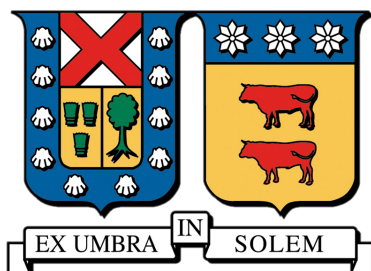


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE METALURGIA Y MATERIALES
SANTIAGO - CHILE



**MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO PARA FLUJOS GRANULARES
IMPULSADOS POR GRAVEDAD**

Autor:

Rodolfo Sebastian Morales Gálvez

Trabajo de tesis presentado como requisito parcial para optar al grado de:

**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica
Ingeniero Civil de Minas**

Profesor Guía:

Dr. Sergio Palma Moya

Defendida públicamente el 11 de abril de 2022 ante la comisión conformada por:

Dr. Claudio Aguilar Ramírez
Dr. Maximiliano Rivera Urrejola
Dr. Francisco Vivanco Avaria
Dr. René Gómez Puigpinos

Universidad Técnica Federico Santa María
Universidad Técnica Federico Santa María
Universidad de Santiago de Chile
Universidad de Concepción

Agradecimientos

A Dios, por las experiencias y personas que han estado en mi camino.

A **Verena**. Gracias por acompañarme en este recorrido, por creer en mí y entregarme tu apoyo incondicional.

A mi madre **Fransia** por su valentía, perseverancia y amor. Cada uno de mis logros, es tu logro.

A mi hermana **Alisson** y mis hermanos **Gonzalo**, **Samuel** y **Erick**. Ustedes son mi principal motivación.

A mis amigos de la Universidad, **Margarita**, **Daniel**, **Luis**, **Antonio**, **Nelson**, **Ignacio**, **José** y **Martín**. Gracias por el apoyo, la amistad, y las veces que me cubrieron permitiendo dedicar más tiempo a mis estudios de física en lugar de a nuestra especialidad.

A la Ingeniera **Yeanette Soto**. Gracias por el apoyo incondicional entregado durante mis años de estudio.

Al Ingeniero **Carlos Soto**. Gracias por la confianza, los consejos y el apoyo brindado.

Al profesor de Física **Maximiliano Rivera**. Gracias por guiar mi aprendizaje autodidacta, por los consejos y el apoyo brindado.

A mi profesor guía **Sergio Palma**. Gracias por la confianza, orientación, paciencia y dedicación que permitieron la ejecución del presente trabajo de investigación.

A los profesores de Ingeniería Civil de Minas, **María Teresa Zandarín**, **Víctor Encina** y **Marcelo Pérez**. Gracias por creer y fomentar mis habilidades.

A los profesores de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica, **Claudio Aguilar**, **Juan Donoso** y **Jesús Casas**. Gracias por la calidad, calidez y valor humano que me transmitieron en cada una de sus clases.

A los profesores **Francisco Vivanco** de la Universidad de Santiago de Chile, **René Puigpinos** de la Universidad de Concepción, y **Hugo Ulloa** de la Universidad de Pensilvania en EE.UU. Gracias por su contribución a mejorar la calidad del presente trabajo de investigación.

A la dirección de Postgrados y Programas (**DPP**) de la Universidad Técnica Federico Santa María. Gracias por otorgarme la beca de Arancel que me permitió financiar los estudios de Magíster.

A todos ustedes, gracias por ser fuente de inspiración, apoyo y fortaleza.

A PHYSICO-MATHEMATICAL MODEL FOR GRAVITY DRIVEN GRANULAR FLOWS

By: Rodolfo Sebastian Morales Gálvez

Abstract

The study and comprehension of the mechanics of granular media is of great importance for the mining industry. From the first stages of an exploitation project, processes of extraction, comminution, transport and storage of fragmented ore should be taken into account, which today are controlled by mechanisms currently unknown. One of the most interesting phenomenas in this regard is the flow of granular material driven by gravity. Between its applications outstand the design of exploitation methods as Block Caving, in which a fracture and disaggregation are induced in the base of the mineralised rock massif, to then extract the fragmented material through an arrangement of openings arranged in the base.

In this thesis a novel physico-mathematical model is proposed for granular flows driven by gravity. For its elaboration it is proposed that the particles descend by forming clusters in response to local changes in the tensional state. From this hypothesis, an expression that relates the particle flux density to the driving force is derived, where the latter concept is composed of the divergence of the tensional state and the force of gravity. Along with this, it is postulated that the dynamics is controlled by a new dimensionless number obtained as the quotient between the driving forces and the resisting force developed between the particles in motion and those that remain static.

The model was numerically resolved through the finite element method, archiving an adequate reproduction of experimental results of Fullard et al. (2019) to the flow in silos with one and two openings. The results were compared with the ones obtained through the implementation of Neederman & Tüzün (1979) model, showing a great improvement in the description of extraction zones and velocity profiles. Analytical solutions were also obtained for the flow in an inclined plane and Taylor-Couette type. In both cases the model predicts the existence of a finite-thickness flow zone, in agreement with experimental results. The predicted velocity profiles were contrasted with the measurements of Wang et al. (2019), Mueth et al. (2000), Bocquet et al. (2002) and F. da Cruz (2004) showing an adequate reproduction in all cases.

MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO PARA FLUJOS GRANULARES IMPULSADOS POR GRAVEDAD

Por: Rodolfo Sebastian Morales Gálvez

Resumen

El estudio y comprensión de la mecánica de los medios granulares es de gran importancia para la industria minera. Desde las primeras etapas de un proyecto de explotación se deben tener en cuenta los procesos de extracción, conminución, transporte y almacenamiento de mineral fragmentado, los que son controlados por mecanismos que aun nos resultan desconocidos. Uno de los fenómenos de mayor interés es el flujo de material granular impulsado por gravedad. Entre sus aplicaciones destaca el diseño de métodos de explotación como el Block Caving, en que se induce la fractura y disgregación de la base de un macizo de roca mineralizada, para luego extraer el material fragmentado a través de un arreglo de aberturas dispuestas en su base.

En esta tesis se propone un nuevo modelo físico-matemático para flujos granulares impulsados por gravedad. Para su elaboración se propone que las partículas descienden formando clusters en respuesta a cambios locales en el estado tensional. A partir de esta hipótesis se deriva una expresión que relaciona la densidad de flujo de partículas con la fuerza impulsora, compuesta por la divergencia del estado tensional y la fuerza de gravedad. Junto con ello se postula que la dinámica se encuentra controlada por un nuevo número adimensional obtenido como el cociente entre las fuerzas impulsoras y la fuerza resistente desarrollada entre las partículas en movimiento y aquellas que permanecen estáticas.

El modelo fue resuelto numéricamente por medio del método de elementos finitos, logrando una adecuada reproducción de los resultados experimentales de Fullard y col. (2019) para el flujo en silos con una y dos aberturas. Los resultados fueron comparados con los obtenidos a través de la implementación del modelo de Neederman & Tüzün (1979), mostrando una gran mejora en la descripción de las zonas de extracción y los perfiles de velocidad. También se obtuvieron soluciones analíticas para el flujo en un plano inclinado y de tipo Taylor-Couette. En ambos casos el modelo predice la existencia de una zona de flujo de espesor finito, en acuerdo con los resultados experimentales. Los perfiles de velocidad predichos fueron contrastados con las mediciones de Wang y col. (2019), Mueth y col. (2000), Bocquet y col. (2002) y F. da Cruz (2004) mostrando una adecuada reproducción en todos los casos.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Introducción general	7
1.2. Descripción del problema	8
1.3. Objetivos	8
1.4. Alcances y limitaciones	8
2. Materia Granular	10
2.1. Materia granular	10
2.2. Equilibrio y fuerzas de contacto	11
2.3. Ecuaciones de conservación	13
2.4. Elasticidad	17
2.5. Plasticidad	20
2.6. Reología de medios granulares	24
3. Flujo Gravitacional en Minería	27
3.1. Minería de Block Caving	27
3.2. Experiencia del siglo XX	28
3.3. Experiencia del siglo XXI	33
4. Modelos Analíticos de Flujo Gravitacional	35
4.1. Modelos analíticos	35
4.2. Modelo cinemático	36
4.3. Modelo de difusión de vacíos	38
4.4. Modelo de difusión de burbujas	40
4.5. Regla de flujo estocástico	43
5. Modelo Teórico de Flujo Gravitacional	47
5.1. Discusión	47
5.2. Modelo físico-matemático	52
5.2.1. Promedio de la ecuación de movimiento en la zona movilizada	52
5.2.2. Promedio de la ecuación de movimiento en la zona no-movilizada	53
5.2.3. Fuerza de fricción	54
5.2.4. Representación tensor σ	54
5.2.5. Representación tensor $\dot{\gamma}$	56
5.2.6. Solución analítica caso bidimensional	57

5.3.	Aplicación al flujo en silos	59
5.4.	Aplicación al flujo en planos inclinados	71
5.5.	Aplicación al flujo de Taylor-Couette	79
6.	Conclusiones y Perspectivas	84
A.	Elementos de mecánica de sólidos	87
A.1.	Tensor de Esfuerzos	87
A.1.1.	Fuerzas y esfuerzos	87
A.1.2.	Matriz de cambio de coordenadas	89
A.1.3.	Transformación del tensor de esfuerzos	90
A.1.4.	Contracción del tensor de esfuerzos	90
A.1.5.	Diagonalización del tensor de esfuerzos	91
A.1.6.	Esfuerzo hidrostático y desviador	92
A.1.7.	Círculo de Mohr	92
A.1.8.	Ecuaciones de equilibrio	95
A.2.	Tensor de Deformaciones	97
A.2.1.	Deformación y vector desplazamiento	97
A.2.2.	Tensor de deformación	97
A.2.3.	Cambios longitudinales en pequeñas deformaciones	98
A.2.4.	Ley de Hooke	99
A.2.5.	Deformaciones homogéneas	100
A.2.6.	Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos	101
A.2.7.	Ecuaciones de compatibilidad	102
A.2.8.	Problemas bidimensionales de deformación plana	102
A.2.9.	Problemas bidimensionales de tensión plana	103
A.3.	Fuerzas de Contacto	103
A.3.1.	Solución de Boussinesq	103
A.3.2.	Fuerza de contacto normal	103
A.3.3.	Fuerza de contacto tangencial	104
A.3.4.	Integrales fuerzas de contacto	107
B.	Elementos de cálculo estocástico	110
B.1.	Conceptos Básicos en Teoría de Probabilidades	110
B.1.1.	Axiomas	110
B.1.2.	Probabilidad conjunta y condicional e independencia de sucesos	111
B.1.3.	Variables aleatorias, promedios y distribuciones	112
B.1.4.	Momentos y cumulantes de una distribución	114
B.1.5.	Teorema del límite central	115
B.1.6.	Caminante aleatorio unidimensional	116
B.2.	Entropía y Probabilidad	118
B.2.1.	Entropía y teoría de la información	118
B.2.2.	Máxima entropía, distribución discreta	119
B.2.3.	Máxima entropía, distribución continua	121
B.3.	Difusión y Movimiento Browniano	121

B.3.1.	Difusión y ley de Fick	121
B.3.2.	Modelos de Eistein y Smoluchowski del movimiento browniano	123
B.3.3.	Ecuación de Langevin del movimiento Browniano	124
B.3.4.	Equivalencia entre los modelos de Einstein y Langevin	127
B.3.5.	Probabilidad condicional en el modelo de Langevin	128
B.3.6.	Ecuación de Fokker-Planck	129
B.4.	Procesos Estocásticos	131
B.4.1.	Procesos Estocásticos	131
B.4.2.	Procesos de Markov	132
B.4.3.	Martingalas	134
B.4.4.	Ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov	135
B.5.	Integrales Gaussianas multidimensionales	137
B.5.1.	Distribución gaussiana multidimensional	137
B.5.2.	Correlaciones y teorema de Wick	138
B.5.3.	Transformada de Fourier	139
C.	Modelo de subsidencia	141
C.1.	Modelo de subsidencia	141

Capítulo 1

Introducción

“IF YOU CAN’T SOLVE A PROBLEM, THEN THERE IS AN EASIER PROBLEM YOU CAN SOLVE: FIND IT”. GEORGE POLYA.

1.1. Introducción general

La materia granular es un conglomerado de partículas rígidas visibles en que la fricción es la fuerza de interacción predominante ([Andreotti y col. 2013](#)). Uno de los fenómenos de creciente interés en esta área es el flujo en silos a través de una abertura basal, en que las partículas descargan por acción de la fuerza de gravedad, también conocido como flujos granulares impulsados por gravedad. Este fenómeno es de particular interés en las industrias química y agrícola, en que los silos se utilizan ampliamente para almacenar materiales granulares. Las aplicaciones de este fenómeno se extienden a otras áreas de la ingeniería, como el diseño de reactores nucleares de lecho de bolas ([Rycroft, Grest y col. 2006](#); [Shengyao y col. 2019](#)) y el diseño de métodos masivos de minería subterránea como el Block y el Panel Caving ([Castro y col. 2007](#); [Vivanco, Watt y col. 2011](#); [Vivanco y Melo 2013](#); [K. Sánchez y col. 2019](#); [V. Sánchez y col. 2019](#); [Sun y col. 2019](#)). Este último es la principal aplicación del fenómeno en la industria nacional, en que la minería del cobre¹ se ha visto perjudicada por el agotamiento en las reservas superficiales y la disminución en las leyes de mineral. Esta situación ha originado la migración desde los métodos de explotación superficiales, hacia métodos de alta capacidad productiva y bajo costo operacional como el Block Caving y sus variantes. Ejemplo de esto es la transición de explotación de rajo abierto a subterránea de la mina Chuquicamata de CODELCO, considerada como la más grande del mundo en su tipo. Chuquicamata cuenta con 1250 metros de profundidad y una superficie de 800 hectáreas, y a fines de 2019 comenzó a operar con el método de Block Caving, extendiendo su vida útil en unos 50 años ([CODELCO 2021](#)). Esta tendencia que ha llegado para quedarse plantea nuevos desafíos en diversas áreas de la ingeniería y las ciencias, particularmente en la física de medios granulares. Hoy en día, a pesar de los numerosos estudios realizados para comprender la dinámica de los flujos granulares impulsados por la gravedad ([I. Sielamowicz y col. 2005](#); [Irena Sielamowicz, Błoński y col. 2006](#); [Irena Sielamowicz, Czech y col. 2015](#); [Kamrin y M. Z.](#)

¹Actividad en que Chile contribuye con el 28 % de la producción mundial (principal productor) y el 23 % de las reservas ([Consejo Minero 2020](#))

Bazant 2007; Rycroft, Wong y col. 2010; Henann y Kamrin 2013; Staron y col. 2014; Hung y col. 2018), se continúa sin que exista una teoría comúnmente aceptada para explicar la fenomenología observada.

1.2. Descripción del problema

El uso de métodos de hundimiento subterráneos masivos es la respuesta al agotamiento de las reservas superficiales y a la disminución en las leyes de mineral. En la actualidad, el diseño de estos métodos de explotación se realiza en base a metodologías empíricas que requieren de la definición de unos pocos parámetros, tales como la granulometría de la roca fragmentada y la geometría del punto de extracción. Sin embargo, su uso conlleva a un alto nivel de incertidumbre, motivando al ingeniero a ejecutar diseños conservadores que pueden tener grandes repercusiones en los costos de inversión y operación de la mina. No obstante, también existen limitaciones asociadas a la implementación de métodos más robustos basados en simulación computacional, ya sea porque no logran capturar adecuadamente la fenomenología observada, dependen de un gran número de parámetros desconocidos, o porque requieren de grandes capacidades de cálculo, lo que vuelve inviable su implementación en la solución de problemas en condiciones realistas (como ocurre en los modelamientos DEM). Por lo anterior, la mejora en la eficiencia y eficacia de los métodos subterráneos de explotación masiva requiere del desarrollo de modelos fundamentados en las leyes de la mecánica que, a partir de unos pocos parámetros, logren predecir el comportamiento del material granular originado con la fragmentación de la roca.

1.3. Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un modelo físico-matemático para la predicción del flujo de materiales granulares impulsados por gravedad con aplicaciones en minería subterránea.

Objetivos específicos

- Establecer un contexto teórico sobre el cual fundamentar la deducción de las ecuaciones de flujo de medios granulares impulsados por gravedad.
- Validar el modelo a partir de resultados experimentales.

1.4. Alcances y limitaciones

Sólo se aborda el fenómeno de flujo gravitacional en un medio denso y seco, en una condición de equilibrio cuasi-estático, sin migración de finos o infiltración de otras fases.

Negocio Minero	Actividad económica asociada a la extracción y comercialización de un recurso mineral
Minería de Superficie	Explotación minera desarrollada sobre la superficie del terreno
Minería Subterránea	Explotación minera desarrollada bajo la superficie del terreno
Minería por Hundimiento	Método de explotación subterráneo
Macizo rocoso	Conjunto de bloques de una matriz rocosa y discontinuidades
Roca	Material sólido, agregado de minerales o no minerales y que no tiene una composición química definida
Mineral	Sustancia natural, normalmente sólido e inorgánico, de composición química definida que posee determinada estructura cristalina
Pilar	Columna vertical/horizontal de macizo rocoso
A	Escalar
$\mathbf{A}$	Vector/tensor
A_i	Componente i – <i>ésima</i> vector $\mathbf{A}$
A_{ij}	Componete i, j tensor $\mathbf{A}$
$\langle A \rangle_\Omega$	Valor promedio de A sobre la región Ω
$\int_\Omega d^3x A$	Valor integral de A sobre la región Ω
$\int_{\partial\Omega} d^2x A$	Valor integral de A sobre la frontera de la región Ω
ρ	Densidad
D_{50}	Diámetro promedio de partícula
D_h	Diámetro hidráulico
d	Longitud difusiva
μ	Coefficiente de fricción
μ_k	Coefficiente de fricción cinético
ϕ	Ángulo de fricción interna
η	Viscosidad dinámica
ν	Viscosidad cinemática
k	Permeabilidad
P	Presión
J	Invariante deviatórico tensor de esfuerzos
I	Número de inercia
Y	Número de resistencia
n	Número de dimensiones espaciales
$\mathbf{v}$	Vector velocidad
(u, v, z)	Componentes cartesianas de $\mathbf{v}$
$\mathbf{g}$	Vector aceleración de gravedad
g	Magnitud aceleración de gravedad
σ	Tensor de esfuerzos
$\mathbf{e}$	Tensor de deformación
$\dot{\gamma}$	Tensor de velocidad de deformación
τ	Componente deviatórica tensor de esfuerzos
$\tilde{\mathbf{e}}$	Componente deviatórica tensor de deformación
$\tilde{\dot{\gamma}}$	Componente deviatórica tensor de velocidad de deformación

Capítulo 2

Materia Granular

“RESEARCH IS WHAT I’M DOING WHEN I DON’T KNOW WHAT I’M DOING”. WERNHER VON BRAUN.

2.1. Materia granular

La materia granular es un conglomerado de partículas sólidas y macroscópicas en que la fuerza de interacción predominante es la fricción ([Andreotti y col. 2013](#)). El término “macroscópico” alude a que las partículas son visibles por el ojo humano, en contraste con las partículas microscópicas como los átomos y moléculas. Existen muchos ejemplos de materiales granulares en nuestro entorno, desde los pequeños granos de azúcar que utilizamos al preparar un té, a rocas que pueden medir varios metros, e incluso asteroides de cientos de metros.

A diferencia de otras fases, la materia granular se ha resistido a formulaciones teóricas que permitan describir de forma unificada su dinámica para geometrías y fuerzas arbitrarias, a causa de su complejo comportamiento que suele asemejarse a un sólido, líquido o gas dependiendo de la circunstancia ([Kamrin 2008](#)). Una de las principales características de la materia granular es que tiende a disipar rápidamente la energía de sus partículas debido a las fuerzas de fricción. Esto da lugar a fenómenos únicos que no son observados en los estados de materia tradicionales, tales como la respuesta a bajas aceleraciones (segregación, compactación y convección), la posibilidad de experimentar avalanchas, la formación de cadenas de esfuerzo, entre otros.

Los esfuerzos por comprender la física de los medios granulares no se deben tan sólo a la curiosidad académica, sino también a la necesidad creciente de la industria por contar con modelos predictivos que permitan disminuir la incertidumbre de los diseños. Este es el caso de la minería por hundimiento, en que una mejora en la descripción del campo de velocidades permitiría maximizar la recuperación del mineral extraído, incrementando el valor del negocio y evitando la formación de pilares de material granular que pueden concentrar esfuerzos sobre las galerías subterráneas en que se desplaza el personal.

De forma complementaria al presente capítulo, en el Anexo A se presenta un resumen con

aspectos fundamentales de la mecánica de medios continuos.

2.2. Equilibrio y fuerzas de contacto

El equilibrio de un sólido granular es el resultado de una compleja interacción mecánica, en que las fuerzas de contacto se organizan de modo que cada una de ellas se encuentre en equilibrio. Para un empaque aleatorio de partículas, la magnitud de las fuerzas y su dirección pueden resultar altamente no triviales, debido, principalmente, al efecto de las fuerzas de fricción, que actúan como fuentes de indeterminación al introducir más incógnitas que ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos de rotación, originando la existencia de múltiples soluciones ([Andreotti y col. 2013](#)).

Un primer resultado en relación a la magnitud f de las fuerzas de contacto entre granos es la existencia de cadenas de fuerzas y de distribuciones de probabilidad $P(f)$ de que f se encuentre entre f y $f + df$. Éstas se caracterizan por un amplio rango de variación, en que fuerzas de gran magnitud coexisten con fuerzas de muy baja magnitud ([Jaeger y col. 1996](#)). Se ha encontrado que fuerzas de gran magnitud se comportan de forma exponencial $P(f) \propto e^{-\beta f/\bar{f}}$ con β cercano a 1, en tanto que fuerzas de baja magnitud siguen una ley de potencia $P(f) \propto (f/\bar{f})^\alpha$ con α cercano a cero. Estas distribuciones muestran ser independientes de si el arreglo de granos es regular o aleatorio ([Radjai, Jean y col. 1996](#)).

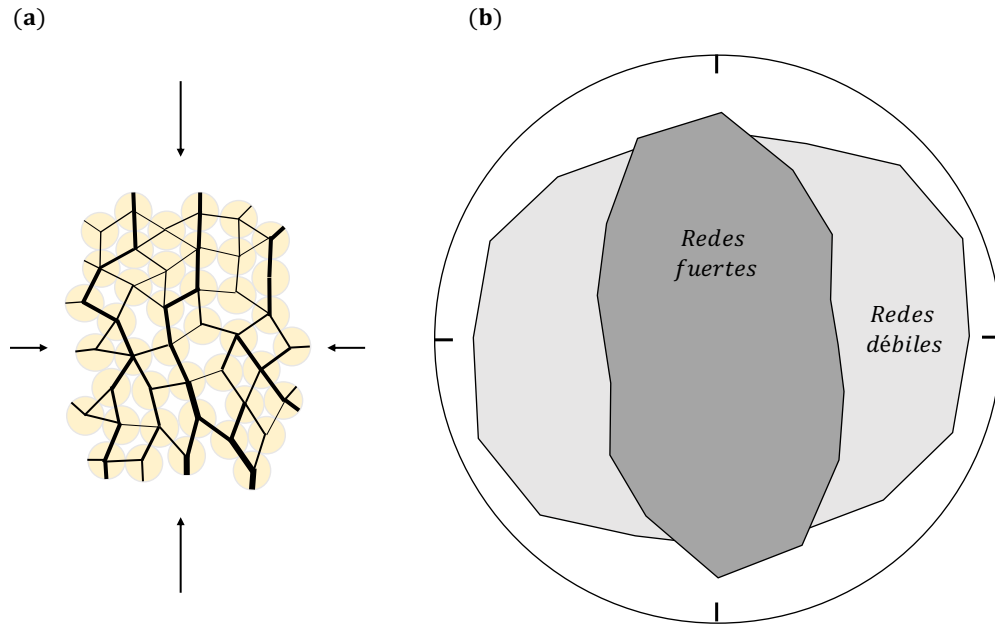


Figura 2.1: *Distribución angular fuerzas de contacto: (a) ensayo de compresión triaxial, líneas negras representan magnitud fuerzas de contacto; y (b) distribución angular fuerzas de contacto para redes de fuerzas débiles y fuertes. Figura adaptada de [Andreotti y col. 2013](#) a partir del trabajo original de [Radjai, Wolf y col. 1998](#).*

La distribución angular de las cadenas de fuerza y de los contactos se ve afectada por el método de preparación y la carga. En compresión isotrópica se observan distribuciones isotrópicas, en tanto que en presencia de una carga anisotrópica, los contactos se forman preferencialmente en la dirección de la carga mayor. Un aspecto relevante es que en ambos casos las fuerzas de baja magnitud muestran mantener una distribución isotrópica (independiente de la orientación), sugiriendo que son equivalentes a la presión, mientras que las fuerzas de gran magnitud se orientan en la dirección de la carga mayor, contribuyendo a los esfuerzos de corte ([Radjai, Wolf y col. 1998](#)). Ver Figura 2.2.

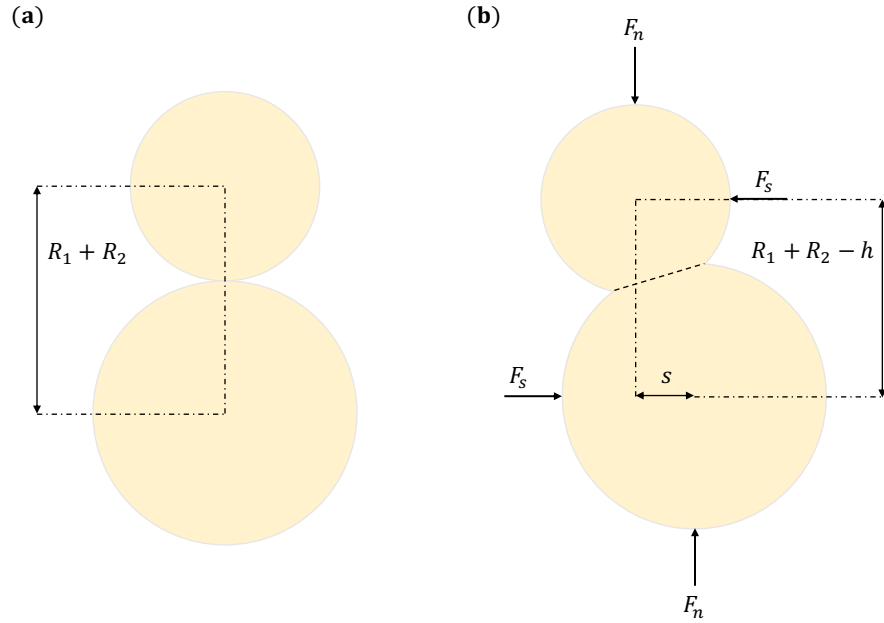


Figura 2.2: *Fuerzas de contacto entre esferas: (a) antes del contacto; y (b) después del contacto.*

Existen expresiones analíticas que permiten calcular las fuerzas de contacto para geometrías simples en el caso de cuerpos perfectamente elásticos. Una discusión más detallada sobre su origen y naturaleza puede ser encontrada en [Johnson 1985](#), [Elata y Berryman 1996](#) y [Landau y col. 1969](#). El caso particular de dos esferas idénticas en contacto proporciona el siguiente resultado para la fuerza normal:

$$F_n = \frac{2}{3}k_n h \quad \text{con} \quad k_n = \frac{9}{16} \frac{E}{(1 - \nu^2)} (2R)^{1/2} h^{1/2}, \quad (2.1)$$

con E , ν , R y h los módulos de Young y Poisson, el radio y la indentación entre ambas esferas, respectivamente. Esta expresión sólo es válida en compresión y es conocida como ley de contacto normal de Hertz ([Johnson 1985](#)).

El caso de fuerzas tangenciales es más complejo, y requiere descomponer la historia de carga en pasos incrementales para la fuerza tangencial ΔF_s y normal ΔF_n . Para el caso

particular en que no existen deslizamientos a lo largo de toda el área de contacto ($F_s \leq \mu_f F_n$), el incremento en la fuerza tangencial es:

$$\Delta F_s = k_s \Delta s \quad \text{con} \quad k_s = \frac{2E}{(1+\nu)(2-\nu)} (2R)^{1/2} h^{1/2} \left(1 - \frac{F_s}{\mu F_n}\right)^{1/3}, \quad (2.2)$$

donde s corresponde a la deformación de corte relativa entre ambas esferas. A causa de esta expresión se dice que la fuerza tangencial entre partículas es camino-dependiente, ya que depende de la trayectoria de tensiones y no únicamente del resultado instantáneo final. Esta expresión es conocida como solución con deslizamiento de Mindlin ([Johnson 1985](#)).

Las leyes de contacto normal y tangencial se derivan de la teoría de la elasticidad (lineal), utilizando el resultado de Boussinesq al problema de un semi-espacio infinito sujeto a la acción de una carga puntual¹, bajo el supuesto de que las superficies de contacto son localmente planas. Este procedimiento junto a otros métodos de derivación de fuerzas de contacto puede ser encontrado en los trabajos originales de [Mindlin 1949](#) y [Mindlin y Deresiewicz 1953](#) o bien en los libros de mecánica de contacto de [J.R. 2018](#) y [Popov y col. 2019](#).

2.3. Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía de un medio granular son formuladas en completa analogía con los medios continuos, satisfaciendo consigo los principios elementales de la mecánica. Las ecuaciones de conservación de masa y momentum corresponden a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \right), \quad (2.3)$$

y

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \quad \left(\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \right). \quad (2.4)$$

Aquí $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ corresponden a la densidad, velocidad y tensor de esfuerzos, respectivamente. Observar que se ha adoptado el convenio de Einstein de suma sobre índices repetidos, así $\partial_j \sigma_{ij} = \partial_x \sigma_{ix} + \partial_y \sigma_{iy} + \partial_z \sigma_{iz}$. La interpretación del termino $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ se obtiene por medio de su integración en un volumen de control V de frontera ∂V . En virtud del teorema de la divergencia, se observa que su contribución corresponde a

$$\int_V d^3x \partial_i \sigma_{ij} = \int_{\partial V} d^2x \sigma_{ij} n_j = F_i,$$

es decir, el aporte total del tensor de esfuerzos es igual a la fuerza externa aplicada sobre la superficie del volumen de control, con una fuerza por unidad de área igual a $dF_i = \sigma_{ij} n_j dS$.

¹La solución de carga puntual, o función de Green, es integrada sobre una distribución de carga compatible con las condiciones de borde del problema de deformación, permitiendo obtener expresiones para las fuerzas de contacto.

Las componentes σ_{ij} del tensor de esfuerzos se interpretan como la fuerza por unidad de área en la dirección i aplicada sobre una superficie cuya normal se orienta en la dirección j . Ver Figura 2.3. Una de las consecuencias de que las fuerzas puedan ser expresadas como una divergencia, es que satisfacen el principio de acción y reacción para cada par de elementos infinitesimales de volumen del medio.

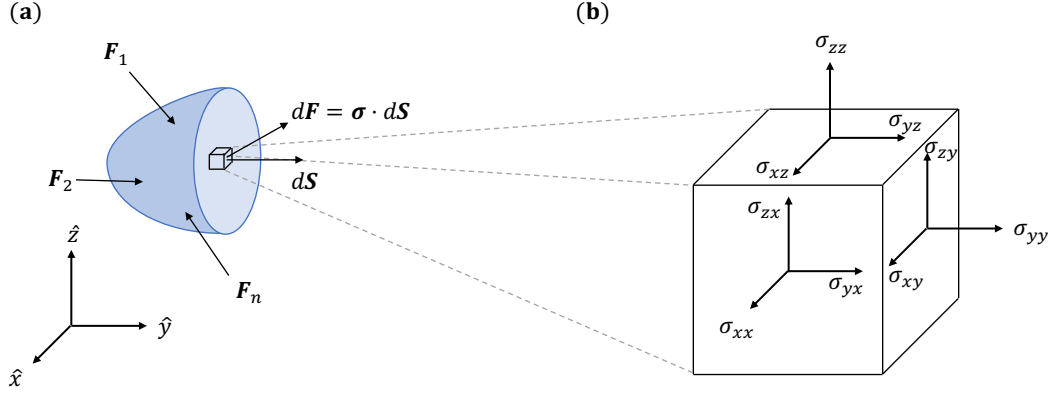


Figura 2.3: Interpretación tensor de esfuerzos: (a) sólido sobre el cual se aplican fuerzas externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$; y (b) elemento diferencial de sólido sobre el cual actúan las componentes del tensor de esfuerzos. Observar que sobre la cara de normal $\hat{x}$ se aplican las componentes σ_{xx} (normal), σ_{yx} (tangencial) y σ_{zx} (tangencial).

El tensor de esfuerzos se suele descomponer en sus componentes hidrostática y desviadora, definidas por:

$$P = -\frac{\sigma_{kk}}{n} \quad \text{y} \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij}, \quad (2.5)$$

respectivamente.

La aplicabilidad de las ecuaciones de conservación de masa y momentum no es inmediata para un material que, por naturaleza, es discontinuo. Un método útil para derivar estas ecuaciones a partir de magnitudes microscópicas asociadas a la posición, velocidad, masa y fuerza entre partículas, consiste en promediar las ecuaciones de movimiento de partículas individuales dentro de un volumen de control. La idea de este método popularizado por [Glasser y Goldhirsch 2001](#) consiste en que existe una función sobre la que es posible promediar magnitudes microscópicas permitiendo definir ventanas espacio-temporales en que el sistema admite una descripción euleriana². Tal función posee un tamaño que define las escalas espaciales w_c y temporales τ_c típicas sobre las que el medio granular puede ser descrito como un continuo. Si $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ es la función que describe el promedio espacial, debe satisfacer las siguientes propiedades: (i) es definida semipositiva, (ii) su integral sobre todo el espacio

²En mecánica de medios continuos se distingue entre la especificación lagrangiana y euleriana. La especificación lagrangeana es ampliamente utilizada en elasticidad y corresponde a aquella en que el movimiento es descrito por un observador que sigue un movimiento a través del tiempo y el espacio. La especificación euleriana es utilizada en mecánica de fluidos y corresponde a aquella en que el observador se encuentra fijo y describe el movimiento a través de la evolución de un punto específico.

es unitaria, (iii) posee un único máximo en $\mathbf{R} = 0$, (iv) su primera derivada se encuentra bien definida (puede ser una función generalizada), (v) posee un ancho w_c bien definido, que define la escala espacial. Si $\mathcal{F}(t)$ es la función que describe el promedio temporal, también satisface las condiciones (i)-(v) reemplazando $\mathbf{R}$ por t con τ_c la escala temporal.

Siguiendo la lógica descrita, si $\{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha, m^\alpha\}$ corresponde al centro de masa, velocidad y masa de la α -ésima partícula de un set de N partículas, la definición mecánica estadística de la densidad $\rho'(\mathbf{x}', t')$ y momentum $\rho' u'_i(\mathbf{x}', t')$ microscópicos en un punto $\mathbf{x}'$ y un instante t' son:

$$\begin{aligned}\rho'(\mathbf{x}', t') &= \sum_{\alpha}^N m^\alpha \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^\alpha(t')) \\ \rho' u'_i(\mathbf{x}', t') &= \sum_{\alpha}^N m^\alpha u_i^\alpha(t') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^\alpha(t')).\end{aligned}\tag{2.6}$$

A partir de estas definiciones, los valores de densidad y momentum promedio son:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \int dt' \int d^3x' \mathcal{F}(t - t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho'(\mathbf{x}', t') = \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^\alpha \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t')) \\ \rho u_i(\mathbf{x}, t) &= \int dt' \int d^3x' \mathcal{F}(t - t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho' u'_i(\mathbf{x}', t') = \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^\alpha u_i^\alpha(t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t')).\end{aligned}\tag{2.7}$$

En este esquema, las ecuaciones de balance se deducen utilizando la identidad

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t'))}{\partial t'} = - \frac{dx_i^\alpha(t')}{dt'} \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t'))}{\partial x_i} = -u_i^\alpha(t') \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t'))}{\partial x_i},\tag{2.8}$$

a partir de la que se recupera con facilidad la ecuación de balance de masa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \int dt' \frac{\partial \mathcal{F}(t - t')}{\partial t} \sum_{\alpha} m^\alpha \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t')) \\ &= - \int dt' \frac{\partial \mathcal{F}(t - t')}{\partial t'} \sum_{\alpha} m^\alpha \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t')) \\ &= \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^\alpha \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t'))}{\partial t'} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^\alpha u_i^\alpha(t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha(t')) \right) \\ &= - \frac{\partial \rho u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Siguiendo un procedimiento similar, se encuentra para la ecuación de balance de momentum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m_i^{\alpha} u_i^{\alpha}(t') \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t'))}{\partial t'} + \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^{\alpha} \frac{du_i^{\alpha}(t')}{dt'} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m_i^{\alpha} u_i^{\alpha}(t') u_j^{\alpha}(t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t')) + \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} m^{\alpha} \frac{du_i^{\alpha}(t')}{dt'}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si se reconoce al primer término del miembro derecho como la divergencia del tensor de flujo de momentum $\partial/\partial x_j(\rho u_i u_j)$ y se utiliza la ecuación de momentum para cada partícula

$$m^{\alpha} \frac{du_i^{\alpha}(t')}{dt'} = -m^{\alpha} g_i + \sum_{\beta} f_i^{\alpha\beta}(t'),$$

se sigue que la ecuación de balance de momentum se puede escribir en la forma usual, con σ definido a partir de la relación $\partial_j \sigma_{ij} = \int dt' \mathcal{F}(t - t') \sum_{\alpha} \sum_{\beta} m^{\alpha} f_i^{\alpha\beta}(t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha})$. Para obtener una fórmula explícita para σ se puede utilizar el principio de acción y reacción, el cual implica que $f_i^{\alpha\beta} = -f_i^{\beta\alpha}$. Así, $\sum_{\alpha, \beta} f_i^{\alpha\beta}(t') \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t')) = (1/2) \sum_{\alpha, \beta} f_i^{\alpha\beta}(t') (\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}) - \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\beta}))$. Si además se tiene en cuenta que $(\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t')) - \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\beta}(t'))) = \int_0^1 ds (\partial/\partial s) \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t') + s\mathbf{x}^{\alpha\beta}(t'))$ con $\mathbf{x}^{\alpha\beta} = \mathbf{x}^{\alpha} - \mathbf{x}^{\beta}$ y se atiende a que $(\partial/\partial s) = -(\partial/\partial x_i) x_i^{\alpha\beta}$, se sigue que σ puede ser escrito como:

$$\sigma_{ij}^c(\mathbf{x}, t) = - \int dt' \mathcal{F}(t - t') \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} f_i^{\alpha\beta}(t') x_i^{\alpha\beta} \int_0^1 ds \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t') + s\mathbf{x}^{\alpha\beta}(t')). \quad (2.11)$$

Una vez que las funciones de promedio han sido escogidas, es posible obtener la densidad, velocidad y el tensor de esfuerzos que describen al medio granular como un continuo. Entre los comentarios que se pueden realizar, se encuentra la simetría del tensor de esfuerzos. Si bien, a priori σ_{ij}^c no es simétrico³, debido a que los contactos entre partículas generalmente no lo son, los resultados de varios estudios demuestran que al promediar sobre grandes volúmenes σ_{ij}^c sí es simétrico (Cambou 1998; Bardet y Vardoulakis 2001; Nicot y col. 2013). Además, cabe destacar la importancia de la elección de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$, ya que una elección inadecuada puede influenciar enormemente el cálculo de las magnitudes promedio de acuerdo a las definiciones entregadas en (2.7) y (2.11). Una elección usual para $\mathcal{G}$ corresponde a una función escalón, que es constante al interior de un volumen y cero en su exterior. En el caso de un volumen esférico V de radio w se encuentra dado por $\mathcal{G} = (1/V)H(w - \|\mathbf{x}\|)$, con H la delta de Heaviside. En este caso, y asumiendo $\mathcal{F}(t - t') = \delta(t - t')$ con δ la delta de Dirac, se obtiene la siguiente definición para el tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{V} \sum_{c \in V} f_i^c b_j^c, \quad (2.12)$$

³Para un estado de equilibrio se requiere que el tensor de esfuerzos sea simétrico, ya que de lo contrario surgirían momentos de rotación.

donde la suma se extiende sobre todos los contactos c al interior del volumen V y $\mathbf{f}^c$ es la fuerza de interacción entre las partículas en contacto en c . El vector $\mathbf{b}^c$ es igual al vector $\mathbf{x}^{\alpha\beta}$ que conecta los centros de las partículas α y β que conforman el contacto en c ; si alguna de las partículas se encuentra fuera del volumen V , el vector $\mathbf{b}^c$ es igual a la porción del vector $\mathbf{x}^{\alpha\beta}$ al interior de dicho volumen. Ver Figura 2.3 (a).

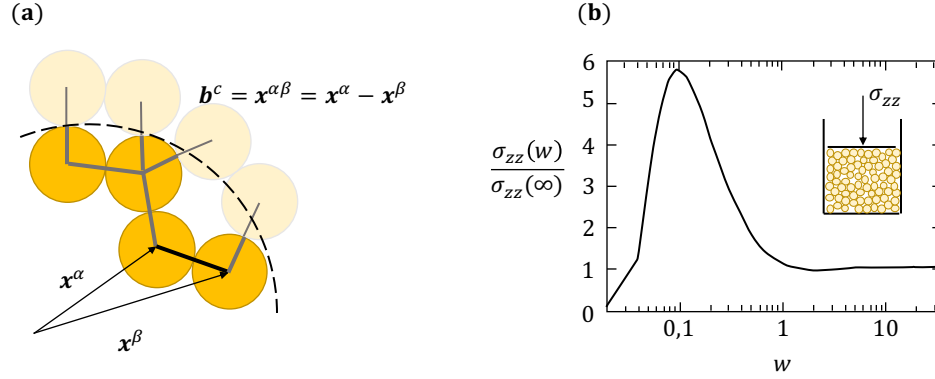


Figura 2.4: (a) Ilustración del vector $\mathbf{b}^c$ en la definición del tensor de esfuerzos (2.12). (b) Esfuerzo vertical como función del tamaño del volumen de promediado w en un ensayo de compresión uniaxial. Figura adaptada de [Andreotti y col. 2013](#) a partir del trabajo original de [Radjai, Wolf y col. 1998](#).

Un resultado similar para expresar el tensor de esfuerzos se debe a [Nicot y col. 2013](#) a través del cálculo directo del valor promedio del tensor de esfuerzos, en cuyo caso surgen componentes inerciales adicionales en la definición del tensor de esfuerzos, las que, sin embargo, proporcionan una contribución despreciable en el régimen de interés.

2.4. Elasticidad

La introducción a la teoría de la elasticidad proporcionada a continuación, se basa en los libros de [Landau y col. 1969](#) y [Sadd 2014](#), por lo que se recomienda referirse a ellos para una discusión más detallada.

Para predecir el movimiento de un objeto material a partir de las ecuaciones de balance, se requiere de una ecuación constitutiva que relacione la sollicitación (esfuerzos) con la respuesta en deformación del medio. Esta última es caracterizada introduciendo una nueva cantidad física, conocida como tensor de deformación y definida como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ se conoce como vector deformación, y corresponde a la diferencia entre la

posición final (deformada) $\mathbf{x}'(x)$ y la posición inicial (sin deformar) $\mathbf{x}$ de un punto del sólido⁴. El tensor e_{ij} se define con la finalidad de expresar la distancia diferencial deformada como $dl'^2 = (\delta_{ij} + 2e_{ij})dx_i dx_j$ (donde se han omitido términos de orden superior), de modo que su conocimiento permite determinar la distancia entre cada par de puntos después de la deformación. Para interpretar su significado resulta conveniente suponer que, para algún sistema de referencia, las únicas componentes no nulas del tensor son las diagonales (ejes principales), denotadas por e_1 , e_2 y e_3 . Luego, la distancia entre dos puntos infinitesimalmente cercanos vendrá dada por $dl'^2 = (1 + 2e_1)dx_1^2 + (1 + 2e_2)dx_2^2 + (1 + 2e_3)dx_3^2$, resultado correspondiente a la suma de dilataciones o contracciones en los ejes principales. Así, el alargamiento relativo del i –ésimo eje principal es $(dx'_i - dx_i)/dx_i = \sqrt{1 + 2e_i} \approx e_i$.

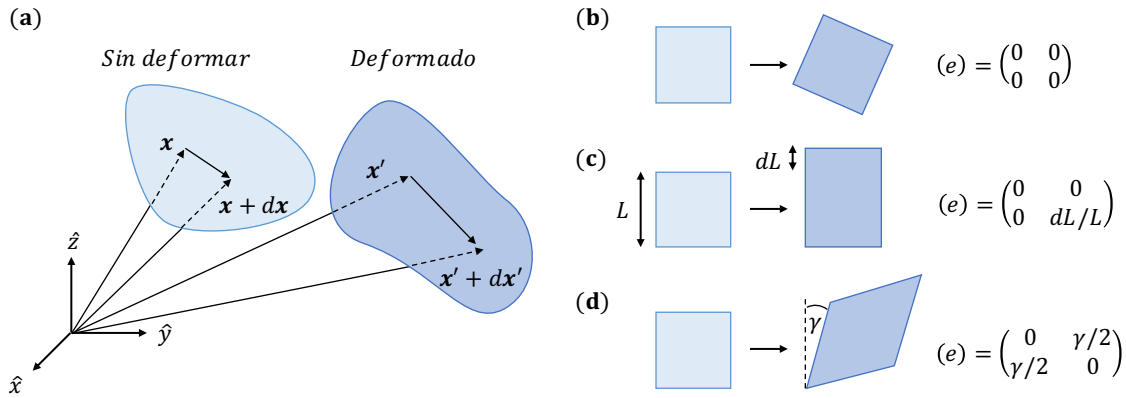


Figura 2.5: (a) Ilustración de la distancia entre dos puntos infinitesimalmente cercanos de un sólido antes y después de una deformación. Ejemplo tipos de deformación: (b) rotación corresponde a deformación nula; (c) elongación uniaxial se representa por una única componente no nula; y (d) deformación de corte se representa por componentes diagonales iguales a la mitad del ángulo de distorsión.

De forma análoga a la descomposición proporcionada para el tensor de esfuerzos, se define la componente desviadora del tensor de deformación por:

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{kk}}{n} \delta_{ij}. \quad (2.14)$$

Un modelo constitutivo ampliamente utilizado en ingeniería corresponde a la ley de Hooke, que para un medio elástico e isotrópico adquiere la siguiente forma lineal:

$$\sigma_{ij} = K e_{kk} \delta_{ij} + 2G \tilde{e}_{ij}, \quad (2.15)$$

donde K es el módulo de compresión y G es el módulo de corte. En ingeniería es usual utilizar el módulo de Young E y la razón de Poisson ν , relacionados con K y G a través de $G = E/2(1 + \nu)$ y $K = E/3(1 - 2\nu)$. Esta expresión para σ se puede deducir a partir

⁴La deformación de un sólido se encuentra totalmente determinada si se conoce la posición final e inicial de cada punto, de ahí la definición de e_{ij} , ya que su conocimiento permite determinar u_i .

de principios termodinámicos, debido a que un proceso de deformación reversible implica la acumulación de energía elástica en el sólido que luego es empleada para restituirlo a su estado original (Landau y col. 1969). Si se supone que el proceso de deformación ocurre lo suficientemente lento como para que el cuerpo se encuentre en todo instante en equilibrio termodinámico, el proceso será reversible, por lo que la primera ley se puede escribir en la forma $\mathcal{E} = TdS + \sigma_{ij}de_{ij}$, con $\mathcal{E}$ la energía interna, S la entropía y T la temperatura. Puesto que $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S, e_{ij})$ resulta conveniente utilizar un potencial termodinámico cuyas variables termodinámicas sean $\{T, e_{ij}\}$, lo que se consigue utilizando la energía libre de Helmholtz $\mathcal{F}$, definida como una traslación de la energía interna, $\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS$, que en forma diferencial es $d\mathcal{F} = SdT + \sigma_{ij}de_{ij}$. De aquí se sigue que el tensor de esfuerzos se relaciona con la energía libre de Helmholtz (en un proceso reversible) según:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_{ij}}. \quad (2.16)$$

Luego, el problema de encontrar una ley constitutiva se resume a encontrar una expresión para $\mathcal{F}$. En el caso particular de la ley de Hooke, dicha expresión resulta de una generalización de la energía elástica de un resorte, quedando en la forma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(T) + (K/2)e_{kk}^2 + 2G\tilde{e}_{ij}^2$ donde $\mathcal{F}_0(T)$ es la energía libre asociada a una deformación de referencia y los dos términos restantes se construyen a partir de los primeros dos invariantes del tensor de deformación, que en la expresión anterior se identifican con la energía asociada a un cambio de volumen y de forma, respectivamente.

La elasticidad lineal permite modelar el comportamiento elástico de una amplia gama de materiales utilizados en ingeniería cuando están sujetos a pequeñas deformaciones, sin embargo, no resulta adecuada para materiales granulares, en que se observa una dependencia entre la rigidez y la tensión, además de un comportamiento histerético que conlleva a diferencias observables en procesos de carga y descarga (Jiang y Liu 2004; Jiang y Liu 2007).

Lo anterior no implica que las partículas que conforman un medio granular no puedan ser elásticas. Atendiendo a este principio y a los resultados de Hertz, Mindlin y Cattaneo para las fuerzas de contacto entre partículas esféricas, es que Jiang y Liu 2004 propusieron un modelo hiper-elástico para medios granulares. La idea es que al ser $G \sim K \sim (-e_{kk})^{1/2}$, la energía libre de Helmholtz puede ser expresada en la forma:

$$\mathcal{F} = \frac{2}{5}Ke_{kk}^2 + G\tilde{e}_{kl}^2 \quad \text{con} \quad K = E\mathcal{B}\Delta^{1/2} \quad , \quad G = E\mathcal{A}\Delta^{1/2} \quad \text{y} \quad \Delta = -e_{kk}. \quad (2.17)$$

Luego, a partir de la relación (2.16) se sigue que el tensor de esfuerzos corresponde a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_{ij}} \\ &= \frac{1}{2\Delta^{1/2}} \frac{\partial(-e_{kk})}{\partial e_{ij}} \left(\frac{2}{5}E\mathcal{B}e_{kk}^2 + E\mathcal{A}\tilde{e}_{kl}^2 \right) + \frac{4}{5}E\mathcal{B}\Delta^{1/2}e_{kk}\delta_{ij} + 2E\mathcal{A}\Delta^{1/2}\tilde{e}_{ij} \\ &= Ke_{kk}\delta_{ij} + 2G\tilde{e}_{ij} - \frac{G}{2}\frac{\tilde{e}_{kl}^2}{\Delta}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Los primeros dos términos en esta expresión son análogos a los de un sólido isótropo, en tanto que el tercero describe un acoplamiento entre las deformaciones de corte y la deformación volumétrica, prediciendo una dilatación. Si ahora se tiene en cuenta que las fuerzas de contacto normal escalan como la presión $F_n \sim P \sim \Delta^{3/2}$, entonces se sigue que $K \sim G \sim P^{1/3}$, obteniendo una dependencia potencial de los módulos elásticos en la presión. Comportamientos de este tipo han sido reportados por diversos autores (Lade y Nelson 1987) y son ampliamente utilizados en mecánica de suelos en el modelamiento de arcillas, arenas y gravas (Lambe y Whitman 1991). Más aún, con un poco de álgebra es posible escribir la ecuación (2.18) en la forma usual utilizada en elasticidad lineal $\sigma_{ij} = K_{eff} e_{kk} \delta_{ij} + 2G \tilde{e}_{ij}$ con el módulo de compresibilidad dado por $K_{eff} = E\mathcal{B}\Delta^{1/2} (1 + \mathcal{A}\tilde{e}_{kl}^2/2\mathcal{B}\Delta^2)$. Puesto que, por definición $\sigma_{kk} = K_{eff} e_{kk} = -P$ y $\tau_{ij} = 2G \tilde{e}_{ij}$, el resultado anterior permite relacionar la deformación volumétrica con la presión P y el invariante deviatorico $J^2 = \tau_{ij}\tau_{ij}/2$ en la forma $P = E\mathcal{B}\Delta^{3/2} (1 + J^2/2E^2\mathcal{A}\mathcal{B}\Delta^3)$, o bien:

$$\Delta^3 - \frac{P}{E\mathcal{B}}\Delta^{3/2} + \frac{1}{E^2\mathcal{A}\mathcal{B}}J^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{P}{2E\mathcal{B}}\right)^{2/3} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{B}J^2}{\mathcal{A}P^2}\right)}\right]^{2/3}. \quad (2.19)$$

Luego, se sigue que ambos módulos elásticos se encuentran dados por:

$$\begin{aligned} K &= (2E\mathcal{B})^{2/3} P^{1/3} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{B}J^2}{\mathcal{A}P^2}\right)}\right]^{-2/3} \\ G &= (E\mathcal{A})^{2/3} (\mathcal{A}/2\mathcal{B})^{1/3} P^{1/3} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{B}J^2}{\mathcal{A}P^2}\right)}\right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dependencias del módulo de Young en la presión y el cociente J/P han sido reportadas por diversos autores en la ejecución de ensayos tri-axiales (Lade y Nelson 1987). Es interesante observar que la dependencia en el invariante deviatorico es a través del cociente J/P , magnitud que describe la envolvente de falla de materiales friccionantes sin cohesión (ver sección siguiente). En particular, el resultado anterior impone un límite superior de $J_c^2/P_c^2 = \mathcal{A}/2\mathcal{B}$. Igualando este resultado con el criterio de falla de Mohr-Coulomb (ver sección siguiente), $J/P = \sin \phi$, se llega a un límite superior para el ángulo de fricción de $\sin \phi_c = \sqrt{\mathcal{A}/2\mathcal{B}}$. Ahora bien, si interpretamos los parámetros $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en términos del módulo de Poisson de pequeñas deformaciones, se sigue que $\mathcal{A} = 1/2(1+\nu)$ y $\mathcal{B} = 1/3(1-2\nu)$. Luego, $\sin \phi_c = \sqrt{3(1-\nu)/4(1+\nu)}$, de modo que para $\nu = 0,5$ se obtiene $\phi_c = 0^\circ$ en tanto que para $\nu = 0,0$ se tiene $\phi_c \sim 60^\circ$. Estos resultados para el ángulo de fricción, junto a las expresiones derivadas para los módulos elásticos K y G en (2.20) constituyen resultados originales del presente trabajo. Una discusión similar puede encontrarse en Jiang y Liu 2003.

2.5. Plasticidad

La introducción a la teoría de la plasticidad proporcionada a continuación, se basa en los libros de Prat 2006 y Hosford 2010, por lo que se recomienda referirse a ellos para una

discusión más detallada.

La elasticidad lineal presenta una serie de características, entre ellas se destaca que (I) todas las deformaciones son recuperables y reversibles, (II) las componentes desviadoras e hidrostática se encuentran desacopladas, y (III) no hay límite de tensiones elásticas. En general, éstas no se cumplen en todos los materiales, ya que (I) las deformaciones son en parte permanentes y existen diferencias entre procesos de carga y descarga, (II) se observa acoplamiento entre componentes desviadoras e hidrostática (dilatancia), y (III) las tensiones se incrementan hasta alcanzar el límite elástico, tras el cual se observa rotura. Este tipo de comportamientos son capturados por ecuaciones constitutivas del tipo plásticas, las que, debido a la diferencia de comportamiento en procesos de carga, se expresan de forma incremental, a través de relaciones del tipo $\Delta\sigma_{ij} \leftrightarrow \Delta e_{ij}$, $\dot{\sigma}_{ij} \leftrightarrow \dot{e}_{ij}$ o $d\sigma_{ij} \leftrightarrow de_{ij}$. Para deducir cómo se relacionan estos incrementos, la teoría de la plasticidad emplea cuatro principios básicos, estos son: hipótesis de aditividad de deformaciones; superficie de fluencia; ley de fluencia; y ley de endurecimiento.

La hipótesis de aditividad de deformaciones supone que en todo momento pueden coexistir deformaciones elásticas e_{ij}^e (recuperables) y plásticas e_{ij}^p (no recuperables), de modo que la deformación total es la suma de ambas:

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p. \quad (2.21)$$

Las deformaciones elásticas se calculan utilizando teoría de la elasticidad, aunque los módulos elásticos no son necesariamente constantes:

$$de_{ij}^e = C_{ijkl} d\sigma_{kl}, \quad (2.22)$$

donde C_{ijkl} se obtiene como el inverso de $d\sigma_{ij} = E_{ijkl} de_{ij}^e$ con E_{ijkl} el tensor de rigidez elástica. La descripción de las deformaciones plásticas se realiza por medio de la ley de fluencia, cuya formulación requiere de la definición de superficie de fluencia.

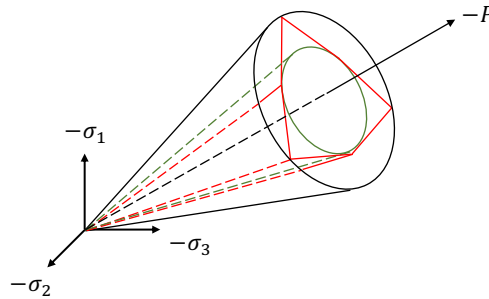


Figura 2.6: Ejemplos superficies de fluencia en el espacio de esfuerzos principales. En rojo, superficie de fluencia de Mohr-Coulomb. En negro y verde, superficies de fluencia de Drucker-Prager circunscrita e inscrita a la superficie de Mohr-Coulomb.

La superficie de fluencia es una generalización del concepto de límite de fluencia. En general, se define como una función de las tensiones y otros parámetros que separa, en el

espacio de tensiones, aquellas combinaciones de tensiones que dan lugar a comportamientos elásticos y plásticos. Los puntos interiores a la superficie constituyen estados de tensión admisibles en el rango elástico. Ver Figura 2.5. La expresión general de la superficie de fluencia se expresa en la forma:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_\alpha) = 0, \quad (2.23)$$

donde los χ_α son parámetros que controlan el tamaño de la superficie de fluencia, y típicamente dependen de la deformación plástica acumulada e_{ij}^p . Puesto que F es una función escalar, la superficie de fluencia sólo puede ser función de magnitudes escalares construidas a partir de los invariantes de σ_{ij} . Según sea el comportamiento de la superficie de fluencia, se definen distintos tipos de plasticidad: plasticidad perfecta, cuando la superficie no cambia de tamaño en un proceso de carga; plasticidad rigidizable, cuando la superficie se expande en un proceso de carga; y plasticidad reblandecible, cuando la superficie se contrae en un proceso de carga.

La ley de fluencia proporciona la deformación incremental plástica. Para ello, se supone que existe una función de las tensiones (y de otros parámetros) denominada potencial plástico, tal que:

$$G(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = 0. \quad (2.24)$$

Así, las deformaciones plásticas se obtienen como:

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.25)$$

donde $d\lambda$ es un escalar que proporciona la magnitud de la deformación plástica, en tanto que la dirección queda determinada por $\partial G / \partial \sigma_{ij}$ (deformación plástica es perpendicular a las superficies con $G = cte$). Cuando $G(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$ se habla de plasticidad asociada, y plasticidad no asociada en otro caso.

Para obtener $d\lambda$ se atiende a que las tensiones plásticas deben encontrarse por sobre la superficie de fluencia. Así:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \chi_\alpha} d\chi_\alpha \\ &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial e_{mn}^p} de_{mn}^p \\ &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial e_{mn}^p} d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Luego:

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad \text{con} \quad H = - \frac{\partial F}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial e_{mn}^p} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}}. \quad (2.27)$$

La variable H se denomina módulo plástico, y según su valor se tendrá: $H = 0$ plasticidad perfecta; $H > 0$ plasticidad rigidizable; y $H < 0$ plasticidad reblandeciente. Finalmente, las

deformaciones plásticas quedan en la forma:

$$de_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}. \quad (2.28)$$

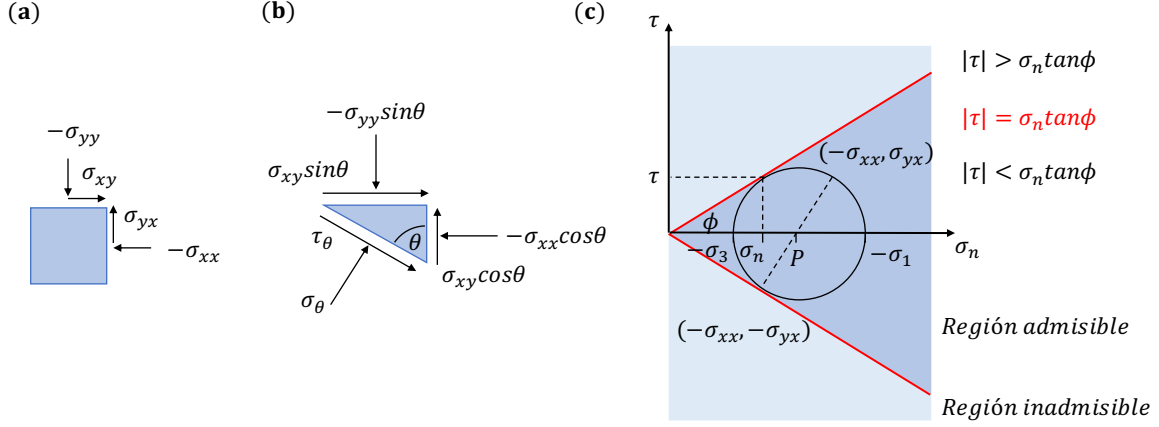


Figura 2.7: (a) Representación estado tensional plano. (b) Componentes tangente y normal de los esfuerzos sobre un plano de ángulo θ ; hipotenusa de largo unitario. (c) Criterio de falla de Mohr-Coulomb para un estado tensional plano.

Un modelo ampliamente aceptado para medios granulares cohesivos es el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Su forma original corresponde a estados tensionales planos, como el ilustrado en la Figura 2.6-(a). Este criterio relaciona los esfuerzos normal σ_n y tangencial τ al plano de falla según:

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi, \quad (2.29)$$

donde c es la cohesión y ϕ el ángulo de fricción interna. Para un plano general, asumiendo que $|\sigma_{xx}| > |\sigma_{yy}|$, se puede demostrar a partir del equilibrio de las fuerzas ilustradas en la Figura 2.6-(b), que los esfuerzos normal y tangencial a un plano caracterizado por un ángulo θ corresponden a:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} - \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \cos 2\theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ &= P + R \cos(2\theta + 2\psi) \\ \tau_\theta &= -\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \\ &= R \sin(2\theta + 2\psi) \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $P = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$, $R = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2$ y $\tan 2\psi = 2\sigma_{xy}/(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$. El resultado expresado en términos de P y R se puede representar gráficamente como un círculo de centro $(P, 0)$ y radio R en el espacio (σ_n, τ) según se ilustra en la Figura 2.6-(c). Así, el ángulo de rotación hacia el sistema de esfuerzos principales (en que $\tau = 0$) corresponde a $\theta = -\psi$, a la vez que la superficie de falla se ubica a $\pm(\phi/2 - \pi/4)$ del esfuerzo principal mayor.

En términos de esfuerzos principales, el criterio de Mohr-Coulomb resulta independiente del esfuerzo principal intermedio, y puede ser representado como:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi. \quad (2.31)$$

Esta función de fluencia puede ser convenientemente expresada en términos de los invariantes de hidrostático P , deviatorico J y el ángulo de Lode θ ⁵, definidos según:

$$\begin{aligned} P &= -\sigma_m = -\frac{I_1}{3} = -\frac{\sigma_{ii}}{3} = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ J &= \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{\tau_{ij}\tau_{ij}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]} \\ J_3 &= \frac{\tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki}}{3} = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] \\ \theta &= -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J^3} \right) = \tan^{-1} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] \quad (\theta \in [-30^\circ, 30^\circ]). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Así, la función de fluencia de Mohr-Coulomb se puede expresar como:

$$F = J - (-\sigma_m + a)g(\theta) \quad \text{con} \quad g(\theta) = \frac{\sin \phi}{\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi} \quad \text{y} \quad a = \frac{c}{g(\theta)}. \quad (2.33)$$

Las deformaciones plásticas en este caso son:

$$\begin{aligned} de_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] \\ &= d\lambda \left[g(\theta) \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} - (-\sigma_m + a) \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] \\ &= d\lambda \left[g(\theta) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}}{2J} - (-\sigma_m + a) \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La teoría de la plasticidad aplicada a medios granulares se encuentra desarrollada en el contexto de la mecánica de suelos, por lo que se recomienda referirse al libro de [Yu 2006](#) para una discusión más detallada de la misma.

2.6. Reología de medios granulares

Cuando las deformaciones plásticas predominan por sobre las deformaciones elásticas, éstas últimas pueden ser despreciadas. Más aún, cuando, la deformación plástica incrementa

⁵El ángulo de Lode proporciona la mejor representación cuando se requiere trabajar con el esfuerzo principal intermedio.

con una tasa temporal

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{con} \quad v_i = \frac{du_i}{dt}, \quad (2.35)$$

las componentes principales de la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ y la componente deviatorica del tensor de esfuerzos τ , se tienden a alinear, lo que se conoce como coaxialidad. Así, se puede postular una relación entre ambos tensores del tipo:

$$\frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\tau_{kl}\tau_{kl}}} = \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\sqrt{\dot{\gamma}_{kl}\dot{\gamma}_{kl}}} \quad (2.36)$$

Luego, si durante la deformación plástica las tensiones se encuentran por sobre la superficie de fluencia, y se asume que el medio granular sigue el criterio de Mohr-Coulomb sin cohesión, $\tau = \sqrt{\tau_{kl}\tau_{kl}} = P \sin \phi$, se obtiene:

$$\tau_{ij} = P \sin \phi \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\dot{\gamma}} \quad \text{con} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_{kl}\dot{\gamma}_{kl}}. \quad (2.37)$$

Este resultado recuerda la dependencia de un fluido de Bingham de viscosidad nula y esfuerzo de fluencia $P \sin \phi$. Si bien, este resultado puede parecer satisfactorio para representar el comportamiento de medios granulares cuando la deformación es predominantemente plástica, sólo puede representar estados cuasi-estáticos, en que las tensiones se ubiquen sobre la superficie de fluencia. Desde el punto de vista microscópico, una dependencia de este tipo podría surgir (al menos en principio) si en todos los contactos entre partículas se cumple la condición de deslizamiento $F_t = \mu F_n$. Esta observación resulta contradictoria, ya que para un medio con empaquetamiento denso tal condición es esperable únicamente para valores muy grandes de $\dot{\gamma}$.

Una generalización del resultado presentado en (2.37) es proporcionado por la reología $\mu(I)$ propuesta por Jop, Forterre, Pouliquen y colaboradores (MiDi 2004; Jop y col. 2005; Jop y col. 2006). Este modelo establece una relación entre el tensor de esfuerzos inspirado en la mecánica de fluidos e interacciones friccionantes que siguen la ley de fricción de Coulomb. Así, la descripción matemática del medio granular se realiza asumiendo que el tensor de esfuerzos se encuentra compuesto por una presión hidrostática P y una componente de corte τ cuyas orientaciones se encuentran definidas por el tensor $\dot{\gamma}$, a la vez que su magnitud es función de la presión P de acuerdo con:

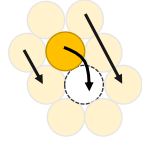
$$\tau_{ij} = \mu(I) P \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\dot{\gamma}}. \quad (2.38)$$

De este modo, el parámetro μ es análogo al coeficiente de fricción usualmente utilizado para caracterizar las fuerzas de fricción entre sólidos. No obstante, a diferencia de este último, se asume que el coeficiente μ es función del número de inercia I , definido como el cociente entre dos escalas temporales que caracterizan al fenómeno. Éstas son: la escala de tiempo de deformación macroscópica $t_\gamma = \|\dot{\gamma}\|^{-1}$ y la escala de tiempo de inercia $t_P = D_{50} \sqrt{\rho/P}$. La primera es una escala macroscópica relacionada con la deformación media del medio. La

segunda, en tanto, es una escala microscópica que representa el tiempo que le toma a una partícula caer en un espacio de tamaño igual a su diámetro D_{50} por efecto de la presión P del medio, debido al reordenamiento de partículas (Frédéric da Cruz y col. 2005). Así, el número de inercia queda definido por:

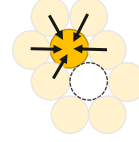
$$I = \frac{\dot{\gamma} D_{50}}{\sqrt{P/\rho}}. \quad (2.39)$$

(a)



$$t_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|}$$

(b)



$$t_P = D_{50} \sqrt{\rho/P}$$

Figura 2.8: Escalas de tiempo en la definición del número de inercia. (a) Escala de tiempo de deformación macroscópica. (b) Escala de tiempo de inercia.

Valores pequeños de I corresponden a un régimen de movimiento cuasiestático en el sentido de que la deformación macroscópica es lenta en comparación con el reordenamiento microscópico, mientras que los valores grandes de I corresponden a flujos rápidos. A partir de las definiciones anteriores, el tensor de esfuerzos del medio granular queda representado por:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta\dot{\gamma}_{ij} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\mu(I)P}{\dot{\gamma}}. \quad (2.40)$$

De acuerdo a sus autores, el parámetro I es el único número adimensional que se puede asociar a partículas rígidas (no es el caso de partículas blandas, en que es posible definir una escala elástica), lo que sustenta la dependencia de μ e, inclusive, de la fracción de sólidos ϕ en el número de inercia (Forterre y Pouliquen 2008). Ambas funciones pueden ser ajustadas como:

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0/I + 1} \quad \text{y} \quad \phi(I) = \phi_{max} + (\phi_{min} - \phi_{max})I. \quad (2.41)$$

Valores típicos de los parámetros de ajuste de estos modelos para partículas de vidrio monodispersas son $\mu_1 = \tan(21)$, $\mu_2 = \tan(33)$, $I_0 = 0,3$, $\phi_{max} = 0,6$ y $\phi_{min} = 0,4$ (Jop y col. 2005; Jop y col. 2006).

Capítulo 3

Flujo Gravitacional en Minería

“ONE NEVER REALIZES WHAT CAN BE DONE, CAN ONLY SEE WHAT REMAINS TO BE DONE”. MARIE CURIE.

3.1. Minería de Block Caving

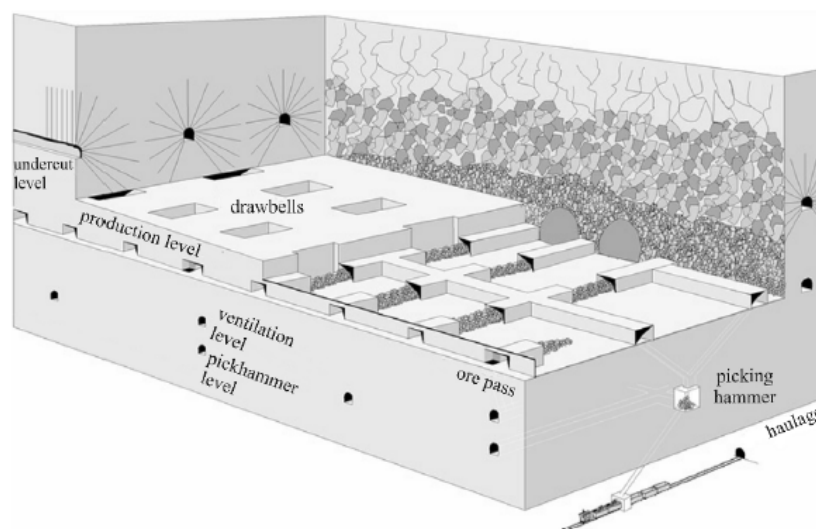


Figura 3.1: Esquema de operación por el método de Block Caving, mina el Teniente, Chile.

El Block Caving es un método de minería subterránea que consiste en inducir la fractura y disgregación en la base de un macizo de roca mineralizada, para luego extraer el material fragmentado a través de un arreglo regular de aberturas dispuestas en su base, también conocidas como bateas de extracción. La fragmentación y disgregación del macizo se consigue a través del debilitamiento mecánico y la socavación de la base del bloque por voladura, cuyo efecto se propaga en la vertical hasta alcanzar la superficie a medida que el mineral es extraído. Estos métodos se caracterizan por ser económicos y eficientes para una extracción a gran escala, siempre y cuando las condiciones de la roca in situ sean favorables, es decir, que permitan el hundimiento controlado del macizo asegurando la estabilidad de las

labores de extracción subterránea y la continuidad de la operación ([Heslop 2000](#); [Brady 2012](#)).

El diseño de estos métodos contempla una serie de galerías destinadas a facilitar la fragmentación inicial, extracción, transporte y ventilación. Estas galerías conforman los niveles de hundimiento, producción, transporte y ventilación. A partir del nivel de hundimiento se perforan los tiros que sirven para fragmentar la base del macizo, a la vez que se crean las bateas de extracción a través de las que fluye el material fragmentado hacia los puntos de extracción ubicados en el nivel de producción. El nivel de producción, ubicado bajo el nivel de hundimiento, se compone de un arreglo paralelo de galerías denominadas calles, utilizadas para el tránsito de los equipos destinados a la labor de extracción de mineral. A su vez se dispone de un segundo arreglo de galerías cortas denominadas galerías de zanja, que conectan las calles con los puntos de extracción. Usualmente el nivel de producción cuenta con una serie de excavaciones sub verticales llamados piques, destinados al traspaso del material fragmentado con el nivel de transporte inferior a través del cual se extrae el mineral hacia la superficie ([Brady 2012](#)). Estos niveles son distinguibles en la Figura 3.1.

Una de las variantes del Block Caving es el Panel Caving. La principal diferencia entre ambos es que en el Block Caving se socava completamente la base de un bloque de macizo, mientras que en el Panel Caving el bloque es socavado secuencialmente a través de paneles o franjas. En consecuencia, en el Panel Caving el frente de hundimiento es desplazado a lo largo de la base del cuerpo mineralizado, permitiendo controlar la extracción y dilución a través del control del ángulo de extracción.

El principal desafío que imponen los métodos de Block Caving y sus variantes, es la definición de una malla (geometría, dimensiones, espaciamiento y disposición de puntos de extracción), secuencia de avance y tasa de extracción que maximicen la recuperación de mineral a la vez que minimicen la entrada de estéril proveniente de la fracción no mineralizada del macizo (dilución) ([Laubscher 1994](#)). En la actualidad, estos problemas son parcialmente resueltos a partir de criterios generales de diseño fundamentados en la experiencia empírica recopilada en modelos físicos a pequeña y gran escala.

3.2. Experiencia del siglo XX

La experiencia de [Kvapil 1965](#) proporciona la primera descripción cuantitativa del fenómeno de flujo de material granular impulsado por gravedad. Originalmente, sus trabajos se encontraban dirigidos al estudio de flujo en silos y tolvas, empleando modelos bidimensionales con arena y uno o varios puntos de extracción. Los resultados de sus experimentos indicaban la existencia de dos zonas que caracterizan el flujo gravitacional de material granular: la primera constituida por la ubicación original del material que efectivamente resulta extraído y la segunda delimitada por el material que cambió de posición sin ser extraído y aquel que permaneció en reposo. [Janelid y Kvapil 1966](#) observaron que la forma de ambas zonas se ajustaba a la de un elipsoide en revolución, motivo por el que las denominaron como elipsoide de extracción y elipsoide de movimiento, respectivamente. En la Figura 3.2 se visualizan ambos

elipsoides para la reconstrucción de una secuencia de extracción. El elipsoide de extracción se representa por el área gris achurada en (a) y el elipsoide de movimiento se representa por el contorno blanco en (d).

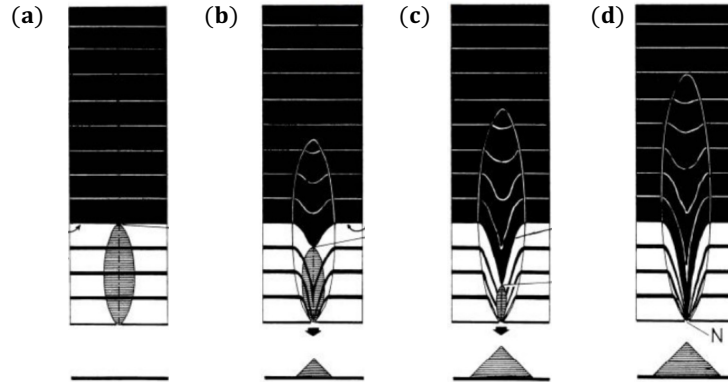


Figura 3.2: Reconstrucción secuencia de extracción en modelo físico de flujo gravitacional de material granular. [Kvapil 2008](#).

Kvapil observó que el cociente entre el semieje menor y el semieje mayor de los elipsoides permanecen aproximadamente constante para un mismo material, independiente de la forma de la tolva y de la pendiente de su zona inferior. Además, las propiedades de dicho elipsoide dependían de parámetros como el tamaño de las partículas, de modo que, cuando más pequeños son los granos de material, más fino y alargado es el elipsoide (y vice versa). Otros de los factores que resultaban relevantes eran la forma (esférica, irregular), la rugosidad de la superficie de las partículas (lisas, rugosas), las propiedades del material (densidad, contenido de humedad) y la tasa de extracción (alta, baja, extracción continua o extracción interrumpida). Cuantitativamente, [Janelid y Kvapil 1966](#), encontraron que el volumen del elipsoide de movimiento era unas 15 veces el volumen del elipsoide de extracción, en tanto que su altura era unas 2,5 veces la altura de dicho elipsoide.

Kvapil también realizó experimentos con varios puntos de extracción, encontrando que se lograba una disminución de las zonas que permanecen en reposo cuando el espaciamiento entre puntos de extracción era menor o igual al ancho del elipsoide de movimiento, situación que ocurría tanto para extracciones con todos los puntos de extracción de forma simultánea, como para extracciones aisladas. Los modelos asociados a ambas situaciones se ilustran en las Figuras 3.3 y 3.4, respectivamente.

De estos experimentos, [Janelid y Kvapil 1966](#) concluyeron que el perfil de velocidades del flujo gravitacional no es uniforme, presentando un patrón específico que resulta en elipsoides de igual velocidad, como se ilustra en la Figura 3.5 (a). Adicionalmente, observaron que las elipses incrementan su altura tanto como la columna de material lo permita, pero su diámetro se encuentra acotado a partir de un momento determinado. Cuando esto ocurre, la zona superior del flujo gravitacional se asemeja más a un cilindro, en que el perfil de velocidades es más bien uniforme, como se ilustra en la Figura 3.5 (b).

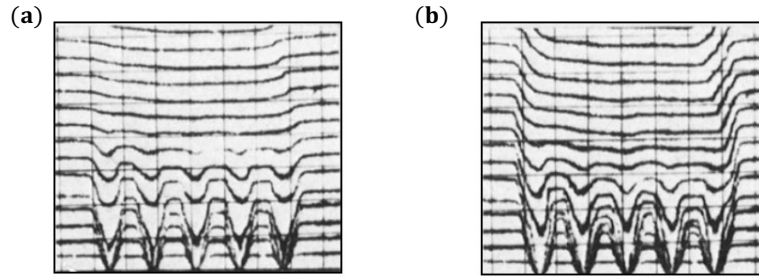


Figura 3.3: Secuencia de extracción con tiraje uniforme. Adaptado de Kvapil (1965).

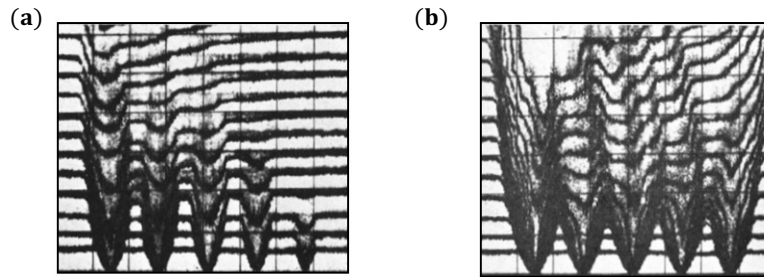


Figura 3.4: Secuencia de extracción con tiraje aislado. Adaptado de Kvapil (1965).

Kvapil extendió sus resultados proponiendo criterios para el diseño de métodos de explotación subterráneos de Sub Level Caving (Janelid y Kvapil 1966; Kvapil 1982; Kvapil 1992; Kvapil 2008) & Block Caving (R. Kvapil 1989; Kvapil 2008). La observación empírica de los elipsoides en experimentos realizados por otros investigadores proporcionó aceptación general respecto al trabajo de Kvapil. No obstante, si bien la experiencia recopilada con modelos de arena fue de gran utilidad para comprender el fenómeno de flujo gravitacional, permanecía la preocupación respecto a qué tan bien representaban la realidad. Esto, debido a que partículas redondeadas como la arena presentan mayor movilidad que partículas angulares que son características del mineral en una mina, como daba cuenta la experiencia de Janelid 1972 en uno de los primeros experimentos de validación a gran escala desarrollados en minería por Sub Level Caving, en que la forma de las zonas de movimiento del modelo a escala era más estrecha que la real, posiblemente debido a que el ángulo de fricción del material empleado en el modelo era de 35° , en tanto que el de la roca tronada en la mina era de entre 45 a 50° .

Experimentos con materiales más gruesos mostraban que las zonas de flujo se desviaban de la de un elipsoide, asemejándose más a una gota invertida, y presentaban interacción dependiendo del espaciamiento entre puntos de extracción (R. Kvapil 1989). Para referirse a las zonas de flujo sin aludir a una geometría particular, A. Halim y Trueman 2004 introdujeron los conceptos de EZ (Extraction Zone) y MZ (Movement Zone) para referirse al volumen de material extraído y el volumen que se ve alterado en la extracción de dicho material, respectivamente. Además, introdujeron los términos IEZ (Isolated Extraction Zone) y IMZ (Isolated Movement Zone) para distinguir las situaciones en que existe (o no) interacción entre las zonas de flujo originadas por distintos puntos de extracción. Esta convención también será

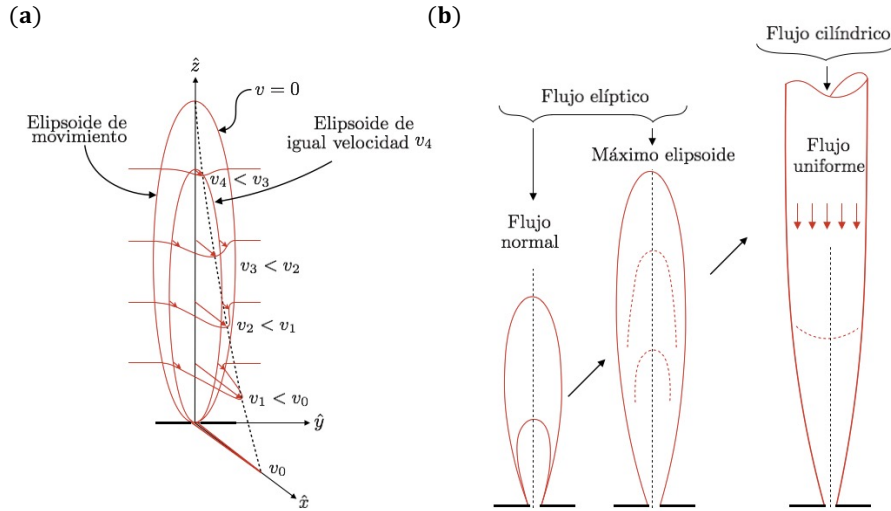


Figura 3.5: Patrón de velocidades: (a) patrón de velocidades al interior del elipsoide de movimiento y elipsoide de igual velocidad, y (b) evolución de la zona de movimiento. Adaptado de Kvapil 2008.

empleada en este trabajo.

Marano 1980, Heslop y Laubscher 1981 replicaron los experimentos de Kvapil utilizando modelos físicos tridimensionales con arena y varios puntos de extracción. Su modelo alcanzaba los 760 mm de largo, 760 mm de ancho y 2400 mm de alto, con partículas de 0,6 mm y 0,7 mm de tamaño promedio, el cual contaba con 50 aberturas de 25 mm de diámetro equiespaciadas en su base. Para monitorear el movimiento de la arena, los autores utilizaron capas de arena coloreada dispuestas a distancias regulares. Una vez finalizados los experimentos se vertió agua sobre la arena para humedecerla y posteriormente realizar cortes verticales y visualizar la posición de las capas coloreadas. Los autores realizaron experimentos en que los puntos de extracción se espaciaron una distancia igual al ancho del IMZ (que había sido determinado en experimentos previos), encontrando que se originaba un flujo uniforme al extraer de forma simultánea desde todos los puntos de extracción, como se muestra en la Figura 3.6 (a). Luego, los autores compararon estos resultados con experimentos en que se realizaron extracciones aisladas en cada punto de extracción manteniendo el mismo espaciamiento, como se muestra en la Figura 3.6 (b), llegando a la conclusión de que la teoría de los elipsoides de Kvapil no era aplicable en esta situación, por lo que la denominaron teoría de flujo interactivo. Los autores también realizaron experimentos en que se aumentó en 1,4 veces el espaciamiento entre los puntos de extracción, como se muestra en la Figura 3.6 (c), encontrando que se originaba un flujo uniforme como en el experimento anterior, en que la separación entre puntos de extracción era igual al IMZ.

En base a estos resultados Laubscher 1994 postuló que el flujo interactivo se originaba cuando los puntos de extracción se encuentran espaciados a menos de 1.5 veces el diámetro del elipsoide de movimiento, indicando que el diámetro del elipsoide de movimiento se expande y que el grado de interacción aumenta al disminuir el espaciamiento entre puntos de

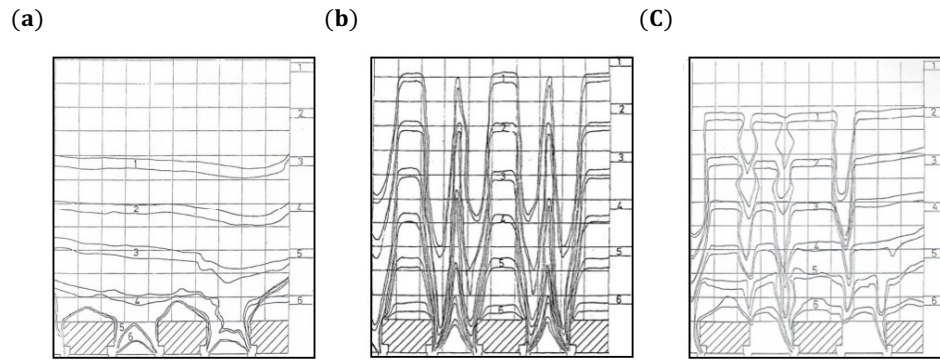


Figura 3.6: Flujo interactivo: (a) flujo con extracción simultánea y espaciamiento igual al ancho del IMZ, (b) flujo con extracciones aisladas y espaciamiento igual al ancho del IMZ, y (c) flujo con extracción simultánea y espaciamiento igual a 1,4 veces el ancho del IMZ. Adaptado de ([Heslop y Laubscher 1981](#)).

extracción. Esta expansión no ha sido observada en experimentos con materiales más gruesos ([R. Trueman 2007](#)). Laubscher empleó estos resultados para definir criterios de diseño para explotaciones subterráneas por el método de Block Caving, creando una tabla a partir de la cual se puede obtener el diámetro de la zona de movimiento y el espaciamiento entre puntos de extracción en función de la granulometría esperada. Esta teoría se encuentra ampliamente aceptada y es utilizada en muchas minas de Block Caving ([A. Halim y Trueman 2004](#)).

Otros autores sugirieron que el empleo de modelos de gran escala con grava como material granular resultaba mas adecuado para estudiar el fenómeno de flujo gravitacional en minas de Block Caving ([Peters 1984](#); [Power 2004](#)). [Peters 1984](#) empleó un modelo bidimensional para estudiar el IEZ con varios tamaños de partícula. Su modelo era de 4,5 m de alto, 3,6 m largo y cerca de 0,5 m de ancho, con partículas de tamaño 0,5, 1 y 1,5 pulgadas y mezclas 1:1:1 de estas. De sus experiencias concluyó que el tamaño de partícula tenía un pequeño efecto en la geometría del IEZ y que el ancho del punto de extracción presentaba un rol importante. Peters también realizó experimentos con tres puntos de extracción adyacentes, observando que cuando la distancia entre dos puntos era de 1,14 veces el ancho del IEZ a su máxima altura, las zonas de extracción interactuaban. [Power 2004](#) también estudió la IEZ para varios tamaños de partícula utilizando un gran modelo tridimensional. Su modelo era de 2,2 m de largo, 2,1 m de ancho y 3,3 m de alto, con partículas de 5 mm, 7 mm, 14 mm, 20 mm y una amplia distribución de mezcla entre partículas finas y partículas gruesas con un tamaño medio de 14mm. De estas experiencias concluyó que el tamaño de las partículas y la altura de extracción influyen en las dimensiones de la IEZ. Además, concluyó que la diferencia entre sus resultados y los de Peters, se debían fundamentalmente a la naturaleza bidimensional del modelo de Peters. Ambos autores reportaron que el ancho de la zona de extracción se incrementa al aumentar la altura de material extraído.

3.3. Experiencia del siglo XXI

Resultados más recientes se deben principalmente a los trabajos de [A. Halim y Trueman 2004](#), [R. Castro 2007](#) y [R. Trueman 2007](#), obtenidos como parte del “International Caving Study II”. Estos autores en conjunto elaboraron experimentos físicos tridimensionales de gran escala utilizando grava como material granular (Ver Figura 3.7-a). El modelo fue diseñado para simular flujos en minas de Block Caving (utilizando como modelo la mina El Teniente 4 Sur) en condiciones de extracción aislada e interactiva. Las dimensiones internas del modelo alcanzaban los 3,5 x 2,5 x 3,3 m (ancho x profundidad x alto), siendo configurado a una escala geométrica de 1:30 y luego reducido a 1:100, equivalentes a un Block Caving de 100 y 330 m de altura respectivamente. En el modelo a escala 1:30, los puntos de extracción fueron de 120 x 100 mm (ancho x alto) equivalentes a 3 x 6 m escalados. La distribución de tamaño utilizada fue amplia, con un tamaño medio de 18 mm y un tamaño máximo de 40 mm, representando roca quebrada de entre 0,54 y 1,2 m. También se utilizó una segunda distribución más estrecha con tamaño medio de 20 mm. En el modelo a escala 1:100, los puntos de extracción fueron de 36 x 30 mm equivalentes a 3,6 x 3 m escalados. A diferencia del caso anterior, en éste se empleó una distribución acotada, con un diámetro medio de 7 mm. Las partículas tenían forma similar, y en ambos casos el ángulo de fricción del material fue cercano a los 45°. A partir de los análisis de los resultados, los autores observaron que: (1) no se presentan diferencias significativas al comparar los resultados de ambas escalas, (2) el ancho de las zonas de extracción y movimiento crece indefinidamente a medida que se extrae el mineral (ver Figura 3.7-b), y (3) no se experimenta una expansión de la zona de extracción en flujos interactivos (la superposición es ligeramente menor que la obtenida en flujos aislados - ver Figura 3.7c-d). De acuerdo con los autores, la expansión observada en los modelos con arena como material granular se origina a causa de su menor ángulo de fricción.

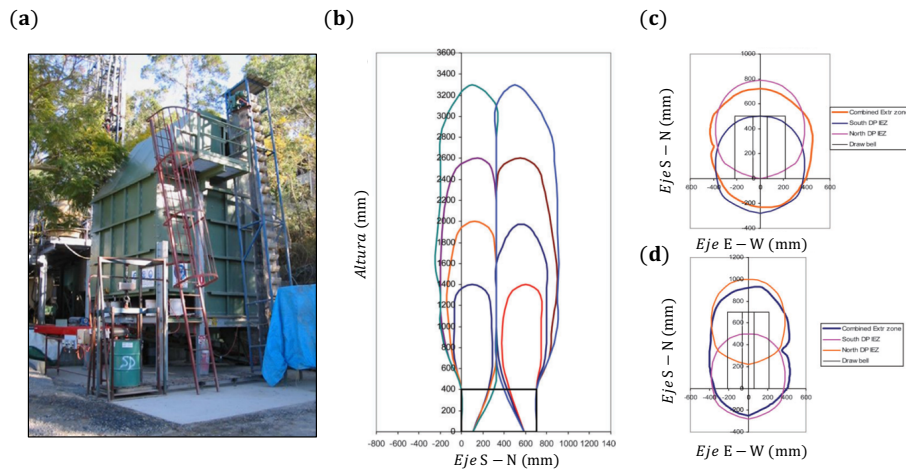


Figura 3.7: Modelo físico tridimensional de gran escala: (a) modelo físico, (b) vista lateral reconstrucción zona de extracción para una abertura de ancho 700 mm y dos puntos de extracción, (c-d) vista en planta comparación entre zonas de extracción con una y dos aberturas para un ancho de 500-700 mm. Adaptado de [A. Halim y Trueman 2004](#).

Otros autores han repetido estas experiencias utilizando modelos de menor escala con grava como material granular ([Melo y col. 2007](#); [Melo y col. 2008a](#); [Vivanco, Watt y col. 2011](#); [Vivanco y Melo 2013](#); [Jin, Sun, Ma y col. 2016](#); [Jin, Sun, Wu y col. 2017](#); [Zhang y col. 2018](#); [Zhang y col. 2019](#)). Sin embargo, sus resultados no han sido utilizados para elaborar una herramienta de diseño sistemático que sustituya al ábaco de Laubscher.

Capítulo 4

Modelos Analíticos de Flujo Gravitacional

“IMAGINATION IS MORE IMPORTANT THAN KNOWLEDGE. FOR KNOWLEDGE IS LIMITED TO ALL WE NOW KNOW AND UNDERSTAND, WHILE IMAGINATION EMBRACES THE ENTIRE WORLD, AND ALL THERE EVER WILL BE TO KNOW AND UNDERSTAND”. ALBERT EINSTEIN.

4.1. Modelos analíticos

Con la finalidad de predecir el comportamiento del flujo gravitacional se han utilizado diversas metodologías de simulación computacional, establecidas sobre la base de modelos analíticos que entregan una descripción del sistema a través de magnitudes promedio.

El principal resultado obtenido por esta vía es la descripción del campo de velocidades en la descarga de material granular a través de un punto de extracción, lo que se ha obtenido a través de dos enfoques. El primero se fundamenta en aspectos mecánicos asumiendo un estado tensional crítico (modelos de plasticidad) e imponiendo condiciones sobre las componentes del tensor de esfuerzos como es usual en mecánica de suelos. A pesar de su atractivo, el principal problema es que conlleva a discontinuidades que no son observadas en los experimentos (Choi y col. 2005). El segundo enfoque entrega una descripción cinemática del movimiento de las partículas ignorando el estado tensional. La discusión original se debe a Litwinişzyn 1958, quien describió el fenómeno a través de un modelo estocástico aplicado al campo de desplazamiento vertical, en que un desplazamiento en la superficie formada por los puntos ubicados a una cota determinada, induce un desplazamiento sobre los puntos ubicados inmediatamente por sobre estos. En un trabajo posterior, Litwinişzyn 1966 introdujo un nuevo modelo estocástico en que las partículas describen caminos aleatorios a través de los espacios disponibles. Luego, J. Mullins 1972 entregó una descripción equivalente en términos del movimiento de espacios vacíos liberados en una descarga, en que el movimiento descendente de una partícula, hacia o entre espacios vacíos, es equivalente al movimiento aleatorio de uno de estos espacios. El desarrollo de estas hipótesis conduce en el límite continuo a una ecuación de difusión. Por otro lado y como una visión alternativa a estos procesos de natu-

raleza estocástica, [R. Nedderman y Tüzün 1979](#) dedujeron la misma ecuación proponiendo una relación constitutiva entre las componentes horizontal y vertical del campo de velocidades. Esta última se conoce como relación cinemática, o simplemente, como modelo cinemático.

Las teorías de Litwiniszyn y Mullins de difusión de partículas/vacíos resaltan como un modelo más completo, en el sentido de que proporciona un mecanismo microscópico para comprender el flujo gravitacional. Sin embargo, diversos experimentos descartan su hipótesis, debido a que sobreestima la difusión de las partículas ([Choi y col. 2005](#)). Como alternativa surge el modelo de burbujas desarrollado por [M. Bazant 2004](#), el cual presupone que existe una identidad espacialmente distribuida denominada burbujas (distinta a los vacíos) encargada de transportar el espacio intersticial liberado en una descarga, y cuya difusión origina el movimiento de las partículas en acuerdo con la velocidad predicha por la relación cinemática de Nedderman y Tüzün.

Un desarrollo posterior elaborado por [Kamrin y M. Z. Bazant 2007](#) conocido como Regla de Flujo Estocástico (SFR por sus siglas en inglés) extiende el modelo de burbujas a condiciones de flujo más generales. El modelo propone que las burbujas difunden a lo largo de las líneas de deslizamiento admisibles en un estado de equilibrio límite, siendo impulsadas por disequilibrios locales en el estado tensional. Al ser aplicado al flujo gravitacional en silos proporciona el mismo resultado que el modelo de burbujas.

De forma complementaria al presente capítulo, en el Anexo B se presenta un resumen con aspectos fundamentales del cálculo estocástico.

4.2. Modelo cinemático

[R. Nedderman y Tüzün 1979](#) proponen que existe una relación constitutiva entre la componente vertical v y horizontal u del campo de velocidades. Para construir el modelo constitutivo, los autores plantean que una partícula se desplaza de forma horizontal si las velocidades verticales de las partículas en el nivel inferior son distintas (gradiente de velocidad vertical). Matemáticamente, considerando un modelo bidimensional, la ley propuesta es (ver Figura 4.2):

$$u = -b \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Adicionalmente, si las fluctuaciones en la densidad producto del flujo son pequeñas, la ecuación (4.1) combinada con la condición de incompresibilidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4.2)$$

permite deducir que la componente vertical de velocidad satisface la siguiente ecuación de difusión:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4.3)$$

La condición inicial es entregada por la velocidad en la cota inferior, de modo que dicha velocidad experimenta un ascenso difusivo a través del material. La condición de borde es que la velocidad en las paredes debe ser paralela a las mismas. Se puede demostrar que para un contenedor semi-infinito con un orificio puntual en su base en $x = z = 0$ que actúa como fuente de velocidad, la solución a la ecuación (4.3) se encuentra proporcionada por

$$v(x, z) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi bz}} e^{-x^2/4bz}, \quad (4.4)$$

donde Q es la tasa de flujo por unidad de espesor del contenedor.

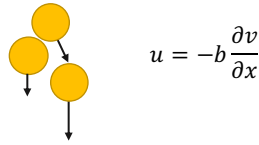


Figura 4.1: *Representación relación cinemática de Nedderman & Tüzün.*

El modelo cinemático ha sido ampliamente testado experimentalmente, presentando un gran acuerdo con los resultados observados (ver Figura 4.2). Una de las ventajas de este modelo es su simplicidad, ya que involucra un solo parámetro introducido como la constante de proporcionalidad b en (4.1). Esta constante se denomina usualmente longitud de difusión (debido a que posee unidades de distancia) cuyo significado microscópico es atribuido a las fluctuaciones en el movimiento de las partículas, es decir, a la desviación promedio de sus desplazamientos respecto al desplazamiento medio experimentado en un determinado punto.

Nedderman y Tüzün observaron que $b \approx 2,24d$ para varios tamaños de partícula. Por su parte, [J. Mullins 1972](#) midió $b \approx 2d$ para partículas monodispersas de mineral de hierro. [Medina y col. 1998](#) utilizaron la técnica de velocimetría de imagen de partícula (PIV) encontrando que la longitud de difusión aumenta desde los $1,5d$ a $4d$ a medida que la altura aumenta para adaptarse al campo de velocidades. [Samadani y col. 1999](#) reportaron que $b \approx 3,5d$ para pequeñas partículas monodispersas de vidrio. [Choi y col. 2005](#). El principal problema de este modelo es que, a pesar de su ajuste, la longitud de difusión muestra depender de la altura, lo cual es ilustrado en el gráfico de la Figura 4.2.

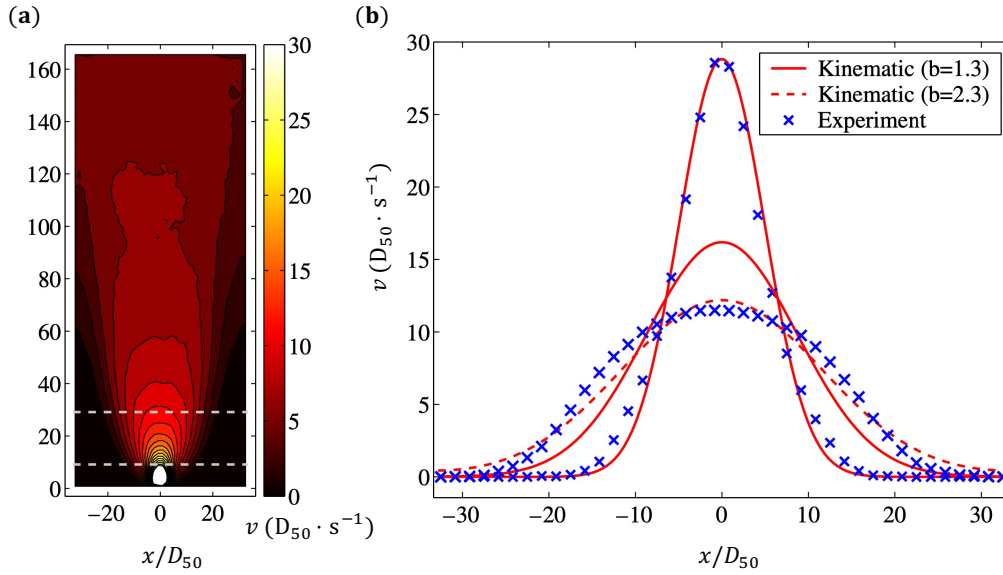


Figura 4.2: (a) Gráfico de contorno del campo de velocidad vertical descendiente promedio, v en un silo de fondo plano con un ancho de orificio, $W = 16$ mm. (b) v en función de x en las dos alturas, $z_1 = 9,1d$ y $z_2 = 29,1d$ indicados con líneas de puntos grises en (a). El resultado del modelo cinemático en la misma geometría encaja mejor con $b = 1,3d$ para el perfil z_1 y $b = 2,3d$ para el perfil z_2 . También se muestra el resultado del modelo para el perfil z_2 con b ajustado en z_1 (curva sólida estrecha). Figuras obtenidas de [Choi y col. 2005](#).

4.3. Modelo de difusión de vacíos

La discusión original se debe a [Litwiniszyn 1958](#), quien describió el fenómeno de flujo gravitacional introduciendo una función de subsidencia $w = w(x, z)$ que representa el desplazamiento vertical de la superficie horizontal inicialmente ubicada a una altura z por sobre la abertura de extracción. Tras un amplio desarrollo de su hipótesis, Litwiniszyn recuperó la ecuación de Chapman-Kolmogorov del cálculo estocástico, a partir de la cual obtuvo una ecuación de difusión para la función de subsidencia ¹. En un trabajo posterior, [Litwiniszyn 1966](#) describió el fenómeno de flujo gravitacional como el intercambio de posición entre partículas y espacios vacíos, según se ilustra en la Figura 4.3 (a). Estos últimos se originarían en la abertura basal con la extracción de material, experimentando un ascenso vertical acompañado de desplazamientos horizontales aleatorios. Así, cada paso de un vacío se correspondería con el desplazamiento en el sentido opuesto de un igual volumen de partículas.

Para desarrollar esta hipótesis, Litwiniszyn consideró el caso simplificado en que un vacío puede migrar a una posición en $(x, z + \delta z)$ sólo si es que proviene de las posiciones $(x - \delta x, z)$ o $(x + \delta x, z)$. Esta situación es ilustrada esquemáticamente en la Figura 4.3 (b), en que un vacío asciende desde un nivel inferior a la vez que experimenta un desplazamiento horizontal. Así, Litwiniszyn definió $p(x, z)$ como la probabilidad de encontrar un vacío en el

¹Este modelo presenta inconsistencias en sus postulados que fueron posteriormente identificadas por [W. Mullins 1979](#). Ver Anexo C.

punto (x, z) , junto a las probabilidades de salto w_p y w_q de que en un ascenso experimente un desplazamiento horizontal hacia la derecha o izquierda respectivamente. Con ello, encontró que la probabilidad de encontrar un vacío en el punto $(x, z + \delta z)$ es:

$$p(x, z + \delta z) = w_p p(x - \delta x, z) + w_q p(x + \delta x, z).$$

Expandiendo ambos lados de esta igualdad en series de Taylor, teniendo en cuenta que $w_p + w_q = 1$, asumiendo que δx y δx^2 son finitos y proporcionales a δz , y tomando el límite en que $\delta z \rightarrow 0$, se obtiene una ecuación de difusión-advección para la probabilidad $p(x, z)$ de encontrar un vacío en el punto (x, z) :

$$\frac{\partial p(x, z)}{\partial z} = -A(z) \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} + B(z) \frac{\partial^2 p(x, z)}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

donde

$$A(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} (w_p - w_q) \frac{\delta x}{\delta z} \quad \text{y} \quad B(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta x^2}{2! \delta z}. \quad (4.6)$$

De acuerdo a Litwiniszyn, cuando una partícula es removida de su posición, el vacío originado es ocupado por otra partícula que cae en su interior bajo la influencia del campo gravitacional (ver Figura 4.3). De este modo, el movimiento aleatorio de los vacíos es equivalente al movimiento aleatorio de las partículas. Este desarrollo es particularmente útil ya que ilustra de manera simple el fundamento del desarrollo de los modelos estocásticos. Además, dado que es de esperar que los movimientos horizontales en ambos sentidos sean equiprobables, se sigue que $A = 0$ a la vez que B posee un valor finito, que puede ser explicado a partir de las fluctuaciones en el desplazamiento horizontal de la partícula. Este es el significado que se le entrega al coeficiente de difusión en el contexto de la teoría de procesos estocásticos, particularmente en la física del no equilibrio².

En un desarrollo posterior, [J. Mullins 1972](#) interpretó esta ecuación en términos de la densidad de flujo de partículas. Así, si la probabilidad p se corresponde con la densidad de vacíos ρ_v , la ecuación anterior es equivalente a asumir que la densidad de flujo de vacíos tiene por componentes:

$$J_{v,x} \sim -b \partial_x \rho_v \quad \text{y} \quad J_{v,y} \sim -\rho_v. \quad (4.7)$$

Luego, utilizando la ecuación de continuidad sobre esta densidad de flujo, es sencillo ver que ρ_v satisface la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial z} = b \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial x^2}. \quad (4.8)$$

Finalmente, teniendo en consideración que los flujos de vacíos y partículas son iguales y en sentido opuesto $\mathbf{J}_p = -\mathbf{J}_v$ se sigue que este modelo y el cinemático son equivalentes.

²Para una introducción al cálculo estocástico refiérase a [Arovas 2015](#).

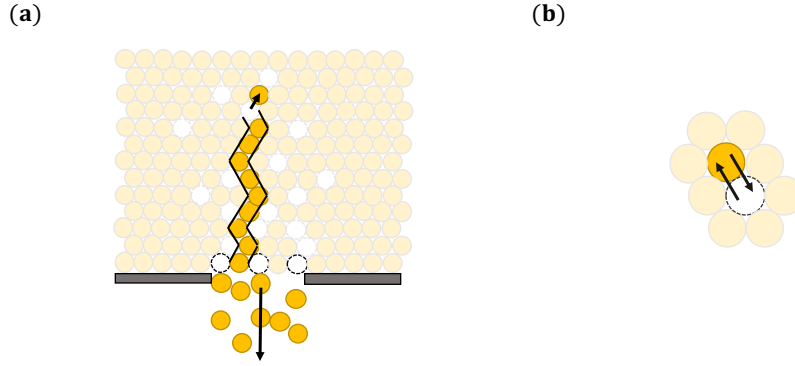


Figura 4.3: (a) Trayectoria de un vacío en ascenso origina una cadena de partículas descendentes. (b) Partícula descendiendo en respuesta al ascenso de un vacío por intercambio de volumen. Figuras adaptadas de [M. Bazant 2004](#).

En general, el problema de del modelo de difusión de vacíos se pone de manifiesto cuando se considera un experimento de difusión. Así, si se colorea una de las partículas en un flujo uniforme impulsado por vacíos, la partícula realiza un camino aleatorio descendente con la misma longitud de difusión que los vacíos en ascenso. Por lo tanto, las partículas se mezclan rápidamente antes de que caigan por la abertura en longitudes de unos pocos diámetros de partícula, lo que va en contra de la experiencia [Choi y col. 2005](#).

4.4. Modelo de difusión de burbujas

El modelo de burbujas introducido por [M. Bazant 2004](#) surge como un mecanismo de difusión cooperativa en empaquetamientos densos y aleatorios de un medio granular. El flujo predicho es aproximadamente el mismo flujo medio que en el modelo cinemático, porque también supone que las partículas se mueven en respuesta al volumen libre que difunde hacia arriba. Sin embargo, establece que este exceso de volumen se transmite en burbujas extendidas de volumen intersticial, no en espacios vacíos. De esto modo, la longitud de difusión b del modelo cinemático ahora corresponde a la longitud de difusión de las burbujas b_s , definida como

$$b_s = \frac{\text{Var}(\delta x_s)}{2\delta z_s} = b, \quad (4.9)$$

donde δx_s y δz_s corresponden a los desplazamientos horizontales y vertical de las burbujas respectivamente. A diferencia del modelo de difusión de vacíos, en que un vacío actúa como una vacante capaz de ser llenado por una partícula entera, una burbuja transporta una pequeña fracción del espacio intersticial distribuido en una región extendida y hace que todas las partículas afectadas se muevan (en promedio) como un bloque con el mismo desplazamiento en la dirección opuesta a la burbuja (ver Figura 4.4).

Otra de las diferencias con el modelo de vacíos es que el modelo de burbujas reduce en gran medida la longitud de difusión de las partículas. Para dar cuenta de aquello se puede suponer que una burbuja lleva un volumen total libre V_s y causa desplazamientos iguales

$(\delta x_p, \delta z_p)$, entre las N_p partículas del volumen V_p . Luego, el desplazamiento de las partículas al interior de una burbuja puede estar relacionado con el desplazamiento de la burbuja $(\delta x_s, \delta z_s)$ mediante la siguiente expresión aproximada de la conservación del volumen total:

$$w N_s V_p (\delta x_p, \delta z_p) = V_s (\delta x_s, \delta z_s). \quad (4.10)$$

A partir de esta relación se sigue que la escala de difusión de las partículas b_p se relaciona con la escala de difusión de las burbujas a través de:

$$b_p = \frac{\text{Var}(\delta x_p)}{2\delta z_p} = w^2 \frac{\text{Var}(\delta x_p)}{2w\delta z_p} = w b_s. \quad (4.11)$$

Este valor es menor que la longitud de difusión de burbujas en un factor de $w = V_s/N_p V_p$, lo que puede estar relacionado con el cambio $\delta\phi$ en la fracción de volumen local de las partículas ϕ causado por la presencia de la burbuja, $\delta\phi = \phi - \phi/(1 + \phi w) \approx \phi^2 w$. Como resultado de simulaciones y experimentos se sabe que $\phi \sim 0,6$ y su variación fluctúa entre un 1 % a 3 % en las regiones con flujos densos lejos de la abertura, por lo que el modelo de burbujas predice [Choi y col. 2005](#):

$$\omega = \frac{b_p}{b_s} = \frac{V_s}{N_p V_p} \approx \frac{\delta\phi}{\phi^2} \sim 10^{-2}. \quad (4.12)$$

Con este resultado se sigue que el número de Péclet (que relaciona la velocidad de advección con la de difusión) para la difusión horizontal es $P_{e_x} = \langle \delta y_p / \delta t \rangle d / (\text{Var}(\delta x_p) / 2\delta t) = d/b_p = d/\omega b_s \approx 10^2$. Este resultado predice que las partículas se desplazan una distancia del orden de 100 veces su propio diámetro antes de experimentar difusión horizontal de 1 diámetro, lo que concuerda con los experimentos en que $P_{e_x} = 321$ para partículas que descargan en un silo cuasi-bidimensional [M. Bazant 2004](#).

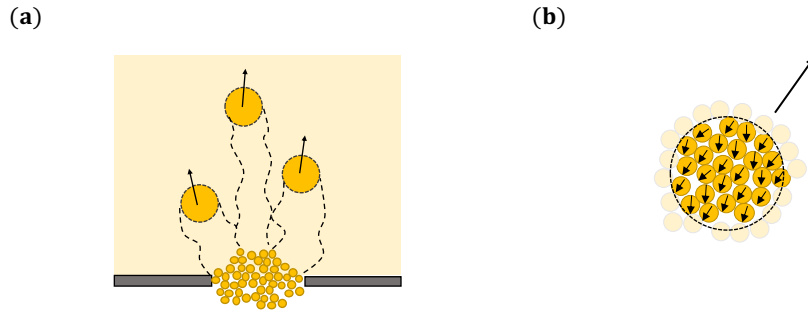


Figura 4.4: *Modelo de Burbujas. (a) Burbujas transportando espacio intersticial, que se extienden en varios diámetros de partículas, se difunde hacia arriba desde la abertura del silo a medida que las partículas descargan. (a) El desplazamiento de una burbuja hace que un bloque de partículas experimente un desplazamiento más pequeño en la dirección opuesta, a fin de conservar aproximadamente el volumen local. Figuras adaptadas de [M. Bazant 2004](#).*

El concepto matemático clave para definir las burbujas es la de una región de influencia difusora, que causa una correlación desplazamientos entre todas las partículas en su interior.

El postulado microscópico para este movimiento se fundamenta en la preservación del empaquetamiento de las partículas, lo que origina el movimiento de la zona afectada como un bloque en la forma ya descrita. Esto sugiere que la influencia de una burbuja se encuentra gobernada por una función $w(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s)$ que decae con la distancia al centro de la burbuja. Así, en un movimiento de traslación en una dirección opuesta a la de la burbuja, el desplazamiento aleatorio $\Delta \mathbf{R}_p^\alpha$ de la α -ésima partícula centrada en $\mathbf{x}_p^i$ debido al desplazamiento aleatorio $\Delta \mathbf{R}_s^\beta$ de la β -ésima burbuja centrada en $\mathbf{x}_s^i$ se encuentra dado por:

$$\Delta \mathbf{R}_p^\alpha = -w(\mathbf{x}_p^\alpha, \mathbf{x}_s^\alpha + \Delta \mathbf{R}_s^\alpha) \Delta \mathbf{R}_s^\alpha. \quad (4.13)$$

Luego, en presencia de N burbujas, el desplazamiento total experimentado por la partícula se obtiene sumando sobre la función de influencia y los desplazamientos de todas las burbujas. En el límite continuo se sigue que el desplazamiento neto de una partícula en $\mathbf{x}_p$ se encuentra dado por:

$$\Delta \mathbf{R}_p = - \int dN(\mathbf{x}_p, t) w(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s + \Delta \mathbf{R}_s) \Delta \mathbf{R}_s. \quad (4.14)$$

Definiendo una densidad de burbujas tal que $\langle \Delta N \rangle = \rho_s \Delta V_s$ se sigue que la velocidad promedio de la partícula en $\mathbf{x}_p$ se encuentra dada por:

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}_p, t) = - \int dV_s w(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s) [\rho_s(\mathbf{x}_s, t) \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_s, t) - \mathbf{D}_s(\mathbf{x}_s, t) \nabla \rho_s(\mathbf{x}_s, t)]. \quad (4.15)$$

Así, queda en evidencia que la velocidad de partícula posee dos fuentes. La primera corresponde a la reacción (opuesta) al desplazamiento de las burbujas,

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}_s, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta \mathbf{R}_s \rangle}{\delta t}, \quad (4.16)$$

y la segunda originada por las fluctuaciones en el movimiento de las burbujas, conteniendo al tensor de difusión de las burbujas de componentes:

$$D_{s,ij} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta R_{s,i} \Delta R_{s,j} \rangle}{\delta t}. \quad (4.17)$$

Asumiendo que las burbujas no interactúan y que sus fluctuaciones son independientes, se sigue que el tensor de difusión de las partículas se relaciona con el de las burbujas de acuerdo a:

$$\mathbf{D}_p = \int dV_s w(\mathbf{x}_p, t)^2 \rho(\mathbf{x}_s, t) \mathbf{D}_s(\mathbf{x}_s, t). \quad (4.18)$$

En esta expresión se debe notar que la función de influencia aparece al cuadrado, lo que sugiere que el término dominante en el desplazamiento de las partículas es la advección. Este aspecto se ve apoyado en la discusión previa respecto a que el número de Peclet es del orden de 10^2 veces el diámetro de partícula.

Este modelo posee amplia aceptación debido a que permite reparar las inconsistencias del modelo de vacíos, además de que los resultados experimentales indican que las velocidades de

las partículas se encuentran correlacionadas a distancias de unos pocos diámetros de partícula (ver Figura 4.4) resultando en evidencias directas para el modelo (M. Bazant 2004).

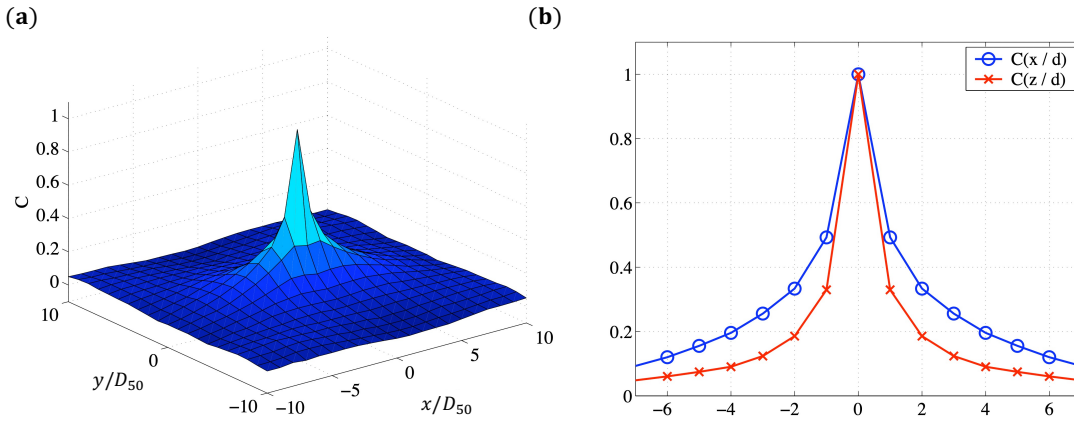


Figura 4.5: *Evidencia experimental directa de burbujas: correlaciones de velocidad espacial. (a) Gráfico de superficie y (b) cortes coordinados del coeficiente de correlación para fluctuaciones de velocidad (sobre el flujo medio local) en separación horizontal, x , y separación vertical, z , en unidades de diámetro de partícula, d . Imágenes obtenidas de M. Bazant 2004.*

4.5. Regla de flujo estocástico

La regla de flujo estocástico introducida por Kamrin y M. Z. Bazant 2007, o SRF por sus siglas en inglés, es una generalización del modelo de burbujas. En el SRF la dirección de deriva, previamente supuesta vertical por M. Bazant 2004, se obtiene proyectando una fuerza efectiva sobre las superficies (líneas) de deslizamiento admisibles en un estado de equilibrio límite.

La idea tras el SRF es que las burbujas no se pueden mover en una dirección arbitraria, ya que el material se encuentra en un estado de movimiento incipiente sólo a lo largo de superficies (líneas) de deslizamiento en que se cumple la condición de equilibrio límite, según predicen los modelos de plasticidad. De acuerdo con el modelo de Mohr-Coulomb, para un problema bidimensional las líneas de deslizamiento se orientan a un ángulo de $\pm(\pi/4 + \phi/2)$ respecto al esfuerzo principal mayor. Así, cuando una burbuja se propaga actúa como un evento local de falla o fluidización del material. Geométricamente, la región fluidizada se encuentra entre líneas de deslizamiento cruzadas separadas por una distancia característica L_s , asemejándose a un diamante. Ver Figura 4.5. Cuando se produce la fluidización, la región afectada disminuye su coeficiente de fricción desde un valor μ a un valor $\mu_k < \mu$. Este cambio afecta el equilibrio y origina una fuerza neta desbalanceada que impulsa a la región fluidizada.

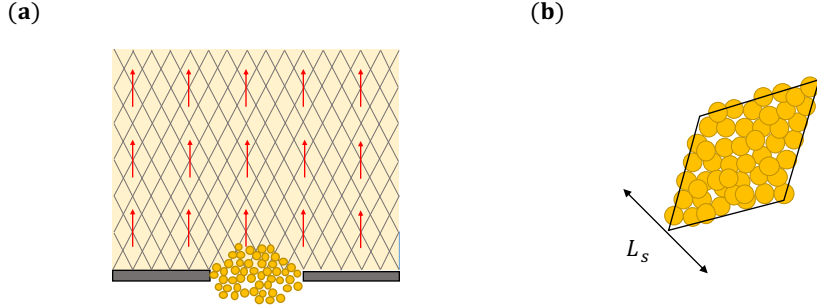


Figura 4.6: *Regla de flujo estocástico. (a) Líneas de deslizamiento admisibles al interior del silo, correspondientes a esfuerzo principal mayor vertical, y dirección de deriva de burbujas. (b) Región fluidizada entre líneas de deslizamiento admisibles. Figuras adaptadas de Kamrin 2008.*

En el modelo de plasticidad de Mohr-Coulomb las líneas de deslizamiento se caracterizan por los siguientes vectores normales:

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= (\cos(\psi + \pi/4 - \phi/2), \sin(\psi + \pi/4 - \phi/2)) \\ \hat{\eta} &= (\cos(\psi - \pi/4 + \phi/2), \sin(\psi - \pi/4 + \phi/2)),\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde ψ es el ángulo entre el eje horizontal y el esfuerzo principal mayor. Luego, si $\mathbf{f}$ es la fuerza desbalanceada, se sigue que la dirección de deriva de las burbujas corresponde a:

$$\hat{\mathbf{d}} = -\frac{(\mathbf{f} \cdot \hat{\xi})\hat{\xi} + (\mathbf{f} \cdot \hat{\eta})\hat{\eta}}{\|(\mathbf{f} \cdot \hat{\xi})\hat{\xi} + (\mathbf{f} \cdot \hat{\eta})\hat{\eta}\|}.\tag{4.20}$$

Con esta definición, se sigue que la velocidad promedio de una partícula ubicada en $\mathbf{x}_p$ se encuentra dada por:

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}_p, t) = -\int dV_s w(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s) \left[\rho_s(\mathbf{x}_s, t) \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_s, t) - \mathbf{D}_s(\mathbf{x}_s, t) \nabla \rho_s(\mathbf{x}_s, t) \right].\tag{4.21}$$

En tanto que la ecuación de Fokker-Planck que describe la evolución de la densidad de burbujas es:

$$\nabla \cdot (\rho_s \hat{\mathbf{d}}) = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla \rho_s).\tag{4.22}$$

La fuerza desbalanceada se obtiene a partir de las fuerzas de volumen y de tracción que actúan en la región fluidizada. Las fuerzas de tracción se originan por el estado tensional, por lo que su valor por unidad de área se obtiene como la proyección del tensor de esfuerzos, de acuerdo con:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j.\tag{4.23}$$

Esta cantidad puede ser descompuesta en sus componentes normal σ_n y tangencial τ definidas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{n,i} &= (T_k n_k) n_i \\ &= (\sigma_{kl} n_l n_k) n_i \\ \tau_i &= T_i - \sigma_{n,i} \\ &= (\sigma_{ij} - \sigma_{kl} n_k n_l n_i n_j) n_j.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Así, la fuerza neta sobre la región fluidizada se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \sigma_{ij} n_j - \rho g_i \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \tau_i + \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \sigma_{n,i} - \rho g_i. \end{aligned} \quad (4.25)$$

De acuerdo con el modelo de Mohr-Coulomb, las magnitudes de las componentes de la fuerza de tracción corresponden a $\tau = \mu \sigma_n$ y $\sigma_n = P \cos^2 \phi$, por lo que para una condición de equilibrio límite se cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -P \cos^2 \phi n_i \\ \tau_i &= \mu P \cos^2 \phi \hat{\tau}_i \quad (n_i \hat{\tau}_i = 0). \end{aligned} \quad (4.26)$$

De forma similar, en la región fluidizada se cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -P \cos^2 \phi n_i \\ \tau_i &= \mu_k P \cos^2 \phi \hat{\tau}_i \quad (n_i \hat{\tau}_i = 0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Luego, la fuerza neta es:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \mu_k P \cos^2 \phi \hat{\tau}_i - \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i - \rho g_i \\ &= \frac{\mu_k}{\mu} \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \mu P \cos^2 \phi \hat{\tau}_i - \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i - \rho g_i \\ &= \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x \mu P \cos^2 \phi \hat{\tau}_i - \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i - \rho g_i \right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu} \right) \left(-\frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i - \rho g_i \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ahora bien, el primer miembro de la última igualdad es nulo en un estado de equilibrio límite, de modo que la fuerza desbalanceada que actúa sobre la región fluidizada corresponde a:

$$f_i = - \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu} \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i + \rho g_i \right). \quad (4.29)$$

Atendiendo al teorema de la divergencia se sigue que:

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2x P \cos^2 \phi n_i = \frac{\partial P}{\partial x_i} \cos^2 \phi. \quad (4.30)$$

Finalmente, sustituyendo (4.30) en (4.29) se sigue que la fuerza desbalanceada se encuentra determinada por:

$$\mathbf{f} = - \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu} \right) (\nabla P \cos^2 \phi + \rho \mathbf{g}). \quad (4.31)$$

El mismo resultado se puede obtener de forma gráfica atendiendo a los esquemas ilustrados en la Figura 4.5.

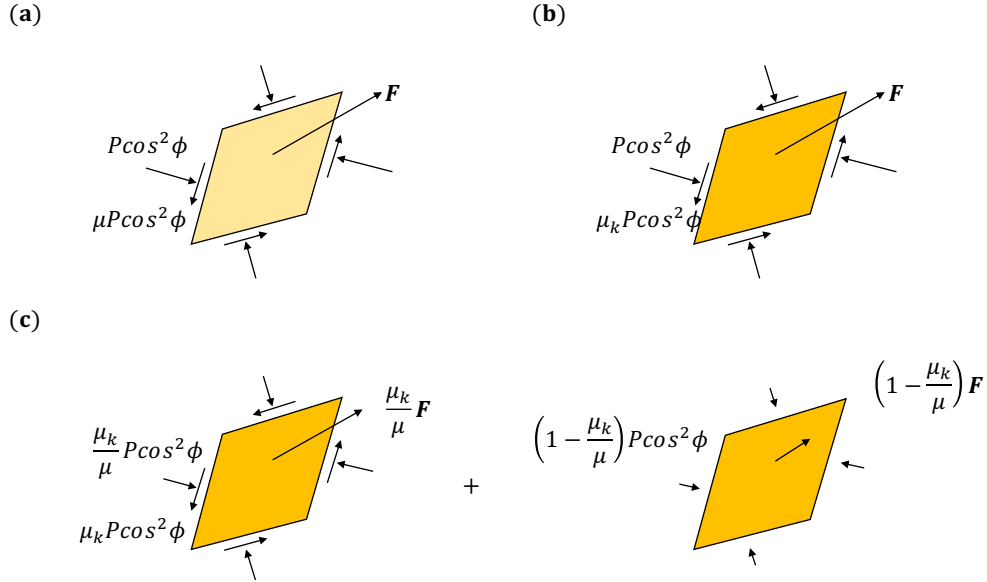


Figura 4.7: (a) Diagrama de fuerzas sobre región estática. (b) Diagrama de fuerzas sobre región fluidizada por una burbuja. Observar que μ decrece a μ_k . (c) Descomposición del diagrama de fuerzas para región fluidizada. El primero de los diagramas equivale (salvo un factor de multiplicación global) al de una región estática, por lo que no contribuye a la fuerza neta. Fuerza F corresponde a fuerza de volumen, e.g. gravedad. Figuras adaptadas de [Kamrin 2008](#).

Esta teoría mecánica supone que los campos involucrados corresponden a magnitudes promedio, a la vez que las líneas de deslizamiento se encuentran bien definidas. En general, las líneas de deslizamiento se presentan de forma difusa a causa del empaque aleatorio de las partículas, actuando como fuente para la difusión de las burbujas.

Capítulo 5

Modelo Teórico de Flujo Gravitacional

“WHEN YOU MAKE THE FINDING YOURSELF – EVEN IF YOU’RE THE LAST PERSON ON EARTH TO SEE THE LIGHT – YOU’LL NEVER FORGET IT”. CARL SAGAN.

5.1. Discusión

Los modelos analíticos elaborados para explicar la fenomenología observada en experimentos de flujo gravitacional, proporcionan una descripción del movimiento de las partículas introduciendo hipótesis que conllevan a la obtención de ecuaciones del tipo difusión-advección. Este es el caso de la relación cinemática de [R.M. Nedderman y Tüzün 1979](#) (ver Figura 5.1-a), los modelos de difusión de vacíos de [Litwiniszyn 1958](#) y [J. Mullins 1972](#) (ver Figura 5.1-b), del modelo de difusión de burbujas propuesto por [M. Bazant 2004](#) (ver Figura 5.1-c), y su posterior adaptación introducida por [Kamrin y M. Z. Bazant 2007](#) (ver Figura 5.1-d). De acuerdo con sus autores, todos ellos conllevan a recuperar el mismo perfil de velocidades promedio que se obtendría por medio de la aplicación de la relación cinemática.

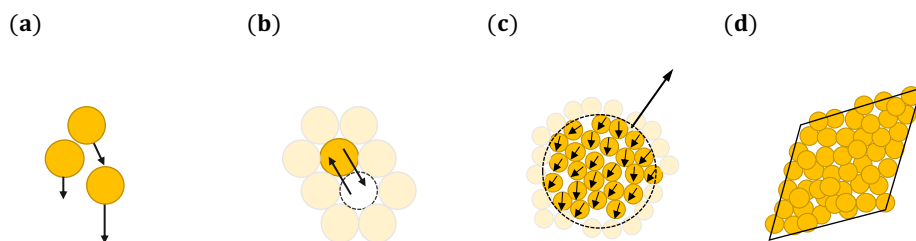


Figura 5.1: Esquema interpretación modelos analíticos: (a) relación cinemática de [R.M. Nedderman y Tüzün 1979](#); (b) intercambio de partículas y vacíos en el modelo de difusión de vacíos de [Litwiniszyn 1958](#) y [J. Mullins 1972](#); (c) desplazamiento de burbuja induce un desplazamiento en un bloque de partículas en el modelo de difusión de burbujas de [M. Bazant 2004](#); y (d) región fluidizada por una burbuja en la regla de flujo estocástico de [Kamrin y M. Z. Bazant 2007](#).

[Melo y col. 2008b](#) utilizaron el modelo cinemático para estudiar la geometría de la zona de extracción (EZ), encontrando que la geometría predicha por la relación cinemática se asemeja

a la forma de un huevo, y no a una elipse como sugieren los resultados experimentales¹. Esta situación es ilustrada en la Figura 5.1.

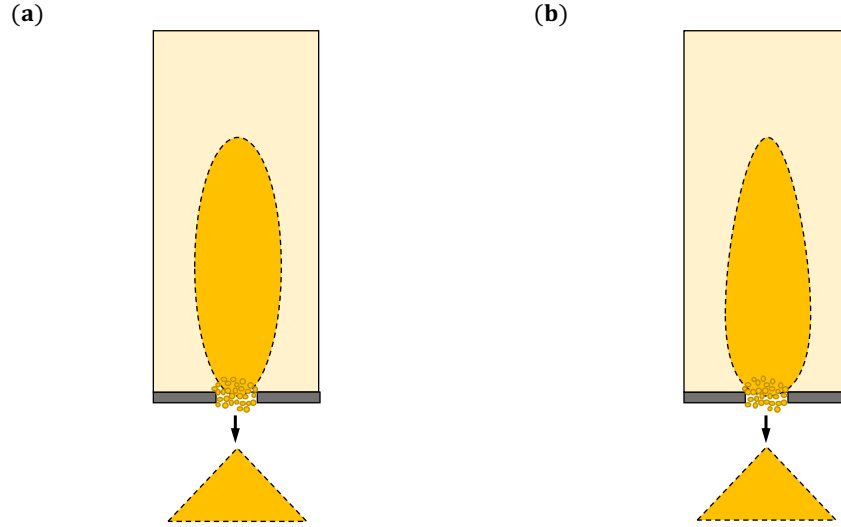


Figura 5.2: Geometría zona de extracción. (a) Geometría elíptica obtenida en experimentos de flujo gravitacional. (b) Geometría en forma de huevo obtenida por integración del modelo cinemático de acuerdo con [Melo y col. 2008b](#). En ambas, triángulo inferior representa material granular extraído, y línea segmentada corresponde al contorno de la región originalmente utilizada por el material al interior del silo, antes de su extracción.

En general, los modelos del tipo cinemáticos requieren de la introducción de una entidad que transporta espacio intersticial (vacíos o burbujas), cuyo movimiento aleatorio es estudiado en términos probabilísticos por medio de la ecuación de Chapman-Kolmogorov diferencial (también conocida como ecuación de Fokker-Planck, refiérase a [Arovás 2015](#)), sin proporcionar una explicación mecánica que justifique su aplicación. Esta hipótesis se apoya en el acuerdo entre resultados experimentales y la predicción de perfiles de velocidad que asemejan una distribución gaussiana, un resultado característico de fenómenos de naturaleza difusiva en que la entidad en movimiento sigue una trayectoria aleatoria con desplazamientos cuadráticos medios proporcionales al tiempo. Sin embargo, resultados experimentales como los de [Garcimartín y col. 2011](#) han demostrado que se exhibe una tendencia balística ($\langle \Delta x \rangle^2 \sim t^2$) a intervalos de tiempo menores a lo que tarda un grano en caer en su propio diámetro, volviéndose difusivo ($\langle \Delta x^2 \rangle \sim t$) sólo a distancias mayores.

Si el comportamiento de las partículas en un experimento de flujo gravitacional fuese difusivo, el campo de velocidad obtenido en un experimento con múltiples aberturas correspondería a la superposición lineal de los campos de velocidad originados por cada una de ellas

¹Para remediar esta situación, los autores propusieron un retraso temporal entre el movimiento del material y su extracción, provocado por la dilatación del medio. En su forma original, este modelo incorpora un término de reacción en la ecuación de difusión, teniendo como desventaja la pérdida de masa para un elevado número de extracciones.

por separado. Este resultado se denomina principio de superposición y su validez se limita a las ecuaciones diferenciales lineales. Luego, es claro que los efectos de interacción no lineal observados en experimentos con múltiples aberturas no existirían si los comportamientos fueran puramente difusivos. Estos efectos pueden emerger de una dependencia del parámetro de longitud de difusión del modelo de [R.M. Nedderman y Tüzün 1979](#) en la velocidad (o densidad de vacíos para los modelos de [Litwiniszyn 1958](#) y [J. Mullins 1972](#)), situación que de acuerdo con los trabajos de [E. Lenzi y col. 2017](#); [E. K. Lenzi y col. 2019](#) podría explicar el origen de los regímenes subdifusivos o sobredifusivos y las respuestas no lineales.

Por otro lado, el argumento de la existencia de una entidad que transporta espacio intersticial, utilizado en la interpretación de los modelos de tipo cinemáticos, no es la única explicación a un comportamiento, de apariencia, difusivo. Desde el punto de vista mecánico, la contribución difusiva emerge de una ecuación de movimiento del tipo

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -D\delta t^{-1}\nabla\delta\rho - \delta\rho\mathbf{g} - \rho\delta t^{-1}\mathbf{v}, \quad (5.1)$$

en que D y δt son propiedades del medio y $\delta\rho$ es el cambio local en su densidad. Así, para instantes de tiempo $t \gg \delta t$ se puede despreciar la contribución del término de aceleración, obteniendo una densidad de flujo de partículas equivalente a la que se obtendría por medio de la aplicación de la segunda ley de Fick para fenómenos de difusión de materia, incluyendo un término de deriva en la dirección favorecida por la aceleración de gravedad:

$$\mathbf{j} = -\delta\rho\mathbf{u} - D\nabla\delta\rho \quad \text{Ley de Fick}, \quad (5.2)$$

donde $\mathbf{u} = \delta t\mathbf{g}$ corresponde a la velocidad de deriva². Luego, aplicando la ecuación de conservación de masa se recupera una ecuación del tipo difusión advección para la densidad de partículas:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial\delta\rho}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x_i\partial x_i}. \quad (5.3)$$

Una ecuación análoga puede ser escrita si la apariencia difusiva se atribuye a la presión en lugar de la densidad, por ejemplo, por medio de una ecuación de movimiento del tipo

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho\mathbf{g} - \frac{\nu}{k}\rho\mathbf{v}, \quad (5.4)$$

en que ν y k ³. Así, para instantes de tiempo $t \gg k/\nu$ se obtiene una densidad de flujo de partículas equivalente a la que se obtendría por medio de la aplicación de la ley de Darcy para el flujo de agua en medios porosos:

$$\mathbf{j} = -\frac{k}{\nu}(\nabla P + \rho\mathbf{g}) \quad \text{Ley de Darcy}. \quad (5.5)$$

²Corresponde a la dirección promedio de la densidad de flujo de partículas, sin considerar la contribución de las fluctuaciones, en este caso contenidas en el término gradiente de densidad.

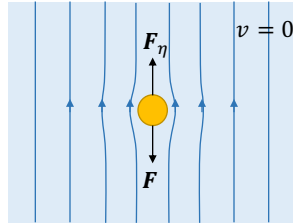
³En el contexto de flujo de un fluido a través de un medio poroso, ν corresponde a la viscosidad cinemática de la fase fluida, y k a la permeabilidad del medio poroso.

Aplicando la ecuación de conservación de masa se recupera una ecuación del tipo difusión advección para la presión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + A_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = B_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (5.6)$$

donde se ha asumido que $\rho = \rho(P)$, y se han definido los parámetros $K = \rho(\partial P / \partial \rho)$ (módulo de compresibilidad), $A_i = -k g_i \rho / \nu K$ y $B_{ij} = k / \nu \delta_{ij}$.

(a)



(b)

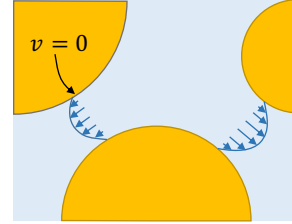


Figura 5.3: (a) *Ley de Stokes, partícula esférica se desplaza en el seno de un fluido viscoso inicialmente en reposo.* (b) *Ley de Darcy, fluido se desplaza a través de la red de canales de un medio poroso.*

Las relaciones precedentes sugieren que, además de las explicaciones basadas en mecanismos de intercambio de partículas y espacio intersticial, se deben explorar aquellas en que el gradiente de presión (o divergencia del estado tensional) y la gravedad, actúan como fuerza motriz para el desplazamiento de las partículas. Este enfoque es consistente con la observación experimental de un incremento de la longitud de difusión con la altura por sobre la abertura de extracción, lo que sugiere una dependencia implícita en la presión, ya que los invariantes del tensor de esfuerzos son las únicas cantidades escalares que pueden transmitir información sobre la altura de columna de partículas. Sin embargo, es importante observar que las ecuaciones de movimiento (5.1) y (5.4) requeridas para explicar la dinámica del medio granular como un fenómeno difusivo poseen la dificultad de incorporar un término lineal en la velocidad. En general, estas fuerzas viscosas emergen en la frontera entre dos medios que se desplazan entre sí, como es el caso de la ley de Stokes para el desplazamiento de una esfera en el seno de un fluido (ver Figura 5.1-a), o bien en la ley de Darcy, en que el fluido se desplaza a través de una red de canales al interior del medio poroso (ver Figura 5.1-b). En ambos ejemplos citados, la fuerza es lineal en la velocidad relativa de desplazamiento entre ambos medios a causa de que uno de ellos se comporta como un fluido newtoniano. Luego, para que cualquiera de los enfoques enunciados sea aplicable, el movimiento del medio granular debe componerse esencialmente por grupos de partículas movilizadas que se desplazan, relativas a un medio estático, de forma similar al esquema sugerido por el modelo de burbujas. No obstante, no hay razones para suponer que la fuerza deba ser lineal en la velocidad relativa, ya que las partículas movilizadas se encuentran alejadas de presentar el comportamiento de un fluido newtoniano, asemejándose más al de un fluido de Bingham debido a la existencia

de un esfuerzo de fluencia.

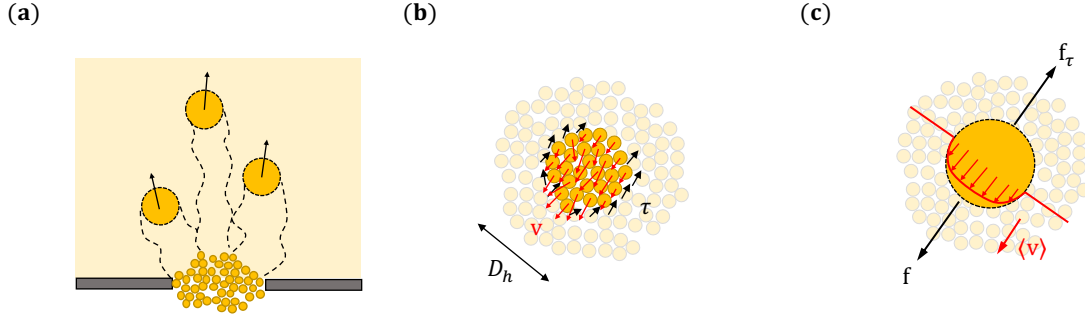


Figura 5.4: (a) *Perturbaciones de estado tensional se desplazan a través del medio granular, originando que grupos de partículas se desplacen en la dirección opuesta.* (b) *Grupo de partículas movilizadas sujetas a esfuerzos de corte en la frontera con las partículas estáticas.* (c) *Aproximación continua de la distribución de velocidades y fuerzas a las que se encuentran sujetas las partículas movilizadas. Fuerzas $\mathbf{f}$ y $\mathbf{f}_r$ corresponden a fuerza impulsora y resistente promedio.*

Si se acepta que el conjunto de partículas movilizadas conforma un volumen de longitud característica D_h ⁴ (ver Figura 5.1), su desplazamiento respecto al medio estático requeriría que la fuerza impulsora sea mayor a la fuerza resistente desarrollada en los bordes del conjunto de partículas en movimiento. Dado que el comportamiento es friccionante, la fuerza resistente se puede asumir del orden de $\mu P/D_h$, donde μ es un coeficiente de fricción. Así, $\|\nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g}\| \geq \mu P/D_h$. O bien, definiendo el número adimensional de resistencia⁵ por

$$Y = \frac{D_{50} \|\nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g}\|}{\mu P}, \quad (5.7)$$

se sigue que el movimiento del grupo de partículas se producirá cuando se cumpla la restricción:

$$Y \geq Y_0 \quad \text{con} \quad Y_0 = \frac{D_{50}}{D_h}. \quad (5.8)$$

La fuerza de fricción también puede incluir contribuciones viscosas asociadas al desplazamiento relativo entre partículas vecinas. Luego, si $Y > Y_0$ se puede incorporar un término del orden de $32\nu\rho\mathbf{v}/D_h^2$, con ν un parámetro con unidades de m^2/s interpretable como una viscosidad cinemática. Así, la ecuación de movimiento adquiere la forma:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g} - \frac{\mu P}{D_h} \hat{\mathbf{v}} - \frac{32\nu\rho}{D_h^2} \mathbf{v}, \quad (5.9)$$

⁴Se utiliza el subíndice h en directa alusión a un diámetro hidráulico.

⁵La letra Y se utiliza en alusión a la palabra de habla inglesa "Yield", por representar una medida de la fluencia a escalas del orden del diámetro de partícula.

Luego, para $t \gg D_h^2/32\nu$ se observa que $\hat{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g}) / \|\nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g}\|$, por lo que sustituyendo esta relación en (5.9) se obtiene el siguiente resultado para la densidad de flujo de partículas:

$$\mathbf{j} = -\frac{D_h^2}{32\nu} \chi(-\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g}), \quad (5.10)$$

donde se ha introducido la función:

$$\chi = \begin{cases} 1 - \frac{Y_0}{Y} & \text{si } Y \geq Y_0 \\ 0 & \text{si } Y < Y_0 \end{cases}. \quad (5.11)$$

De este modo, se obtiene una ecuación para la densidad de flujo de partículas análoga a la ley de Darcy, con la diferencia de que para el medio en desplazamiento (partículas movilizadas) se incorpora un esfuerzo de fluencia. Es interesante observar que la ecuación (5.9) es, exceptuando el término lineal en la velocidad, equivalente a la utilizada para describir el efecto Janssen de saturación del esfuerzo en un silo. Así, el término proporcional a la resistencia al esfuerzo de fluencia μP , se puede interpretar como una transmisión local de los esfuerzos cargados sobre las partículas en movimiento, hacia las partículas vecinas en reposo.

5.2. Modelo físico-matemático

5.2.1. Promedio de la ecuación de movimiento en la zona movilizada

La discusión precedente sugiere que la dinámica del flujo gravitacional en estados cuasi-estáticos puede ser explicada utilizando una ecuación de movimiento que incorpora contribuciones friccionantes. Éstas representan fuerzas de volumen, y se originan en la interfaz entre los grupos de partículas movilizadas, y las no movilizadas. Esta situación motiva el uso del teorema de la divergencia del cálculo vectorial para llevar contribuciones volumétricas hacia interacciones originadas en la interfaz. Para utilizar este procedimiento y construir ecuaciones significativas, es decir, que su valor sea en promedio representativo del sistema, se comenzará por promediar la ecuación de balance de momentum en las zonas movilizadas y estática. Con esta finalidad se comienza por definir una función generalizada de promediado (o kernel) $\mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ que describirá la propagación, presencia y/o ausencia, de la perturbación de las magnitudes físicas que origina el desplazamiento de las partículas en la zona movilizada. Así, dada una magnitud física $B(\mathbf{x}')$, se denotará a su magnitud promedio sobre la zona movilizada en $\mathbf{x}$ como $\langle B \rangle(\mathbf{x})$, encontrándose definido por:

$$\langle B \rangle_m(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') B(\mathbf{x}'). \quad (5.12)$$

Aplicando esta definición a la ecuación de balance de momentum se tiene:

$$0 = \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left[\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}')}{\partial x'_j} - \rho g_i \right]. \quad (5.13)$$

Para reescribir este resultado se comienza por utilizar integración por partes en el primer miembro del lado derecho

$$0 = \int_{\mathcal{V}} d^3x' \left[\frac{\partial}{\partial x'_j} (\mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}')) - \sigma_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x'_j} \right] - \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho g_i,$$

luego, empleando la identidad $\partial'_i \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\partial_i \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ sobre el resultado anterior se sigue que

$$0 = \int_{\partial \mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_{\mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') \right) - \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho g_i,$$

recurriendo ahora al teorema de la divergencia y atendiendo a que la integración se extiende sobre las $\mathbf{x}'$ y no sobre las $\mathbf{x}$ obtiene:

$$0 = \int_{\mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_{\mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') \right) - \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho g_i.$$

Finalmente, empleando la definición entregada en la ecuación (5.12) para las magnitudes promedio, se sigue que la ecuación de balance de momentum promediada admite la siguiente representación:

$$0 = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} - \langle \rho \rangle_m g_i + \int_{\partial \mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j. \quad (5.14)$$

En los métodos convencionales utilizados para calcular magnitudes promediadas se asume que las integrales extendidas sobre las superficies del volumen de control son nulas, ya que la integración se extiende a regiones donde el kernel decae rápidamente o es nulo. En el caso de interés dicha zona es acotada y presenta una longitud característica D_h de unos cuantos diámetros de partícula, de modo que la contribución de la integral de superficie se vuelve apreciable.

5.2.2. Promedio de la ecuación de movimiento en la zona no-movilizada

Así como se obtuvo una ecuación de movimiento promedio para la zona movilizada, debe existir una ecuación complementaria para la zona no-movilizada. Para obtenerla se puede atender a la tercera ley de Newton. Luego, como la integral de superficie en (5.10) representa la fuerza de fricción entre ambas zonas, la ecuación complementaria es:

$$0 = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_s}{\partial x_j} - \langle \rho \rangle_s g_i - \int_{\partial \mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j. \quad (5.15)$$

Además, como en ambas zonas se asume aceleración nula, se sigue que:

$$f_i \equiv \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} - \langle \rho \rangle_m g_i = -\frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_s}{\partial x_j} + \langle \rho \rangle_s g_i, \quad (5.16)$$

donde f_i es la fuerza de volumen promedio que actúa sobre la zona movilizada.

5.2.3. Fuerza de fricción

Para expresar convenientemente la fuerza de fricción, se puede observar que:

$$0 = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \quad \rightarrow \quad 0 = \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \right\rangle_m - \langle \rho \rangle_m g_i. \quad (5.17)$$

Si ahora se restan las ecuaciones (5.17) y (5.14) se obtiene la siguiente representación para la fuerza de fricción:

$$\int_{\partial \mathcal{V}} d^2 x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j = \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \right\rangle_m - \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j}. \quad (5.18)$$

Este resultado sugiere que la fuerza de fricción en la interfaz entre ambas zonas se puede representar como función de las fluctuaciones de la divergencia del estado tensional en relación a su valor promedio. De este modo, si las fluctuaciones son lo suficientemente grandes pueden originar un desplazamiento local y relativo entre las partículas. Ahora bien, en el desarrollo precedente se ha asumido que la contribución de la aceleración de las partículas es despreciable. De no asumir este postulado se debería incorporar un término del tipo $\sim \langle \rho d\mathbf{v}/dt \rangle_m - \rho d\langle \mathbf{v} \rangle/dt$ a la ecuación (5.18), que conllevaría a efectos inerciales originados en la rotación del conjunto de partículas, con una magnitud despreciable⁶.

5.2.4. Representación tensor σ

Para expresar de forma conveniente el tensor de esfuerzos, se puede comenzar por atender a que, en principio, la fuerza de fricción se desvanece cuando la velocidad relativa es nula, ya que ambas zonas se vuelven indistinguibles entre sí. Esta hipótesis motiva la siguiente descomposición para el tensor de esfuerzos en la zona movilizada:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}') = \langle \sigma_{ij} \rangle_m(\mathbf{x}) + \Delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}') + \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}') \quad \text{con} \quad \langle \Delta \sigma_{ij} \rangle_m(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.19)$$

Con esta descomposición se sigue que la fuerza de fricción (ecuación 5.18) puede ser expresada como:

$$\int_{\partial \mathcal{V}} d^2 x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j = \left\langle \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \right\rangle_m + \left[\left\langle \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \right\rangle_m - \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} \right]. \quad (5.20)$$

Bajo la hipótesis de que la fuerza de fricción y la velocidad relativa se anulan en conjunto, y asumiendo que sólo $\delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}')$ es función de la velocidad relativa, se sigue necesariamente que el término entre corchetes en el lado derecho de la ecuación (5.20) debe ser nulo. Para conseguir este resultado es posible expandir $\Delta \sigma(\mathbf{x}')$ a primer orden, adoptando la siguiente forma simétrica:

$$\Delta \sigma_{ij} = \beta \left(x'_i \frac{\partial \langle \sigma_{jl} \rangle_m}{\partial x_l} + x'_j \frac{\partial \langle \sigma_{il} \rangle_m}{\partial x_l} \right) + \alpha x'_k \frac{\partial \langle \sigma_{kl} \rangle_m}{\partial x_l} \delta_{ij}. \quad (5.21)$$

⁶Refiérase a la expresión de Nicot y col. 2013 para el tensor de esfuerzos.

Para anular el término entre corchetes en el lado derecho de la ecuación (5.20) se sigue que las constantes deben satisfacer la condición⁷:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} &= \beta \left(\delta_{ij} \frac{\partial \langle \sigma_{jl} \rangle_m}{\partial x_l} + \delta_{jj} \frac{\partial \langle \sigma_{il} \rangle_m}{\partial x_l} \right) + \alpha \delta_{jk} \frac{\partial \langle \sigma_{kl} \rangle_m}{\partial x_l} \delta_{ij} \\
&= \beta \left(\frac{\partial \langle \sigma_{il} \rangle_m}{\partial x_l} + n \frac{\partial \langle \sigma_{il} \rangle_m}{\partial x_l} \right) + \alpha \frac{\partial \langle \sigma_{il} \rangle_m}{\partial x_l} \\
&= \beta(1+n) \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} + \alpha \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} \rightarrow \beta(1+n) + \alpha = 1.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Es claro que se requiere de una condición adicional para determinar ambas constantes. Una posible elección es imponer una restricción sobre la traza del tensor $\Delta \sigma$, en cuyo caso se debe considerar el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_{mm} &= \beta \left(x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l} + x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l} \right) + \alpha x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l} \delta_{mm} \\
&= 2\beta x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l} + n\alpha x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l} \\
&= (2\beta + n\alpha) x'_m \frac{\partial \langle \sigma_{ml} \rangle_m}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Ahora bien, sustituyendo la expresión para $\sigma_{ij}(\mathbf{x}')$ entregada en la ecuación (5.19) sobre la ecuación de balance de momentum, y teniendo en consideración la condición impuesta sobre $\Delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}')$ por la ecuación (5.22) se sigue que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_j} - \rho g_i \\
&= \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} - \rho g_i \\
&= \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} - \rho g_i + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \\
&\approx \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_m}{\partial x_j} - \langle \rho \rangle_m g_i + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \quad \text{donde } \rho \approx \langle \rho \rangle_m \\
&= f_i + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x'_j},
\end{aligned} \tag{5.24}$$

donde se ha aproximado el valor de la densidad a través de su valor promedio, y se ha utilizado la definición entregada en (5.16) para la fuerza de volumen $\mathbf{f}$. Luego, para encontrar

⁷ La variable n corresponde al número de dimensiones espaciales. Su valor emerge de la identidad $\delta_{ii} = n$.

una expresión para $\delta\sigma$ se puede seguir un procedimiento análogo al utilizado para $\Delta\sigma$ en la ecuación (5.21), sustituyendo $\partial_j\langle\sigma_{ij}\rangle_m$ por $-f_i$, e imponerse condiciones como las utilizadas en las ecuaciones (5.22) y (5.23) sobre las dos constantes α y β involucradas. Atendiendo a que $\delta\sigma$ es (por definición) función de la velocidad relativa, se asumirá con traza nula, a la vez que $\Delta\sigma$ se asumirá hidrostático. Así, ambas contribuciones al tensor de esfuerzos de la zona movilizada pueden ser expresadas a primer orden a través de:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}') &= (\sigma_{kk}(\mathbf{x}') - \langle\sigma_{kk}\rangle_m(\mathbf{x})) \frac{\delta_{ij}}{n} \\ &= x'_k \frac{\partial\langle\sigma_{kl}\rangle_m}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad (\beta = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 1) \\ \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}') &= \tau_{ij}(\mathbf{x}') - \langle\tau_{ij}\rangle_m(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{n}{n(n+1)-2} \left(x'_i f_j + x'_j f_i - \frac{2}{n} x'_k f_k \delta_{ij} \right) \quad \left(\beta = \frac{n}{n(n+1)-2} \quad \text{y} \quad \alpha = -\frac{2}{n} \right).\end{aligned}\tag{5.25}$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (5.24) se obtiene la siguiente forma simétrica para el tensor de esfuerzos en la zona movilizada:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}') = \langle\sigma_{ij}\rangle_m + x'_k \frac{\partial\langle\sigma_{kl}\rangle_m}{\partial x_l} \delta_{ij} - \frac{n}{n(n+1)-2} \left(x'_i f_j + x'_j f_i - \frac{2}{n} x'_k f_k \delta_{ij} \right).\tag{5.26}$$

5.2.5. Representación tensor $\dot{\gamma}$

Para expresar la fuerza de fricción como una función de la velocidad relativa se requiere previamente relacionar el tensor de esfuerzos $\sigma_{ij}(\mathbf{x}')$ con la tasa de deformación de la zona en movimiento. Si se trabaja bajo la hipótesis de que el medio se encuentra en un estado de equilibrio límite, $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ poseerá superficies de deslizamiento orientadas a $\pm(45^\circ - \phi^o/2)$ del esfuerzo principal mayor, presentando igual magnitud y signo opuesto en cada uno de ellos. A causa de esta alternancia en el sentido y dirección de los esfuerzos de corte, se puede asumir que para el desplazamiento relativo de las partículas en la zona movilizada sólo influye la variación local en el tensor de esfuerzos, de modo que es posible admitir una dependencia del tipo:

$$\delta\sigma_{ij} = \frac{\mu P \dot{\gamma}_{ij}}{\|\dot{\gamma}\|} + \nu \rho \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{si} \quad \delta\sigma^2 > (\mu P)^2.\tag{5.27}$$

Así, el primer término describe la presencia de un esfuerzo de fluencia, caracterizado por un coeficiente de fricción μ , en tanto que el segundo corresponde a una contribución viscosa, caracterizado por una viscosidad cinemática ν . Para invertir esta relación y expresar $\dot{\gamma}$ en función de $\delta\sigma$ se comienza por relacionar los invariantes de ambas magnitudes. Asumiendo

que se cumple la condición $\delta\sigma \geq \mu P$, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\delta\sigma^2 &= \delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij} \\
&= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 \left(x'_i x'_i f_j f_j + x'_j x'_j f_i f_i + \frac{4}{n} (x'_k f_k)^2 + 2 (x'_i f_i) (x'_j f_j) - \frac{8}{n} (x'_k f_k) (x'_i f_i) \right) \\
&= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 \left(2x'_i x'_i f_j f_j + 2x'_i x'_j f_i f_j - \frac{4}{n} x'_i x'_j f_i f_j \right) \\
&= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 2\|\mathbf{f}\|^2 x'_i \left(\delta_{ij} + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \frac{f_i f_j}{\|\mathbf{f}\|^2} \right) x'_j \\
&= \left(\frac{\mu P}{\dot{\gamma}} + \nu\rho \right)^2 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} = (\mu P)^2 + 2(\mu P)(\nu\rho)\dot{\gamma} + (\nu\rho)^2 \dot{\gamma}^2.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Por otro lado, definiendo las magnitudes

$$\zeta_{ij} \equiv \delta_{ij} + \frac{n-2}{n} \frac{f_i f_j}{\|\mathbf{f}\|^2} \quad \text{y} \quad r_c \equiv \frac{n(n+1)-2}{\sqrt{2}n} \frac{\mu P}{\|\mathbf{f}\|}, \tag{5.29}$$

se sigue que el invariante de la tasa de deformación corresponde a:

$$0 = \dot{\gamma}^2 + 2 \left(\frac{\mu P}{\nu\rho} \right) \dot{\gamma} + \left(\frac{\mu P}{\nu\rho} \right)^2 \left(1 - \frac{x'_i \zeta_{ij} x'_j}{r_c^2} \right) \rightarrow \dot{\gamma} = \left(\sqrt{\frac{x'_i \zeta_{ij} x'_j}{r_c^2}} - 1 \right) \left(\frac{\mu P}{\nu\rho} \right). \tag{5.30}$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la ecuación (5.27) e invirtiendo la relación, se obtiene la siguiente representación para el tensor de tasa de deformación:

$$\nu\rho\dot{\gamma}_{ij} = \begin{cases} -\frac{n}{n(n+1)-2} \left(1 - \frac{r_c}{\sqrt{x'_i \zeta_{ij} x'_j}} \right) \left(x'_i f_j + x'_j f_i - \frac{2}{n} x'_k f_k \delta_{ij} \right) & \text{si } x'_i \zeta_{ij} x'_j \geq r_c^2 \\ 0 & \text{si } x'_i \zeta_{ij} x'_j < r_c^2 \end{cases} \tag{5.31}$$

Donde se ha atendido a que la condición $\delta\sigma \geq \mu P$ se cumple para $x'_i \zeta_{ij} x'_j \geq r_c^2$, por lo que las partículas al interior de la región $x'_i \zeta_{ij} x'_j \leq r_c^2$ se desplazan a velocidad constante.

5.2.6. Solución analítica caso bidimensional

Para un problema bidimensional ($n = 2$) la ecuación (5.31) se reduce a:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2\nu\rho} \left(1 - \frac{r_c}{r} \right) (x'_i f_j + x'_j f_i - x'_k f_k) \delta_{ij} & \text{si } r \geq r_c \\ 0 & \text{si } r < r_c \end{cases}. \tag{5.32}$$

Si se escoge un sistema de coordenadas tal que el eje $\hat{y}$ se oriente en la dirección de la fuerza, se sigue que en la región con $r \geq r_c$ las componentes del tensor de velocidad de deformación serán:

$$\dot{\gamma}_{xx} = \frac{1}{2\nu\rho} \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) y' f_y \quad , \quad \dot{\gamma}_{yy} = -\frac{1}{2\nu\rho} \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) y' f_y \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}_{xy} = -\frac{1}{2\nu\rho} \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) x' f_y. \quad (5.33)$$

Para integrar estas ecuaciones basta con preocuparse de la componente orientada en la misma dirección que la fuerza, ya que la otra originará un flujo neto nulo. Así, la segunda igualdad sugiere que $\partial_{y'} v = -(1/2\nu\rho)(1 - r_c/r)y' f_y$ teniendo por solución $v = v_0 + v_1(x') + (f_y/2\nu\rho)(r_c r - y^2/2)$. Para ser consistentes con la tercera igualdad se propone el ansatz $v_1(x') = -(f_y/2\nu\rho)x'^2/2$, obteniendo la solución:

$$v = v_0 + \frac{f_y}{2\nu\rho} \left(r_c r - \frac{r^2}{2} \right) \quad \text{si} \quad r \geq r_c. \quad (5.34)$$

Finalmente, v_0 se determina imponiendo la condición de borde $v(r = D_h) = 0$, permitiendo encontrar la siguiente solución para la componente de la velocidad en la dirección de la fuerza:

$$\rho v = \begin{cases} \frac{f_y D_h^2}{8\nu} \left[\frac{2r_c}{D_h} \left(\frac{2r}{D_h} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2r}{D_h} \right)^2 - 1 \right) \right] & \text{si} \quad r \geq r_c \\ \frac{f_y D_h^2}{16\nu} \left[1 - 2 \left(\frac{2r_c}{D_h} \right) + \left(\frac{2r}{D_h} \right)^2 \right] & \text{si} \quad r < r_c \end{cases} \quad (5.35)$$

En general, la solución para v requiere contar con términos de potencia impar en x' para cumplir las tres igualdades presentadas en (5.33) junto a la condición de incompresibilidad (de ser requerida). Sin embargo, potencias impares en x' e y' no contribuyen a un flujo neto de partículas, por lo que resulta más conveniente utilizar el valor promedio de la velocidad. Promediando la solución encontrada para v sobre un disco de radio $D_h/2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \rho v \rangle_m &= \frac{4}{\pi D_h^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{D_h/2} dr d\theta v r \\ &= \frac{f_y}{\nu} \left\{ \int_{r_c}^{D_h/2} dr \left[\frac{2r_c}{D_h} \left(\frac{2r}{D_h} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2r}{D_h} \right)^2 - 1 \right) \right] r \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{r_c} \frac{dr}{2} \left[1 - 2 \left(\frac{2r_c}{D_h} \right) + \left(\frac{2r}{D_h} \right)^2 \right] r \right\} \\ &= \frac{f_y D_h^2}{32\nu} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\mu P}{D_h |f_y|} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu P}{D_h |f_y|} \right)^4 \right] \quad \text{si} \quad \frac{D_h |f_y|}{\mu P} \leq 1, \quad \text{y} \quad 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Es inmediato observar que el término entre corchetes es función del número adimensional Y introducido en la sección precedente, proporcionando un sustento teórico claro para su definición. Más aún, la ecuación anterior puede ser expresada como:

$$0 = f_y - \frac{32\nu\langle\rho v\rangle_m}{D_h^2\chi}, \quad (5.37)$$

con la función χ dada por:

$$\chi = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{Y_0}{Y}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{Y_0}{Y}\right)^4 & \text{si } Y \leq Y_0 \\ 0 & \text{si } Y < Y_0 \end{cases} \quad (5.38)$$

A partir de la definición entregada en (5.16) para la fuerza de volumen $\mathbf{f}$, y la ecuación de movimiento promedio para la zona movilizada, se sigue que la contribución de la integral de superficie de los esfuerzos entre las zonas movilizada y estática puede ser expresada en la forma:

$$\int_{\mathcal{V}} d^2x' \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_{ij}(\mathbf{x}') n_j = -\frac{32\nu\langle\rho v_i\rangle_m}{D_h^2\chi}. \quad (5.39)$$

Luego, es claro que la densidad de flujo de partículas corresponde a la forma general presentada en la ecuación (5.10) al comienzo de este capítulo. Esto es:

$$\mathbf{j} = -\frac{D_{50}^2}{32Y_0^2\nu}\chi(-\nabla \cdot \langle\sigma\rangle_m + \langle\rho\rangle_m\mathbf{g}). \quad (5.40)$$

La principal desventaja de este resultado es que no proporciona información relativa a las componentes medias del tensor de esfuerzos, por lo que se requiere de una hipótesis adicional o cálculo previo de sus componentes, lo que se puede conseguir al asumir que mantienen la relación existente en una condición de equilibrio límite.

5.3. Aplicación al flujo en silos

Para la validación de las ecuaciones de flujo gravitacional, se utilizarán los resultados experimentales obtenidos por [Fullard, Breard y col. 2019](#) utilizando la técnica Particle Image Velocity (PIV) para los campos de velocidad en un silo con una y dos aberturas. El sistema experimental utilizado por los autores (Figura 5.5-a) consistió en un silo rectangular de ancho $W = 200$ mm, altura $H = 350$ mm y profundidad $D = 15$ mm, con dos aberturas basales. Las aberturas basales tenían un tamaño de $D_0 = 14$ mm y estaban ubicadas simétricamente a ambos lados del eje del silo, espaciadas a diferentes distancias L . Las partículas utilizadas tenían un diámetro medio de 2, 15 mm. El promedio de los campos de velocidad estacionarios calculados a partir de PIV se muestran en la Figura 5.5 para el caso de una sola abertura de $D = 14$ mm, y 4 casos donde hay dos aberturas separadas por una distancia de $L = 1 - 4 - 16$ y 48 mm.

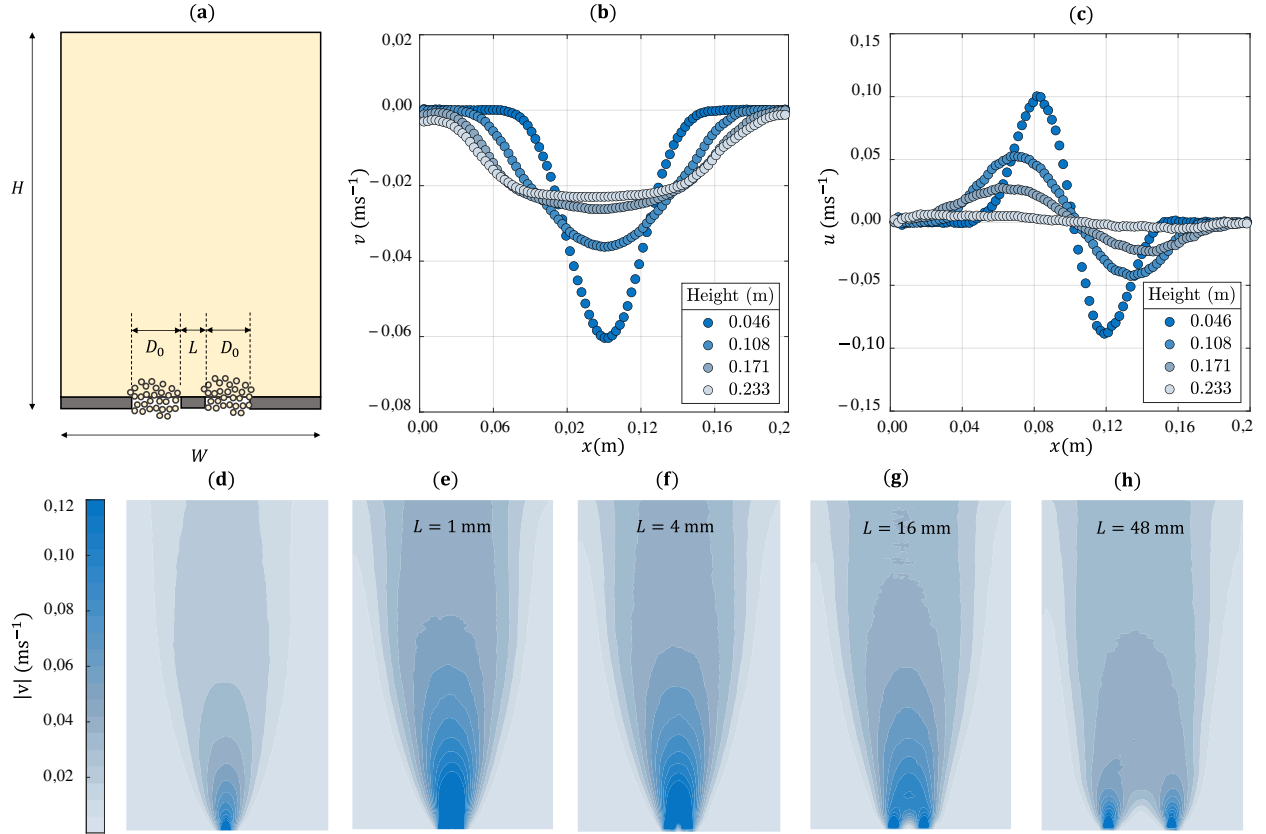


Figura 5.5: (a) Esquema de la configuración experimental utilizada por [Fullard, Breard y col. 2019](#). Las dimensiones del silo fueron $W = 200$ mm, $H = 350$ mm y $D = 15$ mm (profundidad). (b-c) Perfiles de velocidad vertical (b) y horizontal (c) recuperados a alturas que van desde 0,0046 a 0,233 m, para el tamaño de abertura de $D_0 = 14$ mm. (d-h) Magnitud de velocidad para una abertura basal de tamaño $D_0 = 14$ mm, y dos aberturas basales de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1 - 4 - 16 - 48$ mm.

En la Figura 5.5-b y Figura 5.5-c se muestran ambas componentes de la velocidad, referidas a diferentes alturas sobre la abertura de extracción para el caso de una sola abertura con $D_0 = 14$ mm. Cualitativamente, ambas componentes son simétricas alrededor del eje de la abertura y los perfiles de velocidad vertical se asemejan a distribuciones gaussianas hasta una altura del orden de 0,108 – 0,171 m, luego de la cual se aplanan en la zona central. Además, para aberturas relativamente espaciadas (Figura 5.5-e) los flujos se comportan de forma aislada; para espaciamientos intermedios, existe una zona de interferencia constructiva (Figura 5.5-fg), y para espaciamientos cortos ambas aberturas se comportan como una sola (Figura 5.5-h).

Para visualizar el acuerdo entre los resultados de [Fullard, Breard y col. 2019](#) y el modelo cinemático, en la Figura 5.6-a se presentan gráficos de superficies del parámetro de longitud de difusión cinemática $d = -v_x/(\partial v_y/\partial x)$ para el caso de una sola apertura de $D = 14$ mm, y 4 casos donde hay dos aberturas separadas por una distancia de $L = 1 - 4 - 16$

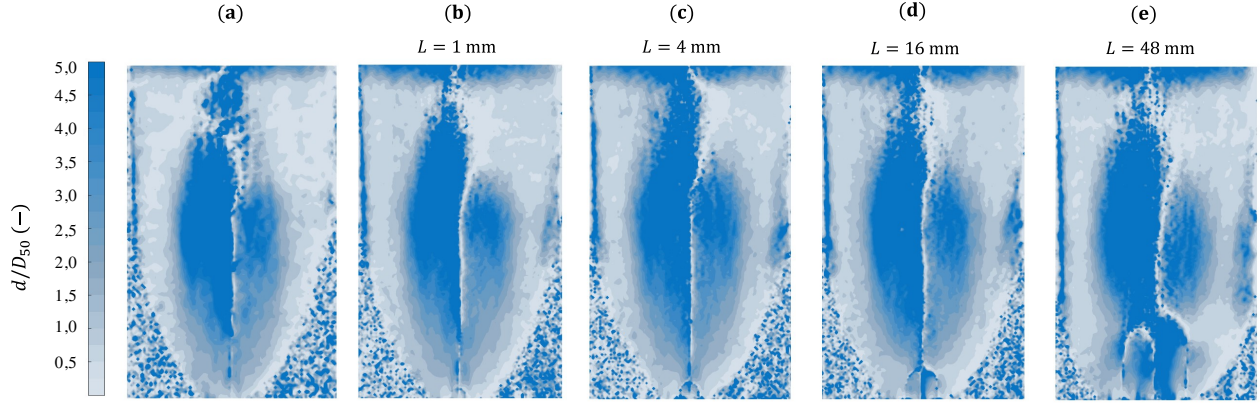


Figura 5.6: Longitud de difusión para los experimentos de [Fullard, Breard y col. 2019](#) con una abertura basal de tamaño $D_0 = 14$ mm y dos aberturas basales de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1 - 4 - 16 - 48$ mm. La longitud de difusión se obtuvo mediante la relación cinemática $d = -v_x/(v_y/x)$ usando diferencias centrales para la derivada parcial.

y 48 mm. Es posible visualizar que d toma múltiples valores, variando tanto con la altura como la distancia horizontal a las aberturas. De este modo, los resultados de [Fullard, Breard y col. 2019](#) exhiben los principales resultados ya reportados por otros autores para el flujo de material granular en silos.

Para aplicar el resultado obtenido para la densidad de flujo de partículas (ecuación 5.40) se debe comenzar por estimar la relación entre las componentes del tensor de esfuerzos. Para un estado de empuje activo en que las partículas son impulsadas en la dirección favorecida por la gravedad, el esfuerzo principal mayor será el vertical ([Kamrin 2008](#)). Así:

$$\sigma_{xx} = -(1 - \sin \phi)P \quad , \quad \sigma_{yy} = -(1 + \sin \phi)P \quad \text{y} \quad \sigma_{xy} \sim 0. \quad (5.41)$$

A partir de donde se sigue que las magnitudes relevantes del modelo se encuentran determinadas por:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{Y_0} &= \frac{D_{50}}{Y_0 \sin \phi h} \left[(1 - \sin \phi)^2 (\partial_x h)^2 + (1 + \sin \phi)^2 \left(\partial_y h + \frac{1}{1 + \sin \phi} \right)^2 \right]^{1/2} \\ u &= -u_0 \chi (1 - \sin \phi) \partial_x h \\ v &= -u_0 \chi (1 + \sin \phi) \left(\partial_y h + \frac{1}{1 + \sin \phi} \right) \quad \text{con} \quad h = \frac{P}{\rho g} \quad \text{y} \quad u_0 = \frac{g D_{50}^2}{32 Y_0^2 \nu}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Este conjunto de ecuaciones es implementado en el software de elementos finitos COM-SOL Multiphysics asumiendo la condición de incompresibilidad, con el objetivo de reproducir los resultados experimentales de [Fullard, Breard y col. 2019](#) para el campo de velocidad. Las condiciones de borde utilizadas fueron: velocidad horizontal nula en paredes horizontales del

silo; velocidad vertical nula en base del silo; presión nula en la abertura superior del silo; velocidad descendente fija en la abertura de extracción (igual al valor experimental). Ver Figura 5.7-(b). La última condición se prefirió por sobre la de presión nula a causa de la limitación propia de un modelo continuo para capturar los efectos de creación y destrucción de cadenas de esfuerzos en la cercanía de la abertura del silo.

Los parámetros ajustables del modelo corresponden a $u_0 = gD_{50}^2/32Y_0^2\nu$ y Y_0 . El primero de estos posee unidades de velocidad, por lo que una primera estimación de su valor es $\sim \sqrt{gD_{50}}$, a la vez que para Y_0 se estimaron valores inferiores a la unidad. El ángulo de fricción interna se supuso como $\phi = 30^\circ$, un valor típico para el tipo de materiales utilizados en el experimento⁸⁹. Tanto u_0 como Y_0 fueron modificados de forma iterativa, buscando ajustar la geometría de la Zona de Extracción (EZ)¹⁰. Para obtener la EZ experimental, se implementó el método de Runge Kutta de cuarto orden en el software MATLAB, a través del cual se integraron las trayectorias a partir de los campos de velocidad de Fullard, Breard y col. 2019.

Con el objetivo de comparar los resultados predichos por el modelo desarrollado en el presente trabajo y aquellos del tipo cinemáticos, también se implementó numéricamente el modelo de R.M. Nedderman 2005 a través del software COMSOL Multiphysics. Las condiciones de borde utilizadas fueron: velocidad horizontal nula en paredes horizontales del silo; velocidad vertical nula en base del silo; velocidad vertical sin variación vertical en la zona superior del silo; velocidad descendente fija en la abertura de extracción (igual al valor experimental). Ver Figura 5.7-(b). En cuanto al parámetro de longitud de difusión, se asumió un valor de 2,5 veces el D_{50} de las partículas para todos los experimentos.

La calibración fue realizada para 13 de los 14 experimentos de Fullard, Breard y col. 2019, incluyendo el de abertura única con $D_0 = 14$ mm y los de doble abertura espaciados a $L = 0,50 - 0,75 - 1,00 - 1,25 - 1,50 - 2,00 - 4,00 - 8,00 - 16,00 - 32,00 - 48,00 - 80,00$ mm. Se descartó el experimento con $D_0 = 28$ mm a causa del alto valor de las velocidades alcanzadas en la abertura de descarga en comparación con los demás experimentos. Los valores utilizados en la calibración del modelo se resumen en la Tabla 5.1. Es interesante observar que en todos los casos $u_0 \approx \sqrt{gD_{50}} = 0,15 \text{ ms}^{-1}$ en tanto que $Y_0 = 0,06 < 1$. Luego, como $Y_0 = D_h/D_{50}$ se obtiene un diámetro hidráulico para el conjunto de partículas en movimiento de $D_h \sim 17D_{50} = 4$ mm.

En la Figura 5.8 se presenta una comparación entre zonas de extracción (EZ) para diferentes instantes de tiempo entre los resultados experimentales de Fullard, Breard y col. 2019 (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas). En general,

⁸En experimentos previos utilizando el mismo material como material granular Fullard, Davies y col. 2016 reportan un ángulo de 30° .

⁹El ángulo de fricción generalmente se encuentra en un rango entre los 20° a 30° para partículas esféricas, y alcanza valores del orden de los 50° para algunos materiales anisótropos altamente angulares R.M. Nedderman 2005.

¹⁰Corresponde a la superficie formada por la posición original de las partículas que salen de la abertura de extracción en un tiempo dado.

Cuadro 5.1: Parámetros utilizados en ajuste del modelo a campos de velocidad experimentales de [Fullard, Breard y col. 2019](#).

Modelo	$u_0 = gD_{50}^2/32Y_0^2\nu \text{ ms}^{-1}$	Y_0
$D_0 = 14 \text{ mm}$	0,1	0,06
$L = 0,50 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 0,75 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 1,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 1,25 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 1,50 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 2,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 4,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 8,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 16,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 32,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 48,00 \text{ mm}$	0,2	0,06
$L = 80,00 \text{ mm}$	0,1	0,06

se observa que el modelo propuesto logra capturar de forma cualitativamente correcta la geometría de la EZ en todos los escenarios, presentando un buen acuerdo con las obtenidas a partir de los campos de velocidad experimental. Es interesante observar que el modelo propuesto también reproduce un efecto no lineal de interacción en las EZ de cada abertura, el cual se puede describir como un alargamiento de los elipsoides para un espaciamiento intermedio (f-g) y una geometría similar a un *huevo* a espaciamientos mayores (h)¹¹. La mejora en la descripción de la EZ lograda por el modelo propuesto en relación al modelo cinemático resulta evidente en todos los escenarios.

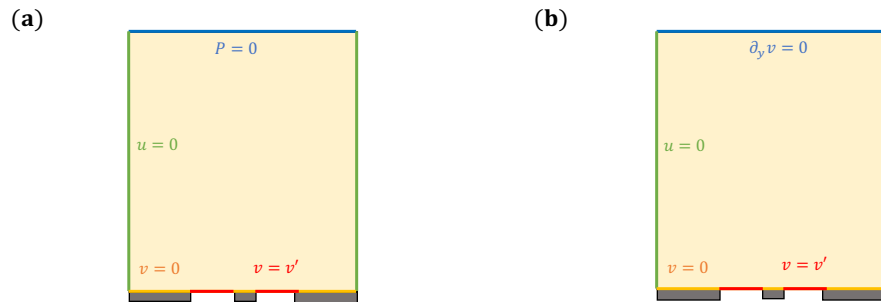


Figura 5.7: Campo de presión predicho por el modelo propuesto para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14 \text{ mm}$, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14 \text{ mm}$ separadas por una distancia de $L = 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 80 \text{ mm}$.

¹¹Este efecto posiblemente se deba a la cercanía de las EZ con las paredes del silo.

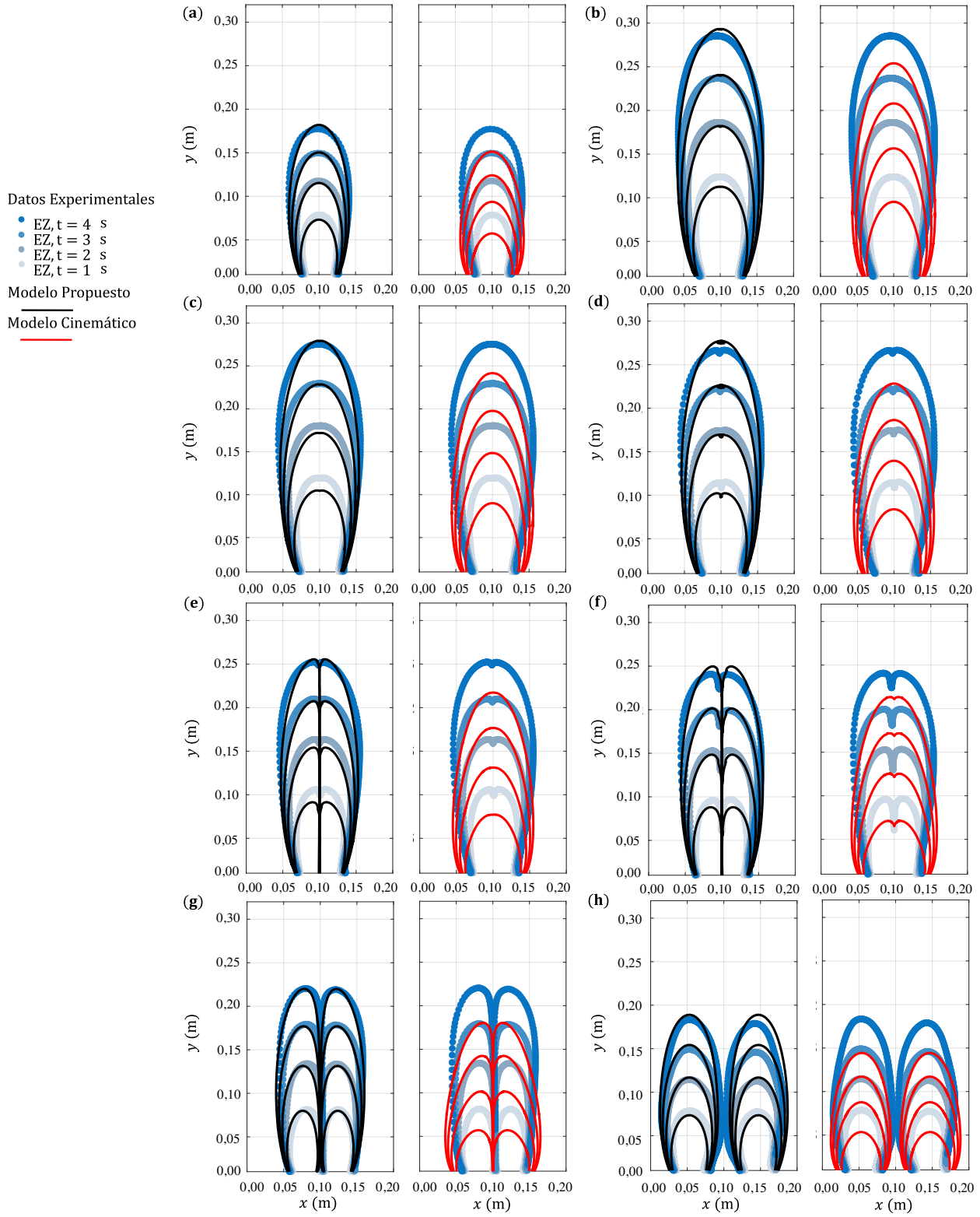


Figura 5.8: Condiciones de borde modelos numéricos. (a) Condiciones aplicadas en modelo elaborado en el presente trabajo. (b) Condiciones de borde aplicadas en modelo cinemático.

En la Figura 5.9 se presenta una comparación entre los perfiles de velocidad vertical para diferentes instantes de tiempo entre los resultados experimentales de Fullard, Breard y col. 2019 (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas). En general se observa que el modelo propuesto logra capturar de forma cualitativamente correcta los perfiles de velocidad en todos los escenarios, presentando las mayores diferencias en las zonas cercanas a las aberturas de extracción. Una situación similar se observa en la Figura 5.10 para los perfiles de velocidad horizontal. No obstante, al comparar los resultados del modelo propuesto con los predichos por el modelo cinemático, se logra observar una mejora sustancial en la descripción de ambas componentes del campo de velocidad para todos los escenarios.

Las diferencias observadas entre los perfiles de velocidad experimentales de Fullard, Breard y col. 2019 y el modelo propuesto pueden tener origen en una limitación del modelo para representar adecuadamente las zonas que presentan elevadas tasas de deformación, como ocurre en las cercanías de las aberturas de extracción. Este aspecto es esperable, ya que concentra las magnitudes de velocidad y variaciones espaciales más elevadas, presentando un régimen de tipo inercial para extracciones continuas, no del tipo cuasi-estático. Por otro lado, también se hacen notar los siguientes aspectos:

- El modelo logra reproducir adecuadamente las zonas de extracción, lo que sugiere que reproduce de forma adecuada la trayectoria de las partículas a lo largo del silo, en las zonas en que se espera sea aplicable (régimen cuasi-estático).
- Se ha utilizado una función χ (ecuación 5.38) calculada asumiendo una descripción continua del medio granular a escalas menores a D_h , aun cuando a estas distancias la naturaleza del medio es discreta.
- Se ha asumido una orientación vertical uniforme para el esfuerzo principal mayor, aun cuando presenta un cambio en su orientación en las zonas estáticas (Kamrin 2008).
- Se ha asumido la condición de incompresibilidad para la implementación numérica del modelo, aspecto cuestionable cerca de las aberturas de extracción.
- No se han incorporado efectos de fricción con las paredes frontal y trasera del silo.

En general se observa que los resultados de la validación experimental resultan prometedores, sugiriendo que el mecanismo de flujo descrito por el modelo propuesto posee un rol fundamental en la descripción de estados cuasi-estáticos.

En la Figura 5.11 se presenta el campo de presiones predicho por el modelo propuesto. La presión es normalizada a la altura de columna del silo, mostrando un decaimiento en las zonas de flujo similar a lo reportado por Staron y col. 2014 mediante simulaciones discretas y la implementación de la reología $\mu(I)$.

En la Figura 5.12 se presenta una serie de sensibilizaciones del modelo, todas ellas elaboradas para el experimento de extracción con una abertura aislada de tamaño $D_0 = 14$ mm de Fullard, Breard y col. 2019. Los resultados se encuentran expresados en términos del ancho W_{IEZ} y la altura de la zona de extracción H_{IEZ} (ejes principales de la elipse de extracción).

Tanto W_{IEZ} como H_{IEZ} fueron extraídos del modelo numérico para diferentes instantes de tiempo, lo que permitió elaborar las curvas $W_{IEZ} = W_{IEZ}(H_{IEZ})$ ilustradas. El caso base de comparación (línea negra segmentada) consideró para los parámetros libres del modelo $u_0 = 0,1 \text{ ms}^{-1}$ y $Y_0 = 0,06$, en cuanto a las dimensiones se adoptó $H = 0,5 \text{ m}$ (experimental de $0,35 \text{ m}$) y $W = 0,2 \text{ m}$, y para las propiedades del medio se utilizó $\phi = \pi/6$, $D_{50} = 2,15 \text{ mm}$. Además, se consideró una velocidad de descarga de $v = 0,2 \text{ ms}^{-1}$.

En la Figura 5.12 (a-b) se presentan los resultados de la sensibilización para variaciones en los parámetros u_0 y Y_0 . En ambos casos se observa que un aumento en sus valores conlleva a una disminución en el ancho de la zona de extracción, o incremento en la esbeltez de la elipse de extracción. Es interesante observar que las Figuras 5.12 (a) y (b) son bastante similares, por lo que un incremento o disminución en el valor de una de estas variables posee un efecto similar a un incremento o disminución de la otra. Ahora bien, lo esperable es que $Y_0 \sim 0,1$ si se asume que corresponde al cociente entre el diámetro medio de partícula y el diámetro hidráulico del grupo de partículas movilizadas, no obstante, también es posible que el coeficiente de fricción μ sea en realidad una fracción del coeficiente de fricción del medio granular, de modo que $Y_0 < D_{50}/D_h$. Si este fuese el caso, el efecto de una disminución en Y_0 se ve aminorado por un incremento en u_0 .

En la Figura 5.12 (c-d) se presentan los resultados de la sensibilización para variaciones en el largo y ancho del silo. En ambos casos se observa que un incremento de sus valores casi no posee efectos apreciables sobre los resultados. En principio, esto se debe a que las dimensiones del silo fueron escogidas experimentalmente para evitar posibles efectos de borde.

En la Figura 5.12 (e-f) se presentan los resultados de la sensibilización para variaciones en el ángulo de fricción y diámetro de partícula. Para el ángulo de fricción se escogieron valores desde los $22,5^\circ$ a los 45° , permitiendo observar una disminución en el ancho de la zona de extracción al incrementar el ángulo de fricción. En cuanto al diámetro medio de partícula se escogieron valores entre los $1,07 \text{ mm}$ y $5,37 \text{ mm}$ ($0,5$ y $2,5$ veces el diámetro medio de partícula utilizado en los experimentos), permitiendo observar un aumento en el ancho de la zona de extracción al incrementar el diámetro de partícula.

Finalmente, en la Figura 5.12 (g) se presentan los resultados de la sensibilización para variaciones en la velocidad de extracción. Se observa un aumento en el ancho de la zona de extracción al incrementar la velocidad de extracción (equivalente a un incremento en la tasa de extracción). Este resultado sugiere que, al menos para el modelo elaborado, los resultados de extracciones continuas no son iguales a los obtenidos mediante extracciones discretas. No obstante, se debe tener en consideración que en extracciones discretas la velocidad de caída de las partículas se comporta como un pulso que toma un valor elevado por un pequeño intervalo de tiempo, y no como una función uniforme con un valor de pequeña magnitud.

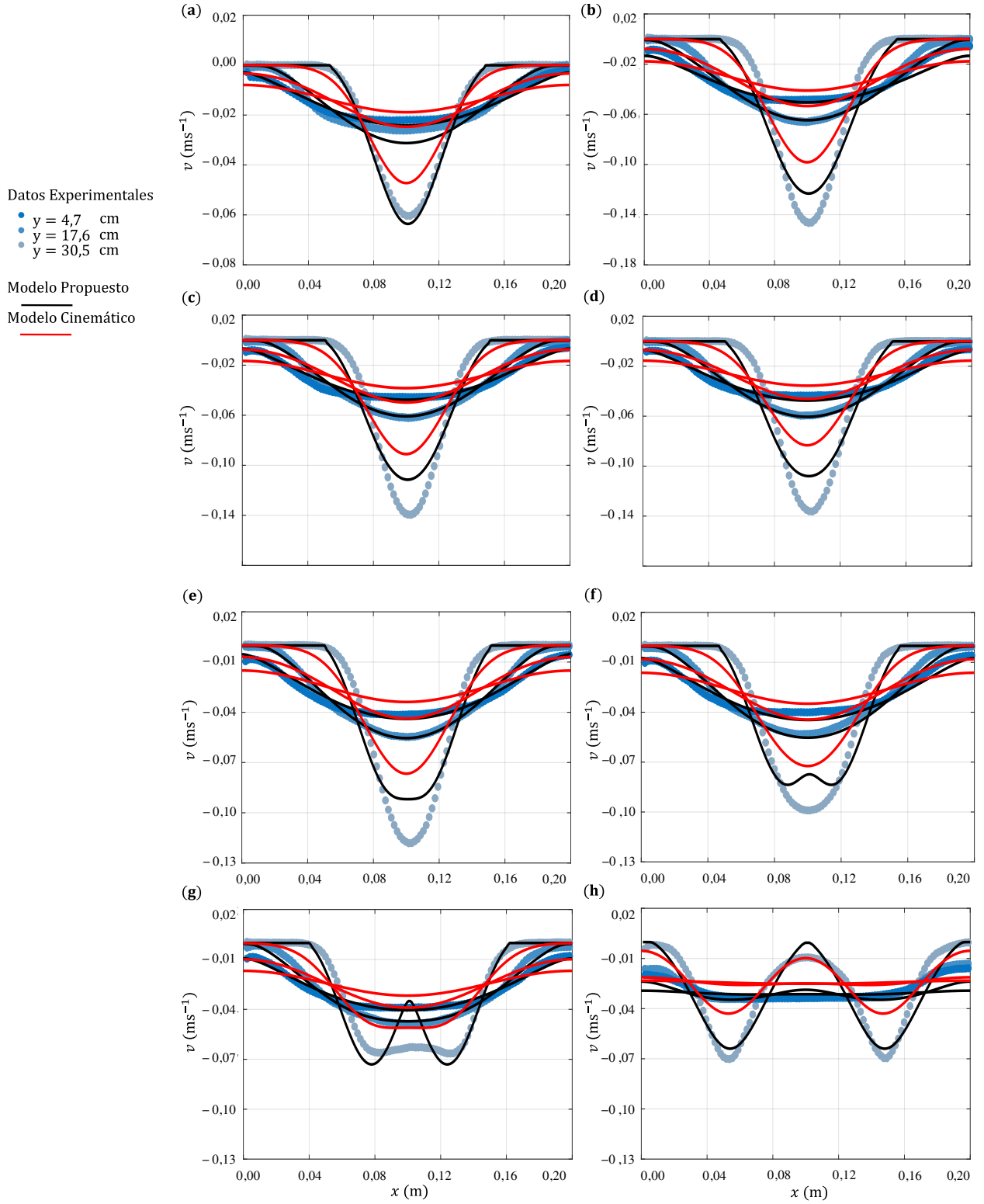


Figura 5.9: Comparación de perfiles de velocidad vertical para diferentes alturas entre los resultados experimentales de [Fullard, Breard y col. 2019](#) (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas) para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14$ mm, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 80$ mm.

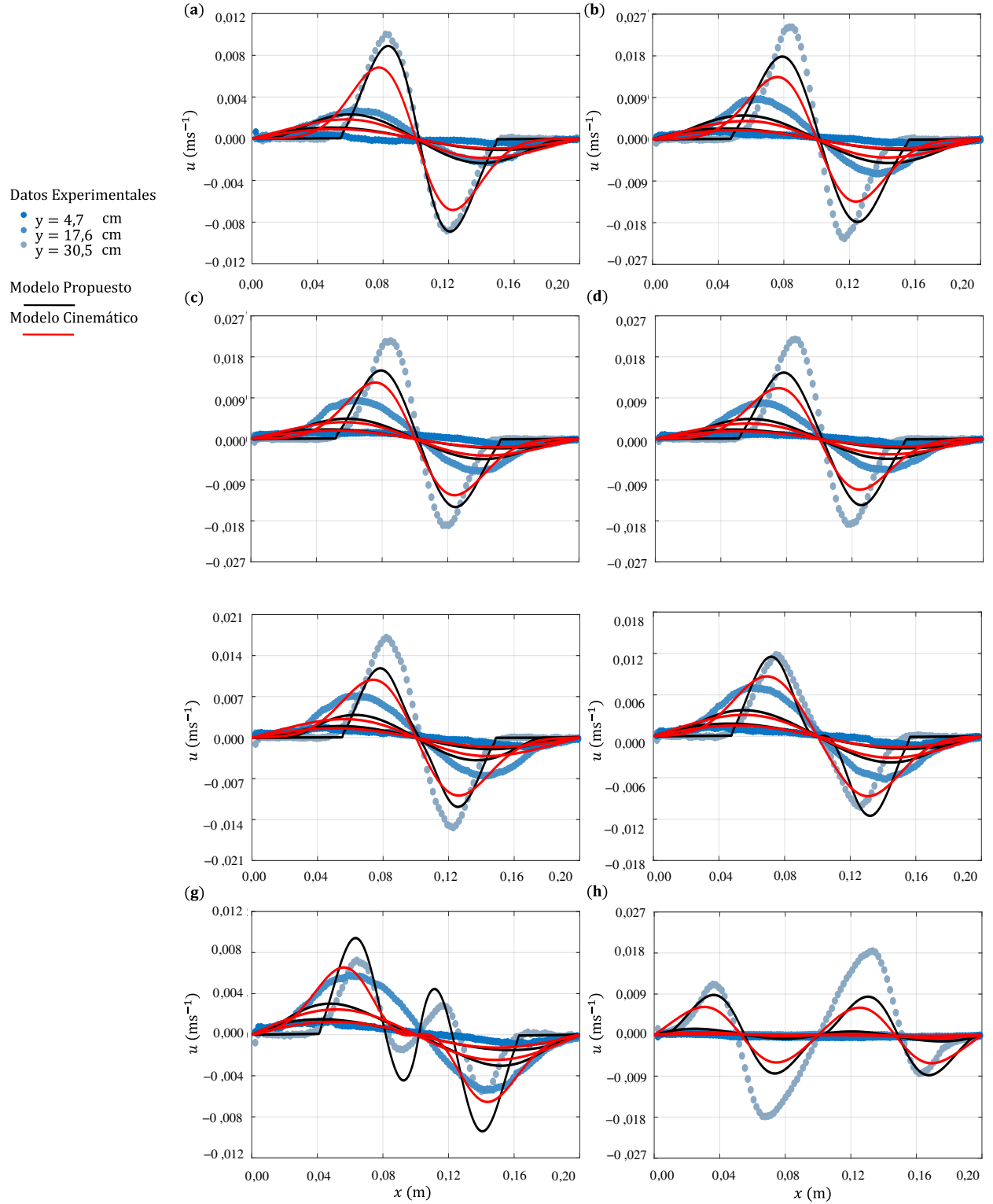


Figura 5.10: Comparación de perfiles de velocidad horizontal para diferentes alturas entre los resultados experimentales de [Fullard, Breard y col. 2019](#) (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas) para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14$ mm, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 80$ mm.

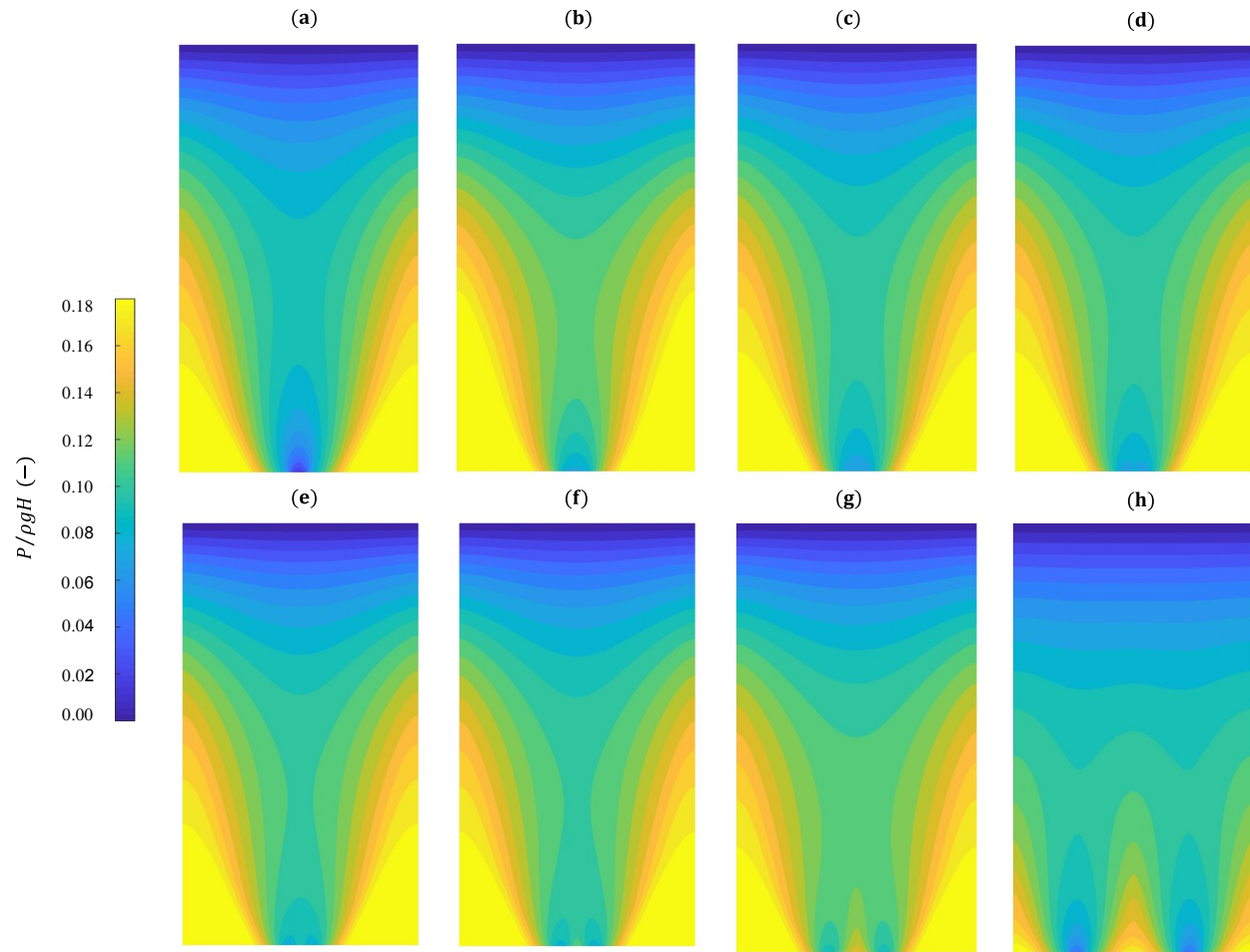


Figura 5.11: Campo de presión predicho por el modelo propuesto para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14$ mm, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 80$ mm.

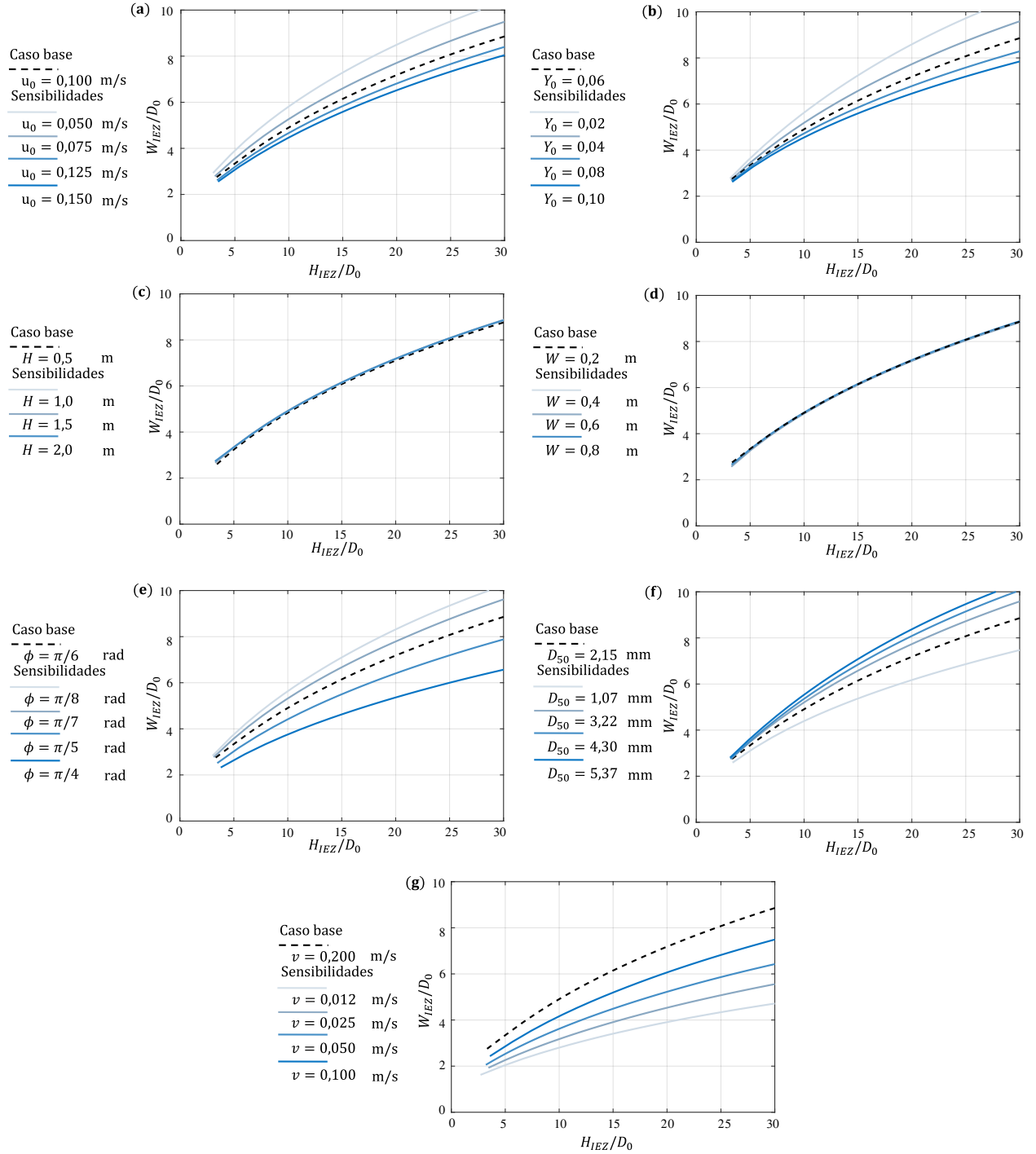


Figura 5.12: Sensibilidad del modelo expresada en términos de las dimensiones de la zona de extracción para una abertura aislada (IEZ). En (a-b) modificación en los parámetros u_0 y Y_0 introducidos por el modelo. En (c-b) modificación en las dimensiones H (altura) y W (ancho) del silo. En (e-f) modificación en las propiedades del material ϕ (ángulo de fricción interna) y D_{50} (diámetro de partícula). En (g) modificación en la velocidad v de las partículas a través de la abertura (tasa de extracción). Caso base considera $u_0 = 0,1$ ms⁻¹, $Y_0 = 0,06$, $H = 0,5$ m (experimental de 0,35 m), $W = 0,2$ m, $\phi = \pi/6$, $D_{50} = 2,15$ mm, y $v = 0,2$ ms⁻¹. Abertura de tamaño fijo con $D_0 = 14$ mm.

5.4. Aplicación al flujo en planos inclinados

Si bien el objetivo principal de este trabajo es elaborar un modelo físico-matemático para el estudio del flujo gravitacional en silos, su validez no se limita a dicha geometría. Debido a lo anterior, resulta particularmente ilustrativo estudiar su aplicabilidad al estudio del flujo en un plano inclinado, en que la simplicidad de las ecuaciones permite derivar expresiones analíticas. Con esta finalidad se utilizan los resultados experimentales obtenidos [Wang y col. 2019](#) utilizando la técnica Particle Tracking Velocimetry (PTV) para medir la velocidad de algunas partículas. El sistema experimental utilizado por los autores consistió en un canal largo y angosto como se ilustra en la Figura 5.13-a. Consiste en dos placas de vidrio (50 cm x 50 cm) que están separadas por espaciadores de polietileno para producir un espacio de 5 mm. El aparato se puede dividir en dos regiones, una tolva superior donde se almacenan las partículas para su descarga, y un canal inferior con una inclinación de 20° menor al ángulo de reposo del material. El material granular utilizado consistió en esferas de vidrio polidispersas de densidad $\rho_s = 2490 \text{ kg/m}^3$ con diámetros medios de 1,31, 1,99 y 2,37 mm. Las densidades ρ medidas para el medio fueron de 1547 ± 15 , 1484 ± 3 y $1480 \pm 11 \text{ kg/m}^3$, y los ángulos de reposo fueron de $21,1 \pm 1,2^\circ$, $21,7 \pm 0,9^\circ$ y $23,2 \pm 1,1^\circ$ para para los diámetros de 1,31, 1,99 y 2,37 mm, respectivamente.

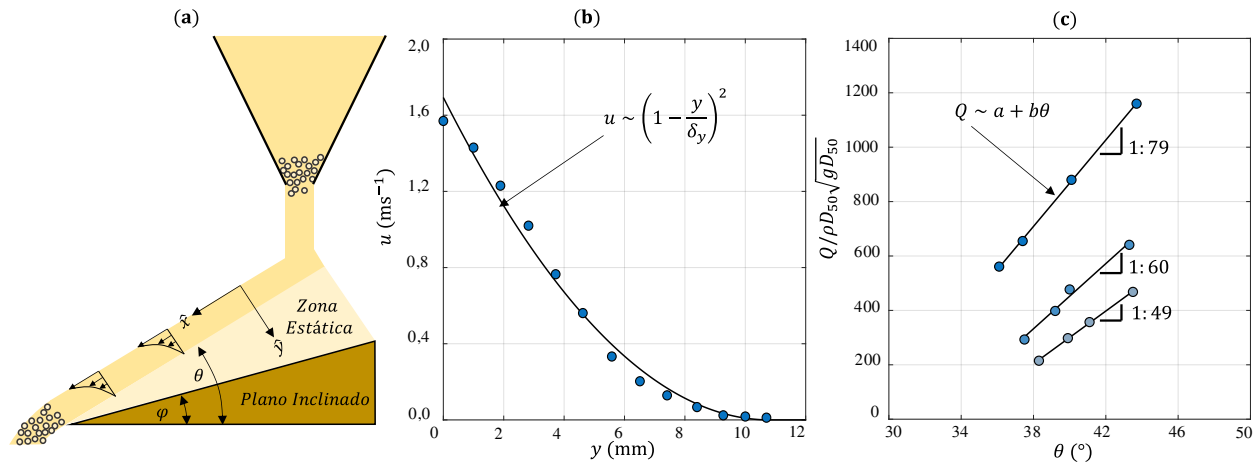


Figura 5.13: (a) Esquema de la configuración experimental utilizada por [Wang y col. 2019](#). Se distingue una zona de flujo de espesor δ_y ubicada por sobre una región estática. (b) Perfiles de velocidad típicamente observados en la zona de flujo. Círculos corresponden a mediciones experimentales y línea segmentada a ajuste de tipo parabólico propuesto por los autores. (c) Relación entre el caudal adimensional y el ángulo de inclinación de la zona de flujo. Círculos corresponden a mediciones experimentales y línea segmentada a tendencia reportada por otros autores ([MiDi 2004](#)).

En la Figura 5.13-a se ilustra la formación de una región de flujo de pequeño espesor directamente por sobre una región que permanece estática. El perfil de velocidad típico observado se presenta en la Figura 5.13-b, donde los círculos representan mediciones experimentales,

y la línea negra corresponde al ajuste parabólico propuesto por los autores. En la Figura 5.13-c se presentan resultados para el caudal adimensional en función del ángulo de la zona de flujo, donde los círculos representan mediciones experimentales, y la línea negra continua corresponde a la tendencia reportada por el trabajo colectivo de otros autores (MiDi 2004).

Para unificar los resultados obtenidos para los perfiles de velocidad, Wang y col. 2019 proponen un modelo hidrodinámico aplicable en la región de flujo, con una viscosidad aparente definida por

$$\eta = a \left(\frac{1}{\dot{\gamma}} - b \right),$$

con a y b parámetros dependientes del sistema. Resolviendo la ecuación de balance de momentum resultante, e imponiendo como condiciones de borde $u(y = \delta_y) = 0$ y $du/dy(y = \delta_y) = 0$, los autores concluyen que el perfil de velocidad adquiere la forma parabólica:

$$u = -\frac{\delta_y}{b} \left(1 - \frac{y}{\delta_y} \right)^2.$$

A la vez que la viscosidad aparente corresponde a:

$$\eta = \rho g \delta_y \left(\frac{1}{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{D_{50}}{g}} \right) \sin \theta.$$

donde k es una constante. Este modelo se asemeja al de un fluido de Bingham con esfuerzo de fluencia $\rho g \delta_y \sin \theta$ y viscosidad negativa $-(2 \sin \theta / k) \sqrt{D_{50}/g}$. Este último aspecto resulta preocupante, ya que conlleva a una violación de la segunda ley de la termodinámica para $\dot{\gamma} > 1/b = 2k \sqrt{g/D_{50}}$ (viscosidad negativa).

Para aplicar el modelo elaborado en este trabajo, se comienza por escribir las ecuaciones de balance de momentum (5.40 y 5.38). A partir del esquema y ejes coordenados ilustrados en la Figura 5.13-a se sigue que para condiciones estacionarias:

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_y P + \partial_x \tau_{xy} - \rho g \cos \theta \\ 0 &= -\partial_x P + \partial_y \tau_{xy} + \rho g \sin \theta - \frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2 \chi} \rho u. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Asumiendo un perfil horizontalmente homogéneo, se sigue que la presión se encuentra dada por:

$$P = \rho g \cos \theta y. \quad (5.44)$$

Ahora bien, las zonas de flujo y estática se encuentran diferenciadas por $Y = Y_0$, de modo que en la zona estática $\tau_{xy} = -\rho g \sin \theta y$. Esta igualdad no necesariamente se cumple en la zona de flujo, en que una condición de equilibrio límite requiere al menos que $\tau_{xy} = -\mu P$. Luego, en la proximidad de la zona de flujo se puede proponer:

$$\tau_{xy} \approx -\min(\rho g \sin \theta, \mu P) = -\mu P. \quad (5.45)$$

Sustituyendo (5.44) y (5.45) en la definición del número de resistencia proporcionada en (5.7), se sigue que su valor corresponde a¹²:

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_0}{Y} &= \frac{Y_0 \mu' P}{D_{50} \sqrt{(-\partial_y P - \rho g \cos \theta)^2 + (-\partial_x P + \partial_y \tau_{xy} - \rho g \sin \theta)^2}} \\
 &= \frac{Y_0 \mu' P}{D_{50} |\partial_y \tau_{xy} - \rho g \sin \theta|} \\
 &= \frac{Y_0 \mu' y}{D_{50} |\tan \theta - \mu|} \\
 &= \frac{y}{\delta_y} \quad \text{con} \quad \delta_y \equiv \frac{D_{50} |\tan \theta - \mu|}{Y_0 \mu'}.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Como la condición de flujo requiere que $Y > Y_0$, se sigue a partir de este resultado que sólo hay flujo en la zona con $y < \delta_y$. Luego, el modelo elaborado predice la existencia de la zona de flujo. Ahora bien, asumiendo que la función χ mantiene la dependencia definida por la ecuación 5.38, se sigue que la misma puede ser escrita en la forma:

$$\chi = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right)^4. \tag{5.47}$$

A partir de estos resultados se sigue que el perfil de velocidades corresponde a:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{D_{50}^2}{\rho 32 Y_0^2 \nu} \chi (-\partial_x P + \partial_y \tau_{xy} + \rho g \sin \theta) \\
 &= \frac{D_{50}^2}{\rho 32 Y_0^2 \nu} (\rho g \sin \theta - \mu \rho g \cos \theta) \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right)^4 \right) \\
 &= \mu \mu' \frac{g D_{50}}{32 Y_0 \nu} \cos \theta \delta_y \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right)^4 \right).
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Finalmente, para el caudal de masa se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{\delta_y} dy \rho u \\
 &= \mu \mu' \frac{\rho g D_{50}}{32 Y_0 \nu} \cos \theta \delta_y^2 \left\{ \frac{y}{\delta_y} - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{\delta_y} \right)^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{y}{\delta_y} \right)^5 \right\} \Big|_0^{\delta_y} \\
 &= \mu \mu' \frac{\rho g D_{50}}{80 Y_0 \nu} \cos \theta \delta_y^2 \\
 &= \frac{\mu \rho g D_{50}^3}{\mu' 80 Y_0^2 \nu} \cos \theta (\tan \theta - \mu)^2.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

¹²Se utiliza un μ' (primado) para distinguir al coeficiente de fricción utilizado en la definición del número de resistencia (5.7), del coeficiente de fricción μ utilizado para expresar los esfuerzos de corte en la condición de equilibrio límite.

A continuación, en la Figura 5.14 se presenta una comparación entre los caudales adimensionales y el ángulo de inclinación de la zona de flujo para los datos experimentales de Wang y col. 2019 (puntos) y la curva definida por la ecuación (5.49) para el modelo elaborado en este trabajo. Los datos experimentales fueron extraídos directamente de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt, presentando errores del orden del tamaño de los marcadores. En la Figura 5.14-a se presentan curvas ajustadas con dos parámetros libres, incluyendo el coeficiente de fricción μ . En la 5.14-b se presentan curvas ajustadas con un sólo parámetro libre, manteniendo los coeficientes de fricción fijos y definidos por los ángulos de reposo reportados por Wang y col. 2019 para cada material ($21,1^\circ$, $21,7^\circ$ y $23,2^\circ$ para las partículas de diámetro 1,31 , 1,99 y 2,37 mm respectivamente). Ajustes realizados por medio del método de mínimos cuadrados no lineal y el algoritmo *trust-region-reflective* en el software MATLAB. En general se observa un buen ajuste para la curva definida por la ecuación (5.49), no obstante, al comparar el coeficiente de fricción calculado por mínimos cuadrados (ver Figura 5.14-a) se obtiene una alta diferencia en relación al obtenido empleando el ángulo de reposo ($15,9^\circ$ versus $21,1^\circ$). Esta diferencia puede tener origen en una disminución de la densidad a causa del rápido desplazamiento de las partículas, además de un eventual cambio en su régimen de movimiento.

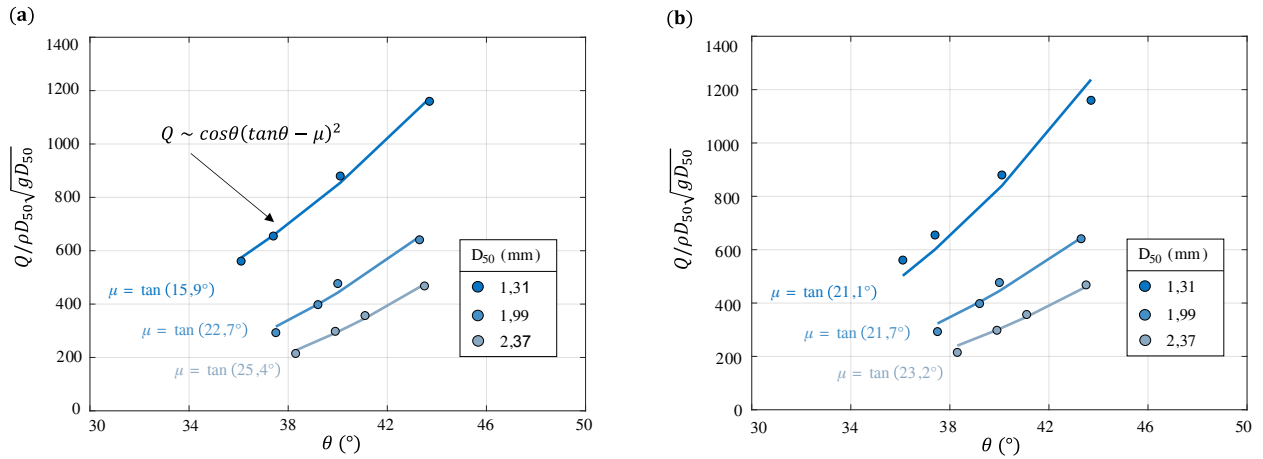


Figura 5.14: Comparación entre caudales adimensionales y el ángulo de inclinación de la zona de flujo para los datos experimentales de Wang y col. 2019 (puntos) y la curva definida por el modelo elaborado en este trabajo: $Q = Q_0 \cos \theta (\tan \theta - \mu)^2$. (a) Ajuste por mínimos cuadrados utilizando dos parámetros libres. (b) Ajuste por mínimos cuadrados utilizando un sólo parámetro libre, manteniendo los coeficientes de fricción definidos por el ángulo de reposo del material. Valores experimentales extraídos de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt.

En las Figuras 5.15, 5.16 y 5.17 se presenta una comparación entre los datos experimentales de Wang y col. 2019 (puntos), ajuste parabólico $\sim (1 - y/\delta_y)^2$ (líneas rojas) y ajuste mediante función $\chi = 1 - (4/3)(y/\delta_y) + (1/3)(y/\delta_y)^4$ del modelo propuesto (líneas negras), para experimentos realizados con distintos diámetros de partícula y caudal. Los datos experi-

mentales fueron extraídos directamente de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt, presentando errores del orden del tamaño de los marcadores. Ambas funciones fueron ajustadas utilizando el método de mínimos cuadrados no lineal y el algoritmo *trust-region-reflective* en el software MATLAB. En general se observa un buen ajuste de ambas curvas a los datos experimentales. La principal diferencia es que el ajuste parabólico presenta un decaimiento más lento cerca del borde de la zona de flujo que el obtenido por medio de la función χ del modelo propuesto, representando mejor los datos experimentales ese sector. No obstante, el ajuste de la función χ reproduce mejor el sector central a inicial de los datos.

Es interesante observar que el modelo parabólico $(1 - y/\delta_y)^2 = 1 - 2(y/\delta_y) + (y/\delta_y)^2$ coincide con la expresión encontrada en la ecuación (5.35) para el perfil de velocidades interior al grupo de partículas movilizadas. Su valor corresponde a la máxima velocidad del grupo de partículas (velocidad del núcleo con $r < r_c$). Luego, su uso en el contexto del modelo elaborado en el presente trabajo implicaría que el grupo de partículas se desplaza a igual velocidad. Esta situación conlleva a no descartar la función parabólica como una posible elección para la función χ , ya que el cálculo utilizado en su deducción asume que existe una región intermedia con $\dot{\gamma} \neq 0$, sin embargo, si esa región existe a distancias tan pequeñas como el diámetro de partícula, es de esperar que conlleve a que todas se desplacen a igual velocidad, recuperando así la dependencia parabólica. En consecuencia, no se puede descartar como posible elección una dependencia del tipo:

$$\chi = 1 - 2 \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + \left(\frac{Y_0}{Y} \right)^2. \quad (5.50)$$

Por otro lado, la relación directa entre los perfiles de velocidad y la función χ , según se expresa en la ecuación (5.48), sugiere que el estudio del flujo en planos inclinados proporciona un buen método para estudiar la dependencia de la función χ para medios granulares más heterogéneos.

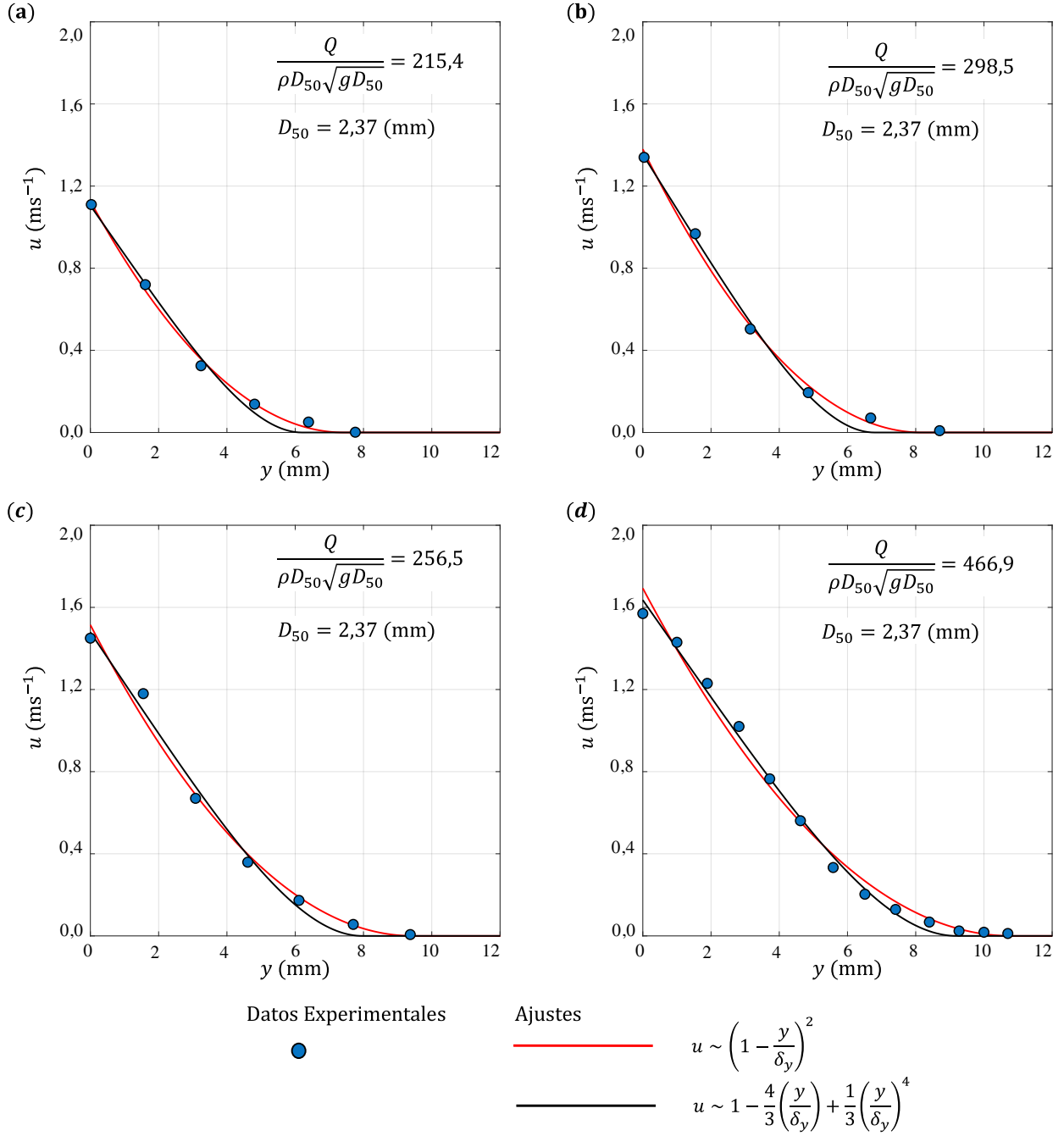


Figura 5.15: Comparación perfiles de velocidad horizontal entre resultados experimentales de Wang y col. 2019 (puntos), ajuste parabólico $\sim (1 - y/\delta_y)^2$ (líneas rojas) y ajuste mediante función $\chi = 1 - (4/3)(y/\delta_y) + (1/3)(y/\delta_y)^4$ del modelo propuesto (líneas negras). Valores experimentales corresponden a $D_{50} = 2,37 \text{ mm}$ para: (a) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 215,4$; (b) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 298,5$; (c) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 256,5$; y (d) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 466,9$. Valores experimentales extraídos de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt.

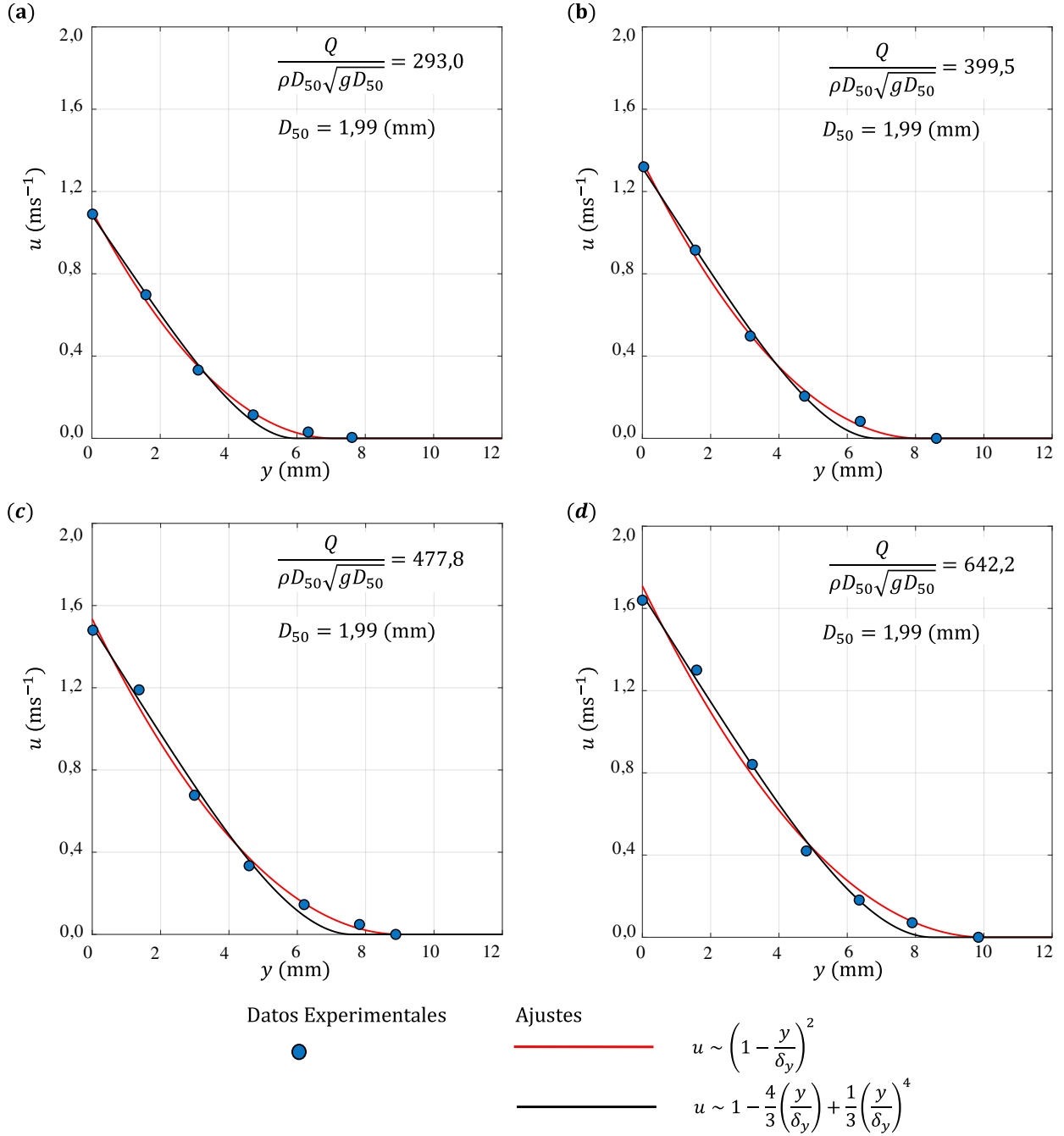


Figura 5.16: Comparación perfiles de velocidad horizontal entre resultados experimentales de Wang y col. 2019 (puntos), ajuste parabólico $\sim (1 - y/\delta_y)^2$ (líneas rojas) y ajuste mediante función $\chi = 1 - (4/3)(y/\delta_y) + (1/3)(y/\delta_y)^4$ del modelo propuesto (líneas negras). Valores experimentales corresponden a $D_{50} = 1,99$ mm para: (a) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 293,0$; (b) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 399,5$; (c) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 477,8$; y (d) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 642,2$. Valores experimentales extraídos de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt.

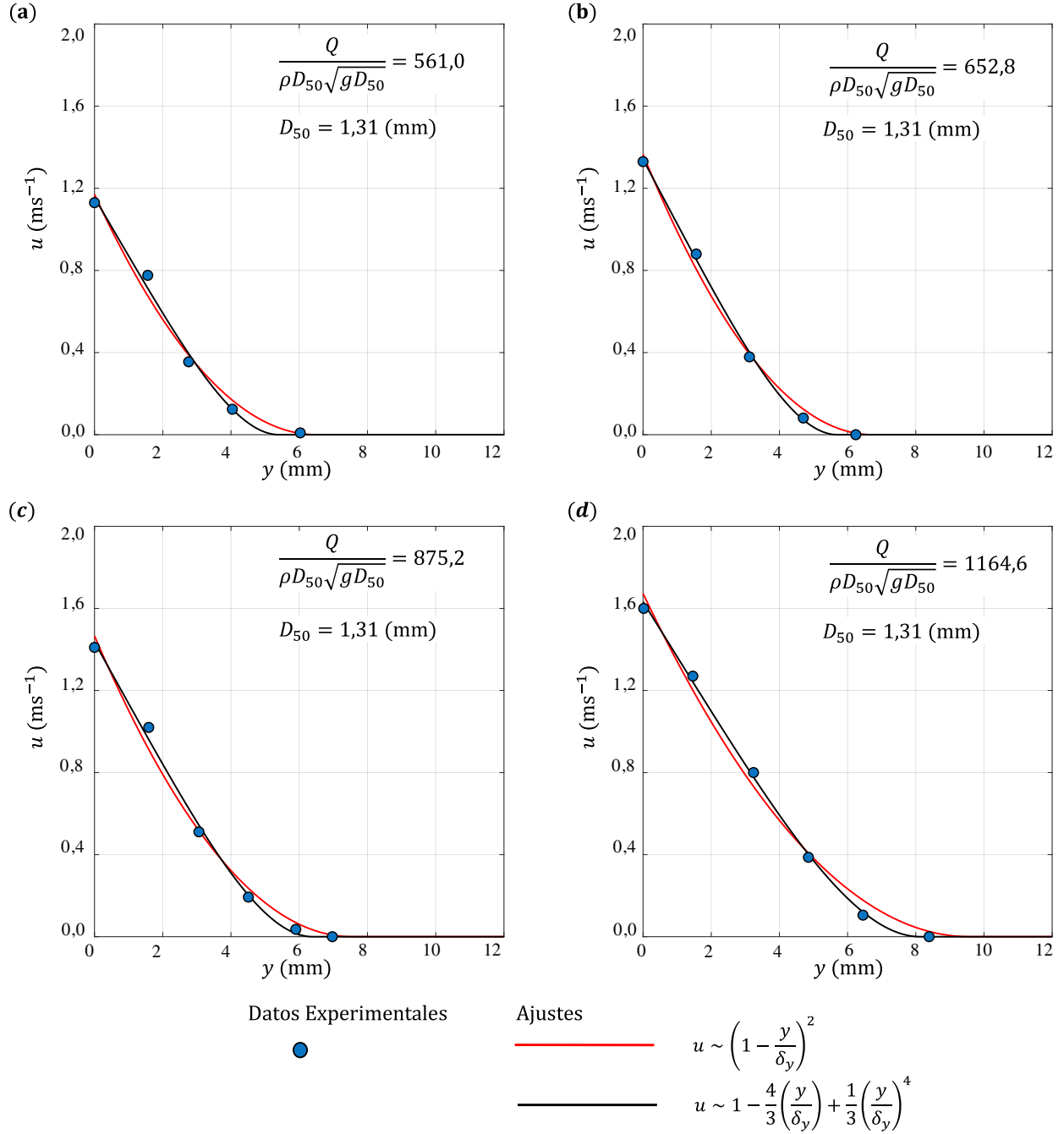


Figura 5.17: Comparación perfiles de velocidad horizontal entre resultados experimentales de Wang y col. 2019 (puntos), ajuste parabólico $\sim (1 - y/\delta_y)^2$ (líneas rojas) y ajuste mediante función $\chi = 1 - (4/3)(y/\delta_y) + (1/3)(y/\delta_y)^4$ del modelo propuesto (líneas negras). Valores experimentales corresponden a $D_{50} = 1,31$ mm para: (a) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 561,0$; (b) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 652,8$; (c) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 875,2$; y (d) $Q/\rho D_{50} \sqrt{g D_{50}} = 1164,6$. Valores experimentales extraídos de Wang y col. 2019 por medio del software Digitizelt.

5.5. Aplicación al flujo de Taylor-Couette

Para dar cuenta de la generalidad del modelo elaborado se evalúa su aplicabilidad al estudio del flujo de Taylor Couette, en que los esfuerzos inducidos por un cilindro en rotación son la fuerza motriz del movimiento. Aquí, el material granular se encuentra confinado entre cilindros verticales concéntricos de paredes rugosas, y se pone en movimiento al girar el cilindro interior, según el esquema ilustrado en la Figura 5.18-a. Los perfiles de velocidad típicamente observados son ilustrados en la Figura 5.18-b. Estos datos provienen de una recopilación realizada por MiDi 2004, originada en los trabajos de Mueth y col. 2000, Bocquet y col. 2002, y F. da Cruz 2004.

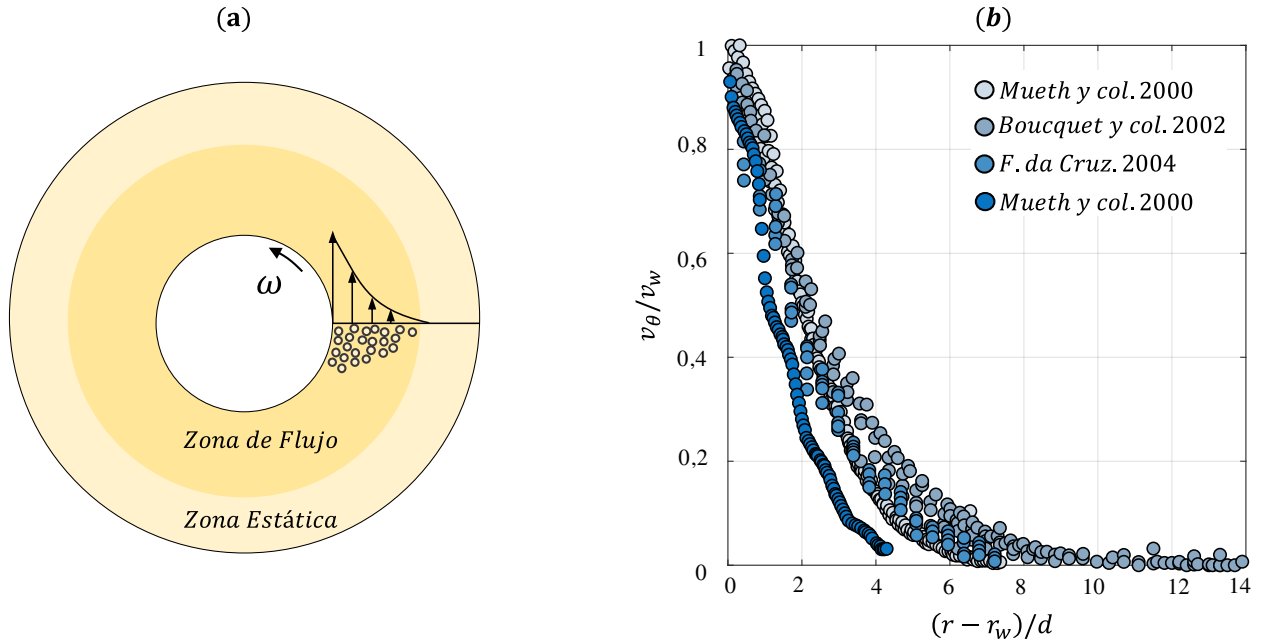


Figura 5.18: (a) Esquema flujo de Taylor Couette en celda anular. (b) Recopilación de datos experimentales de velocidad realizada por MiDi 2004, originada en los trabajos de Mueth y col. 2000, Bocquet y col. 2002, y F. da Cruz 2004. Corresponde a velocidad normalizada en función de la distancia radial al cilindro interior en rotación (normalizada al diámetro medio de partícula).

Para aplicar el modelo elaborado al flujo de Taylor-Couette, se comienza por plantear las ecuaciones de balance de momentum en coordenadas polares. Para un estado estacionario, despreciando las contribuciones inerciales, estas ecuaciones corresponden a:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \\
 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} - \frac{32Y_0^2\nu}{D_{50}^2\chi} \rho u_\theta.
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Asumiendo homogeneidad es claro que $\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = 0$ y consigo que la presión permanece constante al interior de la celda:

$$P(r) = P. \quad (5.52)$$

En cuanto al esfuerzo de corte, la inspección de la ecuación de balance de momentum motiva proponer el ansatz:

$$\tau_{r\theta} = A + B \left(\frac{r_w}{r} \right)^2, \quad (5.53)$$

donde r_w corresponde al radio del cilindro interior, y A y B son constantes que dependen de las condiciones de borde. En principio, el valor del esfuerzo de corte aplicado en el cilindro interior es conocido, de modo que:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r = r_w) &= A + B \\ &= \mu_w P \quad \text{con} \quad \mu_w = \frac{\tau_{r\theta}(r = r_w)}{P}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

donde $\mu_w > \mu$ corresponde a la razón de esfuerzos en el cilindro interior. Ahora bien, si la zona de flujo posee un tamaño $\delta_r > r_w$, se sigue por definición que:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r = \delta_r) &= A + B \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2 \\ &= \mu P. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Despejando la constante B en la ecuación (5.54) y substituyendola en la ecuación (5.56) se sigue que tanto A como B corresponden a:

$$\begin{aligned} \frac{A}{P} &= \mu_w - \frac{\mu_w - \mu}{1 - (a/\delta_r)^2} \\ \frac{B}{P} &= \frac{\mu_w - \mu}{1 - (a/\delta_r)^2} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Por otro lado, la condición de flujo se encuentra determinada por el número de resistencia, el cual se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Y_0}{Y} &= \frac{Y_0 \mu' P}{D_{50} \sqrt{(\partial_r P)^2 + (\partial_r (r^2 \tau_{r\theta})/r^2)^2}} \\ &= \frac{Y_0 \mu' P r}{D_{50} 2|A|}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Luego, la condición $Y > Y_0$ equivale a imponer $r < \delta_r$, permitiendo encontrar el siguiente resultado para el radio de la zona de flujo:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{D_{50} 2|A|}{Y_0 \mu' P} \\ &= \frac{D_{50} 2}{Y_0 \mu'} \left| \frac{\mu_w - \mu}{1 - (r_w/\delta_r)^2} - \mu_w \right|. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Así, el radio de la zona de flujo se encuentra determinado por la solución a la siguiente ecuación cúbica:

$$\delta_r^3 + \delta_r^2 \frac{2D_{50}\mu}{Y_0\mu'} - \delta_r r_w^2 - r_w^2 \frac{2D_{50}\mu_w}{Y_0\mu'} = 0. \quad (5.59)$$

Este resultado demuestra que tanto δ_r como las constantes A y B definidas en la ecuación (5.53) para expresar los esfuerzos de corte, se encuentran determinados por las propiedades del material granular y la razón de esfuerzos aplicados en el cilindro interior. Definiendo el espesor de la zona de flujo $\Delta_r = \delta_r - r_w$, se sigue que su valor para $\Delta_r \ll r_w$ vendrá determinado por la ecuación $r_w^3 + 3r_w^2\Delta_r + (r_w^2 + 2r_w\Delta_r)2D_{50}\mu/Y_0\mu' - r_w^3 - \Delta_r r_w^2 - 2r_w^2 D_{50}\mu_w/Y_0\mu' \approx 0$ cuya solución es:

$$\Delta_r \equiv \delta_r - r_w \approx \frac{D_{50}}{Y_0\mu'}(\mu_w - \mu) \left(1 + 2\frac{D_{50}\mu}{r_w Y_0\mu'}\right)^{-1} \quad \text{si } \Delta_r \ll r_w. \quad (5.60)$$

Luego, es claro que para que exista flujo se requiere que $\mu_w > \mu$. Ahora bien, asumiendo que la función χ mantiene la dependencia definida por la ecuación (5.38), se sigue que la misma puede ser escrita en la forma:

$$\chi = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{\delta_r}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{\delta_r}\right)^4. \quad (5.61)$$

Finalmente, a partir de estos resultados se sigue que el perfil de velocidades corresponde a:

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{D_{50}^2}{\rho 32 Y_0^2 \nu} \frac{\partial_r(r^2 \tau_{r\theta})}{r^2} \chi \\ &= \frac{D_{50}^2 P}{\rho 16 Y_0^2 \nu} \left(\mu_w - \frac{\mu_w - \mu}{1 - (r_w/\delta_r)^2} \right) \frac{1}{r} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{\delta_r}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{\delta_r}\right)^4 \right] \quad \text{si } r \leq \delta_r. \end{aligned} \quad (5.62)$$

A continuación, en la Figura 5.19 se presenta una comparación entre los perfiles de velocidad experimentales de (puntos) y el ajuste al resultado obtenido en la ecuación (5.62) con el modelo propuesto. Los valores experimentales fueron extraídos de por medio del software Digitizelt, presentando errores del orden del tamaño de los marcadores. Los ajustes se realizaron utilizando el método de mínimos cuadrados no lineal y el algoritmo *trust-region-reflective* en el software MATLAB. En general se observa que el modelo propuesto reproduce adecuadamente los perfiles de velocidad de todos los autores. En la Figura 5.20 se presenta un ejercicio de comparación similar, en que se ha modificado la función χ adoptando una dependencia parabólica, según lo discutido al final de la sección precedente. Las diferencias entre ambas elecciones son menores, y se concentran principalmente en la vecindad de la región que permanece estática.

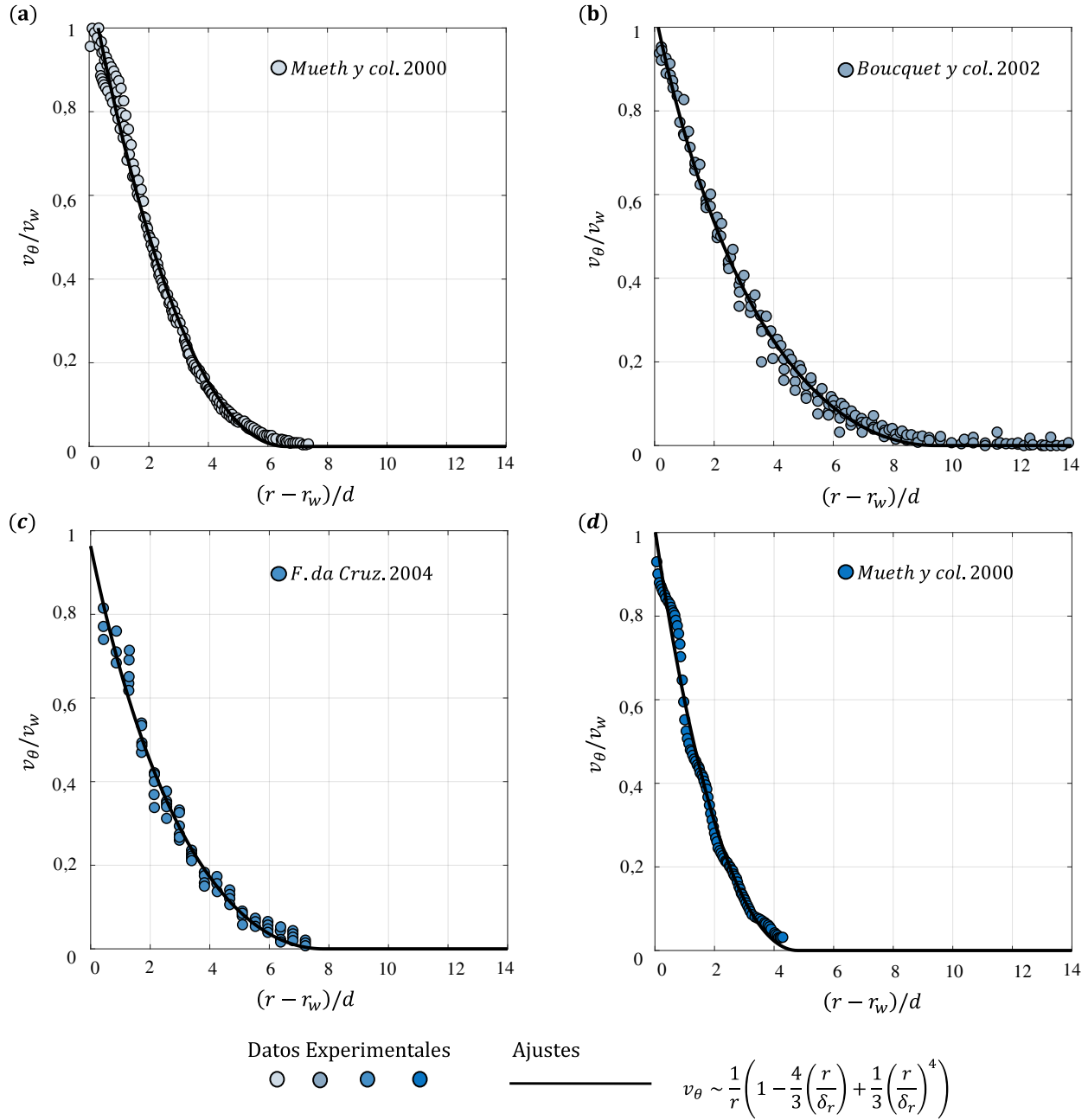


Figura 5.19: Comparación perfiles de velocidad normalizados entre resultados experimentales de [Mueth y col. 2000](#) (a y d), [Boucquet y col. 2002](#) (b) y [F. da Cruz 2004](#) (c), y ajuste mediante función $r^{-1}(1 - (4/3)(r/\delta_r) + (1/3)(r/\delta_r)^4)$ (líneas negras). Valores experimentales extraídos por medio del software Digitizelt.

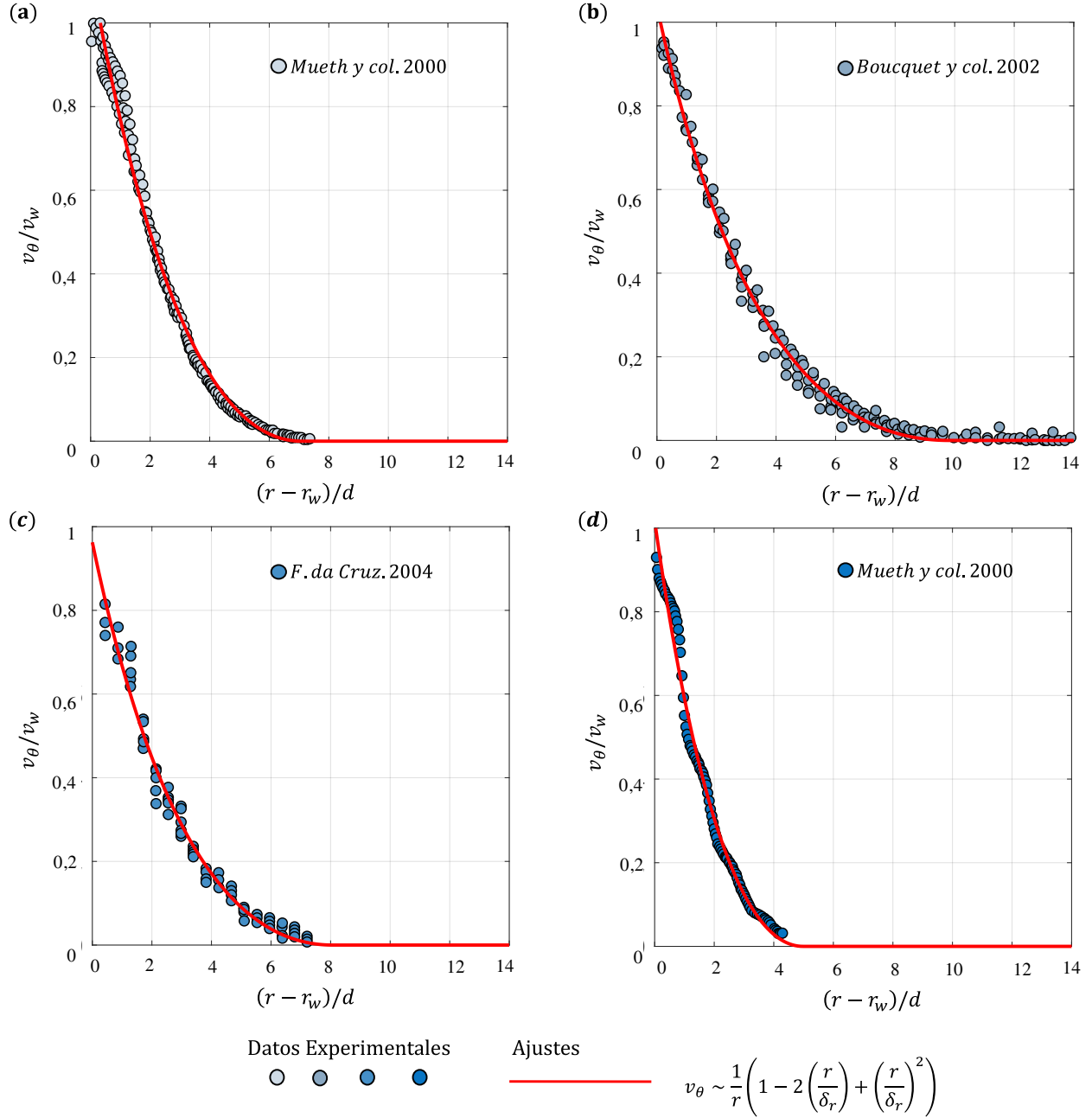


Figura 5.20: Comparación perfiles de velocidad normalizados entre resultados experimentales de [Mueth y col. 2000](#) (a y d), [Boucquet y col. 2002](#) (b) y [F. da Cruz 2004](#) (c), y ajuste mediante función $r^{-1}(1 - 2(r/\delta_r) + (r/\delta_r)^2)$ (líneas rojas). Valores experimentales extraídos por medio del software Digitizelt.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

La mecánica de medios granulares representa un permanente desafío para la comunidad científica, no tan solo por un genuino interés académico motivado en la ruptura de la aplicabilidad de los modelos hidrodinámicos clásicos, sino también por sus múltiples aplicaciones en ingeniería. La mayoría de estas dificultades se deben a que disipan rápidamente la energía de sus partículas y pueden formar largas redes de contactos, aspectos que se ven acentuados cuando el medio se presenta denso, con empaque aleatorio y condiciones cuasi-estáticas. Uno de los fenómenos en que se presentan estas condiciones es el de flujo gravitacional en silos, en que las partículas descargan a través de una abertura basal por efecto de la fuerza de gravedad, también conocido como flujo gravitacional.

El flujo gravitacional es un fenómeno de importancia central en la industria minera, en que el agotamiento de las reservas superficiales y la disminución de las leyes de mineral han originado la migración de los métodos de explotación superficiales hacia los métodos masivos de minería subterránea de Block Caving y sus variantes. Estos métodos inducen la fractura del macizo rocoso en profundidad para luego extraer el material fragmentado a través de una serie de aberturas basales, caracterizándose por ser económicos y eficientes para una extracción a gran escala. Sin embargo, la efectividad de su diseño y la capacidad de realizar predicciones confiables se encuentran limitados por el desconocimiento actual sobre la mecánica de los medios granulares.

Bajo este contexto, el presente trabajo de tesis buscó contribuir al desarrollo de la industria minera y de la mecánica de medios granulares, a través de la elaboración de un modelo físico-matemático para la descripción de los flujos granulares impulsados por gravedad. Con esta finalidad se presentaron los principales resultados encontrados en el área, y se proporcionó una explicación mecánica al origen de los modelos analíticos del tipo difusivos. La discusión llevó a la introducción de un nuevo número adimensional Y , denominado de resistencia, y permitió deducir expresiones para la densidad de flujo de partículas que luego fueron respaldadas por un desarrollo teórico sobre la ecuación de balance de momentum en un régimen cuasi-estático.

El modelo físico-matemático elaborado fue implementado en el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics, y sus predicciones fueron contrastadas con las mediciones

experimentales de [Fullard, Breard y col. 2019](#) para el campo de velocidad en un silo con dos aberturas de extracción. El ejercicio de validación abarcó un total de 13 experimentos, 11 de los cuales requirieron el mismo conjunto de parámetros para su calibración. El resultado de la comparación de la geometría de la zona de extracción (elipsoide) mostró un buen acuerdo entre las predicciones del modelo y la calculada a partir de los datos experimentales. Más aún, el modelo logró capturar efectos de interacción entre zonas de extracción asociados al cambio en la esbeltez de los elipsoides en función de distancia entre las aberturas de extracción. Sus resultados también fueron comparados con los predichos por modelo de [R.M. Nedderman y Tüzün 1979](#), mostrando una mejora sustancial para todos los escenarios.

Se realizó un ejercicio de sensibilización del modelo, para lo cual se elaboraron curvas que relacionan el ancho y altura de la zona de extracción en un experimento de extracción aislada. Como caso base de comparación se utilizaron los parámetros previamente calibrados para los resultados experimentales. Las variables sensibilizadas fueron los parámetros introducidos por el modelo (2 parámetros), las dimensiones del silo, las propiedades del material granular (ángulo de fricción y diámetro de partícula) y la velocidad de extracción de partículas desde la abertura. Los resultados mostraron que: (1) el aumento o disminución en la magnitud de uno u otro de los parámetros del modelo posee un efecto similar; (2) los resultados no cambian si se incrementan las dimensiones del modelo; (3) incrementos en el ángulo de fricción conllevan a una disminución en el ancho de la zona de extracción, o aumento en la esbeltez del elipsoide; (4) un incremento en el diámetro de partícula conlleva a un aumento en el ancho de la zona de extracción (efecto inverso al ángulo de fricción); y (5) un incremento en la velocidad de extracción origina un aumento en el ancho de la zona de extracción.

Las curvas que relacionan el ancho y alto del elipsoide de extracción corresponden a uno de los principales resultados esperables en un modelo físico-matemático aplicable al diseño minero subterráneo de métodos de hundimiento masivo como el Block Caving. Esto se debe a que caracterizan la geometría del mineral extraído, permitiendo al ingeniero de minas efectuar diseños seguros a la vez que maximizan la recuperación de mineral. No obstante, su obtención requiere de un proceso previo de calibración de los parámetros involucrados por el modelo (resumidos en u_0 e Y_0), a variables de laboratorio medidas en modelos en escala (diámetro de partícula, ángulo de fricción, grado de compactación, entre otros). Luego de ello se requiere de una validación a partir de información de terreno, de modo que los parámetros del modelo y las curvas de diseño se encuentren expresadas en términos de variables de ingeniería, constituidas por información accesible en una explotación minera (parámetros de calidad de macizo rocoso, granulometría, resistencia, entre otros). El desarrollo de estas actividades implica un trabajo de gran intensidad que, por su naturaleza, no pudo ser íntegramente abarcado en el presente trabajo. Su culminación requerirá de la colaboración de nuevas generaciones de profesionales, motivados por generar nuevo conocimiento y contribuir a mejorar la eficiencia y eficacia de nuestra labor.

Además de las soluciones numéricas se obtuvieron soluciones analíticas para el flujo en un plano inclinado, prediciendo la existencia de una zona de flujo de espesor finito. La solución fue comparada con mediciones experimentales de [Wang y col. 2019](#), permitiendo reproducir adecuadamente los perfiles de velocidad de las zonas de flujo, junto a la dependencia observa-

da entre el caudal y el ángulo de inclinación de la zona de flujo. Un ejercicio similar se realizó para el flujo de Taylor Couette, en que los esfuerzos inducidos por un cilindro en rotación son la fuerza motriz del movimiento. La solución fue comparada con mediciones experimentales de [Mueth y col. 2000](#), [Bocquet y col. 2002](#) y [F. da Cruz 2004](#), logrando predecir adecuadamente los perfiles de velocidad en las zonas de flujo.

La aplicabilidad del modelo elaborado a otras geometrías y condiciones de esfuerzo demuestran una gran versatilidad. El único modelo comparable en cuanto a su capacidad de describir distintos tipos de flujos corresponde a la adaptación introducida por [Kamrin 2008](#) al modelo de burbujas, también conocido como regla de flujo estocástico (SRF por sus siglas en inglés). El SRF presupone que el movimiento es causado por la difusión de espacio intersticial, con una dirección de deriva determinada por las líneas (o superficies) de deslizamiento admisibles en una condición de equilibrio límite. Este carácter difusivo es el que le permite reproducir características como la existencia de zonas de flujo en planos inclinados y celdas de Couette. Sin embargo, el SRF posee las limitaciones discutidas en el capítulo 5 para los modelos de tipo cinemáticos, en que la única diferencia radica en la definición de la dirección de deriva de las partículas (en el SRF depende del estado de tensiones). Por el contrario, el modelo elaborado en el presente trabajo responde a la naturaleza friccionante de los medios granulares, y su carácter difusivo (no lineal) emerge directamente de la aplicación de las leyes de la mecánica.

El modelo elaborado no tan sólo es aplicable en condiciones estacionarias. Es posible estudiar condiciones transientes incorporando una relación constitutiva entre la densidad y la presión, escogiendo para la compresibilidad un valor conveniente desde el punto de vista numérico, verificando que su elección origine efectos mínimos en el resultado final. Por otro lado, el modelo, en principio, también permite estudiar otro tipo de regímenes de flujo por medio del acoplamiento con modelos continuos como la reología $\mu(I)$. Esto se origina en que la densidad de flujo contiene la velocidad relativa entre las partículas movilizadas y no movilizadas. En una condición general el modelo describe el origen de una discontinuidad en el campo de velocidades, por lo que la velocidad total es la suma de la velocidad de la discontinuidad y del campo continuo. Se espera incorporar esta extensión en un trabajo futuro, con el objetivo de generar nuevos y mejores modelos predictivos para futuras implementaciones en el diseño de métodos de hundimiento subterráneo de Block & Panel Caving, así como también en otras áreas de la ingeniería.

Apéndice A

Elementos de mecánica de sólidos

Las siguientes secciones se encuentran elaboradas a partir de los trabajos de [R.M. Néd-derman 2005](#), [Landau y col. 1969](#), [Sadd 2014](#), [J.R. 2018](#) y [Popov y col. 2019](#).

A.1. Tensor de Esfuerzos

A.1.1. Fuerzas y esfuerzos

La fuerza es una magnitud dotada de módulo, sentido y dirección que sirve como modelo matemático para representar la intensidad de interacción entre dos cuerpos. Así, por ejemplo, lo es la fuerza gravitacional que provoca la atracción de dos cuerpos con masa, o la fuerza de Coulomb que puede originar la atracción o repulsión entre dos partículas con carga eléctrica. El efecto de aplicación de una fuerza es modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo. En el caso de sólidos rígidos una fuerza modifica su velocidad o vence su inercia para ponerlo en movimiento, en tanto que, en sólidos elásticos es capaz de provocar su deformación.

Generalmente, una fuerza $\vec{F}$ es expresada a través de sus componentes referidas a un sistema de coordenadas. Así, en un sistema de coordenadas cartesianas las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza $\vec{F}$ corresponden a sus componentes paralelas a los respectivos ejes coordenados con la convención de que su sentido es positivo en la dirección en que las coordenadas aumentan. No obstante, dichas componentes no son iguales en todos los sistemas coordenados, pues si se considera un segundo sistema rotado respecto al anterior, las nuevas componentes $F_{i'}$ se obtendrán como cierta combinación lineal de las F_i . A modo de ejemplo, si para un sistema $\vec{F} = F_x \hat{x}$ se puede demostrar que para un segundo sistema cuyos ejes $\hat{x}$ y $\hat{y}$ se encuentran rotados un ángulo θ la misma fuerza vendrá representada por $\vec{F} = F_{x'} \hat{x}' + F_{y'} \hat{y}'$ con $F_{x'} = F_x \cos \theta$ y $F_{y'} = -F_y \sin \theta$.

Para describir el efecto de la aplicación de una fuerza es necesario introducir el concepto de esfuerzo, ya que en las situaciones de interés las fuerzas no son aplicadas en regiones puntuales, sino más bien a regiones extendidas o superficies. Una manera familiar de ilustrar este concepto es considerando un cubo con aristas de largo infinitesimal en reposo, cuyas caras

poseen normales en la misma dirección que los ejes coordenados y sobre las que actúa una fuerza normal F_i . Si el cubo es de espesor infinitesimal y se encuentra en reposo, las fuerzas en caras opuestas deben ser iguales. Ahora bien, si el cubo es rotado manteniendo las fuerzas constantes, las fuerzas que actúan sobre cada una de las caras ya no serán necesariamente normales a las mismas. Así, la fuerza que actúa sobre la *cara-x* tendrá componentes F_{xx} , F_{xy} y F_{xz} . Si se divide cada componente de fuerza por el área de la respectiva cara sobre la que actúa se obtienen los esfuerzos. Luego, para la *cara-x* los esfuerzos son σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{xz} .

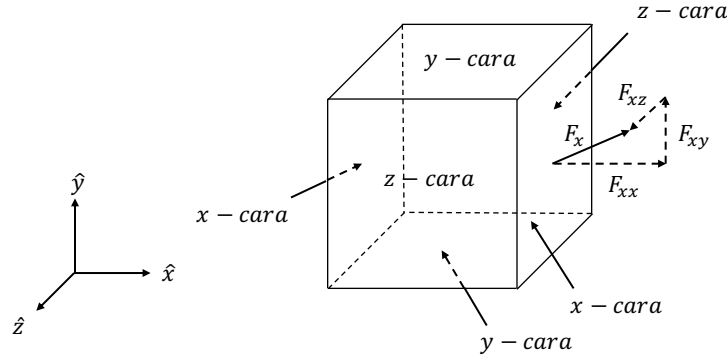


Figura A.1: Componentes de una fuerza actuando sobre la cara de un cubo. Adaptado de R.M. Nedderman 2005.

Usualmente las componentes de esfuerzos σ_{ij} con $i \neq j$ se denotan por τ_{ij} , por lo que los esfuerzos sobre la *cara-x* se escriben como σ_{xx} , τ_{xy} y τ_{xz} . Este cambio en la notación se debe a que σ_{xx} corresponde al esfuerzo normal sobre la *cara-x* en tanto que τ_{xy} y τ_{xz} corresponden a esfuerzos paralelos o de corte en las direcciones $\hat{y}$ y $\hat{z}$ respectivamente.

El resultado anterior se sigue de manera similar para cada una de las caras del cubo, lo que permite concluir que en general su estado tensional viene representado por un total de 9 cantidades que en forma matricial se escriben por:

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Luego, queda claro que el estado tensional no puede ser representado por un vector, sino más bien por una cantidad que en cada punto puede tomar tres direcciones. Se habla entonces del tensor de esfuerzos quedando denotado por σ_{ij} .

El tensor de esfuerzos debe ser simétrico en condiciones de equilibrio. Este requisito se sigue de que las componentes en la diagonal representan esfuerzos normales al cubo y no originan momentos de torsión, al contrario de las componentes fuera de la diagonal o de corte que sí pueden. Luego, para que el cubo no rote se debe cumplir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{y} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (\text{A.2})$$

A.1.2. Matriz de cambio de coordenadas

Los objetos con significado físico deben ser independientes de la elección del sistema de coordenadas, a causa de esto resulta fundamental conocer cómo transforman las componentes de un tensor entre distintos sistemas.

Es claro que las componentes de un tensor en dos sistemas coordenados se deben transformar mediante una aplicación lineal, por lo que en una transformación de coordenadas, las componentes $A_{i'}$ y A_i de un vector $\vec{A}$ arbitrario entre un sistema primado y otro sin primar se deben relacionar de acuerdo a:

$$A_{i'} = \sum_{j=1}^3 R_{i'j} A_j = R_{i'j} A_j. \quad (\text{A.3})$$

En la última igualdad se ha adoptado el convenio de Einstein de suma sobre índices repetidos respecto a todos los valores que pueda tomar el índice (en este caso $R_{i'j} A_j = R_{i'1} A_1 + R_{i'2} A_2 + R_{i'3} A_3$). Las cantidades $R_{i'j}$ pueden ser representadas mediante una matriz, en cuyo caso se conoce como matriz de transformación y la relación anterior se escribe a través de vectores columna como $(A') = (R)(A)$. Para obtener un método general que permita derivar dichas cantidades basta con considerar las componentes dx_i del vector desplazamiento $d\vec{r}$ en dos sistemas que se encuentran rotados un ángulo θ respecto a un eje común, por ejemplo, el eje $\hat{z}$. Mediante argumentos geométricos es sencillo comprobar que sus componentes se relacionan mediante:

$$\begin{aligned} dx' &= \cos \theta dx + \sin \theta dy \\ dy' &= -\sin \theta dx + \cos \theta dy \\ dz' &= dz. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Luego, no es difícil convencerse de que las componentes R_{ij} de tal transformación se obtienen como:

$$R_{i'j} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_j}. \quad (\text{A.5})$$

Para dar cuenta de algunas propiedades de los elementos $R_{i'j}$ de la matriz de transformación, es conveniente considerar el módulo de un vector $\vec{A}$ arbitrario. Así:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_{i'} A_{i'} = R_{i'j} R_{i'k} A_j A_k. \quad (\text{A.6})$$

Teniendo en cuenta que el módulo de un vector (su “longitud”) es independiente del sistema de coordenadas, se sigue que $A_{i'} A_{i'} = A_j A_j$ por lo que, a partir de (A.3) se sigue que necesariamente se debe cumplir,

$$R_{i'j} R_{i'k} = \delta_{jk}, \quad (\text{A.7})$$

con δ_{jk} corresponde a la delta de Kronecker y se define como +1 si $i = k$ y 0 en otro caso. Si se desarrolla esta expresión para escribirla en forma matricial se encuentra que es equivalente a $(R)(R)^T = I_{3 \times 3}$ lo que permite concluir que la matriz de transformación es ortogonal, o de manera equivalente, que su inversa es igual a su traspuesta y que su determinante es igual a

+1.

Para rotaciones de ángulo θ en torno a los ejes $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ se puede demostrar que las matrices de rotación vienen dadas respectivamente por:

$$(R_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (R_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (R_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, cabe destacar que cualquier rotación puede escribirse con la aplicación sucesiva de rotaciones respecto a los tres ejes con diferentes ángulos.

A.1.3. Transformación del tensor de esfuerzos

A partir del resultado anterior es posible derivar la ley de transformación de un tensor de segundo orden. Con este fin se pueden considerar dos vectores de componentes A_i y B_i respecto a algún sistema de coordenadas. Luego, si se construye el tensor $C_{ij} = A_i B_j$ es claro que en un cambio de coordenadas C_{ij} transforma como $C_{i'j'} = A_{i'} B_{j'}$. De aquí se sigue que un tensor de segundo orden transforma como dos vectores de acuerdo a:

$$\sigma_{i'j'} = R_{i'k} R_{j'l} \sigma_{kl}. \quad (\text{A.9})$$

Resulta conveniente escribir esta expresión en forma matricial. Con este fin se desarrollarán explícitamente las sumas sobre los índices repetidos, considerando por simplicidad una rotación bidimensional. Así:

$$\begin{aligned} \sigma_{i'j'} &= R_{i'1} R_{j'1} \sigma_{11} + R_{i'2} R_{j'1} \sigma_{21} \\ &= R_{i'1} (R_{j'1} \sigma_{11} + R_{j'2} \sigma_{12}) + R_{i'2} (R_{j'1} \sigma_{21} + R_{j'2} \sigma_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} R_{i'1} & R_{i'2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{j'1} \sigma_{11} + R_{j'2} \sigma_{12} \\ R_{j'1} \sigma_{21} + R_{j'2} \sigma_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{i'1} & R_{i'2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{j'1} \\ R_{j'2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A partir de este resultado es sencillo observar que en forma matricial las componentes del tensor en el sistema primado se relacionan con las sin primar de acuerdo a:

$$(\sigma') = (R)(\sigma)(R)^T. \quad (\text{A.11})$$

A.1.4. Contracción del tensor de esfuerzos

La operación que permite obtener el cuadrado del módulo de un vector es el producto punto consigo mismo, de manera similar se puede considerar el producto punto entre dos vectores, o de manera más general entre dos tensores. En el último caso se refiere a esta operación como contracción, pues da como resultado un tensor de menor orden. Así, la contracción de dos tensores de primer orden da un tensor de orden cero, la contracción de un

tensor de segundo orden con uno de primero da un tensor de primer orden y la doble contracción de un tensor de segundo orden vuelve a dar un tensor de orden cero. Gráficamente se puede pensar en la operación de contracción entre dos tensores como la proyección de un tensor sobre el otro.

La operación de contracción resulta de especial utilidad cuando se busca encontrar el esfuerzo normal o tangencial a un plano conociendo su normal, es decir, sin la necesidad de realizar rotaciones al tensor de esfuerzos. Para encontrar estas cantidades lo primero es ver la proyección del vector normal del plano sobre el tensor de esfuerzos, lo que nos proporciona el vector tracción:

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3. \quad (\text{A.12})$$

Para encontrar el significado de este vector es útil recordar el cubo de aristas infinitesimales. Si lo que se busca es el esfuerzo en una cara del cubo, por ejemplo en la *cara-x*, se sabe que éste tendrá las componentes σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{xz} . Por otro lado, si se atiende a que la normal tiene todas sus componentes nulas a excepción de $n_1 = 1$, se obtiene a partir de (A.12) que el vector tracción tiene las componentes $T_1 = \sigma_{xx}$, $T_2 = \sigma_{xy}$ y $T_3 = \sigma_{xz}$, es decir, comparte las mismas componentes que el esfuerzo en dicha cara. Este resultado es general, por lo que las componentes del vector tracción que actúan sobre un plano son iguales a los esfuerzos sobre dicho plano.

Teniendo esto en cuenta, si lo que se busca es el esfuerzo normal a un plano, σ_n , basta con tomar la proyección del vector tracción sobre su normal de acuerdo a:

$$\sigma_n = T_i n_i = \sigma_{ij}n_i n_j = n_1^2 \sigma_{11} + n_2^2 \sigma_{22} + n_3^2 \sigma_{33} + 2(n_1 n_2 \sigma_{12} + n_1 n_3 \sigma_{13} + n_2 n_3 \sigma_{23}). \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado, si lo que se busca es el esfuerzo de corte, τ , se puede atender a la relación, $\tau^2 + \sigma_n^2 = T_i T_i$, de donde se sigue que se encuentra dado por:

$$\tau^2 = T_i T_i - \sigma_n^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - \sigma_n^2. \quad (\text{A.14})$$

A.1.5. Diagonalización del tensor de esfuerzos

Es claro con lo visto en las secciones anteriores que las componentes del tensor de esfuerzos y de un tensor en general dependen del sistema de coordenadas escogido para su representación. Existe, sin embargo, un sistema privilegiado respecto al cual el tensor de esfuerzos sólo tiene elementos en su diagonal. A estos esfuerzos se les llama esfuerzos principales y a los ejes correspondientes, vectores principales. Los esfuerzos principales se denotan por σ_1 , σ_2 y σ_3 y se les conoce como esfuerzo principal mayor, intermedio y menor respectivamente.

El problema de buscar los esfuerzos principales equivale a encontrar el sistema para el cual las tracciones son paralelas a las normales. Esta condición se puede expresar como $T_i = \sigma_{ij}n_j = \sigma n_i$ o de manera equivalente:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (\text{A.15})$$

La solución no trivial a esta ecuación se obtiene cuando $\det(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = 0$ lo que nos proporciona la ecuación de autovalores para los esfuerzos principales,

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + II_2\sigma - II_3 = 0, \quad (\text{A.16})$$

donde se definen $II_2 = (I_2 - I_1^2)/2$ y $II_3 = (I_1^3 - 3I_1I_2 + 2I_3)/3$ con:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \text{tr}(\sigma) \quad , \quad I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ji} = \text{tr}(\sigma^2) \quad \text{y} \quad I_3 = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \text{tr}(\sigma^3). \quad (\text{A.17})$$

Las cantidades I_1 , I_2 y I_3 se conocen como invariantes del tensor de esfuerzos, llamados así porque su valor es independiente del sistema de referencia (esto se sigue de que son escalares formados a partir de la contracción del tensor consigo mismo).

A.1.6. Esfuerzo hidrostático y desviador

El tensor de esfuerzos puede ser descompuesto convenientemente en términos de una compresión y un cortante puros de acuerdo a:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} + \left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \right) = P_{ij} + M_{ij}. \quad (\text{A.18})$$

La ventaja de esta descomposición es que deja en evidencia que si el esfuerzo desviador M_{ij} es nulo respecto a algún sistema, lo será para cualquier otro¹, de modo que el estado tensional es el mismo en todas las direcciones al igual que en un fluido. Por este motivo a P_{ij} también se le conoce como esfuerzo hidrostático.

A.1.7. Círculo de Mohr

La contracción de un tensor con el vector normal a un plano no es el único método para obtener los esfuerzos normal y cortante. Adicionalmente, existe un método gráfico de gran utilidad desarrollado por el ingeniero alemán Christian Otto Mohr, conocido como el círculo de Mohr. Este método permite obtener ambas componentes de esfuerzo para una rotación cualquiera del sistema de coordenadas atendiendo a la ley de transformación de un tensor de segundo orden encontrada en (A.11).

Antes de proceder con su deducción es necesario cambiar la convención usual de signos. Generalmente, las situaciones de interés en mecánica de suelos se caracterizan por un estado de esfuerzos compresivo. Esto, se debe a que las rocas se caracterizan por un comportamiento frágil con muy baja resistencia a la tracción. Por esta razón es conveniente redefinir como positivos a los esfuerzos normales compresivos.

Para continuar, se puede considerar, por simplicidad, un estado de esfuerzos bidimensional, que para un sistema sin primar viene descrito por el tensor en forma matricial:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

¹En efecto, si todas las componentes de un tensor son nulas en un sistema de coordenadas lo son también en cualquier otro sistema en virtud de la linealidad de la ley de transformación.

Ahora bien, si $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$, se sigue a partir de (A.11) que las componentes $\sigma_{i'j'}$ del tensor σ_{ij} en un sistema primado, rotado un ángulo θ respecto al sin primar son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta & -\sigma_{xx} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta & -\tau_{xy} \sin \theta + \sigma_{yy} \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Resultado que permite escribir para cada componente:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para simplificar la notación es conveniente definir las cantidades P , R y λ de acuerdo a:

$$P = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad , \quad R^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad \text{y} \quad \tan 2\lambda = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (\text{A.22})$$

Con estas definiciones las componentes $\sigma_{i'j'}$ encontradas en (A.21) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= P + R \cos(2\theta + 2\lambda) \\ \tau_{x'y'} &= R \sin(2\theta + 2\lambda) \\ \sigma_{y'y'} &= P - R \cos(2\theta + 2\lambda). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Luego, se desprende que al realizar una rotación de ángulo $\theta = -\lambda$ el tensor de esfuerzos adquiere forma diagonal, con los esfuerzos principales dados por:

$$\sigma_3 = P - R \quad \text{y} \quad \sigma_1 = P + R. \quad (\text{A.24})$$

Gráficamente este resultado sugiere que el estado tensional de cualquier sistema se obtiene como una rotación de ángulo ϕ dentro de un círculo de radio R y centro $(P, 0)$ en el plano (σ, τ) . Este es el conocido círculo de Mohr y sus intersecciones con el eje $\hat{\sigma}$ corresponden a los esfuerzos principales.

En el círculo de Mohr los esfuerzos del sistema sin primar se representan por los puntos $X(\sigma_{xx}, \tau_{xy})$ e $Y(\sigma_{yy}, \tau_{yx})$ en que el punto X se obtiene como una rotación de ángulo $\phi_x = 2\lambda$ sobre el círculo y el punto Y se obtiene como una rotación de ángulo $\phi_y = \pi + \phi_x$.

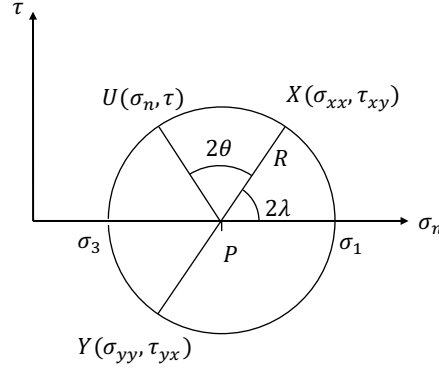


Figura A.2: *Círculo de Mohr para estado bidimensional de esfuerzos. Adaptado de R.M. Nedderman 2005.*

El empleo del círculo de Mohr tiene el problema de no resultar consistente con el hecho de que los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} son iguales en signo y magnitud, lo que gráficamente se debe a que se encuentran en cuadrantes opuestos. Por es motivo es usual que algunos textos empleen la convención:

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy} \quad , \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx} \quad \text{y} \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}.$$

Esto equivale a decir que sólo se consideran positivas aquellas componentes de corte que van en sentido antihorario (se puede verificar a partir de la regla de la mano derecha que τ_{yx} , τ_{xz} y τ_{yz} se recorren en sentido horario, de ahí la definición anterior).

Matemáticamente los esfuerzos principales corresponden a los autovalores del tensor de esfuerzo y λ al ángulo en que deben ser rotados los ejes coordenados para obtener la base (de autovectores) en que el tensor sólo posee elementos en su diagonal. Este es el clásico problema de diagonalización de una matriz.

El método de representación gráfica de Mohr puede ser extendido con facilidad a tres dimensiones. Para ilustrar esto considere el tensor de esfuerzos tridimensional que respecto a algún sistema coordenado adquiere la representación diagonal $(\sigma) = \text{Diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Si se realiza una rotación manteniendo fijo alguno de los ejes principales, por ejemplo el de σ_1 , entonces los esfuerzos obtenidos como una rotación de los ejes de σ_3 y σ_2 se encontrarán al interior de su respectivo círculo de Mohr bidimensional. Si se repite este proceso manteniendo algún otro eje fijo, se encuentra que es posible formar un total de 3 círculos de Mohr, dos de los cuales se encuentran al interior del círculo mayor formado por los esfuerzos principales mayor y menor (σ_1 y σ_3).

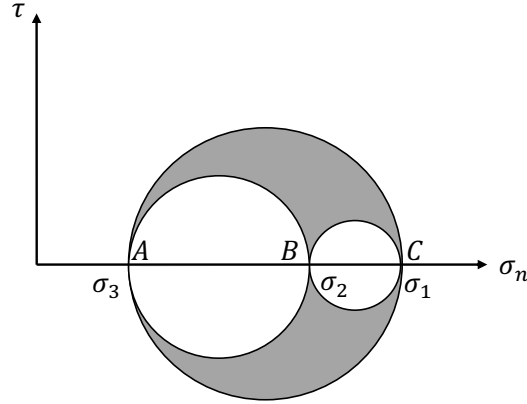


Figura A.3: *Círculo de Mohr para estado tridimensional de esfuerzos. Adaptado de R.M. Nedderman 2005.*

A.1.8. Ecuaciones de equilibrio

Recuerde el cubo a través del cual se introdujo el tensor de esfuerzo. Conforme se expuso con anterioridad, si respecto a algún sistema de referencia las fuerzas sobre cada cara son normales, en condiciones de equilibrio las fuerzas sobre caras opuestas deben ser iguales, pues de lo contrario el cubo se movería en la dirección del gradiente de dicha fuerza. Pero ¿qué ocurre en un sistema en que las fuerzas tengan componentes de corte?. Para determinar las condiciones generales que deben satisfacer las 9 componentes del tensor de esfuerzos cuando el cubo se encuentra en equilibrio, definamos por F_x , F_y y F_z a las fuerzas netas que actúan sobre el cubo a lo largo de cada eje coordenado y g_x , g_y y g_z como las fuerzas de volumen en los respectivos ejes. Consigo es claro que el equilibrio exige que:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0. \quad (\text{A.25})$$

Para escribir explícitamente las fuerzas a lo largo de cada eje se debe tener en cuenta que si las aristas del cubo tienen un largo diferencial, es de esperar que los esfuerzos sean funciones continuas y diferenciables de las coordenadas x, y, z . Luego, si la fuerza normal sobre la *cara-x* es $\sigma_{xx} dydz$ se puede aproximar la fuerza normal sobre la cara opuesta por $(\sigma_{xx} + (\partial\sigma_{xx}/\partial x)dx) dydz$. Siguiendo el mismo argumento para las componentes de corte, se demuestra que la condición de equilibrio para F_x equivale a:

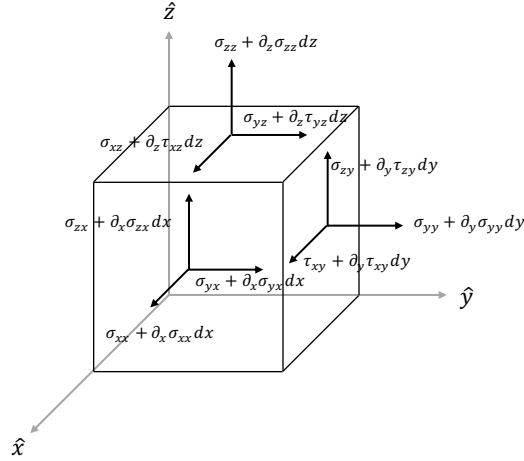


Figura A.4: Esfuerzos en cubo de aristas diferenciales. Adaptado de [R.M. Nedderman 2005](#).

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{yx} dzdx \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{zx} dxdy = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De manera similar se obtienen las condiciones de equilibrio para las fuerzas en los ejes restantes. Desarrollando las expresiones y dividiéndolas entre el volumen $dxdydz$ del cubo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

O bien, en notación por componentes:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + g_j = 0. \quad (\text{A.28})$$

La ecuación anterior es condición necesaria más no suficiente para el equilibrio, pues además se debe asegurar que el cubo no rote. Es decir, se requiere que el momento de torsión resultante de la aplicación de los esfuerzos sea nulo. Por argumentos similares a los ya entregados se puede demostrar que esta condición equivale a exigir que el tensor de esfuerzos debe ser simétrico. Así:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{y} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (\text{A.29})$$

No se entrará en mayores detalles, sin embargo es importante destacar que las fuerzas externas que causan la deformación de un sólido surgen en las condiciones de contorno de las ecuaciones de equilibrio. Dicho esto la solución al cómo se transmiten los esfuerzos al interior de un sólido aún no se encuentra proporcionada, encontrándose determinada por las características elásticas del sólido.

A.2. Tensor de Deformaciones

A.2.1. Deformación y vector desplazamiento

El efecto de aplicación de una fuerza es modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo. En el caso de sólidos rígidos una fuerza modifica su velocidad o vence su inercia para ponerlo en movimiento, en tanto que en sólidos elásticos es capaz de provocar su deformación. La rama de la física que estudia tales deformaciones se denomina teoría de la elasticidad y será el objeto central de la presente sección.

Cuando se aplican fuerzas externas a un sólido, usualmente en su superficie, su efecto se propaga en todo su volumen originando el desplazamiento de las partículas que lo constituyen. Este desplazamiento es lo que se conoce como deformación, y para pequeños desviaciones tiene la característica de originar fuerzas internas en el sólido que tienden a restituir a las partículas a su posición de equilibrio. Éstas son las tensiones internas y desaparecen cuando no hay deformación.

La deformación de un sólido se encuentra totalmente definida si para cada uno de sus elementos se conoce la diferencia entre su posición antes y después de la deformación. Sean x_i y $\bar{x}_i$ las componentes de tales posiciones, se sigue que las componentes u_i del vector desplazamiento se encuentran dadas por:

$$u_i = \bar{x}_i - x_i. \quad (\text{A.30})$$

A.2.2. Tensor de deformación

Cuando el sólido se deforma también lo hace la distancia entre cada par de puntos. Así, la distancia entre dos puntos infinitesimalmente cercanos antes y después de la deformación viene dada por:

$$dl^2 = dx_i dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{y} \quad d\bar{l}^2 = d\bar{x}_i d\bar{x}_i = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2.$$

Sin embargo, ambas cantidades deben estar relacionadas, ya que las componentes de la posición después de la deformación deben ser ciertas funciones de las componentes antes de la deformación. De este modo, se debe tener que² $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ lo que permite escribir la

²En forma explícita se tiene:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{con} \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

distancia $d\bar{l}^2$ como:

$$d\bar{l}^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k.$$

Esta última expresión puede ser reescrita convenientemente teniendo en cuenta que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j =$

$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j$ junto a $2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j$. Luego, intercambiando los subíndices i, k en el tercer término, se reescribe la distancia deformada por:

$$d\bar{l}^2 = dx_i dx_i + 2e_{ij} dx_i dx_j \quad \text{con} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (\text{A.31})$$

Las cantidades e_{ij} conforman un tensor de segundo orden denominado tensor de deformación, pues caracteriza completamente la deformación del sólido y su conocimiento permite obtener la distancia entre cada par de elementos después de la deformación.

A.2.3. Cambios longitudinales en pequeñas deformaciones

De la definición del tensor de deformaciones en (A.31) se sigue que $e_{ij} = e_{ji}$, lo que equivale a decir que el tensor de deformaciones es simétrico y al igual que el tensor de esfuerzos puede ser diagonalizado en cada punto. Luego, siempre es posible rotar el tensor para encontrar las deformaciones en los ejes principales.

En lo que sigue se recurrirá a la simetría del tensor de deformación para interpretar su significado. Con este fin se puede suponer que las componentes del tensor de deformación en un punto respecto al sistema en que es diagonal corresponden a $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ y $e_{(3)}$. De este modo se puede afirmar que la distancia entre este punto y otro infinitesimalmente cercano vendrá dada por:

$$d\bar{l}^2 = (1 + 2e_{(1)})dx_1^2 + (1 + 2e_{(2)})dx_2^2 + (1 + 2e_{(3)})dx_3^2$$

Esta expresión corresponde a una combinación lineal de términos independientes correspondientes a dilataciones o contracciones en los ejes principales, tal que $d\bar{x}_i = \sqrt{1 + 2e_{(i)}}dx_i$.

Si se tiene en cuenta que las deformaciones son muy pequeñas, entonces se puede escribir $\sqrt{1 + 2e_{(i)}} - 1 \approx e_{(i)}$, de donde se sigue que el alargamiento relativo a lo largo del i -ésimo eje principal se puede escribir como:

$$\left(\frac{d\bar{x}_i - dx_i}{dx_i} \right) = \sqrt{1 + 2e_{(i)}} - 1 \approx e_{(i)}.$$

Es decir, las deformaciones relativas en los ejes principales corresponden a los valores principales del tensor de deformación.

Finalmente, para ver cómo cambia un elemento de volumen dV es útil emplear un sistema coordinado en que las componentes del tensor de deformación son diagonales. Así, antes de la deformación $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, en tanto que después de la deformación $d\bar{V} = d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3$, o bien,

$$d\bar{V} = (1 + e_{(1)})dx_1(1 + e_{(2)})dx_2(1 + e_{(3)})dx_3 \approx dV(1 + e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)}) = dV(1 + e_{ii}),$$

donde e_{ii} corresponde a la traza del tensor e_{ij} diagonalizado. Ahora bien, la suma de los elementos principales de un tensor corresponde a un invariante por lo que el resultado anterior sugiere que siempre es posible identificar a e_{ii} como el cambio relativo de volumen:

$$\frac{d\bar{V} - dV}{dV} = e_{ii}.$$

A.2.4. Ley de Hooke

En general los sólidos de interés tienen una gran resistencia a la compresión, presentando un comportamiento elástico lineal entre esfuerzo y deformación para un amplio rango de valores en que las deformaciones son despreciables frente a las dimensiones originales. En este régimen es conveniente despreciar los términos cuadráticos o de segundo orden en el tensor de deformaciones, por lo que, para fines prácticos se considera que se encuentra dado por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.32})$$

Para relacionar el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación es necesario recurrir a argumentos termodinámicos, ya que un proceso de deformación reversible implica una acumulación de energía elástica en el sólido que luego es empleada para restituirlo a su posición original. Sin embargo, aquí no se seguirá esa línea (que posee un significado físico claro) y se atenderá a la simetría de ambos tensores con el fin de establecer una relación lineal lo suficientemente general. Es sencillo ver que a primer orden dicha relación debe ser de la forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.33})$$

Donde μ y λ son coeficientes positivos conocidos como constantes de Lamé, cuyo valor depende de las características elásticas del medio. Esta expresión puede ser reescrita convenientemente considerando la descomposición del tensor de deformación en una deformación de corte puro y una compresión hidrostática. Así, se puede escribir:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + K e_{kk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.34})$$

Aquí, el primer término representa un corte puro, por lo que el coeficiente μ se denomina módulo de rigidez, en tanto que el segundo término corresponde a una compresión hidrostática, por lo que al coeficiente $K = \lambda + 2\mu/3$ se le denomina módulo de compresión.

Para escribir la relación inversa entre ambos tensores se puede atender a (A.34), de donde se sigue que $\sigma_{kk} = 3Ku_{kk}$. Sustituyendo este resultado en (A.34) se obtiene la relación buscada:

$$e_{ij} = \frac{1}{9K}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right). \quad (\text{A.35})$$

A.2.5. Deformaciones homogéneas

Para relacionar el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación se han introducido los coeficientes de Lamé y a partir de éstos el módulo de compresibilidad y rigidez. Sin embargo, en ingeniería resultan más naturales los módulos de Young y Poisson. En un ensayo uniaxial, el módulo de Young E relaciona las deformaciones longitudinales con el esfuerzo aplicado, en tanto que módulo de Poisson ν relaciona las deformaciones transversales con las longitudinales de acuerdo a $e_{trans} = -\nu e_{long}$. En efecto, si a una probeta orientada a lo largo del eje $\hat{z}$ se aplica una fuerza por unidad de área p uniformemente distribuida en sus dos extremos, el tensor u_{ij} tendrá el mismo valor en cada punto del sólido, a la vez que σ_{ij} quedará determinado por las condiciones de contorno. Luego, la única componente no nula del tensor de esfuerzos será $\sigma_{zz} = p$. Por tanto, las componentes del tensor de deformaciones serán:

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p \quad \text{y} \quad e_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p.$$

Sin embargo, $u_{xx} = u_{yy} = -\nu u_{zz}$ y $u_{zz} = p/E$ lo que el módulo de Young y coeficiente de Poisson se encuentran determinados por:

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{13K - 2\mu}{2(3K + \mu)}. \quad (\text{A.36})$$

Como K y μ son positivos, el valor de ν se encuentra acotado entre -1 ($K = 0$) y $0,5$ ($\mu = 0$). En la práctica no se encuentran materiales con $\nu < 0$ por lo que varía entre 0 y $0,5$.

De aquí en más se utilizarán E y ν por lo que invirtiendo las fórmulas (A.36) se obtiene para K y μ :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (\text{A.37})$$

Sustituyendo estas expresiones en (A.34) y (A.35) se sigue que los tensores de esfuerzo y deformación se relacionan según:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu}\left(e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}e_{kk}\delta_{ij}\right) \quad \text{y} \quad e_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}]. \quad (\text{A.38})$$

Explícitamente estas relaciones son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz})] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz})] \\
 \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy})] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu} e_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu} e_{yz}
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

y

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
 e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
 e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}, \quad e_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz}, \quad e_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz}.
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

A.2.6. Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos

La ecuación de equilibrio corresponde a la encontrada en (B.108) para el tensor de esfuerzos:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0.$$

Para cuerpos isótropos, considerando el tensor de tensiones de acuerdo a (A.38) se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}.$$

Luego, sustituyendo las componentes e_{ij} del tensor de deformaciones de acuerdo a (A.32) se obtiene la ecuación de equilibrio en términos del vector desplazamiento:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho g_i = 0.$$

Identificando $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ y $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \nabla^2 \mathbf{u}$ la ecuación anterior puede ser reescrita en forma vectorial por:

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{g} \frac{2(1+\nu)}{E} \tag{A.41}$$

Cuando la deformación de un cuerpo no se debe a fuerzas de volumen, sino que sólo a fuerzas aplicadas sobre la superficie, la ecuación de equilibrio se reduce a,

$$(1-2\nu) \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{A.42}$$

donde las fuerzas externas sólo aparecen en la solución como condición de borde.

A.2.7. Ecuaciones de compatibilidad

Si se conocen las funciones continuas y derivables de los desplazamientos es posible obtener las deformaciones en un punto. Sin embargo, si lo que se conoce es el campo de deformaciones, en general no es posible conocer los desplazamientos a excepción de que las componentes del tensor de deformación cumplan una serie de relaciones. Estas relaciones se denominan ecuaciones de compatibilidad y permiten, de cumplirse, asegurar la existencia de un campo de desplazamiento compatible con las deformaciones. Para las componentes del tensor de esfuerzo estas ecuaciones son:

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} \quad (\text{A.43})$$

Para comprobar que estas ecuaciones efectivamente se cumplen basta con reemplazar las componentes del tensor de deformación de acuerdo a la definición entregada en (A.32).

A.2.8. Problemas bidimensionales de deformación plana

Muchas situaciones de interés en teoría de la elasticidad se reducen a problemas bidimensionales, en que las deformaciones o esfuerzos en la otra dimensión se ven suprimidos. Usualmente estos problemas se clasifican como problemas de deformación o tensión plana.

Los problemas de deformación plana son aquellos en que la longitud del sólido en una de las dimensiones, por ejemplo $\hat{z}$, se considera infinita y la carga es tal que resulta perpendicular y homogénea a lo largo de su eje. En estas circunstancias cualquier plano perpendicular al eje $\hat{z}$ es de simetría, lo que implica que para cualquier punto en ese plano no hayan deformaciones perpendiculares y que las deformaciones sólo dependen de los puntos del plano:

$$u_x = u_x(x, y) \quad , \quad u_y = u_y(x, y) \quad \text{y} \quad u_z = 0.$$

Adicionalmente, se sigue para los esfuerzos:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Consigo las ecuaciones constitutivas toman la forma:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1 + \nu)\sigma_{yy}] \quad , \quad e_{yy} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1 + \nu)\sigma_{xx}] \quad \text{y} \quad e_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \sigma_{xy}.$$

En tanto que las ecuaciones de compatibilidad se reducen a:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Combinando estas expresiones junto a la ecuación de equilibrio se obtiene con un poco de álgebra:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) \quad (\text{A.44})$$

A.2.9. Problemas bidimensionales de tensión plana

Los problemas de tensión plana son aquellos en que una de las dimensiones, por ejemplo $\hat{z}$, posee una longitud mucho menor a las otras dos (como una placa) y las cargas son aplicadas de manera simetría respecto a la media del espesor del sólido en dicho eje. En estas condiciones la simplificación es suponer que los esfuerzos en el eje $\hat{z}$ son nulos:

$$\sigma_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0.$$

De aquí, resulta inmediato que $e_{xy} = 0$ y consigo las ecuaciones constitutivas toman la forma:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \quad , \quad e_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \quad \text{y} \quad e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy}).$$

Claro está, la ecuación de compatibilidad es igual al problema de deformación plana, en tanto que se puede demostrar que la ecuación de equilibrio se reduce a:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) \quad (\text{A.45})$$

A.3. Fuerzas de Contacto

A.3.1. Solución de Boussinesq

La obtención de las fuerzas de contacto se realiza utilizando el resultado de Boussinesq al problema de un semi-espacio infinito sujeto a la acción de una carga puntual, bajo el supuesto de que las superficies de contacto son localmente planas. La solución del vector desplazamiento evaluado en la superficie libre ($z = 0$) es:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[-\frac{(1 - 2\nu)x}{r^2} F_z + \frac{2(1 - \nu)}{r} F_x + \frac{2\nu x}{r^3} (xF_x + yF_y) \right] \\ u_y &= \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[-\frac{(1 - 2\nu)y}{r^2} F_z + \frac{2(1 - \nu)}{r} F_y + \frac{2\nu y}{r^3} (xF_x + yF_y) \right] \\ u_z &= \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1 - \nu)}{r} F_z + \frac{(1 - 2\nu)}{r^2} (xF_x + yF_y) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

A.3.2. Fuerza de contacto normal

Hertz utilizó estas ecuaciones para estudiar el caso de dos esferas de radios R y R' sujetas a una carga normal F_n . Para deducir su resultado, se denotarán a z y z' como las posiciones de la superficies de contacto sin deformar (medidos hacia el interior de cada esfera) de modo que, cerca de la superficie de contacto, $z = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx r^2/2R$ y $z' = R' - \sqrt{R'^2 - r'^2} \approx r'^2/2R'$ de donde se sigue que:

$$u_z + u'_z = h - z - z' = h - \frac{R' + Rr^2}{RR'} \frac{r^2}{2}, \quad (\text{A.47})$$

Con h la indentación entre ambas esferas. Ahora bien, a partir de (A.46) se sigue que en el caso de cargas distribuidas, las deformaciones de cada esfera son:

$$u_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int \frac{dx' dy' P_z(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad \text{y} \quad u'_z = \frac{1 - \nu'^2}{\pi E'} \int \frac{dx' dy' P_z(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}.$$

Por simetría podemos suponer que el área de contacto corresponde a un disco de radio a , de modo que para integrar estas ecuaciones se propone el ansatz $P_z(x', y') = (3F_n/2\pi a^2) \cdot \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/a)^2}$ (constante obtenida a través de la condición de normalización $F_n = \int dx' dy' P_z$), obteniendo (desarrollo integral en sección siguiente):

$$\begin{aligned} u_z + u'_z &= \frac{3F_n}{2E^* \pi^2 a^2} \int dx' dy' \frac{\sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/a)^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad \text{con} \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu'^2}{E'} \\ &= \frac{3F_n}{2E^* \pi^2 a^3} \left[\frac{a^2 \pi^2}{2} - \frac{r^2 \pi^2}{4} \right] = \frac{3F_n}{4E^* a} - \frac{3F_n}{4E^* a^3} \frac{r^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Igualando (A.47) y (A.48) se identifican los siguientes valores para el radio a del área de contacto y la indentación h entre ambas esferas:

$$a = \left(\frac{4F_n}{3E^*} \right)^{1/3} \left(\frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad h = \left(\frac{4F_n}{3E^*} \right)^{2/3} \left(\frac{R + R'}{RR'} \right)^{1/3}. \quad (\text{A.49})$$

Invirtiendo la última expresión se sigue que la fuerza de contacto normal F_n en función de la indentación h es:

$$F_n = \frac{3E^*}{4} \left(\frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/2} h^{3/2} \quad (\text{A.50})$$

Este resultado, conocido como ley de contacto de Hertz, también se puede expresar en términos de la complianza normal $k_n = \partial F_n / \partial h$ en la forma:

$$F_n = \frac{2}{3} k_n h \quad \text{con} \quad k_n = \frac{\partial F_n}{\partial h} = \frac{9E^*}{8} \left(\frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/2} h^{1/2} \quad (\text{A.51})$$

A.3.3. Fuerza de contacto tangencial

Mindlin y Cattaneo estudiaron el caso de una fuerza de contacto tangencial F_s entre ambas esferas. Para llegar a su resultado, se asume, sin pérdida de generalidad, que la fuerza tangencial se aplica en el eje x . Así, la deformación relativa entre ambas esferas es:

$$u_x - u'_x = s \quad (\text{A.52})$$

Donde s es el desplazamiento relativo, cuyo valor se asume constante. Ahora bien, a partir de (A.46) se sigue que en el caso de cargas distribuidas, las deformaciones en cada esfera son:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(1+\nu)}{E\pi} \left[(1-\nu) \int \frac{dx'dy'\tau_{zx}(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \nu \int \frac{dx'dy'\tau_{zx}(x',y')}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^{3/2}} \right] y \\ u'_x &= -\frac{(1+\nu')}{E'\pi} \left[(1-\nu') \int \frac{dx'dy'\tau_{zx}(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \nu' \int \frac{dx'dy'\tau_{zx}(x',y')}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Si la carga normal ya se encuentra aplicada, el área de contacto continuará siendo un disco de radio a , de modo que, para satisfacer (A.52) se propone el ansatz $\tau_{zx}(x, y) = (F_s/2\pi a^2) (1 - (x'/a)^2 - (y'/a)^2)^{-1/2}$ y consigo (desarrollo integrales en sección siguiente):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(1+\nu)F_s}{2E\pi^2 a} \left[(1-\nu) \int \frac{dx'dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{-1/2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \nu \int \frac{dx'dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{-1/2} (x-x')^2}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{(1+\nu)F_s}{2E\pi^2 a} \left[(1-\nu)\pi^2 + \nu \frac{\pi^2}{2} \right] = \frac{(1+\nu)(2-\nu)F_s}{4Ea} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Reemplazando (A.54) y (A.53) en (A.46) se sigue que la fuerza de contacto tangencial en función del desplazamiento relativo entre esferas es:

$$\Delta F_s = 8G^* \left(\frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/2} h^{1/2} \Delta s \quad \text{con} \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2(1+\nu)(2-\nu)}{E} + \frac{2(1+\nu')(2-\nu')}{E'} \quad (\text{A.55})$$

Esta expresión se escribe en forma incremental, puesto que para su deducción se asumió que F_n y h permanecen constantes. Este resultado, conocido como solución sin deslizamiento de Mindlin, también se puede expresar en términos de la complianza tangencial $k_s = \partial F_s / \partial s$ en la forma incremental:

$$\Delta F_s = k_s \Delta s \quad \text{con} \quad k_s = \frac{\partial F_t}{\partial s} = 8G^* \left(\frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/2} h^{1/2} \quad (\text{A.56})$$

El problema de esta solución reside en que el esfuerzo de corte se indetermina en los bordes del área de contacto, por lo que necesariamente debe existir una región con deslizamiento entre ambas esferas. Para remediar esta situación, se separa el área de contacto en regiones sin y con deslizamiento delimitadas por un radio $c \leq a$. Luego, si se propone el ansatz:

$$\tau_x(x', y') = \begin{cases} \frac{3\mu F_n}{2\pi a^3} (a^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2} - \mu \frac{3\mu F_n}{2\pi a^3} (c^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2} & \text{si } r' \leq c \\ \frac{3\mu F_n}{2\pi a^3} (a^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2} & \text{si } c < r' \leq a \end{cases}$$

Se sigue que el radio de la zona de no deslizamiento se relaciona con las fuerzas de contacto según:

$$F_s = \int dx' dy' \tau_x(x', y') = \mu F_n \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right] \rightarrow c = a \left(1 - \frac{F_s}{\mu F_n} \right)^{1/3} \quad (\text{A.57})$$

Consigo, la deformación horizontal será (desarrollo integrales en sección siguiente):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3(1+\nu)\mu F_n}{2E\pi^2 a^3} \left[(1-\nu) \int \frac{dx' dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \nu \int \frac{dx' dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2} (x-x')^2}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^{3/2}} \right] \\ &\quad - \frac{3(1+\nu)\mu F_n}{2E\pi^2 a^3} \left[(1-\nu) \int \frac{dx' dy' (c^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \nu \int \frac{dx' dy' (c^2 - x'^2 - y'^2)^{1/2} (x-x')^2}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{3(1+\nu)\mu F_n}{2E\pi^2 a^3} \left[(1-\nu) \left(\frac{a^2 \pi^2}{2} - \frac{c^2 \pi^2}{2} \right) + \nu \left(\frac{a^2 \pi^2}{4} - \frac{c^2 \pi^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{3(1+\nu)(2-\nu)\mu F_n}{8Ea} \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right] = \frac{3(1+\nu)(2-\nu)\mu F_n}{8Ea} \left[1 - \left(1 - \frac{F_s}{\mu F_n} \right)^{2/3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Sustituyendo (A.58) y (A.53) en (A.52) se sigue que la fuerza de contacto tangencial en función del desplazamiento relativo entre esferas para el caso con deslizamiento se puede escribir en la forma:

$$\Delta F_s = k_s \Delta s \quad \text{con} \quad k_s = \frac{1}{\partial s / \partial F_s} = 8G^* \left(\frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/2} h^{1/2} \left(1 - \frac{F_s}{\mu F_n} \right)^{-1/3} \quad (\text{A.59})$$

Este resultado (conocido como solución con deslizamiento de Mindlin) da cuenta del comportamiento histerético de la fuerza tangencial, ya que su valor dependerá de la trayectoria de esfuerzos, y no únicamente del valor instantáneo de la deformación tangencial. Cuando $F_s = \mu F_n$ la fuerza tangencial alcanzará su valor límite, y de acuerdo con (A.57) habrá deslizamiento en toda el área de contacto.

A.3.4. Integrales fuerzas de contacto

Integral fuerza de contacto normal:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{dx' dy' \sqrt{a^2 - x'^2 - y'^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-r \cos \varphi + \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} ds \sqrt{a^2 - (r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi)} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r \cos \varphi}^b du \sqrt{b^2 - u^2} \quad \text{con} \quad b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[b^2 \sin^{-1} \left(\frac{u}{b} \right) + u \sqrt{b^2 - u^2} \right] \Big|_{r \cos \varphi}^b \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[(a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right) - r \cos \varphi \sqrt{a^2 - r^2} \right] \\
 &= \frac{a^2 \pi^2}{2} - \frac{r^2 \pi^2}{4}
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

Integrales fuerza de contacto tangencial, sin deslizamiento:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{dx' dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{-1/2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r \cos \varphi}^b \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} \quad \text{con} \quad b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right] \\
 &= \pi^2
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \frac{dx' dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{-1/2} (x - x')^2}{((x - x')^2 + (y - y')^2)^{3/2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_{r \cos \varphi}^b \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} \quad \text{con} \quad b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos^2 \varphi \frac{\pi}{2} - \cos^2 \varphi \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right] \\
 &= \frac{\pi^2}{2}
 \end{aligned} \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{dx' dy' (a^2 - x'^2 - y'^2)^{-1/2} (x - x')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_{r \cos \varphi}^b \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} \quad \text{con } b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos \varphi \frac{\pi}{2} - \cos \varphi \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right] \\
&= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \left[4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{(a/r)^2 - \sin^2 \varphi} \right] \\
&= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \left[\frac{2a\pi}{\sqrt{a^2 - r^2}} - 2\pi \right] \\
&= -\pi a \frac{2[1 - \sqrt{1 - (r/a)^2}]}{r}
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Integrales fuerza de contacto tangencial, con deslizamiento:

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int \frac{dx' dy' \sqrt{a^2 - x'^2 - y'^2} (x - x')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_{r \cos \varphi}^b du \sqrt{b^2 - u^2} \quad \text{con } b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \left[b^2 \sin^{-1} \left(\frac{u}{b} \right) + u \sqrt{b^2 - u^2} \right] \Big|_{r \cos \varphi}^b \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \left[(a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right) - r \cos \varphi \sqrt{a^2 - r^2} \right] \\
&= \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{2r} \left[-a^2 \left(4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{(a/r)^2 - \sin^2 \varphi} \right) + r^2 \left(\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin^4 \varphi}{(a/r)^2 - \sin^2 \varphi} \right) - r^2 \pi \right] \\
&= \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{2r} \left[-a^2 \left(\frac{2a\pi}{\sqrt{a^2 - r^2}} - 2\pi \right) + r^2 \left(\frac{2}{3r^2 \sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{2a^2\pi + r^2\pi}{3r^2} \right) - r^2 \pi \right] \\
&= \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \pi}{2r} \left[-\frac{2a^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 2a^2 + \frac{2}{3} \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{2a^2 + r^2}{3} - r^2 \right] \\
&= -\pi a^3 \frac{2[1 - (1 - (r/a)^2)^{3/2}]}{3r}
\end{aligned} \tag{A.64}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int \frac{dx' dy' \sqrt{a^2 - x'^2 - y'^2} (x - x')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_{r \cos \varphi}^b du \sqrt{b^2 - u^2} \quad \text{con} \quad b^2 = a^2 - r^2 \sin^2 \varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \left[b^2 \sin^{-1} \left(\frac{u}{b} \right) + u \sqrt{b^2 - u^2} \right] \Big|_{r \cos \varphi}^b \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \left[(a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right) - r \cos \varphi \sqrt{a^2 - r^2} \right] \\
&= \frac{a^2 \pi^2}{4} - \frac{r^2 \pi^2}{16}
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Apéndice B

Elementos de cálculo estocástico

Las siguientes secciones se encuentran elaboradas a partir de los trabajos de [Arovas 2015](#), [Gardiner 2004](#) y [Kolmogorov 1960](#).

B.1. Conceptos Básicos en Teoría de Probabilidades

B.1.1. Axiomas

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios y estocásticos. Los fenómenos aleatorios son aquellos cuyo resultado no es previsible, de modo que dos experimentos realizados bajo las mismas condiciones pueden originar diferentes resultados dentro de un conjunto de alternativas. Esta dinámica azarosa puede ser intrínseca, como en los procesos estudiados por la mecánica cuántica, o bien se pueden originar por causas complejas dentro de sistemas deterministas, como ocurre en el lanzamiento de una moneda. En cuanto a los fenómenos estocásticos, son aquellos cuyo comportamiento es intrínsecamente no determinista, en el sentido de que su resultado es proporcionado por elementos deterministas o previsibles y por elementos aleatorios.

La teoría de probabilidades se ocupa de cuantificar cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, permitiendo identificar cual de ellos es más probable. Los fenómenos reales estudiados mediante distribuciones de probabilidad corresponden a sistemas complejos en que se desconocen, a priori, gran parte de los parámetros que intervienen, requiriendo de la estadística para determinar dichos parámetros.

El entorno matemático en que se desarrolla la teoría de probabilidades es la teoría de conjuntos y la teoría de la medida. Los conjuntos son una colección bien definida de elementos. Habitualmente los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, en tanto que sus elementos con letras minúsculas. Se dice que un elemento ω pertenece al conjunto Ω mediante el símbolo $\in$. Para la noción contraria se utiliza $\notin$. Cuando todos los elementos de un conjunto A pertenecen también a B se escribe $A \subseteq B$. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, se dice que A es un subconjunto propio de B y se denota $A \subset B$. Se dice que $A \neq B$ si para algún $a \in A$ se

cumple $a \notin B$. La unión de dos conjuntos A y B se denota $A \cup B$, su intersección $A \cap B$ y su producto cartesiano $A \times B$; este ultimo es el conjunto de todos los elementos ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

En teoría de probabilidades cada elemento ω corresponde a un suceso, denotando por Ω al conjunto de todos los sucesos y por $\emptyset$ al conjunto sin sucesos. Los axiomas básicos de la teoría de probabilidades son:

- i A cada conjunto A corresponde un número real positivo $P(A) \leq 1$ conocido como la probabilidad de A ;
- ii $P(\Omega) = 1$;
- iii Si $\{A_i\}$ es una colección de conjuntos sin elementos en común, entonces:

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

A partir de estos axiomas se coligen otras proposiciones de la probabilidad. Por ejemplo, si A^c denota al complemento de A , compuesto por los sucesos que no se encuentran en A , entonces $A \cup A^c = \Omega$ de modo que por el segundo y tercer axioma $P(A^c) = 1 - P(A)$. De manera similar se puede demostrar que:

- 1 $P(\emptyset) = 0$;
- 2 Para cualquier suceso $P(A) \leq 1$;
- 3 $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- 4 Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$;
- 5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

La interpretación de $P(A)$ es que si los sucesos ω se escogen de Ω al azar, entonces la frecuencia relativa de $\omega \in A$ se aproxima a $P(A)$ ya que el número de ensayos tiende al infinito.

B.1.2. Probabilidad conjunta y condicional e independencia de sucesos

El concepto $P(A \cap B)$, con $A \cap B$ un conjunto no vacío, corresponde a la probabilidad de que un suceso ω se encuentre en los conjuntos A y B a la vez, o de forma alternativa, que los eventos $\omega \in A$ y $\omega \in B$ ocurran al mismo tiempo. Así:

$$P(A \cap B) = P(\omega \in A \text{ y } \omega \in B) = P(B \cap A), \quad (\text{B.1})$$

se denomina probabilidad conjunta.

La probabilidad condicional denotada por $P(B|A)$ es la probabilidad de que ocurra un suceso B sabiendo que ocurrió un suceso A y se lee “probabilidad de B dado A ”. Las probabilidades conjunta y condicional se relacionan según:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A), \quad (\text{B.2})$$

donde se ha empleado la identidad $P(A \cap B) = P(B \cap A)$. Así:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (\text{B.3})$$

resultado conocido como regla o teorema de Bayes. La forma extendida de este teorema se consigue al dividir el espacio de sucesos en los subconjuntos A_i . Así:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i), \quad (\text{B.4})$$

de donde se sigue que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}. \quad (\text{B.5})$$

Las cantidades $P(A_i)$ también se conocen como distribución a priori. Al modelar fenómenos reales es necesario contar con información precisa para determinar las $P(A_i)$, de lo contrario el teorema de Bayes origina resultados incorrectos al calcular $P(B)$ o $P(A_i|B)$. Una forma de aproximar las $P(A_i)$ es obtenerlas a partir de un principio de máxima entropía, discutido en la siguiente sección.

En estadística clásica (usualmente denominada frecuentista) sólo se toma como fuente de información las muestras obtenidas de la repetición de un experimento. Por el contrario, la estadística Bayesiana incorpora la información previa o externa en relación al fenómeno que se busca modelar. Con este fin, hace uso de la probabilidad condicional, permitiendo incorporar cambios del grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que se adquiere nueva información.

La probabilidad condicional permite especificar de manera probabilística la independencia de sucesos. Se dice que dos conjuntos A y B de eventos representan conjuntos independientes de eventos si la especificación de un evento en B no tiene influencia en la probabilidad del mismo evento en A . Así, la probabilidad condicional $P(A|B)$ es independiente de B , permitiendo concluir que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (\text{B.6})$$

B.1.3. Variables aleatorias, promedios y distribuciones

Sea $\mathcal{X}$ un espacio abstracto de probabilidad cuyos elementos (sucesos) se denotan por x , se puede introducir la variable aleatoria $f(x)$ como la función de x que asigna un determinado valor a cada x . En particular, se tiene la función identidad $X(x) = x$.

Utilizar variables aleatorias es ventajoso ya que en fenómenos reales los sucesos son difíciles de describir, e incluso de conocer. Por ejemplo, en la descripción de la posición de una molécula de agua en un líquido, cada ω debería especificar las coordenadas, momentos y orientaciones en el elemento de volumen del líquido; pero tal descripción es difícil e innecesaria. Sin embargo, con el concepto de variable aleatoria se pueden introducir funciones de estas variables que permitan calcular valores promedios y distribuciones para éstas. Además, con la definición de ecuaciones diferenciales estocásticas se puede describir la evolución temporal de los promedios de una variable aleatoria de manera similar a como se hace en sistemas deterministas.

La esperanza o valor medio de la variable aleatoria $f(x)$ se denota por $\mathbb{E}f$ o $\langle f \rangle$, definiéndose para conjuntos discretos por:

$$\mathbb{E}f = \langle f \rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)P(x), \quad (\text{B.7})$$

donde $P(x)$ corresponde a la probabilidad del suceso x en el conjunto y se encuentra adecuadamente normalizada, esto es:

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(x) = 1. \quad (\text{B.8})$$

Para conjuntos continuos los axiomas permiten definir una densidad de probabilidad $p(x)$ para el conjunto $A = \{x \leq x' < x + dx\}$ tal que $p(x)dx = P(A)$. Así:

$$\mathbb{E}f = \langle f \rangle = \int_{x \in \mathcal{X}} dx f(x)p(x), \quad (\text{B.9})$$

con $p(x)$ normalizada según:

$$\int_{x \in \mathcal{X}} dx p(x) = 1. \quad (\text{B.10})$$

De forma análoga, cuando se tienen dos variables aleatorias $x \in \mathcal{X}$ y $y \in \mathcal{Y}$, el valor medio de $f(x, y)$ es:

$$\mathbb{E}f(x, y) = \langle f(x, y) \rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y)p(x, y) \quad (\text{B.11})$$

con la obvia generalización a conjuntos continuos y a funciones de más variables.

Cuando se dispone de n variables aleatorias continuas x_i , la densidad de probabilidad asociada a las n variables como un todo se denomina densidad de probabilidad conjunta, y se denota por $p(x_1, \dots, x_n)$; como lo es $p(x, y)$. Sobre dicha densidad se define la densidad marginal $p_i(x_i)$ de la variable x_i como la densidad de probabilidad de x_i sola, obteniéndose como la integral sobre todos los valores de las demás variables:

$$p_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{i-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{i+1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (\text{B.12})$$

Se dice que las variables aleatorias x_i de densidad conjunta $p(x_1, \dots, x_n)$ son variables independientes si y sólo si su densidad conjunta es igual al producto de las densidades marginales

de cada variable.

Se puede demostrar, atendiendo a las propiedades de la delta de Dirac, que una función $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de n variables aleatorias x_i posee una función distribución $p(\phi)$ dada por:

$$\begin{aligned} p(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n p(x_1, \dots, x_n) \delta(\phi(x_1, \dots, x_n) - \phi) \\ &= \langle \delta(\phi(x_1, \dots, x_n) - \phi) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.1.4. Momentos y cumulantes de una distribución

Los momentos de una distribución corresponden a la esperanza de las potencias de la variable aleatoria. Estos poseen la propiedad de que dos distribuciones son iguales si todos sus momentos lo son.

Si se considera el caso general de una distribución $p(x_1, \dots, x_n) = p(\vec{x})$ y se define su transformada de Fourier multivariable

$$\hat{p}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x p(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (\text{B.14})$$

con la relación inversa

$$\hat{p}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \hat{p}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (\text{B.15})$$

es sencillo demostrar que empleando m veces el operador $i\partial/\partial k_i$ se obtiene un factor x_i^m al interior de la integral, de modo que evaluando posteriormente en $k_i = 0$ para todo i , se obtiene el momento $\langle x_i^m \rangle$. De forma general se deduce que:

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial k_1} \right)^{m_1} \dots \left(i \frac{\partial}{\partial k_n} \right)^{m_n} \hat{p}(\vec{k}) \right] \Big|_{\vec{k}=0} = \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle. \quad (\text{B.16})$$

Empleando una expansión en series de Taylor se puede obtener $\hat{p}(\vec{k})$ a partir de sus momentos, de acuerdo a:

$$\hat{p}(\vec{k}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(-ik_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(-ik_n)^{m_n}}{m_n!} \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle. \quad (\text{B.17})$$

La función $\hat{p}(\vec{k})$ se conoce como función característica, en tanto que $\hat{p}(\vec{k})$ se conoce como la función generadora de momentos; a partir de aquella los momentos se obtienen aplicando sucesivamente el operador $\partial/\partial k_i$.

Se definen además los cumulantes $\langle \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle \rangle$ a través de la expansión de Taylor de $\ln \hat{p}(\vec{k})$:

$$\ln \hat{p}(\vec{k}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(-ik_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(-ik_n)^{m_n}}{m_n!} \langle \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle \rangle. \quad (\text{B.18})$$

No existe una fórmula general para los cumulantes. Sin embargo, los primero tres de ellos corresponden a los primeros tres momentos centrales de una distribución. Se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\langle\langle x_i \rangle\rangle &= \langle x_i \rangle \\ \langle\langle x_i x_j \rangle\rangle &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \\ \langle\langle x_i x_j x_k \rangle\rangle &= \langle x_i x_j x_k \rangle - \langle x_i x_j \rangle \langle x_k \rangle - \langle x_j x_k \rangle \langle x_i \rangle - \langle x_k x_i \rangle \langle x_j \rangle + 2\langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \langle x_k \rangle.\end{aligned}\tag{B.19}$$

B.1.5. Teorema del límite central

El teorema del límite central indica que, si X_n es la suma de n variables aleatorias independientes x_i de media μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$, entonces la función de distribución de X_n se comporta como una distribución normal con media y varianza dados respectivamente por:

$$\langle X_n \rangle = n\mu \quad y \quad \langle X_n^2 \rangle - \langle X_n \rangle^2 = n\sigma^2.\tag{B.20}$$

Para demostrar este resultado se debe tener en cuenta que $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$ de modo que atendiendo a (B.13) se sigue que la función de distribución $p_n(X_n)$ de X_n corresponde a:

$$p_n(X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n p_1(x_1) \dots p_1(x_n) \delta(x_1 + \dots + x_n - X_n),\tag{B.21}$$

donde se ha empleado la propiedad de independencia de las variables. Además, se debe notar que la distribución $p_n(X_n)$ corresponde a la convolución de las distribuciones de las variables individuales $p_1(X_1)$, por lo que resulta conveniente tomar la transformada de Fourier de esta última expresión:

$$\begin{aligned}\hat{p}_n(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_n p_n(X_n) e^{-ikX_n} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n p_1(x_1) \dots p_1(x_n) \delta(x_1 + \dots + x_n - X_n) e^{-ikX_n} \\ &= [\hat{p}_1(k)]^n.\end{aligned}\tag{B.22}$$

Para escribir la última línea se tiene en cuenta que la transformada de Fourier de la convolución es el producto de las transformadas de Fourier individuales. Además, se ha definido:

$$\hat{p}_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p_1(x) e^{-ikx}.\tag{B.23}$$

Luego, atendiendo a (B.18) y (B.19) es sencillo demostrar que

$$\ln \hat{p}_1(k) = -i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + \frac{1}{6}\gamma^3 k^3 + \dots,\tag{B.24}$$

con

$$\begin{aligned}\mu &= \langle x \rangle \\ \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ \gamma^3 &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3,\end{aligned}\tag{B.25}$$

de donde se sigue que:

$$\hat{p}_n(k) = e^{-in\mu k} e^{-n\sigma^2 k^2/2} e^{in\gamma^3 k^3/6\ldots} \quad (\text{B.26})$$

Finalmente, empleando la transformada inversa y expandiendo $e^{in\gamma^3 k^3/6\ldots}$ en series de potencia en k se tiene:

$$\begin{aligned} p_n(X_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(X_n - n\mu)} e^{-n\sigma^2 k^2/2} \left\{ 1 + \frac{1}{6} in\gamma^3 k^3 + \ldots \right\} \\ &= \left(1 - \frac{\gamma^3}{6} n \frac{\partial^3}{\partial X_n^3} + \ldots \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(X_n - n\mu)^2/2n\sigma^2} \\ &= \left(1 - \frac{\gamma^3}{6} n^{-1/2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + \ldots \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\xi^2/2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Para escribir la última línea se definió $\xi = (X_n - n\mu)/n^{1/2}$, de modo que $\partial_{X_n} = n^{-1/2}\partial_\xi$. Así, a excepción del número uno, los términos entre paréntesis tienden a cero en el límite $n \rightarrow \infty$ y la distribución de X_n es una normal de media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

B.1.6. Caminante aleatorio unidimensional

Considere un bola que cae desde una abertura en una cascada de n niveles consecutivos de la cual se desea conocer su posición cuando llega al i -ésimo nivel. Es claro que la evolución temporal del movimiento de la bola se encuentra gobernado por las leyes de la mecánica. Sin embargo, su trayectoria es sensible a las condiciones iniciales, e incluso a los complejos efectos que su propio movimiento pueda originar. Por este motivo, es conveniente tratar el problema de forma estadística. Para ello, se puede suponer que la bola se mueve hacia la derecha al revotar en cada nivel con igual probabilidad p , y hacia la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$. Si no hay sesgo en el sistema se tendrá $p = q = 1/2$. Así, la posición horizontal de la bola tras n pasos puede ser escrita como:

$$X_n = \sum_{j=1}^n x_j, \quad (\text{B.28})$$

con $x_j = +1$ si la bola se mueve hacia la derecha en el nivel j o $x_j = -1$ si se mueve hacia la izquierda. De este modo, para cada nivel la probabilidad de estos dos movimientos se encuentra dada por:

$$P(x) = p\delta_{x,+1} + q\delta_{x,-1}, \quad (\text{B.29})$$

donde $\delta_{l,m}$ corresponde a la delta de Kronecker, definida como $+1$ si $l = m$ y 0 si $l \neq m$. De este modo, la distribución conjunta de todos los pasos de la bola es:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n P(x_j). \quad (\text{B.30})$$

Luego, el promedio de la posición horizontal de la bola se encuentra dado por:

$$\langle X_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = n \langle x \rangle = n \sum_{x=\pm 1} x P(x) = n(p - q), \quad (\text{B.31})$$

en tanto que el promedio de X_n^2 corresponde a:

$$\langle X_n^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i x_j \rangle = n(n-1)(p-q)^2 + n = n^2(p-q)^2 + 4npq, \quad (\text{B.32})$$

donde se ha descompuesto el sumatorio en los coeficientes con $i \neq j$ e $i = j$ y se ha empleado la relación:

$$\langle x_i x_j \rangle = \delta_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})(p-q)^2. \quad (\text{B.33})$$

De (B.31) y (B.32) se sigue que la varianza de X_n es:

$$\text{Var}(X_n) = \langle X_n^2 \rangle - \langle X_n \rangle^2 = 4npq. \quad (\text{B.34})$$

A partir de este resultado se concluye que la desviación media cuadrática, $\Delta X_{rms} = \sqrt{\text{Var}(X_n)}$ es proporcional a $n^{1/2}$, a diferencia del valor medio de X_n que es proporcional a n . Este resultado es consecuencia del teorema del límite central.

Para encontrar la función de distribución de X_n basta notar que la probabilidad de que la bola se mueva hacia la derecha en cada descenso se comporta como un ensayo de Bernoulli independiente. Así:

$$P(X_n) = \binom{n}{n_r} p^{n_r} q^{n_l}, \quad (\text{B.35})$$

con $n_{r/l}$ el número de pasos a la derecha/izquierda, tal que $n = n_r + n_l$ y $X_n = n_r - n_l$ de donde se sigue que $n \pm X_n = 2n_{r/l}$, o bien $n_{r/l} = (n \pm X_n)/2$. Sustituyendo este último resultado en (B.35) se obtiene lo buscado:

$$P(X_n) = \frac{n!}{\left(\frac{n+X_n}{2}\right)! \left(\frac{n-X_n}{2}\right)!} p^{(n+X_n)/2} q^{(n-X_n)/2}. \quad (\text{B.36})$$

Finalmente, se demostrará que en el límite de grandes pasos $n \rightarrow \infty$ la distribución $P(X_n)$ se asemeja a una normal. Con este objetivo resulta conveniente definir $x = X_n/n$ y evaluar $\ln P(X_n)$ utilizando la expansión de Stirling:

$$\ln n! = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n). \quad (\text{B.37})$$

Siguiendo este procedimiento se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln P(X_n) &\approx n \ln n - n - \frac{1}{2}n(1+x) \ln \left[\frac{1}{2}n(1+x) \right] + \frac{1}{2}n(1+x) \\ &\quad - \frac{1}{2}n(1-x) \ln \left[\frac{1}{2}n(1-x) \right] + \frac{1}{2}n(1-x) + \frac{1}{2}n(1+x) \ln p + \frac{1}{2}n(1-x) \ln q \\ &= -n \left[\left(\frac{1+x}{2} \right) \ln \left(\frac{1+x}{2} \right) + \left(\frac{1-x}{2} \right) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] \\ &\quad + n \left[\left(\frac{1+x}{2} \right) \ln p + \left(\frac{1-x}{2} \right) \ln q \right] \\ &= -nf(x) + \mathcal{O}(\ln n). \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

A partir de (B.38) es sencillo ver que para grandes valores de n se cumple:

$$P(X_n) = \mathcal{C}e^{-nf(x)}, \quad (\text{B.39})$$

con $\mathcal{C}$ una constante de normalización. Dado que n es grande, la función de $P(X_n)$ es dominada por el mínimo de $f(x)$ en que la probabilidad se ve maximizada. Para encontrar el mínimo de $f(x)$ se busca $f'(x) = 0$, de acuerdo con:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{1+x}{1-x} \right). \quad (\text{B.40})$$

Haciendo $f'(x) = 0$ se sigue que $(1+x)/(1-x) = p/q$, por lo que el mínimo de $f(x)$ es $\langle x \rangle = p - q$. Luego, teniendo en cuenta que

$$f''(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\text{B.41})$$

y expandiendo $f(x)$ hasta un segundo orden en series de Taylor entorno a $\langle x \rangle$ es sencillo demostrar que $P(X_n)$ es una normal de media $n(p - q)$ y varianza $4npq$:

$$P(X_n) \approx \mathcal{C} \exp \left[-n \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{8pq} \right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi npq}} \exp \left[-\frac{(X_n - \langle X_n \rangle)^2}{8npq} \right]. \quad (\text{B.42})$$

Observe que el mismo resultado se obtiene con facilidad recurriendo al teorema del límite central (B.20) teniendo en cuenta que $\mu = p - q$ y $\sigma^2 = 4pq$.

B.2. Entropía y Probabilidad

B.2.1. Entropía y teoría de la información

El concepto de entropía fue introducido inicialmente en termodinámica por Rudolf Clausius en la década de 1850 como una magnitud física que describe lo irreversible de un proceso, permitiendo explicar porqué los sucesos de la naturaleza ocurren en un sentido y no en otro. Por ejemplo, si dos trozos de metal a diferentes temperaturas entran en contacto, el calor fluirá desde el de mayor temperatura hacia el de menor temperatura hasta alcanzar el equilibrio térmico. El proceso opuesto es muy poco probable, aun cuando también satisface el principio de conservación de la energía. La explicación es que la naturaleza tiende a homogeneizar la energía maximizando la entropía. De este modo, la entropía se concibe como una medida del desorden y de la incertidumbre de la información respecto de un sistema o proceso.

Posterior a Clausius, Ludwig Boltzman encontró en 1877 la manera de expresar la entropía en términos probabilísticos estableciendo la base de la mecánica estadística. En el marco de la teoría de información, Claude Shannon mostró en su trabajo de 1948 que la entropía puede ser considerada como una medida de la incertidumbre y la información.

Si se observa un suceso particular que ocurre con probabilidad P , es posible asociar a esta observación una cantidad de información denotada por $I(P)$. Tal información debe satisfacer las siguientes afirmaciones:

- 1 La información es no negativa, $I(P) \geq 0$;
- 2 Si dos eventos ocurren de forma independiente con probabilidad conjunta $P_1 P_2$, entonces su información debe ser aditiva, $I(P_1 P_2) = I(P_1) + I(P_2)$;
- 3 $I(P)$ es una función continua de P ;
- 4 No existe información asociada a un evento que siempre es observado, $I(1) = 0$.

A partir de estas propiedades es sencillo aceptar que la única posibilidad para la función $I(P)$ es:

$$I(P) = -A \ln(P), \quad (\text{B.43})$$

donde A es una constante arbitraria. Se debe notar que $I(0) = \infty$, lo que implica que un suceso extremadamente improbable conlleva una gran cantidad de información.

Ahora bien, si en lugar de un único suceso se cuenta con un conjunto de n posibilidades, cada uno con probabilidad P_i de ocurrir, se sigue que el valor promedio de información en cada observación es:

$$S = \frac{\langle I \rangle}{n} = - \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i. \quad (\text{B.44})$$

Esta magnitud se conoce como entropía de la distribución. Luego, maximizar S es equivalente a maximizar la información contenida en una observación.

B.2.2. Máxima entropía, distribución discreta

Suponga que se desea construir la distribución de probabilidad $P(X_n)$ del caminante aleatorio unidimensional discutido en la sección precedente, conociendo únicamente el promedio de su desplazamiento hacia la derecha $\langle X_n \rangle = n(2p - 1)$. Como $X_n = \sum_{j=1}^n x_j$ y en cada paso la variable x_j puede tomar dos valores, el problema tiene 2^n posibles configuraciones y por consiguiente $2^n - 1$ parámetros desconocidos (se reduce en uno debido a la condición de normalización). Sin embargo, la única información disponible respecto de la función distribución es

$$\begin{aligned} \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} P(x_1, \dots, x_n) &= 1 \\ \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} P(x_1, \dots, x_n) \sum_{j=1}^n x_j &= \langle X_n \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

por lo que surge la pregunta: ¿existe algún principio que permita recuperar la función de distribución a partir de estas piezas de información?.

El principio de máxima entropía entrega una respuesta a esta pregunta enunciando que la distribución más probable será aquella que maximice la entropía del proceso sujeta a las restricciones de la información conocida. Así, una máxima entropía entrega una distribución

consistente con la incertidumbre máxima dada unas cuantas piezas de información.

Para maximizar la entropía sujeta a restricciones se emplea el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange. Así, en forma general, para una distribución de probabilidad discreta P_n de la cual se conocen m piezas de información

$$X^a = \langle X_n^a \rangle = \sum_n X_n^a P_n, \quad (\text{B.46})$$

con $X_n^0 = 1$, se define la función auxiliar

$$S' = - \sum_n P_n \ln P_n - \sum_{a=0}^m \lambda_a \left(\sum_n X_n^a P_n - X^a \right), \quad (\text{B.47})$$

tal que la función de distribución óptima se obtiene extremado S' respecto al conjunto discreto de probabilidades P_n y de los coeficientes λ_a . Luego, P_n satisface:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S'}{\partial P_n} = - \left(\ln P_n + 1 + \sum_{a=0}^m \lambda_a X_n^a \right) \\ 0 &= \frac{\partial S'}{\partial \lambda_a} = \sum_n X_n^a P_n - X^a. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

A partir de este resultado es sencillo ver que P_n se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} P_n &= \exp \left[- \left(1 + \sum_{a=0}^m \lambda_a X_n^a \right) \right] \\ &= \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{a=1}^m \lambda_a X_n^a \right), \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

con Z una constante de normalización.

Regresando al problema que dio origen a esta discusión, se sigue que, utilizando el principio de máxima entropía, la función distribución de probabilidad de la posición del caminante aleatorio en el paso n —ésimo del cual únicamente se conoce la información presentada en (B.45) es

$$P(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{C} \exp \left(-\lambda \sum_{j=1}^n x_j \right) = \mathcal{C} \prod_{j=1}^n e^{-\lambda x_j}, \quad (\text{B.50})$$

con $\mathcal{C}$ dado por:

$$\sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} P(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{C} (e^\lambda + e^{-\lambda})^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = (2 \cosh \lambda)^{-n}. \quad (\text{B.51})$$

Sustituyendo (B.51) en (B.50) se recupera la distribución de Bernoulli encontrada con anterioridad en (B.30) y (B.29),

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda x_j}}{e^\lambda + e^{-\lambda}} = \prod_{j=1}^n (p \delta_{x_j, 1} + q \delta_{x_j, -1}), \quad (\text{B.52})$$

con las probabilidades de salto determinadas por:

$$p = \frac{e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} \quad y \quad q = 1 - p = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}. \quad (\text{B.53})$$

B.2.3. Máxima entropía, distribución continua

El procedimiento anterior se puede generalizar a distribuciones continuas $p(\mathbf{x})$ definidas sobre algún conjunto Ω con m observables

$$X^a = \langle X^a(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} d^n x X^a(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}). \quad (\text{B.54})$$

Extremado la función se encuentra que

$$S' = - \int_{\Omega} d^n x p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x}) - \sum_{a=0}^m \lambda_a \left(\int_{\Omega} d^n x X^a(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) - X^a \right), \quad (\text{B.55})$$

cuyo resultado es:

$$\ln p(\mathbf{x}) = -1 - \sum_{a=0}^m \lambda_a X^a(\mathbf{x}). \quad (\text{B.56})$$

Como ejemplo considere la distribución $p(x)$ definida sobre los reales y cuyos observables son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x p(x) = \mu \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 p(x) = \mu^2 + \sigma^2. \quad (\text{B.57})$$

A partir de (B.56) es sencillo demostrar que en estas condiciones $p(x)$ es una normal de media μ y varianza σ^2 :

$$p(x) = \mathcal{C} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (\text{B.58})$$

B.3. Difusión y Movimiento Browniano

B.3.1. Difusión y ley de Fick

La difusión es el proceso en que partículas de soluto introducidas en un medio solvente, en que originalmente se encontraban ausentes, se disuelven. Este fenómeno es irreversible y su efecto es el aumento de la entropía del sistema en conjunto, aumentando el desorden molecular y homogeneizando la distribución de energía (equilibrio térmico).

Microscópicamente la difusión de las partículas de soluto se debe a la gran cantidad de colisiones que experimentan consigo mismas y con las moléculas del solvente, lo que origina su desplazamiento hacia las posiciones vecinas que cuentan con espacios vacíos disponibles. Dada la heterogeneidad de la colisiones y el gran número de éstas, es de esperar que la posición de las partículas de soluto se comporte como la suma de variables aleatorias. Así, y

como consecuencia del teorema del límite central, las partículas tendrán un desplazamiento cuadrático medio proporcional a la raíz cuadrada del tiempo $\Delta X_{rms} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \sim t^{1/2}$; suponiendo que el número de colisiones, y en consecuencia de pasos, son proporcionales al tiempo. De este modo, es intuitivo proponer $\Delta X_{rms}^2 = 2Dt$, con D una constante que debe ser cierta función del camino libre entre las moléculas del solvente y de su velocidad. Estas cantidades se pueden introducir a través de la temperatura pero su dependencia escapa de esta discusión. En consecuencia, en ausencia de fuerzas externas y corrientes globales, es de esperar que la concentración de las partículas de soluto $n(\mathbf{x}, t)$ varíe en el tiempo y el espacio de acuerdo a:

$$n(\mathbf{x}, t) \sim \int d^3x' \frac{n(\mathbf{x}', t_0)}{(4\pi D(t - t_0))^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4D(t - t_0)} \right]. \quad (\text{B.59})$$

Es decir, que la concentración se obtenga como la convolución entre la concentración inicial t_0 y una distribución normal de varianza $2Dt$. Desde una perspectiva matemática, la distribución normal en (B.59) es, salvo una constante de proporcionalidad, la función de Green o núcleo de la ecuación diferencial que describe el proceso de difusión. Para deducir dicha ecuación, se puede comenzar por atender a que, a primer orden debe ser lineal, para así aceptar el núcleo de (B.59). Por otro lado, a partir de la descripción microscópica del proceso de difusión, es de esperar que las partículas de soluto se desplacen desde las regiones de mayor a menor concentración en una magnitud proporcional al gradiente de concentración, por lo que el flujo másico por unidad de volumen debe ser, salvo derivadas de orden superior, de la forma:

$$\mathbf{j} = -D\nabla n \quad (\text{B.60})$$

Esta expresión es conocida como ley de Fick, en honor a Adolf Fick quien la derivó en 1855. Combinando (B.60) con la ecuación de continuidad $\partial_t n = -\nabla \cdot \mathbf{j}$ se obtiene la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) \quad (\text{B.61})$$

El coeficiente de difusión D puede ser función de la posición. Se puede demostrar que si $\nabla D \sim 0$, entonces (B.59) es solución de (B.61). La aplicabilidad de la ley de Fick ha sido comprobada experimentalmente en diferentes contextos, permitiendo describir un amplio rango de problemas de transporte en diversas áreas de las ciencias e ingeniería.

A modo ilustrativo, la ecuación de difusión con D constante se puede resolver en d dimensiones por medio de la transformada espacial de Fourier $d - dimensional$ de acuerdo a

$$\frac{\partial \hat{n}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -Dk^2 \hat{n}(\mathbf{k}, t) \quad \Rightarrow \quad n(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{n}(\mathbf{k}, t_0) e^{-Dk^2(t-t_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{B.62})$$

con

$$\hat{n}(\mathbf{k}, t_0) = \int d^d x n(\mathbf{x}, t_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{B.63})$$

Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned}
 n(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d x' n(\mathbf{x}', t_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} e^{-Dk^2(t-t_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\
 &= \int d^d x' \frac{n(\mathbf{x}', t_0)}{(4\pi D(t-t_0))^{d/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4D(t-t_0)} \right]
 \end{aligned} \tag{B.64}$$

B.3.2. Modelos de Einstein y Smoluchowski del movimiento browniano

El movimiento browniano fue informado por primera vez por Robert Brown en 1827, a quien debe su nombre. Brown observó a través de un microscopio que partículas de polen suspendidas en agua describían movimientos aleatorios, sin ser capaz de determinar el origen de tal movimiento. En 1905 Albert Einstein explicó el movimiento de las partículas de polen como el resultado de colisiones con las moléculas de agua. *Esta explicación sirvió como prueba convincente de la existencia de los átomos y moléculas, los que para la época sólo habían sido teorizados.*

En su descripción, Einstein comienza considerando un experimento de presión osmótica con la ley de los gases ideales, $p = nkT$. Su razonamiento fue que en un estado estacionario la fuerza osmótica $-\nabla p$ es igual a la fuerza viscosa. En el caso de partículas esféricas de radio a , ésta corresponde al producto de la fuerza hidrodinámica de la ley de Stokes $\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ y la concentración n de partículas, con η la viscosidad del solvente. Así, Einstein dedujo que $n\mathbf{v} = -kT/6\pi a\eta \nabla n$, expresión que comparada con la ley de Fick (B.60) conduce a $D = kT/6\pi a\eta$.

Para explicar este resultado Einstein razonó que las partículas de polen eran chocadas aleatoriamente por las moléculas de agua, por lo que, tras un corto intervalo de tiempo δt las partículas perdían sus condiciones iniciales. Además, en ausencia de fuerzas externas y corrientes globales, el promedio de su velocidad debía ser nulo. En estas condiciones, Einstein postuló que en un intervalo δt , el número de partículas de polen que se mueven en un entorno $d^3\Delta$ de Δ se encontraba determinado por $n\phi(\Delta)d^3\Delta$, con $\phi(\Delta) = \phi(|\Delta|)$ isotrópica y normalizada a la unidad. Luego, asumiendo conservación del número de partículas y expandiendo en series de Taylor, Einstein encontró que:

$$\begin{aligned}
 n(\mathbf{x}, t + \tau) &= n(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \dots \\
 &= \int d^3\Delta n(\mathbf{x} + \Delta, t) \phi(\Delta) \\
 &= n(\mathbf{x}, t) + \nabla^2 n(\mathbf{x}, t) \int d^3\Delta \frac{\Delta^2}{6} \phi(\Delta) + \dots
 \end{aligned} \tag{B.65}$$

Tras suprimir momentos de orden superior y tomar el límite $\tau \rightarrow 0$ Einstein recuperó la

ecuación de difusión (B.60), encontrando la siguiente expresión para el coeficiente de difusión:

$$D = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{6\tau} \int d^3\Delta \Delta^2 \phi(\Delta). \quad (\text{B.66})$$

A pesar de lo satisfactorio del modelo de Einstein, queda preguntarse: ¿por qué una partícula browniana puede ser desplazada cuando, a priori, las probabilidades de que sea golpeada en todas las direcciones son iguales?. En 1906 Marian Smoluchowski desarrolló un modelo de movimiento browniano bajo la misma primicia de Einstein. En su trabajo, Smoluchowski intenta responder esta pregunta argumentando que si la partícula experimenta n colisiones, con m favorables y $n - m$ desfavorables en alguna dirección, ambas con igual probabilidad a priori de $1/2$ (máxima entropía, pues algún otro valor implica una especie de orden) entonces la probabilidad de obtener m colisiones favorables distribuye como una binomial:

$$P_{m,n} = \binom{n}{m} 2^{-n}. \quad (\text{B.67})$$

Así, Smoluchowski dedujo para la ganancia media $m - (n - m) = 2m - n$:

$$\langle 2m - n \rangle = \sum_{m=n/2}^n (2m - n) \binom{n}{m} 2^{-n} = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2}. \quad (\text{B.68})$$

Luego, utilizando la formula de Stirling valida para n grandes

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad (\text{B.69})$$

Smoluchowski demostró que la ganancia media es proporcional a la raíz cuadrada del número de colisiones y se puede escribir como:

$$\langle 2m - n \rangle \approx \sqrt{\frac{2n}{\pi}}. \quad (\text{B.70})$$

Este modelo permite describir cualitativamente el movimiento browniano, sin embargo, se debe tener en cuenta que en el momento en que la partícula comienza su movimiento, las colisiones en distintas direcciones no poseen igual probabilidad, debido a la acumulación local de moléculas en la dirección del movimiento.

B.3.3. Ecuación de Langevin del movimiento Browniano

Como alternativa a la descripción de Einstein y de Smoluchowski, Paul Langevin desarrolló en 1908 una ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula browniana de masa M sujeta a fuerzas viscosas y aleatorias. La ecuación resultante, conocida como ecuación de Langevin, es:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\gamma \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{M} + \eta(t), \quad (\text{B.71})$$

donde $\mathbf{v}$ corresponde a la velocidad de la partícula, γ es una medida de la amortiguación debido a la fuerza viscosa, $\mathbf{F}$ es la fuerza originada por campos externos y $\eta(t)$ es la fuerza aleatoria que representa el efecto de las colisiones entre la partícula browniana y las moléculas del medio.

Para comprender la física tras la ecuación de Langevin, resulta conveniente considerar un caso unidimensional con F constante; como puede ser una partícula de polvo en caída libre bajo el efecto de la gravedad. En estas condiciones es sencillo ver que (B.71) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ve^{\gamma t}) &= \frac{F}{M}e^{\gamma t} + \eta e^{\gamma t} \\ v(t) &= v(0)e^{-\gamma t} + \frac{F}{\gamma M}(1 - e^{-\gamma t}) + \int_0^t ds \eta(s)e^{\gamma(s-t)} \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Ahora bien, dado que $\eta(t)$ es una función aleatoria, sólo se puede describir el movimiento de la partícula en términos de cantidades promedio.

Asumiendo que el promedio de las fuerzas aleatorias es nulo, $\langle \eta(t) \rangle = 0$, entonces, el promedio de la velocidad es:

$$\langle v(t) \rangle = v(0)e^{-\gamma t} + \frac{F}{\gamma M}(1 - e^{-\gamma t}). \quad (\text{B.73})$$

A partir de este resultado, se concluye que para escalas de tiempo de γ^{-1} se pierde la condición inicial $v(0)$ y la velocidad tiende asintóticamente a su valor terminal $\langle v(t) \rangle = F/\gamma M$. Para el promedio del cuadrado de la velocidad $\langle v(t)^2 \rangle$ es sencillo demostrar que se encuentra dado por:

$$\langle v(t)^2 \rangle = \langle v(t) \rangle^2 + \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{\gamma(s_1-t)} e^{\gamma(s_2-t)} \langle \eta(s_1)\eta(s_2) \rangle, \quad (\text{B.74})$$

donde $\langle \eta(s_1)\eta(s_2) \rangle$ es una magnitud desconocida que describe la correlación de las fuerzas aleatorias a distintos instantes de tiempo. Puesto que las colisiones que experimenta un cuerpo macroscópico en su superficie con distintas moléculas del fluido no poseen correlación, es de esperar que $\langle \eta(s_1)\eta(s_2) \rangle$ sea nulo a excepción de intervalos de tiempo $\tau = s_2 - s_1$ muy cortos, del orden del tiempo en que las moléculas interactúan de forma individual con el objeto. De este modo, la correlación puede aproximarse como:

$$\langle \eta(s_1)\eta(s_2) \rangle \approx \Gamma \delta(s_1 - s_2). \quad (\text{B.75})$$

Sustituyendo (B.75) en (B.74) se puede escribir para la esperanza del cuadrado de la velocidad:

$$\begin{aligned} \langle v(t)^2 \rangle - \langle v(t) \rangle^2 &= \Gamma \int_0^t ds e^{2\gamma(s-t)} \\ &= \frac{\Gamma}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}). \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Este resultado permite deducir una expresión para Γ ; en el caso en que $F = 0$ se sigue que para instantes de tiempo mayores a γ^{-1} la energía del objeto debe termalizar con el medio, y como sólo posee un grado de libertad se debe cumplir $\langle Mv(t)^2/2 \rangle = kT/2$ permitiendo concluir que $\Gamma = 2\gamma kT/M$.

De forma general, se demuestra que la correlación de la velocidad a distintos instantes de tiempo es:

$$\begin{aligned} \langle v(t)v(t') \rangle - \langle v(t) \rangle \langle v(t') \rangle &= \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' e^{\gamma(s-t)} e^{\gamma(s'-t')} \langle \eta(s)\eta(s') \rangle \\ &= \Gamma \int_0^{\min(t,t')} ds e^{2\gamma s} e^{-\gamma(t+t')} \\ &= \frac{\Gamma}{2\gamma} \left(e^{-\gamma|t-t'|} - e^{-\gamma(t+t')} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Ahora bien, integrando la velocidad para obtener la posición se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \frac{1}{\gamma} \left(v(0) - \frac{F}{\gamma M} \right) (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{Ft}{\gamma M} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} ds e^{\gamma(s-t')} \eta(t') \\ &= \langle x(t) \rangle + \int_0^t dt' \int_0^{t'} ds e^{\gamma(s-t')} \eta(t'). \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

En este punto se debe notar que para intervalos de tiempo menores a γ^{-1} la posición media es $\langle x(t) \rangle = x(0) + v(0)t + Ft^2/2m$, valor consistente con el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante. En el límite opuesto de grandes intervalos de tiempo el resultado es consistente con una velocidad terminal $F/\gamma M$.

Finalmente, calculando la correlación de la posición a distintos intervalos de tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle &= \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \int_0^s ds_1 \int_0^{s'} ds_2 e^{\gamma(s-s_1)} e^{\gamma(s'-s_2)} \langle \eta(s_1)\eta(s_2) \rangle \\ &= \frac{\Gamma}{2\gamma} \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \left(e^{-\gamma|s-s'|} - e^{-\gamma(s+s')} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{\gamma^2} \min(t, t') + \frac{\Gamma}{2\gamma^3} \left[2e^{-\gamma t} + 2e^{-\gamma t'} - 2 - e^{-\gamma|t-t'|} - e^{-\gamma(t+t')} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

En particular, cuando ambos instantes de tiempo son iguales y mayores a γ^{-1} , se tiene (salvo por el término constante):

$$\langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \frac{\Gamma}{\gamma^2} t = 2Dt. \quad (\text{B.80})$$

Aquí $D = \Gamma/2\gamma^2$ corresponde al coeficiente de difusión, permitiendo justificar la definición entregada por Einstein en su modelo (B.66). Además, en el caso de una partícula browniana de masa M y radio a en un solvente de viscosidad η , $\gamma = 6\pi\eta a/M$, de donde se sigue que $D = kT/6\pi a\eta$, recuperando el resultado de Einstein.

B.3.4. Equivalencia entre los modelos de Einstein y Langevin

Se ha demostrado que los modelos de Einstein y Langevin para una partícula browniana que se desplaza en ausencia de fuerzas externas conducen al mismo valor para el coeficiente de difusión. Sin embargo, no es evidente que ambos entreguen el mismo resultado para la posición o velocidad de la partícula. Para dar cuenta de la equivalencia entre ambas descripciones, se determinará la probabilidad conjunta $P(x, t; x', t_0)$ de que una partícula en movimiento unidimensional con posición inicial $x_1 = x(t_1)$ se desplace hasta $x_2 = x(t_2)$ en un instante posterior en ausencia de fuerzas externas.

En la descripción de Langevin la ecuación de movimiento es $dv/dt = -\gamma v + \eta(t)$ con $v = dx/dt$. Puesto que la situación de interés es aquella en que el movimiento se debe únicamente a las colisiones y no a la velocidad inicial, se debe trabajar en escalas de tiempo mayores a γ^{-1} . Esto se consigue despreciando el término cinético dv/dt en la ecuación de movimiento, permitiendo escribir para la velocidad y posición:

$$v(t) = \frac{\eta(t)}{\gamma} \quad y \quad x(t) = \int_0^t ds \frac{\eta(s)}{\gamma}. \quad (\text{B.81})$$

Ahora bien, para obtener la probabilidad conjunta se debe atender a la identidad de cambio de variable (B.13) con el promedio sobre la distribución $p(\eta) = p(\eta(t_1), \eta(t_2))$ de la variable aleatoria $\eta(t)$. Así:

$$\begin{aligned} P(x_1, t_1; x_2, t_2) &= \int \mathcal{D}\eta p(\eta) \delta(x_1 - x(t_1)) \delta(x_2 - x(t_2)) \\ &= \langle \delta(x_1 - x(t_1)) \delta(x_2 - x(t_2)) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

con $\mathcal{D}\eta = d\eta(t_1)d\eta(t_2)$. Para evaluar esta expresión integral resulta conveniente emplear la representación de la delta de Dirac en el espacio de Fourier, de acuerdo a:

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega_2}{2\pi} e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \langle e^{i(\omega_1 x(t_1) + \omega_2 x(t_2))} \rangle. \quad (\text{B.83})$$

Luego, definiendo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \omega_j x(t_j) &= \int_{-\infty}^\infty dt \sum_{j=1}^2 \omega_j \Theta(t) \Theta(t_j - t) \eta(t) \gamma^{-2} \\ &= \int_{-\infty}^\infty dt f(t) \eta(t), \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

y asumiendo que $\eta(t)$ distribuye como una gaussiana, con

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = G(t - t'), \quad (\text{B.85})$$

se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \langle e^{i(\omega_1 x(t_1) + \omega_2 x(t_2))} \rangle &= \langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \eta(t) \right\} \rangle \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t) G(t-t') f(t') \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k}^2 \omega_j M_{j,k} \omega_k \right\},
 \end{aligned} \tag{B.86}$$

donde se han empleado los resultados conocidos para integrales gaussianas multivariantes (ver sección final de este anexo) y se ha definido la matriz de correlación:

$$M_{j,k} = \langle x(t_j) x(t_k) \rangle - \langle x(t_j) \rangle \langle x(t_k) \rangle. \tag{B.87}$$

A partir de (B.87) se sigue para la probabilidad conjunta:

$$\begin{aligned}
 P(x_1, t_1; x_2, t_2) &= \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega_2}{2\pi} e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k}^2 \omega_j M_{j,k} \omega_k \right\} \\
 &= \frac{(2\pi)^{-1}}{(\det M)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k}^2 x_j M_{j,k}^{-1} x_k \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.88}$$

Para evaluar $M_{j,k}$ se debe atender a (B.85) y (B.86) de modo que si $G(t-t') = \Gamma \delta(t-t')$ se sigue que:

$$M_{j,k} = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{t_j} ds \int_0^{t_k} ds' G(s-s') = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \min(t_j, t_k). \tag{B.89}$$

Sustituyendo este resultado en (B.87) se obtiene finalmente:

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\Gamma(t_2 - t_1)}} \exp \left[-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2\Gamma(t_2 - t_1)/\gamma^2} \right]. \tag{B.90}$$

Ahora bien, en la descripción de Einstein se debe reemplazar $\Gamma/\gamma^2 = 2D$ con D el coeficiente de sustitución, en cuyo caso es inmediato comprobar que (B.89) corresponde a la solución de la ecuación de difusión unidimensional con la densidad de número de partículas brownianas igual a la delta de Dirac evaluada en la posición inicial de la partícula, quedando demostrado que ambas formulaciones del movimiento browniano son equivalentes.

B.3.5. Probabilidad condicional en el modelo de Langevin

Dado que se ha asumido que $\eta(t)$ sigue una distribución normal, el resultado obtenido en (B.88) se puede extender para determinar la probabilidad conjunta $P(v_1, t_1; v_2, t_2)$ sustituyendo los x_j por los v_j y las correlaciones espaciales por las correlaciones en el espacio

de velocidades. Estas últimas $M_{j,k} = \langle v(t_j)v(t_k) \rangle - \langle v(t_j) \rangle \langle v(t_k) \rangle$ fueron obtenidas por integración directa de la ecuación de Langevin en (B.77) sin despreciar el término cinético. Utilizando estos resultados es sencillo ver que, en general, se tiene:

$$P(v_1, t_1; \dots; v_n, t_n) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{(\det M)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k} v_j M_{j,k}^{-1} v_k \right\}, \quad (\text{B.91})$$

con:

$$M_{j,k} = \frac{\Gamma}{2\gamma} (e^{-\gamma|t_j-t_k|} - e^{-\gamma(t_j+t_k)}). \quad (\text{B.92})$$

A partir de estos resultados se encuentra que, en el límite $t_{1,2} \gg \gamma^{-1}$, equivalente a la pérdida de la condición inicial, se cumple:

$$P(v_2, t_2) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\Gamma}} e^{-\gamma v_2^2/\Gamma}. \quad (\text{B.93})$$

Por otro lado, para la distribución condicional $P(v_2, t_2|v_1, t_1) = P(v_1, t_1; v_2, t_2)/P(v_1, t_1)$ se encuentra que:

$$P(v_2, t_2|v_1, t_1) = \sqrt{\frac{\gamma/\pi\Gamma}{1 - e^{-2\gamma(t_2-t_1)}}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{\Gamma} \cdot \frac{(v_2 - e^{-\gamma(t_2-t_1)}v_1)^2}{1 - e^{-2\gamma(t_2-t_1)}} \right\}. \quad (\text{B.94})$$

Luego, es claro que $P(v_2, t_2|v_1, t_1)$ tiende a $P(v_2, t_2)$ independientemente de la condición más reciente.

Como se verá más adelante, un proceso de Markov es aquel en que en un instante dado, las propiedades estadísticas del sistema en un instante posterior se encuentran totalmente determinadas por sus valores en dicho instante; o equivalentemente, cada probabilidad condicional depende únicamente de la condición más reciente. En este sentido, la velocidad $v(t)$ de la partícula browniana describe un proceso de Markov a tiempo continuo, debido a que satisface una ecuación diferencial de primer orden y, por lo tanto, sólo se requiere de la (única) condición inicial $v(0)$ para derivar su distribución de probabilidad para cualquier instante posterior. De forma similar se sigue que $x(t)$ no describe un proceso de Markov, pues requiere de dos condiciones iniciales.

B.3.6. Ecuación de Fokker-Planck

El movimiento de una partícula browniana sigue la ecuación de Langevin, cuya solución se interpreta a través de valores promedios. Como alternativa a este procedimiento surge la ecuación de Fokker-Planck, que describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad de la velocidad de la partícula bajo la influencia de fuerzas de arrastre y aleatorias. Cuando esta ecuación es aplicada a distribuciones de posición de partículas se conoce como ecuación de Smoluchowski, la cual generaliza el modelo de Einstein en presencia de fuerzas de arrastre.

Para derivar la ecuación de Fokker-Planck se considera la variable estocástica $y(t)$, cuya variación corresponde a

$$\delta y(t) = y(t + \delta t) - y(t), \quad (\text{B.95})$$

y es tal que:

$$\begin{aligned} \langle \delta y(t) \rangle &= A(y) \delta t \\ \langle [\delta y(t)]^2 \rangle &= B(y) \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ \langle [\delta y(t)]^n \rangle &\sim \mathcal{O}(\delta t^2) \quad \text{con } n > 2. \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

Donde los términos $A(y)$ y $B(y)$ se deben al arrastre y difusión respectivamente.

Ahora bien, para la probabilidad conjunta $P(y_3, t_3; y_1, t_1)$, es claro que, para cualquier valor de t_2 intermedio, satisface

$$P(y_3, t_3; y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 P(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1), \quad (\text{B.97})$$

lo que equivale a decir que la partícula debe estar en algún lugar en el instante t_2 . Si el sistema describe un proceso markoviano, entonces

$$P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_2, t_2), \quad (\text{B.98})$$

lo que equivale a decir que la probabilidad condicional depende únicamente de la condición más reciente. De esta propiedad se colige que:

$$\begin{aligned} P(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1) &= P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) P(y_2, t_2; y_1, t_1) \\ &= P(y_3, t_3 | y_2, t_2) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) P(y_1, t_1). \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Sustituyendo (B.99) en (B.97) se sigue que la probabilidad condicional $P(y_3, t_3 | y_1, t_1)$ satisface la siguiente ley de composición:

$$P(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 P(y_3, t_3 | y_2, t_2) P(y_2, t_2 | y_1, t_1). \quad (\text{B.100})$$

Esta expresión es conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Utilizando el resultado previo se puede escribir:

$$P(y, t + \delta t | y_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' P(y, t + \delta t | y', t) P(y', t | y_0, t_0). \quad (\text{B.101})$$

Además:

$$\begin{aligned} P(y, t + \delta t | y', t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(y - z) P(z, t + \delta t | y', t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\delta y(t) \delta(y - y' - \delta y(t)) P(y' + \delta y(t), t + \delta t | y', t) \\ &= \left\{ 1 + \langle \delta y(t) \rangle \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{1}{2} \langle [\delta y(t)]^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \dots \right\} \delta(y - y') \\ &= \delta(y - y') + A(y) \frac{\partial \delta(y - y')}{\partial y'} \delta t + \frac{1}{2} B(y) \frac{\partial^2 \delta(y - y')}{\partial y'^2} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2). \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

Sustituyendo (B.102) en (B.101), integrando por partes, dividiendo por δt y tomando el límite $\delta t \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[A(y)P(y, t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B(y)P(y, t)]. \quad (\text{B.103})$$

Para describir el movimiento browniano a partir de la ecuación de Fokker-Planck (EFP) es necesario que la partícula alcance su velocidad terminal, puesto que, de lo contrario, su ecuación de Langevin es de segundo orden y no describe un proceso de Markov. Cuando se ha alcanzado la velocidad terminal, la ecuación de Langevin se reduce a $dx/dt = F/\gamma M + \eta/\gamma$ de donde se sigue que $A(x) = F/\gamma M$ y $B(x) = \Gamma/\gamma^2 = 2D = 2kT/M\gamma$. Reemplazando $F = -dV/dx$ y sustituyendo estas cantidades en (B.103) se obtiene la EFP del movimiento Browniano:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{P(x, t)}{M\gamma} \right) \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kT}{M\gamma} P(x, t) \right] \right\}. \quad (\text{B.104})$$

Esta expresión también se conoce como ecuación de Smoluchowski.

B.4. Procesos Estocásticos

B.4.1. Procesos Estocásticos

Los procesos descritos en la sección anterior son ejemplos de procesos estocásticos, esto es, sistemas en que existen una o más variables aleatorias dependientes del tiempo $\vec{X}(t)$. En general, se denota con la letra minúscula $\vec{x}$ al valor medido de la variable aleatoria $\vec{X}(t)$ en el instante t .

Se define la densidad de probabilidad de $\vec{x}$ por

$$p(\vec{x}, t) = \langle \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)) \rangle, \quad (\text{B.105})$$

con el promedio obtenido sobre las realizaciones del proceso aleatorio, encontrándose apropiadamente normalizada a la unidad, $\int d\vec{x} p(\vec{x}, t)$, con $d\vec{x} = dx^d$ y d la dimensión de $\vec{X}(t)$. Su interpretación se consigue al integrar sobre una región Ω , obteniendo

$$p_\Omega(t) = \int_\Omega d\vec{x} p(\vec{x}, t), \quad (\text{B.106})$$

cantidad que corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria $\vec{X}(t)$ tome un valor en Ω .

Sean $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ los valores medidos de $\vec{X}(t)$ en los instantes $t_1, \dots, t_n$, se define la distribución de probabilidad conjunta de acuerdo a:

$$p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1) = \langle \delta(\vec{x}_n - \vec{X}(t_n)) \dots \delta(\vec{x}_1 - \vec{X}(t_1)) \rangle. \quad (\text{B.107})$$

A partir de la probabilidad conjunta, se definen también las densidades de probabilidades condicionales:

$$p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1 | \vec{x}'_m, t'_m; \dots; \vec{x}'_1, t'_1) = \frac{p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1; \vec{x}'_m, t'_m; \dots; \vec{x}'_1, t'_1)}{p(\vec{x}'_m, t'_m; \dots; \vec{x}'_1, t'_1)}. \quad (\text{B.108})$$

Estas definiciones son independientes del orden temporal, sin embargo, por convención se adoptará orden decreciente de izquierda a derecha:

$$t_n > \dots > t_1 > t'_m > \dots > t'_1. \quad (\text{B.109})$$

Las probabilidades condicionales actúan como predicciones del valor futuro de $\vec{X}(t)$ conocidos sus valores pasados, motivando la búsqueda de ecuaciones de evolución para encontrar su valor dada una distribución inicial. Este es el caso de la ecuación de Fokker-Planck.

Para definir un proceso estocástico es necesario, al menos, conocer todas las probabilidades conjuntas del tipo (B.107). Si su conocimiento define el proceso, se le conoce como un proceso estocástico separable.

B.4.2. Procesos de Markov

Los procesos de Markov son uno de los procesos estocásticos más simples, caracterizados porque el estado futuro del sistema depende únicamente de la condición actual. Esta suposición se formula en términos de probabilidades condicionales por:

$$p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1 | \vec{x}'_m, t'_m; \dots; \vec{x}'_1, t'_1) = p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1 | \vec{x}'_m, t'_m). \quad (\text{B.110})$$

Con esta definición es posible obtener todas las probabilidades a partir de $p(\vec{x}, t)$ y $p(\vec{x}, t | \vec{x}', t')$. En efecto, así

$$p(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1) p(\vec{x}_1, t_1),$$

de modo que, al siguiente orden

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_3, t_3; \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) &= p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) p(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \\ &= p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1) p(\vec{x}_1, t_1). \end{aligned}$$

Luego, es claro que:

$$p(\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1) = p(\vec{x}_n, t_n | \vec{x}_{n-1}, t_{n-1}) \dots p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1) p(\vec{x}_1, t_1). \quad (\text{B.111})$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

En general, se cumple que la densidad de probabilidad $p(\vec{x}_3, t_3)$ puede ser obtenida a partir de la probabilidad conjunta $p(\vec{x}_3, t_3; \vec{x}_2, t_2)$ por integración sobre $\vec{x}_2$:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_3, t_3) &= \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_3, t_3; \vec{x}_2, t_2) \\ &= \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2). \end{aligned} \quad (\text{B.112})$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_1, t_1) &= \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_3, t_3; \vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1) \\ &= \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1). \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

Tanto (B.113) como (B.112) son siempre válidas. Si el proceso es Markoviano, se sigue a partir de (B.110) que (B.113) se puede escribir como:

$$p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_1, t_1) = \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1). \quad (\text{B.114})$$

Esta expresión corresponde a la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

La diferencia entre (B.114) y (B.112) es que, la primera de ellas relaciona todas las probabilidades condicionales $p(\vec{x}_i, t_i | \vec{x}_j, t_j)$ las unas con las otras, mientras que (B.112) construye la probabilidad en el futuro t_3 de t_2 , dadas las probabilidades condicionales $p(\vec{x}_3, t_3 | \vec{x}_2, t_2)$.

Procesos de Markov en la naturaleza

En los sistemas físicos, los procesos de interés que pueden ser modelados como aleatorios poseen un tiempo de correlación finito, usualmente del orden de la duración de la interacción entre sus partes. Para la partícula browniana se vio que la correlación entre la fuerza aleatoria en la ecuación de Langevin a diferentes instantes $\langle \eta(t)\eta(t+s) \rangle$ debe ser nula para intervalos de tiempo s mayores a una escala característica δt (del orden del tiempo en que dos moléculas diferentes interactúan con el mismo objeto). En consecuencia, para intervalos $s < \delta t$, el sistema es no markoviano. Por ejemplo, para la ecuación de Langevin $\dot{v} = -\gamma v + \eta(t)$, se demostró que con escalas de tiempo mayores a γ^{-1} se perdía la condición inicial. Sin embargo, si $\delta t = 0$ el proceso es markoviano, puesto que la ecuación es de primer orden y sólo requiere de la condición más reciente para ser integrada. Para ecuaciones de segundo orden, como $\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + \eta(t)$, se requiere de dos condiciones iniciales, por lo que las trayectorias son sólo markovianas para escalas de tiempo mayores a γ^{-1} , tras las cuales se ha perdido la memoria de la velocidad inicial.

Procesos de Markov continuos

Una variable aleatoria $\vec{X}(t)$ puede tomar un rango continuo de valores a la vez que su trayectoria de muestreo puede ser una función discontinua de t . Por ejemplo, la velocidad de una partícula browniana puede tomar un amplio rango de valores a escalas del tiempo de correlación, sin embargo, dará saltos discontinuos en el tiempo, a diferencia de su posición que seguirá una trayectoria continua (aunque no suave).

La condición de que la trayectoria de muestreo de la variable aleatoria $X(t)$ sea continua en t se conoce como condición de Lindeberg:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \epsilon} d^3x p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{x}', t) = 0. \quad (\text{B.115})$$

Esta condición significa que la probabilidad de que la posición final $\mathbf{x}'$ sea diferente de $\mathbf{x}$ va a cero más rápidamente que τ , cuando τ tiende a cero. Considere los siguientes ejemplos:

- **Proceso de Wiener:** Este proceso es utilizado para modelar el movimiento browniano, entre otros fenómenos. Se caracteriza por exhibir únicamente difusión, sin deriva o saltos. En una dimensión se tiene:

$$p(x, t|x', t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi D|t - t'|}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4D|t - t'|}\right). \quad (\text{B.116})$$

Se puede comprobar que (B.116) verifica la condición de Lindeberg, por lo que, las trayectorias de muestreo de una partícula browniana son continuas.

- **Proceso de Cauchy:** Este proceso se caracteriza por que las trayectorias de muestreo exhiben saltos finitos, por lo que no son continuas. En una dimensión se tiene:

$$p(x, t|x', t') = \frac{|t - t'|}{\pi [(x - x')^2 + (t - t')^2]}. \quad (\text{B.117})$$

A diferencia del proceso de Wiener, el proceso de Cauchy no cumple la condición de Lindeberg, por lo que sus trayectorias de muestreo no son continuas. Sin embargo, en ambos casos se cumple $\lim_{\tau \rightarrow 0} p(x', t + \tau|x, t) = \delta(x' - x)$.

B.4.3. Martingalas

La martingala es un proceso estocástico en que la esperanza condicional de una variable aleatoria $\vec{X}(t)$ no cambia de su condición más reciente. Esto es:

$$\langle \vec{x}(t) | \{\vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1\} \rangle = \int d\vec{x} p(\vec{x}, t | \vec{x}_n, t_n; \dots; \vec{x}_1, t_1) \vec{x} = \vec{x}_n \quad (\text{B.118})$$

No todas las martingalas son procesos de Markov y viceversa; en particular el proceso de Wiener es una martingala.

Una característica importante de las martingalas es que, al nivel de las correlaciones a pares, el rendimiento pasado no proporciona predicciones para los resultados futuros. En una dimensión esto equivale a:

$$\langle [x(t_3) - x(t_2)][x(t_2) - x(t_1)] \rangle = 0. \quad (\text{B.119})$$

Para demostrar (B.119) basta con notar que:

$$\begin{aligned} \langle x(t_2)x(t_1) \rangle &= \int dx_2 \int dx_1 p(x_2, t_2; x_1, t_1) x_2 x_1 \\ &= \int dx_2 \int dx_1 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1) x_2 x_1 \\ &= \int dx_1 p(x_1, t_1) x_1 \int dx_2 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1) x_2 \\ &= \int dx_1 p(x_1, t_1) x_1^2 \\ &= \langle x(t_1)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.120})$$

Luego el resultado es inmediato.

B.4.4. Ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov

Bajo ciertas suposiciones la ecuación de Chapman-Kolmogorov puede ser reducida a una ecuación diferencial. Como consecuencia de la condición de continuidad (de Lindeberg) (B.115), se debe considerar un método que permita dividir la condición de diferenciabilidad en dos partes, una correspondiente al movimiento continuo y otra al discontinuo.

Se requiere de las siguientes condiciones para todo $\epsilon > 0$:

1.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \epsilon \quad \rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) = W(\mathbf{x} | \mathbf{y}, t); \quad (\text{B.121})$$

2.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon} d^3 x (x_i - y_i) p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) = A_i(\mathbf{y}, t) + \mathcal{O}(\epsilon); \quad (\text{B.122})$$

3.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon} d^3 x (x_i - y_i)(x_j - y_j) p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) = B_{ij}(\mathbf{y}, t) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{B.123})$$

Con las últimas dos condiciones uniformes en $\mathbf{x}'$, ϵ y t . Además, los momentos de orden superior se desvanecen cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

De acuerdo con la condición de continuidad (B.115), si la trayectoria de muestreo es continua, entonces, los coeficientes $W(\mathbf{x} | \mathbf{x}', t)$ deben ser nulos para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, por lo que se encuentran ligados a movimientos discontinuos. Por el contrario, las cantidades A_i y B_{ij} se asocian a movimientos continuos.

Ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov hacia adelante (DCK+)

Considere la evolución temporal de la esperanza de una función $f(\mathbf{y})$ dos veces diferenciable:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int d^3 x f(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{x}', t') - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')] \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int d^3 x \int d^3 y f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') - \int d^3 y f(\mathbf{y}) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.124})$$

Donde se ha empleado la ecuación de Chapman-Kolmogorov (B.114) para reescribir el primer miembro de la segunda igualdad.

Ahora bien, separando las integrales en $\mathbf{x}$ en las regiones $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \epsilon$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$ y expandiendo $f(\mathbf{x})$ a segundo orden en torno a $\mathbf{y}$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_i} (x_i - y_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} (x_i - y_i)(x_j - y_j) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3). \quad (\text{B.125})$$

Sustituyendo este resultado en (B.123) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \epsilon} d^3x d^3y \left[\sum_i \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_i} (x_i - y_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right] \right. \\ &\quad \cdot p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') \\ &\quad + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \epsilon} d^3x d^3y f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') \\ &\quad \left. - \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \epsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) p(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

más términos que se desvanecen en el límite en que $\epsilon \rightarrow 0$. Finalmente, integrando por partes los términos entre corchetes, cambiando $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ en la última integral, reconociendo las magnitudes (B.121), (B.122) y (B.123), y atendiendo a la arbitrariedad de $f(\mathbf{y})$, se obtiene la ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov hacia adelante (DCK+):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')}{\partial t} &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')] \\ &\quad + \int d^3y [W(\mathbf{x} | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t') - W(\mathbf{y} | \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')]. \end{aligned} \quad (\text{B.127})$$

Algunas de las aplicaciones de la ecuación DCK+ son la ecuación maestra, la ecuación de Fokker-Planck y la ecuación de Liouville. La ecuación maestra se obtiene cuando los términos de deriva A_i y difusión B_{ij} son nulos, por lo que el cambio en la probabilidad condicional $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')$ se debe a las transiciones entrantes $W(\mathbf{x} | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}', t')$ menos las salientes $W(\mathbf{y} | \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')$. Esto permite interpretar a la función $W(\mathbf{y} | \mathbf{x}, t)$ como la densidad de probabilidad de que la variable aleatoria salte desde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ en el instante t ; debido a sus unidades de t^{-1} se le suele denominar tasa de transición. La ecuación de Fokker-Planck se consigue cuando las probabilidades de salto son nulas, exhibiendo deriva y difusión. La ecuación de Liouville, también conocida como ecuación de continuidad en mecánica clásica, a diferencia de la EFP no posee difusión, por lo que es utilizada en procesos deterministas.

Ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov hacia atrás (DCK-)

La ecuación DCK+ asume que los valores $\mathbf{x}'$ y t' se encuentran fijos y las soluciones existen para $t \geq t'$. Sin embargo, también se pueden buscar soluciones para $t' \leq t$ con t fijo, lo que se consigue a través de la ecuación diferencial de Chapman-Kolmogorov hacia atrás (DCK-). Esta ecuación resulta útil para problemas de salida, en que se busca la probabilidad

de que una partícula abandone una región en un determinado tiempo.

Para derivar la DCK- se debe comenzar notando que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\tau' \rightarrow 0} \frac{1}{\tau'} [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' + \tau') - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')] \\
 &= \lim_{\tau' \rightarrow 0} \frac{1}{\tau'} \int d^3 y p(\mathbf{y}, t' + \tau' | \mathbf{x}', t') [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' + \tau') - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t' + \tau')] \\
 &= \lim_{\tau' \rightarrow 0} \frac{1}{\tau'} \int d^3 y p(\mathbf{y}, t' + \tau' | \mathbf{x}', t') [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t')].
 \end{aligned} \tag{B.128}$$

Donde, para la primera igualdad, se ha utilizado que la primera integral es igual a $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' + \tau')$ en tanto que la segunda proviene de la ecuación de Chapman-Kolmogorov (B.114). Luego, siguiendo un procedimiento similar al empleado para la ecuación DCK+ se obtiene para la DCK-:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')}{\partial t'} &= - \sum_i A_i(\mathbf{x}', t') \frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')}{\partial x'_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t')}{\partial x'_i \partial x'_j} \\
 &\quad + \int d^3 y W(\mathbf{y} | \mathbf{x}', t') [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t')].
 \end{aligned} \tag{B.129}$$

B.5. Integrales Gaussianas multidimensionales

B.5.1. Distribución gaussiana multidimensional

Considere la distribución gaussiana multidimensional de n variables aleatorias η_j ,

$$p(\eta_1, \dots, \eta_n) = \mathcal{C} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k \right\}, \tag{B.130}$$

donde $\alpha_{j,k}$ es una matriz de rango n y $\mathcal{C}$ es un factor de normalización. Para trabajar sobre esta distribución, es conveniente que $\alpha_{j,k}$ sea una matriz simétrica. No obstante, cuando este no es el caso, se puede realizar la operación de simetrización:

$$\sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j (\alpha_{j,k} + \alpha_{k,j}) \eta_k. \tag{B.131}$$

Donde se han permutado los índices del segundo término en el sumatorio. Es claro que con este procedimiento la suma entre paréntesis sí es una matriz simétrica. Por este motivo de aquí en más se asumirá que $\alpha_{j,k}$ es una matriz simétrica. Además, la matriz $\alpha_{j,k}$ se denotará en forma matricial como α , en tanto que el vector η_j se denotará por η .

La obtención del factor de normalización se puede atender a que la matriz α puede ser diagonalizada (dado que es simétrica). Esto quiere decir que existe una matriz ortogonal $O_{j,l}$ ($OO^T = I$ con I la matriz unidad) tal que $O^T \alpha O = \Lambda$ con Λ una matriz diagonal

($\Lambda_{nm} = \lambda_n \delta_{nm}$ con λ_n los coeficientes de su diagonal y δ_{nm} la delta de Kronecker). Luego, si se definen las nuevas variables x_l tal que $\eta = O x$ y $\eta^T \alpha \eta = x^T O^T \alpha O x = x^T \Lambda x$ se obtiene el siguiente resultado para la integral de la distribución:

$$\begin{aligned} \int \prod_{j=1}^n d\eta_j \exp \{-x^T \Lambda x\} &= \int \prod_{j=1}^n dx_j(1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^n y_m^2 \lambda_m \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \int dx_j \exp \left\{ -\frac{\lambda_m}{2} x_j^2 \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_j}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det \alpha}}, \end{aligned} \quad (\text{B.132})$$

donde $\det \alpha$ corresponde al determinante de α . Además, se ha tenido en cuenta que el jacobiano de la transformación corresponde a la unidad ($\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)/\partial(x_1, \dots, x_n) = 1$). Con este resultado es claro que:

$$\mathcal{C} = \frac{\sqrt{\det \alpha}}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (\text{B.133})$$

B.5.2. Correlaciones y teorema de Wick

Para encontrar las correlaciones es conveniente definir la función

$$Z(J_1, \dots, J_n) = \int \prod_{j=1}^n d\eta_j \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k + \sum_{l=1}^n J_l h_l \right\}, \quad (\text{B.134})$$

sobre la cual, es sencillo demostrar que la correlación $\langle \eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_m} \rangle$ entre m variables η_j se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \langle \eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_m} \rangle &= \frac{1}{Z} \int \left[\prod_{j=1}^n d\eta_j \right] \eta_{s_1} \dots \eta_{s_m} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k \right\} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^m Z}{\partial J_{s_1} \dots \partial J_{s_m}} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

Se debe notar que la última igualdad se encuentra dividida por $Z(0) = \mathcal{C}^{-1}$, permitiendo la normalización del resultado. Para encontrar una expresión explícita para las correlaciones y derivar otros importantes resultados se calculará $Z(J_1, \dots, J_n)$. Con este fin, se puede emplear

el método usual de completar cuadrados en el exponente. Esto es:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k + \sum_{l=1}^n J_l h_l &= -\frac{1}{2} \eta^T \alpha \eta + \frac{1}{2} (J^T \eta + \eta^T J) \\
&= -\frac{1}{2} (\eta^T - J^T \alpha^{-1}) \alpha (\eta - \alpha^{-1} J) + \frac{1}{2} J^T \alpha^{-1} J \\
&= -\frac{1}{2} y^T \alpha y + \frac{1}{2} J^T \alpha^{-1} J \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n y_j \alpha_{j,k} y_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} J_j (\alpha^{-1})_{j,k} J_k
\end{aligned} \tag{B.136}$$

donde se ha definido la nueva variable auxiliar $y = \eta - \alpha^{-1} J$ (notar que el jacobiano de la transformación también es la unidad). Con este procedimiento se tiene para Z :

$$\begin{aligned}
Z(J) &= \int \prod_{j=1}^n d\eta_j \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \eta_j \alpha_{j,k} \eta_k + \sum_{l=1}^n J_l h_l \right\} \\
&= \int \prod_{j=1}^n dx_j \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n y_j \alpha_{j,k} y_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} J_j (\alpha^{-1})_{j,k} J_k \right\} \\
&= Z(0) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} J_j (\alpha^{-1})_{j,k} J_k \right\}.
\end{aligned} \tag{B.137}$$

Luego, es sencillo ver que las correlaciones son:

$$\begin{aligned}
\langle \eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_m} \rangle &= \frac{\partial^m}{\partial J_{s_1} \dots \partial J_{s_m}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} J_j (\alpha^{-1})_{j,k} J_k \right\} \Big|_{J=0} \\
&= \langle \eta_{s_1}, \eta_{s_2} \rangle \langle \eta_{s_3}, \eta_{s_4} \rangle \dots \langle \eta_{s_{m-1}}, \eta_{s_m} \rangle + \dots
\end{aligned} \tag{B.138}$$

Este resultado es conocido como teorema de Wick y proporciona un método simple para evaluar las correlaciones de una función gaussiana. Así, por ejemplo:

$$\langle \eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_4} \rangle = \langle \eta_{s_1}, \eta_{s_2} \rangle \langle \eta_{s_3}, \eta_{s_4} \rangle + \langle \eta_{s_1}, \eta_{s_3} \rangle \langle \eta_{s_2}, \eta_{s_4} \rangle + \langle \eta_{s_1}, \eta_{s_4} \rangle \langle \eta_{s_2}, \eta_{s_3} \rangle, \tag{B.139}$$

de modo que las correlaciones entre pares se obtienen a partir de la inversa de la matriz α de acuerdo a:

$$\langle \eta_{s_j}, \eta_{s_k} \rangle = (\alpha^{-1})_{j,k}. \tag{B.140}$$

B.5.3. Transformada de Fourier

Otro resultado de particular interés corresponde a la transformada de Fourier de la distribución gaussiana multidimensional. A partir de $Z(J_1, \dots, J_n)$ es sencillo obtener su trans-

formada realizando la sustitución $J_i = -i\omega_j$. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \int \prod_{j=1}^n d\eta_j p(\eta_1, \dots, \eta_n) \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \omega_j \eta_j \right\} \\
 &= \frac{Z(-i\omega_1, \dots, -i\omega_n)}{Z(0)} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j (\alpha^{-1})_{j,k} \omega_k \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.141}$$

También resulta conveniente calcular:

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}(K_1, \dots, K_n) &= \int \prod_{j=1}^n dJ_j Z(J_1, \dots, J_n) \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n K_j J_j \right\} \\
 &= Z(0) \int \prod_{j=1}^n dJ_j \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} J_j (\alpha^{-1})_{j,k} J_k - i \sum_{j=1}^n K_j J_j \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.142}$$

Para resolver la última integral se puede emplear un procedimiento similar al utilizado para obtener explícitamente $Z(J_1, \dots, J_n)$, completando cuadrados en la integral gaussiana. Luego, es sencillo ver que el resultado es:

$$\hat{Z}(K_1, \dots, K_n) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,l} K_j \alpha_{j,k} K_k \right\}. \tag{B.143}$$

Apéndice C

Modelo de subsidencia

C.1. Modelo de subsidencia

[Litwiniszyn 1958](#) proporcionó la primera descripción del fenómeno de flujo gravitacional a través de un modelo estocástico para el campo de desplazamientos verticales. Para ello, Litwiniszyn introduce la función de subsidencia $w = w(x, z)$, definida como el desplazamiento vertical experimentado por las partículas que, previo a la deformación inducida por la descarga de material, se encontraban sobre la recta $z = z_1$. Así, el desplazamiento de las partículas se encuentra determinado por:

$$\Delta z = -w(x, z). \quad (\text{C.1})$$

Para encontrar una expresión para w , Litwiniszyn argumentó que el desplazamiento en una partícula ubicada en (x', z') induce un incremento δw en el desplazamiento de una partícula ubicada en (x, z) (con $z > z'$), dado por $\delta w(x, z) = \varphi(x, z; x', z') \delta x' w(x', z')$. Luego, asumiendo la validez del principio de superposición se sigue que:

$$w(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varphi(x, z; x', z') w(x', z'). \quad (\text{C.2})$$

La función de dos puntos $\varphi(x, z; x', z')$ que relaciona los desplazamientos de las partículas ubicadas en (x, z) y (x', z') puede ser interpretada como la densidad de probabilidad condicional $p(x, z | x', z')$, correspondiente a la probabilidad de que el desplazamiento en el punto (x', z') origine un desplazamiento en el punto (x, z) .

Ahora bien, si el desplazamiento de una partícula ubicada en (x', z') se origina en el desplazamiento de las partículas ubicadas en (x'', z'') (con $z > z' > z''$) se sigue que

$$w(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \varphi(x, z; x'', z'') w(x'', z''). \quad (\text{C.3})$$

Por definición, el mismo resultado puede ser expresado como:

$$w(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dx'' \varphi(x, z; x', z') \varphi(x', z'; x'', z'') w(x'', z''). \quad (\text{C.4})$$

Igualando ambas expresiones y sustituyendo la función de dos puntos φ por su interpretación como la densidad de probabilidad condicional p , se sigue que esta última satisface la ecuación integral

$$p(x, z|x'', z'') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' p(x, z|x', z') p(x', z'|x'', z''), \quad (\text{C.5})$$

también conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov. Esta ecuación se obtiene en el contexto de los procesos estocásticos para un proceso de Markov, definido como aquel en que el estado de un sistema depende de su condición más reciente. Dicho de otro modo, la condición anterior implica que un desplazamiento en el punto (x, z) depende únicamente del desplazamiento de los puntos ubicados en la cota inmediatamente inferior.

Dado que la función de dos puntos $\varphi(x, z; x', z')$ es interpretada como una probabilidad condicional, se debe encontrar normalizada a la unidad, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x, z; x', z') = 1$. No obstante, Litwiniszyn también consideró la posibilidad en que hubiese una pérdida de dicha probabilidad, de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x, z + \delta z; x', z) \approx 1 - \frac{d\alpha}{dz} \delta z. \quad (\text{C.6})$$

La interpretación física de esta expresión se consigue al calcular el área asociada al desplazamiento de todos los puntos ubicados sobre la recta z . De este modo, si $\alpha = \alpha(z)$, $A(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x, z)$ y $A(z + \delta z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x, z + \delta z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' w(x', z) \varphi(x, z + \delta z; x', z)$ se sigue que $A(z + \delta z) \approx A(z)(1 - (d\alpha/dz)\delta z)$ y consigo que $A(z) = A_0 e^{-\alpha}$. Luego, si $\alpha = 0$ el volumen es constante y el medio es incompresible.

Atendiendo a los resultados previos, Litwiniszyn utilizó los desarrollos de Kolmogorov sobre la ecuación de Chapman-Kolmogorov, incorporando la posibilidad de un cambio de volumen ($\alpha \neq 0$), obteniendo consigo la siguiente ecuación de difusión-advección-reacción:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{d\alpha}{dz} w - \frac{\partial(Aw)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (\text{C.7})$$

Con los parámetros A y B definidos por:

$$A(x, z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (x' - x) \varphi(x, z; x', z + \delta z) \quad (\text{C.8})$$

y

$$B(x, z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} dx' \frac{1}{2\delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} (x' - x)^2 \varphi(x, z; x', z + \delta z). \quad (\text{C.9})$$

Si el medio es incompresible $\alpha = 0$ (sin reacción), $A = 0$ (sin advección horizontal) y $B = b$ con b una constante, se sigue que la función de subsidencia satisface la siguiente ecuación de difusión:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (\text{C.10})$$

Para un contenedor semi-infinito con un orificio puntual en su base (en $x = z = 0$) que actúa como fuente para el desplazamiento, la solución a esta ecuación corresponde a

$$w(x, z) = \frac{a}{\sqrt{4\pi bz}} e^{-x^2/4bz}, \quad (\text{C.11})$$

donde a corresponde al área extraída con la descarga de material.

J. Mullins 1972 argumentó que si el proceso de extracción se realiza en dos etapas, de acuerdo con el modelo de Litwinisyn, el área total extraída originará una subsidencia sobre el punto $(0, z)$ dada por:

$$w(0, z) = w_1(0, z) + w_2(0, z) = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{4\pi bz}}, \quad (\text{C.12})$$

donde los pares a_1, w_1 y a_2, w_2 corresponden a las áreas y funciones de subsidencia asociadas a cada descarga. Sin embargo, por definición, la primera extracción origina una subsidencia $w_1 = a_1/\sqrt{4\pi bz}$ que conlleva a que las partículas se desplacen hasta $z - w_1 = z - a_1/\sqrt{4\pi bz}$. Luego,

$$w(0, z) = \frac{a_1}{\sqrt{4\pi bz}} + \frac{a_2}{\sqrt{4\pi b(z - a_1/\sqrt{4\pi bz})}} \neq \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{4\pi bz}}, \quad (\text{C.13})$$

permitiendo concluir que la ecuación de subsidencia no puede ser válida. Esta inconsistencia emerge a causa del postulado de linealidad de los desplazamientos, siendo solucionada si la ecuación de difusión se aplica a la densidad de flujo de partículas en lugar de al campo de desplazamientos.

Bibliografía

- A. Halim, R. Castro y R. Trueman (2004). «3D large scale physical modelling for studying interactive drawing and drawpoint spacing in Block Caving Mines». En: *Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, The University of Queensland*.
- Andreotti, B., Y. Forterre y O. Pouliquen (2013). *Granular Media: Between Fluid and Solid*. Cambridge University Press.
- Arovas, D. (2015). *Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics*. Department of Physics, University of California.
- Bardet, J.P. e I. Vardoulakis (2001). «The asymmetry of stress in granular media». En: *International Journal of Solids and Structures* 38.2, págs. 353-367.
- Bazant, M. (2004). «A Theory of Cooperative Diffusion in Dense Granular Flows». En: *arXiv:cond-mat/0307379 [cond-mat.stat-mech]*.
- Bocquet, Lyderic, Wolfgang Losert, D Schalk, T Lubensky y J Gollub (2002). «Granular Shear Flow Dynamics and Forces : Experiment and Continuum Theory». En: *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 65, pág. 011307.
- Brady, B.H.G. (2012). *Rock Mechanics: For Underground Mining*. Springer Netherlands.
- Cambou, B. (1998). «Micromechanical Approach in Granular Materials». En: *Behaviour of Granular Materials*. Ed. por Bernard Cambou. Vienna: Springer Vienna, págs. 171-216.
- Castro, R., R. Trueman y A. Halim (2007). «A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44.6, págs. 860-870.
- Choi, Jaehyuk, Arshad Kudrolli y Martin Bazant (2005). «Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers». En: 17.
- CODELCO (2021). *2021 Proyectos*. URL: https://www.codelco.com/prontus_codelco/site/edic/base/port/proyectos.html. Revisión 21 de Abril de 2021.
- Consejo Minero (2020). *Cifras Actualizadas en la Minería*. URL: <https://consejominero.cl/wp-content/uploads/2020/06/Cifras-actualizadas-de-la-mineria-Mayo-2020.pdf>. Revisión 21 de Abril de 2021.

- Cruz, F. da (2004). «Friction and jamming in granular flows». En: *PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, Marne a la vall ee, Franc.*
- Cruz, Frédéric da, Sacha Emam, Michaël Prochnow, Jean-Noël Roux y François Chevoir (2005). «Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows». En: *Phys. Rev. E* 72 (2), pág. 021309.
- Elata, David y James G. Berryman (1996). «Contact force-displacement laws and the mechanical behavior of random packs of identical spheres». En: *Mechanics of Materials* 24.3, págs. 229-240.
- Forterre, Yoël y Olivier Pouliquen (2008). «Flows of Dense Granular Media». En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 40.1, págs. 1-24.
- Fullard, L. A., E. C. P. Breard, C. E. Davies, A. J. R. Godfrey, M. Fukuoka, A. Wade, J. Dufek y G. Lube (2019). «The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 475.2221, pág. 20180462.
- Fullard, L. A., C. E. Davies, G. Lube, A. C. Neather, E. C. P. Breard y B. J. Shepherd (2016). «The transient dynamics of dilation waves in granular phase transitions during silo discharge». En: *Granular Matter* 19.6.
- Garcimartín, Angel, Iker Zuriguel, Alvaro Janda y Diego Maza (2011). «Fluctuations of grains inside a discharging two-dimensional silo». En: *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 84, pág. 031309.
- Gardiner, C. W. (2004). *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*. Third. Vol. 13. Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer-Verlag, págs. xviii+415.
- Glasser, B.J. e I. Goldhirsch (2001). «Scale dependence, correlations, and fluctuations of stresses in rapid granular flows». En: *Physics of Fluids* 13, 407.
- Henann, David L. y Ken Kamrin (2013). «A predictive, size-dependent continuum model for dense granular flows». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110.17, págs. 6730-6735.
- Heslop, T. (2000). «Block Caving controllable risk and fatal flaws». En: *MassMin Proceedings of Brisbane*, págs. 280-291.
- Heslop, T. y D. Laubscher (1981). «Draw control in caving operations on Southern African chrysotile asbestos mines». En: *Society of Mining Engineers – AIME*, págs. 755-774.
- Hosford, W. (2010). *Solid Mechanics*. Cambridge University Press.
- Hung, C.-Y., P. Aussillous y H. Capart (2018). «Granular surface avalanching induced by drainage from a narrow silo». En: *Journal of Fluid Mechanics* 856, págs. 444-469.

- Jaeger, Heinrich M., Sidney R. Nagel y Robert P. Behringer (1996). «Granular solids, liquids, and gases». En: *Rev. Mod. Phys.* 68 (4), págs. 1259-1273.
- Janelid, I. (1972). «Study of the gravity flow process in sublevel caving». En: *Proceedings of the International Sublevel Caving Symposium, Atlas Copco, Stockholm*.
- Janelid, I. y R. Kvapil (1966). «Sublevel caving». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences Geomechanics Abstracts* 3.2, págs. 129-132.
- Jiang, Yimin y Mario Liu (2003). «Granular Elasticity without the Coulomb Condition». En: *Phys. Rev. Lett.* 91 (14), pág. 144301.
- (2004). «Energetic Instability Unjams Sand and Suspension». En: *Phys. Rev. Lett.* 93 (14), pág. 148001.
- (2007). «A brief review of "granular elasticity": why and how far is sand elastic?» En: *The European physical journal. E, Soft matter* 22.3, págs. 255-2560.
- Jin, Aibing, Hao Sun, Guowei Ma, Yongtao Gao, Shunchuan Wu y Xinqiu Meng (2016). «A study on the draw laws of caved ore and rock using the discrete element method». En: *Computers and Geotechnics* 80, págs. 59-70.
- Jin, Aibing, Hao Sun, Shunchuan Wu y Yongtao Gao (2017). «Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 92, págs. 91-98.
- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- Jop, Pierre, Yoël Forterre y Olivier Pouliquen (2005). «Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology». En: *Journal of Fluid Mechanics* 541, págs. 167-192.
- (2006). «A constitutive law for dense granular flows». En: 441.7094, págs. 727-730.
- J.R., Barber (2018). *Contact Mechanics*. Springer, Cham.
- Kamrin, Ken (2008). «Stochastic and Deterministic Models for Dense Granular Flows». En: *Tesis de doctorado. Estados Unidos, Massachusetts Institute of Technology*.
- Kamrin, Ken y Martin Z. Bazant (2007). «Stochastic flow rule for granular materials». En: *Phys. Rev. E* 75 (4), pág. 041301.
- Kolmogorov, Andrey N. (1960). *Foundations of the Theory of Probability*. 2.^a ed. Chelsea Pub Co.
- Kvapil, R. (1965). «Gravity flow of granular materials in hoppers and bins». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences Geomechanics Abstracts* 2.1, págs. 25-41.

- Kvapil, R. (1982). *The mechanics and design of sublevel caving systems, Underground Mining Methods Handbook* (Ed W.A. Hustrulid) (pp. 880-897). SME,AIME.
- (1992). *Sublevel Caving. In Mining Engineering Handbook* (pp. 1789-1814). SME.
- (2008). *Gravity flow in sublevel and panel caving: a common sense approach*. Luleå University of Technology.
- Lade, Poul y Richard Nelson (1987). «Modelling the Elastic Behaviour of Granular Materials». En: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 11, págs. 521-542.
- Lambe, T.W. y R.V. Whitman (1991). *Mecánica de suelos*. Limusa.
- Landau, L.D., L.D. Landau y E.M. Lifshits (1969). *Teoría de la elasticidad*. Curso de física teórica v. 7. Reverté.
- Laubscher, D. (1994). «Cave mining-the state of the art». En: *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, págs. 279-293.
- Lenzi, E. K., M. K. Lenzi, H. V. Ribeiro y L. R. Evangelista (2019). «Extensions and solutions for nonlinear diffusion equations and random walks». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 475.2231, pág. 20190432.
- Lenzi, Ervin, Luciano da Silva, Marcelo Lenzi, Maike dos Santos, Haroldo Ribeiro y Luiz Evangelista (2017). «Intermittent Motion, Nonlinear Diffusion Equation and Tsallis Formalism». En: *Entropy* 19.1, pág. 42.
- Litwiniszyn, J. (1958). «Statistical methods in the mechanics of granular bodies». En: *Rheologica Acta* 1.2, págs. 146-150.
- (1966). «An Application of the Random Walk Argument to the Mechanics of Granular Media». En: *Kravtchenko J., Sirieys P.M. (eds) Rheology and Soil Mechanics / Rhéologie et Mécanique des Sols*.
- Marano, G. (1980). «The interaction between adjacent draw points in free flowing materials and it application to mining». En: *Chamber of Mines Journal* 22, págs. 25-32.
- Medina, A., J.A. Córdova, E. Luna y C. Treviño (1998). «Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2D silo». En: *Physics Letters A* 250.1, págs. 111-116.
- Melo, F., F. Vivanco, C. Fuentes y V. Apablaza (2007). «On drawbody shapes: From Bergmark-Roos to kinematic models». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44.1, págs. 77-86.
- (2008a). «Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45.2, págs. 248-259.

- Melo, F., F. Vivanco, C. Fuentes y V. Apablaza (2008b). «Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45.2, págs. 248-259.
- MiDi, GDR (2004). «On dense granular flows». En: *The European Physical Journal E* 14.4, págs. 341-365.
- Mindlin, R. D. (1949). «Compliance of Elastic Bodies in Contact». En: *Journal of Applied Mechanics* 16.3, págs. 259-268.
- Mindlin, R. D. y H. Deresiewicz (1953). «Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces». En: *Journal of Applied Mechanics* 20.3, págs. 327-344.
- Mueth, Daniel, Georges Debregeas, Greg Karczmar, Peter Eng, Sidney Nagel y Heinrich Jaeger (2000). «Signatures of Granular Microstructure in Dense Shear Flows». En: *Nature* 406, págs. 385-9.
- Mullins, J. (1972). «Stochastic Theory of Particle Flow under Gravity». En: *Journal of Applied Physics* 43.665.
- Mullins, W.W. (1979). «Critique and comparison of two stochastic theories of gravity-induced particle flow». En: *Powder Technology* 23.1, págs. 115-119.
- Nedderman, R. y U. Tüzün (1979). «A Kinematic Model for the Flow of Granular Material». En: *Powder Technology - POWDER TECHNOLOGY* 22, págs. 243-253.
- Nedderman, R.M. (2005). *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press.
- Nedderman, R.M. y U. Tüzün (1979). «A kinematic model for the flow of granular materials». En: *Powder Technology* 22.2, págs. 243-253.
- Nicot, François, Nejib Hadda, Mohamed Guessasma, Jerome Fortin y Olivier Millet (2013). «On the definition of the stress tensor in granular media». En: *International Journal of Solids and Structures* 50.14, págs. 2508-2517.
- Peters, D. (1984). «Physical Modeling of the Draw Behavior of Broken Rock in Caving». En: *Quarterly of the Colorado School of Mines, Colorado, USA*.
- Popov, Valentin L., Markus Heß y Emanuel Willert (2019). *Handbook of Contact Mechanics: Exact Solutions of Axisymmetric Contact Problems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Power, G. (2004). «Modelling granular flow in caving mines: large scale physical modeling and full scale experiments». En: *Tesis de doctorado. Australia, University of Queensland*.
- Prat, Pere (2006). *Ecuaciones Constitutivas: Elasticidad y Plasticidad*. Departamento de Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña.

- R. Castro, R. Trueman y A. Halim (2007). «A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model». En: *International Journal of Rock Mechanic Mining and Mining Sciences*.
- R. Kvapil L. Baeza, J. Rosenthal y G. Flores (1989). *Block Caving at El Teniente Mine, Chile (Section A, 98: 43-56)*. Transactions of the Institution of Mining y Metallurgy.
- R. Trueman, R. Castro y A. Halim (2007). «Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3D physical model». En: *International Journal of Rock Mechanic Mining and Mining Sciences*.
- Radjai, Farhang, Michel Jean, Jean-Jacques Moreau y Stéphane Roux (1996). «Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems». En: *Phys. Rev. Lett.* 77 (2), págs. 274-277.
- Radjai, Farhang, Dietrich E. Wolf, Michel Jean y Jean-Jacques Moreau (1998). «Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings». En: *Phys. Rev. Lett.* 80 (1), págs. 61-64.
- Rycroft, Chris H., Gary S. Grest, James W. Landry y Martin Z. Bazant (2006). «Analysis of granular flow in a pebble-bed nuclear reactor». En: *Phys. Rev. E* 74 (2), pág. 021306.
- Rycroft, Chris H., Yee Lok Wong y Martin Z. Bazant (2010). «Fast spot-based multiscale simulations of granular drainage». En: *Powder Technology* 200.1, págs. 1-11.
- Sadd, M.H. (2014). *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier Science.
- Samadani, Azadeh, A. Pradhan y A. Kudrolli (1999). «Size segregation of granular matter in silo discharges». En: *Phys. Rev. E* 60 (6), págs. 7203-7209.
- Sánchez, Katherine, Sergio Palma y Raúl L. Castro (2019). «Numerical Modelling of Water Flow Through Granular Material for Isolated and Simultaneous Extractions in Block Caving». En: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 52.1, págs. 133-147.
- Sánchez, Vanessa, Raúl L. Castro y Sergio Palma (2019). «Gravity flow characterization of fine granular material for Block Caving». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 114, págs. 24-32.
- Shengyao, Jiang, Tu Jiyuan, Yang Xingtuan y Gui Nan (2019). «Comparative analysis of empirical descriptions of eccentric flow in silo model by the linear and nonlinear regressions». En: *Experimental and Computational Multiphase Flow* 1.3, págs. 159-176.
- Sielamowicz, I., S. Blonski y T.A. Kowalewski (2005). «Optical technique DPIV in measurements of granular material flows, Part 1 of 3—plane hoppers». En: *Chemical Engineering Science* 60.2, págs. 589-598.

- Sielałowicz, Irena, Sławomir Błoński y Tomasz A. Kowalewski (2006). «Digital particle image velocimetry (DPIV) technique in measurements of granular material flows, Part 2 of 3-converging hoppers». En: *Chemical Engineering Science* 61.16, págs. 5307-5317.
- Sielałowicz, Irena, Artur Czech y Tomasz A. Kowalewski (2015). «Comparative analysis of empirical descriptions of eccentric flow in silo model by the linear and nonlinear regressions». En: *Powder Technology* 270, págs. 393-410.
- Staron, L, Pierre-Yves Lagrée y Stéphane Popinet (2014). «Continuum simulation of the discharge of the granular silo: A validation test for the (I) visco-Plastic flow law». En: *The European physical journal. E, Soft matter* 37, pág. 9961.
- Sun, Hao, Yongtao Gao, Davide Elmo, Shunchuan Wu y Leonardo Dorador (2019). «A Study of Gravity Flow Based on the Upside-Down Drop Shape Theory and Considering Rock Shape and Breakage». En: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 52.3, págs. 881-893.
- Vivanco, F. y F. Melo (2013). «The effect of rock decompaction on the interaction of movement zones in underground mining». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 60, págs. 381-388.
- Vivanco, F., T. Watt y F. Melo (2011). «The 3D shape of the loosening zone above multiple draw points in block caving through plasticity model with a dilation front». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 48.3, págs. 406-411.
- Wang, Ningsheng, Haifeng Lu, Jianliang Xu, Xiaolei Guo y Haifeng Liu (2019). «Velocity profiles of granular flows down an inclined channel». En: *International Journal of Multiphase Flow* 110, págs. 96-107.
- Yu, Hai-Sui (2006). *Plasticity and Geotechnics*. Vol. 13. Springer Berlin.
- Zhang, Xiufeng, Ganqiang Tao y Zhonghua Zhu (2018). «Laboratory study of the influence of dip and ore width on gravity flow during longitudinal sublevel caving». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 103, págs. 179-185.
- (2019). En: vol. 64.No 3, págs. 533-546.