

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO - CHILE



ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI PARA PROBLEMAS TEMPORALES MEDIANTE ESQUEMAS ESTABILIZADOS DE ELEMENTOS FINITOS

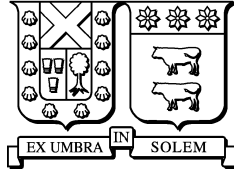
TESIS DE GRADO PRESENTADA POR
ESTEBAN GERARDO CORTÉS SANDOVAL
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
Y AL GRADO ACADÉMICO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA

PROFESOR GUÍA

DR. ALEJANDRO ALLENDES FLORES

5 DE DICIEMBRE DE 2017

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO - CHILE



ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI PARA PROBLEMAS TEMPORALES MEDIANTE ESQUEMAS ESTABILIZADOS DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS DE GRADO PRESENTADA POR
ESTEBAN GERARDO CORTÉS SANDOVAL
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
Y AL GRADO ACADÉMICO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA

Profesor Guía:
Alejandro Allendes

Examinadores:
Alejandro Allendes
Enrique Otárola
Pablo Venegas

5 DE DICIEMBRE DE 2017

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.

TÍTULO DE LA MEMORIA:

Análisis de error a posteriori para problemas temporales mediante esquemas estabilizados de elementos finitos.

AUTOR: Esteban Gerardo Cortés Sandoval.

TRABAJO DE MEMORIA, presentado como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático y Magíster en Ciencias, mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes

Firma

Alejandro Allendes

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Enrique Otárola

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Pablo Venegas

Universidad del Bío Bío, Chile.

Valparaíso, Octubre 2017.

A mis padres, Patricia y Esteban.

A mis hermanos, Cristóbal y Yocelinne.

A mi compañera, Valentina.

Agradecimientos

Quiero comenzar dando las gracias al profesor Alejandro, mi tutor en este trabajo, por haber accedido a trabajar conmigo y por el apoyo brindado en estos casi dos años que llevamos desarrollando este tema. Gracias también por siempre tener buena disposición para aclarar dudas, conversar y ayudarme en la definición de mi futuro profesional, presentar ideas o simplemente escuchar y apoyar las que yo tenía.

A mi familia, por el apoyo que me brindaron durante todos mis años de estudios. En especial quiero agradecer a mis padres cuyo esfuerzo diario es el que nos permitió tanto a mí como a mi hermana llegar a cursar estudios universitarios. Además quiero agradecer a mi mamá por todas sus enseñanzas, pero en especial por enseñarme a ser una persona responsable y buena, cualidades que me han ayudado a llegar al lugar en que me encuentro hoy en día.

A la Vale, mi compañera, que ha estado acompañándome durante toda esta etapa que ha sido el desarrollo de esta tesis, apoyándome en los momentos difíciles, celebrando los avances, recordándome las cosas importantes y siempre alentándome a seguir adelante.

A mis compañeros de carrera, y cuando digo carrera me refiero a más allá de esos que entraron conmigo. Gracias a aquellos que se motivaron a hacer actividades grandes y pequeñas y que en el proceso nos motivaron a otros a ser parte de eso. Gracias a los que me enviciaron en los juegos de mesa, nunca había tenido un vicio y este lo disfruto en demasía. Gracias por todos los comentarios ácidos, bullying constante, dibujos inapropiados en las esquinas de los cuadernos y todas esas tonteras que tantas risas causaron, sirvieron para desestresarnos en esta carrera que tantas veces se volvía tan estresante. Dana, Alonso, Seba, César, Arica, Pancho, Pame, Javier, Fernando, Harald, a todos gracias.

A todos los profesores que fueron parte de mi formación profesional, gracias, estoy seguro que de alguna u otra manera cada uno tuvo algún efecto en mí. A los funcionarios del departamento de matemática, en especial a Astrik y Andrea, por su buen ánimo y por todo el apoyo logístico que siempre nos brindaron en cada actividad que organizamos durante los últimos años.

Finalmente, quiero agradecer también a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica - CONICYT por el financiamiento otorgado que me permitió realizar mis estudios de Magíster.

A todos ustedes, gracias.

Resumen

Se desarrolla un análisis *a posteriori* para la ecuación de difusión-convección-reacción no estacionaria mediante esquemas estabilizados de elementos finitos. Dicho análisis se realiza en dos de las normas más usuales en términos de problemas espacio temporales, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y la norma usual del espacio $\mathbb{W}(0, T)$, donde la principal diferencia entre ambas es que para el segundo caso la norma espacial corresponde a una norma aumentada que considera la norma dual de la derivada temporal. De esta manera se obtiene en ambos casos, cotas superiores e inferiores garantizadas a través de un estimador de error *a posteriori* completamente computable el cual se descompone en cuatro componentes: una referente al error inicial η_0 , una al error espacial η_h^n , una al error temporal η_t^n y una al error de oscilación η_D^n . Para lo cual se tiene que en ambos casos la cota superior es global en espacio y tiempo, es decir de manera general se tiene que

$$\|e\|_{\Omega \times (0, T)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N ((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2),$$

mientras que la cota inferior es global en espacio y local en tiempo, es decir

$$(\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq C_1 \|e\|_{\Omega \times (t^{n-1}, t^n)}^2 + C_2 (\eta_D^n)^2.$$

La discretización del problema se hace a través del método de las líneas, haciendo uso de un esquema de Galerkin Estabilizado para la discretización de la variable espacial, considerando los esquemas de estabilización SUPG, GLS, ES y CIP, mientras que para la discretización de la variable temporal se hace uso del esquema de Backward-Euler. En función del análisis *a posteriori* realizado, se implementa un algoritmo computacional espacio temporal adaptativo. Se presentan resultados numéricos que ilustran la teoría desarrollada y el funcionar de los estimadores de error.

Abstract

We develop an *a posteriori* analysis for the non-stationary diffusion-convection-reaction equation through stabilized finite element schemes. Such analysis is performed in two of the most usual norms in terms of space temporary problems, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ and the usual norm of the space $\mathbb{W}(0, T)$, where the main difference between the two is that for the second case the spatial norm corresponds to an increased norm that considers the dual norm of the temporal derivative. In this way it is obtained in both cases, guaranteed upper and lower bounds through a fully computable *a posteriori* error estimator which is broken down into 4 components: one related to the initial error η_0 , another to the spatial error η_h^n , a third one related to temporary error η_t^n and one related to the oscillation error η_D^n . In both cases, the upper bound is global in space and time, i.e. in general we have that

$$\|e\|_{\Omega \times (0, T)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N ((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2),$$

while the lower bound is global in space and local in time, i.e.

$$(\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq C_1 \|e\|_{\Omega \times (t^{n-1}, t^n)}^2 + C_2 (\eta_D^n)^2.$$

The discretization of this problem is performed using the method of lines, making use of a stabilized Galerkin scheme for the discretization of the space variable, such as SUPG, GLS, ES and CIP, while the discretization of the temporal variable is made through the Backward-Euler scheme. According to the analysis performed, it is implement a space temporal adaptive algorithm. Finally, several numerical experiments are presented to test the performance of the error estimators.

Índice general

Portada	I
Agradecimientos	VIII
Resumen	X
Abstract	XI
Índice general	XV
Índice de figuras	XVI
Índice de cuadros	XIX
1. Introducción	1
1.1. Resumen de los principales resultados obtenidos	7
2. Preliminares	11
2.1. Notación General	11
2.2. Espacios que involucran el tiempo	13
2.3. Formulación Variacional del Problema Parabólico	14
2.4. Discretización del Intervalo Temporal	16
2.5. Notación de Elementos Finitos	16
2.6. Resultados Preliminares	18
3. Método de los Flujos Equilibrados aplicados a un problema elíptico	26
3.1. Problema Modelo	26

3.2. Método de elementos finitos estabilizados	27
3.2.1. Esquemas de Estabilización	28
3.2.1.1. Parámetros de Estabilización	29
3.3. Análisis <i>a posteriori</i>	30
3.3.1. Ecuación del Error	30
3.3.2. Construcción de flujos equilibrados en particiones regulares	33
3.3.3. Solución al problema de tipo Neumann	34
3.3.4. Cota superior para el error	35
3.3.5. Eficiencia del estimador	39
3.4. Robustez del Estimador	45
4. Problema Parabólico	50
4.1. Problema Modelo	50
4.2. Esquema Completamente Discretizado	51
4.2.1. Esquemas Estabilizados Temporales	52
4.3. Análisis <i>a posteriori</i>	53
4.3.1. El Residuo y la Ecuación del Error	53
4.3.2. Análisis <i>a posteriori</i> en norma $L^2(\mathbf{0}, T; H_0^1(\Omega))$	55
4.3.2.1. Cota superior para el error	55
4.3.2.2. Eficiencia del estimador	63
4.3.3. Análisis <i>a posteriori</i> en norma $\mathbb{W}(\mathbf{0}, T)$	75
4.3.3.1. Cota superior para el error	77
4.3.3.2. Eficiencia del estimador	81
4.4. Comparación entre estimadores según norma utilizada	91
4.5. Robustez del Estimador	92
4.6. Análisis para un campo convectivo espacio temporal	99
5. El algoritmo espacio temporal adaptativo TAFEM	105
5.1. Control de Error	106
5.1.1. Separación del estimador de error temporal	107
5.1.2. Cota uniforme vía ganancia de energía	108
5.1.3. Equidistribución del error en tiempo	110

5.2. El Algoritmo TAFEM	114
5.3. Consideraciones bajo campo convectivo espacio temporal	122
6. Resultados Numéricos	124
6.1. Ejemplo 1: Burbuja Exponencial	125
6.1.1. SUPG	126
6.1.2. ES	130
6.1.3. CIP	134
6.1.4. Comparación entre esquemas de estabilización	138
6.2. Ejemplo 2: Capa Límite	141
6.2.1. Caso $\varepsilon = 1$	142
6.2.1.1. SUPG	143
6.2.1.2. ES	146
6.2.1.3. CIP	149
6.2.1.4. Comparación entre esquemas de estabilización	152
6.2.2. Caso $\varepsilon = 0,1$	154
6.2.2.1. SUPG	155
6.2.2.2. ES	158
6.2.2.3. CIP	161
6.2.2.4. Comparación entre esquemas de estabilización	164
6.2.3. Caso $\varepsilon = 0,01$	166
6.2.3.1. SUPG	167
6.2.3.2. ES	170
6.2.3.3. CIP	173
6.2.3.4. Comparación entre esquemas de estabilización	176
6.2.4. Caso $\varepsilon = 0,001$	178
6.2.4.1. SUPG	179
6.2.4.2. ES	183
6.2.4.3. CIP	187
6.2.4.4. Comparación entre esquemas de estabilización	191
6.3. Ejemplo 3: Pulso Errante	193
6.3.1. SUPG	194

6.3.2. ES	198
6.3.3. CIP	202
6.3.4. Comparación entre esquemas de estabilización	206
7. Conclusiones y trabajos futuros	209
Bibliografía	211

Índice de figuras

2.1. Notación de lados, vértices y vectores normales unitarios del elemento $K \in \mathcal{P}$	18
3.1. Notación salto de la derivada.	29
6.1. Malla y condicion inicial, ejemplo 1.	125
6.2. Adaptatividad espacial, ejemplo 1, esquema SUPG.	127
6.3. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 1, esquema SUPG.	128
6.4. Comparación tiempo inicial y final, ejemplo 1, esquema SUPG.	129
6.5. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 1, esquema SUPG.	129
6.6. Adaptatividad espacial, ejemplo 1, esquema ES.	131
6.7. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 1, esquema ES.	132
6.8. Comparación tiempo inicial y final, ejemplo 1, esquema ES.	133
6.9. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 1, esquema ES.	133
6.10. Adaptatividad espacial, ejemplo 1, esquema CIP.	135
6.11. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 1, esquema CIP.	136
6.12. Comparación tiempo inicial y final, ejemplo 1, esquema CIP.	137
6.13. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 1, esquema CIP.	137
6.14. Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 1.	138
6.15. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 1.	139
6.16. Diferencia puntual entre esquema CIP mayor refinación espacial, tiempo final, ejemplo 1.	140
6.17. Malla inicial, ejemplo 2.	141
6.18. Condicion inicial, ejemplo 2, $\varepsilon = 1$	142
6.19. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema SUPG	144
6.20. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema SUPG	145

6.21. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema ES	147
6.22. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema ES	148
6.23. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema CIP	150
6.24. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema CIP . . .	151
6.25. Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$. .	152
6.26. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$. . .	153
6.27. Condicion inicial, ejemplo 2, $\varepsilon = 0,1$	154
6.28. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema SUPG	156
6.29. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema SUPG .	157
6.30. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema ES	159
6.31. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema ES . . .	160
6.32. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema CIP	162
6.33. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema CIP . . .	163
6.34. Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$. .	164
6.35. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$. .	165
6.36. Condicion inicial, ejemplo 2, $\varepsilon = 0,01$	166
6.37. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema SUPG.	168
6.38. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema SUPG.	169
6.39. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema ES	171
6.40. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema ES . .	172
6.41. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema CIP	174
6.42. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema CIP .	175
6.43. Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$. .	176
6.44. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$. .	177
6.45. Condicion inicial, ejemplo 2, $\varepsilon = 0,001$	178
6.46. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema SUPG.	180
6.47. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema SUPG.	181
6.48. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema SUPG.	182
6.49. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema ES	184
6.50. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema ES.	185
6.51. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema ES .	186

6.52. Adaptatividad espacial, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema CIP	188
6.53. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema CIP.	189
6.54. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema CIP .	190
6.55. Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$.	191
6.56. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$.	192
6.57. Malla y condicion inicial, ejemplo 3.	193
6.58. Adaptatividad espacial, ejemplo 3, esquema SUPG	195
6.59. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 3, esquema SUPG	196
6.60. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 3, esquema SUPG	197
6.61. Adaptatividad espacial, ejemplo 3, esquema ES	199
6.62. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 3, esquema ES	200
6.63. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 3, esquema ES	201
6.64. Adaptatividad espacial, ejemplo 3, esquema CIP	203
6.65. Adaptatividad espacial en vista 3D, ejemplo 3, esquema CIP	204
6.66. Comportamiento espacio temporal adaptativo, ejemplo 3, esquema CIP	205
6.67. Comparación comportamiento espacio temporal adaptativo, ref. espacial, ejemplo 3. . .	206
6.68. Comparación comportamiento espacio temporal adaptativo, ref. temporal, ejemplo 3. . .	207
6.69. Diferencia puntual entre esquemas estabilizados, tiempo final, ejemplo 3.	208
6.70. Comparación entre solución real y estabilizada, ejemplo 3.	208

Índice de cuadros

6.1. Tolerancias y parámetros, ejemplo 1.	125
6.2. Resultados generales, ejemplo 1, esquema SUPG.	126
6.3. Resultados generales, ejemplo 1, esquema ES.	130
6.4. Resultados generales, ejemplo 1, esquema CIP.	134
6.5. Error según esquema de estabilización, ejemplo 1.	138
6.6. Tolerancias y parámetros, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$	142
6.7. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema SUPG	143
6.8. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema ES	146
6.9. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$, esquema CIP	149
6.10. Error según esquema de estabilización, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 1$	153
6.11. Tolerancias y parámetros, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$	154
6.12. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema SUPG	155
6.13. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema ES	158
6.14. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$, esquema CIP	161
6.15. Error según esquema de estabilización, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,1$	165
6.16. Tolerancias y parámetros, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$	166
6.17. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema SUPG.	167
6.18. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema ES	170
6.19. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$, esquema CIP	173
6.20. Error según esquema de estabilización, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,01$	177
6.21. Tolerancias y parámetros, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$	178
6.22. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema SUPG.	179
6.23. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema ES	183

6.24. Resultados generales, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$, esquema CIP	187
6.25. Error según esquema de estabilización, ejemplo 2, caso $\varepsilon = 0,001$	192
6.26. Tolerancias y parámetros, ejemplo 3.	193
6.27. Resultados generales, ejemplo 3, esquema SUPG	194
6.28. Resultados generales, ejemplo 3, esquema ES	198
6.29. Resultados generales, ejemplo 3, esquema CIP	202
6.30. Error según esquema de estabilización, ejemplo 3.	207

Capítulo 1

Introducción

El modelamiento matemático de diversos fenómenos en múltiples áreas de la ciencia es usualmente expresado en términos de ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias. La gran mayoría de dichas ecuaciones no pueden ser resueltas a través de métodos analíticos por lo que se hace necesario emplear técnicas numéricas para poder obtener una solución. El método de elementos finitos es una técnica del análisis numérico que permite obtener una aproximación a la solución de una ecuación diferencial ordinaria o parcial, bajo ciertas condiciones iniciales y de contorno apropiadas. La premisa sobre la cual se basa este método establece que el dominio del problema en cuestión puede ser discretizado, subdividiéndolo en una serie de regiones más pequeñas denominadas elementos, sobre las cuales se resuelven las ecuaciones diferenciales de forma aproximada. Al ensamblar el conjunto de ecuaciones de cada elemento, es posible determinar la solución en todo el dominio. La idea de ese método fue propuesta por Richard Courant en 1943 (ver [35]), pero la relevancia de su trabajo no fue reconocida hasta cerca del año 1950, cuando ingenieros redescubrieron el método. Sin embargo, no fue hasta cerca del año 1960 en que comenzó a desarrollarse el análisis matemático referente al método de elementos finitos. Hoy en día esta técnica tiene un sólido fundamento teórico (ver [25, 26, 32, 39, 46, 55, 66, 73]) y es una de las herramientas más utilizadas en la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales.

En el presente trabajo, el problema a estudiar a través de este método corresponde a la ecuación de difusión-convección-reacción no estacionaria que modela la propagación de una sustancia en un medio. La solución de dicha ecuación representa la concentración de la sustancia que se dispersa y es una información muy importante en el estudio de diversos problemas como por ejemplo: problemas de contaminación de aguas (ver [67]), simulación de extracción de petróleo desde depósitos subterráneos (ver [43]), flujos en reactores químicos (ver [11]), problemas de transporte de calor por convección con

un gran número de Péclet (ver [52]), ubicación óptima de nuevas plantas industriales (ver [60]), entre otros. En términos matemáticos, dicho problema se enuncia como: *Hallar u tal que*

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + \kappa u = f & , \text{ en } \Omega \times (0, T] \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \times (0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

donde, adelantando un poco la notación que será introducida en el siguiente capítulo, Ω es el dominio sobre el cual se busca resolver el problema, T es el tiempo final, ε es el coeficiente de difusión el cual cumple que $0 < \varepsilon \ll 1$, \mathbf{a} es un campo de velocidad, $\kappa \geq 0$ es el coeficiente de disipación, u_0 es la condición inicial del problema y f es un término fuente. Dicha ecuación corresponde a una ecuación diferencial del tipo parabólica singularmente perturbada. Como fue presentado por Roos, Stynes y Tobiska en [71], una ecuación singularmente perturbada depende de un parámetro positivo pequeño, conocido como parámetro de perturbación, el cual genera que la solución presente un comportamiento de *capa límite* a medida que dicho parámetro se acerca a un valor crítico. En el caso específico de la ecuación de difusión-convección-reacción, cuando el parámetro de difusión ε es cercano a cero, el comportamiento elíptico del operador

$$\mathcal{L}(v) = -\varepsilon \Delta v + \mathbf{a} \cdot \nabla v + \kappa v$$

se ve afectado. En efecto, el término convectivo comienza a tener una influencia significativa en gran parte del dominio, mientras que la parte difusiva solo influencia ciertas zonas, típicamente subdominios estrechos en los cuales el gradiente de la solución es grande, siendo su magnitud proporcional a alguna potencia negativa del parámetro de perturbación ε . Dicho comportamiento es descrito como un comportamiento de *capa límite*, ya nombrado anteriormente (ver [72]). En este contexto, se dice que un método es *robusto* si su rendimiento no se ve afectado por el comportamiento del parámetro de perturbación y de la misma forma, una estimación es *robusta* si no se ve afectada de mala forma por el parámetro.

Como es sabido las formulaciones de elementos finitos estándar de Galerkin no logran aproximar de manera correcta la solución de ecuaciones singularmente perturbadas debido a la pérdida de estabilidad y la imposibilidad de aproximar la solución dentro de las *capas límites*, generándose oscilaciones en la solución incluso fuera de estas. Para superar esta problemática se puede enriquecer o mejorar la formulación de elementos finitos con tal de evitar o reducir estos efectos no-físicos, o también se puede refinar la discretización del dominio en las *capas límites* con el fin de poder aproximar de mejor manera la solución. La primera alternativa corresponde al uso de formulaciones de elementos finitos estabilizados mientras que la segunda corresponde al desarrollo de un análisis de error *a posteriori*.

Con respecto a los métodos de elementos finitos estabilizados, estos se forman adhiriendo a la formulación variacional estándar de Galerkin términos dependientes de la malla y que generen estabilización numérica. Para el caso estacionario del problema de difusión-convección-reacción se han desarrollado múltiples esquemas, como por ejemplo esquemas del tipo residual como *streamline upwind Petrov-Galerkin SUPG* (ver [49]), *Galerkin least squares GLS* (ver [50]) y *unusual stabilized finite element method USFEM* (ver [44]). También existen los esquemas simétricos entre los cuales se encuentran *local projection stabilization LPS* (ver [21, 61]), *continuous interior penalty CIP* (ver [37]) y *edge stabilization* (ver [30]). Varios de estos esquemas han sido extendidos para el caso no-estacionario. Lube y Wiess estudian dos versiones del esquema *GLS* para problemas parabólicos singularmente perturbados en [57], mientras que Codina estudia diferentes esquemas de estabilización para el mismo problema, entre los cuales se encuentran *SUPG* y *GLS* en [33]. La estabilidad del esquema *SUPG* en el caso no-estacionario es estudiada en detalle por Bochev, Gunzburger y John en [23]. John y Novo también realizan un análisis de error del método *SUPG* para el caso no estacionario en [53]. Burman y Fernández estudian en [29] problemas singularmente perturbados parabólicos e hiperbólicos con esquemas de estabilización simétricos, entre los que se encuentran *CIP*, *LPS* y *orthogonal subscale method OSS* (ver [34]). Los mismos autores estudian en detalle el esquema *CIP* en [28].

Con respecto al análisis de error *a posteriori*, se tiene que inicialmente, el análisis del método de elementos finitos fue desarrollado en un marco de análisis *a priori*, lo que implica determinar la existencia y unicidad de una solución y establecer estimaciones de regularidad y de orden de convergencia para secuencias de aproximaciones (ver [32]). El mayor inconveniente de este tipo de análisis es que solo entrega información del comportamiento asintótico del error de aproximación. Con el fin de superar dicho problema es que surgió el análisis de error *a posteriori*, el cual busca controlar y reducir el error de aproximación modificando el espacio de elementos finitos utilizado a través del refinamiento adaptativo de la discretización del dominio. La implementación de algoritmos de elementos finitos adaptativos basados en análisis *a posteriori* permiten un uso mucho más eficiente de los recursos computacionales. Una pieza fundamental en el desarrollo de dichos algoritmos es la disponibilidad de un indicador de error *a posteriori* η_K para el error sobre un elemento individual usualmente denotado por K . El análisis de métodos adaptativos típicamente depende de dos propiedades de dicho indicador. Primero, la suma de los indicadores locales debe proveer una cota superior confiable del error total $\|e\|_\Omega$, lo que significa

que existe una constante positiva C que es independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\|e\|_{\Omega}^2 \leq C\eta^2 := C \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2,$$

donde \mathcal{P} denota la discretización del dominio o malla y el error es medido en una norma apropiada. Segundo, el indicador de error debe ser eficiente en el sentido de que existe una constante positiva c , nuevamente independiente del tamaño de la malla, tal que

$$c\eta_K^2 \leq \|e\|_K^2,$$

donde \tilde{K} denota un patch el cual está formado por el elemento K junto con los elementos vecinos que comparten un nodo común con éste. Si bien, la confiabilidad y la eficiencia del indicador son suficientes para garantizar una convergencia del algoritmo adaptativo, lo ideal sería poder utilizar el indicador de error como un criterio de parada para el algoritmo. En tal caso es necesario conocer de manera explícita el valor de la constante C que aparece en la cota superior. De esta manera si se tiene que,

$$\|e\|_{\Omega}^2 \leq \eta^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2,$$

entonces se dice que el estimador de error η esté garantizado, lo que significa que es un estimador de error *a posteriori* completamente computable. El interés en estimaciones de error *a posteriori* surgió cerca del año 1978 a través del pionero trabajo de Babuška and Rheinboldt (ver [17]) y ha continuado desarrollándose, a la par con tópicos como el refinamiento de mallas y adaptividad para aproximaciones de elementos finitos estándar conformes, hasta alcanzar un alto grado de desarrollo (ver [4, 18, 19, 38, 69]). En el caso de problemas parabólicos singularmente perturbados, el estudio de estimadores que cumplan con características como la confiabilidad, la eficiencia y que sean robustos con respecto al parámetro de perturbación (u otros parámetros como el tamaño de la malla) ha sido un tópico activo de investigación durante años. El enfoque más usual corresponde a utilizar métodos de elementos finitos de bajo orden (fijo) para la discretización de la variable espacial acoplado con un esquema implícito como Backward Euler o Crank-Nicolson para la discretización de la variable temporal, lo cual lleva a obtener estimaciones en una gran variedad de normas. En dicho contexto, la confiabilidad y eficiencia ha sido alcanzada en la norma de la energía $L^2(H^1)$ (la notación de espacios $X(Y)$ se refiere a X en tiempo e Y en espacio) por Picasso [65], Verfürth [76], Chen y Feng [31], Repin [68] y Bergam, Bernardi y Mghazli [22]. Cabe resaltar que los resultados obtenidos por Picasso y Verfürth [65, 76] requieren ciertas restricciones entre los tamaños del paso temporal y espacial. Con respecto a normas de mayor orden,

Makridakis y Nochetto obtienen la confiabilidad del estimador específicamente en la norma $L^\infty(L^2)$ a través de la técnica de reconstrucción elíptica para el caso semidiscreto en [59] y luego el resultado es extendido al caso fully discreto por Lakkis y Makridakis en [56], en las normas $L^\infty(L^2)$, $L^\infty(H^1)$ y $H^1(L^2)$ haciendo uso de la misma técnica. En [77] Verfürth considera la norma $L^2(H^1) \cap H^1(H^{-1})$, por lo que tanto la confiabilidad como la eficiencia del estimador son probadas aumentando la norma de la energía con una norma dual de la derivada temporal, de manera tal que la cota inferior es local en tiempo pero global en espacio, y no requiere ninguna restricción entre el paso de tiempo temporal y el espacial. Cabe resaltar que los trabajos nombrados solo resuelven el problema de la ecuación del calor lineal o cuasilineal. En [78] Verfürth considera el problema de difusión-convección-reacción no estacionario obteniendo estimaciones de error robustas, con cota superior global en tiempo y espacio y cota inferior global en espacio y local en tiempo. Como ya fue dicho anteriormente, al tratar con problemas singularmente perturbados es necesario considerar el uso de esquemas de elementos finitos estabilizados; Araya y Venegas realizan un análisis *a posteriori* en [14] para el problema de difusión-convección-reacción no estacionario a través de un esquema de elementos finitos estabilizado del tipo *USFEM* acoplado con el esquema de Backward Euler, obteniendo un estimador confiable y eficiente. Por otra parte, en [74] Tobiska y Verfürth obtienen estimaciones de error *a posteriori* robustas con respecto a los parámetros de convección y reacción en relación con el parámetro de difusión tanto para el problema de difusión-convección-reacción estacionario como no estacionario, haciendo uso de esquemas de elementos finitos estabilizados conformes (considerando los esquemas de estabilización *SUPG*, *CIP*, *LPS* y *subgride scale approach* [47, 48]) acoplados con un esquema- θ . En ninguno de los casos anteriores la cota superior obtenida es completamente computable debido entre otras razones al uso de técnicas como el método de la energía junto con operadores de interpolación que generan constantes que no son conocidas de forma explícita ó al hecho de que para obtener un resultado robusto se hace necesario la utilización de normas duales, las cuales no son computables (de manera exacta). Hasta el momento, la mayoría de los resultados en los cuales la cota superior es completamente computable corresponden a problemas elípticos. En efecto, Braess y Schöberl, Destuynder y Métiver, Luce y Wohlmuth y Vohralík [24, 36, 58, 80] obtienen cotas superiores garantizadas para el problema de Poisson, mientras que Repin y Sauter obtienen una cota superior garantizada para el problema de reacción difusión en [70]. En [10] Ainsworth, Allendes, Barrenechea y Rankin obtienen una cota superior completamente computable en la norma de la energía para el problema de difusión-convección-reacción estacionario en tres dimensiones a través de un método de elementos finitos estabilizado conforme y haciendo uso del método de residuos

equilibrados [4, 9]. En dicho método, contribuciones por cada cara/lado, que suman a cero, se agregan al residuo de la ecuación tal que los residuos estén en equilibrio con respecto a cada elemento. Luego, el estimador es obtenido explícitamente como la solución del siguiente problema local de Neumann,

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K &= p_K & \text{en } K \\ \boldsymbol{\sigma}_K \cdot \mathbf{n} &= p_{\gamma,K} & \text{en cada } \gamma \in \partial K, \end{cases}$$

donde p_K y $p_{\gamma,K}$ son ciertas funciones polinomiales dadas, definidas en el elemento y en cada lado/cara del elemento, respectivamente. Dicha técnica ha sido aplicada a problemas elípticos lineales de segundo orden, problemas de reacción-difusión singularmente perturbados y problemas de elasticidad lineal en [2, 3, 5, 6, 7, 8]. Con respecto a problemas parabólicos, un detallado análisis que unifica diversos esquemas de discretización espacial ha sido dado por Ern y Vohralík en [40], obteniendo cotas superiores completamente computables. Más recientemente, en [41] Ern, Smears y Vohralík realizan un análisis *a posteriori* del problema parabólico basados en esquemas conformes de Galerkin de orden arbitrario para la discretización espacial, y en esquemas de Galerkin discontinuos también de orden arbitrario, para la variable temporal; de esta manera obtienen una cota superior garantizada mientras que la eficiencia del estimador es local en ambas variables. Finalmente, los trabajos de Chen y Feng [31], Kreuzer, Möller, Siebert y Schmidt [54], Möller [63] y Gaspoz, Kreuzer, Siebert y Ziegler [45] tratan en detalle el tema del análisis de convergencia de algoritmos espacio temporales adaptativos para el problema parabólico. En [31], donde la variable espacial se discretiza a través de un esquema de Galerkin conforme y la variable temporal a través de un esquema de Galerkin discontinuo de orden cero dG(0), se desarrolla un algoritmo espacio temporal adaptativo donde el cálculo de cada paso temporal termina y donde el error de la aproximación calculado se encuentra por debajo de una tolerancia prescrita cuando el tiempo final es alcanzado; el problema de dicho algoritmo es que teóricamente la secuencia de instancias de tiempo generada $\{t^n\}_{n \geq 0}$ podría no ser finita, pudiendo ocurrir que $t^n \rightarrow t^* < T$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este problema fue superado en [54] con la determinación *a priori* de un paso de tiempo mínimo τ_* . En [45], la variable temporal se discretiza a través de un esquema de Galerkin discontinuo de orden arbitrario y el algoritmo desarrollado hace uso del principio de equidistribución del error en tiempo, obteniendo mejores resultados numéricos bajo las mismas condiciones que en [54].

El presente trabajo tiene como objetivo obtener una cota superior completamente computable a través de un análisis *a posteriori* del problema de difusión-convección-reacción no estacionario. La discretización del problema se realiza a través del método de las líneas (ver [16, 51]), haciendo uso de esquemas de elementos finitos estabilizados conformes para la discretización de la variable espacial y de

un esquema Backward Euler para la discretización de la variable temporal. El análisis *a posteriori* se realiza en dos normas, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y la norma usual del espacio $\mathbb{W}(0, T)$; esto debido a que si bien en ambos casos la cota superior es completamente computable, en el sentido de que no se desconoce el valor de ninguna constante asociada a la estimación, solo el primer caso realmente puede ser calculado explícitamente, pues el segundo contiene una norma dual. En cada caso, la obtención del estimador completamente computable se hace gracias al uso de la técnica de los residuos equilibrados junto con la resolución de un conjunto de problemas locales de Neumann. El análisis realizado es válido para dos y tres dimensiones.

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se introduce la notación y algunos resultados preliminares a utilizar a lo largo de todo el escrito. En el capítulo 3 se realiza un análisis *a posteriori* para el problema de difusión-convección-reacción estacionario haciendo uso del método de residuos equilibrados con el fin de presentar dicha técnica y facilitar la utilización de la misma en nuestro caso de estudio. En el capítulo 4 se presenta el problema de difusión-convección-reacción no estacionario, realizando el análisis *a posteriori* en las dos normas anteriormente nombradas, obteniendo en cada caso un estimador de error completamente computable. En el capítulo 5 se presenta el algoritmo espacio temporal adaptativo, presentando primero la estrategia de control de error utilizada para luego presentar en detalle el algoritmo adaptativo. En el capítulo 6 se presentan resultados numéricos que ilustran la teoría desarrollada y el funcionar de los estimadores y finalmente, en el capítulo 7 se presentan conclusiones y trabajos futuros.

1.1. Resumen de los principales resultados obtenidos

A continuación se presentará el principal resultado obtenido con respecto al análisis *a posteriori* del problema (P), definido en la introducción de este escrito. La notación utilizada corresponde a aquella definida en el Capítulo 2 de preliminares.

Comenzamos presentando la formulación variacional asociada a dicho problema, la cual se enuncia como: *Hallar $u \in \mathbb{W}(0, T)$, $t \in (0, T)$ c.t.p., tal que*

$$(V) \quad \begin{cases} \langle \partial_t u(t), v \rangle + \mathcal{B}(u(t), v) = (f(t), v) \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{B}(v, w) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla v \cdot \nabla w + (\mathbf{a} \cdot \nabla v) w + \kappa v w \, dx. \quad (1.1)$$

Esta formulación tiene una única solución débil según el Teorema de Lions (ver Teorema 6.6 en [39]). La formulación completamente discretizada de la formulación débil corresponde a: Dada $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$, hallar $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$, para $1 \leq n \leq N$ tal que

$$(EG)_{Stb} \quad \frac{1}{\tau_n} \langle u_h^n - u_h^{n-1}, v_h \rangle + \mathcal{B}(u_h^n, v_h) + \mathcal{S}^n(u_h^n, f^n; v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h^n,$$

donde $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ viene dada por (1.1), $\mathcal{S}^n(\cdot, \cdot; \cdot)$ corresponde a un término de estabilización y f^n es la media temporal de la función f en el intervalo de tiempo $(t^{n-1}, t^n]$. Entonces, considerando las normas

$$\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \|v\|_{\Omega}^2 dt, \quad (1.2)$$

$$\|v\|_{\mathbb{W}(0,T)}^2 = \int_0^T \|v\|_{\Omega}^2 + \|v'\|_*^2 dt, \quad (1.3)$$

se tiene que el principal resultado del presente trabajo es:

Teorema 1.1.1. (*Cota superior e inferior para el problema de difusión-convección-reacción no estacionario en normas $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0,T)}$*)

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{Stb}. Luego, para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, si se considera la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$, se tiene que

$$\|e\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (1.4)$$

y

$$\begin{aligned} (\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq & \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K'))}^2 \right. \\ & + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K',D}^n)^2 \\ & + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left[\mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K''))}^2 \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K'')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

con $(\eta_{K,\cdot}^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,\cdot}^n)^2$ y los estimadores de error local dados por

$$\eta_0 = \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.6)$$

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (1.7)$$

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{\tau_n} \|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K, \quad (1.8)$$

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{3} \mathcal{C}_\Omega \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

las constantes asociadas a la cota inferior del error iguales a

$$\mathcal{C}_1^H(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}K}^2 + \frac{\mathcal{C}_\Omega^4}{\tau_n^2} + \mathcal{C}_{\mathcal{B}K}^2 \frac{h_K^2 \kappa}{\varepsilon} \right), \quad (1.10)$$

$$\mathcal{C}_1^L(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = \frac{(1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)}{\tau_n} \max \left\{ \frac{h_K^2}{\varepsilon}, \mathcal{C}_\Omega^2 \right\}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{C}_4(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{h_K^2}{3\varepsilon} \right). \quad (1.14)$$

mientras que si se considera la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0,T)}$, se tiene que

$$\|e\|_{\mathbb{W}(0,T)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (1.15)$$

y

$$\begin{aligned} (\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq & \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K',D}^n)^2 \right. \\ & \left. + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

con $(\eta^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,\cdot}^n)^2$ y los estimadores de error local definidos como

$$\eta_0 = \sqrt{1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.17)$$

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (1.18)$$

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K, \quad (1.19)$$

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \mathcal{C}_\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1.20)$$

y las constantes asociadas a la cota inferior del error dadas por

$$\mathcal{C}_1(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \left(2 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right), \quad (1.21)$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right). \quad (1.23)$$

Para ambos casos la constante de estabilización y el término estabilizado están dados por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K^n} = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1) = \begin{cases} 0 & , \text{ para SUPG, ES, CIP y } \kappa \geq 0, \\ \tau_K (-\mathcal{R}_K^n - \text{osc}_K^n, \kappa)_K & , \text{ para GLS y } \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

con τ_K el parámetro de estabilización especificado en la Sección 3.2.1.1, el campo σ_K^n definido en el Lema 3.3.1, $\mathcal{C}_{P,\Omega}$ dada por (2.6), la constante de continuidad de la forma bilineal $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ definida sobre todo el dominio Ω dada por (3.7) mientras que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$, su restricción al elemento K está dada por (4.4), $\mathcal{C}_{\text{osc},K}$ viene dada por (4.35) y \mathcal{C}_Ω dada por (4.42).

Capítulo 2

Preliminares

En el presente capítulo se introduce la notación general junto con algunos resultados preliminares que serán utilizados a lo largo del presente trabajo.

2.1. Notación General

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, con $d = 2, 3$, un dominio abierto y acotado, con frontera $\partial\Omega$. Se denota por $\overline{\Omega}$ la clausura de Ω . Se hará uso de la notación estándar para los espacios de Lebesgue, Sobolev ([1, 69]), normas y productos internos; en efecto, el espacio de Lebesgue de funciones cuadrado integrables sobre el dominio Ω es denotado por $L^2(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones esencialmente acotadas, i.e.

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx := \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty \right\},$$
$$L^\infty(\Omega) = \left\{ v : \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)| := \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Para el caso vectorial se utilizará la notación $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^d$ y $\mathbf{L}^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega)^d$. Si se considera un conjunto $A \subseteq \Omega$, el producto interno en $L^2(A)$ se denota por $(\cdot, \cdot)_A$ y además (\cdot, \cdot) si $A = \Omega$. Con respecto a los operadores diferenciales utilizados, para una función escalar $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_d)$ se tiene que $\partial_i u$ representa la derivada parcial de u con respecto a la variable x_i , y luego los operadores gradiente y laplaciano se definen como

$$\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)^t \in \mathbb{R}^d,$$
$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u \in \mathbb{R},$$

mientras que para una función vectorial $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_d(\mathbf{x}))$ se define los operadores divergencia y gradiente como

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \partial_i u_i \in \mathbb{R},$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1} & \frac{\partial u_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

Con respecto a espacios de Sobolev, sea $s \in \mathbb{N}$, luego se define el espacio

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq s \right\}$$

donde $D^\alpha u$ corresponde a la notación multi-índice para las derivadas débiles de u , la cual para $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ se define como

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad D^{(0,\dots,0)} u := u,$$

mientras que, para una función $u \in L^1(\Omega)$ se dice que $v \in L^1(\Omega)$ es su α -ésima derivada débil si y sólo si

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

y, haciendo una analogía a la notación clásica de derivada, se denota por $D^\alpha u := v$.

Nota 2.1.1. *El concepto de derivada débil generaliza la noción de la derivada clásica. En particular, si $f \in C^1(\Omega)$, i.e., f es diferenciable en el sentido clásico, la derivada clásica coincide con la derivada débil.*

Volviendo a los espacios de Sobolev, en particular se denota por $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, mientras que $H_0^1(\Omega)$ denota el subespacio de $H^1(\Omega)$ compuesto de las funciones cuya traza es cero en el borde de Ω y $H^{-1}(\Omega)$ denota el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ con respecto al producto interno de $L^2(\Omega)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ denota el producto en dualidad entre $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$. La norma del espacio $H^1(\Omega)$ es denotada por $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y se define como

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{H^1(\Omega)}^2,$$

donde $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ denota la semi-norma $H^1(\Omega)$ y viene dada por

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

El espacio $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ denota el espacio de campos vectoriales cuadrado integrables cuya divergencia es también una función cuadrado integrable.

2.2. Espacios que involucran el tiempo

Sean $T > 0$ un tiempo fijo y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ definido anteriormente, se define el dominio espacio temporal $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Sea u una función definida en Ω_T . Se considera u como una función del tiempo t con valores en un espacio de funciones V , cuyos elementos son funciones que solo dependen de la variable espacial, i.e.,

$$\begin{aligned} u : (0, T) &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto u(t) \equiv u(\cdot, t) \end{aligned}$$

Este tipo de funciones es denominada funciones de valores vectoriales, aunque también son conocidas como funciones abstractas.

A continuación se presentan los principales espacios de funciones a utilizar en el análisis del problema parabólico, haciendo uso de la teoría de integrales de Bochner (para más detalle con respecto a la teoría de Bochner referirse al Capítulo V.5 de [81] o al Capítulo 1 de [63]). El espacio de funciones cuadrado integrables con valores en un espacio de Banach V se denota por $L^2(0, T; V)$ mientras que el espacio de funciones continuas con valores en un espacio de Banach V se denota por $\mathcal{C}(0, T; V)$, y las normas asociadas a cada espacio son

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, T; V)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \\ \|u\|_{\mathcal{C}(0, T; V)} &= \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_V. \end{aligned}$$

respectivamente. Para cada par $a < b$ de números reales, se denota por $\mathbb{W}(a, b)$ al espacio de todas las funciones $u \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega))$ cuya derivada temporal débil $\partial_t u = u'$ pertenece a $L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$. Además se considera la norma

$$\|u\|_{\mathbb{W}(a, b)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_{\Omega}^2 + \|u'(t)\|_*^2 dt \right)^{1/2}$$

donde $\|\cdot\|_{\Omega}$ corresponde a la norma de la energía en el espacio $H_0^1(\Omega)$ y $\|\cdot\|_*$ es la norma del operador definida como

$$\|u\|_* = \sup_{w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle u, w \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}}{\|w\|_{\Omega}}.$$

2.3. Formulación Variacional del Problema Parabólico

Para determinar la formulación variacional del siguiente problema parabólico

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u(t) - \varepsilon \Delta u(t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(t) + \kappa u(t) = f(t) & , \text{ en } \Omega_T \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \times (0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

se tienen dos posibilidades según la regularidad que se asume sobre la derivada temporal débil de la función u . Mientras que para la variable espacial es necesario asegurar la existencia de la derivada parcial espacial débil de primer orden, para la variable temporal se tienen dos posibilidades: asumir o no asumir la existencia de la derivada temporal débil. La elección entre una u otra de estas opciones implica la definición de distintos espacios solución para la función u pero como se mostrará más adelante, estos dos espacios coinciden, es decir, son isométricos e isomorfos.

Se comenzará con el caso en que no se asume la existencia de la derivada temporal débil. Para esto se definen los siguientes espacios normados

$$W_2^{1,0}(\Omega_T) := \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) : D^\alpha v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), |\alpha| \leq 1\}$$

con la norma

$$\|v\|_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}$$

y

$$W_2^{1,1}(\Omega_T) := \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) : \partial_t v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ y } D^\alpha v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), |\alpha| \leq 1\}$$

con la norma

$$\|v\|_{W_2^{1,1}(\Omega_T)} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t v(t)\|_*^2 dt \right)^{1/2}$$

donde $\nabla = \nabla_x$ es el gradiente respecto a x . Ambos espacios corresponden a espacios de Hilbert una vez que son equipados con el producto escalar natural. De esta manera considerando una función test $v \in W_2^{1,1}(\Omega_T)$ tal que $v(x, T) = 0$, integrando sobre Ω_T y realizando integración por partes con respecto

a la variable temporal se tiene que la formulación variacional del problema está definida como: *Hallar* $u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ tal que

$$- \int_0^T \int_{\Omega} u(t) v_t(t) - \varepsilon \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) - (\mathbf{a} \cdot \nabla u(t)) v(t) - \kappa u(t) v(t) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) v(t) \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0 v(t) \, dx, \quad \forall v \in W_2^{1,1}(\Omega_T). \quad (2.1)$$

La existencia de una solución débil para esta formulación está asegurada. Para mayor detalle referirse al Capítulo 3 de [75], específicamente al Teorema 3.9.

Para el segundo caso, se consideran los espacios ya definidos en la sección anterior. De esta manera, tomando como función test $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que la formulación variacional del problema viene dada por: *Hallar* $u \in \mathbb{W}(0, T)$ tal que

$$\int_{\Omega} u_t(t) v + \varepsilon \nabla u(t) \cdot \nabla v + (\mathbf{a} \cdot \nabla u(t)) v + \kappa u(t) v \, dx = \int_{\Omega} f(t) v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \quad (2.2)$$

Al igual que en el caso anterior, la existencia de una solución débil para esta formulación está asegurada. Para mayor detalle referirse al Capítulo 2 de [63], específicamente al Teorema 2.2.5 o al Capítulo 6 de [39], específicamente al Teorema 6.6 (Teorema de Lions). El siguiente teorema asegura que cada solución $u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ pertenece también al espacio $\mathbb{W}(0, T)$.

Teorema 2.3.1. *Sea $u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ la solución débil del problema 2.1. Entonces u pertenece a $\mathbb{W}(0, T)$, posiblemente luego de una modificación en un conjunto de medida nula.*

En función del resultado anterior es que durante el presente trabajo se utiliza la formulación variacional 2.2 y el espacio de funciones $\mathbb{W}(0, T)$ como espacio solución. De esta manera se tiene que la solución u pertenece al espacio $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mientras que su derivada temporal $\partial_t u$ pertenece a $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. La justificación sobre el espacio al cual pertenece la derivada temporal se da a continuación. Notar que la formulación variacional 2.2 puede ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t) v \, dx = F(t) v$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, c.t.p. $t \in (0, T)$, con $F(t)$ igual a

$$\begin{aligned} F(t) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow F(t) v = \int_{\Omega} f(t) v \, dx - \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u(t) \cdot \nabla v + (\mathbf{a} \cdot \nabla u(t)) v + \kappa u(t) v \, dx \end{aligned}$$

de donde se tiene que $F(t) \in H^{-1}(\Omega)$. Esto implica que $\partial_t u(t) \in H^{-1}(\Omega)$. Ahora bien, se cumple que

$$\int_0^T \|F(t)\|_*^2 \, dt < \infty,$$

lo que implica que $F \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y por consiguiente $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

El hecho de que para $t \in (0, T)$, $\partial_t u(t) \in H^{-1}(\Omega)$ esté contenida en un espacio diferente a $u \in H_0^1(\Omega)$, hace necesaria la identificación de estos dos espacios. La identificación más usual viene dada por el Teorema de representación de Riesz, pero no será utilizada pues hace uso del producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ para representar funcionales de $H^{-1}(\Omega)$, siendo que según lo visto en la forma variacional 2.2 se busca que esta representación se haga a través del producto escalar $L^2(\Omega)$. Por esto se introducirá la noción de Tripletta de Gelfand. Se tiene que el espacio $H_0^1(\Omega)$ se encuentra continua y densamente contenido en el espacio $L^2(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_i L^2(\Omega),$$

y también se tiene

$$(L^2(\Omega))' \hookrightarrow_{i'} H^{-1}(\Omega).$$

Haciendo uso del Teorema de representación de Riesz para identificar al espacio $L^2(\Omega)$ con su dual, se produce la tripleta de Gelfand

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_i L^2(\Omega) \hookrightarrow_{i'} H^{-1}(\Omega).$$

En particular se logra la identificación $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_{i' \circ i} H^{-1}(\Omega)$ sin la necesidad de usar directamente el Teorema de representación de Riesz. De todas maneras, al utilizar el Teorema de Riesz para identificar al espacio $L^2(\Omega)$ con su dual, para $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ y $g \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ se debe cumplir la condición de compatibilidad

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = (f, g)_{L^2(\Omega)}.$$

2.4. Discretización del Intervalo Temporal

Con respecto a la discretización del intervalo $(0, T]$, se considera una sucesión estrictamente creciente de tiempos discretos $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$, tal que $t^0 = 0$ y $t^N = T$. Además, para cada n con $1 \leq n \leq N$, se denota por $I^n = (t^{n-1}, t^n]$ el n -ésimo sub-intervalo de tiempo y por $\tau_n = t^n - t^{n-1}$ su largo.

2.5. Notación de Elementos Finitos

A continuación se detalla la notación utilizada relacionada a la partición del dominio espacial. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 2, 3$, un dominio poligonal simple cuando $d = 2$ y un dominio poliédrico cuando $d = 3$, con frontera $\partial\Omega$. Se considera una familia de particiones $\{\mathcal{P}\}$ del dominio conformada por la unión de

elementos regulares triangulares ($d = 2$) o tetraedrales ($d = 3$) que no se superponen, en el sentido de Ciarlet (ver [32]). Para una partición fija \mathcal{P} , se tiene que

- \mathcal{F} denota el conjunto de todos los lados/caras;
- $\mathcal{F}_I \subset \mathcal{F}$ denota el conjunto de los lados/caras interiores;
- $\mathcal{F}_{\partial\Omega} \subset \mathcal{F}$ denota el conjunto de los lados/caras de borde;
- \mathcal{V} son los índices del conjunto de todos los vértices de la partición $\{\mathbf{x}_m\}_{m \in \mathcal{V}}$;
- $\Omega_m = \{K \in \mathcal{P} : \mathbf{x}_m \in \overline{K} \text{ para un } m \in \mathcal{V} \text{ fijo}\}$ es el patch consistente de elementos de K para los cuales \mathbf{x}_m es un vértice;
- \mathcal{F}_m denota el conjunto de todo los lados/caras que tienen como vértice a \mathbf{x}_m ;
- λ_m denota la función que es lineal a trozos en \mathcal{P} y se anula en todos los vértices de \mathcal{P} , excepto en \mathbf{x}_m , donde toma el valor de uno, i.e., $\lambda_m(\mathbf{x}_k) = \delta_{mk}$ con $m, k \in \mathcal{V}$ y δ_{mk} denota el delta de Kronecker.

Para un elemento triangular/tetraedral $K \in \mathcal{P}$, se tiene que

- $\mathbb{P}_m(K)$ denota el espacio de polinomios en K de grado total a lo más m ;
- \mathcal{V}_K son los índices del conjunto de vértices del elemento K denotado por $\{\mathbf{x}_m\}_{m \in \mathcal{V}_K}$;
- Ω_K denota el conjunto de elementos que comparten un lado/cara con el elemento K ;
- \mathcal{F}_K denota el conjunto que contiene los lados/caras del elemento K ;
- $|K|$ denota el área/volumen del elemento K ;
- h_K denota el largo del lado más largo del elemento K ;
- $\hat{\mathbf{n}}_\gamma^K$ denota el vector normal unitario exterior al lado/cara $\gamma \in \mathcal{F}_K \subset \partial K$;
- $v|_K$ denota la restricción de v al elemento K .
- $\bar{v}_K = (v, 1/|K|)_K$ denota la media de la función v sobre el elemento K .

Para un lado/cara $\gamma \in \mathcal{F}$, se tiene

- $\mathbb{P}_m(\gamma)$ denota el espacio de polinomios en γ de grado total a lo más m ;
- \mathcal{V}_γ son los índices del conjunto de vértices del lado/cara γ denotado por $\{\mathbf{x}_m\}_{m \in \mathcal{V}_\gamma}$;
- $\Omega_\gamma = \{K \in \mathcal{P} : \gamma \in \mathcal{F}_K\}$ denota el patch de un lado/cara;
- $|\gamma|$ denota el largo/área del lado/cara γ ;
- $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ denota el vector normal unitario al lado γ , orientado de manera tal que, en el caso de un lado exterior $\gamma \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ el vector $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ se elige igual a la normal unitaria exterior de $\partial\Omega$, denotada por $\hat{\mathbf{n}}_{\partial\Omega}$;
- $\hat{\mathbf{t}}_\gamma$ denota el correspondiente vector tangente unitario asociado con $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$, rotado noventa grados en sentido anti horario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$;
- $v|_\gamma$ denota la restricción de v al lado/cara γ .

La Figura 2.1 ilustra la notación utilizada para los lados, vértices y vectores normales unitarios de un elemento $K \in \mathcal{P}$, tanto en el caso bidimensional como tridimensional.

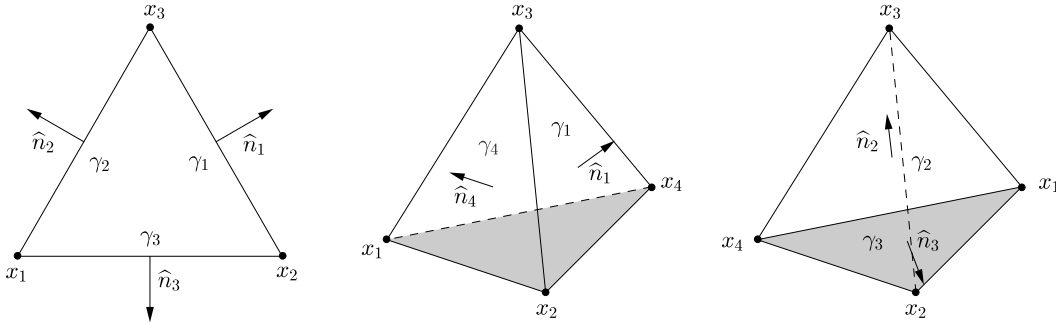


Figura 2.1: Notación y orientación de lados, vértices y vectores normales unitarios del elemento $K \in \mathcal{P}$ el cual puede ser bidimensional (triangular, izquierda) o tridimensional (tetraedral, centro y derecha). El lado/cara γ_i del elemento triangular/tetraedral K es aquel opuesto al vértice \mathbf{x}_i y $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el vector unitario normal al lado/cara γ_i , para $i \in \mathcal{V}_K = \{1, 2, 3\}$ en el caso bidimensional y $i \in \mathcal{V}_K = \{1, 2, 3, 4\}$ en el caso tridimensional.

2.6. Resultados Preliminares

En esta sección se presentarán algunos resultados estándar, que se utilizarán de manera frecuente a lo largo de este documento.

A lo largo de este trabajo se adopta la siguiente convención:

$$a \preceq b \iff a \leq Cb,$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de los parámetros ε , \mathbf{a} y κ , del tamaño de la malla h y del paso del tiempo τ_n .

Definición 2.6.1. (*Operador de Proyección L^2*) Sea $\Pi_K : L^2(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$ un operador de proyección, caracterizado como

$$(\phi - \Pi_K(\phi), p)_K = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(K). \quad (2.3)$$

Se utilizarán también los siguientes resultados.

Teorema 2.6.1. (*Desigualdades de Poincaré Óptima para dominios convexos, ver [20, 62, 64]*)

Sea $K \in \mathcal{P}$ y $\bar{v}_K \in \mathbb{P}_1(K)$. Entonces

$$\|v - \bar{v}_K\|_{L^2(K)} \leq \frac{h_K}{\pi} \|\nabla v\|_{L^2(K)}, \quad \forall v \in H^1(K), \quad (2.4)$$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{P,\Omega} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.5)$$

donde h_K es el diámetro de K y la constante $C_{P,\Omega}$ viene dada por

$$C_{P,\Omega} = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{|l_i|^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.6)$$

donde $|l_1|, \dots, |l_d|$ son los lados de una caja d -dimensional en la cual Ω esta contenido.

Teorema 2.6.2. (*Desigualdad de Young*)

Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2.7)$$

Teorema 2.6.3. (*Desigualdad Media Aritmética-Geométrica*)

Sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad (2.8)$$

más aún, considerando $\xi > 0$ se tiene que

$$ab \leq \frac{\xi a^2}{2} + \frac{b^2}{\xi 2}. \quad (2.9)$$

Teorema 2.6.4. (*Desigualdad de Jensen*)

Si p_1, \dots, p_n son números positivos cuya suma es igual a 1 y f es una función real continua y convexa, entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \quad (2.10)$$

Particularmente, si $p_i = 1/n$, con $i = 1, \dots, n$ y $f(x) = x^2$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (2.11)$$

Teorema 2.6.5. (*Desigualdad de Gronwall, forma diferencial, ver [42, Apéndice B]*)

Sea $\eta(\cdot)$ una función no negativa, absolutamente continua en $[0, T]$, la cual satisface, c.t.p. en t , la desigualdad diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \psi(t), \quad (2.12)$$

donde $\phi(y)$ y $\psi(t)$ son funciones no negativas, sumables en $[0, T]$. Entonces

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right), \quad (2.13)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

A continuación se presentan las funciones burbujas las cuales se caracterizan por ser no negativas con soporte compacto local, lo que las hacen útiles al considerarlas como funciones test en ecuaciones relacionadas al error de la aproximación de elementos finitos.

El siguiente resultado muestra que la función burbuja interior $\beta_K = \prod_{m \in \mathcal{V}_K} \lambda_m \in H_0^1(K)$, preserva la norma.

Teorema 2.6.6. *Sea $\beta_K = \prod_{m \in \mathcal{V}_K} \lambda_m \in H_0^1(K)$. Luego para cualquier $p \in \mathbb{P}_m(K)$ con $m \geq 0$, existe una constante C tal que*

$$C^{-1} \|p\|_{L^2(K)}^2 \leq \left\| \beta_K^{1/2} p \right\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|p\|_{L^2(K)}^2, \quad (2.14)$$

y

$$C^{-1} \|p\|_{L^2(K)} \leq \|\beta_K p\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(\beta_K p)\|_{L^2(K)} \leq C \|p\|_{L^2(K)}, \quad (2.15)$$

donde la constante C es independiente de p y h_K .

El siguiente resultado se utiliza para extender cantidades definidas en $\gamma \in \mathcal{F}_I$ (interfaces de elementos), al par de elementos que comparten la interfaz al usar funciones burbujas del lado y establecer que la extensión preserva la norma.

Teorema 2.6.7. *Sea $\beta_\gamma = \prod_{m \in \mathcal{V}_\gamma} \lambda_m \in H_0^1(K \cup K')$ y $\beta_{\gamma|_\gamma} \in H_0^1(\gamma)$ con γ siendo el lado que comparten los elementos $K, K' \in \mathcal{P}$. Entonces, para cualquier $p \in \mathbb{P}_m(\gamma)$ con $m \geq 0$, existe una constante C tal que*

$$C^{-1} \|p\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq \left\| \beta_\gamma^{1/2} p \right\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq C \|p\|_{L^2(\gamma)}^2, \quad (2.16)$$

y

$$h_K^{-1/2} \|\beta_\gamma p\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \|\nabla(\beta_\gamma p)\|_{L^2(K)} \leq C \|p\|_{L^2(\gamma)}, \quad (2.17)$$

donde la constante C es independiente de p y h_K .

Las siguientes fórmulas permiten calcular integrales del producto de potencias de funciones base en un elemento $K \in \mathcal{P}$ o en un lado/cara $\gamma \in \mathcal{F}_K$. Considerando enteros no-negativos a, b, c, d , para el caso bidimensional se cumple

$$\left(\lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^c, 1 \right)_K = \frac{2(a! b! c!)}{(a+b+c+2)!} |K| \quad \text{y} \quad \left(\lambda_m^a, \lambda_n^b \right)_\gamma = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} |\gamma|, \quad (2.18)$$

con $\mathcal{V}_K = \{i, j, k\}$ y $\mathcal{V}_\gamma = \{m, n\}$, mientras que en el caso tridimensional se tiene que

$$\left(\lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^c \lambda_l^d, 1 \right)_K = \frac{3(a! b! c! d!)}{(a+b+c+d+3)!} |K| \quad \text{y} \quad \left(\lambda_m^a \lambda_n^b \lambda_r^c, 1 \right)_\gamma = \frac{2(a! b! c!)}{(a+b+c+2)!} |\gamma|, \quad (2.19)$$

con $\mathcal{V}_K = \{i, j, k, l\}$ y $\mathcal{V}_\gamma = \{m, n, r\}$.

El siguiente resultado presenta una base de funciones polinomiales de grado uno definidas en los bordes de la partición. Para más detalle referirse a [12].

Lema 2.6.1. *Cualquier función polinomial $p \in \mathbb{P}_1(\gamma)$ puede ser escrita como*

$$p = \frac{d}{|\gamma|} \sum_{i \in \mathcal{V}_\gamma} (p, \lambda_i)_\gamma ((d+1)\lambda_i - 1) \quad (2.20)$$

donde d denota la dimensión del espacio.

Al tratar con la obtención de una cantidad completamente computable y equivalente al error (más términos de orden superior), frecuentemente se necesitará resolver, para cada $K \in \mathcal{P}$, un problema local de Neumann a través del cual se determine un campo vectorial σ_K . Este problema ha sido estudiado en [12, 13], por lo que a continuación solo se presentarán los resultados obtenidos. Dicho $\sigma_K \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ puede descomponerse como $\sigma_K = \sigma_K^1 + \sigma_K^0$ donde σ_K^1 es solución del problema: *Encontrar $\sigma_K^1 \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ tal que,*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \sigma_K^1 &= p_K & \text{en } K \\ \sigma_K^1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K &= p_{\gamma, K} & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K, \end{cases} \quad (2.21)$$

mientras que σ_K^0 es solución del problema: *Encontrar $\sigma_K^0 \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ tal que,*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \sigma_K^0 &= 0 & \text{en } K \\ \sigma_K^0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K &= 0 & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K, \end{cases} \quad (2.22)$$

con $p_K \in \mathbb{P}_1(K)$ y $p_{\gamma,K} \in \mathbb{P}_1(\gamma)$ dados. Por lo tanto, definiendo el espacio

$$\mathbb{P}_n^*(K)^d = \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}_n(K)^d : \mathbf{div} \mathbf{v} = 0 \text{ en } K, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K = 0 \text{ en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K\}, \quad (2.23)$$

se tiene que $\sigma_K \in \mathbb{P}_2(K)^d$ es solución del problema local

$$s.t. \begin{cases} \min_{\sigma_K^0 \in \mathbb{P}_n^*(K)^d} \|\sigma_K\|_{L^2(K)} \\ -\mathbf{div} \sigma_K &= p_K & \text{en } K, \\ \sigma_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K &= p_{\gamma,K} & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K. \end{cases} \quad (2.24)$$

Para presentar las soluciones asociadas a los problemas (2.21) y (2.22) se comienza considerando las siguientes definiciones. Se denotan por $\mathbf{n}_i = |\gamma_i| \hat{\mathbf{n}}_i$ y $\mathbf{t}_i = |\gamma_i| \hat{\mathbf{t}}_i$ a los vectores normales y tangentes, respectivamente. Se consideran las funciones lineales λ restringidas al elemento K y a sus lados/caras las cuales satisfacen

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_K} \lambda_{i|_K} = 1, \quad \sum_{i \in \mathcal{V}_\gamma} \lambda_{i|\gamma} = 1, \quad y \quad \nabla \lambda_{i|_K} = -\frac{1}{d|K|} \mathbf{n}_i \quad (2.25)$$

y que además cumplen que

$$\|\lambda_i\|_{L^2(K)}^2 \leq C h_K^d, \quad \|\lambda_i\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq C h_K^{d-1}. \quad (2.26)$$

A continuación se definen las funciones $\tilde{\psi}_{\cdot,\cdot}$, $\psi_{\cdot,\cdot}$ y $\psi_{K,\cdot}$, para cada $K \in \mathcal{P}$, tanto para el caso bidimensional como el caso tridimensional. A través de estas funciones se puede dar una solución explícita al problema (2.21).

Caso Bidimensional: Para un elemento $K \in \mathcal{P}$, sean $i, j, k \in \mathcal{V}_K = \{1, 2, 3\}$, con $i \neq j \neq k$, y $t_{ij} = x_j - x_i$. Se definen las funciones

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{1}{2|K|} \left((4\lambda_j - \lambda_k - 7\lambda_i) \lambda_j \mathbf{t}_{ij} + (\lambda_i + 3\lambda_j - 2\lambda_k) \lambda_k \mathbf{t}_{ik} \right), \quad (2.27)$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{2|K|} \left((3\lambda_j (\lambda_k - \lambda_i) + 4\lambda_j) \mathbf{t}_{ij} + (3\lambda_k (\lambda_i - \lambda_j) - 2\lambda_k) \mathbf{t}_{ik} \right), \quad (2.28)$$

$$\psi_{K,i} = -\frac{\lambda_i}{3|K|} (\lambda_j \mathbf{t}_{ij} + \lambda_k \mathbf{t}_{ik}). \quad (2.29)$$

Caso Tridimensional: Para un elemento $K \in \mathcal{P}$, sean $i, j, k, l \in \mathcal{V}_K = \{1, 2, 3, 4\}$ y $t_{ij} = x_j - x_i$. Se definen las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{i,j} &= \frac{1}{4|K|} \left((12\lambda_j - \lambda_k - \lambda_l + 22\lambda_i)\lambda_j t_{ij} \right. \\ &\quad \left. + (9\lambda_j - 4\lambda_k - 4\lambda_l + 3\lambda_i)\lambda_k t_{ik} \right) + (9\lambda_j - 4\lambda_k - 4\lambda_l + 3\lambda_i)\lambda_l t_{il}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{4|K|} \left((12\lambda_j + 19\lambda_k + 19\lambda_l - 2\lambda_i)\lambda_j t_{ij} \right. \\ &\quad \left. + (3\lambda_i - 4\lambda_k - 4\lambda_l - 11\lambda_j)\lambda_k t_{ik} \right) + (3\lambda_i - 4\lambda_k - 4\lambda_l - 11\lambda_j)\lambda_l t_{il}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\psi_{K,i} = -\frac{\lambda_i}{4|K|} (\lambda_j t_{ij} + \lambda_k t_{ik} + \lambda_l t_{il}). \quad (2.32)$$

Con estas funciones es posible obtener una forma explícita para σ_K^1 que es solución del problema (2.21), si los elementos y la información del borde satisfacen la siguiente condición de compatibilidad

$$(p_K, c)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (p_{\gamma,K}, c)_\gamma = 0 \quad \text{para cualquier } c \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

En ciertos casos la información también satisfará

$$(p_K, q)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (p_{\gamma,K}, q)_\gamma = 0 \quad \text{para cualquier } q \in \mathbb{P}_1(K). \quad (2.34)$$

En función de lo anterior, el siguiente resultado enuncia una solución particular para el problema (2.21).

Lema 2.6.2. *Sean $p_K \in \mathbb{P}_1(K)$ y $p_{\gamma,K} \in \mathbb{P}_1(\gamma)$ para cada $\gamma \in \mathcal{F}_K$ dados. Entonces, si p_K y $p_{\gamma,K}$ satisfacen (2.33), se tiene que*

$$\sigma_K^1 = \sum_{i=1}^{d+1} \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_{\gamma_i}} (p_{\gamma_i,K}, \lambda_j)_{\gamma_i} \psi_{i,j} + (|K| \nabla(p_K) \cdot (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_K)) \psi_{K,i} \right) \quad (2.35)$$

es una solución de (2.21), donde las funciones $\psi_{i,j}$ y $\psi_{K,i}$ vienen dadas por (2.28) y (2.29) para el caso bidimensional y por (2.31) y (2.32) en el caso tridimensional, cumpliéndose además que

$$\|\sigma_K^1\|_{L^2(K)} \leq C \left(h_K \|p_K\|_{L^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} h_K^{1/2} \|p_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right). \quad (2.36)$$

Si p_K y $p_{\gamma,K}$ satisfacen (2.34), entonces

$$\sigma_K^1 = \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j \in \mathcal{V}_{\gamma_i}} (p_{\gamma_i,K}, \lambda_j)_{\gamma_i} \tilde{\psi}_{i,j} \quad (2.37)$$

es una solución de (2.21) donde las funciones $\tilde{\psi}_{i,j}$ vienen dadas por (2.27) en el caso bidimensional y por (2.30) en el caso tridimensional, cumpliéndose además que

$$\|\sigma_K^1\|_{L^2(K)} \leq C \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} h_K^{1/2} \|p_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right). \quad (2.38)$$

En ambos casos la constante C es independiente de h_K , p_K y $p_{\gamma,K}$.

Con respecto a la solución del problema (2.22), a continuación se define una base para el espacio $\mathbb{P}_2^*(K)^d$, tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional, a través de la cual es posible expresar de manera explícita la solución σ_K^0 .

Caso Bidimensional: Para un elemento triangular $K \in \mathcal{P}$, una base para el espacio $\mathbb{P}_2^*(K)^2$ está formada por la función

$$\psi_0 = \frac{1}{2|K|}(\lambda_1\lambda_2 \mathbf{t}_{12} + \lambda_2\lambda_3 \mathbf{t}_{23} + \lambda_3\lambda_1 \mathbf{t}_{31})^T. \quad (2.39)$$

Caso Tridimensional: Para un elemento tetrahédrico $K \in \mathcal{P}$, una base para el espacio $\mathbb{P}_2^*(K)^3$ está formada por las funciones

$$\begin{aligned} \psi_{0,1} &= \frac{1}{4|K|}(\lambda_1\lambda_2 \mathbf{t}_{12} + \lambda_4\lambda_1 \mathbf{t}_{41} + \lambda_2\lambda_4 \mathbf{t}_{24})^T \\ \psi_{0,2} &= \frac{1}{4|K|}(\lambda_2\lambda_3 \mathbf{t}_{23} + \lambda_1\lambda_2 \mathbf{t}_{12} + \lambda_3\lambda_1 \mathbf{t}_{31})^T \\ \psi_{0,3} &= \frac{1}{4|K|}(\lambda_3\lambda_4 \mathbf{t}_{34} + \lambda_2\lambda_3 \mathbf{t}_{23} + \lambda_4\lambda_2 \mathbf{t}_{42})^T. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En función de lo anterior, el siguiente resultado enuncia una solución particular para el problema (2.22).

Lema 2.6.3. *La solución del problema (2.22) en el caso bidimensional viene dada por*

$$\sigma_K^0 = -\frac{(\sigma_K^1, \psi_0)_K}{(\psi_0, \psi_0)_K} \psi_0, \quad (2.41)$$

donde la función ψ_0 viene dada por (2.39), mientras que para el caso tridimensional se tiene que

$$\sigma_K^0 = -\sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_{0,i}, \quad (2.42)$$

donde las funciones $\psi_{0,i}$ vienen dadas por (2.40) y los α_i están definidos como

$$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}, \quad (2.43)$$

con las entradas de la matriz \mathbf{G} y el vector \mathbf{b} dadas por

$$(\mathbf{G})_{ij} = (\psi_{0,i}, \psi_{0,j})_K \quad \text{y} \quad (\mathbf{b})_i = (\sigma_K^1, \psi_{0,i})_K. \quad (2.44)$$

Finalmente, se puede resumir los resultados anteriores a través del siguiente teorema.

Teorema 2.6.8. *(Solución óptima al problema local de Neumann)*

Sean $p_K \in \mathbb{P}_1(K)$ y $p_{\gamma,K} \in \mathbb{P}_1(\gamma)$ para cada $\gamma \in \mathcal{F}_K$ dados. Entonces la solución al problema (2.24) viene dada por

$$\sigma_K = \sigma_K^1 + \sigma_K^0 \quad (2.45)$$

donde, σ_K^0 viene dado por (2.41) en el caso bidimensional y por (2.42) en el caso tridimensional y, si p_K y $p_{\gamma,K}$ satisfacen (2.33) entonces σ_K^1 viene dado por (2.35) y se cumple que

$$\|\sigma_K\|_{L^2(K)} \leq C \left(h_K \|p_K\|_{L^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} h_K^{1/2} \|p_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right). \quad (2.46)$$

mientras que si p_K y $p_{\gamma,K}$ satisfacen (2.34), entonces σ_K^1 viene dado por (2.37) y se cumple que

$$\|\sigma_K\|_{L^2(K)} \leq C \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} h_K^{1/2} \|p_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right). \quad (2.47)$$

Teorema 2.6.9. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios con tiempo, ver [63])

Sea V un espacio de Banach real y V' su dual. Entonces, para $f \in L^2(a, b; V)$ y $g \in L^2(a, b; V')$, se tiene que $\langle g(\cdot), f(\cdot) \rangle_{V' \times V} \in L^1(a, b)$ y se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz, i.e.,

$$\int_a^b \langle g(t), f(t) \rangle_{V' \times V} dt \leq \|g\|_{L^2(a, b; V')} \|f\|_{L^2(a, b; V)}. \quad (2.48)$$

Los siguientes resultados pueden verse en más detalle en [42].

Teorema 2.6.10. Sea $u \in H^1(0, T; X)$. Entonces

i) $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ c.t.p. en tiempo, y

ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\xi) d\xi, \forall 0 \leq s \leq t \leq T$.

Teorema 2.6.11. Sea $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ con $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Entonces

i) $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ c.t.p. en tiempo, y

ii) El mapeo

$$t \longmapsto \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

es absolutamente continuo, con

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.49)$$

c.t.p. en tiempo.

Capítulo 3

Método de los Flujos Equilibrados aplicados a un problema elíptico

El presente capítulo busca introducir el método de los residuos equilibrados, propuesto por Ainsworth y Oden (referirse al Capítulo 6 en [4]), aplicados a un problema elíptico en el cual, la construcción de un conjunto especial de funciones llamadas flujos de borde junto con un conjunto de campos de vectores $\sigma_K \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$, relacionados a la solución de un problema local de Neumann, hace posible obtener una cota superior garantizada y una cota inferior local del error al aproximar la solución utilizando una familia de métodos de elementos finitos estabilizados. La importancia del uso de dichos flujos radica en que es posible obtener dicha cota superior a través de la construcción de un estimador de error completamente computable.

3.1. Problema Modelo

Para este caso introductorio se considera como problema modelo la ecuación de difusión convección reacción con condición de borde Dirichlet homogénea en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con frontera Lipschitz $\partial\Omega$,

i.e.: *Hallar u tal que*

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + \kappa u = f & , \text{ en } \Omega \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

donde:

(S1) $0 < \varepsilon \ll 1$ es el coeficiente de difusión y $\kappa \geq 0$ corresponde al coeficiente de disipación;

(S2) $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ es un campo solenoidal, es decir, $\mathbf{div} \mathbf{a} = 0$;

(S3) $f \in L^2(\Omega)$.

La formulación variacional asociada con este problema es: *Hallar* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\mathcal{B}(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.2)$$

donde la forma bilineal viene dada por

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \kappa u v \, dx. \quad (3.3)$$

Considerando la norma de la energía

$$\|u\|_{\Omega}^2 = \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \kappa \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.4)$$

definida en $H^1(\Omega)$, se tiene que

$$|\mathcal{B}(v, w)| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|v\|_{\Omega} \|w\|_{\Omega}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{B}(v, v) = \|v\|_{\Omega}^2, \quad (3.6)$$

para todo $v, w \in H_0^1(\Omega)$, donde la constante de continuidad viene dada por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \max \left\{ 2, 2\sqrt{\frac{d}{\varepsilon \kappa}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \kappa \neq 0, \\ 1, & \mathbf{a} = \mathbf{0}, \kappa \geq 0, \\ \max \left\{ 1, \frac{\sqrt{d}}{\varepsilon} \mathcal{C}_{P,\Omega} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \kappa = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

con la constante $\mathcal{C}_{P,\Omega}$ dada por (2.6). Por lo tanto la existencia y unicidad de solución para este problema se obtiene a través del teorema de Lax-Milgram (ver Capítulo 2 en [25]).

3.2. Método de elementos finitos estabilizados

Para aproximar la solución de este problema se considerará una formulación de elementos finitos estabilizados. Para ello sea el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ definido como

$$\mathbb{V}_h := \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{P}\} \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Luego la aproximación de elementos finitos estabilizada de este problema viene dada por: *Hallar* $u_h \in \mathbb{V}_h$ *tal que*

$$\mathcal{B}(u_h, v_h) + \mathcal{S}(u_h, f; v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (3.9)$$

donde $\mathcal{S}(\cdot, \cdot; \cdot)$ es el término de estabilización. En la siguiente sección se enuncian los distintos tipos de términos de estabilización que serán utilizados.

3.2.1. Esquemas de Estabilización

A continuación se presentan los esquemas estabilizados que se utilizarán. Para poder realizar el análisis *a posteriori*, es necesario que el término de estabilización de cada esquema pueda ser descompuesto como la suma de aportes locales de cada elemento de la partición, es decir

$$\mathcal{S}(u_h, f; v_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}), \quad (3.10)$$

donde el aporte local $\mathcal{S}_K(\cdot, \cdot; \cdot)$ viene dado por uno de los siguientes esquemas:

Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) [49, 71]:

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) := \tau_K (-\varepsilon \Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h + \kappa u_h - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K})_K. \quad (3.11)$$

Galerkin Least Squares (GLS) [15, 50, 71]:

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) := \tau_K (-\varepsilon \Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h + \kappa u_h - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K} + \kappa v_{h|_K})_K. \quad (3.12)$$

Edge Stabilization (ES) [30]:

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nabla u_h \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma \rrbracket, \nabla v_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma (h_{\partial K}^2 + h_{\partial K'}^2))_\gamma, \quad (3.13)$$

donde $\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}$ y $h_{\partial K}$ es el diámetro de ∂K .

Continuous Interior Penalty Stabilization (CIP) [37, 71]:

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma (\llbracket \mathbf{a} \cdot \nabla u_h \rrbracket, \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K})_\gamma. \quad (3.14)$$

Nota 3.2.1. (Salto de una función) Se tiene que para $\gamma \in \mathcal{F}_{K^+} \cap \mathcal{F}_{K^-}$, con K^+ y K^- dos elementos adyacente (ver Figura 3.1), el salto de v en γ en la dirección $\hat{\mathbf{n}}_\gamma^K$ viene dado por

$$\llbracket v \rrbracket := v^+ - v^- \quad (3.15)$$

donde

$$v^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} v(\mathbf{x} \pm \epsilon \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K) = v|_{K^\pm}$$

y $\hat{\mathbf{n}}_\gamma^K = \hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^+} = -\hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^-}$, con $\hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^\pm}$ las normales asociadas los elementos K^\pm en γ . Si $\mathbf{v}(x)$ es una función vectorial, entonces se tiene que

$$\llbracket \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma \rrbracket = \mathbf{v}^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^+} + \mathbf{v}^- \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^-} = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K = \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \quad x \in K. \quad (3.16)$$

Finalmente, un caso particular del caso anterior es el salto del gradiente en la dirección $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ definido como

$$[[\nabla v \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma]] = \nabla v|_{K^+} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^+} + \nabla v|_{K^-} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^{K^-}. \quad (3.17)$$

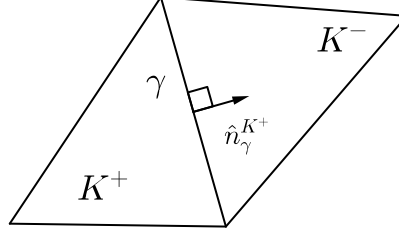


Figura 3.1: Notación referente al salto de la derivada a través del lado γ .

Nota 3.2.2. Para poder satisfacer la condición (3.10), los métodos estabilizados deben ser descompuestos de una manera apropiada. Por ejemplo, el método CIP escrito en su forma clásica es igual a

$$\mathcal{S}(u_h, f; v_h) = \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_I} \tau_\gamma ([[\mathbf{a} \cdot \nabla u_h], [\mathbf{a} \cdot \nabla v_h])_\gamma.$$

Luego, si se toma

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma}{2} ([[\mathbf{a} \cdot \nabla u_h], [\mathbf{a} \cdot \nabla v_h])_\gamma,$$

se viola la condición (3.10), mientras que si se toma

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; v_{h|_K}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma ([[\mathbf{a} \cdot \nabla u_h], \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K})_\gamma,$$

la condición (3.10) se satisface.

3.2.1.1. Parámetros de Estabilización

En todos los esquemas anteriores τ_K y τ_γ denotan los parámetros de estabilización, los cuales varían dependiendo del esquema e incluso para un esquema fijo existen múltiples opciones. En efecto, según los resultados presentados en [71] y las condiciones del problema estudiado, un parámetro de estabilización usual para el esquema *SUPG* es

$$\tau_K^{SUPG} := \begin{cases} \delta_0 h_K, & \text{si } Pe_K > 1, \\ \delta_1 \frac{h_K^2}{\varepsilon}, & \text{si } Pe_K \leq 1, \end{cases} \quad (3.18)$$

con δ_0 y δ_1 constantes positivas apropiadas de manera tal que se cumpla la condición

$$0 \leq \tau_K^{SUPG} \leq \frac{w}{\kappa^2}, \quad (3.19)$$

donde w es una constante tal que $0 < w \leq \kappa$ y donde Pe_K denota el número local de Péclet definido como

$$Pe_K := \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} h_K}{2\varepsilon}. \quad (3.20)$$

Notar que cuando $Pe_K > 1$ entonces nos encontramos frente a un caso de convección dominante mientras que cuando $Pe_K \leq 1$ corresponde a un caso de difusión dominante.

De igual manera, según los resultados presentados en [71], el parámetro de estabilización para el esquema **GSL** viene dado por

$$\tau_K^{GLS} := \delta_0 \frac{h_K}{\sqrt{1 + (\varepsilon/h_K)^2}}, \quad (3.21)$$

con δ_0 una constante positiva a elección. Dicha definición del parámetro de estabilización coincide asintóticamente con la definición del parámetro del esquema SUPG. En efecto, si $\varepsilon \leq C h_K$ entonces $\tau_K^{GLS} \sim h_K$ mientras que si $\varepsilon \geq C h_K$ entonces $\tau_K^{GLS} \sim h_K^2/\varepsilon$.

Con respecto al esquema **ES**, se tiene que el parámetro de estabilización τ_γ^{ES} se toma normalmente como una constante positiva. En este caso, siguiendo los resultados de [30] se tiene que

$$\tau_\gamma^{ES} := 0,025. \quad (3.22)$$

Finalmente, con respecto al esquema **CIP**, según los resultados presentados en [71] el parámetro de estabilización para este caso debe cumplir que $\tau_\gamma^{CIP} \sim h_\gamma^2$. En base a esto, y siguiendo los resultados presentados en [27], el parámetro de estabilización se define como

$$\tau_\gamma^{CIP} := h_\gamma^2 \|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K\|_{L^\infty(\gamma)}. \quad (3.23)$$

3.3. Análisis *a posteriori*

A continuación se procede a realizar el análisis *a posteriori* el cual usa como técnica principal el método de los flujos equilibrados.

3.3.1. Ecuación del Error

Sea $e = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ el error de la aproximación de la formulación de elementos finitos, luego se tiene que gracias a (3.2) y (3.9) el error satisface que

$$\mathcal{B}(e, v) = \mathcal{B}(u, v) - \mathcal{B}(u_h, v) = (f, v) - \mathcal{B}(u_h, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.24)$$

La expresión anterior es denominada la *ecuación del error*. El siguiente paso corresponde a descomponer esta expresión en contribuciones de cada elemento $K \in \mathcal{P}$.

Previamente, sea $\{g_{\gamma,K} \in \mathbb{P}_1(\gamma) : \gamma \in \mathcal{F}_K, \forall K \in \mathcal{P}\}$ un conjunto de *flujos de borde* de los elementos de la partición, que en cierto sentido aproximan el flujo real de la solución verdadera en el borde de estos, es decir,

$$g_{\gamma,K} \approx \nabla u|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K.$$

Dado que la traza de los flujos reales es continua en los bordes entre elementos se tiene que

$$\nabla u|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K + \nabla u|_{K'} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^{K'} = 0 \quad \text{en } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'},$$

y luego, por analogía, los flujos aproximados deben satisfacer la siguiente condición:

SUPOSICIÓN 3.3.1. Sean $\{g_{\gamma,K} \in \mathbb{P}_1(\gamma) : \gamma \in \mathcal{F}_K, \forall K \in \mathcal{P}\}$ un conjunto de *flujos de borde*, luego estos deben satisfacer

$$g_{\gamma,K} + g_{\gamma,K'} = 0 \quad \text{en } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}. \quad (3.25)$$

La condición anterior expresa el requerimiento físico de que los flujos no deben generarse en la interfaz de los elementos. Claramente, ésta implica que

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (g_{\gamma,K}, v)_{\gamma} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.26)$$

Haciendo uso de la expresión (3.26), es posible descomponer el lado derecho de la *ecuación del error* en contribuciones de los elementos de la partición

$$\mathcal{B}(e, v) = (f, v) - \mathcal{B}(u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((f, v)_K - \mathcal{B}_K(u_h, v) + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (g_{\gamma,K}, v)_{\gamma} \right)$$

donde $\mathcal{B}_K(u_h, v) = (\varepsilon \nabla u_h, \nabla v)_K + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h + \kappa u_h, v)_K$. Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e, v) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((f + \varepsilon \Delta u_{h|_K} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K} - \kappa u_{h|_K}, v)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (g_{\gamma,K} - \varepsilon \nabla u_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K, v)_{\gamma} \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((\Pi_K(f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K}) + \varepsilon \Delta u_{h|_K} - \kappa u_{h|_K}, v)_K \right. \\ &\quad \left. + (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K} - \Pi_K(f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K}), v)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (g_{\gamma,K} - \varepsilon \nabla u_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K, v)_{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Luego definiendo el *residuo del elemento* \mathcal{R}_K , el *residuo del lado* $\mathcal{R}_{\gamma,K}$ y el *término oscilatorio* osc_K por

$$\mathcal{R}_K := \Pi_K(f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K}) + \varepsilon \Delta u_{h|_K} - \kappa u_{h|_K}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{R}_{\gamma,K} := g_{\gamma,K} - \varepsilon \nabla u_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \quad (3.28)$$

$$\text{osc}_K := f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K} - \Pi_K(f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K}), \quad (3.29)$$

la ecuación del error queda expresada como

$$\mathcal{B}(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((\mathcal{R}_K, v)_K + (\text{osc}_K, v)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, v)_\gamma \right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.30)$$

Ahora, asumiendo por el momento que se cumple la siguiente condición:

SUPOSICIÓN 3.3.2. Para cada $K \in \mathcal{P}$ existe un campo de vectores $\boldsymbol{\sigma}_K \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ que satisface el siguiente problema de Neumann local: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma}_K \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K &= \mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma & \text{en } K, \\ \boldsymbol{\sigma}_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K &= \mathcal{R}_{\gamma,K} & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K. \end{cases} \quad (3.31)$$

Luego, integrando por partes la segunda ecuación se tiene que

$$(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla v)_K = \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, v)_\gamma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.32)$$

y entonces, el lado derecho de la ecuación del error puede ser reescrito como

$$\mathcal{B}(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((\mathcal{R}_K + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla v)_K + (\text{osc}_K, v)_K \right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.33)$$

Es fácil notar que para poder ser capaz de escribir la ecuación del error en la forma (3.33), las dos hipótesis principales fueron la existencia de un conjunto de flujos de borde $\{g_{\gamma,K}\}$ y el campo de vectores $\boldsymbol{\sigma}_K$ (Suposiciones 3.3.1 y 3.3.2). Para poder construir tales flujos de borde, es necesario que se satisfaga la condición (3.25), la cual es denominada *condición de consistencia*, mientras que para poder construir el campo $\boldsymbol{\sigma}_K$, es necesario resolver un problema de Neumann en cada elemento K de la partición.

A continuación se presenta el procedimiento para obtener un conjunto de flujos de borde que satisfagan la condición de consistencia y también se presenta una solución explícita al problema de Neumann.

3.3.2. Construcción de flujos equilibrados en particiones regulares

El conjunto de flujos de borde equilibrados $\{g_{\gamma,K}\}$ a desarrollar deben satisfacer la condición de consistencia (3.25) y también una condición que asegura la existencia de (3.31). A continuación se esboza brevemente el desarrollo para la obtención de estos flujos. Para más detalles en el procedimiento referirse a [4, 12].

Para el desarrollo de los flujos, es necesario recordar al conjunto $\{\lambda_m : m \in \mathcal{V}\}$, base Lagrangeana de \mathbb{V}_h , la cual cumple que

$$\sum_{m \in \mathcal{V}_K} \lambda_{m|_K} = 1, \quad \text{en } K \quad \text{y} \quad \sum_{m \in \mathcal{V}_\gamma} \lambda_{m|_\gamma} = 1, \quad \text{en } \gamma. \quad (3.34)$$

Con esto en mente, se tiene que el conjunto de flujos desarrollado deberá cumplir con las siguientes dos condiciones:

Consistencia: Si $\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}$ para $K, K' \in \mathcal{P}$, entonces

$$g_{\gamma,K} + g_{\gamma,K'} = 0. \quad (3.35)$$

Equilibrio de Primer Orden: Para todo $\lambda \in \mathbb{P}_1(K)$

$$(f, \lambda)_K - \mathcal{B}_K(u_h, \lambda) - \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda) + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (g_{\gamma,K}, \lambda)_\gamma = 0. \quad (3.36)$$

Dado que cada flujo $g_{\gamma,K}$ es una función lineal en cada lado/cara, está únicamente determinado por sus momentos (ver Lema 2.6.1), que denotamos por

$$\mu_{K,m}^\gamma := (g_{\gamma,K}, \lambda_m)_\gamma, \quad m \in \mathcal{V}_\gamma \quad (3.37)$$

Ahora, sea

$$\langle J_\gamma \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} (J_{\gamma,K} - J_{\gamma,K'}) & \text{si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}, K \neq K' \\ J_{\gamma,K} & \text{si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (3.38)$$

con

$$J_{\gamma,K} = \varepsilon \nabla u_h|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \quad \text{para } \gamma \in \mathcal{F}_K. \quad (3.39)$$

Podemos definir los momentos $\mu_{K,m}^\gamma$ del flujo $g_{\gamma,K}$ en la forma

$$\mu_{K,m}^\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} (\xi_{K,m} - \xi_{K',m}) + (\langle J_\gamma \rangle, \lambda_m)_\gamma & \text{si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}, K \neq K' \\ \xi_{K,m} + (J_{\gamma,K}, \lambda_m)_\gamma & \text{si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (3.40)$$

donde los parámetros $\xi_{K,m}$ son obtenidos al resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2} \sum_{K' \in \Omega_m \cap \Omega_K} (\xi_{K,m} - \xi_{K',m}) + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{\partial\Omega} \cap \mathcal{F}_m} \xi_{K,m} = \Delta_K(\lambda_m), \quad \forall K \in \Omega_m, \quad (3.41)$$

con

$$\Delta_K(\lambda_m) = \mathcal{B}_K(u_h, \lambda_m) + \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_m) - (f, \lambda_m)_K - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\langle J_\gamma \rangle, \lambda_m)_\gamma. \quad (3.42)$$

El sistema anterior consiste en $\#\Omega_m$ ecuaciones y $\#\Omega_m$ incógnitas, donde $\#\Omega_m$ denota la cardinalidad de Ω_m . Este sistema no tiene solución única, pero una solución que depende continuamente de los datos $\{\Delta_K(\lambda_m), K \in \Omega_m\}$ puede ser determinada siempre que la siguiente condición de compatibilidad se cumpla

$$\sum_{K \in \Omega_m} \Delta_K(\lambda_m) = 0, \quad \forall m \in \mathcal{V} \text{ y } x_m \notin \partial\Omega, \quad (3.43)$$

la cual se obtiene de manera directa tomando $v_h = \lambda_m$ en (3.9) junto con la definición de los términos de estabilización.

3.3.3. Solución al problema de tipo Neumann

El problema de Neumann a resolver es: *Hallar $\sigma_K \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ tal que*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \sigma_K &= \mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|}(\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma & \text{en } K, \\ \sigma_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K &= \mathcal{R}_{\gamma,K} & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K. \end{cases} \quad (3.44)$$

El siguiente resultado provee una solución para el problema (3.44), tanto en caso bidimensional como tridimensional, basada en la orientación, vértices y vectores normales dadas en la Figura 2.1.

Lema 3.3.1. *Sean*

$$p_K = \mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|}(\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma, \quad p_{\gamma,K} = \mathcal{R}_{\gamma,K}.$$

Entonces $\sigma_K = \sigma_K^1 + \sigma_K^0$ es la función solución del problema (3.44) donde σ_K^1 viene dado por (2.35) y σ_K^0 viene dado por (2.41) en el caso bidimensional y por (2.42) en el caso tridimensional. Más aún, existe una constante C independiente de h_K tal que

$$\begin{aligned} \|\sigma_K\|_{L^2(K)} &\leq C \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} h_K^{1/2} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right. \\ &\quad \left. + h_K \left\| \mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|}(\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma \right\|_{L^2(K)} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Demostración. Dado que el residuo del elemento \mathcal{R}_K y el residuo del lado $\mathcal{R}_{\gamma,K}$ satisfacen la siguiente condición de equilibrio bajo constantes

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma + \left(\mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma, 1 \right)_K = 0$$

luego el resultado sigue fácilmente debido al Teorema 2.6.8. ■

3.3.4. Cota superior para el error

Con respecto a la cota superior para el error, considerando una función $g \in H^1(K)$, las propiedades de la proyección ortogonal (2.3) junto con la función $\bar{v}_K = (v, 1/|K|)_K \in \mathbb{P}_1(K)$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Poincaré (Teorema 2.6.1), se deduce que

$$\begin{aligned} (g - \Pi_K(g), v)_K &= (g - \Pi_K(g), v - \bar{v}_K)_K \\ &\leq \|g - \Pi_K(g)\|_{L^2(K)} \|v - \bar{v}_K\|_{L^2(K)} \\ &\leq \frac{h_K}{\pi} \|g - \Pi_K(g)\|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \\ &\leq \frac{h_K}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \|g - \Pi_K(g)\|_{L^2(K)} \|v\|_K, \end{aligned} \quad (3.46)$$

mientras que aplicando simplemente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que si $\kappa \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} (g - \Pi_K(g), v)_K &\leq \|g - \Pi_K(g)\|_{L^2(K)} \|v\|_{L^2(K)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|g - \Pi_K(g)\|_{L^2(K)} \|v\|_K. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Entonces, tomando $g = f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|_K}$ se sigue que

$$(\text{osc}_K, v)_K \leq \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \|v\|_K. \quad (3.48)$$

donde

$$\mathcal{C}_{\text{osc},K} := \begin{cases} \min \left\{ \frac{h_K}{\pi\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, \\ \frac{h_K}{\pi\sqrt{\varepsilon}}, & \kappa = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Por otro lado, integrando por partes la condición de equilibrio de primer orden (3.36) y haciendo uso de la proyección ortogonal (2.3) se tiene que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, \lambda)_\gamma = -(\mathcal{R}_K, \lambda)_K + \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda),$$

y luego tomando $\lambda = 1 \in \mathbb{P}_1(K)$ se sigue que

$$\frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma = -\frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K, 1)_K + \frac{1}{|K|} \mathcal{S}_K(u_h, f; 1).$$

Luego, del problema local de Neumann (3.44) se puede concluir que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_K + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} &= \left\| \frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K, 1)_K + \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma \right\|_{L^2(K)} \\ &= \left\| \frac{1}{|K|} \mathcal{S}_K(u_h, f; 1) \right\|_{L^2(K)} = \frac{1}{|K|^{1/2}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ahora, dado que se ha obtenido una solución explícita para cada problema local de Neumann, resta determinar la cota superior del error. Para ello considerando la ecuación (3.33) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con las ecuaciones (3.48) y (3.50) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e, v) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left((\mathcal{R}_K + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla v)_K + (\text{osc}_K, v)_K \right) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{|K|}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| \|v\|_{L^2(K)} + \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$+ \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \|v\|_K. \quad (3.52)$$

Para continuar es necesario diferenciar si el parámetro κ es igual o distinto de cero. Se comienza con el caso $\kappa \neq 0$, entonces considerando (3.52) y haciendo uso de la desigualdad Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e, v) &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|v\|_K \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_\Omega. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Continuando con el caso en que $\kappa = 0$, al considerar (3.52), haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz al término de estabilización de manera individual, la desigualdad de Poincaré 2.6.1 y la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e, v) &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \frac{1}{|K|} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)|^2 \right)^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|v\|_K \\ &\leq \left(\frac{\mathcal{C}_{P, \Omega}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \frac{1}{|K|} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)|^2 \right)^{1/2} \right) \|v\|_K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2} \|v\|_{\Omega} \\
& \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} 2 \left(\frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\varepsilon|K|} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\Omega}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Nota 3.3.1. En las expresiones (3.53) y (3.54), el término de estabilización aparece testado contra una función constante, lo que implica que

$$\mathcal{S}_K(u_h, f; 1) = \begin{cases} 0 & , \text{ para SUPG, ES, CIP,} \\ \tau_K(-\mathcal{R}_K - \text{osc}_K, \kappa)_K & , \text{ para GLS,} \end{cases} \tag{3.55}$$

Finalmente tomando $v = e$ en (3.53) y en (3.54) y luego dividiendo ambos lados por $\|e\|_{\Omega}$, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. El error puede ser acotado superiormente como

$$\|e\|_{\Omega}^2 \leq \eta^2 \tag{3.56}$$

donde el estimador de error viene dado por $\eta^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2$, y los indicadores de error η_K son iguales a

$$\eta_K := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}, & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \sqrt{2} \left(\frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\varepsilon|K|} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } \kappa = 0, \end{cases} \tag{3.57}$$

más aún, tomando en consideración la Nota 3.3.1 y el hecho de que si $\kappa = 0$, los esquemas SUPG y GLS coinciden, se tiene que

$$\eta_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}, & \text{SUPG, ES, CIP,} \\ \frac{\tau_K}{\sqrt{\kappa|K|}} |(-\mathcal{R}_K - \text{osc}_K, \kappa)_K| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}, & \text{GLS,} \end{cases} \tag{3.58}$$

donde la expresión para los esquemas SUPG, ES y CIP es válida para $\kappa \geq 0$ y la expresión para el esquema GLS es sólo posible en el caso $\kappa \neq 0$. Además, $\boldsymbol{\sigma}_K$ se define en el Lema 3.3.1 y los parámetros de estabilización se definen en la Sección 3.2.1.1.

Nota 3.3.2. La principal diferencia entre usar el método de flujos equilibrados y los métodos usuales que se utilizan para la obtención de una cota superior para el error en formulaciones de elementos finitos

estabilizados, es que estos últimos implican el uso de operadores de interpolación y de la ortogonalidad de Galerkin, la cual en estricto rigor ya no se cumple debido a la presencia del término de estabilización, lo que genera un error de consistencia. En efecto, recordando que el error $e = u - u_h$ resuelve la formulación variacional (3.2) con (f, v) reemplazado por el residuo $\langle \mathcal{R}, v \rangle$, el cual para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ se define como

$$\langle \mathcal{R}, v \rangle = (f, v) - \mathcal{B}(u_h, v), \quad (3.59)$$

y reemplazando $v = v_h$ con $v_h \in \mathbb{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ en la ecuación anterior se tiene que

$$\langle \mathcal{R}, v_h \rangle = (f, v_h) - \mathcal{B}(u_h, v_h) = \mathcal{S}(u_h, f; v_h). \quad (3.60)$$

Por otro lado, considerando un operador de interpolación $\mathcal{I}_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_h$, se sigue

$$\mathcal{B}(e, v) = \mathcal{B}(e, v - \mathcal{I}_h v) + \mathcal{B}(e, \mathcal{I}_h v). \quad (3.61)$$

El término $\mathcal{B}(e, v - \mathcal{I}_h v)$ cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(e, v - \mathcal{I}_h v) &= (f, v - \mathcal{I}_h v) - \mathcal{B}(u_h, v - \mathcal{I}_h v) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left[(f, v - \mathcal{I}_h v)_K - \mathcal{B}_K(u_h, v - \mathcal{I}_h v) \right] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left[(\tilde{\mathcal{R}}_K, v - \mathcal{I}_h v)_K - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} ([\tilde{J}_\gamma], v - \mathcal{I}_h v)_\gamma + (f - \Pi_K(f), v - \mathcal{I}_h v)_K \right] \\ &\leq C_1 \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2 \right)^{1/2} \|v\|_\Omega, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{R}}_K = \Pi_K(f) - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - \kappa u_h, \quad [[\tilde{J}_\gamma]] = \frac{\varepsilon}{2} \left(\nabla u_h|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_K^\gamma + \nabla u_h|_{K'} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{K'}^\gamma \right), \quad (3.63)$$

y

$$\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left[\alpha_K^2 \|\tilde{\mathcal{R}}_K\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \varepsilon^{-1/2} \alpha_\gamma \|[\tilde{J}_\gamma]\|_{L^2(\gamma)}^2 + \alpha_K^2 \|f - \Pi_K(f)\|_{L^2(K)}^2 \right], \quad (3.64)$$

con α_S definida como

$$\alpha_S = \min \left\{ \frac{h_S}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\}. \quad (3.65)$$

Ahora bien, con respecto al error de consistencia se tiene que

$$\|\mathcal{I}_h^* \mathcal{R}\|_* = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{R}, \mathcal{I}_h v \rangle}{\|v\|_\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{S}((u_h, f), \mathcal{I}_h v)}{\|v\|_\Omega}. \quad (3.66)$$

Luego, en general (ver [74]) se cumple que

$$\|\mathcal{I}_h^* \mathcal{R}\|_* \leq C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (3.67)$$

Finalmente, reemplazando (3.62) en (3.61), tomando $v = e$, dividiendo por $\|e\|_\Omega$ y utilizando (3.67) se obtiene que

$$\|e\|_\Omega \leq (C_1 + C_2) \eta, \quad (3.68)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que no pueden ser determinadas explícitamente, por lo que el estimador obtenido no es completamente computable. Un análisis más detallado se presenta en [74] y [78].

3.3.5. Eficiencia del estimador

El Teorema (3.3.1) muestra que el estimador de error η obtenido al resolver el problema local de Neumann (3.31) con la introducción de un conjunto de flujos de bordes equilibrados $\{g_{\gamma,K}\}$ provee una cota superior garantizada para el error. En la presente sección se mostrará que el procedimiento presentado en la sección anterior, en realidad permite obtener un estimador que provee tanto una cota superior como una cota inferior para el error.

De la ecuación (3.45), se tiene que

$$\|\sigma_K\|_{L^2(K)} \preceq \left(h_K \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right), \quad (3.69)$$

ya que

$$\begin{aligned} & h_K \left\| \mathcal{R}_K - \frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\mathcal{R}_{\gamma,K}, 1)_\gamma \right\|_{L^2(K)} \\ & \leq h_K \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{|K|^{1/2}} \|(\mathcal{R}_K, 1)_K\|_{L^2(K)} + h_K \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \frac{|\gamma|^{1/2}}{|K|^{1/2}} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \\ & \preceq \left(h_K \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}\|_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Ahora, definiendo

$$[[J_\gamma]] = \begin{cases} \frac{1}{2} (J_{\gamma,K} + J_{\gamma,K'}) & , \text{ si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}, K \neq K' \\ 0 & , \text{ si } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (3.70)$$

con $J_{\gamma,K}$ dado por (3.39), y haciendo uso de las definiciones (3.28) y (3.38) se puede deducir que

$$\mathcal{R}_{\gamma,K} = g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle - [[J_\gamma]]. \quad (3.71)$$

Luego, teniendo en cuenta la Nota 3.3.1 y el hecho de que para $\kappa = 0$ los esquemas SUPG y GLS coinciden, se puede considerar, sin pérdida de generalidad, la expresión del indicador de error η_K del caso $\kappa \neq 0$ para desarrollar la cota inferior del error. Entonces, para cada $K \in \mathcal{P}$, el indicador de error puede ser acotado por

$$\begin{aligned} \eta_K &\preceq \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(h_K \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \|\mathcal{R}_{\gamma, K}\|_{L^2(\gamma)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \\ &\preceq \left(\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} + \|g_{\gamma, K} - \langle J_\gamma \rangle\|_{L^2(\gamma)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por lo tanto, para obtener una cota local del estimador de error, es necesario acotar por la norma del error cada término en el lado derecho de la desigualdad anterior, procedimiento que se presenta a continuación.

Considerando la definición del residuo del elemento \mathcal{R}_K e integrando por partes la *ecuación del error* (3.24), se tiene que

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \left[(\mathcal{R}_K, v)_K - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} (\llbracket J_\gamma \rrbracket, v)_\gamma \right] = \varepsilon (\nabla e, \nabla v)_\Omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla e, v)_\Omega + \kappa (e, v)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{P}} (\text{osc}_K, v)_K, \quad (3.73)$$

Ahora se utilizarán argumentos habituales de funciones burbujas para demostrar ciertas desigualdades.

Lema 3.3.2. *El residuo del elemento satisface*

$$\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \preceq \left(\mathcal{C}_K \|e\|_K + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right), \quad (3.74)$$

donde

$$\mathcal{C}_K = \text{máx} \left\{ 1, 2Pe_K, \sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}} h_K \right\}, \quad (3.75)$$

y Pe_K dado por (3.20).

Demostración. Sea $\beta_K = \prod_{n \in \mathcal{V}_K} \lambda_n$ y extendiendo por cero a $\Omega \setminus K$ se obtiene que $\beta_K \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $v = \beta_K \mathcal{R}_K$ en (3.73), se tiene que

$$(\mathcal{R}_K, \beta_K \mathcal{R}_K)_K = \varepsilon (\nabla e, \nabla(\beta_K \mathcal{R}_K))_K + (\mathbf{a} \cdot \nabla e, \beta_K \mathcal{R}_K) + \kappa (e, \beta_K \mathcal{R}_K) - (\text{osc}_K, \beta_K \mathcal{R}_K)_K$$

Ahora haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Teorema 2.6.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}^2 &\leq \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon \|\nabla e\|_{L^2(K)} \|\nabla(\beta_K \mathcal{R}_K)\|_{L^2(K)} + \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} \|\nabla e\|_{L^2(K)} \|\beta_K \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \right. \\
&\quad \left. + \kappa \|e\|_{L^2(K)} \|\beta_K \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \|\beta_K \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \right) \\
&\leq \left(\sqrt{\varepsilon} \|\nabla e\|_{L^2(K)} + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} h_K}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \|\nabla e\|_{L^2(K)} + \sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}} h_K \sqrt{\kappa} \|e\|_{L^2(K)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \\
&\leq \left(\max \left\{ 1, \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} h_K}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}} h_K \right\} \left(\sqrt{\varepsilon} \|\nabla e\|_{L^2(K)} + \sqrt{\kappa} \|e\|_{L^2(K)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \\
&\preceq \left(C_K \|e\|_K + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}$$

El resultado sigue debido a que $\|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \leq C \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K\|$ (nuevamente por Teorema 2.6.6). \blacksquare

Lema 3.3.3. *El salto de la derivada en la aproximación de los flujos normales en los bordes entre elementos satisface*

$$\left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \preceq \sum_{K' \in \Omega_\gamma} \left(C_{K'} \|e\|_{K'} + \frac{h_{K'}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_{K'}\|_{L^2(K')} \right), \quad (3.76)$$

con C_K dado por (3.75).

Demostración. Para $\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I$, sea $\beta_\gamma = \prod_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \lambda_n$ y extendiendo por cero a $\Omega \setminus \Omega_\gamma$ se obtiene que $\beta_\gamma \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $v = -\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket$ en (3.73), se tiene que

$$\begin{aligned}
2(\llbracket J_\gamma \rrbracket, \beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)_\gamma &= \sum_{K \in \Omega_\gamma} \left(-\varepsilon (\nabla e, \nabla(\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket))_K - (\mathbf{a} \cdot \nabla e, \beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)_K - \kappa (e, \beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)_K \right. \\
&\quad \left. + (\text{osc}_K, \beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)_K + (\mathcal{R}_K, \beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)_K \right).
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Teorema 2.6.7 y el Lema anterior se tiene

$$2 \left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq \left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sum_{K \in \Omega_\gamma} \left(\varepsilon \|\nabla e\|_{L^2(K)} \|\nabla(\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket)\|_{L^2(K)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \|\nabla e\|_{\mathbf{L}^2(K)} \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(K)} + \kappa \|e\|_{L^2(K)} \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(K)} \\
& + \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(K)} + \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(K)} \Big) \\
& \preceq \sum_{K \in \Omega_\gamma} \left(\sqrt{\varepsilon} \|\nabla e\|_{L^2(K)} + \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} h_K}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \|\nabla e\|_{L^2(K)} + \sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}} h_K \|e\|_{L^2(K)} \right. \\
& \left. + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \\
& \preceq \sum_{K \in \Omega_\gamma} \left(\mathcal{C}_K \|e\|_K + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}.
\end{aligned}$$

El resultado sigue debido a que $\|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(K)} \leq C \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}$ (nuevamente por Teorema 2.6.7). ■

Lema 3.3.4. *Sea $\{g_{\gamma,K}\}$ un conjunto de flujos de borde equilibrados que satisfacen la condición de consistencia (3.35) y la condición de equilibrio de primer orden (3.36). Entonces, por cada elemento K se tiene que*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h_K}{\varepsilon}\right)^{1/2} \|g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle\|_{L^2(\gamma)} & \preceq \sum_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \sum_{K' \in \Omega_n} \left(\frac{h_{K'}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_{K'}\|_{L^2(K')} \right. \\
& \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'} \cap \mathcal{F}_n} \left(\frac{h_{K'}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} + \left(\frac{h_{K'}^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n)| \right). \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Demostración. Para un lado γ con $\mathcal{V}_\gamma = \{l, r\}$, se define

$$\widehat{\mu}_{K,n}^\gamma = (g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle, \lambda_n)_\gamma, \quad (3.78)$$

y dado que $g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle \in \mathbb{P}_1(\gamma)$, haciendo uso del Lema 2.6.1 se tiene que

$$g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle = \frac{d}{|\gamma|} \sum_{i \in \mathcal{V}_\gamma} \widehat{\mu}_{K,i}^\gamma ((d+1)\lambda_i - 1).$$

Entonces,

$$\|g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle\|_{L^2(\gamma)} \leq \sum_{i \in \mathcal{V}_\gamma} \left\| \widehat{\mu}_{K,i}^\gamma \right\| \left\| \frac{d}{|\gamma|} ((d+1)\lambda_i - 1) \right\|_{L^2(\gamma)}$$

y dado que

$$\left\| \frac{d}{|\gamma|} ((d+1)\lambda_i - 1) \right\|_{L^2(\gamma)} \leq \frac{C}{|\gamma|} h_K^{(d-1)/2} \leq C h_K^{(1-d)/2}$$

se tiene que

$$h_K^{(d-1)/2} \|g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle\|_{L^2(\gamma)} \leq C \sum_{n \in \mathcal{V}_\gamma} |\widehat{\mu}_{K,n}^\gamma|. \quad (3.79)$$

De la expresión (3.40) se puede concluir que

$$\widehat{\mu}_{K,n}^\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi_{K,n} - \xi_{K',n}) & , \text{ en } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'} \\ \xi_{K,n} & , \text{ en } \gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{\partial\Omega} \end{cases}$$

donde $\{\xi_{K,n}\}$ se determinan a través de (3.41) y por lo tanto se sigue que

$$|\widehat{\mu}_{K,n}^\gamma| \leq C \sum_{K' \in \Omega_n} |\xi_{K',n}| \leq C \sum_{K' \in \Omega_n} |\Delta_{K'}(\lambda_n)|. \quad (3.80)$$

donde $\Delta_{K'}(\lambda_n)$ viene dado por (3.42). Integrando por partes en dicho término se tiene que

$$\begin{aligned} |\Delta_{K'}(\lambda_n)| &= \left| -(\mathcal{R}_{K'}, \lambda_n)_{K'} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'}} (\llbracket J_\gamma \rrbracket, \lambda_n)_\gamma + \mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n) \right| \\ &\leq \|\mathcal{R}_{K'}\|_{L^2(K')} \|\lambda_n\|_{L^2(K')} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'}} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \|\lambda_n\|_{L^2(\gamma)} + |\mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n)| \\ &\leq h_K^{d/2} \|\mathcal{R}_{K'}\|_{L^2(K')} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'}} h_K^{(d-1)/2} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} + |\mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n)| \end{aligned} \quad (3.81)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} h_K^{(d-1)/2} \|g_{\gamma,K} - \langle J_\gamma \rangle\|_{L^2(\gamma)} &\preceq \sum_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \sum_{K' \in \Omega_n} \left(h_K^{d/2} \|\mathcal{R}_{K'}\|_{L^2(K')} + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'}} h_K^{(d-1)/2} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \right. \\ &\quad \left. + |\mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n)| \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Multiplicando la expresión anterior por $(h_K^{2-d}/\varepsilon)^{1/2}$ se sigue el resultado. ■

Para poder completar el resultado de eficiencia local, resta acotar cada término de estabilización por la norma del error, tanto para el caso en el que éste se testea con una función base como con una constante.

Dicho procedimiento se presenta a continuación.

Streamline Diffusion (SUPG): Claramente $\mathcal{S}_K(u_h, f; 1) = 0$, mientras que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)| &= \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau_K |(-\mathcal{R}_K - \text{osc}_K, \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_n)_K| \\ &\preceq \tau_K \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}}{h_K} \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Galerkin Least Square (GLS): Primero se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} |\mathcal{S}_K(u_h, f; 1)| &= \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} \tau_K \left| (-\mathcal{R}_K - \text{osc}_K, \kappa)_K \right| \\ &\preceq \tau_K \frac{\sqrt{\varepsilon \kappa}}{h_K} \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)| &= \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau_K \left| (-\mathcal{R}_K - \text{osc}_K, \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_n + \kappa \lambda_n)_K \right| \\ &\preceq \tau_K \max \left\{ \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}}{h_K}, \kappa \right\} \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Edge Stabilization (ES): Claramente $\mathcal{S}_K(u_h, f; 1) = 0$, mientras que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)| &= \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma \left| ([\nabla u_h \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma], \nabla \lambda_n|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K (h_{\partial K}^2 + h_{\partial K'}^2))_\gamma \right| \\ &\preceq \frac{h_K}{\varepsilon} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma \left(\left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \| [J_\gamma] \|_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Continuous Interior Penalty Stabilization (CIP): Claramente $\mathcal{S}_K(u_h, f; 1) = 0$. Para deducir la cota del término testeado contra la función base, notar que

$$\mathbf{a} = (\hat{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{n}}_\gamma + (\hat{\mathbf{t}}_\gamma \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{t}}_\gamma$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ y $\hat{\mathbf{t}}_\gamma$ corresponden al vector normal y tangente unitarios, respectivamente, con respecto a γ .

Luego, haciendo uso del hecho de que $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$[\mathbf{a} \cdot \nabla u_h] = (\hat{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{a}) [\hat{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \nabla u_h] + (\hat{\mathbf{t}}_\gamma \cdot \mathbf{a}) [\hat{\mathbf{t}}_\gamma \cdot \nabla u_h] = (\hat{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{a}) [\hat{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \nabla u_h],$$

en γ y luego se sigue que

$$\| [\mathbf{a} \cdot \nabla u_h] \|_{L^2(\gamma)} \leq \frac{2}{\varepsilon} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)} \| [J_\gamma] \|_{L^2(\gamma)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)| &= \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma \left| ([\mathbf{a} \cdot \nabla u_h], \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_n|_K)_\gamma \right| \\ &\preceq \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^2}{\varepsilon h_K} \left(\left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \| [J_\gamma] \|_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ahora, considerando (3.72) y haciendo uso de los Lemas 3.3.2, 3.3.3 y 3.3.4 junto con las cotas del término de estabilización, se obtiene el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.2. *El estimador local de error η_K , dado por (3.57), satisface*

$$\eta_K \preceq \sum_{n \in \mathcal{V}_K} \sum_{K' \in \Omega_n} \left(\mathcal{C}_{K'} \|e\|_{K'} + \frac{h_{K'}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_{K'}\|_{L^2(K')} \right) + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}} \left(\mathcal{C}_{K''} \|e\|_{K''} + \frac{h_{K''}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_{K''}\|_{L^2(K'')} \right) \quad (3.88)$$

donde \mathcal{C}_K viene dada por (3.75) y

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K} = \begin{cases} \tau_K \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}}{h_K} & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K \text{ máx} \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon} \kappa}{h_K}, \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}}{h_K}, \kappa \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K}{\varepsilon} \text{ máx}_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma & , \text{ para ES,} \\ \text{máx}_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^2}{\varepsilon h_K} & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (3.89)$$

Nota 3.3.3. *Según lo visto en la Sección 3.2.1.1 referente a los parámetros de estabilización, se tiene que los casos de difusión dominante o convección dominante pueden explicarse a través de los valores del número de Péclet. En efecto, el caso de difusión dominante corresponde a $Pe_K \leq 1$ mientras que el de convección dominante corresponde a $Pe_K > 1$, y por lo tanto, según los resultados presentados en la Sección 3.2.1.1 se tiene que la constante de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K}$ puede expresarse como*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K} = \begin{cases} 2\pi \delta_1^{SUPG} Pe_K & , Pe_K \leq 1, SUPG, \\ \pi \delta_0^{SUPG} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} & , Pe_K > 1, SUPG, \\ \delta_0^{GLS} \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon^2 + h_K^2}} \text{ máx} \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon} \kappa}{h_K}, \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}}{h_K}, \kappa \right\} & , GLS, \\ 0,025 \frac{h_K}{\varepsilon} & , ES, \\ \text{máx}_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{h_\gamma^2 \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^2 \|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}}{\varepsilon h_K} & , CIP. \end{cases} \quad (3.90)$$

3.4. Robustez del Estimador

El Teorema 3.3.2 indica que la cota inferior obtenida no es robusta, es decir, las constantes que aparecen en dicha cota dependen de los parámetros de difusión, reacción y/o convección, y por lo tanto, el estimador obtenido no es robusto. Sin embargo, la robustez del estimador puede ser alcanzada en el caso en que $\kappa = 0$ si se hace uso de una norma adecuada. En efecto, al igual que en [74], se considera la norma

$$\|v\|_\Omega + \|\mathbf{a} \cdot \nabla v\|_* \quad (3.91)$$

Según los resultados mostrados por Tobiska y Verfürth en [74], se tiene que el indicador residual $\eta_{K,TV}$ dado por

$$\eta_{K,TV}^2 = \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K} \frac{h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2,$$

junto el indicador de error del dato $\theta_{K,TV}$

$$\theta_{K,TV}^2 = \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - \Pi(f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(K)}^2,$$

y el indicador del esquema estabilizado CIP

$$\Theta_{K,TV}^{\text{cip}} = \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|(\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nabla \mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}.$$

cumplen que

$$\left(\|e\|_\Omega^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_*^2 \right) \leq c^\dagger \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \left[\eta_{K,TV}^2 + \theta_{K,TV}^2 + \sigma_{\text{cip}} \left(\Theta_{K,TV}^{\text{cip}} \right)^2 \right] \right), \quad (3.92)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{K,TV}^2 \leq c_\dagger \left(\left(\|e\|_\Omega^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_*^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{P}} \theta_{K,TV}^2 \right) \quad (3.93)$$

donde σ_{cip} es un parámetro igual a 1 para el caso del esquema CIP y cero para SUPG, mientras que las constantes c_\dagger y c^\dagger son independientes de los parámetros físicos de la ecuación. A continuación se demostrará que el estimador η cumple una cota análoga a (3.92) y (3.93). Primero, notar que para el caso $\kappa = 0$ y $\mathbf{div} \mathbf{a} = 0$, para todo $v, w \in H_0^1(\Omega)$ la forma bilineal cumple ([79], Proposición 4.17)

$$B(v, v) = \|v\|_\Omega^2,$$

$$B(v, w) \leq (\|v\|_\Omega + \|\mathbf{a} \cdot \nabla v\|_*) \|w\|_\Omega,$$

junto con la siguiente propiedad *inf sup*

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(v, w)}{(\|v\|_\Omega + \|\mathbf{a} \cdot \nabla v\|_*) \|w\|_\Omega} \geq \frac{1}{3}$$

Luego, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.4.1. *(Cota superior para el error)*

El error puede ser acotado superiormente por

$$\frac{1}{3} (\|e\|_\Omega + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_*) \leq \eta.$$

Demostración. De al condición *inf sup* de la forma bilineal y las ecuaciones (3.53) y (3.54) se sigue que

$$\frac{1}{3} (\|e\|_{\Omega} + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{*}) \leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(e, v)}{\|v\|_{\Omega}} \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2 \right)^{1/2} = \eta. \quad \blacksquare$$

Ahora, para probar la robustez de la cota inferior se demostrará que el estimador η está acotado por la suma de los estimadores η_{TV} , θ_{TV} y Θ_{TV}^{cip} . De la definición del estimador η y la ecuación (3.69) se tiene que

$$\begin{aligned} \eta_K^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \\ &\preceq \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \frac{h_K}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_{\gamma, K}\|_{L^2(\gamma)}^2 + \frac{h_K^2}{\pi^2 \varepsilon} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}^2. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Debido la descomposición del residuo del lado dada por (3.71) se sigue que

$$\frac{h_K}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_{\gamma, K}\|_{L^2(\gamma)}^2 \preceq \frac{h_K}{\varepsilon} \|g_{\gamma, K} - \langle J_{\gamma} \rangle\|_{L^2(\gamma)}^2 + \frac{h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2.$$

Con respecto al término que involucra los flujos equilibrados, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{h_K}{\varepsilon} \|g_{\gamma, K} - \langle J_{\gamma} \rangle\|_{L^2(\gamma)}^2 &\preceq \sum_{n \in \mathcal{V}_{\gamma}} \sum_{K' \in \Omega_n} \left(\frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_{K'}\|_{L^2(K')}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'} \cap \mathcal{F}_n} \frac{h_{K'}}{\varepsilon} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 + \frac{h_{K'}^{2-d}}{\varepsilon} |\mathcal{S}_{K'}(u_h, f; \lambda_n)|^2 \right). \end{aligned}$$

Luego es necesario acotar el término estabilizado $\mathcal{S}_K(\cdot, \cdot; \cdot)$. Para el caso del esquema SUPG, según lo visto anteriormente, se tiene que

$$\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)|^2 \preceq \tau_K^2 \frac{\pi^2}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^{\infty}(K)}^2 \left(\frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{\pi^2 \varepsilon} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}^2 \right),$$

y luego, asumiendo que

$$\tau_K \|\mathbf{a}\|_{L^{\infty}(K)} \preceq h_K, \quad \forall K \in \mathcal{P}, \quad (3.95)$$

se concluye

$$\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)|^2 \preceq \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{\pi^2 \varepsilon} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)}^2.$$

La condición (3.95) es usada por Tobiska y Verfürth en [74]. Por otro lado, con respecto al esquema CIP, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n)| = \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_{\gamma} \left| (\llbracket \mathbf{a} \cdot \nabla u_h \rrbracket, \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_{n|K})_{\gamma} \right|$$

$$\leq \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma \| [\mathbf{a} \cdot \nabla u_h] \|_{L^2(\gamma)} \| \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_n|_K \|_{L^2(\gamma)}.$$

Para acotar la norma del salto de la derivada, se hace uso de las mismas técnicas usadas para acotar el error de consistencia del esquema CIP en [74] (Lema 2.6), de donde se tiene que

$$\| [\mathbf{a} \cdot \nabla u_h] \|_{L^2(\gamma)} \preceq h_K^{-1/2} \| \mathcal{R}_K \|_{L^2(\Omega_\gamma)} + h_K^{-1/2} \| (\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)} + h_K^{1/2} \| \nabla \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} \| \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\| \mathbf{a} \cdot \nabla \lambda_n \|_{L^2(\gamma)} \preceq \| \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} h_K^{\frac{d-3}{2}}.$$

Entonces, haciendo uso de los resultados anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} | \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n) | &\preceq \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma \| \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} \left(\frac{h_K^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \| \mathcal{R}_K \|_{L^2(\Omega_\gamma)} \right. \\ &\left. + \frac{h_K^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \| (\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| \nabla \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} \| \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Luego, asumiendo que

$$\tau_\gamma \| \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} \preceq h_\gamma^2, \quad \gamma \in \mathcal{F}_K, \forall K \in \mathcal{P} \quad (3.96)$$

entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} \right)^{1/2} | \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n) | &\preceq \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \| \mathcal{R}_K \|_{L^2(\Omega_\gamma)} + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \| (\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)} \right. \\ &\left. + \frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon}} \| \nabla \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega_\gamma)} \| \nabla u_h \|_{L^2(\Omega_\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

y luego elevando al cuadrado la ecuación anterior se concluye que

$$\frac{h_K^{2-d}}{\varepsilon} | \mathcal{S}_K(u_h, f; \lambda_n) |^2 \preceq \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \sum_{K \in \Omega_\gamma} \left(\frac{h_K^2}{\varepsilon} \| \mathcal{R}_K \|_{L^2(\Omega_\gamma)}^2 + \left(\Theta_{K,TV}^{\text{cip}} \right)^2 \right).$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{h_K}{\varepsilon} \| \mathcal{R}_{\gamma,K} \|_{L^2(\gamma)}^2 &\preceq \sum_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \sum_{K' \in \Omega_n} \left(\frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \| \mathcal{R}_{K'} \|_{L^2(K')}^2 + \| \text{osc}_{K'} \|^2_{L^2(K')} \right. \\ &\left. + \sigma_{\text{cip}} \left(\Theta_{\text{cip},K'} \right)^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{K'}} \frac{h_{K'}}{\varepsilon} \| [J_\gamma^n] \|_{L^2(\gamma)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Luego sumando sobre todos los elementos $K \in \mathcal{P}$ y haciendo uso de la regularidad de la malla y la definición del estimador de error del dato se obtiene

$$\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \preceq (\eta_{TV})^2 + (\theta_{TV})^2 + \sigma_{\text{cip}} \left(\Theta_{TV}^{\text{cip}} \right)^2, \quad (3.99)$$

donde la constante dada por la convención sobre el operador \preceq no depende de los parámetros físicos de la ecuación ni de los pasos espacial o temporal. Luego haciendo uso de la ecuación (3.93) y el resultado anterior se concluye que

$$\frac{1}{3} \left(\|e\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_*^2 \right) \leq \eta^2 \preceq \left(\|e\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla e\|_*^2 \right) + (\theta_{TV})^2 + \sigma_{\text{cip}} \left(\Theta_{TV}^{\text{cip}} \right)^2, \quad (3.100)$$

donde nuevamente la constante que viene dada por la convención sobre el operador \preceq no depende de los parámetros físicos de la ecuación ni de los pasos espacial o temporal.

Capítulo 4

Problema Parabólico

En el presente capítulo se estudia el problema parabólico que corresponde al tema central de este trabajo. Específicamente la ecuación de estudio corresponde a la ecuación de difusión-convección-reacción no estacionaria. El análisis *a posteriori* se realiza en dos normas: $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y la norma usual del espacio $\mathbb{W}(0, T)$. En ambos casos, la idea principal consiste en descomponer la ecuación del error de manera tal de tener un residuo asociado al espacio, al tiempo y a la data del problema, y de esta forma, poder hacer uso de la teoría vista en el caso elíptico.

4.1. Problema Modelo

Se considera el problema de difusión-convección-reacción no estacionario

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + \kappa u = f & , \text{ en } \Omega_T \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

donde:

(S1) $0 < \varepsilon \ll 1$ es el coeficiente de difusión y $\kappa \geq 0$ corresponde al coeficiente de disipación;

(S2) $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ es un campo solenoidal, es decir, $\mathbf{div} \mathbf{a} = 0$;

(S3) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Nota 4.1.1. (Regularidad temporal de la función f)

Con respecto a la regularidad temporal de la función f , una opción es considerar que $f \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$.

En el presente trabajo, dicho supuesto no será considerado a menos que se exprese explícitamente lo contrario.

La formulación variacional asociada a este problema es: Hallar $u \in \mathbb{W}(0, T)$, $t \in (0, T)$ c.t.p., tal que

$$(V) \quad \begin{cases} \langle \partial_t u(t), v \rangle + \mathcal{B}(u(t), v) = (f(t), v) & , \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{B}(v, w) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla v \cdot \nabla w + (\mathbf{a} \cdot \nabla v) w + \kappa v w \, dx \quad (4.1)$$

Nota 4.1.2. Con el fin de no sobrecargar la notación y siempre que no exista ningún tipo de confusión, de ahora en adelante la dependencia temporal de una función espacio temporal $u(t)$ se omitirá, denotándola simplemente por u .

Es fácil ver que

$$|\mathcal{B}(v, w)| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|v\|_{\Omega} \|w\|_{\Omega}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{B}(v, v) \geq \|v\|_{\Omega}^2 - \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.3)$$

para todo $v, w \in H_0^1(\Omega)$, con la constante de continuidad dada por (3.7).

Luego, debido a (4.2), (4.3) y el Teorema de Lions (ver Teorema 6.6 en [39]) se tiene que existe una única solución al problema débil (V).

Nota 4.1.3. (Restricción de la forma bilineal a un sub-dominio $K \subset \Omega$)

Las integrales involucradas en la forma bilineal $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ están calculadas sobre el dominio Ω . En caso de considerar un sub-dominio $K \subset \Omega$, la restricción de la forma bilineal a dicho sub-dominio se denotará por $\mathcal{B}_K(\cdot, \cdot)$ y la constante de continuidad asociada a dicha restricción estará dada por ejemplo por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} = \max \left\{ 2, 2\sqrt{\frac{d}{\varepsilon \kappa}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} \right\}. \quad (4.4)$$

4.2. Esquema Completamente Discretizado

Para determinar una solución aproximada de este problema es necesario discretizar tanto la variable espacial como la variable temporal. Para esto se hace uso del *método de las líneas* el cual considera

realizar en primera instancia la discretización de la variable espacial, lo cual se realiza a través de un esquema de Galerkin estabilizado, y posteriormente discretizar la variable temporal, para lo cual se hace uso del esquema de Euler implícito. De esta manera se obtiene el siguiente esquema completamente discretizado: Dada $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$, hallar $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$, para $1 \leq n \leq N$ tal que

$$(EG)_{Stb} \quad \frac{1}{\tau_n} \langle u_h^n - u_h^{n-1}, v_h \rangle + \mathcal{B}(u_h^n, v_h) + \mathcal{S}^n(u_h^n, f^n; v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h^n$$

donde $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ viene dado por (4.1), $\mathcal{S}^n(\cdot, \cdot; \cdot)$ es el término de estabilización, el cual cumple con las condiciones establecidas en la siguiente sección, $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$ es una aproximación arbitraria de $u_0 \in L^2(\Omega)$ y \mathbb{V}_h^n es el siguiente espacio de elementos finitos

$$\mathbb{V}_h^n := \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{P}^n\} \cap H_0^1(\Omega), \quad (4.5)$$

con \mathcal{P}^n la partición del dominio en el tiempo t^n . Dado que f no es necesariamente continua con respecto al tiempo, se toma f^n como el valor medio de f en el n -ésimo subintervalo de tiempo, es decir.,

$$f^n := \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f(s) ds \in L^2(\Omega).$$

Nota 4.2.1. (Regularidad temporal de la función f)

En el caso en que $f \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$, para la evaluación temporal discreta basta tomar la evaluación puntual en el tiempo $f^n = f(\cdot, t^n)$.

4.2.1. Esquemas Estabilizados Temporales

A continuación se presentan las versiones temporales de los esquemas estabilizados presentados en la sección 3.2.1. Dado que se hace uso del *método de las líneas* para la completa discretización del problema, los parámetros de estabilización para el caso temporal no dependen del paso del tiempo τ_n , pues en primera instancia se realiza la discretización espacial de problema y luego la temporal. Nuevamente para poder realizar el análisis *a posteriori*, es necesario que el término de estabilización de cada esquema pueda ser descompuesto como la suma de aportes locales de cada elemento de la partición, es decir

$$\mathcal{S}^n(u_h^n, f^n; v_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_h|_K), \quad (4.6)$$

donde el aporte local $\mathcal{S}_K^n(\cdot, \cdot; \cdot)$ viene dado por uno de los siguientes esquemas:

Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) [23, 33, 53]:

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_h|_K) := \tau_K \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} - \varepsilon \Delta u_h^n + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n + \kappa u_h^n - f^n, \mathbf{a} \cdot \nabla v_h|_K \right)_K. \quad (4.7)$$

Galerkin Least Squares (GLS) [33, 57]:

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \tau_K \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} - \varepsilon \Delta u_h^n + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n + \kappa u_h^n - f^n, \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K} + \kappa v_{h|_K} \right)_K. \quad (4.8)$$

Edge Stabilization (ES) [30]:

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \tau_\gamma (\llbracket \nabla u_h^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma \rrbracket, \nabla v_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K (h_{\partial K}^2 + h_{\partial K'}^2))_\gamma, \quad (4.9)$$

donde $\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}$ y $h_{\partial K}$ es el diámetro de ∂K .

Continuous Interior Penalty Stabilization (CIP) [28, 29]:

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \tau_\gamma (\llbracket \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n \rrbracket, \mathbf{a} \cdot \nabla v_{h|_K})_\gamma. \quad (4.10)$$

Se hace uso de los mismos parámetros de estabilización definidos en la Sección 3.2.1.1.

4.3. Análisis *a posteriori*

A continuación se procede a realizar el análisis *a posteriori* para el problema parabólico. Para esto se consideran dos casos, los cuales varían según la norma utilizada para medir el error asociado a la discretización del problema. El primer caso corresponde a medir el error en la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ mientras que el segundo corresponde a medir el error en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0,T)}$. Si bien en ambos casos se mide el error en tiempo en la norma $L^2(0,T)$ y el error en espacio en la norma de la energía, la principal diferencia es que el segundo caso incluye además el término de la derivada temporal, medido en la norma dual. Previo al estudio de estos casos es necesario presentar la relación existente entre el *residuo* y la denominada *ecuación del error* del caso parabólico junto con algunas definiciones preliminares.

4.3.1. El Residuo y la Ecuación del Error

Sea u la solución de la formulación variacional (V), luego se define el error de aproximación del esquema $(EG)_{Stb}$ como

$$e := u - u_{h\tau}, \quad (4.11)$$

donde la función $u_{h\tau}$ corresponde a una interpolación lineal definida en $(0, T]$, tal que restringida al sub-intervalo $I^n = (t^{n-1}, t^n]$ viene dada por

$$u_{h\tau} := u_h^n - \frac{t^n - t}{\tau_n} (u_h^n - u_h^{n-1}). \quad (4.12)$$

Notar que $u_{h\tau}(\cdot, t)$ es continua y afín a trozos con valores en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto es diferenciable en el sentido clásico en I^n con derivada igual a

$$\partial_t u_{h\tau} = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}. \quad (4.13)$$

Ahora, para cualquier $w \in \mathbb{W}(0, T)$ se define el *residuo* $\mathcal{R}(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ como

$$\langle \mathcal{R}(w), v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} := (f, v) - \langle \partial_t w, v \rangle - \mathcal{B}(w, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (0, T] \text{ c.t.p.} \quad (4.14)$$

Por otro lado, la *ecuación del error* para el caso parabólico se define en el mismo contexto que la formulación variacional (V) como

$$\langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) := (f, v) - \langle \partial_t u_{h\tau}, v \rangle - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (0, T] \text{ c.t.p.} \quad (4.15)$$

En base a lo anterior, es claro que el *residuo* y la *ecuación del error* cumplen que

$$\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (0, T] \text{ c.t.p.} \quad (4.16)$$

Ahora bien, la ecuación *ecuación del error* (equivalentemente el *residuo*), puede descomponerse de la siguiente manera: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, y $\forall t \in I^n$ c.t.p., con $1 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} \langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) &= (f, v) - \langle \partial_t u_{h\tau}, v \rangle - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) \\ &= (f^n, v) - \langle \partial_t u_{h\tau}, v \rangle - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) + (f - f^n, v) \\ &= (f^n, v) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right) - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) + (f - f^n, v) \\ &= (f^n, v) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right) - \mathcal{B}(u_h^n, v) \\ &\quad + \mathcal{B}(u_h^n - u_{h\tau}, v) + (f - f^n, v). \end{aligned}$$

Definiendo el *residuo espacial* $\mathcal{R}_h(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, el *residuo temporal* $\mathcal{R}_t(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y el *residuo de oscilación temporal* $\mathcal{R}_D(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ como

$$\langle \mathcal{R}_h(w), v \rangle = (f^n, v) - \langle \partial_t w, v \rangle - \mathcal{B}(u_h^n, v), \quad (4.17)$$

$$\langle \mathcal{R}_t(w), v \rangle = \mathcal{B}(u_h^n - w, v), \quad (4.18)$$

$$\langle \mathcal{R}_D(w), v \rangle = (f - f^n, v), \quad (4.19)$$

con $v \in H_0^1(\Omega)$ y $t \in I^n$ c.t.p., con $1 \leq n \leq N$, entonces si $w = u_{h\tau}$ se tiene que la *ecuación del error*, y equivalentemente el *residuo*, puede ser reescrita como la suma del *residuo espacial*, el *residuo temporal* y *residuo de oscilación temporal*, i.e.,

$$\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle = \langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad (4.20)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $t \in I^n$ c.t.p. con $1 \leq n \leq N$.

Esta representación facilita la obtención de un estimador de error así como la determinación de una cota superior e inferior para el mismo. El definir tanto la *ecuación del error* como el *residuo* responde al hecho de que dependiendo de la norma que se esté utilizando para medir el error, será mas conveniente utilizar el uno o el otro.

4.3.2. Análisis *a posteriori* en norma $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

Se comienza realizando el análisis *a posteriori* haciendo uso de la norma $\|\cdot\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}$ para medir el error, la cual para $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ está definida como

$$\|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \|v\|_{\Omega}^2 dt, \quad (4.21)$$

donde $\|\cdot\|_{\Omega}$ denota la norma de la energía. Al considerar un intervalo de tiempo discreto I^n , con $1 \leq n \leq N$, se considera la notación reducida

$$\|v\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{\Omega}^2 dt. \quad (4.22)$$

Para determinar una cota superior e inferior para el error se hará uso de la *ecuación del error* y la descomposición de ésta dada por (4.20).

4.3.2.1. Cota superior para el error

Como ya se ha mencionado, para determinar una cota superior para el error se considera la *ecuación del error* y su descomposición en *residuo espacial*, *temporal* y *oscilación temporal*

$$\langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in I^n \text{ c.t.p.},$$

y se procede a acotar cada uno de los términos del lado derecho de dicha representación.

Se comienza desarrollando una cota para el *residuo espacial* $\mathcal{R}_h(u_{h\tau})$. Para ello, notar que para un tiempo $t \in I^n$ fijo pero arbitrario, el *residuo espacial* es el residuo del siguiente problema elíptico: *Hallar*

$u^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}(u^n, v) + \frac{1}{\tau_n}(u^n, v) = \left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

cuya formulación de elementos finitos estabilizada viene dada por: Hallar $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$ tal que

$$\mathcal{B}(u_h^n, v_h) + \frac{1}{\tau_n}(u_h^n, v_h) + \mathcal{S}(u_h^n, f^n; v_h) = \left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n}, v_h \right), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h^n.$$

Luego, si consideramos el error para el caso elíptico $e_h = u^n - u_h^n$, se tiene que la ecuación del error es igual a

$$\mathcal{B}(e_h, v) + \frac{1}{\tau_n}(e_h, v) = (f^n, v) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right) - \mathcal{B}(u_h^n, v) = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, para estimar el *residuo espacial* pueden utilizarse las mismas técnicas desarrolladas en el Capítulo 3 para problemas elípticos. Entonces, se comienza considerando la existencia de un conjunto de flujos equilibrados:

SUPOSICIÓN 4.3.1. Sean $\{g_{\gamma,K}^n \in \mathbb{P}_1(\gamma) : \gamma \in \mathcal{F}_K^n, \forall K \in \mathcal{P}^n\}$ un conjunto de *flujos de borde*, que satisfacen

$$g_{\gamma,K}^n + g_{\gamma,K'}^n = 0 \quad \text{en } \gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_{K'}^n. \quad (4.24)$$

Luego se tiene que

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n} \right)_K - \mathcal{B}_K(u_h^n, v) - \frac{1}{\tau_n}(u_h^n|_K, v)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (g_{\gamma,K}^n, v)_\gamma \right), \quad (4.25)$$

donde $\mathcal{B}_K^n(\cdot, \cdot)$ corresponde a la restricción sobre el elemento $K \in \mathcal{P}^n$ de la forma bilineal. Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n} + \varepsilon \Delta u_h^n|_K - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K - \left(\kappa + \frac{1}{\tau_n} \right) u_h^n|_K, v \right)_K \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (g_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla u_h^n|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, v)_\gamma \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\left(\Pi_K \left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K \right) + \varepsilon \Delta u_h^n|_K - \left(\kappa + \frac{1}{\tau_n} \right) u_h^n|_K, v \right)_K \right. \\ &\quad \left. + \left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K - \Pi_K \left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K \right), v \right)_K \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (g_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla u_h^n|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, v)_\gamma \right). \end{aligned}$$

Definiendo el *residuo del elemento* \mathcal{R}_K^n , el *residuo del lado* $\mathcal{R}_{\gamma,K}^n$ y el término oscilatorio osc_K^n por

$$\mathcal{R}_K^n = \Pi_K \left(f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|K}^n \right) + \varepsilon \Delta u_{h|K}^n - \left(\kappa + \frac{1}{\tau_n} \right) u_{h|K}^n, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{R}_{\gamma,K}^n = g_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla u_{h|K}^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K, \quad (4.27)$$

$$\text{osc}_K^n = f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|K}^n - \Pi_K \left(f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|K}^n \right). \quad (4.28)$$

Luego, la ecuación del error puede ser reescrita como

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\mathcal{R}_K^n, v)_K + (\text{osc}_K^n, v)_K + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (\mathcal{R}_{\gamma,K}^n, v)_{\gamma} \right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.29)$$

Ahora, al igual que en el caso elíptico, para cada $K \in \mathcal{P}^n$ se asume la existencia de un campo de vectores $\boldsymbol{\sigma}_K^n$ solución de un problema local de Neumann:

SUPOSICIÓN 4.3.2. Para cada $K \in \mathcal{P}^n$ existe un campo de vectores $\boldsymbol{\sigma}_K^n \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ que satisface el siguiente problema de Neumann local: *Hallar $\boldsymbol{\sigma}_K^n \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, K)$ tal que*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K^n &= \mathcal{R}_K^n - \frac{1}{|K|} (\mathcal{R}_K^n, 1)_K - \frac{1}{|K|} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (\mathcal{R}_{\gamma,K}^n, 1)_{\gamma} & \text{en } K, \\ \boldsymbol{\sigma}_K^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K &= \mathcal{R}_{\gamma,K}^n & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{F}_K^n. \end{cases} \quad (4.30)$$

Luego, integrando por partes la segunda ecuación se tiene que

$$(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K^n, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_K^n, \nabla v)_K = \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (\mathcal{R}_{\gamma,K}^n, v)_{\gamma}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.31)$$

y por lo tanto

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\mathcal{R}_K^n + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_K^n, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_K^n, \nabla v)_K + (\text{osc}_K^n, v)_K \right), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.32)$$

Haciendo uso de argumentos análogos a los visto en el Capítulo 3, se tiene que si $\kappa \neq 0$

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\Omega}, \quad (4.33)$$

mientras que si $\kappa = 0$, entonces

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} 2 \left(\frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\varepsilon|K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\Omega}, \quad (4.34)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ en ambos casos, y donde $C_{P,\Omega}$ está dada por (2.6) y $C_{\text{osc},K}$ se define como

$$C_{\text{osc},K} := \begin{cases} \min \left\{ \frac{h_K}{\pi\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, \\ \frac{h_K}{\pi\sqrt{\varepsilon}}, & \kappa = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Notar que para poder escribir la *ecuación del error*, relacionada con el *residuo espacial*, en la forma de (4.32), las dos hipótesis principales que deben cumplirse es la existencia del conjunto de flujos de borde $\{g_{\gamma,K}^n\}$ y la existencia del conjunto de campos vectoriales σ_K^n , solución del problema local de Neumann para cada $K \in \mathcal{P}^n$ (Suposiciones 4.3.1 y 4.3.2). El detalle para la construcción del conjunto de flujos equilibrados se presentó en la sección 3.3.2 mientras que la existencia de cada campo σ_K^n viene dada por el Lema 3.3.1. De esta manera, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.3.1. *Sea $v \in \mathbb{W}(0, T)$. Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo espacial puede ser acotado superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in I^n \text{ c.t.p.}, \quad (4.36)$$

donde el estimador de error espacial viene dado por $(\eta_h^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,h}^n)^2$, y el indicador de error $\eta_{K,h}^n$ es igual a

$$\eta_{K,h}^n := \begin{cases} \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + C_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \sqrt{6} \tau_n \left(\frac{C_{P,\Omega}}{\varepsilon|K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + C_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } \kappa = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

donde σ_K^n se define en el Lema 3.3.1. Más aún, tomando en consideración la Nota 3.3.1 y el hecho de que si $\kappa = 0$ los esquemas SUPG y GLS coinciden, se tiene que

$$\eta_{K,h}^n = \begin{cases} \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + C_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), & \text{SUPG, ES, CIP,} \\ \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + C_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), & \text{GLS,} \end{cases} \quad (4.38)$$

donde la expresión para los esquemas SUPG, ES y CIP es válida para $\kappa \geq 0$ y la expresión para el esquema GLS es sólo posible en el caso $\kappa \neq 0$.

Demostración. Notar que para $t \in I^n$ c.t.p., fijo pero arbitrario y $v \in \mathbb{W}(0, T)$, se tiene que $v(t) \in H_0^1(\Omega)$. Luego, integrando con respecto al tiempo el término $\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v(t) \rangle$ en el sub-intervalo I^n y considerando las ecuaciones (4.33) y (4.34), se tiene que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\frac{\eta_{K,h}^n}{\sqrt{3}\tau_n} \right)^2 \right)^{1/2} \|v(t)\|_{\Omega} dt,$$

y luego haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt &\leq \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\frac{\eta_{K,h}^n}{\sqrt{3}\tau_n} \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

■

Ahora se procede a acotar el *residuo temporal* $\mathcal{R}_t(u_{h\tau})$.

Lema 4.3.2. *Sea $v \in \mathbb{W}(0, T)$. Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo temporal puede ser acotado superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\eta_t^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in I^n \text{ c.t.p.}, \quad (4.39)$$

donde el estimador de error temporal viene dado por $(\eta_t^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,t}^n)^2$, y el indicador de error $\eta_{K,t}^n$ es igual a

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{\tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K, \quad (4.40)$$

con $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ dada por (3.7).

Demostración. Notar que para $t \in I^n$ c.t.p., fijo pero arbitrario y $v \in \mathbb{W}(0, T)$, se tiene que $v(t) \in H_0^1(\Omega)$. Integrando con respecto al tiempo el término $\langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v(t) \rangle$ en el sub-intervalo I^n , con $1 \leq n \leq N$, y haciendo uso de la definición del *residuo temporal* se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}^n(u_h^n - u_{h\tau}, v(t)) \\ &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t^n - t}{\tau_n} \mathcal{B}^n(u_h^n - u_h^{n-1}, v(t)). \end{aligned}$$

Luego debido a la continuidad de la forma bilineal y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t^n - t}{\tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega} \|v(t)\|_{\Omega} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \left\| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \right\|_{\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\frac{t^n - t}{\tau_n} \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \left\| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \right\|_{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_n}{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

■

Finalmente, resta acotar el *residuo de oscilación temporal*.

Lema 4.3.3. *Sea $v \in \mathbb{W}(0, T)$. Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo de oscilación temporal puede ser acotado superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in I^n \text{ c.t.p.},$$

donde el estimador de oscilación temporal cumple que $(\eta_D^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,D}^n)^2$ y viene dado por

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{3} \mathcal{C}_{\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.41)$$

con \mathcal{C}_{Ω} definida como

$$\mathcal{C}_{\Omega} := \begin{cases} \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, & \kappa = 0, \\ \min \left\{ \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

$\mathcal{C}_{P,\Omega}$ dada por (2.6).

Demostración. Notar que para $t \in I^n$, c.t.p., fijo pero arbitrario y $v \in \mathbb{W}(0, T)$, se tiene que $v(t) \in H_0^1(\Omega)$. Integrando con respecto al tiempo en el subintervalo I^n , con $1 \leq n \leq N$, y haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} dt.$$

Luego se tienen dos casos dependiendo de si el parámetro κ es igual o distinto a cero. Primero, en el caso en que $\kappa = 0$, haciendo uso de una de las desigualdades de Poincaré 2.6.1 se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \|v(t)\|_{\Omega} dt.$$

Para el caso en que $\kappa \neq 0$ se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \min \left\{ \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\} \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \|v(t)\|_{\Omega} dt.$$

Definiendo la constante \mathcal{C}_Ω como en (4.42) se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \mathcal{C}_\Omega \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \|v(t)\|_\Omega dt.$$

Luego haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se concluye el resultado. \blacksquare

En función de los resultados previos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. (*Cota superior para el error en norma $L^2(I^n; H_0^1(\Omega))$*)

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{Stb}. Entonces, para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, el error puede ser acotado superiormente por

$$\|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\eta_{K,h}^n)^2 + (\eta_{K,t}^n)^2 + (\eta_{K,D}^n)^2 \right), \quad (4.43)$$

donde

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{3\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \quad (4.44)$$

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_\mathcal{B} \sqrt{\tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K, \quad (4.45)$$

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{3}\mathcal{C}_\Omega \left(\int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.46)$$

con

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1) = \begin{cases} 0 & , \text{ para SUPG, ES, CIP y } \kappa \geq 0, \\ \tau_K(-\mathcal{R}_K^n - \text{osc}_K^n, \kappa)_K & , \text{ para GLS y } \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

el campo σ_K^n definido en el Lema 3.3.1, \mathcal{C}_Ω dada por (4.42), $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ dada por (3.7) y donde el parámetro de estabilización se especifica en la Sección 3.2.1.1.

Demostración. Considerando por un momento de manera explícita la dependencia temporal y la expresión

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e(t), e(t) \rangle + \mathcal{B}(e(t), e(t)) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e(t), e(t) \rangle + \|e(t)\|_\Omega^2 dt$$

se tiene que para $t \in I^n \subset (0, T]$ fijo pero arbitrario, con $1 \leq n \leq N$, se cumple que $e(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Luego considerando la ecuación del error parabólico (4.20) se tiene que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, e \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_\Omega^2 dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), e \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), e \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), e \rangle dt,$$

donde la dependencia del tiempo ha vuelto a ser omitida. Haciendo uso de los Lemas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3 para acotar los términos de la derecha se tiene que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, e \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \leq \left(\frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_t^n}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \right) \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}$$

Haciendo uso de la desigualdad media aritmética-geométrica 2.6.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, e \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_t^n}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \\ &\leq \frac{3}{2} \left(\frac{(\eta_h^n)^2}{3} + \frac{(\eta_t^n)^2}{3} + \frac{(\eta_D^n)^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \end{aligned}$$

Por otra parte, del Teorema 2.6.11 se sigue que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, e \rangle dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \frac{1}{2} \left(\|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2} \|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right),$$

de donde se sigue el resultado de manera directa. ■

El resultado anterior puede ser extendido para un intervalo de tiempo $(0, s] \subset (0, T]$.

Lema 4.3.4. *Sea el subintervalo de tiempo $(0, s]$ con $s \leq T$, donde*

$$(0, s] = \bigcup_{n=1}^N (t^{n-1}, t^n].$$

Luego se tiene que

$$\int_0^s \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.48)$$

$$\int_0^s \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{\eta_t^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.49)$$

$$\int_0^s \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.50)$$

Y por lo tanto, se cumple que

$$\|e\|_{L^2(0,s;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\eta_{K,h}^n)^2 + (\eta_{K,t}^n)^2 + (\eta_{K,D}^n)^2 \right), \quad (4.51)$$

o equivalentemente

$$\|e\|_{L^2(0,s;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (4.52)$$

donde

$$\eta_0 := \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.53)$$

corresponde al estimador de error inicial.

Demostración. La demostración se obtiene como consecuencia directa de los teoremas anteriores al notar que para una función $h(t)$ arbitraria se cumple que

$$\int_0^s h(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} h(t) dt. \quad \blacksquare$$

4.3.2.2. Eficiencia del estimador

A través del Teorema 4.3.1 se ha demostrado que la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ del error está acotada superiormente por los estimadores de error espacial, temporal y de valor inicial, todas cantidades completamente computables, más un término oscilatorio. En la presente sección se mostrará que el procedimiento presentado además permite obtener una cota inferior para la norma del error en función de dichos estimadores.

Se comienza determinando una cota local para el *estimador temporal*.

Lema 4.3.5. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el indicador de error temporal (4.40) puede ser acotado superiormente como*

$$(\eta_t^n)^2 \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \left(\left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 + \frac{\mathcal{C}_{\Omega}^4}{\tau_n^2} \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{\mathcal{C}_{\Omega}^2}{\tau_n} \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta_h^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right),$$

donde \mathcal{C}_{Ω} viene dada por (4.42) y $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7).

Demostración. Sea I^n , con $1 \leq n \leq N$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{\Omega}^2 dt = \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\frac{t^n - t}{\tau_n} \right)^2 dt \\ &= \frac{\tau_n}{3} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Por otro lado, haciendo uso de la definición de la norma de la energía, la definición del residuo temporal y la descomposición de la *ecuación del error* (4.20) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}(u_h^n - u_{h\tau}, u_h^n - u_{h\tau}) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt \\
&= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}(e, u_h^n - u_{h\tau}) dt \\
&\quad - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

El término que involucra la derivada temporal puede ser integrado por partes y acotado de manera tal que se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt &= - \int_{\Omega} e(t^{n-1})(u_h^n - u_h^{n-1}) dx - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle e, \partial_t(u_h^n - u_{h\tau}) \rangle dt \\
&= - \int_{\Omega} e(t^{n-1})(u_h^n - u_h^{n-1}) dx - \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e, u_h^n - u_h^{n-1})_{\Omega} dt \\
&\leq \left(\|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{\tau_n} \mathcal{C}_{\Omega}}{\tau_n} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\mathcal{C}_{\Omega} \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{\tau_n} \mathcal{C}_{\Omega}^2}{\tau_n} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}.
\end{aligned}$$

Entonces haciendo uso de la desigualdad anterior, la ecuación (4.54), la continuidad de la forma bilineal, la cota para el *residuo espacial* dada en el Lema 4.3.1, la cota para el *residuo de oscilación temporal* dada en el Lema 4.3.3 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que la ecuación (4.55) puede ser acotada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \left(\left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}} + \frac{\sqrt{3} \mathcal{C}_{\Omega}^2}{\tau_n} \right) \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{3}{\tau_n}} \mathcal{C}_{\Omega} \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\eta_h^n}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \right) \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Finalmente, dividiendo por el término $\|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}$, elevando el resultado al cuadrado, haciendo uso de la desigualdad de Jensen 2.6.4 y multiplicando todo por $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2$ se concluye el resultado. \blacksquare

Ahora se sigue con la determinación de la cota para el *estimador espacial*. Para ello, al igual que en el caso elíptico, teniendo en cuenta la Nota 3.3.1 y el hecho de que para $\kappa = 0$ los esquemas SUPG y GLS coinciden, se puede considerar, sin pérdida de generalidad, la expresión del indicador de error $\eta_{K,h}^n$ del caso $\kappa \neq 0$ para desarrollar la cota del estimador espacial. Entonces, sea $K \in \mathcal{P}^n$ y considerando las

ecuaciones (3.69) y (3.71) se tiene que

$$\begin{aligned}
\eta_{K,h}^n &= \sqrt{3\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \\
&\preceq \sqrt{3\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(h_K \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}^n\|_{L^2(\gamma)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \\
&\preceq \sqrt{3\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} + \|g_{\gamma,K}^n - \langle J_\gamma^n \rangle\|_{L^2(\gamma)} \right) + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right).
\end{aligned}$$

Elevando esta desigualdad al cuadrado y utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
(\eta_{K,h}^n)^2 &\preceq 3\tau_n \left(\frac{1}{\kappa|K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \frac{h_K}{\varepsilon} \left(\|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 + \|g_{\gamma,K}^n - \langle J_\gamma^n \rangle\|_{L^2(\gamma)}^2 \right) + \mathcal{C}_{\text{osc},K}^2 \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right). \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Entonces, para obtener una cota local para el indicador de error espacial es necesario acotar cada término del lado derecho de la desigualdad anterior por la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}$ del error. Para esto consideremos la descomposición de la ecuación del error (4.20) e integramos por parte el residuo espacial, lo que implica

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) &= \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\mathcal{R}_K^n, v)_K + (\text{osc}_K^n, v)_K - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (\llbracket J_\gamma^n \rrbracket, v)_\gamma \right) \\
&\quad + \langle \mathcal{B}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{B}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.57)
\end{aligned}$$

A continuación se presentan ciertas desigualdades que se utilizarán para desarrollar la cota inferior, las cuales se obtienen utilizando argumentos estándar de funciones burbujas.

Lema 4.3.6. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo del elemento satisface*

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\preceq \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}^2 + \frac{h_K^2}{\tau_n \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))}^2 + \frac{h_K^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K)}^2 \\
&\quad + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{3\varepsilon} (\eta_{K,D}^n)^2,
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal restringida al elemento $K \in \mathcal{P}^n$ y viene dada por (4.4).

Demostración. Sea $\beta_K = \prod_{i \in \mathcal{V}_K^n} \lambda_i$, luego extendiendo por cero a $\Omega \setminus K$ se obtiene que $\beta_K \in H_0^1(\Omega)$. Sea

$\alpha \geq 0$ un parámetro arbitrario, se define la función

$$a(t) := (\alpha + 1) \left(\frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \right)^\alpha, \quad (4.58)$$

la cual cumple que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) dt = \tau_n.$$

Entonces, se considera la expresión

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_K^n \rangle + \mathcal{B}(e, a(t) w_K^n) dt$$

donde $w_K^n = \beta_K \mathcal{R}_K^n$. Notar además que como ya se ha visto, para $t \in I^n$ c.t.p. se tiene que $a(t) w_K^n \in H_0^1(\Omega)$, por lo tanto haciendo uso de (4.57) y reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_K^n)_K dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_K^n \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}_K(e, a(t) w_K^n) dt \\ &\quad - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\text{osc}_K^n, a(t) w_K^n)_K dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt \\ &\quad - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}_K(\cdot, \cdot)$ corresponde a la restricción de la forma bilineal al elemento $K \in \mathcal{P}^n$. Pevio a estimar cada uno de los términos a la derecha de la desigualdad anterior, notar que debido a las propiedades de la función burbuja del elemento presentadas en el Teorema 2.6.6 se tiene que

$$\|w_K^n\|_{L^2(K)}^2 = \|\beta_K \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \leq \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.59)$$

$$\|w_K^n\|_K^2 = (\varepsilon \|\nabla(\beta_K \mathcal{R}_K^n)\|_{L^2(K)}^2 + \kappa \|\beta_K \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2) \preceq (\varepsilon h_K^{-2} + \kappa) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.60)$$

$$(\mathcal{R}_K^n, w_K^n)_K = \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \geq \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.61)$$

y además, dado que la función w_K^n no depende del tiempo se tiene que

$$\|a(t) w_K^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} = \|w_K^n\|_K \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t)^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\tau_n} \frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \|w_K^n\|_K$$

$$\leq \sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)} \|w_K^n\|_K. \quad (4.62)$$

Lo anterior también es válido en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; L^2(K))}$. Por otro lado, integrando por partes el término relacionado con la derivada temporal del error se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_K^n \rangle dt &= \int_K (e(t^n) a(t^n) - e(t^{n-1}) a(t^{n-1})) w_K^n dx - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle e, w_K^n \partial_t a(t) \rangle dt \\ &= \int_K e(t^n) (\alpha + 1) w_K^n dx - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle e, w_K^n \partial_t a(t) \rangle dt \\ &\leq (\alpha + 1) \|e(t^n)\|_{L^2(K)} \|w_K^n\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\partial_t a(t))^2 dt \right)^{1/2} \|w_K^n\|_{L^2(K)} \\ &= \left[(\alpha + 1) \|e(t^n)\|_{L^2(K)} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\sqrt{\tau_n (2\alpha - 1)}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2} \right] \|w_K^n\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

mientras que el término relacionado al *residuo temporal* cumple que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) \frac{t^n - t}{\tau_n} \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_K^n) dt \\ &= \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_K^n) \\ &\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K \|w_K^n\|_K. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Entonces, en función de lo anterior y haciendo uso de la continuidad de la forma bilineal, la cota para el *residuo de oscilación temporal* dada en el Lema 4.3.3 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_n \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\leq \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \sqrt{(\varepsilon h_K^{-2} + \kappa) (2\alpha + 1)} \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\sqrt{\tau_n (2\alpha - 1)}} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))} \right. \\ &\quad + (\alpha + 1) \|e(t^n)\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \sqrt{\varepsilon h_K^{-2} + \kappa} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K \\ &\quad \left. + \tau_n \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} + \frac{\sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)}}{\sqrt{3}} \eta_{K,D}^n \right) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}$, elevando el resultado al cuadrado, utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 y multiplicando todo por $h_K^2/(\tau_n \varepsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\leq (2\alpha + 1) \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}^2 + \frac{\alpha^2 (\alpha + 1)^2}{2\alpha - 1} \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))}^2 \\ &\quad + (\alpha + 1)^2 \frac{h_K^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K)}^2 + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{3\varepsilon} (2\alpha + 1) (\eta_{K,D}^n)^2 \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right)^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right) \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|_K^2.$$

Finalmente, considerando que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right) = 0, \quad (4.65)$$

entonces se puede elegir $\alpha > 0$ suficientemente grande de manera tal que el término $\| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|_K$ pueda ser acotado por los términos restantes, y de ésta manera se obtiene el resultado. ■

Lema 4.3.7. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el el salto de la derivada satisface*

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \| \|J_\gamma^n\| \|_{L^2(\gamma)}^2 \preceq & \sum_{K' \in \Omega_\gamma^n} \left\{ \mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K'}}^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K'}^2\right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K'))}^2 \right. \\ & \left. + \frac{h_{K'}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \frac{\tau_n h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \frac{h_{K'}^2}{3\varepsilon} (\eta_{K',D}^n)^2 \right\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal restringida al elemento $K \in \mathcal{P}^n$ y viene dada por (4.4).

Demostración. Para $\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n$, sea $\beta_\gamma = \prod_{i \in \mathcal{V}_\gamma^n} \lambda_i$, luego extendiendo por cero a $\Omega \setminus \Omega_\gamma$ se obtiene que $\beta_\gamma \in H_0^1(\Omega)$. Sea $\alpha \geq 0$ un parámetro arbitrario se define la función $a(t)$ dada por (4.120). Entonces, se considera la expresión

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_\gamma^n \rangle + \mathcal{B}(e, a(t) w_\gamma^n) dt$$

donde $w_\gamma^n = \beta_\gamma \|J_\gamma^n\|$. Notar además que como ya se ha visto, para $t \in I^n$ c.t.p. se tiene que $a(t) w_\gamma^n \in H_0^1(\Omega)$, por lo tanto haciendo uso de (4.57) y reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2 (\|J_\gamma^n\|, a(t) w_\gamma^n)_\gamma dt = & \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_\gamma^n \rangle dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}_K(e, a(t) w_\gamma^n) dt \right. \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\text{osc}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt \\ & \left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt \right\}. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}_K(\cdot, \cdot)$ corresponde a la restricción de la forma bilineal al elemento $K \in \mathcal{P}^n$. Previo a estimar cada uno de los términos a la derecha de la desigualdad anterior, notar que debido a las propiedades de la función burbuja del lado/cara presentadas en el Teorema 2.6.7 se tiene que

$$\|w_\gamma^n\|_{L^2(K)}^2 = \|\beta_\gamma \|J_\gamma^n\|\|_{L^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} h_K \| \|J_\gamma^n\| \|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (4.66)$$

$$\|w_\gamma^n\|_K^2 = (\varepsilon \|\nabla(\beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket)\|_{L^2(K)}^2 + \kappa \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(K)}^2) \leq \mathcal{C} (\varepsilon h_K^{-1} + \kappa h_K) \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (4.67)$$

$$(\llbracket J_\gamma^n \rrbracket, w_\gamma^n)_\gamma = \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \geq \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (4.68)$$

y además, dado que la función w_γ^n no depende del tiempo se tiene que

$$\begin{aligned} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} &= \|w_\gamma^n\|_K \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t)^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\tau_n} \frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \|w_\gamma^n\|_K \\ &\leq \sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)} \|w_\gamma^n\|_K. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Lo anterior también es válido en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; L^2(K))}$. Por otro lado, integrando por partes el término relacionado con la derivada temporal del error se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \partial_t e, a(t) w_\gamma^n \rangle dt &= \int_K (e(t^n) a(t^n) - e(t^{n-1}) a(t^{n-1})) w_\gamma^n dx - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle e, w_\gamma^n \partial_t a(t) \rangle dt \\ &= \int_K e(t^n) (\alpha + 1) w_\gamma^n dx - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle e, w_\gamma^n \partial_t a(t) \rangle dt \\ &\leq (\alpha + 1) \|e(t^n)\|_{L^2(K)} \|w_\gamma^n\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\partial_t a(t))^2 dt \right)^{1/2} \|w_\gamma^n\|_{L^2(K)} \\ &= \left[(\alpha + 1) \|e(t^n)\|_{L^2(K)} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2} \right] \|w_\gamma^n\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

mientras que el término relacionado al *residuo temporal* cumple que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) \frac{t^n - t}{\tau_n} \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_\gamma^n) dt \\ &= \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_\gamma^n) \\ &\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K \|w_\gamma^n\|_K. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por otro lado el término relacionado con el *residuo del elemento* cumple que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(K)} dt \\ &\leq \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(I^n; L^2(K))} \\ &\leq \tau_n \sqrt{2\alpha + 1} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \|w_\gamma^n\|_{L^2(K)}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 4.3.3 y las desigualdades anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_n \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 &\leq \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ (\alpha + 1) h_K \|e(t^n)\|_{L^2(K)} + \tau_n \sqrt{h_K (2\alpha + 1)} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \right. \\
&+ \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \sqrt{(\varepsilon h_K^{-2} + \kappa) (2\alpha + 1)} \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\sqrt{\tau_n (2\alpha - 1)}} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))} \\
&+ \tau_n \sqrt{h_K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right) \sqrt{\varepsilon h_K^{-1} + \kappa h_K} \|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K \\
&+ \left. \frac{\sqrt{\tau_n h_K (2\alpha + 1)}}{\sqrt{3}} \eta_{K,D}^n \right\} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|$, elevando el resultado al cuadrado, utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 y multiplicando todo por $h_K/(\tau_n \varepsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 &\preceq \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ (\alpha + 1)^2 \frac{h_K^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K)}^2 + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} (2\alpha + 1) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right. \\
&+ (2\alpha + 1) \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \left(1 + \frac{\kappa h_K^2}{\varepsilon}\right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}^2 + \frac{\alpha^2 (\alpha + 1)^2 h_K^2}{2\alpha - 1} \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))}^2 \\
&+ \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right)^2 \left(1 + \frac{\kappa h_K^2}{\varepsilon}\right) \|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K^2 \\
&+ \left. \frac{h_K^2}{\varepsilon} (2\alpha + 1) (\eta_{K,D}^n)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, dado que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right) = 0, \tag{4.73}$$

entonces se puede elegir $\alpha > 0$ suficientemente grande de manera tal que el término $\|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K$ pueda ser acotado por los términos restantes, y de ésta manera haciendo uso del Lema 4.3.6 se concluye el resultado. \blacksquare

Lema 4.3.8. *Sea $\{g_{\gamma,K}^n\}$ un conjunto de flujos de borde equilibrados que satisface las siguientes dos condiciones:*

Consistencia: *Si $\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_{K'}^n$, para $K, K' \in \mathcal{P}^n$, entonces*

$$g_{\gamma,K}^n + g_{\gamma,K'}^n = 0. \tag{4.74}$$

Equilibrio de Primer Orden: Para todo $\lambda \in \mathbb{P}_1(K)$

$$\left(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau_n}, \lambda \right)_K - \mathcal{B}_K^n(u_h^n, \lambda) - \frac{1}{\tau_n}(u_h^n, \lambda)_K - \mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; \lambda) + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (g_{\gamma, K}^n, \lambda)_\gamma = 0. \quad (4.75)$$

Entonces, por cada $\gamma \in \mathcal{F}_K^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \|g_{\gamma, K}^n - \langle J_\gamma^n \rangle\|_{L^2(\gamma)}^2 &\preceq \sum_{m \in \mathcal{V}_\gamma^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left(\frac{\tau_n h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma' \in \mathcal{F}_{K'}^n \cap \mathcal{F}_m^n} \frac{\tau_n h_{K'}}{\varepsilon} \|\llbracket J_{\gamma'}^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma')}^2 + \frac{\tau_n h_{K'}^{2-d}}{\varepsilon} |\mathcal{S}_{K'}^n(u_h^n, f^n; \lambda_m)|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Demostración. El resultado se obtiene de manera directa a partir del Lema 3.3.4 visto en el Capítulo 3. ■

Lema 4.3.9. El término de estabilización $|\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; \lambda)|$ cumple que

$$\frac{\tau_n h_K^{2-d}}{\varepsilon} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; \lambda)|^2 \preceq \begin{cases} \tau_K^2 \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2}{h_K^2} \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right), & \text{SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2}{h_K^2}, \kappa^2 \right\} \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right), & \text{GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \tau_\gamma^2 \left[\frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right], & \text{ES,} \\ \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \frac{\tau_\gamma^2 \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^4}{\varepsilon^2 h_K^2} \left[\frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right], & \text{CIP.} \end{cases} \quad (4.77)$$

Demostración. El resultado se obtiene de manera directa en base a los resultados relacionados al término estabilizado obtenidos en el Capítulo 3. ■

Lema 4.3.10. El término de estabilización, para el método GLS, cumple que

$$\frac{\tau_n}{\kappa |K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 \preceq \varepsilon \kappa \frac{\tau_K^2}{h_K^2} \left\{ \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right) \right\}, \quad (4.78)$$

donde τ_K corresponde al parámetro de estabilización asociado al método GLS.

Demostración. Haciendo uso de la definición del término estabilizado junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| = \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} \tau_K |(-\mathcal{R}_K^n - \text{osc}_K^n, \kappa)_K|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} \tau_K \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \|\kappa\|_{L^2(K)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\kappa} h_K^{d/2}} \tau_K \kappa |K| \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \\
&= \tau_K \sqrt{\kappa} \left(\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right).
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la desigualdad anterior y utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\frac{1}{\kappa |K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 \preceq \varepsilon \kappa \frac{\tau_K^2}{h_K^2} \left(\frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right).$$

El resultado se sigue al integrar la desigualdad anterior en el sub-intervalo I^n y notar que ninguno de los términos depende de la variable temporal. \blacksquare

Entonces, considerando (4.56) y haciendo uso de los Lemas 4.3.6, 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9 y 4.3.10 se obtiene la siguiente cota para el *estimador espacial*.

Lema 4.3.11. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el indicador de error espacial (4.38) puede ser acotado superiormente como*

$$\begin{aligned}
(\eta_{K,h}^n)^2 &\preceq \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K'}}^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K'}^2 \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\tau_n^2 \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K'))}^2 \right. \\
&\quad + \frac{h_{K'}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \tau_n \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} (\eta_{K',D}^n)^2 \\
&\quad + \mathcal{C}_{\mathcal{F}_{K'}}^n \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K''}}^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K''}^2 \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 + \frac{h_{K''}^2}{\tau_n^2 \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K''))}^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_{K''}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \tau_n \frac{h_{K''}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \frac{h_{K''}^2}{3\varepsilon} (\eta_{K'',D}^n)^2 \right) \right\}, \quad (4.79)
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}_K^n} = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}^2, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.80)$$

donde τ_K y τ_γ los parámetros de estabilización y $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$ es la constante de continuidad de la forma bilineal restringida al elemento $K \in \mathcal{P}^n$, dada por (4.4).

Como se puede ver, en la cota anterior una parte del error es medida en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}$ mientras que otra parte es medida en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; L^2(K))}$, esto debido a la imposibilidad de pasar de la norma $\|\cdot\|_{L^2(K)}$ a la norma de la energía $\|\cdot\|_{H_0^1(K)}$ de manera local en cada elemento K de la partición. Dicho problema puede ser evitado solamente en el caso en el que el parámetro de reacción κ es distinto de cero. La siguiente Nota presenta la cota mejorada para dicho caso.

Nota 4.3.1. (Caso parámetro $\kappa \neq 0$) En el caso en que el parámetro de reacción κ sea distinto de cero se tiene que

$$\frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon} \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K))}^2 \leq \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon \kappa} \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}^2,$$

y por lo tanto, el resultado anterior puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} (\eta_{K,h}^n)^2 \preceq & \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K'}}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K'}}^2 \kappa + \frac{1}{\tau_n^2 \kappa} \right) \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 \right. \\ & + \tau_n \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} (\eta_{K',D}^n)^2 \\ & + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}}^n \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K''}}^2 + \frac{h_{K''}^2}{\varepsilon} \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_{K''}}^2 \kappa + \frac{1}{\tau_n^2 \kappa} \right) \right) \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{h_{K''}^2}{\tau_n \varepsilon} \|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \tau_n \frac{h_{K''}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \frac{h_{K''}^2}{3\varepsilon} (\eta_{K'',D}^n)^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, en función de los Lemas 4.3.5 y 4.3.11 se sigue el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. (Cota inferior para el error en norma $L^2(I^n; H_0^1(\Omega))$)

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{Stb}. Entonces, para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, considerando el estimador de error espacial η_h^n , dado por (4.38), y el estimador de error temporal η_t^n , dado por (4.40), se tiene que la siguiente estimación es válida

$$\begin{aligned} (\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \preceq & \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K'))}^2 \right. \\ & + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K',D}^n)^2 \\ & + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}}^n \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left[\mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K''))}^2 \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K'')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.81}$$

con

$$\mathcal{C}_1^H(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 + \frac{\mathcal{C}_\Omega^4}{\tau_n^2} + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \frac{h_K^2 \kappa}{\varepsilon} \right), \quad (4.82)$$

$$\mathcal{C}_1^L(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon}, \quad (4.83)$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = \frac{(1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)}{\tau_n} \max \left\{ \frac{h_K^2}{\varepsilon}, \mathcal{C}_\Omega^2 \right\}, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \quad (4.85)$$

$$\mathcal{C}_4(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{h_K^2}{3\varepsilon} \right), \quad (4.86)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K^n} = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.87)$$

donde τ_K es el parámetro de estabilización especificado en la Sección 3.2.1.1, \mathcal{C}_Ω viene dada por (4.42), $\mathcal{C}_{\text{osc},K}$ está dada por (3.49), $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ es la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7) y $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$ corresponde a la restricción de dicha forma bilineal al elemento K y está dada por (4.4).

Nota 4.3.2. Según lo mostrado en la Nota 4.3.1, cuando el parámetro de reacción κ es distinto de cero, la cota inferior para el error puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 &\preceq \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1 \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K')}^2 \right) \right. \\ &\quad + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K',D}^n)^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}^n} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left[\mathcal{C}_1 \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K'')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

con

$$\mathcal{C}_1(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 + \frac{\mathcal{C}_\Omega^4}{\tau_n^2} + \frac{h_K^2}{\varepsilon} \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \kappa + \frac{1}{\tau_n^2 \kappa} \right) \right). \quad (4.89)$$

4.3.3. Análisis *a posteriori* en norma $\mathbb{W}(0, T)$

El segundo caso corresponde a realizar el análisis *a posteriori* midiendo el error en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0, T)}$, la cual para una función $v \in \mathbb{W}(0, T)$ está definida por

$$\|v\|_{\mathbb{W}(0, T)}^2 = \int_0^T \|v\|_{\Omega}^2 + \|v'\|_*^2 dt, \quad (4.90)$$

donde $\|\cdot\|_{\Omega}$ corresponde a la norma de la energía en $H_0^1(\Omega)$ y $\|\cdot\|_*$ corresponde a la norma dual en $H^{-1}(\Omega)$. Al considerar un intervalo de tiempo discreto $I^n = (t^{n-1}, t^n]$, con $1 \leq n \leq N$, se tiene claramente que

$$\|v\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{\Omega}^2 + \|v'\|_*^2 dt, \quad (4.91)$$

Para determinar una cota superior e inferior para el error se hará uso del *residuo* definido en (4.14) y su descomposición (4.20).

Previo a esto se presenta la equivalencia entre el error y el *residuo*, un resultado que se utilizará a lo largo de la presente sección.

Lema 4.3.12. (*Equivalencia entre error y residuo*)

Sean $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq T$ y $v \in \mathbb{W}(0, T)$. Luego para cualquier $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ se tiene que

$$\int_{s_1}^{s_2} \langle \mathcal{R}(v), w \rangle dt \leq \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}C_{\mathcal{B}}\} \|u - v\|_{\mathbb{W}(s_1, s_2)} \|w\|_{L^2(s_1, s_2, H_0^1(\Omega))}, \quad (4.92)$$

donde $C_{\mathcal{B}}$ la constante de continuidad de la forma bilineal $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ está dada por (3.7). Además se tiene que

$$\|u - v\|_{\mathbb{W}(s_1, s_2)}^2 \leq (1 + 2C_{\mathcal{B}}^2) \|(u - v)(s_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (3 + 2C_{\mathcal{B}}^2) \int_{s_1}^{s_2} \|\mathcal{R}(v)\|_*^2 dt. \quad (4.93)$$

Demostración. De la definición del *residuo* y la formulación variacional (V), se tiene que si $u \in \mathbb{W}(0, T)$ es la solución exacta se cumple que

$$\langle \mathcal{R}(v), w \rangle = \langle u' - v', w \rangle - \mathcal{B}(u - v, w), \quad w \in H_0^1(\Omega). \quad (4.94)$$

Luego integrando la ecuación anterior desde s_1 hasta s_2 , con $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq T$, y utilizando la continuidad de la forma bilineal junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \langle \mathcal{R}(v), w \rangle dt &= \int_{s_1}^{s_2} \langle u' - v', w \rangle - \mathcal{B}(u - v, w) dt \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} \left(\|u' - v'\|_* + C_{\mathcal{B}} \|u - v\|_{\Omega} \right) \|w\|_{\Omega} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{s_1}^{s_2} \left(\|u' - v'\|_* + \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|u - v\|_{\Omega} \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{s_1}^{s_2} \|w\|_{\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathcal{C}_{\mathcal{B}}\} \|u - v\|_{\mathbb{W}(s_1, s_2)} \|w\|_{L^2(s_1, s_2; H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Resta demostrar la segunda desigualdad. Para esto, haciendo uso del Teorema 2.6.11 se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - v\|_{\Omega}^2 &= \langle u' - v', u - v \rangle + \mathcal{B}(u - v, u - v) \\
&= \langle \mathcal{R}(v), u - v \rangle \\
&\leq \| \mathcal{R}(v) \|_* \|u - v\|_{\Omega} \\
&\leq \frac{1}{2} \| \mathcal{R}(v) \|_*^2 + \frac{1}{2} \|u - v\|_{\Omega}^2,
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - v\|_{\Omega}^2 \leq \| \mathcal{R}(v) \|_*^2.$$

Luego, al integrar esta última desigualdad entre s_1 y s_2 obtenemos que

$$\|(u - v)(s_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{s_1}^{s_2} \|u - v\|_{\Omega}^2 dt \leq \|(u - v)(s_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{s_1}^{s_2} \| \mathcal{R}(v) \|_*^2 dt. \quad (4.95)$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle u' - v', w \rangle &= \langle \mathcal{R}(v), w \rangle - \mathcal{B}(u - v, w) \\
&\leq \left(\| \mathcal{R}(v) \|_* + \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|u - v\|_{\Omega} \right) \|w\|_{\Omega}.
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\|w\|_{\Omega}$ y tomando el supremo sobre los $w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, se obtiene que

$$\|u' - v'\|_* \leq \| \mathcal{R}(v) \|_* + \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|u - v\|_{\Omega},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} \|u' - v'\|_*^2 dt &\leq \int_{s_1}^{s_2} 2 \| \mathcal{R}(v) \|_*^2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \|u - v\|_{\Omega}^2 dt \\
&\leq 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \|(u - v)(s_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_{s_1}^{s_2} \| \mathcal{R}(v) \|_*^2 dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la ecuación (4.95) se llega a que

$$\|u - v\|_{\mathbb{W}(s_1, s_2)}^2 \leq (1 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|(u - v)(s_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (3 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_{s_1}^{s_2} \| \mathcal{R}(v) \|_*^2 dt.$$

■

4.3.3.1. Cota superior para el error

Como se ha mencionado, para la determinación de una cota superior para el error se considera el *residuo* y su descomposición

$$\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in (0, T) \text{ c.t.p.},$$

y se procede a acotar cada uno de los términos del lado derecho de dicha representación.

Con respecto al término asociado al *residuo espacial* $\mathcal{R}_h(u_{h\tau})$, siguiendo un procedimiento completamente análogo al realizado en la determinación de la cota superior en la sección 4.3.2.1, se sigue que

Lema 4.3.13. *La integral temporal del residuo espacial puede ser acotada superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_h^n)^2, \quad (4.96)$$

donde el estimador de error espacial viene dado por $(\eta_h^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,h}^n)^2$, y el indicador de error $\eta_{K,h}^n$ varía dependiendo de si el parámetro κ es igual o distinto de cero; para el caso $\kappa \neq 0$ se tiene que

$$\eta_{K,h}^n := \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (4.97)$$

mientras que cuando $\kappa = 0$ se tiene que

$$\eta_{K,h}^n := \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} 2\tau_n \left(\frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\varepsilon|K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.98)$$

donde σ_K^n se define en el Lema 3.3.1. Más aún, tomando en consideración la Nota 3.3.1 y el hecho de que si $\kappa = 0$, los esquemas SUPG y GLS coinciden, se tiene que

$$\eta_{K,h}^n = \begin{cases} \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \\ \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \end{cases} \quad (4.99)$$

donde la primera expresión es válida para los esquemas SUPG, ES y CIP y $\kappa \geq 0$ mientras que la segunda expresión es válida para el esquema GLS y es sólo posible en el caso en que $\kappa \neq 0$.

Demostración. Del resultado obtenido en la sección 4.3.2.1 para el *residuo espacial* se desprende que si $\kappa \neq 0$ entonces

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\Omega},$$

mientras que si $\kappa = 0$, entonces

$$\langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} 2 \left(\frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\varepsilon |K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\Omega}.$$

El resultado sigue fácilmente al dividir las ecuaciones anteriores por $\|v\|_{\Omega}$, tomar el supremo sobre todas las funciones $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e integrar en el intervalo de tiempo I^n . \blacksquare

Ahora se procede a acotar el término asociado al *residuo temporal* $\mathcal{R}_t(u_{h\tau})$.

Lema 4.3.14. *El residuo temporal puede ser acotado superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_t^n)^2 \quad (4.100)$$

donde el estimador de error temporal viene dado por $(\eta_t^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,t}^n)^2$, y el indicador de error $\eta_{K,t}^n$ es igual a

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K, \quad (4.101)$$

con $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ dada por (3.7).

Demostración. De la definición del *residuo temporal* se sigue que para $t \in I^n = (t^{n-1}, t^n]$

$$\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_* = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(u_h^n - u_{h\tau}, v)}{\|v\|_{\Omega}} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{\Omega}.$$

Por otro lado se tiene que, de la definición de la interpolación lineal $u_{h\tau}$ se tiene que

$$u_h^n - u_{h\tau} = \frac{t^n - t}{\tau_n} (u_h^n - u_h^{n-1}), \quad \forall t \in I^n,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_*^2 dt &\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\frac{t^n - t}{\tau_n} \right)^2 dt \\ &\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \frac{\tau_n}{3} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 \\ &= \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K \right)^2. \end{aligned}$$

\blacksquare

Finalmente, resta acotar el *residuo de oscilación temporal*.

Lema 4.3.15. *El residuo de oscilación temporal puede ser acotado superiormente como*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_D^n)^2 \quad (4.102)$$

donde $(\eta_D^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,D}^n)^2$ con

$$\eta_{K,D}^n := \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \mathcal{C}_\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.103)$$

con $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ dada por (3.7) y \mathcal{C}_Ω dada por (4.42).

Demostración. Dado que f , f^n y $u_{h\tau}$ tienen regularidad L^2 en espacio, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt &= \int_{I^n} \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle f - f^n, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2}{\|v\|_\Omega^2} dt \\ &= \int_{I^n} \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(f - f^n, v)_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_\Omega^2} dt. \end{aligned}$$

Luego haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma de la energía se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt &\leq \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_\Omega^2} dt \\ &\leq \int_{I^n} \mathcal{C}_\Omega^2 \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_\Omega^2}{\|v\|_\Omega^2} dt \\ &\leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \mathcal{C}_\Omega^2 \int_{I^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt. \end{aligned}$$

■

En función de los resultados previos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3.3. *(Cota superior para el error en norma $\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)$)*

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{stb}. Entonces, para todo n con $1 \leq n \leq N$, el error puede ser acotado superiormente por

$$\|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \leq (1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|e(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\eta_{K,h}^n)^2 + (\eta_{K,t}^n)^2 + (\eta_{K,D}^n)^2 \right) \quad (4.104)$$

donde

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (4.105)$$

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)\tau_n} \|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|_K, \quad (4.106)$$

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)\mathcal{C}_{\Omega}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.107)$$

con

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1) = \begin{cases} 0 & , \text{ para SUPG, ES, CIP y } \kappa \geq 0, \\ \tau_K(-\mathcal{R}_K^n - \text{osc}_K^n, \kappa)_K & , \text{ para GLS y } \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.108)$$

el campo σ_K^n definido en el Lema 3.3.1, \mathcal{C}_{Ω} dada por (4.42) y $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ dada por (3.7).

Demostración. Sea n con $1 \leq n \leq N$. De la equivalencia entre el residuo y el error (Lema 4.3.12), tomando $v = u_{h\tau}$, y la descomposición del residuo realizada en (4.20) se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 &\leq (1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|(u - u_{h\tau})(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + (3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\|\mathcal{R}(u_{h\tau})\|\|_*^2 dt \\ &\leq (1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|(u - u_{h\tau})(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + (3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|\|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|\|_* \\ &\quad + \|\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|\|_* + \|\|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|\|_*)^2 dt, \end{aligned}$$

y luego por la desigualdad de Jensen se sigue que

$$\begin{aligned} &\leq (1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|(u - u_{h\tau})(t^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|\|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|\|_*^2 \\ &\quad + \|\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|\|_*^2 + \|\|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|\|_*^2) dt. \end{aligned}$$

Finalmente haciendo uso de las estimaciones (4.96), (4.100) y (4.102) presentadas en los Lemas 4.3.13, 4.3.14 y 4.3.15, respectivamente, se obtiene el resultado. \blacksquare

El resultado anterior puede ser extendido para un intervalo de tiempo $(0, s] \subset (0, T]$.

Lema 4.3.16. *Sea el subintervalo de tiempo $(0, s]$ con $s \leq T$, donde*

$$(0, s] = \bigcup_{n=1}^N (t^{n-1}, t^n].$$

Luego se tiene que

$$\int_0^s \|\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|\|_*^2 dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_h^n)^2, \quad (4.109)$$

$$\int_0^s \|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_t^n)^2, \quad (4.110)$$

$$\int_0^s \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_D^n)^2. \quad (4.111)$$

Y por lo tanto, se cumple que

$$\|e\|_{\mathbb{W}(0,s)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\eta_{K,h}^n)^2 + (\eta_{K,t}^n)^2 + (\eta_{K,D}^n)^2 \right), \quad (4.112)$$

o equivalentemente

$$\|e\|_{\mathbb{W}(0,s)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (4.113)$$

donde

$$\eta_0 := \sqrt{1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.114)$$

corresponde al estimador de error inicial.

Demostración. Al igual que en el Lema 4.3.4 la demostración se obtiene como consecuencia directa de los teoremas anteriores al notar que para una función $h(t)$ arbitraria se cumple que

$$\int_0^s h(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} h(t) dt. \quad \blacksquare$$

4.3.3.2. Eficiencia del estimador

En la sección previa se mostró que la norma $\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)$ del error está acotada superiormente por los estimadores de error espacial, temporal y de valor inicial, todas cantidades completamente computables, más un término oscilatorio. En la presente sección se mostrará que el procedimiento presentado además permite obtener una cota inferior para la norma del error en función de dichos estimadores.

Se comienza determinando una cota local para el *estimador temporal*.

Lema 4.3.17. *Para cualquier sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el estimador de error temporal (4.101) puede ser acotado superiormente como*

$$(\eta_t^n)^2 \preceq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \left((9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + (\eta_h^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (4.115)$$

donde $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ dada por (3.7).

Demostración. Sea I^n , con $1 \leq n \leq N$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{\Omega}^2 dt = \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\frac{t^n - t}{\tau_n}\right)^2 dt \\ &= \frac{\tau_n}{3} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Por otro lado, haciendo uso de la definición de la norma de la energía, la definición del residuo temporal y la descomposición del *residuo* (4.20) se sigue que

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathcal{B}(u_h^n - u_{h\tau}, u_h^n - u_{h\tau}) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt \\ &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt \\ &\quad - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), u_h^n - u_{h\tau} \rangle dt. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso del Lema 4.3.12 junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \left(\max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathcal{C}_{\mathcal{B}}\} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)} + \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_*^2 dt \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt \right)^{1/2} \right) \|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Dividiendo la desigualdad anterior por el término $\|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}$, elevando el resultado al cuadrado y haciendo uso de la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\|u_h^n - u_{h\tau}\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \left(\max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_*^2 dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt \right).$$

Finalmente haciendo uso de la cota para el *residuo espacial* dada en el Lema 4.3.13, la cota para el *residuo de oscilación temporal* dada en 4.3.15 y multiplicando la desigualdad resultante por $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2(9+6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)$ se concluye el resultado. \blacksquare

Ahora se sigue con la determinación de la cota para el *estimador espacial*. Para ello, al igual que en el caso elíptico, teniendo en cuenta la Nota 3.3.1 y el hecho de que para $\kappa = 0$ los esquemas SUPG y GLS coinciden, se puede considerar, sin pérdida de generalidad, la expresión del indicador de error $\eta_{K,h}^n$ del caso $\kappa \neq 0$ para desarrollar la cota del estimador espacial. Entonces, sea $K \in \mathcal{P}^n$ y considerando las ecuaciones (3.69) y (3.71) se tiene que

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{(9+6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)\tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\preceq \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(h_K \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}^n\|_{L^2(\gamma)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right) \\
&\preceq \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \left(\frac{h_K}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} + \|g_{\gamma,K}^n - \langle J_\gamma^n \rangle\|_{L^2(\gamma)} \right) + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right).
\end{aligned}$$

Elevando la desigualdad anterior al cuadrado y utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
(\eta_{K,h}^n)^2 &\preceq (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n \left(\frac{1}{\kappa|K|} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)|^2 + \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} \frac{h_K}{\varepsilon} \left(\|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 + \|g_{\gamma,K}^n - \langle J_\gamma^n \rangle\|_{L^2(\gamma)}^2 \right) + \mathcal{C}_{\text{osc},K}^2 \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right). \quad (4.117)
\end{aligned}$$

Luego, para obtener una cota local para el estimador de error es necesario acotar cada término del lado derecho de la desigualdad anterior por la norma $\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)$ del error. Para esto consideremos la descomposición del *residuo* (4.20) e integramos por parte el *residuo espacial*, lo que implica

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \left((\mathcal{R}_K^n, v)_K + (\text{osc}_K^n, v)_K - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n} (\llbracket J_\gamma^n \rrbracket, v)_\gamma \right) \\
&\quad + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.118)
\end{aligned}$$

A continuación se presentan ciertas desigualdades que se utilizarán para desarrollar la cota inferior, las cuales se obtienen utilizando argumentos estándar de funciones burbujas.

Lema 4.3.18. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo del elemento satisface*

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\preceq \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \\
&\quad + \frac{h_K^2}{\varepsilon(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} (\eta_{K,D}^n)^2, \quad (4.119)
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7).

Demostración. Sea $\beta_K = \prod_{i \in \mathcal{V}_K^n} \lambda_i$, luego extendiendo por cero a $\Omega \setminus K$ se obtiene que $\beta_K \in H_0^1(\Omega)$. Sea $\alpha \geq 0$ un parámetro arbitrario, se define la función

$$a(t) := (\alpha + 1) \left(\frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \right)^\alpha, \quad (4.120)$$

la cual cumple que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) dt = \tau_n.$$

Entonces, se considera la expresión

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt$$

donde $w_K^n = \beta_K \mathcal{R}_K^n$. Notar además que como ya se ha visto, para $t \in I^n$ c.t.p. se tiene que $a(t) w_K^n \in H_0^1(\Omega)$, por lo tanto haciendo uso de (4.118) y reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_K^n)_K dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\text{osc}_K^n, a(t) w_K^n)_K dt \\ &\quad - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Previo a estimar cada uno de los términos a la derecha de la desigualdad anterior, notar que debido a las propiedades de la función burbuja del elemento presentadas en el Teorema 2.6.6 se tiene que

$$\|w_K^n\|_{L^2(K)}^2 = \|\beta_K \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \leq \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.122)$$

$$\|w_K^n\|_K^2 = (\varepsilon \|\nabla(\beta_K \mathcal{R}_K^n)\|_{L^2(K)}^2 + \kappa \|\beta_K \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2) \preceq (\varepsilon h_K^{-2} + \kappa) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.123)$$

$$(\mathcal{R}_K^n, w_K^n)_K = \|\beta_K^{1/2} \mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \geq \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \quad (4.124)$$

y además, dado que la función w_K^n no depende del tiempo se tiene que

$$\begin{aligned} \|a(t) w_K^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} &= \|w_K^n\|_K \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t)^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\tau_n} \frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \|w_K^n\|_K \\ &\leq \sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)} \|w_K^n\|_K. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Lo anterior también es válido en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; L^2(\Omega))}$. Volviendo a la desigualdad (4.121), se tiene que el primer término del lado derecho puede ser acotado a través del Teorema 4.3.12,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt \leq \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathcal{C}_{\mathcal{B}}\} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)} \|a(t) w_K^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(\Omega))}, \quad (4.126)$$

mientras que el término relacionado al *residuo temporal* cumple que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_K^n \rangle dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) \frac{t^n - t}{\tau_n} \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_K^n) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_K^n) \\
&\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|w_K^n\|. \tag{4.127}
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con las desigualdades (4.122), (4.123), (4.124), (4.126) y (4.127) se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_n \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\preceq \left(\max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathcal{C}_{\mathcal{B}}\} \sqrt{\tau_n(2\alpha+1)(\varepsilon h_K^{-2} + \kappa)} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)} \right. \\
&\quad + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \sqrt{\varepsilon h_K^{-2} + \kappa} \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|w_K^n\| + \tau_n \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\tau_n(2\alpha+1)}{9+6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2}} \eta_{K,D}^n \right) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \tag{4.128}
\end{aligned}$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}$, elevando el resultado al cuadrado, utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 y multiplicando por $h_K^2/(\tau_n \varepsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 &\preceq \left(\max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} (2\alpha+1) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \right. \\
&\quad + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right)^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|w_K^n\| \\
&\quad \left. + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K^2}{\varepsilon(9+6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} (2\alpha+1) (\eta_{K,D}^n)^2 \right). \tag{4.129}
\end{aligned}$$

Finalmente, considerando que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) = 0, \tag{4.130}$$

entonces se puede elegir $\alpha > 0$ suficientemente grande de manera tal que el término $\| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|w_K^n\|$ pueda ser acotado por los términos restantes, y de ésta manera se obtiene el resultado. ■

Lema 4.3.19. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el salto de la derivada satisface*

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \| \llbracket J_\gamma^n \rrbracket \|_{L^2(\gamma)}^2 &\preceq \sum_{K' \in \Omega_\gamma^n} \left\{ \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K'}^2 \right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tau_n h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon(9+6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} (\eta_{K',D}^n)^2 \right\}, \tag{4.131}
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ corresponde a la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7).

Demostración. Para $\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n$, sea $\beta_\gamma = \prod_{i \in \mathcal{V}_\gamma^n} \lambda_i$, luego extendiendo por cero a $\Omega \setminus \Omega_\gamma$ se obtiene que $\beta_\gamma \in H_0^1(\Omega)$. Sea $\alpha \geq 0$ un parámetro arbitrario se define la función $a(t)$ dada por (4.120). Entonces se considera la expresión

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt,$$

donde $w_\gamma^n = \beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket$. Notar además que como ya se ha visto, para $t \in I^n$ c.t.p. se tiene que $a(t) w_\gamma^n \in H_0^1(\Omega)$, por lo tanto haciendo uso de (4.118) y reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2 \langle \llbracket J_\gamma^n \rrbracket, a(t) w_\gamma^n \rangle_\gamma dt &= \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ \int_{t^{n-1}}^{t^n} -\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt \right. \\ &\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\text{osc}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt \\ &\quad \left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Previo a estimar cada uno de los términos a la derecha de la desigualdad anterior, notar que debido a las propiedades de la función burbuja del lado/cara presentadas en el Teorema 2.6.7 se tiene que

$$\|w_\gamma^n\|_{L^2(K)}^2 = \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} h_K \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|^2 \quad (4.133)$$

$$\|w_\gamma^n\|_K^2 = (\varepsilon \|\nabla(\beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket)\|_{L^2(K)}^2 + \kappa \|\beta_\gamma \llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(K)}^2) \leq \mathcal{C} (\varepsilon h_K^{-1} + \kappa h_K) \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (4.134)$$

$$\langle \llbracket J_\gamma^n \rrbracket, w_\gamma^n \rangle_\gamma = \|\beta_\gamma^{1/2} \llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \geq \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (4.135)$$

y además, dado que la función w_γ^n no depende del tiempo se tiene que

$$\begin{aligned} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))} &= \|w_\gamma^n\|_K \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t)^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\tau_n} \frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \|w_\gamma^n\|_K \\ &\leq \sqrt{\tau_n (2\alpha + 1)} \|w_\gamma^n\|_K, \end{aligned} \quad (4.136)$$

donde $K \in \Omega_\gamma^n$. Lo anterior también es válido en la norma $\|\cdot\|_{L^2(I^n; L^2(\Omega))}$. Volviendo a la desigualdad (4.132), se tiene que el primer término del lado derecho puede ser acotado a través del Teorema 4.3.12,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt \leq \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2} \mathcal{C}_\mathcal{R}\} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(I^n; H_0^1(K))}, \quad (4.137)$$

mientras que el término relacionado al *residuo temporal* cumple que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), a(t) w_\gamma^n \rangle dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(t) \frac{t^n - t}{\tau_n} \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_K^n) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \mathcal{B}(u_h^n - u_h^{n-1}, w_\gamma^n) \\
&\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|w_\gamma^n\|_K. \tag{4.138}
\end{aligned}$$

Por otro lado el término relacionado con el *residuo del elemento* cumple que

$$\begin{aligned}
\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathcal{R}_K^n, a(t) w_\gamma^n)_K dt &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(K)} dt \\
&\leq \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \|a(t) w_\gamma^n\|_{L^2(I^n; L^2(K))} \\
&\leq \tau_n \sqrt{2\alpha + 1} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} \|w_\gamma^n\|_{L^2(K)}. \tag{4.139}
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con las desigualdades (4.133)-(4.139), se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_n \| \|J_\gamma^n\| \|_{L^2(\gamma)}^2 &\leq \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2} \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\} \sqrt{\tau_n (2\alpha + 1) (\varepsilon h_K^{-1} + \kappa h_K)} \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)} \right. \\
&\quad + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K} \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \sqrt{\varepsilon h_K^{-1} + \kappa h_K} \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|_K \\
&\quad + \tau_n \sqrt{h_K (2\alpha + 1)} \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)} + \tau_n \sqrt{h_K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\tau_n h_K (2\alpha + 1)}{9 + 6 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2}} \eta_{K,D}^n \right\} \|\mathcal{R}_{\gamma,K}^n\|_{L^2(\gamma)}. \tag{4.140}
\end{aligned}$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\|\mathcal{R}_{\gamma,K}^n\|_{L^2(\gamma)}$, elevando el resultado al cuadrado, utilizando la desigualdad de Jensen 2.6.4 y multiplicando por $h_K/(\tau_n \varepsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n h_K}{\varepsilon} \| \|J_\gamma^n\| \|_{L^2(\gamma)}^2 &\leq \sum_{K \in \Omega_\gamma^n} \left\{ \max\{2, 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} (2\alpha + 1) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \right. \\
&\quad + \mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}^2 \tau_n \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right)^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2 \right) \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|_K^2 \\
&\quad + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} (2\alpha + 1) \|\mathcal{R}_K^n\|_{L^2(K)}^2 + \frac{\tau_n h_K^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)}^2 \\
&\quad \left. + \frac{h_K^2}{\varepsilon (9 + 6 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} (2\alpha + 1) (\eta_{K,D}^n)^2 \right\}. \tag{4.141}
\end{aligned}$$

Finalmente, dado que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) = 0, \tag{4.142}$$

entonces se puede elegir $\alpha > 0$ suficientemente grande de manera tal que el término $\|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K$ pueda ser acotado por los términos restantes, y de ésta manera haciendo uso del Lema 4.3.18 se concluye el resultado. \blacksquare

Notar que las cotas obtenidas en los Lemas 4.3.8, 4.3.9 y 4.3.10 son independientes de la norma en la que se esté midiendo el error. Luego, considerando (4.117) y haciendo uso de los Lemas 4.3.18, 4.3.19 y los Lemas recién nombrados se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.3.20. *Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, y considerando el indicador de error espacial $\eta_{K,h}^n$, dado por (4.99), se tiene que la siguiente estimación es válida*

$$\begin{aligned}
(\eta_{K,h}^n)^2 \leq & \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K'}^2\right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \right. \\
& + \tau_n (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \frac{h_{K'}^2}{\varepsilon} (\eta_{K',D}^n)^2 \\
& + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_{K''}^2\right) \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 \right. \\
& \left. \left. + \tau_n (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_{K''}^2}{\varepsilon} \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \frac{h_{K''}^2}{\varepsilon} (\eta_{K'',D}^n)^2 \right) \right\}, \quad (4.143)
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K^n} = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.144)$$

con τ_K el parámetro de estabilización especificado en la Sección 3.2.1.1 y $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7).

Finalmente, considerando los Lemas 4.3.17 y 4.3.20 se obtiene el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.4. *(Cota inferior para el error en norma $\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)$)*

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{stb}. Entonces, para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$,

considerando el indicador de error espacial $\eta_{K,h}^n$, dado por (4.99), y el indicador de error temporal $\eta_{K,t}^n$, dado por (4.101), se tiene que la siguiente estimación es válida

$$\begin{aligned} (\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K',D}^n)^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}}^n \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.145)$$

con

$$\mathcal{C}_1(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \max\{2, 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \left(2 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right), \quad (4.146)$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \quad (4.147)$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right), \quad (4.148)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K}^n = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.149)$$

donde τ_K el parámetro de estabilización se especifica en la Sección 3.2.1.1, $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ es la constante de continuidad de la forma bilineal dada por (3.7) y $\mathcal{C}_{\text{osc},K}$ es la constante de oscilación dada por (4.35).

A modo de conclusión, se tiene el siguiente teorema que resume los resultados obtenidos en las secciones 4.3.2 y 4.3.3.

Teorema 4.3.5. (Cota superior e inferior para el problema de difusión-convección-reacción no estacionario en normas $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0,T)}$)

Sea u la solución de la formulación débil del problema de difusión-convección-reacción no estacionario (V) y sea $u_{h\tau}$ la interpolación lineal de la secuencia de soluciones obtenidas a través del esquema Euler-Galerkin Estabilizado (EG)_{Stb}. Luego, para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, si se considera la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$, se tiene que

$$\|e\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad (4.150)$$

y

$$\begin{aligned}
(\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq & \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K'))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K'))}^2 \right. \\
& + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K',D}^n)^2 \\
& + \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}^n} \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left[\mathcal{C}_1^H \|e\|_{L^2(I^n; H_0^1(K''))}^2 + \mathcal{C}_1^L \|e\|_{L^2(I^n; L^2(K''))}^2 \right. \\
& \left. \left. + \mathcal{C}_2 \left(\|e(t^n)\|_{L^2(K'')}^2 + \|e(t^{n-1})\|_{L^2(K'')}^2 \right) + \mathcal{C}_3 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_4 (\eta_{K'',D}^n)^2 \right] \right\}, \tag{4.151}
\end{aligned}$$

con $(\eta^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,\cdot}^n)^2$ y los estimadores de error local dados por

$$\eta_0 = \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.152}$$

$$\eta_{K,h}^n = \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa |K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \tag{4.153}$$

$$\eta_{K,t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{\tau_n} \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \|_{K}, \tag{4.154}$$

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{3} \mathcal{C}_{\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \tag{4.155}$$

las constantes asociadas a la cota inferior del error iguales a

$$\mathcal{C}_1^H(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}K}^2 + \frac{\mathcal{C}_{\Omega}^4}{\tau_n^2} + \mathcal{C}_{\mathcal{B}K}^2 \frac{h_K^2 \kappa}{\varepsilon} \right), \tag{4.156}$$

$$\mathcal{C}_1^L(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2}{\tau_n^2 \varepsilon}, \tag{4.157}$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = \frac{(1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)}{\tau_n} \max \left\{ \frac{h_K^2}{\varepsilon}, \mathcal{C}_{\Omega}^2 \right\}, \tag{4.158}$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \tag{4.159}$$

$$\mathcal{C}_4(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P,\Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{h_K^2}{3\varepsilon} \right). \tag{4.160}$$

mientras que si se considera la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(0,T)}$, se tiene que

$$\|e\|_{\mathbb{W}(0,T)}^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \tag{4.161}$$

y

$$(\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \sum_{m \in \mathcal{V}_K^n} \sum_{K' \in \Omega_m^n} \left\{ \mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K'}^n\|_{L^2(K')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K',D}^n)^2 \right\}$$

$$+ \mathcal{C}_{\mathcal{S}_{K'}}^n \sum_{K'' \in \Omega_{K'}^n} \left(\mathcal{C}_1 \|e\|_{\mathbb{W}(t^{n-1}, t^n)}^2 + \mathcal{C}_2 \|\text{osc}_{K''}^n\|_{L^2(K'')}^2 + \mathcal{C}_3 (\eta_{K'', D}^n)^2 \right) \Bigg\}, \quad (4.162)$$

con $(\eta^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K, \cdot}^n)^2$ y los estimadores de error local definidos como

$$\eta_0 = \sqrt{1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.163)$$

$$\eta_{K, h}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \left(\frac{1}{\sqrt{|\kappa K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc}, K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (4.164)$$

$$\eta_{K, t}^n = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{(3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \tau_n} \| \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \| \|_{K}, \quad (4.165)$$

$$\eta_{K, D}^n = \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \mathcal{C}_{\Omega}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.166)$$

y las constantes asociadas a la cota inferior del error dadas por

$$\mathcal{C}_1(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P, \Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \max\{2, 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2\} \left(2 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right), \quad (4.167)$$

$$\mathcal{C}_2(h_K, \tau_n, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P, \Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \frac{h_K^2 \tau_n}{\varepsilon}, \quad (4.168)$$

$$\mathcal{C}_3(h_K, \varepsilon, \kappa, \mathbf{a}, \mathcal{C}_{P, \Omega}) = (1 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon} h_K^2\right). \quad (4.169)$$

Para ambos casos la constante de estabilización y el término estabilizado están dados por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K}^n = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}^2, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.170)$$

con τ_K el parámetro de estabilización especificado en la Sección 3.2.1.1, el campo σ_K^n definido en el Lema 3.3.1, $\mathcal{C}_{P, \Omega}$ dada por (2.6), la constante de continuidad de la forma bilineal $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ definida sobre todo el dominio Ω dada por (3.7) mientras que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}, K}$, su restricción al elemento K está dada por (4.4), $\mathcal{C}_{\text{osc}, K}$ viene dada por (4.35) y \mathcal{C}_{Ω} dada por (4.42).

4.4. Comparación entre estimadores según norma utilizada

El Teorema 4.3.5 ilustra las estimaciones *a posteriori* obtenidas en las dos normas de estudio, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y $\mathbb{W}(0, T)$, junto con los estimadores obtenidos en cada caso. A continuación se presenta

la relación entre dichos estimadores. Para ello consideremos la siguiente notación: los estimadores de error obtenidos en el caso de la norma $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ serán denotados por $\eta_{K,\cdot}^{n,L}$ (por ejemplo para el caso del estimador inicial se tiene que η_0^L viene dado por (4.53)), mientras que para el caso $\mathbb{W}(0, T)$ serán denotados por $\eta_{K,\cdot}^{n,W}$. De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned}\eta_0^L &= \sqrt{1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \eta_0^W, \\ \eta_{K,h}^{n,L} &= \sqrt{3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \eta_{K,h}^{n,W}, \\ \eta_{K,t}^{n,L} &= \sqrt{3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \eta_{K,t}^{n,W}, \\ \eta_{K,D}^{n,L} &= \sqrt{3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \eta_{K,D}^{n,W}.\end{aligned}$$

Dicha relación viene como consecuencia directa de las constantes involucradas en la equivalencia entre el error y el residuo. En efecto, dado que en ambos casos la cota superior es expresada como

$$\|e\|_X^2 \leq \eta_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\eta_h^n)^2 + (\eta_t^n)^2 + (\eta_D^n)^2 \right), \quad X = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ ó } \mathbb{W}(0, T),$$

se tiene que los estimadores son forzados a incluir dichas constantes en su definición. Específicamente, según el Lema 4.3.12 se tiene que

$$\|e\|_{\mathbb{W}(0,T)}^2 \leq (1 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (3 + 2\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \int_0^T \|\mathcal{R}(u_{h\tau})\|_*^2 dt,$$

de donde se puede concluir la afirmación anterior.

4.5. Robustez del Estimador

El Teorema 4.3.5 indica que la cota inferior obtenida no es robusta, en ninguna de las dos normas utilizadas, es decir, las constantes que aparecen en dicha cota dependen de los parámetros de difusión, reacción y/o convección, y por lo tanto, los estimadores obtenidos no son robustos. Sin embargo, la robustez puede ser alcanzada en el caso en que $\kappa = 0$ si se hace uso de una norma adecuada. En efecto, como ha sido señalado por Verfürth ([79], Nota 6.15) para poder alcanzar estimaciones de error *a posteriori* robustas, una opción es considerar la norma

$$\left(\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t v + \mathbf{a} \cdot \nabla v\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.171)$$

la cual debido a la inyección continua del espacio $\mathbb{W}(0, T)$ en el espacio $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ junto con las suposiciones hechas sobre la función f , implican que esta norma es equivalente a la norma estándar del

espacio $\mathbb{W}(0, T)$, dada por

$$\left(\|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t v\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{1/2}.$$

A continuación se presentarán algunos de los resultados obtenidos por Tobiska y Verfürth en [74] y por Verfürth en [79] referentes a estimadores robustos para el caso del problema de difusión-convección-reacción no estacionario, pero haciendo uso de la teoría desarrollada en el presente Capítulo, de manera de obtener un estimador robusto completamente computable. En base a esto es que se harán uso de los mismos supuestos presentados en dichos trabajos, además de considerar solo los esquemas estabilizados comunes entre este trabajo y el de Tobiska y Verfürth [74], es decir SUPG y CIP, junto con las suposiciones asumidas sobre estos. Las demostraciones no presentadas de los resultados siguientes pueden verse en dichos escritos. Se comienza por la equivalencia entre el *residuo* y el error.

Nota 4.5.1. (*Regularidad temporal de la función f y notación $\tilde{\mathcal{P}}^n$*)

Durante la presente sección se asumirá que $f \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$. Con respecto a la notación $\tilde{\mathcal{P}}^n$, esta denotará una partición del dominio Ω que es un refinamiento común tanto de \mathcal{P}^n como de \mathcal{P}^{n-1} .

Lema 4.5.1. (*Equivalencia entre residuo y error, Proposición 6.14 [79]*)

El error de aproximación $e = u - u_{h\tau}$ puede ser acotado inferiormente por

$$\|\mathcal{R}(u_{h\tau})\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \leq 2 \left(\|e\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right),$$

y para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, superiormente por

$$\begin{aligned} & \left(\|e\|_{L^\infty(0, t^n; L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(0, t^n; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(0, t^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \right) \\ & \leq 36 \left(\|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{R}(u_{h\tau})\|_{L^2(0, t^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

Ahora, considerando la descomposición del residuo previamente obtenida, dada por

$$\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

se procede a enunciar los resultados referentes a las cotas para cada residuo.

Lema 4.5.2. (*Descomposición del residuo, Lema 6.16 [79]*)

Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$ se tiene que

$$\frac{5}{14} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\mathcal{R}_t(u_{h\tau}) + \mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\
&\leq 2 \left(\|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Lema 4.5.3. (*Estimaciones para el residuo temporal, Lema 6.17 [79]*)

Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, el residuo temporal puede ser acotado superior e inferiormente por

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_n}{36} \left(\|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|^2 + \|\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|\|_*^2 \right) \\
&\leq \|\mathcal{R}_t(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\
&\leq \frac{2\tau_n}{3} \left(\|\|u_h^n - u_h^{n-1}\|\|^2 + \|\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|\|_*^2 \right).
\end{aligned}$$

El término $\|\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|\|_*$ no es adecuado como un indicador de error al involucrar una norma dual, por lo que se hace necesario una forma de estimarlo. Para ello se hace uso del hecho de que, debido a la definición de la norma dual, dicho término es equivalente a la norma de la energía de la solución débil de un problema de reacción-difusión estacionario apropiado. Luego, la solución de este problema puede ser aproximada a través de un esquema de elementos finitos mientras que el error de aproximación puede ser estimado a través de un estimador de error completamente computable.

Lema 4.5.4. (*Estimaciones para la derivada convectiva*)

Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, se denota por $\tilde{u}_h^n \in \tilde{V}_h^n$ a la solución única del problema discreto de reacción-difusión

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_h^n \cdot \nabla v_h \, dx + \tilde{\mathcal{J}}^n(\tilde{u}_h^n, \tilde{f}^n; v_h) = \int_{\Omega} \tilde{f}^n v_h \, dx, \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h, \quad (4.172)$$

donde \tilde{f}^n viene dada por

$$\tilde{f}^n := \mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1}). \quad (4.173)$$

Considerando las cantidades

$$\tilde{\mathcal{R}}_K^n := \Pi_K(\tilde{f}^n) + \varepsilon \Delta \tilde{u}_{h|_K}^n, \quad (4.174)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\gamma, K}^n := \tilde{g}_{\gamma, K}^n - \varepsilon \nabla \tilde{u}_{h|_K}^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma}^K, \quad (4.175)$$

$$\tilde{\text{osc}}_K^n := \tilde{f}^n - \Pi_K(\tilde{f}^n), \quad (4.176)$$

entonces, el estimador de error $(\tilde{\eta}_h^n)^2 = \sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} (\tilde{\eta}_{K, h}^n)^2$ viene dado por

$$\tilde{\eta}_{K, h}^n := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\tilde{\sigma}_K^n\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \|\tilde{\text{osc}}_K^n\|_{L^2(K)}, \quad (4.177)$$

donde $\tilde{\sigma}_K^n$ se define en el Lema 3.3.1. Entonces, se tiene que

$$\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_*^2 \leq 2 \left(\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega^2 + (\tilde{\eta}_h^n)^2 \right). \quad (4.178)$$

Demostración. Sea $n \in \{1, \dots, N\}$ fijo pero arbitrario. Sea $U^n \in H_0^1(\Omega)$ la solución única del problema débil de reacción-difusión estacionario

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla U^n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1}) v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dadas las definiciones de la norma dual $\|\cdot\|_*$ y la norma de la energía $\|\cdot\|$ se tiene que

$$\|U^n\| = \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_*.$$

Por otro lado considerando la solución \tilde{u}_h^n de la formulación de elementos finitos (4.172) y haciendo uso de la desigualdad triangular, se tiene que

$$\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_* = \|U^n - \tilde{u}_h^n + \tilde{u}_h^n\| \leq \|\tilde{u}_h^n\| + \|U^n - \tilde{u}_h^n\|.$$

Según la teoría vista en el Capítulo 3, existe un estimador para el error $\|U^n - \tilde{u}_h^n\|$. En efecto, definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_K^n &:= \Pi_K(\tilde{f}^n) + \varepsilon \Delta \tilde{u}_{h|K}^n, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{\gamma,K}^n &:= \tilde{g}_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla \tilde{u}_{h|K}^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \\ \tilde{\text{osc}}_K^n &:= \tilde{f}^n - \Pi_K(\tilde{f}^n), \end{aligned}$$

y haciendo uso del Lema 3.3.1 se obtiene que el estimador de error viene dado por (4.177) y luego, siguiendo el resultado presentado en el Teorema 3.3.1, se concluye la demostración. ■

Nota 4.5.2. El resultado anterior difiere con el presentado por Tobiska y Verfürth ([74], Lema 3.4) en el sentido de que el estimador presentado en el Lema anterior es completamente computable. Más aún, considerando el estimador presentado por dichos autores, dado por

$$\tilde{\eta}_{h,TV}^n = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1}) + \varepsilon \Delta \tilde{u}_h^n\|_K^2 + \sum_{\delta \in \tilde{\mathcal{F}}_K^n} \frac{h_\gamma}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket_\gamma\|_\gamma^2 \right)^{1/2},$$

es posible demostrar que el estimador $\tilde{\eta}_h^n$ está acotado por el estimador de Tobiska y Verfürth $\tilde{\eta}_{h,TV}^n$. Previamente cabe resaltar que el resultado referente a las estimaciones para la derivada convectiva enunciado por Verfürth en el Lema 6.18 de [79], el cual establece que existen constantes c^\dagger y c_\dagger que solo dependen de los parámetros de forma de la partición $\tilde{\mathcal{P}}^n$ cumpliéndose que

$$c_\dagger (\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega + \tilde{\eta}_{h,TV}^n) \leq \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_* \leq c^\dagger (\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega + \tilde{\eta}_{h,TV}^n),$$

no es correcto. En efecto, dicho resultado es obtenido a partir de la desigualdad

$$\frac{1}{3} (\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega + \|U^n - \tilde{u}_h^n\|_\Omega) \leq \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_* \leq (\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega + \|U^n - \tilde{u}_h^n\|_\Omega),$$

junto a las estimaciones a posteriori clásicas del tipo residual para problemas elípticos, donde el error está acotado superiormente de manera global e inferiormente de manera local, por el estimador de error más un término de error espacial (Teorema 4.10 en [79]), y la afirmación de que el término $\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})$ es polinomial a trozos, lo cual elimina el término de error espacial haciendo posible el resultado. Esta última afirmación es la que está errónea ya que si bien el término $\nabla (u_h^n - u_h^{n-1})$ es polinomial a trozos, lo mismo no puede ser afirmado acerca del término \mathbf{a} . De esta manera, definiendo

$$\tilde{\theta}_{h,TV}^n = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1}) - \Pi(\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1}))\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2},$$

se tiene que el resultado correcto sería

$$\|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_*^2 \leq c^\dagger \left(\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega^2 + (\tilde{\eta}_{h,TV}^n)^2 + (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 \right), \quad (4.179)$$

$$c_\dagger \left(\|\tilde{u}_h^n\|_\Omega^2 + (\tilde{\eta}_{h,TV}^n)^2 - (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 \right) \leq \|\mathbf{a} \cdot \nabla (u_h^n - u_h^{n-1})\|_*^2. \quad (4.180)$$

Ahora, volviendo a la comparación entre los estimadores, del resultado presentado en la Sección 3.4 del Capítulo 3 se puede concluir que

$$(\tilde{\eta}_h^n)^2 = \sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\tilde{\sigma}_K^n\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \|\tilde{\text{osc}}_K^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \preceq (\tilde{\eta}_{h,TV}^n)^2 + (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 + \sigma_{\text{cip}} \left(\tilde{\Theta}_{TV}^{\text{cip},n} \right)^2, \quad (4.181)$$

donde la constante dada por la convención sobre el operador \preceq no depende de los parámetros físicos de la ecuación ni de los pasos espacial o temporal y $\tilde{\Theta}_{TV}^{\text{cip},n}$ viene dado por

$$\tilde{\Theta}_{TV}^{\text{cip},n} = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|(\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla \tilde{u}_h^n\|_{L^2(K)} + \frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nabla \mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} \|\nabla \tilde{u}_h^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.182)$$

con σ_{cip} un parámetro igual a 1 para el caso del esquema CIP y cero para SUPG.

Lema 4.5.5. (Estimaciones para el residuo espacial)

Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, definiendo

$$\mathcal{R}_K^n = \Pi_K \left(f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_{h|K}^n \right) + \varepsilon \Delta u_{h|K}^n - \left(\kappa + \frac{1}{\tau_n} \right) u_{h|K}^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n}, \quad (4.183)$$

$$\mathcal{R}_{\gamma,K}^n = g_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla u_h^n|_K \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \quad (4.184)$$

$$\text{osc}_K^n = f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K - \Pi_K \left(f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n|_K \right), \quad (4.185)$$

se tiene que el estimador de error espacial viene dado por

$$\eta_h^n = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\boldsymbol{\sigma}_K^n\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.186)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_K^n$ se define en el Lema 3.3.1. Entonces se cumple que

$$\|\mathcal{R}_h(u_{h\tau})\|_{L^2(I^n; H^{-1}(\Omega))}^2 \leq \tau_n (\eta_h^n)^2. \quad (4.187)$$

Nota 4.5.3. Al igual que en el caso de las estimaciones para la derivada convectiva, es posible demostrar que el estimador de error espacial anterior está acotado por el estimador espacial más un término de error espacial de Tobiska y Verfürth (Lema 3.5 [74]). En efecto, se tiene que considerando los estimadores

$$\eta_{h,TV}^n = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \frac{h_K^2}{\varepsilon} \left\| \Pi(f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n) - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \varepsilon \Delta u_h^n \right\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \tilde{\mathcal{F}}_K^n} \frac{h_K}{\varepsilon} \|\llbracket J_\gamma^n \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.188)$$

$$\theta_{h,TV}^n = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \frac{h_K^2}{\varepsilon} \|f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n - \Pi(f^n - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h^n)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.189)$$

$$\Theta_{TV}^{\text{cip},n} = \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\varepsilon}} \|(\mathbf{a} - \Pi(\mathbf{a})) \cdot \nabla u_h^n\|_{L^2(K)} + \frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon}} \|\nabla \mathbf{a}\|_{L^\infty(K)} \|\nabla u_h^n\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.190)$$

entonces, siguiendo un procedimiento completamente análogo al visto en la Sección 3.4 del Capítulo 3, se tiene que

$$(\eta_h^n)^2 \leq (\eta_{h,TV}^n)^2 + (\theta_{h,TV}^n)^2 + \sigma_{\text{cip}} \left(\Theta_{TV}^{\text{cip},n} \right)^2. \quad (4.191)$$

Finalmente, en función de los resultados anteriores se concluye el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. (Estimaciones a posteriori completamente computable)

El error $e = u - u_{h\tau}$ está acotado superiormente por

$$\begin{aligned} & \|e\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ & \leq 144 \left(\|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n \left((\eta_h^n)^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_\Omega^2 + \|\tilde{u}_h^n\|_\Omega^2 + (\tilde{\eta}_h^n)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \|f - f^n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2), \quad (4.192)$$

e inferiormente en cada intervalo $I^n = (t^{n-1}, t^n]$, con $1 \leq n \leq N$, por

$$\begin{aligned} & \tau_n \left((\eta_h^n)^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{u}_h^n\|_{\Omega}^2 + (\tilde{\eta}_h^n)^2 \right) \\ & \preceq \left(\|e\|_{L^\infty(I^n;L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(I^n;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(I^n;H^{-1}(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau_n \left[(\theta_{h,TV}^n)^2 + (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 + \sigma_{\text{cip}} \left((\Theta_{TV}^{\text{cip},n})^2 + (\tilde{\Theta}_{TV}^{\text{cip},n})^2 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \|f - f^n\|_{L^2(I^n;H^{-1}(\Omega))}^2 \right), \quad (4.193) \end{aligned}$$

donde la constante dada por la convención sobre el operador \preceq no depende de los parámetros físicos de la ecuación ni de los pasos espacial o temporal.

Demostración. La prueba de la cota superior es directa de los resultados anteriores. Con respecto a la cota inferior, basta acotar los estimadores η_h^n y $\tilde{\eta}_h^n$ por los estimadores de Tobiska y Verfürth [74], siguiendo los resultados de las Notas 4.5.2 y 4.5.3, y a continuación aplicar los resultados anteriores junto con el Lema 3.5 de [74] y la cota corregida (4.180). ■

Nota 4.5.4. Del Teorema 4.5.1 junto con los resultados presentados en las Notas 4.5.2 y 4.5.3, se tiene que

$$\begin{aligned} & \|e\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ & \leq 144 \left(\|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n \left((\eta_h^n)^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{u}_h^n\|_{\Omega}^2 + (\tilde{\eta}_h^n)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \|f - f^n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \right) \\ & \preceq \left(\|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n \left((\eta_{h,TV}^n)^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega}^2 + \|\tilde{u}_h^n\|_{\Omega}^2 + (\tilde{\eta}_{h,TV}^n)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^N \tau_n \left[(\theta_{h,TV}^n)^2 + (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 + \sigma_{\text{cip}} \left((\Theta_{\text{cip}}^n)^2 + (\tilde{\Theta}_{\text{cip}}^n)^2 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \|f - f^n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \right) \\ & \preceq \left(\|e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|e\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t e + \mathbf{a} \cdot \nabla e\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N \tau_n \left[(\theta_{h,TV}^n)^2 + (\tilde{\theta}_{h,TV}^n)^2 + \sigma_{\text{cip}} \left((\Theta_{TV}^{\text{cip},n})^2 + (\tilde{\Theta}_{TV}^{\text{cip},n})^2 \right) \right] \\
& + \|f - f^n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2,
\end{aligned}$$

donde la constante dada por la convención sobre el operador \preceq no depende de los parámetros físicos de la ecuación ni de los pasos espacial o temporal.

4.6. Análisis para un campo convectivo espacio temporal

Si consideramos ahora un campo convectivo espacio temporal de manera tal que $\mathbf{a} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$, con a solenoidal en la variable espacial, entonces podemos realizar un análisis más general al presentado en las secciones anteriores. A continuación especificamos los principales cambios que deben considerarse en la teoría antes mostrada al considerar esta nueva condición.

Comenzamos redefiniendo la constante de continuidad, la cual viene dada por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \max \left\{ 2, 2\sqrt{\frac{d}{\varepsilon \kappa}} \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathbf{L}^\infty(\Omega))} \right\}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \kappa \neq 0 \\ 1, & \mathbf{a} = \mathbf{0}, \kappa \geq 0 \\ \max \left\{ 1, \frac{\sqrt{d}}{\varepsilon} \mathcal{C}_{P,\Omega} \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathbf{L}^\infty(\Omega))} \right\}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \kappa = 0, \end{cases} \quad (4.194)$$

mientras que su restricción a un subconjunto $K \subset \Omega$ se denota por $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_K}$ con las normas asociadas al campo \mathbf{a} dadas por $\|\mathbf{a}\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathbf{L}^\infty(K))}$.

En el caso de la formulación completamente discretizada, tenemos que esta viene dada por: *Dada* $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$, hallar $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$, para $1 \leq n \leq N$ tal que

$$(EG)_{Stb} \quad \frac{1}{\tau_n} \langle u_h^n - u_h^{n-1}, v_h \rangle + \mathcal{B}^n(u_h^n, v_h) + \mathcal{S}^n(u_h^n, f^n; v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h^n$$

donde $\mathcal{B}^n(\cdot, \cdot)$ viene dado por (4.1) pero con el campo de velocidades \mathbf{a} reemplazado por su discretización temporal $\mathbf{a}(\cdot, t^n) = \mathbf{a}^n(\cdot)$. En dicho caso, los esquemas de estabilización vienen a su vez dados por

Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG):

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \tau_K \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} - \varepsilon \Delta u_h^n + \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_h^n + \kappa u_h^n - f^n, \mathbf{a}^n \cdot \nabla v_{h|_K} \right)_K. \quad (4.195)$$

Galerkin Least Squares (GLS):

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \tau_K \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} - \varepsilon \Delta u_h^n + \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_h^n + \kappa u_h^n - f^n, \mathbf{a}^n \cdot \nabla v_{h|_K} + \kappa v_{h|_K} \right)_K. \quad (4.196)$$

Edge Stabilization (ES):

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \tau_\gamma (\llbracket \nabla u_h^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma \rrbracket, \nabla v_{h|_K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K (h_{\partial K}^2 + h_{\partial K'}^2))_\gamma, \quad (4.197)$$

donde $\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_{K'}$ y $h_{\partial K}$ es el diámetro de ∂K .

Continuous Interior Penalty Stabilization (CIP):

$$\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; v_{h|_K}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_K^n \cap \mathcal{F}_I^n} \tau_\gamma (\llbracket \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_h^n \rrbracket, \mathbf{a}^n \cdot \nabla v_{h|_K})_\gamma. \quad (4.198)$$

haciéndose uso de los mismos parámetros de estabilización definidos en la Sección 3.2.1.1.

El siguiente cambio corresponde a la descomposición que se realiza con respecto a la ecuación del error (o equivalentemente al *residuo*); en efecto, tenemos que: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, y $\forall t \in I^n$ c.t.p., con $1 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} \langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) &= (f, v) - \langle \partial_t u_{h\tau}, v \rangle - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) \\ &= (f^n, v) - \langle \partial_t u_{h\tau}, v \rangle - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) + (f - f^n, v) \\ &= (f^n, v) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right) - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v) + (f - f^n, v) \\ &= (f^n, v) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v \right) - \mathcal{B}^n(u_h^n, v) + \mathcal{B}^n(u_h^n - u_{h\tau}, v) \\ &\quad + (f - f^n, v) + \mathcal{B}^n(u_{h\tau}, v) - \mathcal{B}(u_{h\tau}, v). \end{aligned}$$

En base a esto, se redefine el *residuo espacial* $\mathcal{R}_h(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, el *residuo temporal* $\mathcal{R}_t(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y el *residuo de oscilación temporal* $\mathcal{R}_D(w) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ como

$$\langle \mathcal{R}_h(w), v \rangle = (f^n, v) - \langle \partial_t w, v \rangle - \mathcal{B}^n(u_h^n, v), \quad (4.199)$$

$$\langle \mathcal{R}_t(w), v \rangle = \mathcal{B}^n(u_h^n - w, v), \quad (4.200)$$

$$\langle \mathcal{R}_D(w), v \rangle = (f - f^n, v) + \mathcal{B}^n(w, v) - \mathcal{B}(w, v), \quad (4.201)$$

con $v \in H_0^1(\Omega)$ y $t \in I^n$ c.t.p., con $1 \leq n \leq N$, y luego tomando $w = u_{h\tau}$ se tiene que

$$\langle \mathcal{R}(u_{h\tau}), v \rangle = \langle \partial_t e, v \rangle + \mathcal{B}(e, v) = \langle \mathcal{R}_h(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_t(u_{h\tau}), v \rangle + \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v \rangle, \quad (4.202)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $t \in I^n$ c.t.p. con $1 \leq n \leq N$.

Con respecto a las cotas desarrolladas para cada residuo, tenemos que en el caso del *residuo espacial* se debe redefinir el *residuo del elemento* \mathcal{R}_K^n , el *residuo del lado* $\mathcal{R}_{\gamma, K}^n$ y el término oscilatorio osc_K^n

como

$$\mathcal{R}_K^n = \Pi_K \left(f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_{h|K}^n \right) + \varepsilon \Delta u_{h|K}^n - \left(\kappa + \frac{1}{\tau_n} \right) u_{h|K}^n, \quad (4.203)$$

$$\mathcal{R}_{\gamma,K}^n = g_{\gamma,K}^n - \varepsilon \nabla u_{h|K}^n \cdot \hat{\mathbf{n}}_\gamma^K, \quad (4.204)$$

$$\text{osc}_K^n = f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_{h|K}^n - \Pi_K \left(f^n + \frac{u_{h|K}^{n-1}}{\tau_n} - \mathbf{a}^n \cdot \nabla u_{h|K}^n \right). \quad (4.205)$$

De esta manera, los resultados referentes al *residuo espacial* presentados anteriormente siguen siendo válidos, tanto en el caso $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ como en el caso $\mathbb{W}(0, T)$. Con respecto al *residuo de oscilación temporal*, dado que su definición es la que se ve más afectada, a continuación enunciamos el resultado referente a la cota de dicho residuo bajo la nueva definición de este

Lema 4.6.1. (Caso $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$)

Sea $v \in \mathbb{W}(0, T)$. Para cada sub-intervalo de tiempo I^n , con $1 \leq n \leq N$, se tiene que el residuo de oscilación temporal puede ser acotado superiormente como

$$\int_{t_{n-1}}^{t^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\eta_D^n}{\sqrt{3}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t^n} \|v(t)\|_\Omega^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in I^n \text{ c.t.p.},$$

donde el estimador de oscilación temporal cumple que $(\eta_D^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,D}^n)^2$ y viene dado por

$$\eta_{K,D}^n = \sqrt{3} \mathcal{C}_\Omega \left(\int_{t_{n-1}}^{t^n} 2 \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt + 2 \frac{d}{\varepsilon} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \int_{t_{n-1}}^{t^n} \|u_{h\tau}\|_K^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.206)$$

con \mathcal{C}_Ω definida como

$$\mathcal{C}_\Omega := \begin{cases} \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, & \kappa = 0, \\ \min \left\{ \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.207)$$

$\mathcal{C}_{P,\Omega}$ dada por (2.6).

Demostración. Notar que para $t \in I^n$, c.t.p., fijo pero arbitrario y $v \in \mathbb{W}(0, T)$, se tiene que $v(t) \in H_0^1(\Omega)$. Integrando con respecto al tiempo en el subintervalo I^n , con $1 \leq n \leq N$, y haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \int_{I^n} \left(\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{d} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} \|\nabla u_{h\tau}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} dt.$$

Luego se tienen dos casos dependiendo de si el parámetro κ es igual o distinto a cero. Primero, en el caso en que $\kappa = 0$, haciendo uso de una de las desigualdades de Poincaré 2.6.1 se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{I^n} \left(\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} \|u_{h\tau}\|_\Omega \Big) \|v(t)\|_\Omega dt.$$

Para el caso en que $\kappa \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt &\leq \min \left\{ \frac{\mathcal{C}_{P,\Omega}}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right\} \int_{I^n} \left(\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} \|u_{h\tau}\|_\Omega \right) \|v(t)\|_\Omega dt. \end{aligned}$$

Definiendo la constante \mathcal{C}_Ω como en (4.42) se tiene que

$$\int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt \leq \mathcal{C}_\Omega \int_{I^n} \left(\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} \|u_{h\tau}\|_\Omega \right) \|v(t)\|_\Omega dt.$$

Luego haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Jensen se sigue

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \langle \mathcal{R}_D(u_{h\tau}), v(t) \rangle dt &\leq \mathcal{C}_\Omega \left(\int_{I^n} 2 \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{d}{\varepsilon} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \int_{I^n} \|u_{h\tau}\|_\Omega^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{I^n} \|v(t)\|_\Omega^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

obteniendo de esta manera el resultado buscado. ■

Lema 4.6.2. (Caso $\mathbb{W}(0, T)$)

El residuo de oscilación temporal puede ser acotado superiormente como

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt \leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} (\eta_D^n)^2 \quad (4.208)$$

donde $(\eta_D^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,D}^n)^2$ con

$$\eta_{K,D}^n := \sqrt{(9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2)} \mathcal{C}_\Omega \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} 2 \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt + 2 \frac{d}{\varepsilon} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_{h\tau}\|_K^2 dt \right)^{1/2}, \quad (4.209)$$

con $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ dada por (3.7) y \mathcal{C}_Ω dada por (4.42).

Demostración. Dado que f , f^n y $u_{h\tau}$ tienen regularidad L^2 en espacio, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt &= \int_{I^n} \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle f - f^n + (\mathbf{a}^n - \mathbf{a}) \cdot \nabla u_{h\tau}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2}{\|v\|_\Omega^2} dt \\ &= \int_{I^n} \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(f - f^n + (\mathbf{a}^n - \mathbf{a}) \cdot \nabla u_{h\tau}, v)_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_\Omega^2} dt. \end{aligned}$$

Luego haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma de la energía se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{I^n} \|\mathcal{R}_D(u_{h\tau})\|_*^2 dt &\leq \int_{I^n} \|f - f^n + (\mathbf{a}^n - \mathbf{a}) \cdot \nabla u_{h\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_{\Omega}^2} dt \\
&\leq \int_{I^n} \mathcal{C}_{\Omega}^2 2 \left(\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + d \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \|\nabla u_{h\tau}\|_{L^2(K)}^2 \right) \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{\Omega}^2}{\|v\|_{\Omega}^2} dt \\
&\leq \frac{1}{9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2} \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (9 + 6\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2) \mathcal{C}_{\Omega}^2 \left(\int_{I^n} 2 \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d}{\varepsilon} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \int_{I^n} \|u_{h\tau}\|_K^2 dt \right),
\end{aligned}$$

lo que concluye el resultado. ■

Nota 4.6.1. (*Cambios en Algoritmo TAFEM*)

En el siguiente capítulo se introduce el algoritmo TAFEM. Dicho algoritmo se verá modificado por los efectos de los cambios en el estimador de error de oscilación temporal presentados en los lemas anteriores. Es por esta razón que al término del siguiente capítulo se incluirá una sección estableciendo cuáles son los cambios generados en el algoritmo.

Con respecto a la constante $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K^n}$, asociada a los métodos estabilizados, se tiene que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}_K^n} = \begin{cases} \tau_K^2 \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}^n\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 & , \text{ para SUPG,} \\ \tau_K^2 \max \left\{ \frac{\varepsilon \kappa}{h_K^2}, \frac{1}{h_K^2} \|\mathbf{a}^n\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2, \kappa^2 \right\} & , \text{ para GLS,} \\ \frac{h_K^2}{\varepsilon^2} \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \tau_\gamma^2 & , \text{ para ES,} \\ \max_{\gamma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_I} \frac{\tau_\gamma^2}{\varepsilon^2 h_K^2} \|\mathbf{a}^n\|_{\mathbf{L}^\infty(\gamma)}^4 & , \text{ para CIP.} \end{cases} \quad (4.210)$$

Finalmente, con respecto al resultado de robustez presentado en la sección anterior, al considerar el campo espacio temporal se ve modificada la formulación discreta y la descomposición que se hace de la ecuación del error, lo que afecta múltiples definiciones de dicho análisis. En primer lugar se ve modificada la definición del término $\mathbf{a} \cdot \nabla(u_h^n - u_h^{n-1})$ el cual cambia debido a la introducción de la discretización temporal del campo a la expresión $\mathbf{a}^n \cdot \nabla(u_h^n - u_h^{n-1})$; lo mismo sucede en las definiciones de los términos $\eta_{h,TV}^n$, $\theta_{h,TV}^n$, $\Theta_{TV}^{cip,n}$, $\tilde{\eta}_{h,TV}^n$, $\tilde{\theta}_{h,TV}^n$, $\tilde{\Theta}_{TV}^{cip,n}$ donde el campo \mathbf{a} se expresa como \mathbf{a}^n . Con respecto al residuo

espacial, el campo \mathbf{a} también se discretiza en el tiempo en las definiciones de los términos \mathcal{R}_K^n y osc_K^n . Para finalizar, el término $\|f - f^n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$ pasa a $\|f - f^n - (\mathbf{a} - \mathbf{a}^n) \cdot \nabla u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$.

Capítulo 5

El algoritmo espacio temporal adaptativo TAFEM

En el presente capítulo se presentará el algoritmo de elementos finitos adaptativo espacio temporal TAFEM (por su sigla en inglés Time Adaptive Finite Element Method) para la resolución del problema parabólico (P) presentado en el Capítulo 4. Dicho algoritmo se basa en la formulación discreta $(EG)_{Stb}$ antes vista, la cual establece que: Dada $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$, hallar $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$, para $1 \leq n \leq N$ tal que

$$\frac{1}{\tau_n} \langle u_h^n - u_h^{n-1}, v_h \rangle + \mathcal{B}(u_h^n, v_h) + \mathcal{S}^n(u_h^n, f^n; v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h^n.$$

El fin último de TAFEM es generar una secuencia de soluciones $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$, con $1 \leq n \leq N$, tal que la correspondiente interpolación lineal $u_{h\tau}$ satisfaga la cota de error

$$\|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \text{TOL}^2, \quad (5.1)$$

para una tolerancia positiva $\text{TOL} > 0$ dada. Esto es logrado realizando adaptividad espacio temporal, es decir, dada una malla espacial inicial \mathcal{P}^0 (y por lo tanto un espacio de elementos finitos inicial \mathbb{V}_h^0) junto con un paso de tiempo inicial τ_0 , TAFEM es capaz de generar de manera automática un paso de tiempo τ_n y una malla \mathcal{P}^n (asociada al espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h^n), de manera tal que:

1. El tratamiento de cada paso de tiempo termina;
2. El tiempo final T es alcanzado;
3. Se cumple la tolerancia $\|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \text{TOL}^2$.

Como lo sugiere la estructura iterativa de la formulación $(EG)_{Stb}$, el algoritmo resuelve las ecuaciones de $(EG)_{Stb}$ paso por paso, es decir, comenzando desde una aproximación inicial $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$ de $u(0)$, se genera el paso de tiempo τ_1 y la malla espacial \mathcal{P}^1 dando origen al espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h^1 para luego proceder a resolver $(EG)_{Stb}$ para $n = 1$. Repitiendo este procedimiento para los pasos de tiempo subsecuentes se llega a obtener la secuencia de soluciones del problema, como se puede apreciar en el Algoritmo 1. En este procedimiento, la generación del nuevo paso de tiempo y el nuevo espacio de elementos finitos están sujetos a satisfacer el punto (3) antes presentado, es decir, que tanto el paso de tiempo como el espacio de elementos finitos deben ser escogidos de manera tal que la tolerancia sea alcanzada, como fue establecido en (5.1).

Algoritmo 1 Esquema general de resolución del problema $(EG)_{Stb}$

- 1: Inicializar $t^0, T, \mathbb{V}_h^0, n = 0$.
 - 2: **while** $t^n < T$ **do**
 - 3: Incrementar $n := n + 1$;
 - 4: Generar paso de tiempo τ_n y espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_h^n = \mathbb{V}_h(\mathcal{P}^n)$;
 - 5: Resolver $(EG)_{Stb}$ para $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$;
 - 6: Establecer el nuevo nodo temporal $t^n := t^{n-1} + \tau_n$;
 - 7: **end while**
-

El algoritmo TAFEM fue introducido por Gaspoz, Kreuzer, Siebert y Ziegler en [45]. Si bien el análisis *a posteriori* realizado en [45] difiere del realizado en el capítulo anterior, la deducción del algoritmo sigue siendo igualmente válida. La principal característica de este algoritmo es que se basa en el principio de la equidistribución del error, lo cual será detallado más adelante. Tres trabajos previos, [31],[54] y [63], habían realizado un análisis de convergencia riguroso de métodos de elementos finitos espacio temporales adaptativos, pero ninguno de estos abordaba el tema de la equidistribución del error.

5.1. Control de Error

Para alcanzar la cota de error establecida en (5.1), es necesario hacer uso de los estimadores de error definidos en la sección 4.3.2. Dado que se hará uso reiterado de estos, a continuación se presentan nuevamente sus expresiones y además se establece explícitamente las dependencias que cada uno de estos posee. Primero, el indicador de error inicial viene dado por

$$\eta_{K,0}(u(0), \mathcal{P}^0) = \|e(0)\|_{L^2(K)} = \|u(0) - u_h^0\|_{L^2(K)}, \quad (5.2)$$

donde $u_h^0 = u_{h\tau}(0) = \Pi^0(u(0))$, y $\Pi^0 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_h^0$ es la proyección L^2 al espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h^0 . El siguiente corresponde al indicador de error espacial que viene dado por

$$\eta_{K,h}^n(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) = \sqrt{3} \tau_n \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa|K|}} |\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma_K^n\|_{L^2(K)} + \mathcal{C}_{\text{osc},K} \|\text{osc}_K^n\|_{L^2(K)} \right), \quad (5.3)$$

donde, como se presentó en el capítulo anterior, en el caso de que el parámetro κ sea igual a cero, el término estabilizado $\mathcal{S}_K^n(u_h^n, f^n; 1)$ es igual a cero para todos los esquemas de estabilización utilizados, y por lo tanto dicho indicador está bien definido. El indicador de error temporal viene dado por

$$\eta_{K,t}^n(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \sqrt{\tau_n} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_K, \quad (5.4)$$

y finalmente el indicador de oscilación temporal viene dado por

$$\eta_{K,D}^n(f, t^{n-1}, \tau_n) = \sqrt{3} \mathcal{C}_\Omega \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (5.5)$$

con \mathcal{C}_Ω dada por (4.42). Para cada uno de los casos anteriores se cumple que $(\eta^n)^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} (\eta_{K,\cdot}^n)^2$. Con el fin de no sobrecargar la notación y dado que a través de las dependencias de cada estimador se puede deducir la dependencia de cada uno con respecto al n -ésimo paso de tiempo o a otras variables que a su vez dependen de éste, se omitirá el supra-índice n . Luego, del resultado referente a la cota superior del error presentado en 4.3.4 se tiene que

$$\|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) + \sum_{n=1}^N \left(\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) + \eta_t^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n) + \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \right). \quad (5.6)$$

La idea es hacer uso de esta cota para lograr satisfacer (5.1).

Nota 5.1.1. Si bien el análisis a posteriori se realizó tanto en la norma $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ como en la norma $\mathbb{W}(0,T)$, la implementación del algoritmo se realizará con respecto a la primera debido a que dicha norma es computable, lo que nos permitirá comparar el valor del error con los estimadores obtenidos. De todas maneras, el algoritmo es igualmente válido para la norma $\mathbb{W}(0,T)$, haciendo las modificaciones correspondientes a los estimadores asociados a dicha norma.

5.1.1. Separación del estimador de error temporal

Previo a definir la estrategia de control de error utilizada es apropiado considerar lo siguiente. En cada paso de tiempo pueden realizarse dos acciones: refinar la malla espacial o reducir el paso de

tiempo. Ambas acciones buscan disminuir el valor de cierto estimador de manera tal que alcance cierto valor de tolerancia. Si consideramos el estimador de error temporal $\eta_t(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n)$ se tiene que tanto refinar la malla espacial como refinar el paso temporal puede no ser apropiado para que este alcance la tolerancia. Con respecto a refinar la malla espacial, esto no es apropiado pues, por un lado la solución u_h^n aproxima la solución exacta u en el tiempo t^n mientras que la solución u_h^{n-1} aproxima la solución en un tiempo t^{n-1} diferente. Por otra parte, reducir el paso temporal τ_n tampoco es correcto, debido a que en general el espacio de elementos finitos de un tiempo anterior no está contenido en el del tiempo posterior $\mathbb{V}_h^{n-1} \not\subset \mathbb{V}_h^n$. Si τ_n tiende a cero, sería de esperarse que u_h^n convergiera a u_h^{n-1} , pero dado que $u_h^{n-1} \in \mathbb{V}_h^{n-1} \not\subset \mathbb{V}_h^n \ni u_h^n$, tal convergencia no es posible. En función de estos argumentos es que es apropiado separar el estimador de error temporal en dos nuevos estimadores. Para ello, haciendo uso de la desigualdad triangular y la desigualdad de Jensen 2.6.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \eta_t^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n) &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \tau_n \left\| \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{\Omega} \right\|_{\Omega}^2 \\ &\leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 2 \tau_n \left\| \|u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1})\|_{\Omega} \right\|_{\Omega}^2 + \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 2 \tau_n \left\| \|\Pi^n(u_h^{n-1}) - u_h^{n-1}\|_{\Omega} \right\|_{\Omega}^2, \end{aligned}$$

donde $\Pi^n : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_h^n$ denota la proyección L^2 al espacio \mathbb{V}_h^n . Entonces se definen los estimadores

$$\eta_{\tau}^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) := \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 2 \tau_n \left\| \|u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1})\|_{\Omega} \right\|_{\Omega}^2, \quad (5.7)$$

$$\eta_{K,c}^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) := \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 2 \tau_n \left\| \|\Pi^n(u_h^{n-1}) - u_h^{n-1}\|_{K} \right\|_{K}^2, \quad (5.8)$$

donde al igual que antes se tiene que $\eta_c^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \eta_{K,c}^2$. Dichos estimadores son denominados estimador de error de tiempo y estimador de error de desrefinamiento, respectivamente. En función de lo anterior la expresión 5.6 puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) + \sum_{n=1}^N \left(\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) + \eta_c^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \right. \\ &\quad \left. + \eta_{\tau}^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \right). \quad (5.9) \end{aligned}$$

5.1.2. Cota uniforme vía ganancia de energía

Dado que ya fue definido el estimador de error de tiempo η_{τ} se presentará el resultado referente a la cota uniforme que permite acotar dicho estimador. En función de este resultado es que se implementará un algoritmo de tipo umbral para acotar el estimador de error de tiempo. De esta manera, definiendo cierto parámetro $\delta > 0$, para aquellos pasos de tiempo τ_n tales que $\tau_n \leq \delta$ se hará uso de la cota

uniforme mientras que en el caso contrario se hará uso de la equidistribución del error. Así, se tendrá una naturaleza más adaptativa en lo que respecta al tamaño del paso de tiempo τ_n .

Lema 5.1.1. *(Cota uniforme para estimadores de error de tiempo)*

Sea $u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$ una aproximación dada de $u(0)$ y para $n = 1, \dots, N$, sea $u_h^n \in \mathbb{V}_h^n$ una sucesión de soluciones de $(EG)_{Stb}$ con correspondientes pasos de tiempo τ_n . Se asume además que para $n = 1, \dots, N$ se cumple que

$$\| \| u_h^{n-1} \| \|_{\Omega}^2 - \| \| \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\tau_n} \| u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0. \quad (5.10)$$

Entonces la siguiente estimación es válida

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \| \| u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 &\leq \| \| u_h^0 \| \|_{\Omega}^2 + 2C_{\mathcal{B}_N}^2 \| u_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left(2C_{\Omega}^2 C_{\mathcal{B}_N}^2 + 2 \right) \| f \|_{L^2(0, t^m; L^2(\Omega))}^2 - \| \| u_h^m \| \|_{\Omega}^2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

con la constante de continuidad de la parte no simétrica de la forma bilineal igual a

$$C_{\mathcal{B}_N} = \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \| \mathbf{a} \|_{L^\infty(\Omega)} \quad (5.12)$$

Más aún, en el caso de que la forma bilineal $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ sea simétrica, se tiene la siguiente estimación libre de constantes

$$\sum_{n=1}^m \| \| u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 \leq \| \| u_h^0 \| \|_{\Omega}^2 + \| f \|_{L^2(0, t^m; L^2(\Omega))}^2 - \| \| u_h^m \| \|_{\Omega}^2. \quad (5.13)$$

Demostración. Dado que la prueba de este resultado requiere de algunos resultados previos, esta puede verse en detalle en [63], Corolario 4.1.5. ■

Nota 5.1.2. *(Ganancia de Energía)*

La condición (5.10) se cumple trivialmente en el caso en el que para tiempos consecutivos se tengan espacios de elementos finitos anidados, es decir $\mathbb{V}_h^{n-1} \subset \mathbb{V}_h^n$, para todo $n = 1, \dots, N$, dado que en este caso la proyección $\Pi^n : \mathbb{V}_h^{n-1} \rightarrow \mathbb{V}_h^n$ es la identidad. En el caso contrario, donde $\mathbb{V}_h^{n-1} \not\subset \mathbb{V}_h^n$, la proyección $\Pi^n(u_h^{n-1})$ de u_h^{n-1} al actual espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h^n generalmente difiere de $u_h^{n-1} \in \mathbb{V}_h^{n-1} \not\subset \mathbb{V}_h^n$. Dado que la proyección L^2 , $\Pi^n : \mathbb{V}_h^{n-1} \rightarrow \mathbb{V}_h^n$, no coincide con la norma de la energía $\| \cdot \|_{\Omega}$ (en el sentido de que no provee la estimación $\| \| \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 \leq \| \| u_h^{n-1} \| \|_{\Omega}^2$), puede que la proyección agregue energía adicional, es decir, $\| \| \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 \geq \| \| u_h^{n-1} \| \|_{\Omega}^2$.

Es por esto que se define el estimador de ganancia de energía como

$$\eta_{K,*}(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) := \frac{1}{\tau_n} \| u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1}) \|_{L^2(K)}^2 + \| \| u_h^{n-1} \| \|_K^2 - \| \| \Pi^n(u_h^{n-1}) \| \|_K^2, \quad (5.14)$$

donde $\eta_* = \sum_{K \in \mathcal{P}^n} \eta_{K,*}$. De esta manera la condición (5.10) puede ser reescrita como

$$\eta_*(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \geq 0 \quad (5.15)$$

para todo $n = 1, \dots, N$.

5.1.3. Equidistribución del error en tiempo

La estrategia de control utilizada busca distribuir de igual forma el error en cada sub-intervalo de tiempo. Para ilustrar mejor dicha estrategia se considera el siguiente caso hipotético. Sea $u(0)$ una función discreta en un espacio inicial adecuado $\mathbb{V}_h^0 = \mathbb{V}_h(\mathcal{P}^0)$ tal que se puede asumir que $\eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) = 0$ y \mathbf{a} un campo constante en la variable temporal. Interpretando los indicadores η_h , η_t y η_D como funciones contantes a trozos en la variable temporal, se puede ver que el conjunto de estimadores

$$\sum_{n=1}^N (\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) + \eta_t^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n) + \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n))$$

se acumulan en L^2 con respecto al tiempo y el marcaje debería llevar a una equidistribución de estos indicadores en L^2 con respecto al tiempo. Para contrastar las diferencias de esta estrategia con otras utilizadas se considera el algoritmo ASTFEM (de sus siglas en inglés Adaptive Space Time Finite Element Method) introducido en [54] donde se hace uso de un control de error uniforme del tipo L^∞ , de manera tal que se establece una cota uniforme sobre los estimadores $\tau_n^{-1} \eta_*^2 \leq \text{TOL}_*$ en conjunto con un control de error específico para el estimador de error de tiempo η_τ en base a una estimación de energía uniforme que permite acotar dicho estimador de manera uniforme en los casos que el paso de tiempo τ_n sea menor que cierto paso de tiempo mínimo τ_* calculado *a priori*. Dicha estrategia no logra una equidistribución de los estimadores de error en el tiempo. En cambio, el control de error utilizado en el algoritmo TAFEM, el cual también considera acotar el estimador de error de tiempo en base a una estimación de energía, hace uso de la idea de la equidistribución del error a través de los estimadores de oscilación temporal η_D y de tiempo η_τ , los cuales pueden ser equidistribuidos en cada paso de tiempo. Continuando con el ejemplo anterior, si se considera el indicador de oscilación temporal η_D , usando un argumento de densidad se puede mostrar que para $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ dada, existe una partición $0 = t^0 < \dots < t^N = T$, con $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=1}^N \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) = \mathcal{C}_\Omega^2 \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^{n-1} + \tau_n} 6 \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \text{TOL}_D^2.$$

La partición óptima, con el menor número N de intervalos de tiempo, se obtiene cuando las cantidades locales $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$ están equidistribuidas. En este espíritu es que se busca que los estimadores cumplan con una equidistribución del error con respecto al tiempo.

Por lo tanto, considerando las tolerancias positivas $tol_{\mathcal{P}_\tau}$ y tol_D , se establece que

$$\eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \leq tol_{\mathcal{P}_\tau}^2, \quad (5.16)$$

$$\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq tol_D^2, \quad (5.17)$$

para todo $n = 1, \dots, N$. Como se mostrará en un resultado de la próxima sección (Lema 5.2.2), la tolerancia tol_D puede ser escogida de manera tal que se cumpla que

$$\sum_{n=1}^N \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq \text{TOL}_D^2.$$

Para los estimadores restantes η_h y η_c , no existe una estrategia similar a la que será utilizada con los estimadores de oscilación temporal o de tiempo para asegurar la equidistribución del error, por lo que se hace uso de la siguiente estrategia

$$\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) \leq \alpha_h \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_h \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_h \tau_n tol_{\mathcal{P}_\tau} \quad (5.18)$$

$$\eta_c^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \leq \alpha_c \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_c \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_c \tau_n tol_{\mathcal{P}_\tau}, \quad (5.19)$$

donde $\alpha_h, \alpha_c, \beta_h, \beta_c, \gamma_h$ y γ_c son parámetros positivos. La estrategia anterior se basa en la idea de que si los estimadores de oscilación temporal y tiempo se encuentran equidistribuidos en cada paso de tiempo, entonces también lo estarán los estimadores de espacio y de desrefinamiento. Dado que podría darse el caso en que $\max\{\eta_\tau, \eta_D\} \ll \min\{tol_{\mathcal{P}_\tau}, tol_D\}$, se agrega el término $\tau_n tol_{\mathcal{P}_\tau}$ como una forma de asegurar a lo menos un control uniforme del tipo L^∞ , como el utilizado en el algoritmo ASTFEM. Finalmente, considerando la tolerancia $\text{TOL}_0 > 0$ y que

$$\eta_0(u(0), \mathcal{P}^0) \leq \text{TOL}_0^2, \quad (5.20)$$

junto con la expresión (5.9) y los resultados anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) + \sum_{n=1}^N \left(\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) + \eta_c^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \right. \\ &\quad \left. + \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \right) \\ &\leq \text{TOL}_0^2 + \sum_{n=1}^N \left((\gamma_h + \gamma_c) \tau_n tol_{\mathcal{P}_\tau} + (1 + \alpha_h + \alpha_c) \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \beta_h + \beta_c) \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \Big) \\
& \leq \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + (\gamma_h + \gamma_c) T \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau} \\
& + (1 + \alpha_h + \alpha_c) \sum_{n=1}^N \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Con respecto al estimador de error de tiempo η_τ , considerando $\delta > 0$, asumiendo que se cumple el criterio de ganancia de energía (5.15) para todo $n = 1, \dots, N$, el hecho de que $\tau_n > \delta$ implica que $\tau_n/\delta > 1$ y la cota uniforme presentada en el Lema 5.1.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) &= \sum_{\tau_n > \delta} \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \sum_{\tau_n \leq \delta} \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \\
&\leq \sum_{\tau_n > \delta} \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}^2 + \sum_{\tau_n \leq \delta} \frac{2}{3} \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \tau_n \left\| \|u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1})\| \right\|_\Omega^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n}{\delta} \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}^2 + \delta \sum_{n=1}^N 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \left\| \|u_h^n - \Pi^n(u_h^{n-1})\| \right\|_\Omega^2 \\
&\leq \frac{T}{\delta} \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}^2 + \delta 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 \left(\left\| \|u_h^0\| \right\|_\Omega^2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + (2 \mathcal{C}_\Omega^2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 + 2) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right),
\end{aligned}$$

luego definiendo

$$\delta = \sqrt{\frac{T}{2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2}} \left(\left\| \|u_h^0\| \right\|_\Omega^2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2 \mathcal{C}_\Omega^2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 + 2) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{-1/2} \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau} \tag{5.22}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) &\leq 2 \left(2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 T \left(\left\| \|u_h^0\| \right\|_\Omega^2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2 \mathcal{C}_\Omega^2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 + 2) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \right)^{1/2} \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Definiendo la constante

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_T &= (\gamma_h + \gamma_c) T + (1 + \alpha_h + \alpha_c) 2 \left(2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^2 T \left(\left\| \|u_h^0\| \right\|_\Omega^2 + 2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2 \mathcal{C}_\Omega^2 \mathcal{C}_{\mathcal{B}_N}^2 + 2) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \right)^{1/2}, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

y haciendo uso de (5.23) en la expresión (5.21) se sigue que

$$\|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + \mathcal{C}_T \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}. \quad (5.25)$$

Luego, al seleccionar la tolerancia $\text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}$ como

$$\text{tol}_{\mathcal{P}_\tau} = \frac{\text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2}{\mathcal{C}_T}, \quad (5.26)$$

y la tolerancia general $\text{TOL} > 0$ como

$$\text{TOL}^2 = \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2, \quad (5.27)$$

se obtiene la cota de la tolerancia (5.1) esperada. En función de esto, la estrategia de control de error a utilizar puede ser descrita como:

Estrategia de Equidistribución del Error en Tiempo

Sea la tolerancia positiva TOL la cual puede ser descompuesta como

$$\text{TOL}^2 = \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2,$$

con TOL_0 , TOL_D y $\text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}$ tolerancias positivas.

Asumiendo que:

(1) el estimador de error inicial satisface que

$$\eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) \leq \text{TOL}_0^2.$$

Además se asume que para todo $n = 1, \dots, N$

(2) la condición de ganancia de energía

$$\eta_*(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \geq 0$$

se satisface;

(3) el estimador de error de tiempo satisface que

$$\eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \leq \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}^2$$

junto con una cota uniforme para la suma de dichos estimadores, lo que implica que

$$(\gamma_h + \gamma_c) T \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau} + (1 + \alpha_h + \alpha_c) \sum_{n=1}^N \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) \leq \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2.$$

(4) el estimador de error de oscilación temporal satisface que

$$\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq \text{tol}_D^2,$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^N \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq \text{TOL}_D^2.$$

Finalmente,

(5) los estimadores de error espacial y de desrefinamiento satisfacen que

$$\begin{aligned} \eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, f^n, \mathcal{P}^n) &\leq \alpha_h \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_h \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_h \tau_n \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau} \\ \eta_c^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) &\leq \alpha_c \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_c \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_c \tau_n \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}. \end{aligned}$$

Las suposiciones anteriores permiten obtener que

$$\|u - u_{h\tau}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2 = \text{TOL}^2.$$

5.2. El Algoritmo TAFEM

Dado que ya se ha presentado la estrategia de control de error que se utilizará se procede a presentar el algoritmo TAFEM implementado para la resolución del problema $(EG)_{stb}$. Dicho algoritmo cumple con las condiciones (1), (2) y (3) presentadas en la parte introductoria del capítulo. El algoritmo TAFEM presentado en el Algoritmo 2, hace uso de 6 sub-rutinas:

- ADAP_INIT
- INITIAL_MESH
- TOLFIND
- T_CONSISTENCY
- S_MARK_REFINE
- ST_ADAPTATION

Cada una de estas será detallada a medida que se va explicando la rutina principal TAFEM. Notar que se ha agregado una S_ o una T_ o una ST_ al nombre de la sub-rutina para señalar de manera explícita si en ésta se realiza refinación espacial, temporal o ambas, respectivamente. El algoritmo comienza en la línea 1 con la inicialización de los parámetros globales T , τ_0 , \mathcal{P}^{init} , los parámetros de tolerancia y la tolerancia TOL. Además se establece el tiempo inicial $t^0 = 0$ y un contador del número de iteraciones

Algoritmo 2 Rutina principal TAFEM

-
- 1: Inicializar \mathcal{P}^{init} , τ_0 , T , TOL, α_h , α_c , β_h , β_c , γ_h , γ_c y establecer $t^0 = 0$, $n = 0$.
 - 2: Separar la tolerancia TOL tal que $\text{TOL}^2 = \text{TOL}_0^2 + (1 + \beta_h + \beta_c) \text{TOL}_D^2 + \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2$
 - 3: $tol_D = \text{TOLFIND}(f, T, \text{TOL}_D)$
 - 4: $(u_h^0, \mathcal{P}^0) = \text{ADAP_INIT}(u(0), \mathcal{P}^{init}, T, \text{TOL}_0)$
 - 5: Calcular \mathcal{C}_T ▷ Referencia 5.24
 - 6: **do**
 - 7: $n = n + 1$
 - 8: $\tau_n = \min\{\tau_{n-1}, T - t\}$
 - 9: $\tau_n = \text{T_CONSISTENCY}(f, T, t^{n-1}, \tau_n, tol_D)$
 - 10: $\mathcal{P}^n = \text{INITIAL_MESH}(u_h^{n-1}, \mathcal{P}^{n-1}, \mathcal{P}^{init})$
 - 11: $(u_h^n, \tau_n, \mathcal{P}^n) = \text{ST_ADAPTATION}(u_h^{n-1}, t^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n, \mathcal{P}^{n-1}, \text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}^2 / \mathcal{C}_T)$
 - 12: **while** $t^n = t^{n-1} + \tau_n < T$
 - 13: **return** $\{u_h^n\}_{n=0}^N, \{\tau_n\}_{n=0}^{N-1}, \{\mathcal{P}^n\}_{n=0}^N$
-

$n = 0$. En la línea 2 se separa la tolerancia TOL entre las tres tolerancias TOL_0 , TOL_D y $\text{TOL}_{\mathcal{P}_\tau}$ de manera tal que se cumple que (5.27). A continuación en la línea 3 se hace uso de la sub-rutina TOLFIND presentada en el Algoritmo 4 la cual permite definir una tolerancia tol_D a partir de la tolerancia global TOL_D . Dicha sub-rutina también hace uso de la sub-rutina T_CONSISTENCY la cual está detallada en el Algoritmo 3 y que corresponde al punto número (3) de la *estrategia de equidistribución del error en tiempo*. A través de esta rutina se obtiene el paso de tiempo τ_n que asegura que el estimador de oscilación temporal esté acotado por la respectiva tolerancia. En esta sub-rutina el paso de tiempo es reducido en un factor δ_1 , con $\delta_1 \in (0, 1)$, pero previo a dicha disminución, si el paso de tiempo inicial es tal que $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \ll tol_D^2$, éste es incrementado en un factor δ_2 , con $\delta_2 > 1$. Por lo tanto se cumple que

$$\sigma tol_D^2 \leq \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq tol_D^2$$

De esta manera no se define un paso de tiempo más pequeño de lo que sea necesario. Los Lemas 5.2.1 y 5.2.2 apoyan los resultados descritos.

Lema 5.2.1. (*Término de la sub-rutina T_CONSISTENCY*)

Asumiendo que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, entonces para cualquier $t \in (0, T)$ y $\tau_{in} \in (0, T - t]$,

$$\tau = T_CONSISTENCY(f, T, t, \tau_{in}, tol_D)$$

termina y se cumple

$$\eta_D^2(f, t, \tau) \leq tol_D^2$$

Demostración. La prueba es directa dado que el estimador $\eta_D^2(f, t, \tau)$ es monótono no-creciente y $\eta_D^2(f, t, \tau) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow 0$. ■

Algoritmo 3 Sub-rutina T_CONSISTENCY

- 1: Inputs: f, T, t^{n-1}, τ_n
 - 2: Parámetros: $\sigma, \delta_1 \in (0, 1)$ y $\delta_2 > 1$
 - 3: Calcular $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$ ▷ Referencia 5.5
 - 4: **while** $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) < \sigma tol_D^2$ y $\tau_n < T - t^{n-1}$ **do** ▷ Aumentar τ_n
 - 5: $\tau_n = \min\{\delta_2 \tau_n, T - t^{n-1}\}$
 - 6: Calcular $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$
 - 7: **end while**
 - 8: **while** $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) > tol_D^2$ **do** ▷ Reducir τ_n
 - 9: $\tau_n = \delta_1 \tau_n$
 - 10: Calcular $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$
 - 11: **end while**
 - 12: **return** τ_n
-

Lema 5.2.2. (*Término de la sub-rutina TOLFIND*)

Asumiendo que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, entonces para cualquier $TOL_D > 0$ se tiene que

$$tol_D = TOLFIND(f, T, TOL_D) > 0$$

termina. Más aún, sea $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ sea una sucesión arbitraria de tiempo con $\tau_n = t^n - t^{n-1}$, $n = 1, \dots, N$, entonces

$$\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq tol_D^2, \quad n = 1, \dots, N \quad \implies \quad \sum_{n=1}^N \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) \leq TOL_D^2.$$

Demostración. Ver la prueba del Lema 14 en [45]. ■

Algoritmo 4 Sub-rutina TOLFIND

```

1: Inputs:  $f, T, \text{TOL}_D$ 
2: Parámetros:  $N_f \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0, \tilde{\tau}_0 > 0, \tilde{t}^0 \geq 0, \varepsilon \geq 0$ 
3: Inicializar  $\tilde{t}^0 = 0, \text{tol}_D = \text{TOL}_D, \tilde{\tau}_0$  y  $N_f$ 
4: loop forever
5:    $\varepsilon = n = 0$ 
6:   do
7:      $n = n + 1$ 
8:      $\tau_n = \text{T\_CONSISTENCY}(f, T, t^{n-1}, \tau_{n-1}, \text{tol}_D)$ 
9:     Calcular  $\eta_D^2(f, \tilde{t}^{n-1}, \tilde{\tau}_n)$  ▷ Referencia 5.5
10:     $\varepsilon = \varepsilon + \eta_D^2(f, \tilde{t}^{n-1}, \tilde{\tau}_n)$ 
11:    while  $\tilde{t}^n = \tilde{t}^{n-1} + \tilde{\tau}_n < T$ 
12:     $N_f = n$ 
13:    if  $\varepsilon > \frac{1}{2} \text{TOL}_D^2$  then
14:       $\text{tol}_D^2 = \frac{1}{2} \text{tol}_D^2$ 
15:    else
16:      break ▷ Salida estándar
17:    end if
18: end loop forever
19:  $\text{tol}_D^2 = \min \left\{ \text{tol}_D^2, \frac{\text{TOL}_D^2}{2N_f} \right\}$ 
20: return  $\text{tol}_D$ 

```

En la línea 4 se ejecuta la sub-rutina ADAP_INIT la cual se presenta en el Algoritmo 5. Esta se encarga de calcular la proyección de la condición inicial $u(0)$ de manera tal que el estimador de error inicial η_0 esté controlado como se establece en el requerimiento número (1) del *control de error conjunto*. Dado que en general la malla inicial \mathcal{P}^{init} es escogida de forma arbitraria, la cota $\eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) < \text{TOL}_0$ no necesariamente se cumple, por lo que esta rutina se encarga de refinar la malla de manera tal que ésta se satisfaga. La rutina de refinación utilizada corresponde a S_MARK_REFINE (que será explicada más adelante) haciendo uso del conjunto $\{\eta_{K,0}(u(0), \mathcal{P}^0)\}_{K \in \mathcal{P}^0}$ para decidir qué elementos refinar. En base a esto se obtiene una malla \mathcal{P}^0 y un correspondiente espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h^0 sobre el cual

se calcula la proyección $\Pi^0(u(0)) = u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$ la que es utilizada como la solución inicial del problema $(EG)_{Stb}$. Luego en la línea 5 se calcula la constante \mathcal{C}_T que viene dada por (5.24).

Algoritmo 5 Sub-rutina ADAP_INIT

```

1: Inputs:  $u(0), \mathcal{P}^{init}, \text{TOL}_0$ 
2: Inicializar  $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^{init}$ 
3: loop forever
4:   Calcular  $\Pi^0(u(0)) = u_h^0 \in \mathbb{V}_h^0$ 
5:   Calcular  $\{\eta_{K,0}^2(u(0), \mathcal{P}^0)\}_{K \in \mathcal{P}^0}$  ▷ Referencia 5.2
6:   if  $\eta_0^2(u(0), \mathcal{P}^0) > \text{TOL}_0^2$  then
7:      $\mathcal{P}^0 = \text{S\_MARK\_REFINE}(\{\eta_{K,0}^2(u(0), \mathcal{P}^0)\}_{K \in \mathcal{P}^0}, \mathcal{P}^0)$ 
8:   else
9:     break
10:  end if
11: end loop forever
12: return  $(u_h^0, \mathcal{P}^0)$ 

```

A continuación, desde la línea 6 hasta la 12, se especifica el ciclo iterativo a través del cual se resuelve el problema $(EG)_{Stb}$. La línea 7 actualiza el índice n relacionado con el nodo temporal que está siendo resuelto, la línea 8 inicializa el paso de tiempo τ_n y luego en la línea 9 se hace uso de la sub-rutina T_CONSISTENCY, actualizando nuevamente el valor del paso de tiempo τ_n . A continuación en la línea 10 se utiliza la sub-rutina INITIAL_MESH la cual se encarga de cargar la malla inicial a utilizar en el respectivo paso de tiempo. Este procedimiento puede realizarse de dos maneras. La primera opción consiste en cargar la misma malla original utilizada en la sub-rutina ADAP_INIT denotada por \mathcal{P}^{init} , en cada paso de tiempo; este procedimiento se detalla en el Algoritmo 6. La otra opción consiste en realizar una desrefinación de la última malla espacial obtenida en el nodo de tiempo anterior. Con esto se busca remover grados de libertad innecesarios sin la necesidad de tener que comenzar con la misma malla inicial en cada nodo temporal. Para realizar una desrefinación es necesario determinar, bajo cierto criterio, un conjunto de elementos a desrefinar y luego aplicar una rutina de desrefinación que mantenga la conformidad de la malla espacial. En efecto, considerando la mallas \mathcal{P}_h^{n-1} y \mathcal{P}^{init} , se busca determinar una desrefinación que cumpla que

$$\mathcal{P}^{init} \leq \mathcal{P}_- \leq \mathcal{P}_h^{n-1}.$$

Luego, para determinar el conjunto de elementos a refinar que se denotará por \mathcal{M} , se considera un operador de interpolación $\mathcal{I}_{\mathbb{V}_h(\mathcal{P}_-)} : \mathbb{V}_h(\mathcal{P}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{V}_h(\mathcal{P}_-)$ y la solución de elementos finitos del nodo temporal anterior u_h^{n-1} . Entonces,

$$\mathcal{M} := \text{MARK_C}(u_h^{n-1}, \mathcal{P}^{n-1})$$

selecciona un conjunto de elementos tales que el error de desrefinamiento de u_h^{n-1} satisface que

$$\| \| u_h^{n-1} - \mathcal{I}_{\mathbb{V}_h(\mathcal{P}_-)}(u_h^{n-1}) \| \|_{\Omega}^2 \leq \text{TOL}_c$$

para la malla

$$\mathcal{P}_- = \text{COARSEN}(\mathcal{M}, \mathcal{P}^{n-1}, \mathcal{P}^{init})$$

y una tolerancia no negativa $\text{TOL}_c \geq 0$. Este procedimiento se presenta en el Algoritmo 7. Para más detalles en formas de aplicar algoritmos de desrefinación espacial referirse al Capítulo 5 de [63].

Algoritmo 6 Sub-rutina INITIAL_MESH (1)

- 1: Inputs: \mathcal{P}^{init}
 - 2: $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{init}$
 - 3: **return** \mathcal{P}^n
-

Algoritmo 7 Sub-rutina INITIAL_MESH (2)

- 1: Inputs: $u_h^{n-1}, \mathcal{P}^{n-1}, \mathcal{P}^{init}$
 - 2: $\mathcal{M} = \text{MARK_C}(u_h^{n-1}, \mathcal{P}^{n-1})$
 - 3: $\mathcal{P}^n = \text{COARSEN}(\mathcal{M}, \mathcal{P}^{n-1}, \mathcal{P}^{init})$
 - 4: **return** \mathcal{P}^n
-

Finalmente, en la línea 11 se hace uso de la sub-rutina ST_ADAPTATION presentada en el Algoritmo 8, la cual se encarga de obtener la solución del problema $(EG)_{stb}$ en la n -ésima iteración, y es donde se ejecutan las hipótesis (2), (3), (4) y (5) de la *estrategia de equidistribución del error en tiempo*. Esta sub-rutina primero resuelve el problema en la n -ésima iteración y posteriormente verifica que se cumpla la equidistribución del error de cada estimador (en las primeras tres instancias del ciclo *if*) y también que se cumpla el criterio de ganancia de energía (en la última instancia del ciclo *if*); en el caso de que no se cumpla la equidistribución del error, se realiza adaptividad espacial o temporal según corresponda, y se vuelve a resolver el problema. De esta forma, luego de ejecutar este procedimiento

iterativo una cantidad finita de veces se alcanza la tolerancia deseada. Para poder llevar a cabo este procedimiento se hace uso de dos sub-rutinas: SOLVE y S_MARK_REFINE. La sub-rutina SOLVE es la que efectivamente se encarga de resolver el problema $(EG)_{Stb}$ en cada n -ésima iteración mientras que la sub-rutina S_MARK_REFINE se encarga de refinar una malla a través de un conjunto de indicadores de error. La refinación puede realizarse de dos maneras, la cuales se diferencian en base a la cantidad de argumentos recibidos por la sub-rutina. En el primer caso, presentado en el Algoritmo 9, solo se entregan como inputs el conjunto de estimadores y la malla espacial actual \mathcal{P}^n , realizando una rutina de refinación usual, lo que corresponde a determinar un conjunto \mathcal{M} de elementos a refinar para posteriormente refinar la malla en función de dichos elementos. Para la determinación de qué elementos deben ser refinados se pueden utilizar distintos métodos, uno de ellos corresponde a seguir la siguiente regla:

$$K \in \mathcal{M} \quad \text{si} \quad \eta_K^2 \geq \frac{\eta^2}{\#\mathcal{P}}$$

donde $\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2$; otras reglas para refinar pueden encontrarse en la sección 3.3.5 de [63]. Por otro lado si a la sub-rutina se le entrega como tercer parámetro una segunda malla \mathcal{P} , entonces se realiza una refinación “dirigida”, en el sentido que se busca que luego de k refinaciones se cumpla que $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}_k^n$; este procedimiento se presenta en el Algoritmo 10. Finalmente, en la línea 12 se evalúa si ya se alcanzó el tiempo final; si éste aún no es el caso se vuelve a entrar al ciclo desde la línea 6, mientras que si ya se alcanzó, se retorna la sucesión de soluciones $\{u_h^n\}_{n=0}^N$ junto con el conjunto de pasos de tiempo $\{\tau_n\}_{n=0}^{N-1}$ y el conjunto de mallas espaciales $\{\mathcal{P}^n\}_{n=0}^N$. Con respecto al término y convergencia del algoritmo TAFEM, estos fueron demostrados en la Proposición 19 y el Teorema 20 de [45], respectivamente.

Algoritmo 8 Sub-rutina ST_ADAPTATION

```

1: Inputs:  $u_h^{n-1}, t^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n, \mathcal{P}^{n-1}$ 
2: Parámetros: inicializar  $\delta_1 \in (0, 1)$ 
3: Calcular  $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$  ▷ Referencia 5.5
4: loop forever
5:    $u_h^n = \text{SOLVE}(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)$ 
6:   Calcular  $\{\eta_{K,h}^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}$ ,  $\{\eta_{K,*}(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}$ ,
    $\eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)$  y  $\{\eta_{K,c}^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}$  ▷ Referencias 5.3, 5.7, 5.8 y 5.14
7:   if  $\eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) > \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}^2$  then
8:      $\tau_n = \delta_1 \tau_n$  ▷ Ref. temporal
9:     Calcular  $\eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n)$ 
10:    else if  $\eta_h^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) > \alpha_h \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_h \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_h \tau_n \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}$  then
11:       $\mathcal{P}^n = \text{S\_MARK\_REFINE}(\{\eta_{K,h}^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}, \mathcal{P}^n)$  ▷ Ref. espacial
12:    else if  $\eta_c^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) > \alpha_c \eta_\tau^2(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) + \beta_c \eta_D^2(f, t^{n-1}, \tau_n) + \gamma_c \tau_n \text{tol}_{\mathcal{P}_\tau}$  then
13:       $\mathcal{P}^n = \text{S\_MARK\_REFINE}(\{\eta_{K,c}^2(u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}, \mathcal{P}^n, \mathcal{P}^{n-1})$  ▷ Ref. espacial
14:    else if  $\eta_*(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n) < 0$  then ▷ Control de Ganancia de Energía
15:       $\mathcal{P}^n = \text{S\_MARK\_REFINE}(\{\eta_{K,*}(u_h^n, u_h^{n-1}, \tau_n, \mathcal{P}^n)\}_{K \in \mathcal{P}^n}, \mathcal{P}^n, \mathcal{P}^{n-1})$  ▷ Ref. espacial
16:    else
17:      break ▷ Salida
18:    end if
19: end loop forever
20: return  $(u_h^n, \tau_n, \mathcal{P}^n)$ 

```

Algoritmo 9 Sub-rutina S_MARK_REFINE (2 inputs)

```

1: Inputs:  $\{\eta_K^2\}_{K \in \mathcal{P}}, \mathcal{P}$ 
2:  $\mathcal{M} = \text{MARK}(\{\eta_K^2\}_{K \in \mathcal{P}}, \mathcal{P})$ 
3:  $\mathcal{P} = \text{REFINE}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ 
4: return  $\mathcal{P}$ 

```

Algoritmo 10 Sub-rutina S_MARK_REFINE (3 inputs)

```

1: Inputs:  $\{\eta_K^2\}_{K \in \mathcal{P}}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}}$ 
2:  $\mathcal{M} = \text{MARK}(\{\eta_K^2\}_{K \in \mathcal{P}}, \mathcal{P})$ 
3: if Existe  $K \in \mathcal{M}$  tal que  $K \in \overline{\mathcal{P}}$  then
4:   continue
5: else
6:   for  $K \in \mathcal{P}$  y  $K \notin \mathcal{M}$  do
7:     if  $K \in \overline{\mathcal{P}}$  then
8:        $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{K\}$ 
9:     break
10:   end if
11: end for
12: end if
13:  $\mathcal{P} = \text{REFINE}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ 
14: return  $\mathcal{P}$ 

```

5.3. Consideraciones bajo campo convectivo espacio temporal

Como fue presentado en el capítulo anterior, al considerar el caso en que el campo convectivo depende tanto del espacio como del tiempo, se generan cambios en las definiciones de los estimadores de error. Algunos de estos se ven afectados de manera implícita, como lo son el estimador de error espacial y el estimador de error temporal, donde si bien su definición no cambia, la definición de algunos de los términos que los componen sí, como los son por ejemplo el término oscilatorio osc_K^n en el caso del estimador de error espacial, y la constante de continuidad $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ en el caso del estimador de error temporal. Dichas modificaciones no generan cambios a nivel del algoritmo. En cambio, el estimador de error de oscilación temporal varía en su definición lo cual afecta también la dependencia que este tiene

$$\begin{aligned}
\eta_{K,D}^n(f, t^{n-1}, \tau_n, u_h^n, u_h^{n-1}) &= \sqrt{3} \mathcal{C}_{\Omega} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} 2 \|f - f^n\|_{L^2(K)}^2 dt \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d}{\varepsilon} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^n\|_{\mathcal{C}(I^n; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_{h\tau}\|_K^2 dt \right)^{1/2}. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Dicho cambio hace necesario la modificación del algoritmo. Esto debido a que, como hemos visto anteriormente el estimador de error de oscilación temporal se calcula a priori para poder definir la tolerancia tol_D y para calcular el paso de tiempo que asegura que el estimador η_D^n cumpla dicha tolerancia, pero en dichos casos aún no se cuenta con la solución u_h^n de dicho tiempo, la cual es necesaria para el cálculo de la función $u_{h\tau}$. Es por esto que es necesario modificar el algoritmo de manera tal que, cada vez que vaya a ser calculado el estimador de error de oscilación temporal, se calcule la solución en el tiempo t^n , el cual puede ser generado en base a los datos t^{n-1} y τ_n , los cuales son conocidos en todos los casos en que dicho cálculo es necesario. Una alternativa que implica no modificar la estructura del algoritmo es desarrollar una cota dependiente solo de los datos para el término $\int_{I^n} \|u_{h\tau}\|_{\Omega} dt$, la cual puede ser obtenida en base a la formulación completamente discretizada del problema, pero que implica sobre estimar la cota superior asociada al residuo de oscilación temporal en gran medida, por lo que no es recomendada.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

En este capítulo se muestra una serie de ejemplos numéricos a través de los cuales se ilustra el desempeño del algoritmo espacio temporal adaptativo de elementos finitos TAFEM presentado en el capítulo anterior. La implementación de dicho algoritmo se realizó a través del lenguaje de programación C++ mientras que la visualización de resultados se hace a través de Matlab y Paraview. Cada ejemplo presentado busca ilustrar las distintas características de TAFEM y a la vez contrastar el desempeño de cada uno de los esquemas de estabilización utilizados. A continuación se presentan algunas consideraciones con respecto a TAFEM.

1. En cada paso de tiempo se utiliza la misma malla espacial inicial, es decir, se hace uso del algoritmo de iniciación de malla 6, y por lo tanto no se hace uso de la técnica de desrefinamiento (coarsening).
2. El número de grados de libertad se denotará por DoFs.
3. Dada la similitud en el comportamiento de los esquemas SUPG y GLS, solo se presentarán los resultados obtenidos con el primero de estos.

Con respecto a la información que será presentada en cada caso, para cada ejemplo presentaremos por separado el resultado obtenido a través de cada esquema de estabilización, ilustrando el comportamiento de los estimadores y la adaptatividad espacio temporal realizada, para luego presentar una sección donde se compara el comportamiento de los tres esquemas a través de gráficas que contrastan los DoFs y la adaptatividad temporal.

6.1. Ejemplo 1: Burbuja Exponencial

En este primer ejemplo, se busca ilustrar el funcionar del algoritmo TAFEM a través de una función relativamente suave, tanto en espacio como en tiempo. El dominio espacial utilizado corresponde a $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ mientras que el intervalo de tiempo es igual a $(0, T) = (0, 0,1)$. Con respecto a los parámetros relacionados al operador diferencial se tiene que $\varepsilon = 1$, $\mathbf{a} = (1, 1)$ y $\kappa = 1$. La función f del lado derecho se elige de manera tal que la solución exacta es igual a

$$u(x, y, t) = 16 e^t x y (1 - x) (1 - y). \quad (6.1)$$

Los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.1 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 35,31024296$, mientras que la malla inicial junto con la condición inicial bajo la tolerancia TOL_0 , definida en el Cuadro 6.1, se presentan en la Figura 6.1.

TOL_0^2	$TOL_{P_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{P_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
10^{-6}	35,3099428	10^{-4}	5×10^{-3}	$6,15 \times 10^{-6}$	10	1	10	10	1	10

Cuadro 6.1: Tolerancias y parámetros.

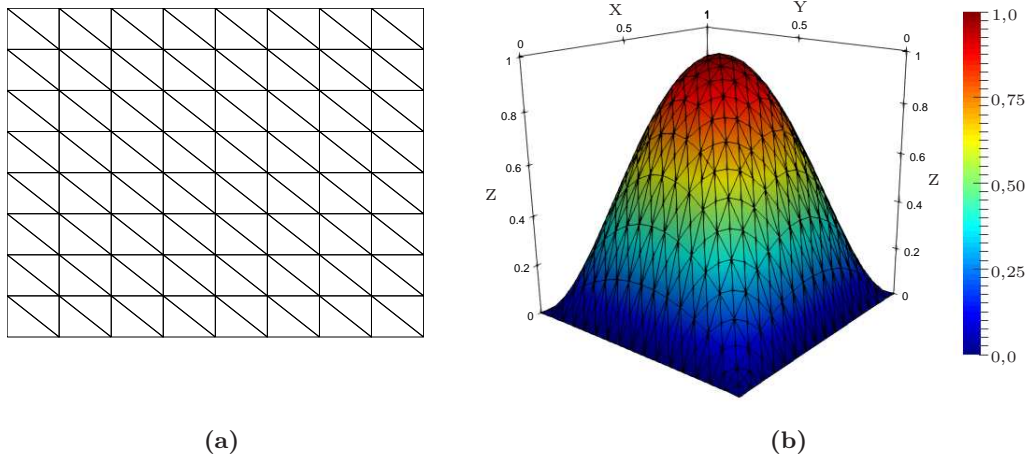


Figura 6.1: (a) Malla inicial que se utilizó en cada paso de tiempo formada por 128 elementos y 81 DoFs. (b) Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 1064 elementos y 569 DoFs.

A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de estabilización utilizados.

6.1.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 3,81377309 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.2 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal. Cabe resaltar que los casos en que el estimador de desrefinamiento (η_c^n) es igual a cero, se debe al cumplimiento de la condición $V_h^{n-1} \subset V_h^n$.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	572	0,00069043	0,00047974	$7,532 \times 10^{-7}$
2	0,02	0,01	574	0	0,00015948	$7,6842 \times 10^{-7}$
3	0,03	0,01	556	0,0020278	0,0002516	$7,8394 \times 10^{-7}$
4	0,04	0,01	559	0	0,00019272	$7,9978 \times 10^{-7}$
5	0,05	0,01	557	0,00020761	0,00018694	$8,1593 \times 10^{-7}$
6	0,06	0,01	559	0	0,00020421	$8,3242 \times 10^{-7}$
7	0,07	0,01	557	0,00021574	0,00020218	$8,4923 \times 10^{-7}$
8	0,08	0,01	559	0	0,00021886	$8,6639 \times 10^{-7}$
9	0,09	0,01	557	0,00022419	0,00021571	$8,8389 \times 10^{-7}$
10	0,1	0,01	559	0	0,00023219	$9,0175 \times 10^{-7}$

Cuadro 6.2: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

La figura 6.2 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n , mientras que la figura 6.3 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación.

Nota 6.1.1. *Las refinaciones espaciales mostradas en cada tiempo corresponden a refinaciones realizadas una vez que el paso de tiempo se ha estabilizado (el estimador de tiempo cumple la tolerancia y dejan de ocurrir refinaciones del paso de tiempo). Por otro lado, las refinaciones presentadas para cada tiempo no son necesariamente refinaciones consecutivas. Además en cada tiempo, la primera de dichas refinaciones espaciales no es necesariamente la primera refinación luego de la última refinación temporal. Estas afirmaciones son válidas para los distintos esquemas y ejemplos posteriores.*

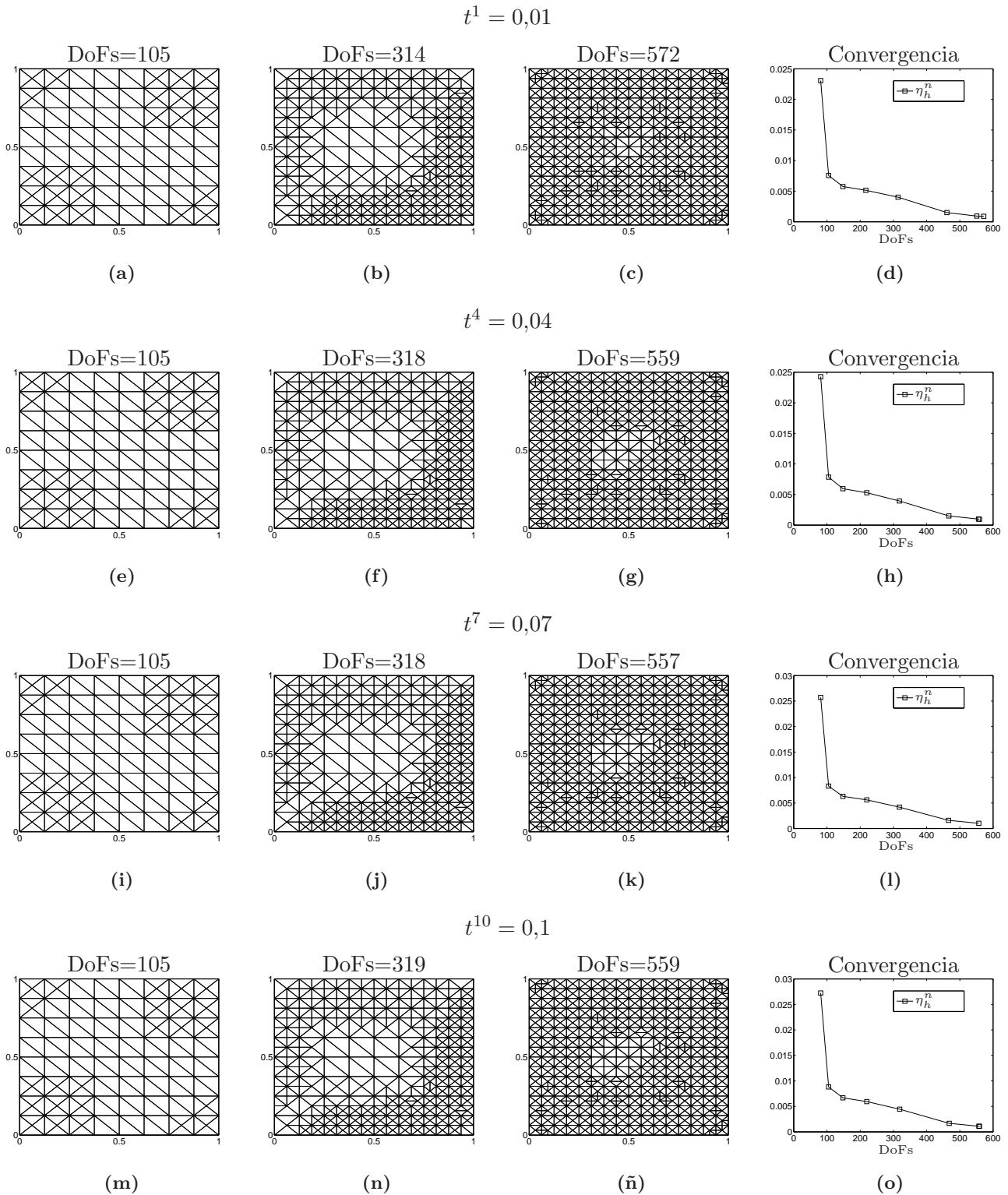


Figura 6.2: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

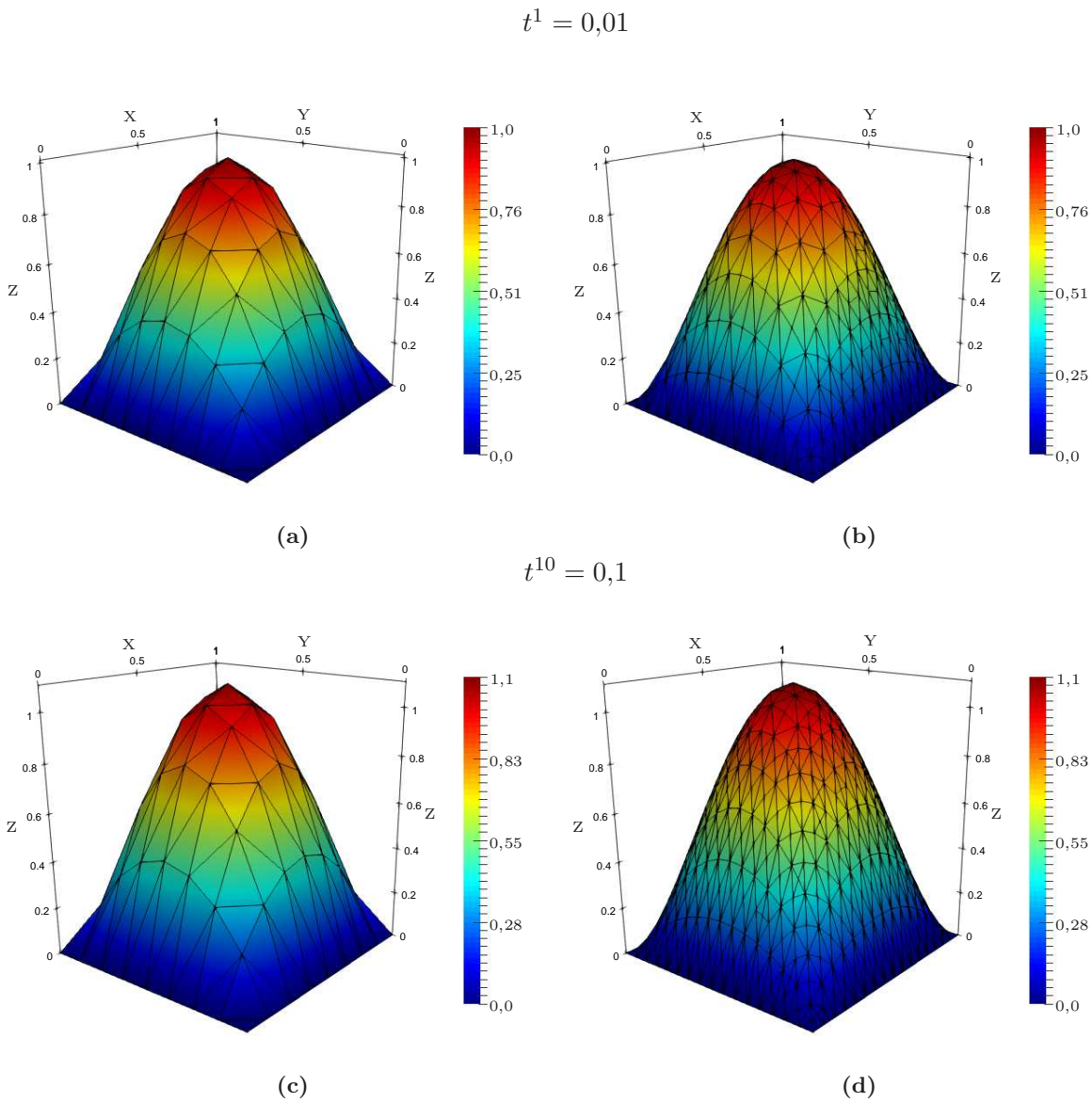


Figura 6.3: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,01$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,01$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{10} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{10} = 0,1$.

La figura 6.4 presenta de manera simultanea un corte transversal de la solución obtenida en el tiempo inicial $t = 0$ (color sólido) y final $t = 0,1$ (color transparente), mostrando de una manera más clara el comportamiento de la función $u_{h\tau}$ a través del tiempo. Dicho comportamiento corresponde a la variación en la altura que alcanza la función, y vienen dado por el término exponencial en la función solución.

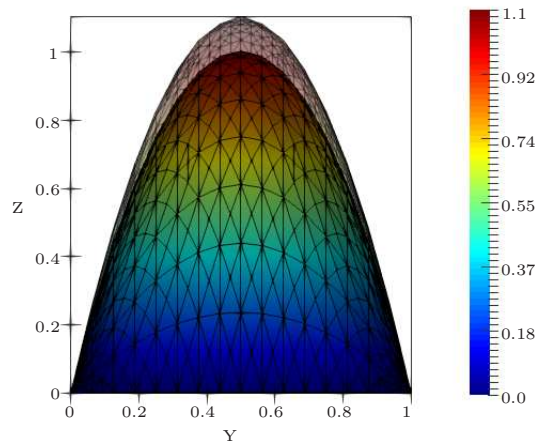


Figura 6.4: Comparación de solución en los tiempo $t = 0$ y $t = 0,1$.

Finalmente, la figura 6.5 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.5a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.5b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal. Podemos notar que en el segundo caso, no se genera adaptatividad temporal debido a que se selecciona una tolerancia tol_D lo suficientemente pequeña, de manera tal que el paso de tiempo generado por la sub-rutina T_CONSISTENCY cumple la tolerancia tol_{p_τ} sin la necesidad de refinaciones posteriores.

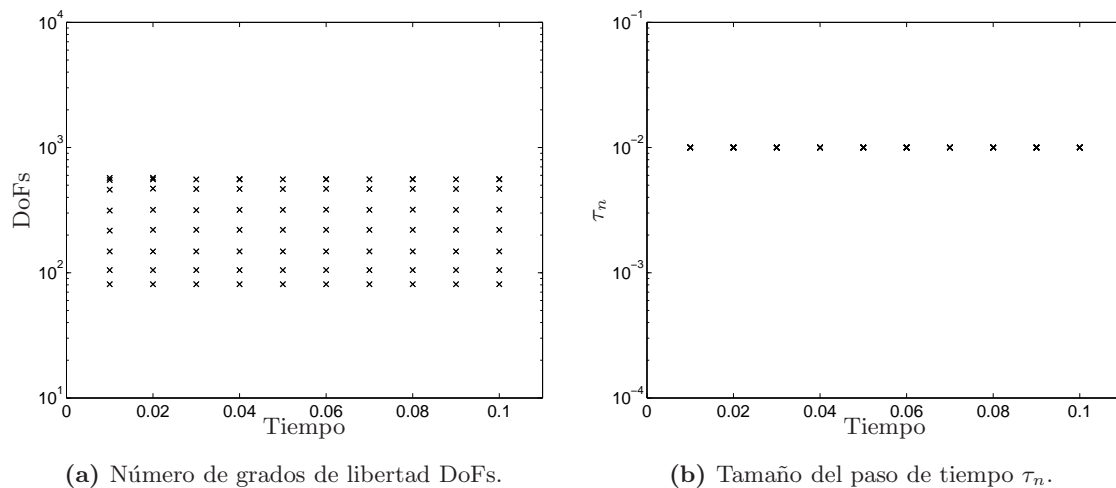


Figura 6.5: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM.

6.1.2. ES

En este caso el error obtenido es igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 3,81454221 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.3 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	572	0,00069043	0,00052245	$7,532 \times 10^{-7}$
2	0,02	0,01	574	0	0,00015617	$7,6842 \times 10^{-7}$
3	0,03	0,01	556	0,0020224	0,00025871	$7,8394 \times 10^{-7}$
4	0,04	0,01	559	0	0,00019012	$7,9978 \times 10^{-7}$
5	0,05	0,01	557	0,00020685	0,0001846	$8,1593 \times 10^{-7}$
6	0,06	0,01	559	0	0,00020241	$8,3242 \times 10^{-7}$
7	0,07	0,01	557	0,00021485	0,0002005	$8,4923 \times 10^{-7}$
8	0,08	0,01	559	0	0,00021761	$8,6639 \times 10^{-7}$
9	0,09	0,01	557	0,00022321	0,00021449	$8,8389 \times 10^{-7}$
10	0,1	0,01	559	0	0,00023133	$9,0175 \times 10^{-7}$

Cuadro 6.3: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.6 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n , mientras que la figura 6.7 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación. Luego, al igual que en el esquema previo, la figura 6.8 presenta de manera simultanea un corte transversal de la solución obtenida en el tiempo inicial $t = 0$ (color sólido) y final $t = 0,1$ (color transparente), ilustrando así el comportamiento de la función solución $u_{h\tau}$ a través del tiempo. Finalmente, la figura 6.9 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas que ilustran las refinaciones espaciales y temporales en cada paso de tiempo.

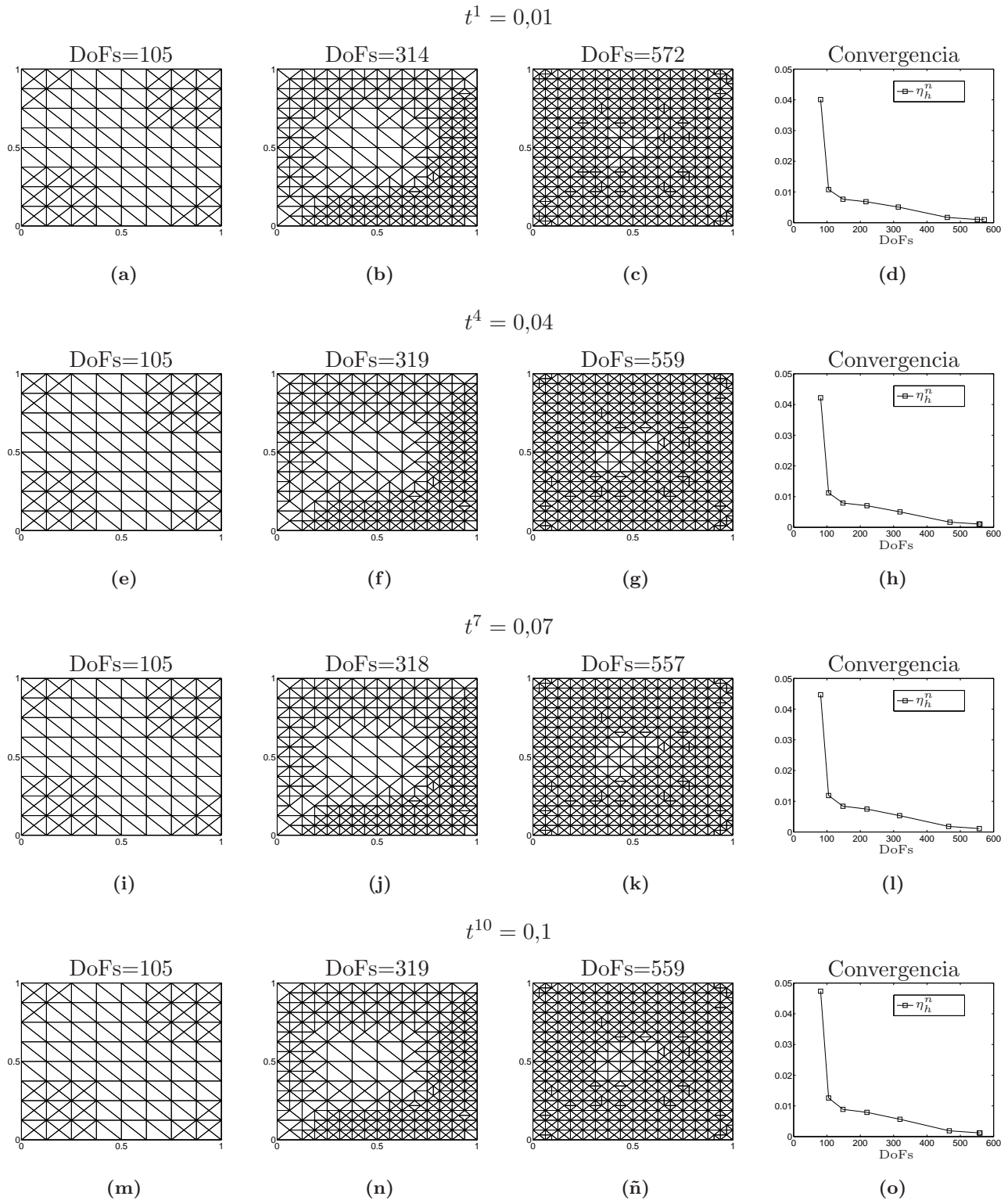


Figura 6.6: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

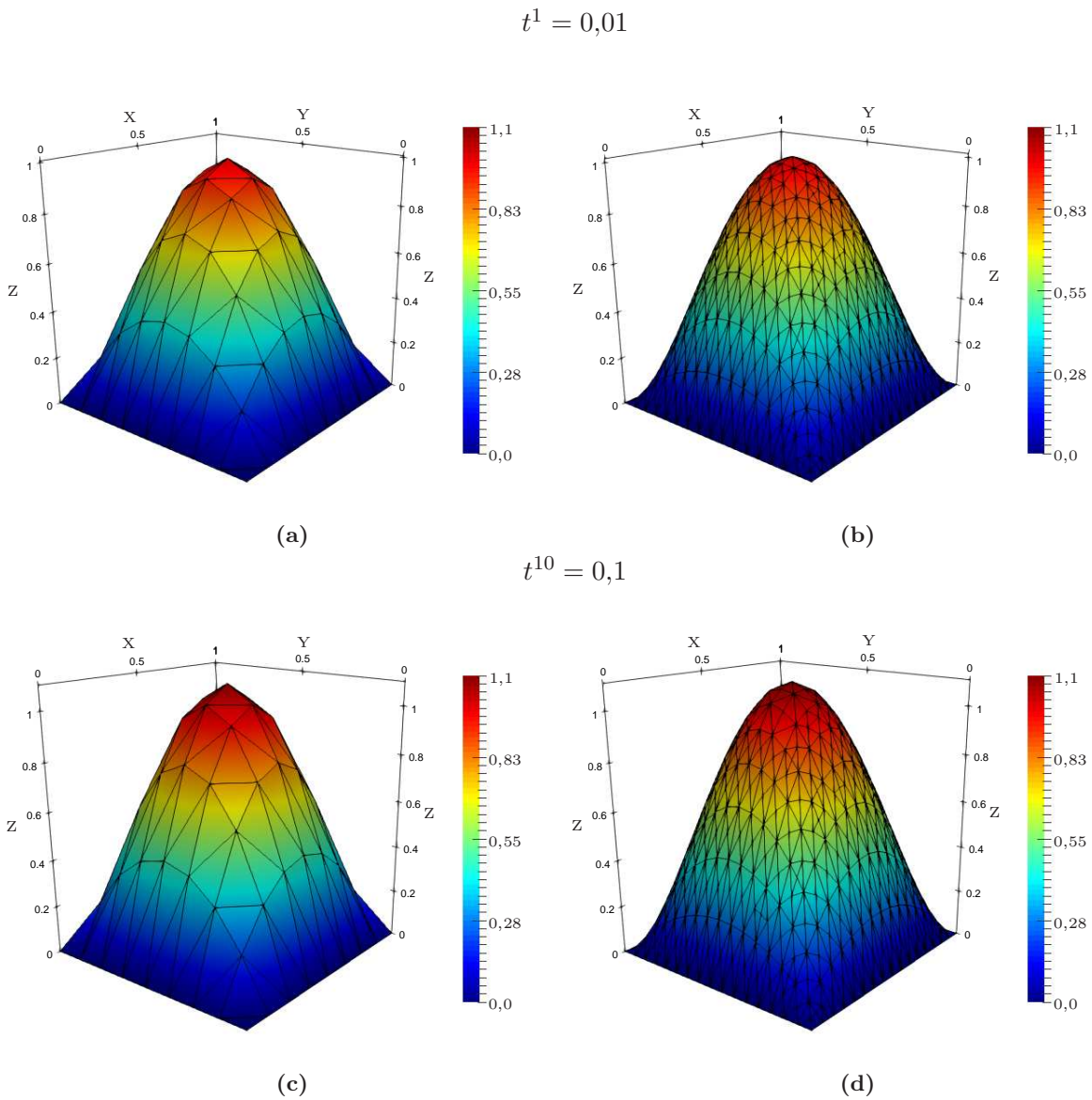


Figura 6.7: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,01$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,01$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{10} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{10} = 0,1$.

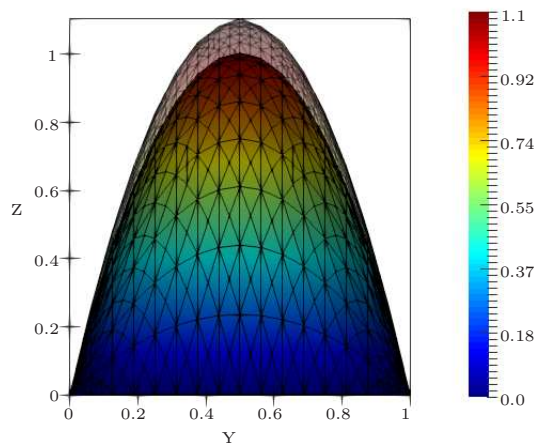


Figura 6.8: Comparación de solución en los tiempos $t = 0$ y $t = 0,1$

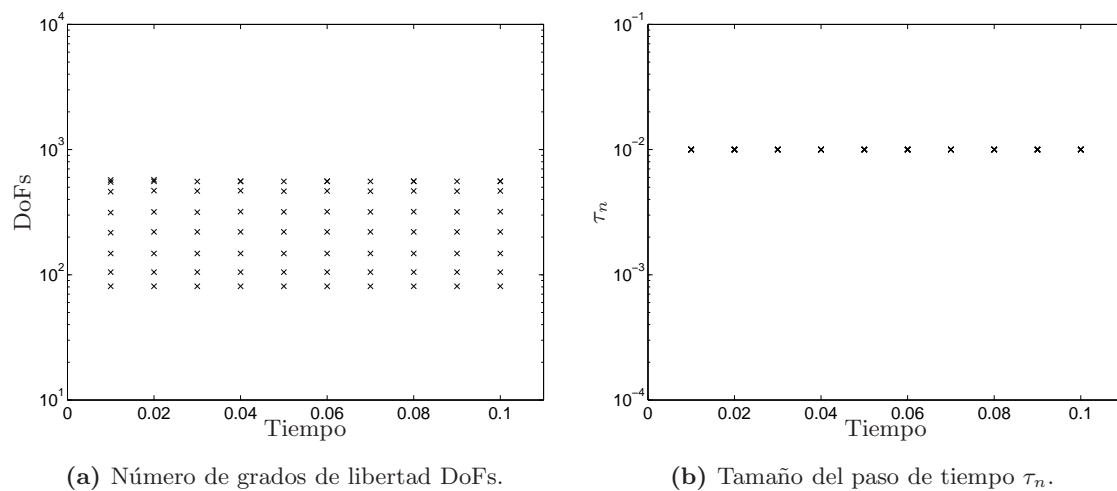


Figura 6.9: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.1.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 6,37305303 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.4 presenta el mismo detalle de los casos anteriores.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,005	0,005	523	0,0039424	0,00037977	$9,368 \times 10^{-8}$
2	0,01	0,005	527	0	$2,0442 \times 10^{-5}$	$9,4622 \times 10^{-8}$
3	0,015	0,005	526	0,00020041	$2,9299 \times 10^{-5}$	$9,5573 \times 10^{-8}$
4	0,02	0,005	510	0,0020537	$9,935 \times 10^{-5}$	$9,6533 \times 10^{-8}$
5	0,025	0,005	508	0,00023406	$4,379 \times 10^{-5}$	$9,7503 \times 10^{-8}$
6	0,03	0,005	508	0	$9,7893 \times 10^{-6}$	$9,8483 \times 10^{-8}$
7	0,035	0,005	508	0	$8,8964 \times 10^{-6}$	$9,9473 \times 10^{-8}$
8	0,04	0,005	508	0	$9,4925 \times 10^{-6}$	$1,0047 \times 10^{-7}$
9	0,045	0,005	508	0	$1,0454 \times 10^{-5}$	$1,0148 \times 10^{-7}$
10	0,05	0,005	508	0	$1,1548 \times 10^{-5}$	$1,025 \times 10^{-7}$
11	0,055	0,005	508	0	$1,2682 \times 10^{-5}$	$1,0353 \times 10^{-7}$
12	0,06	0,005	508	0	$1,3811 \times 10^{-5}$	$1,0457 \times 10^{-7}$
13	0,065	0,005	508	0	$1,4913 \times 10^{-5}$	$1,0562 \times 10^{-7}$
14	0,07	0,005	508	0	$1,5976 \times 10^{-5}$	$1,0669 \times 10^{-7}$
15	0,075	0,005	508	0	$1,6994 \times 10^{-5}$	$1,0776 \times 10^{-7}$
16	0,08	0,005	508	0	$1,7965 \times 10^{-5}$	$1,0884 \times 10^{-7}$
17	0,085	0,005	508	0	$1,8888 \times 10^{-5}$	$1,0993 \times 10^{-7}$
18	0,09	0,005	508	0	$1,9765 \times 10^{-5}$	$1,1104 \times 10^{-7}$
19	0,095	0,005	508	0	$2,0597 \times 10^{-5}$	$1,1216 \times 10^{-7}$
20	0,1	0,005	508	0	$2,1386 \times 10^{-5}$	$1,1328 \times 10^{-7}$

Cuadro 6.4: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.10 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n , mientras que la figura 6.11 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación.

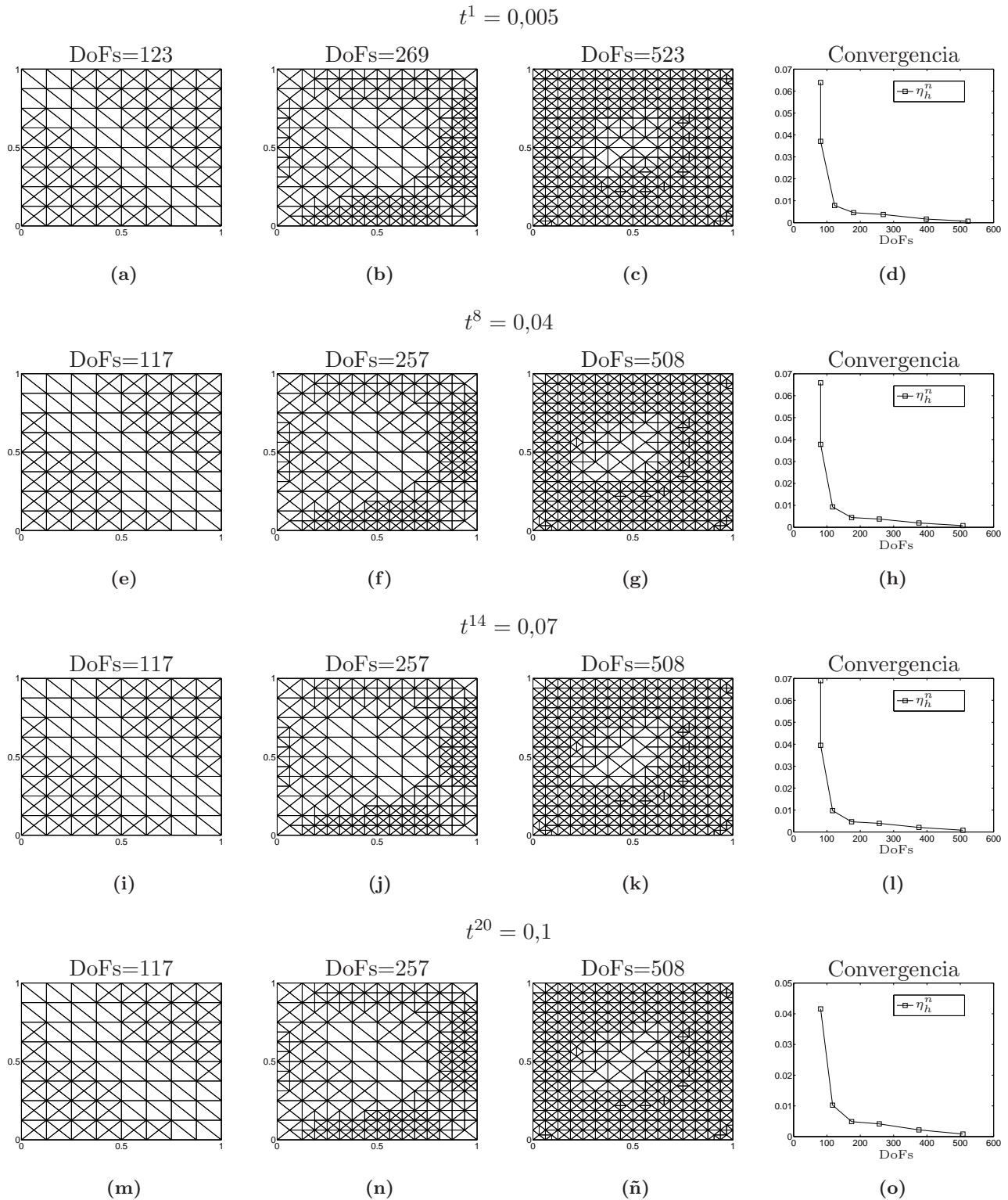


Figura 6.10: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,005$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^8 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{14} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{20} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,005$, $t^8 = 0,04$, $t^{14} = 0,07$ y $t^{20} = 0,1$, respectivamente.

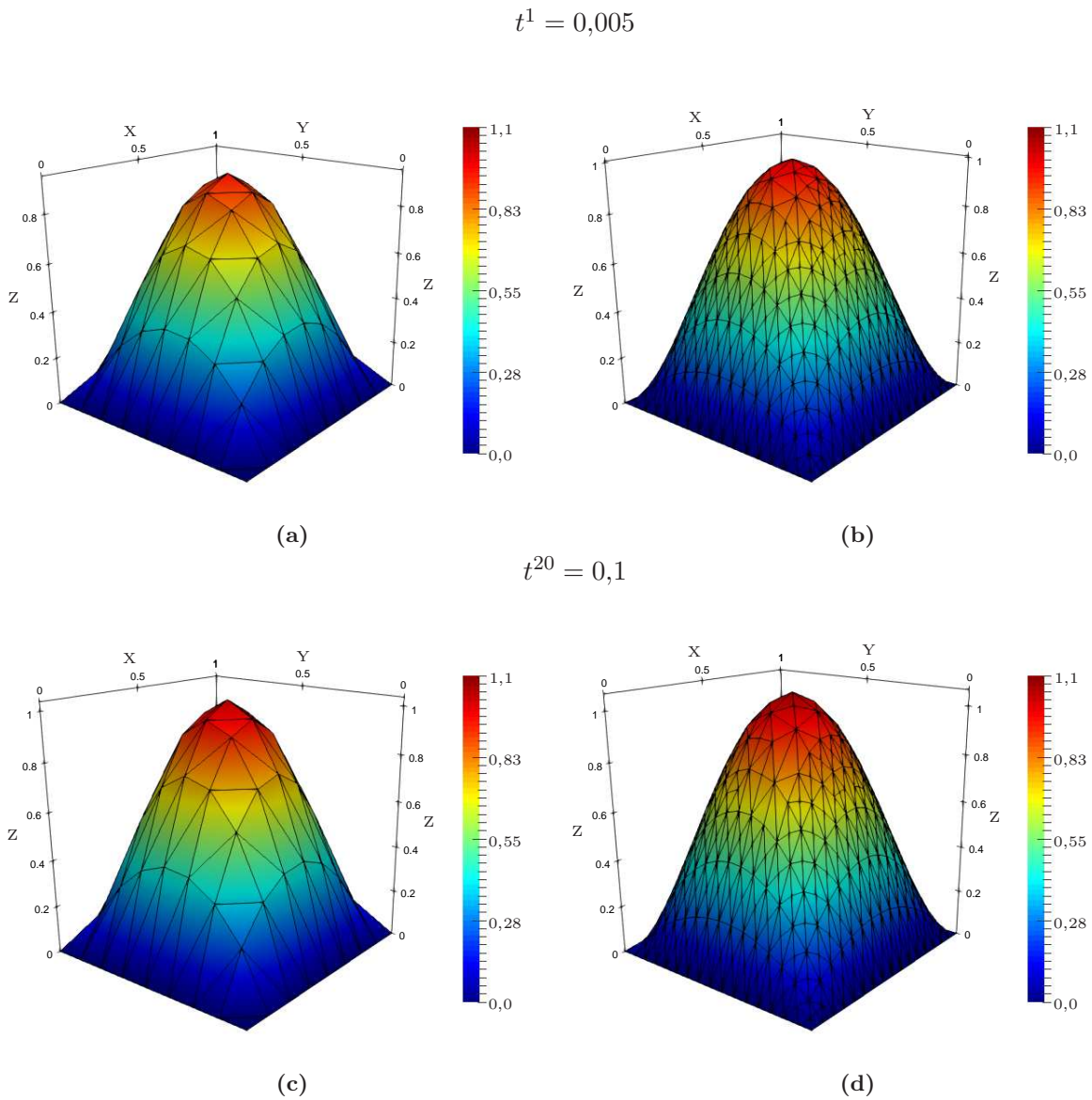


Figura 6.11: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,005$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,005$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{20} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{20} = 0,1$.

La figura 6.12 presenta de manera simultanea un corte transversal de la solución obtenida en el tiempo inicial $t = 0$ (color sólido) y final $t = 0,1$ (color transparente), representando el comportamiento temporal de la función solución $u_{h\tau}$.

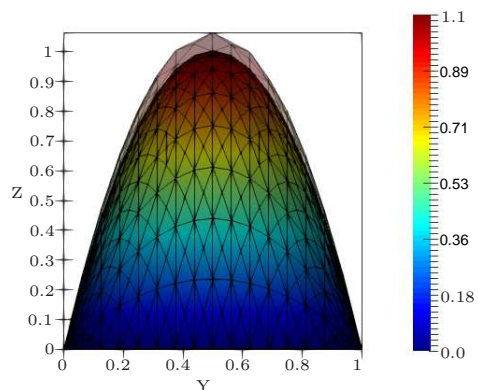


Figura 6.12: Comparación de solución en los tiempos $t = 0$ y $t = 0,1$

Finalmente, la figura 6.13 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas que ilustran las refinaciones espaciales y temporales en cada paso de tiempo.

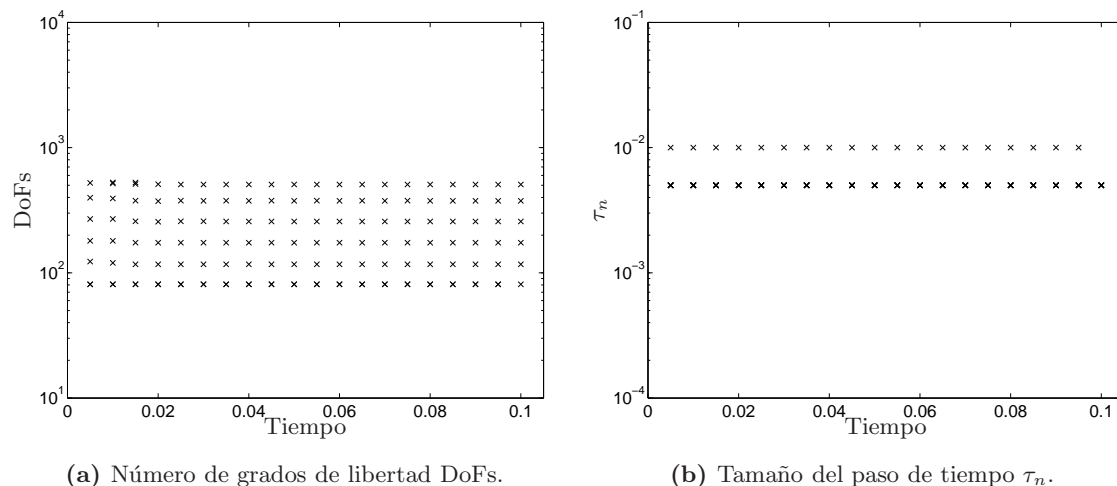
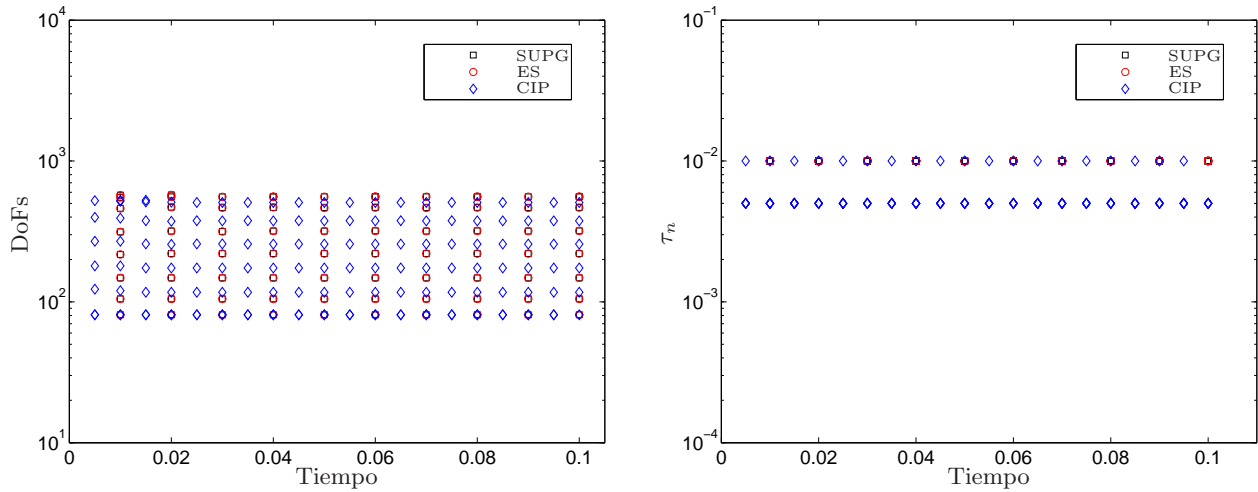


Figura 6.13: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.1.4. Comparación entre esquemas de estabilización

En primer lugar la figura 6.14a presenta para cada nodo de tiempo la comparación entre los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial hecha por cada esquema. En este caso tenemos que el comportamiento de los esquemas SUPG y ES es casi idéntico en términos de la cantidad de refinaciones espaciales realizadas, lo que se refleja también en el valor de error alcanzado. El esquema CIP también realiza una cantidad similar de refinaciones espaciales, pero en una mayor cantidad de pasos temporales, lo que se refleja en figura 6.14b, donde se puede apreciar que mientras los esquemas SUPG y ES no realizan ninguna refinación temporal, el esquema CIP realiza una, por lo que genera cerca del doble de nodos temporales.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

Figura 6.14: Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$6,17557535 \times 10^{-2}$	$3,81377309 \times 10^{-3}$
ES	$6,17619892 \times 10^{-2}$	$3,81454221 \times 10^{-3}$
CIP	$7,98314038 \times 10^{-2}$	$6,37305303 \times 10^{-3}$

Cuadro 6.5: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

Otra forma gráfica de comparar los esquemas es a través de la diferencia puntual obtenida entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final. Las figuras 6.15a, 6.15b y 6.15c ilustran dicha diferencia. El caso ideal esperado sería que dicha diferencia fuese igual a cero en la mayor parte del dominio. Tal es el caso para los esquemas SUPG y ES, donde la diferencia es cercana a cero en gran parte del dominio. En cambio, el esquema CIP muestra una mayor diferencia entre la solución real y discreta, lo que se ve reflejado en el mayor valor de la norma del error con respecto a los otros esquemas. Dicho comportamiento también puede verse en la figura 6.12, donde es claro que la solución discreta no alcanza el mismo valor máximo que la solución real en el eje z .

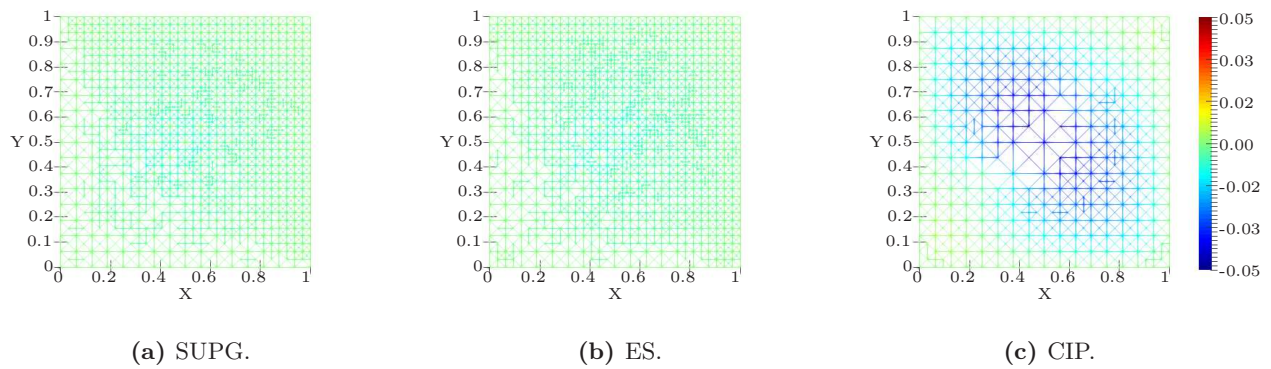


Figura 6.15: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 5,94224$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

A continuación mostraremos que el esquema CIP puede tener un mejor desempeño si se aumenta la cantidad de refinaciones espaciales en cada tiempo. Existen distintas maneras de realizar esto; una es definir una menor tolerancia $tol_{\mathcal{P}_\tau}$, lo que generaría una mayor refinación espacial pero también menores pasos de tiempo, y dado que no buscamos la disminución de estos, esta alternativa queda descartada. Otra manera sería modificar el valor de los parámetros $\alpha_h, \alpha_c, \beta_h, \beta_c, \gamma_h, \gamma_c$, pero dicho cambio afecta el valor de la tolerancia $tol_{\mathcal{P}_\tau}$ al afectar el valor de la constante \mathcal{C}_T , y por lo tanto también es descartado. En cambio, una alternativa más directa es disminuir el valor de la tolerancia del valor inicial TOL_0 . Esto que genera una mayor refinación espacial en la condición inicial, y luego, por el efecto del estimador de desrefinamiento (η_c^n), una mayor refinación espacial en cada paso de tiempo. Lo anterior ocurre ya que el valor del estimador (η_c^n) disminuye a medida que los espacios V_h^{n-1} y V_h^n se encuentren más cerca de cumplir la condición $V_h^{n-1} \subset V_h^n$. De esta manera, al reducir el valor de la tolerancia $TOL_0 = 10^{-7}$

la norma del error disminuye a un valor de $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,54076117 \times 10^{-3}$, mientras que el valor de la tolerancia se mantiene idéntico $TOL^2 = 35,31024296$ al considerar 8 cifras decimales. La figura 6.16 ilustra la diferencia entre la solución real y la solución discreta, de donde es posible apreciar que el comportamiento de la solución es más similar al de los esquemas SUPG y ES presentado anteriormente.

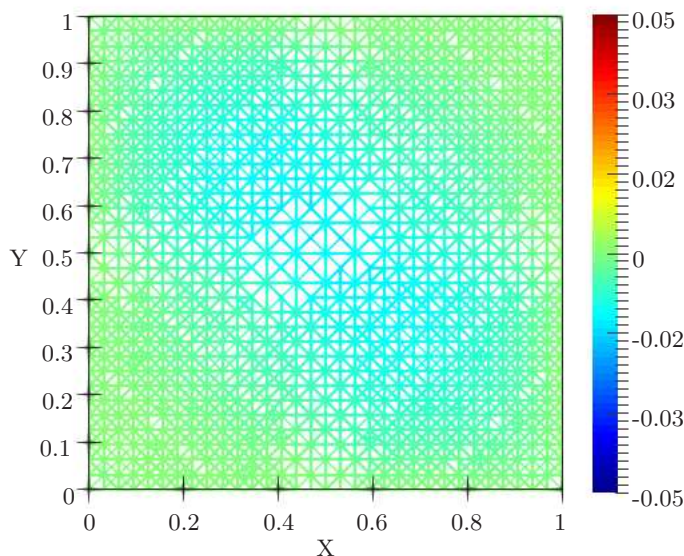


Figura 6.16: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final obtenida bajo el uso del esquema de estabilización CIP, caso con mayor refinación espacial.

Nota 6.1.2. *El análisis realizado para el caso del esquema CIP, se realizó con el fin ilustrar que si bien bajo ciertos valores de tolerancia no tan exigentes el esquema CIP puede tener un desempeño más bajo, al aumentar la tolerancia y generar una mayor refinación espacial, el desempeño del esquema puede ser mejorado.*

6.2. Ejemplo 2: Capa Límite

En este segundo ejemplo, se busca ilustrar el funcionar de los esquemas estabilizados a través de una función que presenta un comportamiento de capa límite al disminuir el valor del parámetro de difusión ε . Nuevamente, el dominio espacial utilizado corresponde a $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ mientras que el intervalo de tiempo es igual a $(0, T) = (0, 0,1)$. Con respecto a los parámetros relacionados al operador diferencial se tiene que $\mathbf{a} = (1, 1)$ y $\kappa = 1$, mientras que el parámetro de difusión, el cual cumple el rol de parámetro de perturbación, tomará los valores $\varepsilon \in \{1, 0,1, 0,01, 0,001\}$. La función f del lado derecho se elige de manera tal que la solución exacta es igual a

$$u(x, y, t) = e^t \left(x - \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right) \left(y - \frac{1 - e^{-y/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right) \quad (6.2)$$

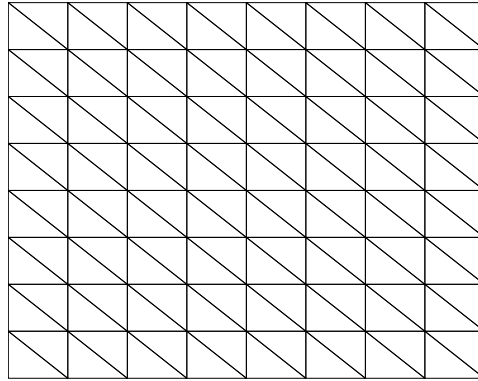


Figura 6.17: Malla inicial que se utilizó en cada paso de tiempo formada por 128 elementos y 81 DoFs.

Al disminuir el parámetro ε , las capas límites serán generadas cercanas a los conjuntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

A continuación se presentan los resultados para cada valor del parámetro de perturbación. Como fue mencionado, dado que la importancia de este ejemplo es retratar el funcionar de los esquemas estabilizados, no se presentarán figuras que retraten el comportamiento temporal de la función. Además, dicho comportamiento es idéntico al presentado por la función del ejemplo anterior, ya que en ambos casos el comportamiento temporal es generado por el término e^t .

6.2.1. Caso $\varepsilon = 1$

Para este caso, los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.6 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 1,24678904 \times 10^{-3}$, mientras que la condición inicial se presenta en la Figura 6.18.

TOL_0^2	$TOL_{\mathcal{P}_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{\mathcal{P}_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
5×10^{-10}	$1,24649 \times 10^{-3}$	10^{-7}	10^{-6}	$1,25 \times 10^{-8}$	1	1	10^{-1}	1	1	1

Cuadro 6.6: Tolerancias y parámetros.

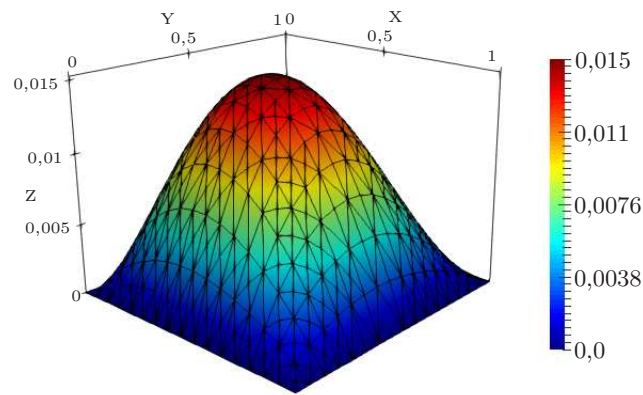


Figura 6.18: Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 830 elementos y 447 DoFs.

Para este valor de parámetro de perturbación se espera un comportamiento muy suave, similar al presentado por la función del ejemplo anterior, sin la presencia de capas límites. A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de estabilización utilizados.

6.2.1.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 2,85829321 \times 10^{-6}$. El cuadro 6.7 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	441	$8,7828 \times 10^{-7}$	$1,3613 \times 10^{-7}$	$1,9689 \times 10^{-10}$
2	0,02	0,01	394	$5,3374 \times 10^{-6}$	$2,2609 \times 10^{-7}$	$2,0087 \times 10^{-10}$
3	0,03	0,01	395	$1,392 \times 10^{-8}$	$4,3069 \times 10^{-8}$	$2,0492 \times 10^{-10}$
4	0,04	0,01	393	$2,0663 \times 10^{-7}$	$4,1199 \times 10^{-8}$	$2,0906 \times 10^{-10}$
5	0,05	0,01	395	0	$4,7664 \times 10^{-8}$	$2,1329 \times 10^{-10}$
6	0,06	0,01	393	$2,1459 \times 10^{-7}$	$4,5465 \times 10^{-8}$	$2,176 \times 10^{-10}$
7	0,07	0,01	395	0	$5,1701 \times 10^{-8}$	$2,2199 \times 10^{-10}$
8	0,08	0,01	393	$2,2291 \times 10^{-7}$	$4,9045 \times 10^{-8}$	$2,2648 \times 10^{-10}$
9	0,09	0,01	395	0	$5,5224 \times 10^{-8}$	$2,3105 \times 10^{-10}$
10	0,1	0,01	397	$1,1932 \times 10^{-7}$	$5,7161 \times 10^{-8}$	$2,3572 \times 10^{-10}$

Cuadro 6.7: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinación, tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.19 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n , mientras que la figura 6.20 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.20a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.20b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

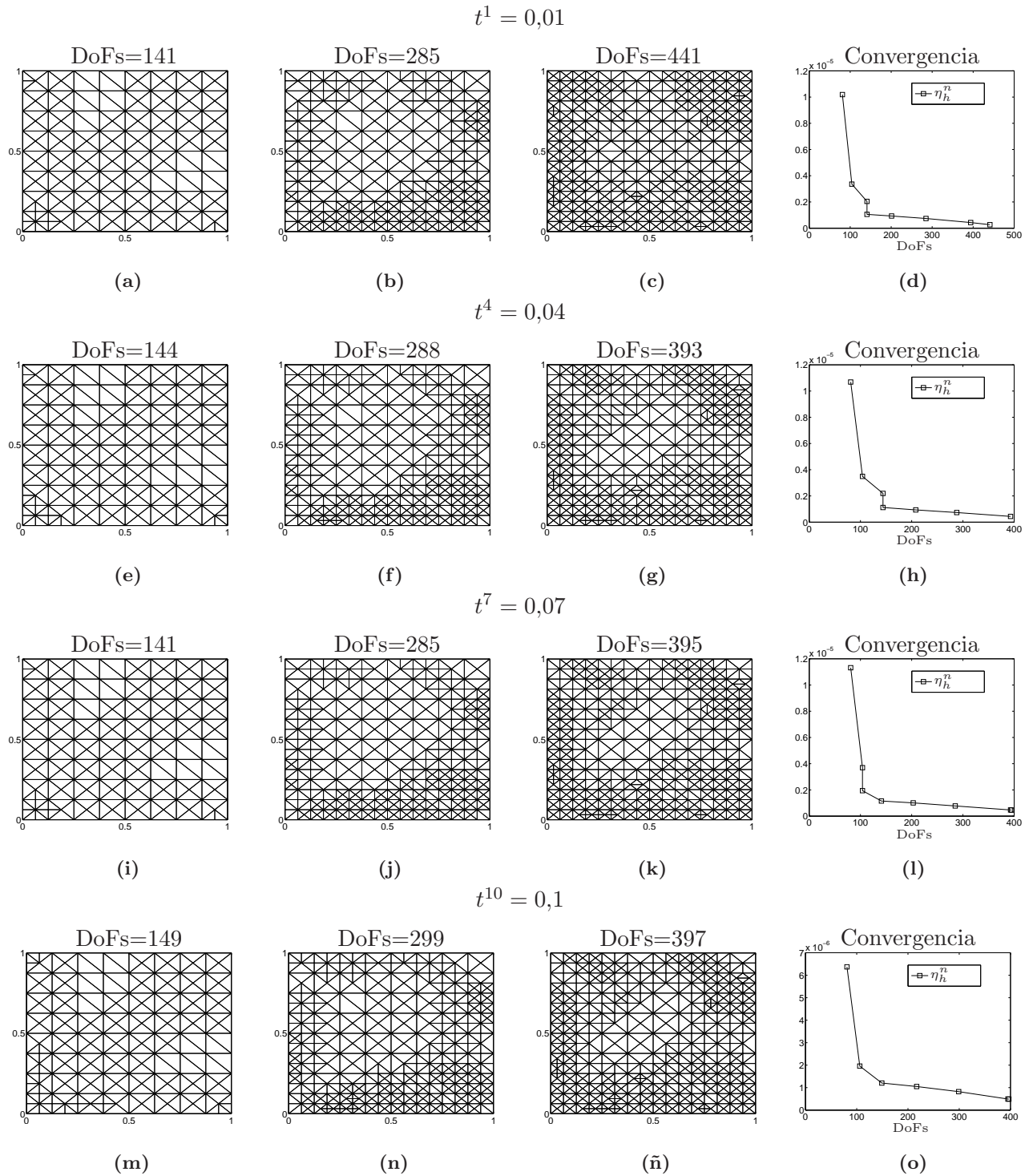


Figura 6.19: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

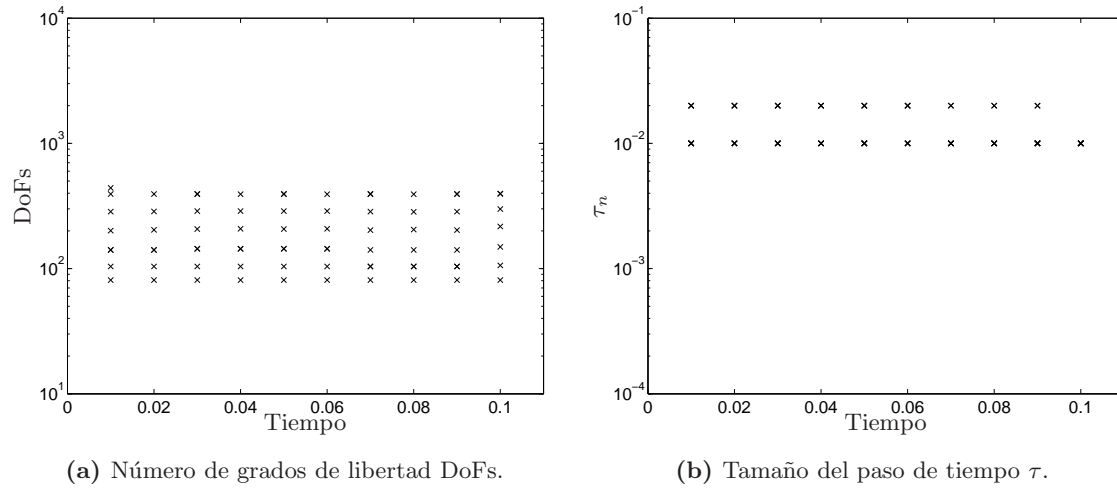


Figura 6.20: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.1.2. ES

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,92528700 \times 10^{-6}$. El cuadro 6.8 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,005	0,005	441	$4,3914 \times 10^{-7}$	$6,2161 \times 10^{-8}$	$2,4488 \times 10^{-11}$
2	0,01	0,005	393	$2,7059 \times 10^{-6}$	$1,165 \times 10^{-7}$	$2,4734 \times 10^{-11}$
3	0,02	0,01	393	$3,1598 \times 10^{-8}$	$3,9301 \times 10^{-8}$	$2,0087 \times 10^{-10}$
4	0,03	0,01	391	$2,0339 \times 10^{-7}$	$3,6437 \times 10^{-8}$	$2,0492 \times 10^{-10}$
5	0,04	0,01	393	0	$4,3788 \times 10^{-8}$	$2,0906 \times 10^{-10}$
6	0,05	0,01	391	$2,1098 \times 10^{-7}$	$4,1764 \times 10^{-8}$	$2,1329 \times 10^{-10}$
7	0,06	0,01	393	0	$4,873 \times 10^{-8}$	$2,176 \times 10^{-10}$
8	0,07	0,01	391	$2,1891 \times 10^{-7}$	$4,6089 \times 10^{-8}$	$2,2199 \times 10^{-10}$
9	0,08	0,01	393	0	$5,2872 \times 10^{-8}$	$2,2648 \times 10^{-10}$
10	0,09	0,01	391	$2,2731 \times 10^{-7}$	$4,9773 \times 10^{-8}$	$2,3105 \times 10^{-10}$
11	0,1	0,01	393	0	$5,6523 \times 10^{-8}$	$2,3572 \times 10^{-10}$

Cuadro 6.8: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.21 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n mientras que la figura 6.22 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.22a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.22b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

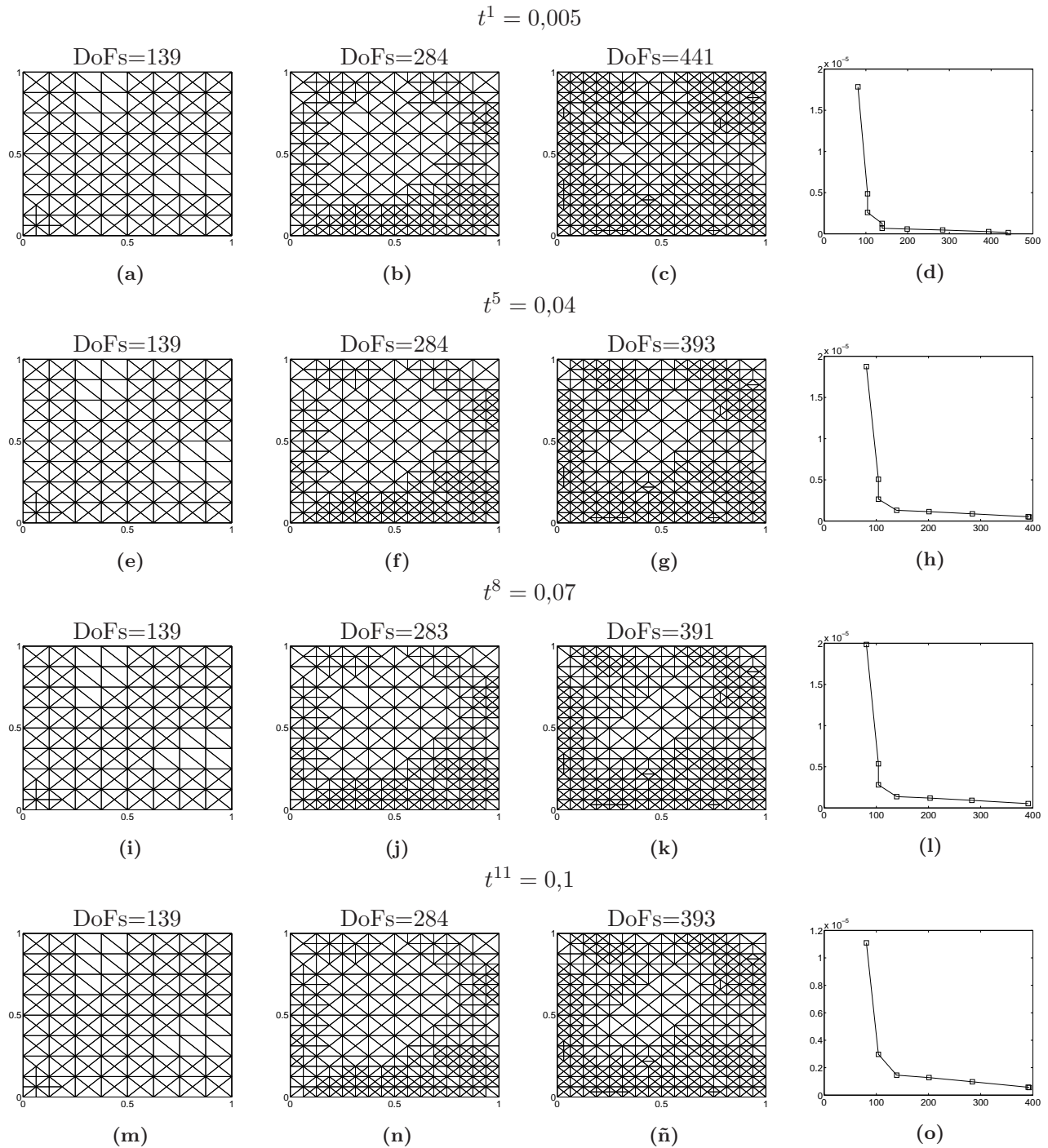


Figura 6.21: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,005$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^5 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^8 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{11} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,005$, $t^5 = 0,04$, $t^8 = 0,07$ y $t^{11} = 0,1$, respectivamente.

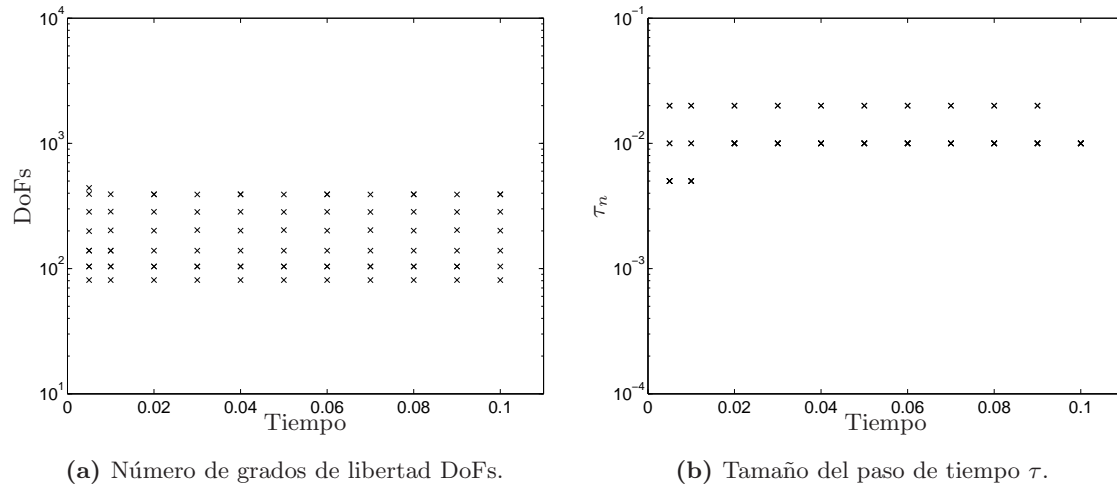


Figura 6.22: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.1.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,33412916 \times 10^{-6}$. El cuadro 6.9 presenta el mismo detalle de los casos anteriores.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,005	0,005	440	$3,9554 \times 10^{-7}$	$1,2193 \times 10^{-7}$	$2,4488 \times 10^{-11}$
2	0,01	0,005	439	$2,3721 \times 10^{-8}$	$1,333 \times 10^{-8}$	$2,4734 \times 10^{-11}$
4	0,02	0,005	439	0	$1,9644 \times 10^{-9}$	$2,5234 \times 10^{-11}$
6	0,03	0,005	439	0	$1,3993 \times 10^{-9}$	$2,5744 \times 10^{-11}$
8	0,04	0,005	439	0	$1,7598 \times 10^{-9}$	$2,6264 \times 10^{-11}$
10	0,05	0,005	439	0	$2,3182 \times 10^{-9}$	$2,6794 \times 10^{-11}$
12	0,06	0,005	439	0	$2,8927 \times 10^{-9}$	$2,7336 \times 10^{-11}$
14	0,07	0,005	439	0	$3,4336 \times 10^{-9}$	$2,7888 \times 10^{-11}$
16	0,08	0,005	439	0	$3,9277 \times 10^{-9}$	$2,8451 \times 10^{-11}$
18	0,08875	0,00375	433	$4,509 \times 10^{-7}$	$2,6511 \times 10^{-8}$	$1,223 \times 10^{-11}$
20	0,1	0,005625	432	0	$6,8713 \times 10^{-9}$	$4,2137 \times 10^{-11}$

Cuadro 6.9: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.23 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n , mientras que la figura 6.24 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.24a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.24b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

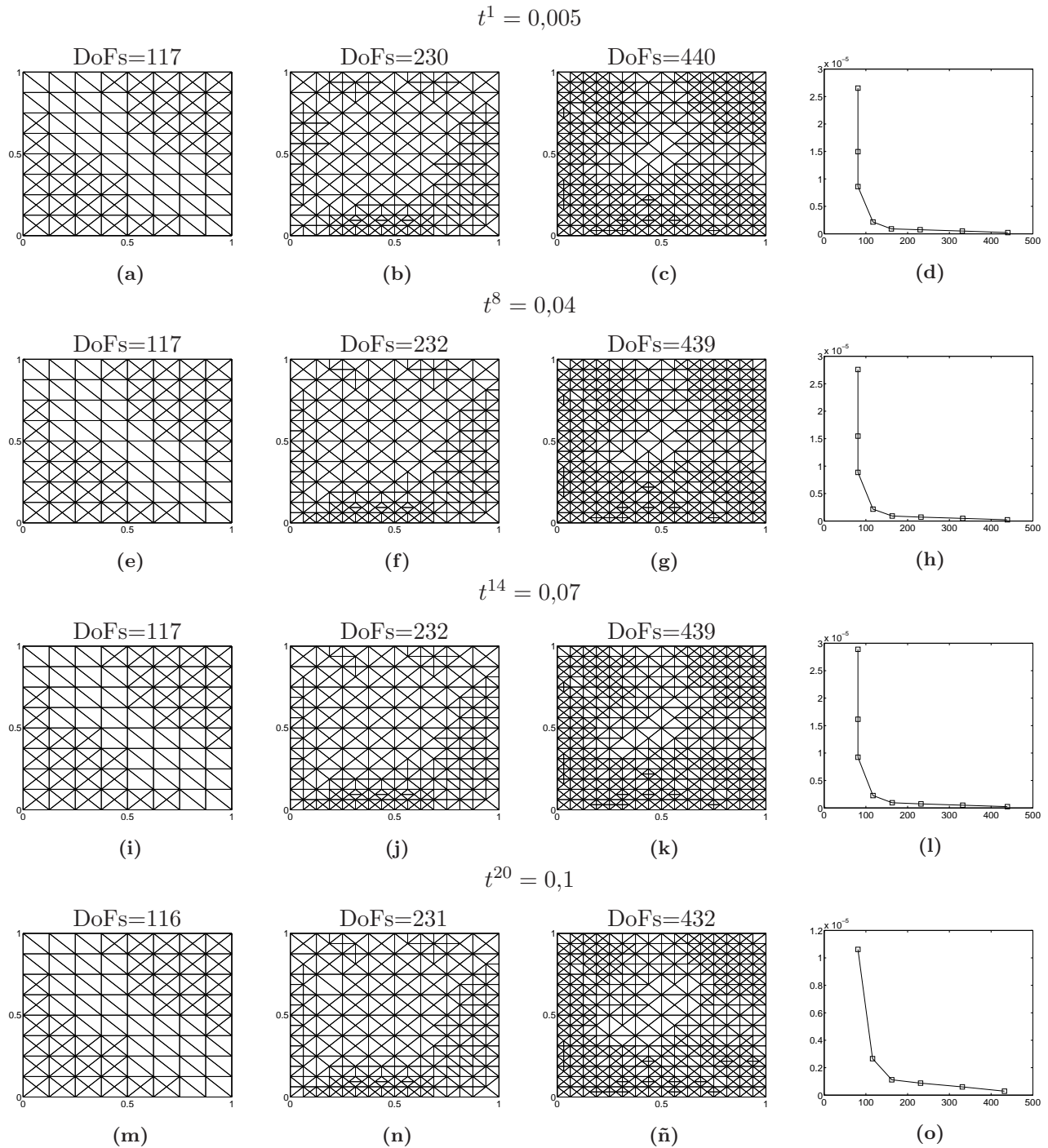


Figura 6.23: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,005$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^8 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{14} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{20} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,005$, $t^8 = 0,04$, $t^{14} = 0,07$ y $t^{20} = 0,1$, respectivamente.

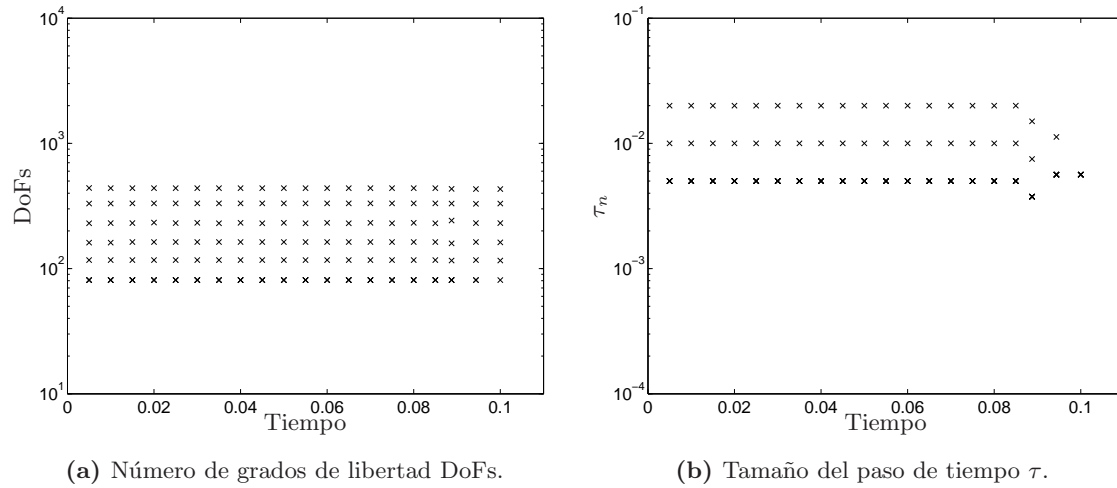
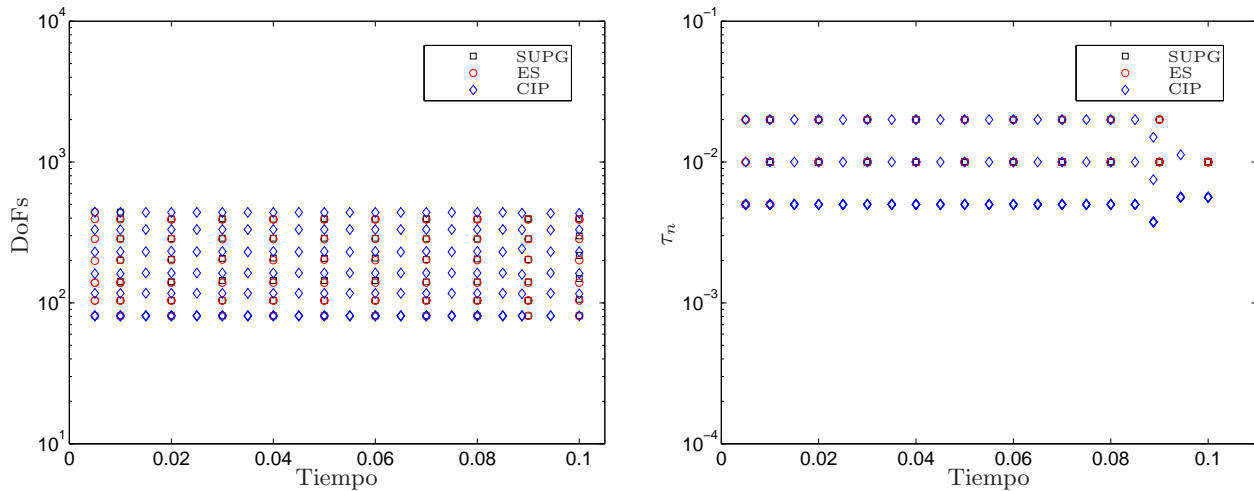


Figura 6.24: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.1.4. Comparación entre esquemas de estabilización

Como fue previsto, la solución obtenida presenta un comportamiento suave. Esto puede verse reflejado en el hecho de que los tres esquemas tiene un promedio de 6 refinaciones espaciales y un máximo de 441, 441 y 440 DoFs para los esquemas SUPG, ES y CIP, respectivamente; dicha comparación puede verse a través de la figura 6.25a y las tablas 6.7, 6.8 y 6.9. Además a través de las figuras 6.19, 6.21 y 6.23 es posible notar que la refinación de la malla se distribuye en todo el dominio, sin concentrarse en alguna zona específica debido a que no existe la presencia de una capa límite o de otro comportamiento irregular donde la función solución no sea suave. Por otro lado, con respecto a la refinación temporal, el comportamiento entre los esquemas SUPG y ES es idéntico mientras que el esquema CIP necesita una refinación temporal más que los otros esquemas para alcanzar los parámetros de tolerancia, por lo que genera el doble de nodos temporales y a la vez pasos de tiempo de la mitad del tamaño, lo que puede apreciarse en la figura 6.25b. De todas maneras, dado que la función solución presenta un comportamiento suave en la variable temporal, la naturaleza del algoritmo es similar a la de una refinación uniforme, generando pasos de tiempo del mismo tamaño en la mayoría de los nodos temporales.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

Figura 6.25: Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

En términos del error generado, podemos ver que SUPG genera el mayor error mientras que CIP el menor, pero que la diferencia entre ambos es aproximadamente igual a 0,0005. La figura 6.26 muestra la diferencia puntual entre la solución real del problema u y la solución numérica $u_{h\tau}$ en el tiempo final $t = 0,1$, de donde se puede apreciar que nuevamente, el esquema CIP muestra una mayor diferencia puntual con la solución real. Podemos ver que cualitativamente este caso es similar al ejemplo 1, lo que se refleja en la similitud de las figuras 6.15 y 6.26.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$1,69064876 \times 10^{-3}$	$2,85829321 \times 10^{-6}$
ES	$1,39745125 \times 10^{-3}$	$1,92528700 \times 10^{-6}$
CIP	$1,15504509 \times 10^{-3}$	$1,33412916 \times 10^{-6}$

Cuadro 6.10: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

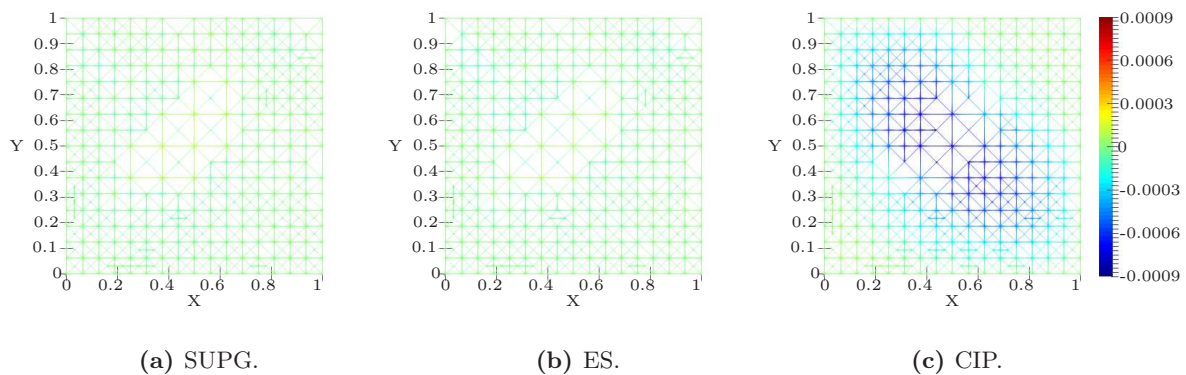


Figura 6.26: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 0,03531$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

6.2.2. Caso $\varepsilon = 0,1$

Para este caso, los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.11 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 310,439976$, mientras que la condición inicial se presenta en la figura 6.27.

TOL_0^2	$TOL_{P_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{P_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
10^{-7}	310,439976	10^{-4}	5×10^{-3}	$1,25 \times 10^{-5}$	10^2	1	10^2	10	1	10^{-1}

Cuadro 6.11: Tolerancias y parámetros.

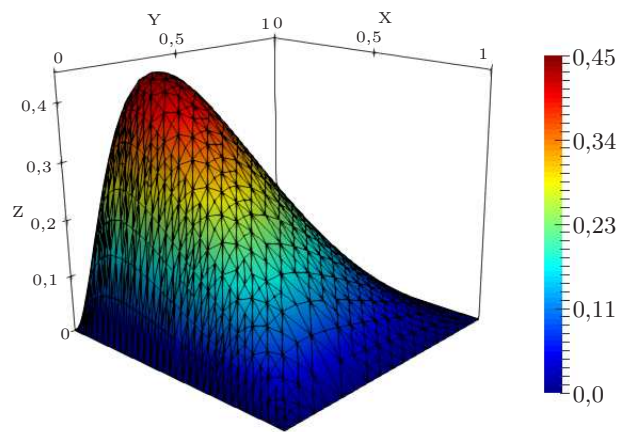


Figura 6.27: Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 2106 elementos y 1124 DoFs.

En este caso, la disminución del parámetro de perturbación genera los primeros indicios de capa límite en la función solución cercano a los conjuntos antes nombrados. A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de estabilización utilizados.

6.2.2.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,64730468 \times 10^{-4}$. El cuadro 6.12 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	1114	0,0019938	0,00021984	$3,9192 \times 10^{-7}$
2	0,02	0,01	1119	0	$6,2672 \times 10^{-5}$	$3,9983 \times 10^{-7}$
3	0,03	0,01	1109	0,00065064	$6,2598 \times 10^{-5}$	$4,0791 \times 10^{-7}$
4	0,04	0,01	1111	0	$7,0489 \times 10^{-5}$	$4,1615 \times 10^{-7}$
5	0,05	0,01	1110	$8,5665 \times 10^{-5}$	$6,5686 \times 10^{-5}$	$4,2456 \times 10^{-7}$
6	0,06	0,01	1111	0	$6,785 \times 10^{-5}$	$4,3313 \times 10^{-7}$
7	0,07	0,01	1110	$8,8479 \times 10^{-5}$	$6,975 \times 10^{-5}$	$4,4188 \times 10^{-7}$
8	0,08	0,01	1111	0	$7,176 \times 10^{-5}$	$4,5081 \times 10^{-7}$
9	0,09	0,01	1110	$9,1437 \times 10^{-5}$	$7,355 \times 10^{-5}$	$4,5992 \times 10^{-7}$
10	0,1	0,01	1111	0	$7,5497 \times 10^{-5}$	$4,6921 \times 10^{-7}$

Cuadro 6.12: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinación, tiempo y oscilación temporal.

La figura 6.28 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n mientras que la figura 6.29 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.29a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.29b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

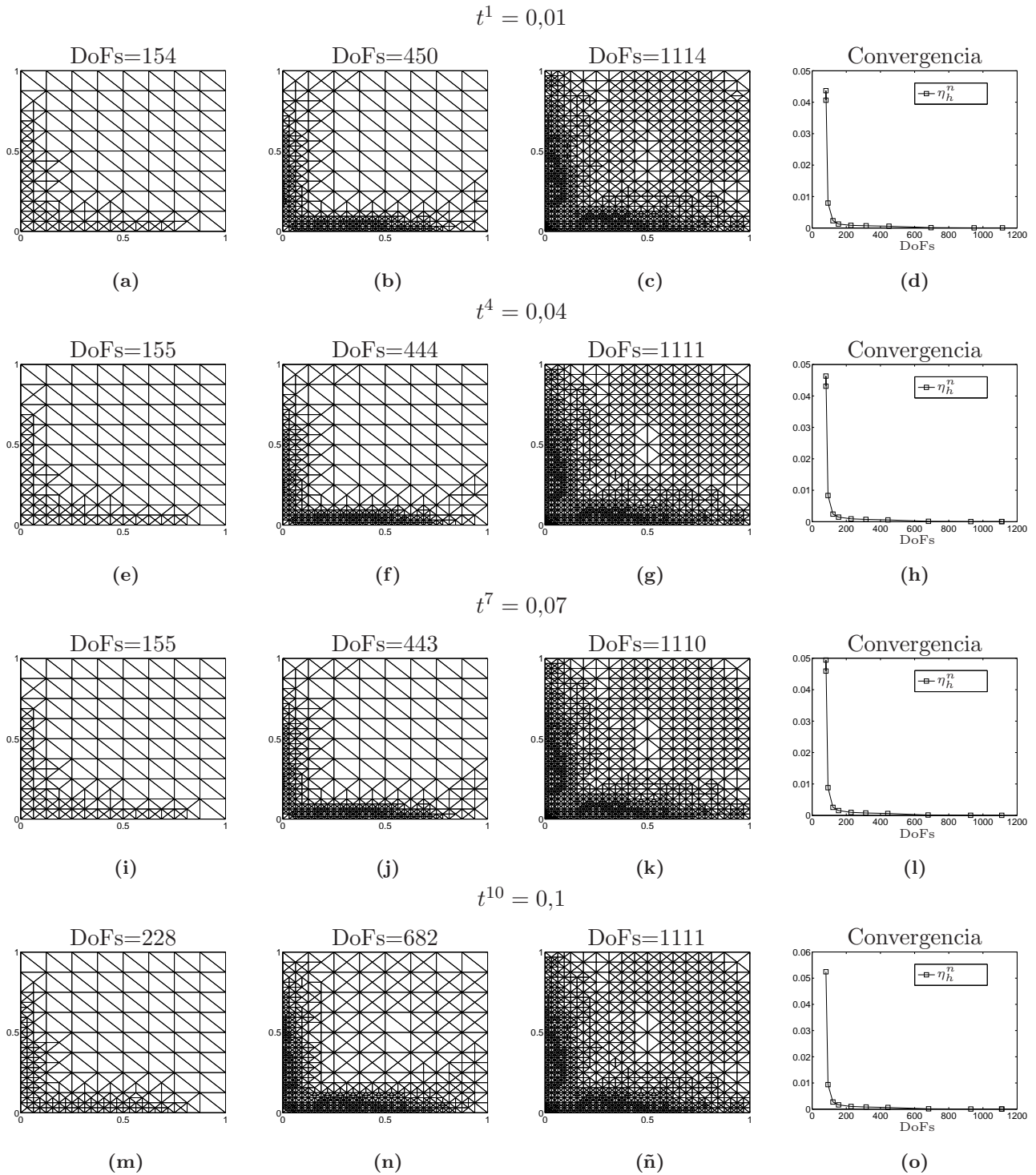


Figura 6.28: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^2 en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

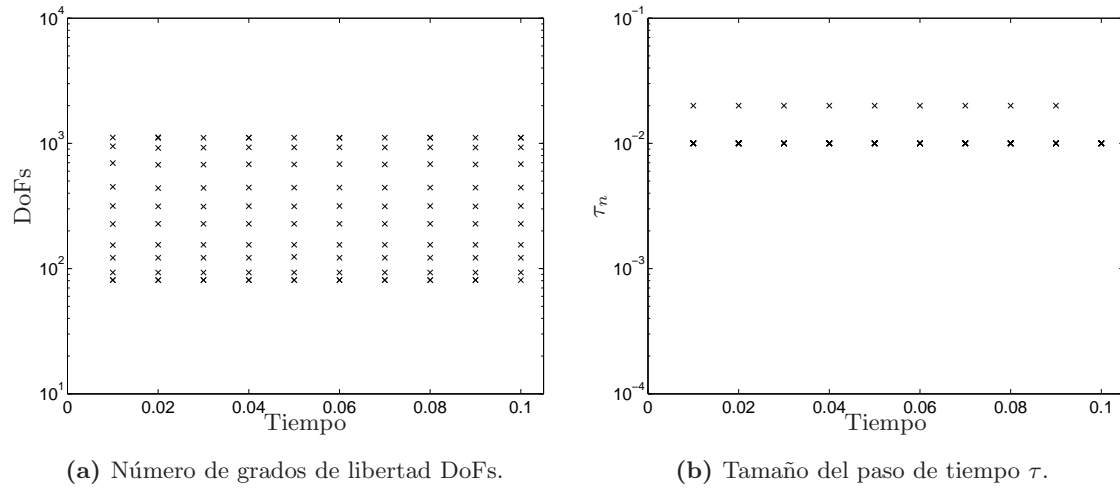


Figura 6.29: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.2.2. ES

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 9,20325956 \times 10^{-5}$. El cuadro 6.13 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,0025	0,0025	1114	0,00049845	$5,2835 \times 10^{-5}$	$6,0779 \times 10^{-9}$
4	0,01	0,0025	1119	0	$9,1731 \times 10^{-7}$	$6,1697 \times 10^{-9}$
8	0,02	0,0025	1119	0	$9,0196 \times 10^{-7}$	$6,2944 \times 10^{-9}$
12	0,03	0,0025	1119	0	$9,4715 \times 10^{-7}$	$6,4215 \times 10^{-9}$
16	0,04	0,0025	1119	0	$9,8744 \times 10^{-7}$	$6,5513 \times 10^{-9}$
20	0,05	0,0025	1119	0	$1,0236 \times 10^{-6}$	$6,6836 \times 10^{-9}$
24	0,06	0,0025	1119	0	$1,057 \times 10^{-6}$	$6,8186 \times 10^{-9}$
28	0,07	0,0025	1119	0	$1,0886 \times 10^{-6}$	$6,9564 \times 10^{-9}$
32	0,08	0,0025	1119	0	$1,1191 \times 10^{-6}$	$7,0969 \times 10^{-9}$
36	0,089951	0,0033496	1119	0	$2,7206 \times 10^{-6}$	$1,7398 \times 10^{-8}$
40	0,1	0,0028262	1119	0	$1,6937 \times 10^{-6}$	$1,0668 \times 10^{-8}$

Cuadro 6.13: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.30 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n mientras que la figura 6.31 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.31a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.31b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

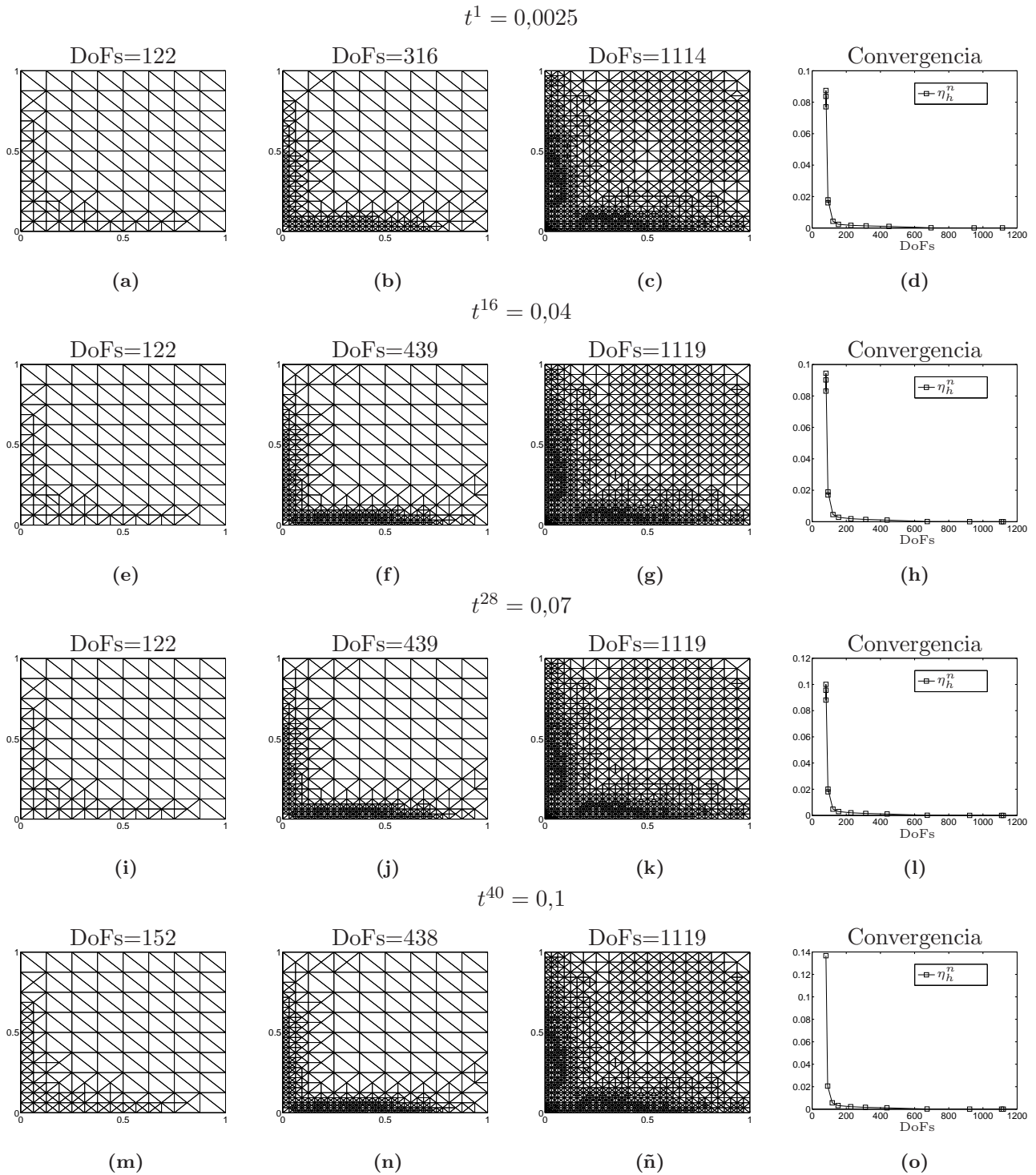


Figura 6.30: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,0025$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{16} = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{28} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{40} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,0025$, $t^{16} = 0,04$, $t^{28} = 0,07$ y $t^{40} = 0,1$, respectivamente.

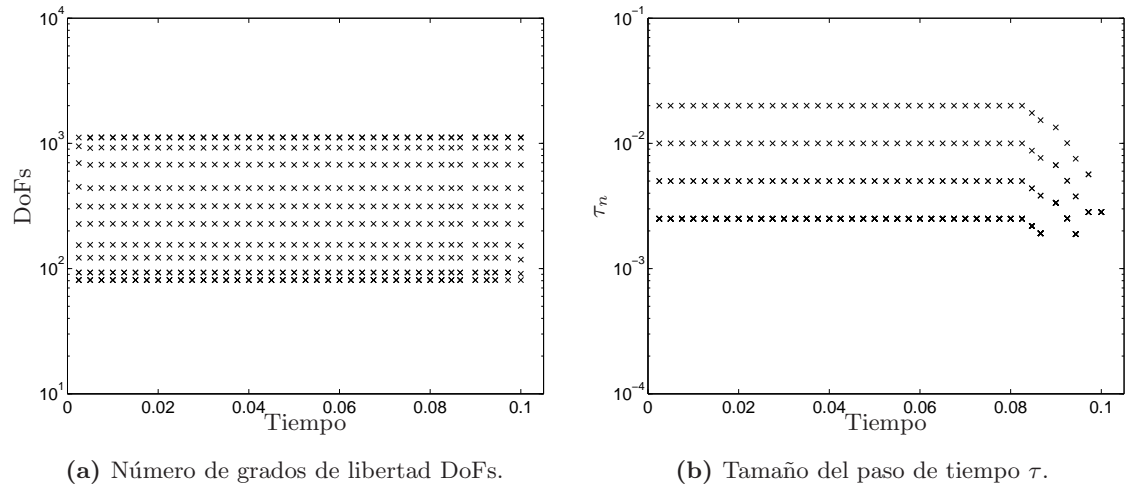


Figura 6.31: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.2.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,77817042 \times 10^{-4}$. El cuadro 6.14 presenta el mismo detalle de los casos anteriores.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,0025	0,0025	1114	0,00049845	0,00013028	$6,0779 \times 10^{-9}$
4	0,01	0,0025	1112	0	$6,5693 \times 10^{-6}$	$6,1697 \times 10^{-9}$
8	0,02	0,0025	1112	0	$1,4829 \times 10^{-6}$	$6,2944 \times 10^{-9}$
12	0,03	0,0025	1111	0	$1,2477 \times 10^{-6}$	$6,4215 \times 10^{-9}$
16	0,04	0,0025	1106	0	$1,2958 \times 10^{-6}$	$6,5513 \times 10^{-9}$
20	0,05	0,0025	1107	0	$7,503 \times 10^{-7}$	$6,6836 \times 10^{-9}$
24	0,06	0,0025	1107	0	$7,3089 \times 10^{-7}$	$6,8186 \times 10^{-9}$
28	0,07	0,0025	1107	0	$7,4714 \times 10^{-7}$	$6,9564 \times 10^{-9}$
32	0,08	0,0025	1107	0	$7,7222 \times 10^{-7}$	$7,0969 \times 10^{-9}$
35	0,090156	0,0032812	1107	0	$1,7939 \times 10^{-6}$	$1,6362 \times 10^{-8}$
38	0,1	0,0036914	1108	0	$2,6309 \times 10^{-6}$	$2,3751 \times 10^{-8}$

Cuadro 6.14: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.32 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . La figura 6.33 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.33a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.33b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

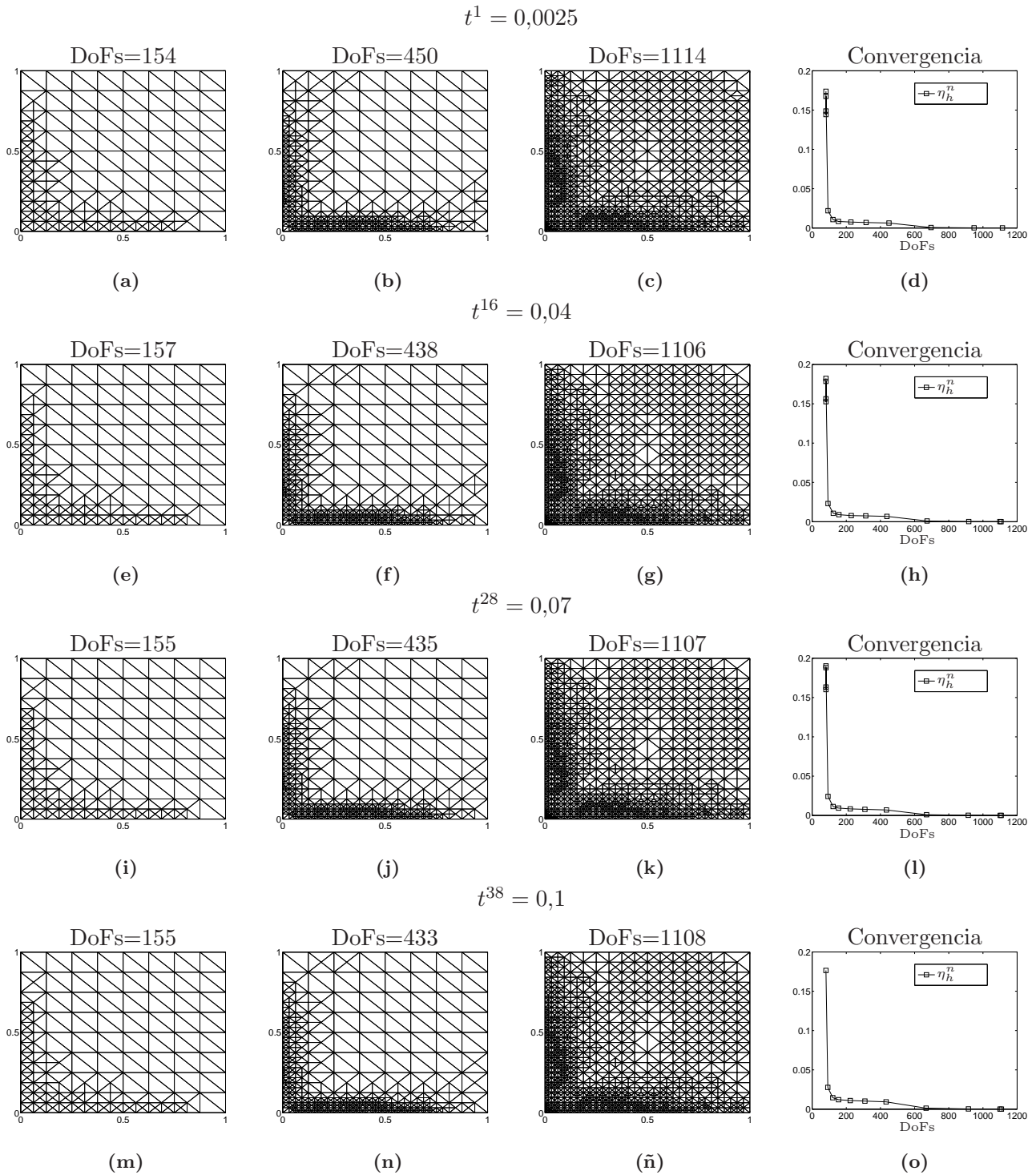


Figura 6.32: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,0025$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{16} = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{28} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{38} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,0025$, $t^{16} = 0,04$, $t^{28} = 0,07$ y $t^{38} = 0,1$, respectivamente.

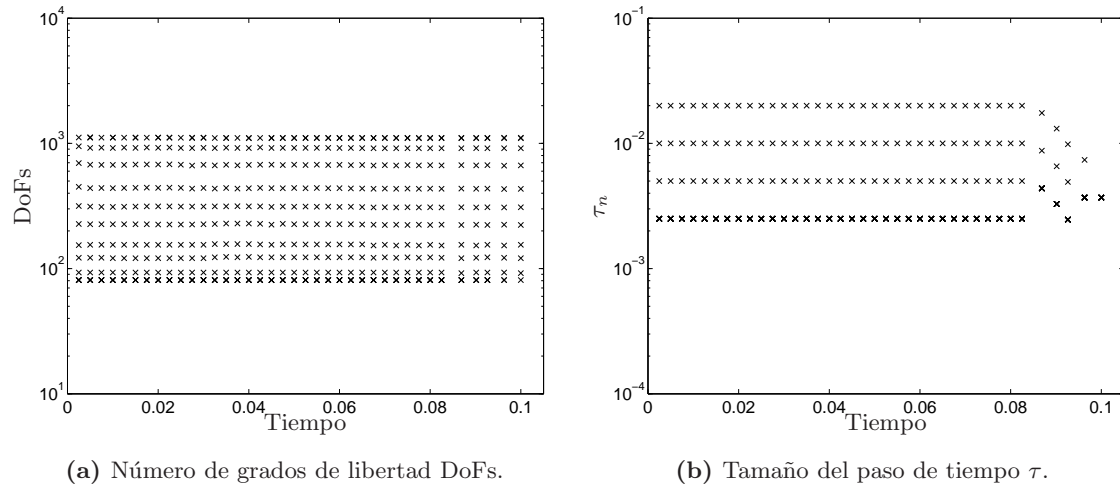
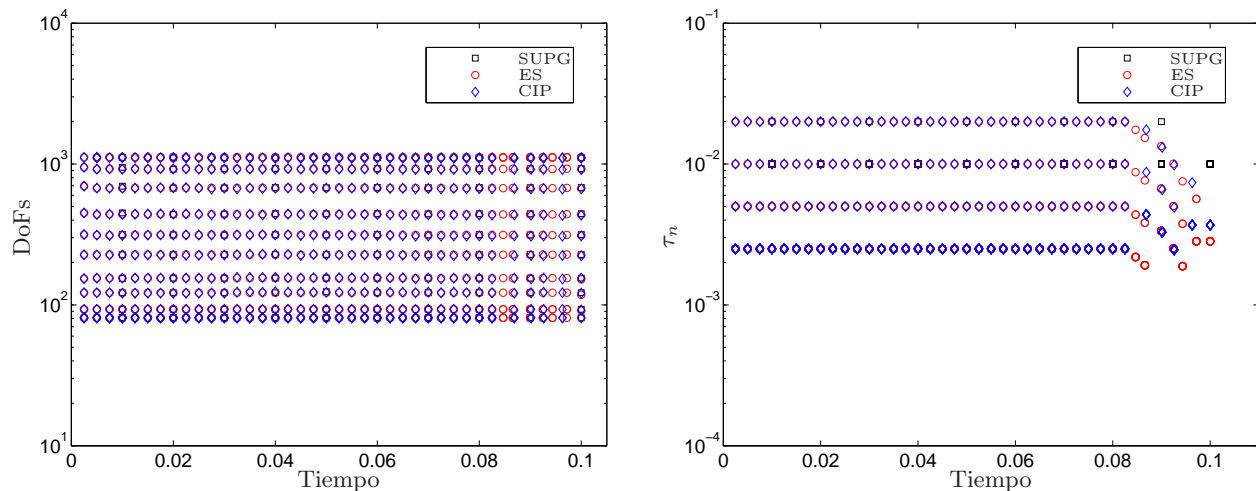


Figura 6.33: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.2.4. Comparación entre esquemas de estabilización

Para este caso del parámetro de perturbación comienza a aparecer el comportamiento de capa límite esperado, lo que se traduce en la necesidad de una mayor cantidad de grados de libertad para aproximar la solución y cumplir los parámetros de tolerancia. Como puede apreciarse en la figura 6.34a, tanto SUPG, como ES y CIP necesitan en promedio 10 refinaciones espaciales y un máximo de 1119, 1119 y 1114 DoFs, respectivamente, lo que en términos de grados de libertad, es más del doble de lo necesario para aproximar la solución en el caso $\varepsilon = 1$. Además, a través de las figuras 6.28, 6.30 y 6.32 es claro como la refinación comienza a concentrarse en las capas límites. Por otro lado, mientras que para el esquema SUPG, la refinación temporal es muy similar al caso anterior, estableciendo un paso de tiempo uniforme e igual a $\tau_n = 0,01$, para los esquemas ES y CIP es necesario una mayor refinación temporal, estableciendo un paso de tiempo igual a $\tau_n = 0,0025$ en la mayoría de los nodos temporales, y como consecuencia, generando el cuádruple de nodos temporales. De todas formas, la naturaleza de refinación temporal uniforme se mantiene en los 3 esquemas, lo que es consecuencia del comportamiento suave de variable temporal.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

Figura 6.34: Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

Con respecto al error obtenido en cada esquema (cuadro 6.15), CIP es quien alcanza el mayor error lo que se ve reflejado en la diferencia puntual presentada en la figura 6.35c, mientras que ES es el esquema con menor error.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$1,28347368 \times 10^{-2}$	$1,64730468 \times 10^{-4}$
ES	$9,59336206 \times 10^{-3}$	$9,20325956 \times 10^{-5}$
CIP	$1,33348057 \times 10^{-2}$	$1,77817042 \times 10^{-4}$

Cuadro 6.15: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

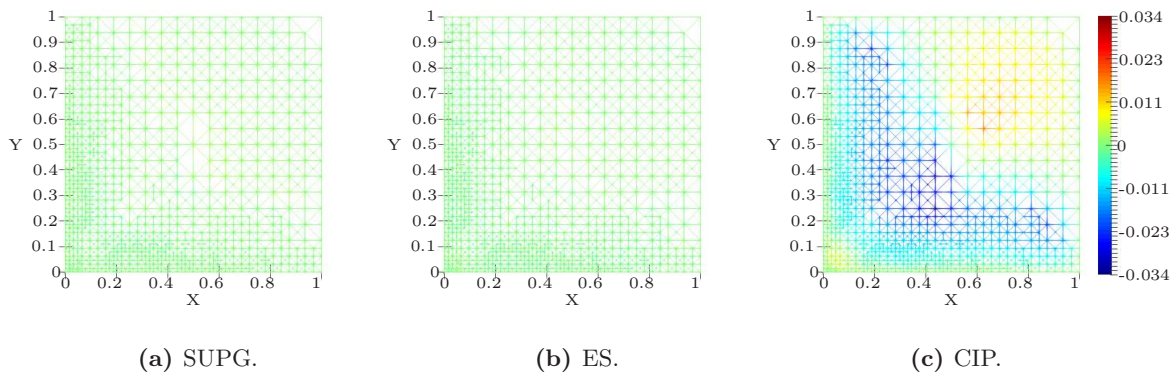


Figura 6.35: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 17,61931$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

6.2.3. Caso $\varepsilon = 0,01$

Para este caso, los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.16 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 11256,57341$, mientras que la condición inicial se presenta en la Figura 6.36.

TOL_0^2	$TOL_{P_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{P_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
10^{-6}	11256,4	10^{-1}	1	$1,25 \times 10^{-3}$	1	1	1	1	1	1

Cuadro 6.16: Tolerancias y parámetros.

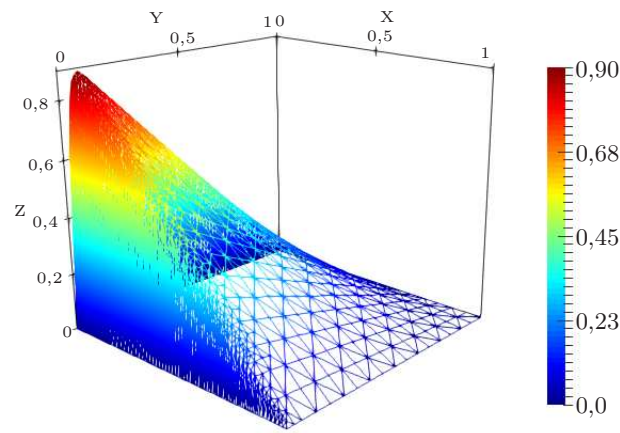


Figura 6.36: Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 2586 elementos y 1444 DoFs.

Para este y el siguiente valor del parámetro de perturbación es clara la aparición de las capas límites cercanas a los conjuntos previamente nombrados. A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de estabilización utilizados.

6.2.3.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,08705067 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.17 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_f^n)^2$
1	0,01	0,01	1472	0,021873	0,065109	$6,2129 \times 10^{-5}$
2	0,02	0,01	1475	0	0,0069342	$6,3384 \times 10^{-5}$
3	0,03	0,01	1478	0	0,004201	$6,4664 \times 10^{-5}$
4	0,04	0,01	1481	0	0,0033981	$6,597 \times 10^{-5}$
5	0,05	0,01	1481	0	0,0028075	$6,7303 \times 10^{-5}$
6	0,06	0,01	1481	0	0,0025378	$6,8663 \times 10^{-5}$
7	0,07	0,01	1481	0	0,0023744	$7,005 \times 10^{-5}$
8	0,08	0,01	1481	0	0,0022785	$7,1465 \times 10^{-5}$
9	0,09	0,01	1481	0	0,0022252	$7,2909 \times 10^{-5}$
10	0,1	0,01	1481	0	0,0021977	$7,4381 \times 10^{-5}$

Cuadro 6.17: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

La figura 6.37 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n y a continuación, la figura 6.38 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.38a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.38b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

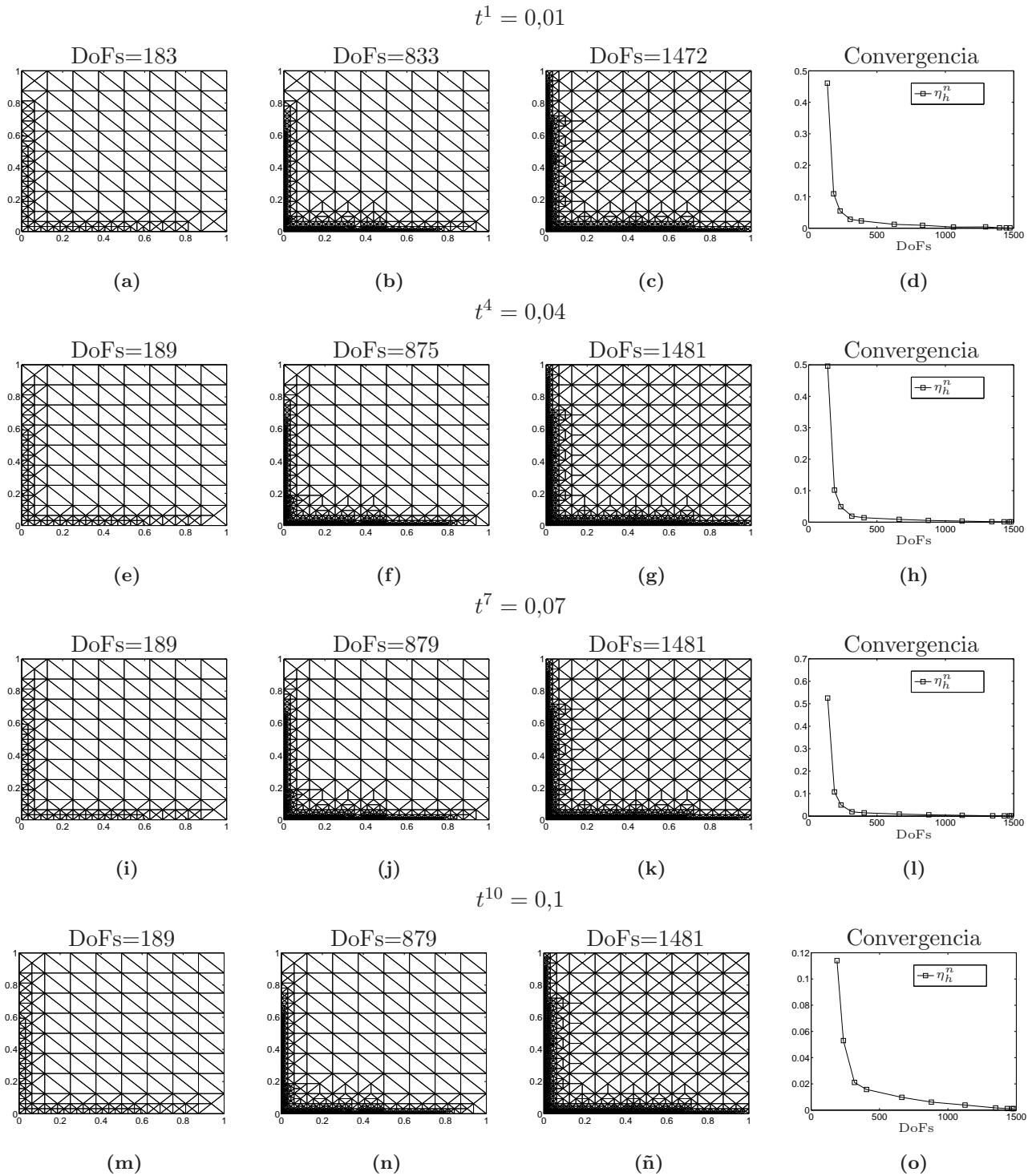


Figura 6.37: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

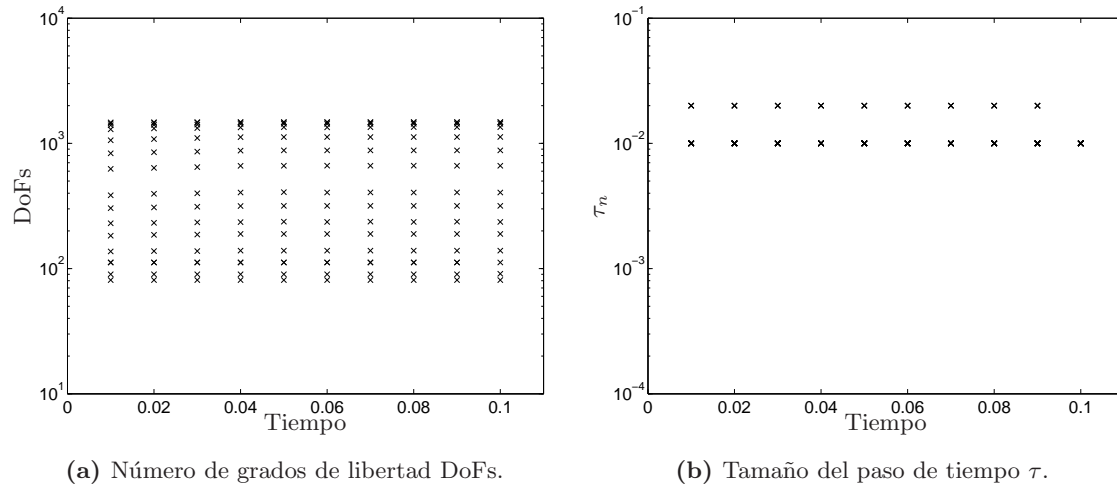


Figura 6.38: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.3.2. ES

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,06054920 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.18 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,005	0,005	1471	0,004411	0,022208	$7,7273 \times 10^{-6}$
2	0,01	0,005	1476	0	0,0021232	$7,805 \times 10^{-6}$
4	0,02	0,005	1477	0	0,00025124	$7,9626 \times 10^{-6}$
6	0,03	0,005	1477	0	0,00010012	$8,1235 \times 10^{-6}$
8	0,04	0,005	1477	0	0,0001044	$8,2876 \times 10^{-6}$
10	0,05	0,005	1477	0	0,00011615	$8,455 \times 10^{-6}$
12	0,06	0,005	1477	0	0,00012687	$8,6258 \times 10^{-6}$
14	0,07	0,005	1477	0	0,00013592	$8,8001 \times 10^{-6}$
16	0,08	0,005	1477	0	0,00014365	$8,9778 \times 10^{-6}$
18	0,08875	0,00375	1477	0	$6,8601 \times 10^{-5}$	$3,8592 \times 10^{-6}$
20	0,1	0,005625	1477	0	0,00021613	$1,3296 \times 10^{-5}$

Cuadro 6.18: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.39 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . La figura 6.40 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.40a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.40b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

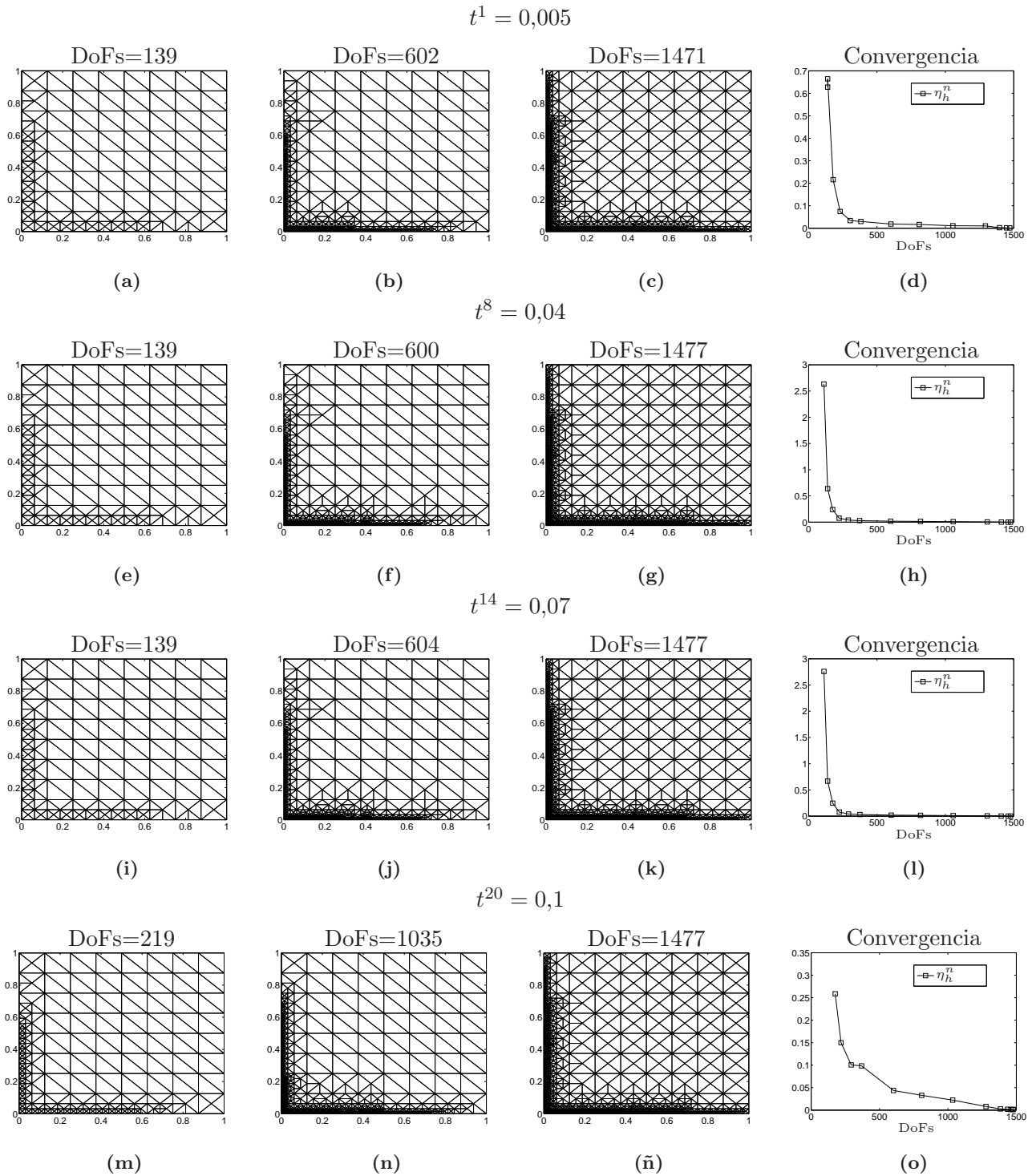


Figura 6.39: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,005$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^8 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{14} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{20} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,005$, $t^8 = 0,04$, $t^{14} = 0,07$ y $t^{20} = 0,1$, respectivamente.

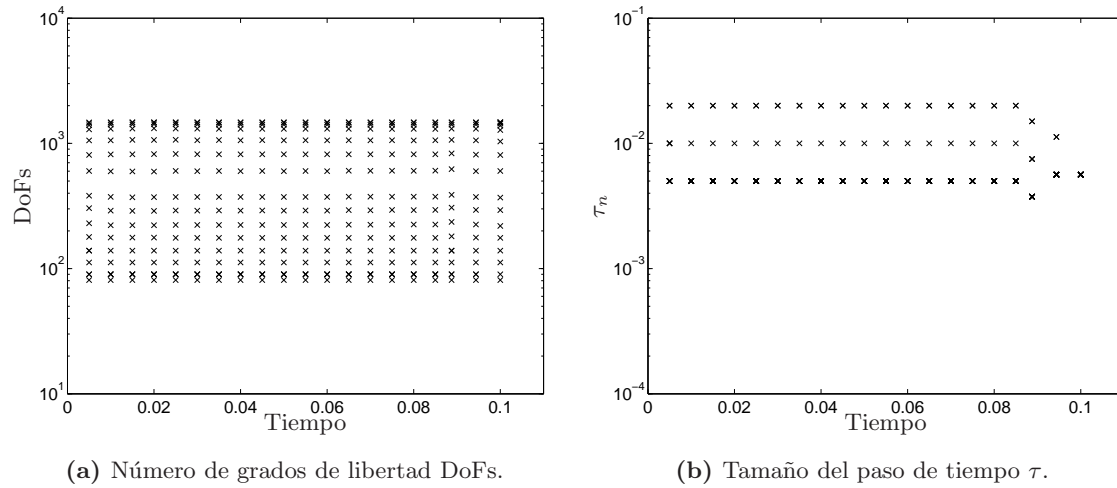


Figura 6.40: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.3.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 1,01459363 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.19 presenta el mismo detalle de los casos anteriores.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	1637	0	0,027004	$6,2129 \times 10^{-5}$
2	0,02	0,01	1642	0,0093528	0,0028946	$6,3384 \times 10^{-5}$
3	0,03	0,01	1643	0	0,0012797	$6,4664 \times 10^{-5}$
4	0,04	0,01	1645	0	0,0012293	$6,597 \times 10^{-5}$
5	0,05	0,01	1645	0	0,0011737	$6,7303 \times 10^{-5}$
6	0,06	0,01	1645	0	0,0012113	$6,8663 \times 10^{-5}$
7	0,07	0,01	1645	0	0,0012451	$7,005 \times 10^{-5}$
8	0,08	0,01	1645	0	0,0012752	$7,1465 \times 10^{-5}$
9	0,09	0,01	1645	0	0,0013033	$7,2909 \times 10^{-5}$
10	0,1	0,01	1645	0	0,0013307	$7,4381 \times 10^{-5}$

Cuadro 6.19: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.41 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . La figura 6.42 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.42a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.42b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

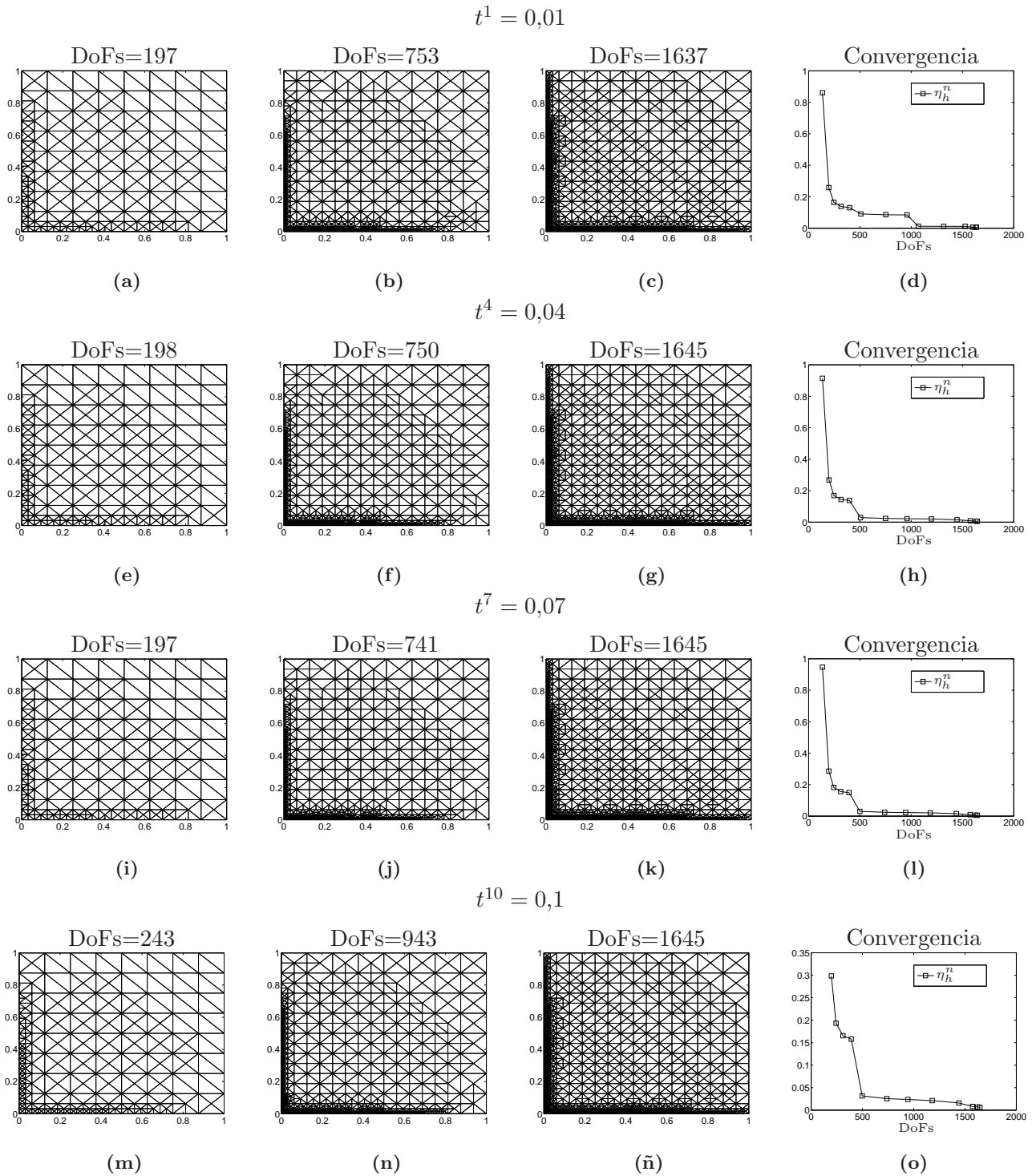


Figura 6.41: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

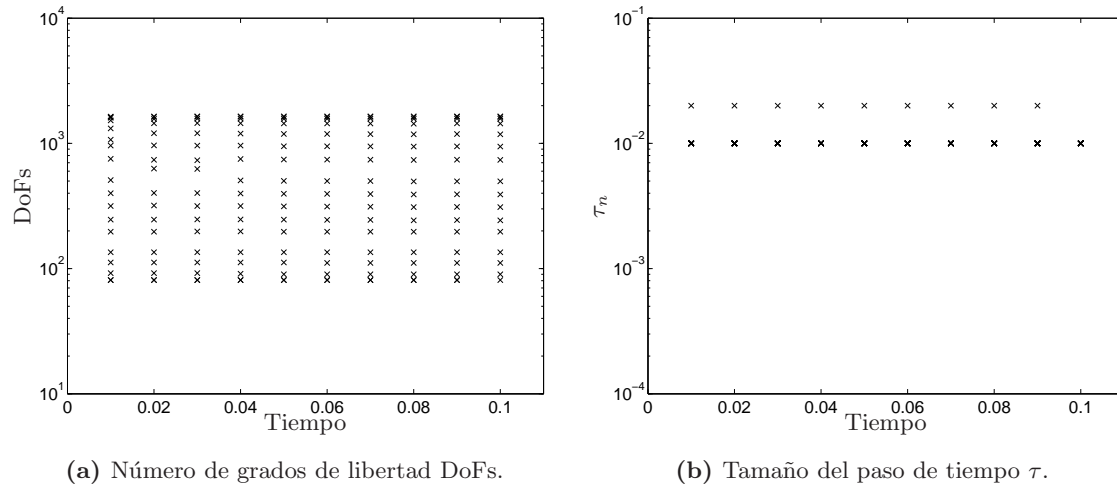
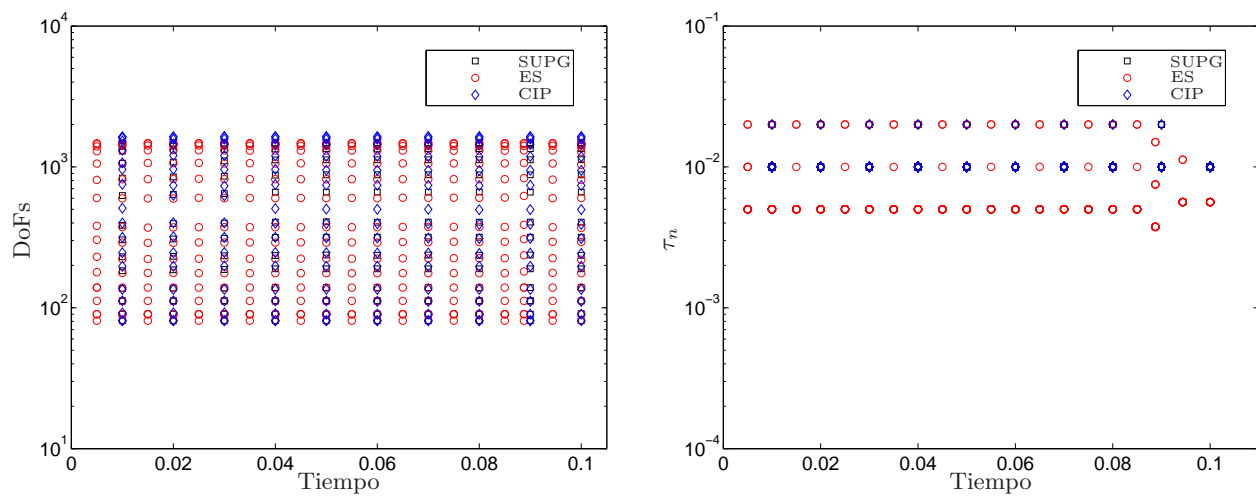


Figura 6.42: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.3.4. Comparación entre esquemas de estabilización

En este caso, la figuras 6.37, 6.39 y 6.41 muestran claramente la concentración de la refinación en las capas límites. De la misma forma, la figura 6.43a muestra que para los tres esquemas la cantidad de refinaciones espaciales en cada nodo es en promedio de 17 refinaciones con máximo de 1481, 1477 y 1645 DoFs para los esquemas SUPG, ES y CIP, respectivamente. Por otro lado, la figura 6.43b muestra que los esquemas SUPG y CIP generan un paso de tiempo uniforme igual a $\tau_n = 0,1$ mientras que el esquema ES también genera un comportamiento uniforme con la mayoría de los pasos de tiempo iguales a $\tau_n = 0,005$ y como consecuencia, el doble de nodos temporales en comparación con los otros esquemas.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

Figura 6.43: Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

A través de la figura 6.44 podemos ver como en el tiempo final los esquemas SUPG y ES aproximan de buena manera fuera de las capas límites, mientras que en ellas, SUPG sobrestima mientras que ES y CIP subestiman. Si bien, gráficamente CIP pareciera presentar una mejor aproximación de la solución en las capas límites, la aproximación en el resto del dominio no es tan buena como en los otros esquemas.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$3,29704515 \times 10^{-2}$	$1,08705067 \times 10^{-3}$
ES	$3,25660744 \times 10^{-2}$	$1,06054920 \times 10^{-3}$
CIP	$3,18526865 \times 10^{-2}$	$1,01459363 \times 10^{-3}$

Cuadro 6.20: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

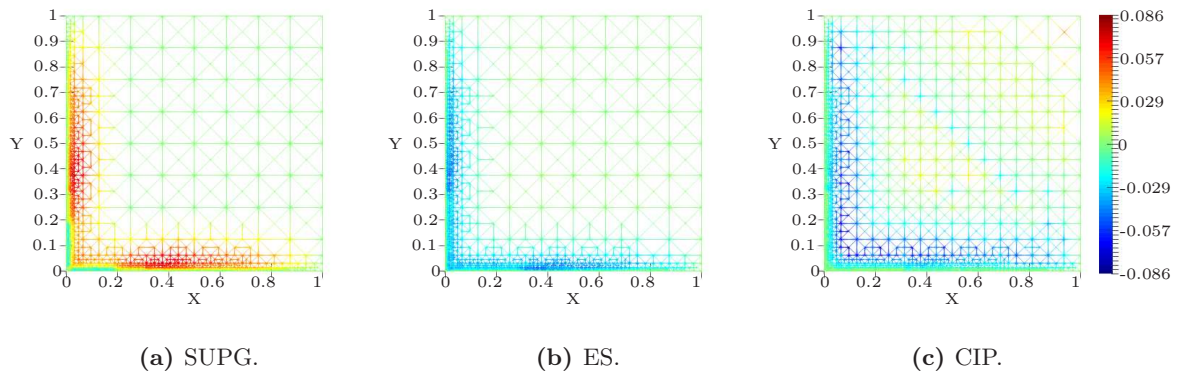


Figura 6.44: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 106,097$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

6.2.4. Caso $\varepsilon = 0,001$

Para este caso, los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.21 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 998262$, mientras que la condición inicial se presenta en la figura 6.45.

TOL_0^2	$TOL_{P_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{P_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
5×10^{-6}	998261	5×10^{-2}	15	$2,78 \times 10^{-3}$	10^{-1}	1	10^{-1}	1	10^{-1}	1

Cuadro 6.21: Tolerancias y parámetros.

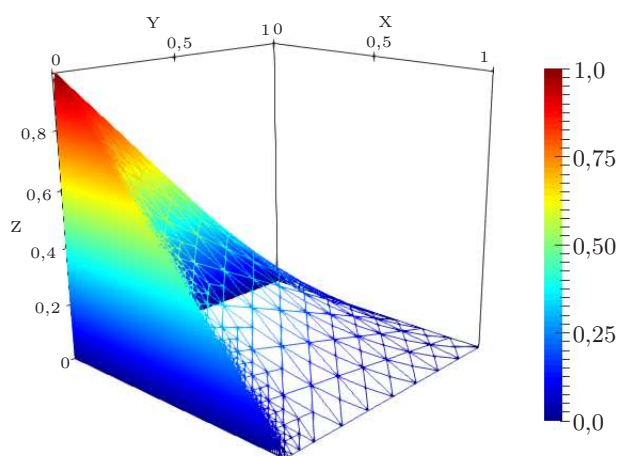


Figura 6.45: Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 5576 elementos y 3226 DoFs.

Bajo este valor del parámetro de perturbación es dónde más claramente se ve la presencia de capas límites cercanas a los conjuntos previamente nombrados. A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de estabilización utilizados.

6.2.4.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 4,86967843 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.22 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	3165	3,8791	5,8149	0,00058158
2	0,02	0,01	3164	0,15686	0,1593	0,00059333
3	0,03	0,01	4787	0,043291	11,9788	0,00060532
4	0,04	0,01	4790	0	0,064803	0,00061755
5	0,05	0,01	4791	0	0,040035	0,00063002
6	0,06	0,01	4791	0	0,03574	0,00064275
7	0,07	0,01	4791	0	0,033849	0,00065573
8	0,08	0,01	4791	0	0,032708	0,00066898
9	0,09	0,01	4791	0	0,031976	0,00068249
10	0,1	0,01	6199	0,35936	4,3088	0,00069628

Cuadro 6.22: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

La figura 6.46 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . A continuación la figura 6.47 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación. Luego, la figura 6.48 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.48a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.48b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

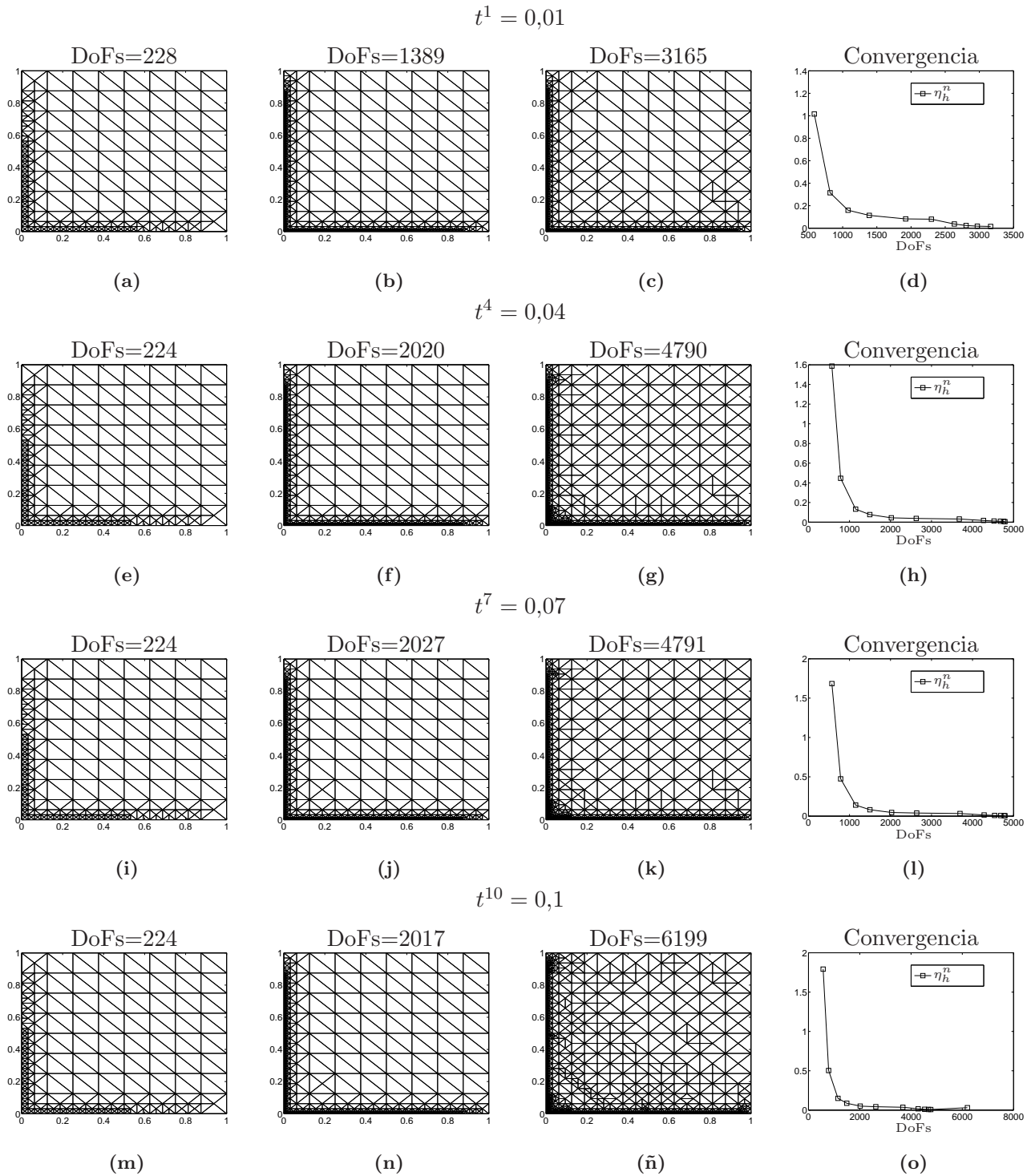


Figura 6.46: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

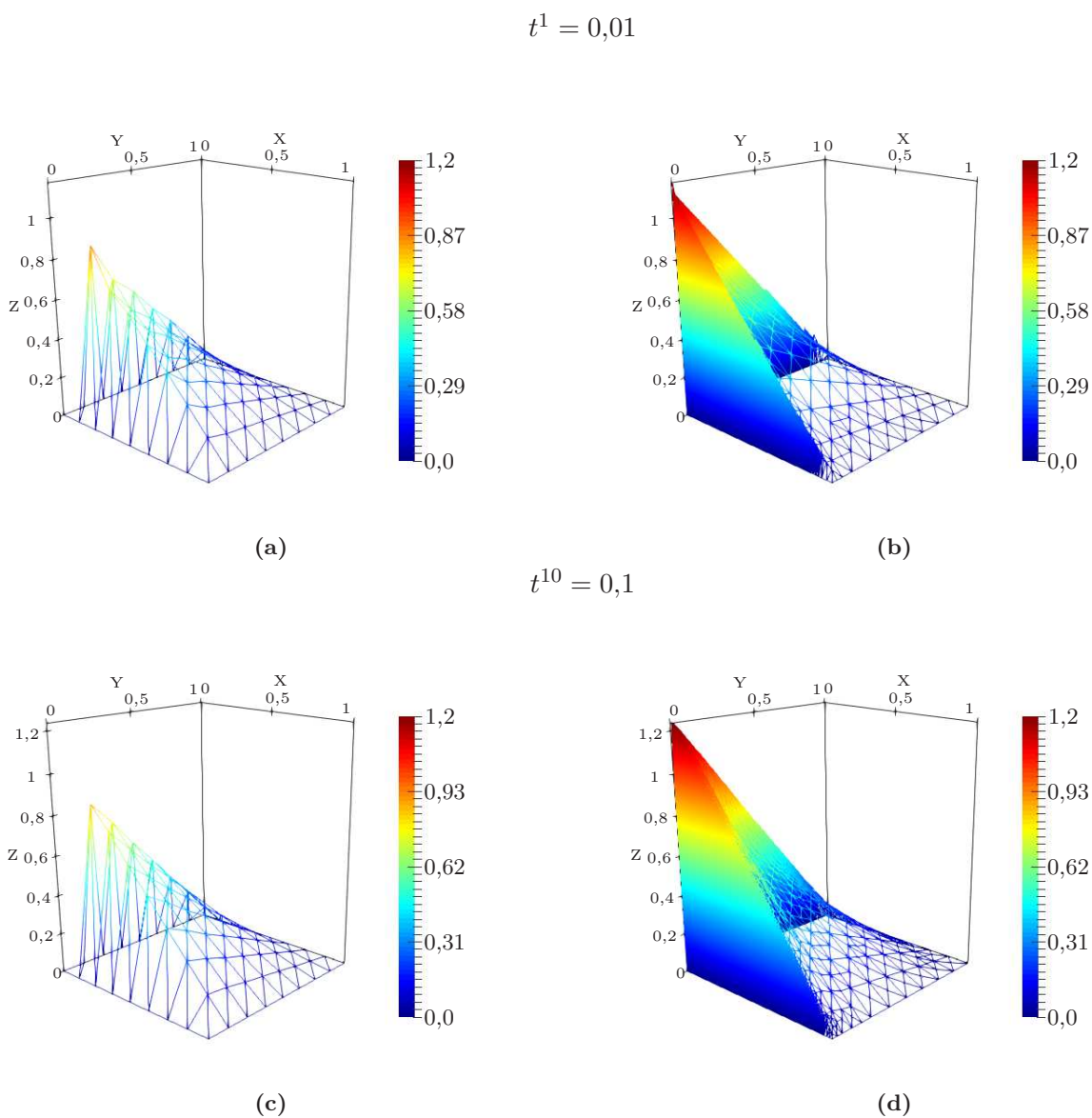
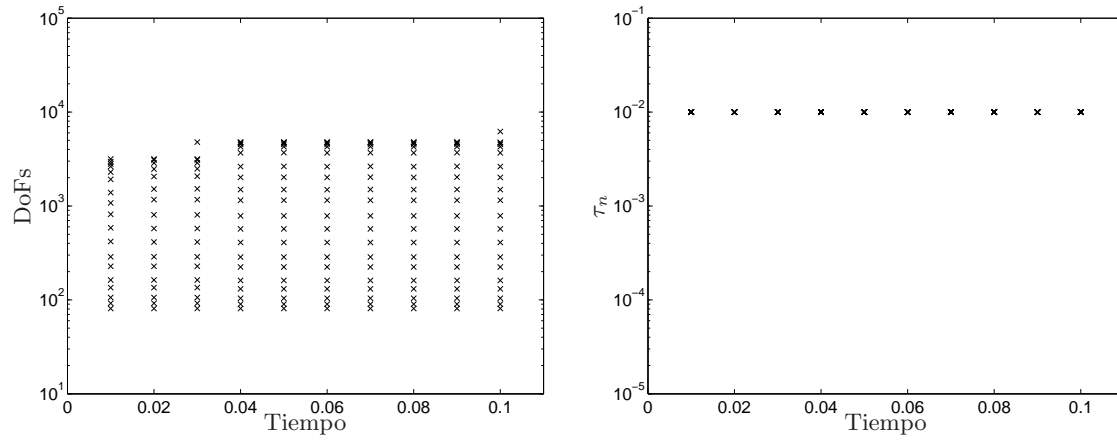


Figura 6.47: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,01$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,01$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{10} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{10} = 0,1$.



(a) Número de grados de libertad DoFs.

(b) Tamaño del paso de tiempo τ .

Figura 6.48: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.4.2. ES

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 3,61807620 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.23 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,005	0,005	3162	2,1726	4,3916	$8,3392 \times 10^{-5}$
2	0,01	0,005	3886	0	0,87506	$8,423 \times 10^{-5}$
3	0,02	0,01	3959	0,39429	0,83741	0,00059333
4	0,03	0,01	6653	1,0441	4,5016	0,00060532
5	0,035	0,005	8048	0,003301	0,51546	$8,8548 \times 10^{-5}$
6	0,04	0,005	9003	0,00022914	0,25016	$8,9438 \times 10^{-5}$
7	0,045	0,005	11798	0,01629	1,0273	$9,0337 \times 10^{-5}$
8	0,05	0,005	12214	0,0098217	0,23447	$9,1245 \times 10^{-5}$
9	0,055	0,005	12277	0,017805	0,022265	$9,2162 \times 10^{-5}$
10	0,06	0,005	12835	0,0035708	0,13785	$9,3088 \times 10^{-5}$
11	0,065	0,005	13290	0,036521	0,17504	$9,4024 \times 10^{-5}$
12	0,07	0,005	13349	0	0,0088624	$9,4969 \times 10^{-5}$
13	0,075	0,005	13600	0,0205	0,081001	$9,5923 \times 10^{-5}$
14	0,08	0,005	17339	0,010414	0,45468	$9,6888 \times 10^{-5}$
15	0,085	0,005	17678	$2,9816 \times 10^{-5}$	0,035143	$9,7861 \times 10^{-5}$
16	0,09	0,005	17730	$4,078 \times 10^{-5}$	0,0054196	$9,8845 \times 10^{-5}$
17	0,095	0,005	17757	$2,8549 \times 10^{-5}$	0,0039271	$9,9838 \times 10^{-5}$
18	0,1	0,005	17780	0,0017008	0,0034104	$8,7471 \times 10^{-5}$

Cuadro 6.23: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.49 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . A continuación la figura 6.50 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación.

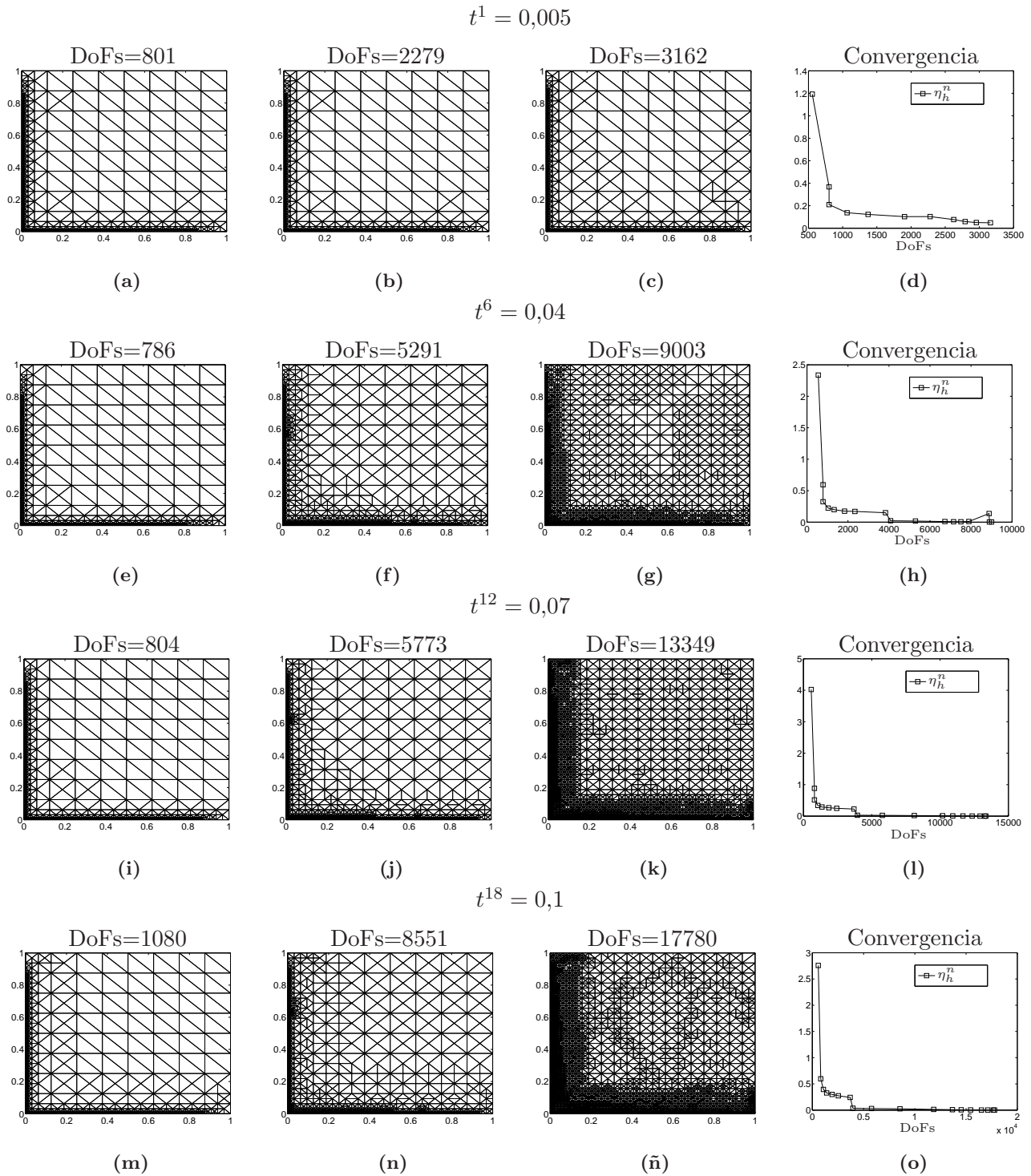
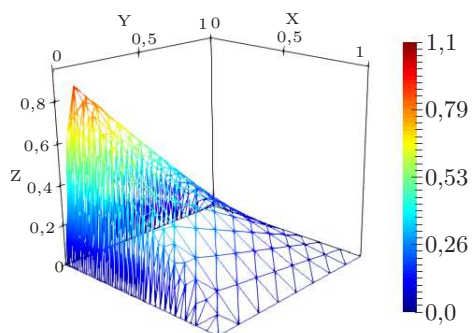
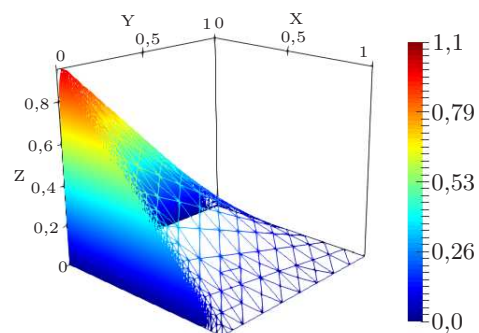


Figura 6.49: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,005$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^6 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{12} = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{18} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^r en los tiempos $t^1 = 0,005$, $t^6 = 0,04$, $t^{12} = 0,07$ y $t^{18} = 0,1$, respectivamente.

$$t^1 = 0,005$$

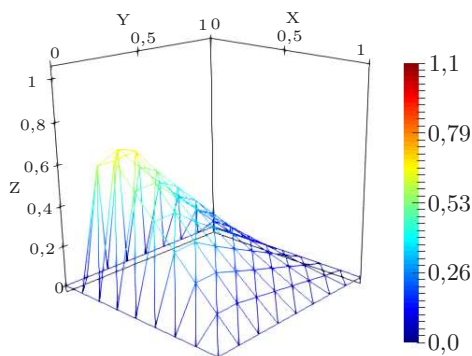


(a)

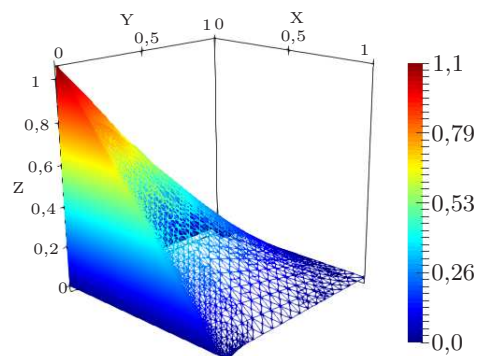


(b)

$$t^{18} = 0,1$$



(c)



(d)

Figura 6.50: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,005$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,005$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{18} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{18} = 0,1$.

Finalmente, la figura 6.51 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.51a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.51b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

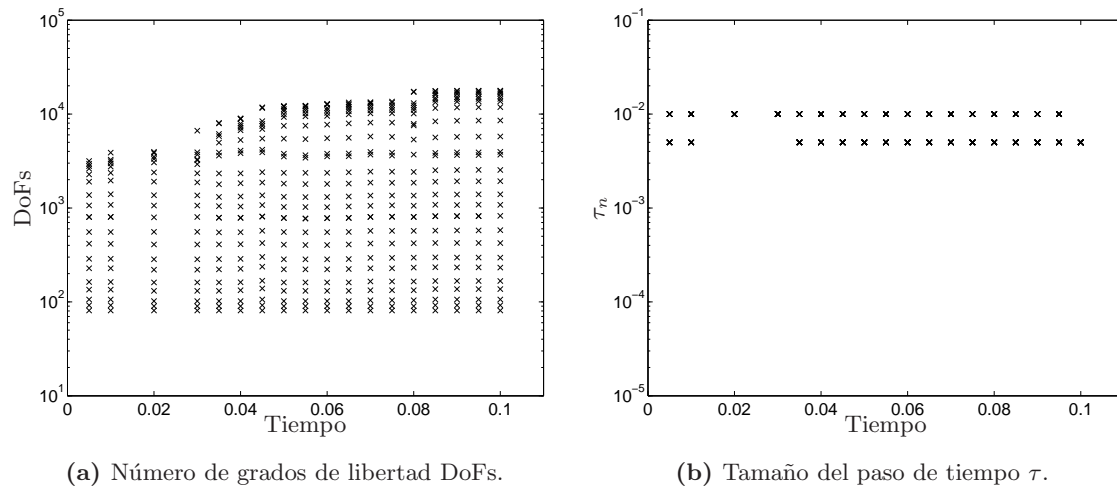


Figura 6.51: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.4.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 3,70486268 \times 10^{-3}$. El cuadro 6.24 presenta el mismo detalle de los casos anteriores.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,01	0,01	3482	0,05906	0,88504	0,00058158
2	0,02	0,01	5316	0	4,3231	0,00059333
3	0,03	0,01	5491	0,42562	1,3614	0,00060532
4	0,04	0,01	6174	0,025333	2,0477	0,00061755
5	0,05	0,01	6196	0	0,028438	0,00063002
6	0,06	0,01	6335	0,019204	0,19037	0,00064275
7	0,07	0,01	7736	1,7086	2,1769	0,00065573
8	0,08	0,01	7781	$7,9869 \times 10^{-5}$	0,028728	0,00066898
9	0,09	0,01	8985	0,013082	1,3446	0,00068249
10	0,1	0,01	9062	0,4391	0,45854	0,00069628

Cuadro 6.24: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.52 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n . Luego la figura 6.53 presenta una vista tridimensional de dichos resultados de refinación. Finalmente, la figura 6.54 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de dos gráficas; la figura 6.54a presenta para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que la figura 6.54b presenta para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal.

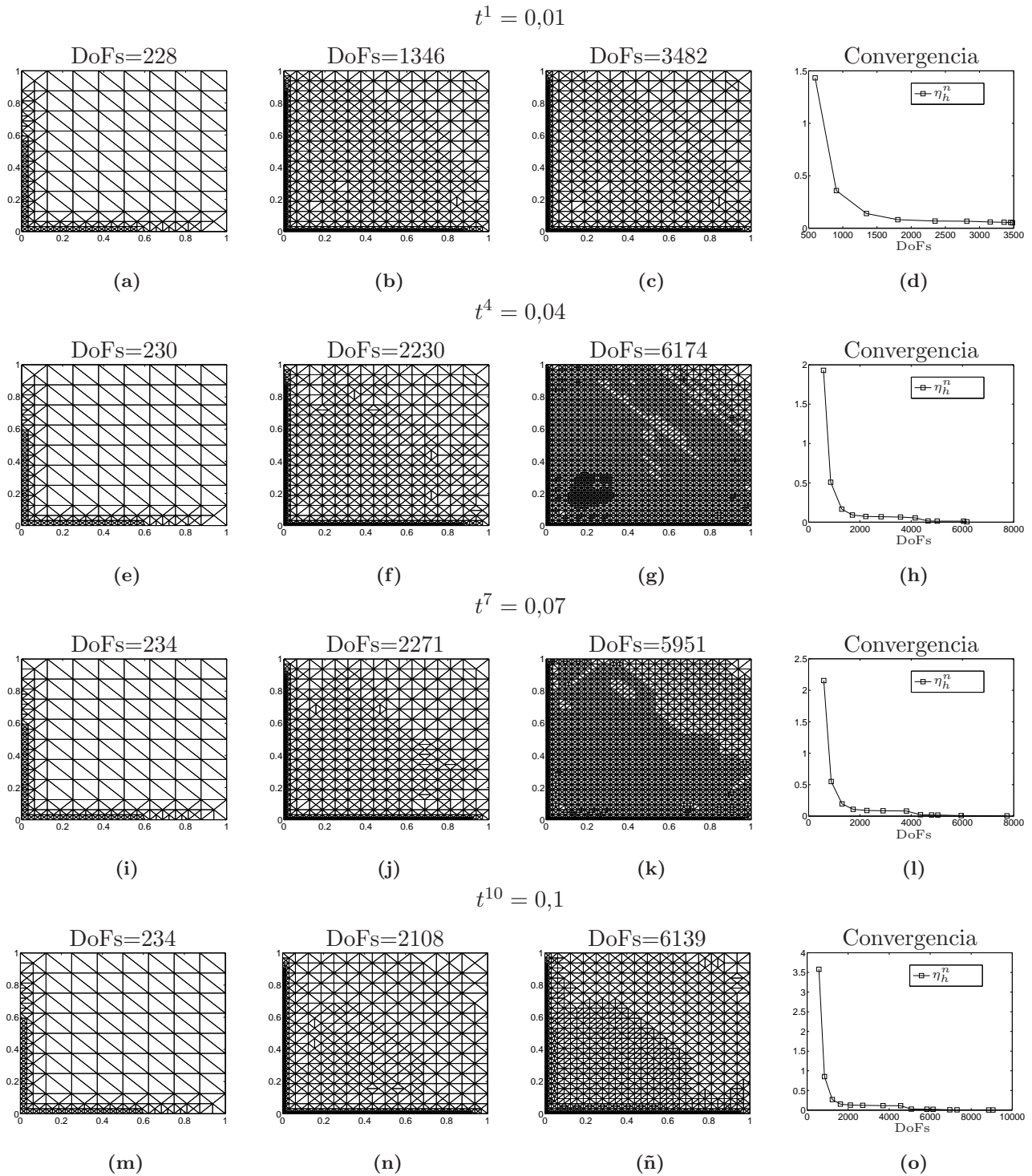
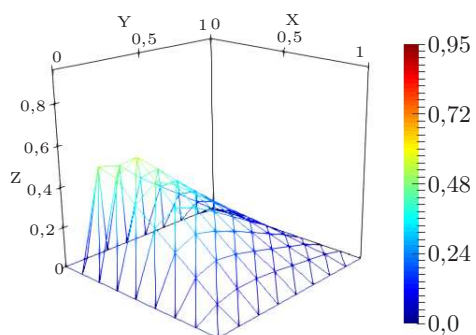
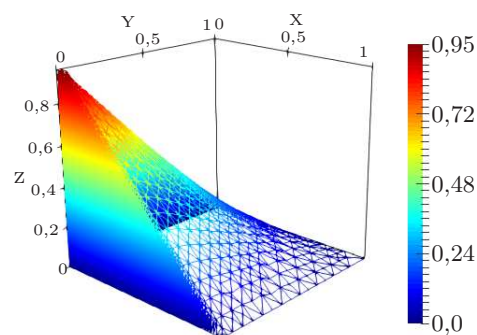


Figura 6.52: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,01$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^4 = 0,04$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^7 = 0,07$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{10} = 0,1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^T en los tiempos $t^1 = 0,01$, $t^4 = 0,04$, $t^7 = 0,07$ y $t^{10} = 0,1$, respectivamente.

$$t^1 = 0,01$$

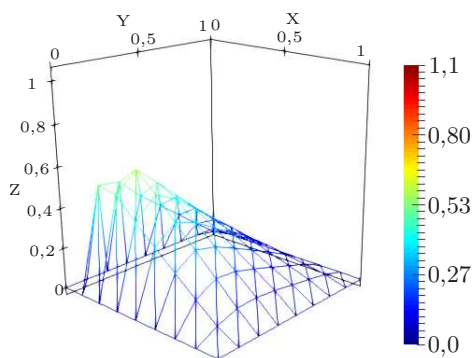


(a)

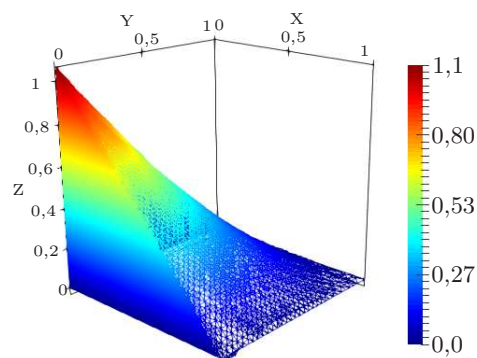


(b)

$$t^{10} = 0,1$$



(c)



(d)

Figura 6.53: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,01$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,01$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{10} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{10} = 0,1$.

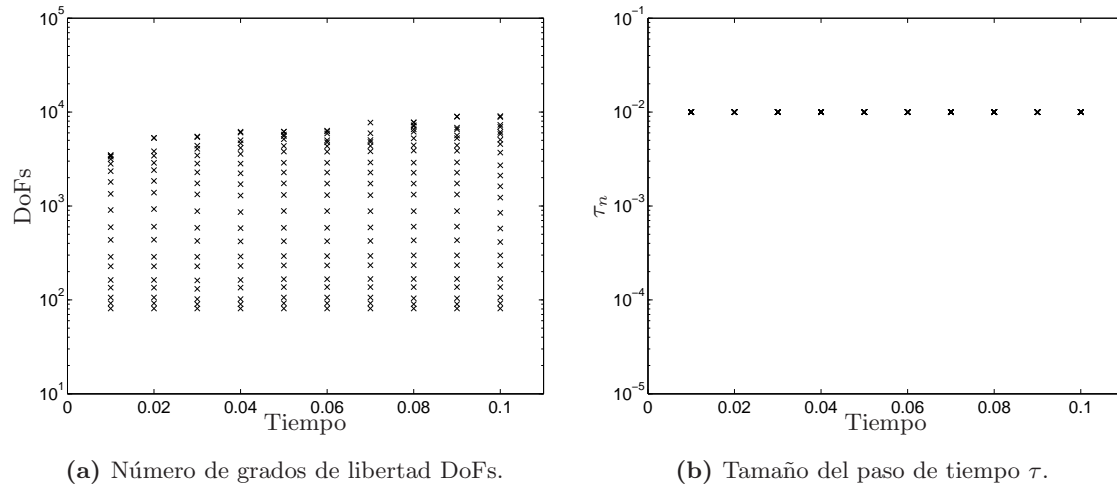
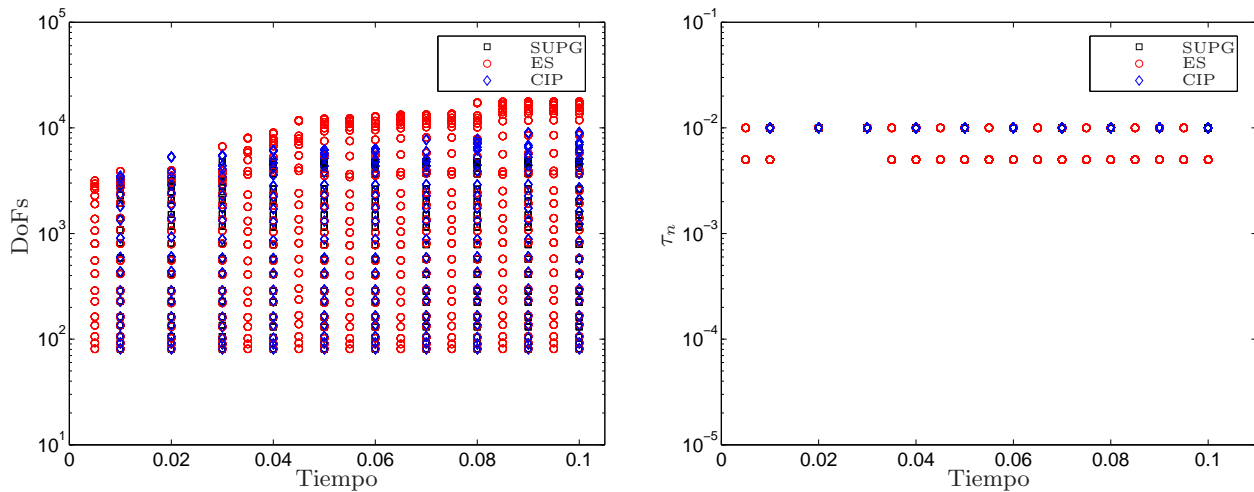


Figura 6.54: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (b) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.2.4.4. Comparación entre esquemas de estabilización

En este caso, las capas límites hacen necesario una gran cantidad de refinaciones espaciales, como puede ser visto a través de las figuras 6.46, 6.49 y 6.52 junto con las figuras 6.47, 6.50 y 6.53. De la misma forma, la figura 6.55a muestra que para los tres esquemas la cantidad de refinaciones espaciales en cada nodo difiere en gran manera, aunque un comportamiento común es el hecho de que a medida que el tiempo avanza, la cantidad de nodos espaciales aumenta. Por otro lado, la figura 6.55b muestra que los esquemas SUPG y CIP generan un paso de tiempo uniforme igual a $\tau_n = 0,1$ mientras que el esquema ES también genera un comportamiento uniforme con la mayoría de los pasos de tiempo iguales a $\tau_n = 0,005$ y como consecuencia, cerca del doble de nodos temporales en comparación con los otros esquemas, muy similar a los casos anteriores.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

Figura 6.55: Comparación del comportamiento espacio temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

A través de la figura 6.56 podemos ver como en el tiempo final los tres esquemas aproximan de buena manera fuera de las capas límites, mientras que en ellas, SUPG sobrestima mientras que ES y CIP subestiman, con CIP mostrando un mejor resultado.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$6,97830812 \times 10^{-2}$	$4,86967843 \times 10^{-3}$
ES	$6,01504464 \times 10^{-2}$	$3,61807620 \times 10^{-3}$
CIP	$6,08675831 \times 10^{-2}$	$3,70486268 \times 10^{-3}$

Cuadro 6.25: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

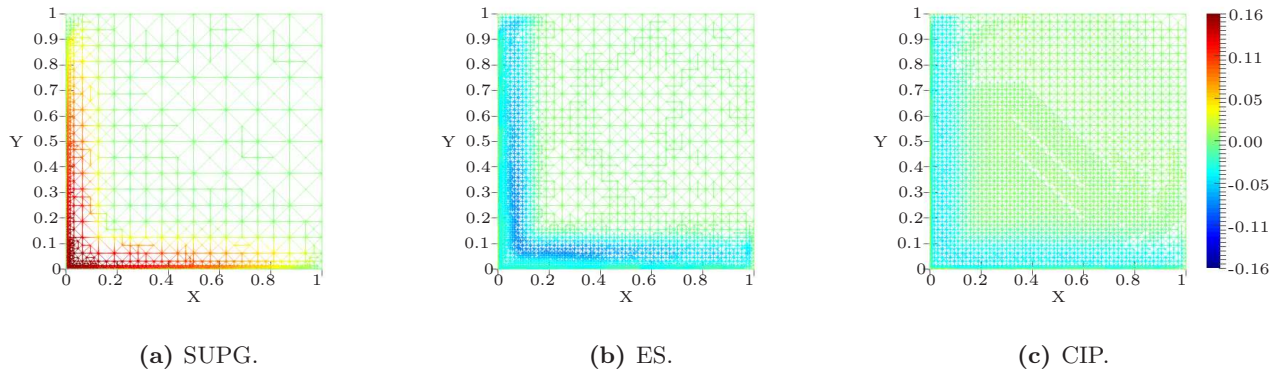


Figura 6.56: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 999,13062$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

De esta manera podemos concluir que el algoritmo TAFEM, tiene un buen comportamiento frente a problemas espacio temporales singularmente perturbados, logrando aproximar de buena manera las capas límites de la solución. Cabe resaltar que esto es consecuencia de la integración de esquemas de elementos finitos estabilizados con el análisis *a posteriori* realizado.

6.3. Ejemplo 3: Pulso Errante

El presente ejemplo busca ilustrar las características adaptativas espacio temporales del algoritmo a través de la clásica función utilizada en [31, 63], un pulso que viaja a través del dominio espacial a medida que avanza el tiempo. En este caso, el dominio espacial corresponde a $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ mientras que el intervalo de tiempo es igual a $(0, T) = (0, 1)$. Con respecto a los parámetros relacionados al operador diferencial se tiene que $\varepsilon = 1$, $\mathbf{a} = (1, 1)$ y $\kappa = 1$. La función f del lado derecho se elige de manera tal que la solución exacta es igual a

$$u(x, y, t) = \alpha(t) e^{-\beta((x-t+0,5)^2+(y-t+0,5)^2)} \quad (6.3)$$

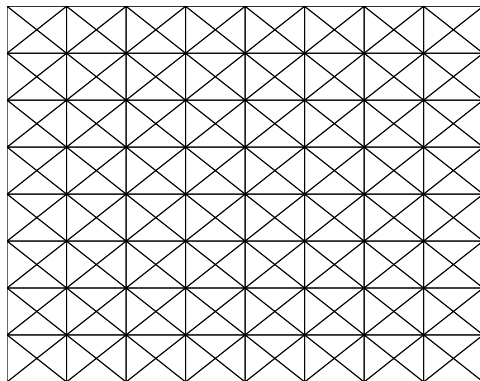
con

$$\alpha(t) = 1 - e^{-\gamma(t-0,5)^2} \quad (6.4)$$

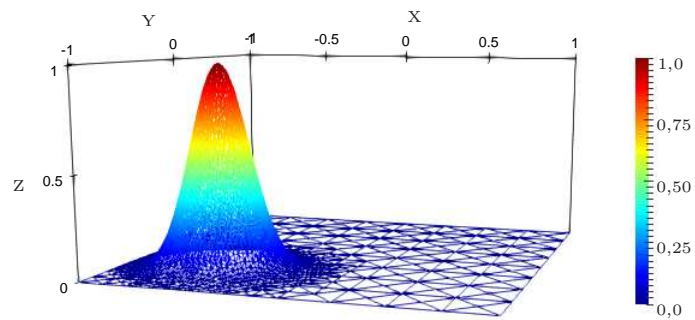
y parámetros $\beta = 25$ y $\gamma = 10^4$. Los valores de las tolerancias y parámetros utilizados se especifican en el cuadro 6.26 de manera tal que la tolerancia final utilizada es igual a $TOL^2 = 248,3382016$, mientras que la malla inicial junto con la condición inicial se presentan en la Figura 6.57.

TOL_0^2	$TOL_{P_\tau}^2$	TOL_D^2	$tol_{P_\tau}^2$	tol_D^2	α_h	β_h	γ_h	α_c	β_c	γ_c
10^{-7}	146,3383508	1	$5,45764 \times 10^{-2}$	$7,24638 \times 10^{-3}$	10^{-2}	1	10^{-1}	1	10^2	10^{-1}

Cuadro 6.26: Tolerancias y parámetros.



(a)



(b)

Figura 6.57: (a) Malla inicial que se utilizó en cada paso de tiempo formada por 256 elementos y 145 DoFs. (b) Condición inicial bajo la tolerancia establecida, 4112 elementos y 2081 DoFs.

A continuación se presentan los resultados obtenidos bajo los distintas estabilizaciones utilizadas.

6.3.1. SUPG

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 3,42957402 \times 10^{-1}$. El cuadro 6.27 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal. A continuación, la figura 6.58 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n .

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,0125	0,0125	1574	0,043302	0,010083	0,001795
10	0,125	0,0125	1057	0,030161	0,019684	0,0017952
20	0,1875	0,00625	683	0,0079607	0,0026558	0,00022466
30	0,3125	0,0125	814	0,062333	0,01953	0,0017952
40	0,40625	0,00625	532	0,0022756	0,0026529	0,00022466
50	0,48437	0,003125	353	0,071021	0,002072	0,0014154
52	0,49062	0,003125	161	0,066347	0,014903	0,0053965
54	0,49687	0,003125	145	0	0,015882	0,0016121
55	0,49844	0,0015625	145	0	0,00083459	0,0010023
56	0,5	0,0015625	145	0	0,00011399	0,0016324
58	0,50312	0,0015625	145	0	0,00070856	0,0017008
60	0,50781	0,003125	145	0	0,017811	0,0027165
70	0,59844	0,0125	807	0,057763	0,019695	0,0017952
80	0,67344	0,00625	533	0,0075326	0,0026073	0,00022466
90	0,78594	0,0125	813	0,035198	0,019973	0,0017952
100	0,89219	0,00625	532	0,0098425	0,0030566	0,00022466
110	0,97344	0,0125	811	0,06284	0,019185	0,0017951
113	1	0,0015625	3399	0	0,0008076	$3,5111 \times 10^{-6}$

Cuadro 6.27: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

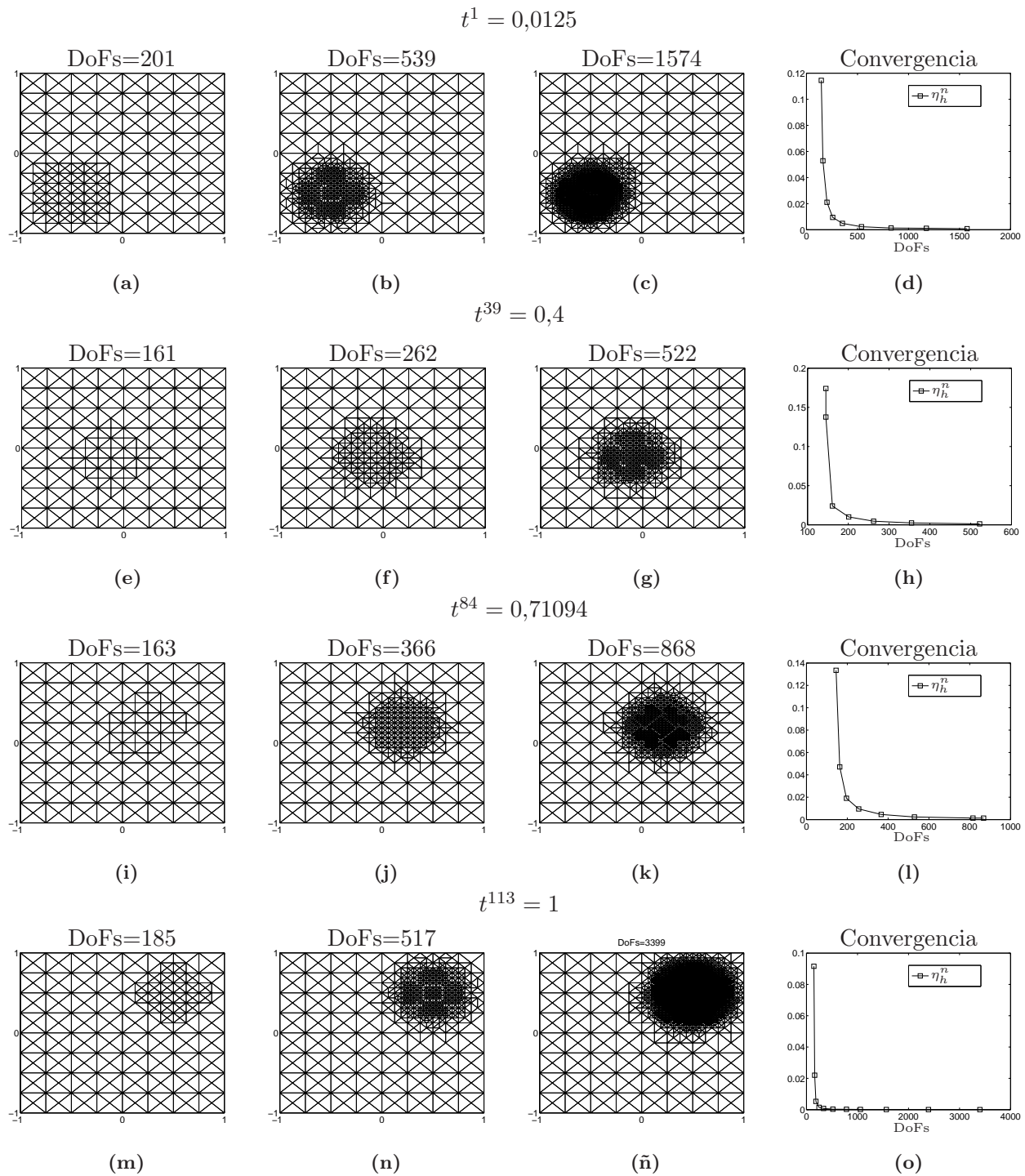


Figura 6.58: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,0125$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{39} = 0,4$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{84} = 0,71094$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{113} = 1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,0125$, $t^{39} = 0,4$, $t^{84} = 0,71094$ y $t^{113} = 1$, respectivamente.

La siguiente figura muestra una vista tridimensional de los resultados de adaptatividad espacial en el tiempo inicial y final.

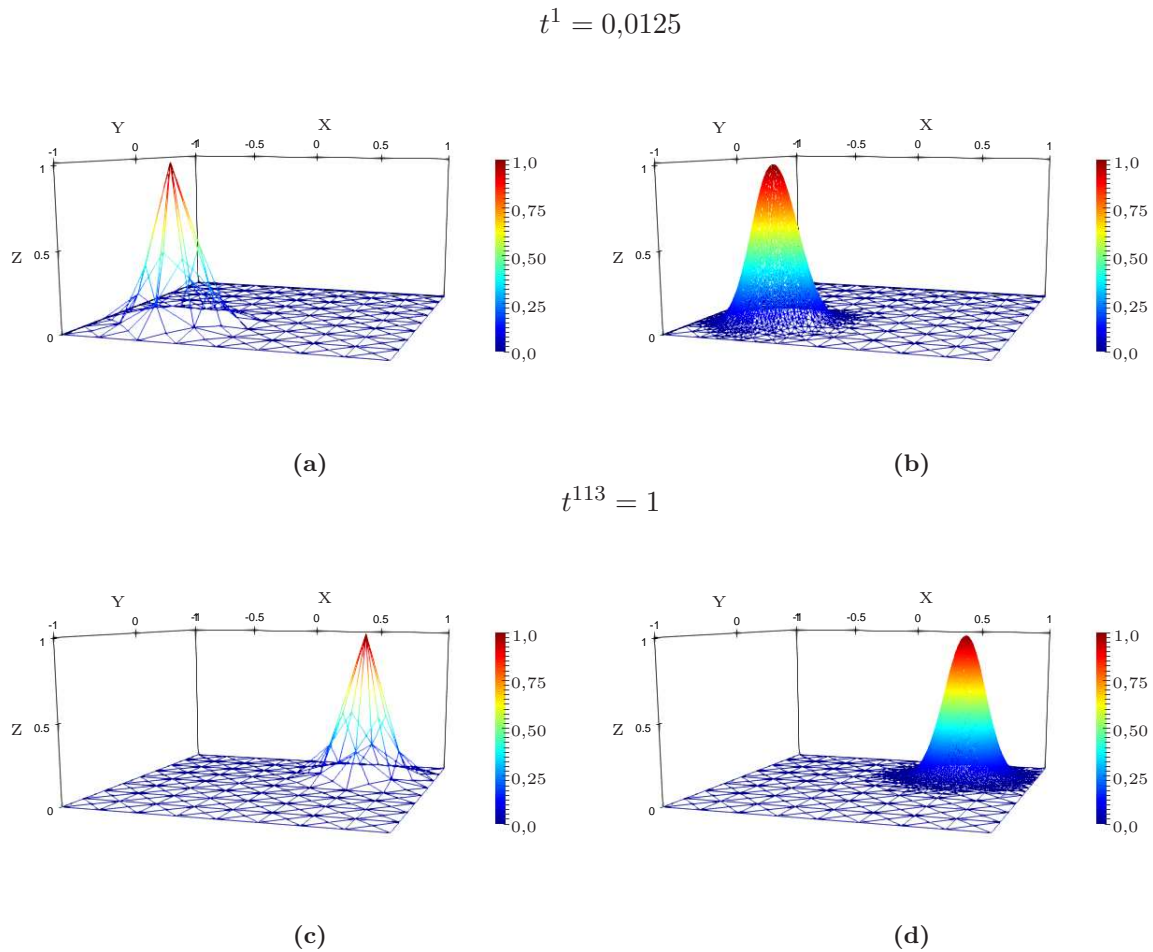
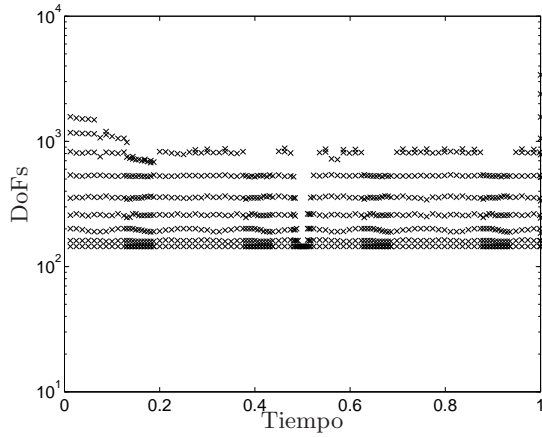


Figura 6.59: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,0125$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,0125$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{113} = 0,1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{113} = 1$.

Finalmente, la figura 6.60 ilustra el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de cuatro gráficas. En las figuras 6.60c y 6.60d es posible notar que cercano al tiempo $t = 0,5$ ocurre la disminución del paso de tiempo, lo que se debe a que la función $\alpha(t)$ cambia exponencialmente de 1 a 0 y luego de 0 a 1, mientras que lejos de $t = 0,5$, se cumple que $\alpha \approx 1$, moviéndose la solución a una velocidad y forma constante. Dicho comportamiento también puede ser apreciado a través de las figuras 6.60a y 6.60b, donde es claro que la cantidad de refinaciones es relativamente constante lejos de $t = 0,5$, mientras que cercano a dicho tiempo no se realizan refinaciones debido a que la función es igual a cero.



(a) Número de grados de libertad DoFs.

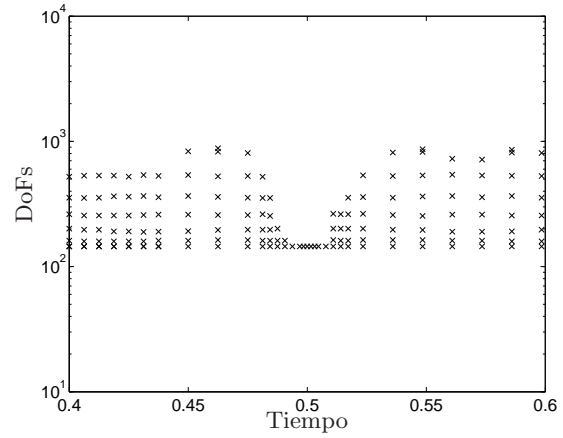
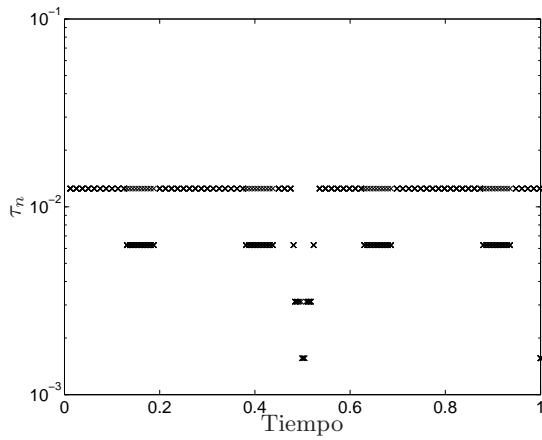
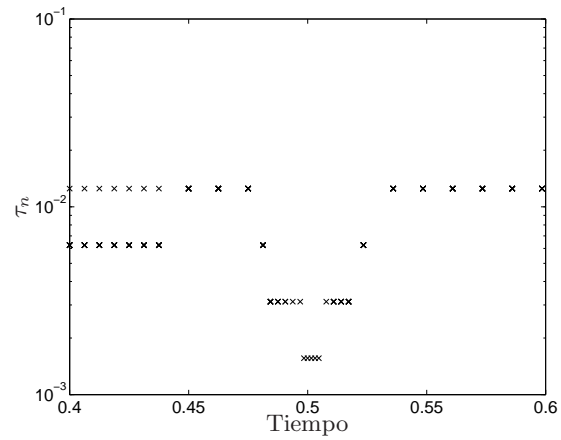
(b) Número de grados de libertad DoFs, comportamiento en $t = 0,5$.(c) Tamaño del paso de tiempo τ_n .(d) Tamaño del paso de tiempo τ_n , comportamiento en $t = 0,5$.

Figura 6.60: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) y (b) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (c) y (d) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.3.2. ES

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 2,55841331 \times 10^{-1}$. El cuadro 6.28 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,0125	0,0125	1572	0,076325	0,010194	0,00044874
10	0,1	0,00625	361	0,0043849	0,0025761	$5,6165 \times 10^{-5}$
20	0,1625	0,00625	361	0,0018092	0,0023828	$5,6165 \times 10^{-5}$
30	0,24375	0,0125	544	0,06926	0,019024	0,00044879
40	0,34375	0,00625	363	0,0044004	0,0026891	$5,6165 \times 10^{-5}$
60	0,48125	0,0125	833	0,012962	0,021997	0,00092556
62	0,49062	0,003125	161	0,081748	0,018005	0,0013491
64	0,5	0,00625	145	0	0,053894	0,01052
65	0,50312	0,003125	145	0	0,0018082	0,0036616
66	0,50625	0,003125	171	0	0,013136	0,00165
68	0,5125	0,003125	264	0	0,015429	0,0003338
70	0,53125	0,0125	544	0	0,024865	0,00075815
80	0,6125	0,00625	361	0	0,0023825	$5,6165 \times 10^{-5}$
90	0,675	0,00625	376	0,00048946	0,0026501	$5,6165 \times 10^{-5}$
100	0,76875	0,0125	542	0,022327	0,019185	0,00044879
110	0,85625	0,00625	359	0,00051632	0,0024443	$5,6165 \times 10^{-5}$
120	0,91875	0,00625	368	0,00064194	0,0026035	$5,6164 \times 10^{-5}$
130	1	0,009375	1802	0,0017627	0,011851	0,00018944

Cuadro 6.28: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.61 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n .

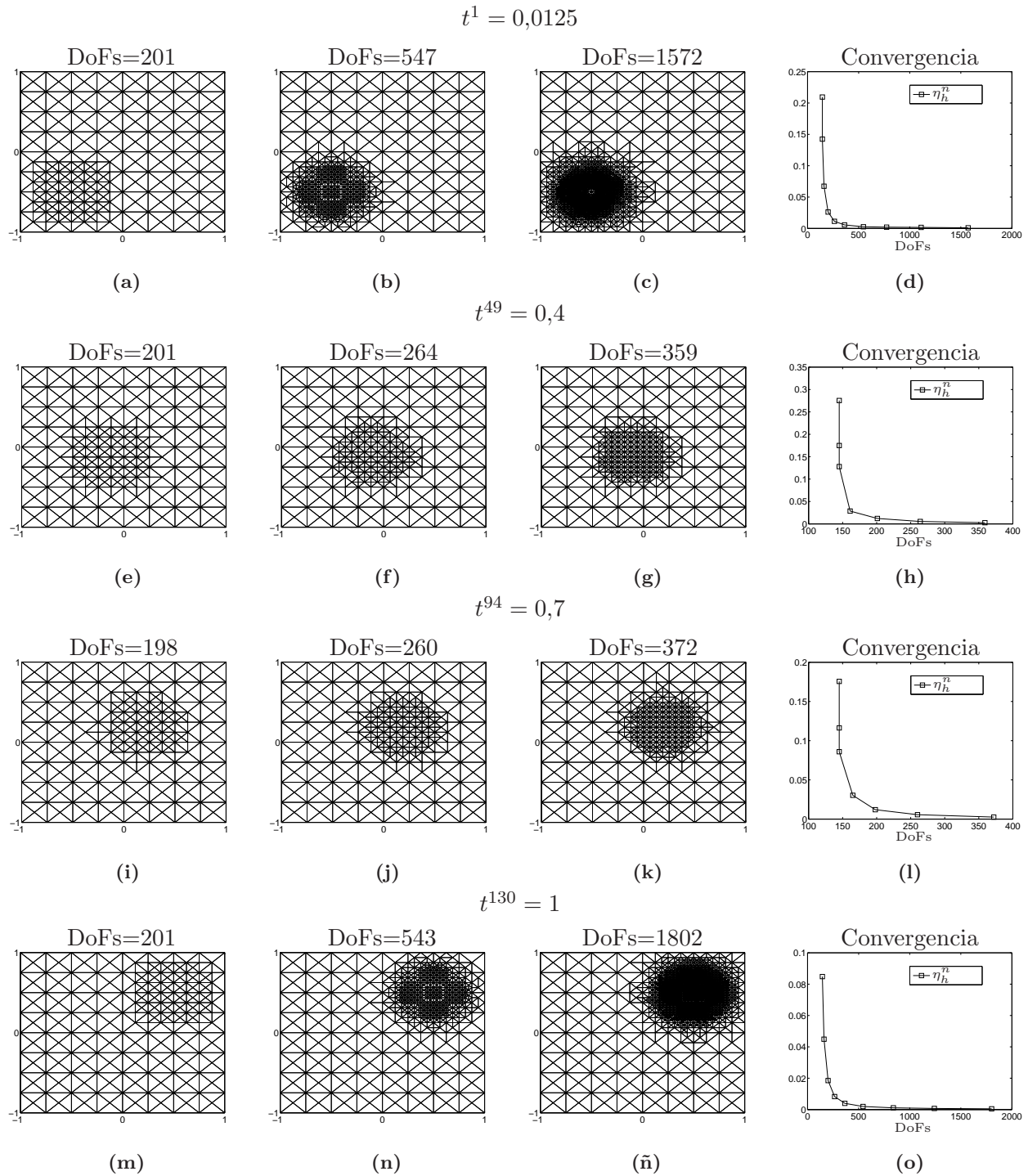
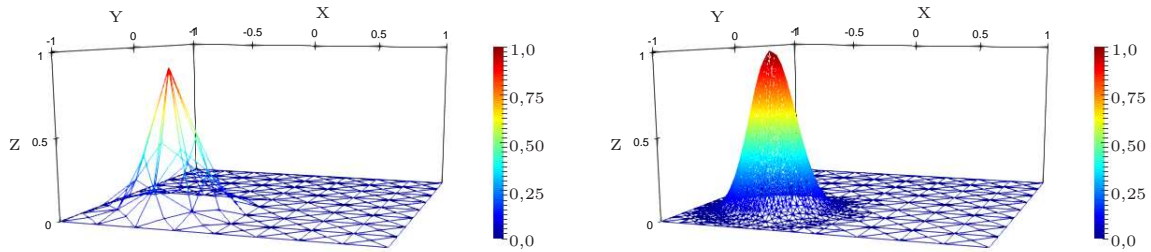


Figura 6.61: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,0125$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{49} = 0,4$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{94} = 0,7$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{130} = 1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,0125$, $t^{49} = 0,4$, $t^{94} = 0,7$ y $t^{130} = 1$, respectivamente.

La figura 6.62 muestra una vista tridimensional de los resultados de adaptatividad espacial en el tiempo inicial y final.

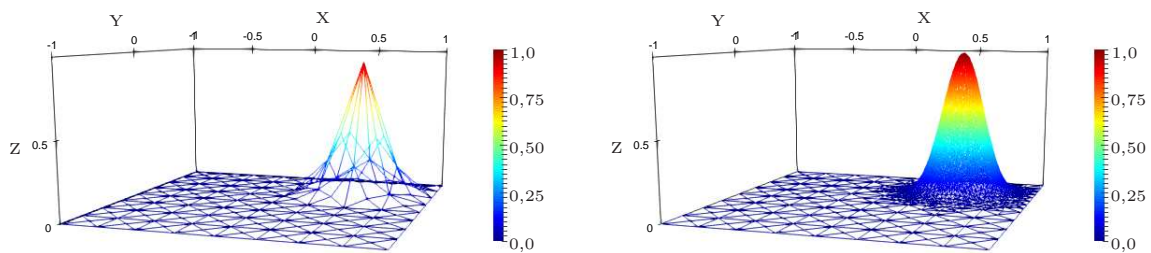
$$t^1 = 0,0125$$



(a)

(b)

$$t^{113} = 1$$

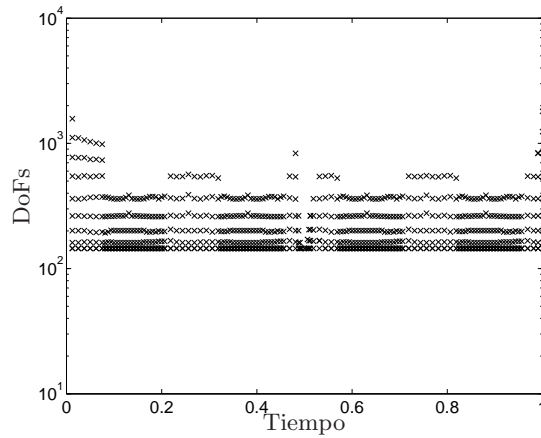


(c)

(d)

Figura 6.62: (a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,0125$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,0125$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{130} = 1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{130} = 1$.

Finalmente, la figura 6.63 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de cuatro gráficas; las figura 6.63a y 6.63b presentan para cada tiempo los grados de libertad obtenidos en cada refinación espacial mientras que las figuras 6.63c y 6.63d presentan para cada tiempo los pasos de tiempo obtenidos en cada refinación temporal. Se puede apreciar el mismo efecto explicado para el esquema SUPG.



(a) Número de grados de libertad DoFs.

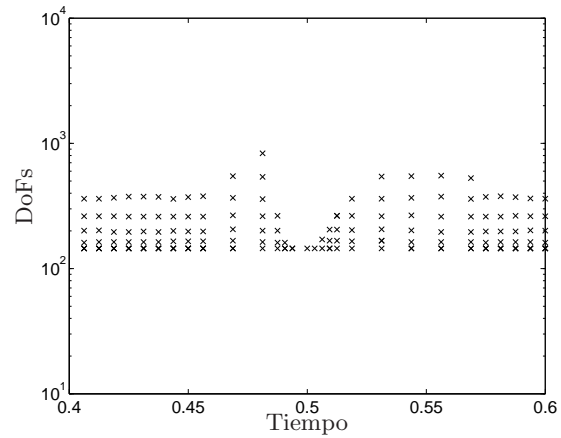
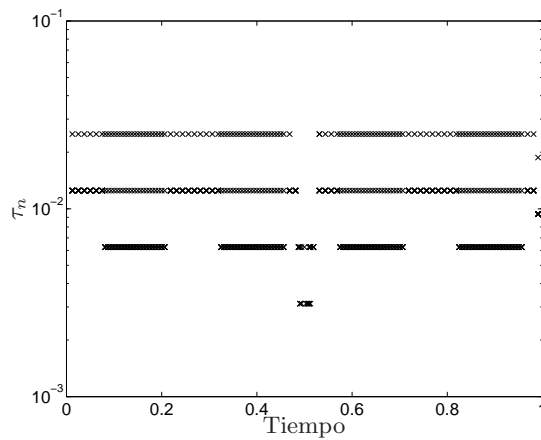
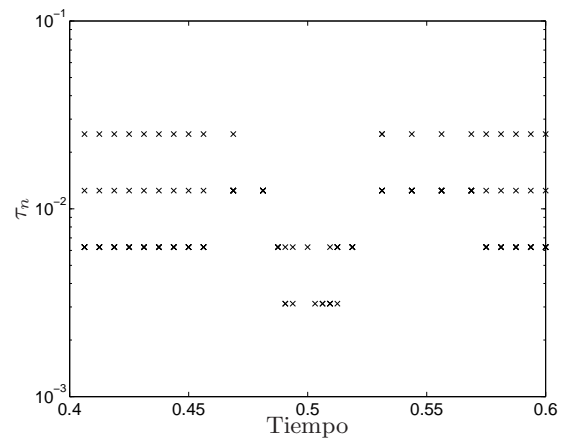
(b) Número de grados de libertad DoFs, comportamiento en $t = 0,5$.(c) Tamaño del paso de tiempo τ_n .(d) Tamaño del paso de tiempo τ_n , comportamiento en $t = 0,5$.

Figura 6.63: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) y (b) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (c) y (d) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.3.3. CIP

A través de este esquema se obtiene un error igual a $\|u - u_{h\tau}\|_{\mathbb{W}(0,0,1)}^2 = 2,52754066 \times 10^{-1}$. El cuadro 6.29 presenta en detalle los pasos de tiempo, el grado de libertad máximo obtenido en cada tiempo, y los estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

n	t^n	τ_n	$DoFs$	$(\eta_c^n)^2$	$(\eta_\tau^n)^2$	$(\eta_D^n)^2$
1	0,00625	0,00625	1033	0,10017	0,0019325	$5,6158 \times 10^{-5}$
10	0,06875	0,00625	354	0,013955	0,0022364	$5,6164 \times 10^{-5}$
20	0,13125	0,00625	345	0,0033681	0,0022355	$5,6165 \times 10^{-5}$
30	0,19375	0,00625	354	0,0067097	0,0021804	$5,6165 \times 10^{-5}$
40	0,2875	0,0125	536	0,014019	0,01878	0,00044879
50	0,35	0,00625	357	0,0011445	0,0022051	$5,6165 \times 10^{-5}$
60	0,4125	0,00625	355	0,0013998	0,002286	$5,6165 \times 10^{-5}$
70	0,475	0,00625	862	0,0016652	0,0024043	$5,7641 \times 10^{-5}$
74	0,49375	0,003125	145	0,027854	0,023992	0,00057234
75	0,5	0,00625	145	0	0,048674	0,01052
76	0,50312	0,003125	145	0	0,0018554	0,0036616
80	0,51875	0,00625	356	0	0,028392	0,0022608
90	0,6	0,00625	357	0,0011337	0,002216	$5,6165 \times 10^{-5}$
100	0,6625	0,00625	355	0	0,0022701	$5,6165 \times 10^{-5}$
110	0,725	0,00625	355	0,00074436	0,0021494	$5,6165 \times 10^{-5}$
120	0,81875	0,00625	354	0,0016893	0,0022775	$5,6165 \times 10^{-5}$
130	0,88125	0,00625	345	0,001184	0,0022353	$5,6165 \times 10^{-5}$
140	0,94375	0,00625	354	0,0014084	0,0021762	$5,6164 \times 10^{-5}$
148	1	0,00625	2796	0	0,0052029	$5,6158 \times 10^{-5}$

Cuadro 6.29: Detalle de tiempos, pasos de tiempos, grados de libertad y estimadores de desrefinamiento, tiempo y oscilación temporal.

A continuación, la figura 6.64 presenta 4 tiempos específicos a través de los cuales se puede ver la refinación adaptativa realizada en cada paso de tiempo y el desempeño del estimador espacial η_h^n .

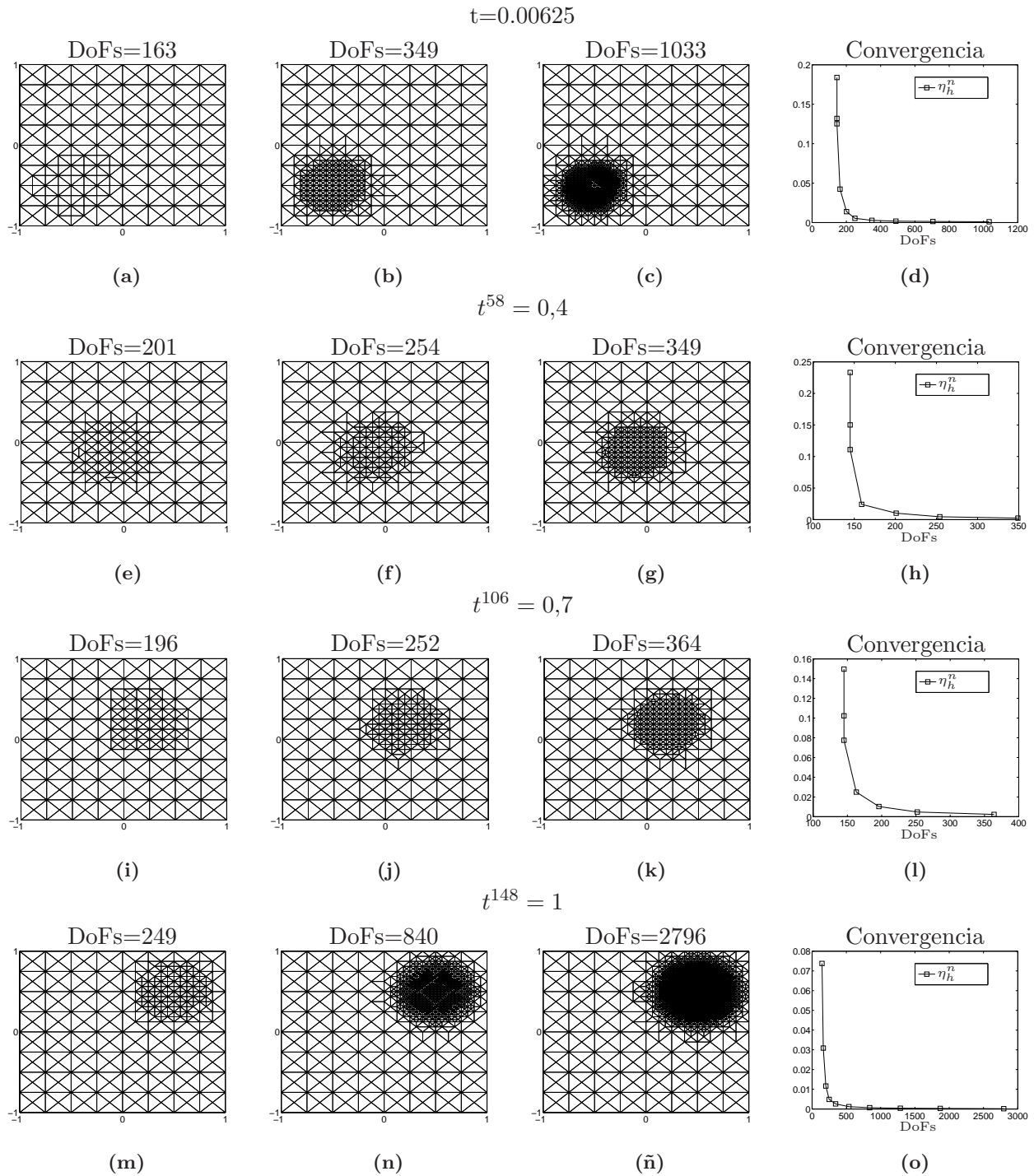
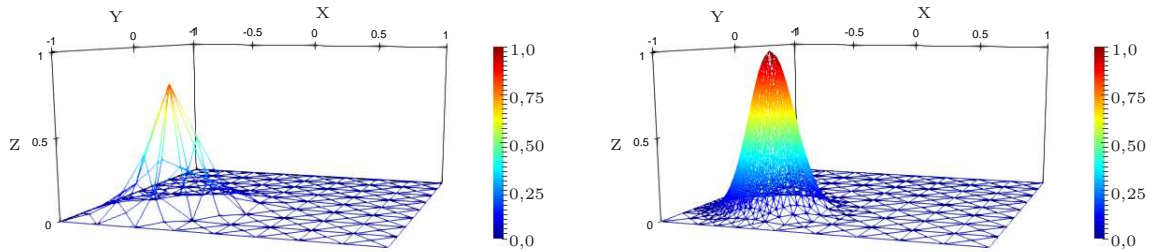


Figura 6.64: (a), (b), (c): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^1 = 0,00625$. (e), (f), (g): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{58} = 0,4$. (i), (j), (k): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{106} = 0,7$. (m), (n), (ñ): Refinación espacial realizada en el tiempo $t^{148} = 1$. (d), (h), (l), (o): Desempeño del estimador espacial η_h^n en los tiempos $t^1 = 0,00625$, $t^{58} = 0,4$, $t^{106} = 0,71094$ y $t^{148} = 1$, respectivamente.

La figura 6.65 muestra una vista tridimensional de los resultados de adaptatividad espacial en el tiempo inicial y final.

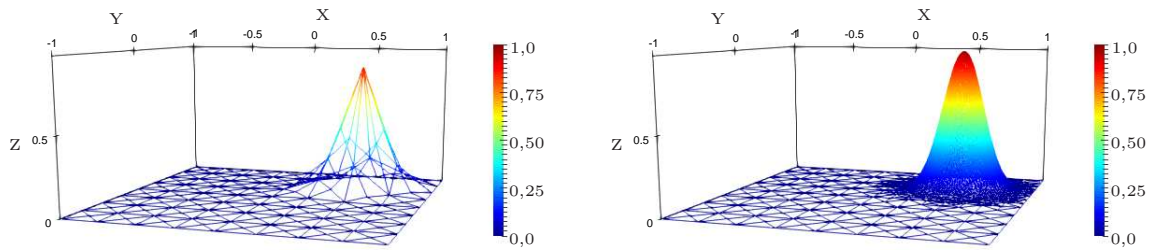
$$t^1 = 0,0125$$



(a)

(b)

$$t^{148} = 1$$

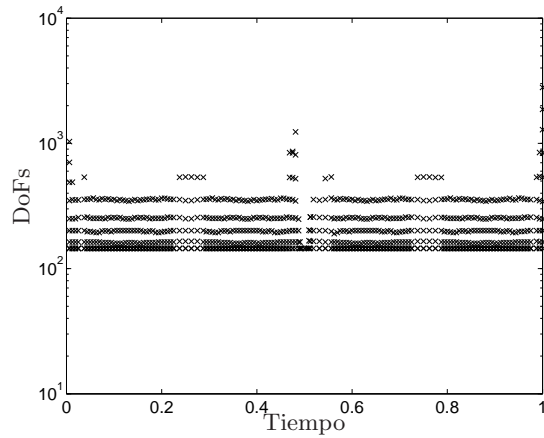


(c)

(d)

Figura 6.65: ((a): Refinación espacial inicial realizada en $t^1 = 0,0125$. (b): Refinación espacial final realizada en $t^1 = 0,0125$. (c): Refinación espacial inicial realizada en $t^{148} = 1$. (d): Refinación espacial final realizada en $t^{148} = 1$).

Finalmente, la figura 6.66 presenta el comportamiento adaptativo del algoritmo a través de cuatro gráficas que al igual que en los casos anteriores ilustran las refinaciones espaciales y temporales realizadas en cada paso de tiempo.



(a) Número de grados de libertad DoFs.

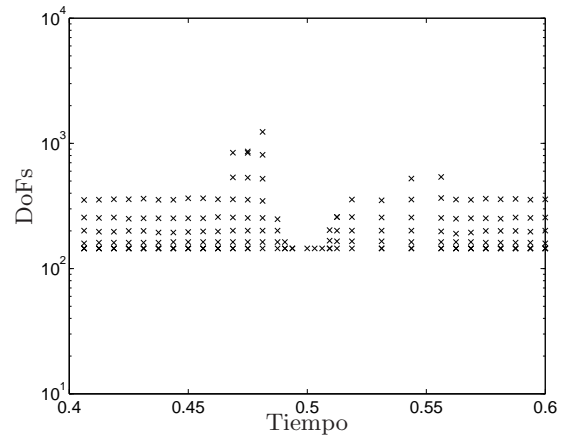
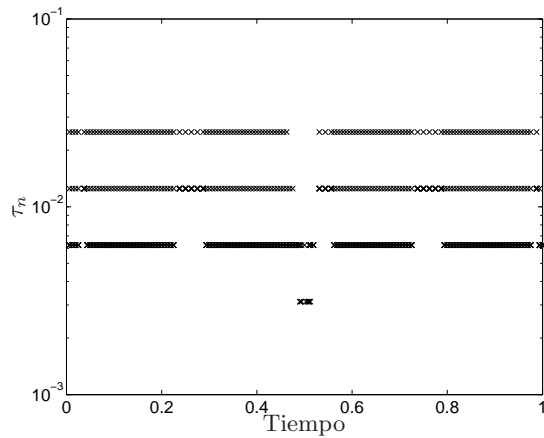
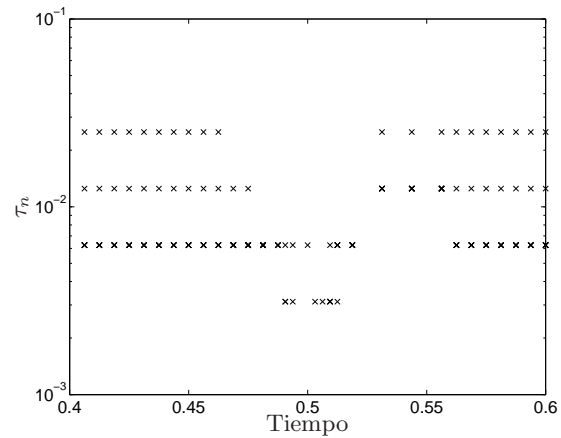
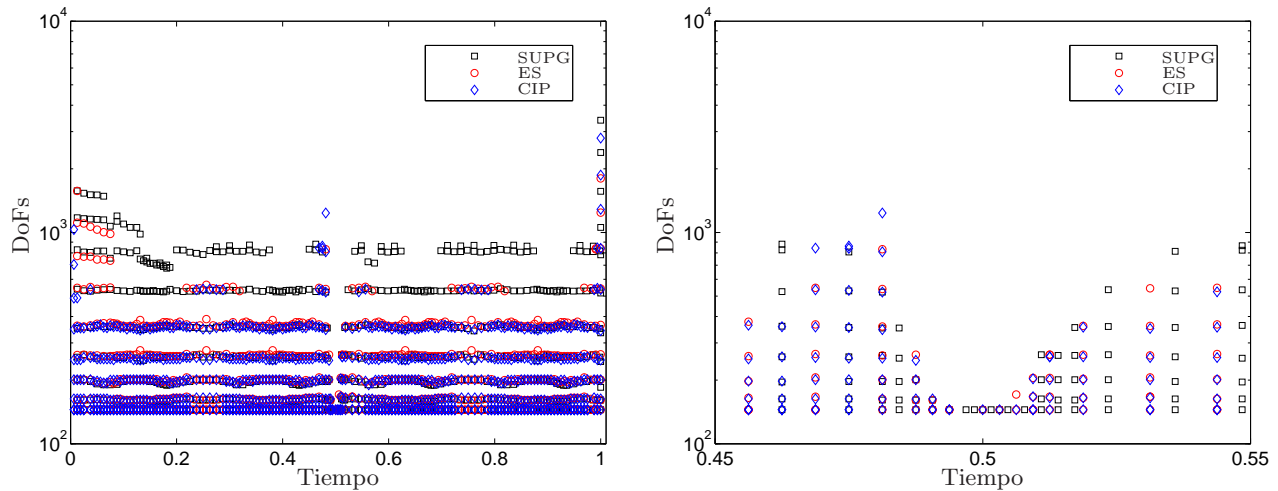
(b) Número de grados de libertad DoFs, comportamiento en $t = 0,5$.(c) Tamaño del paso de tiempo τ_n .(d) Tamaño del paso de tiempo τ_n , comportamiento en $t = 0,5$.

Figura 6.66: Comportamiento adaptativo del algoritmo TAFEM representado a través de (a) y (b) el número de grados de libertad obtenido en cada refinación espacial y, (c) y (d) el valor del paso de tiempo utilizado en cada refinación temporal.

6.3.4. Comparación entre esquemas de estabilización

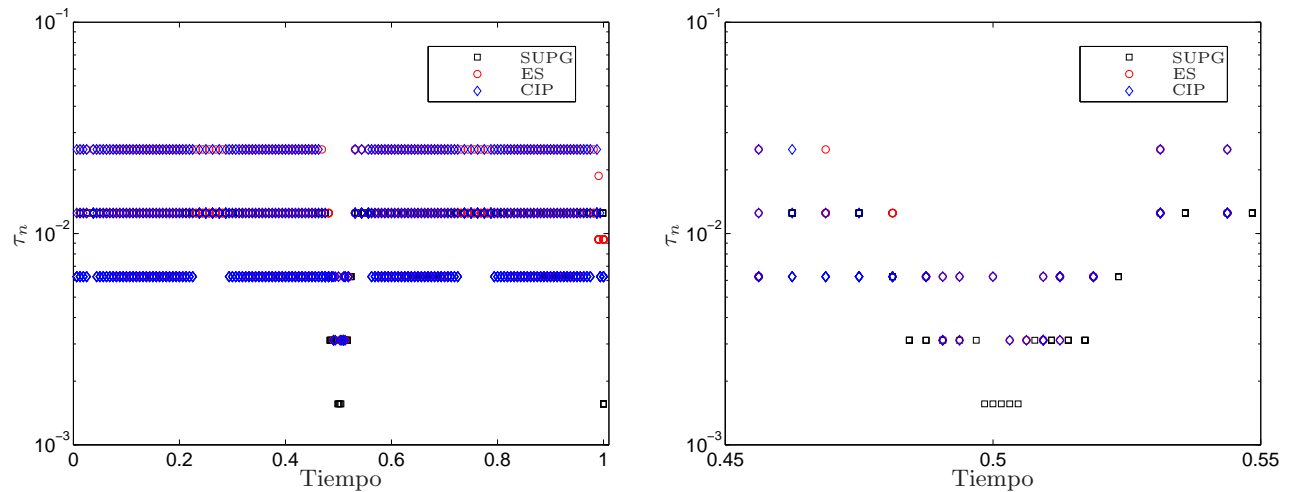
En primer lugar, 6.67 presenta la comparación entre la cantidad de refinaciones espaciales realizadas por cada esquema en cada paso de tiempo. Como fue comentado anteriormente, cercano al tiempo $t = 0,5$ es posible vislumbrar como en cada esquema se generan una vecindad de pasos temporales donde no se realiza refinación espacial debido al cambio exponencial de 1 a 0 (y posteriormente de 0 a 1) de la solución (ver figura 6.67b); dado que en dicho instante la solución es igual a cero en todo el dominio, es innecesario la refinación de éste, comportamiento que es detectado exitosamente por el algoritmo. De la misma manera, el cambio exponencial en la función de a 1 a 0 y viceversa, hace necesario la disminución en el paso de tiempo de manera tal de poder aproximar de mejor forma la solución, comportamiento que es logrado por todos los esquemas como puede ser visto en 6.68. Para tiempos lejos de $t = 0,5$, los esquemas se comportan de manera similar, en término de las refinaciones espaciales y temporales realizadas; es posible notar que el esquema SUPG necesita un mayor número de refinaciones espaciales para alcanzar los valores de tolerancia establecidos, a diferencia de los esquemas ES y CIP, y aún así, SUPG sigue siendo el esquema que presenta mayor error, como puede apreciarse en el cuadro 6.30.



(a) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los grados de libertad alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización, zoom.

Figura 6.67: Comparación del comportamiento espacial adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.



(a) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización.

(b) Comparación entre los tamaños de pasos de tiempo alcanzados en cada iteración temporal entre los distintos esquemas de estabilización, zoom.

Figura 6.68: Comparación del comportamiento temporal adaptativo entre los distintos esquemas de estabilización.

Esquema	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}$	$\ u - u_{h\tau}\ _{\mathbb{W}(0,0,1)}^2$
SUPG	$5,85625651 \times 10^{-1}$	$3,42957402 \times 10^{-1}$
ES	$5,05807603 \times 10^{-1}$	$2,55841331 \times 10^{-1}$
CIP	$5,02746523 \times 10^{-1}$	$2,52754066 \times 10^{-1}$

Cuadro 6.30: Valor del error obtenido según esquema de estabilización.

Finalmente, la figura 6.69 nos muestra como en el tiempo final, los tres esquemas son capaces de detectar y seguir el pulso errante pero la aproximación de este es sobre y sub estimada. Para entender mejor este efecto, la figura 6.70 muestra en color la solución real del problema en el tiempo final y en negro la solución aproximada en dicho tiempo.

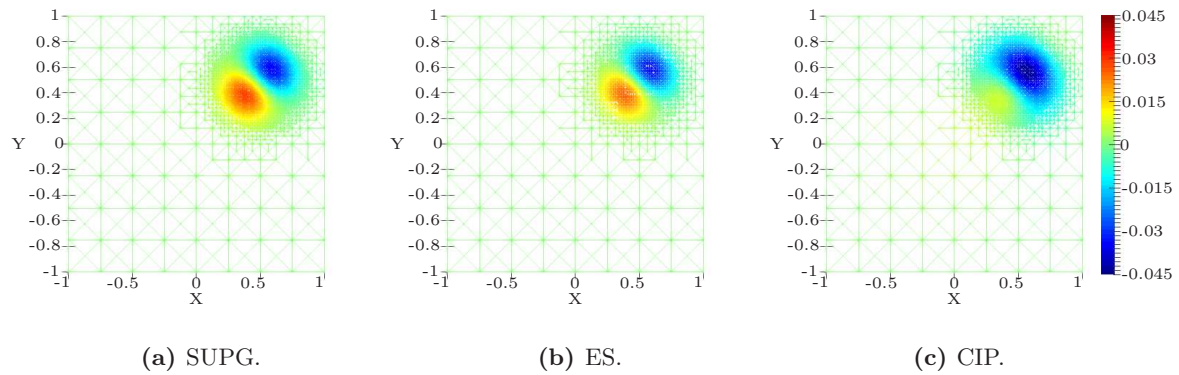


Figura 6.69: Diferencia puntual entre la solución real y la solución discreta en el tiempo final según los distintos esquemas estabilizados bajo una tolerancia $TOL = 15,75875$. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

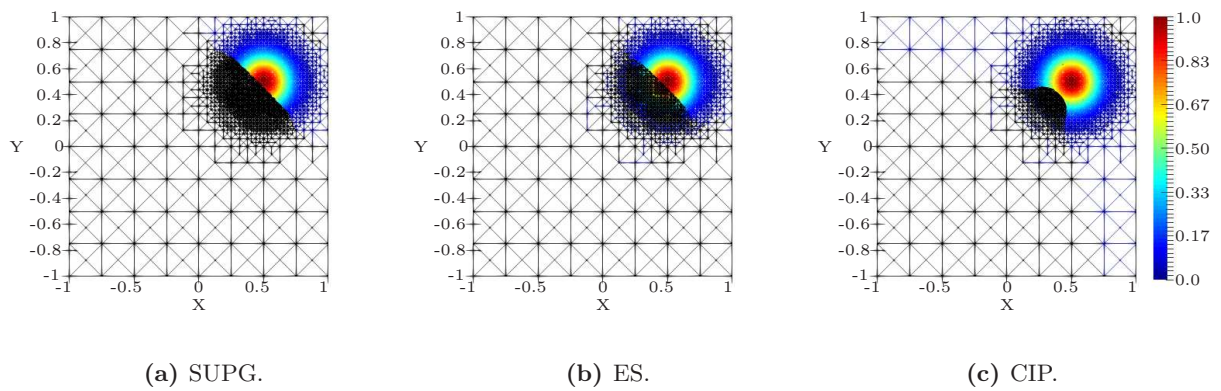


Figura 6.70: Comparación entre la solución real y la solución discreta según los distintos esquemas estabilizados. La solución real aparece en colores mientras que la solución discreta en color negro. La barra referente a los valores de cada figura presentada en (c) es válida para (a) y (b).

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

En el presente trabajo se desarrolló un análisis *a posteriori* completamente computable para el problema de difusión-convección-reacción no estacionario, obteniendo cotas de error superiores e inferiores en las normas $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y $\mathbb{W}(0, T)$, bajo la integración de esquemas de elementos finitos estabilizados con un esquema de Euler implícito. De esta manera, los estimadores obtenidos dan origen a cotas superiores completamente computables, lo que permite la definición de una tolerancia que puede ser usada como criterio de parada en algoritmos de refinamiento espacio temporal adaptativos.

El análisis realizado usa como fundamento la separación de la ecuación del error en tres términos residuales, uno referente a la variable espacial, otro referente a la variable temporal y un tercer término referente a la data temporal del problema, para posteriormente, en función de dichos residuos obtener los estimadores de error completamente computables. Para la obtención del estimador de error espacial se hace uso de la teoría desarrollada para el caso estacionario. Esto permitió la realización de un resumen de los resultados existentes a la fecha en esta materia y a la vez, extenderlos al caso en que el parámetro de reacción κ es igual a cero. En dichos resultados la construcción del estimador completamente computable se realiza en base al planteamiento y resolución de un conjunto de problemas locales tipo Neumann puestos sobre cada elemento de la malla junto con la aplicación de la técnica de los flujos equilibrados, necesarios para asegurar la resolución de dichos problemas locales. Con respecto al estimador de error temporal, este se obtiene de manera natural en base a la definición del residuo temporal mientras que la obtención del estimador de oscilación temporal se hace a través del uso de la formulación variacional del problema y la forma diferencial de la desigualdad de Gronwall. De esta manera es posible obtener, para ambas normas, una cota superior completamente computable. Con respecto a la cota inferior, para su obtención se hizo uso de los argumentos clásicos de las funciones

burbujas, considerando funciones burbujas espacio temporales. Si bien dichos resultados no son robustos, para el caso en que el parámetro de reacción κ es igual a cero y bajo las suposiciones clásicas de los resultados existentes de robustez, fue posible demostrar que la cota puede ser robusta aunque solo bajo una norma equivalente a la del espacio $\mathbb{W}(0, T)$. Los resultados obtenidos a través del análisis *a posteriori* realizado permitieron implementar un algoritmo espacio temporal adaptativo, denominado TAFEM, que hace uso de la técnica de equidistribución del error. Dicho algoritmo es capaz de resolver el problema dado un conjunto de parámetros de tolerancia, una malla espacial inicial y un paso de tiempo inicial. De esta manera se pudieron implementar tres ejemplos que ilustraron el desempeño de los estimadores en distintos escenarios. Para el primer ejemplo, se seleccionó una función solución que presenta un comportamiento suave espacial y temporalmente, ilustrando el buen comportamiento de TAFEM en un escenario de baja exigencia. En el segundo, se seleccionó una función solución que presenta un comportamiento de capa límite al disminuir el valor del parámetro de difusión ε , lo que permitió ilustrar el buen funcionamiento de los esquemas de estabilización en problemas espacios temporales. Finalmente, en el tercer ejemplo se seleccionó una función solución con comportamiento de pulso viajero, permitiendo mostrar de manera simultánea el buen comportamiento de la adaptatividad espacial y temporal.

Finalmente, a modo de resumen, el análisis realizado permitió mejorar y extender algunos de los resultados existentes en el área del análisis *a posteriori* para el problema de difusión-convección-reacción no estacionario, con la determinación de estimadores completamente computables en dos de las normas más usuales al estudiar dicho problema, integrando además dichos resultados con uno de los algoritmos más actuales en el área de adaptatividad espacio temporal.

Con respecto a trabajos futuros, nos gustaría considerar los siguientes tópicos:

- Incorporar condiciones de borde del tipo Dirichlet no homogéneas y condiciones de tipo Neumann al análisis de error *a posteriori* con el fin de obtener un resultado similar en un marco de trabajo más general;
- Buscar métodos alternativos a los argumentos burbuja para la obtención de las cotas inferiores con el fin de obtener constantes sin dependencia simultánea del largo de la malla y el paso de tiempo;
- Desarrollar un detallado estudio de convergencia del método adaptativo desarrollado;
- Extender los resultados computacionales al caso tridimensional.

Bibliografía

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] M. Ainsworth. A framework for obtaining guaranteed error bounds for finite element approximations. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(9):2618–2632, 2010. ISSN 0377-0427. doi: 10.1016/j.cam.2010.01.037. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.037>.
- [3] M. Ainsworth and I. Babuska. Reliable and robust a posteriori error estimation for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 36(2):331–353, 1999.
- [4] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000. ISBN 0-471-29411-X. doi: 10.1002/9781118032824. URL <http://dx.doi.org/10.1002/9781118032824>.
- [5] M. Ainsworth and R. Rankin. Guaranteed computable error bounds for conforming and nonconforming finite element analyses in planar elasticity. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 82(9):1114–1157, 2010. ISSN 0029-5981. doi: 10.1002/nme.2799. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2799>.
- [6] M. Ainsworth and R. Rankin. Realistic computable error bounds for three dimensional finite element analyses in linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(21-22):1909–1926, 2011. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2011.01.017. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2011.01.017>.
- [7] M. Ainsworth and R. Rankin. Guaranteed computable bounds on quantities of interest in finite element computations. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 89(13):1605–1634, 2012. ISSN 0029-5981. doi: 10.1002/nme.3276. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.3276>.

- [8] M. Ainsworth and T. Vejchodský. Fully computable robust a posteriori error bounds for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Numer. Math.*, 119(2):219–243, 2011. ISSN 0029-599X. doi: 10.1007/s00211-011-0384-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-011-0384-1>.
- [9] M. Ainsworth, L. Demkowicz, and C.-W. Kim. Analysis of the equilibrated residual method for a posteriori error estimation on meshes with hanging nodes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40):3493–3507, 2007. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2006.10.020. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.10.020>.
- [10] M. Ainsworth, A. Allendes, G. R. Barrenechea, and R. Rankin. Fully computable a posteriori error bounds for stabilised FEM approximations of convection-reaction-diffusion problems in three dimensions. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 73(9):765–790, 2013. ISSN 0271-2091.
- [11] K. Alhumaizi. Flux-limiting solution techniques for simulation of reaction-diffusion-convection system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 12(6):953–965, 2007. ISSN 1007-5704. doi: 10.1016/j.cnsns.2005.11.005. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2005.11.005>.
- [12] A. Allendes. *Towards fully computable error bounds for the incompressible Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Universidad de Strathclyde, Glaslow, UK, 2012.
- [13] A. Allendes, F. Durán, and R. Rankin. Error estimation for low-order adaptive finite element approximations for fluid flow problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, pages 1–33, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/drv031>.
- [14] R. Araya and P. Venegas. An a posteriori error estimator for an unsteady advection-diffusion-reaction problem. *Comput. Math. Appl.*, 66(12):2456–2476, 2014. ISSN 0898-1221. doi: 10.1016/j.camwa.2013.09.022. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2013.09.022>.
- [15] R. Araya, E. Behrens, and R. Rodríguez. An adaptive stabilized finite element scheme for the advection-reaction-diffusion equation. *Appl. Numer. Math.*, 54(3-4):491–503, 2005. ISSN 0168-9274. doi: 10.1016/j.apnum.2004.09.015. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2004.09.015>.
- [16] M. I. Asensio, B. Ayuso, and G. Sangalli. Coupling stabilized finite element methods with finite difference time integration for advection-diffusion-reaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(35-36):3475–3491, 2007. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2007.03.016. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.016>.

- [17] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597–1615, 1978. doi: 10.1002/nme.1620121010.
- [18] I. Babuška and T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001. ISBN 0-19-850276-1.
- [19] W. Bangerth and R. Rannacher. *Adaptive finite element methods for differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. ISBN 3-7643-7009-2. doi: 10.1007/978-3-0348-7605-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-7605-6>.
- [20] M. Bebendorf. A note on the Poincaré inequality for convex domains. *Z. Anal. Anwendungen*, 22(4):751–756, 2003. ISSN 0232-2064. doi: 10.4171/ZAA/1170. URL <http://dx.doi.org/10.4171/ZAA/1170>.
- [21] R. Becker and M. Braack. A two-level stabilization scheme for the navier-stokes equations. pages 123–130, 2004.
- [22] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. *Math. Comp.*, 74(251):1117–1138 (electronic), 2005. ISSN 0025-5718. doi: 10.1090/S0025-5718-04-01697-7. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01697-7>.
- [23] P. B. Bochev, M. D. Gunzburger, and J. N. Shadid. Stability of the SUPG finite element method for transient advection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(23-26):2301–2323, 2004. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2004.01.026. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.026>.
- [24] D. Braess and J. Schöberl. Equilibrated residual error estimator for edge elements. *Math. Comp.*, 77(262):651–672, 2008. ISSN 0025-5718. doi: 10.1090/S0025-5718-07-02080-7. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-07-02080-7>.
- [25] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008. ISBN 978-0-387-75933-3. doi: 10.1007/978-0-387-75934-0. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>.

- [26] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. ISBN 0-387-97582-9. doi: 10.1007/978-1-4612-3172-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1>.
- [27] E. Burman and A. Ern. Continuous interior penalty *hp*-finite element methods for advection and advection-diffusion equations. *Mathematics of computation*, 76(259):1119–1140, 2007.
- [28] E. Burman and M. A. Fernández. Continuous interior penalty finite element method for the transient convection-diffusion-reaction equation. Research Report RR-6543, 2008. URL <https://hal.inria.fr/inria-00281891>.
- [29] E. Burman and M. A. Fernández. Finite element methods with symmetric stabilization for the transient convection-diffusion-reaction equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198(33-36):2508–2519, 2009. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2009.02.011. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.02.011>.
- [30] E. Burman and P. Hansbo. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(15-16):1437–1453, 2004. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2003.12.032. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.032>.
- [31] Z. Chen and J. Feng. An adaptive finite element algorithm with reliable and efficient error control for linear parabolic problems. *Math. Comp.*, 73(247):1167–1193 (electronic), 2004. ISSN 0025-5718. doi: 10.1090/S0025-5718-04-01634-5. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01634-5>.
- [32] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. ISBN 0-89871-514-8. doi: 10.1137/1.9780898719208. URL <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898719208>.
- [33] R. Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 156(1-4):185–210, 1998. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/S0045-7825(97)00206-5. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00206-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00206-5).
- [34] R. Codina and J. Blasco. Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. *Comput.*

- Vis. Sci.*, 4(3):167–174, 2002. ISSN 1432-9360. doi: 10.1007/s007910100068. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s007910100068>.
- [35] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:1–23, 1943. ISSN 0002-9904.
- [36] P. Destuynder and B. Métivet. Explicit error bounds in a conforming finite element method. *Math. Comp.*, 68(228):1379–1396, 1999. ISSN 0025-5718. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01093-5. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01093-5>.
- [37] J. Douglas, Jr. and T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. In *Computing methods in applied sciences (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975)*, pages 207–216. Lecture Notes in Phys., Vol. 58. Springer, Berlin, 1976.
- [38] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. In *Acta numerica, 1995*, Acta Numer., pages 105–158. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. doi: 10.1017/S0962492900002531. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0962492900002531>.
- [39] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004. ISBN 0-387-20574-8. doi: 10.1007/978-1-4757-4355-5. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4355-5>.
- [40] A. Ern and M. Vohralík. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(1):198–223, 2010. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/090759008. URL <http://dx.doi.org/10.1137/090759008>.
- [41] A. Ern, I. Smears, and M. Vohralík. Guaranteed, locally space-time efficient, and polynomial-degree robust a posteriori error estimates for high-order discretization of parabolic problems. *arXiv preprint arXiv:1610.01804*, 2016.
- [42] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3. doi: 10.1090/gsm/019. URL <http://dx.doi.org/10.1090/gsm/019>.
- [43] R. E. Ewing, editor. *The mathematics of reservoir simulation*, volume 1 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM),

- Philadelphia, PA, 1983. ISBN 0-89871-192-4. doi: 10.1137/1.9781611971071. URL <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611971071>.
- [44] L. P. Franca and F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(13-14):1785–1800, 2000. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/S0045-7825(00)00190-0. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00190-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00190-0).
- [45] F. Gaspoz, C. Kreuzer, K. Siebert, and D. Ziegler. A convergent time-space adaptive dg(s) finite element method for parabolic problems motivated by equal error distribution. *arXiv preprint arXiv:1610.06814*, 2016.
- [46] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986. ISBN 0-387-15796-4. URL <http://opac.inria.fr/record=b1081719>. Extended version of : Finite element approximation of the Navier-Stokes equations.
- [47] J.-L. Guermond. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(6):1293–1316, 1999. ISSN 0764-583X. doi: 10.1051/m2an:1999145. URL <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:1999145>.
- [48] J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of Galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA J. Numer. Anal.*, 21(1):165–197, 2001. ISSN 0272-4979. doi: 10.1093/imanum/21.1.165. URL <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/21.1.165>.
- [49] T. J. R. Hughes and A. Brooks. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In *Finite element methods for convection dominated flows (Papers, Winter Ann. Meeting Amer. Soc. Mech. Engrs., New York, 1979)*, volume 34 of *AMD*, pages 19–35. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), New York, 1979.
- [50] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73(2):173–189, 1989. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(89)90111-4. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90111-4](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(89)90111-4).

- [51] W. Hundsdorfer and J. Verwer. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, volume 33 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. ISBN 3-540-03440-4. doi: 10.1007/978-3-662-09017-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-09017-6>.
- [52] M. Jakob. *Heat Transfer*. Number v. 2 in Heat Transfer. Wiley, 1957. URL <https://books.google.cl/books?id=iAJRAAAAMAAJ>.
- [53] V. John and J. Novo. Error analysis of the SUPG finite element discretization of evolutionary convection-diffusion-reaction equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3):1149–1176, 2011. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/100789002. URL <http://dx.doi.org/10.1137/100789002>.
- [54] C. Kreuzer, C. A. Möller, A. Schmidt, and K. G. Siebert. Design and convergence analysis for an adaptive discretization of the heat equation. *IMA J. Numer. Anal.*, 32(4):1375–1403, 2012. ISSN 0272-4979. doi: 10.1093/imanum/drr026. URL <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/drr026>.
- [55] O. Ladyzhenskaia, V. Solonnikov, and N. Ural'tseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. 1988. URL <https://books.google.cl/books?id=dolUcRSDPgkC>.
- [56] O. Lakkis and C. Makridakis. Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for fully discrete linear parabolic problems. *Math. Comp.*, 75(256):1627–1658, 2006. ISSN 0025-5718. doi: 10.1090/S0025-5718-06-01858-8. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01858-8>.
- [57] G. Lube and D. Weiss. Stabilized finite element methods for singularly perturbed parabolic problems. *Appl. Numer. Math.*, 17(4):431–459, 1995. ISSN 0168-9274. doi: 10.1016/0168-9274(95)00024-O. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00024-O](http://dx.doi.org/10.1016/0168-9274(95)00024-O).
- [58] R. Luce and B. I. Wohlmuth. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(4):1394–1414 (electronic), 2004. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/S0036142903433790. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142903433790>.
- [59] C. Makridakis and R. H. Nochetto. Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4):1585–1594, 2003. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/S0036142902406314. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142902406314>.

- [60] G. I. Marchuk. *Mathematical models in environmental problems*, volume 16 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. ISBN 0-444-87965-X. Translated from the Russian.
- [61] G. Matthies, P. Skrzypacz, and L. Tobiska. Stabilization of local projection type applied to convection-diffusion problems with mixed boundary conditions. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 32:90–105, 2008. ISSN 1068-9613.
- [62] S. G. Mikhlin. *Constants in some inequalities of analysis*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986. ISBN 0-471-90559-3. Translated from the Russian by Reinhard Lehmann.
- [63] C. A. Möller. *Adaptive Finite Elements in the Discretization of Parabolic Problems*. Logos Verlag Berlin GmbH, 2010.
- [64] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5:286–292 (1960), 1960. ISSN 0003-9527.
- [65] M. Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167(3-4):223–237, 1998. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/S0045-7825(98)00121-2. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00121-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00121-2).
- [66] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. ISBN 3-540-57111-6.
- [67] A. Rap, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic, and X. Wen. The inverse source problem for the variable coefficients convection-diffusion equation. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 15(5):413–440, 2007. ISSN 1741-5977. doi: 10.1080/17415970600731274. URL <http://dx.doi.org/10.1080/17415970600731274>.
- [68] S. Repin. Estimates of deviations from exact solutions of initial-boundary value problem for the heat equation. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 13(2):121–133, 2002. ISSN 1120-6330.
- [69] S. Repin. *A posteriori estimates for partial differential equations*, volume 4 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008. ISBN 978-3-11-019153-0. doi: 10.1515/9783110203042. URL <http://dx.doi.org/10.1515/9783110203042>.

- [70] S. Repin and S. Sauter. Functional a posteriori estimates for the reaction-diffusion problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(5):349–354, 2006. ISSN 1631-073X. doi: 10.1016/j.crma.2006.06.024. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2006.06.024>.
- [71] H. G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, volume 24 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. ISBN 978-3-540-34466-7. Convection-diffusion-reaction and flow problems.
- [72] M. Stynes. Steady-state convection-diffusion problems. *Acta Numer.*, 14:445–508, 2005. ISSN 0962-4929. doi: 10.1017/S0962492904000261. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0962492904000261>.
- [73] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. ISBN 978-3-540-33121-6; 3-540-33121-2.
- [74] L. Tobiska and R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for stabilized finite element methods. *IMA J. Numer. Anal.*, 35(4):1652–1671, 2015. ISSN 0272-4979. doi: 10.1093/imanum/dru060. URL <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/dru060>.
- [75] F. Tröltzsch. *Optimal control of partial differential equations*, volume 112 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. ISBN 978-0-8218-4904-0. doi: 10.1090/gsm/112. URL <http://dx.doi.org/10.1090/gsm/112>. Theory, methods and applications, Translated from the 2005 German original by Jürgen Sprekels.
- [76] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems: $L^r(0, T; W^{1,\rho}(\Omega))$ -error estimates for finite element discretizations of parabolic equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 14(4):487–518, 1998. ISSN 0749-159X. doi: 10.1002/(SICI)1098-2426(199807)14:4<487::AID-NUM4>3.0.CO;2-G. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2426\(199807\)14:4<487::AID-NUM4>3.0.CO;2-G](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1098-2426(199807)14:4<487::AID-NUM4>3.0.CO;2-G).
- [77] R. Verfürth. A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation. *Calcolo*, 40(3):195–212, 2003. ISSN 0008-0624. doi: 10.1007/s10092-003-0073-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10092-003-0073-2>.

- [78] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for stationary convection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(4):1766–1782, 2005. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/040604261. URL <http://dx.doi.org/10.1137/040604261>.
- [79] R. Verfürth. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. OUP Oxford, 2013.
- [80] M. Vohralík. A posteriori error estimation in the conforming finite element method based on its local conservativity and using local minimization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(11-12):687–690, 2008. ISSN 1631-073X. doi: 10.1016/j.crma.2008.03.006. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2008.03.006>.
- [81] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. ISBN 3-540-58654-7. Reprint of the sixth (1980) edition.