right.\\
&+\left(-4\alpha^5+18\alpha^4-28\alpha^3+18\alpha^2-4\alpha\right)\zeta^2+\left(2\alpha^5-5\alpha^4+3\alpha^3+4\alpha^2-8\alpha+4\right)\zeta\big]+\\
&+\frac{\alpha}{8r^2}\left[3(2-\alpha)\alpha\bar\alpha\left(\alpha^2-8\alpha+8\right)\zeta^4+\left(4\alpha^7-47\alpha^6+209\alpha^5-456\alpha^4+562\alpha^3-392\alpha^2+120\alpha\right)\zeta^3\right.\\
&+\left(-8\alpha^7+95\alpha^6-359\alpha^5+604\alpha^4-468\alpha^3+120\alpha^2+16\alpha\right)\zeta^2\\
&+\left(4\alpha^7-49\alpha^6+127\alpha^5-104\alpha^4-66\alpha^3+200\alpha^2-160\alpha+48\right)\zeta+\alpha^2\bar\alpha^2\left(\alpha^2+6\alpha-8\right)\big]\\
&+\frac{1}{8r^4}\left[\left(-\alpha^6+5\alpha^5+19\alpha^4-106\alpha^3+140\alpha^2-56\alpha\right)\zeta^4+\right.\\
&+\left(-11\alpha^7+99\alpha^6-345\alpha^5+574\alpha^4-576\alpha^3+408\alpha^2-144\alpha\right)\zeta^3-\alpha^7-10\alpha^6\\
&+\left(37\alpha^7-309\alpha^6+963\alpha^5-1438\alpha^4+1020\alpha^3-196\alpha^2-72\alpha\right)\zeta^2-12\alpha^5+99\alpha^4\\
&+\left(-25\alpha^7+205\alpha^6-475\alpha^5+450\alpha^4-76\alpha^3-160\alpha^2+112\alpha-32\right)\zeta-102\alpha^3+24\alpha^2\big]\\
&+\frac{1}{4r^6}\left[-2\alpha^2\bar\alpha\left(2-\alpha\right)\zeta^4+\left(6\alpha^6-45\alpha^5+125\alpha^4-133\alpha^3+62\alpha^2-44\alpha+24\right)\zeta^3+\right.\\
&+\left(-32\alpha^6+210\alpha^5-530\alpha^4+683\alpha^3-474\alpha^2+108\alpha+24\right)\zeta^2+4\alpha^6+14\alpha^5\\
&+\left(30\alpha^6-191\alpha^5+387\alpha^4-375\alpha^3+130\alpha^2+16\alpha\right)\zeta-8\alpha^4-77\alpha^3+78\alpha^2-8\alpha\big]\\
&+\frac{1}{4r^8}\left[-\alpha\left(2-\alpha\right)^3\zeta^4+\left(-7\alpha^5+44\alpha^4-108\alpha^3+104\alpha^2-32\alpha\right)\zeta^3-25\alpha^5+\right.\\
&+\left(57\alpha^5-296\alpha^4+536\alpha^3-464\alpha^2+288\alpha-96\right)\zeta^2-17\alpha^4+54\alpha^3\\
&+\left(-73\alpha^5+340\alpha^4-500\alpha^3+448\alpha^2-160\alpha-32\right)\zeta+108\alpha^2-120\alpha\big]\\
&+\frac{1}{4r^{10}}\left[\left(2-\alpha\right)^2\left(2-\alpha\bar\alpha\right)\zeta^3+\left(-15\alpha^4+67\alpha^3-90\alpha^2+28\alpha+8\right)\zeta^2\right.\\
&\left(27\alpha^4-79\alpha^3+22\alpha^2-4\alpha+24\right)\zeta+19\alpha^4-19\alpha^3-10\alpha^2-20\alpha+24\big]\\
&\left.+\frac{\left(2\alpha^3-9\alpha^2+14\alpha-8\right)\zeta^2+\left(-7\alpha^3+16\alpha^2+8\alpha-16\right)\zeta-7\alpha^3+15\alpha^2-6\alpha}{2r^{12}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
c^{(+-,0)}_{\gamma\chi_{c1}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right) \tag{A.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1-\alpha\, r^2\right)}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times \\
&\times\Bigg\{ -\bar{\alpha}\left[-10\alpha\left(2-\alpha\right)^2\zeta^4+\left(-12\alpha^5+73\alpha^4-172\alpha^3+236\alpha^2-176\alpha+32\right)\zeta^3+\alpha^4-8\alpha^3\right. \\
&+\left(24\alpha^5-113\alpha^4+222\alpha^3-196\alpha^2+48\alpha\right)\zeta^2+\left(-12\alpha^5+39\alpha^4-48\alpha^3-8\alpha^2+16\alpha\right)\zeta+16\alpha\bar{\alpha}\Big] \\
&+\frac{1}{r^2}\Big[\left(2\alpha^4-12\alpha^3+24\alpha^2-16\alpha\right)\zeta^4+\left(17\alpha^5-98\alpha^4+178\alpha^3-164\alpha^2+144\alpha-80\right)\zeta^3 \\
&+\left(-83\alpha^5+370\alpha^4-708\alpha^3+760\alpha^2-360\alpha+16\right)\zeta^2+\left(67\alpha^5-190\alpha^4+278\alpha^3-148\alpha^2-16\alpha\right)\zeta \\
&-\alpha^5-4\alpha^4+64\alpha^3-56\alpha^2-24\alpha+16\Big]+\frac{1}{r^4}\left[2\alpha\left(\alpha-2\right)^2\zeta^4+\left(-9\alpha^4+40\alpha^3-44\alpha^2-8\alpha+32\right)\zeta^3\right. \\
&+\left(87\alpha^4-282\alpha^3+340\alpha^2-320\alpha+192\right)\zeta^2+\left(-131\alpha^4+272\alpha^3-348\alpha^2+168\alpha+64\right)\zeta \\
&+5\alpha^4-8\alpha^3-100\alpha^2+120\alpha\Big]+\frac{4}{r^6}\Big[\left(\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-4\right)\zeta^3+\left(-11\alpha^3+22\alpha^2+4\alpha-20\right)\zeta^2 \\
&+\left(28\alpha^3-29\alpha^2+30\alpha-36\right)\zeta-2\alpha^3+10\alpha^2+8\alpha-20\Big] \\
&\left.+\frac{4\left(\left(4\alpha^2-10\alpha+8\right)\zeta^2+\left(16-13\alpha^2\right)\zeta+\alpha^2-8\alpha+8\right)}{r^8}-\frac{4\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(+-,0)}_{\gamma\chi_{c1}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times \\
&\times\Bigg\{ -\frac{\bar{\alpha}\alpha}{8}\left[6\alpha\left(\alpha-2\right)^2\zeta^4+\left(4\alpha^5-37\alpha^4+122\alpha^3-194\alpha^2+144\alpha-24\right)\zeta^3+\right. \\
&+\left(-8\alpha^5+73\alpha^4-194\alpha^3+168\alpha^2-24\alpha\right)\zeta^2+\left(4\alpha^5-35\alpha^4+46\alpha^3-6\alpha^2\right)\zeta-\alpha^4+4\alpha^3-16\alpha\bar{\alpha}\Big] \\
&+\frac{1}{8r^2}\left[2\alpha\left(2-\alpha\right)^2\left(\alpha^2+3\alpha-3\right)\zeta^4+\left(-13\alpha^6+95\alpha^5-259\alpha^4+392\alpha^3-384\alpha^2+176\alpha-16\right)\zeta^3\right. \\
&+\left(43\alpha^6-267\alpha^5+699\alpha^4-866\alpha^3+412\alpha^2-32\alpha\right)\zeta^2+\left(-31\alpha^6+153\alpha^5-265\alpha^4+120\alpha^3+20\alpha^2\right)\zeta \\
&+\alpha^6+5\alpha^5-57\alpha^4+20\alpha^3+64\alpha^2-32\alpha\Big]+\frac{1}{4r^4}\Big[\left(9\alpha^5-53\alpha^4+103\alpha^3-94\alpha^2+68\alpha-24\right)\zeta^3 \\
&+\left(-45\alpha^5+198\alpha^4-384\alpha^3+420\alpha^2-176\alpha+8\right)\zeta^2 \\
&+\left(47\alpha^5-151\alpha^4+233\alpha^3-94\alpha^2-20\alpha\right)\zeta-3\alpha^5+2\alpha^4+76\alpha^3-64\alpha^2-16\alpha+8\Big] \\
&+\frac{1}{8r^6}\left[2\alpha\left(2-\alpha\right)^2\zeta^4+\left(-13\alpha^4+60\alpha^3-96\alpha^2+64\alpha-16\right)\zeta^3\right. \\
&+\left(99\alpha^4-322\alpha^3+380\alpha^2-296\alpha+96\right)\zeta^2 \\
&+\left(-147\alpha^4+300\alpha^3-392\alpha^2+160\alpha+16\right)\zeta+13\alpha^4-48\alpha^3-148\alpha^2+144\alpha\Big] \\
&+\frac{1}{2r^8}\left[\left(\alpha-2\right)\left(2-\alpha\bar{\alpha}\right)\zeta^3+\left(-15\alpha^3+40\alpha^2-28\alpha+4\right)\zeta^2\right. \\
&+\left(33\alpha^3-37\alpha^2+26\alpha-12\right)\zeta-3\alpha^3+18\alpha^2-12\bar{\alpha}\Big] \\
&\left.+\frac{\left(4\alpha^2-10\alpha+8\right)\zeta^2+\left(-17\alpha^2+12\alpha+4\right)\zeta+\alpha^2-8\alpha}{2r^{10}}-\frac{2\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
c^{(++,+1)}_{\gamma\chi_{c1}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c} r^2 \sqrt{(1-\alpha)\,(\alpha r^2-1)}}{\alpha^2\,(1+\bar\alpha)^2\,(\bar\alpha+1/r^2)\,(r^2-1)^2\,(\zeta+1-i0)\,(\zeta-1+i0)\,(\zeta-\kappa+i0)^2}\times \\
&\times\Bigg\{\ \alpha\,\bar\alpha^2\left[\left(\alpha^3-22\alpha^2+68\alpha-40\right)\zeta^4-\left(9\alpha^4-62\alpha^3+118\alpha^2-128\alpha+56\right)\zeta^3-\alpha^3\bar\alpha\right. \\
&\left.+\left(19\alpha^4-96\alpha^3+142\alpha^2-84\alpha+16\right)\zeta^2-\alpha\left(11\alpha^3-34\alpha^2+54\alpha-32\right)\zeta+\left(20\alpha^2-32\alpha+16\right)\right] \\
&+\frac{\bar\alpha}{r^2}\left[-\alpha\left(\alpha^4-15\alpha^3+26\alpha^2+60\alpha-88\right)\zeta^4\right. \\
&-\left(15\alpha^6-93\alpha^5+293\alpha^4-444\alpha^3+524\alpha^2-432\alpha+96\right)\zeta^3-\left(29\alpha^6-153\alpha^5+449\alpha^4\right. \\
&\left.-688\alpha^3+392\alpha^2+120\alpha-96\right)\zeta^2+\alpha\left(13\alpha^5-63\alpha^4+107\alpha^3-24\alpha^2-160\alpha+80\right)\zeta \\
&\left.+\left(\alpha^6+2\alpha^5+64\alpha^4-70\alpha^3-128\alpha^2+144\alpha-32\right)\right] \\
&+\frac{1}{r^4}\left[-\left(8\alpha^4-31\alpha^3+10\alpha^2+52\alpha-40\right)\alpha\zeta^4-4\bar\alpha\left(11\alpha^5-44\alpha^4+73\alpha^3-19\alpha^2-16\alpha-28\right)\zeta^3\right. \\
&-2\left(74\alpha^6-306\alpha^5+589\alpha^4-854\alpha^3+946\alpha^2-488\alpha+40\right)\zeta^2-4\bar\alpha\left(25\alpha^5-55\alpha^4+64\alpha^3\right. \\
&\left.\left.-7\alpha^2-134\alpha+48\right)\zeta+4\alpha^6+32\alpha^5+219\alpha^4-790\alpha^3+616\alpha^2-16\alpha-64\right] \\
&+\frac{1}{r^6}\left[(\alpha-2)^2(9\alpha-10)\alpha\zeta^4+\left(-47\alpha^5+199\alpha^4-336\alpha^3+228\alpha^2+48\alpha-96\right)\zeta^3\right. \\
&+\left(273\alpha^5-883\alpha^4+848\alpha^3-204\alpha^2+288\alpha-320\right)\zeta^2+\left(-281\alpha^5+621\alpha^4-684\alpha^3+924\alpha^2\right. \\
&\left.\left.-448\alpha-128\right)\zeta-9\alpha^5-154\alpha^4-38\alpha^3+912\alpha^2-872\alpha+160\right] \\
&+\frac{2}{r^8}\left[(\alpha-2)(9\alpha-10)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3-\left(113\alpha^4-351\alpha^3+292\alpha^2+80\alpha-136\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+\left(191\alpha^4-291\alpha^3+10\alpha^2-64\alpha+152\right)\zeta+\left(9\alpha^4+105\alpha^3-184\alpha^2-52\alpha+120\right)\right] \\
&+\frac{4\left[(9\alpha-10)\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+\bar\alpha(5\alpha+4)(13\alpha-16)\zeta-(5\alpha^3+16\alpha^2-54\alpha+32)\right]}{r^{10}} \\
&\left.-\frac{8\bar\alpha\left[(9\alpha-10)\zeta+(2-\alpha)\right]}{r^{12}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d^{(++,+1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \qquad\qquad (A.16)\\
&\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\,(\alpha r^2-1)}}{\bar\alpha\alpha^4\,(1+\bar\alpha)^2\,(\bar\alpha+1/r^2)^2\,(r^2-1)^2\,(\zeta+1-i0)\,(\zeta-1+i0)\,(\zeta-\kappa+i0)^2}\times \\
&\times\Bigg\{\ \frac{\bar\alpha^2\alpha^2}{8}\left[(2-\alpha)\left(\alpha^2+12\bar\alpha\right)\zeta^4+\left(9\alpha^4-46\alpha^3+78\alpha^2-80\alpha+40\right)\zeta^3\right. \\
&\left.-\alpha\left(19\alpha^3-64\alpha^2+78\alpha-36\right)\zeta^2+\left(11\alpha^4-18\alpha^3+14\alpha^2+16\bar\alpha\right)\zeta+\left(\alpha^3\bar\alpha+4\alpha^2-16\bar\alpha\right)\right] \\
&+\frac{\bar\alpha\alpha}{8r^2}\left[(\alpha-2)\bar\alpha\left(\alpha^3-4\alpha^2-20\alpha+16\right)\zeta^4-\left(3\alpha^6-57\alpha^5+261\alpha^4-472\alpha^3+508\alpha^2-368\alpha+128\right)\zeta^3\right. \\
&+\left(5\alpha^6-129\alpha^5+449\alpha^4-632\alpha^3+360\alpha^2+40\alpha-96\right)\zeta^2-\left(\alpha^6-75\alpha^5+139\alpha^4-68\alpha^3-128\alpha^2\right. \\
&\left.+160\alpha-32\right)\zeta-\left(\alpha^6+2\alpha^5+8\alpha^4-86\alpha^3+8\alpha^2+128\alpha-64\right)\Big]+\frac{1}{8r^4}\left[(\alpha-2)\alpha^2\left(\alpha^2+4\alpha-4\right)\zeta^4\right. \\
&+4\left(-\alpha^7+18\alpha^6-83\alpha^5+148\alpha^4-143\alpha^3+104\alpha^2-60\alpha+16\right)\zeta^3 \\
&+2\left(10\alpha^7-166\alpha^6+605\alpha^5-1022\alpha^4+954\alpha^3-456\alpha^2+40\alpha+32\right)\zeta^2-4\alpha\left(3\alpha^6-67\alpha^5+165\alpha^4\right. \\
&\left.\left.-151\alpha^3-15\alpha^2+130\alpha-64\right)\zeta+\left(-4\alpha^7-8\alpha^6-11\alpha^5+382\alpha^4-584\alpha^3+96\alpha^2+192\alpha-64\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{8r^6}\left[-(\alpha-2)^2\alpha\left(\alpha^2-10\alpha+8\right)\zeta^4+\alpha\left(3\alpha^5-51\alpha^4+204\alpha^3-308\alpha^2+224\alpha-64\right)\zeta^3\right.\\
&+\left(-25\alpha^6+347\alpha^5-1000\alpha^4+1244\alpha^3-896\alpha^2+480\alpha-128\right)\zeta^2\\
&+\left(29\alpha^6-441\alpha^5+920\alpha^4-860\alpha^3+336\alpha^2+160\alpha-128\right)\zeta\\
&\left.+\alpha\left(9\alpha^5+34\alpha^4-106\alpha^3-456\alpha^2+936\alpha-416\right)\right]\\
&+\frac{1}{4r^8}\left[(2-\alpha)\left(\alpha^2-10\alpha+8\right)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3+\left(9\alpha^5-119\alpha^4+300\alpha^3-256\alpha^2+24\alpha+32\right)\zeta^2\right.\\
&\left.+\left(-15\alpha^5+187\alpha^4-250\alpha^3+88\alpha^2-56\alpha+32\right)\zeta+\left(-9\alpha^5-9\alpha^4+104\alpha^3+36\alpha^2-216\alpha+96\right)\right]\\
&+\frac{1}{2r^{10}}\left(\left(-\alpha^2+10\alpha-8\right)\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+\left(5\alpha^4-57\alpha^3+56\alpha^2+32\alpha-32\right)\zeta\right.\\
&\left.+\alpha\left(5\alpha^3-8\alpha^2-22\alpha+24\right)\right)+\frac{\bar\alpha\left[\left(\alpha^2-10\alpha+8\right)\zeta-(2-\alpha)\alpha\right]}{r^{12}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
c^{(+-,+1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}r^2\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2-1\right)}}{\alpha\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\ \bar\alpha^2\left[(2-\alpha)^2\alpha\bar\alpha^2\left(4\alpha^2+3\alpha+4\right)\zeta^3+(2-\alpha)\alpha^2\bar\alpha^2\left(8\alpha^2+5\alpha+6\right)\zeta^2\right.\\
&\left.+\alpha^2\bar\alpha^2\left(4\alpha^3+\alpha^2+8\alpha-8\right)\zeta+(4-\alpha)\bar\alpha^2\alpha^3\right]+\\
&+\frac{1}{r^2}\left[(2-\alpha)^2\bar\alpha\alpha(\alpha+22)\zeta^4-\bar\alpha\left(4\alpha^6-31\alpha^5+111\alpha^4-229\alpha^3+336\alpha^2-260\alpha+32\right)\zeta^3+\right.\\
&+\bar\alpha\alpha\left(8\alpha^5-33\alpha^4+95\alpha^3-223\alpha^2+172\alpha+12\right)\zeta^2+\\
&\left.-\bar\alpha\left(4\alpha^6-5\alpha^5+37\alpha^4-35\alpha^3-92\alpha^2+64\alpha-16\right)-\bar\alpha\alpha\left(3\alpha^4-4\alpha^3-37\alpha^2-12\alpha+24\right)\right]\\
&+\frac{1}{r^4}\left[(2-\alpha)^2\left(\alpha^2+6\alpha-8\right)\alpha\zeta^4+2\bar\alpha\left(5\alpha^5-31\alpha^4+76\alpha^3-53\alpha^2+28\alpha-68\right)\zeta^3+\right.\\
&+2\left(17\alpha^6-107\alpha^5+281\alpha^4-495\alpha^3+561\alpha^2-236\alpha-20\right)\zeta^2-2\alpha^6-11\alpha^5\\
&\left.+2\bar\alpha\left(11\alpha^4-41\alpha^3+86\alpha^2-129\alpha-48\right)\alpha\zeta+48\alpha^4+106\alpha^3-150\alpha^2-8\alpha+16\right]+\frac{1}{r^6}\left[\left(8\alpha^5-45\alpha^4\right.\right.\\
&\left.+101\alpha^3-64\alpha^2-60\alpha+64\right)\zeta^3+(2-\alpha)\left(52\alpha^4-165\alpha^3+117\alpha^2-174\alpha+168\right)\zeta^2\\
&+\alpha\left(12\alpha^4+4\alpha^3-107\alpha^2-120\alpha+212\right)+\left(48\alpha^5-211\alpha^4+351\alpha^3-612\alpha^2+276\alpha+144\right)\zeta+\\
&\left.(2-\alpha)^3\alpha\zeta^4\right]-\frac{2}{r^8}\left[(2-\alpha)^2\left(\alpha^2-2\alpha+3\right)\zeta^3+(2-\alpha)\left(17\alpha^3-40\alpha^2-13\alpha+38\right)\zeta^2\right.\\
&\left.\left(27\alpha^4-86\alpha^3+25\alpha^2-100\alpha+132\right)\zeta+\left(13\alpha^4-14\alpha^3-61\alpha^2-8\alpha+68\right)\right]\\
&-\frac{4\left[(\alpha-2)^2(2\alpha-3)\zeta^2+\bar\alpha\left(8\alpha^2-13\alpha-32\right)\zeta-\left(6\alpha^3-10\alpha^2-13\alpha+16\right)\right]}{r^{10}}+\frac{8(\alpha-3)\bar\alpha\zeta-8\,\bar\alpha^2}{r^{12}}\Bigg\}\\
&+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(+-,+1)}_{\gamma\chi_{c1}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4i\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2-1\right)}}{\alpha^2\bar\alpha\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta+1-i0)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)}\times
\end{aligned}
$$

$$\times\Bigg\{\ \frac{\bar\alpha}{8}\left[(2-\alpha)\left(4\alpha^2-9\alpha+8\right)\alpha\zeta^2-2\bar\alpha(2\alpha-3)\alpha^2\zeta-(4-\alpha)\alpha^2\right]$$
$$+\frac{1}{8r^2}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^3+(2-\alpha)\left(4\alpha^4-3\alpha^3-9\alpha^2+15\alpha-4\right)\zeta^2+\alpha\left(4\alpha^4+2\alpha^3-37\alpha^2+52\alpha-18\right)\zeta\right.$$
$$\left.\left(3\alpha^4-7\alpha^3+\alpha^2-4\alpha+8\right)\right]$$
$$+\frac{1}{8r^4}\left[-(\alpha-2)^2\alpha\zeta^3+(\alpha-2)\left(6\alpha^3-8\alpha^2-3\alpha+10\right)\zeta^2+\left(-12\alpha^4+17\alpha^3+20\alpha^2-32\alpha-4\right)\zeta\right.$$
$$\left.+\left(-2\alpha^4-4\alpha^3+11\alpha^2+4\alpha-8\right)\right]$$
$$+\frac{(2-\alpha)\left(\alpha^2-3\alpha+3\right)\zeta^2+\left(6\alpha^3-11\alpha^2-7\alpha+16\right)\zeta+\left(3\alpha^3-2\alpha^2-4\alpha+2\right)}{4r^6}$$
$$-\frac{(3-\alpha)\bar\alpha\zeta+\bar\alpha^2}{2r^8}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

Funciones de coeficiente para $\gamma\chi_{c2}$

$$c^{(++,-2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.19}$$
$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1-\alpha\right)\left(\alpha\,r^2-1\right)r^2}{\alpha^3\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$
$$\times\Bigg\{\ \bar\alpha\alpha^2\left[-\left(2\alpha^4-11\alpha^3+20\alpha^2-16\alpha+4\right)\zeta^3\right.$$
$$\left.-\left(2\alpha^4-3\alpha^3+4\alpha-4\right)\zeta+(2-\alpha)\alpha\left(\zeta^4+2\bar\alpha(2\alpha-1)\zeta^2+1\right)\right]$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[(\alpha-4)(2-\alpha)\bar\alpha\alpha(3\alpha-2)\zeta^4+\alpha\left(6\alpha^6-41\alpha^5+113\alpha^4-171\alpha^3+176\alpha^2-116\alpha+32\right)\zeta^3\right.$$
$$-2\alpha\left(6\alpha^6-33\alpha^5+76\alpha^4-92\alpha^3+54\alpha^2-6\alpha-4\right)\zeta^2+\alpha^2\left(6\alpha^5-25\alpha^4+41\alpha^3-23\alpha^2-8\alpha+8\right)\zeta$$
$$\left.-\bar\alpha\alpha\left(3\alpha^3+8\alpha^2-16\alpha+8\right)\right]+\frac{1}{r^4}\left[4(\alpha-2)\bar\alpha^2\alpha\zeta^4-2\left(5\alpha^6-28\alpha^5+52\alpha^4-38\alpha^3\right.\right.$$
$$\left.+36\alpha^2-52\alpha+24\right)\zeta^3+4\left(11\alpha^6-47\alpha^5+81\alpha^4-87\alpha^3+54\alpha^2+2\alpha-12\right)\zeta^2$$
$$\left.-2\alpha\left(17\alpha^5-46\alpha^4+56\alpha^3-18\alpha^2-48\alpha+36\right)\zeta+4\bar\alpha\left(9\alpha^3-7\alpha^2-8\alpha+4\right)\right]$$
$$+\frac{1}{r^6}\left[\left(8\alpha^5-37\alpha^4+56\alpha^3-4\alpha^2-56\alpha+32\right)\zeta^3-2\left(28\alpha^5-93\alpha^4+92\alpha^3-74\alpha^2+116\alpha-64\right)\zeta^2\right.$$
$$\left.+\left(72\alpha^5-145\alpha^4+144\alpha^3-108\alpha^2-72\alpha+96\right)\zeta-2\bar\alpha\alpha\left(5\alpha^2+34\alpha-56\right)+2(\alpha-2)^2\bar\alpha\alpha\zeta^4\right]$$
$$+\frac{1}{r^8}\left[-4(2-\alpha)\bar\alpha\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3+4\left(10\alpha^4-29\alpha^3+12\alpha^2+28\alpha-20\right)\zeta^2\right.$$
$$-4\left(19\alpha^4-25\alpha^3+7\alpha^2-32\alpha+28\right)\zeta+16\bar\alpha\left(2\alpha^2+\alpha-5\right)\Big]$$
$$\left.\frac{8\bar\alpha\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+4(3\alpha-4)\left(4\alpha^2+\alpha-4\right)\zeta-8\bar\alpha(3\alpha-4)}{r^{10}}-\frac{16\bar\alpha^2\zeta}{r^{12}}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d^{(++,-2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.20}$$
$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\bar\alpha^2\left(\alpha\,r^2-1\right)}{\alpha^4\left(1+\bar\alpha\right)^2r^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$\times\Bigg\{\ \frac{\bar\alpha\alpha}{4}\left[-(\alpha-2)^2\zeta^4-2(2-\alpha)\left(\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-3\right)\zeta^3-2\left(2\alpha^4-6\alpha^3+7\alpha^2-3\alpha-4\right)\zeta^2\right.$$
$$\left.+\left(\alpha^2+6\alpha-4\right)+2\left(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2+\alpha+2\right)\zeta\right]+$$
$$+\frac{1}{2r^2}\left[(\alpha-2)\left(2\alpha^4-5\alpha^3+\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3+\alpha\left(6\alpha^4-9\alpha^3+7\alpha^2+9\alpha-12\right)\zeta+\right.$$
$$\left.+2\left(-4\alpha^5+13\alpha^4-17\alpha^3+17\alpha^2-6\alpha-2\right)\zeta^2-4\bar\alpha(\alpha+1)(2\alpha-1)\right]$$
$$+\frac{1}{4r^4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+2(2-\alpha)\alpha\left(2\alpha^2-4\alpha+1\right)\zeta^3+2(\alpha-2)\left(12\alpha^3-4\alpha^2+3\alpha-4\right)\zeta^2+\right.$$
$$\left.+2\left(-14\alpha^4+14\alpha^3-15\alpha^2+2\alpha+8\right)\zeta-\alpha\left(5\alpha^2+34\alpha-40\right)\right]$$
$$+\frac{(\alpha-2)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3+4\left(2\alpha^2+2\alpha-3\right)+2\left(-5\alpha^3+11\alpha^2-2\alpha-2\right)\zeta^2+\left(17\alpha^3-7\alpha^2-4\right)\zeta}{2r^6}$$
$$\frac{\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+2\bar\alpha(3\alpha+2)\zeta-3\alpha}{r^8}-\frac{2\bar\alpha\zeta}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c^{(+-,-2)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.21}$$
$$-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}(1-\alpha)\left(\alpha\,r^2-1\right)^2}{\alpha^2\left(1+\bar\alpha\right)^2r^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)(r^2-1)\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)}\times$$
$$\times\Bigg\{\ \bar\alpha\alpha(2\alpha-1)\left[\alpha\zeta+(2-\alpha)\zeta^2\right]+\frac{(\alpha-2)\alpha\zeta^3-2(2-\alpha)\bar\alpha\alpha\zeta^2-2\bar\alpha\alpha(3\alpha-1)\zeta-(\alpha-2)^2}{r^2}$$
$$\frac{2\left(\alpha^2-2\alpha+2\right)\zeta^2-2\left(3\alpha^2-2\alpha-2\right)\zeta-2\alpha}{r^4}-\frac{4\bar\alpha\zeta}{r^6}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d^{(+-,-2)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)=0 \tag{A.22}$$

$$c^{(++,-1)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi)= \tag{A.23}$$
$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}r^2\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2-1\right)}}{\alpha^3\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)(r^2-1)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$
$$\times\Bigg\{\ \bar\alpha\alpha^2\left[-2\left(2\alpha^2-7\alpha+4\right)\zeta^4-\left(3\alpha^4-20\alpha^3+38\alpha^2-36\alpha+12\right)\zeta^3\right.$$
$$\left.+2\left(3\alpha^4-14\alpha^3+18\alpha^2-8\alpha+2\right)\zeta^2-\left(3\alpha^4-8\alpha^3+10\alpha^2-4\alpha-4\right)\zeta+2\left(2\alpha^2-3\alpha+2\right)\right]$$
$$+\frac{\alpha}{r^2}\left[2(4-\alpha)\bar\alpha\left(\alpha^2-6\alpha+4\right)\zeta^4+\left(11\alpha^6-71\alpha^5+203\alpha^4-322\alpha^3+362\alpha^2-272\alpha+88\right)\zeta^3\right.$$
$$-2\left(11\alpha^6-55\alpha^5+133\alpha^4-180\alpha^3+108\alpha^2+4\alpha-20\right)\zeta^2$$
$$\left.+\alpha\left(11\alpha^5-39\alpha^4+63\alpha^3-26\alpha^2-42\alpha+32\right)\zeta-2\bar\alpha\left(9\alpha^3+4\alpha^2-24\alpha+12\right)\right]$$
$$+\frac{2}{r^4}\left[\alpha\bar\alpha^2\left(\alpha^2-8\right)\zeta^4-\left(11\alpha^6-55\alpha^5+103\alpha^4-80\alpha^3+68\alpha^2-96\alpha+48\right)\zeta^3\right.$$
$$+2\left(22\alpha^6-85\alpha^5+145\alpha^4-176\alpha^3+132\alpha^2-12\alpha-24\right)\zeta^2$$
$$\left.-\alpha\left(33\alpha^5-79\alpha^4+95\alpha^3-20\alpha^2-128\alpha+96\right)\zeta+\bar\alpha\left(3\alpha^4+51\alpha^3-52\alpha^2-32\alpha+16\right)\right]$$
$$+\frac{1}{r^6}\left[4(\alpha-2)^2\alpha\bar\alpha\zeta^4+\left(19\alpha^5-78\alpha^4+110\alpha^3-12\alpha^2-104\alpha+64\right)\zeta^3-4\alpha\bar\alpha\left(10\alpha^2+37\alpha-66\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\left(63\alpha^5 - 190\alpha^4 + 170\alpha^3 - 122\alpha^2 + 212\alpha - 128\right)\zeta^2 + \left(151\alpha^5 + 270\alpha^3\bar{\alpha} - 268\alpha^2 - 88\alpha + 192\right)\zeta\big] \\
&+ \frac{4}{r^8}\left[2(\alpha-2)\bar{\alpha}\left(\alpha^2 - \alpha + 2\right)\zeta^3 + \left(23\alpha^4 - 64\alpha^3 + 30\alpha^2 + 52\alpha - 40\right)\zeta^2 + \right. \\
&- \left(43\alpha^4 - 52\alpha^3 + 6\alpha^2 - 56\alpha + 56\right)\zeta + 4\bar{\alpha}\left(5\alpha^2 + \alpha - 10\right)\big] \\
&+ \frac{16\bar{\alpha}\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 + 4\left(27\alpha^3 - 30\alpha^2 - 30\alpha + 32\right)\zeta - 16\bar{\alpha}(3\alpha - 4)}{r^{10}} - \left.\frac{32\bar{\alpha}^2\zeta}{r^{12}}\right\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(++,-1)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi) = \tag{A.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\bar{\alpha}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2 - 1\right)}}{\alpha^4\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha} + 1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2(\zeta + 1 - i0)(\zeta - 1 + i0)(\zeta - \kappa + i0)^2}\times \\
\times&\left\{\ \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{4}\left[2\alpha(2\alpha-3)\zeta^2 - (2-\alpha)\zeta^4 - 2\left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\zeta^3 - 2\left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\zeta - (3\alpha - 2)\right]\right. \\
&+ \frac{\bar{\alpha}\alpha}{8r^2}\left[\left(3\alpha^4 - 9\alpha^3 + 22\alpha^2 - 24\alpha + 32\right)\zeta^3 - 2\left(3\alpha^4 - 3\alpha^3 + 14\alpha^2 - 18\alpha - 12\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+ \left(3\alpha^4 + 3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8\right)\zeta - 2\left(\alpha^2 - 4\right)\zeta^4 - 2(\alpha+2)(7\alpha - 4)\right] \\
&+ \frac{1}{4r^4}\left[\left(5\alpha^5 - 17\alpha^4 + 24\alpha^3 - 10\alpha^2 + 8\alpha - 8\right)\zeta^3 - 4\left(-4\alpha^5 + 8\alpha^4 - 9\alpha^3 + 16\alpha^2 - 8\alpha - 2\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+ \alpha\left(11\alpha^4 - 5\alpha^3 + 6\alpha^2 + 22\alpha - 32\right)\zeta - \bar{\alpha}\left(3\alpha^3 + 34\alpha^2 + 8\alpha - 8\right) - (2-\alpha)\bar{\alpha}\alpha^2\zeta^4\right] \\
&+ \frac{1}{8r^6}\left[2(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4 - \alpha\left(11\alpha^3 - 34\alpha^2 + 40\alpha - 16\right)\zeta^3 + 2\left(31\alpha^4 - 58\alpha^3 + 18\alpha^2 - 16\alpha + 16\right)\zeta^2 + \right. \\
&\left.+ \left(-63\alpha^4 + 30\alpha^3 - 40\alpha^2 + 16\alpha + 32\right)\zeta - 2\alpha\left(15\alpha^2 + 42\alpha - 52\right)\right] \\
&+ \frac{(\alpha-2)\left(2 - \alpha\bar{\alpha}\right)\zeta^3 + \left(-13\alpha^3 + 26\alpha^2 - 8\alpha - 4\right)\zeta^2 + \left(22\alpha^3 - 7\alpha^2 - 4\alpha - 4\right)\zeta + 4\left(3\alpha^2 + 2\alpha - 3\right)}{2r^8} \\
&+ \left.\frac{2\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 + \left(-15\alpha^2 + 6\alpha + 8\right)\zeta - 6\alpha}{2r^{10}} - \frac{2\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\right\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
c^{(+-,-1)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi) = \tag{A.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)^3\left(\alpha r^2 - 1\right)^3}}{\bar{\alpha}\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha} + 1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta + 1 - i0)(\zeta - 1 + i0)(\zeta - \kappa + i0)}\times \\
\times&\left\{\ 3\bar{\alpha}\alpha^2\left(\alpha\zeta + (2-\alpha)\zeta^2\right) + \frac{(2-\alpha)\alpha^2(5\alpha - 4)\zeta^2 + \alpha^2\left(5\alpha^2 + 2\alpha - 6\right)\zeta + 2(\alpha-2)\alpha\zeta^3 - 2(\alpha-2)^2}{r^2}\right. \\
&+ \frac{2(2-\alpha)\alpha\zeta^3 + \left(5\alpha^3 - 10\alpha^2 + 8\right)\zeta^2 + \left(-15\alpha^3 + 8\alpha^2 + 8\right)\zeta + 2\left(\alpha^2 - 6\alpha + 4\right)}{r^4} \\
&+ \left.\frac{4\alpha - 4\left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\zeta^2 + 2\left(7\alpha^2 - 8\right)\zeta}{r^6} + \frac{8\bar{\alpha}\zeta}{r^8}\right\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(+-,-1)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi) = 0 \tag{A.26}
$$

$$
c^{(++,\,0)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi) = \tag{A.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{8\bar{\alpha}r^2\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\sqrt{6}\alpha^3\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha} + 1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2(\zeta + 1 - i0)(\zeta - 1 + i0)(\zeta - \kappa + i0)^2}\times
\end{aligned}
$$

$$
\times\Bigg\{\;2\alpha\,\bar\alpha^2\left[\left(\alpha^3-5\alpha^2+12\alpha-16\right)\zeta^4+\left(2\alpha^5-11\alpha^4+24\alpha^3-37\alpha^2+36\alpha-24\right)\zeta^3\right.
$$

$$
\left.-\alpha\left(4\alpha^4-14\alpha^3+22\alpha^2-31\alpha+18\right)\zeta^2+\alpha\left(2\alpha^4-3\alpha^3+4\alpha^2-3\alpha+4\right)\zeta+\left(\alpha^3+2\alpha^2-10\alpha+8\right)\right]
$$

$$
+\frac{\alpha}{r^2}\left[\left(\alpha^4-4\alpha^3+16\alpha^2-64\alpha+48\right)\zeta^4+2\left(5\alpha^6-36\alpha^5+95\alpha^4-153\alpha^3+177\alpha^2-180\alpha+96\right)\zeta^3\right.
$$

$$
-2\left(18\alpha^6-88\alpha^5+169\alpha^4-228\alpha^3+199\alpha^2-26\alpha-60\right)\zeta^2
$$

$$
\left.+2\alpha\left(13\alpha^5-36\alpha^4+43\alpha^3-21\alpha^2-45\alpha+64\right)\zeta+\left(21\alpha^4-72\alpha^3-2\alpha^2+124\alpha-56\right)\right]
$$

$$
+\frac{1}{r^4}\left[\left(\alpha^4-9\alpha^3+18\alpha^2+12\alpha-24\right)\alpha\zeta^4-2\left(5\alpha^6-41\alpha^5+96\alpha^4-98\alpha^3+40\alpha^2-64\alpha+72\right)\zeta^3\right.
$$

$$
+2\left(30\alpha^6-166\alpha^5+281\alpha^4-315\alpha^3+368\alpha^2-176\alpha-72\right)\zeta^2
$$

$$
\left.-2\left(33\alpha^5-107\alpha^4+108\alpha^3-84\alpha^2-84\alpha+204\right)\alpha\zeta-5\alpha^5-33\alpha^4+296\alpha^3-276\alpha^2-104\alpha+48\right]
$$

$$
+\frac{1}{r^6}\left[(6-\alpha)(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+2\left(\alpha^2-2\alpha+2\right)\left(3\alpha^3-21\alpha^2+10\alpha+24\right)\zeta^3\right.
$$

$$
+\alpha\left(21\alpha^3-54\alpha^2-336\alpha+496\right)-4\left(13\alpha^5-85\alpha^4+111\alpha^3-27\alpha^2+54\alpha-96\right)\zeta^2
$$

$$
\left.+2\left(43\alpha^5-169\alpha^4+106\alpha^3-150\alpha^2+124\alpha+144\right)\zeta\right]
$$

$$
+\frac{2}{r^8}\left[(\alpha-6)(2-\alpha)\left(2-\alpha\bar\alpha\right)\zeta^3+2\left(7\alpha^4-54\alpha^3+71\alpha^2+18\alpha-60\right)\zeta^2\right.
$$

$$
\left.-\left(33\alpha^4-161\alpha^3+10\alpha^2+12\alpha+168\right)\zeta-2\left(7\alpha^3-39\alpha^2-6\alpha+60\right)\right]
$$

$$
\left.-\frac{4(\alpha-6)\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2-32\left(\alpha^3-6\alpha^2+6\right)\zeta-4(\alpha-6)(3\alpha-4)}{r^{10}}+\frac{8(\alpha-6)\bar\alpha\zeta}{r^{12}}\right\}+\Big(\;\zeta\to-\zeta\Big)
$$

$$
d^{(++,0)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.28}
$$

$$
-\frac{4\bar\alpha\mathfrak{C}_{\chi_c}}{\sqrt{6}\alpha^4\left(1+\bar\alpha\right)^2\left(\bar\alpha+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times
$$

$$
\times\Bigg\{\;\frac{(2-\alpha)\alpha^2}{4}\left[-2\left(\alpha^5-6\alpha^4+13\alpha^3-15\alpha^2+10\alpha-4\right)\zeta^3-2\alpha(2-\alpha)\left(2\alpha^3-4\alpha^2+3\alpha-2\right)\zeta^2\right.
$$

$$
\left.+\left(2-\alpha\right)\left(\alpha^2+2\alpha-2\right)-2\alpha\left(\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2+\alpha-2\right)\zeta+\left(2-\alpha\right)\left(\alpha^2+2\bar\alpha\right)\zeta^4\right]
$$

$$
+\frac{\alpha}{2r^2}\left[\left(2-\alpha\right)\left(2\alpha^5-13\alpha^4+24\alpha^3-25\alpha^2+18\alpha-10\right)\zeta^3\right.
$$

$$
-\left(\alpha-2\right)^2\left(1-\alpha\bar\alpha\right)\zeta^4-\alpha\left(\alpha^2+6\bar\alpha\right)\left(3\alpha^2-2\bar\alpha\right)
$$

$$
+\left(8\alpha^6-50\alpha^5+108\alpha^4-109\alpha^3+59\alpha^2-4\alpha-16\right)\zeta^2
$$

$$
\left.-\alpha\left(6\alpha^5-25\alpha^4+30\alpha^3-11\alpha^2-14\alpha+18\right)\zeta\right]
$$

$$
+\frac{1}{2r^4}\left[\left(\alpha-2\right)\left(\alpha^5-11\alpha^4+16\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha-4\right)\zeta^3\right.
$$

$$
+2\bar\alpha\left(5\alpha^5-32\alpha^4+44\alpha^3-24\alpha^2+20\alpha+4\right)\zeta^2
$$

$$
\left.+\alpha\left(13\alpha^5-61\alpha^4+62\alpha^3-20\alpha^2-30\alpha+40\right)\zeta+\left(3\alpha^4-52\alpha^3+44\alpha^2+16\alpha-8\right)+(\alpha-2)^2\alpha^2\zeta^4\right]
$$

$$
+\frac{1}{2r^6}\left[-(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+2(\alpha-2)\alpha\left(3\alpha^2-4\alpha+3\right)\zeta^3+\left(4\alpha^5-56\alpha^4+111\alpha^3-64\alpha^2+28\alpha-16\right)\zeta^2\right.
$$

$$
\left.+2\left(-6\alpha^5+39\alpha^4-29\alpha^3+11\alpha^2-2\alpha-8\right)\zeta+8\alpha\left(\alpha^2-8\bar\alpha\right)\right]
$$

$$
+\frac{\left(2-\alpha\right)\left(2-\alpha\bar\alpha\right)\zeta^3-2\bar\alpha\left(7\alpha^2-8\alpha-2\right)\zeta^2-2\left(5\alpha^2-6\bar\alpha\right)+\left(2\alpha^4-31\alpha^3+13\alpha^2+4\alpha+4\right)\zeta}{r^8}
$$

$$\frac{2\left(8\alpha^2-3\alpha-4\right)\zeta-2\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+6\alpha}{r^{10}}+\frac{4\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c_{\gamma\chi_{c2}}^{(+-,0)}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.29}$$
$$-\frac{8\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(\alpha r^2-1\right)}{\sqrt{6}\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$
$$\times\Bigg\{\ 2\bar{\alpha}\alpha\left[\bar{\alpha}\left(2\alpha^4-\alpha^3+\alpha+2\right)\zeta-(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4-\alpha\left(\alpha^2+3\alpha-3\right)+\bar{\alpha}\left(2\alpha^4-9\alpha^3+12\alpha^2-9\alpha+6\right)\zeta^3\right.$$
$$\left.+\,\alpha\left(4\alpha^4-14\alpha^3+16\alpha^2-9\alpha+5\right)\zeta^2\right]+\frac{1}{r^2}\left[2\alpha\bar{\alpha}\left(3\alpha^4-17\alpha^3+30\alpha^2-24\alpha+10\right)\zeta^3\right.$$
$$+2\alpha\left(14\alpha^5-64\alpha^4+107\alpha^3-84\alpha^2+37\alpha-8\right)\zeta^2+2\bar{\alpha}\left(11\alpha^5-17\alpha^4+6\alpha^3+2\alpha^2+6\alpha-12\right)\zeta$$
$$\left.-\,\alpha\left(19\alpha^3-11\alpha^2-26\alpha+20\right)+(\alpha-3)(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4\right]+\frac{1}{r^4}\left[(3-\alpha)(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4\right.$$
$$+4(\alpha-3)\left(\alpha^2-2\alpha+2\right)\left(\alpha^2-\alpha-1\right)\zeta^3-4\left(8\alpha^5-36\alpha^4+54\alpha^3-31\alpha^2+12\alpha-6\right)\zeta^2$$
$$\left.+\,4\left(11\alpha^5-29\alpha^4+23\alpha^3-\alpha^2-12\alpha+6\right)\zeta+5\alpha^4+37\alpha^3+-52\alpha^2-12\alpha+24\right]$$
$$-\frac{2}{r^6}\left[(\alpha-3)(\alpha-2)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3-2(\alpha-2)\left(5\alpha^3-12\alpha^2+9\right)\zeta^2+\right.$$
$$\left.+\left(21\alpha^4-54\alpha^3+29\alpha^2-12\alpha+12\right)\zeta+2\left(4\alpha^3+3\alpha^2-15\alpha+6\right)\right]$$
$$-\frac{4(\alpha-3)\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+8\bar{\alpha}\left(3\alpha^2-5\alpha-6\right)\zeta-4\alpha(3\alpha-5)}{r^8}+\frac{8(\alpha-3)\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d_{\gamma\chi_{c2}}^{(+-,0)}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.30}$$
$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(\alpha-1/r^2\right)}{\sqrt{6}\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$
$$\times\Bigg\{\ \frac{\bar{\alpha}}{4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4-2(2-\alpha)\left(\alpha^4-4\alpha^3+6\alpha^2-6\alpha+1\right)\zeta^3-2\alpha\left(2\alpha^4-8\alpha^3+13\alpha^2-9\alpha-1\right)\zeta^2\right.$$
$$\left.+2\left(\alpha^5-2\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha-2\right)\zeta+\alpha\left(\alpha^2+6\alpha-6\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2r^2}\left[(\alpha-2)\left(2\alpha^4-7\alpha^3+7\alpha^2-5\alpha+2\right)\zeta^3+2\left(-4\alpha^5+17\alpha^4-31\alpha^3+33\alpha^2-16\alpha+2\right)\zeta^2\right.$$
$$\left.+\alpha\left(6\alpha^4-15\alpha^3+17\alpha^2+\alpha-8\right)\zeta-4\bar{\alpha}(\alpha+1)(2\alpha-1)\right]$$
$$+\frac{1}{4r^4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+2(2-\alpha)\bar{\alpha}^2(2\alpha-1)\zeta^3+2\left(12\alpha^4-38\alpha^3+41\alpha^2-27\alpha+8\right)\zeta^2\right.$$
$$\left.+\,2\left(-14\alpha^4+27\alpha^3-32\alpha^2+11\alpha+2\right)\zeta-\alpha\left(5\alpha^2+34\alpha-34\right)\right]$$
$$+\frac{(\alpha-2)\left(2-\alpha\bar{\alpha}\right)\zeta^3+2\bar{\alpha}\alpha(5\alpha-8)\zeta^2+\left(17\alpha^3-19\alpha^2+12\alpha-4\right)\zeta+8\left(\alpha^2+\alpha-1\right)}{2r^6}$$
$$+\frac{\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2+2\bar{\alpha}(3\alpha+1)\zeta-3\alpha}{r^8}-\frac{2\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c_{\gamma\chi_{c2}}^{(++,+1)}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.31}$$
$$-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}r^2\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2-1\right)}}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$
\times \Bigg\{ \;\; \bar{\alpha}\alpha^2 \left[-2(\alpha-4)\bar{\alpha}\zeta^4 - \left(\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 4\right)\zeta^3 + 2\left(\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 2\right)\zeta^2 \right.
$$

$$
\left. - \left(\alpha^4 + 2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 12\alpha - 4\right)\zeta + 2\bar{\alpha}(3\alpha - 2) \right]
$$

$$
- \frac{1}{r^2}\left[4\alpha\left(5\alpha^2 - 12\alpha + 8\right)\zeta^4 + \alpha\left(7\alpha^6 - 41\alpha^5 + 113\alpha^4 - 188\alpha^3 + 230\alpha^2 - 200\alpha + 88\right)\zeta^3 \right.
$$

$$
- 2\alpha\left(7\alpha^6 - 25\alpha^5 + 49\alpha^4 - 74\alpha^3 + 54\alpha^2 + 4\alpha - 20\right)\zeta^2
$$

$$
\left. + \alpha^2\left(7\alpha^5 - 9\alpha^4 + 5\alpha^3 + 12\alpha^2 - 38\alpha + 32\right)\zeta + 4\alpha\left(-4\alpha^3\bar{\alpha} - 9\alpha^2 + 16\alpha - 6\right) \right]
$$

$$
+ \frac{2}{r^4}\left[-\alpha\left(\alpha^4 - 5\alpha^3 + 3\alpha^2 + 8\alpha - 8\right)\zeta^4 + \left(7\alpha^6 - 35\alpha^5 + 71\alpha^4 - 76\alpha^3 + 68\alpha^2 - 72\alpha + 48\right)\zeta^3 \right.
$$

$$
- 2\left(14\alpha^6 - 51\alpha^5 + 84\alpha^4 - 111\alpha^3 + 100\alpha^2 - 24\alpha - 24\right)\zeta^2 + \alpha\left(21\alpha^5 + 39\alpha^3\bar{\alpha} + 4\alpha^2 + 96\bar{\alpha}\right)\zeta
$$

$$
\left. + \left(3\alpha^5 + 31\alpha^4 - 83\alpha^3 + 36\alpha^2 + 40\alpha - 16\right) \right] + \frac{1}{r^6}\left[\left(-\alpha^2 + 2\alpha - 2\right)\left(11\alpha^3 - 26\alpha^2 - 4\alpha + 32\right)\zeta^3 \right.
$$

$$
+ 2\left(39\alpha^5 - 128\alpha^4 + 130\alpha^3 - 90\alpha^2 + 148\alpha - 128\right)\zeta^2
$$

$$
\left. + \left(176\alpha^4 - 95\alpha^5 - 166\alpha^3 + 188\alpha^2 - 8\alpha - 192\right)\zeta + 2(\alpha-2)^3\alpha\zeta^4 - 2\alpha\left(15\alpha^3 + 22\alpha^2 - 146\alpha + 132\right) \right]
$$

$$
+ \frac{4}{r^8}\left[(\alpha-2)^2\left(2 - \alpha\bar{\alpha}\right)\zeta^3 - \left(13\alpha^4 - 44\alpha^3 + 32\alpha^2 + 32\alpha - 40\right)\zeta^2 \right.
$$

$$
\left. + \left(26\alpha^4 - 43\alpha^3 + 6\alpha^2 - 28\alpha + 56\right)\zeta + 2\left(6\alpha^3 - 9\alpha^2 - 12\alpha + 20\right) \right]
$$

$$
+ \frac{8(\alpha-2)\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 - 4\left(15\alpha^3 - 28\alpha^2 - 14\alpha + 32\right)\zeta - 8(\alpha-2)(3\alpha-4)}{r^{10}} + \frac{16(2-\alpha)\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}} \Bigg\}
$$

$$
+ \Big(\zeta \to -\zeta \Big)
$$

$$
d^{(++,+1)}_{\gamma\chi_{c2}}(r,\, \alpha,\, \zeta = x/\xi) = \tag{A.32}
$$

$$
\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2 - 1\right)}}{\bar{\alpha}\alpha^4\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha} + 1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2(\zeta + 1 - i0)(\zeta - 1 + i0)(\zeta - \kappa + i0)^2} \times
$$

$$
\times \Bigg\{ \;\; \frac{\bar{\alpha}^2\alpha^2}{8}\left[2(2-\alpha)\bar{\alpha}\zeta^4 + \left(3\alpha^4 - 16\alpha^3 + 28\alpha^2 - 24\alpha + 8\right)\zeta^3 - 2\alpha\left(3\alpha^3 - 10\alpha^2 + 10\alpha - 2\right)\zeta^2 \right.
$$

$$
\left. + \left(3\alpha^4 - 4\alpha^3 - 8\bar{\alpha}\right)\zeta - 2\bar{\alpha}(\alpha+2) \right] + \frac{\bar{\alpha}\alpha}{8r^2}\left[\left(10\alpha^5 - 59\alpha^4 + 121\alpha^3 - 138\alpha^2 + 96\alpha - 32\right)\zeta^3 \right.
$$

$$
- 2\left(16\alpha^5 - 65\alpha^4 + 95\alpha^3 - 50\alpha^2 - 6\alpha + 12\right)\zeta^2 + \left(22\alpha^5 - 47\alpha^4 + 29\alpha^3 + 22\alpha^2 - 36\alpha + 8\right)\zeta
$$

$$
\left. + 2(2-\alpha)\bar{\alpha}(3\alpha-2)\zeta^4 - 2\bar{\alpha}(3\alpha-2)(3\alpha+4) \right] + \frac{1}{8r^4}\left[2(2-\alpha)\bar{\alpha}\alpha^2\zeta^4 \right.
$$

$$
+ \left(11\alpha^6 - 66\alpha^5 + 134\alpha^4 - 148\alpha^3 + 116\alpha^2 - 64\alpha + 16\right)\zeta^3 - 2\bar{\alpha}\left(37\alpha^3 - 26\alpha^2 - 16\alpha + 8\right)
$$

$$
+ \alpha\left(63\alpha^5 - 178\alpha^4 + 174\alpha^3 - 124\alpha + 64\right)\zeta
$$

$$
\left. + 2\left(-31\alpha^6 + 142\alpha^5 - 264\alpha^4 + 248\alpha^3 - 112\alpha^2 + 8\alpha + 8\right)\zeta^2 \right]
$$

$$
+ \frac{1}{8r^6}\left[-\alpha\left(8\alpha^4 - 39\alpha^3 + 62\alpha^2 - 48\alpha + 16\right)\zeta^3 + 2\left(30\alpha^5 - 111\alpha^4 + 162\alpha^3 - 126\alpha^2 + 64\alpha - 16\right)\zeta^2 \right.
$$

$$
\left. + \left(-92\alpha^5 + 219\alpha^4 - 202\alpha^3 + 64\alpha^2 + 48\alpha - 32\right)\zeta - 2(\alpha-2)^2\bar{\alpha}\alpha\zeta^4 + 2\alpha\bar{\alpha}\left(5\alpha^2 + 62\alpha - 52\right) \right]
$$

$$
+ \frac{1}{2r^8}\left[(2-\alpha)\bar{\alpha}\left(\alpha^2 - \alpha + 2\right)\zeta^3 + \left(-10\alpha^4 + 31\alpha^3 - 30\alpha^2 + 4\alpha + 4\right)\zeta^2\zeta \right.
$$

$$
\left. + \left(20\alpha^4 - 33\alpha^3 + 15\alpha^2 - 8\alpha + 4\right) - 4\bar{\alpha}\left(2\alpha^2 + 4\alpha - 3\right) \right]
$$

$$+\frac{6\alpha\bar{\alpha}-2\bar{\alpha}\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2-\left(12\alpha^3-15\alpha^2-6\alpha+8\right)\zeta}{2r^{10}}+\frac{2\bar{\alpha}^2\zeta}{r^{12}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$c^{(+-,+1)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.33}$$

$$-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}r^2\sqrt{(1-\alpha)\left(\alpha r^2-1\right)}}{\alpha\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$\times\Bigg\{\ \bar{\alpha}\alpha^2(2-\alpha)\left[\alpha^2\zeta+2(2-\alpha)\alpha\zeta^2+(2-\alpha)^2\zeta^3\right]$$

$$+\frac{\alpha}{r^2}\left[\left(9\alpha^5-51\alpha^4+109\alpha^3-130\alpha^2+88\alpha-16\right)\zeta^3-2\alpha\left(9\alpha^4-35\alpha^3+57\alpha^2-50\alpha+14\right)\zeta^2\right.$$

$$\left.+\,4(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+\left(9\alpha^5-19\alpha^4+25\alpha^3-2\alpha^2+4\alpha-8\right)\zeta+4\alpha\left(\alpha^2-3\bar{\alpha}\right)\right]$$

$$+\frac{2}{r^4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4-\alpha\left(7\alpha^4-33\alpha^3+45\alpha^2-28\alpha+16\right)\zeta^3+2\alpha\left(16\alpha^4-52\alpha^3+63\alpha^2-43\alpha+4\right)\zeta^2\right.$$

$$\left.-\left(25\alpha^5-37\alpha^4+37\alpha^3+8\alpha^2+4\alpha-8\right)\zeta-\alpha\left(19\alpha^2+6\alpha-12\right)\right]$$

$$+\frac{1}{r^6}\left[-2(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+\left(9\alpha^4-32\alpha^3+28\alpha^2-16\right)\zeta^3-2\left(37\alpha^4-90\alpha^3+56\alpha^2-32\alpha+8\right)\zeta^2\right.$$

$$\left.+\left(101\alpha^4-104\alpha^3+100\alpha^2+40\alpha-16\right)\zeta+2\left(5\alpha^3+40\alpha^2-4\alpha-8\right)\right]$$

$$+\frac{4}{r^8}\left(\left(2-\alpha\right)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3+\left(11\alpha^3-20\alpha^2-2\alpha+12\right)\zeta^2\right.$$

$$\left.-\left(24\alpha^3-9\alpha^2+10\alpha-4\right)\zeta-2(\alpha+2)(4\alpha-1)\right)-\frac{8\left(2\alpha^2-5\alpha+4\right)\zeta^2-4\left(13\alpha^2-8\right)\zeta-24\alpha}{r^{10}}$$

$$+\ \frac{16\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\Bigg\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)$$

$$d^{(+-,+1)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)=0 \tag{A.34}$$

$$c^{(++,+2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta=x/\xi\right)= \tag{A.35}$$

$$\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1-\alpha\right)\left(\alpha\,r^2-1\right)r^2}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times$$

$$\times\Bigg\{\ \bar{\alpha}\alpha^2\left[-(2-\alpha)\alpha\zeta^4+\left(2\alpha^4-11\alpha^3+20\alpha^2-16\alpha+4\right)\zeta^3-2(2-\alpha)\bar{\alpha}\alpha(2\alpha-1)\zeta^2+\right.$$

$$\left.+\,\left(2\alpha^4-3\alpha^3+4\alpha-4\right)\zeta-(2-\alpha)\alpha\right]+\frac{1}{r^2}\left[(\alpha-2)\alpha\left(\alpha^3+\alpha^2+2\alpha-8\right)\zeta^4\right.$$

$$\left.+\,\alpha\left(2\alpha^6-11\alpha^5+23\alpha^4-37\alpha^3+44\alpha^2-44\alpha+32\right)\zeta^3+\alpha^5-\alpha^4-4\alpha^3\right.$$

$$2(2-\alpha)\alpha\left(2\alpha^5+\alpha^4-6\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha+2\right)\zeta^2+\alpha^2\left(2\alpha^5+5\alpha^4-17\alpha^3+15\alpha^2-4\alpha+8\right)\zeta$$

$$\left.+\,16\alpha^2-8\alpha\right]+\frac{1}{r^4}\left[2(2-\alpha)\alpha\left(\alpha^2-2\right)\zeta^4-2\left(\alpha^6-8\alpha^5+20\alpha^4-34\alpha^3+36\alpha^2-28\alpha+24\right)\zeta^3\right.$$

$$+\,4\left(3\alpha^6-13\alpha^5+20\alpha^4\right)\zeta^2+4\left(22\alpha^2\bar{\alpha}-10\alpha-12\right)\zeta^2-2\alpha\left(5\alpha^5-6\alpha^4+6\alpha^2-16\alpha+36\right)\zeta$$

$$\left.+\,2(2-\alpha)\left(\alpha^3-10\alpha^2-6\alpha+4\right)\right]+\frac{1}{r^6}\left[2(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+\left(-7\alpha^4+16\alpha^3-4\alpha^2-24\alpha+32\right)\zeta^3\right.$$

$$-\,2\left(4\alpha^5-31\alpha^4+52\alpha^3-42\alpha^2+52\alpha-64\right)\zeta^2+\left(16\alpha^5-51\alpha^4+40\alpha^3-28\alpha^2+24\alpha+96\right)\zeta$$

$$\left.-2\alpha\left(3\alpha^2+30\alpha-56\right)\right]+\frac{4}{r^8}\left[(\alpha-2)\left(\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta^3-\left(9\alpha^3-14\alpha^2-8\alpha+20\right)\zeta^2\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(2\alpha^4 - 16\alpha^3 + 7\alpha^2 - 4\alpha + 28\right)\zeta + 2\left(3\alpha^2 + 2\alpha - 10\right)\big] \\
&+ \frac{4\left[2\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 - \left(11\alpha^2 - 16\right)\zeta - 2(3\alpha - 4)\right]}{r^{10}} - \frac{16\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\Bigg\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(++,+2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi\right) = \tag{A.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\bar{\alpha}}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times \\
&\times\Bigg\{\ \frac{\bar{\alpha}\alpha}{4}\left[(\alpha-2)^2\zeta^4 - 2(2-\alpha)\left(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 3\right)\zeta^3 - 2\left(2\alpha^4 - 6\alpha^3 + 6\alpha^2 - \alpha - 4\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+2\left(\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 + 5\alpha - 2\right)\zeta + \left(3\alpha^2 + 2\alpha - 4\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2r^2}\left[(\alpha-2)\left(2\alpha^4 - 7\alpha^3 + 7\alpha^2 - 5\alpha + 2\right)\zeta^3 + 2\left(-4\alpha^5 + 15\alpha^4 - 21\alpha^3 + 15\alpha^2 - 2\alpha - 2\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+\ \alpha\left(6\alpha^4 - 11\alpha^3 + 5\alpha^2 + 13\alpha - 12\right)\zeta - 4\bar{\alpha}(\alpha+1)(2\alpha-1)\right] \\
&+ \frac{1}{4r^4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4 + 2(2-\alpha)\bar{\alpha}^2\alpha\zeta^3 + 2(\alpha-2)\left(10\alpha^3 - 13\alpha^2 + 11\alpha - 4\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+2\left(-13\alpha^4 + 20\alpha^3 - 15\alpha^2 - 6\alpha + 8\right)\zeta + \alpha\left(\alpha^2 - 46\alpha + 40\right)\right] \\
&+ \frac{(\alpha-2)\left(\alpha^2 - \alpha + 2\right)\zeta^3 + 2\bar{\alpha}\left(3\alpha^2 - 4\alpha - 2\right)\zeta^2 + \left(13\alpha^3 - 11\alpha^2 + 8\alpha - 4\right)\zeta + 4\left(\alpha^2 + 4\alpha - 3\right)}{2r^6} \\
&+ \frac{\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 + 4\bar{\alpha}(\alpha+1)\zeta - 3\alpha}{r^8} - \frac{2\bar{\alpha}\zeta}{r^{10}}\Bigg\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
c^{(+-,+2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi\right) = \tag{A.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\left(1-\alpha\right)\left(\alpha\, r^2 - 1\right)r^2}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times \\
&\times\Bigg\{\ \bar{\alpha}\alpha^2(2\alpha-1)\left[\alpha^2\zeta + 2(2-\alpha)\alpha\zeta^2 + (2-\alpha)^2\zeta^3\right] \\
&+ \frac{1}{r^2}\left[-5(\alpha-2)^2\alpha^2\zeta^4 - \alpha\left(6\alpha^5 - 37\alpha^4 + 87\alpha^3 - 115\alpha^2 + 80\alpha - 12\right)\zeta^3\alpha^2\left(5\alpha^2 + 8\alpha - 8\right)\right. \\
&\left.+\ 2\alpha^2\left(6\alpha^4 - 29\alpha^3 + 56\alpha^2 - 45\alpha + 8\right)\zeta^2 - \alpha^2(2\alpha-1)\left(3\alpha^3 - 9\alpha^2 + 7\alpha + 8\right)\zeta\right] \\
&+ \frac{1}{r^4}\left[-(\alpha-2)^2\bar{\alpha}\alpha\zeta^4 + 2\alpha\left(4\alpha^4 - 20\alpha^3 + 26\alpha^2 - 19\alpha + 18\right)\zeta^3 - 2\alpha^2\left(20\alpha^3 - 73\alpha^2 + 109\alpha - 78\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+\ 2\left(16\alpha^5 - 34\alpha^4 + 38\alpha^3 + 9\alpha^2 + 2\alpha - 4\right)\zeta + \alpha\left(\alpha^3 + 35\alpha^2 + 4\alpha - 12\right)\right] \\
&+ \frac{1}{r^6}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4 + \left(-4\alpha^4 + 15\alpha^3 - 8\alpha^2 - 8\alpha + 8\right)\zeta^3 + 4\left(10\alpha^4 - 25\alpha^3 + 22\alpha^2 - 20\alpha + 2\right)\zeta^2\right. \\
&\left.+\left(-60\alpha^4 + 83\alpha^3 - 104\alpha^2 - 40\alpha + 8\right)\zeta - 11\alpha^3 - 64\alpha^2 + 4\alpha + 8\right] + \frac{2}{r^8}\left[(\alpha-2)\left(\alpha^2 - \alpha + 2\right)\zeta^3\right. \\
&\left.- 4\left(5\alpha^3 - 7\alpha^2 - 5\alpha + 6\right)\zeta^2 + 2\left(25\alpha^3 - 9\alpha^2 + 28\alpha - 4\right)\zeta + 4\left(7\alpha^2 + 11\alpha - 2\right)\right] \\
&+ \frac{4\left[\left(2\alpha^2 - 5\alpha + 4\right)\zeta^2 - \left(6\alpha^2 + 3\alpha - 4\right)\zeta - 5\alpha\right]}{r^{10}} - \frac{8\bar{\alpha}\zeta}{r^{12}}\Bigg\} + \Big(\ \zeta \to -\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(+-,+2)}_{\gamma\chi_{c2}}\left(r,\,\alpha,\,\zeta = x/\xi\right) = \tag{A.38}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4\mathfrak{C}_{\chi_c}\bar{\alpha}}{\alpha^2\left(1+\bar{\alpha}\right)^2\left(\bar{\alpha}+1/r^2\right)^2\left(r^2-1\right)^2\left(\zeta+1-i0\right)\left(\zeta-1+i0\right)\left(\zeta-\kappa+i0\right)^2}\times\\
&\times\Bigg\{\ \frac{\alpha}{4}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4+2\left(\alpha^2-2\alpha+2\right)\left[(\alpha-2)\left(\alpha^2-3\alpha+1\right)\zeta^3+\left(\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2\right)\zeta\right]\right.\\
&\left.-2\left(2\alpha^4-10\alpha^3+19\alpha^2-14\alpha+2\right)\alpha\zeta^2+\alpha^3\right]-\frac{1}{2r^2}\left[(\alpha-2)^2\alpha\zeta^4\right.\\
&-(2-\alpha)\left(2\alpha^4-9\alpha^3+13\alpha^2-11\alpha+1\right)\zeta^3-\alpha\left(8\alpha^4-38\alpha^3+70\alpha^2-49\alpha+5\right)\zeta^2\\
&\left.+\left(6\alpha^5-17\alpha^4+19\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+2\right)\zeta+\alpha\left(3\alpha^2+\bar{\alpha}\right)\right]\\
&+\frac{(\alpha-2)\left(\alpha^3+4\alpha\bar{\alpha}-4\right)\zeta^3-2\alpha\left(5\alpha^3-22\alpha^2+39\alpha-24\right)\zeta^2+\alpha\left(13\alpha^3-34\alpha^2+36\alpha-4\right)\zeta+6\alpha^2}{2r^4}\\
&+\frac{(2-\alpha)\zeta^3+\left(4\alpha^3-16\alpha^2+31\alpha-16\right)\zeta^2-\left(12\alpha^3-28\alpha^2+27\alpha+2\right)\zeta-7\alpha}{2r^6}\\
&+\left.\frac{2\left[\left(\alpha^2+2\bar{\alpha}\right)\zeta-\zeta^2+1\right]}{r^8}\right\}+\Big(\ \zeta\to-\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] J. C. Collins, D. E. Soper, G. F. Sterman, Nucl. Phys. **B308** (1988) 833

[2] M. Diehl, J. R. Gaunt, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **29** (2018) 7-28 [arXiv:1710.04408 [hep-ph]]

[3] J. C. Collins, *Foundations of Perturbative QCD*, Cambridge University Press, Cambridge (2011)

[4] J. C. Collins, D. E. Soper, G. F. Sterman, Nucl. Phys. B **308** (1988) 833–856

[5] L. McLerran, R. Venugopalan, Phys. Rev. **D49** (1994) 3352 [hep-ph/9311205]; **D50** (1994) 2225 [hep-ph/9402335]

[6] S. Friot, B. Pire, L. Szymanowski, Phys.Lett.B **645** (2007) 153-160 [hep-ph/0611176]

[7] F. Gautheron *et al.* (COMPASS Collaboration), COMPASS-II Proposal, CERN-SPSC-2010-014, SPSC-P-340 (2010)

[8] V. D. Burkert, Jefferson Lab at 12 GeV: The Science Program, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **68** (2018) 405–432.

[9] EIC Collaboration, White Paper on the Electron-Ion Collider in Preparation for the 2023 NSAC Long Range Plan, (2023)

[10] M. Diehl, Phys.Rept. **388** (2003) 41-277 [hep-ph/0307382]

[11] P. Sznajder (COMPASS Collaboration), PoS (DIS2014) **220** (2014) [arXiv:1509.07732v1 [hep-ex]]

[12] J. Dudek, *et al.* Eur. Phys. J. A **48**, 187 (2012) [arXiv:1208.1244 [hep-ex]]

[13] V. D. Burkert, *The CLAS12 Spectrometer at Jefferson Laboratory*, Nucl. Instrum. Meth. A **959** (2020) 163419.

[14] J. Arrington *et al.*, Prog. Part. Nucl. Phys. **127** (2022) 103947 [arXiv:2112.00060 [nucl-ex]]

[15] J. L. Albacete, C. Marquet, Prog. Part. Nucl. Phys. **76** (2014) 1–42 [arXiv:1401.4866 [hep-ph]]

[16] A. Dumitru, A. Hayashigaki, J. Jalilian-Marian, Nucl. Phys. A **765** (2006) 464–482 [hep-ph/0506308]

[17] J. Jalilian-Marian, A. H. Rezaeian, Phys. Rev. D **85** (2012) 014017 [arXiv:1110.2810 [hep-ph]]

[18] A. Stasto, B.-W. Xiao, and D. Zaslavsky, Phys. Rev. D **86**, 014009 (2012) [arXiv:1110.2810 [hep-ph]]

[19] I. Arsene *et al.* (BRAHMS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 242303 [nucl-ex/0403005]

[20] A. J. Baltz *et al.*, Phys. Rept. **458** (2008) 1–171, [arXiv:0706.3356 [nucl-ex]]

[21] B. Abelev *et al.* (ALICE Collaboration), Phys. Lett. B **718** (2013) 1273–1283 [arXiv:1205.5761 [nucl-ex]]

[22] B. Abelev *et al.* (ALICE Collaboration), Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 232504 [arXiv:1011.3914 [nucl-ex]]

[23] O. Brüning, *The High Luminosity Large Hadron Collider – HL-LHC*, CERN (2024), CERN Document Server report.

[24] ATLAS Collaboration, CERN-LHCC-2015-009, ATLAS-TDR-024 (2015)

[25] M. Gallinaro *et al*, AIP Conf. Proc. **1819** (2017) 1 040021 [arXiv:1611.07431 [physics.ins-det]]

[26] M. Pitt *et al.* (CMS Collaboration), PoS(LHCP2023)012 (2024) [arXiv:2401.06597 [hep-ex]]

[27] M.Pitt, *Physics at the HL-LHC with proton tagging*, Acta Phys. Polon. B **53** (2022) 7-A12.

[28] R. A. Khalek *et al.* (EIC Collaboration), Nucl. Phys. A **1026** (2022) 122447 [arXiv:2103.05419 [physics.ins-det]]

[29] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian, R. Venugopalan, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60** (2010) 463–489 [arXiv:1002.0333 [hep-ph]]

[30] S. Chekanov *et al.* (ZEUS Collaboration), Eur. Phys. J. C **24** (2002) 345 [hep-ex/0201043]

[31] A. Aktas *et al.* (H1 Collaboration), Eur. Phys. J. C **46** (2006) 585 [hep-ex/0510016]

[32] F. D. Aaron *et al.* (H1 Collaboration), JHEP **05** (2010) 032 [arXiv:0910.5831 [hep-ex]]

[33] S. Chekanov *et al.* (ZEUS Collaboration), Phys. Lett. B **680** (2009) 4–12 [arXiv:0903.4205 [hep-ex]]

[34] B. Abelev *et al.* (ALICE Collaboration), Phys. Lett. B **718** (2013) 1273–1287 [arXiv:1209.3715 [nucl-ex]]

[35] V. Khachatryan *et al.* (CMS Collaboration), Phys. Lett. B **772** (2017) 489–511 [arXiv:1605.06966 [nucl-ex]]

[36] R. Aaij *et al.* (LHCb Collaboration), JHEP **10** (2018) 167 [arXiv:1806.04079 [hep-ex]]

[37] Y. Guo *et al.*, Phys.Rev.D **112** (2025) 5, 054036 [arXiv:2409.17231 [hep-ph]].

[38] H. Kowalski, L. Motyka, G. Watt, Phys. Rev. D **74** (2006) 074016 [hep-ph/0606272]

[39] H. Kowalski, D. Teaney, Phys. Rev. D **68** (2003) 114005 [hep-ph/0304189]

[40] K. Kumerički, S. Liuti, H. Moutarde, Eur. Phys. J. A **52** (2016) 157 [arXiv:1602.02763 [hep-ph]]

[41] V. Bertone, H. Dutrieux, C. Mezrag, H. Moutarde, P. Sznajder, SciPost Phys. Proc. **8** (2022) 107 [arXiv:2107.11312 [hep-ph]]

[42] A. H. Rezaeian, I. Schmidt, Phys. Rev. D **88** (2013) 074016 [arXiv:1307.0825 [hep-ph]]

[43] Y. Cai, W. Xiang, M. Wang, D. Zhou, Chin. Phys. C **44** (2020) 074110 [arXiv:2002.12610 [hep-ph]]

[44] G. Beuf, H. Hänninen, T. Lappi, H. Mäntysaari, Phys. Rev. D **102** (2020) 074028 [arXiv:2007.01645 [hep-ph]]

[45] C. Casuga, H. Hänninen, H. Mäntysaari, Phys. Rev. D **112** (2025) 034003 [arXiv:2506.00487 [hep-ph]]

[46] S. Nabeebaccus, J. Schönleber, L. Szymanowski, S. Wallon, Phys. Rev. D **111** (2025) 034040 [arXiv:2311.09146 [hep-ph]]

[47] E. R. Berger, F. Cano, M. Diehl, B. Pire, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 142302 [hep-ph/0106192]

[48] A. Freund, M. Strikman, Phys. Rev. C **69** (2004) 015203 [hep-ph/0307211]

[49] H. Kowalski, T. Lappi, C. Marquet, R. Venugopalan, Phys. Rev. C **78** (2008) 045201 [arXiv:0805.4071 [hep-ph]]

[50] V. Guzey, E. Kryshen, M. Strikman, M. Zhalov, Phys. Lett. B **726** (2013) 290–295 [arXiv:1305.1724 [hep-ph]]

[51] L. Motyka, Phys. Lett. B **637** (2006) 185–191 [hep-ph/0509270]

[52] W. Y. Liu, I. Zahed, Phys.Rev.D **110** (2024) 5, 054025 [arXiv:2404.03875 [hep-ph]]

[53] Y. Jia, Z. Mo, J. Pan, J. Y. Zhang, Phys. Rev. D **108** (2023) 016015 [arXiv:2207.14171 [hep-ph]]

[54] S. Benić, D. Horvatić, A. Kaushik, E. A. Vivoda, Phys. Rev. D **108** (2023) 074005 [arXiv:2306.10626 [hep-ph]]

[55] S. Benić, A. Dumitru, A. Kaushik, L. Motyka, T. Stebel, Phys. Rev. D **110** (2024) 014025 [arXiv:2402.19134 [hep-ph]]

[56] M. Siddikov, I. Zemlyakov, M. Roa and S. Valdebenito, Phys. Rev. D **111** (2025) 056024 [arXiv:2411.05545 [hep-ph]]

[57] M. Siddikov and I. Zemlyakov, [arXiv:2503.10848 [hep-ph]]

[58] M. Siddikov, I. Zemlyakov and M. Roa, [arXiv:2510.14767 [hep-ph]]

[59] A. V. Belitsky, A. V. Radyushkin, Phys. Rept. **418** (2005) 1–387 [hep-ph/0504030]

[60] T. Becher, A. Broggio, A. Ferroglia, Lect. Notes Phys. **896** (2015) 1–206 [arXiv:1410.1892 [hep-ph]]

[61] R. K. Ellis, W. J. Stirling, B. R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Vol.8, Cambridge University Press (1996), ISBN 0521581893

[62] G. Altarelli, G. Parisi, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298

[63] Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641

[64] V. N. Gribov, L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438; Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 675

[65] J. C. Collins, Acta Phys. Polon. B **34** (2003) 3103–3124 [hep-ph/0304122]

[66] X. D. Ji, Phys. Rev. D **55** (1997) 7114–7125 [hep-ph/9609381]

[67] A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **56** (1997) 5524–5557 [hep-ph/9704207]

[68] R. Enberg, B. Pire, L. Szymanowski, Eur. Phys. J. C **47** (2006) 87–94 [hep-ph/0601138].

[69] D. Yu. Ivanov, B. Pire, L. Szymanowski, O. V. Teryaev, Phys. Part. Nucl. **35** (2004) S67–S70 [hep-ph/0401157].

[70] M. Burkardt, Phys. Rev. D **66** (2002) 114005 [hep-ph/0209179]

[71] M. Diehl, *Generalized Parton Distributions* [URL: `https://bib-pubdb1.desy.de/record/145530/files/varenna.pdf`]

[72] M. Diehl, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 223–232 [hep-ph/0205208]

[73] S. V. Goloskokov, Y. P. Xie, X. Chen, Phys. Rev. D **110** (2024) 076029 [arXiv:2408.05800 [hep-ph]]

[74] D. Müller, D. Robaschik, B. Geyer, F. M. Dittes, J. Hořejši, Fortschr. Phys. **42** (1994) 101 [hep-ph/9812448].

[75] X. Ji, W. Melnitchouk, X. Song, Phys. Rev. D **56** (1997) 5511–5523 [hep-ph/9702379]

[76] M. V. Polyakov, C. Weiss, Phys. Rev. D **60** (1999) 114017 [hep-ph/9902451]

[77] X. Ji, R. F. Lebed, Phys. Rev. D **63** (2001) 076005 [hep-ph/0012160]

[78] P. V. Pobylitsa, Phys. Rev. D **65**, 077504 (2002) [hep-ph/0112322]

[79] P. V. Pobylitsa, Phys. Rev. D **66**, 094002 (2002) [hep-ph/0204337]

[80] M. Burkardt, Phys. Rev. D **62** (2000) 071503 [hep-ph/0005108].

[81] A. G. Shuvaev, K. J. Golec-Biernat, A. D. Martin, M. G. Ryskin, Phys. Rev. D **60** (1999) 014015 [hep-ph/9902410]

[82] I. V. Musatov, A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **61** (2000) 074027 [hep-ph/9905376]

[83] J. D. Noritzsch, Phys. Rev. D **62** (2000) 054015 [hep-ph/0004012].

[84] F. D. Aaron *et al.* (H1 Collaboration), Eur. Phys. J. C **73** (2013) 2466, [arXiv:1304.5162 [hep-ex]]

[85] M. Taševský, *High energy soft QCD and diffraction*, in: Review of Particle Physics (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2022** (2022) 083C01

[86] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. C **42** (2005) 281-301 [hep-ph/0501242]

[87] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. C **50** (2007) 829-842 [hep-ph/0611290]

[88] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. C **53** (2008) 367-384 [arXiv:0708.3569 [hep-ph]]

[89] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. C **65** (2010) 137-151 [arXiv:0906.0460 [hep-ph]]

[90] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. A **47** (2011) 112 [arXiv:1106.4897 [hep-ph]]

[91] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. A **50** (2014) 146 [arXiv:1407.1141 [hep-ph]]

[92] S. V. Goloskokov, P. Kroll, Eur. Phys. J. C **59** (2009) 809 [arXiv:0809.4126 [hep-ph]]

[93] Particle Data Group, *Review of Particle Physics* (J/ψ listings), [URL: `https://pdg.lbl.gov/`]

[94] M. G. Ryskin, Z. Phys. C **57** (1993) 89-92.

[95] S. P. Jones, A. D. Martin, M. G. Ryskin, T. Teubner, JHEP **11** (2013) 085 [arXiv:1307.7099 [hep-ph]]

[96] D. Yu. Ivanov, A. Schäfer, L. Szymanowski, G. Krasnikov, Eur. Phys. J. C **34** (2004) 297-316 [hep-ph/0401131]

[97] C. A. Flett, J. A. Gracey, S. P. Jones, T. Teubner, JHEP **08** (2021) 150 [arXiv:2105.07657 [hep-ph]]

[98] Z. F. Cui, H. S. Hu, Y. Q. Ma, Phys. Rev. D **98** (2018) 074027 [arXiv:1804.05293 [hep-ph]]

[99] C. A. Flett, A. D. Martin, M. G. Ryskin, T. Teubner, Phys. Rev. D **101** (2020) 094011 [arXiv:2006.13857 [hep-ph]]

[100] S. V. Goloskokov, Ya. P. Xie, *Exclusive J/ψ Production and Gluon GPDs Effects*, [arXiv:2510.14572 [hep-ph]]

[101] C. Flett, J. P. Lansberg, S. Nabeebaccus, M. Nefedov, P. Sznajder, J. Wagner, Phys. Lett. B **859** (2024) 139117 [arXiv:2409.05738 [hep-ph]]

[102] S. P. Jones, A. D. Martin, M. G. Ryskin, T. Teubner, Eur. Phys. J. C **76** (2016) 633 [arXiv:1610.02272 [hep-ph]]

[103] S. P. Jones, A. D. Martin, M. G. Ryskin, T. Teubner, J. Phys. G **43** (2016) 035002 [arXiv:1507.06942 [hep-ph]]

[104] S. Catani, F. Hautmann, Nucl. Phys. B **427** (1994) 475-524 [hep-ph/9405388]

[105] J. Nemchik, *Nuclear shadowing in the light-cone dipole approach*, PoS(LHC07) **028** (2007)

[106] E. Iancu, R. Venugopalan, in: *Quark Gluon Plasma 3*, eds. R.C. Hwa, X.-N. Wang (World Scientific, 2004) 249-336 [hep-ph/0303204]

[107] H. Weigert, Prog. Part. Nucl. Phys. **55** (2005) 461-565 [hep-ph/0501087]

[108] L. McLerran, R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 2233-2241 [hep-ph/9309289]

[109] I. Balitsky, Nucl. Phys. B **463** (1996) 99–160 [hep-ph/9509348]

[110] Y. V. Kovchegov, E. Levin, *Quantum Chromodynamics at High Energy*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge University Press (2012) [ISBN: 9780521112574]

[111] Y. Hatta, E. Iancu, K. Itakura, L. McLerran, Nucl. Phys. A **760**, 172 (2005) [hep-ph/0501171]

[112] N. N. Nikolaev, B. G. Zakharov, Z. Phys. C **49**, 607 (1991) [doi:10.1007/BF01483577]

[113] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **44**, 443 (1976)

[114] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977)

[115] I. I. Balitsky, L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978)

[116] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov, H. Weigert, Nucl. Phys. B **504**, 415 (1997) [hep-ph/9701284]

[117] A. M. Stasto, Acta Phys. Polon. B **35**, 3069 (2004) [hep-ph/0412084]

[118] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. D **60**, 034008 (1999) [hep-ph/9901281]

[119] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. D **61**, 074018 (2000) [hep-ph/9905214]

[120] S. Munier, R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003) [hep-ph/0309177]

[121] A. H. Mueller, D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. B **640**, 331 (2002) [hep-ph/0205167]

[122] K. Golec-Biernat, M. Wüsthoff, Phys. Rev. D **59**, 014017 (1998) [hep-ph/9807513]

[123] J. Bartels, E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky, U. Maor, Phys. Lett. B **556**, 114 (2003) [hep-ph/0212284]

[124] E. Iancu, K. Itakura, S. Munier, Phys. Lett. B **590**, 199 (2004) [hep-ph/0310338]

[125] G. Watt, H. Kowalski, Phys. Rev. D **78**, 014023 (2008) [arXiv:0712.2670 [hep-ph]]

[126] J. P. Blaizot, F. Gelis, R. Venugopalan, Nucl.Phys. A **743** (2004) 57-91 [hep-ph/0402257]

[127] A. Ayala, M. Hentschinski, J. Jalilian-Marian, M. E. Tejeda-Yeomans, Nucl. Phys. B **920** (2017), 232-255 [arXiv:1701.07143 [hep-ph]].

[128] G. Beuf, Phys. Rev. D **85**, 034039 (2012) [arXiv:1112.4501 [hep-ph]]

[129] S. J. Brodsky, H. C. Pauli, S. S. Pinsky, Phys. Rept. **301**, 299 (1998) [hep-ph/9705477]

[130] G. P. Lepage, S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980)

[131] G. Beuf, T. Lappi, R. Paatelainen, Phys. Rev. D **106**, 034013 (2022) [arXiv:2204.02486 [hep-ph]]

[132] G. Duplančić, K. Passek-Kumerički, B. Pire, L. Szymanowski, S. Wallon, JHEP **11**, 179 (2018) [arXiv:1809.08104 [hep-ph]]

[133] G. Duplančić, S. Nabeebaccus, K. Passek-Kumerički, B. Pire, L. Szymanowski, S. Wallon, JHEP **03**, 241 (2023) [arXiv:2212.00655 [hep-ph]]

[134] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, USA (1995)

[135] S. V. Goloskokov and P. Kroll, Eur. Phys. J. C **65**, 137 (2010) [arXiv:0906.0460 [hep-ph]]

[136] H. Mäntysaari, K. Roy, F. Salazar and B. Schenke, Phys. Rev. D **103**, no.9, 094026 (2021) [arXiv:2011.02464 [hep-ph]]

[137] C. F. von Weizsacker, *Radiation emitted in collisions of very fast electrons*, Z. Phys. **88**, 612 (1934)

[138] E. J. Williams, *Correlation of certain collision problems with radiation theory*, Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med. **13N4**, 1 (1935)

[139] V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin, V. G. Serbo, *The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation*, Phys. Rept. **15** (1975), 181-281

[140] J. B. Bronzan, G. L. Kane, U. P. Sukhatme, Phys. Lett. B **49**, 272 (1974)

[141] E. Gotsman, E. M. Levin, U. Maor, Z. Phys. C **57**, 677 (1993) [arXiv:hep-ph/9209218 [hep-ph]]

[142] A. G. Shuvaev, K. J. Golec-Biernat, A. D. Martin, M. G. Ryskin, Phys. Rev. D **60**, 014015 (1999) [arXiv:hep-ph/9902410 [hep-ph]]

[143] A. V. Belitsky, D. Mueller and A. Kirchner, Nucl. Phys. B 629, 323 (2002) [arXiv:hep-ph/0112108]

[144] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, [arXiv:2312.14089 [hep-ph]].

[145] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, Comput.Phys.Commun. **256** (2020) 107478 [arXiv:2001.04407 [hep-ph]].

[146] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, Comput.Phys.Commun. **207** (2016) 432–444 [arXiv:1601.01167 [hep-ph]].

[147] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64** (1991) 345–359.

[148] G. T. Bodwin, E. Braaten and G. P. Lepage, Phys. Rev. D **51**, 1125 (1995) Erratum: [Phys. Rev. D **55**, 5853 (1997)] [hep-ph/9407339]

[149] P. L. Cho and A. K. Leibovich, Phys. Rev. D **53**, 6203 (1996) [hep-ph/9511315]

[150] P. L. Cho and A. K. Leibovich, Phys. Rev. D 53, 150 (1996) [hep-ph/9505329]

[151] M. Siddikov, Phys. Rev. D **110** (2024) 056043 [arXiv:2408.01822 [hep-ph]].

[152] E. Braaten and J. Lee, Phys. Rev. D **67** (2003) 054007 [erratum: Phys. Rev. D **72** (2005) 099901] [hep-ph/0211085]

[153] J. P. Ma, Z. G. Si, Phys. Lett. B **647** (2007), 419-426 [arXiv:hep-ph/0608221]

[154] X. P. Wang, D. Yang, JHEP **06** (2014), 121 [arXiv:1401.0122 [hep-ph]]

[155] W. Wang, J. Xu, D. Yang, S. Zhao, JHEP **12** (2017), 012 [arXiv:1706.06241 [hep-ph]]

[156] I.Babiarz, R.Pasechnik, W.Schaefer and A. Szczurek, JHEP **06** (2020), 101 [arXiv:2002.09352 [hep-ph]]

[157] H. G. Dosch, T. Gousset, G. Kulzinger, H. J. Pirner, Phys. Rev. D **55** (1997) 2602 [hep-ph/9608203].

[158] A. Dumitru, T. Stebel, Phys. Rev. D **99**, 094038 (2019), [arXiv:1903.07660 [hep-ph]]

[159] S. Navas *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. **D** 110, 030001 (2024).

[160] M. Ablikim *et al.* [BESIII], "*Measurements of the branching fractions of* $\eta_c \to K^+K^-\pi^0$, $K^0_S K^\pm\pi^\mp$,$2(\pi^+\pi^-\pi^0)$, *and* $p\bar{p}$," Phys. Rev. D **100** (2019) no.1, 012003 [arXiv:1903.05375 [hep-ex]].

[161] A. Schäfer, L. Mankiewicz, O. Nachtmann, *Diffractive eta(c), eta-prime, J/psi and psi-prime production in electronproton collisions at HERA energies*, in Proceedings of "*Physics at HERA*", edited by W. Buchmüller and G. Ingelman (DESY, Hamburg, Germany, 1992).

[162] C. Ewerz, [hep-ph/0306137].

[163] J. Czyzewski, J. Kwiecinski, L.Motyka, and M. Sadzikowski, Phys. Lett. B 398, 400 (1997); 411, 402 (1997).

[164] G. Antchev et al. (TOTEM Collaboration), Eur.Phys.J.C **80** (2020) 2, 91, arXiv:1812.08610.

[165] V. M. Abazov et al. (D0 Collaboration), Phys. Rev. D **86**, 012009 (2012).

[166] N. Armesto, A.H. Rezaeian, Phys. Rev. D **90**, no.5, 054003 (2014) [arXiv:1402.4831 [hep-ph]].