UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Tesis de Doctorado

Information theory tools applied to the characterization of optical turbulence

Hishan Farfán Bachiloglu

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Física

Valparaíso, agosto de 2026

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☒ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Herramientas de la teoría de la información aplicadas a la caracterización de la turbulencia óptica

Nombre del candidato(a): Hishan Nikos Farfán Bachiloglu

Carrera / Grado: Doctorado en Ciencias Físicas

Campus: Casa Central **Departamento:** Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Darío Gabriel Pérez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por **(marcar una opción)**:

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 2/10/2026 **Firma:**

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 2/10/2026 **Firma:**

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Tesis de Doctorado

presentado en el

Instituto de Física

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas

Por

Hishan Farfán Bachiloglu

Tema

Information theory tools applied to the characterization of optical turbulence

Profesor

Dr. Darío Gabriel Pérez

Índice general

Prólogo **xiv**

1 Procesos estocásticos **1**

1.1 Introducción 1
1.2 Procesos estocásticos autosimilares 10
1.3 Hipótesis gaussiana y sus limitaciones 16
1.4 Distribuciones marginales 21
1.5 Análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA) 29

2 Turbulencia atmosférica y propagación óptica **36**

2.1 Introducción 36
2.2 Turbulencia en la atmósfera 39
2.2.1 Representación espectral y sus extensiones 45
2.3 Propagación en turbulencia 52
2.3.1 Función de estructura de fase y parámetro de Fried generalizado 59
2.4 Wandering del haz 64
2.5 Centelleo del haz 71

3 Metodología experimental y análisis de datos **74**

3.1 Generador de turbulencia de laboratorio 74
3.2 Camino óptico y sistema de detección 77
3.3 Diseño factorial y caracterización de la turbulencia 79
3.4 Extracción de centroides y construcción de series temporales 80

3.4.1 Detección de centroides y máscaras de apertura 80
3.4.2 Construcción de series temporales 84
3.5 Análisis de fluctuaciones sin tendencia 86
3.5.1 Implementación y elección de parámetros 86
3.5.2 DFA segmentado y detección de crossover 87
3.6 Consistencia espectral entre DFA y PSD 90

4 Estadística del arreglo de referencia 93
4.1 Análisis multiescala del wandering 93
4.1.1 Selección del modelo de crossover 94
4.2 Organización temporal del wandering 95
4.2.1 Consistencia espectral DFA–PSD 100
4.3 Evidencia de no gaussianidad 102
4.3.1 Modelo Burr XII 104
4.3.2 Selección de modelo y multimodalidad 106
4.4 Desacoplamiento e interpretación 109
4.4.1 Interpretación conjunta 110
4.5 Conclusiones 110

5 Centelleo en el plano imagen 112
5.1 Centelleo en objetos extendidos 113
5.1.1 Observables de centelleo 114
5.2 Método de deformación geométrica 118
5.2.1 Experimento de warping geométrico 119
5.3 Relación entre wandering y centelleo 122
5.4 Descomposición de las fluctuaciones 124
5.5 Conclusiones 126

Perspectivas 128

Índice de figuras

1.1 Diez realizaciones independientes del movimiento browniano estándar $\{B(t),\, t \in [0,1]\}$, generadas mediante sumas acumuladas de incrementos i.i.d. $\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Cada trayectoria parte de $B(0) = 0$ y evoluciona de forma continua pero no diferenciable, sin tendencia preferida y sin memoria entre incrementos. 4

1.2 Trayectorias simuladas del movimiento browniano estándar ($H = 0.5$, azul) y del movimiento browniano fraccionario ($H = 0.7$, rojo), generadas mediante incrementos independientes y descomposición de Cholesky sobre la matriz de covarianza exacta (1.20), respectivamente. La mayor suavidad de la trayectoria fraccionaria refleja la regularidad Hölder de orden H; las tendencias sostenidas son consecuencia de la correlación positiva de largo alcance de sus incrementos ($H > 1/2$). . 12

1.3 Diagrama de relaciones entre el exponente de Hurst H de un proceso autosimilar y los exponentes espectrales asociados. Nodo central (azul): H, estimado por DFA sobre series temporales de centroide. Arriba izquierda (naranja): $\alpha_s = 2H + 2$, exponente del espectro tridimensional $\Phi(\kappa)$ de un campo aleatorio isótropo. Arriba derecha (gris, discontinuo): $\beta_\varphi = 2H + 1$, exponente de la PSD temporal de la fase, magnitud intermedia no medida directamente. Abajo derecha (naranja, negrita): $\beta_{\mathrm{PSD}} = 2H - 1$, exponente de la PSD temporal del centroide (fGn), pues el centroide es el gradiente espacial de la fase, y es la relación efectivamente usada en esta tesis. Abajo izquierda: caso especial Kolmogorov $H = 5/6$. 14

1.4 Realizaciones del movimiento browniano fraccionario para tres valores del exponente de Hurst. $H = 0.3$ (antipersistente): trayectorias muy irregulares con reversiones frecuentes. $H = 0.5$ (browniano estándar): la referencia sin memoria de largo alcance. $H = 5/6$ (Kolmogorov): trayectorias suaves y persistentes. 15

1.5 Diagrama de los tres mecanismos de no-gaussianidad. Rama I: convergencia lenta al límite gaussiano por número efectivo de contribuciones independientes N_{eff} insuficiente, cuantificado por la cota de Berry–Esseen. Rama II: dependencia de largo alcance con no linealidad (proceso de Rosenblatt). Rama III: colas algebraicas con varianza divergente; las distribuciones α_{st}-estables son los únicos atractores para sumas con varianza infinita. 21

1.6 Estructura de la superestadística en dos niveles que produce la Burr XII. Nivel superior: el parámetro de escala local ε sigue una distribución Gamma con parámetros (k, θ), capturando la variabilidad lenta del sistema. Nivel inferior: condicionado a ε, la magnitud r sigue la distribución estacionaria de la EDE (1.45), que es Weibull con parámetro de forma c. La integración de ambos niveles produce la Burr XII en el margen. Panel derecho: función de autocorrelación resultante, exponencial bajo ε fijo (dinámica rápida), ley de potencias bajo mezcla Gamma (escala lenta). 28

1.7 Gráficas cuantil-cuantil (Q-Q) de dos muestras sintéticas contra la referencia gaussiana estándar. (a) Muestra con colas pesadas, cuyos cuantiles extremos se apartan de la diagonal en ambos extremos. (b) Muestra bimodal, cuyo apartamiento se concentra en el centro de la distribución mientras las colas permanecen cercanas a la referencia. 29

1.8 Algoritmo DFA paso a paso aplicado a una serie sintética con $H = 0.7$. (a) Serie original x_i con tendencia polinomial superpuesta. (b) Perfil integrado $Y(i) = \sum_{k=1}^{i}(x_k - \bar{x})$. (c) Partición en segmentos de escala s con ajuste local $p_\nu(i)$. (d) Función de fluctuación $\log F(s)$ vs. $\log s$, cuya pendiente estima H y cuyo crossover separa dos regímenes de escala temporal. 30

2.1 Cadena causal que conecta la turbulencia atmosférica con los observables del experimento. La rama superior lleva de la cascada de Kolmogorov a la log-amplitud χ y al centelleo σ_I^2. La rama inferior lleva de la perturbación de fase φ al gradiente transversal y al desplazamiento del centroide $\mathbf{c}(t)$, que es el observable central de los Capítulos 4 y 5. 37

2.2 Densidad espectral tridimensional del índice de refracción en escala log-log. Se superponen los espectros de Kolmogorov Φ_n^K (línea continua), Tatarskii Φ_n^T (corte a κ_m), von Kármán Φ_n^{vK} (corte a κ_0 y κ_m) y dos curvas del espectro generalizado no-Kolmogorov con $\alpha_s = 10/3$ y $\alpha_s = 4$. El eje vertical está normalizado por $C_n^2\kappa^{-11/3}$. La figura muestra dónde regulariza cada espectro y cómo los exponentes no-Kolmogorov redistribuyen la energía entre escalas. 45

2.3 Iso-superficies espaciotemporales de la función de correlación del índice de refracción. Izquierda: hipótesis de Taylor (flujo congelado), donde $r_E = |\mathbf{r} - \mathbf{U}\tau|$ produce iso-superficies planas en el plano (r, τ). Derecha: barrido aleatorio de Kraichnan–Tennekes, con iso-superficies elipsoidales determinadas por los dos tiempos característicos τ_c y τ_d. . 51

2.4 Esquema de la aproximación de pantalla de fase. El volumen turbulento se divide en N_{sc} capas delgadas, cada una representada por una pantalla de fase aleatoria independiente. El campo se propaga en el vacío entre capas y acumula la fase de cada pantalla. Panel derecho: distribución de la log-amplitud χ resultante: gaussiana cuando N_{sc} es grande (convergencia TCL), y desviada cuando N_{sc} es pequeño o las capas están correlacionadas. 58

2.5 Varianza del ángulo de llegada generalizada $\sigma^2_{m,H}$ normalizada versus $D/r_{0,H}$ para cuatro valores del exponente de Hurst: $H = 1/2$ (movimiento browniano), $H = 2/3$, $H = 5/6$ (Kolmogorov) y $H = 1$. El eje vertical en escala logarítmica. La figura muestra la sensibilidad del observable al estado de la turbulencia y justifica teóricamente el uso del centroide como estimador de H (Pérez and Zunino, 2008). . . 63

3.1 Fotografía de la mesa óptica de laboratorio con el camino óptico anotado. Las fibras ópticas acoplan fuentes de luz coherente (CS) e incoherente (IS) a un colimador (Cl) que ilumina una matriz de 10×10 puntos cuadrados producida en el DMD. La matriz es reimaginada por un telescopio invertido (M) hasta la posición I; un filtro espacial (sf) elimina todos los órdenes de difracción excepto el cero. Una cámara de alta velocidad (HSC) registra el objetivo en I a través de la turbulencia producida por el turbulador (recuadro superior derecho). La diferencia de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$ y las velocidades de flujo V_1, V_2 se controlan de manera independiente. Adaptada de (González et al., 2026). 76

3.2 Las cinco máscaras de iluminación del DMD usadas en el experimento. *Fila superior*: patrones binarios programados en el DMD (lado de 7 mm). *Fila inferior*: irradiancia promediada en el tiempo observada por la cámara de alta velocidad después de la óptica de relevo ($M = 2.1$, lado proyectado máximo 14.7 mm). (A) Matriz de puntos (10×10, cuadrados de 0.34 mm, espaciamiento de 1.46 mm), usada para el análisis de wandering. (B–E) Blancos extendidos con distintas geometrías de borde, usados para el análisis de centelleo. Adaptada de (González et al., 2026). 84

3.3 Arreglo de puntos de referencia. *Izquierda*: patrón DMD de matriz de puntos 10×10 proyectado sobre el plano objeto. *Derecha*: distribución de irradiancia promediada en el tiempo registrada por la cámara de alta velocidad bajo condiciones de baja turbulencia (V0808, $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$, $\sigma_R^2 \approx 0.034$). La diagonal segmentada indica la orientación del arreglo respecto del eje gravitacional. Adaptada de (González et al., 2026). 85

3.4 DFA aplicado a una serie representativa de desplazamiento de centroide. *Izquierda*: perfil acumulativo $Y(i)$ con la eliminación de tendencia polinomial cuadrática mostrada para una ventana (DFA-2). *Derecha*: función de fluctuación $\log_2 F(s)$ frente a $\log_2 s$ con las dos escalas de crossover s_1, s_2 (líneas verticales segmentadas) y los ajustes lineales por segmento que entregan los exponentes generalizados H_1^{DFA}, H_2^{DFA}, H_3^{DFA} (líneas de colores). Esta estructura de tres regímenes es el observable central del Cap. 4. 90

4.1 Exponente generalizado de corta escala obtenido de las componentes horizontal y vertical del wandering para cada velocidad y diferencia de temperatura. La línea segmentada indica la referencia de Kolmogorov $H = 5/6$. Los valores son pendientes DFA locales y no parámetros de un fBm global. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024). 96

4.2 Poblaciones de exponentes generalizados para la componente horizontal del wandering. Los tres paneles corresponden a los intervalos delimitados por los dos crossovers; la línea segmentada indica $H = 5/6$. En el intervalo intermedio aparecen las ramas U y D. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024). 97

4.3 Poblaciones de exponentes generalizados para la componente vertical del wandering. La anisotropía del flujo modifica la ocupación relativa de las ramas U y D, pero no cambia su definición operacional. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024). 98

4.4 Distribuciones de los tiempos de crossover para las transiciones definidas a partir del wandering. Las escalas $G \to U$, $G \to D$ y $U \to N$ forman poblaciones compactas, mientras que $D \to N$ se dispersa sobre varios segundos y no define una escala física robusta. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024). 99

4.5 Tiempos de crossover en función de la velocidad de inyección. Los paneles muestran $G \to U$, $G \to D$, $U \to N$ y $D \to N$ para ambas componentes. La última transición carece de una dependencia estable con la velocidad. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024). 101

4.6 Comparación entre los exponentes generalizados obtenidos por DFA y por la representación espectral. La cercanía a la recta 1:1 muestra consistencia entre estimadores bajo el procedimiento de optimización descrito en el Cap. 3. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). 102

4.7 Gráficas Q–Q de los desplazamientos normalizados de los centroides contra la referencia gaussiana estándar, para cuatro velocidades de inyección con $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ e iluminación coherente. *Fila superior*: componente horizontal. *Fila inferior*: componente vertical. Cada curva gris corresponde a uno de los 100 centroides de la Máscara A y la línea segmentada indica la referencia $y = x$. El cuerpo central sigue la referencia mientras las colas se apartan de la diagonal en ambos extremos en todas las condiciones. 104

4.8 Divergencia $D_{\mathrm{KL}}(F\|N)$ entre las distribuciones Burr XII ajustadas y gaussianas con los mismos dos primeros momentos. Las cajas reúnen los puntos de la matriz para cada condición. La reducción con el forzamiento térmico indica una aproximación progresiva a formas más regulares, no una demostración de gaussianidad exacta. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). 105

4.9 Distribuciones experimentales de desplazamiento horizontal y ajustes Burr XII representativos. Las condiciones débiles pueden requerir dos o tres componentes, mientras que las condiciones de mayor forzamiento son predominantemente unimodales. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). 106

4.10 Frecuencia de ajustes con una, dos o tres componentes Burr XII para las componentes horizontal y vertical. La multimodalidad es más frecuente bajo el menor forzamiento térmico y disminuye al intensificarse la mezcla. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). 107

4.11 Distribuciones de los parámetros Burr XII en función de la varianza de Rytov equivalente y de la velocidad de inyección. Los valores medios son aproximadamente estables; la mayor anchura de los casos mezclados refleja la complejidad del ajuste y la menor cardinalidad de cada grupo. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). . . 108

4.12 Exponentes generalizados H^{DFA} frente a los parámetros Burr XII (c, k, a) para las componentes horizontal y vertical. La ausencia de una tendencia única indica que la forma marginal y la organización temporal contienen información complementaria. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026). 109

5.1 Plano $(\ln N, \ln q)$ de Charnotskiĭ con las condiciones experimentales del turbulador. La recta segmentada $q \sim N$ separa el régimen de fluctuaciones débiles (arriba, en blanco) del régimen de centelleo fuerte (abajo, en gris). Los círculos verdes (fuente coherente) y los puntos amarillos (incoherente) ubican cada condición suponiendo el exponente de Kolmogorov, mientras que los círculos azules y los puntos rojos usan el exponente de Hurst observado en cada medición, lo que desplaza las condiciones hacia la zona de transición entre regímenes. Adaptada de (Pérez et al., 2026). 115

5.2 Ejemplo de centelleo en el plano imagen para uno de los blancos extendidos, bajo una condición con $\sigma_R^2 = 0.076 \pm 0.005$ para iluminación coherente y 0.064 ± 0.006 para incoherente. (a) Centelleo por píxel bajo iluminación coherente. (b) Filtro de bordes E_{ij} aplicado a la imagen media. (c) y (d) Ídem para iluminación incoherente. (e) y (g) Máscaras Ω_{ij} de píxeles sobre el umbral para los casos coherente e incoherente. (f) y (h) Histogramas del centelleo sobre los píxeles activos correspondientes. (i) a (l) Centelleo simulado a partir de las mediciones locales de ángulo de llegada, con sus histogramas. Adaptada de (Pérez et al., 2026). 117

5.3 Conteo normalizado de píxeles activos E_Ω para todas las máscaras, condiciones y fuentes. *Arriba*: en función del C_n^2 equivalente, con los ajustes sublineales y sus bandas de predicción para iluminación coherente e incoherente. *Abajo*: en función de N/q calculado con el exponente observado en cada condición. Los colores indican el código de velocidad de inyección. Adaptada de (Pérez et al., 2026). 123

5.4 Índice de centelleo medio sobre los bordes activos en función de N/q, comparado con las asintóticas de la teoría de Charnotskiĭ. Las curvas corresponden a la rama de centelleo fuerte (CC), a la rama perturbativa (PT) sin y con escalas interna y externa finitas, y al régimen de apertura no acotada (UA), evaluadas en $H = 5/6$ con bandas para $5/6 \leq H \leq 1$. Los datos experimentales, con colores según el código de velocidad, se agrupan cerca de la rama perturbativa corregida por las escalas del turbulador. Adaptada de (Pérez et al., 2026). 124

5.5 Distribuciones del índice de centelleo σ_I^2 sobre píxeles de borde para todas las condiciones disponibles (Máscara B, iluminación coherente). (a) KDE de $\sigma_{I,\mathrm{prop}}^2$ en escala $\log_{10}$; curvas gruesas: promedio por ΔT; curvas finas: velocidades individuales. (b) Ídem para $\sigma_{I,\mathrm{sim}}^2$. (c) Mediana de $\sigma_{I,\mathrm{sim}}^2$ frente a mediana de $\sigma_{I,\mathrm{prop}}^2$ por condición. (d) Mediana e IQR por grupo de ΔT; cajas sólidas: propagación real; cajas punteadas: simulación. 126

Prólogo

Este trabajo analiza los registros de un experimento de turbulencia óptica controlada, realizado en un generador de laboratorio denominado turbulador, en el que dos corrientes de aire a temperaturas distintas colisionan y establecen un campo turbulento reproducible a lo largo de un trayecto de propagación corto (Funes et al., 2016). Sobre ese trayecto se propagan distintos patrones de iluminación estructurada. Uno de ellos es un arreglo de puntos luminosos, cuyo desplazamiento de centroide permite estudiar el wandering, y los otros son objetos extendidos, con los que se analiza el centelleo en el plano imagen. De ese experimento surgen tres resultados que esta tesis toma como punto de partida.

La descripción convencional de la propagación óptica en turbulencia entiende el desplazamiento de la imagen como la acumulación de numerosas contribuciones independientes a lo largo del trayecto. Bajo esa condición, el teorema central del límite permite esperar una distribución cercana a la gaussiana. De manera análoga, la hipótesis de flujo congelado de Taylor permite traducir las escalas espaciales de la turbulencia en escalas temporales medidas por un observador fijo, de donde se sigue una única ley de escala.

Los resultados del experimento se apartan de estas dos expectativas. La estadística marginal de los desplazamientos de centroide se desvía de manera sistemática de la gaussianidad, con distribuciones que evolucionan de multimodalidad a una única moda conforme se intensifica el forzamiento térmico (González et al., 2026). La organización temporal del wandering tampoco se reduce a una única ley de escala simple, pues las funciones de fluctuación presentan varios regímenes separados por crossovers (Pérez et al., 2024). El índice de centelleo medido en el plano imagen,

además, alcanza valores superiores a la unidad, concentrados en la vecindad de los bordes de alto contraste del blanco (Pérez et al., 2026).

Ni la no gaussianidad de los desplazamientos ni la multiplicidad de regímenes temporales identifican por sí solas el mecanismo que las produce, y constatar una desviación no es explicarla. Esa distancia entre la constatación y la explicación es la que organiza esta tesis. La convergencia gaussiana puede romperse por un número efectivo de contribuciones independientes insuficiente, por la dependencia de largo alcance acompañada de no linealidad, o por las colas algebraicas con varianza divergente.

La tesis sostiene que en el régimen estudiado domina el primero de esos modos, y que su origen está en el muestreo transversal y no en la acumulación a lo largo del camino óptico. El centroide resulta de un promedio de irradiancia ponderado sobre una región finita, de modo que cuando la escala externa es comparable con la apertura las correlaciones espaciales reducen las contribuciones efectivamente independientes. La variación lenta del parámetro de intensidad sobre ese conjunto reducido conduce, por construcción superestadística, a la distribución Burr XII con la que se describen las formas observadas. Los distintos regímenes temporales admiten un tratamiento relacionado. Si las estructuras pequeñas son barridas por las grandes antes de alcanzar a decorrelacionarse por sí mismas, la traducción entre estadística espacial y temporal que autoriza la hipótesis de Taylor pierde validez, y la presencia de varios regímenes deja de ser una anomalía para convertirse en la firma esperable de ese barrido.

Respecto del centelleo, queda por establecer si se trata en lo esencial de un efecto geométrico producido por el desplazamiento de la imagen. De ser así, el campo de desplazamientos medido bastaría para reproducirlo, y de no serlo procede determinar qué fracción del fenómeno explica. Esa pregunta permanece abierta y se aborda aquí mediante un experimento diseñado para separar ambas contribuciones.

La ventaja del turbulador es el control. El diferencial de temperatura entre las corrientes y las velocidades de inyección se fijan de manera independiente, lo que permite recorrer un conjunto de condiciones reproducibles y repetir cada una de ellas, algo que una campaña en exteriores no ofrece. En ese régimen la turbulencia no es

estadísticamente homogénea ni isótropa a lo largo del recorrido, y el exponente espectral local se desvía apreciablemente del valor de Kolmogorov. Por eso la constante de estructura del índice de refracción, que es un escalar promediado sobre todo el camino óptico, resulta insuficiente como descriptor. No distingue regímenes con exponentes espectrales distintos, no captura la persistencia temporal de las fluctuaciones y no da cuenta de las colas pesadas que exhiben las distribuciones observadas.

Esta tesis emplea dos familias de descriptores que operan en niveles de descripción distintos y que se estiman de manera independiente a partir de la señal de centroide. La primera son los exponentes generalizados obtenidos por análisis de fluctuaciones sin tendencia sobre cada intervalo de escala temporal, que caracterizan la organización temporal del wandering y se conectan directamente con el exponente espectral no Kolmogorov. La segunda son los parámetros de la distribución Burr XII, que describe la forma de la distribución marginal de los desplazamientos. El resultado central es que ambas familias no se correlacionan de manera sistemática entre sí. La forma marginal y la organización temporal aportan información complementaria sobre el mismo observable.

La presentación se organiza en cinco capítulos. El Capítulo 1 desarrolla los fundamentos de los procesos estocásticos relevantes, cubriendo el movimiento browniano fraccionario, el análisis de fluctuaciones sin tendencia y la construcción de la distribución Burr XII por superestadística. El Capítulo 2 expone la teoría de la propagación óptica en turbulencia, desde la cascada de Kolmogorov y los modelos espectrales hasta las aproximaciones de Born y Rytov, el parámetro de Fried generalizado y el índice de centelleo. El Capítulo 3 describe el montaje experimental, el protocolo de adquisición y los pasos del procesamiento que conducen de los registros de video a las series temporales de centroides. El Capítulo 4 presenta la estadística del arreglo de referencia, donde se reúnen el análisis DFA multiescala, la inferencia Burr XII y el desacoplamiento entre ambas familias de descriptores. El Capítulo 5 cambia de observable y estudia el centelleo en el plano imagen de blancos extendidos, donde el exponente de corta escala y el radio de coherencia generalizado ordenan el comportamiento espacial del centelleo medido.

Capítulo 1

Procesos estocásticos

1.1 Introducción

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada resultado posible de un experimento aleatorio y permite modelar la incertidumbre en una medición experimental. Cuando el observable evoluciona en el tiempo, sin embargo, cada realización del experimento produce una secuencia ordenada de valores. Cada vez que se repite el experimento esa secuencia cambia, pero no de manera arbitraria, sino que todas las secuencias posibles obedecen a una estadística propia del fenómeno que las genera (Papoulis and Pillai, 2002).

Formalizar esa estadística requiere precisar qué se entiende por resultado posible y cómo se le asigna una probabilidad. El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es la estructura matemática que hace posible esa descripción de manera rigurosa (Gardiner, 1994; Papoulis and Pillai, 2002). En esta construcción, Ω representa el conjunto de todos los resultados posibles del experimento, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que especifica cuáles subconjuntos de Ω son eventos medibles, y $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidades a dichos eventos, satisfaciendo $P(\Omega) = 1$ y aditividad numerable.

Dentro de esta construcción, una variable aleatoria se define formalmente como una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que asocia a cada resultado elemental $\omega \in \Omega$ un

valor numérico del observable bajo estudio. Su distribución acumulada queda dada por

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) .$$

La noción de variable aleatoria se generaliza naturalmente al introducir una familia de variables aleatorias indexadas por un parámetro $t \in T$, usualmente el tiempo, continuo o discreto, obteniendo así un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$. Todas las variables aleatorias del proceso están definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de modo que el objeto $X(t, \omega)$ depende simultáneamente de dos argumentos de naturaleza diferente. Fijar $\omega = \omega_0$ produce una función determinista del tiempo $x(t) = X(t, \omega_0)$, llamada trayectoria o camino muestral, mientras que fijar $t = t_0$ produce una variable aleatoria ordinaria $X(t_0, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, el proceso estocástico es el objeto completo que contiene una colección parametrizada de variables aleatorias e induce una distribución de probabilidad sobre el espacio de trayectorias posibles (Gardiner, 1994; Papoulis and Pillai, 2002).

Para describir estadísticamente un proceso no basta con la distribución marginal $F_t(x) = P(X(t) \leq x)$ para cada t individualmente. La descripción completa requiere conocer, para cualquier elección finita de instantes $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ y para todo m, la distribución finito-dimensional conjunta,

$$F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1, \ldots, x_m) = P\big(X(t_1) \leq x_1,\ \ldots,\ X(t_m) \leq x_m\big). \tag{1.1}$$

Estas distribuciones deben satisfacer dos condiciones de consistencia, simetría ante permutaciones de los índices y compatibilidad al marginalizar (integrar sobre cualquier variable debe reproducir la distribución conjunta de las restantes). El teorema de extensión de Kolmogorov garantiza que una familia de distribuciones consistente en este sentido define un proceso estocástico único salvo equivalencia (Papoulis and Pillai, 2002). La equivalencia en distribución entre dos procesos se define entonces mediante la igualdad de todas sus distribuciones finito-dimensionales, denotada $\{X(t)\} \overset{d}{=} \{Y(t)\}$ (Embrechts and Maejima, 2002), de modo que dos procesos son estadísticamente indistinguibles si y solo si comparten la distribución conjunta de cualquier colección finita de sus valores, independientemente del instante o la escala

de observación.

Para describir estadísticamente un proceso hace falta más que su media y varianza, pues se necesita una herramienta que capture toda la forma de la distribución y permita comparar cualquier distribución con la gaussiana de referencia. La función característica cumple ese papel (Papoulis and Pillai, 2002),

$$\hat{\mu}(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{i\theta X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, dF(x). \tag{1.2}$$

Existe para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y caracteriza unívocamente la distribución, pues dos variables con la misma función característica tienen la misma ley. Los momentos se obtienen como derivadas en el origen, $\mathbb{E}[X^n] = (-i)^n \hat{\mu}^{(n)}(0)$. Más informativos aún son los cumulantes, que se obtienen del logaritmo $\ln \hat{\mu}(\theta)$, donde el primer cumulante es la media, el segundo es la varianza, el tercero mide asimetría (κ_3, skewness) y el cuarto mide el exceso de peso en las colas respecto de la gaussiana (κ_4, exceso de curtosis). La gaussiana tiene una propiedad única en este lenguaje, pues todos sus cumulantes de orden mayor que dos son exactamente nulos. La presencia de cumulantes superiores no nulos es entonces la firma cuantitativa de que una distribución se aleja de la gaussiana, independientemente de dónde ocurra esa desviación.

El movimiento browniano reúne, en un mismo objeto, cuatro propiedades que en general son independientes entre sí, como la gaussianidad, la ausencia de memoria, la invarianza de escala y la normalidad de los incrementos.

El movimiento browniano estándar $\{B(t),\, t \geq 0\}$ parte del origen con probabilidad uno, $P(B(0) = 0) = 1$. Sus incrementos son independientes y estacionarios en el sentido de que, para cualquier partición $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, los incrementos $B(t_j) - B(t_{j-1})$ son mutuamente independientes y su distribución depende solo de la longitud del intervalo, no del instante inicial, con $B(t+\tau) - B(t) \overset{d}{=} B(\tau)$ para todo $t, \tau \geq 0$. La distribución marginal en cada instante es gaussiana con varianza proporcional al tiempo, $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$. Finalmente, las trayectorias son continuas con probabilidad uno (Embrechts and Maejima, 2002; Gardiner, 1994).

Cada una de estas cuatro propiedades puede relajarse de forma independiente. Relajar la independencia de incrementos produce el movimiento browniano frac-

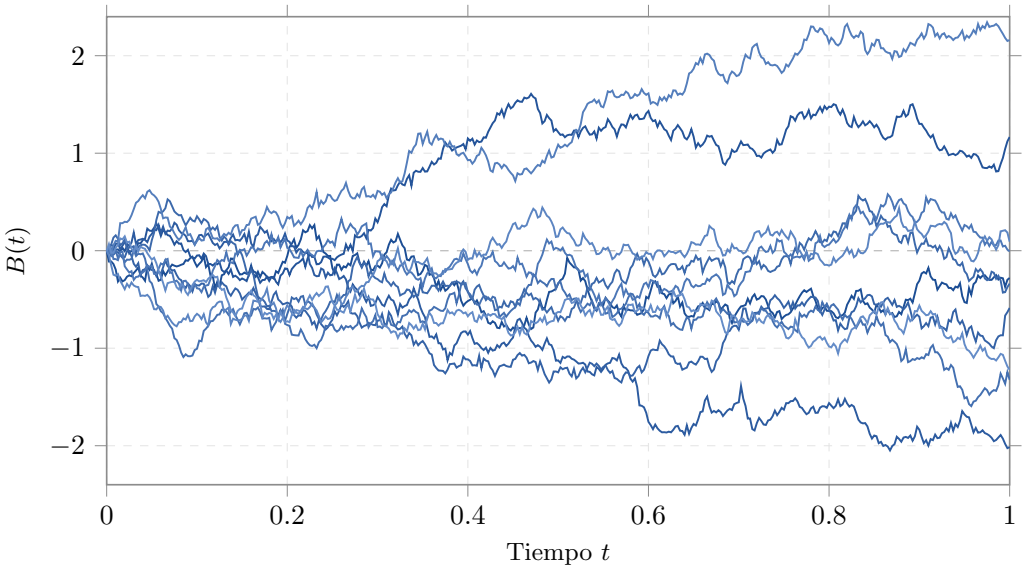

Figura 1.1: Diez realizaciones independientes del movimiento browniano estándar $\{B(t),\, t \in [0,1]\}$, generadas mediante sumas acumuladas de incrementos i.i.d. $\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Cada trayectoria parte de $B(0) = 0$ y evoluciona de forma continua pero no diferenciable, sin tendencia preferida y sin memoria entre incrementos.

cionario. Relajar la gaussianidad de los incrementos produce los procesos de Lévy estables. Mantener la estructura sin memoria pero renunciando a la gaussianidad conduce a los procesos de Markov generales. El movimiento browniano ordinario es el caso base del que parten estas tres generalizaciones, pues su covarianza $\mathbb{E}[B(t)B(s)] = \min\{t, s\}$ es consecuencia directa de su autosimilaridad con $H = 1/2$ (Embrechts and Maejima, 2002).

Cuando las correlaciones son exactamente nulas, es decir, cuando el valor presente agota toda la información relevante para predecir el futuro, el proceso pertenece a la clase de Markov. Un proceso $\{X(t)\}$ satisface esta condición si (Gardiner, 1994),

$$P(X(t_{n+1}) \leq x \mid X(t_n), X(t_{n-1}), \ldots, X(t_0)) = P(X(t_{n+1}) \leq x \mid X(t_n))\,. \tag{1.3}$$

Esta propiedad formaliza la idea de un sistema sin memoria, pues toda la in-

formación relevante sobre el estado futuro está contenida en el estado presente. La densidad de transición $p(x,t \mid x_0,t_0)$, que describe la probabilidad de encontrar el proceso en x al tiempo t dado que partió de x_0 al tiempo t_0, satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov (Gardiner, 1994),

$$p(x,t \mid x_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t \mid y,s)\, p(y,s \mid x_0,t_0)\, dy, \qquad t_0 < s < t. \tag{1.4}$$

Esta ecuación es la condición de consistencia de las distribuciones de transición y es el axioma central de la teoría de procesos de Markov. El movimiento browniano es el proceso de Markov gaussiano con incrementos independientes. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es el proceso de Markov gaussiano estacionario.

En física, los procesos de Markov de difusión emergen de la competencia entre una tendencia restauradora y un forzamiento aleatorio. Esta estructura queda formalizada por la ecuación de Langevin (Risken, 1996; Uhlenbeck and Ornstein, 1930),

$$\frac{dX}{dt} = -\gamma X + \sigma\, \xi(t), \tag{1.5}$$

donde $\gamma > 0$ es un coeficiente de disipación, σ es la amplitud de la fuerza aleatoria, y $\xi(t)$ es un ruido blanco gaussiano que satisface $\langle \xi(t) \rangle = 0$ y $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ (Gardiner, 1994; Uhlenbeck and Ornstein, 1930). La interpretación física es que la influencia del entorno sobre el sistema se divide en dos partes, una parte sistemática disipativa $-\gamma X$ y una parte fluctuante $\sigma\xi(t)$. Esta separación entre disipación y fluctuación fue el punto de partida de Uhlenbeck y Ornstein para describir el movimiento browniano con inercia (Uhlenbeck and Ornstein, 1930).

La ecuación de Langevin determina la distribución de probabilidad de todas las realizaciones, y cuando las soluciones analíticas son inaccesibles, la ecuación de Fokker-Planck describe la evolución de esa distribución (Risken, 1996),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial (Xp)}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial X^2}. \tag{1.6}$$

En estado estacionario ($\partial p/\partial t = 0$), la solución es una gaussiana, lo que muestra

que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es el proceso gaussiano estacionario por excelencia, donde la disipación $-\gamma X$ confina las fluctuaciones alrededor de cero y el ruido blanco las mantiene activas, y el equilibrio entre ambos efectos produce exactamente una distribución normal (Gardiner, 1994; Risken, 1996). Este resultado ilustra un principio general, pues la gaussianidad no requiere ser postulada si se puede derivar de la dinámica subyacente. Cuando esa dinámica cambia, por ejemplo si el ruido no es blanco o si la fuerza restauradora no es lineal, la distribución estacionaria deja de ser gaussiana, y los cumulantes superiores adquieren valores distintos de cero.

La descripción cuantitativa de un proceso parte de sus momentos de primer y segundo orden,

$$m_X(t) = \langle X(t) \rangle, \qquad \sigma_X^2(t) = \langle [X(t) - m_X(t)]^2 \rangle, \tag{1.7}$$

y de la covarianza entre dos instantes,

$$B_X(t_1, t_2) = \langle [X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)] \rangle \,, \tag{1.8}$$

que mide el grado de dependencia lineal entre los valores del proceso en tiempos distintos. En principio, media y covarianza pueden depender de los dos instantes por separado, lo que hace la descripción intratable en datos finitos. En la práctica, muchos sistemas físicos operan en condiciones cuasi-estacionarias. Cuando la media es constante y la covarianza depende solo del retardo $\tau = t_2 - t_1$,

$$B_X(t_1, t_2) = B_X(t_2 - t_1), \tag{1.9}$$

el proceso es estacionario en sentido amplio y la autocorrelación normalizada $\rho(\tau) = B_X(\tau)/B_X(0) \in [-1, 1]$ es la medida operativa de la memoria temporal (Papoulis and Pillai, 2002). Bajo esta condición, promediar sobre el tiempo equivale a promediar sobre el ensamble (ergodicidad) siempre que el registro sea suficientemente largo. En señales físicas reales la ergodicidad no está garantizada, pues el proceso puede ser intermitente o exhibir deriva lenta del parámetro de escala, de modo que su validez debe verificarse antes de identificar promedios temporales con valores es-

perados (Gardiner, 1994; Papoulis and Pillai, 2002).

La estacionariedad en sentido amplio tiene además una consecuencia espectral directa, pues la covarianza contiene exactamente la misma información que su transformada de Fourier. Cuando $B_X(\tau)$ es absolutamente integrable, el teorema de Wiener–Khinchin establece esa equivalencia mediante un par de transformadas de Fourier en sentido clásico (Papoulis and Pillai, 2002; Welch, 1967),

$$B_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, e^{i2\pi f\tau}\, df, \qquad S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau. \tag{1.10}$$

La condición de integrabilidad de $B_X(\tau)$ no se satisface en general para procesos con dependencia de largo alcance, pues cuando $B_X(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$ con $0 < \gamma < 1$, la covarianza decae demasiado lentamente para ser integrable y la densidad espectral $S_X(f)$ diverge en $f = 0$. En ese régimen la representación correcta, para la covarianza del proceso, es la *transformada de Fourier–Stieltjes* de la función de distribución espectral $F(f)$ (Papoulis and Pillai, 2002),

$$B_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,i2\pi f\tau}\, dF(f), \tag{1.11}$$

donde $F(f)$ es la función de distribución espectral acumulada. Cuando F es absolutamente continua se recupera la forma clásica (1.10) con $dF(f) = S_X(f)\, df$. Cuando la densidad $S_X(f) = dF/df$ diverge en $f = 0$, como ocurre para el ruido gaussiano fraccionario con $H > 1/2$ (donde $S_{\mathrm{fGn}}(f) \sim f^{-(2H-1)} \to \infty$ cuando $f \to 0$), la integral (1.11) converge en sentido de Stieltjes aunque no en sentido de Lebesgue. Este punto tiene consecuencias directas para la descripción espectral de procesos con espectros de ley de potencias, que se desarrollan a continuación.

El mismo principio se extiende a campos aleatorios espaciales $\{u(\mathbf{r}),\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d\}$ indexados por posición en lugar de por tiempo. Un campo aleatorio es *homogéneo* si su función de covarianza depende solo de la separación entre puntos, no de su posición absoluta,

$$B_u(\mathbf{r}) = \langle u(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle, \tag{1.12}$$

y es *isótropo* si además esa dependencia se reduce al módulo $r = |\mathbf{r}|$. Para un campo homogéneo con varianza finita, la covarianza y la densidad espectral d-dimensional $\Phi_u(\boldsymbol{\kappa})$ forman un par de transformadas de Fourier

$$B_u(\mathbf{r}) = \int e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\,\Phi_u(\boldsymbol{\kappa})\,d^d\kappa, \qquad \Phi_u(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\,B_u(\mathbf{r})\,d^d r. \tag{1.13}$$

Para campos con espectro de potencia $\Phi_u(\boldsymbol{\kappa}) \sim \kappa^{-\alpha}$ con $\alpha > d$ (donde d es la dimensión del espacio), la varianza $B_u(\mathbf{0}) = \langle u^2\rangle = \int \Phi_u\,d^d\kappa$ diverge por la contribución de números de onda bajos, de modo que el campo no admite covarianza finita y no es homogéneo en sentido estricto. Para tales campos, denominados *localmente homogéneos* o *intrínsecamente estacionarios* (Tatarskii, 1971), la representación correcta es la *integral estocástica de Fourier–Stieltjes*

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{0}) + \iiint \left(1 - e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\right) d\varphi(\boldsymbol{\kappa}), \tag{1.14}$$

donde $d\varphi(\boldsymbol{\kappa})$ es una medida aleatoria cuyos momentos de segundo orden satisfacen (Tatarskii, 1971)

$$\langle d\varphi(\boldsymbol{\kappa}_1)\,d\varphi^*(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle = \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2)\,\Phi_u(\boldsymbol{\kappa}_1)\,d^3\kappa_1\,d^3\kappa_2.$$

El factor $(1 - e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}})$ suprime la contribución de $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ y garantiza la convergencia aunque $\Phi_u(\kappa)$ diverja en el origen.

De la representación (1.14) se obtiene directamente (Tatarskii, 1971)

$$D_u(\mathbf{r}) = \langle [u(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - u(\mathbf{x})]^2\rangle = 2\iiint (1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}))\,\Phi_u(\boldsymbol{\kappa})\,d^3\kappa, \tag{1.15}$$

y bajo isotropía,

$$D_u(r) = 8\pi\int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin\kappa r}{\kappa r}\right)\Phi_u(\kappa)\,\kappa^2\,d\kappa. \tag{1.16}$$

La integral (1.16) converge incluso cuando $\Phi_u(\kappa) \sim \kappa^{-\alpha}$ con $\alpha < 5$, porque el

factor $(1 - \sin \kappa r/\kappa r) \sim (\kappa r)^2/6$ para $\kappa \to 0$ cancela exactamente la singularidad espectral (Tatarskii, 1971). Cuando el espectro posee una escala exterior finita, la varianza del campo es finita y tanto la covarianza como la función de estructura existen y son equivalentes, de modo que en ese caso la función de estructura aporta información redundante pero no contradictoria. Esta distinción entre campos homogéneos (varianza finita) y localmente homogéneos (varianza infinita, función de estructura finita) determina qué herramienta estadística es adecuada para cada régimen espectral.

La covarianza y la PSD son herramientas completas cuando el proceso es gaussiano. Un proceso gaussiano queda completamente determinado por su función de media y su función de covarianza (Embrechts and Maejima, 2002; Papoulis and Pillai, 2002), y la densidad de la distribución finito-dimensional de orden m es explícitamente

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\!\left(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right), \tag{1.17}$$

donde $\mathbf{m}$ es el vector de medias y $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas. Esto significa que todos los cumulantes de orden mayor que dos son nulos, de modo que la gaussianidad es equivalente a que la información estadística quede agotada en los dos primeros momentos. Esta propiedad hace que los modelos gaussianos sean matemáticamente tratables con pocos parámetros, pues la PSD, la autocovarianza y la función de transferencia son las únicas herramientas necesarias para describir completamente el proceso. Esa misma simplicidad es también una limitación estructural, pues si la señal tiene colas pesadas, asimetría o intermitencia, la descripción gaussiana descarta exactamente la información que caracteriza los regímenes no ordinarios del proceso.

La pregunta de cuándo el supuesto gaussiano está justificado y cuándo encuentra sus límites de aplicabilidad constituye el hilo conductor del resto del capítulo. Para responderla se necesita primero entender qué hace especial al movimiento browniano como modelo de referencia, que es su autosimilaridad con exponente $H = 1/2$. Generalizar ese exponente, manteniendo la gaussianidad pero introduciendo dependencia de largo alcance, es el primer paso, y los siguientes son examinar bajo qué condiciones

la gaussianidad misma deja de ser válida y qué distribuciones la reemplazan.

1.2 Procesos estocásticos autosimilares

Un proceso estocástico cuyas fluctuaciones en una ventana de duración at son estadísticamente indistinguibles de las de una ventana de duración t, salvo por un factor de amplitud a^H, no tiene escala temporal privilegiada, pues la estadística es la misma independientemente de la resolución con que se observe. Los procesos con esta propiedad se denominan H-autosimilares (Embrechts and Maejima, 2002; Mandelbrot and Van Ness, 1968). La relevancia de esta clase de procesos para señales con espectros de ley de potencias, que carecen de una escala de longitud privilegiada dentro de su rango de validez (Kolmogorov, 1941; Monin and Yaglom, 1975), es directa, pues la invariancia de escala espectral tiene un equivalente probabilístico preciso en la H-autosimilaridad.

Formalmente, un proceso estocástico $\{X(t),\, t \geq 0\}$ es H-autosimilar si existe un exponente $H > 0$ tal que (Embrechts and Maejima, 2002; Pardo, 2007)

$$\{X(at)\} \overset{d}{=} \{a^H X(t)\} \qquad \text{para todo } a > 0. \tag{1.18}$$

La igualdad es en sentido distribucional, es decir, las distribuciones finito-dimensionales de ambos procesos coinciden. La unicidad del exponente H está garantizada para todo proceso no trivial y continuo en probabilidad en $t = 0$, y el teorema de Lamperti (Embrechts and Maejima, 2002) demuestra que si $\{X(at)\} \overset{d}{=} \{bX(t)\}$ para algún $b > 0$, entonces necesariamente $b = a^H$ para una constante $H \geq 0$ única. Este resultado justifica que H sea un invariante bien definido del proceso, independientemente de su distribución marginal. El exponente H parametriza la manera en que las fluctuaciones crecen con la escala. Esta propiedad conecta directamente con la idea física de invariancia de escala, pues un proceso autosimilar no tiene escala temporal preferida, y cambiar la escala de observación equivale a un reescalamiento de la amplitud.

El modelo de referencia es el movimiento browniano fraccionario $B_H(t)$, cuya

existencia y unicidad fue establecida por Mandelbrot and Van Ness (1968). Es el único proceso gaussiano H-autosimilar con incrementos estacionarios (Embrechts and Maejima, 2002; Mandelbrot and Van Ness, 1968), y admite la representación integral estocástica

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\Bigg[\int_{-\infty}^{0}\big[(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\big]dW(s) + \int_{0}^{t}(t-s)^{H-1/2}\,dW(s)\Bigg], \tag{1.19}$$

donde $dW(s)$ denota la integral estocástica de Wiener respecto del movimiento browniano ordinario W (Embrechts and Maejima, 2002; Mandelbrot and Van Ness, 1968). El núcleo $(t-s)^{H-1/2}$ pondera los incrementos del movimiento browniano conductor según su distancia temporal al instante t, de modo que para $H > 1/2$ ese peso decae lentamente, de modo que el pasado remoto todavía contribuye con peso apreciable al valor presente del proceso. Es precisamente esa memoria de largo alcance la que diferencia al fBm del movimiento browniano ordinario, donde $H = 1/2$ y cada incremento es completamente independiente del pasado (Mandelbrot and Van Ness, 1968). Para $H = 1/2$ se recupera el movimiento browniano ordinario. La covarianza cruzada del fBm está dada por (Embrechts and Maejima, 2002)

$$\mathbb{E}[B_H(t)\,B_H(s)] = \frac{1}{2}\big\{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\big\}\,\mathbb{E}[B_H(1)^2], \tag{1.20}$$

que para $H = 1/2$ colapsa a $\min\{t,s\}$, recuperando la covarianza del movimiento browniano ordinario. Esta expresión muestra que la covarianza del fBm queda completamente determinada por H, de modo que la elección de H no solo controla la velocidad de crecimiento de las fluctuaciones, sino también toda la estructura de dependencia temporal.

El proceso de incrementos del fBm,

$$\xi_j = B_H(j+1) - B_H(j), \tag{1.21}$$

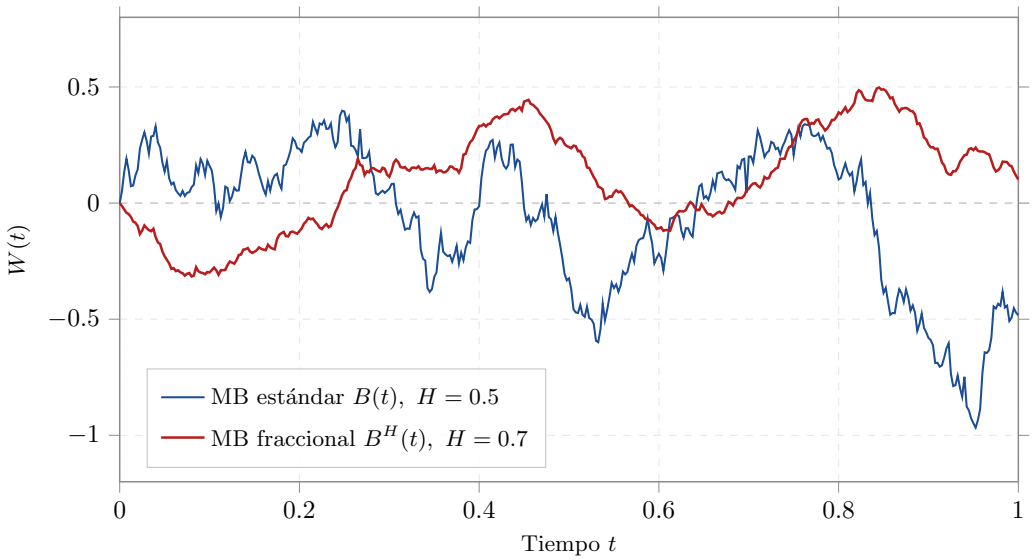

Figura 1.2: Trayectorias simuladas del movimiento browniano estándar ($H = 0.5$, azul) y del movimiento browniano fraccionario ($H = 0.7$, rojo), generadas mediante incrementos independientes y descomposición de Cholesky sobre la matriz de covarianza exacta (1.20), respectivamente. La mayor suavidad de la trayectoria fraccionaria refleja la regularidad Hölder de orden H; las tendencias sostenidas son consecuencia de la correlación positiva de largo alcance de sus incrementos ($H > 1/2$).

se denomina ruido gaussiano fraccionario. Es una sucesión estacionaria cuyas correlaciones decaen como (Embrechts and Maejima, 2002)

$$r(n) = \mathbb{E}[\xi_0\, \xi_n] \sim H(2H-1)\, n^{2H-2}, \qquad n \to \infty. \tag{1.22}$$

Esta expresión es sumable, $\sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| < \infty$, cuando $H < 1/2$, y no sumable cuando $H > 1/2$. El caso $H > 1/2$ define la dependencia de largo alcance en el sentido de Beran y Cox, de modo que la autocorrelación es positiva y su suma diverge (Embrechts and Maejima, 2002). La diferencia entre ambos casos tiene una interpretación concreta, pues una suma convergente de autocorrelaciones equivale a una escala de memoria finita, en el sentido de que existe un retardo más allá del cual el pasado es estadísticamente irrelevante para el futuro. Una suma divergente, en

cambio, significa que no existe tal escala, pues independientemente de cuán lejano esté un incremento pasado, su influencia acumulada sobre el presente no ha decaído a cero. Es esta propiedad, y no simplemente la lentitud del decaimiento, la que define operativamente la dependencia de largo alcance.

La función de estructura del fBm crece como una ley de potencia,

$$D_{B_H}(\tau) = \left\langle [B_H(t+\tau) - B_H(t)]^2 \right\rangle \propto \tau^{2H}, \tag{1.23}$$

lo que permite estimar H directamente desde incrementos sin necesidad de calcular autocorrelaciones. Para un proceso estacionario en sentido amplio, la función de estructura se relaciona con la autocovarianza mediante $D_X(\tau) = 2[B_X(0) - B_X(\tau)]$, y la formulación en términos de incrementos es útil incluso cuando el proceso completo no es estrictamente estacionario, siempre que los incrementos tengan estadísticas aproximadamente invariantes (Embrechts and Maejima, 2002; Monin and Yaglom, 1975).

Al estimar H desde datos, la elección de qué objeto espectral se calcula determina qué exponente se obtiene, y confundir los tres involucrados produce errores sistemáticos. El fBm $B_H(t)$ no es estacionario en sí mismo, pero sus incrementos sí lo son, de modo que la PSD del proceso integrado es $S_{\mathrm{fBm}}(f) \sim f^{-(2H+1)}$. El ruido gaussiano fraccionario $\xi_j = B_H(j+1) - B_H(j)$, la versión diferenciada, tiene PSD $S_{\mathrm{fGn}}(f) \sim f^{-(2H-1)}$, dos unidades menos. El espectro tridimensional de un campo aleatorio isótropo, $\Phi(\kappa) \sim \kappa^{-\alpha_s}$, introduce un tercer exponente $\alpha_s = 2H + 2$ (Ec. 1.26). Los tres exponentes $\{2H-1,\ 2H+1,\ 2H+2\}$ describen objetos distintos y no son intercambiables (Embrechts and Maejima, 2002; Pérez and Zunino, 2008; Pérez et al., 2004). La Figura 1.3 resume estas relaciones.

La propiedad de autosimilaridad tiene consecuencias espectrales directas. Schwartz et al. (1994) demostraron que para un campo H-autosimilar en E dimensiones topológicas, la densidad espectral de potencia satisface

$$P_B(\kappa) \propto \kappa^{-(2H+E)}, \tag{1.24}$$

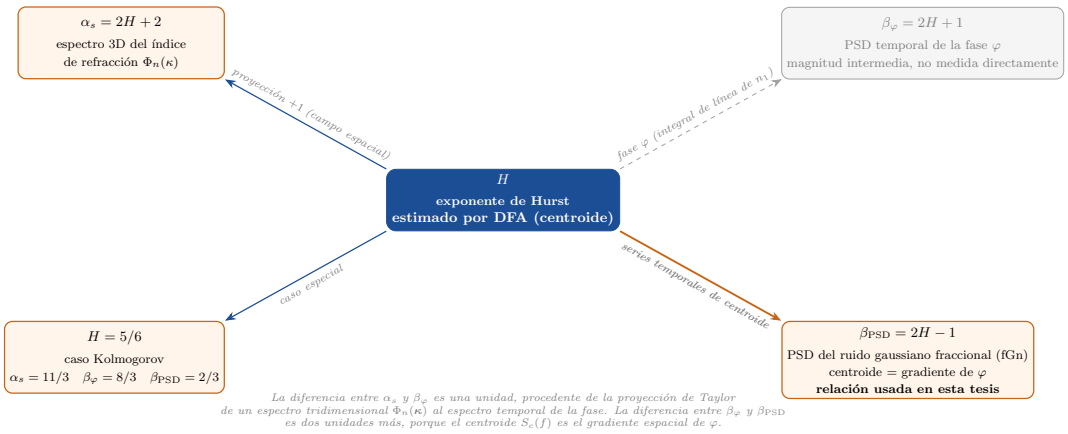

Figura 1.3: Diagrama de relaciones entre el exponente de Hurst H de un proceso autosimilar y los exponentes espectrales asociados. Nodo central (azul): H, estimado por DFA sobre series temporales de centroide. Arriba izquierda (naranja): $\alpha_s = 2H + 2$, exponente del espectro tridimensional $\Phi(\kappa)$ de un campo aleatorio isótropo. Arriba derecha (gris, discontinuo): $\beta_\varphi = 2H + 1$, exponente de la PSD temporal de la fase, magnitud intermedia no medida directamente. Abajo derecha (naranja, negrita): $\beta_{\mathrm{PSD}} = 2H - 1$, exponente de la PSD temporal del centroide (fGn), pues el centroide es el gradiente espacial de la fase, y es la relación efectivamente usada en esta tesis. Abajo izquierda: caso especial Kolmogorov $H = 5/6$.

y la dimensión fractal del grafo del campo es

$$F = E + 1 - H. \tag{1.25}$$

Para una serie temporal ($E = 1$), la PSD del fBm sigue $S(f) \propto f^{-(2H+1)}$, y para un campo bidimensional ($E = 2$), $P_B(\kappa) \propto \kappa^{-(2H+2)}$. Al restringir un campo de E dimensiones a una traza de $E - 1$ dimensiones, el exponente espectral pierde exactamente una unidad, lo que conecta los exponentes temporales y espaciales (Pérez and Zunino, 2008; Schwartz et al., 1994). Si el exponente espectral de un campo tridimensional es α_s, el exponente de Hurst del proceso unidimensional asociado es

$$H = \frac{\alpha_s - 2}{2}, \tag{1.26}$$

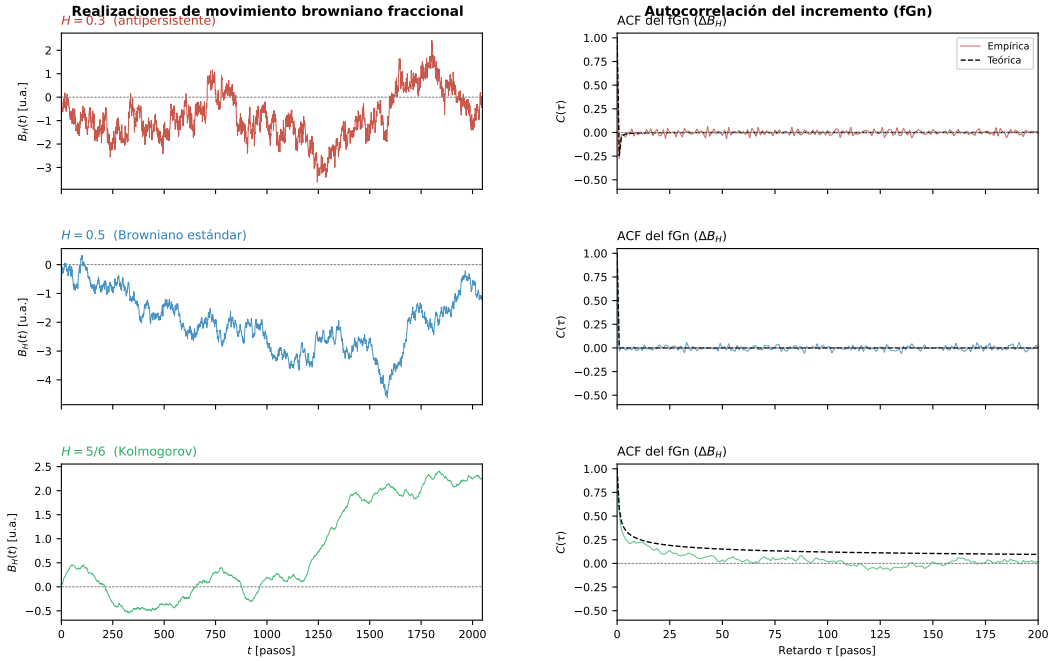

Figura 1.4: Realizaciones del movimiento browniano fraccionario para tres valores del exponente de Hurst. $H = 0.3$ (antipersistente): trayectorias muy irregulares con reversiones frecuentes. $H = 0.5$ (browniano estándar): la referencia sin memoria de largo alcance. $H = 5/6$ (Kolmogorov): trayectorias suaves y persistentes.

de modo que $\alpha_s = 11/3$ corresponde a $H = 5/6$ (Pérez and Zunino, 2008). Esta relación, y su derivación completa desde el espectro tridimensional del índice de refracción, se establece en el Capítulo 2, §2.3.1.

El fBm se extiende naturalmente a $\mathbb{R}^d$, donde el campo browniano fraccionario de Lévy (LfBf) conserva la H-autosimilaridad y los incrementos estacionarios en dimensión arbitraria (Pérez and Zunino, 2008). En $\mathbb{R}^2$ su covarianza es

$$\mathbb{E}[B_H(\mathbf{r})\, B_H(\mathbf{r}')] = \frac{\sigma^2}{2}\left\{|\mathbf{r}|^{2H} + |\mathbf{r}'|^{2H} - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2H}\right\}, \qquad \mathbf{r},\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2, \tag{1.27}$$

que recupera la covarianza del fBm unidimensional (1.20) al restringirse a una recta.

La autosimilaridad y la gaussianidad son propiedades independientes. Existen procesos H-autosimilares no gaussianos, como el proceso de Rosenblatt mencionado

en la sección siguiente (Embrechts and Maejima, 2002), y existen procesos gaussianos sin ninguna propiedad de escala. El fBm reúne ambas propiedades, autosimilaridad y gaussianidad, y puede caracterizarse mediante el operador de renormalización T_N que actúa sobre la función característica de los incrementos mediante

$$T_N(\hat{\mu})(u) = \hat{\mu}\big(N^{-H}u\big)^N . \tag{1.28}$$

Una distribución es punto fijo de T_N si agregar N copias independientes y reescalar la deja estadísticamente invariante, es decir, si la distribución se reproduce a sí misma bajo acumulación. Desde esa perspectiva, ser un punto fijo no es una propiedad algebraica abstracta sino la afirmación de que el proceso tiene la misma forma estadística a todas las escalas, que es exactamente la invariancia de escala característica de la turbulencia. El ruido gaussiano fraccionario es el único punto fijo estable del operador T_N dentro de la clase de procesos gaussianos con incrementos estacionarios (Embrechts and Maejima, 2002), del mismo modo que las distribuciones α-estables son los puntos fijos del operador análogo para sumas de variables con varianza infinita (Embrechts and Maejima, 2002; Samorodnitsky and Taqqu, 1994).

No existe otro proceso gaussiano con incrementos estacionarios y propiedades de escala distinto del fBm. La pregunta que abre la sección siguiente es qué sucede cuando se abandona alguna de las condiciones que garantizan la convergencia a la gaussiana, independencia, varianza finita, o número suficiente de sumandos, y qué distribuciones ocupan entonces el lugar del fBm.

1.3 Hipótesis gaussiana y sus limitaciones

El movimiento browniano fraccionario agota la posibilidad gaussiana con propiedades de escala, pues no existe otro proceso con esas dos propiedades simultáneas y con incrementos estacionarios. Esa posición privilegiada de la gaussiana no es un accidente matemático sino la consecuencia de una condición precisa sobre cómo se acumulan las contribuciones estadísticas elementales. El teorema central del límite formaliza

esa condición y establece bajo qué supuestos la gaussiana es el único atractor posible de sumas de variables aleatorias.

El teorema central del límite en su forma estándar afirma que la suma normalizada de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2 converge en distribución a una gaussiana (Papoulis and Pillai, 2002),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{1.29}$$

Este resultado es el fundamento probabilístico de la hipótesis gaussiana. Si un observable resulta de sumar muchas contribuciones independientes y comparables en varianza, su distribución se aproxima a una normal sin importar la forma individual de cada término. En procesos físicos, esta condición se satisface cuando el observable integra sobre muchos grados de libertad estadísticamente independientes.

Sin embargo, el CLT requiere tres condiciones simultáneas, independencia entre sumandos, número efectivo de sumandos suficientemente grande, y varianza finita. Cada una puede incumplirse de forma distinta, produciendo un mecanismo diferente de desviación gaussiana. Las secciones siguientes examinan cada mecanismo por separado, en orden de relevancia para los observables que analiza esta tesis (Hilhorst, 2009).

La primera vía de fallo opera incluso cuando las variables son perfectamente independientes, pues basta con que sean pocas. El CLT garantiza convergencia asintótica pero no dice con qué velocidad. El teorema de Berry-Esseen cuantifica esa velocidad (Berry, 1941; Esseen, 1942; Shevtsova, 2011). Si las variables son i.i.d. con media cero, varianza σ^2 y tercer momento absoluto finito $\rho = \mathbb{E}[|X|^3] < \infty$, entonces existe una constante universal $C \leq 0.4748$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \, \frac{\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \tag{1.30}$$

donde $F_n(x) = P\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j \leq x\Big)$ es la función de distribución acumulada de la suma normalizada y $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, du$ es la CDF de la distribución normal

estándar. La cota decae como $n^{-1/2}$, de modo que para que la desviación máxima respecto de la gaussiana sea pequeña se necesitan muchos sumandos independientes. Si n es pequeño, situación que ocurre cuando el número de grados de libertad estadísticamente independientes es reducido, la cota puede ser sustancial incluso cuando los momentos son finitos. Si además la distribución individual es asimétrica o tiene colas pesadas, el cociente ρ/σ^3 puede ser grande, ralentizando aún más la convergencia (González et al., 2026; Pérez, 2025).

La segunda vía requiere dos condiciones simultáneas, dependencia de largo alcance y una transformación no lineal suficientemente alta. Cuando se aplica una transformación de rango de Hermite $k \geq 2$ a una sucesión gaussiana con covarianza de largo alcance, el teorema límite no central de Dobrushin–Major y Taqqu establece que el proceso límite puede no ser gaussiano (Embrechts and Maejima, 2002). El caso $k = 2$ conduce al proceso de Rosenblatt, que es H-autosimilar pero con distribución marginal no gaussiana. Este mecanismo no se desarrolla aquí, y se remite a (Embrechts and Maejima, 2002) para el tratamiento completo.

La tercera vía se activa cuando las variables individuales tienen varianza infinita, lo que elimina el CLT clásico como atractor posible. Una distribución μ es α-estable, con índice de estabilidad $0 < \alpha \leq 2$ (en esta sección α_{st} denota exclusivamente este índice de estabilidad, y no debe confundirse con el exponente espectral α_s del espectro no-Kolmogorov del Capítulo 2), si su función característica satisface (Embrechts and Maejima, 2002; Samorodnitsky and Taqqu, 1994)

$$\hat{\mu}(\theta) = \exp\left\{-c|\theta|^{\alpha}\right\} \tag{1.31}$$

para alguna $c > 0$ (versión simétrica). El caso $\alpha = 2$ corresponde a la gaussiana. Para $0 < \alpha < 2$, la distribución estable tiene cola algebraica $P(|X| > x) \sim x^{-\alpha}$, lo que implica que el momento de orden γ es infinito para todo $\gamma \geq \alpha$ (Samorodnitsky and Taqqu, 1994). Si las variables $\{X_j\}$ son i.i.d. con distribución α-estable, la suma normalizada $n^{-1/\alpha}\sum_{j=1}^{n} X_j$ converge a una distribución α-estable, no a una gaussiana. El proceso límite es un proceso de Lévy α-estable, que es $(1/\alpha)$-autosimilar con incrementos independientes (Embrechts and Maejima, 2002; Samorodnitsky and

Taqqu, 1994). El movimiento browniano estándar es el caso $\alpha = 2$.

Una observación estructural importante sobre el tercer mecanismo es que las distribuciones α-estables no son solo una familia particular de distribuciones de cola pesada, sino las únicas distribuciones límite posibles de sumas normalizadas de variables aleatorias i.i.d. (Embrechts and Maejima, 2002; Samorodnitsky and Taqqu, 1994). La gaussiana es el caso especial $\alpha = 2$, y todas las demás distribuciones α-estables con $\alpha < 2$ tienen varianza infinita. Este resultado, el teorema límite central generalizado, es el contraparte exacto del CLT clásico. Así como el CLT garantiza que la gaussiana es el único atractor bajo varianza finita, el teorema generalizado garantiza que las distribuciones α-estables son los únicos atractores posibles bajo varianza infinita con colas de potencia.

Para procesos α-estables no gaussianos, la covarianza no existe como función finita cuando $\alpha < 2$. El sustituto natural de la autocovarianza en ese régimen es la codivergencia (Samorodnitsky and Taqqu, 1994),

$$\mathrm{CD}(X(t), X(s)) = \ln \mathbb{E}\left[e^{i(X(t)-X(s))}\right] - \ln \mathbb{E}\left[e^{iX(t)}\right] - \ln \mathbb{E}\left[e^{-iX(s)}\right], \tag{1.32}$$

que generaliza la covarianza al caso de momentos de orden 2 inexistentes y que recupera la covarianza usual cuando $\alpha = 2$. Esta distinción tiene consecuencias prácticas, pues en señales con colas algebraicas fuertes, estimar la función de autocovarianza empírica puede dar resultados erróneos o divergentes, mientras que la codivergencia permanece finita y bien definida.

Los tres mecanismos son conceptualmente distintos y no mutuamente excluyentes. El primero opera aunque las variables sean perfectamente independientes, bastando con que sean pocas. El segundo exige dependencia de largo alcance y no linealidad suficiente. El tercero requiere colas algebraicas con varianza divergente. En datos experimentales los tres pueden estar activos simultáneamente, lo que exige un análisis que no asuma gaussianidad a priori.

El mecanismo de dependencia dinámica y no linealidad tiene un ejemplo físico canónico en la turbulencia hidrodinámica plenamente desarrollada. La velocidad longitudinal u_x medida en un punto único sigue una distribución aproximadamente

gaussiana porque, vía la integral de Biot–Savart, es la superposición de contribuciones de un gran número de vórtices estadísticamente independientes, condición suficiente para el teorema central del límite (Davidson, 2015). Sin embargo, la función de densidad de los incrementos $\Delta u = u_x(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - u_x(\mathbf{x})$ y la de los gradientes $\partial u_x/\partial x$ son marcadamente no gaussianas, pues la curtosis de los gradientes crece con el número de Reynolds y puede alcanzar valores entre 4 y 40, y la asimetría de los incrementos en el rango inercial satisface $S \approx -0.4$, valor predicho directamente por la cascada de Kolmogorov (Davidson, 2015). Davidson interpreta esta no gaussianidad como intermitencia geométrica, donde la vorticidad se concentra en una red dispersa de filamentos que permanecen inactivos la mayor parte del tiempo y producen ráfagas intensas ocasionales. En términos del segundo mecanismo, los incrementos no son sumas de muchas variables independientes sino que están gobernados por la dinámica local de Navier–Stokes, de modo que si dos puntos caen dentro del mismo remolino, su diferencia está determinada por la estructura interna de ese remolino, no por el azar estadístico, lo que rompe la condición de independencia que sostiene el teorema central del límite.

Esta situación es análoga, pero no idéntica, a la que se analiza en esta tesis. Cuando el observable es una integral de línea acumulada a lo largo de una trayectoria extendida, en lugar de un valor puntual, la dependencia dinámica local queda atenuada por el promediado espacial y el efecto acumulativo domina sobre las contribuciones individuales de cada remolino. En ese régimen, la fuente principal de no gaussianidad deja de ser la dinámica interna local y pasa a ser la heterogeneidad lenta de un parámetro de intensidad a lo largo del trayecto, mecanismo que actúa conjuntamente sobre el primero y el tercero de los modos de fallo descritos antes. La identificación física de ese parámetro y de esa trayectoria se desarrolla en el Capítulo 2.

Identificar cuál mecanismo domina orienta directamente la elección del modelo distribucional. La sección siguiente propone la familia paramétrica que emerge cuando el mecanismo dominante es la variabilidad lenta del parámetro de escala, el tercero y el primero actuando conjuntamente, y construye la derivación desde primeros principios probabilísticos.

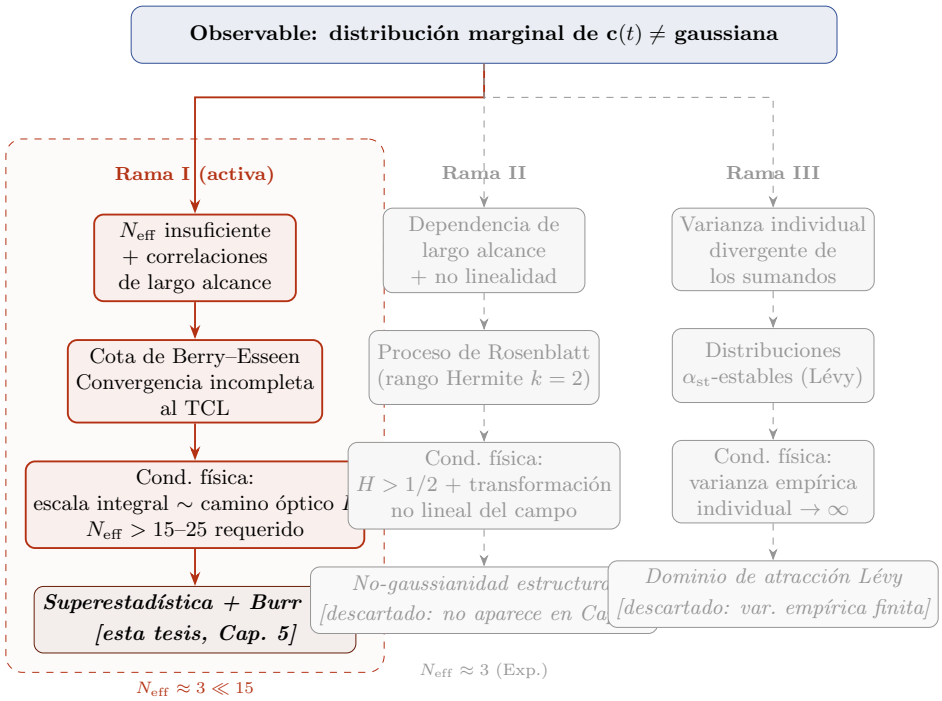

Figura 1.5: Diagrama de los tres mecanismos de no-gaussianidad. Rama I: convergencia lenta al límite gaussiano por número efectivo de contribuciones independientes N_{eff} insuficiente, cuantificado por la cota de Berry–Esseen. Rama II: dependencia de largo alcance con no linealidad (proceso de Rosenblatt). Rama III: colas algebraicas con varianza divergente; las distribuciones α_{st}-estables son los únicos atractores para sumas con varianza infinita.

1.4 Distribuciones marginales

Los tres mecanismos de la sección anterior producen distribuciones marginales con colas más pesadas que la gaussiana. La pregunta que responde esta sección es ¿qué familia paramétrica emerge de cada mecanismo? El primer mecanismo, la convergencia lenta al límite gaussiano, produce, cuando el proceso acumula contribuciones de forma aditiva en el exponente, una variable cuya distribución marginal es log-normal

(Andrews and Phillips, 2005)

$$p(x) = \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad x > 0, \tag{1.33}$$

cuya cola decae más lentamente que cualquier exponencial pero más rápidamente que una ley de potencia. El Capítulo 2 identifica el régimen en que la log-normal describe adecuadamente los observables, y sus limitaciones cuando el número efectivo de contribuciones independientes es pequeño motivan las familias siguientes.

¿Qué supuesto sobre el mecanismo generador de colas determina la forma de la distribución? Es la misma pregunta planteada en la sección anterior, que la literatura ha respondido con distintas familias paramétricas. Cuando el mecanismo es la modulación multiplicativa por dos factores positivos estadísticamente independientes ($X = YZ$), la elección de distribución gamma para ambos factores produce la distribución gamma-gamma (Al-Habash et al., 2001; Andrews and Phillips, 2005). Si uno de los factores sigue en cambio una distribución exponencial, la gamma-gamma colapsa a la distribución K, con cola algebraica más pesada. Cuando el criterio es la flexibilidad en el ajuste de asimetría y peso de cola, la distribución de Weibull proporciona mayor adaptabilidad (Andrews and Phillips, 2005).

Ninguna de estas tres familias emerge de un principio de mezcla probabilística. La distribución Burr XII, en cambio, se obtiene de un mecanismo preciso, la superestadística de Beck and Cohen (2003). Cuando el parámetro de escala de las fluctuaciones locales no es constante sino que varía lentamente a una escala de tiempo mucho mayor, la distribución marginal resultante tiene colas más pesadas que cualquier gaussiana. Si las fluctuaciones rápidas siguen una distribución Weibull con parámetro de escala β localmente fijo, y β varía según una distribución Gamma, la distribución marginal observada es exactamente la Burr XII (Cora, 2025; González et al., 2026). Los parámetros (c, k) tienen interpretación directa, pues c controla la geometría del potencial confinante en la escala rápida y k regula el peso de las colas a través de la dispersión de β.

La superestadística formaliza la situación en que un sistema atraviesa distintos estados locales durante una observación larga (Beck and Cohen, 2003). Si durante

intervalos cortos el proceso puede describirse mediante una distribución $p(x|\beta)$ con parámetro β aproximadamente constante, y si β fluctúa lentamente con densidad $f(\beta)$, la distribución marginal observada es la mezcla

$$p(x) = \int_0^\infty p(x \mid \beta)\, f(\beta)\, d\beta. \tag{1.34}$$

El parámetro β cuantifica la intensidad local de las fluctuaciones rápidas, pues es el parámetro de escala del núcleo Weibull, que regula la amplitud de la dinámica en el régimen de observación inmediato. Su identificación física en el contexto de la propagación óptica se establece en el Capítulo 2.

La condición conceptual es una separación de escalas (Beck and Cohen, 2003),

$$\tau_{\text{slow}} \gg \tau_{\text{fast}}, \tag{1.35}$$

donde τ_{fast} es el tiempo de correlación de la dinámica rápida y τ_{slow} es la escala de tiempo en que el parámetro β varía apreciablemente (Beck and Cohen, 2003). Esta separación garantiza que el proceso rápido alcanza su distribución local estacionaria antes de que β varíe de forma significativa, lo que valida el promediado incoherente de las distribuciones locales. La intensidad de la variabilidad lenta queda resumida por (Beck, 2005)

$$\frac{\text{Var}(\beta)}{\langle\beta\rangle^2} = \frac{1}{k}. \tag{1.36}$$

Valores pequeños de k implican mayor dispersión de estados y, en consecuencia, colas más pesadas en la distribución marginal.

Para magnitudes positivas, una elección natural para la distribución local es el núcleo Weibull condicionado a β (Beck and Cohen, 2003; Sánchez C., 2019),

$$p(r \mid \beta) = c\beta r^{c-1} e^{-\beta r^c}, \qquad r \geq 0, \tag{1.37}$$

que puede motivarse como la distribución estacionaria de una dinámica de Langevin confinada por un potencial efectivo $V(r) \propto r^c$ (Risken, 1996). Al mezclar este núcleo

con una distribución Gamma para β,

$$f(\beta) = \frac{\beta^{k-1} e^{-\beta/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \qquad \beta > 0, \tag{1.38}$$

donde $\theta > 0$ es el parámetro escala (fija la amplitud típica de β, con $\langle \beta \rangle = k\theta$) y $\Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u}\, du$ es la función Gamma que asegura la normalización, se obtiene la distribución Burr XII (Burr, 1942; Dubey, 1968; Rodriguez, 1977; Tadikamalla, 1980). La elección de la distribución Gamma para β no es arbitraria, pues Beck y Cohen demostraron que, dentro de la familia de mezclas con kernel exponencial, la Gamma es la única distribución de mezclado que produce colas algebraicas puras en la distribución marginal resultante (Beck and Cohen, 2003). Esta unicidad determina la Burr XII a partir de la separación de escalas entre la dinámica rápida y la variabilidad lenta del sistema. Una derivación alternativa, propuesta por Sánchez C. (2019), reemplaza el kernel Weibull por un factor de Boltzmann extendido de tipo Mittag-Leffler, manteniendo la distribución Gamma para el parámetro de intensidad local, y el resultado es idénticamente la Burr XII de tres parámetros. Las dos derivaciones microscópicas convergen a la misma distribución marginal siempre que haya separación de escalas temporales y colas de potencia en el mezclado, independientemente de la forma funcional exacta del factor de Boltzmann local.

Esta construcción admite además una formulación dinámica explícita que va más allá de la superestadística de Beck–Cohen. La *H-theory* de Macêdo, Roa González, Salazar y Vasconcelos (Macêdo et al., 2017; Roa González, 2017), que extiende el modelo de volatilidad estocástica de Salazar y Vasconcelos para turbulencia hidrodinámica, formaliza la jerarquía multiescala mediante un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô. El nivel rápido es una dinámica de Langevin para el observable x con varianza local ε, y el nivel lento es una cascada de N variables de fondo ε_i con tiempos de relajación bien separados $\zeta \gg \gamma_N \gg \cdots \gg \gamma_1$,

gobernada por

$$dx = -\zeta\, x\, dt + \sqrt{2\zeta\varepsilon_N}\, dV, \tag{1.39}$$

$$d\varepsilon_i = -\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})\, dt + \kappa_i\, g(\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i-1})\, dW_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.40}$$

con coeficiente de difusión $g(\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i-1}) = \varepsilon_{i-1}^{1-\alpha}\varepsilon_i^{\alpha}$. La solución estacionaria de (1.40) bajo cinco hipótesis físicas mínimas (simetría de traslación temporal, interacciones locales entre escalas contiguas, invariancia de escala, equilibrio y flujo unidireccional) se reduce a dos clases de universalidad determinadas por el exponente α, la clase *Gamma* ($\alpha = 1/2$), que produce distribuciones marginales de tipo exponencial estirado, y la clase *Gamma-inversa* ($\alpha = 1$), que produce colas algebraicas y contiene la Burr XII como caso particular para $N = 1$. La distribución marginal del observable adopta la forma cerrada de una función H de Fox, que se reduce a funciones G de Meijer y a la Burr XII cuando el número de escalas activas es uno. La H-theory proporciona así el fundamento dinámico que justifica por qué la Burr XII emerge como ley estacionaria del observable rápido, pues no es una elección distribucional, sino la consecuencia de una cascada estocástica de relajación con separación de escalas, en analogía formal con la cascada de Kolmogorov (Macêdo et al., 2017). En esta tesis se adopta el régimen $N = 1$, una única escala lenta dominante, condición suficiente para reproducir las marginales observadas en los Capítulos 4 y 5 y que se justifica físicamente en el Capítulo 2.

En una parametrización con escala a, su densidad es

$$p_{\mathrm{Burr}}(r; a, c, k) = \frac{ck}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{c-1}\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^{c}\right]^{-(k+1)}. \tag{1.41}$$

Para valores grandes de r, la Burr decae como una ley de potencia,

$$p_{\mathrm{Burr}}(r) \sim r^{-(ck+1)}, \tag{1.42}$$

por lo que el exponente de cola depende del producto ck (Cora, 2025). Los momentos de orden q son finitos si y solo si $ck > q$, de modo que la media existe para $ck > 1$ y la varianza para $ck > 2$. Para $ck \leq 2$, la cola algebraica sitúa a la Burr XII en el

dominio de atracción de una ley α-estable con $\alpha = ck$ (Samorodnitsky and Taqqu, 1994), de modo que una suma de muchas variables Burr, normalizada adecuadamente, converge a esa distribución estable, en coherencia con el tercer mecanismo de la sección anterior.

La relación entre los parámetros de ambos niveles de la superestadística y los parámetros directamente ajustables de la Burr XII se obtiene integrando explícitamente la mezcla (1.34). Sustituyendo el núcleo Weibull (1.37) y la distribución Gamma (1.38) en la integral de mezcla y aplicando la identidad

$$\int_0^\infty \beta^k \, e^{-\beta(\theta^{-1}+r^c)} \, d\beta = \Gamma(k+1) \, (\theta^{-1}+r^c)^{-(k+1)},$$

se obtiene

$$p(r;\theta,c,k) = \frac{ck}{\theta} \, r^{c-1} \, (\theta^{-1}+r^c)^{-(k+1)}. \tag{1.43}$$

Definiendo el parámetro de escala $a = \theta^{-1/c}$, es decir

$$a = \theta^{-1/c}, \tag{1.44}$$

la expresión anterior toma la forma estándar (1.41), confirmando que a y θ no son parámetros independientes, pues fijar θ y c determina completamente a. El parámetro k controla el peso de las colas, a través de la variabilidad de β (1.36), mientras que c controla la curvatura local del núcleo de confinamiento.

La justificación dinámica de por qué el núcleo Weibull es la elección natural para magnitudes positivas proviene de una ecuación de Langevin no lineal. González et al. (2026) demuestran que si la magnitud positiva $r(t)$ evoluciona según la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dr}{dt} = -\varepsilon c \, r^{c-1} + \sigma \, \xi(t), \tag{1.45}$$

donde $\xi(t)$ es ruido blanco, $c > 0$ controla la geometría del potencial de confinamiento $V(r) = \varepsilon r^c$, y $\varepsilon > 0$ es la intensidad del parámetro de escala local, entonces la distribución estacionaria de la solución es exactamente Weibull con parámetro de forma c. La EDE (1.45) conecta la forma de la distribución marginal con la geometría

del potencial que confina las fluctuaciones rápidas, donde valores grandes de c corresponden a un potencial muy confinante, coherente con fluctuaciones de pequeña amplitud y cola ligera en la escala rápida.

Cuando ε fluctúa lentamente con distribución Gamma (la superestadística de esta sección), la distribución marginal observada sobre escalas largas es la Burr XII. La misma estructura, distribución inversa-Gamma para el coeficiente de relajación $\zeta = \varepsilon/\sigma^2$, produce una ley de potencias espectral $S(f) \sim f^{-(\tilde{\beta}+2)}$ en el régimen asintótico de frecuencias, donde $\tilde{\beta}$ es el exponente que fija la cola de esa distribución de mezclado (González et al., 2026). La Burr XII y la dependencia de largo alcance emergen, pues, del mismo modelo dinámico con dos parámetros de tiempo distintos.

Una vez establecido el modelo distribucional, queda la pregunta inversa, dado un conjunto de datos experimentales, ¿cuánto se aleja su distribución de la gaussiana, y en qué parte de la distribución ocurre la desviación? Para responderla se necesita una medida de distancia entre distribuciones y herramientas de diagnóstico visual. La divergencia de Kullback-Leibler (Kullback and Leibler, 1951) cuantifica esa distancia,

$$D_{\mathrm{KL}}(f\|g) = \int f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)}\, dx, \tag{1.46}$$

donde f es la distribución empírica o ajustada y g es la gaussiana de referencia con los mismos primeros dos momentos. La interpretación es informacional, pues D_{KL} mide la pérdida de información al describir f mediante g (González et al., 2026). No es simétrica, por lo que el orden de argumentos debe declararse. La curtosis resume parcialmente el peso de cola pero no distingue entre asimetría, multimodalidad y forma del cuerpo (Papoulis and Pillai, 2002). Una gráfica cuantil-cuantil (Q-Q) complementa esa medida escalar comparando, para cada nivel de probabilidad $p \in (0,1)$, el cuantil empírico $F^{-1}(p)$ de la muestra con el cuantil teórico $G^{-1}(p)$ de la distribución de referencia. Cuando la muestra proviene de g, los puntos $\big(G^{-1}(p), F^{-1}(p)\big)$ se alinean sobre la diagonal $y = x$, y los apartamientos sistemáticos respecto de esa diagonal localizan dónde ocurre la desviación, pues las gráficas Q-Q permiten diagnosticar visualmente si aparece en el centro, en las colas o en ambos. Una D_{KL} grande con colas pesadas en los Q-Q apunta a mecanismos distintos que una D_{KL}

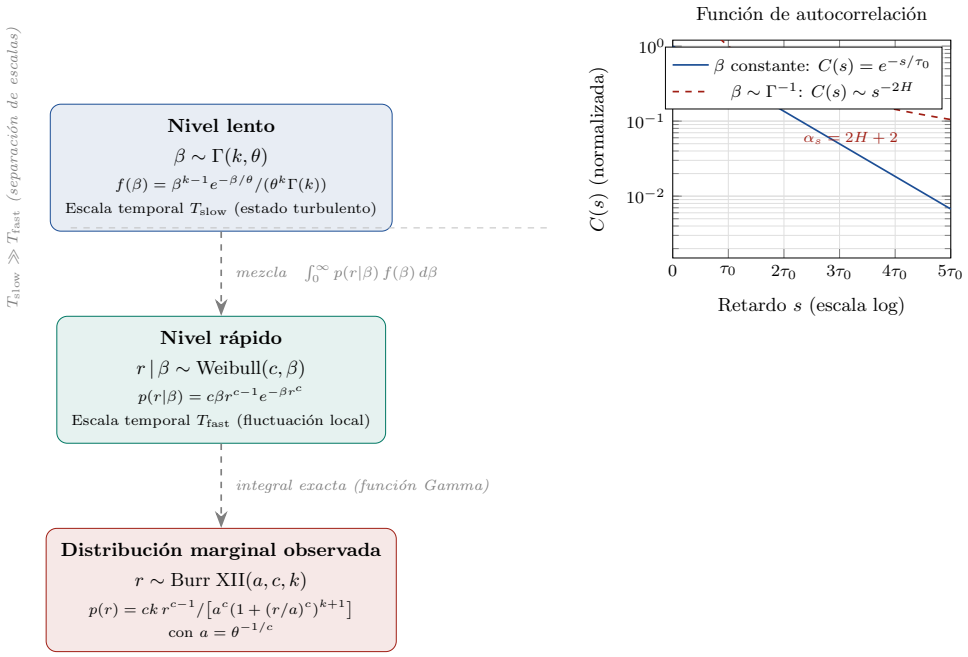

Figura 1.6: Estructura de la superestadística en dos niveles que produce la Burr XII. Nivel superior: el parámetro de escala local ε sigue una distribución Gamma con parámetros (k, θ), capturando la variabilidad lenta del sistema. Nivel inferior: condicionado a ε, la magnitud r sigue la distribución estacionaria de la EDE (1.45), que es Weibull con parámetro de forma c. La integración de ambos niveles produce la Burr XII en el margen. Panel derecho: función de autocorrelación resultante, exponencial bajo ε fijo (dinámica rápida), ley de potencias bajo mezcla Gamma (escala lenta).

grande con desviaciones concentradas en el centro.

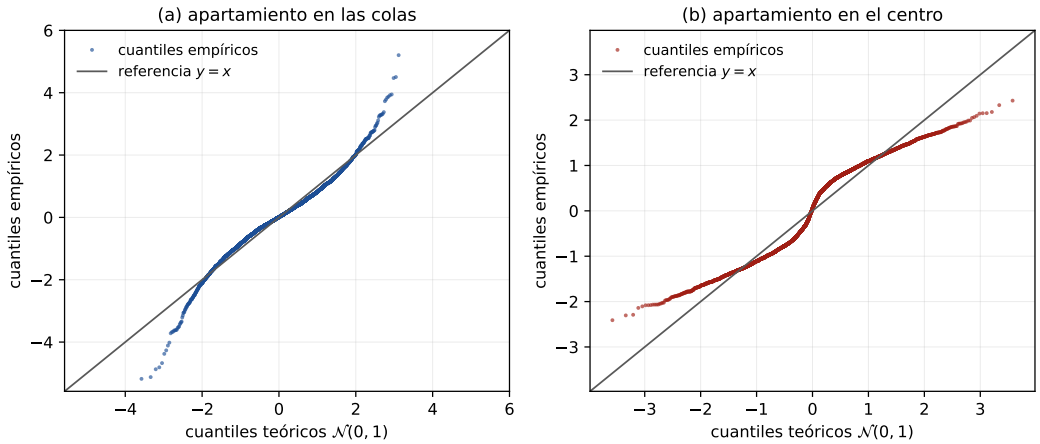

Figura 1.7: Gráficas cuantil-cuantil (Q-Q) de dos muestras sintéticas contra la referencia gaussiana estándar. (a) Muestra con colas pesadas, cuyos cuantiles extremos se apartan de la diagonal en ambos extremos. (b) Muestra bimodal, cuyo apartamiento se concentra en el centro de la distribución mientras las colas permanecen cercanas a la referencia.

1.5 Análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA)

Estimar la memoria temporal de una serie temporal desde la función de autocorrelación tiene un problema estructural, pues en presencia de dependencia de largo alcance, el promedio de la primera mitad del registro difiere del de la segunda, de modo que el estimador empírico $\hat{C}(s)$ acumula un sesgo que crece con el retardo. Para una señal discreta (x_i) de longitud N, la función de autocorrelación con retardo s es

$$C(s) = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N-s} \bar{x}_i \, \bar{x}_{i+s}, \tag{1.47}$$

donde $\bar{x}_i = x_i - \langle x \rangle$. Correlaciones de corto alcance corresponden a un decaimiento exponencial de $C(s)$, mientras que para dependencia de largo alcance, $C(s)$ sigue una ley de potencia (Kantelhardt et al., 2001)

$$C(s) \propto s^{-\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{1.48}$$

El análisis de rango reescalado R/S (Mandelbrot and Wallis, 1969) evita estimar $C(s)$ directamente pero produce estimaciones de H sesgadas en presencia de tendencias no estacionarias y deriva lenta. El análisis de fluctuaciones sin tendencia, DFA (Kantelhardt et al., 2001, 2002; Peng et al., 1994), resuelve ese problema transformando la estimación en un problema de difusión, de modo que en lugar de calcular correlaciones, mide cómo crece la varianza del perfil integrado de la señal con la escala de observación. Esa transformación suprime las tendencias polinomiales mediante el ajuste local $p_\nu(i)$ y produce un estimador estadísticamente consistente para longitudes $N \gtrsim 10^3$ (Kantelhardt et al., 2001; Løvsletten, 2017).

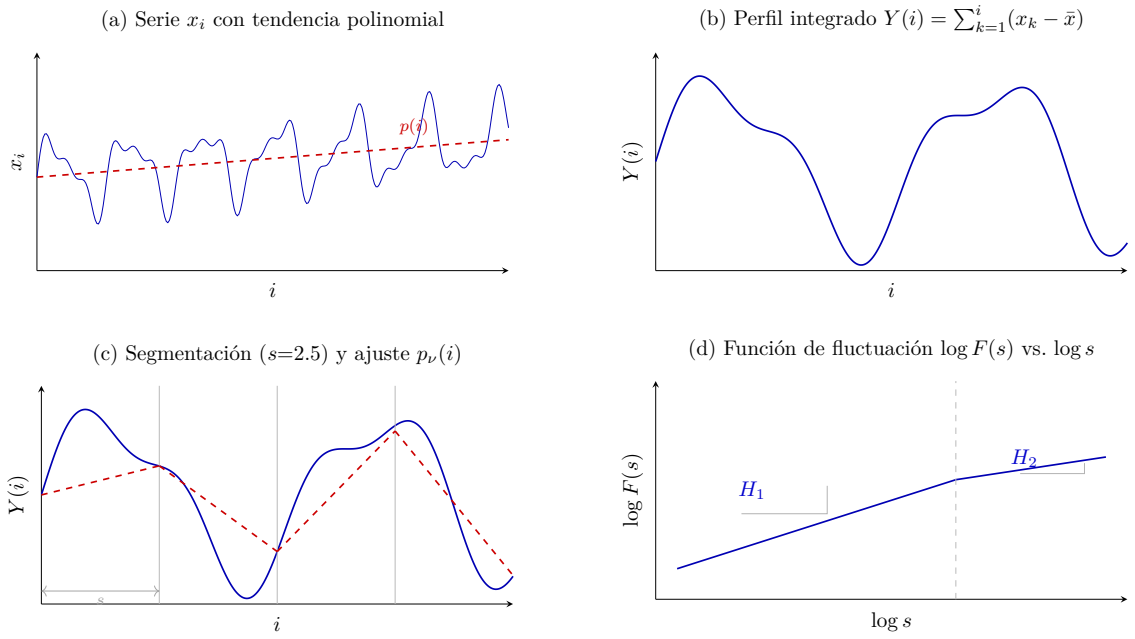

Figura 1.8: Algoritmo DFA paso a paso aplicado a una serie sintética con $H = 0.7$. (a) Serie original x_i con tendencia polinomial superpuesta. (b) Perfil integrado $Y(i) = \sum_{k=1}^{i}(x_k - \bar{x})$. (c) Partición en segmentos de escala s con ajuste local $p_\nu(i)$. (d) Función de fluctuación $\log F(s)$ vs. $\log s$, cuya pendiente estima H y cuyo crossover separa dos regímenes de escala temporal.

La idea central es que integrar la señal convierte las correlaciones en difusión, pues sin correlaciones la varianza del perfil integrado crece linealmente con el tiempo, di-

fusión normal. Con LRD, en cambio, crece más rápido, superdifusión, y el exponente de esa anomalía cuantifica H directamente (Peng et al., 1994). El primer paso es integrar la señal, calculando la suma acumulada centrada,

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i} \big(x_k - \langle x \rangle\big), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.49}$$

El perfil $Y(i)$ se divide entonces en $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ segmentos no solapados de longitud s. Para no descartar el extremo del registro cuando N no es múltiplo de s, el procedimiento se repite desde el otro extremo, obteniendo $2N_s$ segmentos en total. En cada segmento ν se ajusta un polinomio $p_\nu(i)$ de grado n por mínimos cuadrados y se extrae la serie sin tendencia,

$$Y_s(i) = Y(i) - p_\nu(i). \tag{1.50}$$

El método así definido se denomina DFAn. En esta tesis se emplea DFA2 (polinomio de grado $n = 2$), donde el ajuste cuadrático en el perfil $Y(i)$ elimina tendencias lineales en la señal original, que son las más frecuentes en registros experimentales con deriva lenta (Kantelhardt et al., 2001; Zunino et al., 2015). En general, DFAn elimina tendencias polinomiales de orden hasta n en el perfil, equivalentemente de orden hasta $n-1$ en la señal original (x_i). A partir de la serie sin tendencia, la varianza en cada segmento,

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} Y_s^2\big(i + (\nu - 1)s\big), \tag{1.51}$$

se promedia sobre los $2N_s$ segmentos tomando la raíz cuadrada,

$$F(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} F^2(\nu, s) \right]^{1/2}. \tag{1.52}$$

La conexión entre $F(s)$ y las correlaciones de la señal se puede derivar directamente. Sin tendencias, el desplazamiento cuadrático medio del perfil satisface, para

i grande (Kantelhardt et al., 2001),

$$\left\langle Y^2(i)\right\rangle = i\langle x^2\rangle + 2\sum_{k=1}^{i-1}(i-k)\,C(k). \tag{1.53}$$

Cuando $C(k) \propto k^{-\gamma}$ con $0 < \gamma < 1$, el segundo término domina,

$$\sum_{k=1}^{i-1} C(k) \sim \int_1^{i-1} k^{-\gamma}\,dk \sim i^{1-\gamma}, \tag{1.54}$$

de modo que $\left\langle Y^2(i)\right\rangle \sim i^{2-\gamma}$. El perfil exhibe superdifusión, creciendo más rápido que un camino aleatorio ordinario, cuya varianza escala linealmente. Una aproximación análoga para $F(s)$ conduce a (Kantelhardt et al., 2001)

$$F(s) \sim s^{1-\gamma/2}, \tag{1.55}$$

de donde se obtiene la relación entre el exponente DFA y el exponente de correlación $H = 1-\gamma/2$. En el caso de datos sin correlaciones de largo alcance, el primer término domina y $\left\langle Y^2(i)\right\rangle \sim i$, es decir, difusión normal, y $F(s) \propto s^{1/2}$.

Si el escalamiento existe, la pendiente de $\log F(s)$ versus $\log s$ estima el exponente de Hurst (Kantelhardt et al., 2001; Løvsletten, 2017),

$$F(s) \sim s^H. \tag{1.56}$$

La interpretación del exponente es directa, pues $H = 1/2$ indica ausencia de correlaciones de largo alcance, $H > 1/2$ indica LRD con autocorrelación positiva (proceso persistente), y $H < 1/2$ indica anticorrelación (proceso antipersistente) (Kantelhardt et al., 2001). La ventaja del DFA sobre el estimador directo de $C(s)$ es precisamente su robustez frente a no estacionariedad, pues las tendencias polinomiales en los datos quedan absorbidas por el ajuste local $p_\nu(i)$ y no contaminan la estimación de H (Kantelhardt et al., 2001). La PSD ofrece verificación complementaria, pues la pendiente DFA α y la pendiente espectral β de la misma serie satisfacen

asintóticamente $\beta = 2\alpha - 1$, relación que se reduce a $\beta = 2H - 1$ cuando la serie es de tipo fGn y a $\beta = 2H + 1$ cuando la serie es de tipo fBm (Embrechts and Maejima, 2002; Kiyono, 2015; Pérez et al., 2004).

El escalamiento $F(s) \sim s^H$ sobre todo el rango de escalas corresponde a un proceso H-autosimilar en el sentido de la sección 1.2, con una única ley de escala válida a cualquier resolución. Sin embargo, hay procesos que pueden tener leyes de escala distintas en rangos distintos, en particular cuando varios mecanismos de correlación con tiempos de coherencia bien separados actúan simultáneamente sobre la misma señal. Un proceso de ese tipo no es globalmente autosimilar, pero puede describirse localmente en cada rango de escalas mediante un exponente propio, y la transición entre rangos se manifiesta como un cambio de pendiente en $\log F(s)$ frente a $\log s$, denominado *crossover* (Ge and Leung, 2013; Kantelhardt et al., 2001).

En general, si un proceso de este tipo exhibe K crossovers en las escalas $s_1^* < s_2^* < \cdots < s_K^*$, la función de fluctuación se describe mediante la ley de potencias segmentada con $K + 1$ regímenes,

$$F(s) \sim s^{H_r}, \qquad s_{r-1}^* \leq s < s_r^*, \quad r = 1, \ldots, K+1, \tag{1.57}$$

donde $s_0^* \equiv 0$ y $s_{K+1}^* \equiv \infty$ por convención, y cada exponente local H_r describe el proceso restringido a ese rango de escalas (Funes et al., 2013; Ge and Leung, 2013). El número de regímenes $K+1$ no es una propiedad universal, sino una característica propia de cada proceso, del mismo modo que H lo es para un proceso H-autosimilar. A partir de datos, K se detecta mediante regresión segmentada con pruebas de permutación sobre $\log F(s)$, y cada H_r se estima por regresión lineal en su tramo (Fujimoto et al., 2025; Ge and Leung, 2013). Tanto el número de regímenes de una señal dada como la interpretación física de cada uno dependen del sistema del que provienen los datos, de modo que ninguno de los dos se fija aquí de manera general.

El DFA segmentado hereda las fortalezas y las limitaciones del DFA de un solo tramo. Como estimador, es robusto frente a tendencias polinomiales no estacionarias porque el ajuste local $p_\nu(i)$ las absorbe antes de calcular $F(s)$, lo que lo distingue del estimador directo de $C(s)$. Esa misma robustez impone un costo, pues el número de

crossovers detectables no es una propiedad intrínseca de la señal sino una decisión metodológica que depende del rango de escalas disponible, del orden del polinomio de detrending y de la longitud del registro. Un registro corto o un rango de escalas estrecho puede no contener suficientes puntos para distinguir un crossover genuino de una fluctuación estadística del ajuste, y un orden de detrending insuficiente puede dejar una tendencia residual que se confunde con un cambio de pendiente real. Por esa razón, la elección de dos crossovers frente a uno o frente a tres crossovers no se decide por inspección visual de $\log F(s)$, sino que requiere un criterio estadístico que compare la mejora del ajuste segmentado contra el riesgo de sobreajustar la curva con más parámetros de los que los datos sostienen (Fujimoto et al., 2025; Ge and Leung, 2013). El Capítulo 3 describe ese criterio.

El DFA sobre una serie temporal produce un exponente de Hurst $H_{1\mathrm{D}}$ que caracteriza el proceso proyectado sobre el eje temporal, sin distinguir todavía si ese proceso proviene de la proyección de un campo espacial de dimensión mayor. Bajo condiciones sobre la geometría del campo y el muestreo que se establecen en el Capítulo 2, $H_{1\mathrm{D}}$ es un estimador consistente de $H_{2\mathrm{D}}$ y, a través de la relación $\alpha_s = 2H + 2$ de la sección 1.2, del exponente espectral del campo espacial subyacente. Cuando esas condiciones no se satisfacen, el DFA proporciona una descripción válida de la serie temporal pero la conexión con el campo espacial requiere correcciones adicionales (Pérez and Zunino, 2008).

Para la distribución marginal del observable, la Burr XII se aplica cuando el número efectivo de contribuciones independientes es reducido. En ese régimen, la cota de Berry-Esseen de la sección 1.3 predice desviaciones apreciables respecto de la gaussiana. Simultáneamente, la variabilidad lenta del parámetro de escala entre estados locales del sistema produce una mezcla de distribuciones que la Burr XII captura mediante los parámetros c y k (Cora, 2025; González et al., 2026; Sánchez C., 2019).

El análisis estadístico de los observables se divide entonces en dos preguntas complementarias. La primera, de carácter temporal, pregunta cómo se ordena la señal a través de escalas y se responde con DFA, Hurst y PSD. La segunda, de carácter marginal, pregunta cómo se distribuyen los valores independientemente de

su orden y se responde con Burr XII, D_{KL} y Q-Q (González et al., 2026; Pérez, 2025; Pérez and Funes, 2015; Zunino et al., 2015). Ambas capas son complementarias, pues un buen ajuste Burr no explica la memoria temporal, y un exponente de Hurst no determina la forma marginal. El proceso analizado puede presentar simultáneamente persistencia temporal y colas pesadas (Funes et al., 2013; Pérez, 2025), lo que hace necesario el tratamiento completo desarrollado en este capítulo.

Capítulo 2

Turbulencia atmosférica y propagación óptica

2.1 Introducción

El índice de refracción aleatorio $n_1(\mathbf{r}, t)$ conecta la dinámica del flujo turbulento con los observables ópticos medibles en el plano del detector. Este capítulo establece esa conexión, pues deriva el espectro turbulento desde la cascada de Kolmogorov hasta las extensiones no-Kolmogorov, y traduce ese espectro, mediante las aproximaciones de Born y Rytov, en la log-amplitud χ y en el desplazamiento del centroide $\mathbf{c}(t)$.

En propagación óptica, el índice de refracción determina la velocidad de fase local del campo electromagnético y, con ella, la evolución del frente de onda al atravesar el medio. Dado un perfil $n(\mathbf{r})$, el cambio en la fase acumulado a lo largo de cualquier trayectoria queda definido punto a punto y, por lo tanto, bajo este modelo, el problema es completamente determinista (Born and Wolf, 1999). En la atmósfera, sin embargo, $n(\mathbf{r}, t)$ fluctúa en el espacio y en el tiempo como consecuencia de variaciones locales de temperatura, presión y densidad inducidas por la turbulencia, y esas fluctuaciones distorsionan el frente de onda, alterando el campo óptico en el plano de observación (Andrews and Phillips, 2005; Tatarskii, 1971).

La turbulencia involucra un gran número de grados de libertad y fluctuaciones

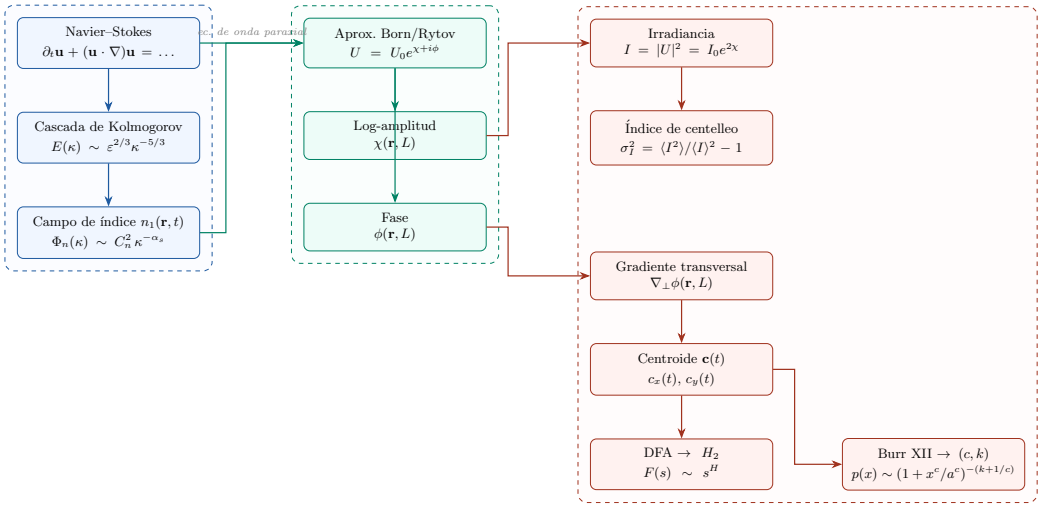

Figura 2.1: Cadena causal que conecta la turbulencia atmosférica con los observables del experimento. La rama superior lleva de la cascada de Kolmogorov a la log-amplitud χ y al centelleo σ_I^2. La rama inferior lleva de la perturbación de fase φ al gradiente transversal y al desplazamiento del centroide $\mathbf{c}(t)$, que es el observable central de los Capítulos 4 y 5.

que existen en un continuo de escalas con transferencia de energía entre ellas, lo que hace que su descripción sea naturalmente estadística (Frisch, 1995; Monin and Yaglom, 1975). En óptica atmosférica, esto implica que no se busca reconstruir cada realización instantánea de $n(\mathbf{r},t)$, sino caracterizar propiedades que puedan definirse estadísticamente, como la intensidad de las desviaciones respecto del comportamiento promedio y la manera en que esas desviaciones se relacionan entre distintos puntos del espacio (Andrews and Phillips, 2005; Tatarskii, 1971).

Para formalizar esta idea, se considera el índice de refracción como la suma de un valor medio y una fluctuación turbulenta,

$$n(\mathbf{r},t) = n_0 + n_1(\mathbf{r},t), \qquad \langle n_1\rangle = 0, \tag{2.1}$$

donde la condición $\langle n_1\rangle = 0$ asegura que toda contribución media queda contenida en n_0, mientras que $n_1(\mathbf{r},t)$ representa las fluctuaciones refractivas inducidas por la turbulencia.

De esta descomposición se sigue, en particular, que las estadísticas de segundo orden se calculan sobre las desviaciones respecto del valor medio. Como $n_1(\mathbf{r},t) = n(\mathbf{r},t) - n_0$, la varianza local del índice queda

$$\left\langle [n(\mathbf{x}) - n_0]^2 \right\rangle = \left\langle n_1^2(\mathbf{x}) \right\rangle , \tag{2.2}$$

y, para dos puntos separados por $\mathbf{r}$,

$$\langle [n(\mathbf{x}) - n_0][n(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - n_0] \rangle = \langle n_1(\mathbf{x}) n_1(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle . \tag{2.3}$$

Así, la variabilidad refractiva queda caracterizada, a segundo orden, por la amplitud de n_1 y por la relación estadística entre sus valores en puntos distintos. El siguiente paso consiste en precisar bajo qué condiciones esta relación estadística puede describirse sólo mediante la separación entre puntos. La atmósfera no es homogénea a gran escala, pues existen gradientes verticales sistemáticos de temperatura y presión, capas con distintas condiciones meteorológicas, y variaciones horizontales de largo alcance. Sin embargo, en una región suficientemente pequeña y durante un intervalo de tiempo corto, las propiedades estadísticas de las fluctuaciones pueden tratarse como invariantes bajo traslación. En este sentido, la homogeneidad local debe entenderse como una propiedad estadística de las fluctuaciones, no como una uniformidad estricta del medio, pues dentro de la región considerada, sus estadísticas no dependen de la posición absoluta (Andrews and Phillips, 2005; Monin and Yaglom, 1975; Tatarskii, 1971).

Bajo esta hipótesis, la covarianza entre dos valores de la fluctuación refractiva deja de depender de la posición absoluta $\mathbf{x}$ de los puntos y pasa a depender sólo de la separación entre ellos, es decir, $\mathbf{r}$. Por tanto, la covarianza espacial puede escribirse como

$$B_n(\mathbf{r}) = \langle n_1(\mathbf{x})\, n_1(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle . \tag{2.4}$$

Si además, las fluctuaciones pueden considerarse localmente isótropas, esta dependencia se reduce al módulo de la separación $r = |\mathbf{r}|$. En este caso, B_n describe el grado de similitud estadística entre dos valores de la fluctuación refractiva separados

por una distancia r. Sin embargo, aunque la covarianza cuantifica correlación, no expresa la magnitud del cambio del campo entre ambos puntos.

Para describir esa variación espacial se consideran incrementos de la fluctuación refractiva, definidos como diferencias entre valores de n_1 evaluados en puntos separados por $\mathbf{r}$. Esta descripción es especialmente útil en turbulencia, porque permite organizar las fluctuaciones según la escala de separación a la que son observadas (Frisch, 1995; Monin and Yaglom, 1975; Tatarskii, 1971). Por ello se introduce la función de estructura del índice,

$$D_n(r) = \left\langle [n_1(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - n_1(\mathbf{x})]^2 \right\rangle , \tag{2.5}$$

que mide cuánto difieren las fluctuaciones refractivas entre dos puntos separados por r.

A partir de esta definición, la función de estructura se relaciona con la covarianza espacial. Al desarrollar el cuadrado del incremento, se obtiene

$$D_n(r) = \left\langle n_1^2(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \right\rangle + \left\langle n_1^2(\mathbf{x}) \right\rangle - 2 \left\langle n_1(\mathbf{x}+\mathbf{r}) n_1(\mathbf{x}) \right\rangle , \tag{2.6}$$

expresión que se simplifica al imponer homogeneidad local. Los dos primeros términos son la varianza $B_n(0)$, mientras que el último es la covarianza espacial $B_n(r)$. Por tanto,

$$D_n(r) = 2 \left[B_n(0) - B_n(r) \right] . \tag{2.7}$$

Esta relación muestra que la descripción de las fluctuaciones refractivas puede formularse en términos de correlaciones o, de manera equivalente, en términos de incrementos espaciales.

2.2 Turbulencia en la atmósfera

El índice de refracción fluctúa porque el propio aire está en movimiento turbulento. Las heterogeneidades de temperatura y densidad que induce el flujo son las que perturban $n(\mathbf{r}, t)$. La dinámica de ese flujo, para un fluido viscoso, está gobernada

por las ecuaciones de Navier–Stokes,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2.8}$$

donde ρ es la densidad del fluido, p la presión y ν la viscosidad cinemática. La condición $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ corresponde a la aproximación de incompresibilidad, estándar en turbulencia atmosférica a las escalas relevantes para propagación óptica, ya que las variaciones de densidad inducidas por el flujo escalan como Ma^2, donde $Ma = U/c_s$ es el número de Mach y $c_s \simeq 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ es la velocidad del sonido en aire. Para velocidades turbulentas características $U \sim 1\text{–}10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ se obtiene $Ma^2 \sim 10^{-5}\text{–}10^{-3}$, de modo que la corrección compresible es despreciable (Landau and Lifshitz, 1987; Monin and Yaglom, 1975).

La ecuación de Navier–Stokes contiene dos mecanismos de naturaleza opuesta. El término viscoso $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ es lineal y difusivo, pues suaviza gradientes de velocidad y convierte energía cinética en calor. El término advectivo $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$, en cambio, es no lineal, pues al ser cuadrático en la velocidad, acopla el movimiento en escalas distintas, de modo que un remolino grande puede deformar y estirar estructuras más pequeñas transfiriéndoles energía. Para comparar ambos mecanismos de forma sistemática, se introducen una velocidad típica U y una longitud típica L del flujo y se definen variables adimensionales $\mathbf{u} = U\mathbf{u}^*$, $\mathbf{r} = L\mathbf{r}^*$, $t = (L/U)t^*$ y $p = \rho U^2 p^*$. Al sustituir, todos los parámetros dimensionales se absorben en un único cociente y las ecuaciones toman la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^*\cdot\nabla^*)\,\mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\nabla^{*2}\mathbf{u}^*, \qquad \nabla^*\cdot\mathbf{u}^* = 0, \tag{2.9}$$

donde

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{2.10}$$

es el número de Reynolds (Reynolds, 1883). Cuando Re es pequeño, la viscosidad domina y el flujo permanece laminar. Cuando Re es suficientemente grande, el transporte no lineal supera a la disipación viscosa en las escalas grandes y el movimiento desarrolla fluctuaciones irregulares acopladas en un amplio rango de escalas.

La transferencia de energía entre escalas se analiza mediante la descomposición de Reynolds,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}'(\mathbf{r},t), \qquad \langle \mathbf{u}' \rangle = 0, \tag{2.11}$$

y a las desviaciones se asocia la energía cinética turbulenta por unidad de masa,

$$K = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i' \rangle. \tag{2.12}$$

En un flujo turbulento desarrollado, esta energía no permanece localizada en una única escala, sino que se inyecta en las escalas grandes y se transfiere progresivamente hacia escalas menores mediante el acoplamiento no lineal entre remolinos. Este proceso continuo constituye la cascada turbulenta (Richardson, 1922). En estado estadísticamente estacionario, la energía inyectada a escala grande debe fluir hacia escalas menores a la misma tasa con que finalmente se disipa. Esa tasa de disipación de energía cinética turbulenta por unidad de masa se denota ε y tiene dimensiones de $\mathrm{m^2\,s^{-3}}$. Su escala puede estimarse como

$$\varepsilon \sim \frac{U^3}{L_0}. \tag{2.13}$$

En el rango de escalas intermedias, ni el forzamiento externo ni la viscosidad actúan de forma dominante, pues la energía simplemente atraviesa esas escalas sin ser creada ni destruida. Este intervalo se denomina rango inercial. Los únicos parámetros relevantes en su límite inferior son ν y ε, y la única combinación de ambos con dimensiones de longitud es

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \tag{2.14}$$

conocida como escala de Kolmogorov (Kolmogorov, 1941). El rango inercial queda entonces delimitado por $\eta \ll r \ll L_0$.

Dentro de este rango, la hipótesis de Kolmogorov establece que, bajo condiciones de homogeneidad e isotropía local, las estadísticas de los incrementos de velocidad son universales y dependen únicamente de r y de ε (Frisch, 1995; Kolmogorov, 1941, 1962). La función de estructura $D_u(r) = \langle [u(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - u(\mathbf{x})]^2 \rangle$ tiene dimensiones de

velocidad al cuadrado, $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$. Buscando la única combinación de la forma $\varepsilon^a r^b$ con esas mismas dimensiones, $[\varepsilon^a r^b] = \mathrm{m^{2a+b}\,s^{-3a}}$, el sistema $-3a = -2$ y $2a + b = 2$ determina $a = b = 2/3$. La forma de la función de estructura de velocidad es entonces,

$$D_u(r) = C_2\,(\varepsilon\, r)^{2/3}, \qquad \eta \ll r \ll L_0. \tag{2.15}$$

Esta es la ley de los 2/3. La misma organización aparece en el dominio espectral, donde la densidad espectral de energía $E(\kappa)$ tiene dimensiones de energía por unidad de número de onda, $\mathrm{m^3\,s^{-2}}$, y en el rango inercial los únicos parámetros disponibles siguen siendo ε y κ (con dimensiones $\mathrm{m^{-1}}$). Buscando la combinación $\varepsilon^a \kappa^b$ con esas dimensiones, $[\varepsilon^a \kappa^b] = \mathrm{m^{2a-b}\,s^{-3a}}$, el sistema $-3a = -2$ y $2a - b = 3$ determina $a = 2/3$ y $b = -5/3$. El espectro de Kolmogorov es entonces,

$$E(\kappa) = C_K\,\varepsilon^{2/3}\,\kappa^{-5/3}, \qquad L_0^{-1} \ll \kappa \ll \eta^{-1}. \tag{2.16}$$

En la teoría clásica, la temperatura se trata como un escalar pasivo cuando sus fluctuaciones son transportadas por el flujo sin modificar de manera dominante la dinámica mecánica que las advecta. La teoría de Obukhov–Corrsin formaliza esta idea, pues en el rango inercial, las fluctuaciones de temperatura presentan una ley de escala análoga a la de los incrementos de velocidad (Corrsin, 1951; Falkovich et al., 2001; Monin and Yaglom, 1975; Obukhov, 1941, 1949; Warhaft, 2000).

Si se escribe la temperatura como suma de un valor medio y una fluctuación,

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + T_1(\mathbf{r}, t), \qquad \langle T_1 \rangle = 0, \tag{2.17}$$

la fluctuación T_1 es transportada por el campo de velocidades turbulento sin retroalimentar significativamente sobre él. En el rango inercial, la hipótesis de Obukhov–Corrsin establece que los incrementos de T_1 son universales y dependen únicamente de r, de la tasa de disipación de varianza térmica χ (con dimensiones $\mathrm{K^2\,s^{-1}}$) y de ε (Corrsin, 1951; Monin and Yaglom, 1975; Obukhov, 1949). La forma de la función

de estructura de temperatura se obtiene por análisis dimensional,

$$D_T(r) = C_T^2 r^{2/3}, \qquad \ell_0 \ll r \ll L_0, \tag{2.18}$$

donde $C_T^2 \propto \chi\,\varepsilon^{-1/3}$ es la constante de estructura de temperatura, con dimensiones $\mathrm{K^2\,m^{-2/3}}$. Esta relación muestra que, bajo la hipótesis de escalar pasivo, las fluctuaciones de temperatura heredan la misma estructura estadística de escala que las fluctuaciones de velocidad en el rango inercial, pues sus incrementos no dependen de los detalles microscópicos del flujo, sino de las tasas de disipación que establecen la cascada turbulenta.

Conocido el comportamiento de escala de las fluctuaciones de temperatura, corresponde analizar cómo estas inducen fluctuaciones en el índice de refracción. Esta relación se obtiene mediante la refractividad del aire. Para longitudes de onda ópticas y condiciones atmosféricas estándar (Andrews and Phillips, 2005; Edlén, 1966),

$$n - 1 \approx 77.6 \times 10^{-6} \frac{P}{T}, \tag{2.19}$$

con P en milibares y T en Kelvin. Descomponiendo la presión y la temperatura en sus partes media y fluctuante, $P = P_0 + P_1$ y $T = T_0 + T_1$, y reemplazando estas expresiones en (2.19), se obtiene una relación perturbativa para el índice de refracción. Al expandir a primer orden en las fluctuaciones, la contribución media queda dada por $n_0 - 1 = 77.6 \times 10^{-6} P_0/T_0$, mientras que la fluctuación del índice resulta

$$n_1 \approx \frac{77.6 \times 10^{-6}}{T_0}\, P_1 - \frac{77.6 \times 10^{-6} P_0}{T_0^2}\, T_1. \tag{2.20}$$

En la atmósfera, las fluctuaciones de presión inducidas por la turbulencia satisfacen $P_1/P_0 \ll T_1/T_0$ (Andrews and Phillips, 2005; Tatarskii, 1971), de modo que el primer término es despreciable frente al segundo. Descartándolo,

$$n_1(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{77.6 \times 10^{-6} P_0}{T_0^2} T_1(\mathbf{r}, t) \equiv -A_n T_1(\mathbf{r}, t). \tag{2.21}$$

Sustituyendo (2.21) en la definición de incremento del índice,

$$n_1(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) - n_1(\mathbf{x},t) = -A_n\big[T_1(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) - T_1(\mathbf{x},t)\big]. \tag{2.22}$$

Elevando al cuadrado y promediando, el factor A_n sale del promedio y se obtiene,

$$D_n(r) = A_n^2 D_T(r) = A_n^2 C_T^2 r^{2/3}, \tag{2.23}$$

donde en el último paso se ha usado (2.18). De la ecuación anterior se puede identificar la relación entre la constante de estructura de temperatura C_T^2 y la del índice de refracción C_n^2 (Monin and Yaglom, 1975),

$$C_n^2 = A_n^2 C_T^2. \tag{2.24}$$

Una vez establecida la relación entre temperatura e índice, la fluctuación refractiva $n_1(\mathbf{r},t)$ se convierte en la variable física central de la turbulencia óptica. En el rango inercial, la teoría clásica predice

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}, \qquad \ell_0 \ll r \ll L_0. \tag{2.25}$$

El coeficiente C_n^2 mide la intensidad local de la turbulencia óptica.

Esta condensación es útil, pero también limitada. La interpretación de C_n^2 como descriptor escalar supone que el campo es localmente homogéneo e isótropo y que existe un rango de escalas donde la ley de dos tercios es una aproximación razonable. Si el flujo presenta estratificación térmica fuerte, cizallamiento, plumas convectivas o anisotropía marcada, $D_n(r)$ puede depender de la dirección y C_n^2 debe leerse como una cantidad efectiva local.

La descripción en el dominio espacial mediante $D_n(r)$ y C_n^2 tiene una contraparte espectral que permite extender el análisis a rangos de escalas más amplios y a exponentes distintos del clásico 2/3.

2.2.1 Representación espectral y sus extensiones

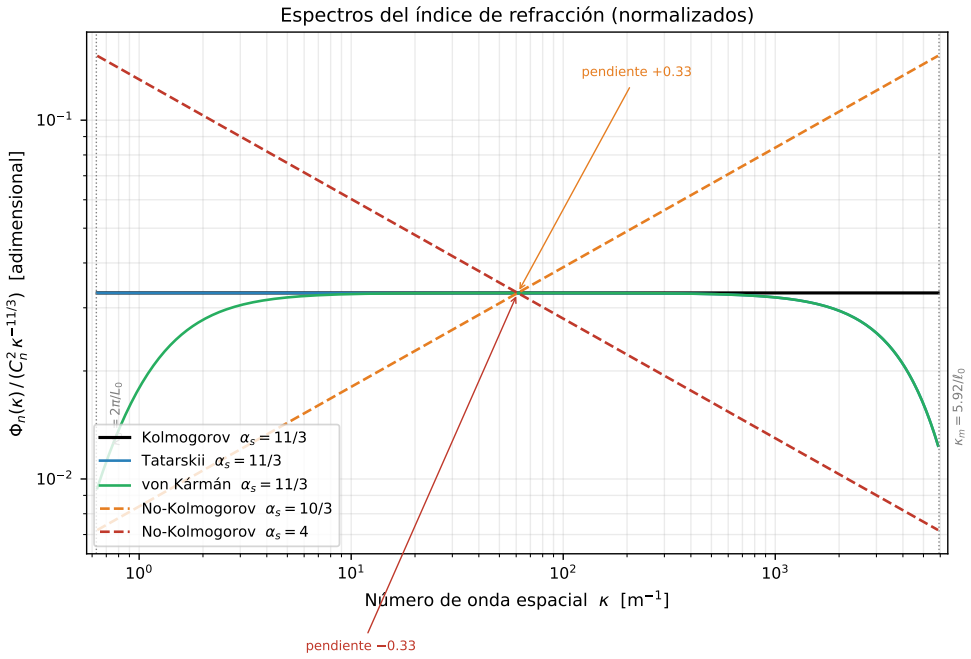

Figura 2.2: Densidad espectral tridimensional del índice de refracción en escala log-log. Se superponen los espectros de Kolmogorov Φ_n^K (línea continua), Tatarskii Φ_n^T (corte a κ_m), von Kármán Φ_n^{vK} (corte a κ_0 y κ_m) y dos curvas del espectro generalizado no-Kolmogorov con $\alpha_s = 10/3$ y $\alpha_s = 4$. El eje vertical está normalizado por $C_n^2\kappa^{-11/3}$. La figura muestra dónde regulariza cada espectro y cómo los exponentes no-Kolmogorov redistribuyen la energía entre escalas.

La función de estructura $D_n(r)$ organiza las fluctuaciones refractivas según la separación entre puntos, pero no permite calcular directamente los efectos del medio sobre el campo óptico. La varianza del ángulo de llegada, el índice de centelleo y el radio de coherencia son todos integrales del espectro turbulento ponderadas por filtros que dependen de la geometría del experimento, de modo que para evaluarlos es necesario trasladar la descripción al dominio de números de onda. Bajo homogeneidad local, la densidad espectral tridimensional $\Phi_n(\kappa)$ es la transformada de Fourier

de la covarianza espacial,

$$B_n(\mathbf{r}) = \int e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \Phi_n(\boldsymbol{\kappa})\, d^3\kappa. \tag{2.26}$$

Para el rango inercial clásico, la ley de dos tercios se traduce en el espectro de Kolmogorov (Andrews and Phillips, 2005; Sreenivasan, 1995; Tatarskii, 1971),

$$\Phi_n^K(\kappa) = 0.033\, C_n^2 \kappa^{-11/3}, \qquad 1/L_0 \ll \kappa \ll 1/\ell_0. \tag{2.27}$$

La pendiente $\kappa^{-11/3}$ es la manifestación espectral de la misma invarianza de escala que la ley de los dos tercios expresa en el espacio físico, y la constante 0.033 es el resultado exacto de la transformada de Fourier tridimensional de $D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}$ en el límite isótropo. Sin embargo, este espectro diverge en $\kappa \to \infty$, pues integrado sin corte superior, produciría fluctuaciones de amplitud infinita por debajo de la escala de disipación viscosa, donde la turbulencia no existe. Físicamente, la viscosidad extingue la turbulencia por debajo de la escala de Kolmogorov η, y el espectro debe decaer suavemente a partir de ahí. El espectro de Tatarskii (Tatarskii, 1971) corrige esta divergencia introduciendo un decaimiento gaussiano en torno a la escala interna ℓ_0,

$$\Phi_n^T(\kappa) = 0.033\, C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \qquad \kappa_m = 5.92/\ell_0. \tag{2.28}$$

El decaimiento gaussiano resuelve la divergencia en escalas pequeñas, pero el espectro de Tatarskii mantiene la singularidad en $\kappa \to 0$, pues sin un corte en bajas frecuencias, la varianza de la fase acumulada a lo largo del camino de propagación, y con ella la varianza del tilt del frente de onda, divergen logarítmicamente, lo que es físicamente inadmisible dado que los remolinos más grandes están acotados por la escala de forzamiento L_0. El espectro de von Kármán (Coulman et al., 1988; von Kármán, 1948) elimina esa divergencia reemplazando $\kappa^{11/3}$ por $(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}$ en el denominador,

$$\Phi_n^{vK}(\kappa) = 0.033\, C_n^2 \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}}, \qquad \kappa_0 \sim 1/L_0. \tag{2.29}$$

Cuando $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_m$, esta expresión recupera la pendiente $\kappa^{-11/3}$ del rango inercial. En $\kappa \to 0$, el denominador converge a $\kappa_0^{11/3}$, fijando la varianza de la fase en un valor finito, mientras que en $\kappa \to \infty$, el factor gaussiano suprime exponencialmente las fluctuaciones por debajo de la escala interna. El espectro de von Kármán es, en este sentido, el modelo mínimo que respeta simultáneamente la cascada inercial y los límites físicos del rango turbulento, y es el punto de partida natural para los cálculos de varianza de tilt y centelleo desarrollados en las secciones 2.4 y 2.5.

La ley de potencia $\kappa^{-11/3}$ descansa en las hipótesis de homogeneidad, isotropía local y rango inercial bien desarrollado. Experimentos en la troposfera alta, la estratosfera baja, rutas urbanas y en capa límite han mostrado desviaciones sistemáticas respecto de ese exponente, reportando exponentes fuera del rango de Kolmogorov (Charnotskii, 2013, 2014, 2021; Korotkova and Toselli, 2021; Stribling et al., 1995; Toselli et al., 2008, 2011). Cualquier estado turbulento que se aparte de la ley $\kappa^{-11/3}$ en el rango inercial se clasifica como turbulencia no-Kolmogorov.

La generalización natural del espectro de von Kármán consiste en dejar libre el exponente de la ley de potencia. El espectro tridimensional no-Kolmogorov para el índice de refracción adopta la forma (Korotkova and Toselli, 2021)

$$\Phi_n(\kappa) = A(\alpha)\,\tilde{C}_n^2\,\frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2+\kappa_0^2)^{\alpha/2}}, \qquad 3<\alpha<5, \tag{2.30}$$

donde $\tilde{C}_n^2$ es el parámetro de estructura generalizado con unidades $\mathrm{m}^{3-\alpha}$ y

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{4\pi^2}\cos\!\Big(\frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{2.31}$$

El corte de alta frecuencia queda $\kappa_m = c(\alpha)/\ell_0$ con

$$c(\alpha) = \left[\frac{2\pi\,\Gamma\big(\frac{5-\alpha}{2}\big)\,A(\alpha)}{3}\right]^{1/(\alpha-5)}, \tag{2.32}$$

y el de baja frecuencia $\kappa_0 = 2\pi/L_0$. El caso Kolmogorov se recupera para $\alpha = 11/3$, donde $A(11/3) = \Gamma(8/3)\cos(11\pi/6)/(4\pi^2) \approx 0.033$ (Tatarskii, 1971), pues

la constante no es empírica sino el resultado exacto de la transformada de Fourier tridimensional de $D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}$ en el límite isótropo. La restricción $3 < \alpha < 5$ tiene base física, ya que para $\alpha \leq 3$, el espectro $\kappa^{-\alpha}$ diverge en $\kappa \to \infty$ (energía infinita en escalas pequeñas), y para $\alpha \geq 5$, la integral que define la función de estructura $D_n(r)$ diverge en $\kappa \to 0$, lo que implicaría fluctuaciones de amplitud arbitraria sin escala exterior finita (Korotkova and Toselli, 2021; Tatarskii, 1971). El significado físico del exponente es inmediato, pues valores de α menores que 11/3 concentran más energía en escalas pequeñas, es decir, en una estructura más fina y granular, mientras que valores mayores la concentran en escalas grandes, produciendo fluctuaciones más suaves y de mayor tamaño. Esa redistribución de energía modifica directamente los observables medibles, pues la varianza del ángulo de llegada y la pendiente de la función de estructura de fase dependen de α de forma que puede inferirse su valor desde las series de centroides, conexión que se establece formalmente en la sección 2.3.1.

En la atmósfera real, α no es constante con la altura, pues cada capa opera bajo condiciones dinámicas distintas que modifican la distribución de energía entre escalas. La capa límite (hasta $\approx 2\,\text{km}$) sigue aproximadamente la ley de Kolmogorov con $\alpha_1 = 11/3$. En la troposfera libre ($\approx$ 2–8 km), la turbulencia helicoidal produce $\alpha_2 \approx 10/3$. Finalmente, en la estratosfera (por encima de $\approx 8\,\text{km}$), la dinámica de ondas de gravedad domina sobre la cascada convectiva, con $\alpha_3 \approx 5$, lo que corresponde a estructuras muy grandes y suaves. Para modelar esta variación de forma continua se emplea un modelo de tres capas (Korotkova and Toselli, 2021),

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_1}{(1 + z/z_1)^{b_1}} + \frac{\alpha_2 (z/z_1)^{b_1}}{1 + (z/z_1)^{b_1}} \cdot \frac{1}{1 + (z/z_2)^{b_2}} + \frac{\alpha_3 + (z/z_2)^{b_2}}{1 + (z/z_2)^{b_2}}, \tag{2.33}$$

donde z_1 y z_2 son las alturas de separación entre capas y b_1, b_2 son coeficientes de transición entre regímenes.

La estratificación térmica de la atmósfera y el cizallamiento entre capas de viento deforman los remolinos turbulentos, de modo que en lugar de estructuras aproximadamente esféricas, se forman remolinos aplanados horizontalmente, con escala de correlación vertical menor que la horizontal. Este efecto es especialmente pronunci-

ado en la estratosfera libre y en la capa límite cercana al suelo, donde los gradientes verticales de temperatura son intensos. El modelo de Kolmogorov no puede capturarlo porque supone que la covarianza del índice depende solo del módulo de la separación $|\mathbf{r}|$, ignorando la dirección. Una descripción mínima de la anisotropía introduce una covarianza con geometría elipsoidal (Korotkova and Toselli, 2021),

$$B_n(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \langle n^2 \rangle \exp\left[- \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta x_0^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta y_0^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta z_0^2} \right) \right], \tag{2.34}$$

con $\Delta z_0 < \Delta x_0, \Delta y_0$ cerca de una superficie horizontal. Esta asimetría puede representarse en el espectro mediante factores de anisotropía μ_z, μ_x, μ_y que modulan los números de onda en cada dirección. Para propagación vertical (eje z), el espectro anisótropo con exponente libre toma la forma

$$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}, \alpha, \mu_z) = \frac{\Gamma(\alpha - 1) \cos(\alpha\pi/2)\, \tilde{C}_n^2\, \mu_z^2}{4\pi^2 \left[\mu_z^2 \kappa_z^2 + (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) \right]^{\alpha/2}}, \tag{2.35}$$

y para propagación horizontal (eje z perpendicular a la óptica),

$$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}, \alpha, \mu_x, \mu_y) = \frac{\Gamma(\alpha - 1) \cos(\alpha\pi/2)\, \tilde{C}_n^2\, \mu_x \mu_y}{4\pi^2 \left[\kappa_z^2 + \mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2 \right]^{\alpha/2}}, \tag{2.36}$$

donde los factores μ_j cuantifican la excentricidad del elipsoide de remolinos en cada plano (Korotkova and Toselli, 2021). Cuando $\mu_j = 1$ para todo j, el espectro anisótropo se reduce al isótropo con exponente libre (2.30). Para propagación horizontal, que es la geometría de los experimentos de los Capítulos 4 y 5, el producto $\mu_x \mu_y$ actúa como un factor de amplificación efectiva de la intensidad turbulenta, pues remolinos elongados en la dirección transversal al haz aumentan la varianza de ángulo de llegada respecto del caso isótropo, mientras que remolinos aplanados en esa dirección la reducen.

Este modelo conserva un único exponente α para todas las direcciones y solo modula, mediante μ_x y μ_y, la excentricidad geométrica de los remolinos. La anisotropía generada y medida en el turbulador de laboratorio no tiene esa forma. Funes et al.

(2016) mostraron que, al sintetizar turbulencia anisótropa en un canal comparable al de esta tesis, las componentes horizontal y vertical del campo exhiben pendientes espectrales distintas entre sí, de modo que la anisotropía se manifiesta como una diferencia en el exponente de la ley de potencia y no solo como una diferencia de escala entre direcciones. El modelo de μ_x, μ_y describe entonces la anisotropía de forma del espectro, mientras que la anisotropía de exponente observada en los experimentos de los Capítulos 4 y 5, donde el exponente de Hurst horizontal H_h y el vertical H_v difieren entre sí, requiere estimar H de manera independiente para cada componente en lugar de suponer un α común corregido solo por excentricidad.

Los modelos espectrales anteriores describen la distribución de energía entre escalas espaciales en condiciones estacionarias, pero no la evolución temporal de esas estructuras. Para convertir $\Phi_n(\kappa)$ en espectros temporales medibles desde el detector es necesario relacionar números de onda con frecuencias. La aproximación estándar, debida a Taylor (1938), supone que los remolinos se advectan sin deformarse a la velocidad media del viento $\mathbf{U}$, de modo que $f = \kappa U/(2\pi)$. Kraichnan (1964) y Tennekes (1975) señalaron que esta hipótesis puede fallar incluso cuando $u'/V \ll 1$, porque los remolinos pequeños son barridos por los grandes antes de poder decorrelacionarse por sí mismos (Wilczek and Narita, 2012). El modelo de barrido aleatorio generaliza la función de correlación espaciotemporal, pues en lugar de las iso-superficies esféricas de la hipótesis de Taylor, el barrido aleatorio produce iso-superficies elipsoidales de la forma

$$r_E^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{U}\tau\|^2 + V^2\tau^2, \tag{2.37}$$

donde $V^2 = \langle u'^2 \rangle$ es la varianza de la velocidad de barrido aleatoria. El índice de refracción actúa en el fluido como escalar pasivo acoplado a las fluctuaciones de temperatura, con tiempos de decorrelación intrínsecos determinados por la dinámica del campo escalar. Los tiempos que el modelo de barrido aleatorio introduce son, en cambio, de naturaleza geométrica. El tiempo de barrido $\tau_c \sim L_0/V$ mide cuánto tarda una estructura de escala exterior L_0 en cruzar el haz arrastrada por la velocidad media V, y el tiempo de evolución propia $\tau_d \sim L_0/u'$ mide cuánto tarda esa misma estructura en deformarse por su propia dinámica interna (Kraichnan, 1964; Tennekes,

1975). Ninguno de los dos coincide con los tiempos de decorrelación intrínsecos del escalar en el fluido, ya que la integración del índice de refracción a lo largo del camino óptico y el filtrado espacial de la apertura D_0 seleccionan las escalas que modulan el centroide, de modo que los tiempos estimables desde la correlación espaciotemporal del observable óptico son propios de la geometría del experimento y no del espectro del fluido.

Una consecuencia teórica del modelo de barrido aleatorio es que, aun cuando el barrido invalida la hipótesis de Taylor, el exponente de la ley de potencia del espectro de frecuencias coincide con el del espectro de número de onda, pues solo el nivel de energía (constante de Kolmogorov) resulta sobreestimado, mientras que el exponente espectral se preserva (Wilczek et al., 2014). Por tanto, el exponente de Hurst H estimado por DFA permanece un descriptor válido del estado espectral de la turbulencia incluso en el régimen donde la hipótesis de Taylor estricta no se cumple.

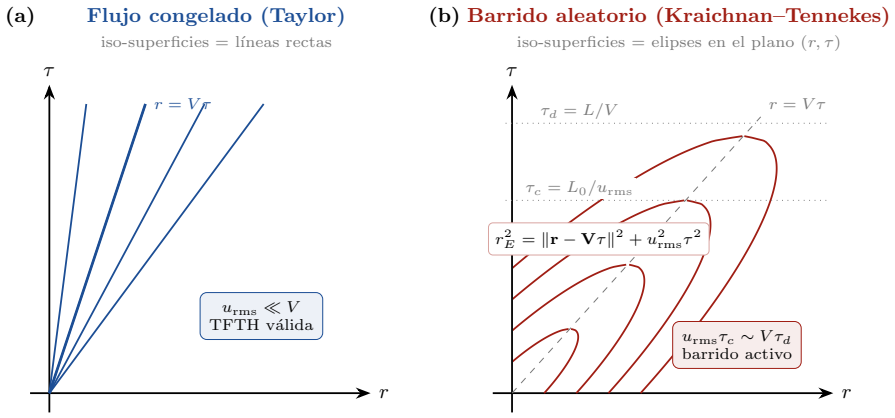

Figura 2.3: Iso-superficies espaciotemporales de la función de correlación del índice de refracción. Izquierda: hipótesis de Taylor (flujo congelado), donde $r_E = |\mathbf{r} - \mathbf{U}\tau|$ produce iso-superficies planas en el plano (r, τ). Derecha: barrido aleatorio de Kraichnan–Tennekes, con iso-superficies elipsoidales determinadas por los dos tiempos característicos τ_c y τ_d.

La jerarquía de modelos espectrales, desde el espectro de Kolmogorov hasta las extensiones anisótropas y no-Kolmogorov, establece el repertorio de descriptores del

medio turbulento. La sección 2.3 convierte esos descriptores en predicciones cuantitativas sobre el frente de onda propagado.

2.3 Propagación en turbulencia

La turbulencia modifica el índice de refracción punto a punto a lo largo del camino de propagación, y ese índice variable actúa como un medio inhomogéneo sobre el campo óptico que lo atraviesa. Para una onda monocromática propagándose en ese medio perturbado, el campo escalar puede escribirse como

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}, \tag{2.38}$$

donde A es la amplitud y ϕ la fase. En un medio con índice espacialmente variable,

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + n_1(\mathbf{r}), \qquad |n_1| \ll n_0, \tag{2.39}$$

el campo satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U + k^2 n^2(\mathbf{r})U = 0. \tag{2.40}$$

Aquí $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda óptico. Si se toma $n_0 \simeq 1$ y se descartan términos cuadráticos en n_1, entonces $n^2(\mathbf{r}) \simeq 1 + 2n_1(\mathbf{r})$, y la ecuación de Helmholtz puede leerse como una ecuación de onda libre más una fuente distribuida inducida por la turbulencia.

Esta formulación introduce dos ideas importantes. Primero, el efecto de la turbulencia no es local al detector, pues el campo recibido contiene la memoria integrada del índice refractivo a lo largo del trayecto. Segundo, la perturbación es compleja, pues puede modificar tanto la amplitud como la fase del campo.

La ecuación de Helmholtz con índice aleatorio rara vez se resuelve de manera exacta. Cuando las fluctuaciones de índice son débiles, el efecto de la turbulencia puede tratarse como una perturbación del campo que se propagaría en ausencia de fluctuaciones.

La aproximación de Born (Andrews and Phillips, 2005; Born and Wolf, 1999; Tatarskii, 1971) escribe el campo como una expansión aditiva,

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots , \tag{2.41}$$

donde U_0 es el campo no perturbado y $U_1, U_2, \ldots$ son correcciones sucesivas producidas por el medio aleatorio. La expansión de Born es útil cuando $|U_1/U_0| \ll 1$, pero su forma aditiva mezcla en cada orden las perturbaciones de amplitud y de fase, de modo que no hay una manera directa de aislar las fluctuaciones del frente de onda de las fluctuaciones de irradiancia, ni de describir naturalmente la acumulación multiplicativa de perturbaciones a lo largo del camino.

La aproximación de Rytov (Andrews and Phillips, 2005; Tatarskii, 1971) resuelve esa limitación escribiendo la perturbación directamente en el exponente,

$$U(\mathbf{r}, L) = U_0(\mathbf{r}, L) e^{\psi(\mathbf{r}, L)}, \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots . \tag{2.42}$$

La perturbación ya no aparece como una suma directa sobre el campo, sino en el exponente. Esta forma es natural cuando la propagación acumula pequeñas contribuciones a lo largo del camino óptico. En régimen débil, la primera perturbación de Rytov se relaciona con la corrección de Born normalizada,

$$\psi_1 \simeq \frac{U_1}{U_0}, \qquad \left|\frac{U_1}{U_0}\right| \ll 1. \tag{2.43}$$

La ventaja conceptual de Rytov aparece al separar la perturbación compleja en parte real e imaginaria,

$$\psi = \chi + i\varphi, \tag{2.44}$$

de donde

$$U = U_0 e^{\chi + i\varphi}. \tag{2.45}$$

La parte real χ es la log-amplitud, pues controla cambios multiplicativos del módulo del campo. La parte imaginaria φ es la perturbación de fase, pues controla la deformación del frente de onda. Esta separación organiza la teoría clásica en la rama

real, que lleva de χ a fluctuaciones de irradiancia y centelleo, y la rama imaginaria, que lleva de φ a gradientes de fase, angle-of-arrival y wandering de centroides.

La primera corrección del campo en la aproximación de Born satisface la ecuación no homogénea

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = -2k^2 n_1(\mathbf{R})\, U_0(\mathbf{R}), \tag{2.46}$$

cuya solución formal se escribe como integral de la función de Green del espacio libre (Andrews and Phillips, 2005; Sepúlveda, 2024),

$$U_1(\mathbf{r}, L) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 s\; G(\mathbf{s}, \mathbf{r}, z, L)\; U_0(\mathbf{s}, z)\; \frac{n_1(\mathbf{s}, z)}{L - z}, \tag{2.47}$$

donde, en la aproximación paraxial, la función de Green adopta la forma

$$G(\mathbf{s}, \mathbf{r}, z, L) \approx \frac{1}{4\pi(L - z)} \exp\left[ik(L - z) + \frac{ik}{2(L - z)} |\mathbf{s} - \mathbf{r}|^2 \right]. \tag{2.48}$$

Dado que $\langle n_1 \rangle = 0$ por construcción, se sigue que $\langle U_1 \rangle = 0$, pues la turbulencia no modifica el valor medio del campo en primer orden. Las correcciones de orden superior U_m se obtienen de manera recursiva con el mismo kernel de Green, sustituyendo $U_0 \to U_{m-1}$ en la integral.

Conocida la solución integral de Born, los momentos estadísticos de la perturbación de Rytov pueden evaluarse directamente sobre ella. Para ello se define la perturbación normalizada de Born

$$\Phi_1(\mathbf{r}, L) = \frac{U_1(\mathbf{r}, L)}{U_0(\mathbf{r}, L)}, \tag{2.49}$$

la condición de primer orden de Rytov se reduce a (Andrews and Phillips, 2005; Sepúlveda, 2024)

$$\psi_1(\mathbf{r}, L) \approx \Phi_1(\mathbf{r}, L), \qquad |\Phi_1(\mathbf{r}, L)| \ll 1, \tag{2.50}$$

con la expresión explícita

$$\Phi_1(\mathbf{r}, L) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^L dz \iint d^2s \, \exp\left[\frac{ik|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^2}{2(L-z)}\right] \frac{U_0(\mathbf{s}, z)}{U_0(\mathbf{r}, L)} \frac{n_1(\mathbf{s}, z)}{L-z}. \tag{2.51}$$

Esta integral muestra que ψ_1 en un punto del detector es una superposición, ponderada por la función de Green paraxial, de las fluctuaciones de índice en todo el volumen recorrido. Las capas más cercanas al detector contribuyen con factores de curvatura de fase más pequeños, mientras que las capas más lejanas contribuyen con factores más grandes.

Los momentos estadísticos del campo pueden expresarse en términos del espectro de potencia $\Phi_n(\kappa)$. El valor medio del campo requiere conocer la atenuación acumulada de coherencia a lo largo del camino (E_1). La función de coherencia mutua entre dos puntos en el plano receptor requiere además la correlación cruzada dependiente de la separación transversal y de la distancia de propagación (E_2). El límite estático de esa correlación, cuando la fase de Fresnel es nula, es E_3. Con estas tres integrales espectrales (Sepúlveda, 2024),

$$E_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = -2\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa \, \Phi_n(\kappa, z) \, d\kappa, \tag{2.52}$$

$$E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 4\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa \, \Phi_n(\kappa, z) \, J_0(\kappa|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \, \exp\left[\frac{i\kappa^2(L-z)}{k}\right] d\kappa, \tag{2.53}$$

$$E_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -4\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa \, \Phi_n(\kappa, z) \, J_0(\kappa|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \, d\kappa, \tag{2.54}$$

los momentos estadísticos del campo perturbado quedan

$$\langle U(\mathbf{r}, L) \rangle = U_0(\mathbf{r}, L) \exp[E_1(0, 0)], \tag{2.55}$$

$$\langle U(\mathbf{r}_1, L) U^*(\mathbf{r}_2, L) \rangle = \Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) \exp[2E_1(0, 0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)], \tag{2.56}$$

donde Γ_2^0 es la función de coherencia mutua en espacio libre. Estas expresiones conectan directamente el espectro turbulento $\Phi_n(\kappa)$ con cantidades medibles como la irradiancia media y la coherencia espacial del campo recibido.

La varianza de la log-irradiancia en el régimen de fluctuaciones débiles se obtiene a partir del segundo momento del campo. Para una onda plana que se propaga en turbulencia de Kolmogorov homogénea e isótropa, la integral doble puede evaluarse en coordenadas adimensionales $\xi = z/L$ y $\eta = L\kappa^2/k$, con el resultado (Andrews and Phillips, 2005),

$$\begin{aligned} \sigma_{\ln I}^2 &= 8\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa\, \Phi_n(\kappa) \left[1 - \cos\frac{\kappa^2 z}{k}\right] d\kappa \\ &\approx 1.06\, \sigma_1^2 \int_0^1 \int_0^\infty \eta^{-11/6}(1 - \cos\eta\xi)\, d\eta\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Evaluando la integral y usando el espectro de Kolmogorov se obtiene el índice de Rytov para onda plana,

$$\sigma_R^2 \equiv \sigma_1^2 = 1.23\, C_n^2\, k^{7/6}\, L^{11/6}. \tag{2.58}$$

Para una onda esférica el coeficiente numérico cambia a $0.5\, C_n^2\, k^{7/6}\, L^{11/6}$ (Andrews and Phillips, 2005). En el régimen de fluctuaciones débiles, la irradiancia sigue aproximadamente una distribución log-normal y $\sigma_I^2 \approx \sigma_R^2$. σ_R^2 consolida en un único parámetro adimensional la dependencia en la intensidad turbulenta (C_n^2), la longitud de propagación (L) y el número de onda óptico (k).

La coherencia espacial del campo en la pupila del receptor determina el límite de resolución angular que la turbulencia impone sobre el sistema óptico, pues dos puntos de la pupila separados por más del radio de coherencia ρ_0 reciben campos estadísticamente incorrelados, de modo que la interferencia entre ellos ya no mejora la resolución. Para cuantificar ese límite se introduce la función de estructura de onda (WSF), que mide el decaimiento de la coherencia con la separación transversal,

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) = D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) + D_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L), \tag{2.59}$$

donde D_χ y D_S son las funciones de estructura de log-amplitud y fase, respectivamente. El grado de coherencia complejo (DOC) del campo recibido se relaciona con la WSF mediante (Andrews and Phillips, 2005; Sepúlveda, 2024)

$$\mathrm{DOC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) = \exp\left[-\tfrac{1}{2} D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)\right]. \tag{2.60}$$

El radio de coherencia espacial ρ_0 se define como el punto donde $\mathrm{DOC} = 1/e$. Para turbulencia de Kolmogorov y onda plana, $\rho_0 = (1.46\, C_n^2 k^2 L)^{-3/5}$ (Andrews and Phillips, 2005). Este parámetro separa los regímenes de fluctuación. Cuando $L/k\rho_0^2 \ll 1$ las fluctuaciones son débiles y la zona de Fresnel $\sqrt{L/k}$ define la escala de correlación de la irradiancia. Cuando $L/k\rho_0^2 \gg 1$ las fluctuaciones son fuertes y la escala dominante pasa a ser ρ_0.

La condición de validez de la aproximación de Born es $|\Phi_1| \ll 1$, lo que equivale a $\sigma_R^2 \ll 1$. La aproximación de Rytov amplía levemente ese rango, pues al trabajar en el exponente en lugar de sumarlo, captura mejor la acumulación multiplicativa de perturbaciones a lo largo del camino. Sin embargo, cuando σ_R^2 crece hacia la unidad la primera perturbación de Rytov deja de ser pequeña, el desarrollo en serie ya no converge y el centelleo exhibe un comportamiento que la teoría estándar no puede reproducir, pues supera el valor predicho por el régimen débil, alcanza un máximo por encima de la unidad y luego decrece hacia la saturación (Andrews and Phillips, 2005). Para cubrir ese régimen moderado a fuerte, Andrews et al. formularon una teoría modificada de Rytov. La irradiancia se modela como un proceso de modulación $I = xy$, donde x son fluctuaciones de escala grande (refractivas, $\kappa < \kappa_x$) e y son fluctuaciones de escala pequeña (difractivas, $\kappa > \kappa_y$), estadísticamente independientes. El índice de centelleo resultante toma la forma (Andrews and Phillips, 2005)

$$\sigma_I^2 = \exp\left[\sigma_{\ln x}^2 + \sigma_{\ln y}^2\right] - 1 = \exp\left[\sigma_{\ln x}^2(\sigma_1^2) + \sigma_{\ln y}^2(\sigma_1^2)\right] - 1, \qquad 0 \le \sigma_1^2 < \infty, \tag{2.61}$$

donde las varianzas parciales tienen expresiones cerradas en función de σ_1^2 y del radio de coherencia ρ_0. Para onda plana sin escala interna, los límites asintóticos son

(Andrews and Phillips, 2005)

$$\sigma_I^2 \approx \begin{cases} \sigma_R^2, & \sigma_R^2 \ll 1 \quad \text{(débil)}, \\ 1 + 0.86/\sigma_R^{4/5}, & \sigma_R^2 \gg 1 \quad \text{(saturación)}. \end{cases} \tag{2.62}$$

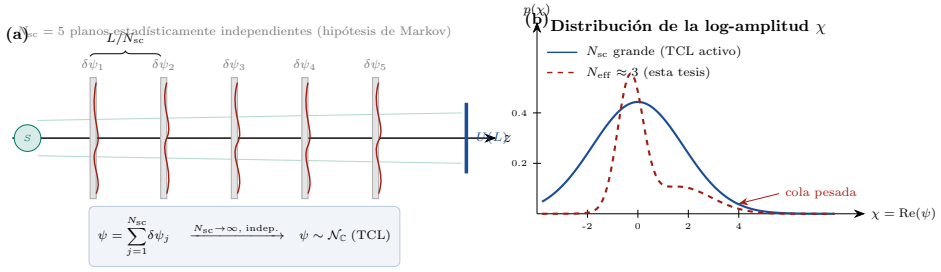

Figura 2.4: Esquema de la aproximación de pantalla de fase. El volumen turbulento se divide en N_{sc} capas delgadas, cada una representada por una pantalla de fase aleatoria independiente. El campo se propaga en el vacío entre capas y acumula la fase de cada pantalla. Panel derecho: distribución de la log-amplitud χ resultante: gaussiana cuando N_{sc} es grande (convergencia TCL), y desviada cuando N_{sc} es pequeño o las capas están correlacionadas.

La razón por la que la teoría estándar de Rytov produce irradiancia log-normal queda más clara mediante la aproximación de pantalla de fase, que es también el método numérico estándar para simular propagación en turbulencia. En este modelo, el volumen turbulento se divide en N_{sc} capas delgadas, cada una representada por una pantalla de fase aleatoria estadísticamente independiente. Esa independencia es una consecuencia de la aproximación de Markov, pues las correlaciones longitudinales del índice decaen en una distancia mucho menor que la longitud de coherencia transversal, de modo que las contribuciones de capas distintas pueden tratarse como estadísticamente independientes (Andrews and Phillips, 2005; González et al., 2026; Tatarskii, 1971). Cuando N_{sc} es grande, la perturbación acumulada $\psi_1 = \chi + i\varphi$ converge a una variable gaussiana y la irradiancia $I = I_0 e^{2\chi}$ hereda la log-normalidad de χ, y ese es el fundamento de la teoría de Rytov estándar. Sin embargo, en la capa límite atmosférica cercana al suelo la escala integral del campo puede ser comparable

al camino óptico, de modo que las correlaciones entre capas no son despreciables y la hipótesis de independencia de Markov falla. En esa situación, el número efectivo de contribuciones independientes N_{eff} es pequeño (Lumley and Takeuchi, 1976; Tennekes and Lumley, 1972).

El Capítulo 1, §1.3 establece mediante la cota de Berry-Esseen que, cuando N_{eff} es reducido, la convergencia gaussiana puede ser lenta o no producirse. La distribución de χ puede entonces ser no gaussiana, y la log-normal subestima las colas de la distribución de irradiancia (González et al., 2026; Tennekes and Lumley, 1972). Ese mecanismo abre el camino a las estadísticas no gaussianas del Capítulo 5.

Esta teoría unificada, desde el régimen débil hasta la saturación, es la base sobre la que se calculan las distribuciones de irradiancia y los índices de centelleo utilizados en los capítulos experimentales.

La cadena física queda así resumida,

$$n_1(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{Rytov}} \psi_1 = \chi + i\varphi \longrightarrow \begin{cases} \chi \to I \to \sigma_I^2, \\ \varphi \to \nabla_\perp \varphi \to \mathbf{c}(t). \end{cases} \tag{2.63}$$

2.3.1 Función de estructura de fase y parámetro de Fried generalizado

La teoría predice que las series temporales de centroides deben exhibir fluctuaciones cuya densidad espectral de potencia decae como una ley de potencia con pendiente β_{PSD}. Esa pendiente codifica el estado de la turbulencia a través de una cadena que va del espectro tridimensional $\Phi_n(\kappa)$ del índice de refracción hasta el observable temporal en el detector. El eslabón que hace posible esa traducción es el exponente de Hurst H del proceso de fase φ recién introducido, que en el sentido formal establecido en el Capítulo 1 caracteriza el grado de autosimilaridad del campo de frente de onda, de modo que $H = 5/6$ corresponde al caso Kolmogorov clásico, $H > 5/6$ a turbulencia con más energía en grandes escalas (exponente espectral $\alpha_s < 11/3$), y $H < 5/6$ a turbulencia con más energía en pequeñas escalas ($\alpha_s > 11/3$). La relación entre el exponente espectral tridimensional α_s del índice de refracción y el exponente de

Hurst del proceso de fase es

$$\alpha_s = 2H + 2, \tag{2.64}$$

resultado de Pérez y Zunino (Pérez and Zunino, 2008; Pérez et al., 2004) que conecta el espectro tridimensional del índice con el exponente de Hurst de la fase. El exponente de la densidad espectral temporal unidimensional (PSD) de la traza de fase es

$$\beta_\varphi = 2H + 1, \tag{2.65}$$

diferente de α_s porque la restricción del campo bidimensional a una traza unidimensional reduce el exponente en una unidad (Pérez and Zunino, 2008; Pérez et al., 2004). La cadena que conduce de $\Phi_n(\kappa)$ al observable tiene tres pasos que reducen la dimensión del problema en uno cada vez, más un paso final que pasa de la fase al centroide.

El primero opera sobre la coordenada longitudinal. Las correlaciones de n_1 a lo largo del eje de propagación decaen en una distancia mucho menor que L, de modo que las contribuciones de capas separadas por más de esa escala pueden tratarse como estadísticamente independientes. Bajo esta condición, conocida como la aproximación de Markov (Tatarskii, 1971), la integración del índice a lo largo del camino óptico promedia el espectro tridimensional sobre κ_z y produce un espectro bidimensional de la fase en el plano transversal,

$$\Phi_\phi(\boldsymbol{\kappa}_\perp) = 2\pi k^2 L\, \Phi_n(\kappa_\perp) \propto \kappa_\perp^{-\alpha_s}, \tag{2.66}$$

donde $\kappa_\perp = |\boldsymbol{\kappa}_\perp|$. El exponente se conserva en α_s porque la integración longitudinal actúa como un factor de escala que no altera la pendiente espectral.

El segundo paso opera sobre las componentes transversales. La serie temporal se registra a lo largo de una dirección de barrido, de modo que el campo bidimensional de fase queda restringido a una traza unidimensional, lo que equivale a marginalizar el espectro bidimensional sobre κ_y. El espectro unidimensional resultante satisface

(Pérez et al., 2004)

$$S_\phi(\kappa_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\phi(\kappa_x, \kappa_y)\, \mathrm{d}\kappa_y \propto \kappa_x^{-(\alpha_s - 1)}, \tag{2.67}$$

y el exponente se reduce en una unidad porque la integral de una ley de potencias bidimensional $\kappa^{-\alpha_s}$ sobre una dirección produce una ley de potencias unidimensional con exponente $\alpha_s - 1$.

El tercer paso convierte el número de onda espacial $\kappa_x = 2\pi f/\bar{v}$ en frecuencia temporal mediante la velocidad de barrido del viento $\bar{v}$, siguiendo la hipótesis de Taylor (Taylor, 1938). Con esa sustitución, la PSD temporal de la fase satisface

$$S_\phi(f) \propto f^{-(\alpha_s - 1)} \quad \Longrightarrow \quad \beta_\varphi = \alpha_s - 1 = 2H + 1, \tag{2.68}$$

resultado que confirma la ecuación (2.65) y hace explícita la razón por la que β_φ difiere de α_s en exactamente una unidad, pues esa unidad se pierde en el paso 2D→1D, cuando la integración sobre κ_y baja el exponente de la ley de potencia en uno. El tercer paso, la hipótesis de Taylor, solo convierte el número de onda espacial en frecuencia temporal sin alterar el exponente.

El paso final conecta la fase con el observable. El centroide es proporcional al gradiente transversal de la fase promediado sobre la apertura, identificación que se desarrolla en la sección 2.4. Derivar la traza respecto de la coordenada de barrido multiplica su espectro por κ_x^2, de modo que, bajo la misma sustitución de Taylor, la PSD temporal de las series de centroide satisface

$$S_c(f) \propto f^2\, S_\phi(f) \propto f^{-(2H-1)}, \qquad \beta_{\mathrm{PSD}} = 2H - 1, \tag{2.69}$$

donde el promediado de apertura actúa como un filtro pasabajos que suprime las frecuencias altas sin alterar la pendiente en el rango accesible (Pérez et al., 2004; Roddier, 1981). Una pendiente DFA α y una pendiente espectral β de la misma serie satisfacen asintóticamente $\beta = 2\alpha - 1$ (Kiyono, 2015), de modo que el DFA aplicado a las series de centroide estima directamente el exponente H de la fase,

con $\beta_{\mathrm{PSD}} = 2/3$ como referencia Kolmogorov. Los espectros espaciales del campo conservan, en cambio, el exponente $\alpha_s = 2H + 2$ de la ecuación (2.64), que es la relación empírica usada para clasificar el estado turbulento a partir de las series de wandering (Funes et al., 2016; González et al., 2026; Pérez et al., 2024).

La fase acumulada por el frente de onda es la integral de línea del índice de refracción a lo largo del camino óptico, de modo que su función de estructura espacial hereda el exponente del campo de índice. Cuando $\alpha_s \neq 11/3$, el exponente de escala de D_φ ya no es 5/3 y la expresión clásica de Fried no describe correctamente la correlación entre puntos de la pupila. Pérez y Zunino mostraron que, para cualquier H relacionado con el exponente espectral mediante $\alpha_s = 2H + 2$, la función de estructura de la fase sobre la pupila satisface (Pérez and Zunino, 2008)

$$D_\varphi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = C^2_{\varphi,\beta} \left(\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{r_{0,\beta}} \right)^{\beta-2}, \tag{2.70}$$

donde $\beta = \alpha_s - 1$ es el exponente de la fase y $r_{0,\beta}$ es el parámetro de Fried generalizado. Para $\beta = 11/3$, es decir, $\alpha = 14/3$, se recupera el resultado clásico con $r_0 = r_{0,5/3}$. El parámetro de Fried generalizado está implícitamente definido por la condición de normalización

$$\mathcal{A}^2_{\varphi,H} = 2^{2H+1}\Gamma^H\!\left(1 + \frac{1}{H}\right) r_{0,H}^{-2H}, \tag{2.71}$$

donde $H = 5/6$ corresponde al caso Kolmogorov. Para ese valor específico la expresión se reduce a $\mathcal{A}^2_{\varphi,5/6} = 6.88\, r_0^{-5/3}$, recuperando la constante numérica de Fried–Tatarskii para turbulencia Kolmogorov (Fried, 1966; Pérez and Zunino, 2008; Tatarskii, 1971). Esta verificación del límite clásico confirma que el modelo generalizado es consistente con los resultados estándar y que el parámetro de Fried r_0 queda embebido como caso particular de $r_{0,H}$ con $H = 5/6$.

La exactitud de ese cálculo depende del modelo estocástico elegido para el campo de fase. El LfBf definido por la covarianza (1.27) tiene incrementos estacionarios para cualquier par de puntos $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de la pupila, independientemente de su orientación relativa (Pérez and Zunino, 2008). Esa estacionariedad isotrópica de los incrementos es

lo que hace exacto el cálculo de la varianza del ángulo de llegada para cualquier apertura D y cualquier valor de H, sin restricciones geométricas sobre la configuración de la pupila.

El parámetro $r_{0,H}$ define la escala de coherencia del frente de onda para cada estado de turbulencia, pero el observable que el experimento entrega directamente es la varianza del ángulo de llegada integrada sobre la apertura D. Aplicando el filtro de apertura circular a la función de estructura (2.70), esa varianza toma la forma

$$\sigma^2_{m,H}(\phi_{\mathbf{r}}) = \frac{4H\,\Gamma\!\left(H+\frac{1}{2}\right)}{\pi^{1/2}\,\Gamma(2+H)}\,\frac{C^2_{\varphi,H}}{2\pi}\,\lambda^2\,D^{2H-2}\,r_{0,H}^{-2H}, \tag{2.72}$$

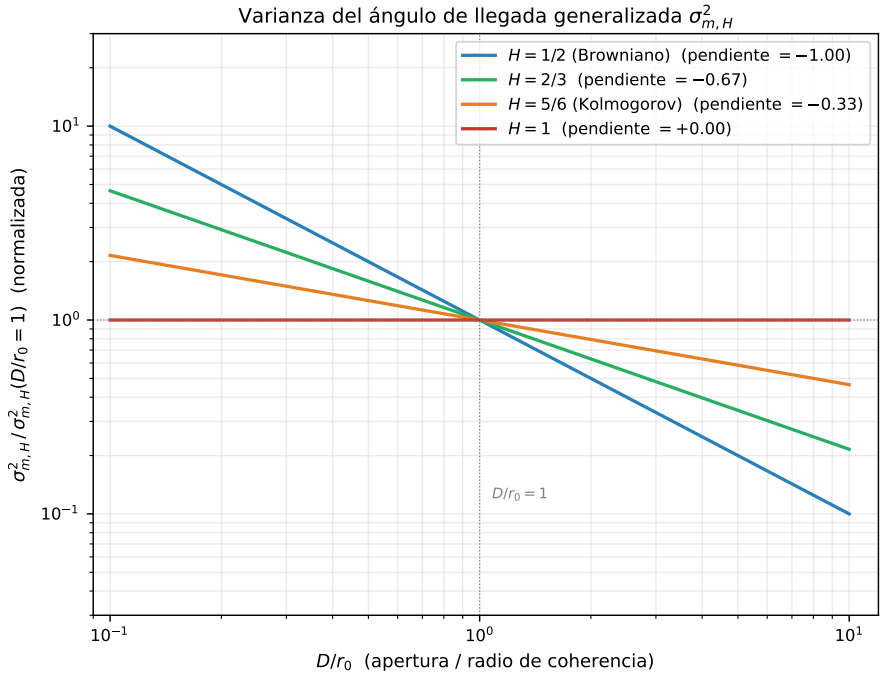

Figura 2.5: Varianza del ángulo de llegada generalizada $\sigma^2_{m,H}$ normalizada versus $D/r_{0,H}$ para cuatro valores del exponente de Hurst: $H = 1/2$ (movimiento browniano), $H = 2/3$, $H = 5/6$ (Kolmogorov) y $H = 1$. El eje vertical en escala logarítmica. La figura muestra la sensibilidad del observable al estado de la turbulencia y justifica teóricamente el uso del centroide como estimador de H (Pérez and Zunino, 2008).

expresión que, para $H = 5/6$, entrega $\sigma^2_{m,5/6} = 0.974\,\sigma^2_m$ respecto de la varianza clásica de Tatarskiĭ, y que se vuelve apreciablemente distinta de los valores Kolmogorov cuando H se aleja de 5/6 (Pérez and Zunino, 2008). Los propios autores señalan que esta desviación de aproximadamente un 3 % respecto del valor clásico no tiene una explicación cerrada, y la atribuyen alternativamente a la normalización elegida para el parámetro de Fried generalizado $r_{0,H}$ o a la ausencia de las escalas interna y externa de la turbulencia (ℓ_0, L_0) en el modelo (Pérez and Zunino, 2008). Esta generalización es relevante para este trabajo porque las series temporales de centroides pueden exhibir exponentes de escalamiento distintos al valor Kolmogorov, lo que puede interpretarse como evidencia de turbulencia no-Kolmogorov o como señal de memoria de largo alcance en la dinámica del frente de onda. El siguiente paso consiste en cuantificar esa magnitud del wandering directamente en el plano del receptor.

2.4 Wandering del haz

La cadena causal (2.63) mostró que la rama imaginaria de la perturbación de Rytov conduce al desplazamiento del centroide. Esta sección desarrolla esa rama en detalle, pues parte de la ecuación del rayo, establece cómo el gradiente transversal de fase produce el ángulo de llegada, y cuantifica la varianza del wandering para distintos modelos espectrales. El canal físico queda codificado en la parte imaginaria de ψ,

$$\varphi = \operatorname{Im}\psi. \tag{2.73}$$

El mecanismo físico del wandering es la desviación del rayo por gradientes del índice de refracción, pues un rayo que atraviesa una región donde n varía transversalmente curva su trayectoria hacia las regiones de mayor índice, y esa desviación acumulada a lo largo del camino produce el desplazamiento angular en el detector. Para cuantificar esa desviación es necesario conocer la ecuación que rige la trayectoria del rayo, que se obtiene a partir del camino óptico acumulado y el principio de Fermat.

El camino óptico (OPL, *optical path length*) entre dos puntos A y B a lo largo de una trayectoria $\mathcal{C}$ se define como la integral del índice de refracción sobre la longitud de arco (Born and Wolf, 1999),

$$\mathrm{OPL} = \int_{\mathcal{C}} n(\mathbf{r})\, ds. \tag{2.74}$$

La fase acumulada por una onda monocromática de número de onda k a lo largo de esa trayectoria es $\phi = k \cdot \mathrm{OPL}$. El principio de Fermat establece que el rayo real es la curva que extremiza el OPL entre dos puntos fijos, condición que se escribe $\delta \int n\, ds = 0$.

La ecuación que gobierna S, la función de fase de la óptica geométrica, se obtiene a partir de la ecuación de Helmholtz en un medio de índice espacialmente variable,

$$\nabla^2 U + k^2 n^2(\mathbf{r})\, U = 0, \tag{2.75}$$

y se propone el ansatz

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\, e^{ikS(\mathbf{r})}, \tag{2.76}$$

donde $A(\mathbf{r})$ es una amplitud real lentamente variable y $S(\mathbf{r})$ es la función eikonal, con dimensiones de longitud. Sustituyendo en la ecuación de Helmholtz se obtiene

$$\left(\nabla^2 A - k^2 A|\nabla S|^2 + k^2 n^2 A\right) + ik\left(2\nabla A \cdot \nabla S + A\nabla^2 S\right) = 0. \tag{2.77}$$

Separando por potencias de k, la parte real de orden k^2 entrega la ecuación eikonal,

$$|\nabla S(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}), \tag{2.78}$$

y la parte imaginaria de orden k^1 entrega la ecuación de transporte,

$$2\nabla A \cdot \nabla S + A\nabla^2 S = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla \cdot \left(A^2 \nabla S\right) = 0. \tag{2.79}$$

La ecuación eikonal es válida en el límite de longitud de onda corta ($k \to \infty$), donde el término $\nabla^2 A/k^2$ se desprecia frente a $n^2 - |\nabla S|^2$. La ecuación de transporte

expresa la conservación de la energía a lo largo de un tubo de rayos.

Las superficies $S(\mathbf{r}) = \text{const}$ son los frentes de onda. Los rayos son las curvas ortogonales a esas superficies, es decir, las curvas tangentes a ∇S en cada punto. Para parametrizar el rayo por longitud de arco s se introduce el vector de dirección $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$, de modo que el momento del rayo es

$$\mathbf{p} = \nabla S = n\,\mathbf{t}, \qquad |\mathbf{p}| = n. \tag{2.80}$$

La ecuación que rige la trayectoria del rayo se deduce diferenciando $\mathbf{p} = \nabla S$ a lo largo de la curva,

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d(\nabla S)}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\nabla\right)\nabla S = (\mathbf{t}\cdot\nabla)\nabla S. \tag{2.81}$$

Dado que $|\nabla S|^2 = n^2$, tomando el gradiente de ambos lados,

$$2(\nabla S\cdot\nabla)\nabla S = \nabla(n^2) = 2n\nabla n, \tag{2.82}$$

de donde $(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{p} = n\nabla n$. Dividiendo por n y usando $\mathbf{t} = \mathbf{p}/n$,

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla n, \qquad \text{es decir,} \qquad \boxed{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n.} \tag{2.83}$$

Esta es la ecuación vectorial del rayo, pues la curvatura de la trayectoria es proporcional al gradiente transversal del índice de refracción. En un medio homogéneo, $\nabla n = 0$ y el rayo es una línea recta. Las inhomogeneidades de n curvan el rayo hacia las regiones de mayor índice. Esa curvatura, acumulada a lo largo del camino óptico de longitud L, es la causa geométrica del wandering, pues la desviación angular $\boldsymbol{\beta}$ observada en el detector es la integral de esas desviaciones locales sobre el recorrido completo.

En la atmósfera, el índice fluctúa como $n(\mathbf{r},t) = n_0 + n_1(\mathbf{r},t)$ con $|n_1| \ll n_0 \approx 1$. Un rayo que parte de la fuente en $z = 0$ y llega al detector en $z = L$ sigue una trayectoria $\mathbf{r}(z) = (\boldsymbol{\rho}(z), z)$, donde $\boldsymbol{\rho}(z)$ es el desplazamiento transversal. El OPL a

lo largo de esa curva es

$$\mathrm{OPL} = \int_0^L n(\boldsymbol{\rho}(z), z) \sqrt{1 + \left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dz}\right|^2}\, dz. \tag{2.84}$$

En la aproximación paraxial, con ángulos de propagación pequeños respecto del eje z, se tiene $|d\boldsymbol{\rho}/dz| \ll 1$, de modo que $ds \approx dz$ y

$$\mathrm{OPL} \approx \int_0^L n(\boldsymbol{\rho}(z), z)\, dz = n_0 L + \int_0^L n_1(\boldsymbol{\rho}(z), z)\, dz. \tag{2.85}$$

El primer término es el camino óptico de referencia, que produce la fase portadora kn_0L. El segundo término es la perturbación de OPL debida a la turbulencia. La fase perturbada queda

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obs}}) = k \int_0^L n_1(\boldsymbol{\rho}(z), z)\, dz, \tag{2.86}$$

donde $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obs}}$ es la posición transversal en el plano del detector.

En el límite de rayo no desviado (*straight-ray approximation*), válido cuando las fluctuaciones de índice son débiles, el rayo se aproxima como una línea recta a posición transversal constante $\boldsymbol{\rho}(z) \approx \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obs}}$. La fase perturbada se reduce entonces a

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obs}}) = k \int_0^L n_1(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obs}}, z)\, dz. \tag{2.87}$$

Esta expresión es la base de la aproximación de pantalla de fase, pues cada capa del camino de propagación contribuye una fase proporcional a la fluctuación local del índice, y esas contribuciones se acumulan aditivamente a lo largo del eje de propagación. La perturbación de fase recibida en el detector es, por tanto, una integral de línea del campo turbulento n_1.

Tomando el gradiente transversal de la fase perturbada e intercambiando difer-

enciación e integración,

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\rho}_{\text{obs}}, t) = \frac{1}{k}\nabla_{\perp}\varphi(\boldsymbol{\rho}_{\text{obs}}, t) = \int_0^L \nabla_{\perp} n_1(\boldsymbol{\rho}_{\text{obs}}, z, t)\, dz. \tag{2.88}$$

El ángulo de llegada en el detector es, por tanto, la integral a lo largo del camino del gradiente transversal del índice de refracción. Esta expresión conecta directamente la estadística espacial del campo turbulento, cuantificada por $D_n(r)$ y $\Phi_n(\kappa)$, con las fluctuaciones angulares observables en el plano del detector. En particular, la varianza del ángulo de llegada puede calcularse sustituyendo la expresión integral en la función de estructura de $\boldsymbol{\beta}$, lo que produce una integral doble sobre la trayectoria ponderada por D_n.

La conexión anterior puede reformularse en el lenguaje de Rytov. El campo perturbado se escribe como $U = U_0 e^{\chi + i\varphi}$, donde $\varphi = \operatorname{Im}\psi$ es la perturbación de fase. En el límite paraxial, el gradiente transversal de φ determina el ángulo local de llegada del frente de onda,

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{k}\nabla_{\perp}\varphi(\mathbf{x}, t). \tag{2.89}$$

Esta relación es consistente con la derivación eikonal, pues ambas descripciones, la óptica geométrica de rayos y la perturbación de Rytov, predicen que el ángulo de llegada es el gradiente transversal de la fase acumulada. La ventaja de la aproximación de Rytov es que proporciona la maquinaria estadística para calcular los momentos de $\boldsymbol{\beta}$, pues dado que φ es una integral lineal del campo turbulento n_1, la varianza $\langle|\boldsymbol{\beta}|^2\rangle$ puede expresarse como una integral espectral de $\Phi_n(\kappa)$ ponderada por el filtro de apertura, sin necesidad de seguir trayectorias de rayos individuales.

Si la fase sobre una apertura es aproximadamente lineal, por ejemplo $\varphi(y) = ay$, entonces la pendiente es constante y el ángulo de llegada en esa dirección es $\beta_y = a/k$. Una fase lineal produce tilt del frente de onda. Su efecto principal es desplazar la imagen como un bloque, sin generar por sí misma una modulación local de irradiancia. Este desplazamiento global o local es la base física del beam wandering. En la aproximación de óptica geométrica, válida cuando el tamaño de la zona de Fresnel

$\sqrt{L/k}$ es pequeño respecto de la apertura y el radio de coherencia satisface $r_0 \gtrsim D$, el centroide de la imagen en el plano focal coincide con el ángulo de llegada promediado sobre la apertura (Fried, 1966; Roddier, 1981). Esta identificación es el fundamento operacional del uso del centroide como estimador del wandering en los experimentos de los Capítulos 4 y 5.

La curvatura de fase produce un efecto distinto. Si la fase es localmente cuadrática, $\varphi(y) = \frac{1}{2}by^2$, la pendiente cambia con la posición y la curvatura $\partial_y^2\varphi = b$ no es nula. En ese caso, los rayos locales pueden converger o divergir, generando redistribución geométrica de irradiancia aun cuando el desplazamiento neto del centroide sea pequeño. Por eso conviene distinguir tilt y curvatura, pues ambos pertenecen a la rama de fase, pero el primero se observa principalmente como wandering y la segunda puede contribuir a centelleo geométrico.

El tilt del frente de onda actúa como observable que conecta la estadística espacial de la fase con una serie temporal medible, pues rastrear la posición del centroide de imagen cuadro a cuadro produce una serie de wandering cuya dinámica refleja la evolución de los gradientes de fase que atraviesan la apertura. La definición operacional del centroide y su estimación desde los videos se presentan en el Capítulo 3.

Con esa identificación establecida, el paso siguiente es cuantificar cuánto varía el centroide, pues la magnitud del wandering depende de la intensidad de la turbulencia y de la geometría del camino.

La representación integral del ángulo de llegada, $\boldsymbol{\beta} = \int_0^L \nabla_\perp n_1 \, dz$, permite calcular la varianza $\langle|\boldsymbol{\beta}|^2\rangle$ a partir del espectro de potencia de n_1. Para una onda plana que se propaga una distancia L en turbulencia de Kolmogorov homogénea e isótropa, la integración sobre $\Phi_n^K(\kappa)$ con el filtro de apertura circular de diámetro D entrega (Andrews and Phillips, 2005; Roddier, 1981),

$$\sigma_\alpha^2 = 2.91\, C_n^2\, L\, D^{-1/3}. \tag{2.90}$$

Esta expresión se puede reescribir en términos del parámetro de Fried como $\sigma_\alpha^2 = 0.97\,(\lambda/r_0)^2\,(r_0/D)^{1/3}$, de modo que el wandering angular decrece con r_0 (turbulencia más débil) y con la apertura, pero la dependencia $D^{-1/3}$ es débil, pues multiplicar el

diámetro por 8 solo reduce σ_α^2 a la mitad. El desplazamiento cuadrático medio del centroide en el plano focal de una óptica con distancia focal f queda

$$\langle r_c^2 \rangle = f^2\,\sigma_\alpha^2 = 2.91\,C_n^2\,L\,f^2\,D^{-1/3}. \tag{2.91}$$

La fórmula (2.90) predice el wandering en el plano del receptor, pero los experimentos de los Capítulos 4 y 5 utilizan una cámara en el plano focal de una óptica colectora, donde el desplazamiento observado y el ángulo de llegada están relacionados por la distancia focal. El beam wandering es el desplazamiento del centroide del perfil de irradiancia en el plano de observación, resultado de la integración del ángulo de llegada a lo largo del camino. El wandering de imagen es el desplazamiento del centroide en el plano focal de una óptica colectora, y para distancia focal f, la relación es $\mathbf{c}_{\text{imagen}} = f\,\boldsymbol{\beta}$, de modo que $\langle r_{\text{imagen}}^2 \rangle = f^2\sigma_\alpha^2$. La conversión entre ambos requiere conocer la geometría óptica del sistema de recepción.

La fórmula $\sigma_\alpha^2 = 2.91\,C_n^2\,L\,D^{-1/3}$ corresponde al modelo de Kolmogorov puro, que carece de escala externa. En ese modelo, la varianza de tilt diverge porque el espectro $\kappa^{-11/3}$ integra indefinidamente a números de onda bajos, y la escala externa L_0 es el corte natural que hace converger esa integral. Sasiela y Shelton mostraron que, con el espectro de von Kármán, la escala externa puede reducir la varianza de tilt de manera significativa incluso cuando $L_0 \gg D$ (Sasiela, 1994),

$$\sigma_{\text{tilt}}^2(L_0) = \sigma_{\text{tilt}}^2(\infty)\left[1 - c\left(\frac{D}{L_0}\right)^{1/3} + \cdots\right], \tag{2.92}$$

donde el coeficiente c depende de la forma espectral empleada. La sensibilidad al cociente D/L_0 es apreciable incluso para $L_0/D \sim 10$–100, lo que hace del tilt un observable especialmente útil para estimar la escala externa, pues midiendo la varianza de wandering con distintas aperturas o comparando las predicciones de Kolmogorov con las del modelo de von Kármán es posible inferir el valor efectivo de L_0 (Andrews and Phillips, 2005; Sasiela, 1994).

La varianza $\langle r_c^2 \rangle$ es una medida escalar de segundo orden. La descripción dinámica completa de $\mathbf{c}(t)$ requiere especificar su proceso estocástico subyacente, en particular

si sus incrementos son persistentes, antipersistentes o descorrelacionados. El Capítulo 1 establece ese lenguaje, y la conexión cuantitativa entre el exponente de Hurst H del proceso y el exponente espectral α_s del índice de refracción se retoma en la sección 2.3.1 de este capítulo.

2.5 Centelleo del haz

La irradiancia registrada en el detector varía porque la turbulencia redistribuye la energía del campo a lo largo del camino de propagación. Dentro de la aproximación de Rytov, ese efecto queda separado del wandering, pues la parte real de la perturbación, la log-amplitud χ, controla las fluctuaciones multiplicativas de amplitud, mientras que la parte imaginaria φ gobierna el desplazamiento del frente. El campo perturbado toma la forma,

$$U = U_0 e^{\chi + i\varphi}, \tag{2.93}$$

y la irradiancia, definida como el módulo cuadrado del campo, resulta

$$I = |U|^2 = I_0 e^{2\chi}, \tag{2.94}$$

donde $I_0 = |U_0|^2$. La fase pura $e^{i\varphi}$ no modifica el módulo del campo, por lo que, dentro de esta representación, las fluctuaciones multiplicativas de irradiancia están gobernadas por la log-amplitud χ. Esta separación es exacta para un receptor puntual. Con apertura finita, la integración espacial del campo puede convertir variaciones rápidas de fase en fluctuaciones de irradiancia a través de efectos de interferencia (centelleo geométrico), aunque en el régimen de turbulencia débil su contribución es subordinada respecto de la de χ (Andrews and Phillips, 2005).

La magnitud de esa fluctuación necesita cuantificarse de forma que no dependa del nivel medio de irradiancia, que varía con la distancia de propagación y con las condiciones del experimento. El índice de centelleo normaliza la varianza respecto de la media,

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}. \tag{2.95}$$

Esta cantidad es una varianza relativa normalizada, pues mide cuánto fluctúa la irradiancia respecto de su media. En la teoría de Rytov débil se relaciona directamente con la estadística de χ.

La aproximación de pantalla de fase mostró que, cuando el número de capas independientes es grande, la perturbación acumulada χ converge a una variable gaussiana por el TCL. En ese régimen débil, la irradiancia tiene una distribución lognormal. Sustituyendo $I = I_0 e^{2\chi}$ se obtiene

$$\sigma_I^2 = e^{4\sigma_\chi^2} - 1. \tag{2.96}$$

Cuando $\sigma_\chi^2 \ll 1$, la exponencial puede linealizarse y queda

$$\sigma_I^2 \approx 4\sigma_\chi^2. \tag{2.97}$$

Para una onda plana propagándose una distancia L bajo turbulencia de Kolmogorov homogénea e isótropa, la varianza de Rytov se introdujo en la sección de propagación (2.58) y condensa en un único parámetro adimensional el efecto de la intensidad turbulenta, la longitud de propagación y la longitud de onda óptica sobre la fluctuación de log-amplitud. El régimen de fluctuaciones débiles se caracteriza por $\sigma_R^2 \ll 1$.

La expresión anterior supone onda plana, turbulencia homogénea e isótropa y receptor puntual, condiciones que no se cumplen en un experimento real. σ_R^2 es una predicción idealizada para esas condiciones específicas. En una cámara, la irradiancia se mide píxel a píxel o sobre regiones finitas, con bordes, máscaras, ruido y transporte geométrico de intensidad. El promedio espacial sobre la apertura reduce el centelleo respecto del valor puntual, y la geometría del haz, plana, esférica o gaussiana, modifica los coeficientes numéricos.

El modelo de Rytov modificado, que escribe la irradiancia como el producto $I = xy$ de dos factores positivos independientes de gran y pequeña escala, da lugar en la literatura clásica a un catálogo de distribuciones de irradiancia de onda única. Según las distribuciones que se asignen a x e y, se obtiene la distribución K, la I-K, la

gamma-gamma de Andrews–Phillips o la Weibull exponenciada, y todas convergen a la log-normal en el régimen de fluctuaciones débiles (Andrews and Phillips, 2005; González et al., 2026). Estas familias describen la estadística de irradiancia de una onda única registrada por un receptor puntual, que no es el observable de esta tesis.

Lo que se registra en los experimentos de los Capítulos 4 y 5 es el centelleo de borde de la imagen de un blanco extendido, no la irradiancia de una onda propagada hasta un punto. La descripción adecuada para ese observable es la teoría de Charnotskiĭ para blancos extendidos, que organiza el comportamiento mediante un parámetro adimensional propio de la geometría de imagen y reemplaza a C_n^2 cuando el exponente espectral se aparta de Kolmogorov. Ese marco, junto con los observables de centelleo de borde efectivamente medidos, se desarrolla en el Capítulo 5. El índice de centelleo σ_I^2 definido arriba se conserva como medida escalar de la intensidad de las fluctuaciones, y la función de estructura de la log-amplitud, que satisface $D_\chi(\rho) \propto \rho^{5/3}$ en el rango inercial, fija la escala espacial con que esas fluctuaciones se correlacionan en el plano de la cámara.

Capítulo 3

Metodología experimental y análisis de datos

Este capítulo describe la cadena operacional que conecta los videos experimentales con las series temporales de desplazamiento de centroides y con el procedimiento DFA aplicado a esas series. El canal de turbulencia de laboratorio, el sistema óptico y el diseño experimental fueron reportados en Pérez et al. (2024) y González et al. (2026). Esta tesis utiliza los registros de imagen allí obtenidos como materia prima para el análisis que sigue. El autor de esta tesis no participó en el diseño ni en la ejecución del experimento. Su contribución comprende las herramientas computacionales de extracción de centroides y de análisis DFA que se desarrollan a continuación, el análisis temporal y distribucional del wandering presentado en el Cap. 4, y el experimento de deformación geométrica del Cap. 5.

3.1 Generador de turbulencia de laboratorio

La turbulencia óptica se genera mediante un canal de turbulencia de laboratorio (denominado en lo sucesivo el *turbulador*) empleado en los experimentos de Pérez et al. (2024) y González et al. (2026). La longitud de propagación es $L = 0.37$ m. El dispositivo opera haciendo colisionar dos masas de aire, una caliente y una fría, impulsadas

por ventiladores idénticos a través de rectificadores de flujo tipo panal ubicados en lados opuestos de una cámara rectangular, como se muestra en la Fig. 3.1. En esta configuración de flujo convergente opuesto, la región primaria de estancamiento genera capas secundarias de cizallamiento a lo largo de las paredes, estableciendo un campo turbulento multiescala (González et al., 2026).

La geometría particular de la cámara favorece una componente dominante del flujo a lo largo del camino de propagación, minimizando las contribuciones laterales de modo que $\|\mathbf{U}\| \approx U_z$ (Pérez et al., 2024). Un elemento calefactor inactivo instalado en el lado de entrada fría presenta la misma resistencia aerodinámica que el lado calentado, preservando así la simetría de los dos flujos opuestos. Las escalas interna y externa de la turbulencia reportadas para este canal son $\ell_0 \approx 2$ mm y $L_0 \approx 56$ mm (González et al., 2026; Pérez et al., 2024). Ambas escalas permanecen aproximadamente constantes en todas las condiciones experimentales listadas en la Tabla 3.1.

El subrango dominante de la turbulencia se regula mediante la velocidad del flujo de aire a través de una señal modulada por ancho de pulso (PWM) aplicada a los ventiladores. El mapeo entre el ciclo de trabajo PWM y la velocidad de flujo resultante en el plano de inyección se estableció de manera independiente de los experimentos de turbulencia mediante mediciones directas con anemómetro de hilo caliente en cada ventilador, barriendo PWM sobre nueve valores de ciclo de trabajo a temperatura fija ($\mathrm{PWM} \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$, Tabla 2.1 de (Weinberger Cerro, 2019)). Los pares resultantes (PWM, v) siguen una dependencia lineal,

$$V_{1,2} = 0.0561 \times \mathrm{PWM} + 0.6879 \quad \mathrm{m\,s^{-1}}, \tag{3.1}$$

cuyos errores estándar residuales del ajuste son visibles en las barras de error de la Fig. 2.5 de Weinberger Cerro (2019) pero no se reportan numéricamente, de modo que las incertidumbres de velocidad propagadas al presente análisis son las de la lectura del anemómetro subyacente, que domina la dispersión residual a esta escala. Los dos primeros dígitos del código PWM indican la configuración de la entrada caliente y los dos últimos la configuración de la entrada fría (González et al., 2026;

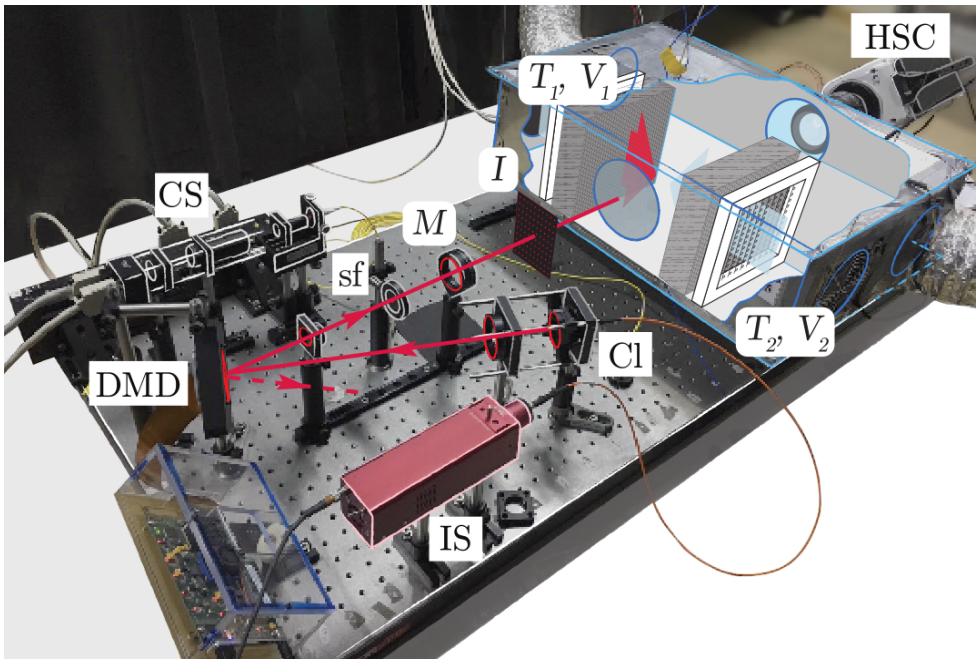

Figura 3.1: Fotografía de la mesa óptica de laboratorio con el camino óptico anotado. Las fibras ópticas acoplan fuentes de luz coherente (CS) e incoherente (IS) a un colimador (Cl) que ilumina una matriz de 10×10 puntos cuadrados producida en el DMD. La matriz es reimaginada por un telescopio invertido (M) hasta la posición I; un filtro espacial (sf) elimina todos los órdenes de difracción excepto el cero. Una cámara de alta velocidad (HSC) registra el objetivo en I a través de la turbulencia producida por el turbulador (recuadro superior derecho). La diferencia de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$ y las velocidades de flujo V_1, V_2 se controlan de manera independiente. Adaptada de (González et al., 2026).

Pérez et al., 2024, 2026). La intersección no nula refleja la velocidad mínima de rotación impuesta por el controlador del ventilador por debajo de la cual el rotor se detiene, y la pendiente fija la respuesta del ventilador en su rango lineal de operación.

A lo largo del experimento se usan siete niveles de velocidad, correspondientes a los códigos PWM 0808, 1212, 1717, 2525, 3030, 3535 y 4040, que cubren el rango

$$V_{1,2} \in [1.138,\ 2.930] \quad \mathrm{m\,s^{-1}}, \tag{3.2}$$

con el valor correspondiente a cada código PWM listado en la columna $V_{1,2}$ de la

Tabla 3.1. En el Cap. 4 se hace referencia a ellos mediante sus códigos PWM (V0808 a V4040) o, equivalentemente, mediante los valores de velocidad de inyección de la Tabla 3.1.

La intensidad de la turbulencia se controla ajustando la corriente eléctrica que atraviesa los calefactores resistivos del lado de entrada caliente, lo que fija el diferencial de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$ entre las corrientes caliente y fría. Se usan cinco niveles de ΔT, con valores en $\{20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60\}\,^{\circ}\mathrm{C}$. No se midieron todas las combinaciones de velocidad y diferencial de temperatura, y el conjunto completo de condiciones realizadas, junto con las varianzas de Rytov correspondientes, se entrega en la Tabla 3.1.

3.2 Camino óptico y sistema de detección

El objetivo observado es una matriz de 10×10 puntos cuadrados pequeños y brillantes generados por un dispositivo digital de microespejos (DMD, modelo ViALUX V-7001 VIS, 1024×768 píxeles, paso de píxel 13.67 μm, profundidad de 1 bit, operando a 23 kHz) (González et al., 2026; Pérez et al., 2024). La separación centro a centro entre puntos es 1.46 mm y cada punto tiene un lado de 0.34 mm, elegido deliberadamente menor que la escala interna de la turbulencia $\ell_0 \approx 2$ mm. Esta elección limita la estructura propia de cada elemento luminoso, pero no implica que su imagen atraviese una única celda turbulenta, pues cada punto integra perturbaciones a lo largo del trayecto de propagación y sobre la apertura receptora.

El DMD admite dos modos de iluminación, una fuente coherente (CS) a $\lambda = 637$ nm y una fuente incoherente de banda ancha (IS) a $\lambda = 660$ nm, seleccionados mediante acoplamiento de fibra óptica al colimador. Ambas configuraciones producen comportamiento de wandering estadísticamente equivalente, porque el mecanismo de wandering está gobernado por estructuras de gran escala del índice de refracción que afectan la posición del centroide independientemente de la coherencia de la fuente (González et al., 2026), aunque las diferencias entre fuentes se siguen como factor experimental a lo largo del análisis (véase la sección 3.3).

El DMD se orienta a 12° respecto del haz de iluminación incidente para compensar

la inclinación axial de los microespejos (Pérez et al., 2024). Dado que esta inclinación es perpendicular al plano de la mesa óptica, la matriz de puntos en el plano objeto mantiene un ángulo de 45° respecto de ese plano, y la cámara se inclina con el mismo ángulo para igualar la orientación de la matriz (González et al., 2026). El patrón iluminado experimenta una magnificación de 2.1× mediante un telescopio invertido ($M = 2.1$) equipado con un filtro espacial que elimina todos los órdenes de difracción excepto el cero, suprimiendo los artefactos de red producidos por la microestructura del DMD (Pérez et al., 2024). La matriz final de puntos se extiende 13.14 mm en el plano objeto en la posición I, ubicada a 84 cm de la cámara de alta velocidad.

La imagen formada en el plano del sensor se registra con una cámara de alta velocidad Phantom v611 (paso de píxel 20 μm) equipada con un teleobjetivo Nikon de 85 mm con diámetro de apertura receptora $D_0 = 47.2$ mm, operando a una tasa global de cuadros de $f_{\text{cam}} = 5{,}000$ FPS ($\Delta t_s = 0.2$ ms), con una ventana de 85×85 px y profundidad de gris de 12 bits (González et al., 2026; Pérez et al., 2024). Para cada combinación disponible de intensidad de turbulencia y velocidad de flujo se adquiere una serie de 300,000 cuadros, como se tabula en la Tabla 3.1. El experimento completo acumuló 148.75 GB de datos, con cada archivo de video individual promediando ~ 1.4 GB (Pérez et al., 2024).

El DMD recorre secuencialmente las máscaras A a E, asignando un cuadro por máscara en cada ciclo a la tasa global de 5,000 FPS, de modo que cada máscara individual recibe un cuadro cada 1 ms, lo que entrega una tasa de muestreo efectiva de

$$f_s = \frac{f_{\text{cam}}}{N_{\text{masks}}} = \frac{5{,}000}{5} = 1{,}000 \quad \text{Hz por máscara} \tag{3.3}$$

y una resolución temporal de $\Delta t = 1$ ms por máscara. Durante la secuencia de adquisición de 300,000 cuadros, cada máscara acumula $N_{\text{frames}} = 60{,}000$ cuadros, cubriendo una ventana total de observación de

$$T_{\max} = \frac{N_{\text{frames}}}{f_s} = 60 \quad \text{s.} \tag{3.4}$$

Todas las conversiones de escala a tiempo en el Cap. 4 usan $f_s = 1{,}000$ Hz como la

tasa de muestreo efectiva por máscara.

3.3 Diseño factorial y caracterización de la turbulencia

El experimento completo cubre todas las combinaciones realizadas de velocidad de inyección $V_{1,2}$, diferencial de temperatura ΔT y tipo de fuente (coherente/incoherente). La Tabla 3.1 reporta la varianza de Rytov σ_R^2 para cada condición (González et al., 2026; Pérez et al., 2024). Esta cantidad sirve como medida ingenua de la intensidad de la turbulencia, calculada bajo la hipótesis de Kolmogorov, de modo que no es representativa del estado real cuando el exponente espectral difiere de 11/3 (Pérez et al., 2026).

Tabla 3.1: Estimación kolmogoroviana equivalente de la varianza de Rytov $\sigma_R^2 \pm$ error estándar para cada combinación realizada de código de velocidad PWM y diferencial de temperatura ΔT. La conversión de velocidad es $V_{1,2} = 0.056 \times \mathrm{PWM} + 0.69\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Las celdas marcadas "–" no fueron medidas. Para cada condición realizada se usaron fuentes coherentes ($\lambda = 637$ nm) e incoherentes ($\lambda = 660$ nm). Adaptada de (González et al., 2026; Pérez et al., 2024).

		ΔT / °C				
PWM	$V_{1,2}$ / $\mathrm{m\,s^{-1}}$	20	30	40	50	60
0808	1.138	0.034 ± 0.002	0.066 ± 0.001	0.100 ± 0.002	0.157 ± 0.011	0.222 ± 0.001
1212	1.362	0.026 ± 0.002	0.052 ± 0.001	0.098 ± 0.002	0.157 ± 0.010	0.218 ± 0.005
1717	1.642	0.036 ± 0.002	0.074 ± 0.005	0.112 ± 0.005	0.148 ± 0.003	–
2525	2.090	0.027 ± 0.001	0.057 ± 0.002	0.098 ± 0.005	–	–
3030	2.370	0.037 ± 0.004	0.070 ± 0.004	0.097 ± 0.005	–	–
3535	2.646	0.033 ± 0.001	0.051 ± 0.004	–	–	–
4040	2.930	0.036 ± 0.004	0.064 ± 0.003	–	–	–

El conjunto de datos abarca valores kolmogorovianos equivalentes $\sigma_R^2 \approx 0.026$ –0.222. Estas cifras proporcionan una referencia convencional para comparar las condiciones experimentales, pero no representan por sí solas la dinámica no Kolmogorov observada. La intensidad de la turbulencia se organiza en esta tesis medi-

ante el radio de coherencia generalizado

$$\rho_0(H) = \left(\langle \beta_a^2 \rangle k^2\right)^{-1/(2H)} D^{1-1/H}, \tag{3.5}$$

que incorpora directamente el exponente de Hurst H estimado por DFA en cada condición (Cap. 4), en lugar de suponer el valor kolmogoroviano $H = 5/6$ (Pérez et al., 2024, 2026). La varianza de Rytov se mantiene como una estimación de orden de magnitud obtenida bajo la hipótesis de Kolmogorov. La referencia kolmogoroviana para una onda plana sobre un trayecto de longitud L satisface

$$\sigma_R^2 = 1.23\, C_{n,\mathrm{K}}^2\, k^{7/6}\, L^{11/6}, \tag{3.6}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda óptico y $C_{n,\mathrm{K}}^2$ es el valor equivalente que produciría la varianza angular medida dentro del modelo de Kolmogorov. Este valor se obtiene de los registros de desplazamiento mediante $\langle \beta_a^2 \rangle \simeq 2.91\, C_{n,\mathrm{K}}^2 L D^{-1/3}$ (Ec. (2.90)) (Fried, 1966; González et al., 2026; Pérez et al., 2024; Roddier, 1981). Por tanto, $C_{n,\mathrm{K}}^2$ y σ_R^2 no son mediciones independientes del proceso no Kolmogorov, sino parámetros equivalentes usados para ubicar aproximadamente cada condición respecto de la literatura clásica. El radio de coherencia generalizado $\rho_0(H)$ de la Ec. (3.5) se usa como variable organizadora de las condiciones de centelleo en el Cap. 5.

3.4 Extracción de centroides y construcción de series temporales

3.4.1 Detección de centroides y máscaras de apertura

Cada punto de la matriz de 10×10 se localiza y se sigue a través de cada cuadro mediante un pipeline determinista de visión computacional. La implementación se organiza alrededor de una estructura de datos `pastam`, que almacena el cubo de imágenes crudas (`Primary`), las coordenadas de centroide, las cajas delimitadoras, las

trayectorias y las banderas de anomalía. El script maestro carga cada archivo de video de la Máscara A, convierte el cubo a `uint16` para reducir el costo de memoria, inicializa la estructura `pastam`, ejecuta el seguimiento con `centroidwander`, y finalmente reordena las trayectorias con `SortLED`. El problema no consiste sólo en detectar puntos brillantes en cuadros aislados, sino preservar la identidad física de los 100 puntos durante 60 000 cuadros por condición.

El primer cuadro de cada secuencia se usa como inicialización global. En ese cuadro, `Threshold_Mask` segmenta todos los puntos visibles, calcula sus cajas delimitadoras y define la referencia inicial de seguimiento. Para evitar que ruido o reflejos en los bordes del sensor entren al conjunto de puntos, se descartan componentes cuya caja delimitadora intersecta regiones de seguridad de ancho y alto $(dW, dh) = (6, 6)$ px alrededor del borde de la ventana. En los cuadros siguientes el algoritmo no reinicializa la grilla desde cero, sino que detecta componentes candidatos y los asocia a las cajas del cuadro previo. La asociación se decide mediante la razón de solapamiento de cajas `bboxOverlapRatio`. Si $B_i(t-1)$ es la caja asociada al punto físico i en el cuadro anterior y $B_{j,t}$ es una caja candidata del cuadro actual, se calcula

$$O_{ij}(t) = \frac{|B_i(t-1) \cap B_{j,t}|}{|B_i(t-1) \cup B_{j,t}|}. \tag{3.7}$$

La detección se acepta como continuación del punto si $O_{ij}(t) \geq O_{\min}$ y la correspondencia es única. En las corridas usadas para construir las series de wandering se emplearon umbrales típicos $O_{\min} = 0.05$ para iluminación coherente y $O_{\min} = 0.01$ para iluminación incoherente. Cuando el solapamiento es insuficiente, la detección se marca como potencial anomalía y no se usa para redefinir arbitrariamente la identidad del punto.

La segmentación de cada cuadro reemplaza un umbral global fijo por una binarización adaptativa local. En MATLAB se usa `adaptthresh` con sensibilidad 0.5 y una estadística local configurable (`gaussian`, `median` o `mean`) evaluada en una vecindad de 25×25 píxeles. Esta elección permite seguir puntos bajo gradientes lentos de iluminación producidos por la óptica de inyección, por diferencias entre iluminación coherente e incoherente, y por el desplazamiento global de la imagen sobre el sensor.

La máscara binaria inicial puede escribirse como

$$M_t^{(0)}(x,y) = \begin{cases} 1, & I_t(x,y) > T_t(x,y), \\ 0, & I_t(x,y) \le T_t(x,y), \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $T_t(x,y)$ es el umbral local estimado en la vecindad de 25×25 píxeles. Esta máscara se limpia mediante una cascada morfológica que aplica `imopen` con un elemento rectangular 2×2 para suprimir píxeles aislados, `imclose` con un elemento 3×3 para consolidar manchas fragmentadas, y `imfill` para rellenar huecos internos. En forma compacta,

$$M_t = \mathrm{fill}\Big[\mathrm{close}_{3\times3}\left(\mathrm{open}_{2\times2}(M_t^{(0)})\right)\Big]. \tag{3.9}$$

Sobre esta máscara limpia se extraen componentes conectados $A_{j,t}$ y propiedades geométricas con `regionprops`.

Para cada componente conectado se calculan el centroide geométrico de la máscara y el centroide ponderado por irradiancia. El observable usado en los análisis posteriores es el segundo. En su forma continua, el centroide de cada punto es el centro de masa ponderado por irradiancia dentro de su región de segmentación,

$$\boldsymbol{\beta}_a = \frac{1}{f}\frac{\int_{\mathbf{r}\in A} \mathbf{r}\, I(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2 r}{\int_{\mathbf{r}\in A} I(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2 r}, \tag{3.10}$$

con $I(\mathbf{r})$ la intensidad de píxel, A el soporte del punto y f la distancia focal desde la pupila de salida hasta el plano del sensor. El detector muestrea esta expresión sobre la grilla discreta de píxeles de la cámara, de modo que para el componente $A_{j,t}$ el centroide se evalúa como la suma ponderada

$$\mathbf{c}_{j,t} = \frac{\sum_{(x,y)\in A_{j,t}} (x,y) I_t(x,y)}{\sum_{(x,y)\in A_{j,t}} I_t(x,y)}, \tag{3.11}$$

obtenida al aplicar `regionprops` sobre el producto entre el cuadro crudo y la máscara binaria. Esta ponderación conserva información de intensidad dentro de la

mancha y entrega localización sub-píxel (Fried, 1966; Roddier, 1981), mientras que un centroide puramente binario sólo usaría la geometría de la máscara y perdería microdesplazamientos dentro de un mismo soporte. La componente horizontal $\beta_{a,h}$ representa desplazamientos transversales y la componente vertical $\beta_{a,v}$ se alinea con la dirección gravitacional (González et al., 2026; Pérez et al., 2024, 2026).

Las detecciones crudas de `regionprops` no tienen por sí mismas un identificador físico estable, ya que el orden de los componentes puede cambiar entre cuadros y entre condiciones. Por ello, después del seguimiento temporal se aplica `SortLED`. Este paso toma el primer cuadro como referencia, lee las coordenadas ponderadas de los 100 puntos, ordena espacialmente la grilla en diez grupos de diez, y construye una matriz `DOT2` de tamaño tiempo $\times 100 \times 2$. Así, el índice i de `DOT2` corresponde siempre al mismo punto físico de la matriz, no al orden accidental en que MATLAB enumeró los componentes conectados.

El pipeline registra además una bandera de anomalía por cuadro. Una rutina de diagnóstico posterior clasifica los eventos detectados como ruido, fusión de puntos, división de un punto en varios componentes o pérdida de detección. Esta información se usa como control de calidad, de modo que las trayectorias con eventos que comprometen la identidad del punto no se reparan mediante interpolación antes de los análisis DFA, sino que se excluyen de los ajustes donde la continuidad temporal sea un supuesto necesario. Finalmente, los centroides y las máscaras se guardan por separado. Las coordenadas se almacenan en archivos ligeros de acceso rápido, mientras que las máscaras binarias se preservan como matrices dispersas fragmentadas para evitar desbordamientos de memoria. El resultado final por condición de medición es un conjunto de 200 series temporales sub-píxel (100 horizontales y 100 verticales) de fluctuaciones de centroide respecto del promedio temporal propio de cada punto, que heredan tanto la memoria temporal del campo de índice de refracción como el acoplamiento espacial impuesto por la pupila compartida (Pérez et al., 2024).

Cinco máscaras de iluminación del DMD se recorren secuencialmente a 5,000 FPS, como se describe en la sección 3.2, de modo que cada una queda muestreada a 1,000 Hz. La Máscara A es una matriz de 10×10 puntos cuadrados de lado 0.34 mm y separación centro a centro de 1.46 mm. Sus 100 centroides proporcionan las series

de wandering analizadas en el Cap. 4. Las Máscaras B–E son blancos extendidos con bordes de alto contraste que se emplean para el estudio de centelleo en el plano imagen. Su descripción detallada y su análisis se presentan en el Cap. 5.

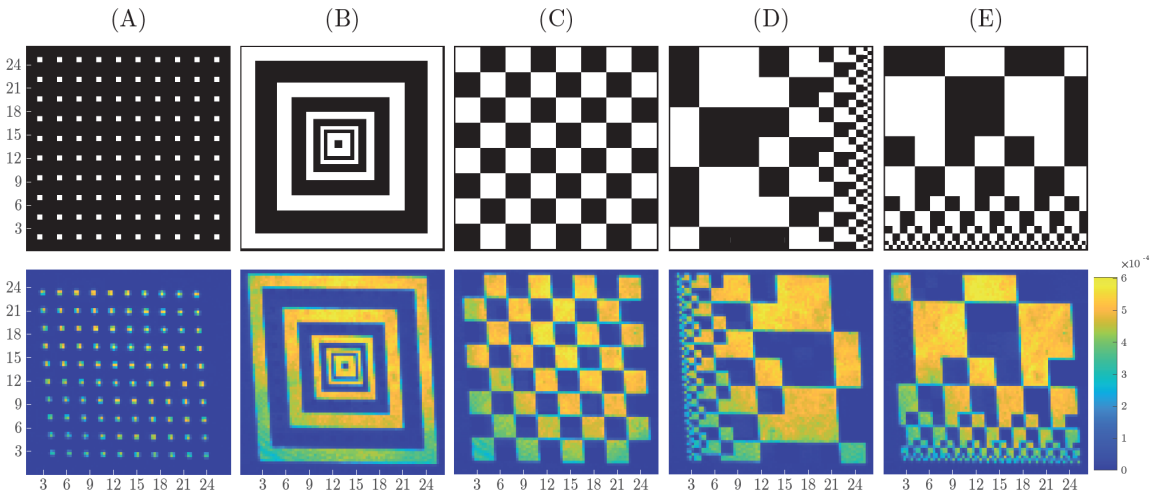

Figura 3.2: Las cinco máscaras de iluminación del DMD usadas en el experimento. *Fila superior*: patrones binarios programados en el DMD (lado de 7 mm). *Fila inferior*: irradiancia promediada en el tiempo observada por la cámara de alta velocidad después de la óptica de relevo ($M = 2.1$, lado proyectado máximo 14.7 mm). (A) Matriz de puntos (10×10, cuadrados de 0.34 mm, espaciamiento de 1.46 mm), usada para el análisis de wandering. (B–E) Blancos extendidos con distintas geometrías de borde, usados para el análisis de centelleo. Adaptada de (González et al., 2026).

La Fig. 3.3 muestra en detalle el arreglo de la Máscara A ya introducido.

3.4.2 Construcción de series temporales

Los desplazamientos horizontales y verticales de centroides se tratan como series temporales separadas, cuyas fluctuaciones respecto de la posición promedio temporal de cada punto constituyen los observables primarios para el análisis DFA. Bajo el mapeo espacio-temporal provisto por la hipótesis de flujo congelado de Taylor, la traza temporal de un punto del frente de onda conserva el exponente de Hurst de la función de estructura espacial de fase, asociando el subrango inercial de Kolmogorov

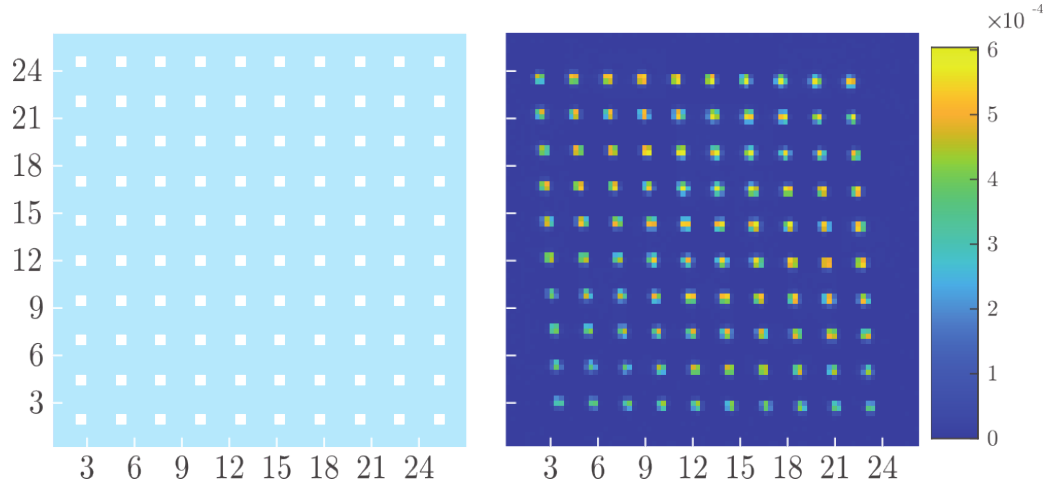

Figura 3.3: Arreglo de puntos de referencia. *Izquierda*: patrón DMD de matriz de puntos 10×10 proyectado sobre el plano objeto. *Derecha*: distribución de irradiancia promediada en el tiempo registrada por la cámara de alta velocidad bajo condiciones de baja turbulencia (V0808, $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$, $\sigma_R^2 \approx 0.034$). La diagonal segmentada indica la orientación del arreglo respecto del eje gravitacional. Adaptada de (González et al., 2026).

con $H = 5/6 \approx 0.833$ en el tiempo (Andrews and Phillips, 2005; Pérez and Zunino, 2008; Schwartz et al., 1994).

3.5 Análisis de fluctuaciones sin tendencia

3.5.1 Implementación y elección de parámetros

El fundamento teórico del análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA) se desarrolla en la sección 1.5 del Cap. 1. En esta tesis el DFA se usa como una receta operacional para estimar pendientes locales de segundo orden. Si la función de fluctuación satisface

$$F_2(s) \propto s^{h(2)}, \tag{3.12}$$

el algoritmo devuelve el exponente generalizado $h(2)$. Cuando aparecen crossovers, se estiman exponentes locales $h_i(2)$ en intervalos separados. Para mantener la notación de los manuscritos se escribe $H_i^{\mathrm{DFA}} \equiv h_i(2)$, pero estos valores no se identifican automáticamente con el parámetro de Hurst de un movimiento browniano fraccionario. El fBm se usa como modelo de referencia porque relaciona autosimilitud, gaussianidad y una ley espectral simple. La coincidencia entre H_i^{DFA} y el Hurst de un proceso requiere hipótesis adicionales, entre ellas autosimilitud en el intervalo ajustado, una elección consistente entre proceso estacionario e integrado, momentos de segundo orden finitos y ausencia de crossovers dentro del segmento. Los datos experimentales no se suponen gaussianos ni monofractales, por lo que H_i^{DFA} describe escalamiento temporal efectivo y no identifica por sí solo un proceso generador. La referencia de ruido se obtiene aplicando la misma receta DFA a una serie no correlacionada de longitud comparable. Bajo esta convención, $h(2) \simeq 1/2$ indica compatibilidad de la pendiente con el ruido de referencia, pero no prueba independencia estadística. Del mismo modo, 5/6 se conserva como referencia de Kolmogorov para el primer subrango del wandering, no como umbral universal para clasificar el centelleo.

Tres parámetros de estimación fijan el pipeline DFA usado a lo largo de esta tesis. (i) Orden $m = 2$ (DFA-2), que elimina tendencias lineales y cuadráticas de cada ventana y basta para rechazar las derivas mecánicas y térmicas lentas del turbulador sin sobresuavizar las fluctuaciones del rango inercial. (ii) Treinta escalas espaciadas logarítmicamente que abarcan desde $s_{\min} = 9$ cuadros hasta $s_{\max} = 14{,}999$ cuadros,

lo que a la tasa de muestreo $f_s = 1{,}000$ Hz de la Máscara A corresponde a la ventana temporal 9 ms a 15 s. El límite inferior está fijado por la escala mínima en que un ajuste cuadrático queda bien condicionado ($s_{\min} \geq m + 3$), y el límite superior por la regla usual $s_{\max} = \lfloor N/4 \rfloor$ (Kantelhardt et al., 2001; Peng et al., 1994) para un registro de longitud $N = 60{,}000$ cuadros. (iii) La estimación se realiza por serie, pues $F(s)$ se calcula independientemente para cada serie de centroide, en lugar de promediarse entre puntos antes del ajuste, de modo que se preserve la variabilidad espacial en el comportamiento de escalamiento documentada en el Cap. 4.

El valor 5/6 se usa como referencia de Kolmogorov para comparar los exponentes generalizados del primer subrango de wandering. Los valores por encima o por debajo de esa referencia se interpretan junto con la posición espacial, la velocidad del flujo y las escalas de crossover, y no se asignan de manera automática a una clase universal de proceso estocástico.

Dos limitaciones analíticas del DFA-2 son pertinentes. La primera es que, con orden $m = 2$, el exponente detectado está acotado superiormente por $H < m + 1 = 3$ (Kiyono, 2015), valor holgadamente mayor que cualquier $H_1 \lesssim 1.3$ observado en este trabajo, por lo que el orden polinomial elegido no introduce saturación artificial. La segunda es que las posiciones de crossover s_1, s_2 estimadas en el espacio DFA presentan un desplazamiento sistemático respecto a las frecuencias de cruce del PSD de magnitud $\log_{10} r \approx 0.2$ (factor ≈ 1.6 en escala temporal) para señales con $\beta_{\mathrm{PSD}} \approx -1$ (Kiyono, 2015), corrección que resulta absorbida por la verificación cruzada DFA–PSD descrita en la sección 3.6.

3.5.2 DFA segmentado y detección de crossover

Cuando la gráfica log-log de $F(s)$ frente a s exhibe cambios de pendiente en lugar de una única tendencia lineal, el proceso contiene múltiples regímenes de escalamiento separados por tiempos de crossover $S_1, S_2, \ldots$. Para detectarlos y cuantificarlos objetivamente, se aplica a cada serie temporal individual un ajuste lineal segmentado inspirado en Fujimoto et al. (2025); Ge and Leung (2013), cuya estructura de minimización de SSE por partición es análoga al estimador de quiebres estructurales de

Bai and Perron (1998). El ajuste se realiza sobre

$$x_j = \log s_j, \qquad y_j = \log F(s_j), \qquad j = 1, \ldots, N_s, \tag{3.13}$$

donde s_j son las escalas DFA evaluadas. Un modelo con k crossovers divide el dominio en $k+1$ subrangos. Si los puntos de quiebre se ubican en los índices

$$1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < N_s, \tag{3.14}$$

el modelo local se escribe como

$$y_j = a_r + H_r x_j + \varepsilon_j, \qquad p_{r-1} \leq j \leq p_r, \qquad r = 1, \ldots, k+1, \tag{3.15}$$

con $p_0 = 1$ y $p_{k+1} = N_s$. Para un k fijo, el algoritmo barre las particiones admisibles y selecciona la que minimiza la suma de errores cuadrados de los ajustes locales,

$$\mathrm{SSE}(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=p_{r-1}}^{p_r} \left[y_j - (a_r + H_r x_j) \right]^2 . \tag{3.16}$$

Así, para el modelo operativo con dos crossovers se busca

$$(p_1^\star, p_2^\star) = \arg\min_{p_1 < p_2} \mathrm{SSE}(p_1, p_2), \qquad S_1 = s_{p_1^\star}, \quad S_2 = s_{p_2^\star}. \tag{3.17}$$

La salida por serie es el conjunto de escalas S_q, pendientes H_r, curva segmentada reconstruida, SSE residual y coeficiente R^2. El procedimiento puede evaluarse para $k = 1, 2, 3$, y la elección física global de $k = 2$ se justifica en el Cap. 4 mediante parsimonia y evidencia estadística del ensamble completo.

El análisis se realiza sobre cada componente horizontal o vertical de los centroides de la Máscara A. Las funciones de fluctuación no se promedian antes del ajuste porque la variación espacial de las pendientes y de los crossovers es parte del observable.

La descripción con dos crossovers se adopta para reproducir el análisis del manuscrito temporal (Pérez et al., 2024). El primer intervalo caracteriza la dinámica de corta escala. Después del primer crossover, la población de centroides se separa

operacionalmente en dos grupos respecto de la referencia 5/6, uno por encima y otro por debajo. El segundo crossover conduce a un intervalo terminal cuya pendiente, cuando es cercana a 1/2, resulta compatible con la referencia de ruido sin demostrar independencia. La interpretación física de estos intervalos y su nomenclatura se establecen en el Cap. 4.

La Fig. 3.4 ilustra el procedimiento DFA aplicado a una serie temporal representativa de centroide. La gráfica log-log de $F(s)$ frente a s muestra dos cambios claros de pendiente en s_1 y s_2, que el algoritmo de Ge & Leung identifica como crossover, y los tres exponentes generalizados H_r^{DFA} se estiman por regresión lineal en cada tramo.

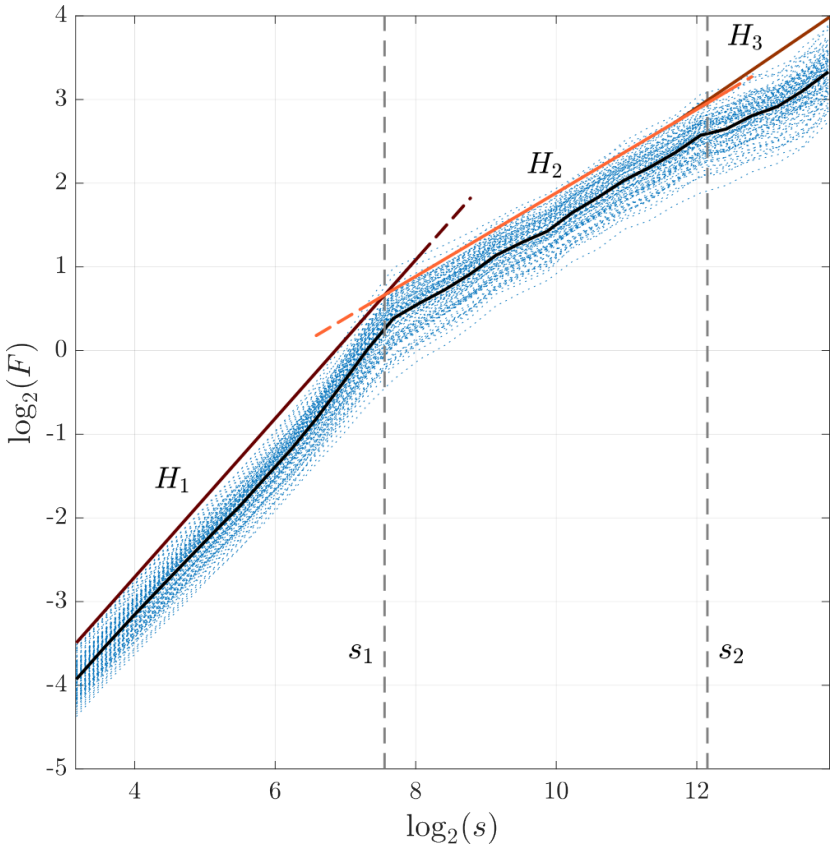

Figura 3.4: DFA aplicado a una serie representativa de desplazamiento de centroide. *Izquierda*: perfil acumulativo $Y(i)$ con la eliminación de tendencia polinomial cuadrática mostrada para una ventana (DFA-2). *Derecha*: función de fluctuación $\log_2 F(s)$ frente a $\log_2 s$ con las dos escalas de crossover s_1, s_2 (líneas verticales segmentadas) y los ajustes lineales por segmento que entregan los exponentes generalizados H_1^{DFA}, H_2^{DFA}, H_3^{DFA} (líneas de colores). Esta estructura de tres regímenes es el observable central del Cap. 4.

3.6 Consistencia espectral entre DFA y PSD

Para comprobar la consistencia entre la descripción temporal y la descripción espectral se aplica la relación de Kiyono (Grau-Carles, 2006; Kiyono, 2015; Løvsletten, 2017). La validación opera en el dominio espectral, pues parte de la PSD temporal de cada serie de wandering y reconstruye la función de fluctuación que un DFA-2

debería observar si esa PSD contiene realmente la información de escalamiento.

La conexión de Kiyono se basa en la respuesta de frecuencia única del DFA. Para una serie discreta de longitud N, con componentes de Fourier de frecuencia f_k y densidad espectral estimada $S(f_k)$, la función de fluctuación reconstruida desde la PSD se calcula como

$$F^2_{\mathrm{PSD}}(s) = \sum_{f_k} S(f_k)\, c(f_k)\, \bar{\Phi}^2(s, f_k), \tag{3.18}$$

donde $c(f) = (\pi f)^2 / \sin^2(\pi f)$ es una corrección de discretización (crítica para escalas cortas $s < 10$). La función $\bar{\Phi}^2(s, f)$ es la respuesta del filtro DFA-m promediada sobre fase (Kiyono, 2015). Para un polinomio de detrending de orden m aplicado en ventanas de longitud s, se define como

$$\bar{\Phi}^2(s, f) = \frac{1}{s} \int_0^s \left| \hat{\phi}_{m,s}(f, u) \right|^2 \mathrm{d}u, \tag{3.19}$$

donde $\hat{\phi}_{m,s}(f, u)$ es la transformada de Fourier del kernel de detrending polinomial de orden m centrado en u con ventana s, cuyas expresiones cerradas se encuentran en el Apéndice B de (Kiyono, 2015). En la implementación se usa $m = 2$ (DFA-2), consistente con el orden del DFA empírico. En la implementación, esta respuesta se evalúa para las mismas escalas s usadas por el DFA empírico, de modo que $F_{\mathrm{DFA}}(s)$ y $F_{\mathrm{PSD}}(s)$ sean directamente comparables punto a punto en escala logarítmica.

El procedimiento computacional usado en esta tesis consta de cinco etapas. Primero, para cada caso experimental se cargan las series de wandering y sus funciones $F_{\mathrm{DFA}}(s)$ ya calculadas por el pipeline DFA. Segundo, para cada serie se estima la PSD mediante el método de Welch (Welch, 1967), eliminando la componente DC antes de la reconstrucción para que la potencia de frecuencia cero no contamine la pendiente de escalamiento. Tercero, como la PSD de Welch depende de la longitud de ventana, el solapamiento y la resolución FFT, se realiza una búsqueda en grilla sobre esos hiperparámetros. Para cada combinación se calcula $F_{\mathrm{PSD}}(s)$ mediante la

Ec. (3.18) y se evalúa el costo

$$E = \sum_{s \in \mathcal{S}} \left[\log F_{\mathrm{PSD}}(s) - \log F_{\mathrm{DFA}}(s)\right]^2, \tag{3.20}$$

donde $\mathcal{S}$ es el rango de escalas válido para la comparación. La combinación de Welch que minimiza E se conserva para el caso analizado. Cuarto, con los parámetros espectrales óptimos se reconstruye una curva final $F_{\mathrm{PSD}}(s)$ para cada centroide. Quinto, se aplica el mismo detector de crossover de Ge & Leung a $F_{\mathrm{DFA}}(s)$ y a $F_{\mathrm{PSD}}(s)$, produciendo dos conjuntos comparables de pendientes y escalas,

$$(H_1^{\mathrm{DFA}}, H_2^{\mathrm{DFA}}, H_3^{\mathrm{DFA}};\, s_1^{\mathrm{DFA}}, s_2^{\mathrm{DFA}}) \quad \text{y} \quad (H_1^{\mathrm{PSD}}, H_2^{\mathrm{PSD}}, H_3^{\mathrm{PSD}};\, s_1^{\mathrm{PSD}}, s_2^{\mathrm{PSD}}).$$

La salida guardada por el script incluye, para cada centroide, las curvas F_{DFA} y F_{PSD}, las pendientes segmentadas, las posiciones de crossover, los coeficientes R^2 de los ajustes por tramos y los parámetros Welch seleccionados. Esta estructura permite auditar si la coincidencia se debe solo a una pendiente global o también a la localización de los quiebres de escala.

La concordancia obtenida entre H_{DFA} y H_{PSD} debe interpretarse como una prueba de consistencia, pues los parámetros de Welch se seleccionan minimizando la discrepancia entre ambas curvas. Junto con la relación temporal

$$\alpha_{\mathrm{DFA}} = \frac{\beta_{\mathrm{PSD}} + 1}{2}, \tag{3.21}$$

permite traducir las pendientes entre ambas representaciones dentro de la convención adoptada. Para las series experimentales se conservan las pendientes generalizadas obtenidas por DFA y por PSD sin imponer que correspondan a un fBm (González et al., 2026). La optimización espectral impide presentar el acuerdo como una validación independiente, y muestra que una PSD estimada con parámetros compatibles reproduce la estructura de escalamiento observada por DFA.

Capítulo 4

Estadística del arreglo de referencia, análisis temporal y distribucional

Este capítulo estudia, para el mismo observable, cómo se organiza temporalmente el desplazamiento de los centroides de la Máscara A a través de escalas, y cómo se distribuyen sus amplitudes independientemente del orden temporal. La primera pregunta se responde con DFA y PSD, y la segunda, con ajustes Burr XII. Ninguna de las dos descripciones reemplaza a la otra, pues un exponente de Hurst no determina la forma marginal y un buen ajuste distribucional no explica la memoria temporal.

Los resultados de este capítulo fueron desarrollados por el autor aplicando el pipeline del Cap. 3 a las series de la Máscara A, y se publicaron dentro de la colaboración en (González et al., 2026; Pérez, 2025; Pérez et al., 2024). El modelo estocástico de la sección 4.3.1 es contribución de González, Macêdo y Vasconcelos y se presenta aquí como marco teórico. Los análisis de datos, los ajustes y las validaciones que siguen son contribución del autor.

4.1 Análisis multiescala del wandering

La función de estructura del frente de onda en el subrango inercial de Kolmogorov satisface $D_\varphi(r) \propto r^{2H}$ con exponente de referencia (Andrews and Phillips, 2005;

Pérez and Zunino, 2008)

$$H_{\mathrm{K}} = \frac{5}{6}. \tag{4.1}$$

Esta identificación no convierte al frente de onda experimental en un fBm (véase Cap. 2, sec. 2.3.1). El fBm se usa como modelo auxiliar para relacionar una ley de segundo orden con un exponente de escala. Las series medidas son no gaussianas, presentan crossovers y no satisfacen una autosimilitud global, por lo que el DFA estima exponentes generalizados locales $H_i^{\mathrm{DFA}} \equiv h_i(2)$, no un parámetro único del proceso.

La hipótesis de flujo congelado de Taylor asocia una separación espacial r con un retardo temporal τ mediante $r = U\tau$. En el turbulador esta correspondencia falla en las condiciones dominadas por convección y barrido aleatorio, precisamente donde las pendientes se apartan con mayor intensidad de 5/6 (Pérez et al., 2024). El análisis temporal no presupone que Taylor sea válido. El DFA se aplica directamente a cada trayectoria de centroide y revela intervalos de escala separados por crossovers. La comparación con 5/6 sirve para situar esas pendientes respecto de la referencia de Kolmogorov, mientras que una pendiente cercana a 1/2 indica compatibilidad con la referencia numérica de ruido bajo la misma receta DFA, y ninguna de estas comparaciones identifica por sí sola el proceso generador.

Los estados G, U, D y N se definen exclusivamente para las series de wandering de la Máscara A, según la clasificación introducida en (Pérez et al., 2024). El primer intervalo se denomina G. Después del primer crossover, los centroides cuya pendiente queda por encima de 5/6 forman la rama U, mientras que los que quedan por debajo forman la rama D. El intervalo terminal se denomina N cuando su pendiente es compatible con la referencia de ruido. Estas etiquetas no se aplican a las series de irradiancia ni definen estados de centelleo.

4.1.1 Selección del modelo de crossover

El DFA-2 y el ajuste segmentado se describen en el Cap. 3. Para cada componente horizontal y vertical del centroide se calcula $F_2(s)$ y se ajustan pendientes locales sobre intervalos separados. La descripción adoptada contiene dos crossovers y tres

pendientes, de modo que cada serie queda representada por

$$\left(H_1^{\mathrm{DFA}}, H_2^{\mathrm{DFA}}, H_3^{\mathrm{DFA}}; S_1, S_2\right). \tag{4.2}$$

El número de segmentos no se interpreta como una propiedad universal del medio. Es una descripción operacional de la ventana temporal observada y depende del intervalo de escalas, del orden de detrending y de la resolución del registro. La elección de dos crossovers proviene del procedimiento de regresión segmentada con pruebas de permutación descrito en el Cap. 3, que evalúa si agregar un quiebre adicional mejora el ajuste más allá de lo esperable por azar (Ge and Leung, 2013; Pérez et al., 2024), y se apoya además en la estabilidad de S_1 y S_2 y en la reproducibilidad de las poblaciones espaciales entre condiciones. Sobre el ensamble completo, las escalas del modelo $k = 2$ se concentran en $S_1 = 129 \pm 70$ y $S_2 = 1076 \pm 671$ muestras, equivalentes a milisegundos a la tasa $f_s = 1{,}000$ Hz. Cuando el algoritmo admite un tercer quiebre, este aparece en promedio 7.7 veces más tarde que S_2, ya dentro del régimen compatible con ruido, donde se atribuye a derivas lentas del sensor y a la recirculación de aire en el canal antes que a una transición física adicional. El modelo con dos crossovers es, pues, el descriptor mínimo suficiente para la ventana experimental.

La consistencia con la PSD se evalúa mediante la respuesta espectral del DFA desarrollada por Kiyono (2015), descrita en la sección 3.6. Como los parámetros de Welch se seleccionan minimizando la discrepancia entre $F_{\mathrm{PSD}}(s)$ y $F_{\mathrm{DFA}}(s)$, el acuerdo posterior se interpreta como consistencia entre representaciones.

4.2 Organización temporal del wandering

El primer exponente generalizado disminuye al aumentar la velocidad de inyección. Para V0808 se obtienen valores cercanos a 1.29 en ambas componentes, mientras que para V4040 las medias se aproximan a 0.9, próximas a la referencia de Kolmogorov. La diferencia de temperatura modifica la intensidad del campo, pero la organización temporal de corta escala depende principalmente de la velocidad de los flujos que

colisionan (Pérez et al., 2024). La Fig. 4.1 resume esta evolución.

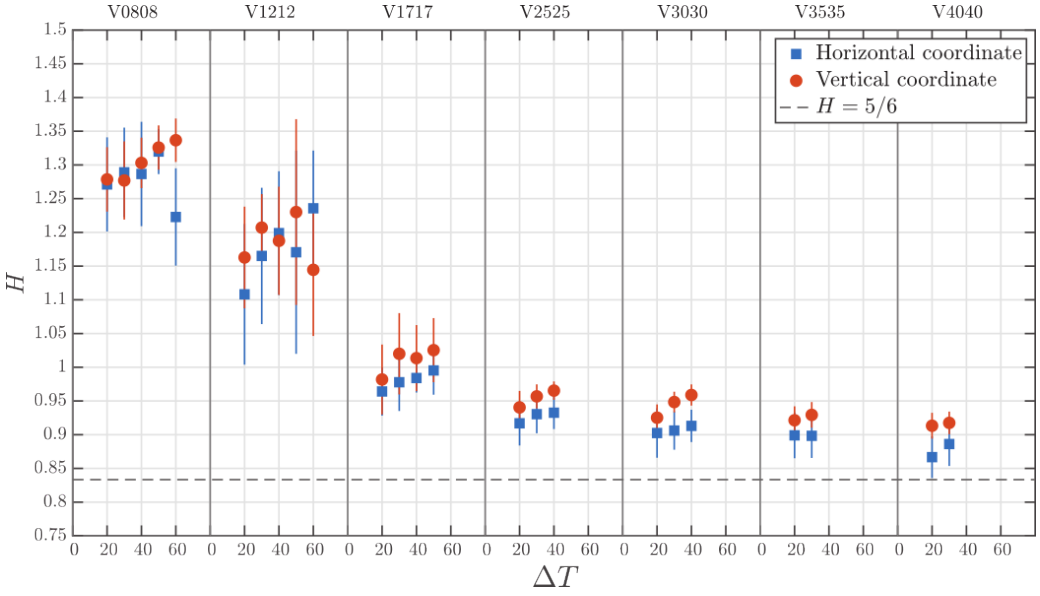

Figura 4.1: Exponente generalizado de corta escala obtenido de las componentes horizontal y vertical del wandering para cada velocidad y diferencia de temperatura. La línea segmentada indica la referencia de Kolmogorov $H = 5/6$. Los valores son pendientes DFA locales y no parámetros de un fBm global. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024).

Los valores superiores a uno no se describen como un Hurst canónico ni como una extensión del fBm. Son pendientes locales $H_1^{\mathrm{DFA}} > 1$ obtenidas en una ventana finita, asociadas empíricamente con condiciones convectivas de baja velocidad. La relación entre estas pendientes y un exponente espectral se usa de manera operacional dentro del intervalo ajustado, y no se extrapola a todas las escalas ni se interpreta como prueba de una dinámica gaussiana autosimilar.

Después del primer crossover, las distribuciones espaciales se separan en dos poblaciones. Una población conserva pendientes alrededor o por encima de 5/6 y forma la rama U, mientras que la otra cae por debajo de esa referencia y forma la rama D. La separación aparece tanto en la componente horizontal como en la vertical, aunque con distinta ocupación espacial, como muestran las Figs. 4.2 y 4.3. Esta estructura describe la heterogeneidad del campo de wandering dentro del turbulador.

No implica que cada punto pertenezca a un proceso estocástico distinto.

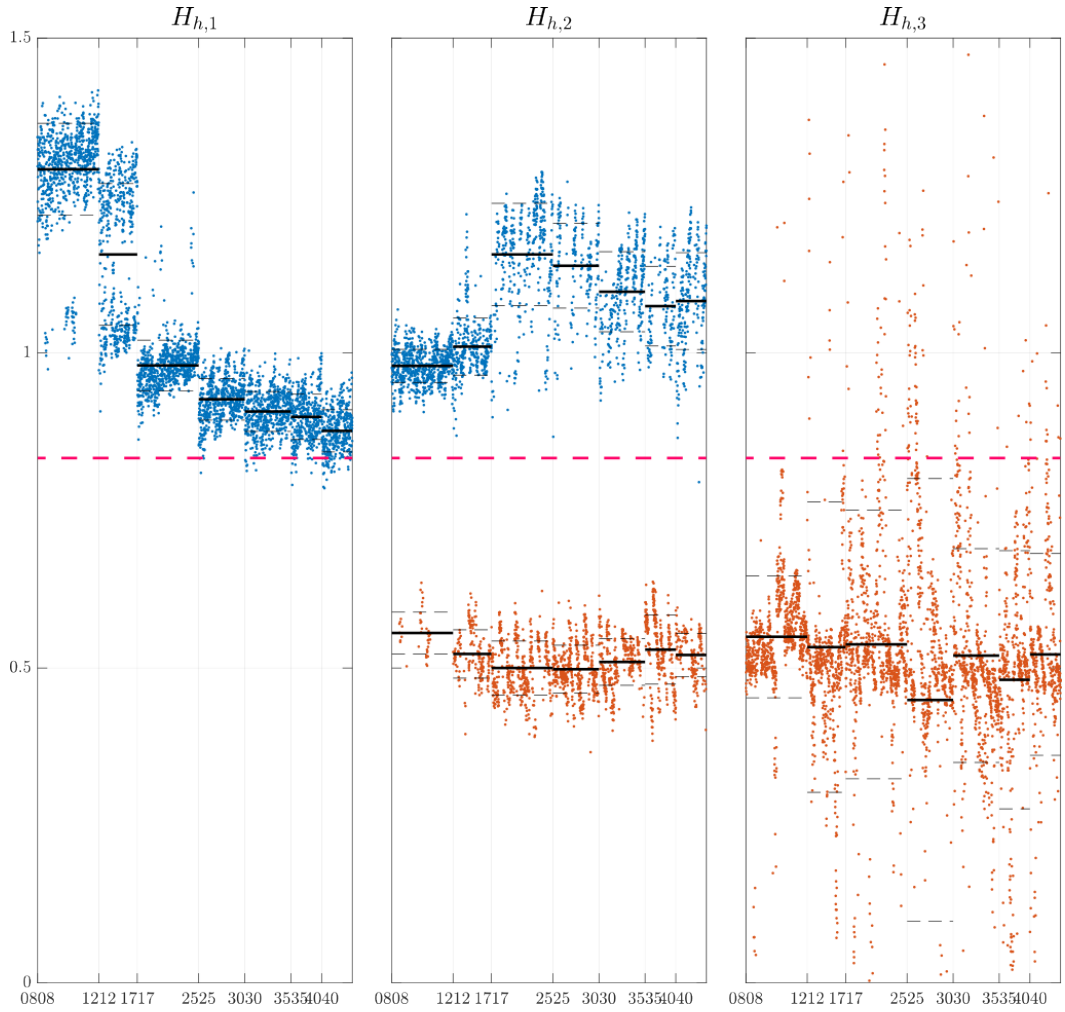

Figura 4.2: Poblaciones de exponentes generalizados para la componente horizontal del wandering. Los tres paneles corresponden a los intervalos delimitados por los dos crossovers; la línea segmentada indica $H = 5/6$. En el intervalo intermedio aparecen las ramas U y D. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024).

Las escalas de crossover se convierten en tiempos mediante $\Delta t_i = S_i/f_s$. La transición $G \to U$ ocurre en decenas de milisegundos, mientras que $G \to D$ y $U \to N$ se concentran alrededor de unas pocas centenas de milisegundos. En el conjunto completo se obtuvieron $\Delta t_{h,G\to U} = 62.24 \pm 12.81$ ms y $\Delta t_{v,G\to U} = 46.57 \pm 20.63$ ms,

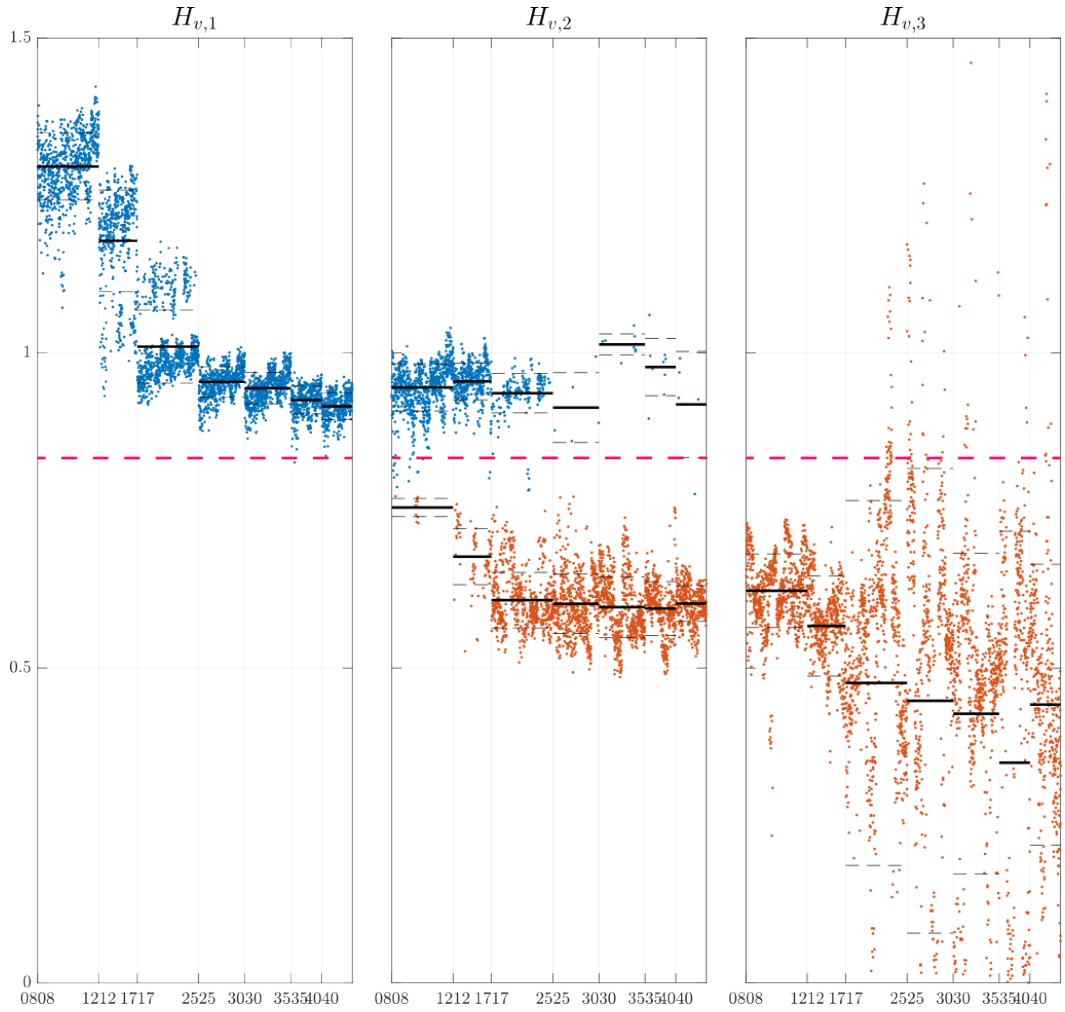

Figura 4.3: Poblaciones de exponentes generalizados para la componente vertical del wandering. La anisotropía del flujo modifica la ocupación relativa de las ramas U y D, pero no cambia su definición operacional. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024).

mientras que $\Delta t_{h,G\to D} = 261.66 \pm 28.94$ ms y $\Delta t_{v,G\to D} = 201.72 \pm 32.08$ ms. Las transiciones $U \to N$ aparecen cerca de 0.25 s. En cambio, los tiempos asignados a $D \to N$ se distribuyen uniformemente entre 2 y 8 segundos sin una escala característica estable, por lo que se consideran probablemente espurios o compatibles con la continuación de la rama D (Pérez et al., 2024).

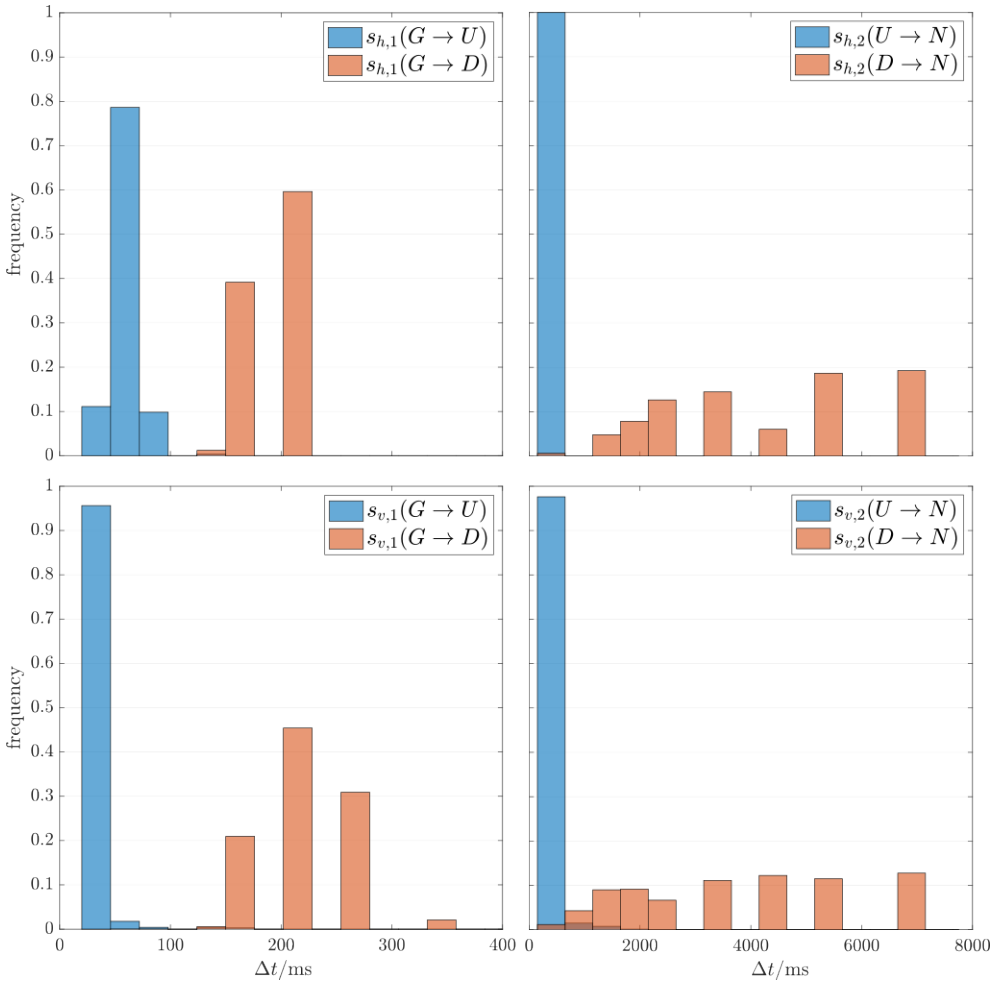

Figura 4.4: Distribuciones de los tiempos de crossover para las transiciones definidas a partir del wandering. Las escalas $G \to U$, $G \to D$ y $U \to N$ forman poblaciones compactas, mientras que $D \to N$ se dispersa sobre varios segundos y no define una escala física robusta. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024).

La dependencia con la velocidad distingue una escala de barrido y una escala de decorrelación. A velocidades bajas, el tiempo de barrido asociado con $G \to U$ permanece cerca de 25.7 ± 2.6 ms y no sigue la ley inversa esperada bajo Taylor. Por encima de aproximadamente 2 $\mathrm{m\,s^{-1}}$, los tiempos decrecen con la velocidad y el mapeo de flujo congelado se vuelve más plausible. La escala de alrededor de 0.25 s se

vincula con la longitud del turbulador antes que con L_0, mientras que la dispersión de $D \to N$ impide asignarle una longitud característica.

4.2.1 Consistencia espectral DFA–PSD

El procedimiento de Kiyono descrito en la sección 3.6 se aplica a las mismas series de wandering para verificar que las pendientes estimadas por DFA sean consistentes con las obtenidas por reconstrucción espectral. La relación entre ambas representaciones es

$$\alpha_{\mathrm{DFA}} = \frac{\beta_{\mathrm{PSD}} + 1}{2}, \tag{4.3}$$

donde α_{DFA} es la pendiente DFA y β_{PSD} es la pendiente de la densidad espectral de potencia. La Fig. 4.6 compara las pendientes recuperadas por ambos métodos. El alto coeficiente de determinación muestra consistencia entre representaciones bajo los parámetros espectrales seleccionados. Como esos parámetros se optimizan respecto de la curva DFA, el resultado no se presenta como una validación independiente, sino que muestra que una PSD estimada con parámetros compatibles reproduce la estructura de escalamiento observada por DFA.

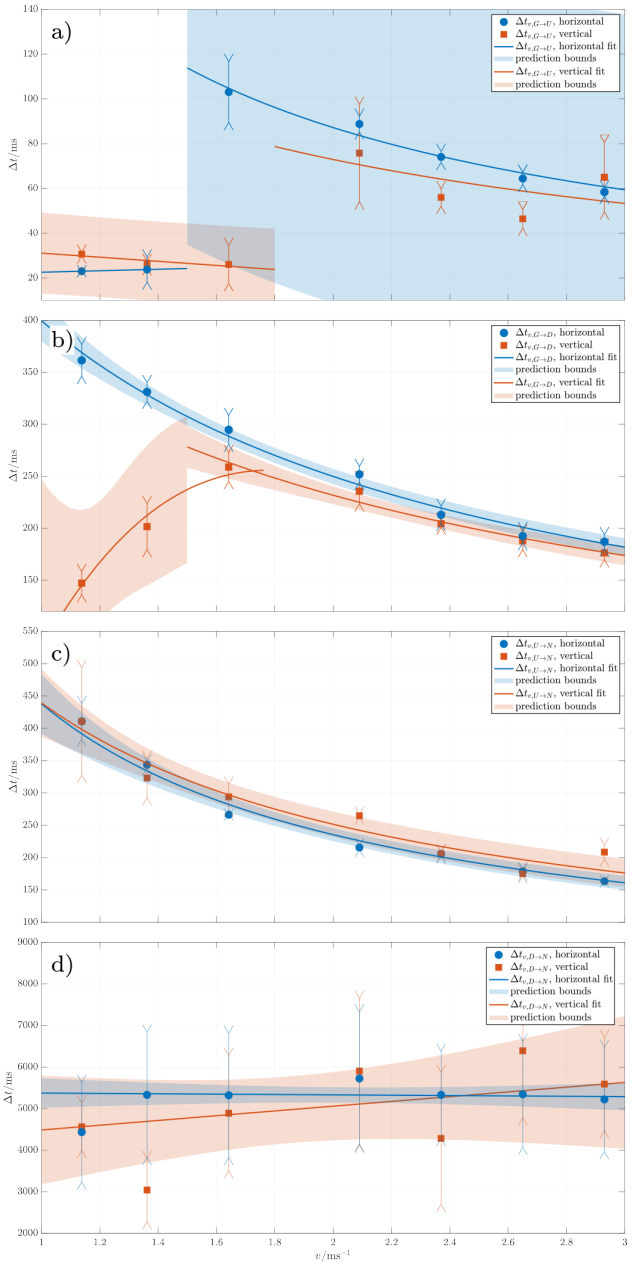

Figura 4.5: Tiempos de crossover en función de la velocidad de inyección. Los paneles muestran $G \to U$, $G \to D$, $U \to N$ y $D \to N$ para ambas componentes. La última transición carece de una dependencia estable con la velocidad. Resultados del autor publicados en (Pérez et al., 2024).

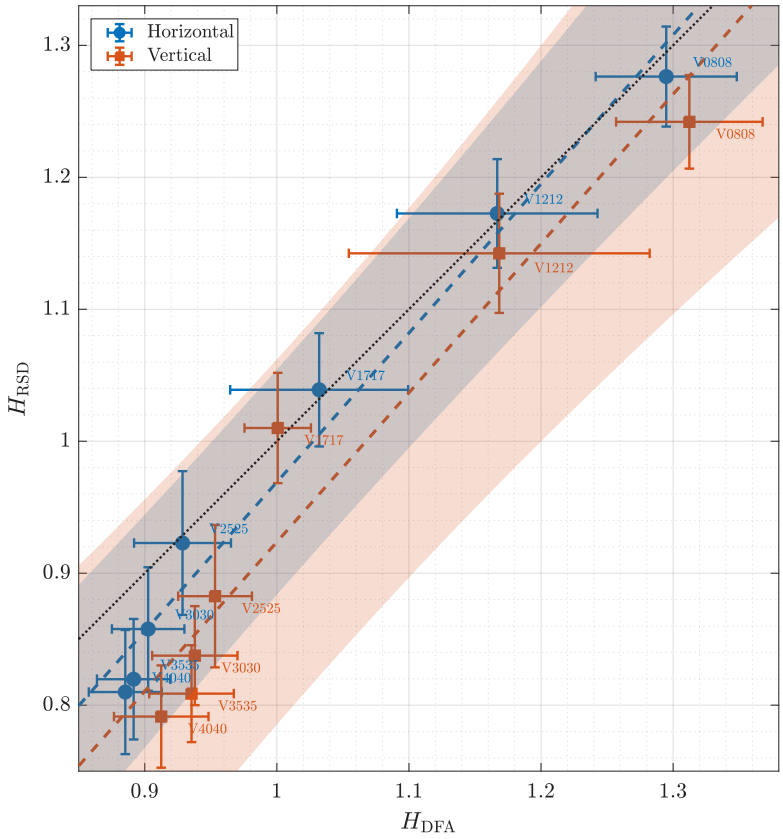

Figura 4.6: Comparación entre los exponentes generalizados obtenidos por DFA y por la representación espectral. La cercanía a la recta 1:1 muestra consistencia entre estimadores bajo el procedimiento de optimización descrito en el Cap. 3. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

4.3 Evidencia de no gaussianidad

Para el análisis distribucional, cada serie de desplazamiento se transforma en una variable adimensional no negativa con media de ensamble unitaria,

$$x_q = \frac{\beta_{a,q} - (\beta_{a,q})_{\min}}{\overline{\beta_{a,q} - (\beta_{a,q})_{\min}}}, \tag{4.4}$$

donde $q \in \{h, v\}$ designa el eje, $(\cdot)_{\min}$ es el mínimo global sobre la serie de medición, y $\overline{(\cdot)}$ denota el promedio temporal de ensamble (González et al., 2026). El mínimo de cada registro se transforma en cero, de modo que la distribución se ajusta sobre $x_q \geq 0$. La normalización conserva la forma relativa de la distribución pero elimina la escala dimensional de los desplazamientos.

Las distribuciones experimentales se apartan de la gaussiana mediante asimetría, colas persistentes y, en las condiciones más débiles, multimodalidad. La evidencia primaria proviene de los histogramas y de la comparación directa de ajustes. Las gráficas Q–Q contra la referencia gaussiana, introducidas en el Cap. 1, se usan como diagnóstico visual de esa no gaussianidad. La Fig. 4.7 las presenta para ambas componentes del desplazamiento normalizado bajo el menor forzamiento térmico, con una curva por centroide. El cuerpo central de cada distribución sigue la diagonal, mientras que los cuantiles extremos se apartan de ella en ambos extremos y en todas las velocidades, ya desde $|z| \approx 2$. La dispersión entre las cien curvas de cada panel refleja la variabilidad espacial de la matriz, la misma heterogeneidad que reaparece en las mezclas multimodales de la sección 4.3.2.

La divergencia de Kullback–Leibler (KL) entre una Burr ajustada F y una gaussiana de referencia $\mathcal{N}$ con igual media y varianza se usa como descriptor complementario,

$$D_{\mathrm{KL}}(F\|\mathcal{N}) = \int_0^\infty f(x)\, \ln \frac{f(x)}{g(x)}\, \mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

donde f y g son las funciones de densidad de F y $\mathcal{N}$, respectivamente (Kullback and Leibler, 1951). Un valor positivo cuantifica la separación entre ambos modelos, pero no sustituye una prueba de bondad de ajuste respecto de los datos. La Fig. 4.8 muestra que la divergencia disminuye al aumentar el forzamiento térmico, aunque permanece distinta de cero en el conjunto experimental.

El argumento de Berry–Esseen muestra que, para variables Weibull, se requieren del orden de decenas de contribuciones efectivamente independientes para garantizar una aproximación gaussiana fiable, mientras que la configuración experimental entrega $N_{\mathrm{eff}} \approx 3$. Este contraste explica por qué el teorema central del límite no garantiza convergencia rápida en el experimento. La no gaussianidad se establece a

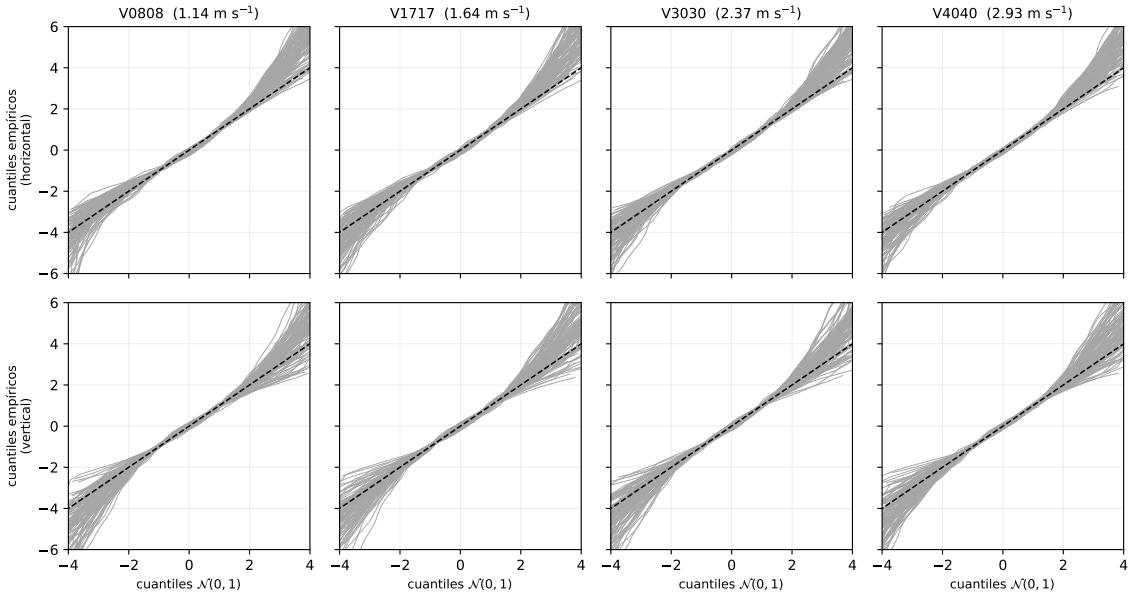

Figura 4.7: Gráficas Q–Q de los desplazamientos normalizados de los centroides contra la referencia gaussiana estándar, para cuatro velocidades de inyección con $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ e iluminación coherente. *Fila superior*: componente horizontal. *Fila inferior*: componente vertical. Cada curva gris corresponde a uno de los 100 centroides de la Máscara A y la línea segmentada indica la referencia $y = x$. El cuerpo central sigue la referencia mientras las colas se apartan de la diagonal en ambos extremos en todas las condiciones.

partir de las distribuciones medidas y de su comparación con los modelos candidatos, no invirtiendo una cota de Berry–Esseen.

4.3.1 Modelo Burr XII

El marco estocástico fue desarrollado por González, Macêdo y Vasconcelos dentro de esta colaboración (González et al., 2026). El modelo parte de una ecuación diferencial para x_q,

$$dx_q = -\zeta(t) D_1(x_q)\, dt + \sqrt{2\zeta(t) D_2(x_q)}\, dW(t), \tag{4.6}$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener y $\zeta(t)$ fija la escala de relajación. Para la elección de deriva y difusión del modelo, la distribución estacionaria condicional a

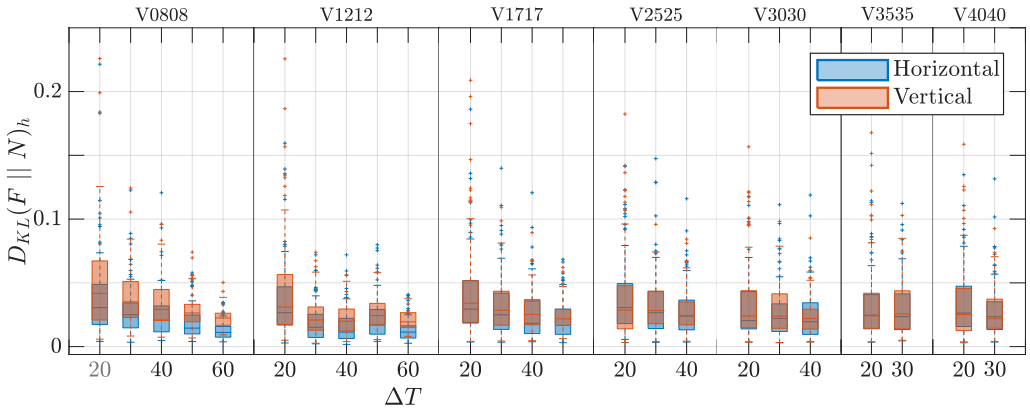

Figura 4.8: Divergencia $D_{\mathrm{KL}}(F\|N)$ entre las distribuciones Burr XII ajustadas y gaussianas con los mismos dos primeros momentos. Las cajas reúnen los puntos de la matriz para cada condición. La reducción con el forzamiento térmico indica una aproximación progresiva a formas más regulares, no una demostración de gaussianidad exacta. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

una intensidad ε es Weibull,

$$f(x \mid \varepsilon) = c\varepsilon x^{c-1} \exp(-\varepsilon x^c), \qquad x \geq 0. \tag{4.7}$$

Si ε fluctúa lentamente según una distribución gamma, la composición produce una Burr XII,

$$f(x) = \frac{ckx^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}}, \tag{4.8}$$

y una escala adicional a se introduce mediante $x \mapsto x/a$. El ajuste conserva el origen en cero, y no se interpreta un parámetro de localización libre.

La construcción separa la dinámica rápida, que determina la respuesta Weibull instantánea, de la variabilidad lenta de la intensidad, que produce la cola Burr. Esta separación no presupone gaussianidad de los desplazamientos. Tampoco implica que cada serie sea un proceso de Markov global, pues la relajación $\zeta(t)$ puede fluctuar y generar correlaciones de largo alcance.

4.3.2 Selección de modelo y multimodalidad

Las distribuciones gaussianas y Weibull simples reproducen algunos casos, pero no describen de manera uniforme la asimetría, las colas y las formas multimodales. La Burr XII proporciona el ajuste unimodal más consistente y conserva una derivación compatible con el modelo jerárquico de la sección 4.3.1. La Fig. 4.9 presenta casos representativos bajo forzamiento débil e intenso.

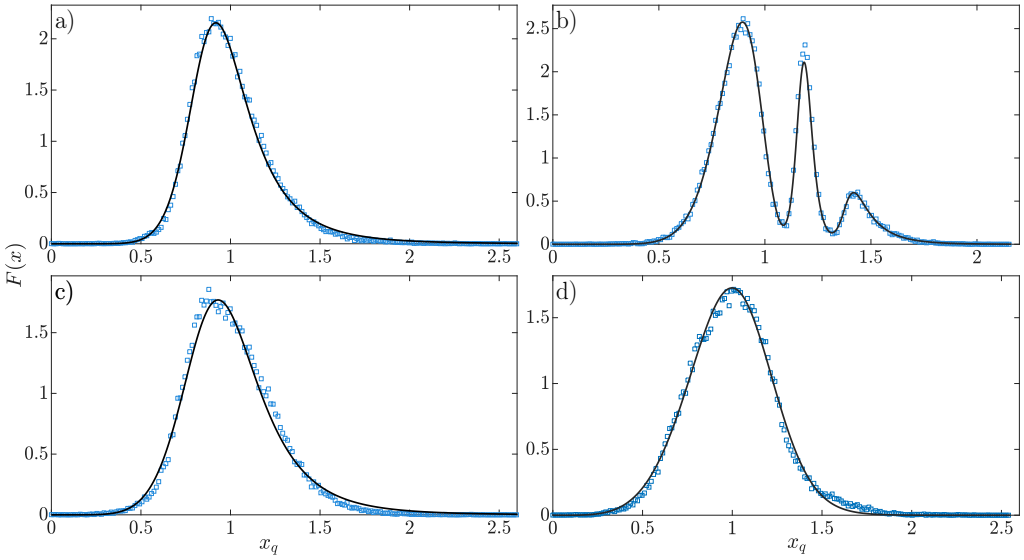

Figura 4.9: Distribuciones experimentales de desplazamiento horizontal y ajustes Burr XII representativos. Las condiciones débiles pueden requerir dos o tres componentes, mientras que las condiciones de mayor forzamiento son predominantemente unimodales. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

Cuando una sola Burr no representa la forma observada se usa una mezcla finita,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \pi_j f_j(x), \qquad \sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \pi_j = 1, \tag{4.9}$$

con $n_{\text{comp}} \in \{1, 2, 3\}$ seleccionado por MSE sobre el histograma empírico. El número de componentes resume la multimodalidad estadística del registro. No se identifica cada componente con una celda turbulenta ni con un estado dinámico individual.

En las condiciones de menor gradiente térmico, las mezclas de dos y tres Burr representan una fracción importante de las realizaciones. Al aumentar ΔT, la respuesta se homogeniza y los ajustes unimodales superan el 90%.

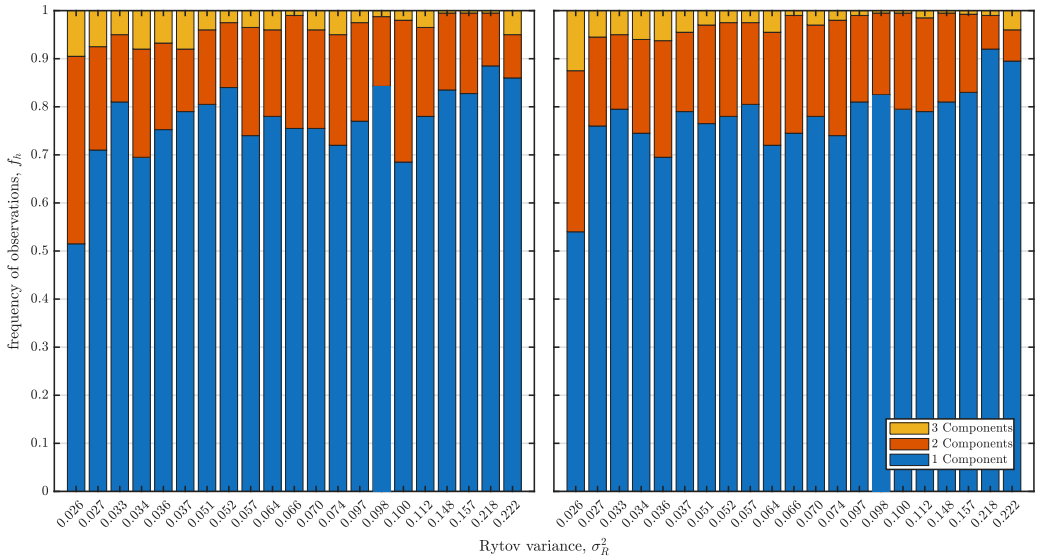

Figura 4.10: Frecuencia de ajustes con una, dos o tres componentes Burr XII para las componentes horizontal y vertical. La multimodalidad es más frecuente bajo el menor forzamiento térmico y disminuye al intensificarse la mezcla. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

La aparición de aproximadamente tres componentes coincide con la estimación $N_{\text{eff}} \approx 3$ (González et al., 2026). Esta tesis conserva esa relación como una hipótesis sugerida por los datos,

$$n_{\text{comp}} \sim N_{\text{eff}}, \tag{4.10}$$

no como una igualdad derivada. La coincidencia puede indicar que un número pequeño de contribuciones efectivas favorece modos estadísticos distinguibles, pero requiere validación adicional.

Los parámetros medios de las Burr ajustadas permanecen aproximadamente estables a través de las condiciones, con valores alrededor de $c \approx 6$, $k \approx 10$ y $a \approx 6$. La Fig. 4.11 reproduce esta estabilidad. Los parámetros no reciben identificaciones físicas directas en este trabajo.

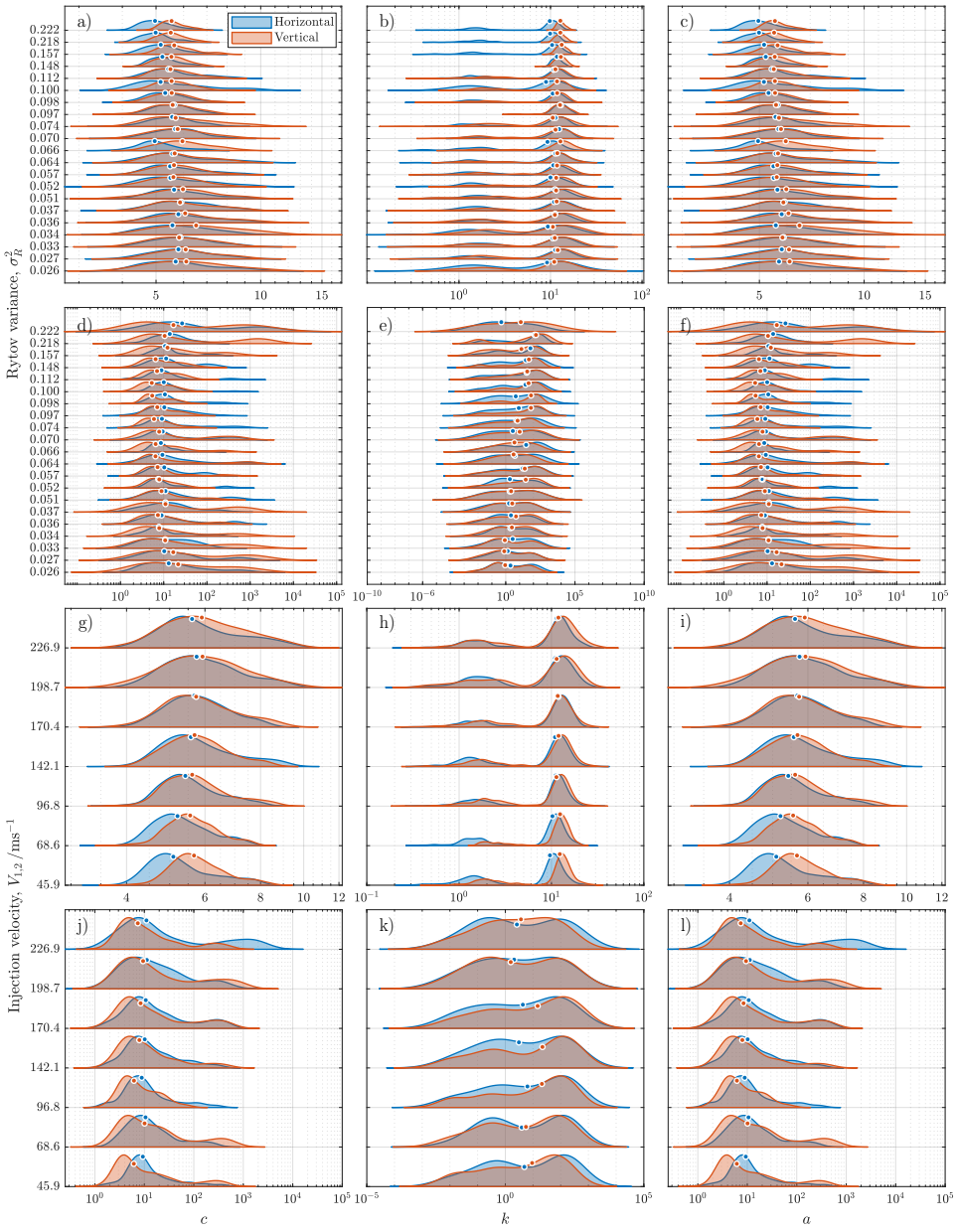

Figura 4.11: Distribuciones de los parámetros Burr XII en función de la varianza de Rytov equivalente y de la velocidad de inyección. Los valores medios son aproximadamente estables; la mayor anchura de los casos mezclados refleja la complejidad del ajuste y la menor cardinalidad de cada grupo. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

4.4 Desacoplamiento e interpretación

Los exponentes generalizados describen la organización temporal de segundo orden, mientras que los parámetros Burr describen la distribución marginal de las amplitudes normalizadas. El análisis no encuentra una correlación sistemática entre ambas familias de descriptores. La Fig. 4.12 muestra que valores semejantes de (c, k, a) admiten pendientes DFA distintas y que las dos poblaciones temporales permanecen visibles en amplios intervalos de los parámetros Burr.

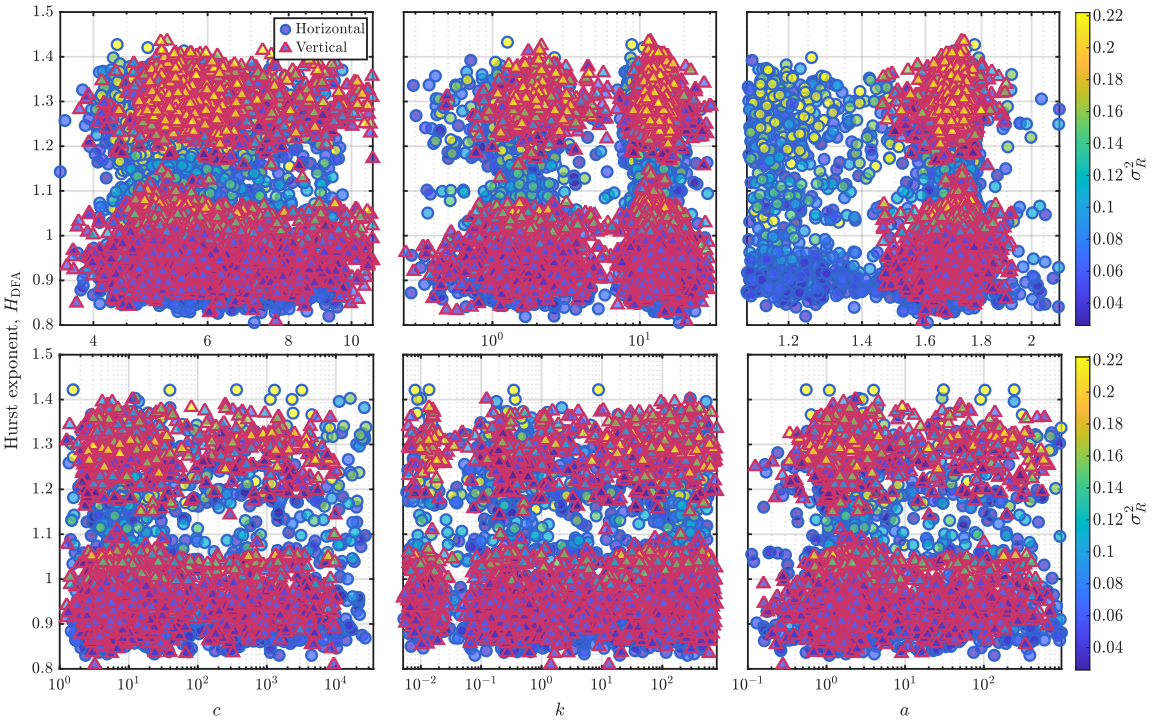

Figura 4.12: Exponentes generalizados H^{DFA} frente a los parámetros Burr XII (c, k, a) para las componentes horizontal y vertical. La ausencia de una tendencia única indica que la forma marginal y la organización temporal contienen información complementaria. Resultados del autor publicados en (González et al., 2026).

Este desacoplamiento no demuestra que ambas estadísticas provengan de mecanismos completamente independientes. Muestra que, dentro del rango experimental, los parámetros de la distribución marginal y los descriptores temporales de segundo

orden no se determinan mutuamente.

4.4.1 Interpretación conjunta

La explicación física propuesta parte de un número pequeño de contribuciones de irradiancia efectivamente independientes dentro de la región usada para calcular cada centroide. Cuando la escala externa es comparable con la apertura, las correlaciones espaciales reducen N_{eff} y el promedio ponderado que define el centroide conserva rasgos no gaussianos. La dinámica Weibull describe la respuesta condicional, mientras que la composición gamma de la intensidad produce la Burr XII. Bajo forzamiento térmico débil, la heterogeneidad espacial favorece mezclas. Al intensificarse la mezcla, las distribuciones se vuelven predominantemente unimodales.

Esta interpretación permanece en el nivel demostrado por los datos. La estabilidad aproximada de (c, k, a) no prueba universalidad estricta ni permite asociar cada parámetro con una escala turbulenta. La coincidencia $n_{\text{comp}} \sim N_{\text{eff}}$ es una propuesta que necesita experimentos con aperturas, escalas externas y geometrías controladas de manera independiente.

La combinación de DFA y Burr ofrece una descripción en dos niveles sin forzar un único modelo estocástico. Los exponentes H_i^{DFA} caracterizan pendientes locales y crossovers, mientras que las Burr XII caracterizan amplitudes no gaussianas y multimodalidad. Su valor está en mostrar que la memoria temporal y la forma distribucional varían de manera parcialmente desacoplada sobre el rango experimental disponible.

4.5 Conclusiones

El DFA de wandering resuelve una organización temporal multiescala que no puede reducirse a un fBm global. Las pendientes H_i^{DFA} son exponentes generalizados locales, y los estados G, U, D y N describen únicamente la evolución de los centroides de la Máscara A. La rama $G \to U$ define una escala de barrido de decenas de milisegundos, mientras que $G \to D$ y $U \to N$ aparecen alrededor de 0.2–0.3 s. La supuesta

transición $D \to N$ no posee una escala robusta. La comparación DFA–PSD confirma la consistencia entre ambas representaciones bajo los parámetros seleccionados.

Las fluctuaciones de los centroides presentan desviaciones sistemáticas respecto de la gaussianidad. Una ecuación estocástica con respuesta Weibull y variaciones jerárquicas de intensidad conduce a distribuciones Burr XII que reproducen las formas observadas. Bajo el menor forzamiento térmico aparecen con frecuencia mezclas de dos o tres componentes. Al aumentar ΔT, la respuesta se homogeniza y las distribuciones unimodales dominan. Los parámetros Burr permanecen aproximadamente estables y no reciben identificaciones físicas directas.

Los exponentes generalizados del DFA no se correlacionan de manera sistemática con los parámetros (c, k, a) de la Burr XII. La forma marginal y la organización temporal aportan información complementaria sobre el mismo observable. La relación entre el exponente de corta escala H_1^{DFA} y las condiciones de centelleo de las Máscaras B–E se desarrolla en el Cap. 5.

Capítulo 5

Centelleo en el plano imagen

En el capítulo anterior se estudió la organización temporal de las fluctuaciones de los centroides de la Máscara A y la distribución de sus amplitudes. Este capítulo cambia el observable. En lugar de los desplazamientos de centroides, se analizan las fluctuaciones temporales de irradiancia de las Máscaras B–E, que son blancos extendidos con bordes de alto contraste. La pregunta central es en qué medida el estado turbulento caracterizado por el exponente de corta escala H_1^{DFA} y el radio de coherencia $\rho_0(H)$ explica las propiedades espaciales del centelleo observado en esas imágenes.

La caracterización del centelleo de borde y su organización mediante la teoría de Charnotskiĭ son contribución de Pérez y Sepúlveda dentro de esta colaboración, desarrollada en el manuscrito sometido a revisión por pares (Pérez et al., 2026), y se presentan aquí como marco y contexto. El experimento de deformación geométrica de las secciones 5.2 y 5.4, junto con su análisis, es contribución del autor, igual que los exponentes generalizados y el radio de coherencia $\rho_0(H)$ que alimentan la comparación entre wandering y centelleo.

5.1 Centelleo en objetos extendidos

La teoría clásica del centelleo se formula para una apertura puntual receptora de una onda plana o esférica propagada a través de turbulencia isótropa de Kolmogorov. El índice de centelleo en ese caso depende del número de Fresnel y del radio de coherencia r_0. Para una apertura finita D_0, la varianza de la intensidad se reduce al promediar sobre varias celdas de coherencia (Andrews and Phillips, 2005). Esta descripción no es directamente aplicable a las imágenes del turbulador, pues en lugar de una onda puntual se tiene un blanco extendido con estructura espacial, y los píxeles del sensor integran sobre regiones que incluyen bordes, difracción y variaciones de contraste.

Charnotskii (1996, 2021) propone una descripción para el centelleo de imágenes de blancos extendidos que organiza el comportamiento mediante dos números de Fresnel. El primero es el número de Fresnel de apertura,

$$N = \frac{kD_0^2}{L}, \tag{5.1}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, $D_0 = 47.2$ mm es el diámetro de la apertura receptora de la cámara (sección 3.2) y $L = 0.84$ m es la distancia de propagación entre el plano objeto I y la cámara (sección 3.2), no la longitud interna del turbulador (0.37 m), pues los números de Fresnel de Charnotskiĭ caracterizan la geometría de imagen del receptor, no el trayecto donde se genera la turbulencia. El segundo es el número de Fresnel del radio de coherencia,

$$q = \frac{k\rho_0^2}{L}, \tag{5.2}$$

construido con el radio de coherencia ρ_0 en lugar de la apertura. Como el diámetro receptor permanece constante durante todo el experimento, N queda fijo en 2.62×10^4 para iluminación coherente y 2.53×10^4 para iluminación incoherente, de modo que toda la variabilidad entre condiciones entra por q (Pérez et al., 2026). El cociente $N/q = (D_0/\rho_0)^2$ cuenta el número de celdas de coherencia contenidas en la apertura y organiza las condiciones en el plano $(\ln N, \ln q)$, donde la recta $q \sim N$ separa el

régimen de fluctuaciones débiles, por encima, del régimen de centelleo fuerte, por debajo (Charnotskii, 2021; Pérez et al., 2026). En el experimento del turbulador, el exponente generalizado de corta escala se aparta del valor de Kolmogorov $H_K = 5/6$. Por ello ρ_0 se reemplaza por $\rho_0(H)$ calculado con el exponente observado (véase la sección 3.3), y $N/q(H)$ es la variable que ordena las condiciones experimentales.

La Fig. 5.1 ubica las condiciones del experimento en ese plano. Cuando q se estima suponiendo turbulencia de Kolmogorov, los puntos se alejan de la zona de transición. Cuando se calcula con el exponente observado mediante $\rho_0(H)$, las condiciones se desplazan hacia la transición entre los regímenes débil y fuerte, que es donde el centelleo del plano imagen se maximiza (Pérez et al., 2026). La corrección por H también desplaza la frontera entre la zona perturbativa y la de centelleo fuerte, y las expresiones teóricas disponibles no permiten estimar esa transición cuando $H \geq 1$.

Las Máscaras B–E no son fuentes puntuales ni campos de onda plana. El índice de centelleo calculado sobre sus píxeles de borde es un observable del plano imagen, ya que recoge desplazamiento geométrico, difracción, speckle y variaciones de irradiancia reales. La teoría de Charnotskiĭ se usa aquí no para predecir el valor absoluto del centelleo, sino para identificar la variable adimensional correcta que ordena la dependencia experimental a nivel de condición.

5.1.1 Observables de centelleo

Sea $I_{ij}(t)$ la intensidad registrada en el píxel (i, j) durante el cuadro t, con $t = 1, \ldots, T$. Cada máscara queda muestreada a $f_s = 1{,}000$ Hz y aporta $T = 60{,}000$ cuadros. El índice local de centelleo se define como la varianza relativa temporal de la irradiancia en cada píxel,

$$\mathrm{SI}_{ij} \equiv \sigma^2_{I,ij} = \frac{\langle I^2_{ij} \rangle}{\langle I_{ij} \rangle^2} - 1 = \frac{\langle I^2_{ij} \rangle - \langle I_{ij} \rangle^2}{\langle I_{ij} \rangle^2}. \tag{5.3}$$

Esta cantidad no se identifica con la varianza de Rytov, dado que la imagen contiene bordes, propagación coherente o incoherente, difracción, speckle y desplazamiento geométrico (Andrews and Phillips, 2005; González et al., 2026). El análisis se con-

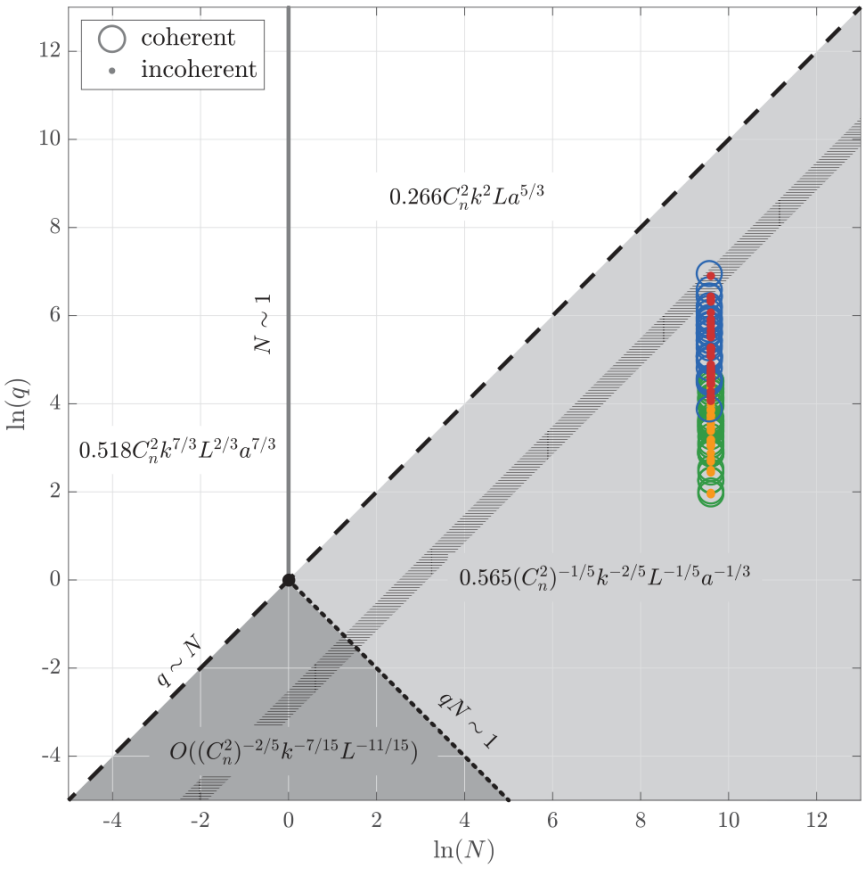

Figura 5.1: Plano $(\ln N, \ln q)$ de Charnotskiĭ con las condiciones experimentales del turbulador. La recta segmentada $q \sim N$ separa el régimen de fluctuaciones débiles (arriba, en blanco) del régimen de centelleo fuerte (abajo, en gris). Los círculos verdes (fuente coherente) y los puntos amarillos (incoherente) ubican cada condición suponiendo el exponente de Kolmogorov, mientras que los círculos azules y los puntos rojos usan el exponente de Hurst observado en cada medición, lo que desplaza las condiciones hacia la zona de transición entre regímenes. Adaptada de (Pérez et al., 2026).

centra en los bordes de alto contraste (Gulich et al., 2015), donde el centelleo es más pronunciado y la señal más robusta frente al ruido de fondo.

A partir del mapa $\sigma^2_{I,ij}$ se define la máscara binaria de píxeles activos,

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} 1, & \sigma^2_{I,ij} \geq \tau, \\ 0, & \sigma^2_{I,ij} < \tau, \end{cases} \tag{5.4}$$

y el conteo normalizado de píxeles que superan el umbral satisface

$$E_\Omega = \frac{\sum_{ij} \Omega_{ij}}{\sum_{ij} E_{ij}}, \tag{5.5}$$

donde E_{ij} es la máscara de bordes obtenida de la imagen media (Pérez et al., 2026). El umbral τ corresponde al máximo nivel de varianza registrado con flujo mecánico y calefactores desactivados, de modo que actúa como piso experimental común para todas las condiciones. Su valor resulta cercano a 0.03 para todas las máscaras analizadas, de modo que Ω_{ij} retiene únicamente fluctuaciones de origen óptico (Pérez et al., 2026). Para cada condición se conservan el mapa completo de SI_{ij}, la máscara Ω_{ij}, E_Ω y el promedio de SI_{ij} sobre los bordes activos.

Las series temporales de irradiancia píxel a píxel respaldan esta construcción. En los píxeles que superan el umbral, el exponente de Hurst local coincide con el estimado desde el wandering de la Máscara A, mientras que fuera de los bordes de máximo centelleo el exponente se aproxima a $H \sim 0.5$, el valor de referencia del ruido (Pérez et al., 2026). El conteo E_Ω refleja entonces únicamente las regiones que contienen información de la turbulencia óptica. El centelleo de borde alcanza además valores muy superiores a la varianza de Rytov obtenida de la estadística de wandering, con eventos $\sigma^2_I > 1$ presentes en cualquier intensidad de turbulencia y más frecuentes bajo iluminación coherente, comportamiento consistente con el realce de centelleo conocido en propagación de haces y con la ubicación de las condiciones en la región de transición del plano de Charnotskiĭ (Pérez et al., 2026). La Fig. 5.2 muestra un ejemplo representativo de los mapas de centelleo, los filtros de borde y las máscaras Ω_{ij} resultantes para ambas fuentes.

E_Ω y σ^2_I no son observables equivalentes. E_Ω mide la extensión espacial del centelleo de borde (cuántos píxeles superan el umbral), mientras que σ^2_I mide la mag-

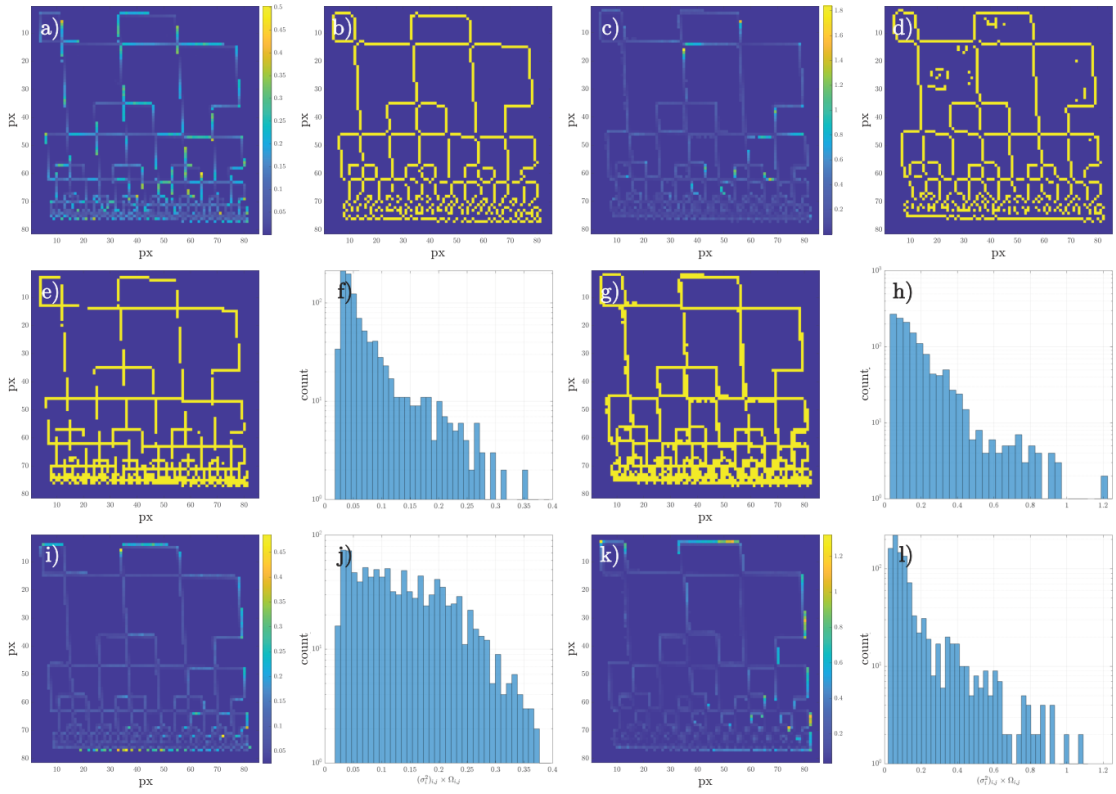

Figura 5.2: Ejemplo de centelleo en el plano imagen para uno de los blancos extendidos, bajo una condición con $\sigma_R^2 = 0.076 \pm 0.005$ para iluminación coherente y 0.064 ± 0.006 para incoherente. (a) Centelleo por píxel bajo iluminación coherente. (b) Filtro de bordes E_{ij} aplicado a la imagen media. (c) y (d) Ídem para iluminación incoherente. (e) y (g) Máscaras Ω_{ij} de píxeles sobre el umbral para los casos coherente e incoherente. (f) y (h) Histogramas del centelleo sobre los píxeles activos correspondientes. (i) a (l) Centelleo simulado a partir de las mediciones locales de ángulo de llegada, con sus histogramas. Adaptada de (Pérez et al., 2026).

nitud de las fluctuaciones en esos píxeles. Un mecanismo puede ampliar el soporte sin aumentar la amplitud, y viceversa. Esta distinción es central para interpretar los resultados del warping en la sección 5.4.

5.2 Método de deformación geométrica

La discusión física del Cap. 2 separa el tilt global de fase, que produce desplazamiento de imagen, de la curvatura o divergencia del campo angular, que puede producir modulación de irradiancia. En los videos de la matriz de puntos esa distinción se implementa operacionalmente sobre los desplazamientos de centroides. Para el punto j se define

$$\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_j^{(0)}, \tag{5.6}$$

donde $\mathbf{r}_j^{(0)}$ es la posición de referencia obtenida de la imagen promedio. Estos desplazamientos son muestras discretas del campo continuo de desplazamiento $\Delta\mathbf{r}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{d}_j(t) \approx \Delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_j^{(0)}, t). \tag{5.7}$$

La traslación común de la imagen se estima por el promedio espacial

$$\overline{\mathbf{d}}(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{d}_j(t), \tag{5.8}$$

y representa el wandering global asociado al tilt común del frente de onda. La deformación interna se obtiene restando ese modo común,

$$\mathbf{d}'_j(t) = \mathbf{d}_j(t) - \overline{\mathbf{d}}(t). \tag{5.9}$$

Para cuantificar la parte espacialmente coherente de esa deformación se ajusta, en cada cuadro, un modelo afín de primer orden,

$$\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\,[\mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{r}_0] + \mathbf{e}_j(t), \tag{5.10}$$

donde $\mathbf{b}(t)$ es la traslación global, $\mathbf{A}(t)$ es la matriz de deformación afín y $\mathbf{e}_j(t)$ es el residual no afín. La traza $\operatorname{tr}\mathbf{A}(t)$ estima la expansión o compresión local del campo de desplazamientos. Una traslación pura tiene divergencia nula y desplaza la imagen sin crear modulación de intensidad, mientras que una deformación con traza no nula

cambia el área local y puede contribuir a fluctuaciones tipo centelleo (Born and Wolf, 1999; Tatarskii, 1971).

Esta descomposición se usa como traducción metodológica de la separación física entre inclinación de frente y curvatura. En el análisis de warping, el campo $\Delta\mathbf{r}$ reconstruido desde los centroides se aplica a una imagen de referencia para generar una imagen contrafactual deformada geométricamente. La comparación entre el centelleo medido y el inducido por ese warping permite estimar qué fracción de la fluctuación de irradiancia puede explicarse por desplazamiento geométrico.

5.2.1 Experimento de warping geométrico

El experimento de warping se introduce como una simulación contrafactual guiada por datos, de modo que se pregunta qué nivel de centelleo se obtendría si la turbulencia sólo transportara geométricamente la estructura luminosa, sin añadir fluctuaciones de amplitud, difracción de borde ni interferencia coherente. Por ello, el procedimiento no resuelve la ecuación de propagación ni implementa una aproximación de rayos, sino que opera directamente sobre imágenes registradas y sobre los desplazamientos de centroides medidos experimentalmente. Su salida es una secuencia sintética $I_{\mathrm{Warp}}(x, y, t)$, comparable píxel a píxel con la secuencia propagada real $I_{\mathrm{Prop}}(x, y, t)$.

La entrada dinámica del algoritmo proviene de la Máscara A. Para cada condición se dispone de las posiciones instantáneas de sus centroides,

$$\mathbf{r}_i(t) = \big(x_i(t), y_i(t)\big), \qquad i = 1, \ldots, 100, \tag{5.11}$$

y de sus posiciones medias de referencia,

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \langle \mathbf{r}_i(t) \rangle_t \,. \tag{5.12}$$

Las Máscaras B–E no aportan centroides propios al warp, sino que se deforman usando la realización temporal de wandering medida de manera independiente por la Máscara A.

Sea $I_{\mathrm{ref}}(x, y)$ la imagen de referencia de cada máscara extendida. Antes de aplicar la deformación, la imagen se magnifica por un factor entero $RS = 98$ en cada eje,

$$I_{\mathrm{mag}} = \mathrm{repelem}(I_{\mathrm{ref}}, RS, RS), \qquad RS = 98, \tag{5.13}$$

y las posiciones de control se expresan en la grilla magnificada,

$$\mathbf{r}_i^{RS}(t) = \mathrm{round}(RS\,\mathbf{r}_i(t))\,, \qquad \bar{\mathbf{r}}_i^{RS} = \mathrm{round}(RS\,\bar{\mathbf{r}}_i)\,. \tag{5.14}$$

Para cada cuadro t, se ajusta una transformación Local Weighted Mean (LWM) que mapea la configuración media de referencia hacia la configuración instantánea,

$$T_t = \mathrm{LWM}_{12}\big(\{\mathbf{r}_i^{RS}(t)\}, \{\bar{\mathbf{r}}_i^{RS}\}\big), \qquad i = 1, \ldots, 100, \tag{5.15}$$

equivalente en MATLAB a `fitgeotrans` con método `'lwm'` y 12 puntos de control por polinomio local. A diferencia de una traslación global, LWM permite que distintas regiones de la imagen se desplacen de manera diferente siguiendo la estructura local del campo de wandering. La transformación en un punto arbitrario es la media ponderada de Shepard de ajustes locales (Goshtasby, 1988; Shepard, 1968),

$$T(\mathbf{r}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\,\hat{T}_i(\mathbf{r})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}, \qquad w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^{-2}. \tag{5.16}$$

La magnificación $RS = 98$ reduce el error de cuantización de los puntos de control, pues un desplazamiento de $1/RS \approx 0.01$ px en la grilla original se convierte en un entero distinguible en la grilla magnificada, asegurando que el ajuste LWM reciba información de deformación a escala sub-píxel sin redondeo prematuro.

Una vez estimada T_t, la imagen magnificada se deforma mediante remuestreo por mapeo inverso con vecino más cercano (`imwarp`, interpolación `'nearest'`). Esta elección preserva los valores de intensidad de la referencia sin crear niveles nuevos

por promediado local. Después del warping, la imagen vuelve a la grilla física del detector mediante integración por bloques $RS \times RS$,

$$I_{\mathrm{Warp}}(j,i,t) = \frac{1}{RS^2} \sum_{u=(i-1)RS+1}^{iRS} \sum_{v=(j-1)RS+1}^{jRS} I_{\mathrm{mag}}^{(t)}(v,u). \tag{5.17}$$

Sobre la secuencia real y la secuencia sintética se calcula el índice local de centelleo,

$$\mathrm{SI}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\langle I_\alpha(i,j,t)^2 \rangle_t}{\langle I_\alpha(i,j,t) \rangle_t^2} - 1, \qquad \alpha \in \{\mathrm{Prop}, \mathrm{Warp}\}. \tag{5.18}$$

La comparación se resume sobre los píxeles de borde $(i,j) \in \mathcal{B}$. La varianza residual no reproducida por el warping es

$$\Delta\sigma_I^2 = (\sigma_I^2)_{\mathrm{Prop}} - (\sigma_I^2)_{\mathrm{Warp}}. \tag{5.19}$$

Este residual no es una medición de difracción pura, sino que contiene todos los efectos que la transformación geométrica no puede reproducir, incluyendo fluctuaciones reales de amplitud, difracción, speckle en iluminación coherente, aberraciones de orden superior no representadas por la malla y error del propio modelo LWM.

La razón de varianzas

$$R_\sigma = \frac{(\sigma_I^2)_{\mathrm{Prop}}}{(\sigma_I^2)_{\mathrm{Warp}}} \tag{5.20}$$

mide la amplificación de la magnitud de las fluctuaciones, mientras que la razón de conteos activos

$$R_\Omega = \frac{E_{\Omega,\mathrm{Prop}}}{E_{\Omega,\mathrm{Warp}}} \tag{5.21}$$

mide si el warping reproduce la extensión espacial del soporte supraumbral. Ambas razones capturan aspectos complementarios de la comparación, y los resultados disponibles se concentran en la primera (sección 5.4).

5.3 Relación entre wandering y centelleo

El vínculo entre la fase del frente de onda y la amplitud de las fluctuaciones de irradiancia se establece a nivel de condición experimental. La Máscara A proporciona el exponente generalizado de corta escala H_1^{DFA} y la varianza del ángulo de llegada, mientras que las Máscaras B–E proporcionan mapas de centelleo y conteos de píxeles activos. No existe una correspondencia espacial uno a uno entre los centroides de la Máscara A y los píxeles de las Máscaras B–E, de modo que la comparación válida usa la condición experimental como unidad, es decir, cada combinación de velocidad, diferencia de temperatura, fuente y máscara.

El radio de coherencia generalizado $\rho_0(H)$ introducido en el Cap. 3 (Ec. (3.5)) se calcula aquí con el exponente observado en cada condición de centelleo, y determina el parámetro de Charnotskiĭ

$$q(H) = \frac{k\rho_0^2(H)}{L}. \tag{5.22}$$

El cociente $N/q(H)$ organiza las condiciones en el plano de Charnotskiĭ y reemplaza a C_n^2 como variable principal cuando el exponente se aparta de Kolmogorov. La varianza de Rytov y el C_n^2 equivalente se conservan sólo como referencias kolmogorovianas de orden de magnitud.

Cuando E_Ω se grafica contra el C_n^2 equivalente sigue una ley sublineal con exponentes de 0.262 para iluminación coherente y 0.270 para iluminación incoherente ($R^2 = 0.94$ y 0.96, respectivamente), como muestra la Fig. 5.3. Todas las máscaras siguen la misma forma convexa independientemente de su complejidad geométrica, de modo que el conteo de píxeles activos resulta invariante ante la forma del blanco, con un leve cambio de convexidad atribuible a la coherencia de la fuente (Pérez et al., 2026). Al reordenar los datos mediante $N/q(H)$, el conteo queda descrito por una ley única para todas las condiciones.

El conteo crece linealmente con la variable ordenadora,

$$E_\Omega \propto \frac{N}{q(H)}, \tag{5.23}$$

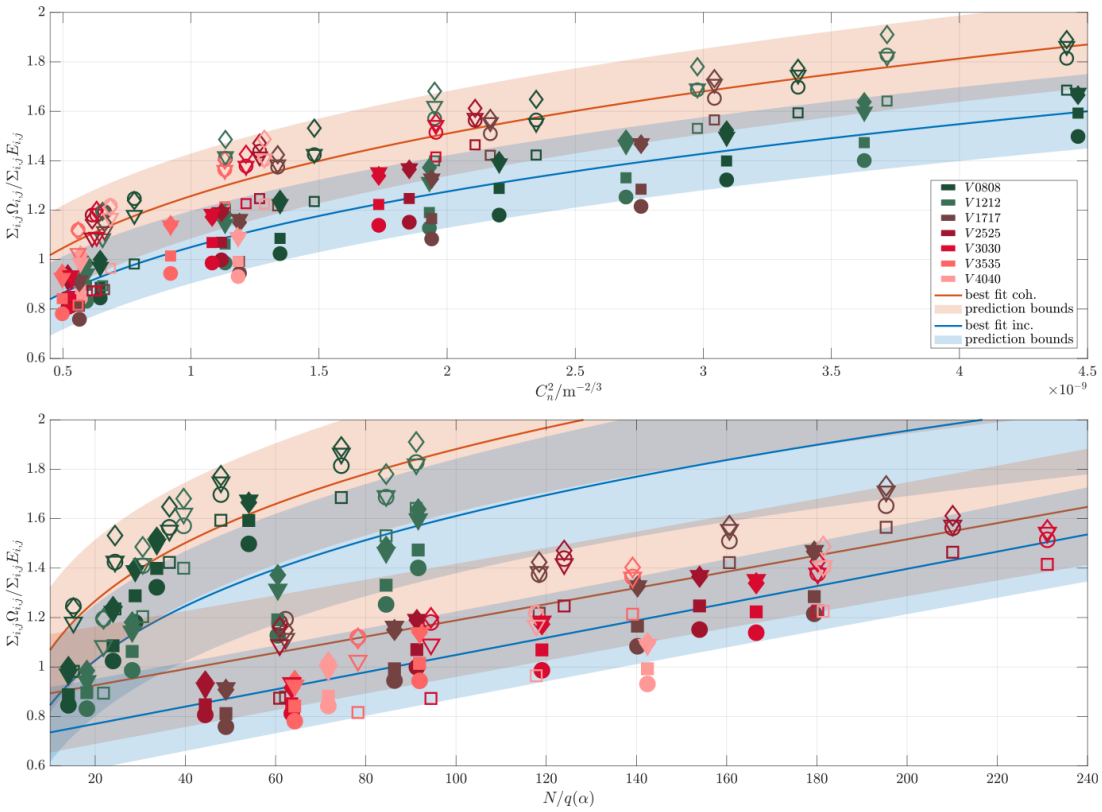

Figura 5.3: Conteo normalizado de píxeles activos E_Ω para todas las máscaras, condiciones y fuentes. *Arriba*: en función del C_n^2 equivalente, con los ajustes sublineales y sus bandas de predicción para iluminación coherente e incoherente. *Abajo*: en función de N/q calculado con el exponente observado en cada condición. Los colores indican el código de velocidad de inyección. Adaptada de (Pérez et al., 2026).

comportamiento común a las Máscaras B–E y a ambas fuentes (Pérez et al., 2026). El resultado muestra que la extensión espacial del centelleo de borde queda ordenada por el estado de escalamiento del wandering a través de $\rho_0(H)$.

La magnitud media del centelleo de borde presenta una dependencia distinta. Para $H < 1$, los datos son compatibles con la rama perturbativa de la teoría generalizada una vez incorporadas las escalas interna y externa, como muestra la Fig. 5.4. Las condiciones con $H \geq 1$ quedan fuera del dominio de las expresiones disponibles

y se sitúan sistemáticamente por encima de esas predicciones. Esta separación establece una limitación de la teoría existente, no un nuevo régimen derivado de un modelo particular.

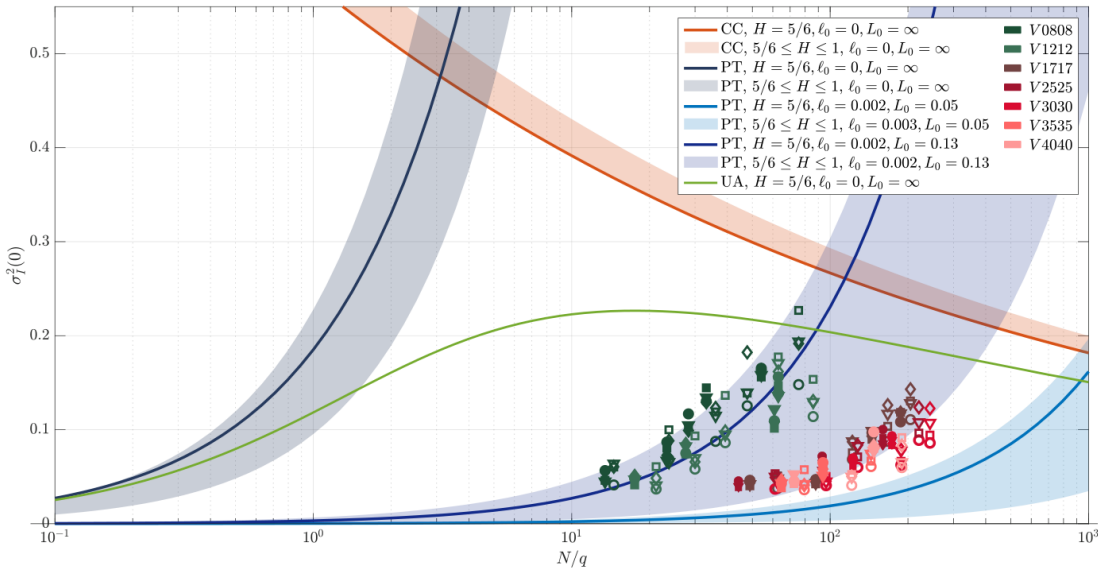

Figura 5.4: Índice de centelleo medio sobre los bordes activos en función de N/q, comparado con las asintóticas de la teoría de Charnotskiĭ. Las curvas corresponden a la rama de centelleo fuerte (CC), a la rama perturbativa (PT) sin y con escalas interna y externa finitas, y al régimen de apertura no acotada (UA), evaluadas en $H = 5/6$ con bandas para $5/6 \le H \le 1$. Los datos experimentales, con colores según el código de velocidad, se agrupan cerca de la rama perturbativa corregida por las escalas del turbulador. Adaptada de (Pérez et al., 2026).

5.4 Descomposición de las fluctuaciones

Las secuencias sintéticas de warping aíslan la contribución que puede reproducirse a partir del campo de desplazamientos medido con la Máscara A. La transformación LWM deforma una imagen de referencia de cada Máscara B–E según la configuración instantánea de los centroides, y contiene traslación y deformación espacial

no rígida, pero no fluctuaciones de amplitud, difracción ni interferencia. No es una retropropagación de las imágenes observadas.

El warping subestima sistemáticamente la magnitud del centelleo. La comparación cuantitativa entre las secuencias experimental y sintética se presenta en la Fig. 5.5, donde la distribución del índice sintético permanece muy por debajo de la del índice medido en todas las condiciones, con medianas de la razón $\sigma^2_{I,\mathrm{sim}}/\sigma^2_{I,\mathrm{prop}}$ entre 0.01 y 0.1, y crece con la turbulencia mucho más lentamente que la del índice medido. El desplazamiento geométrico medido por la Máscara A no alcanza, por tanto, a reproducir la magnitud de las fluctuaciones de irradiancia. Si la deformación geométrica reproduce o no la extensión espacial del soporte supraumbral es una pregunta que estos datos no cierran, de modo que la comparación cuantitativa se limita aquí a la magnitud. E_Ω y σ^2_I no son observables equivalentes y no se puede usar uno como demostración del comportamiento del otro.

La iluminación coherente activa más píxeles que la incoherente a igual condición, como muestran los ajustes de la Fig. 5.3, y concentra los eventos de centelleo extremo $\sigma^2_I > 1$ (Pérez et al., 2026). Las leyes de escala respecto de $N/q(H)$ permanecen comunes a ambas fuentes. La geometría del blanco modifica prefactores y dispersión, pero no los exponentes principales, extendiendo a iluminación coherente la independencia respecto de la forma observada previamente para blancos incoherentes (Pérez et al., 2026).

La Fig. 5.5 muestra la separación entre las distribuciones del índice de centelleo real y sintético. Los paneles (a) y (b) muestran las densidades del índice en escala logarítmica para propagación real y simulada respectivamente, y la distribución de $\sigma^2_{I,\mathrm{prop}}$ se desplaza sistemáticamente hacia valores mayores al aumentar ΔT, mientras que la de $\sigma^2_{I,\mathrm{sim}}$ permanece dos a tres décadas por debajo. El panel (c) confronta las medianas condición a condición, y todos los puntos caen entre $R = 0.01$ y $R = 0.1$, confirmando que $\sigma^2_{I,\mathrm{sim}}$ no crece al mismo ritmo que $\sigma^2_{I,\mathrm{prop}}$ con la turbulencia. El panel (d) resume la posición y el rango intercuartílico por grupo de ΔT.

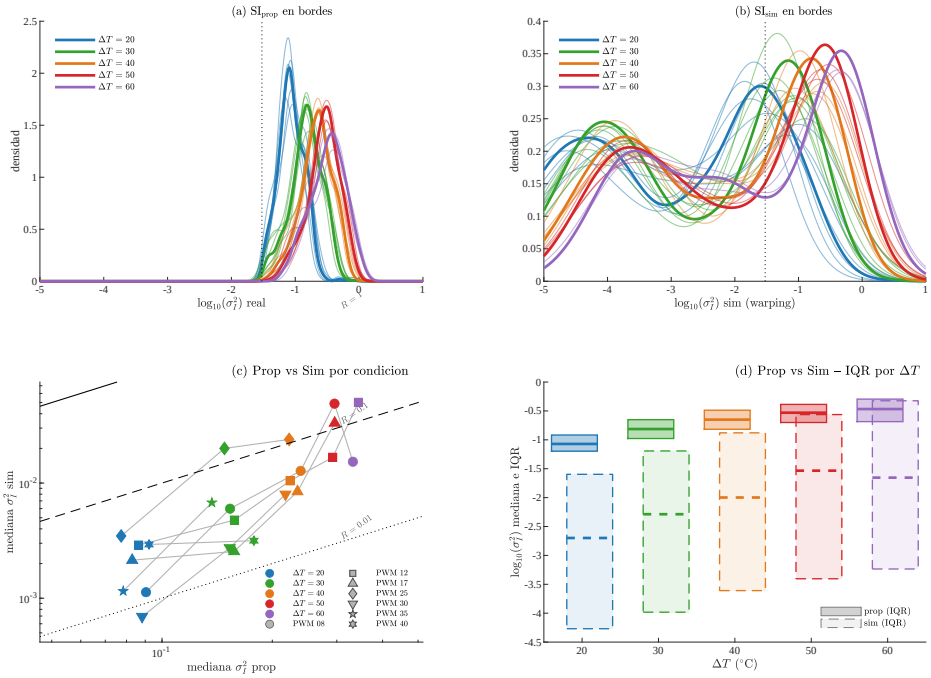

Figura 5.5: Distribuciones del índice de centelleo σ_I^2 sobre píxeles de borde para todas las condiciones disponibles (Máscara B, iluminación coherente). (a) KDE de $\sigma^2_{I,\mathrm{prop}}$ en escala $\log_{10}$; curvas gruesas: promedio por ΔT; curvas finas: velocidades individuales. (b) Ídem para $\sigma^2_{I,\mathrm{sim}}$. (c) Mediana de $\sigma^2_{I,\mathrm{sim}}$ frente a mediana de $\sigma^2_{I,\mathrm{prop}}$ por condición. (d) Mediana e IQR por grupo de ΔT; cajas sólidas: propagación real; cajas punteadas: simulación.

5.5 Conclusiones

El vínculo entre wandering y centelleo opera a nivel de condición experimental, ya que el exponente generalizado de corta escala H_1^{DFA} y la varianza del ángulo de llegada determinan $\rho_0(H)$ y $N/q(H)$, que ordenan el comportamiento del conteo de píxeles activos. La extensión espacial del centelleo de borde crece linealmente con $N/q(H)$, con una ley común para iluminación coherente e incoherente y para las cuatro geometrías de borde.

El warping LWM muestra que el campo de desplazamientos medido por la Máscara A no reproduce la magnitud de las fluctuaciones de irradiancia, pues el índice de centelleo sintético queda entre uno y dos órdenes de magnitud por debajo del medido en todas las condiciones. El residual entre la secuencia experimental y la sintética contiene fluctuaciones de amplitud, difracción, speckle y efectos no capturados por la malla de centroides, y no se identifica con difracción pura ni con ningún mecanismo único.

La magnitud media del centelleo de borde es compatible con la rama perturbativa de la teoría generalizada para $H < 1$. Las condiciones con $H \geq 1$ quedan fuera del dominio de las expresiones disponibles, lo que establece una limitación de la teoría existente frente a las condiciones no Kolmogorov del turbulador.

Perspectivas

Los capítulos anteriores abordaron el mismo canal turbulento desde tres niveles de descripción. La organización temporal del wandering, medida por los exponentes generalizados H_i^{DFA} sobre intervalos de escala separados por crossovers. La estadística marginal de los desplazamientos, descrita por la distribución Burr XII que emerge de un mecanismo superestadístico. Y la manifestación espacial de esas fluctuaciones en el plano imagen, ordenada por el radio de coherencia generalizado y el cociente de números de Fresnel $N/q(H)$. El hallazgo que articula los tres niveles es la independencia entre descriptores. Los exponentes temporales y los parámetros de forma no se correlacionan de manera sistemática, lo que significa que cada familia contiene información que la otra no recoge. Ninguna puede sustituir a la otra y la caracterización del canal exige ambas. El exponente de corta escala, en cambio, sí ordena el comportamiento espacial del centelleo de borde, lo que sitúa la organización temporal como el eslabón que conecta el wandering con el observable de irradiancia.

Sobre esa base, el trabajo deja abiertas varias líneas que conviene enunciar con precisión, distinguiendo las que dependen de datos adicionales de las que requieren desarrollo teórico.

La limitación más nítida no es experimental sino teórica. Las condiciones con $H \geq 1$ quedan fuera del dominio de validez de las expresiones disponibles, de manera que ni la frontera entre el régimen perturbativo y el de centelleo fuerte ni la magnitud esperada del índice pueden estimarse en esa región. El turbulador alcanza rutinariamente esas condiciones, y los puntos correspondientes se sitúan de forma sistemática por encima de las predicciones existentes. Extender el tratamiento generalizado del centelleo más allá de $H = 1$ es, por tanto, un requisito para cerrar

el análisis del propio conjunto de datos ya medido, y no solo una generalización deseable.

El experimento de deformación geométrica dejó una discrepancia sin explicar. El índice de centelleo de las secuencias sintéticas queda entre uno y dos órdenes de magnitud por debajo del medido en todas las condiciones, de modo que el campo de desplazamientos de la Máscara A no basta para reproducir la magnitud de las fluctuaciones de irradiancia. El wandering explica entonces solo una parte del centelleo observado, y determinar qué parte exige mediciones que no se reduzcan al seguimiento de centroides. Queda pendiente además establecer si la deformación geométrica reproduce la extensión espacial del centelleo, pregunta distinta de la magnitud y que los datos actuales tampoco cierran.

La coincidencia entre el número de componentes Burr ajustadas y el número efectivo de contribuciones estimado de manera independiente se conserva en esta tesis como una hipótesis sugerida por los datos, no como una identidad derivada. Ponerla a prueba requiere condiciones en las que ese número efectivo pueda variarse de forma controlada, lo que el diseño factorial actual no permite. Un canal con un número ajustable de capas o de escalas activas ofrecería el contraste necesario.

Dos asuntos metodológicos merecen atención en trabajos posteriores. El crossover $D \to N$ se dispersa sobre varios segundos, carece de dependencia estable con la velocidad de inyección y no define una escala física robusta, por lo que su estatus permanece indeterminado entre artefacto de estimación en escalas largas y continuación de la rama previa. Registros más largos, o un tratamiento estadístico específico para el extremo superior de la función de fluctuación, permitirían decidirlo. Por otra parte, la consistencia observada entre las pendientes DFA y las espectrales se obtuvo con parámetros espectrales optimizados respecto de la propia curva DFA, de modo que no constituye una validación independiente. Una verificación cruzada genuina exigiría fijar esos parámetros mediante un criterio externo al ajuste.

Por último, el valor del canal de laboratorio reside en el control, y ese control es también su límite. Las condiciones aquí recorridas son reproducibles y repetibles, pero no reproducen la variabilidad de un trayecto atmosférico real. La extensión natural del programa consiste en aplicar los mismos descriptores a propagación en

exteriores, donde la heterogeneidad del terreno y la evolución diurna introducen no estacionariedad a escalas que el turbulador no explora. La utilidad práctica de la caracterización propuesta, en comunicaciones ópticas en espacio libre y en óptica adaptativa, dependerá de que los descriptores conserven su capacidad de ordenamiento fuera del laboratorio.

Bibliografía

M. A. Al-Habash, L. C. Andrews, and R. L. Phillips. Mathematical model for the irradiance probability density function of a laser beam propagating through turbulent media. *Optical Engineering*, 40(8):1554–1562, 2001.

L. C. Andrews and R. L. Phillips. *Laser Beam Propagation through Random Media*. SPIE Press, Bellingham, WA, 2nd edition, 2005.

Jushan Bai and Pierre Perron. Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes. *Econometrica*, 66(1):47–78, 1998. doi: 10.2307/2998540.

Christian Beck. From time series to superstatistics. *Physical Review E*, 72(5):056133, 2005.

Christian Beck and E. G. D. Cohen. Superstatistics. *Physica A*, 322:267–275, 2003. doi: 10.1016/S0378-4371(03)00019-0.

Andrew C. Berry. The Accuracy of the Gaussian Approximation to the Sum of Independent Variates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 49(1): 122–136, 1941.

Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, 7th edition, 1999. doi: 10.1017/CBO9781139644181.

Irving Widdowson Burr. Cumulative frequency functions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 13(2):215–232, 1942. doi: 10.1214/aoms/1177731607.

M. Charnotskii. Sparse spectrum model for a turbulent phase. *Journal of the Optical Society of America A*, 30(3):479–488, March 2013. doi: 10.1364/JOSAA.30.000479.

M. Charnotskii. Optical phase under deep turbulence conditions. *Journal of the Optical Society of America A*, 31(8):1766–1772, August 2014. doi: 10.1364/JOSAA.31.001766.

M. I. Charnotskii. Turbulence effects on the imaging of an object with a sharp edge: asymptotic technique and aperture-plane statistics. *Journal of the Optical Society of America A*, 13(5):1094–1105, May 1996. doi: 10.1364/JOSAA.13.001094.

Mikhail Charnotskii. Passive scintillometer: theory and field measurements. *Journal of the Optical Society of America A*, 38(12):1766–1775, 2021. doi: 10.1364/JOSAA.438401.

V. M. Cora. Heavy-Tailed Statistics in Optical Beam Wandering: The Role of Weibull Distributions and H-Theory. Preprint, 2025. Estado al cierre de esta tesis: **preprint sin revisión por pares**; los resultados derivados de esta referencia se citan como motivación teórica y se contrastan con fuentes consolidadas (Beck & Cohen 2003, Burr 1942, Tadikamalla 1980)., 2025.

S. Corrsin. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, 22(4):469–473, 1951.

C. E. Coulman, J. Vernin, Y. Coqueugniot, and J.-L. Caccia. Outer scale of turbulence appropriate to modeling refractive-index structure profiles. *Applied Optics*, 27(1):155–160, 1988.

Peter Alan Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 2015. ISBN 978-0-19-872258-8.

Satya D. Dubey. A Compound Weibull Distribution. *Naval Research Logistics Quarterly*, 15(2):197–201, 1968.

B. Edlén. The refractive index of air. *Metrologia*, 2(2):71–80, 1966.

Paul Embrechts and Makoto Maejima. *Selfsimilar Processes*. Princeton University Press, Princeton, 2002.

C.-G. Esseen. On the liapounoff limit of error in the theory of probability. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, 28A(9):1–19, 1942.

G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola. Particles and fields in fluid turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 73(4):913–975, 2001.

David L. Fried. Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures. *Journal of the Optical Society of America*, 56(10):1372–1379, 1966. doi: 10.1364/JOSA.56.001372.

U. Frisch. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Yudai Fujimoto, Madhur Mangalam, and Ken Kiyono. Enhanced scaling crossover detection in long-range correlated time series. *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 14: 100125, 2025. doi: 10.1016/j.csfx.2024.100125.

G. Funes, F. Olivares, C. G. Weinberger, Y. D. Carrasco, L. Nuñez, and D. G. Pérez. Synthesis of anisotropic optical turbulence at the laboratory. *Optics Letters*, 41 (24):5696–5699, 2016.

Gustavo Funes, Eduardo Figueroa, Damián Gulich, Luciano Zunino, and Darío G. Pérez. Characterizing inertial and convective optical turbulence by detrended fluctuation analysis. In *Remote Sensing of Clouds and the Atmosphere XVIII; and Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems XVI*, volume 8890 of *Proc. SPIE*, page 889016, 2013. doi: 10.1117/12.2028698.

C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, Berlin, 2nd edition, 1994.

E. Ge and Y. Leung. Detection of crossover time scales in multifractal detrended fluctuation analysis. *Journal of Geographical Systems*, 15(2):115–147, 2013.

Iván R. R. González, Darío G. Pérez, Hishan Farfán, Antônio M. S. Macêdo, and Giovani L. Vasconcelos. Analysis of non-gaussian wandering fluctuations on multi-point targets imaging through controlled heterogeneous turbulence. *Optics and Laser Technology*, 200:115079, 2026. doi: 10.1016/j.optlastec.2026.115079.

A. Goshtasby. Image registration by local approximation methods. *Image and Vision Computing*, 6(4):255–261, 1988. doi: 10.1016/0262-8856(88)90016-9.

Pilar Grau-Carles. Bootstrap testing for detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 360:89–98, 2006. doi: 10.1016/j.physa.2005.05.074.

Damián Gulich, Gustavo Funes, Darío Perez, and Luciano Zunino. Estimation of c_n^2 based on scintillation of fixed targets imaged through atmospheric turbulence. *Optics Letters*, 40(23):5642–5645, 2015. doi: 10.1364/OL.40.005642.

H. J. Hilhorst. Central limit theorems for correlated variables: some critical remarks. *Brazilian Journal of Physics*, 39(2A):371–379, 2009.

Jan W. Kantelhardt, Eva Koscielny-Bunde, Henio H. A. Rego, Shlomo Havlin, and Armin Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 295(3–4):441–454, 2001. doi: 10.1016/S0378-4371(01)00144-3.

Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Shlomo Havlin, Armin Bunde, and H. Eugene Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1–4):87–114, 2002. doi: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3.

Ken Kiyono. Establishing a direct connection between detrended fluctuation analysis and power spectral density analysis. *Physical Review E*, 92(4):042925, 2015. doi: 10.1103/PhysRevE.92.042925.

A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:301–305, 1941.

A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1):82–85, 1962.

Olga Korotkova and Italo Toselli. Non-Classic Atmospheric Optical Turbulence: Review. *Applied Sciences*, 11(18):8487, 2021. doi: 10.3390/app11188487.

R. H. Kraichnan. Kolmogorov's hypotheses and eulerian turbulence theory. *The Physics of Fluids*, 7(11):1723–1734, 1964. doi: 10.1063/1.2746572.

Solomon Kullback and Richard A. Leibler. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951. doi: 10.1214/aoms/1177729694.

L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1987.

Ola Løvsletten. Consistency of detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*, 96:012141, 2017. doi: 10.1103/PhysRevE.96.012141.

J. L. Lumley and K. Takeuchi. Application of central-limit theorems to turbulence and higher-order spectra. *Journal of Fluid Mechanics*, 74(3):433–468, 1976.

A. M. S. Macêdo, I. R. Roa González, D. S. P. Salazar, and G. L. Vasconcelos. Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems. *Physical Review E*, 95(3):032315, 2017. doi: 10.1103/PhysRevE.95.032315.

B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.

Benoit B. Mandelbrot and James R. Wallis. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5):967–988, 1969. doi: 10.1029/WR005i005p00967.

A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1975.

A. M. Obukhov. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. Geofiz.*, 5:453–466, 1941.

A. M. Obukhov. Structure of the temperature field in turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. Geofiz.*, 13:58–69, 1949.

Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 4th edition, 2002.

J. C. Pardo. A brief introduction to self-similar processes. Preprint, University of Bath. Available at ResearchGate (`https://www.researchgate.net/publication/228710884`). Cited under key Pardo2007, 2007.

C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, 49(2):1685–1689, 1994. doi: 10.1103/PhysRevE.49.1685.

D. G. Pérez. Non-Kolmogorov turbulence: Burr xii statistics of image-centroid displacement. *Optics Express*, 2025. in preparation.

D. G. Pérez and G. Funes. On a quasi-wavelet model of refractive index fluctuations due to atmospheric turbulence. *Optics Express*, 23(25):31627–31645, 2015.

D. G. Pérez, H. Farfán-Bachiloglu, and M. Sepúlveda. Spatiotemporal statistics of optical turbulence beyond Taylor's frozen turbulence hypothesis. *Journal of the Optical Society of America A*, 41(6):B135–B143, 2024.

D. G. Pérez, M. Sepúlveda, and H. Farfán-Bachiloglu. Scintillation in the image plane of structured targets under controlled optical turbulence. Manuscrito sometido a *Optics & Laser Technology*, JOLT-D-26-02782, 2026. **En revisión por pares a la fecha de defensa de esta tesis**; los resultados derivados de esta referencia se identifican explícitamente en el texto., 2026.

Darío G. Pérez and Luciano Zunino. Generalized wavefront phase for non-Kolmogorov turbulence. *Optics Letters*, 33(6):572–574, 2008. doi: 10.1364/OL.33.000572.

Darío G. Pérez, Luciano Zunino, and Mario Garavaglia. Modeling turbulent wavefront phase as a fractional Brownian motion: a new approach. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(10):1962–1969, 2004. doi: 10.1364/JOSAA.21.001962.

Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174:935–982, 1883. doi: 10.1098/rstl.1883.0029.

Lewis F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

H. Risken. *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer, Berlin, 2nd edition, 1996.

Iván René Roa González. *The H-Theory: Universality Classes of Hierarchical Complex Systems*. Ph.d. thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil, 2017.

F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in Optics*, 19:281–376, 1981.

R. N. Rodriguez. A guide to the Burr type XII distributions. *Biometrika*, 64(1): 129–134, 1977. doi: 10.1093/biomet/64.1.129.

Gennady Samorodnitsky and Murad S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York, 1994.

Ewin Sánchez C. Burr type-XII as a superstatistical stationary distribution. *Physica A*, 516:443–446, 2019. doi: 10.1016/j.physa.2018.10.044.

R. J. Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transforms*. Springer, Berlin, 1994.

Carmel Schwartz, Gil Baum, and Erez N. Ribak. Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 11(1):444–451, 1994. doi: 10.1364/JOSAA.11.000444.

M. Sepúlveda. *Characterizing optical turbulence in extreme conditions.* Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2024.

Donald Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, ACM '68, pages 517–524, New York, 1968. Association for Computing Machinery. doi: 10.1145/800186.810616.

Irina Shevtsova. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands. *arXiv preprint arXiv:1111.6554*, 2011.

K. R. Sreenivasan. On the universality of the Kolmogorov constant. *Physics of Fluids*, 7(11):2778–2784, 1995. doi: 10.1063/1.868656.

B. E. Stribling, B. M. Welsh, and M. C. Roggemann. Optical propagation in non-Kolmogorov atmospheric turbulence. In *Atmospheric Propagation and Remote Sensing IV*, volume 2471 of *Proc. SPIE*, pages 181–196, 1995. doi: 10.1117/12.211927.

Pandu R. Tadikamalla. A Look at the Burr and Related Distributions. *International Statistical Review*, 48(3):337–344, 1980. doi: 10.2307/1402945.

V. I. Tatarskii. *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation.* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.

G. I. Taylor. The spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society A*, 164 (919):476–490, 1938. doi: 10.1098/rspa.1938.0032.

H. Tennekes. Eulerian and lagrangian time microscale in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 67(3):561–567, 1975. doi: 10.1017/S0022112075000468.

H. Tennekes and J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, MA, 1972.

Italo Toselli, Larry C. Andrews, Ronald L. Phillips, and Valter Ferrero. Free-space optical system performance for laser beam propagation through non-Kolmogorov turbulence. *Optical Engineering*, 47(2):026003, 2008. doi: 10.1117/1.2870113.

Italo Toselli, Brij Agrawal, and Sergio Restaino. Light propagation through anisotropic turbulence. *Journal of the Optical Society of America A*, 28(3):483–488, 2011. doi: 10.1364/JOSAA.28.000483.

George E. Uhlenbeck and Leonard S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Physical Review*, 36(5):823–841, 1930. doi: 10.1103/PhysRev.36.823.

Theodore von Kármán. Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 34(11):530–539, 1948. doi: 10.1073/pnas.34.11.530.

Z. Warhaft. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32:203–240, 2000.

Camilo Germán Weinberger Cerro. Generación y Caracterización de Turbulencia Óptica. Tesis de magíster en ciencias mención en física, Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, July 2019. Director: Dr. Darío Gabriel Pérez.

Peter D. Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2):70–73, 1967. doi: 10.1109/TAU.1967.1161901.

Michael Wilczek and Yasuhito Narita. Wave-number–frequency spectrum for turbulence from a random sweeping hypothesis with mean flow. *Physical Review E*, 86 (6):066308, 2012. doi: 10.1103/PhysRevE.86.066308.

Michael Wilczek, Haitao Xu, and Yasuhito Narita. A note on Taylor's hypothesis under large-scale flow variation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 21:645–649, 2014. doi: 10.5194/npg-21-645-2014.

L. Zunino, D. Gulich, G. Funes, and D. G. Pérez. Turbulence-induced persistence in laser beam wandering. *Optics Letters*, 40(13):3145–3148, 2015.