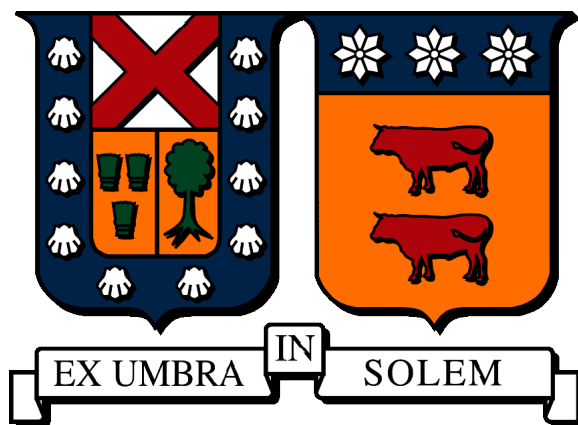


UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO-CHILE



Conjetura de Hodge en hipersuperficies de Klein

Tesis presentada por:

Mario Pastrana Ramírez

*Como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemática*

Director, co-director de Tesis:

Roberto Villafior Loyola, Pedro Montero Silva

Mayo, 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☒ X Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Conjetura de Hodge en hipersuperficies de Klein

Nombre del candidato(a): **Mario Alonso Pastrana Ramírez**

Carrera / Grado: **Magíster en Ciencias Mención Matemáticas**

Campus: Casa Central Departamento: Matemática

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Roberto Tomás Villaflor Loyola, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ X El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 04-08-2026 Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 04-08-2026 Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

Conjetura de Hodge en hipersuperficies de Klein.

AUTOR: Mario Pastrana Ramírez

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes	Institución
Giancarlo Urzúa	Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.
Jorge Duque	Universidad de Talca, Chile.
Pedro Montero	Universidad Federico Santa María, Chile.
Roberto Villafflor	Universidad Federico Santa María, Chile.

Valparaíso, Mayo 2026.

Resumen

La conjetura de Hodge ha sido estudiada en profundidad por Aoki y Shioda en el caso de las hipersuperficies de Fermat mediante una descomposición espectral de la cohomología. En esta tesis se desarrolla una descripción análoga para las hipersuperficies de Klein y, usando el cubrimiento monomial de Fermat a Klein, se transporta información entre ambas descomposiciones. Se describe así la estructura de los caracteres de Hodge en Klein $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, separándolos en dos componentes: una componente trivial, que se levanta a caracteres lineales en Fermat, y una componente excepcional cuya aparición depende de condiciones modulares sobre el grado.

Este punto de vista permite obtener una fórmula cerrada para $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$, se presenta evidencia computacional para describir $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ en dimensiones $n \leq 8$. Como aplicación, se exhiben nuevos casos en los que la conjetura de Hodge se satisface para la 4-variedad de Klein de grado $m \leq 54$.

Abstract

The Hodge conjecture has been deeply studied by Aoki and Shioda for Fermat hypersurfaces through a spectral decomposition of cohomology. We present an analogous spectral description for Klein hypersurfaces, and using the Fermat-to-Klein monomial covering we transport information between the two decompositions. We describe the structure of the Hodge characters in Klein $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ by separating them into two components: a trivial component that lifts to linear characters in Fermat, and an exceptional component whose appearance depends on congruence conditions on the degree.

This perspective yields a closed formula for $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$, together with computational evidence for describing $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ in dimensions $n \leq 8$. As an application, we exhibit new cases in which the Hodge conjecture holds for the Klein fourfold of degree $m \leq 54$.

Agradecimientos

Esta tesis fue parcialmente financiada por ANID Fondecyt Regular grant 1231214 y ANID Fondecyt Iniciación grant 11251404.

Índice general

1. Conjetura de Hodge	9
1.1. Variedades algebraicas y variedades complejas	9
1.2. Cohomología de haces	21
1.3. Descomposición de Hodge	30
1.4. Teorema (1, 1) de Lefschetz	32
1.5. Ciclos algebraicos y conjetura de Hodge	34
1.6. Teoremas de Lefschetz y cohomología primitiva	39
1.7. Base de Griffiths	43
2. Hipersuperficies de Fermat	50
2.1. Descomposición espectral	51
2.2. Descenso galoisiano y acción de Galois	58
2.3. Demostración de la descomposición espectral en Fermat	63
2.4. Conjetura de Hodge en hipersuperficies de Fermat	67
2.5. Ciclos lineales	72
2.6. Teorema de Aoki–Shioda	91
3. Hipersuperficies de Klein	96
3.1. Descomposición espectral en Klein	97
3.2. Cubrimiento monomial de Fermat a Klein	103
3.3. Caracteres de Hodge en Klein, $n = 2$	109
3.4. Caracteres de Hodge en Klein, $n = 4$	122

3.5. Caracteres triviales	126
3.6. Levantamiento de $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$	130
3.7. Estructura general de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$	137
3.8. Clasificación completa de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$	144
3.9. Conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^n$ para $n \geq 4$ por búsqueda computacional	147
Bibliografía	152

Introducción

La conjetura de Hodge ocupa un lugar central en la geometría algebraica moderna. Formulada en el cruce entre topología, geometría compleja y teoría de ciclos algebraicos, propone una relación profunda entre las clases de cohomología de tipo (p, p) y las clases provenientes de subvariedades algebraicas. A pesar de los avances obtenidos desde su enunciado, sigue siendo uno de los problemas abiertos más importantes del área, y su estudio continúa inspirando técnicas, ejemplos y fenómenos de gran interés tanto desde el punto de vista geométrico como aritmético.

En esta tesis nos concentramos en una familia particularmente rica y estructurada de hipersuperficies: las hipersuperficies de Klein. El interés de este caso radica en que conserva parte de la simetría y del control explícito característicos de las hipersuperficies de Fermat, pero introduce una complejidad adicional que permite observar fenómenos nuevos. Esta combinación hace de las hipersuperficies de Klein un lugar natural para estudiar la conjetura de Hodge mediante métodos concretos y computables.

Un antecedente decisivo para esta perspectiva es el trabajo de Shioda en el caso de las hipersuperficies de Fermat. En ese contexto, la alta simetría de la ecuación permite descomponer la cohomología primitiva por caracteres y aislar así el conjunto de caracteres de Hodge $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{F})$, que resulta ser el objeto relevante para la conjetura de Hodge. Esta descripción aritmética y explícita sirve como modelo para el estudio que desarrollamos en el caso de Klein.

Motivados por esta teoría, formulamos una descomposición espectral análoga para la cohomología primitiva de las hipersuperficies de Klein y, a partir de ella, estudiamos la estructura de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ y su relación con los caracteres correspondientes en Fermat mediante un cubrimiento monomial explícito, con el fin de obtener nuevos casos en los que la conjetura de Hodge pueda verificarse en este contexto. Este análisis permite separar, dentro de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, las componentes que se levantan a caracteres lineales en Fermat de aquellas cuya descripción resulta ser más sutil, y reformular la pregunta geométrica en términos de la interacción entre la descomposición espectral y la aritmética de los caracteres, proporcionando así un criterio

concreto para detectar familias de hipersuperficies de Klein donde la conjetura de Hodge se satisface.

El desarrollo de la tesis sigue una progresión natural: primero se introducen los conceptos básicos que permitirán pasar de la geometría de las hipersuperficies a su estudio cohomológico, y luego se exploran dos familias especialmente simétricas, Fermat y Klein, donde la conjetura de Hodge adquiere una forma particularmente concreta. A lo largo de este desarrollo, el Capítulo 1 fija el lenguaje técnico y las herramientas que se utilizarán en el resto del trabajo; el Capítulo 2 desarrolla el caso de Fermat como modelo de referencia, introduciendo la descomposición espectral de Shioda y la formulación aritmética de los caracteres de Hodge; y el Capítulo 3 traslada esa perspectiva al caso de Klein, donde se obtiene una descripción estructural de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ y se analiza computacionalmente la componente excepcional $\mathcal{E}_m^n$.

Capítulo 1

Conjetura de Hodge

El objetivo de este capítulo es introducir el marco geométrico y cohomológico necesario para formular la conjetura de Hodge en el contexto de hipersuperficies suaves y preparar las herramientas que serán utilizadas en el resto de la tesis. Para ello, se desarrollan las nociones básicas de variedades algebraicas y complejas, la cohomología de haces y la descomposición de Hodge, culminando con la formulación de la conjetura y su relación con los ciclos algebraicos.

Finalmente, se presentan las herramientas específicas que serán fundamentales en los capítulos siguientes: los teoremas de Lefschetz y la cohomología primitiva, que permiten aislar la componente relevante para la conjetura en hipersuperficies, y el isomorfismo de Griffiths, que proporciona una descripción explícita de dicha cohomología y sirve como punto de partida para la descomposición espectral estudiada posteriormente en las hipersuperficies de Fermat y Klein.

1.1. Variedades algebraicas y variedades complejas

En esta sección introducimos el lenguaje geométrico que será utilizado a lo largo de la tesis. Presentamos las nociones básicas de variedades algebraicas afines y proyectivas, suavidad, haz estructural y analitificación, fijando la terminología y notación que permitirá pasar de las ecuaciones que definen las hipersuperficies a su estudio cohomológico. En particular, este marco será esencial para formular posteriormente la descomposición de Hodge y la conjetura de Hodge en el contexto de hipersuperficies suaves.

Trabajaremos principalmente sobre el cuerpo de los números complejos $k = \mathbb{C}$, aunque varios de los resultados iniciales se formularán sobre un cuerpo algebraicamente cerrado arbitrario. Como referencias generales para esta sección utilizaremos [6] para la geometría algebraica

clásica, [5] para la perspectiva analítica y [19] para la teoría de Hodge y su relación con el enfoque analítico.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Denotemos $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$ al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en k .

Definición 1.1.1. Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ un subconjunto de polinomios, entonces

$$V(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall f \in S\}$$

es una subvariedad afín de k^n .

A continuación mostramos algunos ejemplos sencillos:

- $V(\emptyset) = k^n$ y $V(1) = \emptyset$ son subvariedades afines.
- $V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$, es decir, cada punto en k^n es una subvariedad afín.
- La parábola $V(Y - X^2) \subseteq k^2$ es una subvariedad afín.
- La unión de dos rectas $V(XY) = V(X) \cup V(Y) \subseteq k^2$ es una subvariedad afín.
- Una curva elíptica $V(Y^2 - X^3 - aX - b) \subseteq k^2$ es una subvariedad afín.

La intersección arbitraria y la unión finita de subvariedades afines es nuevamente una subvariedad afín, en otras palabras, la colección $\{V(S)\}_{S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)}$ verifica los axiomas de conjuntos cerrados de una topología.

Definición 1.1.2. Definimos la topología de Zariski de k^n como aquella cuyos cerrados son las subvariedades afines. Denotamos por $\mathbb{A}^n$ a k^n dotado de la topología de Zariski y lo llamaremos el espacio afín.

Es útil introducir la construcción dual a $S \mapsto V(S)$, que asocia a un subconjunto su ideal de funciones que se anulan en él; esta correspondencia es la base del diccionario algebraico-geométrico.

Definición 1.1.3. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto. Definimos el ideal de V como

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) : f(x) = 0, \quad \forall x \in V\}.$$

Tal como se espera, $\mathcal{I}(V)$ es un ideal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Mostramos algunos resultados:

- $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.
- Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un conjunto. Entonces $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad solo si X es una subvariedad afín. De hecho,

$$V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\text{Zar}}$$

es la adherencia de X respecto a la topología de Zariski.

- Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$. Moralmente, mientras más puntos se imponen, menos funciones se anulan en todas partes. Por ello decimos que $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ es decreciente.

La noción geométrica de irreducibilidad se traduce algebraicamente en una condición sobre el ideal que define la variedad; la siguiente proposición establece esta correspondencia fundamental.

Proposición 1.1.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín. Entonces, X es irreducible si y solo si $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal primo.*

Aplicando el resultado anterior al caso global obtenemos una observación inmediata sobre la estructura de $\mathbb{A}^n$.

Corolario 1.1.5. $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ y $\mathbb{A}^n$ es irreducible.

Demostración. En efecto, todo polinomio $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula sobre $\mathbb{A}^n$ debe ser nulo. Como $\langle 0 \rangle$ es un ideal primo, se sigue por la proposición 1.1.4 que $\mathbb{A}^n$ es irreducible. $\square$

Desde el corolario 1.1.5 se sigue que $\mathbb{A}^n$ no es Hausdorff para $n > 0$. Aunque la topología de Zariski no verifica esta propiedad, en geometría algebraica se usa una noción diferente que juega un papel análogo: la propiedad de *separación*, la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología de Zariski. Las variedades afines son siempre separadas.

Definición 1.1.6. *Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea $I \subseteq A$ un ideal. El conjunto*

$$\sqrt{I} := \{f \in A : \exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1} : f^m \in I\}$$

es un ideal de A verificando $I \subseteq \sqrt{I}$, llamado el radical de I . Decimos que I es un ideal radical si $I = \sqrt{I}$.

El radical de un ideal recoge exactamente las ecuaciones que se anulan sobre el conjunto geométrico asociado y aclara la relación entre la descripción por ecuaciones y la descripción por conjuntos de puntos. Equivalentemente, existe la caracterización algebraica: I es radical si y solo si el anillo cociente $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ es *reducido*, es decir, no contiene elementos nilpotentes.

Ejemplo 1. Considere el ideal $I = \langle X^2 \rangle \subseteq k[X]$. Entonces $\sqrt{I} = \langle X \rangle$ y ambos definen la misma variedad

$$V(I) = V(\sqrt{I}) = \{0\},$$

pero el anillo coordinado correspondiente al ideal I es $k[X]/\langle X^2 \rangle$ y no es reducido: la clase de X es nilpotente. En cambio $k[X]/\langle X \rangle \cong k$ es reducido.

El ejemplo anterior es clásico: muestra que un mismo conjunto de puntos puede llevar distinta información algebraica. En la terminología geométrica se dice que $V(X^2) = \{0\}$ es un *punto doble* de $\mathbb{A}^1$.

Definición 1.1.7. Una variedad algebraica afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ se dice *reducida* si su ideal $\mathcal{I}(X) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ es radical. Equivalentemente, si su anillo de coordenadas $\mathcal{O}(X)$ es reducido.

Observación 1.1.8. La topología de Zariski no detecta la presencia de nilpotentes: dos ideales I y $\sqrt{I}$ definen el mismo conjunto de puntos $V(I) = V(\sqrt{I})$. La condición de ser reducido es, por tanto, algebraica y no topológica.

Convención. A lo largo de este capítulo asumiremos que todas las variedades algebraicas afines son reducidas.

Proposición 1.1.9. Tenemos las siguientes contenciones

$$\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$$

para todo anillo conmutativo con unidad A .

El resultado central que conecta la geometría de ceros con la estructura algebraica de los ideales es el teorema de los ceros de Hilbert, o más conocido como *Nullstellensatz*, cuya versión fuerte describe exactamente el ideal de funciones que se anulan sobre un conjunto.

Teorema 1.1.10 (Hilbert '1893). Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado e $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ un ideal.

- (**Nullstellensatz débil**). Si $I = \mathfrak{m}$ es un ideal maximal, entonces

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

para ciertos $a_1, \dots, a_n \in k$.

- (**Nullstellensatz**). Para todo ideal I se cumple que

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

En particular, $V(I) = \emptyset$ si y solo si $I = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Observación 1.1.11. *Muchos de los resultados fundamentales de la geometría algebraica, en particular el teorema de los ceros de Hilbert, requieren que el cuerpo base k sea algebraicamente cerrado. Por esta razón, se fija esta hipótesis desde el comienzo.*

Observación 1.1.12. *Como consecuencia del Hilbert-Nullstellensatz, la aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una biyección decreciente (con inversa $I \mapsto V(I)$) entre:*

- *Las subvariedades afines de $\mathbb{A}^n$ y los ideales radicales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.*
- *Las subvariedades afines irreducibles de $\mathbb{A}^n$ y los ideales primos de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.*
- *Los puntos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.*

Definición 1.1.13. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Una función regular en X es una función*

$$f : X \rightarrow k$$

tal que para todo punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $U_x \ni x$ y polinomios $P_x, Q_x \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ con $Q_x(x) \neq 0$ tales que

$$f|_{U_x} = \frac{P_x}{Q_x} \Big|_{U_x},$$

y denotamos por

$$\mathcal{O}(X) := \{f : X \rightarrow k : \text{función regular}\}$$

al k -álgebra de funciones regulares sobre X .

Las funciones regulares son las que se comportan localmente como cocientes de polinomios. Es importante observar que se define funciones regulares sobre conjuntos localmente cerrados, así el k -álgebra $\mathcal{O}(X)$ está bien definido para conjuntos X , ya sean abiertos o cerrados.

Proposición 1.1.14. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski, entonces*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\text{res}_X} \mathcal{O}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, y en particular $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$.

Lo anterior implica que toda función regular f sobre un cerrado X es la restricción de un polinomio $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$ a X , en particular, $\mathcal{O}(X)$ coincide con nuestra notación $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) := k[X_1, \dots, X_n]$ cuando $X = \mathbb{A}^n$.

Ejemplo 2. Considere la hipérbola $X = V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$. Obsérvese que en X se verifica $xy = 1$, de modo que necesariamente $x \neq 0$ e $y \neq 0$ en todo punto de X ; por tanto la expresión $1/x$ está bien definida en todo X . Definimos la función regular

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := \frac{1}{x}.$$

Como $1 - xy \in \mathcal{I}(X)$, en el anillo coordenado $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$ la igualdad $1 = xy$ se cumple ya a nivel de clases, y por tanto la función $1/x$ coincide con la restricción del polinomio $P(x, y) = y$ sobre X .

Definición 1.1.15. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Se define el haz de funciones regulares en X como el haz de k -álgebras $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto $U \subseteq X$ asocia la k -álgebra

$$\mathcal{O}_X(U) := \mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow k : \text{función regular}\}.$$

Definición 1.1.16. Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo regular si es la restricción de una función polinomial $F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ tal que $F(X) \subseteq Y$. En particular, un isomorfismo regular es un morfismo regular con inversa regular, en tal caso escribiremos $X \cong Y$.

Proposición 1.1.17. Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Existe una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos regulares} \\ f : X \rightarrow Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos de } k\text{-álgebras} \\ \phi : \mathcal{O}(Y) \mapsto \mathcal{O}(X) \end{array} \right\}$$

$$f \longmapsto f^*$$

Esto establece una correspondencia adjunta entre morfismos geométricos y morfismos de k -álgebras. En particular, $X \cong Y$ son isomorfas si y solo si $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$ son isomorfas como k -álgebras.

Ejemplo 3. La aplicación $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^2$ corresponde al morfismo de anillos $f^* : k[x] \rightarrow k[x]$ con $f^*(x) = x^2$. Esto ilustra la correspondencia geométrica-álgebraica.

A partir de los ejemplos concretos en $\mathbb{A}^n$ es natural abstraer el objeto que los representa: la variedad afín como espacio anillado, lo que permite trabajar de forma intrínseca sin referencia a una inmersión en $\mathbb{A}^n$.

Definición 1.1.18. Una variedad algebraica afín sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo a $(V(S), \mathcal{O}_{V(S)})$.

Es importante tomarse un tiempo para recordar las construcciones que hemos hecho: escribimos $\mathbb{A}^n$ para el conjunto k^n dotado de la topología de Zariski, aquella cuyos cerrados son

$$V(S) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall f \in S\},$$

y sobre este conjunto tenemos un haz de k -álgebras

$$\mathcal{O}_{V(S)} : U \longmapsto \mathcal{O}_{V(S)}(U) := \{f : U \rightarrow k \text{ función regular}\},$$

y decimos que $(V(S), \mathcal{O}_{V(S)})$ es una *subvariedad afín*, podemos pensar en estos como objetos concretos de $\mathbb{A}^n$ definidos por ecuaciones polinomiales. La definición [1.1.18](#) introduce las *variedades algebraicas afines* como aquellos espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ que son isomorfos a las subvariedades afines $(V(S), \mathcal{O}_{V(S)})$, en otras palabras, las variedades algebraicas afines son objetos algebraicos abstractos que se pueden realizar como objetos geométricos concretos.

Definición 1.1.19. *Una variedad algebraica sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que*

1. *X es un espacio topológico noetheriano.*
2. *Todo punto de X admite una vecindad abierta $U \subseteq X$ y un haz de k -álgebras $\mathcal{O}_U$ tal que $(U, \mathcal{O}_U)$ es una variedad algebraica afín.*

La noción anterior se globaliza mediante un atlas: pegando cartas afines obtenemos las variedades algebraicas en el sentido clásico, análogas a la construcción de variedades diferenciables por atlas.

Definición 1.1.20. *Sea X un espacio topológico noetheriano. Entonces un atlas algebraico en X consiste en un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , y una colección de homeomorfismos*

$$\phi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i,$$

donde $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ es una variedad algebraica afín, verificando que el cambio de cartas

$$\psi_{ji} := \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es un isomorfismo regular de variedades algebraicas afines.

La variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ asociada al atlas algebraico es aquella obtenida al pegar los haces estructurales en cada intersección de abiertos $U_i \cap U_j$.

Definición 1.1.21. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una subvariedad afín y sea $\mathcal{O}_{X,x}$ el anillo local en $x \in X$. Definimos la dimensión local de X en x como

$$\dim_x X := \dim \mathcal{O}_{X,x},$$

y la codimensión local como

$$\text{codim}_x(X) := n - \dim_x X.$$

Definición 1.1.22. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una subvariedad afín dada por $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, decimos que $x \in X$ es suave si

$$\text{Jac}(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j}$$

tiene rango $\text{codim}_x(X)$. Decimos que X es suave si es suave en cada $x \in X$.

Observación 1.1.23. La definición de suavidad no depende de la elección de los polinomios $f_1, \dots, f_r$ que definen a la subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$. En efecto, el anillo $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es noetheriano, por lo que el ideal $\mathcal{I}(X)$ es finitamente generado, y distintos sistemas de generadores producen la misma condición sobre el rango del jacobiano.

Ejemplo 4. Consideremos en $\mathbb{A}^3$ las funciones

$$f_1(x, y, z) := z - x^2 - y^2, \quad f_2(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1,$$

y la subvariedad afín

$$X := V(f_1, f_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : z - x^2 - y^2 = 0, x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Observamos que X es la circunferencia definida por $x^2 + y^2 = 1$ situada en la altura $z = 1$.

El jacobiano es

$$\text{Jac}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere los siguientes menores 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = -2x, \quad \det \begin{pmatrix} -2y & 1 \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = -2y,$$

los cuales alguno de ellos es no nulo, pues no es posible $x = 0$ e $y = 0$ simultáneamente en X . Luego,

$$\text{rg}(\text{Jac}(x, y, z)) = 2 = \text{codim}_x(X)$$

probando que X es una curva suave de $\mathbb{A}^3$.

Definición 1.1.24. Decimos que una variedad algebraica X es suave si para toda carta afín $U \subseteq X$, el abierto afín U es una variedad algebraica afín suave.

Definición 1.1.25. El espacio proyectivo de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ módulo multiplicación por escalar

$$\mathbb{P}^n = \{[x_0 : \dots : x_n] : (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\},$$

y decimos que $[x_0 : \dots : x_n]$ son coordenadas homogéneas.

Trabajar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es natural tanto por razones conceptuales como técnicas. Por un lado, los polinomios homogéneos de grado m definen de manera intrínseca secciones del fibrado lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$, lo que permite interpretar las ecuaciones homogéneas como objetos geométricos bien definidos en $\mathbb{P}^n$. Por otro lado, $\mathbb{P}^n$ puede entenderse como una compactificación natural de $\mathbb{A}^n$, obtenida al añadir un hiperplano en el infinito, de modo que el comportamiento asintótico de las ecuaciones algebraicas queda incorporado de forma geométrica y finita. Técnicamente, cada carta afín $U_i = \{x_i \neq 0\}$ es canónicamente isomorfa a $\mathbb{A}^n$, lo que permite realizar cálculos locales en coordenadas afines sin perder el control global que proporciona la compacidad del espacio proyectivo.

Ejemplo 5. La parábola afín $y = x^2 \subseteq \mathbb{A}^2$ se homogeneiza en $\mathbb{P}^2$ por la ecuación $YZ = X^2$ (si en coordenadas homogéneas escribimos $[X : Y : Z]$ y $x = X/Z$, $y = Y/Z$). En la carta $Z = 0$ la ecuación se reduce a $X^2 = 0$, por lo que la parábola adquiere un único punto en el infinito $[0 : 1 : 0]$.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica, su estructura es heredada naturalmente desde $(\mathbb{A}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}})$ al cocientar.

Definición 1.1.26. Una subvariedad cerrada de una variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica $(Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que $Y \subseteq X$ es cerrado y $\mathcal{O}_Y \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$.

Definición 1.1.27. Sea X una variedad algebraica. Diremos que X es una variedad algebraica proyectiva si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo.

Definición 1.1.28. Sea X una variedad algebraica (afín o proyectiva) sobre un cuerpo k .

- Una hipersuperficie afín de $\mathbb{A}^n$ es el cero de un polinomio $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ no constante:

$$X = V(F) = \{x \in \mathbb{A}^n : F(x) = 0\}.$$

- Una hipersuperficie proyectiva de $\mathbb{P}^n$ es el cero de un polinomio homogéneo $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ de grado $m \geq 1$:

$$X = V(F) = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n : F(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

y decimos que X es de grado $m = \deg F$.

Observación 1.1.29. Sea $X = V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie afín. Entonces X es suave si y sólo si satisface el criterio del Jacobiano, es decir,

$$\nabla F(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in X.$$

En el caso proyectivo, sea $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo F de grado m . Dado que el gradiente $\nabla F(x)$ depende del representante $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, hay que interpretar la condición de suavidad con cuidado. La identidad de Euler para polinomios homogéneos

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = m F,$$

implica que la condición todas las derivadas parciales de F se anulan es invariante por escala.

Por tanto, X es suave si y sólo si no existe ningún punto $[x] \in X$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Ejemplo importante. Sea $m \geq 3$, la variedad algebraica proyectiva

$$X = \{K = x_0^{m-1}x_1 + x_1^{m-1}x_2 + \dots + x_{n+1}^{m-1}x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$$

es llamada la hipersuperficie de Klein de grado m y dimensión n , el gradiente correspondiente es

$$\nabla K = ((m-1)x_0^{m-2}x_1 + x_{n+1}^{m-1}, (m-1)x_1^{m-2}x_2 + x_0^{m-1}, \dots, (m-1)x_{n+1}^{m-2}x_n + x_1^{m-1})$$

y es no nulo. Efectivamente, si existiera $x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in X$ tal que $\nabla K(x) = 0$ entonces

$$x_{i-1}^{m-1} = -(m-1)x_i^{m-2}x_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Si alguna coordenada x_i se anula, la igualdad anterior implica que $x_{i-1} = 0$. Iterando este argumento de manera cíclica se concluye que todas las coordenadas se anulan, lo cual es imposible en el espacio proyectivo. Por lo tanto, todas las coordenadas x_i son no nulas.

En ese caso podemos multiplicar todas las ecuaciones anteriores, obteniendo

$$\prod_{i=0}^{n+1} x_i^{m-1} = (-1)^{n+2} (m-1)^{n+2} \prod_{i=0}^{n+1} x_i^{m-1}.$$

Como todas las coordenadas son no nulas, se puede simplificar el producto, lo que fuerza la igualdad $(m-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$, imposible para $m \geq 3$. Esto prueba que la hipersuperficie de Klein de grado $m \geq 3$ es suave.

Habiendo fijado el marco algebraico y el ejemplo fundamental de hipersuperficie proyectiva, conviene cambiar de perspectiva: para estudiar cohomología, formas y las estructuras analíticas que intervienen en la teoría de Hodge es esencial considerar la variedad con su topología analítica junto con sus funciones holomorfas. Cuando trabajamos sobre $\mathbb{C}$, toda variedad algebraica suave adquiere de forma natural una estructura de variedad compleja mediante el proceso de *analitificación*; esto permite aplicar herramientas analíticas (formas diferenciables, operadores $\partial, \bar{\partial}$, teoría de Hodge armónica, etc.) que no están disponibles en la categoría algebraica. En particular, la suavidad algebraica garantiza que localmente la variedad está definida por ecuaciones holomorfas, de modo que los argumentos locales del análisis complejo (teorema de la función implícita holomorfa, coordenadas locales) son aplicables. Por esta razón, a continuación revisamos brevemente las nociones básicas de geometría compleja que necesitaremos.

Definición 1.1.30. Una variedad compleja de dimensión n es un par $(X, \mathcal{A})$ donde X es un espacio topológico Hausdorff, de segunda numerabilidad, y $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas holomorfo, es decir, $(U_i)_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X , las cartas

$$\phi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \phi(U_i) \subseteq \mathbb{C}^n$$

son homeomorfismos, y las funciones de transiciones $\psi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ son biholomorfismos.

O equivalentemente:

Definición 1.1.31. Una variedad compleja de dimensión n es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico Hausdorff, de segunda numerabilidad, $\mathcal{O}_X$ un haz de $\mathbb{C}$ -álgebras y para cada $p \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_V)$$

es un isomorfismo de espacios anillados, donde $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto y $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ es el haz de funciones holomorfas. Decimos que $\mathcal{O}_X$ es el haz de funciones holomorfas de X .

Observación 1.1.32. Es importante destacar que estamos considerando $\mathbb{C}^n$ con su topología analítica, aquella heredada de la topología usual de $\mathbb{R}^{2n}$.

Teorema 1.1.33. Toda variedad algebraica suave sobre $\mathbb{C}$ es una variedad compleja.

Demostración. Basta verificar el caso $X = V(f_1, \dots, f_r)$ afín. Sea $x \in X$, entonces la suavidad implica que el jacobiano

$$\text{Jac}(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$$

tiene rango $s = \text{codim}_x X$. Reordenando coordenadas y eligiendo s de las f_i convenientes, escribimos $x = (x', y) \in \mathbb{C}^{\dim X} \times \mathbb{C}^s$ de modo que la submatriz $\partial(f_1, \dots, f_s)/\partial y(x)$ es invertible. El teorema de la función implícita holomorfa permite deducir que X es el gráfico de una función holomorfa sobre un abierto analítico de $\mathbb{C}^{\dim X}$, en particular, X es una variedad compleja de dimensión $\dim X$. El caso general se deduce inmediatamente al considerar las cartas locales como las proyecciones que surgen desde el teorema de la función implícita holomorfa, es directo que los cambios de cartas son holomorfos al ser composición de proyecciones y soluciones de ecuaciones holomorfas. Esto define un atlas holomorfo cuyas funciones de transiciones son holomorfas. $\square$

Observación 1.1.34. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica suave, entonces decimos que su analitificación es la variedad compleja $(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$, donde $X^{\text{an}} = X$ como conjunto y $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ es el haz de funciones holomorfas que induce la construcción anterior.

La relación inversa también es profunda: subconjuntos definidos analíticamente en $\mathbb{P}^n$ provienen algebraicamente de ecuaciones homogéneas; este hecho se conoce como el teorema de Chow.

Teorema 1.1.35 (Chow '49). Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un subconjunto analítico cerrado, entonces X es una subvariedad algebraica proyectiva. Es decir, existen polinomios homogéneos $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ tales que

$$X = V(F_1, \dots, F_r).$$

Ejemplo 6. Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un retículo y considere la variedad compleja compacta $E = \mathbb{C}/\Lambda$ (un toro complejo de dimensión 1). Las funciones de Weierstrass $\wp(z) = \wp(z; \Lambda)$ y $\wp'(z)$ son meromorfas en $\mathbb{C}$ y descienden a funciones meromorfas en E . La aplicación holomorfa

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad z \longmapsto [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$$

define una inmersión analítica cuya imagen $\phi(E) \subseteq \mathbb{P}^2$ es un subconjunto analítico cerrado. Por el teorema de Chow, $\phi(E)$ es entonces una subvariedad algebraica proyectiva; en efecto, las funciones $\wp$ y $\wp'$ satisfacen la ecuación algebraica clásica

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\Lambda)\wp(z) - g_3(\Lambda),$$

de modo que la imagen es la curva elíptica dada por la cúbica de Weierstrass

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

con constantes g_2, g_3 determinadas por el retículo Λ .

Este ejemplo ilustra cómo una construcción analítica produce una ecuación polinomial explícita en $\mathbb{P}^2$.

Con estas nociones básicas fijadas pasamos a la siguiente sección, donde desarrollaremos con detalle las herramientas cohomológicas necesarias: construiremos las teorías y técnicas que nos permiten extraer información topológica y de Hodge a partir de las ecuaciones que definen nuestras variedades. Esta preparación será la base técnica para los teoremas de Lefschetz y la descripción explícita de la cohomología primitiva que seguiremos en las secciones posteriores.

1.2. Cohomología de haces

En esta sección se desarrollan las herramientas cohomológicas fundamentales para las siguientes secciones. Nuestro objetivo es doble: (i) presentar la cohomología de haces desde la perspectiva conceptual de los *functores derivados* —sucesiones exactas largas, resoluciones e interpretaciones functoriales—; y (ii) proporcionar las técnicas prácticas que emplearemos en los ejemplos concretos: cohomología de Čech, resoluciones acíclicas, cohomología de De Rham y de Dolbeault, y la comparación algebraico–analítica (GAGA). A lo largo de la exposición enfatizaremos criterios prácticos de aciclicidad y cómo traducir argumentos analíticos a algebraicos en el caso proyectivo suave.

Asumimos conocimientos elementales de teoría de categorías y homología (complejos, exactitud, resoluciones) y nociones básicas de haces, en particular de los haces estructurales típicos que se utilizarán en la tesis, como el haz constante, el haz estructural $\mathcal{O}_X$, los haces de p -formas Ω_X^p y los haces de secciones de fibrados vectoriales.

1.2.1. La cohomología como functor derivado

Definimos aquí, de forma concisa, los grupos $H^i(X, \mathcal{F})$ como los functores derivados derechos de $\Gamma(X, \cdot)$. La discusión será breve: damos la caracterización formal y señalamos el procedimiento práctico de cálculo mediante resoluciones acíclicas.

Sea X un espacio topológico y $\mathbf{Ab}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos sobre X . El functor de secciones globales

$$\begin{aligned}\Gamma(X, \cdot) : \mathbf{Ab}(X) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)\end{aligned}$$

es exacto por la izquierda: si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es exacta entonces

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'')$$

también lo es. En general, esta sucesión no es exacta a la derecha, lo que motiva la introducción de una construcción que “recupere” la información perdida.

La cohomología de haces se define como los funtores derivados derechos de $\Gamma(X, \cdot)$:

$$H^i(X, \mathcal{F}) := R^i\Gamma(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0.$$

Más precisamente, los grupos de cohomología de haces $H^i(X, \mathcal{F})$ se definen como los grupos que permiten completar canónicamente esta sucesión corta a una sucesión exacta larga

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots,$$

para toda sucesión exacta corta de haces. Esta propiedad caracteriza a los funtores $H^i(X, \cdot)$ de manera única, salvo isomorfismo canónico. Acá, $H^0(X, \mathcal{F}) := \Gamma(X, \mathcal{F})$.

A continuación, mostramos un esquema que permite calcular los grupos de cohomología de haces de manera concreta.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X . Decimos que $\mathcal{F}$ es acíclico si*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall i > 0.$$

Intuitivamente, un haz acíclico no ofrece obstrucciones para pegar secciones locales en secciones globales.

Definición 1.2.2. *Sea $\mathcal{F}$ un haz. Una resolución acíclica de $\mathcal{F}$ es una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

donde cada I^j es un haz acíclico.

Proposición 1.2.3. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

una resolución acíclica de $\mathcal{F}$, es decir, cada I^j es acíclico y la sucesión es exacta. Aplicando $\Gamma(X, \cdot)$ obtenemos el complejo de secciones

$$\Gamma(X, I^\bullet) : \quad \Gamma(X, I^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, I^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma(X, I^2) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Entonces, para todo $k \geq 0$

$$H^k(\Gamma(X, I^\bullet)) := \frac{\ker(\Gamma(X, I^k) \xrightarrow{d^k} \Gamma(X, I^{k+1}))}{\operatorname{im}(\Gamma(X, I^{k-1}) \xrightarrow{d^{k-1}} \Gamma(X, I^k))} \cong H^k(X, \mathcal{F}).$$

Véase [9], *Cohomology of Sheaves*, Part I, secciones «Injective resolutions» y «Right derived functors».

En esencia, si reemplazamos un haz por una resolución cuyos términos son acíclicos, entonces toda la cohomología del haz puede recuperarse a partir de las secciones globales del complejo resultante. La existencia de resoluciones inyectivas garantiza que, en la práctica, este procedimiento puede llevarse a cabo utilizando cualquier resolución acíclica conveniente.

La proposición 1.2.3 será clave en esta sección: la construcción de las cohomologías clásicas —singular, De Rham, Dolbeault— se efectúan precisamente mediante resoluciones acíclicas de los haces correspondientes, lo que permite obtener isomorfismos entre estas y la cohomología del haz involucrado.

Antes de ilustrar este esquema en los ejemplos clásicos, exponemos brevemente la cohomología de Čech por razones pedagógicas: ofrece una construcción explícita de cociclos y, cuando se dispone de buenos recubrimientos, permite identificar de forma efectiva la cohomología de Čech con la cohomología de haces con el criterio de Leray.

1.2.2. Cohomología de Čech

La cohomología de Čech ofrece un complejo explícito asociado a un recubrimiento abierto; la veremos como herramienta práctica para cálculos locales–globales y para la identificación con $H^k(X, \mathcal{F})$ en presencia de buenos cubrimientos.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X . Para $p \geq 0$ definimos el grupo de p -cocadenas de Čech por

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}).$$

El diferencial $\delta : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ está dado por la fórmula habitual, de modo que $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ es un complejo. La cohomología de Čech respecto de $\mathcal{U}$ se define como

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^p(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ (es decir, hay una aplicación $\phi : J \rightarrow I$ tal que $V_j \subseteq U_{\phi(j)}$ para todo j), entonces existe un morfismo natural $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ inducido por la restricción de secciones; por tanto al tomar el colímite sobre todos los refinamientos definimos la cohomología de Čech global:

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Hay un morfismo canónico, functorial en $\mathcal{F}$ y en el recubrimiento,

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}),$$

compatible con refinamientos, que induce $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$.

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X . Decimos que $\mathcal{U}$ es acíclico para $\mathcal{F}$ si para todo conjunto de índices $i_0 < \dots < i_p$ se verifica

$$H^q(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall q > 0.$$

Proposición 1.2.5 (Criterio de Leray). Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X . Si $\mathcal{U}$ es acíclico para $\mathcal{F}$, entonces la aplicación canónica $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$ es un isomorfismo para todo $k \geq 0$.

Ejemplo 7. Sea $X = \mathbb{P}^1$ junto con su haz estructural $\mathcal{O}_X$. Tomemos el cubrimiento estándar $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ dado por $U_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$ con coordenada $t = x_1/x_0$ y $U_1 = \{x_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$ con coordenada $s = x_0/x_1 = t^{-1}$. Entonces

$$\mathcal{O}_X(U_0) = \mathbb{C}[t], \quad \mathcal{O}_X(U_1) = \mathbb{C}[s], \quad \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

El complejo de Čech es

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}[s] \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}[t, t^{-1}],$$

y el mapa de borde está dado por

$$\delta(f_0, f_1) = f_1|_{U_0 \cap U_1} - f_0|_{U_0 \cap U_1}.$$

Dado un polinomio de Laurent $g(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ lo descomponemos como $g(t) = p(t) + q(t^{-1})$, entonces $\delta(-q, p) = p + q = g$. Así δ es sobreyectiva y $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = 0$. Como $U_0, U_1, U_0 \cap U_1$ son afines, entonces $\mathcal{U}$ es acíclico para $\mathcal{O}_X$. Por el criterio de Leray [1.2.5](#) se obtiene que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Este cálculo ilustra que, cuando existe un recubrimiento acíclico adecuado, la cohomología de Čech calcula la cohomología de haces. En la práctica, Čech es una herramienta efectiva para cálculos explícitos siempre que se disponga de buenos recubrimientos.

Definición 1.2.6. *Un haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X se dice fino si para todo cubrimiento abierto localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$, existe una familia de endomorfismos $\{\varphi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}_{i \in I}$ tales que*

1. *para cada i el soporte de φ_i está contenido en U_i .*

2. $\sum_{i \in I} \varphi_i = \text{id}_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 8. *Sea M una variedad $\mathcal{C}^\infty$ paracompacta. El haz de funciones suaves $\mathcal{C}_M^\infty$ es fino: En $\mathbb{R}^n$ existen particiones de la unidad de clase $\mathcal{C}^\infty$; como M es localmente $\mathbb{R}^n$ y paracompacto, para cualquier recubrimiento localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ existe una partición de la unidad suave $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ con $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_i$. Multiplicar secciones por φ_i define endomorfismos $\mathcal{C}_M^\infty \rightarrow \mathcal{C}_M^\infty$, $f \mapsto f\varphi_i$ cuya suma es la identidad; por tanto $\mathcal{C}_M^\infty$ es un haz fino. Análogamente, para $p \geq 0$, el haz $\mathcal{A}_M^p$ de p -formas suaves en M es fino.*

Intuitivamente, las φ_i juegan el papel de una *partición de la unidad* actuando sobre las secciones del haz.

Observación 1.2.7. *A diferencia del caso suave, el haz holomorfo $\mathcal{O}_X$ y el haz de p -formas holomorfas Ω_X^p no son finos: no existen particiones de la unidad holomorfas, pues por el principio del máximo una función holomorfa con soporte compacto es nula.*

Teorema 1.2.8. *Si X es paracompacto y $\mathcal{F}$ es un haz fino sobre X , entonces*

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall k > 0,$$

es decir, $\mathcal{F}$ es un haz acíclico.

Definición 1.2.9. *Un haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X se dice flasque si para todo par de abiertos $V \subseteq U \subseteq X$, la aplicación de restricción*

$$\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

es sobreyectiva.

Teorema 1.2.10. *Si $\mathcal{F}$ es un haz flasque de grupos abelianos sobre un espacio topológico X , entonces $\mathcal{F}$ es acíclico, es decir,*

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall k > 0.$$

Los teoremas 1.2.8 y 1.2.10 son los criterios de aciclicidad que usaremos a continuación, para combinarlos con la proposición de resoluciones acíclicas 1.2.3.

1.2.3. Cohomología singular

Construiremos la resolución acíclica del haz constante usando cocadenas singulares; con ello conectamos la cohomología de haces con la cohomología singular clásica.

Sea X un espacio topológico. Denotemos por $\underline{\mathbb{Z}}$ el haz constante asociado al grupo abeliano $\mathbb{Z}$.

Para cada abierto $U \subseteq X$, escribiremos $C_{\text{sing}}^k(U, \mathbb{Z})$ al grupo de cocadenas singulares de grado k con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

La asignación $U \mapsto C_{\text{sing}}^k(U, \mathbb{Z})$ define un prehaz de grupos abelianos, cuya hacificación será denotada por $\mathcal{C}_{\text{sing}}^k$. Los diferenciales singulares inducen entonces el complejo de haces

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^0 \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^1 \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^2 \longrightarrow \dots$$

Las secciones de $\mathcal{C}_{\text{sing}}^k$ pueden extenderse por cero: si $U \subseteq V$ y $s \in \Gamma(U, \mathcal{C}_{\text{sing}}^k)$, definimos una sección sobre V coincidiendo con s en U y siendo cero fuera de U . Por consiguiente, $\mathcal{C}_{\text{sing}}^k$ es un haz flasque y, en particular acíclico por el teorema 1.2.10.

Si X es paracompacto y localmente contráctil, este complejo es una resolución acíclica del haz constante $\underline{\mathbb{Z}}$.

Tomando secciones globales se obtiene

$$\Gamma(X, \mathcal{C}_{\text{sing}}^\bullet) = C_{\text{sing}}^\bullet(X, \mathbb{Z}) / C_{\text{sing}}^\bullet(X, \mathbb{Z})_0,$$

donde $C_{\text{sing}}^\bullet(X, \mathbb{Z})_0$ denota el subcomplejo de cocadenas localmente nulas. Este subcomplejo es acíclico; en efecto, la subdivisión baricéntrica permite reducir las cocadenas a símlices arbitrariamente pequeños, y la homotopía estándar entre subdivisión e identidad muestra que toda cocadena localmente nula es un coborde. Por consiguiente, el cociente anterior tiene la misma cohomología que el complejo singular usual, es decir,

$$H^k(\Gamma(X, \mathcal{C}_{\text{sing}}^\bullet)) \cong H_{\text{sing}}^k(X, \mathbb{Z}).$$

Por la proposición general sobre resoluciones acíclicas [1.2.3](#), se obtiene un isomorfismo canónico

$$H^k(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong H_{\text{sing}}^k(X, \mathbb{Z}), \quad \forall k \geq 0.$$

En particular, para espacios topológicos razonables, la cohomología de haces del haz constante $\underline{\mathbb{Z}}$ coincide con la cohomología singular.

1.2.4. Teorema de De Rham

El lema de Poincaré y la fineza de los haces de formas diferenciales permiten identificar el haz constante con el complejo de formas suaves; así se obtiene el isomorfismo de De Rham que veremos a continuación.

Sea M una variedad diferenciable paracompacta de clase $\mathcal{C}^\infty$, denotemos por $\mathcal{A}_M^p$ el haz de p -formas diferenciales suaves reales sobre M . Tenemos el operador exterior

$$d : \mathcal{A}_M^k \longrightarrow \mathcal{A}_M^{k+1}$$

que en coordenadas locales (x_i) actúa sobre funciones mediante

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

y se extiende por antisimetrización a formas diferenciales de grado superior, este verifica que $d^2 = 0$.

El complejo de haces

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A}_M^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_M^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_M^2 \xrightarrow{d} \dots$$

es una resolución del haz constante $\underline{\mathbb{R}}$ por haces acíclicos. En efecto,

$$\underline{\mathbb{R}} = \ker(d : \mathcal{A}_M^0 \rightarrow \mathcal{A}_M^1)$$

y la exactitud local en grados positivos se deduce del lema de Poincaré: localmente toda forma cerrada es exacta. Así, cada haz $\mathcal{A}_M^p$ es fino y por el teorema [1.2.8](#) también acíclico.

Luego, la cohomología del haz constante $\underline{\mathbb{R}}$ se calcula mediante el complejo global de formas diferenciales, y se obtiene el teorema de De Rham:

$$H^k(M, \underline{\mathbb{R}}) \cong H_{\text{dR}}^k(M),$$

donde $H_{\text{dR}}^k(M)$ es la cohomología del complejo $(\Gamma(M, \mathcal{A}_M^\bullet), d)$.

Al complexificar, el complejo de formas diferenciales suaves complejas $\mathcal{A}_M^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ proporciona una resolución acíclica del haz constante $\underline{\mathbb{C}}$. El operador d se extiende $\mathbb{C}$ -linealmente y sigue verificando $d^2 = 0$, de modo que

$$H^k(M, \underline{\mathbb{C}}) \cong H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{C}) \cong H_{\text{dR}}^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

1.2.5. Cohomología de Dolbeault

Para variedades complejas, la descomposición por tipos y el operador $\bar{\partial}$ proporcionan una resolución acíclica explícita del haz de formas holomorfas Ω^p ; esto es la esencia del teorema de Dolbeault.

Sea X una variedad compleja. Al considerar formas complejas sobre X tenemos la descomposición

$$\mathcal{A}_X^k \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q},$$

donde $\mathcal{A}_X^{p,q}$ son las formas suaves de tipo (p, q) . En este contexto, el operador exterior complejo se descompone como

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

donde

$$\partial : \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p+1,q}, \quad \bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}.$$

se definen sobre funciones suaves como

$$\partial f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i, \quad \bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i,$$

en coordenadas holomorfas (z_i) , y se extienden a formas diferenciales mediante la regla de Leibniz graduada. Ambos operadores son $\mathbb{C}$ -lineales y satisfacen

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0,$$

por lo que $(\mathcal{A}_X^{\bullet,\bullet}, \partial, -\bar{\partial})$ es un doble complejo.

El complejo de Dolbeault es

$$0 \longrightarrow \Omega_{X^{\text{an}}}^p \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

donde la primera flecha es la inclusión natural: toda p -forma holomorfa es una $(p, 0)$ -forma suave, y de hecho $\Omega_{X^{\text{an}}}^p = \ker(\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1})$. La exactitud local en grados positivos se deduce del lema de Dolbeault: las formas $\bar{\partial}$ -cerradas son localmente $\bar{\partial}$ -exactas para $q > 0$.

Además, cada haz $\mathcal{A}_X^{p,q}$ es fino gracias a la existencia de particiones de la unidad suaves y, por el teorema [1.2.8](#), acíclico.

Por tanto el complejo de Dolbeault es una resolución acíclica de $\Omega_{X^{\text{an}}}^p$ y, aplicando el resultado de resoluciones acíclicas [1.2.3](#), obtenemos el teorema de Dolbeault:

$$H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X),$$

donde el lado derecho es la cohomología de Dolbeault calculada como $H^q(\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,\bullet}))$.

Así, la cohomología singular, la cohomología de De Rham y la cohomología de Dolbeault se realizan como casos particulares de cohomología de haces a través de resoluciones acíclicas naturales.

1.2.6. Conexión algebraica-analítica

Cerramos esta sección explicando cómo se relacionan las teorías de cohomología algebraica y analítica en el caso de variedades proyectivas suaves. El resultado central es el teorema GAGA de Serre, que permite identificar la cohomología de haces coherentes algebraicos con la cohomología analítica correspondiente. Esta comparación será esencial para interpretar invariantes definidos algebraicamente en términos analíticos y, en particular, para acceder a la descomposición por tipos (p, q) .

Sea X una variedad algebraica proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por X^{an} su analitificación (la variedad compleja subyacente con la topología y el haz de funciones holomorfas). El teorema de Serre establece la siguiente equivalencia y comparación de cohomologías:

Teorema 1.2.11 (Serre, GAGA). *Sea X una variedad proyectiva sobre $\mathbb{C}$. La analitificación induce una equivalencia de categorías entre haces coherentes algebraicos sobre X (con la topología de Zariski) y haces coherentes analíticos sobre X^{an} . Además, para todo haz coherente algebraico $\mathcal{F}$ y todo $q \geq 0$, el morfismo natural*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X^{\text{an}}, \mathcal{F}^{\text{an}})$$

es un isomorfismo.

Para X una variedad proyectiva sobre $\mathbb{C}$, los haces algebraicos $\mathcal{O}_X$ y Ω_X^p son coherentes, por tanto,

$$H^q(X, \Omega_X^p) \cong H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p).$$

Cuando X es suave, lo anterior combinado con el teorema de Dolbeault se deduce que

$$H^q(X, \Omega_X^p) \cong H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X).$$

Así, la cohomología algebraica de los haces Ω_X^p se interpreta analíticamente mediante la cohomología de Dolbeault de tipo (p, q) .

Para referencias sobre GAGA y la comparación algebraico–analítica véase [12, 19, 5].

1.3. Descomposición de Hodge

Combinando las comparaciones tratadas en la sección anterior —en particular GAGA, el teorema de De Rham y el teorema de Dolbeault— y aprovechando que toda variedad algebraica proyectiva suave X sobre $\mathbb{C}$ es una variedad Kähler compacta, llegamos al resultado fundamental que organiza la cohomología compleja de X en piezas por tipos (p, q) .

Sea X una variedad algebraica proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$, y sea X^{an} su analitificación como variedad compleja. Por definición,

$$H^k(X, \mathbb{C}) := H_{\text{sing}}^k(X^{\text{an}}, \mathbb{C}).$$

Para todo espacio topológico se tiene un isomorfismo canónico

$$H_{\text{sing}}^k(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \cong H^k(X^{\text{an}}, \underline{\mathbb{C}}),$$

y como X^{an} es una variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$, el teorema de De Rham proporciona además un isomorfismo canónico

$$H^k(X^{\text{an}}, \underline{\mathbb{C}}) \cong H_{\text{dR}}^k(X^{\text{an}}, \mathbb{C}).$$

En particular, $H^k(X, \mathbb{C})$ puede interpretarse indistintamente como cohomología singular o como cohomología de De Rham compleja de la variedad compleja subyacente.

Teorema 1.3.1 (Descomposición de Hodge). *Sea X una variedad de Kähler compacta (eg. X variedad algebraica proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$). Entonces*

$$H^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

donde

$$H^{p,q}(X) := H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \cong H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p)$$

Además, la conjugación compleja intercambia las componentes de tipo (p, q) y (q, p) , es decir,

$$H^{p,q}(X) \cong \overline{H^{q,p}(X)},$$

en particular, $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$.

Observación 1.3.2. *La demostración utiliza de manera esencial la teoría de Hodge armónica. En efecto, sobre una variedad Kähler compacta, cada clase de cohomología admite un único representante armónico de tipo (p, q) , y el operador laplaciano asociado a la métrica Kähler conmuta con la conjugación compleja. Como consecuencia, la conjugación induce un isomorfismo antilineal*

$$H^{p,q}(X) \cong \overline{H^{q,p}(X)}.$$

La hipótesis de Kähler es crucial en este argumento, en variedades complejas compactas no Kähler la simetría $h^{p,q} = h^{q,p}$ puede fallar. Para más detalles ver [19, Cap. 2].

Para la cohomología singular (y, por tanto, bajo las comparaciones anteriores, para las distintas realizaciones de la cohomología de X) existe un isomorfismo natural de extensión de escalares

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathbb{C}).$$

Este isomorfismo procede del cambio de coeficientes en la cohomología singular, y permite interpretar la descomposición de Hodge como una descomposición de la complexificación del espacio racional $H^k(X, \mathbb{Q})$. Véanse [7] para el punto de vista topológico y [19, 5] para las consecuencias geométricas.

Conviene precisar que, en general, la descomposición de Hodge no *desciende* pieza a pieza a la estructura racional. Más concretamente, si $k = p + q$ suele ocurrir que

$$(H^{p,q}(X) \cap H^k(X, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subsetneq H^{p,q}(X).$$

La razón es esencialmente aritmético-geométrica: el espacio $H^k(X, \mathbb{Q})$ es una estructura racional dentro del espacio complejo $H^k(X, \mathbb{C})$, mientras que las componentes $H^{p,q}(X)$ son subespacios intrínsecamente complejos.

Si existiera un subespacio racional $V_{\mathbb{Q}} \subseteq H^k(X, \mathbb{Q})$ tal que

$$H^{p,q}(X) = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

entonces $H^{p,q}(X)$ sería estable por todos los $\mathbb{Q}$ -automorfismos de $\mathbb{C}$. Sin embargo, la conjugación compleja intercambia las componentes $H^{p,q}(X)$ y $H^{q,p}(X)$, lo que forzaría la igualdad $H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X)$, falso en general.

Ejemplo 9. *Sea X una curva proyectiva suave de género $g \geq 1$. En este caso $\dim H^{1,0}(X) = g$, y una forma holomorfa no nula $\omega \in H^{1,0}(X)$ define, al integrarse sobre una base de ciclos en $H_1(X, \mathbb{Z})$, una colección de números complejos que, para curvas genéricas, no son racionales.*

En particular, ninguna clase no nula de $H^{1,0}(X)$ puede provenir de una clase racional en $H^1(X, \mathbb{Q})$, y por tanto

$$H^{1,0}(X) \cap H^1(X, \mathbb{Q}) = 0.$$

El único caso donde $H^{p,q}(X) \cap H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$ tiene posibilidad de ser no nulo es cuando $p = q$, pero incluso ahí su complexificación no suele ser $H^{p,q}(X)$. Tal como mencionamos antes, ser racional es una condición aritmética mucho más rígida que ser de tipo (p, p) .

Ejemplo 10. Sea X una superficie K3 muy general. Es un hecho estándar que

$$h^{1,1}(X) = 20 \quad y \quad \dim_{\mathbb{Q}}(H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q})) = 1,$$

y en consecuencia,

$$0 \neq (H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subsetneq H^{1,1}(X).$$

Esta discrepancia —el hecho de que las componentes (p, q) no estén en general definidas sobre $\mathbb{Q}$ ni sobre $\mathbb{R}$ — es precisamente la fuente de la dificultad en problemas aritméticos como la conjetura de Hodge, que exige la existencia de clases racionales que además sean de tipo (p, p) .

La descomposición de Hodge será una herramienta recurrente en lo que sigue: nos permitirá separar la cohomología en piezas por tipos (p, q) , y reducir muchas cuestiones sobre clases cohomológicas a verificaciones sobre componentes concretos. En los capítulos dedicados a hipersuperficies de Fermat y de Klein, esta estructura se refinará mediante técnicas adicionales —mapa de residuos de Griffiths, anillo jacobiano y descomposición espectral inducida por las simetrías y automorfismos explícitos de las hipersuperficies— para obtener bases y representaciones algebraicas de las clases relevantes.

Por ello, conviene al lector retener la descomposición de Hodge no solo como un resultado teórico, sino también como una herramienta práctica para organizar y estudiar las clases cohomológicas que aparecerán en lo que sigue.

1.4. Teorema $(1, 1)$ de Lefschetz

En codimensión 1 la relación entre geometría algebraica y cohomología es especialmente concreta: los divisores determinan fibrados en rectas y, por tanto, clases cohomológicas de tipo $(1, 1)$. El teorema $(1, 1)$ de Lefschetz identifica exactamente las clases integrales de tipo $(1, 1)$ que provienen de divisores algebraicos.

Sea X una variedad algebraica proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$. Un divisor D determina el fibrado en rectas $\mathcal{O}_X(D)$ y su primera clase de Chern

$$c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

tiene tipo $(1, 1)$ respecto de la descomposición de Hodge. El enunciado preciso es el siguiente.

Teorema 1.4.1 (Lefschetz $(1, 1)$). *Sea X una variedad algebraica proyectiva y suave sobre $\mathbb{C}$. Entonces la aplicación*

$$c_1 : \text{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$$

induce un isomorfismo

$$\text{NS}(X) := \text{Pic}(X) / \text{Pic}^0(X) \xrightarrow{\sim} H^{1,1}(X) \cap H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}).$$

Demostración. Consideremos la sucesión exponencial de haces holomorfos sobre X^{an}

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_{X^{\text{an}}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^\times \longrightarrow 1.$$

La sucesión exacta larga en cohomología da

$$H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) \longrightarrow H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(X^{\text{an}}, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^2(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}).$$

Aquí $H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^\times) \cong \text{Pic}(X^{\text{an}})$, y por GAGA la categoría de fibrados en rectas algebraicos sobre X coincide con la categoría analítica sobre X^{an} , de modo que $\text{Pic}(X^{\text{an}}) \cong \text{Pic}(X)$. Por Dolbeault tenemos las identificaciones

$$H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X), \quad H^2(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,2}(X).$$

Por exactitud,

$$\text{Im}(c_1) = \ker (H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}).$$

Componiendo $H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$ con la proyección sobre la componente $H^{0,2}(X)$ de la descomposición de Hodge se obtiene la aplicación $H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$, y su núcleo es precisamente $H^{1,1}(X) \cap H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$. Por tanto $\text{Im}(c_1) = H^{1,1}(X) \cap H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$. Finalmente, la imagen de $H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$ en $\text{Pic}(X)$ es precisamente $\text{Pic}^0(X)$ (la componente conexa de la identidad); al pasar al cociente se obtiene el isomorfismo anunciado. $\square$

Observación 1.4.2. *La componente conexa de la identidad $\text{Pic}^0(X) \subseteq \text{Pic}(X)$ se describe cohomológicamente como*

$$\text{Pic}^0(X) \cong \frac{H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)}{\text{Im} (H^1(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}))}.$$

En particular, $\text{Pic}^0(X)$ es un toro complejo y, como X es proyectiva, una variedad abeliana. Por su parte, el grupo de Néron–Severi $\text{NS}(X)$ es un grupo abeliano finitamente generado; su rango $\rho(X)$ se llama número de Picard y desde el teorema 1.4.1 se deduce que

$$\rho(X) := \text{rank}(\text{NS}(X)) = \dim_{\mathbb{Q}} (H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q})),$$

en particular, $\rho(X) \leq h^{1,1}(X)$.

Ejemplo 11. Para el espacio proyectivo $X = \mathbb{P}^n$ se tiene que $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ y es generado por $\mathcal{O}_X(1)$. En consecuencia,

$$\text{NS}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}, \quad \rho(\mathbb{P}^n) = 1,$$

y la intersección $H^{1,1}(\mathbb{P}^n) \cap H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ está generada por la primera clase de Chern de $\mathcal{O}_X(1)$. Como contraste, para superficies K3 proyectivas la cantidad $\rho(X)$ varía (entre 1 y 20) según la superficie (cf. ejemplo 10), lo que ilustra la diversidad de configuraciones de divisores algebraicos en familias geométricas.

El teorema (1,1) ofrece, por tanto, un ejemplo esclarecedor: en codimensión 1 la correspondencia entre objetos geométricos (divisores) y clases cohomológicas integrales es completa y efectiva. Este fenómeno, sin embargo, es altamente especial y no se extiende de manera formal a codimensiones superiores. Esto conduce de forma natural a la pregunta fundamental que guiará el resto del capítulo: ¿hasta qué punto las clases de tipo (p,p) en grados mayores también proceden de subvariedades algebraicas de codimensión p ?

1.5. Ciclos algebraicos y conjetura de Hodge

En codimensiones superiores la relación entre geometría algebraica y cohomología se vuelve considerablemente más sutil. Aparecen dos dificultades nuevas y esenciales, por un lado, la cohomología relevante adquiere un carácter más trascendental —las piezas (p,p) están relacionadas con periodos y con estructuras analíticas que no suelen tener una descripción algebraica inmediata—; por otro lado, desde el punto de vista algebraico los ciclos de codimensión p forman grupos abelianos de naturaleza combinatoria, los grupos de Chow.

La *conjetura de Hodge* propone una posible armonización de estos dos mundos: afirma que la porción racional de $H^{p,p}(X)$ está generada por clases de subvariedades algebraicas. En esta sección definiremos formalmente los grupos de ciclos y la aplicación clase de ciclo, enunciaremos la conjetura en su forma racional y discutiremos por qué su verificación es especialmente delicada.

Sea X una variedad algebraica proyectiva y suave sobre $\mathbb{C}$.

Definición 1.5.1. Para $p \geq 0$ definimos el grupo de ciclos algebraicos de codimensión p como el grupo libre abeliano generado por subvariedades irreducibles de X de codimensión p :

$$Z^p(X) := \bigoplus_{\substack{W \subseteq X \\ \text{codim } W = p}} \mathbb{Z} \cdot [W].$$

Observación 1.5.2. En $Z^p(X)$ el símbolo $[W]$ es un generador formal: representa la subvariedad irreducible $W \subseteq X$ vista como generador del grupo libre.

Definición 1.5.3. El grupo de Chow se define como

$$\text{CH}^p(X) := Z^p(X) / \sim_{\text{rat}},$$

donde $\sim_{\text{rat}}$ es la equivalencia racional. Es habitual considerar también $\text{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}} := \text{CH}^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Por dualidad de Poincaré, la clase fundamental de una subvariedad $W \subseteq X$ de codimensión p define una clase en $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. Esto da la aplicación *clase de ciclo*

$$\text{cl} : \text{CH}^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Z}),$$

y tras tensorizar con $\mathbb{Q}$ se obtiene

$$\text{cl}_{\mathbb{Q}} : \text{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

Las clases geométricas que provienen de subvariedades son, por la compatibilidad con la descomposición de Hodge, de tipo (p, p) .

Observación 1.5.4. La clase de ciclo de un ciclo algebraico $[W] \in Z^p(X)$ se denotará generalmente, por abuso de notación, como

$$\text{cl}([W]) \equiv [W] \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$$

siempre que el contexto lo permita.

Definición 1.5.5. Definimos el espacio de Hodge racional de grado $2p$ como

$$\text{Hdg}^{2p}(X) := H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

Conjetura de Hodge. Sea X una variedad algebraica proyectiva y suave sobre $\mathbb{C}$. Entonces

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hdg}^{2p}(X), \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

La formulación integral de la conjetura de Hodge es falsa. Atiyah y Hirzebruch construyeron ejemplos de variedades complejas proyectivas suaves que admiten clases de Hodge integrales no algebraicas. Sus contraejemplos surgen de fenómenos de torsión en cohomología y tienen un origen esencialmente topológico: la torsión en la cohomología integral, invisible tras tensorizar con $\mathbb{Q}$, puede ser detectada por operaciones cohomológicas estables y constituye una obstrucción para que una clase provenga de un ciclo algebraico. Por esta razón, la conjetura de Hodge se formula de manera natural con coeficientes racionales.

La conjetura de Hodge en su versión *integral* es válida para $p = 1$ por el teorema de $(1, 1)$ de Lefschetz [1.4.1](#). El caso $p = 0$ es igualmente sencillo y lo describimos a continuación.

Lema 1.5.6. Sea X una variedad algebraica proyectiva sobre $\mathbb{C}$ y $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ su descomposición en componentes irreducibles. Entonces

$$X^{\mathrm{an}} = X_1^{\mathrm{an}} \cup \dots \cup X_r^{\mathrm{an}},$$

y cada X_i^{an} es un subconjunto analítico cerrado de X^{an} .

Demostración. Cada X_i es un subconjunto Zariski-cerrado de X , por lo que su analitificación X_i^{an} es un subconjunto analítico cerrado de X^{an} . Como $X = \bigcup_i X_i$, se sigue que $X^{\mathrm{an}} = \bigcup_i X_i^{\mathrm{an}}$. $\square$

En general, las componentes irreducibles de una variedad algebraica pueden intersectarse. Sin embargo, si X es suave, dichas componentes son disjuntas y coinciden con las componentes conexas de X^{an} .

Proposición 1.5.7. Sea X una variedad algebraica proyectiva y suave sobre $\mathbb{C}$. Entonces

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}^0(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Demostración. Un ciclo de codimensión 0 es una combinación $\sum_i n_i [W_i]$ donde los W_i son componentes irreducibles de X de codimensión 0. Digamos que $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ son las componentes irreducibles de X , entonces

$$\mathrm{CH}^0(X) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \cdot [X_i] \cong \mathbb{Z}^r.$$

Ahora consideremos X^{an} , el espacio analítico complejo subyacente a X . Los 0-cociclos son las funciones localmente constantes $X \rightarrow \mathbb{Z}$, y por el lema [1.5.6](#) se tiene que

$$X^{\text{an}} = \bigcup_{i=1}^r X_i^{\text{an}},$$

donde cada X_i^{an} es un subconjunto analítico cerrado.

Como X es suave, las componentes irreducibles son disjuntas; en particular, las X_i^{an} son precisamente las componentes conexas de X^{an} . Por tanto,

$$H^0(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r.$$

Sea $j_i : X_i \hookrightarrow X$ la inclusión de la i -ésima componente. Por functorialidad de la clase de ciclo,

$$\text{cl}(j_{i*}(1)) = j_{i*}^{\text{an}}(\text{cl}_{X_i}(1)),$$

donde $1 \in \text{CH}^0(X_i) \cong \mathbb{Z}$ es el generador y $\text{cl}_{X_i}(1) \in H^0(X_i^{\text{an}}, \mathbb{Z})$ es la función constante 1 en X_i^{an} . Como la inclusión $j_i^{\text{an}} : X_i^{\text{an}} \hookrightarrow X^{\text{an}}$ identifica X_i^{an} con una componente conexa y el push-forward en grado 0 se interpreta exactamente como extensión por cero fuera de la componente, obtenemos

$$\text{cl}([X_i]) = j_{i*}^{\text{an}}(1) = \mathbf{1}_{X_i^{\text{an}}},$$

la función que vale 1 en X_i^{an} y 0 en las demás componentes.

Por tanto la aplicación cl manda la base $\{[X_1], \dots, [X_r]\}$ de $\text{CH}^0(X)$ sobre la base estándar $\{\mathbf{1}_{X_1^{\text{an}}}, \dots, \mathbf{1}_{X_r^{\text{an}}}\}$ de $H^0(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$. En particular, la clase de ciclo cl es un isomorfismo. $\square$

En consecuencia, la *conjetura de Hodge integral* es cierta para $p = 0$ y $p = 1$, pero falsa en general. Esto no lo hace matemáticamente irrelevante: al contrario, entender dónde falla y por qué abre muchas preguntas profundas que conectan topología, aritmética, teoría de ciclos y geometría algebraica. Pese a los contraejemplos mostrados por Atiyah, Hirzebruch y más autores, hay muchas clases de variedades y situaciones en las que la versión integral sí se cumple, y es importante caracterizarlas, entender las obstrucciones y conectar con invariantes más finos.

Para facilitar la comparación con la descomposición espectral de Shioda que se verá en el Capítulo [2](#) —la cual se expresa naturalmente en términos de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales— resulta conveniente traducir la conjetura de Hodge a un lenguaje completamente complejo. En lugar de describir las clases racionales de tipo (p, p) como imagen de $\text{cl}_{\mathbb{Q}}$, consideraremos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por las clases de ciclos algebraicos dentro de $H^{p,p}(X)$. La

siguiente proposición muestra que este punto de vista es equivalente al enunciado usual y permite expresar tanto la teoría de Hodge como la descomposición espectral de Shioda en términos de espacios vectoriales complejos.

Proposición 1.5.8. *Sea X una variedad algebraica proyectiva y suave sobre $\mathbb{C}$. Entonces, las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

$$a) \operatorname{cl}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}) = \operatorname{Hdg}^{2p}(X).$$

b) Existen subvariedades algebraicas irreducibles $\{Z_i\}_{i=1}^r \subseteq X$ de codimensión p tales que

$$(\operatorname{H}^{p,p}(X) \cap \operatorname{H}^{2p}(X, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{[Z_i] : i = 1, \dots, r\}.$$

Demostración. La implicancia (a) $\Rightarrow$ (b) es inmediata tras tensorizar por $\mathbb{C}$.

Supongamos ahora (b) y definamos

$$U := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{[Z_i]\} \subseteq \operatorname{H}^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

Por hipótesis,

$$U \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{[Z_i]\} = \operatorname{Hdg}^{2p}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Como U y $\operatorname{Hdg}^{2p}(X)$ son subespacios racionales de $\operatorname{H}^{2p}(X, \mathbb{Q})$ con la misma complexificación, concluimos que

$$U = \operatorname{Hdg}^{2p}(X).$$

Entonces $\operatorname{Hdg}^{2p}(X)$ está generado sobre $\mathbb{Q}$ por clases de ciclos algebraicos de codimensión p . Equivalentemente,

$$\operatorname{cl}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}) = \operatorname{Hdg}^{2p}(X).$$

Por tanto, queda demostrado (a). □

Formulada en estos términos, la conjetura de Hodge aparece como una afirmación de enorme generalidad y profundidad, cuya verificación directa resulta inabordable en la mayoría de los casos. Incluso para variedades proyectivas suaves con geometría relativamente simple, la descripción explícita del grupo de ciclos y de su imagen en cohomología presenta dificultades sustanciales.

1.6. Teoremas de Lefschetz y cohomología primitiva

En esta sección enunciaremos los teoremas de Lefschetz débil y fuerte, que en el caso de hipersuperficies proyectivas suaves, permiten reducir el estudio de la conjetura de Hodge a la cohomología primitiva. Más precisamente, cuando n es par, basta considerar la componente

$$H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X, \mathbb{Q}) \subseteq H^n(X, \mathbb{Q}).$$

La idea geométrica es que cortar por un hiperplano general no crea cohomología nueva en grados pequeños. El teorema de Lefschetz débil formaliza este principio, mientras que el teorema de Lefschetz fuerte describe cómo la multiplicación por la clase del hiperplano relaciona grados complementarios y permite reconstruir la cohomología a partir de la parte primitiva.

Teorema 1.6.1 (Lefschetz débil). *Sea X una variedad algebraica proyectiva, suave e irreducible sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n , y sea $Y \subseteq X$ una hipersección suave dada por la intersección con un hiperplano general. Entonces el morfismo de restricción*

$$i^* : H^k(X^{\text{an}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(Y^{\text{an}}, \mathbb{Q})$$

es un isomorfismo para todo $k < n - 1$ y es inyectivo para $k = n - 1$.

La demostración utiliza una combinación de métodos geométricos y topológicos, entre los que destacan la teoría de pinceles de Lefschetz y técnicas cohomológicas basadas en sucesiones espectrales. Estas herramientas permiten controlar la cohomología relativa asociada a una hipersección general. Para una exposición detallada de la demostración véase [16, cap. 1]; para una presentación más clásica y motivadora véase también [5].

Corolario 1.6.2. *Si $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ es una hipersuperficie proyectiva, suave e irreducible de dimensión n , entonces para todo entero k con $2k < n$ se tiene que*

$$H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \cong H^{2k}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \cdot h^k,$$

donde $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ es la clase del hiperplano. En particular, toda clase racional de tipo (k, k) con $2k < n$ es proporcional a h^k .

Demostración. Sea $d = \deg(X)$ y consideremos la inmersión de Veronese

$$v_d : \mathbb{P}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{P}^N.$$

Entonces la imagen $v_d(X)$ es una sección hiperplana suave de $v_d(\mathbb{P}^{n+1}) \cong \mathbb{P}^{n+1}$. Aplicando el teorema de Lefschetz débil [1.6.1](#) a la inclusión

$$i : v_d(X) \hookrightarrow v_d(\mathbb{P}^{n+1}),$$

obtenemos que

$$i^* : H^j(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^j(X, \mathbb{Q})$$

es un isomorfismo para todo $j < n$. En particular, si $2k < n$, entonces

$$H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \cong H^{2k}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \cdot h^k.$$

□

En particular, el corolario [1.6.2](#) resuelve la parte trivial de la conjetura de Hodge para las hipersuperficies proyectivas suaves en el rango $2k < n$: toda clase racional de tipo (k, k) es proporcional a h^k , y esta clase es algebraica, pues coincide con la clase de la intersección de X con k hiperplanos generales.

Para avanzar más allá de este rango es necesario comprender la estructura de la cohomología en torno al grado medio. El siguiente teorema de Lefschetz describe cómo la multiplicación por la clase del hiperplano relaciona grupos de cohomología en grados complementarios, y permite descomponer la cohomología en una parte generada por potencias de h y una parte nueva, la *cohomología primitiva*.

Sea X una variedad algebraica proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n . Denotemos por

$$h := c_1(\mathcal{O}_X(1)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

la clase del hiperplano. Como h es una clase de Chern de un fibrado holomorfo, es de tipo $(1, 1)$, y por tanto

$$h \in H^{1,1}(X) \subseteq H^2(X, \mathbb{C}).$$

El producto cup

$$\smile : H^i(X, \mathbb{C}) \times H^j(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{C})$$

incrementa el grado aditivamente. Definimos el *operador de Lefschetz*

$$L := h \smile (\cdot) : H^k(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{k+2}(X, \mathbb{C}).$$

Como h es de tipo $(1, 1)$, el operador L envía

$$H^{p,q}(X) \longrightarrow H^{p+1,q+1}(X).$$

Teorema 1.6.3 (Lefschetz fuerte). *Para todo $0 \leq k \leq n$ la potencia*

$$L^{n-k} : H^k(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{2n-k}(X, \mathbb{C})$$

es un isomorfismo.

El teorema de Lefschetz fuerte muestra que la multiplicación iterada por la clase del hiperplano controla gran parte de la cohomología. En efecto, para $0 \leq k \leq n$, la aplicación

$$L^{n-k} : H^k(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-k}(X, \mathbb{C})$$

es un isomorfismo, de modo que ninguna clase no nula de $H^k(X, \mathbb{C})$ puede anularse tras aplicar $n - k$ veces el operador L .

Esto motiva aislar las clases que se anulan exactamente en la siguiente potencia. Tales clases constituyen la parte de la cohomología que no se obtiene iterando la multiplicación por la clase del hiperplano y reciben el nombre de *clases primitivas*. Esta construcción será además el punto de partida para la descomposición de Lefschetz.

Definición 1.6.4. *Para $0 \leq k \leq n$ se define la cohomología primitiva de grado k como*

$$H_{\text{prim}}^k(X, \mathbb{C}) := \ker (L^{n-k+1} : H^k(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-k+2}(X, \mathbb{C})).$$

Más generalmente, si $k = p + q$ escribimos $H_{\text{prim}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) := H_{\text{prim}}^k(X, \mathbb{C}) \cap H^{p,q}(X)$.

El contenido esencial del siguiente resultado es que las clases primitivas generan toda la cohomología: cualquier clase puede obtenerse aplicando iteradamente el operador de Lefschetz a clases primitivas de grados menores.

Teorema 1.6.5 (Descomposición de Lefschetz). *Para todo k existe una descomposición directa, compatible con la estructura de Hodge,*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geq 0} L^r H_{\text{prim}}^{k-2r}(X, \mathbb{C}).$$

Esta descomposición permite separar las componentes obtenidas mediante iteraciones del operador de Lefschetz de la parte primitiva, que concentra la información cohomológica esencial.

Ejemplo 12. *Para el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ la cohomología es especialmente simple:*

$$H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cdot h^k, \quad H^{2k+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) = 0,$$

donde $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ es la clase del hiperplano. En particular, para todo $k > 0$,

$$H_{\text{prim}}^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) = 0,$$

pues toda clase cohomológica se obtiene aplicando potencias del operador de Lefschetz

$$L = h \smile (\cdot)$$

a clases de grado inferior. Por tanto, en $\mathbb{P}^n$ no aparece cohomología primitiva no trivial y la descomposición de Lefschetz queda completamente determinada por las potencias de la clase hiperplano.

El caso del espacio proyectivo es excepcionalmente simple. En contraste, para hipersuperficies suaves la cohomología primitiva suele contener gran parte de la información cohomológica.

Ejemplo 13. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^3$ una cuártica suave. Sus invariantes de Betti son bien conocidos:

$$b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = 22.$$

La descomposición de Hodge en grado 2 es

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X), \quad \dim H^{2,0}(X) = \dim H^{0,2}(X) = 1, \quad \dim H^{1,1}(X) = 20.$$

Sea $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la restricción de la clase del hiperplano de $\mathbb{P}^3$. Como X es una superficie, la descomposición de Lefschetz en grado 2 es

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H_{\text{prim}}^2(X, \mathbb{C}) \oplus L^1 H^0(X, \mathbb{C}),$$

y dado que $H^0(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, se obtiene

$$L^1 H^0(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot h.$$

Como

$$h^2 = [X \cap H_1 \cap H_2],$$

su grado coincide con $\deg(X) = 4$, luego

$$h^2 \neq 0.$$

En particular $h \neq 0$. En consecuencia, la parte no primitiva de $H^2(X)$ es de dimensión 1 y está generada por la clase h . Por dimensiones se deduce $\dim H_{\text{prim}}^2(X) = 21$. Más aún, como h es de tipo $(1, 1)$ tenemos

$$H^{2,0}(X) = H_{\text{prim}}^{2,0}(X), \quad H^{1,1}(X) = H_{\text{prim}}^{1,1}(X) \oplus \langle h \rangle, \quad H^{0,2}(X) = H_{\text{prim}}^{0,2}(X).$$

La descomposición de Lefschetz permite reducir numerosos problemas cohomológicos al estudio de la parte primitiva. En el caso de hipersuperficies proyectivas, las componentes no primitivas están generadas por iteraciones de la clase hiperplano y corresponden a contribuciones geoméricamente explícitas. En consecuencia, la información cohomológica verdaderamente nueva se concentra en la cohomología primitiva.

Observación 1.6.6. *La descomposición de Lefschetz se refina a nivel de tipos de Hodge: si $k = p + q$, entonces*

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X) &= H^k(X, \mathbb{C}) \cap H^{p,q}(X) \\ &= \left(\bigoplus_{r \geq 0} L^r H_{\text{prim}}^{k-2r}(X, \mathbb{C}) \right) \cap H^{p,q}(X), \end{aligned}$$

y por compatibilidad con la descomposición de Hodge, esta intersección se descompone como suma directa

$$H^{p,q}(X) = \bigoplus_{r \geq 0} (L^r H_{\text{prim}}^{k-2r}(X, \mathbb{C}) \cap H^{p,q}(X)).$$

Como L es un operador de tipo $(1, 1)$, si $L^r \alpha \in H^{p,q}(X)$ entonces $\alpha \in H_{\text{prim}}^{p-r, q-r}(X)$. Así, obteniendo una descomposición de Hodge refinada

$$H^{p,q}(X) = \bigoplus_{r \geq 0} L^r H_{\text{prim}}^{p-r, q-r}(X),$$

más aún, como el teorema de Lefschetz fuerte implica la inyectividad de L sobre la cohomología primitiva, se obtiene que

$$h^{p,q}(X) = \sum_{r \geq 0} h_{\text{prim}}^{p-r, q-r}(X).$$

La reducción a la cohomología primitiva no es solo una simplificación técnica. En el caso de hipersuperficies proyectivas, varias de las herramientas fundamentales que utilizaremos más adelante —como el mapa de residuos de Griffiths— están formuladas directamente en términos de $H_{\text{prim}}^n(X)$. Desde este punto de vista, la cohomología primitiva constituye el marco natural en el que se expresan los fenómenos cohomológicos más relevantes. La siguiente sección estará dedicada precisamente a desarrollar esta descripción explícita de la cohomología primitiva.

1.7. Base de Griffiths

Para estudiar la parte no trivial de la cohomología de una hipersuperficie proyectiva suave $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ resulta conveniente una descripción explícita de la

cohomología primitiva y de sus componentes de Hodge. Griffiths proporciona precisamente esta descripción: las clases primitivas se representan por formas meromorfas en el ambiente proyectivo con polos controlados por la ecuación F , y las relaciones entre tales formas se codifican en el anillo jacobiano del polinomio que define X . En lo que sigue describimos la construcción y las consecuencias algebraicas que usaremos más adelante.

Sea $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ una hipersuperficie suave definida por un polinomio homogéneo F de grado m . En $\mathbb{C}^{n+2}$ consideremos la $(n+1)$ -forma

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1},$$

la cual es homogénea de grado $n+2$. Para un polinomio homogéneo P definimos

$$\eta = \frac{P \Omega}{F^{q+1}}.$$

Si P tiene grado

$$d = (q+1)m - (n+2),$$

entonces η es invariante bajo reescalamiento y por tanto descende a una forma meromorfa sobre $\mathbb{P}^{n+1}$.

La división por F^{q+1} implica que η posee polos de orden $q+1$ a lo largo de X . El residuo local sobre X define entonces una clase cohomológica de tipo $(n-q, q)$. En concreto, si P tiene el grado anterior, la correspondiente clase pertenece a $H_{\text{prim}}^{n-q, q}(X)$.

Esto da lugar al *mapa de residuos de Griffiths*, que asocia a cada polinomio homogéneo P la correspondiente clase de residuo primitiva.

Definición 1.7.1. *El mapa de residuos de Griffiths es*

$$P \longmapsto \omega_P := \left(\text{res}_X \left(\frac{P \Omega}{F^{q+1}} \right) \right)^{n-q, q} \in H_{\text{prim}}^{n-q, q}(X).$$

Observemos que el residuo

$$\text{res}_X \left(\frac{P \Omega}{F^{q+1}} \right)$$

no depende de P de forma absoluta, sino únicamente de su clase módulo el ideal generado por las derivadas parciales de F . En efecto, si P difiere de otro polinomio Q en una combinación de las derivadas $\partial F / \partial x_i$, entonces los residuos correspondientes son cohomológicamente iguales. Por ello es natural pasar al cociente por el *ideal jacobiano* y describir las clases mediante elementos del anillo resultante.

El anillo jacobiano asociado a F se define como

$$R^F := \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]}{\text{Jac}(F)}, \quad \text{Jac}(F) := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \right\rangle,$$

y denotamos por R_d^F su componente homogénea de grado d .

Teorema 1.7.2 (Griffiths). *Para $0 \leq q \leq n$ el mapa de residuos induce un isomorfismo*

$$H_{\text{prim}}^{n-q,q}(X) \cong R_{(q+1)m-(n+2)}^F.$$

En otras palabras, la componente $(n-q, q)$ de la cohomología primitiva de la hipersuperficie se identifica con la pieza homogénea de grado $(q+1)m - (n+2)$ del anillo jacobiano. De este modo, una base del espacio

$$R_{(q+1)m-(n+2)}^F$$

proporciona una base explícita para $H_{\text{prim}}^{n-q,q}(X)$, y los cálculos en el anillo jacobiano se traducen en información cohomológica sobre X .

La construcción analítica del mapa de residuos y las demostraciones originales se encuentran en [4]; para una exposición moderna véase [19].

Corolario 1.7.3. *Para toda hipersuperficie proyectiva suave $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ se tiene que*

$$h_{\text{prim}}^{p,q}(X) = h_{\text{prim}}^{q,p}(X), \quad p + q = n.$$

Demostración. El anillo jacobiano R^F es un $\mathbb{C}$ -álgebra graduada, de dimensión finita y Gorenstein. En particular, existe un grado

$$T = (n+2)(m-2)$$

tal que $R_T^F \cong \mathbb{C}$ y la multiplicación induce un emparejamiento perfecto

$$R_k^F \times R_{T-k}^F \longrightarrow R_T^F \cong \mathbb{C}$$

para todo entero k . Tomemos $k = d := (q+1)m - (n+2)$, entonces $\dim R_d^F = \dim R_{T-d}^F$ y se tiene

$$T - d = (n - q + 1)m - (n + 2) = (p + 1)m - (n + 2),$$

que, por el teorema de Griffiths [1.7.2], es el grado que corresponde a $H_{\text{prim}}^{q,p}(X)$. En consecuencia,

$$\dim H_{\text{prim}}^{p,q}(X) = \dim R_d^F = \dim R_{T-d}^F = \dim H_{\text{prim}}^{q,p}(X).$$

□

Observación 1.7.4. *La igualdad*

$$h_{\text{prim}}^{p,q}(X) = h_{\text{prim}}^{q,p}(X) \quad \text{para todo } p + q = n$$

no implica por sí sola que $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$. Desde la observación 1.6.6, tenemos

$$h^{p,q}(X) = \sum_{r \geq 0} h_{\text{prim}}^{p-r, q-r}(X),$$

pero la simetría obtenida en el corolario 1.7.3 solo es válida para las componentes primitivas de $H^n(X)$ y no en grados inferiores. Aun así, este resultado es ilustrativo, pues muestra cómo la simetría de los números de Hodge primitivos ya se encuentra implícita en el teorema de Griffiths a través de la dualidad Gorenstein del anillo jacobiano.

En el siguiente ejemplo se muestra como R_d^F admite una descripción explícita en el caso de la ecuación de Fermat.

Ejemplo 14. *Considere la hipersuperficie de Fermat de grado $m \geq 2$ y dimensión n :*

$$X = \{F = x_0^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}.$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = m x_i^{m-1} \quad (0 \leq i \leq n+1),$$

el ideal jacobiano viene dado por

$$\text{Jac}(F) = \langle x_0^{m-1}, \dots, x_{n+1}^{m-1} \rangle.$$

Por tanto el anillo jacobiano es el anillo de polinomios truncado

$$R^F = \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]}{\text{Jac}(F)} \cong \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]}{\langle x_0^{m-1}, \dots, x_{n+1}^{m-1} \rangle}.$$

Como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, R^F está generado por los monomios

$$x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_{n+1}^{a_{n+1}} \quad \text{con } 0 \leq a_i \leq m-2.$$

En particular la parte homogénea de grado $d := (q+1)m - (n+2)$ viene dada por

$$R_d^F = \text{Span} \left\{ \prod_{i=0}^{n+1} x_i^{a_i} : \sum_i a_i = d, 0 \leq a_i \leq m-2 \right\},$$

y por conteo de monomios, su dimensión coincide con el coeficiente de t^d al expandir

$$(1 + t + \cdots + t^{m-2})^{n+2}.$$

Continuaremos el ejemplo [14](#) en el caso concreto de una superficie cúbica de Fermat, que servirá como banco de pruebas para todas las herramientas introducidas en este capítulo. En el ejemplo anterior vimos cómo el teorema de Griffiths describe la cohomología primitiva en términos del anillo jacobiano; aquí aplicaremos esa descripción en un caso completamente explícito, y la combinaremos con la descomposición de Lefschetz y con la interpretación geométrica de la superficie como blow-up.

Ejemplo 15. *Para $m = 3$ (cúbica de Fermat) tenemos*

$$\text{Jac}(F) = \langle x_0^2, \dots, x_{n+1}^2 \rangle,$$

de modo que en $R^F = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]/\text{Jac}(F)$ cada exponente a_i sólo puede valer 0 o 1. Para $n = 2$ (superficie cúbica de Fermat) los monomios no nulos en R^F son exactamente $x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ con $a_i \in \{0, 1\}$.

Aplicando el isomorfismo de Griffiths [1.7.2](#)

$$H_{\text{prim}}^{n-q,q}(X) \cong R_{(q+1)m-(n+2)}^F,$$

con $n = 2$ y $m = 3$ obtenemos que el grado viene dado por

$$d := (q+1)m - (n+2) = 3q - 1.$$

Por tanto:

- $q = 0 \implies$ grado -1 , luego $R_{-1}^F = 0$ (no hay piezas de grado negativo), de donde $\dim H_{\text{prim}}^{2,0}(X) = 0$.
- $q = 1 \implies$ grado 2. Los monomios de grado 2 con exponente en $\{0, 1\}$ son exactamente

$$\{x_0^1 x_1^1 x_2^0 x_3^0, x_0^1 x_1^0 x_2^1 x_3^0, x_0^1 x_1^0 x_2^0 x_3^1, x_0^0 x_1^1 x_2^1 x_3^0, x_0^0 x_1^1 x_2^0 x_3^1, x_0^0 x_1^0 x_2^1 x_3^1\},$$

luego

$$\dim R_2^F = 6 \implies \dim H_{\text{prim}}^{1,1}(X) = 6.$$

- $q = 2 \implies$ grado 5. Pero para $m = 3$ el máximo grado no nulo en R^F es $(n+2)(m-2) = 4$, por lo que $R_5^F = 0$ y $\dim H_{\text{prim}}^{0,2}(X) = 0$.

En resumen,

$$\dim H_{\text{prim}}^{2,0}(X) = 0, \quad \dim H_{\text{prim}}^{1,1}(X) = 6, \quad \dim H_{\text{prim}}^{0,2}(X) = 0.$$

La base de Griffiths de $H_{\text{prim}}^{1,1}(X)$ viene dada por las imágenes por el mapa de residuos de los seis monomios de grado 2 descritos arriba.

La cohomología en grado 2 se escribe por la descomposición de Lefschetz [1.6.5](#) como

$$H^2(X) = H_{\text{prim}}^2(X) \oplus \langle h \rangle = H_{\text{prim}}^{1,1}(X) \oplus \langle h \rangle,$$

y en consecuencia,

$$\dim H^2(X) = 6 + 1 = 7.$$

Dado que X es una superficie proyectiva suave (inmediato desde el criterio del jacobiano), se deduce que

$$H^0(X) \cong \mathbb{C} \quad y \quad H^4(X) \cong \mathbb{C}.$$

Ahora, para calcular la dimensión de $H_{\text{prim}}^{0,0}(X)$ no podemos usar directamente el isomorfismo de Griffiths, en lugar de ello, desde la observación [1.6.6](#) junto con la descomposición de Hodge [1.3.1](#), se sigue que

$$h_{\text{prim}}^{0,0}(X) = h^{0,0}(X) = h^0(X) = \dim H^0(X) = 1.$$

Con esto podemos calcular la dimensión de $H^{1,1}(X)$ usando nuevamente la observación [1.6.6](#):

$$h^{1,1}(X) = h_{\text{prim}}^{1,1}(X) + h_{\text{prim}}^{0,0}(X) = 6 + 1 = 7.$$

Por otra parte, es un hecho clásico que una superficie cúbica suave $X \subseteq \mathbb{P}^3$ es isomorfa al blow-up de $\mathbb{P}^2$ en seis puntos en posición general. En particular,

$$\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} \cdot \langle H, E_1, \dots, E_6 \rangle,$$

donde H es el pull-back de una recta y E_i son los divisores excepcionales. Por tanto

$$\rho(X) = \dim_{\mathbb{Q}} (H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q})) = 7,$$

y en consecuencia, toda la cohomología racional de tipo $(1,1)$ es algebraica, como predice el teorema [1.4.1](#) de Lefschetz $(1,1)$.

Además, como $\rho(X) = h^{1,1}(X)$ se sigue inmediatamente que

$$(H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H^{1,1}(X),$$

de modo que toda la componente $H^{1,1}(X)$ proviene de clases racionales. Esta igualdad no es automática en general (cf. ejemplo [10](#)): aquí resulta de combinar el cálculo de Griffiths, la descomposición de Lefschetz y la descripción geométrica de X como blow-up de $\mathbb{P}^2$ en seis puntos en posición general.

El teorema de Griffiths no solo identifica abstractamente piezas de la cohomología primitiva con componentes homogéneas del anillo jacobiano, sino que permite construir bases explícitas y así reducir problemas cohomológicos a cálculos combinatorio-aritméticos en el anillo cociente. Esta descripción por monomios será especialmente útil en presencia de simetrías, pues facilita la descomposición en espacios propios para la acción de grupos de automorfismos y, como veremos a través de la descomposición espectral de Shioda, permite acceder a la subestructura racional de la cohomología de tipo $(n/2, n/2)$, que es la pieza relevante para la conjetura de Hodge.

Capítulo 2

Hipersuperficies de Fermat

Las hipersuperficies de Fermat constituyen uno de los ejemplos más simétricos y mejor entendidos en geometría algebraica compleja: su ecuación explícita y el amplio grupo de automorfismos diagonales que la preserva generan una rigidez cohomológica que permite un tratamiento muy concreto de la conjetura de Hodge.

En este capítulo desarrollamos esta teoría de forma progresiva: comenzamos en la Sección [2.1](#) por enunciar la descomposición espectral de Shioda en espacios propios unidimensionales asociados a automorfismos diagonales y describimos, en términos aritméticos, el subconjunto de caracteres que genera la cohomología intermedia racional, en la Sección [2.2](#) introducimos herramientas técnicas para culminar en la Sección [2.3](#) con la demostración del teorema de Shioda. En la Sección [2.4](#) se reformula la conjetura de Hodge en este caso específico aplicando esta nueva teoría y se exhiben ejemplos donde la reformulación conduce a conclusiones efectivas, en la Sección [2.5](#) estudiamos los ciclos lineales en Fermat y finalmente en la Sección [2.6](#) enunciamos y probamos el teorema de Aoki–Shioda que establece condiciones aritméticas explícitas en el grado y dimensión sobre cuándo el espacio generado por ciclos lineales es suficiente para generar la cohomología intermedia racional.

En conjunto, estas secciones permiten pasar de una descripción compleja y analítica de la cohomología a criterios puramente combinatorios y aritméticos que pueden comprobarse de forma efectiva en ejemplos concretos; tales reducciones no solo clarifican la mecánica interna de la descomposición de Shioda, sino que servirán como base para obtener una descomposición análoga en las hipersuperficies de Klein en el siguiente capítulo.

2.1. Descomposición espectral

Esta sección enuncia la descomposición espectral de la cohomología primitiva de la hipersuperficie de Fermat, obtenida a partir del estudio de su grupo de automorfismos diagonales. El enfoque, desarrollado por Shioda en la década de 1970 en el contexto de la conjetura de Hodge, constituye uno de los ejemplos más explícitos donde dicha conjetura se puede abordar mediante métodos combinatorios y aritméticos.

Es deseable que el lector conozca nociones básicas de teoría de grupos abelianos finitos: caracteres y espacios propios asociados a una acción finita.

Considere

$$X_m^n = \{x_0^m + \dots + x_{n+1}^m = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$$

la hipersuperficie de Fermat de dimensión n y de grado m .

Denotemos μ_m el grupo de las raíces m -ésimas de la unidad.

Notación 2.1.1. *Reservamos el símbolo ξ para la raíz m -ésima de la unidad primitiva, y $\xi_{(\cdot)}$ para denotar un elemento de μ_m . Más adelante, cambiaremos a la notación usual $\zeta_r = \exp(2\pi i/r)$ para representar la raíz r -ésima primitiva.*

Se define G_m^n como el grupo cociente entre $\mu_m^{\oplus(n+2)}$ y el subgrupo diagonal, el grupo G_m^n actúa fielmente sobre X_m^n mediante

$$g \cdot x = [\xi_0 : \dots : \xi_{n+1}] \cdot (x_0, \dots, x_{n+1}) := (\xi_0 x_0, \dots, \xi_{n+1} x_{n+1}).$$

Otra fuente grande de automorfismos sobre la hipersuperficie de Fermat provienen del grupo de permutaciones S_{n+2} . De hecho, los resultados en [10] establecen que estos son todos los automorfismos *lineales*:

$$\text{Aut}(X_m^n) \cap \text{PGL}(\mathbb{P}^{n+1}) = G_m^n \rtimes S_{n+2},$$

salvo los casos excepcionales $m = 1, 2$. Para $m = 1$ tenemos que $X_1^n \cong \mathbb{P}^n$ y luego no hay cohomología primitiva, por este motivo se excluirá del análisis y se considerará siempre $m \geq 2$. El caso $m = 2$ tenemos que X_2^n es una cuádrica no degenerada, por ello su grupo lineal es aquel que preserva su forma cuadrática asociada, así

$$\text{Aut}(X_2^n) \cap \text{PGL}(\mathbb{P}^{n+1}) = \text{PO}_{n+2} \supsetneq G_2^n \rtimes S_{n+2},$$

el cual contiene rotaciones que provienen del grupo proyectivo ortogonal.

Es importante destacar el caso de la superficie cuártica de Fermat X_4^2 , la que corresponde con una superficie K3: esta posee automorfismos *no lineales*, mientras que el resto de hipersuperficies de Fermat X_m^n con $(n, m) \neq (2, 4)$ su grupo de automorfismos está completamente contenido en $\mathrm{PGL}(\mathbb{P}^{n+1})$.

Una descomposición espectral consiste en descomponer un espacio vectorial en espacios propios asociados a la acción de un subgrupo de automorfismos. En el caso de la hipersuperficie de Fermat, Shioda observa que el grupo diagonal G_m^n actúa sobre la cohomología de X_m^n de manera completamente reducible y permite obtener una descomposición en caracteres que recupera toda la cohomología primitiva. Intuitivamente, estos automorfismos diagonales son intrínsecos de la ecuación que define la hipersuperficie de Fermat y forman un grupo lo *suficientemente grande* como para detectar todas las componentes de la cohomología primitiva.

El grupo de caracteres de G_m^n se identifica naturalmente con el grupo

$$\widehat{G}_m^n := \mathrm{Hom}(G_m^n, \mathbb{C}^\times) \cong \{\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) : a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, a_0 + \dots + a_{n+1} = 0\}$$

vía $\alpha([\xi_0 : \dots : \xi_{n+1}]) = \xi_0^{a_0} \dots \xi_{n+1}^{a_{n+1}}$.

La acción de G_m^n sobre X_m^n permite ver a los grupos de cohomología $H^i(X_m^n, \mathbb{Q})$ y $H^i(X_m^n, \mathbb{C})$ como G_m^n -módulos: un elemento $g \in G_m^n$ actúa sobre una forma $\omega \in H^i(X_m^n)$ mediante

$$g^*(\omega)(x) = \omega(g \cdot x).$$

Estos G_m^n -módulos son conocidos salvo el caso $i = n$, en efecto, como X_m^n es una variedad proyectiva suave de dimensión compleja n , el teorema de Lefschetz débil [1.6.1](#) afirma que

$$H^k(X_m^n, \mathbb{Q}) \cong H^k(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Q})$$

para $k < n$. La cohomología de $\mathbb{P}^{n+1}$ sobre $\mathbb{Q}$ es bien conocida: $\mathbb{Q}$ para grados pares y 0 para grados impares. Dado esto, la información sobre los grados $k < n$ se traslada a los grados complementarios gracias a la dualidad de Poincaré

$$H^k(X_m^n, \mathbb{Q}) \cong (H^{2n-k}(X_m^n, \mathbb{Q}))^\vee,$$

lo que permite conocer la cohomología de X_m^n para $k > n$. Así, la cohomología de X_m^n es conocida para todos los grados k salvo $k = n$, el único caso no trivial e interesante.

Para un carácter $\alpha \in \widehat{G}_m^n$, se define el espacio propio asociado a α como:

$$V(\alpha) = \{\omega \in H_{\mathrm{prim}}^n(X_m^n) : g^*(\omega) = \alpha(g)\omega, \quad \forall g \in G_m^n\},$$

concretamente, un elemento $g \in G_m^n$ actúa en una clase cohomológica $\omega \in V(\alpha)$ mediante multiplicación por el escalar $\alpha(g)$ para cada $g \in G_m^n$.

El espacio $V(\alpha)$ podría ser eventualmente nulo, para evitar esto vamos a denotar

$$\mathfrak{A}_m^n = \{\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \widehat{G}_m^n : a_i \neq 0 \quad \forall i\}.$$

Notación 2.1.2. Para $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, se denotará por $[x]_m \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ a su representante canónico en $\mathbb{Z}$.

Adicionalmente, se define el *peso* del carácter α como

$$|\alpha| = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n+1} [a_i]_m \in \mathbb{N},$$

Observación 2.1.3. La condición $\sum_{i=0}^{n+1} a_i = 0 \pmod{m}$ en G_m^n asegura que $|\alpha| \in \mathbb{N}$. Un cálculo directo muestra que

$$|\alpha| \in \left\{ \left\lceil \frac{n+2}{m} \right\rceil, \dots, n+2 - \left\lceil \frac{n+2}{m} \right\rceil \right\}.$$

A continuación, se enuncia la descomposición espectral de Shioda en hipersuperficies de Fermat.

Teorema 2.1.4 (Shioda).

i) $\dim V(\alpha) \in \{0, 1\}$, $\forall \alpha \in \widehat{G}_m^n$. Además, $V(\alpha) \neq \{0\}$ si y solo si $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$.

ii) $H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n \\ |\alpha|=q+1}} V(\alpha).$

iii) Suponga que $n = 2p$, entonces

$$(H^{p,p} \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha)$$

donde

$$\mathfrak{B}_m^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n : |t \cdot \alpha| = p+1, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\}.$$

iv) Suponga que $n = 2p+1$, entonces

$$((H^{p,p+1} + H^{p+1,p}) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha)$$

donde

$$\mathfrak{B}_m^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n : p+1 \leq |t \cdot \alpha| \leq p+2, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\}.$$

El contenido de i) y ii) del teorema anterior establece que los caracteres $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n \subseteq \widehat{G}_m^n$ permite una descomposición espectral de la cohomología primitiva de X_m^n en suma directa de espacios propios unidimensionales y que refina la descomposición de Hodge. Además, el peso $|\alpha| = q + 1 \in \mathbb{N}$ determina el tipo (p, q) de la cohomología.

Esto último implica que para el caso n par, los caracteres con peso $|\alpha| = n/2 + 1$ permite descomponer la cohomología primitiva intermedia:

$$H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) = \bigoplus_{|\alpha| = \frac{n}{2} + 1} V(\alpha),$$

pero no todos ellos contribuyen a la cohomología racional, el contenido de iii) es crucial: estable la condición adicional para obtener la descomposición espectral de la complexificación de la *componente racional*

$$(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

es espacios propios $V(\alpha)$, concretamente, si toda la órbita de α mediante la acción de multiplicación por unidades $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ permanece en la cohomología intermedia, entonces la suma de estos espacios $V(\alpha)$ son no triviales en $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q})$, es decir, el conjunto de caracteres

$$\mathfrak{B}_m^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n : |t \cdot \alpha| = \frac{n}{2} + 1, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\}$$

permite la descomposición de $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ en suma directa de los $V(\alpha)$, los elementos de $\mathfrak{B}_m^n$ los llamaremos *caracteres de Hodge*.

Es importante puntualizar una sutileza que puede llegar a confundir, los espacios complejos unidimensionales $V(\alpha)$ que aparece en la descomposición de Shioda *no suelen* estar definidos sobre $\mathbb{Q}$ individualmente. La condición $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ no afirma que

$$V(\alpha)_{\mathbb{Q}} := V(\alpha) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \neq 0,$$

lo que sí desciende de forma natural a $\mathbb{Q}$ son los bloques invariantes por la acción de Galois: la acción $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ actúa sobre los caracteres, y por lo tanto permuta los espacios propios. Conviene describir este fenómeno explícitamente: defina la órbita de $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ como

$$\mathcal{O}(\alpha) := \{t \cdot \alpha : t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\} \subseteq \mathfrak{B}_m^n,$$

donde $t \cdot \alpha := (t\alpha_0, \dots, t\alpha_{n+1})$, la acción $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ permuta los espacios propios mediante $V(\alpha) \mapsto V(t \cdot \alpha)$, entonces esta acción deja estable cada órbita $\mathcal{O}(\alpha)$, en consecuencia

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left(\left(\bigoplus_{\beta \in \mathcal{O}(\alpha)} V(\beta) \right) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) = |\mathcal{O}(\alpha)| \neq 0$$

es exactamente el espacio que contribuye a la cohomología racional.

En resumen, los caracteres $\mathfrak{B}_m^n$ indexan los bloques complejos que aparecen en la complexificación de la cohomología primitiva racional de tipo $(n/2, n/2)$, pero la contribución racional efectiva procede por órbitas de Galois. En particular, no es necesario que cada $V(\alpha)$ venga por si solo de una clase racional, basta que la órbita produzca una combinación Galois-invariante no nula.

Explícitamente, tenemos la descomposición de la cohomología primitiva *racional*:

$$H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mathcal{O} \in \text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n)} \left(\left(\bigoplus_{\beta \in \mathcal{O}} V(\beta) \right) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right),$$

donde $\text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n)$ denota la partición de los caracteres de Hodge $\mathfrak{B}_m^n$ en órbitas bajo la acción de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Esta descripción racional es conceptualmente importante pero la versión compleja es suficiente para estudiar la conjetura de Hodge, principalmente por la proposición [1.5.8](#). Sin embargo, la perspectiva racional que damos es útil y necesaria para describir explícitamente los objetos geométricos que inducen la cohomología racional tal como veremos en algunos ejemplos posteriores.

Estas últimas afirmaciones se discutirán con detalle en la siguiente sección; las adelantamos aquí debido a su importancia y consecuencias.

Observación 2.1.5. *Presentamos un ejemplo heurístico que ilustra la idea anterior. Los vectores*

$$v = (1, i) \in \mathbb{C}^2, \quad v' = (1, -i) \in \mathbb{C}^2,$$

forman una base del $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $\mathbb{C}^2$, pero los subespacios complejos unidimensionales

$$\mathbb{C} \cdot v \subseteq \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{C} \cdot v' \subseteq \mathbb{C}^2$$

no contienen elementos racionales no nulos. El automorfismo no trivial de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})$ (la conjugación $i \mapsto -i$) permuta estos subespacios, y se verifica que

$$((\mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}v') \cap \mathbb{Q}^2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^2,$$

es decir, la contribución racional aparece solo al sumar ambos subespacios: la suma directa $\mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}v'$ (que coincide con $\mathbb{C}^2$) tiene intersección no trivial con $\mathbb{Q}^2$, mientras que cada una de las líneas complejas por separado no aporta vectores racionales distintos de cero.

El contenido de **iv)** del teorema es la generalización natural de **iii)** para n impar.

Ahora continuamos con algunos ejemplos para mostrar la descomposición espectral de Shioda de manera explícita, es importante destacar que estos ejemplos los seguiremos usando a lo largo del capítulo para describirlos cada vez con más detalle.

Ejemplo 16. *La cúbica de Fermat*

$$X_3^2 = \{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Los caracteres diagonales son

$$\widehat{G}_3^2 = \{\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 : \sum a_i = 0 \pmod{3}\}$$

pero los que realmente aportan a la cohomología son aquellos con coordenadas no nulas:

$$\mathfrak{A}_3^2 = \{(2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}.$$

Como $|\mathfrak{A}_3^2| = 6$ se deduce que

$$\dim H_{\text{prim}}^2(X_3^2) = 6.$$

Para ver como estos se distribuyen, vemos que

$$|\alpha| = \frac{1}{3}(2 + 2 + 1 + 1) = 2 = q + 1, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}_3^2,$$

luego

$$\dim H_{\text{prim}}^{0,2}(X_3^2) = 0, \quad \dim H_{\text{prim}}^{1,1}(X_3^2) = 6, \quad \dim H_{\text{prim}}^{2,0}(X_3^2) = 0,$$

en particular, la cohomología primitiva intermedia $H_{\text{prim}}^{1,1}(X_3^2)$ se descompone en suma directa de cada espacio propio $V(\alpha)$. Es importante observar que este cálculo coincide perfectamente con lo obtenido anteriormente en el ejemplo [15](#), también es útil ver que existe una correspondencia obvia entre los caracteres $\mathfrak{A}_3^2$ y los exponentes de los monomios de dicho ejemplo.

Finalmente, es fácil verificar que cada α que aporta a la cohomología intermedia verifica la condición de estabilidad de $\mathfrak{B}_3^2$, luego

$$(H_{\text{prim}}^{1,1}(X_3^2) \cap H^2(X_3^2, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H_{\text{prim}}^{1,1}(X_3^2),$$

lo que también fue mostrado en el ejemplo [15](#) pero con un enfoque totalmente distinto.

El ejemplo anterior ilustra cómo la cohomología primitiva de una hipersuperficie de Fermat se descompone, sobre $\mathbb{C}$, en espacios propios asociados a los caracteres del grupo de automorfismos diagonales, y cómo esta descomposición es compatible con la descomposición de Hodge.

Los espacios propios $V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n)$ no aparecen necesariamente como factores de $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, para ilustrar este fenómeno recurrimos al siguiente ejemplo.

Ejemplo 17. Considere la hipersuperficie de Fermat de dimensión 4 y grado 5:

$$X_5^4 = \{x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

Los caracteres $\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathfrak{A}_5^4$ se separan en grupos según el peso $|\alpha| = (\sum a_i)/5$. Mostramos los representantes junto con la cardinalidad al considerar permutación:

	(1, 1, 1, 4, 4, 4) → 20	
	(1, 1, 2, 3, 4, 4) → 180	
(1, 1, 1, 1, 2, 4) → 30	(1, 1, 3, 3, 3, 4) → 60	(1, 3, 4, 4, 4, 4) → 30
(1, 1, 1, 1, 3, 3) → 15	(1, 2, 2, 2, 4, 4) → 60	(2, 2, 4, 4, 4, 4) → 15
(1, 1, 1, 2, 2, 3) → 60	(1, 2, 2, 3, 3, 4) → 180	(2, 3, 3, 4, 4, 4) → 60
(1, 1, 2, 2, 2, 2) → 15	(1, 2, 3, 3, 3, 3) → 30	(3, 3, 3, 3, 4, 4) → 15
	(2, 2, 2, 2, 3, 4) → 30	
	(2, 2, 2, 3, 3, 3) → 20	
$ \alpha = 2$	$ \alpha = 3$	$ \alpha = 4$

de lo que sigue desde ii) que

$$\dim H_{\text{prim}}^{0,4}(X_5^4) = \dim H_{\text{prim}}^{4,0}(X_5^4) = 0, \quad \dim H_{\text{prim}}^{1,3}(X_5^4) = \dim H_{\text{prim}}^{3,1}(X_5^4) = 120,$$

$$\dim H_{\text{prim}}^{2,2}(X_5^4) = 580, \quad \dim H_{\text{prim}}^4(X_5^4) = 820.$$

La condición $|\alpha| = 3$ asegura que $V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{2,2}(X_5^4)$, y para que este contribuya a la complexificación de la cohomología primitiva racional intermedia, este debe verificar la condición de estabilidad de $\mathfrak{B}_5^4$, esto se satisface únicamente por los caracteres

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 4, 4, 4), \quad \alpha_2 = (1, 1, 2, 3, 4, 4), \quad \alpha_3 = (1, 2, 2, 3, 3, 4), \quad \alpha_4 = (2, 2, 2, 3, 3, 3),$$

y sus permutaciones, por ejemplo, $(1, 1, 3, 3, 3, 4) \notin \mathfrak{B}_5^3$ pues

$$2 \cdot (1, 1, 3, 3, 3, 4) = (2, 2, 1, 1, 1, 3) \quad y \quad |(2, 2, 1, 1, 1, 3)| = 2 \neq 3,$$

en consecuencia,

$$\dim H_{\text{prim}}^{2,2}(X_5^4, \mathbb{Q}) = 20 + 180 + 180 + 20 = 400$$

y $H_{\text{prim}}^{2,2}(X_5^4, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ proviene de la descomposición espectral de $H_{\text{prim}}^{2,2}(X_5^4)$ de los espacios propios asociados a los caracteres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ y sus permutaciones.

Estos ejemplos muestran la potencia del teorema [2.1.4](#): a partir de él se puede extraer información explícita tanto sobre la descomposición de Hodge de la cohomología como sobre la parte racional, mediante un conteo combinatorio sujeto a condiciones aritméticas.

En la siguiente sección establecemos algunos criterios técnicos, y estudiamos en profundidad la acción $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ que actúa sobre los caracteres $\mathfrak{A}_m^n$ y como esta es compatible con la acción asociada en cohomología.

2.2. Descenso galoisiano y acción de Galois

Para analizar el carácter racional de la descomposición espectral en espacios propios $V(\alpha)$ introducidos en la Sección 2.1, es necesario entender dos hechos relacionados: (i) cómo se define y se interpreta el cuerpo de definición de una clase por medio de sus periodos, y (ii) cómo actúa el grupo de Galois sobre las clases y, en particular, cómo permuta los espacios propios $V(\alpha)$.

En esta sección estableceremos resultados generales de descenso galoisiano que permiten recuperar subespacios definidos sobre $\mathbb{Q}$ a partir de subespacios G -estables tras extender escalares; luego se describen las propiedades concretas de la acción de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ sobre $V(\alpha)$.

Supondremos conocimientos básicos de homología singular y de la interpretación de periodos como integrales de formas sobre ciclos enteros. También daremos por conocidas nociones elementales de teoría de cuerpos y de la acción de Galois sobre extensiones finitas de $\mathbb{Q}$.

Para un tratamiento conceptual y para conectar la acción aritmética con la topología, es útil considerar el *cuerpo de definición de los periodos normalizados* de $\omega \in H^n(X_m^n) \cong H_{\text{dR}}^n(X_m^n)$:

$$\mathbb{Q}_\omega := \mathbb{Q} \left(\frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \int_\gamma \omega : \gamma \in H_n(X_m^n, \mathbb{Z}) \right).$$

La normalización por $(2\pi i)^{n/2}$ es la que hace coincidir los periodos con las convenciones de comparación entre cohomología de De Rham y singular.

Para $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_\omega/\mathbb{Q})$ definimos

$$\begin{aligned} \chi_\sigma : H_n(X_m^n, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Q}_\omega \subseteq \mathbb{C} \\ \gamma &\longmapsto \sigma \left(\frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \int_\gamma \omega \right), \end{aligned}$$

y así,

$$\chi_\sigma \in \text{Hom}(H_n(X_m^n, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(X_m^n, \mathbb{Z})^\vee \cong H^n(X_m^n) \cong H_{\text{dR}}^n(X_m^n).$$

Vamos a denotar por $\sigma(\omega) \in H^n(X_m^n)$ al representante de χ_σ por dualidad de Poincaré, explícitamente:

$$\int_\gamma \sigma(\omega) = \chi_\sigma(\gamma), \quad \forall \gamma \in H_n(X, \mathbb{Z}).$$

Notar que esta acción es semilineal respecto a $\mathbb{Q}_\omega$: $\sigma(a\omega) = \sigma(a)\sigma(\omega)$ para $a \in \mathbb{Q}_\omega$.

El elemento $\sigma(\omega) =: \sigma \cdot \omega$ permite que el grupo $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ actúe sobre la cohomología $H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$, observar que una forma $\omega \in H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$ induce otra forma $\sigma(\omega) \in H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$ gracias a la construcción anterior.

Denotamos $\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega$ a la clausura galoisiana de $\mathbb{Q}_\omega$ en $\overline{\mathbb{Q}}$. A continuación presentamos resultados clásicos de descenso galoisiano que nos serán de utilidad.

Lema 2.2.1. *Sea $\omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q}_\omega)$, luego*

$$\omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \iff \sigma(\omega) = \omega, \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega/\mathbb{Q}).$$

Demostración. Denotemos $a_\gamma := \frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \int_\gamma \omega$, entonces

$$\begin{aligned} \omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) &\iff a_\gamma \in \mathbb{Q}, & \forall \gamma \in H_n(X_m^n, \mathbb{Z}) \\ &\iff \sigma(a_\gamma) = a_\gamma, & \forall \gamma, \forall \sigma \in \text{Gal}(\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega/\mathbb{Q}) \\ &\iff \sigma(\omega) = \omega, & \forall \sigma \in \text{Gal}(\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega/\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

□

El lema [2.2.1](#) es el criterio estándar de descenso para clases descritas por periodos: si la clase es racional, sus periodos son invariantes; recíprocamente, si todos los conjugados de los periodos coinciden, la clase coincide con sus conjugados y por tanto proviene de $H^n(X_m^n, \mathbb{Q})$. Este lema será la herramienta local para detectar racionalidad.

Proposición 2.2.2. *Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión finita galoisiana y sea $V = H^n(X_m^n, \mathbb{Q})$. Entonces*

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}} K)^{\text{Gal}(K/\mathbb{Q})} = V.$$

Equivalentemente, si $\omega \in H^n(X_m^n, K)$ verifica $\sigma(\omega) = \omega$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, entonces $\omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q})$.

Demostración. La inclusión $V \subseteq (V \otimes_{\mathbb{Q}} K)^{\text{Gal}(K/\mathbb{Q})}$ es inmediata: si $\omega \in V = H^n(X_m^n, \mathbb{Q})$ entonces $\omega \otimes 1$ es fijo por $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Para la inclusión recíproca, sea $\omega \in (V \otimes_{\mathbb{Q}} K)^{\text{Gal}(K/\mathbb{Q})}$. Dado que $\omega \in V \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong H^n(X_m^n, K)$, y además $\sigma(\omega) = \omega$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, se sigue que todos los periodos $(2\pi i)^{-n/2} \int_\gamma \omega$ pertenecen a K y son fijos por $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, por tanto dichos periodos y su campo generado están contenidos en $K^{\text{Gal}(K/\mathbb{Q})} = \mathbb{Q}$. Ahora aplicamos el lema [2.2.1](#): como $\omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q}_\omega)$ y $\sigma(\omega) = \omega$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega/\mathbb{Q})$ (en nuestro caso $\widetilde{\mathbb{Q}}_\omega \subseteq K$), concluimos que $\omega \in H^n(X_m^n, \mathbb{Q})$. Esto muestra $(V \otimes_{\mathbb{Q}} K)^{\text{Gal}(K/\mathbb{Q})} \subseteq V$, completando la prueba. □

La proposición [2.2.2](#) es la versión lineal y global del lema anterior: los invariantes bajo Galois de la extensión por escalares son precisamente los vectores definidos sobre $\mathbb{Q}$.

Corolario 2.2.3. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión finita galoisiana con grupo $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ y sea V un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial finito dimensional. Considere la extensión por escalares $V \otimes_{\mathbb{Q}} K$ con su acción natural de G dada por $\sigma(v \otimes \lambda) = v \otimes \sigma(\lambda)$. Si $W \subseteq V \otimes_{\mathbb{Q}} K$ es un subespacio K -lineal estable por la acción de G , es decir,

$$\sigma(W) = W \quad \forall \sigma \in G,$$

entonces existe un único subespacio $\mathbb{Q}$ -lineal $V' \subseteq V$ tal que

$$W = V' \otimes_{\mathbb{Q}} K.$$

Además, dicho subespacio viene dado por

$$V' = W \cap V.$$

Demostración. Por la proposición 2.2.2 se tiene

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}} K)^G = V.$$

Como W es G -estable, el mismo argumento aplicado a W muestra que

$$W = (W^G) \otimes_{\mathbb{Q}} K.$$

En efecto, la inclusión $(W^G) \otimes_{\mathbb{Q}} K \subseteq W$ es inmediata, y la igualdad de dimensiones se obtiene tras extender escalares a K . Definiendo

$$V' := W^G = W \cap V,$$

se obtiene la igualdad deseada. La unicidad es inmediata, pues si $W = U \otimes_{\mathbb{Q}} K$ entonces necesariamente $U = W \cap V$. $\square$

El corolario 2.2.3 es la formulación más general y la que utilizaremos constantemente en la descomposición espectral: todo subespacio G -estable desciende de forma única a un subespacio racional. En la práctica, lo usaremos con $K = \mathbb{Q}(\xi)$ el cuerpo ciclotómico y con $V = H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})$.

Ya tenemos la base aritmética necesaria. En lo que sigue, nos concentraremos en estudiar la acción diagonal de G_m^n sobre los espacios propios $V(\alpha)$ definidos en la Sección 2.1.

Un automorfismo $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ se determina completamente por un escalar, que denotaremos $t_\sigma := t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ y que actúa explícitamente por $\sigma(\xi) = \xi^t$.

Observación 2.2.4. *El espacio propio $V(\alpha)$ está naturalmente definido sobre $\mathbb{Q}(\xi)$, debido principalmente a que $\alpha(g) \in \mathbb{Q}(\xi)$ para cada $g \in G_m^n$, como consecuencia de esto, $V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \otimes_{\mathbb{Q}(\xi)} \mathbb{C} = V(\alpha)$. Esto se discutirá más a fondo en la siguiente sección (ver lema 2.3.1).*

El siguiente lema describe la compatibilidad entre la acción de Galois y la acción diagonal de G_m^n : la acción de Galois no preserva en general un subespacio propio $V(\alpha)$, sino que lo transporta a otro espacio propio, determinado aritméticamente por el carácter α .

Lema 2.2.5. *Para cada $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \ni t_\sigma$, si $\omega \in V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} := V(\alpha) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$ entonces*

$$\sigma(\omega) \in V(t_\sigma \cdot \alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}.$$

Demostración. Sean $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$, $t := t_\sigma \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ y $\omega \in V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$. Al tomar $\gamma \in H_n(X_m^n, \mathbb{Z})$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\gamma g^*(\sigma(\omega)) &= \int_{g(\gamma)} \sigma(\omega) \\ &= \sigma \left(\int_{g(\gamma)} \frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \omega \right) \\ &= \sigma \left(\int_\gamma \frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} g^*(\omega) \right) \\ &= \sigma(\alpha(g)) \sigma \left(\int_\gamma \frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \omega \right) \\ &= \sigma(\alpha(g)) \int_\gamma \sigma(\omega) \\ &= \int_\gamma \sigma(\alpha(g)) \sigma(\omega) \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\sigma(\alpha(g)) = (t \cdot \alpha)(g)$. Sean $\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1})$, $g = [\xi_0 : \dots : \xi_{n+1}] \in G_m^n$. Escribamos $\xi_i = \xi^{r_i}$ con $r_i \in \{0, \dots, m-1\}$. Luego,

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha(g)) &= \sigma(\xi_0^{a_0} \dots \xi_{n+1}^{a_{n+1}}) \\ &= \sigma(\xi^{r_0 a_0} \dots \xi^{r_{n+1} a_{n+1}}) \\ &= \xi^{tr_0 a_0} \dots \xi^{tr_{n+1} a_{n+1}} \\ &= \xi^{ta_0} \dots \xi^{ta_{n+1}} \\ &= (t \cdot \alpha)(g) \end{aligned}$$

lo que permite concluir que $\sigma(\omega) \in V(t \cdot \alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}$. □

Como $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ es un grupo, se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

Lema 2.2.6. *Para cada $\sigma_t \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \ni t$ se tiene que*

$$\sigma_t(V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}) = V(t \cdot \alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}.$$

Demostración. El lema 2.2.5 nos da la contención hacia la derecha. Solo falta ver que

$$V(t \cdot \alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \subseteq \sigma_t(V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}).$$

Sea $\omega \in V(t \cdot \alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}$. Como $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ es un grupo multiplicativo, escojamos t^{-1} y apliquemos el lema 2.2.5 para concluir que

$$\sigma_{t^{-1}}(\omega) \in V(t^{-1}t\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} = V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}.$$

Notar que

$$\sigma_t(\sigma_{t^{-1}}(\omega)) = (\sigma_t \circ \sigma_{t^{-1}})(\omega) = \omega,$$

es decir, $\omega \in \sigma_t(V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)})$. □

El lema 2.2.6 muestra que el grupo de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ actúa permutando los espacios propios $V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}$ según la acción natural de $t_\sigma \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ sobre los caracteres. Como consecuencia inmediata, el bloque de la descomposición espectral asociado a la órbita de $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$:

$$\bigoplus_{t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times} V(t\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$$

es $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ -estable por el lema 2.2.6, y por lo tanto desciende a $\mathbb{Q}$ por el corolario 2.2.3.

Con estas herramientas aritméticas disponemos ya del marco necesario para estudiar la acción diagonal de G_m^n sobre los $V(\alpha)$.

En la siguiente sección demostraremos cada ítem de la descomposición espectral de Shioda 2.1.4: las condiciones aritméticas que describe Shioda se derivan, como veremos, del isomorfismo de Griffiths y la condición aritmética $\mathfrak{B}_m^n$ para la racionalidad se deducen desde las herramientas desarrolladas en esta sección.

2.3. Demostración de la descomposición espectral en Fermat

Para la demostración seguiremos la estrategia clásica introducida por Shioda: identificar una base explícita de clases propias de la cohomología primitiva mediante residuos de Poincaré, calcular sus periodos y describir el cuerpo que generan, y finalmente usar la acción del grupo ciclotómico y su grupo de Galois para realizar un descenso aritmético a $\mathbb{Q}$.

Esta idea permite traducir la información compleja en condiciones puramente combinatorias y aritméticas sobre los caracteres. Véase [13] para la prueba original.

Considere $n \geq 1, m \geq 2$ y la hipersuperficie de Fermat de dimensión n y grado m

$$X_m^n = \{F = x_0^m + \dots + x_{n+1}^m = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1},$$

el teorema de la base de Griffiths [1.7.2] nos da el isomorfismo

$$\begin{aligned} R_{m(q+1)-n-2}^F &\xrightarrow{\sim} H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n) \\ P &\longmapsto \omega_P := \text{res} \left(\frac{P\Omega}{F^{q+1}} \right)^{p,q}, \end{aligned}$$

para una tupla $\beta = (b_0, \dots, b_{n+1})$ denotaremos $x^\beta = x_0^{b_0} \dots x_{n+1}^{b_{n+1}}$.

Una base monomial de $R_{m(q+1)-n-2}^F$ es

$$\left\{ x^\beta : \sum b_i = m(q+1) - n - 2, b_i \in \{0, 1, \dots, m-2\} \right\},$$

y llamaremos ω_β a los elementos de la base inducida por el mapa de Griffiths en $H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$.

Sea $\alpha = \beta + \mathbf{1} := (b_0 + 1, \dots, b_{n+1} + 1)$ con $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$. Notar que $b_i \neq m-1$, tomemos entonces $x^\beta \in R_{m(q+1)-n-2}^F$ y observar que

$$g^*(\omega_\beta) = g^* \left(\text{res} \left(\frac{x^\beta \Omega}{F^{q+1}} \right)^{p,q} \right) = \text{res} \left(g^* \left(\frac{x^\beta \Omega}{F^{q+1}} \right) \right)^{p,q} \quad (\star)$$

y

$$\begin{aligned} g^*(\Omega)(x) &= \Omega(g(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \xi_j x_j d(\xi_0 x_0) \wedge \dots \wedge \widehat{d(\xi_j x_j)} \wedge \dots \wedge d(\xi_{n+1} x_{n+1}) \\ &= \xi_0 \dots \xi_{n+1} \Omega(x) \end{aligned}$$

lo que tras reemplazar en $(\star)$ se obtiene

$$g^* \left(\frac{x^\beta \Omega}{F^{q+1}} \right) (x) = \frac{(\xi_0 x_0)^{b_0} \dots (\xi_{n+1} x_{n+1})^{b_{n+1}} \xi_0 \dots \xi_{n+1} \Omega(x)}{[(\xi_0 x_0)^m + \dots + (\xi_{n+1} x_{n+1})^m]^{q+1}} = \frac{\alpha(g) x^\beta \Omega(x)}{F^{q+1}(x)}, \quad \forall g \in G_m^n$$

lo que prueba que $\beta + \mathbf{1} \in \mathfrak{A}_m^n$, si y solo si, $\omega_\beta \in V(\alpha)$.

Notar que

$$\sum b_i = m(q+1) - n - 2 \iff |\beta + \mathbf{1}| = q+1,$$

y $\sum(b_i + 1) = 0$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, luego $\beta + \mathbf{1} \in \widehat{G}_m^n$. Como $b_i \neq m-1$ si $\beta + \mathbf{1} \in \mathfrak{A}_m^n$, se sigue que

$$\{\omega_\beta : \beta + \mathbf{1} \in \mathfrak{A}_m^n, |\beta + \mathbf{1}| = q+1\} \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$$

es base.

Se concluye que $\omega_\beta \in V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$ con $\alpha := \beta + \mathbf{1}$. Así,

$$H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n \\ |\alpha| = q+1}} \langle \omega_{\alpha-\mathbf{1}} \rangle \subseteq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n \\ |\alpha| = q+1}} V(\alpha).$$

Para probar la igualdad procedemos a verificar que $\dim V(\alpha) = 1$ para $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$.

Sea $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$ y $\omega \in V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$. Podemos escribir

$$\omega = \sum_{|\beta + \mathbf{1}| = q+1} \lambda_\beta \omega_\beta, \quad \lambda_\beta \in \mathbb{C}, \quad \omega_\beta \in V(\beta + \mathbf{1}),$$

como $\omega \in V(\alpha)$, obtenemos

$$\begin{aligned} g^*(\omega) &= \alpha(g)\omega, \quad \forall g \in G_m^n \\ \implies \sum \lambda_\beta (\beta + \mathbf{1})(g) \omega_\beta &= \sum \alpha(g) \lambda_\beta \omega_\beta, \quad \forall g \in G_m^n \end{aligned}$$

Dado que $\{\omega_\beta\}_\beta \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$ es base, lo anterior implica que

$$\lambda_\beta (\beta + \mathbf{1})(g) = \lambda_\beta \alpha(g), \quad \forall g = [\xi_0 : \dots : \xi_{n+1}] \in G_m^n, \quad \forall |\beta + \mathbf{1}| = q+1$$

Si $\beta + \mathbf{1} = \alpha$ la igualdad es trivial. Si $\beta + \mathbf{1} \neq \alpha$ y suponemos que $\lambda_\beta \neq 0$, entonces

$$\xi_0^{b_0+1} \dots \xi_{n+1}^{b_{n+1}+1} = \xi_0^{a_0} \dots \xi_{n+1}^{a_{n+1}}, \quad \forall [\xi_0 : \dots : \xi_{n+1}] \in G_m^n$$

y en particular $\xi^{b_j+1} = \xi^{a_j}$ para todo j , luego $a_j = b_j + 1$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y así $\beta + \mathbf{1} = \alpha$, contradicción.

Así, para $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$, todo $\omega \in V(\alpha)$ se escribe como $\lambda_{\alpha-\mathbf{1}} \omega_{\alpha-\mathbf{1}}$. Luego, $V(\alpha) = \langle \omega_{\alpha-\mathbf{1}} \rangle$.

Falta probar que $V(\alpha) \neq 0 \implies \alpha \in \mathfrak{A}_m^n$, si $\omega \in V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(X_m^n)$, entonces

$$\omega = \sum_{\substack{\beta + \mathbf{1} \in \mathfrak{A}_m^n \\ |\beta + \mathbf{1}| = q+1}} \lambda_\beta \omega_\beta = \lambda_{\alpha-\mathbf{1}} \omega_{\alpha-\mathbf{1}},$$

y $\alpha = (\alpha - \mathbf{1}) + \mathbf{1} \in \mathfrak{A}_m^n$.

Esto concluye la demostración de i) y ii) del teorema [2.1.4](#).

Hasta ahora, hemos obtenido la descomposición sobre $\mathbb{C}$. El generador de la línea compleja $V(\alpha) = \langle \omega_{\alpha-1} \rangle$ es probable que no permita generar $V(\alpha)_{\mathbb{Q}}$ incluso tras reescalar, más aún, ya hemos comentado que $V(\alpha)_{\mathbb{Q}}$ es nulo si es que $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ no es fijo por la acción $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Lo anterior implica que no es posible mejorar el teorema [2.1.4](#) para obtener una descomposición en la cohomología racional, a continuación veremos que esto si es alcanzable si consideramos el cuerpo ciclotómico.

Lema 2.3.1. *Existe $\lambda_\beta \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\lambda_\beta \cdot \omega_\beta \in H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$.*

Demostración. Sea $G = G_m^n$ y defina la aplicación $\mathbb{Q}(\xi)$ -lineal

$$\begin{aligned} T : H_{\text{prim}}^n(X, \mathbb{Q}(\xi)) &\longrightarrow \bigoplus_{g \in G} H_{\text{prim}}^n(X, \mathbb{Q}(\xi)), \\ \omega &\longmapsto (g^*(\omega) - \alpha(g)\omega)_{g \in G} \end{aligned}$$

y observar que $\ker T = V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}$ y $V(\alpha) = \ker(T_{\mathbb{C}}) = \ker(T) \otimes_{\mathbb{Q}(\xi)} \mathbb{C}$. Si $V(\alpha) \neq 0$ entonces $\ker(T) \neq 0$, y se sigue que existe $0 \neq \eta \in V(\alpha) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$. Como $V(\alpha)$ es una línea compleja generada por ω_β , existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\eta = \lambda \omega_\beta \in H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$. $\square$

Observación 2.3.2. *La clave de la demostración anterior es que el kernel conmuta con la extensión por escalares en dimensión finita, también es importante notar que T se define con coeficientes $\alpha(g) \in \mathbb{Q}(\xi)$ y por ello no podemos replicar estas ideas sobre $\mathbb{Q}$.*

El lema [2.3.1](#) nos dice que $V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}$ es no nulo si $V(\alpha)$ también lo es, es decir, cada $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$ aporta para generar $H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$.

Corolario 2.3.3.

$$\text{i)} \quad H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi)) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n} V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)}.$$

$$\text{ii)} \quad V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \otimes_{\mathbb{Q}(\xi)} \mathbb{C} = V(\alpha), \text{ para cada } \alpha \in \mathfrak{A}_m^n. \text{ En particular,}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}(\xi)} V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} = 1, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}_m^n.$$

Estamos en condiciones para probar el ítem iii) del teorema [2.1.4](#):

$$(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha).$$

Comenzamos con la inclusión ($\supseteq$), sea $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, recordar que

$$\mathfrak{B}_m^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n : |t\alpha| = n/2 + 1, \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\},$$

todo carácter $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ tiene peso $|\alpha| = n/2 + 1$ y así $V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n)$. La acción de G sobre $\mathfrak{B}_m^n$ permite separarlo en órbitas, digamos $\text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n) = \{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^N$. Así,

$$\mathfrak{B}_m^n = \mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_N,$$

y cada bloque

$$W_k = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}_k} V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \subseteq H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}(\xi))$$

será un subespacio G -invariante, y podemos aplicar el descenso galoisiano [2.2.3](#)

$$\left(\left(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}_k} V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)} \right) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}_k} V(\alpha)_{\mathbb{Q}(\xi)},$$

y tras complexificar junto con el ítem ii) del corolario [2.3.3](#) deducimos

$$(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \supseteq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}_k} V(\alpha),$$

lo que permite concluir el resultado tras sumar sobre $\text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n)$.

Seguimos con la contención ($\subseteq$), sea

$$\omega \in (H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) = \bigoplus_{|\alpha| = \frac{n}{2} + 1} V(\alpha),$$

y escribamos¹

$$\omega = \sum_{|\alpha| = \frac{n}{2} + 1} \omega_\alpha, \quad \omega_\alpha \in V(\alpha).$$

Como ω es racional, aplicando σ_t y usando el lema [2.2.6](#), obtenemos

$$\omega = \sigma_t(\omega) = \sum_{|\alpha| = \frac{n}{2} + 1} \sigma_t(\omega_\alpha), \quad \sigma_t(\omega_\alpha) \in V(t\alpha).$$

Por la unicidad de la descomposición espectral, se sigue que

$$\sigma_t(\omega_\alpha) = \omega_{t\alpha}.$$

En consecuencia, si $\omega_\alpha \neq 0$, entonces

$$0 \neq \omega_{t\alpha} \in V(t\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n),$$

¹no confundir ω_α con la imagen del mapa de Griffiths.

para todo $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Por el ítem **ii)** del teorema [2.1.4](#),

$$|t\alpha| = \frac{n}{2} + 1 \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times,$$

es decir,

$$\alpha \in \mathfrak{B}_m^n.$$

Por lo tanto,

$$\omega \in \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha),$$

lo que concluye la demostración.

Una consecuencia inmediata de la demostración anterior, es el ítem **iv)** del teorema [2.1.4](#), el conjunto $\mathfrak{B}_m^n$ se descompone como

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m^n &= \{\alpha : |t \cdot \alpha| = p + 1, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\} \cup \{\alpha : |t \cdot \alpha| = p + 2, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\} \\ &= \mathfrak{B}_m^n(p) \cup \mathfrak{B}_m^n(p + 1) \end{aligned}$$

estos permiten descomponer las formas de tipo $(p + 1, p)$ y $(p, p + 1)$ respectivamente, de la misma manera como se hace en **iii)**.

Con esto finalizamos la demostración del teorema [2.1.4](#). En la siguiente sección vamos a reformular la conjetura de Hodge para el caso de la hipersuperficies de Fermat usando estas nuevas herramientas.

2.4. Conjetura de Hodge en hipersuperficies de Fermat

En esta sección recordaremos brevemente el enunciado de la conjetura de Hodge, las reducciones del problema gracias a la resultados de Lefschetz, y expondremos cómo la descomposición espectral de Shioda para las hipersuperficies de Fermat ayuda a simplificar la conjetura.

Los elementos de $\text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ son combinaciones racionales de subvariedades irreducibles de X_m^n de codimensión p , módulo equivalencia racional. Cada elemento del grupo de Chow racional $\text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ induce naturalmente una clase algebraica racional de tipo (p, p) mediante la aplicación clase de ciclo.

La conjetura de Hodge busca estudiar si la aplicación de ciclo

$$\text{cl}_{\mathbb{Q}} : \text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{H}^{p,p}(X_m^n) \cap \text{H}^{2p}(X_m^n, \mathbb{Q})$$

es sobreyectiva para todo $p \geq 0$. Los elementos de $\mathrm{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ se dicen *ciclos algebraicos* y los elementos de $\mathrm{H}^{p,p}(X_m^n) \cap \mathrm{H}^{2p}(X_m^n, \mathbb{Q})$ se dicen *ciclos de Hodge*. La aplicación de ciclo envía ciclos algebraicos en ciclos de Hodge, y la pregunta clave es:

¿Todo ciclo de Hodge será realizado geoméricamente por un ciclo algebraico?

En la Sección [1.4](#), mostramos que esto es cierto para $p = 0$ y $p = 1$. En la Sección [1.6](#), se concluye que en el caso de una hipersuperficie proyectiva suave de dimensión n la conjetura de Hodge es válida para n impar, y en el caso par solo es necesario verificar $p = n/2$ en la cohomología primitiva.

Por este motivo, en todo lo que sigue del capítulo trabajaremos con la hipersuperficie de Fermat X_m^n de dimensión $n \geq 2$ par y grado $m \geq 2$ (con $m = 1$ tenemos $X_1^n \cong \mathbb{P}^n$).

La conjetura de Hodge es válida en $n = 2$ por el teorema [1.4.1](#) de Lefschetz $(1, 1)$, pero a pesar de esto, sigue siendo interesante estudiar el caso de superficies por la capacidad de deducir invariantes geométricos (e.g. número de Picard $\rho(X_m^2)$), y también porque podemos obtener resultados más finos y explícitos en estos casos.

Se definió el grupo G_m^n que actúa diagonalmente en Fermat, esto permite ver los grupos de cohomología como G_m^n -módulos tras definir $(g^*\omega)(x) := \omega(g \cdot x)$. El grupo de caracteres de G_m^n se identifica con

$$\widehat{G_m^n} = \left\{ \alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{n+2} : \sum a_i = 0 \right\},$$

y Shioda prueba que el subconjunto de caracteres

$$\mathfrak{A}_m^n = \left\{ \alpha \in \widehat{G_m^n} : a_i \neq 0 \ \forall i \right\}$$

permite una descomposición espectral de $\mathrm{H}_{\mathrm{prim}}^n(X_m^n)$ en espacios propios unidimensionales $V(\alpha)$. Ahora, observar que

$$(\mathrm{Im}(\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}) \cap \mathrm{H}_{\mathrm{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subseteq (\mathrm{H}_{\mathrm{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap \mathrm{H}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

es un G_m^n -submódulo. En efecto, para todo $g \in G_m^n$ se tiene que

$$g^*(\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}([Z])) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}([g^{-1}(Z)]) \in \mathrm{Im}(\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}),$$

y como $G_m^n \subseteq \mathrm{PGL}(X_m^n)$ la clase del hiperplano queda fija:

$$g^*([h]) = [g^{-1}(h)] = [h],$$

por tanto g^* preserva el operador de Lefschetz y, en consecuencia, $H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})$ es G_m^n -estable. Extender escalares a $\mathbb{C}$ no rompe esa estabilidad, de modo que la inclusión anterior es una inclusión de G_m^n -submódulos.

Shioda afirma que la complexificación de la cohomología primitiva racional de tipo $(n/2, n/2)$ se descompone en suma directa de los espacios propios unidimensionales $V(\alpha)$ indexados por caracteres $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n \subseteq \mathfrak{A}_m^n$, en consecuencia,

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{C}_m^n} V(\alpha) = (\text{Im}(\text{cl}_{\mathbb{Q}}) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subseteq (H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha),$$

para *algún* subconjunto de caracteres $\mathfrak{C}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$. Recordamos que los caracteres de Hodge son

$$\mathfrak{B}_m^n = \left\{ \alpha \in \mathfrak{A}_m^n : |t\alpha| = \frac{n}{2} + 1, \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \right\},$$

donde $|\alpha| := (\sum [a_i]_m)/m$ denota el peso del carácter α .

La diferencia conceptual es clara: $\mathfrak{C}_m^n$ es de naturaleza geométrica, mientras que $\mathfrak{B}_m^n$ es puramente aritmético.

La conjetura de Hodge en hipersuperficies de Fermat tiene una contención trivial, *todo ciclo algebraico es un ciclo de Hodge*, lo que se expresa usando este nuevo enfoque en $\mathfrak{C}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$: *todo carácter algebraico es un carácter de Hodge*.

La conjetura de Hodge para X_m^n es entonces equivalente a la siguiente pregunta:

$$¿ \mathfrak{B}_m^n \subseteq \mathfrak{C}_m^n ?$$

y como ya discutimos antes, se sabe que

$$\mathfrak{C}_m^n = \mathfrak{B}_m^n, \quad \forall n \geq 1 \text{ impar y } m \geq 1,$$

$$\mathfrak{C}_m^0 = \mathfrak{B}_m^0, \quad \mathfrak{C}_m^2 = \mathfrak{B}_m^2, \quad \forall m \geq 1.$$

Las dos afirmaciones anteriores son de hecho válidas para toda hipersuperficie² $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$.

Para el caso específico de la hipersuperficie de Fermat X_m^n podemos decir un poco más. Para $m = 1$ el conjunto $\mathfrak{A}_1^n$ es vacío, y por ende $\mathfrak{B}_1^n = \mathfrak{C}_1^n = \emptyset$: esto refleja el hecho geométrico de que $X_1^n \cong \mathbb{P}^n$ no posee cohomología primitiva. Para $m = 2$ el conjunto $\mathfrak{A}_2^n$ tiene un único elemento dado por $\alpha_0 = (1, \dots, 1)$ y la acción $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times$ es trivial, luego $\mathfrak{B}_2^n = \{\alpha_0\}$. Entonces

²Vamos a entender, desde aquí en adelante, la igualdad $\mathfrak{C}_m^n = \mathfrak{B}_m^n$ como la formulación usual de la conjetura de Hodge, pues en general una hipersuperficie $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ no posee una descomposición espectral análoga.

la pregunta se reduce a verificar si $V(\alpha_0)$ es generado por un ciclo algebraico: esto se deduce de un hecho clásico sobre la cuádrica X_2^n , esta contiene dos familias de subespacios lineales de dimensión $n/2$. Si L_+ y L_- pertenecen a familias distintas, entonces la diferencia de sus clases primitivas genera la cohomología primitiva intermedia, y así $\mathfrak{B}_2^n = \mathfrak{C}_2^n = \{\alpha_0\}$. Este último caso es importante y lo detallaremos un poco más al final de esta sección.

Lo anterior implica que,

$$\mathfrak{C}_1^n = \mathfrak{B}_1^n, \quad \mathfrak{C}_2^n = \mathfrak{B}_2^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Aprovechamos de comentar otros casos conocidos de la conjetura de Hodge en el caso de Fermat:

- Resultados de Voisin muestran que la conjetura de Hodge *integral* se verifica para las cúbicas de dimensión 4; en particular $\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{B}_3^4$. Véase en especial [17, 18] para las técnicas de descomposición de la diagonal y aplicaciones al caso de las cúbicas.
- La cuártica de Fermat de dimensión 4 es válida la conjetura de Hodge, es uno de los primeros casos no triviales que se han probado explícitamente usando el enfoque de Shioda; en consecuencia $\mathfrak{C}_4^4 = \mathfrak{B}_4^4$.

En resumen, en el caso de la hipersuperficie de Fermat X_m^n la conjetura de Hodge racional se traduce, mediante la descomposición espectral de Shioda, en un problema aritmético-combinatorio: determinar si para todo carácter de Hodge $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$, la suma directa de los espacios propios $V(\alpha)$ asociada a la órbita de α es realizada geoméricamente por clases primitivas de subvariedades irreducibles de X_m^n de dimensión $n/2$.

Este último paso es donde radica toda la dificultad, los resultados de Shioda establecen explícitamente el conjunto de caracteres $\mathfrak{B}_m^n$ que permiten generar la *complexificación* de la cohomología primitiva racional intermedia, y permite reducir el problema a verificar la existencia de ciclos algebraicos cuyas clases de cohomología generen *la órbita* del espacio propio $V(\alpha)$.

Concretamente, para cada órbita

$$\mathcal{O}(\alpha) := \{t\alpha : t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\} \subseteq \mathfrak{B}_m^n,$$

buscamos determinar si el subespacio racional

$$\left(\bigoplus_{\beta \in \mathcal{O}(\alpha)} V(\beta) \right) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \subseteq H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}),$$

es generado por clases primitivas de combinaciones $\mathbb{Q}$ -lineales de subvariedades irreducibles de dimensión $n/2$.

La separación en órbitas permite asegurar que la descomposición espectral descienda a la cohomología *racional*.

En consecuencia, la conjetura de Hodge en X_m^n equivale a mostrar la existencia de ciclos algebraicos $\{Z_i\}_{i=1}^r \subseteq \text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ tales que

$$\mathbb{C} \cdot \{[Z_i]_{\text{prim}} : i = 1, \dots, r\} = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{O}(\alpha)} V(\beta)$$

para cada $\mathcal{O}(\alpha) \in \text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n)$, lo que implica inmediatamente que

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha) = \left(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

está generado por combinaciones $\mathbb{C}$ -lineales de clases primitivas de ciclos algebraicos $Z_i \in \text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$, y por tanto la conjetura de Hodge vale en X_m^n .

Es importante tener esta idea siempre presente: Shioda descompone la complexificación de la cohomología primitiva racional intermedia en espacios propios unidimensionales indexados por caracteres $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$, y la conjetura de Hodge busca probar que la suma directa sobre $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ (es decir, $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q})$) proviene de clases primitivas de ciclos algebraicos de $\text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$, y esto último es *equivalente* a probarlo sobre cada órbita $\mathcal{O}(\alpha) \subseteq \mathfrak{B}_m^n$ por separado.

De hecho, esto es lo más fino que podemos llegar, la conjetura de Hodge puede ser válida en X_m^n pero podrían existir espacios $V(\alpha)$ que *no provengan* de la clase primitiva de un ciclo algebraico $Z \in \text{CH}^p(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$, esto en caso que $|\mathcal{O}(\alpha)| > 1$. En la siguiente sección mostraremos ejemplos explícitos de todo lo discutido acá.

Recordamos brevemente el caso $m = 2$ mencionado antes: el único carácter de Hodge es $\alpha_0 = (1, \dots, 1) \in \mathfrak{B}_2^n$, y se sabe la existencia de dos subvariedades lineales de dimensión $n/2$, digamos $L_+, L_- \subseteq X_2^n$, tales que

$$\mathbb{C} \cdot \{[L_+]_{\text{prim}} - [L_-]_{\text{prim}}\} = V(\alpha_0) = \left(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_2^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_2^n, \mathbb{Q}) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

y por tanto, la conjetura es válida en X_2^n .

En general, las clases algebraicas que generan la cohomología primitiva intermedia pueden construirse a partir de subvariedades lineales contenidas en X_2^n . Esto sugiere que los ciclos lineales juegan un rol fundamental en la comprensión geométrica de $\mathfrak{C}_m^n$, y motiva su estudio sistemático.

En la siguiente sección se introducen los ciclos lineales en la hipersuperficie de Fermat: clases de subvariedades lineales de dimensión $n/2$, y analizamos su contribución a la cohomología primitiva. Esto permitirá enunciar el teorema de Aoki–Shioda, el cual proporciona criterios aritméticos precisos para determinar cuándo la cohomología primitiva racional intermedia está generado por ciclos lineales.

2.5. Ciclos lineales

Denotemos por $\zeta_r = \exp(2\pi i/r)$ a la raíz r -ésima de la unidad. Considere la factorización

$$a^m + b^m = \prod_{k=0}^{m-1} (a - \zeta_{2m}^{2k+1} b),$$

la cual permite escribir la ecuación de Fermat X_m^n como

$$F = \underbrace{x_0^m + x_1^m}_{\prod_{k=0}^{m-1} (x_0 - \zeta_{2m}^{2k+1} x_1)} + \dots + \underbrace{x_n^m + x_{n+1}^m}_{\prod_{k=0}^{m-1} (x_n - \zeta_{2m}^{2k+1} x_{n+1})} = 0,$$

y de este modo,

$$\mathbb{P}^{n/2} := \{x_0 - \zeta_{2m} x_1 = x_2 - \zeta_{2m} x_3 = \dots = x_n - \zeta_{2m} x_{n+1} = 0\} \subseteq X_m^n$$

es un espacio lineal de dimensión $n/2$ contenido en X_m^n . Aplicando la acción

$$G_m^n \rtimes S_{n+2} \subseteq \text{Aut}(X_m^n) \cap \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{C})$$

podemos generar más espacios lineales en X_m^n con esta misma estructura. Explícitamente, hay que escoger una partición de $\{0, 1, \dots, n+1\}$ en parejas, digamos

$$\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2})), \quad j_i < k_i, \quad j_0 < \dots < j_{n/2},$$

y para cada par (j_r, k_r) escogemos un peso w_r :

$$w = (w_0, \dots, w_{n/2}), \quad w_r \in \{0, \dots, m-1\},$$

de este modo, los espacios lineales $(G_m^n \rtimes S_{n+2}) \cdot \mathbb{P}^{n/2}$ están dados por

$$\ell_{\mathcal{J}}^w = \left\{ x_{j_0} - \zeta_{2m}^{2w_0+1} x_{k_0} = \dots = x_{j_{n/2}} - \zeta_{2m}^{2w_{n/2}+1} x_{k_{n/2}} = 0 \right\} \cong \mathbb{P}^{n/2}$$

y son llamados *espacios lineales estándar de dimensión $n/2$* de X_m^n .

Proposición 2.5.1. *En el caso de superficies de Fermat X_m^2 , tenemos 3 particiones de $\{0, 1, 2, 3\}$, cada una de ellas genera un sistema de 2 ecuaciones, cada ecuación se le asocia un peso en $\{0, \dots, m-1\}$, así*

$$\# \{ \text{rectas estándar en } X_m^2 \} = 3m^2.$$

En el caso más general para n par, tenemos

$$\begin{aligned} \# \{ \text{espacios lineales estándar de dimensión } n/2 \text{ en } X_m^n \} &= \dots \\ \dots &= \frac{(n+2)!}{2^{(n+2)/2}((n+2)/2)!} \cdot m^{(n+2)/2} = m^{(n+2)/2} \prod_{k=1}^{n/2+1} (2k-1). \end{aligned}$$

La demostración es trivial, aprovechamos de describirla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18. *Sea $n = 4$ y $m = 3$, existen 15 particiones de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en parejas, explícitamente:*

$$\begin{aligned} &((0, 1), (2, 3), (4, 5)), \quad ((0, 1), (2, 4), (3, 5)), \quad ((0, 1), (2, 5), (3, 4)), \\ &((0, 2), (1, 3), (4, 5)), \quad ((0, 2), (1, 4), (3, 5)), \quad ((0, 2), (1, 5), (3, 4)), \\ &((0, 3), (1, 2), (4, 5)), \quad ((0, 3), (1, 4), (2, 5)), \quad ((0, 3), (1, 5), (2, 4)), \\ &((0, 4), (1, 2), (3, 5)), \quad ((0, 4), (1, 3), (2, 5)), \quad ((0, 4), (1, 5), (2, 3)), \\ &((0, 5), (1, 2), (3, 4)), \quad ((0, 5), (1, 3), (2, 4)), \quad ((0, 5), (1, 4), (2, 3)). \end{aligned}$$

El conteo se puede hacer por simple combinatoria: hay $6!$ formas de permutar $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, pero como la pareja (i, j) no distingue el orden (pues $i_r < j_r$) debemos dividir por 2 por cada pareja, y como también no importa el orden de las tres parejas (pues $i_0 < i_1 < i_2$)) dividimos por $3!$. Desde esto, se deduce que

$$\# \mathcal{J} = \frac{6!}{2^3 3!} = 15.$$

Una alternativa equivalente: seleccionamos un elemento j_0 de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces quedan 5 opciones para escoger su pareja k_0 . Se continua seleccionando cualquier j_1 de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{j_0, k_0\}$ y ahora quedan 3 opciones para k_1 , desde acá deducimos la expresión

$$\# \mathcal{J} = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15.$$

Cada emparejamiento $\mathcal{J}$ (notar que $|\mathcal{J}| = 3$) induce un sistema lineal, donde cada par $(j, k) \in \mathcal{J}$ se le asocia la ecuación

$$x_j - \zeta_6^{2w+1} x_k = 0, \quad w \in \{0, 1, 2\},$$

y así, cada partición $\mathcal{J}$ tiene 3^3 opciones. Por lo tanto,

$$\# \{ \text{planos estándar en } X_3^4 \} = 15 \cdot 27 = 405.$$

La pregunta natural es si estos espacios lineales estándar de dimensión $n/2$ son todos los existentes en X_m^n . Conviene introducir la siguiente definición.

Definición 2.5.2. *Sea X una variedad algebraica proyectiva, se define el esquema de Fano de X como*

$$F_r(X) = \{L \subseteq X : L \text{ lineal, } \dim L = r\}.$$

Observación 2.5.3. *No entraremos en detalles profundos en la construcción de dicho esquema. Hay que tener presente que $F_r(X)$ es una variedad que parametriza los espacios lineales de dimensión r en X . Estamos interesados en estudiar $F_{n/2}(X_m^n)$ para n par.*

En el caso de Fermat, se sabe que $F_{n/2}(X_m^n)$ es un esquema reducido (véase [15]), en consecuencia, cada elemento de $F_{n/2}(X_m^n)$ corresponde a un espacio lineal *distinto* (no existen multiplicidades).

Si $F_{n/2}(X_m^n)$ es de dimensión 0, entonces X_m^n tendrá finitos espacios lineales de dimensión $n/2$. Si $F_{n/2}(X_m^n)$ es de dimensión positiva, entonces X_m^n contendrá una familia continua de espacios lineales de dimensión $n/2$.

Para $m \geq 3$ sabemos que

$$\text{Aut}(X_m^n) \cap \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{C}) = G_m^n \rtimes S_{n+2},$$

por lo que es *esperable* que $F_{n/2}(X_m^n)$ sea finito y sus elementos provengan de espacios lineales estándar. En cambio, para $m = 2$ tenemos que

$$\text{Aut}(X_2^n) \cap \text{PGL}_{n+2}(\mathbb{C}) = \text{PO}_{n+2}(\mathbb{C}) \supsetneq G_2^n \rtimes S_{n+2}$$

es un grupo infinito, el cual contiene elementos adicionales como rotaciones y reflexiones.

Ejemplo 19. *Considere la superficie cuádrica de Fermat:*

$$X_2^2 = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

La recta estándar dada por $\mathcal{J} = ((0, 1), (2, 3))$ y $w = (0, 0)$ es

$$\ell_{\mathcal{J}}^w = \begin{cases} x_0 - ix_1 & = 0 \\ x_2 - ix_3 & = 0 \end{cases}$$

y la rotación sobre las coordenadas x_0 y x_2 en un ángulo θ es

$$R_{02}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$R_{02}(\theta) \cdot \ell_{\mathcal{J}}^w = \begin{cases} x_0 - i(\cos \theta)x_1 - i(\sin \theta)x_3 & = 0 \\ x_2 + i(\sin \theta)x_1 - i(\cos \theta)x_3 & = 0 \end{cases}$$

la cual corresponde a una familia continua de rectas en X_2^2 , y ninguna de ellas es de tipo estándar (salvo $\theta = 0, \pi$).

Similarmente, considere la reflexión de Householder sobre el vector $w = (1, 1, 1, 0)^\top$:

$$H = I_4 - 2 \frac{ww^\top}{w^\top w} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego,

$$H \cdot \ell_{\mathcal{J}}^w = \begin{cases} (1 - 3i)x_0 + (1 + 3i)x_1 + 4x_2 & = 0 \\ (-1 - 3i)x_0 + (1 - 3i)x_1 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$$

produciendo otra recta no estándar en X_2^2 .

En este sentido, el caso $m = 2$ es distinguido del resto. El hecho que existan un continuo de rectas en la Fermat X_2^n es totalmente esperado:

- Toda superficie cuádrica suave en $\mathbb{P}^3$ es *reglada*, es decir, isomorfa a la variedad de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (y así, $F_1(X_2^2) = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$). En consecuencia, existe un continuo de rectas con dos parámetros contenidas en X_2^2 .
- Más generalmente, si $Q \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ es una hipersuperficie cuádrica suave de dimensión par n , entonces el esquema de Fano $F_{n/2}(Q)$ tiene dimensión positiva para $n \geq 2$. En particular, existe una familia infinita de espacios lineales de dimensión $n/2$ contenidos en Q .

Esto implica inmediatamente que, los espacios lineales de dimensión $n/2$ contenidos en X_2^n no pueden ser todos estándar.

Para $n = 2$ y $m \geq 3$ se ha probado que $|F_1(X_m^2)| = 3m^2$ (véase [11]); en particular, todas las rectas en X_m^2 son estándar (cf. proposición 2.5.1). Resultados recientes en [2] han demostrado que una hipersuperficie cúbica suave en $\mathbb{P}^5$ contiene como mucho 405 planos, y que la cúbica de Fermat X_3^4 es la única que alcanza esta cota (cf. ejemplo 18), en consecuencia, en el caso $(n, m) = (4, 3)$ todos los planos contenidos en X_3^4 son precisamente los 405 planos estándar contruidos anteriormente.

En muchos casos concretos (las superficies de Fermat X_m^2 con $m \geq 3$ y la cúbica 4-variedad X_3^4) se ha probado que el esquema de Fano $F_{n/2}(X_m^n)$ es finito y está formado únicamente por espacios estándar. La evidencia sugiere fuertemente que esto vale siempre para $m \geq 3$, sin embargo, esto sigue siendo un problema abierto en la actualidad.

A continuación, mostramos el esquema de Fano $F_{n/2}(X_m^n)$ para algunos valores de (n, m) con lo que se conoce hasta este momento, los valores de las cotas son obtenidas usando la proposición [2.5.1](#). Acá, S_6 denota la variedad de Spinor (dimensión positiva) definida como una de las componentes de $F_3(X_2^6)$.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6
2	—	$\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$	—	$\mathbb{P}^3 \sqcup \mathbb{P}^3$	—	$S_6 \sqcup S_6$
3	—	27	—	405	—	≥ 8505
4	—	48	—	≥ 960	—	≥ 26880
5	—	75	—	≥ 1875	—	≥ 65625

Cuadro 2.1: $F_{n/2}(X_m^n)$ para valores de (n, m) .

Ahora vamos a calcular la clase cohomológica primitiva correspondiente a $\ell_{\mathcal{J}}^w$ con ayuda del siguiente resultado.

Teorema 2.5.4 (Villaflor). *Si $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ es una hipersuperficie suave de grado m con dimensión n par, y $Z \subseteq X$ una intersección completa en $\mathbb{P}^{n+1}$ con dimensión $n/2$:*

$$I(Z) = \langle f_0, \dots, f_{n/2} \rangle \subseteq S(\mathbb{P}^{n+1}) \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}].$$

Entonces, $[Z]_{\text{prim}} \in H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X) \cap H_{\text{prim}}^n(X, \mathbb{Q})$ corresponde con

$$\text{res} \left(\frac{P_Z \Omega}{F^{\frac{n}{2}+1}} \right)^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}},$$

con $P_Z := \det(\text{Jac}(f_0, g_0, \dots, f_{n/2}, g_{n/2}))$, donde escribimos

$$F = f_0 g_0 + \dots + f_{n/2} g_{n/2} \in I(Z).$$

Corolario 2.5.5. *El polinomio $P_{\ell_{\mathcal{J}}^w} =: P_{\mathcal{J}, w}$ que induce la clase cohomológica $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$ por el mapa de residuos de Griffiths es*

$$P_{\mathcal{J}, w} = m^{n/2+1} \left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{2w_r+1} \right) \prod_{r=0}^{n/2} \left(\sum_{i=0}^{m-2} \zeta_{2m}^{(m-2-i)(2w_r+1)} x_{j_r}^i x_{k_r}^{m-2-i} \right),$$

o equivalentemente, expandiendo el producto se obtiene

$$P_{\mathcal{J},w} = m^{n/2+1} \left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{2w_r+1} \right) \sum_{(i_0, \dots, i_{n/2})} \left(\left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{(m-2-i_r)(2w_r+1)} \right) \prod_{r=0}^{n/2} x_{j_r}^{i_r} x_{k_r}^{m-2-i_r} \right)$$

donde la suma recorre sobre $0 \leq i_{(\cdot)} \leq m-2$.

Demostración. Escribamos $\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2}))$ y $w = (w_0, \dots, w_{n/2})$. Denotemos

$$\lambda_r := \zeta_{2m}^{2w_r+1}, \quad r = 0, \dots, n/2,$$

entonces $\ell_{\mathcal{J}}^w$ queda definido por las ecuaciones lineales

$$f_r := x_{j_r} - \lambda_r x_{k_r} = 0, \quad r = 0, \dots, n/2.$$

En cada par (j_r, k_r) , podemos escribir

$$x_{j_r}^m + x_{k_r}^m = (x_{j_r} - \lambda_r x_{k_r}) \left(\sum_{t=0}^{m-1} x_{j_r}^{m-1-t} (\lambda_r x_{k_r})^t \right) =: f_r g_r.$$

Así, $F = f_0 g_0 + \dots + f_{n/2} g_{n/2}$. Observar que f_r, g_r dependen únicamente de x_{j_r} y x_{k_r} , por lo tanto

$$\text{Jac}(f_0, g_0, \dots, f_{n/2}, g_{n/2}) = \begin{pmatrix} B_0 & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & B_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \cdots & B_{n/2} \end{pmatrix},$$

donde

$$B_r = \begin{pmatrix} \partial_{x_{j_r}} f_r & \partial_{x_{k_r}} f_r \\ \partial_{x_{j_r}} g_r & \partial_{x_{k_r}} g_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_r \\ \partial_{x_{j_r}} g_r & \partial_{x_{k_r}} g_r \end{pmatrix} \implies \det B_r = \partial_{x_{k_r}} g_r + \lambda_r \partial_{x_{j_r}} g_r.$$

Procedemos a calcular la última expresión:

$$\begin{aligned} \det B_r &= \sum_{\substack{t=1 \\ m-2}}^{m-1} t \lambda_r^t x_{j_r}^{m-1-t} x_{k_r}^{t-1} + \lambda_r \sum_{t=0}^{m-2} (m-1-t) \lambda_r^t x_{j_r}^{m-2-t} x_{k_r}^t \\ &= \sum_{t=0}^{m-2} (t+1) \lambda_r^{t+1} x_{j_r}^{m-2-t} x_{k_r}^t + \sum_{t=0}^{m-2} (m-1-t) \lambda_r^{t+1} x_{j_r}^{m-2-t} x_{k_r}^t \\ &= m \lambda_r \sum_{\substack{t=0 \\ m-2}}^{m-2} \lambda_r^t x_{j_r}^{m-2-t} x_{k_r}^t \\ &= m \lambda_r \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_r^{m-2-i} x_{j_r}^i x_{k_r}^{m-2-i}. \end{aligned}$$

Desde la estructura diagonal por bloques de $\text{Jac}(f_0, g_0, \dots, f_{n/2}, g_{n/2})$, se sigue que

$$P_{\mathcal{J},w} = m^{n/2+1} \left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{2w_r+1} \right) \prod_{r=0}^{n/2} \left(\sum_{i=0}^{m-2} \zeta_{2m}^{(2w_r+1)(m-2-i)} x_{j_r}^i x_{k_r}^{m-2-i} \right)$$

es el polinomio verificando

$$\text{res} \left(\frac{P_{\mathcal{J},w}\Omega}{F^{n/2+1}} \right)^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} \in H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q})$$

gracias al teorema [2.5.4](#). □

Observación 2.5.6. *El polinomio $P_{\mathcal{J},w}$ es homogéneo y de grado*

$$(m-2)\frac{n+2}{2} = \left(\frac{n}{2} + 1\right)m - (n+2),$$

y por lo tanto, su residuo de Griffiths corresponde a una clase cohomológica en $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n)$ tal como se esperaría.

Definición 2.5.7. *Para una partición $\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2}))$, decimos que un vector $\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1})$ es N -emparejable por $\mathcal{J}$ si*

$$a_{j_r} + a_{k_r} = N, \quad r = 0, \dots, n/2.$$

Ejemplo importante. *Considere la superficie cuártica de Fermat*

$$X_4^2 = \{F = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

la partición $\mathcal{J} = ((0, 2), (1, 3))$ y el peso $w = (0, 2)$. Estos definen la recta $\ell_{\mathcal{J}}^w \subseteq X_4^2$. Explícitamente,

$$\ell_{\mathcal{J}}^w = \begin{cases} x_0 - \zeta_8 x_2 = 0 \\ x_1 - \zeta_8^5 x_3 = 0 \end{cases}$$

El polinomio

$$P_{\mathcal{J},w} = 4^2 \zeta_8^6 (x_0^2 + \zeta_8 x_0 x_2 + \zeta_8^2 x_2^2) (x_1^2 + \zeta_8^5 x_1 x_3 + \zeta_8^{10} x_3^2)$$

satisface que

$$[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} = \text{res} \left(\frac{P_{\mathcal{J},w}\Omega}{F^2} \right)^{1,1} \in H_{\text{prim}}^{1,1}(X_4^2, \mathbb{Q}),$$

y tras expandir $P_{\mathcal{J},w}$ obtenemos

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{J},w} = 16 & \left(\zeta_8^2 x_0^0 x_1^0 x_2^2 x_3^2 + \zeta_8^5 x_0^0 x_1^1 x_2^2 x_3^1 + \zeta_8^0 x_0^0 x_1^2 x_2^2 x_3^0 + \zeta_8^1 x_0^1 x_1^0 x_2^1 x_3^2 + \dots \right. \\ & \left. \dots + \zeta_8^4 x_0^1 x_1^1 x_2^1 x_3^1 + \zeta_8^7 x_0^1 x_1^2 x_2^1 x_3^0 + \zeta_8^0 x_0^2 x_1^0 x_2^0 x_3^2 + \zeta_8^3 x_0^2 x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \zeta_8^6 x_0^2 x_1^2 x_2^0 x_3^0 \right). \end{aligned}$$

En la construcción de Shioda, se toma la base monomial

$$\left\{x^\beta : \sum b_i = 4, \quad 0 \leq b_i \leq 2\right\} \subseteq R_4^F$$

y se deduce que el residuo de Griffiths del monomio x^β es un generador del espacio propio asociado al carácter $\alpha := \beta + \mathbf{1} = (b_0 + 1, \dots, b_{n+1} + 1)$. Observar que el polinomio $P_{\mathcal{J},w}$ es combinación de todos los monomios x^β donde β es 2-emparejable por $\mathcal{J}$, es decir,

$$b_0 + b_2 = 2, \quad b_1 + b_3 = 2.$$

Tras realizar el desfase $\alpha = \beta + \mathbf{1}$, se deduce que el carácter α es 4-emparejable por $\mathcal{J}$. Observar que la clase cohomológica

$$[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} \in (H^{1,1}(X_4^2) \cap H_{\text{prim}}^2(X_4^2, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_4^2} V(\alpha)$$

tiene proyección no nula en la componente $\alpha \in \mathfrak{B}_4^2$, si y solo si, α es 4-emparejable por $\mathcal{J}$, en tal caso diremos que α es compatible por $\mathcal{J}$.

Se resumen las ideas centrales: en la hipersuperficie de Fermat X_m^n tenemos identificados espacios lineales estándar de dimensión $n/2$ denotados por $\ell_{\mathcal{J}}^w$, estos están dados explícitamente por el sistema lineal

$$x_{j_r} - \zeta_{2m}^{2w_r+1} x_{k_r} = 0, \quad r = 0, \dots, n/2,$$

donde $\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2}))$ es la partición de coordenadas y $w = (w_0, \dots, w_{n/2})$ aporta pesos en ζ_{2m} . La clase cohomológica primitiva de $\ell_{\mathcal{J}}^w$ se obtiene por la imagen del mapa de Griffiths de un polinomio $P_{\mathcal{J},w}$ que es combinación $\mathbb{Q}(\zeta_{2m})$ -lineal de todos los monomios x^β verificando que β es $(m-2)$ -emparejable por $\mathcal{J}$, es decir,

$$b_{j_r} + b_{k_r} = m - 2, \quad r = 0, \dots, n/2.$$

La construcción de Shioda establece que para un monomio

$$x^\beta \in R_{(q+1)m-(n+2)}^F$$

corresponde por el mapa de Griffiths a un generador del espacio propio asociado al carácter $\alpha = \beta + \mathbf{1}$, lo que equivale a que α sea m -emparejable por $\mathcal{J}$. Dado que $P_{\mathcal{J},w}$ recibe contribuciones de todos los monomios x^β con β un multi-índice $(m-2)$ -emparejable por $\mathcal{J}$, esto equivale a que, la clase cohomológica primitiva del espacio lineal estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$ tiene proyección no nula sobre las componentes de los espacios propios $V(\alpha)$ donde α es m -emparejable por $\mathcal{J}$.

Esto motiva a definir los *caracteres lineales* como

$$\mathfrak{D}_m^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_m^n : \alpha \sim (a_0, m - a_0, a_2, m - a_2, \dots, a_n, m - a_n)\},$$

donde $\alpha_1 \sim \alpha_2$ si son iguales módulo permutación. Es importante notar que la información $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ implica que α es m -emparejable pero no especifica sobre qué partición $\mathcal{J}$.

De la discusión anterior, se sigue inmediatamente que

$$\mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \forall \mathcal{J}, w\} \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{D}_m^n} V(\alpha),$$

y ahora se procede a probar la igualdad. Para ello, se sugiere recordar ambas expresiones del polinomio $P_{\mathcal{J},w}$ mostradas en el corolario [2.5.5](#).

Lema 2.5.8. *Sea $\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2}))$ una partición de $\{0, 1, \dots, n+1\}$, entonces*

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2m}) \cdot \{P_{\mathcal{J},w} : \forall w\} = \mathbb{Q}(\zeta_{2m}) \cdot \{x^\beta : \beta_{j_r} + \beta_{k_r} = m - 2 \ \forall r\}.$$

Demostración. Fijamos una pareja $(j, k) = (j_r, k_r)$ y defina el subespacio

$$V_{(j,k)} = \mathbb{Q}(\zeta_{2m}) \cdot \{x_j^i x_k^{m-2-i} : i = 0, \dots, m-2\},$$

para cada $w \in \{0, \dots, m-1\}$ se define el polinomio

$$S_w^{(j,k)} = \sum_{i=0}^{m-2} \zeta_{2m}^{(m-2-i)(2w+1)} x_j^i x_k^{m-2-i}.$$

Fijamos $i \in \{0, \dots, m-2\}$, la ecuación

$$x_j^i x_k^{m-2-i} = \sum_{w=0}^{m-1} c_w^i S_w^{(j,k)}$$

permite obtener el siguiente sistema lineal

$$\delta_{i,s} = \sum_{w=0}^{m-1} c_w^i \zeta_{2m}^{(m-2-i)(2w+1)}, \quad s = 0, \dots, m-2,$$

con $\delta_{a,b}$ el delta de Kronecker, este sistema está asociado a la matriz de Vandermonde con coeficientes

$$(1, \zeta_{2m}^{-(2w+1)}, (\zeta_{2m}^{-(2w+1)})^2, \dots, (\zeta_{2m}^{-(2w+1)})^{m-2})$$

y por tanto invertible en $\mathbb{Q}(\zeta_{2m})$. Obtenemos una única solución en los coeficientes $c_0^i, \dots, c_{m-2}^i$. Explícitamente, la expresión de $x_j^i x_k^{m-2-i}$ corresponde a

$$x_j^i x_k^{m-2-i} = \frac{1}{m} \sum_{w=0}^{m-1} \zeta_{2m}^{-(2w+1)(m-2-i)} S_w^{(j,k)},$$

lo que prueba que

$$V_{(j,k)} = \mathbb{Q}(\zeta_{2m}) \cdot \{S_w^{(j,k)} : \forall w\}.$$

Finalmente, como

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2m}) \cdot \{x^\beta : \beta_{j_t} + \beta_{k_t} = m - 2 \forall t\} = \bigotimes_r V_{(j_r, k_r)}$$

y

$$P_{\mathcal{J},w} = m^{n/2+1} \left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{2w_r+1} \right) \prod_{r=0}^{n/2} S_{w_r}^{(j_r, k_r)},$$

se sigue inmediatamente el resultado. $\square$

Desde la demostración, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.5.9. *Sea $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathfrak{D}_m^n$ un carácter lineal. Sea $\mathcal{J} = ((j_0, k_0), \dots, (j_{n/2}, k_{n/2}))$ una partición compatible con α y escribamos $w = (w_0, \dots, w_{n/2})$. Entonces ,*

$$x^{\alpha-1} = \frac{1}{m^{n+2}} \sum_{\substack{0 \leq w_i \leq m-1 \\ 0 \leq i \leq n/2}} \zeta_{2m}^{c_{\mathcal{J}}^w} P_{\mathcal{J},w}$$

donde

$$c_{\mathcal{J}}^w = - \sum_{r=0}^{n/2} (2w_r + 1)(m - \alpha_{j_r}).$$

El lema [2.5.8](#) afirma que para un monomio x^β con β un multi-índice $(m-2)$ -emparejable, entonces al fijar una partición $\mathcal{J}$ compatible con β podemos escribir x^β como combinación $\mathbb{Q}(\zeta_{2m})$ -lineal de los polinomios $P_{\mathcal{J},w}$ de manera única, en consecuencia:

Teorema 2.5.10.

$$\mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \forall \mathcal{J}, w\} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{D}_m^n} V(\alpha),$$

Por lo que cada carácter $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ define un espacio propio $V(\alpha)$ generado por *combinaciones complejas* de ciclos lineales estándar $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$.

El isomorfismo de Griffiths nos da las equivalencias

$$x^{\alpha-1} \longleftrightarrow \omega_{\alpha-1} \in V(\alpha), \quad P_{\mathcal{J},w} \longleftrightarrow [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}},$$

por lo tanto, el corolario [2.5.9](#) nos será de bastante utilidad: permite describir explícitamente cómo $V(\alpha)$ para $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ recibe contribuciones de los distintos ciclos lineales $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$. En este sentido, las componentes de la descomposición espectral de Shioda las cuales son generadas por ciclos lineales estándar, pueden no ser generadas por un único ciclo lineal estándar $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$.

A continuación, usamos las expresiones de $x_j^i x_k^{m-2-i}$ obtenidas en la demostración del lema [2.5.8](#), para describir explícitamente $V(\alpha)$ con $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ en un caso concreto.

Ejemplo 20. Continuamos con la superficie cuártica de Fermat X_4^2 . Considere el monomio x^β con $\beta = (0, 1, 2, 1)$, el cual es únicamente compatible con la partición $\mathcal{J} = ((0, 2), (1, 3))$. Hay que describir cada pareja (j, k) como combinación de los polinomios $S_w^{(j,k)}$, en este caso obtenemos

$$x_0^0 x_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{w=0}^3 \zeta_8^{-2(2w+1)} S_w^{(0,2)} \quad y \quad x_1^1 x_3^1 = \frac{1}{4} \sum_{w=0}^3 \zeta_8^{-(2w+1)} S_w^{(1,3)}.$$

Tras multiplicar se obtiene que

$$\begin{aligned} x^{(0,1,2,1)} &= \frac{1}{16} \sum_{w_0=0}^3 \sum_{w_1=0}^3 \zeta_8^{-2(2w_0+1)-(2w_1+1)} S_{(w_0,w_1)}^{(0,2)} S_{(w_0,w_1)}^{(1,3)} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \sum_{w_0=0}^3 \sum_{w_1=0}^3 \zeta_8^{-3(2w_0+1)-2(2w_1+1)} \left(16 \cdot \zeta_8^{(2w_0+1)+(2w_1+1)} S_{(w_0,w_1)}^{(0,2)} S_{(w_0,w_1)}^{(1,3)} \right) \\ &= \frac{1}{256} \sum_{0 \leq w_0, w_1 \leq 3} \zeta_8^{-3(w_0+1)-2(w_1+1)} P_{\mathcal{J},w} \end{aligned}$$

lo que equivale a la expresión del corolario [2.5.9](#). Su forma expandida es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{256} \left(\zeta_8^3 P_{\mathcal{J},(0,0)} + \zeta_8^1 P_{\mathcal{J},(0,1)} + \zeta_8^7 P_{\mathcal{J},(0,2)} + \zeta_8^5 P_{\mathcal{J},(0,3)} + \zeta_8^0 P_{\mathcal{J},(1,0)} + \zeta_8^6 P_{\mathcal{J},(1,1)} + \zeta_8^4 P_{\mathcal{J},(1,2)} + \zeta_8^2 P_{\mathcal{J},(1,3)} + \dots \right. \\ &\left. \dots + \zeta_8^5 P_{\mathcal{J},(2,0)} + \zeta_8^3 P_{\mathcal{J},(2,1)} + \zeta_8^1 P_{\mathcal{J},(2,2)} + \zeta_8^7 P_{\mathcal{J},(2,3)} + \zeta_8^2 P_{\mathcal{J},(3,0)} + \zeta_8^0 P_{\mathcal{J},(3,1)} + \zeta_8^6 P_{\mathcal{J},(3,2)} + \zeta_8^4 P_{\mathcal{J},(3,3)} \right). \end{aligned}$$

El carácter asociado al monomio $x^{(0,1,2,1)}$ es $\alpha = (1, 2, 3, 2) \in \mathfrak{D}_4^2$, el cálculo anterior permite concluir que

$$0 \neq \frac{1}{256} \sum_{0 \leq w_0, w_1 \leq 3} \zeta_8^{-3(2w_0+1)-2(2w_1+1)} \left[\ell_{((0,2),(1,3))}^{(w_0,w_1)} \right]_{\text{prim}} = \omega_{(0,1,2,1)} \in V((1, 2, 3, 2)).$$

Notar que $\alpha \in \mathfrak{B}_4^2$, por lo tanto, la componente α contribuye a la complejificación de la cohomología primitiva racional intermedia de X_4^2 , y hemos comprobado que $V(\alpha)$ es generado por una combinación compleja de ciclos lineales estándar. Recordamos que la conjetura de Hodge en el caso de Fermat busca probar si la suma directa de $V(\alpha)$ con $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ proviene de combinaciones complejas de clases primitivas de ciclos algebraicos $Z_i \in \text{CH}^{n/2}(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$.

Observación 2.5.11. En el ejemplo anterior tomamos $\alpha = (1, 2, 3, 2) \in \mathfrak{D}_4^2$ y comprobamos que el generador complejo

$$\omega_{\alpha-1} := \text{res} \left(\frac{x^{\alpha-1} \Omega}{F^2} \right)^{1,1}$$

es efectivamente un elemento en

$$\mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \forall \mathcal{J}, w\},$$

es decir, una combinación compleja de clases cohomológicas primitivas de rectas estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$. Observar acá que los ciclos algebraicos racionales son $\ell_{\mathcal{J}}^w = 1 \cdot \ell_{\mathcal{J}}^w \in \text{CH}^1(X_4^2)_{\mathbb{Q}}$, pese a que las rectas geométricas $\ell_{\mathcal{J}}^w \subseteq X_4^2$ estén definidas por ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}(\zeta_8)$. Más aún, notar que $\mathcal{O}(\alpha) = \{(1, 2, 3, 2), (3, 2, 1, 2)\}$ tiene más de un elemento, luego $V(\alpha)$ no es Galois-estable y en consecuencia no desciende a $\mathbb{Q}$, es decir,

$$V((1, 2, 3, 2)) \cap H^2(X_4^2, \mathbb{Q}) = 0,$$

en particular, ninguna combinación racional de $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$ puede generar $V((1, 2, 3, 2))$ pues este no tiene generador racional. En cambio,

$$\dim_{\mathbb{Q}}((V((1, 2, 3, 2)) \oplus V((3, 2, 1, 2))) \cap H^2(X_4^2, \mathbb{Q})) = 2$$

y este si posee una base racional al ser Galois-estable.

El ejemplo [20](#) muestra indicios de un hecho clave: todo carácter lineal resulta ser un carácter de Hodge.

Proposición 2.5.12. Sea $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ y $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$, entonces $|t \cdot \alpha| = \frac{n}{2} + 1$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$, podemos suponer que

$$\alpha = (a_0, m - a_0, a_2, m - a_2, \dots, a_n, m - a_n).$$

Multiplicar por $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ actúa componente a componente:

$$t \cdot (a_i, m - a_i) = (ta_i, t(m - a_i)) \equiv (ta_i, m - ta_i) \pmod{m}.$$

Como t es invertible, $ta_i \not\equiv 0 \pmod{m}$ y por tanto los representantes complementarios satisfacen

$$[ta_i]_m + [m - ta_i]_m = m.$$

Sumando sobre los $n/2 + 1$ pares se obtiene

$$|t \cdot \alpha| = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n+1} [(t \cdot \alpha)_j]_m = \frac{n}{2} + 1.$$

□

La proposición [2.5.12](#) implica $\mathfrak{D}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$, y así

$$\mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \forall \mathcal{J}, w\} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{D}_m^n} V(\alpha) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}_m^n} V(\alpha) = \left(H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

Corolario 2.5.13. *Si $\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n$, entonces la conjetura de Hodge vale para la hipersuperficie de Fermat X_m^n .*

Demostración. Si $\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n$, entonces la descomposición de Shioda [2.1.4](#) muestra que

$$\mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \forall \mathcal{J}, w\} = \left(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H_{\text{prim}}^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

lo que equivale a la conjetura de Hodge por la proposición [1.5.8](#). □

Observación 2.5.14. *La demostración de la proposición [2.5.12](#) implica que $t\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ para todo $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ y $t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. En particular, el bloque de la descomposición espectral asociada a $\mathfrak{D}_m^n$ es Galois-estable y este verifica Hodge por el teorema [2.5.10](#). Así, la conjetura de Hodge resta estudiarla en las órbitas de $\text{Orb}(\mathfrak{B}_m^n) \setminus \text{Orb}(\mathfrak{D}_m^n)$.*

Continuamos con más ejemplos explícitos, un resultado emblemático de geometría algebraica: *las 27 rectas en una superficie cúbica suave.*

Ejemplo 21. *Considere la superficie cúbica de Fermat*

$$X_3^2 = \{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

recordemos del ejemplo [16](#) que el conjunto de caracteres de Hodge de X_3^2 es

$$\mathfrak{B}_3^2 = \{(2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}.$$

Se sigue que

$$\rho(X_3^2) = \dim_{\mathbb{Q}} (H^{1,1}(X_3^2) \cap H^2(X_3^2, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} (H^{1,1}(X_3^2) \cap H_{\text{prim}}^2(X_3^2, \mathbb{Q})) + 1 = |\mathfrak{B}_3^2| + 1 = 7,$$

lo que es consistente con el hecho de que toda superficie cúbica suave tiene número de Picard 7.

En este caso se observa que $\mathfrak{D}_3^2 = \mathfrak{B}_3^2$, lo que implica que existen 6 espacios propios $V(\alpha)$ unidimensionales generados por combinaciones de clases cohomológicas primitivas de rectas estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$. En este caso tenemos tres particiones:

$$\mathcal{J}_1 = ((0, 1), (2, 3)), \quad \mathcal{J}_2 = ((0, 2), (1, 3)), \quad \mathcal{J}_3 = ((0, 3), (1, 2)),$$

y en cada caso, hay que escoger pesos para cada pareja:

$$w = (w_1, w_2), \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2\},$$

esto induce las siguientes rectas estándar en X_3^2 :

Familia 1:

$$\ell_{((0,1),(2,3))}^{(w_1, w_2)} : \quad \begin{cases} x_0 - \zeta_6^{2w_1+1} x_1 = 0, \\ x_2 - \zeta_6^{2w_2+1} x_3 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Familia 2:

$$\ell_{((0,2),(1,3))}^{(w_1, w_2)} : \quad \begin{cases} x_0 - \zeta_6^{2w_1+1} x_2 = 0, \\ x_1 - \zeta_6^{2w_2+1} x_3 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Familia 3:

$$\ell_{((0,3),(1,2))}^{(w_1, w_2)} : \quad \begin{cases} x_0 - \zeta_6^{2w_1+1} x_3 = 0, \\ x_1 - \zeta_6^{2w_2+1} x_2 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Cada familia produce $3 \times 3 = 9$ rectas; en total $3 \cdot 9 = 27$ rectas.

Observar que no usamos $\mathfrak{D}_3^2$ para calcular las 27 rectas, únicamente calculamos el número de emparejamientos posibles, cada recta es un sistema de ecuaciones controladas por los pesos (w_1, w_2) sobre la partición $\mathcal{J}$, es un simple conteo combinatorio (ver proposición [2.5.1](#)).

Como ya habíamos dicho antes, no existe una correspondencia biyectiva entre las rectas geométricas $\ell_{\mathcal{J}}^w$ y los caracteres lineales $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$, lo que está ocurriendo es que los espacios propios $V(\alpha)$ con $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ recibe contribuciones de distintas clases $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$, pero solo de aquellos espacios lineales estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$ con $\mathcal{J}$ compatible con α .

Ahora volvemos con la superficie cuártica de Fermat X_4^2 que estudiamos en detalles antes.

Ejemplo importante. Considere la superficie cuártica de Fermat

$$X_4^2 = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

al igual que antes tenemos tres particiones $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$, pero cada familia generará más rectas debido a tener mayor grado que la cúbica, explícitamente

Familia 1:

$$\ell_{((0,1),(2,3))}^{w_1, w_2} : \quad \begin{cases} x_0 - \zeta_8^{2w_1+1} x_1 = 0, \\ x_2 - \zeta_8^{2w_2+1} x_3 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Familia 2:

$$\ell_{((0,2),(1,3))}^{w_1,w_2} : \begin{cases} x_0 - \zeta_8^{2w_1+1} x_2 = 0, \\ x_1 - \zeta_8^{2w_2+1} x_3 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Familia 3:

$$\ell_{((0,3),(1,2))}^{w_1,w_2} : \begin{cases} x_0 - \zeta_8^{2w_1+1} x_3 = 0, \\ x_1 - \zeta_8^{2w_2+1} x_2 = 0, \end{cases} \quad w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Cada familia produce $4 \times 4 = 16$ rectas; en total $3 \cdot 16 = 48$ rectas. Esto es consistente con un hecho estándar, toda superficie cuártica suave contiene finitas rectas y acotadas por 64. Por otra parte, en este caso podemos comprobar que nuevamente $\mathfrak{B}_4^2 = \mathfrak{D}_4^2$ y los ciclos lineales son, módulo permutación:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 3, 3) \rightarrow 6 \text{ combinaciones} \\ \alpha_2 &= (1, 2, 2, 3) \rightarrow 12 \text{ combinaciones} \\ \alpha_3 &= (2, 2, 2, 2) \rightarrow 1 \text{ combinacion} \end{aligned}$$

y en particular,

$$\rho(X_4^2) = \dim_{\mathbb{Q}} (H^{1,1}(X_4^2) \cap H^2(X_4^2, \mathbb{Q})) = |\mathfrak{B}_4^2| + 1 = 20.$$

Una superficie cuártica suave es $K3$, y así

$$1 \leq \rho(X) \leq 20,$$

lo que muestra que la superficie cuártica de Fermat es Picard maximal. Respecto a los caracteres lineales, estos inducen particiones sobre (x_0, x_1, x_2, x_3) pero no siempre únicas. Por ejemplo, el carácter $(1, 2, 2, 3)$ es únicamente compatible por la partición $((0, 3), (1, 2))$, pero el carácter $(1, 1, 3, 3)$ es compatible con las particiones $((0, 2), (1, 3))$ y también por $((0, 3), (1, 2))$, y en el caso más extremo tenemos el carácter $(2, 2, 2, 2)$ que es compatible por las tres particiones. La compatibilidad de un carácter $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n$ con una partición $\mathcal{J}$ indica explícitamente cuándo la clase cohomológica $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$ tiene proyección no-nula en la componente α de la descomposición espectral de Shioda.

Desde el ejemplo [\[20\]](#), donde habíamos tomado $\alpha = (1, 2, 3, 2) \in \mathfrak{D}_4^2 \subseteq \mathfrak{B}_4^2$ y deducido que

$$0 \neq \sum_{0 \leq w_0, w_1 \leq 3} \zeta_8^{-3(2w_0+1)-2(2w_1+1)} \left[\ell_{((0,2),(1,3))}^{(w_0,w_1)} \right]_{\text{prim}} \in V((1, 2, 3, 2)) \subseteq (H^{1,1}(X_4^2) \cap H_{\text{prim}}^2(X_4^2, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

y como $\mathfrak{D}_4^2 = \mathfrak{B}_4^2$, se sigue por el corolario [\[2.5.13\]](#) que la conjetura de Hodge vale en X_4^2 . El generador complejo de $V((1, 2, 3, 2))$ siempre puede obtenerse como combinación $\mathbb{Q}(\zeta_{2m})$ -lineal de las clases primitivas de los ciclos lineales estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$ por el lema [\[2.5.8\]](#).

La racionalidad de los coeficientes $\zeta_{2m}^{c_{\mathcal{J}}^w}$ (ver corolario 2.5.9) se podría esperarse únicamente en el caso donde $V(\alpha)$ sea Galois-estable, a continuación mostramos las órbitas de $\mathfrak{B}_4^2$:

$$\begin{aligned} \text{Orb}(\mathfrak{B}_4^2) = & \{ \{(1, 1, 3, 3), (3, 3, 1, 1)\}, \{(1, 3, 3, 1), (3, 1, 1, 3)\}, \{(1, 3, 1, 3), (3, 1, 3, 1)\}, \dots \\ & \dots \{(1, 2, 2, 3), (3, 2, 2, 1)\}, \{(1, 3, 2, 2), (3, 1, 2, 2)\}, \{(2, 2, 1, 3), (2, 2, 3, 1)\}, \dots \\ & \dots, \{(1, 2, 3, 2), (3, 2, 1, 2)\}, \{(2, 1, 2, 3), (2, 3, 2, 1)\}, \{(2, 1, 3, 2), (2, 3, 1, 2)\}, \dots \\ & \dots \{(2, 2, 2, 2)\} \} \end{aligned}$$

y observamos que el carácter fijo por la acción de Galois es $\alpha = (2, 2, 2, 2)$, por lo que

$$\dim_{\mathbb{Q}} (V((2, 2, 2, 2)) \cap H^2(X_4^2, \mathbb{Q})) = 1$$

y el generador racional de $V((2, 2, 2, 2))$ podrá escribirse como combinación racional de las clases $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$. Desde el corolario 2.5.9 se sigue que para $\alpha = (2, 2, 2, 2)$ y $\mathcal{J} = ((0, 1), (2, 3))$ tenemos

$$x^{(1,1,1,1)} = \frac{1}{256} \sum_{w_0=0}^3 \sum_{w_1=0}^3 \zeta_8^{-2(2w_0+1)-2(2w_1+1)} P_{\mathcal{J},(w_0,w_1)},$$

y en particular,

$$0 \neq \omega_{(1,1,1,1)} = \frac{1}{256} \sum_{w_0=0}^3 \sum_{w_1=0}^3 (-1)^{-w_0-w_1-1} [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} \in V((2, 2, 2, 2)) \cap H_{\text{prim}}^{1,1}(X_4^2, \mathbb{Q}),$$

o tras expandir:

$$\begin{aligned} \omega_{(1,1,1,1)} = & \frac{1}{256} ([\ell_{\mathcal{J}}^{(0,0)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(0,1)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(0,2)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(0,3)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(1,0)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(1,1)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(1,2)}]_{\text{prim}} - \dots \\ & \dots - [\ell_{\mathcal{J}}^{(1,3)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(2,0)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(2,1)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(2,2)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(2,3)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(3,0)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(3,1)}]_{\text{prim}} - [\ell_{\mathcal{J}}^{(3,2)}]_{\text{prim}} + [\ell_{\mathcal{J}}^{(3,3)}]_{\text{prim}}), \end{aligned}$$

lo que permite ver que $\omega_{(1,1,1,1)}$ es un generador racional de $V((2, 2, 2, 2)) \cap H_{\text{prim}}^{1,1}(X_4^2, \mathbb{Q})$.

El ejemplo anterior evidencia hechos importantes:

- $\omega_{\alpha-1} \in V(\alpha)$ es un generador complejo de $V(\alpha)$. Si $\alpha \in \mathfrak{D}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$ no es Galois-estable, entonces $\omega_{\alpha-1}$ no puede ser expresado por combinación racional de clases $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$.
- El único carácter Galois-estable de $\mathfrak{B}_m^n$ es $\alpha = (m/2, \dots, m/2)$. En particular, $V(\alpha) \cap H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \neq 0$.

pero también puede resultar engañoso, en dicho ejemplo se comprueba que $\omega_{\alpha-1} \in H_{\text{prim}}^{1,1}(X_4^2, \mathbb{Q})$ pero esto no es inmediato. En general, si $\alpha = (m/2, \dots, m/2)$ entonces el generador racional de $V(\alpha)$ puede eventualmente ser un múltiplo de $\omega_{\alpha-1}$.

Vamos a verificar cada afirmación anterior.

Proposición 2.5.15. Sea $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$. Entonces α es $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ -estable, si y solo si, $V(\alpha) \cap H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \neq 0$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ es $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ -estable, entonces $V(\alpha)$ desciende a $\mathbb{Q}$ por el corolario 2.2.3. Para la otra implicancia suponga que existe $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$, luego

$$\sigma(V(\alpha)) = V(\sigma(\alpha)) \quad \text{y} \quad V(\alpha)$$

son espacios distintos por el teorema 2.1.4. Tomemos un vector $v \in V(\alpha) \cap H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q})$, entonces la racionalidad implica que $\sigma(v) = v$, luego

$$v \in V(\alpha) \cap V(\sigma(\alpha)) = 0$$

por lo tanto, $V(\alpha) \cap H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) = 0$. □

Continuamos con la unicidad del carácter $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ -estable.

Proposición 2.5.16. Sea $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ -estable, entonces m es par y $\alpha = (m/2, \dots, m/2)$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathfrak{B}_m^n$ fijo por $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, se sigue que

$$(u - 1)\alpha_i = 0 \quad (\text{mód } m), \quad \forall u \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times,$$

pero $\alpha_i \neq 0 \pmod{m}$, en consecuencia m es par (sino, $u = 2$ implica $\alpha_i = 0 \pmod{m}$). Ahora, como $-1 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

$$2\alpha_i = 0 \quad (\text{mód } m),$$

y como m es par esto equivale a que $m \mid 2\alpha_i$, esto solo ocurre si $\alpha_i = 0, m/2$. Así,

$$\alpha = (m/2, \dots, m/2).$$

□

Por lo tanto, si $\alpha = (m/2, \dots, m/2)$ se sigue que $V(\alpha) \cap H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \neq 0$, pero la construcción de Shioda asegura solamente que $\omega_{\alpha-1}$ es un generador *complejo* de $V(\alpha)$. En particular, $V(\alpha) \cap H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q})$ puede ser generado por un múltiplo de $\omega_{\alpha-1}$.

Por este motivo, el ejemplo sobre la cuártica de Fermat puede inducir a una confusión. Continuamos con un ejemplo para mostrar, bajo estas hipótesis, que $\omega_{\alpha-1}$ puede ser no racional.

Ejemplo 22. Considere la cuártica de Fermat de dimensión 4:

$$X_4^4 = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

Sea $\alpha = (2, 2, 2, 2, 2, 2) \in \mathfrak{D}_4^4 \subseteq \mathfrak{B}_4^4$. Por la proposición 2.5.15 y 2.5.16, se sabe que

$$V((2, 2, 2, 2, 2, 2)) \cap (H^{2,2}(X_4^4) \cap H^4(X_4^4, \mathbb{Q})) \neq 0.$$

Sea $\mathcal{J} = ((0, 1), (2, 3), (4, 5))$ la cual es compatible con α . Por el corolario 2.5.9, se sigue que

$$x^{(1,1,1,1,1,1)} = \frac{1}{4^6} \sum_{0 \leq w_i \leq 3} \zeta_8^{-2(2w_0+1)-2(2w_1+1)-2(2w_2+1)} P_{\mathcal{J},w},$$

pero

$$\zeta_8^{-2(2w_0+1)-2(2w_1+1)-2(2w_2+1)} = i^{-2w_0-2w_1-2w_2-3} = (-1)^{-w_0-w_1-w_2-1} i \in \{\pm i\},$$

en particular,

$$\omega_{(1,1,1,1,1,1)} \notin (H^{2,2}(X_4^4) \cap H^4(X_4^4, \mathbb{Q})).$$

Lo realmente importante, es que todos los coeficientes están en $\{i, -i\}$, en consecuencia,

$$0 \neq i \cdot \omega_{(1,1,1,1,1,1)} \in V((2, 2, 2, 2, 2, 2)) \cap (H^{2,2}(X_4^4) \cap H^4(X_4^4, \mathbb{Q}))$$

es un generador racional de $V(\alpha)$.

El siguiente teorema formaliza las condiciones para obtener el generador racional.

Teorema 2.5.17. Sea m par y $\alpha = (m/2, \dots, m/2) \in \mathfrak{D}_m^n$, entonces

$$\begin{aligned} n = 2 \pmod{4} &\implies \omega_{\alpha-1} \in H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \\ n = 0 \pmod{4} &\implies i \cdot \omega_{\alpha-1} \in H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Demostración. Por el corolario 2.5.9, tenemos

$$\omega_{\alpha-1} = \frac{1}{m^{n+2}} \sum_{0 \leq w_i \leq m-1} \zeta_{2m}^{c_{\mathcal{J}}^w} [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}},$$

donde

$$c_{\mathcal{J}}^w = - \sum_{j=0}^{n/2} (2w_j + 1)(m/2),$$

luego

$$\zeta_{2m}^{-\sum (2w_j+1)(m/2)} = \zeta_4^{-2 \sum w_j} \zeta_4^{n/2+1} = (-1)^{-(\sum w_j)} i^{n/2+1} \in \begin{cases} \{1, -1\} & , n = 2 \pmod{4} \\ \{i, -i\} & , n = 0 \pmod{4} \end{cases}$$

de lo que se sigue inmediatamente el resultado. De hecho,

$$m^{n+2}\omega_{\alpha-1} = \sum_{0 \leq w_i \leq m-1} (-1)^{(\sum w_j) + (n+2)/4} [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}, \quad \text{si } n = 2 \pmod{4},$$

y

$$i \cdot m^{n+2}\omega_{\alpha-1} = \sum_{0 \leq w_i \leq m-1} (-1)^{(\sum w_j) + n/4} [\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}, \quad \text{si } n = 0 \pmod{4}.$$

□

Los espacios lineales estándar $\ell_{\mathcal{J}}^w$ aportan valiosa información en la hipersuperficie de Fermat, el polinomio que genera la clase $[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}}$ por el residuo de Griffiths es

$$P_{\mathcal{J},w} = \frac{1}{m^{n+2}} \left(\prod_{r=0}^{n/2} \zeta_{2m}^{2w_r+1} \right) \prod_{r=0}^{n/2} \left(\sum_{i=0}^{m-2} \zeta_{2m}^{(m-2-i)(2w_r+1)} x_{j_r}^i x_{k_r}^{m-2-i} \right),$$

y en ese sentido, sugiere natural estudiar las clases cohomológicas primitivas obtenidas por el residuo de polinomios

$$P_{\text{fake}} = \prod_{r=0}^{n/2} \left(\sum_{i=0}^{m-2} c_{(j_r, k_r)} x_{j_r}^i x_{k_r}^{m-2-i} \right),$$

el cual, bajo hipótesis sobre los coeficientes $c_{(j_r, k_r)}$, la clase cohomológica que induce P_{fake} no pertenezca al espacio generado por los ciclos lineales $\mathfrak{D}_m^n$, en otras palabras, P_{fake} producen ciclos que no pueden ser generados por espacios lineales estándar, pero su clase cohomológica preserva muchas propiedades esperada por los ciclos lineales. A estos se le conocen como *fake linear cycles* y son estudiados en más profundidad en [3].

Cerramos la sección resumiendo algunas ideas importantes: En la hipersuperficie de Fermat tenemos una descripción explícita de caracteres $\mathfrak{D}_m^n$ cuya componente de la descomposición espectral de Shioda es generada por espacios lineales estándar de dimensión $n/2$, además $\mathfrak{D}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$ lo que implica que la conjetura de Hodge basta verificarla en $\mathfrak{B}_m^n \setminus \mathfrak{D}_m^n$. En todos los ejemplos discutidos en esta sección se observó que $\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n$, cuya consecuencia inmediata es que la conjetura de Hodge es válida para el respectivo par (n, m) .

La situación donde todos los caracteres de Hodge son caracteres lineales no es asilada, y está caracterizada completamente por condiciones aritméticas sobre (n, m) en el teorema de Aoki–Shioda que discutiremos en la siguiente sección.

2.6. Teorema de Aoki–Shioda

En esta sección tratamos un resultado decisivo de Aoki–Shioda que caracteriza, mediante condiciones aritméticas sobre el grado m , cuándo las clases primitivas de Hodge de la hipersuperficie de Fermat están generadas por ciclos lineales. Más concretamente, estudiaremos la igualdad entre el conjunto de *caracteres de Hodge* y el de *caracteres lineales* —una igualdad que expresa que los espacios propios $V(\alpha)$ que contribuyen a las clases de tipo (p, p) en la cohomología primitiva son precisamente aquellos generados por clases de subvariedades lineales— y mostraremos que ésta ocurre si y sólo si $m = 4$, o m es primo, o $\gcd(m, (n+2)!) = 1$.

La importancia de este teorema es doble: por un lado convierte una cuestión geométrica (¿qué clases de Hodge son algebraicas?) en un problema puramente aritmético-combinatorio sobre caracteres y congruencias; por otro, permite verificaciones efectivas y cálculos explícitos en casos concretos de Fermat, ya que reduce la búsqueda de ciclos algebraicos a un análisis sobre exponentes y órbitas.

Teorema 2.6.1 (Aoki-Shioda).

$$\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n \iff m = 4 \quad \vee \quad m \text{ primo} \quad \vee \quad \gcd(m, (n+2)!) = 1$$

Demostración. Sea $n \geq 0$ par. Veamos primero que

$$\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n \iff m = 4 \quad \vee \quad m \text{ primo} \quad \vee \quad \gcd(m, (n+2)!) = 1,$$

la contención $\mathfrak{D}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$ es consecuencia de la proposición [2.5.12](#). Para probar $\mathfrak{B}_m^n \subseteq \mathfrak{D}_m^n$ procedemos por inducción en $n \in \{0, 2, 4, \dots\}$.

Si $n = 0$, entonces $\alpha = (a_0, a_1) \in \mathfrak{B}_m^0$ y

$$|\alpha| = \frac{a_0 + a_1}{m} = \frac{0}{2} + 1 = 1 \iff a_0 + a_1 = m,$$

por lo que $\alpha \in \mathfrak{D}_m^0$.

Suponga que $n \geq 0$ par verifica que $\mathfrak{B}_m^n \subseteq \mathfrak{D}_m^n$, veamos que $\mathfrak{B}_m^{n+2} \subseteq \mathfrak{D}_m^{n+2}$.

Sea $\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) \in \mathfrak{B}_m^{n+2}$, basta ver que existen $i \neq j$ tal que $a_i + a_j = m$, pues en tal caso

$$\tilde{\alpha} = (a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_{n+3}) \in \mathfrak{A}_m^n$$

verifica $|t \cdot \tilde{\alpha}| = |t \cdot \alpha| - 1 = \frac{n}{2} + 1$, luego $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{B}_m^n \subseteq \mathfrak{D}_m^n$ y tras agregar las componentes a_i, a_j que suman m a $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{D}_m^n$, obtenemos que $\alpha \in \mathfrak{D}_m^{n+2}$.

Lo anterior permite reducir el problema al siguiente:

Teorema. Sea $n \geq 0$ par y $\alpha \in \mathfrak{A}_m^n$. Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 4 \quad \vee \quad m \text{ primo} \quad \vee \quad \gcd(m, (n+2)!) = 1 \\ |t \cdot \alpha| = \frac{n}{2} + 1, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \end{array} \right\} \implies \exists i \neq j : a_i + a_j = m$$

Iremos caso a caso, siempre asumiendo por contradicción que $a_i + a_j \neq m, \forall i \neq j$.

Notación 2.6.2. La restricción $a_i + a_j \neq m, \forall i \neq j$ permite reducir el estudio a caracteres de la forma

$$\alpha = ((n_1, \dots, n_k)) := (n_1, \dots, n_1, \dots, n_k, \dots, n_k),$$

con $n_i + n_j \neq m, \forall i \neq j$, donde reservaremos la variable α_n para la cantidad de veces que se repite n en α , en particular, $\sum \alpha_j = n + 2$. Dicha notación nos será de utilidad pues no nos interesa el ordenamiento de α y solo los casos donde no aparezcan números complementarios.

$m = 4$ Sea $\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathfrak{B}_4^n$, luego $a_i \in \{1, 2, 3\}$. Las únicas combinaciones que suman 4 son: $(1, 3), (2, 2)$. Así, α se puede escribir de solo dos formas distintas:

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= (a_0, \dots, a_{n+1}) = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2) = ((1, 2)) \\ \alpha_{(2)} &= (a_0, \dots, a_{n+1}) = (3, \dots, 3, 2, \dots, 2) = ((3, 2)) \end{aligned}$$

Si $\alpha = ((1, 2))$, entonces

$$|\alpha| = \frac{1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2}{4} = \frac{n}{2} + 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = n + 2,$$

pero esto solo es posible si $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = n + 2$. Luego, $\alpha = (2, \dots, 2)$ lo que es imposible.

Si $\alpha = ((3, 2))$, se observa que $3 \cdot \alpha = ((9, 6)) = ((1, 2)) = \alpha_{(1)}$, donde $t = 3 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$. Como $((1, 2))$ es imposible, $((3, 2))$ también lo es.

$m = 2$ Sea $\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathfrak{B}_2^n$, entonces $a_i \in \{1\}$ imposible pues $a_i + a_j \neq 2$.

$m = p \geq 3$ Sea $r = (p - 1)/2$, para $\alpha = ((1, 2, \dots, r))$ se obtiene el sistema lineal

$$2m[j\alpha] = 2([1 \cdot j]_m \alpha_1 + [2 \cdot j]_m \alpha_2 + \dots + [r \cdot j]_m \alpha_r) = m(n + 2), \quad j = 1, \dots, r.$$

recordamos que $n + 2 = \sum \alpha_i$, tras reemplazar y ordenar obtenemos

$$A \cdot \vec{\alpha} := \begin{pmatrix} m-2 & m-4 & \cdots & m-2r \\ m-4 & m-6 & \cdots & m-4r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-2r & m-4r & \cdots & m-2[r^2]_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $A_{ij} = m - 2[i \cdot j]_m$, con $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Si $\det A \neq 0$ entonces cada $\alpha_i = 0$ llegando a una contradicción. Es fácil verificar que hacer este proceso al $\tilde{\alpha} = ((1, \dots, k-1, m-k, k+1, \dots, r))$ (i.e., cambiar las coordenadas con valor k de α por su valor “dual”) se obtiene A con la k -ésima columna multiplicada por -1 , luego la invertibilidad de A implica la imposibilidad de todo α .

Denotemos $\mathbf{1}$ al vector columna $(1, \dots, 1)^\top$, y defina B mediante $B_{ij} = [i \cdot j]_m$, con $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Escribamos $A = m\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top - 2B$ y luego

$$\det(A) = \det((-2B) + (m\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1}^\top) = \det(-2B) + m\mathbf{1}^\top \cdot \text{adj}(-2B) \cdot \mathbf{1} = m(-2)^{\frac{m-3}{2}} \sum_{1 \leq i, j \leq r} \text{adj}(B)_{i,j}$$

Como B tiene las primeras dos filas y columnas proporcionales, la matriz adjunta de B es nula salvo quizás en las componentes $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$, se comprueba que

$$\text{adj}(B)_{1,1} = -2 \text{adj}(B)_{1,2} = -2 \text{adj}(B)_{2,1} = 4 \text{adj}(B)_{2,2},$$

por lo tanto

$$\det(A) = m(-2)^{\frac{m-7}{2}} \text{adj}(B)_{1,1}.$$

La verificación de que $\text{adj}(B)_{1,1} \neq 0$ es completamente algebraica y será omitida, se puede comprobar que su valor es un múltiplo no nulo de $m^{\frac{m-5}{2}}$. En consecuencia, $\det(A) \neq 0$ tal como se deseaba. Este resulta ser el caso más abordable, la condición m primo nos permite obtener explícitamente las suficientes ecuaciones desde $\mathfrak{B}_m^n$ pues $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{1, \dots, m-1\}$, también resulta necesaria para que $\text{adj}(B)_{1,1} \neq 0$.

$(m, (n+2)!) = 1$ Este caso es delicado, la demostración realizada por Aoki es “*elemental pero extensa*”, los detalles de estos cálculos pueden ser encontrados en [\[1\]](#).

Ahora vamos con la implicancia

$$\mathfrak{D}_m^n = \mathfrak{B}_m^n \implies m = 4 \quad \vee \quad m \text{ primo} \quad \vee \quad \gcd(m, (n+2)!) = 1,$$

suponga que $m \neq 4$, m no es primo y $\gcd(m, (n+2)!) \neq 1$. Veamos que $\mathfrak{B}_m^n \subsetneq \mathfrak{D}_m^n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ definimos

$$\mathcal{M}(n) := \{m : m \neq 4 \quad \wedge \quad m \neq \text{primo} \quad \wedge \quad (m, (n+2)!) \neq 1\}.$$

La secuencia $(\mathcal{M}(n))_n$ es creciente. Denotamos $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ la sucesión de todos los primos ($p_1 = 2$), se define

$$\mu_2 = \{m = 2k : k \in \mathbb{Z}^{\geq 3}\} \quad \text{y} \quad \mu_{p_r} = \{m = p_1 \dots p_r k + p_r : k \in \mathbb{Z}^{\geq 1}\} \quad (p_r > 2)$$

Si $n > 2$ par, tenemos

$$\mathcal{M}(n+2) = \begin{cases} \mathcal{M}(n) & \text{si } n+1 \text{ no es primo} \\ \mathcal{M}(n) \cup \mu_p & \text{si } n+1 = p \text{ es primo} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(2) &= \mu_2 \cup \mu_3 \\ \mathcal{M}(4) &= \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_5 \\ \mathcal{M}(6) &= \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_5 \cup \mu_7 \\ \mathcal{M}(8) &= \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_5 \cup \mu_7 \\ \mathcal{M}(10) &= \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_5 \cup \mu_7 \cup \mu_{11} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Encontraremos $\alpha_m^n \in \mathfrak{B}_m^n \setminus \mathfrak{D}_m^n$ para cada $m \in \mu_p$, cada $n = p-1$ y cada primo p . En tal caso,

$$\alpha_m^n(k) := (\underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-veces}}, \alpha_m^n, \underbrace{m-1, \dots, m-1}_{k\text{-veces}}) \in \mathfrak{B}_m^{2k+n}$$

pues

$$|t \cdot \alpha_m^n(k)| = |(t, \dots, t, tm-t, \dots, tm-t)| + |t \cdot \alpha_m^n| = \frac{2k+n}{2} + 1, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$$

y $\alpha_m^n(k) \notin \mathfrak{D}_m^{2k+n}$ dado que $\alpha_m^n \notin \mathfrak{D}_m^n$. Verificar este caso base permite recorrer todo $(\mathcal{M}(n))_n$ por inducción.

Separamos el caso μ_2 del resto. Un cálculo directo permite probar el siguiente resultado.

Teorema 2.6.3. *Si $m \in \mu_2$, entonces*

$$\alpha_m^2 = (2, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}, m-1) \in \mathfrak{B}_m^2 \setminus \mathfrak{D}_m^2.$$

Sea $n+1 = p > 2$ primo. Si $m \in \mu_p$, entonces

$$\alpha_m^n = (p, \frac{m}{p} - 1, \frac{2m}{p} - 1, \frac{3m}{p} - 1, \dots, \frac{(p-1)m}{p} - 1, m-1) \in \mathfrak{B}_m^n \setminus \mathfrak{D}_m^n$$

El teorema anterior muestra que, para grados compuestos m con divisores primos pequeños, existen caracteres de Hodge que no provienen de ciclos lineales. En particular, la igualdad $\mathfrak{B}_m^n = \mathfrak{D}_m^n$ falla para $m \in \mathcal{M}(n)$, lo que pone de manifiesto que el criterio de Aoki–Shioda es esencialmente óptimo.

Esto finaliza la demostración del teorema [2.6.1](#). □

Ejemplo 23. La contención $\mathfrak{D}_m^n \subseteq \mathfrak{B}_m^n$ es siempre válida por la proposición [2.5.12](#). El teorema de Aoki–Shioda establece condiciones necesarias y suficientes para obtener la igualdad, considere la superficie de Fermat de grado 6

$$X_6^2 = \{x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

y nótese que el par $(m, n) = (6, 2)$ no satisface las condiciones del teorema, lo que implica inmediatamente que $\mathfrak{D}_6^2 \subsetneq \mathfrak{B}_6^2$. Una comprobación computacional muestra que

$$|\mathfrak{B}_6^2| = 85 \quad y \quad |\mathfrak{D}_6^2| = 61,$$

y explícitamente, los caracteres de Hodge en $\mathfrak{B}_6^2$ están dados módulo permutación por

$$\mathfrak{B}_6^2 = \{(1, 1, 5, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 3, 5), (1, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 5), (2, 2, 4, 4), (2, 3, 3, 4), (3, 3, 3, 3)\},$$

pero

$$(1, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 5) \notin \mathfrak{D}_6^2.$$

El caso de dimensión $n = 2$ sabemos que la conjetura de Hodge es válida, por lo que los espacios $V(\alpha)$ asociados a los caracteres $(1, 3, 4, 4)$ y $(2, 2, 3, 5)$ deben provenir necesariamente de ciclos algebraicos racionales, pero no pueden generarse usando únicamente ciclos lineales estándar.

Casos en donde la condición de Aoki–Shioda se satisface ya hemos visto varios ejemplos en la sección anterior. Una consecuencia práctica cuando se satisface la condición de Aoki–Shioda es poder deducir el conjunto $\mathfrak{B}_m^n$ con un menor costo, los elementos en $\mathfrak{D}_m^n$ son puramente combinatorios y no requiere verificar la condición de estabilidad por la acción de multiplicación por unidades. En este caso podemos concluir que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left(H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_m^n) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \right) = |\mathfrak{B}_m^n| + 1 = |\mathfrak{D}_m^n| + 1,$$

y la cardinalidad de $|\mathfrak{D}_m^n|$ es fácilmente calculable por argumentos combinatorios, a continuación mostramos la fórmula explícita.

Proposición 2.6.4. Sea $k = (n + 2)/2$ y $t = \lfloor (m - 1)/2 \rfloor$, entonces

$$|\mathfrak{D}_m^n| = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_t \geq 0 \\ d_1 + \dots + d_t = k}} \frac{(2k)!}{\prod_{r=1}^t (d_r!)^2}, \quad \text{si } m \text{ es impar},$$

o bien,

$$|\mathfrak{D}_m^n| = \sum_{\substack{d_0, d_1, \dots, d_t \geq 0 \\ d_0 + d_1 + \dots + d_t = k}} \frac{(2k)!}{(\prod_{r=1}^t (d_r!)^2) (2d_0)!}, \quad \text{si } m \text{ es par}.$$

Capítulo 3

Hipersuperficies de Klein

En este capítulo estudiaremos la conjetura de Hodge en hipersuperficies de Klein a través de su relación con las hipersuperficies de Fermat. La estrategia combina descomposición espectral, acción de Galois y levantamientos monomiales, y permite traducir el problema geométrico en criterios aritméticos explícitos sobre caracteres. El caso de Klein presenta una estructura suficientemente rica como para producir fenómenos nuevos respecto de Fermat, pero conservando una conexión precisa con esa teoría, que será la base de toda la discusión.

La exposición se organiza en varias etapas. Comenzaremos en la Sección [3.1](#) con la descomposición espectral en Klein, formulando una descripción análoga a la del caso de Fermat mediante un automorfismo diagonal privilegiado y una codificación aritmética de sus caracteres. En la Sección [3.2](#) estudiaremos el cubrimiento monomial desde Fermat hacia Klein y explicaremos cómo actúa sobre la cohomología primitiva y sobre los caracteres, lo que permitirá traducir problemas geométricos en condiciones explícitas sobre sus multi-índices.

A partir de allí, el capítulo se divide en dos direcciones complementarias. Primero, en las Secciones [3.3](#) y [3.4](#) analizaremos los caracteres de Hodge en Klein en dimensiones 2 y 4, identificando una componente trivial y describiendo las primeras órbitas excepcionales. En la Sección [3.5](#) describimos explícitamente la componente trivial en dimensión arbitraria, y en la Sección [3.6](#) mostramos que esta se levanta a caracteres lineales en Fermat, obteniendo así una fuente importante de ciclos algebraicos. Finalmente, en las Secciones [3.7](#), [3.8](#) y [3.9](#) daremos una descripción estructural de la parte excepcional, completaremos el caso de superficies y presentaremos evidencia computacional en dimensiones superiores. En conjunto, estas secciones muestran que la conjetura de Hodge en Klein puede entenderse a través de una interacción precisa entre descomposición espectral, aritmética modular y levantamientos monomiales desde Fermat.

3.1. Descomposición espectral en Klein

En esta sección describimos la descomposición espectral de la cohomología primitiva de la hipersuperficie de Klein Y_m^n , formulado por Villafior y basado en las ideas de Shioda para Fermat. Para ello, introducimos el automorfismo diagonal que actúa sobre Y_m^n , los espacios propios asociados a sus caracteres y la codificación aritmética que permite distinguir sus tipos de Hodge. Esta descomposición espectral será el punto de partida para el estudio del cubrimiento monomial de Fermat a Klein desarrollado en la siguiente sección.

La hipersuperficie de Klein de dimensión n y grado m es

$$Y_m^n = \{K = y_0^{m-1}y_1 + y_1^{m-1}y_2 + \dots + y_{n+1}^{m-1}y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1},$$

y, para estudiar la conjetura de Hodge, supondremos en todo el capítulo que n es par.

El siguiente hecho conocido será clave para la descomposición espectral.

Proposición 3.1.1. *Sea $d = \frac{(m-1)^{n+2}-1}{m}$, entonces*

$$\sigma(y_0 : y_1 : \dots : y_{n+1}) = (\zeta_{md} y_0 : \zeta_{md}^{(1-m)} y_1 : \dots : \zeta_{md}^{(1-m)^{n+1}} y_{n+1}),$$

es un automorfismo diagonal en Klein Y_m^n de orden d .

Demostración. Es un cálculo directo. Véase [3]. □

En consecuencia, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ es un grupo que actúa fielmente sobre Y_m^n . Su grupo de caracteres es

$$\widehat{\langle \sigma \rangle} = \{\chi_i : \sigma \mapsto \zeta_d^i : i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}.$$

Para cada carácter $\chi_i \in \widehat{\langle \sigma \rangle}$, su espacio propio es

$$V(\chi_i) \equiv V(i) = \{\omega \in H_{\text{prim}}^n(Y_m^n) : \sigma^*(\omega) = \chi_i(\sigma)\omega\}.$$

La descripción explícita de estos espacios propios requiere traducir la acción del automorfismo en términos aritméticos. Para ello, introducimos la siguiente aplicación que servirá de codificación aritmética:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &\longrightarrow \{0, 1, \dots, m-2\}^{n+2} \\ i &\longmapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \end{aligned}$$

verificando que

$$m[i]_d = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (m-1)^k,$$

es decir, $\lambda(i)$ es la representación $(m-1)$ -ádica de $m[i]_d$ de longitud $n+2$.

Observación 3.1.2. *Es claro que λ está bien definida pues*

$$m[i]_d < md = (m-1)^{n+2} - 1,$$

luego $m[i]_d$ admite una única escritura en base $m-1$ con longitud $n+2$. Además, si $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$ entonces es inmediato que $\sum (-1)^k a_k = 0 \pmod{m}$.

A partir de esta representación, introducimos el $\mathcal{K}$ -peso de $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \widehat{\langle \sigma \rangle}$ como

$$|i|_{\mathcal{K}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k, \quad \text{donde } (a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i).$$

Este peso mide, en términos aritméticos, el desbalance entre las coordenadas de $\lambda(i)$, y será el criterio que determine en qué componente de Hodge se sitúa cada espacio propio $V(i)$ (cf. teorema [2.1.4](#)).

Con la notación fijada, estamos en condiciones de formular la descomposición espectral de la cohomología primitiva de la hipersuperficie de Klein.

Teorema 3.1.3. *La cohomología primitiva de la hipersuperficie de Klein Y_m^n de dimensión n par, admite la descomposición espectral*

$$H_{\text{prim}}^n(Y_m^n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} V(i)$$

satisfaciendo

- i) $H_{\text{prim}}^{p,q}(Y_m^n) = \bigoplus_{|i|_{\mathcal{K}}=q-\frac{n}{2}} V(i).$
- ii) $\dim_{\mathbb{C}} V(0) = 2$ y es generado por ciclos de Hodge.
- iii) $\dim_{\mathbb{C}} V(i) = 1$, para $i = 1, \dots, d-1$.
- iv) $H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_m^n, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V(0) \oplus \bigoplus_{i \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})} V(i)$, donde

$$\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : |ti|_{\mathcal{K}} = 0, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times}\}.$$

Demostración. Para $i = 1, \dots, d-1$ tomamos $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$, buscamos encontrar β de modo que

$$y^{\beta} \mapsto \omega_{\beta} := \text{res} \left(\frac{y^{\beta} \Omega}{K^{q+1}} \right)^{p,q} \in V(i),$$

vía isomorfismo de Griffiths, un cálculo directo muestra que

$$\sigma^* \left(\frac{y^\beta \Omega}{K^{q+1}} \right) (y) = \frac{(\sigma(y))^\beta \Omega(\sigma(y))}{K^{q+1}(\sigma(y))} = \frac{y^\beta \Omega(y)}{K^{q+1}(y)} \zeta_{md}^{b_0+b_1(1-m)+\dots+b_{n+1}(1-m)^{n+1}-d},$$

pero

$$\zeta_{md}^{b_0+b_1(1-m)+\dots+b_{n+1}(1-m)^{n+1}-d} = \zeta_{md}^{b_0+(m-2-b_1)(m-1)+\dots+b_n(m-1)^n+(m-2-b_{n+1})(m-1)^{n+1}-md},$$

entonces al tomar

$$b_k = \begin{cases} a_k & , k \text{ par} \\ m-2-a_k & , k \text{ impar} \end{cases}$$

tendremos que

$$\sigma^*(\omega_\beta) = \omega_\beta \zeta_{md}^{mi-md} = \omega_\beta \zeta_d^i = \chi_i(\sigma) \omega_\beta,$$

y así $0 \neq V(i) \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(Y_m^n)$. El caso $i = 0$ se tienen dos soluciones $(0, m-2, \dots, 0, m-2)$ y $(m-2, 0, \dots, m-2, 0)$. Se sabe que $h_{\text{prim}}^n(Y_m^n) = d + (-1)^n = d+1$, y ya encontramos $(d-1) + 2$ elementos $\omega_\beta \in H_{\text{prim}}^n(Y_m^n, \mathbb{C})$, lo que prueba la descomposición espectral y **iii**). Ahora observar que

$$m(q+1) - n - 2 = \sum b_i = \left(\sum (-1)^k a_k \right) + (m-2) \left(\frac{n}{2} + 1 \right),$$

equivale a que $|i|_{\mathcal{K}} = q - \frac{n}{2}$, lo que prueba **i**). En particular, $V(0) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_m^n)$ y está definido sobre $\mathbb{Q}$ pues $\chi_0(\sigma) = 1$, probando **ii**). Finalmente, desde **i**) sabemos que

$$H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_m^n) = \bigoplus_{|i|_{\mathcal{K}}=0} V(i),$$

y este desciende a $\mathbb{Q}$ para $i \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ por la estabilidad de la acción en $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q})$ por el mismo principio que el caso Fermat, explícitamente por el lema [2.3.1](#), lo que prueba **iv**). $\square$

Notación 3.1.4. Reservaremos $X_m^n = \{F = 0\}$ y $Y_m^n = \{K = 0\}$ para denotar las hipersuperficies de Fermat y Klein respectivamente. Denotaremos por $\mathfrak{A}_m^n \ni \alpha$ al grupo de caracteres asociado a X_m^n , y por $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \ni i$ al grupo de caracteres asociado a Y_m^n . Escribiremos $V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_m^n)$ y $V(i) \subseteq H_{\text{prim}}^n(Y_m^n)$ para los espacios propios correspondientes. Los pesos de estos caracteres se denotan por $|\alpha|_{\mathcal{F}}$ y $|i|_{\mathcal{K}}$, y se leerán como el $\mathcal{F}$ -peso y el $\mathcal{K}$ -peso, respectivamente. Finalmente, denotaremos por $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{F})$ y $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ los conjuntos de caracteres de Hodge en los casos de Fermat y Klein.

Notación 3.1.5. En el caso de la Klein Y_m^n , se denotará

$$b = m-1, \quad d = \frac{b^{n+2} - 1}{b+1}.$$

Observación 3.1.6. La condición $|i|_{\mathcal{K}} = 0$ equivale a que

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k = 0,$$

donde $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$. Concretamente, la representación b -ádica de $m[i]_d$ es una tupla simétrica, en el sentido que verifica $\sum (-1)^k a_k = 0$.

Notación 3.1.7. Al conjunto de tuplas simétricas en el sentido anterior, se denotará por $\mathfrak{S}$. En consecuencia,

$$|i|_{\mathcal{K}} = 0 \iff \lambda(i) \in \mathfrak{S}.$$

Notación 3.1.8. Para $b \geq 2$, escribiremos $(a_0, \dots, a_{n+1})_b$ al número con dicha representación en base b :

$$(a_0, \dots, a_{n+1})_b = \sum a_k b^k,$$

y recíprocamente, para cada $N \in \mathbb{N}$ escribimos por $(N)_b$ a la representación en base b de N (usualmente de largo $n+2$).

Observación 3.1.9. La expresión $(a_0, \dots, a_{n+1})_b$ no requiere la condición $a_k \in \{0, \dots, b-1\}$, y en particular, realizar $((a_0, \dots, a_{n+1})_b)_b$ nos permite obtener la representación b -ádica estándar de una tupla $(a_0, \dots, a_{n+1})$.

Podemos expresar la función λ de forma más compacta:

$$\lambda(i) = (m[i]_d)_b.$$

Ilustramos ahora la descomposición espectral 3.1.3 con algunos ejemplos explícitos.

Ejemplo 24. Considere la superficie cúbica de Klein

$$Y_3^2 = \{y_0^2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_2^2 y_3 + y_3^2 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Entonces,

$$b = 2, \quad d = \frac{b^4 - 1}{b + 1} = 5.$$

Para cada carácter $i \in \{1, \dots, 4\}$ debemos calcular la representación 2-ádica de $3[i]_5$:

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow (3)_2 = (1, 1, 0, 0) \rightarrow |1|_{\mathcal{K}} = 0 \\ i = 2 &\rightarrow (6)_2 = (0, 1, 1, 0) \rightarrow |2|_{\mathcal{K}} = 0 \\ i = 3 &\rightarrow (9)_2 = (1, 0, 0, 1) \rightarrow |3|_{\mathcal{K}} = 0 \\ i = 4 &\rightarrow (12)_2 = (0, 0, 1, 1) \rightarrow |4|_{\mathcal{K}} = 0 \end{aligned}$$

Recordamos que $V(i) \subseteq H_{\text{prim}}^{p,q}(Y_m^n)$ cuando $|i|_{\mathcal{K}} = \frac{n}{2} - q$ y es de dimensión 1 (para $i \neq 0$). Además, $V(0) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_m^n, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ tiene dimensión 2. Desde los cálculos anteriores se deduce que

$$\dim H_{\text{prim}}^{2,0}(Y_3^2) = 0, \quad \dim H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_3^2) = 6, \quad \dim H_{\text{prim}}^{0,2}(Y_3^2) = 0.$$

Es evidente que $\mathfrak{B}_3^2(\mathcal{K}) = \{1, 2, 3, 4\}$, luego

$$H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_3^2, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_3^2) = V(0) \oplus V(1) \oplus V(2) \oplus V(3) \oplus V(4).$$

Al igual que antes, la cohomología primitiva pierde una dimensión por la clase del hiperplano, entonces su número de Picard es

$$\rho(Y_3^2) = \dim_{\mathbb{Q}} H^{1,1}(Y_3^2, \mathbb{Q}) = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_3^2, \mathbb{Q}) = 7,$$

lo que es coherente con el hecho que toda superficie cúbica suave tiene número de Picard 7 (cf. ejemplo [21](#)).

Ejemplo 25. Considere la superficie cuártica de Klein

$$Y_4^2 = \{y_0^3 y_1 + y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Entonces,

$$b = 3, \quad d = \frac{b^4 - 1}{b + 1} = 20.$$

Para cada carácter $i \in \{1, \dots, 19\}$ debemos calcular la representación 3-ádica de $4[i]_{20}$:

$$\begin{array}{llll} i = 1 & \rightarrow & (4)_3 = (1, 1, 0, 0) & \rightarrow & |1|_{\mathcal{K}} = 0 \\ i = 2 & \rightarrow & (8)_3 = (2, 2, 0, 0) & \rightarrow & |2|_{\mathcal{K}} = 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ i = 5 & \rightarrow & (20)_3 = (2, 0, 2, 0) & \rightarrow & |5|_{\mathcal{K}} = 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ i = 15 & \rightarrow & (60)_3 = (0, 2, 0, 2) & \rightarrow & |15|_{\mathcal{K}} = -1 \\ & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Todos tienen $\mathcal{K}$ -peso 0 salvo $i = 5, 15$. La parte (p, q) está determinado por $|i|_{\mathcal{K}}$ mediante $q = |i|_{\mathcal{K}} + \frac{n}{2} = |i|_{\mathcal{K}} + 1$, así

$$H_{\text{prim}}^{2,0}(Y_4^2) = V(15), \quad H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_4^2) = V(0) \oplus \bigoplus_{i \neq 5, 15} V(i), \quad H_{\text{prim}}^{0,2}(Y_4^2) = V(5),$$

y

$$\dim H_{\text{prim}}^{2,0}(Y_4^2) = 1, \quad \dim H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_4^2) = 19, \quad \dim H_{\text{prim}}^{0,2}(Y_4^2) = 1.$$

Podemos comprobar que $\{1, \dots, 19\} \setminus \{5, 15\}$ es estable por la acción de $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$, por lo tanto

$$H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_4^2, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V(0) \oplus \bigoplus_{i \neq 5, 15} V(i).$$

Tal como antes, tenemos también que

$$\rho(Y_4^2) = \dim H^{1,1}(Y_4^2, \mathbb{Q}) = 20,$$

lo que resulta en una superficie K3 Picard maximal (cf. ejemplo [11](#)), ilustrando cómo la condición aritmética sobre $\lambda(i)$ controla directamente la geometría de la variedad.

Terminamos con un último ejemplo para mostrar que las componentes de la cohomología intermedia no siempre contribuyen a la parte racional.

Ejemplo 26. Considere la superficie cuántica de Klein

$$Y_5^2 = \{y_0^4 y_1 + y_1^4 y_2 + y_2^4 y_3 + y_3^4 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Entonces,

$$b = 4, \quad d = \frac{b^4 - 1}{b + 1} = 51.$$

En este caso, comprobamos que

$$H_{\text{prim}}^{2,0}(Y_5^2) = V(28) \oplus V(40) \oplus V(41) \oplus V(44),$$

$$H_{\text{prim}}^{0,2}(Y_5^2) = V(7) \oplus V(10) \oplus V(11) \oplus V(23),$$

y

$$H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_5^2) = V(0) \oplus \bigoplus_{i \neq 7, 10, 11, 23, 28, 40, 41, 44} V(i).$$

Pero los caracteres $\{i : |i|_{\mathcal{K}} = 0\}$ no es estable por la acción de $(\mathbb{Z}/51\mathbb{Z})^\times$, por ejemplo, $i = 1$ satisface $|1|_{\mathcal{K}} = 0$ pero $|7|_{\mathcal{K}} = 1$ (y $7 \in (\mathbb{Z}/51\mathbb{Z})^\times$), se comprueba que

$$\mathfrak{B}_5^2(\mathcal{K}) = \{3, 6, 9, 12, 15, 17, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 34, 36, 39, 42, 45, 48\},$$

y por lo tanto,

$$H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_5^2, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V(0) \oplus \bigoplus_{i \in \mathfrak{B}_5^2(\mathcal{K})} V(i) \subsetneq H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_5^2),$$

y en particular,

$$\rho(Y_5^2) = 3 + |\mathfrak{B}_5^2(\mathcal{K})| = 21.$$

Los ejemplos anteriores ilustran cómo la descomposición espectral en Klein puede leerse de manera explícita a partir de la representación b -ádica de $m[i]_d$. En particular, muestran que la distribución de los espacios propios $V(i)$ en los distintos tipos de Hodge está completamente determinada por las cifras de $\lambda(i)$. Por otra parte, si bien la componente de tipo $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ se describe a nivel complejo mediante la condición $|i|_{\mathcal{K}} = 0$, su parte racional intermedia se identifica mediante la condición adicional de estabilidad bajo la acción de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$. Esta rigidez aritmética será crucial en lo que sigue, pues permitirá comparar directamente estos caracteres con los del caso de Fermat.

En la siguiente sección estudiaremos cómo esta estructura espectral se transporta hacia la hipersuperficie de Fermat mediante un cubrimiento monomial, lo que permitirá reinterpretar los caracteres de Klein en términos de la teoría de Fermat y lo que será clave para su análisis posterior.

3.2. Cubrimiento monomial de Fermat a Klein

Existe un cubrimiento monomial desde hipersuperficies de Fermat hacia hipersuperficies de Klein, descrito explícitamente por Shioda en [14] para el caso de superficies y que se extiende de manera natural a dimensión arbitraria.

El cubrimiento monomial entre ambas permite transportar información cohomológica de una variedad a la otra de manera completamente explícita. En particular, el estudio de la descomposición espectral en Klein se vuelve más accesible al observar cómo su cohomología primitiva se comporta bajo el pullback hacia una hipersuperficie de Fermat de mayor grado. Esta perspectiva es especialmente útil porque el caso de Fermat ya fue descrito en detalle en el Capítulo 2, de modo que ahora podremos traducir problemas sobre Klein en preguntas aritméticas sobre caracteres en Fermat.

En esta sección describiremos brevemente dicho cubrimiento, cuya importancia radica en que este es compatible con las descomposiciones espectrales de Klein y Fermat. Además, obtendremos una descripción explícita del pullback a nivel de caracteres, lo que permitirá relacionar de forma precisa la cohomología primitiva entre ambas hipersuperficies.

Sea Y_m^n la hipersuperficie de Klein, consideramos

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}$$

la matriz de coeficientes asociada a la ecuación de Klein. El grado de la Fermat será

$$D = \det A = b^{n+2} - 1.$$

La matriz B que define el cubrimiento monomial es la adjunta de A :

$$B = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} b^{n+1} & -b^n & b^{n-1} & \cdots & -1 \\ -1 & b^{n+1} & -b^n & \cdots & b \\ b & -1 & b^{n+1} & \cdots & -b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b^n & b^{n-1} & -b^{n-2} & \cdots & b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

De este modo, el cubrimiento monomial $\phi : X_D^n \rightarrow Y_m^n$ es:

$$y_i = \phi(x)_i = \prod_{j=0}^{n+1} x_j^{b_{ij}}, \quad b_{ij} = (B)_{ij}$$

Observación 3.2.1. Por definición tenemos $B = D \cdot A^{-1}$, en particular, $\det(B) = D^{n+2}$.

La suma sobre una fila o columna es constante e igual a

$$-1 + b - b^2 + \cdots + b^{n+1} = \frac{b^{n+2} - 1}{b + 1} = d.$$

La matriz B es circulante y se describe explícitamente por $(B)_{ij} = -(-b)^{n+1+i-j} \pmod{D}$.

Mostramos la acción monomial de ϕ en un caso explícito.

Ejemplo 27. Considere la superficie cuártica de Klein

$$Y_4^2 = \{y_0^3 y_1 + y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

La matriz de coeficientes asociada a Y_4^2 es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con determinante $D = 3^4 - 1 = 80$. Su matriz adjunta

$$B = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 3 & -1 \\ -1 & 27 & -9 & 3 \\ 3 & -1 & 27 & -9 \\ -9 & 3 & -1 & 27 \end{pmatrix}$$

define el cubrimiento monomial $\phi : X_{80}^2 \rightarrow Y_4^2$ por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0^{27} x_1^{-9} x_2^3 x_3^{-1} \\ y_1 &= x_0^{-1} x_1^{27} x_2^{-9} x_3^3 \\ y_2 &= x_0^3 x_1^{-1} x_2^{27} x_3^{-9} \\ y_3 &= x_0^{-9} x_1^3 x_2^{-1} x_3^{27} \end{aligned}$$

en particular,

$$y_0^3 y_1 = x_0^{80}, \quad y_1^3 y_2 = x_1^{80}, \quad y_2^3 y_3 = x_2^{80}, \quad y_3^3 y_0 = x_3^{80},$$

por lo que $\phi : X_{80}^2 \rightarrow Y_4^2$ está bien definida.

El cubrimiento ϕ induce una acción en cohomología por su pullback:

$$\phi^* : H^n(Y_m^n) \rightarrow H^n(X_D^n).$$

Esta acción se puede describir explícitamente dentro de la cohomología primitiva gracias al isomorfismo de Griffiths.

Teorema 3.2.2. *Denotemos $x^\gamma \mapsto \omega_\gamma$ al mapa de residuos de Griffiths. Entonces, para $\omega_\beta \in H_{\text{prim}}^{p,q}(Y_m^n)$ se tiene que*

$$0 \neq \phi^*(\omega_\beta) \in \mathbb{C} \cdot \omega_\alpha \in H_{\text{prim}}^{p,q}(X_D^n),$$

donde $\alpha = \beta B + d\mathbf{1} - \mathbf{1}$.

Demostración. Es inmediato que

$$\phi(x)^\beta = x^{\beta B}.$$

Para concluir, calculamos el pullback de $\Omega(y)$. Por definición,

$$\Omega(\phi(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \phi(x)_k d(\phi(x)_0) \wedge \dots \wedge d(\widehat{\phi(x)_k}) \wedge \dots \wedge d(\phi(x)_{n+1}).$$

Denotando por $b_k = (b_{k,0}, \dots, b_{k,n+1})$ la k -ésima fila de B , se tiene $\phi(x)_k = x^{b_k}$ y

$$d(\phi(x)_k) = d(x^{b_k}) = x^{b_k} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{b_{k,j}}{x_j} dx_j.$$

Sustituyendo en la expresión anterior y factorizando los términos monomiales, obtenemos

$$\Omega(\phi(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k x^{b_k} \left(\prod_{r \neq k} x^{b_r} \right) \bigwedge_{r \neq k} \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_{r,j} \frac{dx_j}{x_j} \right) \right).$$

A continuación, expandimos la cuña. Por multilinealidad,

$$\bigwedge_{r \neq k} \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_{r,j} \frac{dx_j}{x_j} \right) = \sum_{j=0}^{n+1} \det(B^{(k,j)}) \frac{dx_0}{x_0} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{dx_j}{x_j}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}},$$

donde $B^{(k,j)}$ denota el menor obtenido eliminando la fila k y la columna j .

Por otra parte, como cada columna de B suma d , se sigue que

$$\prod_r x^{b_r} = x^{\sum b_r} = x^{d\mathbf{1}}.$$

En consecuencia,

$$\Omega(\phi(x)) = x^{d\mathbf{1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k \bigwedge_{r \neq k} \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_{r,j} \frac{dx_j}{x_j} \right) \right) = x^{d\mathbf{1}} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \det(B^{(k,j)}) \right) \bigwedge_{r \neq j} \frac{dx_r}{x_r} \right).$$

Un cálculo directo muestra que

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \det(B^{(k,j)}) = (-1)^j \frac{\det(B)}{d} = (-1)^j \frac{D^{n+2}}{d}.$$

Sustituyendo y reescribiendo en términos de $\Omega(x)$, obtenemos

$$\Omega(\phi(x)) = \frac{D^{n+2}}{d} x^{d\mathbf{1}-\mathbf{1}} \sum_{j=0}^{n+1} \left((-1)^j x_j \bigwedge_{r \neq j} dx_r \right) = \frac{D^{n+2}}{d} x^{d\mathbf{1}-\mathbf{1}} \Omega(x).$$

Finalmente, aplicando el mapa de Griffiths,

$$\phi^*(\omega_\beta) = \phi^* \left(\text{res} \left(\frac{y^\beta \Omega(y)}{K(y)^{q+1}} \right)^{p,q} \right) = \frac{D^{n+2}}{d} \text{res} \left(\frac{x^{\beta B + d\mathbf{1} - \mathbf{1}} \Omega(x)}{F(x)^{q+1}} \right)^{p,q} = \frac{D^{n+2}}{d} \omega_\alpha,$$

con $\alpha = \beta B + d\mathbf{1} - \mathbf{1}$. □

En otras palabras, el cubrimiento monomial transporta monomios entre ambas hipersuperficies de manera explícita, lo que induce una acción entre sus cohomologías primitivas.

Para estudiar cómo esta acción se comporta respecto de las descomposiciones espectrales, es necesario describirla a nivel de caracteres. En particular, no es inmediato que $\phi^*(V(i)) = V(\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathfrak{A}_D^n$.

Para ello recordaremos brevemente lo que necesitamos. En la hipersuperficie de Fermat X_D^n tenemos la acción

$$\alpha : (x_0 : x_1 : \dots : x_{n+1}) \mapsto (\zeta_D^{a_0} x_0 : \zeta_D^{a_1} x_1 : \dots : \zeta_D^{a_{n+1}} x_{n+1}),$$

la cual está asociada al grupo de caracteres

$$\widehat{G}_D^n = \{\alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^{n+2} : \sum a_i = 0\}.$$

Para cada carácter $\alpha \in \widehat{G}_D^n$, denotamos por

$$V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_D^n)$$

al espacio propio respecto a la acción α . Se deduce que

$$x^{\alpha-1} \mapsto \omega_{\alpha-1} \in V(\alpha)$$

es un generador de $V(\alpha)$.

En el caso de la hipersuperficie de Klein Y_m^n tenemos una estructura un poco más rígida, consideramos

$$d = \frac{(m-1)^{n+2} - 1}{m} = \frac{D}{m},$$

y en tal caso, para cada $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tenemos la acción

$$\chi_i : (y_0 : y_1 : \dots, y_{n+1}) \mapsto (\zeta_D^i y_0 : \zeta_D^{i(1-m)} y_1 : \dots : \zeta_D^{i(1-m)^{n+1}} y_{n+1})$$

cuyo grupo de caracteres es naturalmente $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Para cada carácter $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, denotamos por

$$V(i) \subseteq H_{\text{prim}}^n(Y_m^n)$$

al espacio propio respecto a la acción χ_i . Se deduce que

$$y^\beta \mapsto \omega_\beta \in V(i)$$

es un generador de $V(i)$. El multi-índice β que permite generar $V(i)$ por el mapa de Griffiths es más delicado: para cada $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *no nulo* se obtiene $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$ la representación $(m-1)$ -ádica de $m[i]_d$, es decir,

$$m[i]_d = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (m-1)^k,$$

con $a_k \in \{0, 1, \dots, m-2\}$. Así, el multi-índice β se define mediante

$$\beta_k = \begin{cases} a_k, & k \text{ impar} \\ m-2-a_k, & k \text{ par} \end{cases}$$

Para $i = 0$ se deduce que $\dim V(0) = 2$ y

$$\beta = (0, b-1, \dots, 0, b-1), \quad \beta' = (b-1, 0, \dots, b-1, 0)$$

son los multi-índices tales que

$$V(0) = \mathbb{C} \cdot \{\omega_\beta, \omega_{\beta'}\}.$$

Teorema 3.2.3. *Para cada $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ no nulo, tenemos que*

$$\phi^*(V(i)) = V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_D^n),$$

donde

$$\alpha = m[i]_d(b^{n+1}, \dots, -b^2, b, -1) \pmod{D}.$$

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ no nulo. Desde el teorema [3.2.2](#) se establece que el multi-índice α correspondiente al multi-índice β verifica

$$\alpha + \mathbf{1} = \beta B + d\mathbf{1} = (\beta + \mathbf{1})B,$$

donde

$$\beta_k + 1 = \begin{cases} a_k + 1, & k \text{ par} \\ b - a_k, & k \text{ impar} \end{cases}$$

con $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$. La última coordenada de $(\beta + \mathbf{1})B$ es

$$-\sum_{k \text{ par}} (a_k + 1)b^k + \sum_{k \text{ impar}} (b - a_k)b^k = -\sum_{k=0}^{n+1} a_k b^k = -m[i]_d,$$

y dado que

$$b_{i-1,j} = (-b)b_{i,j} \pmod{D},$$

se sigue inmediatamente que el multi-índice α satisface

$$\alpha + \mathbf{1} = m[i]_d(b^{n+1}, \dots, -b^2, b, -1) \pmod{D},$$

y $\alpha + \mathbf{1}$ es precisamente el carácter en Fermat correspondiente al pullback del carácter $i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. Así,

$$\phi^*(V(i)) = V(\alpha) \subseteq H_{\text{prim}}^n(X_D^n).$$

□

Notación 3.2.4. *Escribiremos $\phi^*(i) = \alpha$ al pullback a nivel de caracteres descrito anteriormente.*

De este modo, la descomposición espectral de la cohomología primitiva de Klein Y_m^n se transporta a la hipersuperficie de Fermat X_D^n mediante el pullback ϕ^* . La estrategia fundamental será determinar cuándo la suma de los espacios propios levantados

$$\bigoplus_{i \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})} V(\phi^*(i)) \subseteq H_{\text{prim}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X_D^n)$$

está generada por clases algebraicas en X_D^n ; en tal caso, su imagen por el pushforward ϕ_* proporciona clases algebraicas en Y_m^n , y por tanto la conjetura de Hodge queda verificada para la hipersuperficie de Klein.

Desde el teorema [2.5.10](#), sabemos que la componente de la descomposición espectral en Fermat dada por los caracteres lineales $\mathfrak{D}_D^n$ es algebraica, y esta será precisamente la parte relevante en nuestro estudio. La dificultad es que el grado

$$D = (m - 1)^{n+2} - 1$$

de la Fermat levantada es grande y, en general, no satisface las hipótesis del teorema de Aoki-Shioda [2.6.1](#), de modo que en X_D^n aparecen también caracteres no lineales. Por ello, el objetivo consistirá en caracterizar los caracteres $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ de Klein que se levantan a caracteres lineales en Fermat, y en buscar condiciones sobre (n, m) para que $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ solo contenga tales caracteres. Veremos que esta situación está lejos de ser aislada y que el método produce grandes familias para las cuales la conjetura de Hodge en Klein queda verificada.

En la siguiente sección estudiaremos la estructura de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ en el caso de superficies de Klein, y luego abordaremos el caso $n = 4$. El análisis de los levantamientos lineales hacia Fermat quedará reservado para secciones posteriores; en esta etapa nos concentraremos en describir la estructura general de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$.

3.3. Caracteres de Hodge en Klein, $n = 2$

En esta sección estudiamos la estructura del conjunto $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ en el caso de superficies, que constituye la situación más accesible. Este análisis permitirá identificar los patrones fundamentales que subyacen en la descripción general y que reaparecerán en dimensiones superiores.

Para ello, fijamos la superficie de Klein de grado m

$$Y_m^2 = \{y_0^{m-1}y_1 + y_1^{m-1}y_2 + y_2^{m-1}y_3 + y_3^{m-1}y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

y su conjunto de caracteres de Hodge

$$\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) = \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : \lambda(ti) \in \mathfrak{S}, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\},$$

donde

$$d = \frac{b^4 - 1}{b + 1}.$$

Notación 3.3.1. *Denotaremos por*

$$d_j = \Phi_j(b)$$

al j -ésimo polinomio ciclotómico evaluado en $b = m - 1$. También denotamos por ν_p a la valuación p -ádica.

Notación 3.3.2. *Escribiremos $(a, b) := \gcd(a, b)$ siempre que el contexto lo permita.*

Se factorizará

$$d = \frac{b^4 - 1}{b + 1} = (b^2 + 1)(b - 1) =: d_4 d_1.$$

Proposición 3.3.3. *Tenemos que*

$$(d_1, d_4) = \begin{cases} 1, & m \text{ impar} \\ 2, & m \text{ par} \end{cases}$$

Además, en el caso m par se tendrá $\nu_2(d_4) = 1$.

Demostración. Es un cálculo directo, si m es impar:

$$(d_1, d_4) = (b - 1, b^2 + 1) = (b - 1, 2) = 1.$$

Si m es par:

$$(d_1, d_4) = (b - 1, b^2 + 1) = (b - 1, 2) = 2,$$

y

$$b^2 + 1 = 0 \pmod{2}, \quad b^2 + 1 = 2 \pmod{4},$$

luego $\nu_2(d_4) = 1$. □

Lema 3.3.4. *Sea $b \geq 2$, $x, y \in \{0, \dots, b - 1\}$, entonces $((-x, -y, x, y)_b)_b \in \mathfrak{S}$.*

Demostración. Hay que encontrar la representación en base b de $(-x, -y, x, y)_b$. Si $x, y = 0$ el resultado es directo. Supongamos que $x \neq 0$, luego

$$\begin{aligned}
(-x, -y, x, y)_b &= -x - yb + xb^2 + yb^3 \\
&= -x + b - b - yb + b^2 - b^2 + xb^2 + yb^3 \\
&= (-x + b) + (-1 - y + b)b + (-1 + x)b^2 + yb^3 \\
&= (-x + b, -1 - y + b, -1 + x, y)_b
\end{aligned}$$

corresponde a la representación en base, así $((-x, -y, x, y)_b)_b \in \mathfrak{S}$. Para el caso $x = 0$ con $y \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(0, -y, 0, y)_b &= -yb + yb^3 \\
&= -yb + b^2 - b^2 + b^3 - b^3 + yb^3 \\
&= (-y + b)b + (b - 1)b^2 + (-1 + y)b^3 \\
&= (0, -y + b, b - 1, -1 + y)_b
\end{aligned}$$

es la representación en base b , se verifica nuevamente que $((-x, -y, x, y)_b)_b \in \mathfrak{S}$. □

Lema 3.3.5.

- $(c \cdot (1, 1, 1, 1)_b)_b \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, b - 1\}.$
- $(c \cdot (b - 1, b - 1, 0, 0)_b)_b \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, b^2 + 1\}.$

Demostración. El primero es directo, pues para $c \leq b - 1$ tenemos que

$$(c \cdot (1, 1, 1, 1)_b)_b = (c, c, c, c)_b \in \mathfrak{S}.$$

Veamos el segundo caso, primero notar que

$$(b - 1, b - 1, 0, 0)_b = (-1, 0, 1, 0)_b$$

y verifiquemos el caso $c = b^2 + 1 = (1, 0, 1, 0)_b$ separadamente:

$$(b^2 + 1)((b - 1) + (b - 1)b) = (b - 1, b - 1, b - 1, b - 1)_b$$

es cual es simétrico. Hacemos lo mismo con $c = b^2 = (0, 0, 1, 0)_b$:

$$b^2((b - 1) + (b - 1)b) = (0, 0, b - 1, b - 1)_b$$

y también es simétrico.

Ahora, suponga que $c < (0, 0, 1, 0)_b$, entonces su representación será de la forma

$$(c)_b = (a_0, a_1, 0, 0)$$

con $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$, el producto será

$$(a_0, a_1, 0, 0)_b \cdot (-1, 0, 1, 0)_b = (-a_0, -a_1, a_0, a_1)_b$$

el cual es simétrico por el lema [3.3.4](#). □

Observación 3.3.6. *Intuitivamente, los lemas [3.3.4](#) y [3.3.5](#) afirman que ciertas tuplas a priori simétricas, lo siguen siendo en su forma estándar.*

El siguiente resultado proporciona la parte mínima de la estructura de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$, sobre la cual se construirá la clasificación posterior.

Proposición 3.3.7. *Para todo $m \geq 3$, se tiene que*

$$\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : d_1 \mid i \quad \vee \quad d_4 \mid i\}.$$

Demostración. Si $i = kd_1$ con $k \in \{1, \dots, d_4 - 1\}$, entonces

$$m[ti]_d = (b+1) \left(ti - \left\lfloor \frac{ti}{d} \right\rfloor d \right) = \left(tk - \left\lfloor \frac{tk}{d_4} \right\rfloor d_4 \right) (b+1)d_1 = [tk]_{d_4} (b-1, b-1, 0, 0)_b$$

Como $[tk]_{d_4} \in \{0, \dots, d_4-1\}$, aplicamos [3.3.5](#) para concluir que $\lambda(ti) \in \mathfrak{S}, \forall t$, i.e., $i \in \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$.

Si $i = kd_4$ con $k \in \{1, \dots, d_1 - 1\}$, entonces

$$m[ti]_d = [tk]_{d_1} (1, 1, 1, 1)_b$$

Al igual que antes, [3.3.5](#) permite concluir que $i \in \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$. □

Ilustramos la proposición [3.3.7](#) mediante algunos ejemplos concretos, en los que se calcula explícitamente el conjunto $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$.

Ejemplo 28. *En la superficie cuártica de Klein*

$$Y_4^2 = \{y_0^3 y_1 + y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Tenemos

$$b = 3, \quad d = d_1 d_4 = 2 \cdot 10 = 20.$$

Recordamos desde el ejemplo [25](#) que

$$\mathfrak{B}_4^2(\mathcal{K}) = \{10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} \cup \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\},$$

lo que resulta consistente con la proposición [3.3.7](#).

En este caso la contención resulta ser estricta, también es importante notar que los conjuntos

$$\{i \neq 0 : d_1 \mid i\}, \quad \{i \neq 0 : d_4 \mid i\}$$

contiene exactamente un elemento en común, esto es consecuencia de que $(d_1, d_4) = 2$ cuando m es par.

Ejemplo 29. En la superficie de Klein de grado 5

$$Y_5^2 = \{y_0^4 y_1 + y_1^4 y_2 + y_2^4 y_3 + y_3^4 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Tenemos

$$b = 4, \quad d = d_4 d_1 = 17 \cdot 3 = 51.$$

En este caso podemos comprobar que

$$\mathfrak{B}_5^2(\mathcal{K}) = \{17, 34\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\},$$

por lo que es posible obtener igualdad. Como m es impar obtenemos una unión disjunta, y en tal caso:

$$|\mathfrak{B}_5^2(\mathcal{K})| = d_1 + d_4 - 2 = 18.$$

Los ejemplos anteriores muestran que la contención de la proposición [3.3.7](#) no es, en general, una igualdad, y que pueden aparecer elementos adicionales según el valor de m . Esto motiva la búsqueda de una descripción más precisa del conjunto $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$.

Veremos que la proposición [3.3.7](#) es de hecho una igualdad cuando m es impar. El caso par es más sutil, según el valor de $m/2$ (mód 60) van a existir órbitas adicionales.

Para enunciar dicha clasificación, se define

$$K = \{2, 4, 7, 12, 14, 19, 22, 24\},$$

y se establece el siguiente resultado, el cual refina la proposición [3.3.7](#).

Teorema 3.3.8. *Sea $m \geq 3$, entonces:*

$$\begin{aligned}
\left[\frac{m}{2}\right]_{30} \notin K & : \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \\
\left[\frac{m}{2}\right]_{30} = 2, 12, 14, 24 & : \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \frac{d}{20}(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times \\
\left[\frac{m}{2}\right]_{30} = 4, 22 & : \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{20}(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times \\
\left[\frac{m}{2}\right]_{60} = 7, 19 & : \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \frac{d}{120}(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \\
\left[\frac{m}{2}\right]_{60} = 37, 49 & : \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times
\end{aligned}$$

Observación 3.3.9. *El caso m impar se debe entender dentro del caso $[m/2]_{30} \notin K$.*

El teorema 3.3.8 muestra la contención inmediata, su demostración se reducirá a verificar que cada carácter adicional de la forma dr/s esté en $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$. Al igual que en la proposición 3.3.7, el teorema 3.3.8 es en realidad óptimo, en el sentido de que en cada caso se obtiene igualdad.

La otra inclusión requiere un análisis más fino y será demostrada en la Sección 3.8, primero necesitaremos establecer resultados generales y propiedades sobre $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$.

Antes de demostrar el teorema 3.3.8, verificamos dos hechos técnicos: en primer lugar, que los elementos de la forma d/s que aparecen en cada caso son enteros bien definidos; en segundo lugar, que la componente trivial y las órbitas excepcionales son disjuntas entre sí, de modo que las uniones descritas definen una partición.

Lema 3.3.10. *El elemento d/s es entero.*

Demostración. Para $m = 2k$ tenemos

$$d = 4(k-1)(2k^2 - 2k + 1).$$

Si $k \in K$ entonces $[k]_5 = 2, 4$, así

$$2k^2 - 2k + 1 = 0 \pmod{5},$$

luego $20 \mid d$. En los últimos tres casos se tiene $[k]_3 = 1$, así

$$2k^2 - 2k + 1 = 0 \pmod{3},$$

luego $60 \mid d$. Finalmente, si $[k]_{60} = 7, 19$ entonces $[k]_2 = 1$, así

$$k - 1 = 0 \pmod{2},$$

y en tal caso $120 \mid d$. □

Lema 3.3.11. *En cada caso, $(\frac{d}{s}) \cdot (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times$ no contiene múltiplos de d_1 o d_4 .*

Demostración. Para cualquier denominador s , se tiene

$$d_1 \mid (dr/s) \iff s \mid d_4 r, \quad d_4 \mid (dr/s) \iff s \mid d_1 r.$$

Basta calcular (d_j, s) y ver que $s/(d_{5-j}, s) \nmid r$ si $r \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times$.

En el primer caso tenemos $s = 20$:

$$(d_4, 20) = 10, \quad (d_1, 20) = 2,$$

y

$$20/(d_4, 20) = 2, \quad 20/(d_1, 20) = 10,$$

en ambos casos no dividen a $r \in (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$.

Los otros casos se razona de la misma forma, recorriendo cada denominador s . □

A continuación se demuestra el teorema [3.3.8](#).

Demostración. Observamos que

$$\frac{d}{s} \cdot (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times = \frac{d}{s} \cdot (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times,$$

lo que implica que

$$\frac{d}{s} \cdot (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times \subseteq \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \iff \lambda\left(\frac{dr}{s}\right) \in \mathfrak{S} \quad \forall r \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times.$$

En virtud de la definición de λ , esto equivale a verificar que

$$m \left[\frac{dr}{s} \right]_d = \frac{md}{s} [r]_s = \frac{b^4 - 1}{s} [r]_s$$

tiene representación b -ádica simétrica para todo $r \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times$.

En consecuencia, el problema se reduce a un cálculo explícito de dichas representaciones en cada uno de los casos.

Comenzamos con el caso $[m/2]_{30} = 2$. Escribimos $m/2 = 2 + 30a$ y $b = 3 + 60a$, de modo que

$$P(a) := \frac{(3 + 60a)^4 - 1}{20} = 648000a^4 + 129600a^3 + 9720a^2 + 324a + 4,$$

y este se puede reescribirse como

$$(1 + 21a) + (1 + 27a)(3 + 60a) + (9a)(3 + 60a)^2 + (3a)(3 + 60a)^3,$$

es decir,

$$(P(a))_b = (1 + 21a, 1 + 27a, 9a, 3a) \in \mathfrak{S},$$

y resulta ser simétrica. Repetimos este procedimiento para cada $r \in (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$:

$$\begin{aligned} (P(a))_b &= (21a + 1, 27a + 1, 9a, 3a) \in \mathfrak{S} \\ (3P(a))_b &= (3a, 21a + 1, 27a + 1, 9a) \in \mathfrak{S} \\ (7P(a))_b &= (27a + 1, 9a, 3a, 21a + 1) \in \mathfrak{S} \\ (9P(a))_b &= (9a, 3a, 21a + 1, 27a + 1) \in \mathfrak{S} \\ (11P(a))_b &= (51a + 2, 57a + 2, 39a + 1, 33a + 1) \in \mathfrak{S} \\ (13P(a))_b &= (33a + 1, 51a + 2, 57a + 2, 39a + 1) \in \mathfrak{S} \\ (17P(a))_b &= (57a + 2, 39a + 1, 33a + 1, 51a + 2) \in \mathfrak{S} \\ (19P(a))_b &= (39a + 1, 33a + 1, 51a + 2, 57a + 2) \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

lo que prueba que $d/20 \in \mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$ si $[m/2]_{30} = 2$. Este procedimiento es completamente algorítmico y puede implementarse mediante un esquema de muestreo e interpolación de los coeficientes en la expansión b -ádica, como se detalla en el siguiente pseudocódigo .

Algorithm 1 Reconstrucción simbólica de expansiones en base variable

Require: Expresión polinómica $N(a) \in \mathbb{Z}[a]$, base $b(a) \in \mathbb{Z}[a]$.

Ensure: Expresión simbólica

$$N(a) = \sum_{k=0}^3 d_k(a) b(a)^k, \quad d_k(a) \in \mathbb{Z}[a], \quad 0 \leq d_k(a) < b(a), \quad \forall a \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

- 1: Fijar el conjunto de muestreo $S = \{0, 1, 2, 3\}$.
- 2: Inicializar lista de dígitos simbólicos $d_k(a) \leftarrow 0$.
- 3: **for** cada $a_i \in S$ **do**
- 4: Evaluar $N_i := N(a_i)$ y $b_i := b(a_i)$.
- 5: Calcular la expansión canónica:

$$N_i = \sum_{k \geq 0} d_k(a_i) b_i^k, \quad 0 \leq d_k(a_i) < b_i.$$

- 6: Almacenar los dígitos $d_k(a_i)$ para cada posición k .
- 7: **end for**
- 8: **for** cada posición de dígito k **do**
- 9: Construir el conjunto de datos:

$$\{(a_i, d_k(a_i)) : a_i \in S\}.$$

- 10: Interpolarse un polinomio $d_k(a) \in \mathbb{Q}[a]$ tal que

$$d_k(a_i) = d_k(a_i) \quad \forall a_i \in S.$$

- 11: **end for**

return La expansión simbólica

$$N(a) = \sum_{k=0}^K d_k(a) b(a)^k.$$

Para calcular cada caso uniformemente, vamos a escribir

$$\frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{20}(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times = \left\{ \frac{dr}{60} : r \in R_2 := (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup 2(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \cup 3(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times \right\},$$

$$\frac{d}{120}(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times = \left\{ \frac{dr}{120} : r \in R_3 := (\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times \cup 2(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup 4(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \right\},$$

$$\frac{d}{60}(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{30}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times = \left\{ \frac{dr}{60} : r \in R_4 := (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times \cup 2(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \right\},$$

e implementamos el algoritmo con $N(a) = rP(a) = r((b(a)^4 - 1)/s)$ para cada valor de m, s y cada $r \in R_j$.

A continuación se muestran los valores obtenidos:

r	$[m/2]_{60} = 37$				r	$[m/2]_{60} = 49$			
1	$74a + 45$	$98a + 59$	$26a + 15$	$2a + 1$	1	$26a + 21$	$98a + 79$	$74a + 59$	$2a + 1$
2	$28a + 17$	$76a + 46$	$52a + 31$	$4a + 2$	2	$52a + 42$	$76a + 61$	$28a + 22$	$4a + 3$
7	$38a + 23$	$86a + 52$	$62a + 37$	$14a + 8$	7	$62a + 50$	$86a + 69$	$38a + 30$	$14a + 11$
11	$94a + 57$	$118a + 71$	$46a + 27$	$22a + 13$	11	$46a + 37$	$118a + 95$	$94a + 75$	$22a + 17$
13	$2a + 1$	$74a + 45$	$98a + 59$	$26a + 15$	13	$98a + 79$	$74a + 59$	$2a + 1$	$26a + 21$
14	$76a + 46$	$52a + 31$	$4a + 2$	$28a + 17$	14	$4a + 3$	$52a + 42$	$76a + 61$	$28a + 22$
17	$58a + 35$	$106a + 64$	$82a + 49$	$34a + 20$	17	$82a + 66$	$106a + 85$	$58a + 46$	$34a + 27$
19	$86a + 52$	$62a + 37$	$14a + 8$	$38a + 23$	19	$14a + 11$	$62a + 50$	$86a + 69$	$38a + 30$
22	$68a + 41$	$116a + 70$	$92a + 55$	$44a + 26$	22	$92a + 74$	$116a + 93$	$68a + 54$	$44a + 35$
23	$22a + 13$	$94a + 57$	$118a + 71$	$46a + 27$	23	$118a + 95$	$94a + 75$	$22a + 17$	$46a + 37$
26	$4a + 2$	$28a + 17$	$76a + 46$	$52a + 31$	26	$76a + 61$	$28a + 22$	$4a + 3$	$52a + 42$
29	$106a + 64$	$82a + 49$	$34a + 20$	$58a + 35$	29	$34a + 27$	$82a + 66$	$106a + 85$	$58a + 46$
31	$14a + 8$	$38a + 23$	$86a + 52$	$62a + 37$	31	$86a + 69$	$38a + 30$	$14a + 11$	$62a + 50$
34	$116a + 70$	$92a + 55$	$44a + 26$	$68a + 41$	34	$44a + 35$	$92a + 74$	$116a + 93$	$68a + 54$
37	$98a + 59$	$26a + 15$	$2a + 1$	$74a + 45$	37	$2a + 1$	$26a + 21$	$98a + 79$	$74a + 59$
38	$52a + 31$	$4a + 2$	$28a + 17$	$76a + 46$	38	$28a + 22$	$4a + 3$	$52a + 42$	$76a + 61$
41	$34a + 20$	$58a + 35$	$106a + 64$	$82a + 49$	41	$106a + 85$	$58a + 46$	$34a + 27$	$82a + 66$
43	$62a + 37$	$14a + 8$	$38a + 23$	$86a + 52$	43	$38a + 30$	$14a + 11$	$62a + 50$	$86a + 69$
46	$44a + 26$	$68a + 41$	$116a + 70$	$92a + 55$	46	$116a + 93$	$68a + 54$	$44a + 35$	$92a + 74$
47	$118a + 71$	$46a + 27$	$22a + 13$	$94a + 57$	47	$22a + 17$	$46a + 37$	$118a + 95$	$94a + 75$
49	$26a + 15$	$2a + 1$	$74a + 45$	$98a + 59$	49	$74a + 59$	$2a + 1$	$26a + 21$	$98a + 79$
53	$82a + 49$	$34a + 20$	$58a + 35$	$106a + 64$	53	$58a + 46$	$34a + 27$	$82a + 66$	$106a + 85$
58	$92a + 55$	$44a + 26$	$68a + 41$	$116a + 70$	58	$68a + 54$	$44a + 35$	$92a + 74$	$116a + 93$
59	$46a + 27$	$22a + 13$	$94a + 57$	$118a + 71$	59	$94a + 75$	$22a + 17$	$46a + 37$	$118a + 95$

r	$[m/2]_{30} = 2$				r	$[m/2]_{30} = 12$			
1	$21a + 1$	$27a + 1$	$9a$	$3a$	1	$21a + 8$	$27a + 10$	$9a + 3$	$3a + 1$
3	$3a$	$21a + 1$	$27a + 1$	$9a$	3	$3a + 1$	$21a + 8$	$27a + 10$	$9a + 3$
7	$27a + 1$	$9a$	$3a$	$21a + 1$	7	$27a + 10$	$9a + 3$	$3a + 1$	$21a + 8$
9	$9a$	$3a$	$21a + 1$	$27a + 1$	9	$9a + 3$	$3a + 1$	$21a + 8$	$27a + 10$
11	$51a + 2$	$57a + 2$	$39a + 1$	$33a + 1$	11	$51a + 19$	$57a + 21$	$39a + 14$	$33a + 12$
13	$33a + 1$	$51a + 2$	$57a + 2$	$39a + 1$	13	$33a + 12$	$51a + 19$	$57a + 21$	$39a + 14$
17	$57a + 2$	$39a + 1$	$33a + 1$	$51a + 2$	17	$57a + 21$	$39a + 14$	$33a + 12$	$51a + 19$
19	$39a + 1$	$33a + 1$	$51a + 2$	$57a + 2$	19	$39a + 14$	$33a + 12$	$51a + 19$	$57a + 21$
r	$[m/2]_{30} = 14$				r	$[m/2]_{30} = 24$			
1	$9a + 4$	$27a + 12$	$21a + 9$	$3a + 1$	1	$9a + 7$	$27a + 21$	$21a + 16$	$3a + 2$
3	$27a + 12$	$21a + 9$	$3a + 1$	$9a + 4$	3	$27a + 21$	$21a + 16$	$3a + 2$	$9a + 7$
7	$3a + 1$	$9a + 4$	$27a + 12$	$21a + 9$	7	$3a + 2$	$9a + 7$	$27a + 21$	$21a + 16$
9	$21a + 9$	$3a + 1$	$9a + 4$	$27a + 12$	9	$21a + 16$	$3a + 2$	$9a + 7$	$27a + 21$
11	$39a + 17$	$57a + 25$	$51a + 22$	$33a + 14$	11	$39a + 30$	$57a + 44$	$51a + 39$	$33a + 25$
13	$57a + 25$	$51a + 22$	$33a + 14$	$39a + 17$	13	$57a + 44$	$51a + 39$	$33a + 25$	$39a + 30$
17	$33a + 14$	$39a + 17$	$57a + 25$	$51a + 22$	17	$33a + 25$	$39a + 30$	$57a + 44$	$51a + 39$
19	$51a + 22$	$33a + 14$	$39a + 17$	$57a + 25$	19	$51a + 39$	$33a + 25$	$39a + 30$	$57a + 44$
r	$[m/2]_{30} = 4$				r	$[m/2]_{30} = 22$			
1	$43a + 5$	$49a + 5$	$7a$	a	1	$7a + 5$	$49a + 35$	$43a + 30$	a
2	$26a + 3$	$38a + 4$	$14a + 1$	$2a$	2	$14a + 10$	$38a + 27$	$26a + 18$	$2a + 1$
3	$9a + 1$	$27a + 3$	$21a + 2$	$3a$	3	$21a + 15$	$27a + 19$	$9a + 6$	$3a + 2$
7	a	$43a + 5$	$49a + 5$	$7a$	7	$49a + 35$	$43a + 30$	a	$7a + 5$
9	$27a + 3$	$21a + 2$	$3a$	$9a + 1$	9	$3a + 2$	$21a + 15$	$27a + 19$	$9a + 6$
11	$53a + 6$	$59a + 6$	$17a + 1$	$11a + 1$	11	$17a + 12$	$59a + 42$	$53a + 37$	$11a + 7$
13	$19a + 2$	$37a + 4$	$31a + 3$	$13a + 1$	13	$31a + 22$	$37a + 26$	$19a + 13$	$13a + 9$
14	$2a$	$26a + 3$	$38a + 4$	$14a + 1$	14	$38a + 27$	$26a + 18$	$2a + 1$	$14a + 10$
17	$11a + 1$	$53a + 6$	$59a + 6$	$17a + 1$	17	$59a + 42$	$53a + 37$	$11a + 7$	$17a + 12$
19	$37a + 4$	$31a + 3$	$13a + 1$	$19a + 2$	19	$13a + 9$	$31a + 22$	$37a + 26$	$19a + 13$
21	$3a$	$9a + 1$	$27a + 3$	$21a + 2$	21	$27a + 19$	$9a + 6$	$3a + 2$	$21a + 15$
22	$46a + 5$	$58a + 6$	$34a + 3$	$22a + 2$	22	$34a + 24$	$58a + 41$	$46a + 32$	$22a + 15$
23	$29a + 3$	$47a + 5$	$41a + 4$	$23a + 2$	23	$41a + 29$	$47a + 33$	$29a + 20$	$23a + 16$
26	$38a + 4$	$14a + 1$	$2a$	$26a + 3$	26	$2a + 1$	$14a + 10$	$38a + 27$	$26a + 18$
27	$21a + 2$	$3a$	$9a + 1$	$27a + 3$	27	$9a + 6$	$3a + 2$	$21a + 15$	$27a + 19$
29	$47a + 5$	$41a + 4$	$23a + 2$	$29a + 3$	29	$23a + 16$	$41a + 29$	$47a + 33$	$29a + 20$
31	$13a + 1$	$19a + 2$	$37a + 4$	$31a + 3$	31	$37a + 26$	$19a + 13$	$13a + 9$	$31a + 22$
33	$39a + 4$	$57a + 6$	$51a + 5$	$33a + 3$	33	$51a + 36$	$57a + 40$	$39a + 27$	$33a + 23$
34	$22a + 2$	$46a + 5$	$58a + 6$	$34a + 3$	34	$58a + 41$	$46a + 32$	$22a + 15$	$34a + 24$
37	$31a + 3$	$13a + 1$	$19a + 2$	$37a + 4$	37	$19a + 13$	$13a + 9$	$31a + 22$	$37a + 26$
38	$14a + 1$	$2a$	$26a + 3$	$38a + 4$	38	$26a + 18$	$2a + 1$	$14a + 10$	$38a + 27$
39	$57a + 6$	$51a + 5$	$33a + 3$	$39a + 4$	39	$33a + 23$	$51a + 36$	$57a + 40$	$39a + 27$
41	$23a + 2$	$29a + 3$	$47a + 5$	$41a + 4$	41	$47a + 33$	$29a + 20$	$23a + 16$	$41a + 29$
43	$49a + 5$	$7a$	a	$43a + 5$	43	a	$7a + 5$	$49a + 35$	$43a + 30$
46	$58a + 6$	$34a + 3$	$22a + 2$	$46a + 5$	46	$22a + 15$	$34a + 24$	$58a + 41$	$46a + 32$
47	$41a + 4$	$23a + 2$	$29a + 3$	$47a + 5$	47	$29a + 20$	$23a + 16$	$41a + 29$	$47a + 33$
49	$7a$	a	$43a + 5$	$49a + 5$	49	$43a + 30$	a	$7a + 5$	$49a + 35$
51	$33a + 3$	$39a + 4$	$57a + 6$	$51a + 5$	51	$57a + 40$	$39a + 27$	$33a + 23$	$51a + 36$
53	$59a + 6$	$17a + 1$	$11a + 1$	$53a + 6$	53	$11a + 7$	$17a + 12$	$59a + 42$	$53a + 37$
57	$51a + 5$	$33a + 3$	$39a + 4$	$57a + 6$	57	$39a + 27$	$33a + 23$	$51a + 36$	$57a + 40$
58	$34a + 3$	$22a + 2$	$46a + 5$	$58a + 6$	58	$46a + 32$	$22a + 15$	$34a + 24$	$58a + 41$
59	$17a + 1$	$11a + 1$	$53a + 6$	$59a + 6$	59	$53a + 37$	$11a + 7$	$17a + 12$	$59a + 42$

r	$[m/2]_{60} = 7$				r	$[m/2]_{60} = 19$			
1	$37a + 4$	$49a + 5$	$13a + 1$	a	1	$13a + 4$	$49a + 15$	$37a + 11$	a
2	$74a + 8$	$98a + 10$	$26a + 2$	$2a$	2	$26a + 8$	$98a + 30$	$74a + 22$	$2a$
4	$28a + 3$	$76a + 8$	$52a + 5$	$4a$	4	$52a + 16$	$76a + 23$	$28a + 8$	$4a + 1$
7	$19a + 2$	$103a + 11$	$91a + 9$	$7a$	7	$91a + 28$	$103a + 31$	$19a + 5$	$7a + 2$
11	$47a + 5$	$59a + 6$	$23a + 2$	$11a + 1$	11	$23a + 7$	$59a + 18$	$47a + 14$	$11a + 3$
13	a	$37a + 4$	$49a + 5$	$13a + 1$	13	$49a + 15$	$37a + 11$	a	$13a + 4$
14	$38a + 4$	$86a + 9$	$62a + 6$	$14a + 1$	14	$62a + 19$	$86a + 26$	$38a + 11$	$14a + 4$
17	$29a + 3$	$113a + 12$	$101a + 10$	$17a + 1$	17	$101a + 31$	$113a + 34$	$29a + 8$	$17a + 5$
19	$103a + 11$	$91a + 9$	$7a$	$19a + 2$	19	$7a + 2$	$91a + 28$	$103a + 31$	$19a + 5$
22	$94a + 10$	$118a + 12$	$46a + 4$	$22a + 2$	22	$46a + 14$	$118a + 36$	$94a + 28$	$22a + 6$
23	$11a + 1$	$47a + 5$	$59a + 6$	$23a + 2$	23	$59a + 18$	$47a + 14$	$11a + 3$	$23a + 7$
26	$2a$	$74a + 8$	$98a + 10$	$26a + 2$	26	$98a + 30$	$74a + 22$	$2a$	$26a + 8$
28	$76a + 8$	$52a + 5$	$4a$	$28a + 3$	28	$4a + 1$	$52a + 16$	$76a + 23$	$28a + 8$
29	$113a + 12$	$101a + 10$	$17a + 1$	$29a + 3$	29	$17a + 5$	$101a + 31$	$113a + 34$	$29a + 8$
31	$67a + 7$	$79a + 8$	$43a + 4$	$31a + 3$	31	$43a + 13$	$79a + 24$	$67a + 20$	$31a + 9$
34	$58a + 6$	$106a + 11$	$82a + 8$	$34a + 3$	34	$82a + 25$	$106a + 32$	$58a + 17$	$34a + 10$
37	$49a + 5$	$13a + 1$	a	$37a + 4$	37	a	$13a + 4$	$49a + 15$	$37a + 11$
38	$86a + 9$	$62a + 6$	$14a + 1$	$38a + 4$	38	$14a + 4$	$62a + 19$	$86a + 26$	$38a + 11$
41	$77a + 8$	$89a + 9$	$53a + 5$	$41a + 4$	41	$53a + 16$	$89a + 27$	$77a + 23$	$41a + 12$
43	$31a + 3$	$67a + 7$	$79a + 8$	$43a + 4$	43	$79a + 24$	$67a + 20$	$31a + 9$	$43a + 13$
44	$68a + 7$	$116a + 12$	$92a + 9$	$44a + 4$	44	$92a + 28$	$116a + 35$	$68a + 20$	$44a + 13$
46	$22a + 2$	$94a + 10$	$118a + 12$	$46a + 4$	46	$118a + 36$	$94a + 28$	$22a + 6$	$46a + 14$
47	$59a + 6$	$23a + 2$	$11a + 1$	$47a + 5$	47	$11a + 3$	$23a + 7$	$59a + 18$	$47a + 14$
49	$13a + 1$	a	$37a + 4$	$49a + 5$	49	$37a + 11$	a	$13a + 4$	$49a + 15$
52	$4a$	$28a + 3$	$76a + 8$	$52a + 5$	52	$76a + 23$	$28a + 8$	$4a + 1$	$52a + 16$
53	$41a + 4$	$77a + 8$	$89a + 9$	$53a + 5$	53	$89a + 27$	$77a + 23$	$41a + 12$	$53a + 16$
58	$106a + 11$	$82a + 8$	$34a + 3$	$58a + 6$	58	$34a + 10$	$82a + 25$	$106a + 32$	$58a + 17$
59	$23a + 2$	$11a + 1$	$47a + 5$	$59a + 6$	59	$47a + 14$	$11a + 3$	$23a + 7$	$59a + 18$
61	$97a + 10$	$109a + 11$	$73a + 7$	$61a + 6$	61	$73a + 22$	$109a + 33$	$97a + 29$	$61a + 18$
62	$14a + 1$	$38a + 4$	$86a + 9$	$62a + 6$	62	$86a + 26$	$38a + 11$	$14a + 4$	$62a + 19$
67	$79a + 8$	$43a + 4$	$31a + 3$	$67a + 7$	67	$31a + 9$	$43a + 13$	$79a + 24$	$67a + 20$
68	$116a + 12$	$92a + 9$	$44a + 4$	$68a + 7$	68	$44a + 13$	$92a + 28$	$116a + 35$	$68a + 20$
71	$107a + 11$	$119a + 12$	$83a + 8$	$71a + 7$	71	$83a + 25$	$119a + 36$	$107a + 32$	$71a + 21$
73	$61a + 6$	$97a + 10$	$109a + 11$	$73a + 7$	73	$109a + 33$	$97a + 29$	$61a + 18$	$73a + 22$
74	$98a + 10$	$26a + 2$	$2a$	$74a + 8$	74	$2a$	$26a + 8$	$98a + 30$	$74a + 22$
76	$52a + 5$	$4a$	$28a + 3$	$76a + 8$	76	$28a + 8$	$4a + 1$	$52a + 16$	$76a + 23$
77	$89a + 9$	$53a + 5$	$41a + 4$	$77a + 8$	77	$41a + 12$	$53a + 16$	$89a + 27$	$77a + 23$
79	$43a + 4$	$31a + 3$	$67a + 7$	$79a + 8$	79	$67a + 20$	$31a + 9$	$43a + 13$	$79a + 24$
82	$34a + 3$	$58a + 6$	$106a + 11$	$82a + 8$	82	$106a + 32$	$58a + 17$	$34a + 10$	$82a + 25$
83	$71a + 7$	$107a + 11$	$119a + 12$	$83a + 8$	83	$119a + 36$	$107a + 32$	$71a + 21$	$83a + 25$
86	$62a + 6$	$14a + 1$	$38a + 4$	$86a + 9$	86	$38a + 11$	$14a + 4$	$62a + 19$	$86a + 26$
89	$53a + 5$	$41a + 4$	$77a + 8$	$89a + 9$	89	$77a + 23$	$41a + 12$	$53a + 16$	$89a + 27$
91	$7a$	$19a + 2$	$103a + 11$	$91a + 9$	91	$103a + 31$	$19a + 5$	$7a + 2$	$91a + 28$
92	$44a + 4$	$68a + 7$	$116a + 12$	$92a + 9$	92	$116a + 35$	$68a + 20$	$44a + 13$	$92a + 28$
94	$118a + 12$	$46a + 4$	$22a + 2$	$94a + 10$	94	$22a + 6$	$46a + 14$	$118a + 36$	$94a + 28$
97	$109a + 11$	$73a + 7$	$61a + 6$	$97a + 10$	97	$61a + 18$	$73a + 22$	$109a + 33$	$97a + 29$
98	$26a + 2$	$2a$	$74a + 8$	$98a + 10$	98	$74a + 22$	$2a$	$26a + 8$	$98a + 30$
101	$17a + 1$	$29a + 3$	$113a + 12$	$101a + 10$	101	$113a + 34$	$29a + 8$	$17a + 5$	$101a + 31$
103	$91a + 9$	$7a$	$19a + 2$	$103a + 11$	103	$19a + 5$	$7a + 2$	$91a + 28$	$103a + 31$
106	$82a + 8$	$34a + 3$	$58a + 6$	$106a + 11$	106	$58a + 17$	$34a + 10$	$82a + 25$	$106a + 32$
107	$119a + 12$	$83a + 8$	$71a + 7$	$107a + 11$	107	$71a + 21$	$83a + 25$	$119a + 36$	$107a + 32$
109	$73a + 7$	$61a + 6$	$97a + 10$	$109a + 11$	109	$97a + 29$	$61a + 18$	$73a + 22$	$109a + 33$
113	$101a + 10$	$17a + 1$	$29a + 3$	$113a + 12$	113	$29a + 8$	$17a + 5$	$101a + 31$	$113a + 34$
116	$92a + 9$	$44a + 4$	$68a + 7$	$116a + 12$	116	$68a + 20$	$44a + 13$	$92a + 28$	$116a + 35$
118	$46a + 4$	$22a + 2$	$94a + 10$	$118a + 12$	118	$94a + 28$	$22a + 6$	$46a + 14$	$118a + 36$
119	$83a + 8$	$71a + 7$	$107a + 11$	$119a + 12$	119	$107a + 32$	$71a + 21$	$83a + 25$	$119a + 36$

y se verifica que todas las representaciones son simétricas, lo que concluye la demostración. $\square$

El teorema 3.3.8 establece que existe una componente en común $\{i \neq 0 : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\}$, cuya cardinalidad es

$$\begin{cases} d_1 + d_4 - 2, & [m]_2 = 1 \\ d_1 + d_4 - 3, & [m]_2 = 0 \end{cases}$$

debido a la proposición 3.3.3 notar que $d_1 + d_4 - 3 = m^2 - m - 3$. Los elementos no triviales que se agregan en función de m son de la forma

$$\frac{dr}{s} : r \in R_j,$$

pero la cardinalidad de R_j es independiente de m , explícitamente:

$$\begin{aligned} |R_1| &= \varphi(20) = 8 \\ |R_2| &= \varphi(60) + \varphi(30) + \varphi(20) = 32 \\ |R_3| &= \varphi(120) + \varphi(60) + \varphi(30) = 56 \\ |R_4| &= \varphi(60) + \varphi(30) = 24 \end{aligned}$$

Las condiciones sobre $[m/2]_e$ se pueden juntar sobre condiciones en $[m]_{120}$, lo que permite obtener la cardinalidad de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$ si se *asume* la igualdad en el teorema 3.3.8:

$$|\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})| = \begin{cases} (m^2 - m - 3) + 1 & , m \text{ impar} \\ (m^2 - m - 3) + 8 & , [m]_{120} \in \{4, 24, 28, 48, 64, 84, 88, 108\} \\ (m^2 - m - 3) + 32 & , [m]_{120} \in \{8, 44, 68, 104\} \\ (m^2 - m - 3) + 56 & , [m]_{120} \in \{14, 38\} \\ (m^2 - m - 3) + 24 & , [m]_{120} \in \{74, 98\} \\ (m^2 - m - 3) & , \text{otro caso} \end{cases}$$

En la siguiente sección realizaremos el mismo análisis en dimensión 4. En ese caso se identifica nuevamente una componente común y, a partir de cálculos computacionales explícitos, aparecen órbitas adicionales para distintos valores de m . Aunque no se obtiene una descripción explícita completa como en el caso de superficies, estos resultados refuerzan la estructura observada y motivan una reformulación más natural del conjunto $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ en términos de un conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^n$.

3.4. Caracteres de Hodge en Klein, $n = 4$

El objetivo de esta sección es exponer primero la parte que puede describirse de forma uniforme y luego presentar la evidencia que apunta hacia una clasificación modular de las órbitas excepcionales.

Continuamos razonando al igual que antes, escribimos

$$d = \frac{b^6 - 1}{b + 1} = (b - 1)(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1) = d_1 d_3 d_6.$$

Lema 3.4.1.

$$(c \cdot (1, 0, 0, 1, 0, 0)_b)_b \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, d_1 d_3\}$$

Demostración. Sea $c \leq d_1 d_3 = b^3 - 1$. luego $(c)_b = (c \cdot (1, 0, 0)_b)_b = (x, y, z)$ para ciertos $x, y, z \in \{0, \dots, b - 1\}$. En particular,

$$(c \cdot (1, 0, 0, 1, 0, 0)_b)_b = (x, y, z, x, y, z) \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, d_1 d_3\}.$$

□

Teorema 3.4.2. Para $m \geq 3$ tenemos

$$\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K}) \supseteq \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : d_6 \mid i\}.$$

Demostración. Tomemos $i = kd_6$ con $k \in \{1, \dots, d_1 d_3 - 1\}$ y observar que

$$\begin{aligned} m[ti]_d &= m[tkd_6]_d \\ &= [tk]_{d_1 d_3} m d_6 \\ &= [tk]_{d_1 d_3} \cdot (1, 0, 0, 1, 0, 0)_b \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lambda(ti) \in \mathfrak{S}$ por el lema [3.4.1](#).

□

Ilustramos ahora esta situación con algunos valores concretos de m , en los que se aprecia tanto la componente trivial del teorema [3.4.2](#) como la aparición de órbitas excepcionales adicionales.

Ejemplo 30. Considere la 4-variedad cuártica de Klein

$$Y_4^4 = \{y_0^3 y_1 + y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_4 + y_4^3 y_5 + y_5^3 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

En este caso tenemos

$$b = 3, \quad d = d_1 d_3 d_6 = 2 \cdot 12 \cdot 7 = 182.$$

El conjunto de caracteres es

$$\mathfrak{B}_4^4(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : 7 \mid i\} \cup \{13, 39, 65, 117, 143, 169\},$$

podemos observar que la componente extra es

$$13 \cdot \{1, 3, 5, 9, 11, 13\} = \frac{d}{14} \cdot (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times.$$

Ejemplo 31. Considere la 4-variedad de Klein de grado 6

$$Y_6^4 = \{y_0^5 y_1 + y_1^5 y_2 + y_2^5 y_3 + y_3^5 y_4 + y_4^5 y_5 + y_5^5 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

En este caso tenemos

$$b = 5, \quad d = d_1 d_3 d_6 = 4 \cdot 31 \cdot 21 = 2604.$$

El conjunto de caracteres es

$$\mathfrak{B}_6^4(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : 21 \mid i\} \cup \frac{d}{84} \cdot (\mathbb{Z}/84\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{42} \cdot (\mathbb{Z}/42\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{28} \cdot (\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times \cup \frac{d}{14} \cdot (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times.$$

El primer valor de m donde el teorema [3.4.2](#) se obtiene igualdad es $m = 7$:

Ejemplo 32. Considere la 4-variedad de Klein de grado 7

$$Y_7^4 = \{y_0^6 y_1 + y_1^6 y_2 + y_2^6 y_3 + y_3^6 y_4 + y_4^6 y_5 + y_5^6 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

En este caso tenemos

$$b = 6, \quad d = d_1 d_3 d_6 = 5 \cdot 43 \cdot 31 = 6665.$$

El conjunto de caracteres es

$$\mathfrak{B}_7^4(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : 31 \mid i\}.$$

La componente trivial $\{i \neq 0 : d_6 \mid i\}$ resulta contener gran parte de $\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K})$, esto reduce drásticamente el coste computacional para calcular $\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K})$.

Se procede a calcular explícitamente $\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K}) \setminus \{i : d_6 \mid i\}$. Como este complemento es estable por la acción de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$, podemos expresar la órbita de $i \in \mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K}) \setminus \{i : d_6 \mid i\}$ como $\frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$ con $e = d/(i, d)$.

Para organizar la evidencia computacional, recopilamos a continuación los denominadores observados para $m \leq 54$, separados según los valores de m para los que aparecen.

m	e	m	e
3	21	32	126, 42, 14
4	14	33	21
5	39	34	28, 14
6	84, 42, 28, 14	36	78
11	39	44	78, 39
12	42, 21	45	21
18	168, 156, 84, 78, 42, 28, 14	46	28, 14
20	42, 14	48	42, 14
24	78, 42, 21	50	78, 39
30	78	54	42, 21

Los valores de $m \leq 54$ omitidos son aquellos donde

$$\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_6\}.$$

Es razonable esperar un patrón periódico como ocurre en $n = 2$ con m módulo 120.

Debemos notar que en el caso de superficies, los denominadores que aparecen son

$$e = 20, 30, 60, 120,$$

y estos se distribuyen dependiendo del valor de m , esto sugiere que existe una forma más limpia de organizar la información anterior.

En el caso $n = 4$ tenemos

$$e = 14, 21, 28, 39, 42, 78, 84, 126, 156, 168,$$

y ahora mostramos cuáles de ellos aparecen en función de m :

e	m
14	4, 6, 18, 20, 32, 34, 46, 48
21	3, 12, 24, 33, 45, 54
28	6, 18, 34, 46
39	5, 11, 44, 50
42	6, 12, 18, 20, 24, 32, 48, 54
78	18, 24, 30, 36, 44, 50
84	6, 18
126	32
156	18
168	18

Recordamos que estos datos están hasta $m \leq 54$ pero desde ya se aprecia algo evidente, el denominador e aparece si $[m]_e \in S_e$, es decir, las órbitas excepcionales

$$\frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$$

aparecen según el residuo de m módulo e , esto será fundamental para describir $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ y será probado en la Sección [3.7](#).

En el caso de superficies, basta considerar

$$\mathcal{E}_m^2 = \{20_{([m]_{20}=4,8)}, 30_{([m]_{30}=8,14)}, 60_{([m]_{60}=8,14,38,44)}, 120_{([m]_{120}=14,38)}\},$$

donde $s_{(p)}$ aparece si la condición p se satisface, por lo tanto, el teorema [3.3.8](#) se reescribe como:

$$\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) \supseteq \{i \neq 0 : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m^2} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times.$$

Con la información disponible, la descripción en el caso $n = 4$ parece incompleta para $e \geq 78$, pero el conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^4$ tendría la forma

$$\mathcal{E}_m^4 = \{14_{([m]_{14}=4,6)}, 21_{([m]_{21}=3,12)}, 28_{([m]_{28}=6,18)}, 39_{([m]_{39}=5,11)}, 42_{([m]_{42}=6,12,18,20,24,32)}, \dots\}$$

con total certeza. El conjunto $\mathcal{E}_m^4$ será completado en la Sección [3.9](#).

Terminamos esta sección resumiendo las ideas que emergen del análisis en dimensión 2 y 4 respecto a la estructura del conjunto de caracteres de Hodge en Klein.

El conjunto $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ contiene una componente trivial

$$\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$$

que depende únicamente de ciertos factores ciclotómicos de d . Además, las órbitas excepcionales generadas por d/e aparecen según el valor de m (mód e). La primera afirmación se probará en la Sección 3.5 y la segunda en la Sección 3.7.

3.5. Caracteres triviales

En esta sección describimos explícitamente la componente trivial de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ en dimensión arbitraria. Veremos que este subconjunto está gobernado por ciertos factores ciclotómicos especiales de d , los cuales producen representaciones b -ádicas simétricas estables bajo la acción de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$. Esta descripción proporciona una caracterización uniforme de una parte fundamental de los caracteres de Hodge en Klein.

Notación 3.5.1. Sea $L = n + 2 = 2^r k$ con k impar, denotamos

$$Q_h = b^h + (-1)^h \quad y \quad D_h = \frac{d}{Q_h},$$

para $h = 2^s k$ con $s \in \{0, \dots, r-1\}$ y $q = L/h = 2^{r-s}$.

El rol de D_h será proveer la parte de la descomposición ciclotómica de d necesaria para la simetría.

Notación 3.5.2. Para una tupla v y un entero k , escribiremos

$$v^{(k)} := (v, \dots, v),$$

la concatenación de v consigo mismo k -veces.

Lema 3.5.3. La representación b -ádica de mD_h es

$$(mD_h)_b = \begin{cases} (1, 0^{(h-1)})^{(q)} & \text{para } h \text{ impar} \\ ((b-1)^{(h)}, 0^{(h)})^{(q/2)} & \text{para } h \text{ par} \end{cases}$$

Demostración. Inmediato desde las siguientes identidades algebraicas:

$$mD_h = \frac{b^L - 1}{b^h - 1} = \frac{(b^h)^q - 1}{b^h - 1} = 1 + b^h + b^{2h} + \dots + b^{(q-1)h}$$

y

$$mD_h = \frac{b^L - 1}{b^h + 1} = \frac{(b^h)^q - 1}{b^h + 1} = (b^h - 1) \sum_{t=0}^{q/2-1} b^{2th}$$

para h impar y par respectivamente. □

Lema 3.5.4.

- $(c \cdot (1, 0^{(h-1)})_b^{(2)})_b \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, b^h - 1\} \quad h \text{ impar}$
- $(c \cdot ((b-1)^{(h)}, 0^{(h)})_b)_b \in \mathfrak{S}, \quad \forall c \in \{0, \dots, b^h + 1\} \quad h \text{ par}$

Demostración. Si $c \leq b^h - 1$ entonces $(c)_b = (c \cdot (1, 0^{(h-1)})_b)_b = (x_1, \dots, x_h)$ para ciertos $x_j \in \{0, \dots, b-1\}$. En particular,

$$(c \cdot (1, 0^{(h-1)})_b^{(2)})_b = (x_1, \dots, x_h, x_1, \dots, x_h) \in \mathfrak{S}$$

es simétrico si h es impar. Para el segundo caso, observar que con $c = b^h + 1$ o $c = b^h$ se satisface trivialmente. Si $c \leq b^h - 1$ entonces $(c)_b = (x_1, \dots, x_h)_b$ para ciertos $x_j \in \{0, \dots, b-1\}$, luego

$$(c \cdot ((b-1)^{(h)}, 0^{(h)})_b)_b = (-x_1, \dots, -x_h, x_1, \dots, x_h)_b$$

y digamos que x_k es el primer término no nulo, entonces su representación en base b es

$$(0^{(k-1)}, b - x_k, b - 1 - x_{k+1}, \dots, b - 1 - x_h, (b-1)^{(k-1)}, x_k - 1, x_{k+1}, \dots, x_h) \in \mathfrak{S}$$

Un cálculo directo muestra que para $c = b^h$ se obtiene

$$(c \cdot mD_h)_b = (0^{(h)}, (b-1)^{(h)}) \in \mathfrak{S}.$$

□

Definición 3.5.5. Con la misma notación de antes, se define

$$\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) = \bigcup_{s=0}^{r-1} \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : D_h \mid i\}.$$

Ahora enunciamos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.5.6. *Tenemos*

$$\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}).$$

Demostración. Sea $i = k_0 D_h$, entonces desde el lema [3.5.3](#)

$$m[ti]_d = m \left[\frac{tkd}{Q_h} \right]_d = [tk]_{Q_h} mD_h = \begin{cases} [tk]_{Q_h} (1, 0^{(h-1)})_b^{(q)} & , h \text{ impar} \\ [tk]_{Q_h} ((b-1)^{(h)}, 0^{(h)})_b^{(q/2)} & , h \text{ par} \end{cases}$$

y en cada caso se obtienen representaciones simétricas en virtud del lema [3.5.4](#).

□

Mostramos como $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ se reduce exactamente a las componentes descritas en las Secciones [3.3](#) y [3.4](#).

Ejemplo 33. Si $n = 2$ entonces $L = 2^2$, debemos considerar

$$h = 2^s, \quad s \in \{0, 1\},$$

lo que recupera

$$D_{2^0} = \frac{d}{b^1 + 1} = d_1, \quad D_{2^1} = \frac{d}{b^2 - 1} = d_4.$$

Si $n = 4$ entonces $L = 2^1 \cdot 3$, debemos considerar

$$h = 2^s \cdot 3, \quad s \in \{0\},$$

lo que recupera

$$D_{2^0 3} = \frac{d}{b^3 - 1} = d_6.$$

En consecuencia, los teoremas [3.3.7](#) y [3.4.2](#) son casos puntuales del teorema [3.5.6](#). El alcance de este último teorema permite obtener esta componente trivial en cualquier dimensión de forma inmediata.

Corolario 3.5.7.

- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,2}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,4}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_6 \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,6}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_4 d_8 \mid i \vee d_1 d_8 \mid i \vee d_1 d_4 \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,8}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_{10} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,10}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_4 d_6 d_{12} \mid i \vee d_1 d_3 d_6 \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,12}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_{14} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,14}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_4 d_8 d_{16} \mid i \vee d_1 d_8 d_{16} \mid i \vee d_1 d_4 d_{16} \mid i \vee d_1 d_4 d_8 \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,16}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_6 d_{18} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,18}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_4 d_{10} d_{20} \mid i \vee d_1 d_5 d_{10} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,20}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_{22} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,22}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_4 d_6 d_8 d_{12} d_{24} \mid i \vee d_1 d_3 d_6 d_8 d_{24} \mid i \vee d_1 d_3 d_4 d_6 d_{12} \mid i\}$
- $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,24}(\mathcal{K}) = \{i \neq 0 : d_{26} \mid i\}$

Observación 3.5.8. Recordamos que desde la descomposición espectral [3.1.3](#) tenemos que

$$\dim H^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_m^n, \mathbb{Q}) = |\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})| + 3,$$

por lo que determinar la cardinalidad de la componente trivial resulta ser un paso esencial. Este conteo es inmediato desde el principio de inclusión-exclusión.

Ejemplo 34. En el caso $n = 2$ tenemos $d = d_1 d_4$ y la componente trivial es generada por d_1 y d_4 . Desde la proposición [3.3.3](#) sabemos además que $(d_1, d_4) = 1 + 1_{([m]_2=0)}$, luego

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,2}(\mathcal{K})| = \frac{d}{d_4} + \frac{d}{d_1} - (d_1, d_4) - 1,$$

que expresado en función de m es

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,2}(\mathcal{K})| = m^2 - m - 3 + 1_{([m]_2=1)}.$$

El caso $n = 4$ tenemos $d = d_1 d_3 d_6$ y la componente trivial es generada por d_6 , luego

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,4}(\mathcal{K})| = \frac{d}{d_6} - 1 = d_1 d_3 - 1 = m^3 - 3m^2 + 3m - 3.$$

En el caso $n = 6$ tenemos $d = d_1 d_4 d_8$ y la componente trivial es generada por $d_4 d_8$, $d_1 d_8$ y $d_1 d_4$, luego

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,6}(\mathcal{K})| = d_1 + d_4 + d_8 - (d_1, d_4) - (d_1, d_8) - (d_4, d_8) + (d_1, d_4, d_8) - 1,$$

podemos calcular que

$$(d_4, d_8) = 1, \quad (d_1, d_4) = (d_1, d_8) = 1 + 1_{([m]_2=0)},$$

y tras expresarlo en función de m nos queda

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,6}(\mathcal{K})| = m^4 - 4m^3 + 7m^2 - 5m - 3 + 2_{([m]_2=1)}.$$

Razonando de la misma forma se llega a que

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,8}(\mathcal{K})| = m^5 - 5m^4 + 10m^3 - 10m^2 + 5m - 3,$$

y

$$|\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,10}(\mathcal{K})| = m^6 - 6m^5 + 15m^4 - 19m^3 + 12m^2 - 3m - 1 - \left\{ \begin{array}{ll} 1, & [m]_6 = 1, 3 \\ 2, & [m]_6 = 0, 4 \\ 3, & [m]_6 = 5 \\ 6, & [m]_6 = 2 \end{array} \right\}.$$

La componente $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ contiene la parte *genérica* de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ y su cardinalidad viene dada por un polinomio en m de grado $n/2 + 1$. Los caracteres triviales en Klein constituyen el núcleo aritmético más estable de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ y su levantamiento a la hipersuperficie de Fermat X_D^n admite una descripción completamente explícita, como veremos en la siguiente sección.

3.6. Levantamiento de $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$

Una vez identificada la parte trivial de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, el problema consiste en comprender cómo estos caracteres se transportan bajo el pullback hacia la hipersuperficie de Fermat asociada. La idea central de esta sección es mostrar que dicho levantamiento preserva la estructura combinatoria relevante y, en particular, que los caracteres triviales de Klein se transforman en caracteres lineales de Fermat.

Tenemos el cubrimiento monomial

$$\phi : X_D^n \rightarrow Y_m^n,$$

descrito en la Sección [3.2](#), donde $D = b^{n+2} - 1$. Recordamos que su acción por pullback

$$\phi^* : H_{\text{prim}}^n(Y_m^n) \rightarrow H_{\text{prim}}^n(X_D^n),$$

actúa entre los caracteres mediante

$$\begin{aligned} \phi^* : (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathfrak{A}_D^n \\ i &\longmapsto \phi^*(i), \end{aligned}$$

donde

$$\phi^*(i) = m[i]_d(b^{n+1}, \dots, -b^2, b, -1) \quad (\text{mód } D).$$

Vamos a escribir

$$\phi^*(i) = \left(\sum_{j=0}^{n+1} a_j b^j \right) (b^{n+1}, \dots, -b^2, b, -1) \quad (\text{mód } D),$$

con $(a_0, \dots, a_{n+1}) = \lambda(i)$.

Observación 3.6.1. *Conviene seguir recordando la escritura $h = 2^s k$ enunciada en [3.5.1](#), esta será indispensable pues determina completamente la estructura de $\phi^*(D_h)$ como carácter lineal en Fermat, concretamente en cómo se emparejan sus coordenadas.*

Lema 3.6.2. *Denotemos $a = \lambda(D_h)$. Entonces*

$$\begin{aligned} a &= ((b-1)^{(h)}, 0^{(h)})^{(q/2)}, & s \neq 0 \\ a &= (1, 0^{(h-1)})^{(q)}, & s = 0. \end{aligned}$$

Demostración. Inmediato desde el lema [3.5.3](#), considerar que h es impar solo si $s = 0$, y en cuyo caso $q = 2^r$. □

Lema 3.6.3. Sea $i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ múltiplo de D_h . Si $s \neq 0$, entonces

$$\lambda(i) = (B, C)^{(q/2)}$$

donde B, C son tuplas de tamaño h , verificando que $B_j + C_j = b - 1$ para cada $j = 0, \dots, h - 1$. Si $s = 0$, entonces

$$\lambda(i) = (B)^{(q)}$$

donde B es una tupla de longitud h .

Demostración. Inmediato desde la demostración del lema [3.5.4](#). □

Los lemas anteriores muestran que los caracteres triviales poseen una estructura periódica muy rígida; esa periodicidad es precisamente la que forzará la simetría tras el levantamiento.

Recordamos que

$$\mathfrak{D}_D^n = \{\alpha \in \mathfrak{A}_D^n : \alpha \text{ es } D\text{-emparejable}\} \subseteq \mathfrak{B}_D^n(\mathcal{F})$$

es el conjunto de caracteres lineales en Fermat X_D^n . Para un $i \in \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ vamos a denotar por $\beta = \phi^*(i)$ su levantamiento a X_D^n :

$$\beta_k = (-b)^k \left(\sum_{j=0}^{L-1} a_j b^j \right) \quad (\text{mód } D), \quad k = 0, \dots, n + 1.$$

Lema 3.6.4. β es $2h$ -periódico, es decir, para cada $i \in \{0, \dots, 2h - 1\}$ y $j \in \{0, \dots, q/2 - 1\}$ tenemos

$$\beta_{i+j(2h)} = \beta_i$$

Demostración. Escribamos $a = \lambda(i)$, por el lema [3.6.3](#) se sigue que si $s \neq 0$ entonces

$$a = (B, C)^{(q/2)}$$

para ciertas tuplas B, C de longitud h verificando $B_j + C_j = b - 1$ para cada $j = 0, \dots, h - 1$. Si $s = 0$ entonces

$$a = (B, B)^{(q/2)}$$

para cierta tupla B de longitud h . En cada caso a es $2h$ -periódico. Observar que

$$S := \sum_{j=0}^{L-1} a_j b^j = \sum_{k=0}^{\frac{q}{2}-1} \sum_{j=0}^{2h-1} a_j b^{j+k(2h)} = \left(\sum_{j=0}^{2h-1} a_j b^j \right) \cdot \sum_{k=0}^{\frac{q}{2}-1} b^{k(2h)} =: S_0 M,$$

donde

$$M = \frac{b^L - 1}{b^{2h} - 1}.$$

Notar que

$$M(b^{j(2h)} - 1) = D \cdot \frac{(b^{2h})^j - 1}{b^{2h} - 1} = D \sum_{k=0}^{j-1} b^{k(2h)},$$

y así $Mb^{j(2h)} = M \pmod{D}$. Finalmente, vemos que

$$\beta_{i+j(2h)} = S(-b)^{i+j(2h)} = S_0 M(-b)^i b^{j(2h)} = S_0 M(-b)^i = \beta_i \pmod{D}$$

□

Gracias al lema [3.6.4](#), vamos a escribir

$$\beta = (E)^{(q/2)}$$

donde E es una tupla de longitud $2h$. Denotemos

$$E = (\beta_0, \dots, \beta_{2h-1}),$$

el último lema será el que permita concluir que $\beta \in \mathfrak{D}_D^n$, todo el emparejamiento ocurrirá dentro del bloque E en forma simétrica.

Lema 3.6.5. *E es D -emparejable con desfase h , es decir,*

$$\beta_i + \beta_{i+h} = 0 \pmod{D}$$

para $i = 0, \dots, h-1$.

Demostración. Con la misma notación que en la demostración anterior, escribimos $S = S_0 M$ con

$$S_0 = \sum_{j=0}^{2h-1} a_j b^j.$$

Si $s \neq 0$ entonces

$$a = (B, C)^{(q/2)}$$

para ciertas tuplas B, C de longitud h verificando $B_j + C_j = b-1$ para cada $j = 0, \dots, h-1$.

Luego,

$$S_0 = \left(\sum_{j=0}^{h-1} B_j b^j \right) + b^h \left(\sum_{j=0}^{h-1} C_j b^j \right) =: S_B + b^h S_C.$$

La condición $B_j + C_j = b - 1$ implica que

$$S_B = \sum_{j=0}^{h-1} B_j b^j = \sum_{j=0}^{h-1} (b - 1 - C_j) b^j = (b^h - 1) - S_C.$$

Así,

$$S_0 = S_B + b^h S_C = b^{2h} - b^h + (1 - b^h) S_B.$$

Recordar que $s \neq 0$ equivale a h par, vemos que

$$\begin{aligned} \beta_i + \beta_{i+h} &= S(-b)^i (1 + (-b)^h) \\ &= (-b)^i S_0 (1 + b^h) M \\ &= (-b)^i (b^{2h} - b^h + (1 - b^h) S_B) (1 + b^h) \frac{b^L - 1}{b^{2h} - 1} \\ &= (-b)^i (b^h - 1) (b^h - S_B) \frac{D}{b^h - 1} \\ &= (-b)^i (b^h - S_B) D \end{aligned}$$

lo que implica $\beta_i + \beta_{i+h} = 0$ (mód D).

Si $s = 0$ se razona similarmente, tenemos

$$a = (B, B)^{(q/2)}$$

con B una tupla de longitud h . Luego,

$$S_0 = S_B + b^h S_B = (1 + b^h) S_B.$$

En este caso h es impar, luego

$$\begin{aligned} \beta_i + \beta_{i+h} &= S(-b)^i (1 + (-b)^h) \\ &= (-b)^i S_0 (1 - b^h) M \\ &= (-b)^i (1 + b^h) S_B (1 - b^h) \frac{D}{b^{2h} - 1} \\ &= -(-b)^i S_B D \end{aligned}$$

y así, $\beta_i + \beta_{i+h} = 0$ (mód D). □

La periodicidad y la simetría establecidas en los lemas anteriores permiten concluir el siguiente resultado.

Teorema 3.6.6. *Todo carácter trivial en Klein se levanta a un carácter lineal en Fermat, es decir,*

$$\phi^*(\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})) \subseteq \mathfrak{D}_D^n.$$

Observación 3.6.7. Las coordenadas que se emparejan en $\phi^*(kD_h)$ están determinadas completamente por el factor ciclotómico D_h , esto es lo que se detalló explícitamente en cada lema durante esta sección.

El siguiente ejemplo es especialmente significativo: corresponde al caso $n = 4$, donde la conjetura de Hodge presenta ya un contenido geoméricamente relevante, y además en $m = 7$ donde tenemos que $\mathfrak{B}_7^4(\mathcal{K})$ coincide con la componente trivial. Mostraremos explícitamente cómo los caracteres triviales de Klein se levantan a caracteres lineales en Fermat.

Ejemplo 35. Volvamos con la 4-variedad de Klein de grado 7

$$Y_7^4 = \{y_0^6 y_1 + y_1^6 y_2 + y_2^6 y_3 + y_3^6 y_4 + y_4^6 y_5 + y_5^6 y_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5,$$

tal como vimos en el ejemplo [32](#) tenemos

$$b = 6, \quad d_6 = 31.$$

En este caso, podemos cubrirla por la 4-variedad de Fermat de grado $D = b^6 - 1 = 46655$

$$X_{46655}^4 = \{x_0^{46655} + x_1^{46655} + x_2^{46655} + x_3^{46655} + x_4^{46655} + x_5^{46655} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5.$$

Los caracteres de Hodge en Klein son

$$\mathfrak{B}_7^4(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) = \{i \in (\mathbb{Z}/6665\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : 31 \mid i\}.$$

Tomaremos $i = 31$ y calcularemos su levantamiento a Fermat X_{46655}^4 :

$$7 \cdot 31(b^5, -b^4, b^3, -b^2, b, -1) = (7812, 45353, 217, 38843, 1302, 46438) \pmod{46655},$$

y comprobamos que

$$7812 + 38843 = D, \quad 45353 + 1302 = D, \quad 217 + 46438 = D,$$

por lo tanto,

$$\phi^*(31) \in \mathfrak{D}_{46655}^4.$$

Por el teorema [3.6.6](#) lo mismo ocurrirá con cada múltiplo de 31. En particular,

$$\phi^* \left(\bigoplus_{i \in \mathfrak{B}_7^4(\mathcal{K})} V(i) \right) = \bigoplus_{31 \mid i} V(\phi^*(i)) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{D}_{46655}^4} V(\alpha) = \mathbb{C} \cdot \{[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \mathcal{J}, w\},$$

es generado por ciclos lineales tras levantar a X_{46655}^4 , y así

$$H_{\text{prim}}^{2,2}(Y_7^4, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V(0) \oplus \bigoplus_{i \in \mathfrak{B}_7^4(\mathcal{K})} V(i) \subseteq V(0) \oplus \mathbb{C} \cdot \{\phi_*[\ell_{\mathcal{J}}^w]_{\text{prim}} : \mathcal{J}, w\}$$

es generado por ciclos algebraicos, es decir, la Klein Y_7^4 verifica la conjetura de Hodge.

Observación 3.6.8. *El método propuesto consiste en levantar la descomposición espectral en la hipersuperficie de Klein Y_m^n hasta la descomposición espectral clásica de la hipersuperficie de Fermat X_D^n . La dificultad evidente es que el grado $D := (m-1)^{n+2} - 1$ resulta ser muy grande y en general no verifica las hipótesis de Aoki-Shioda [2.6.1](#), en particular $\mathfrak{D}_D^n \subsetneq \mathfrak{B}_D^n$. De este modo, no resulta esperable que la conjetura de Hodge en la Fermat X_D^n se satisfaga únicamente con ciclos lineales estándar. Para poner esto en perspectiva, la Fermat X_{46655}^4 del ejemplo [35](#) resulta un caso intratable en la actualidad, pero nuestro método esquiva esta complejidad al aislar la componente $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{7,4}(\mathcal{K})$ que es levantada a $\mathfrak{D}_{46655}^4 \subsetneq \mathfrak{B}_{46655}^4(\mathcal{F})$. Más generalmente, la condición $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ equivale a la conjetura de Hodge en la hipersuperficie de Klein Y_m^n .*

Observación 3.6.9. *Es posible verificar que el grado D nunca es 4 ni primo. Para $n \geq 4$ existen soluciones infinitas, pero sin abarcar toda la generalidad del método propuesto, por ejemplo, $m = 7 \mapsto D = 46655$ es resuelto pese a que $\gcd(46655, 6!) \neq 1$. Podemos ver que Y_{13}^4 también es un caso positivo en Klein pues acá $D = 12^6 - 1 = 2985983$ es coprimo con $6!$. Analizar las condiciones para $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ resulta un problema difícil y que iremos tratando poco a poco, por otra parte, el caso aislado $\gcd(D, (n+2)!) = 1$ resulta inmediato y nos provee familias explícitas en Klein (tras fijar la dimensión).*

Teorema 3.6.10. *Sea $D = (m-1)^6 - 1$. Entonces*

$$\gcd(D, 6!) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad m \equiv 1, 13, 19 \pmod{30}.$$

Demostración. Sea $b = m - 1$, notar que $6!$ solo contiene 2,3,5 como factores primos. Sea $p \in \{2, 3, 5\}$. Si $p \mid b$, entonces

$$D = b^6 - 1 \equiv -1 \pmod{p},$$

por lo que $p \nmid D$.

Supongamos ahora que $p \nmid b$. Entonces $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, y

$$p \mid D \Longleftrightarrow b^6 \equiv 1 \pmod{p} \Longleftrightarrow \text{ord}_p(b) \mid 6.$$

Para $p = 2$, si $2 \nmid b$, entonces $b \equiv 1 \pmod{2}$, de modo que

$$b^6 - 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Por consiguiente, es necesario y suficiente que $2 \mid b$.

Para $p = 3$, el grupo $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ tiene orden 2. En consecuencia, todo elemento invertible tiene orden 1 o 2, ambas divisoras de 6. Por tanto, es necesario y suficiente que $3 \mid b$.

Finalmente, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ es cíclico de orden 4. Así,

$$\text{ord}_5(b) \mid 6 \iff \text{ord}_5(b) \in \{1, 2\} \iff b \equiv \pm 1 \pmod{5}.$$

Por tanto, para evitar que $5 \mid D$, es necesario y suficiente que

$$b \equiv 0, \pm 2 \pmod{5}.$$

En consecuencia,

$$2 \mid b, \quad 3 \mid b, \quad b \equiv 0, \pm 2 \pmod{5}.$$

Aplicando el teorema chino del resto se obtiene

$$b \equiv 0, 12, 18 \pmod{30},$$

es decir,

$$m \equiv 1, 13, 19 \pmod{30}.$$

□

Observación 3.6.11. *El teorema 3.6.10 es fácilmente generalizable, mostramos los valores de m de modo que $\gcd(D, (n+2)!) = 1$ para $n \leq 10$:*

- $(n = 4) \longrightarrow m \equiv 1, 13, 19 \pmod{30}$
- $(n = 6) \longrightarrow m \equiv 1, 31, 61, 151, 181 \pmod{210}$
- $(n = 8) \longrightarrow m \equiv 1, 13, 19, 31, 43, 61, 73, 103, 109, 139, 151, 169, 181, 193, 199 \pmod{210}$
- $(n = 10) \longrightarrow m \equiv 1, 421, 631, 841, 1051, 1261, 1471, 1681, 1891 \pmod{2310}$

Corolario 3.6.12. *La conjetura de Hodge en la hipersuperficie de Klein Y_m^n es satisfecha para cualquier (n, m) verificando las condiciones anteriores.*

En la Sección 3.4 se calculó $\mathfrak{B}_m^4(\mathcal{K})$ de manera explícita hasta $m \leq 54$, lo que nos permite obtener inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 3.6.13. *La conjetura de Hodge en la 4-variedad de Klein Y_m^4 se verifica para*

$m = 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 47, 49, 51, 52, 53,$

con ciclos algebraicos provenientes de ciclos lineales en la 4-variedad de Fermat X_D^4 .

Observación 3.6.14. *Notar que $m = 7$ visto en el ejemplo [35](#) es el primer caso donde el método funciona, también observar que la lista del teorema [3.6.10](#) queda contenida en esta.*

La descripción

$$\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m^n} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$$

surge naturalmente, la condición $\mathcal{E}_m^n = \emptyset$ asegura que sobre la hipersuperficie de Klein Y_m^n vale la conjetura de Hodge.

La siguiente sección será dedicada a estudiar la estructura excepcional de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, en particular, probar que las órbitas excepcionales generadas por d/e aparecen según el valor de m (mód e). Esto último permite escribir:

$$\mathcal{E}_m^2 \supseteq \{20_{([m]_{20}=4,8)}, 30_{([m]_{30}=8,14)}, 60_{([m]_{60}=8,14,38,44)}, 120_{([m]_{120}=14,38)}\},$$

y parcialmente para $n = 4$:

$$\mathcal{E}_m^4 \supseteq \{14_{([m]_{14}=4,6)}, 21_{([m]_{21}=3,12)}, 28_{([m]_{28}=6,18)}, 39_{([m]_{39}=5,11)}, 42_{([m]_{42}=6,12,18,20,24,32)}, \dots\}.$$

Lo que resulta realmente complicado es poder afirmar que tales listas de denominadores $\mathcal{E}_m^n$ estén completas, y en consecuencia, lograr la igualdad deseada.

Una vez establecida la estructura excepcional de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, la Sección [3.8](#) completará el caso de superficies y en la Sección [3.9](#) presentará elementos de $\mathcal{E}_m^n$ para $n \leq 8$ a partir de una búsqueda computacional.

3.7. Estructura general de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$

En esta sección obtenemos una descripción estructural completa del conjunto de caracteres de Hodge en Klein. Más precisamente, mostramos que la parte excepcional de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ se organiza en órbitas indexadas por ciertos enteros e , y que la aparición de cada una de estas órbitas depende únicamente del valor de m módulo e . Este fenómeno, observado empíricamente en el caso $n = 2$ y $n = 4$, resulta ser completamente general.

El punto clave será reducir la condición $d/e \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ a un criterio intrínseco en la hipersuperficie de Fermat de grado e , lo que permite detectar las órbitas excepcionales mediante un único vector “test”.

Proposición 3.7.1. *Tenemos la descomposición*

$$\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \bigcup_{\substack{e|d \\ \frac{d}{e} \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})}} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$$

en unión disjunta.

Demostración. El conjunto $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ es estable por la acción de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$, por lo que este es unión disjunta de sus órbitas $\mathcal{O}_k$. Para cada $i \in \mathcal{O}_k \subseteq \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$, tenemos

$$\mathcal{O}_k = i \cdot (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times = \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$$

donde $e = d/(i, d)$. □

Observación 3.7.2. *La proposición 3.7.1 muestra que toda órbita de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ puede ser representada por un único elemento de la forma d/e . Esto resulta ser la elección más natural, su órbita será de tamaño $\varphi(e)$.*

Proposición 3.7.3. *Si $e \neq 1$ entonces $e \mid Q_h$, si y solo si, $d/e \in \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$.*

Demostración. Como $D_h = d/Q_h$ entonces $e \mid Q_h$ equivale a que $D_h \mid (d/e)$, y en consecuencia $d/e \in \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ pues $d/e \neq d$. □

Definición 3.7.4. *Se define el conjunto excepcional de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ como*

$$\mathcal{E}_m^n = \{e \mid d : e \nmid Q_h \wedge (d/e) \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})\}.$$

En consecuencia, el conjunto $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ se descompone en órbitas generadas por elementos de la forma d/e . Las órbitas correspondientes a divisores de los Q_h recuperan exactamente la componente trivial, y el resto de órbitas excepcionales son indexadas por $\mathcal{E}_m^n$.

La elección del representante de las órbitas que hacemos en la proposición 3.7.1 es fundamental, en el siguiente teorema establecemos un criterio clave para detectar cuándo d/e es un carácter de Hodge en Klein, las condiciones aritméticas de $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ se traducen naturalmente a las condiciones aritméticas sobre $\mathfrak{B}_e^n(\mathcal{F})$.

Teorema 3.7.5. *Para cada $e \mid d$ tenemos*

$$\frac{d}{e} \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) \iff [(1, -b, \dots, (-b)^{n+1})]_e \in \mathfrak{B}_e^n(\mathcal{F}).$$

Demostración. Sea $t \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$ y

$$\frac{Dt}{e} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k b^k$$

la representación b -ádica de $\frac{Dt}{e}$. Sea

$$r_k := [tb^k]_e,$$

como $e \mid D$, entonces

$$r_{n+2} = r_0 = t.$$

Para cada $k = 0, \dots, n+1$, se define $c_k \in \{0, \dots, b-1\}$ por la relación

$$b r_k = e c_k + r_{k+1}.$$

Entonces, multiplicando por b^{n+1-k} y sumando sobre k , obtenemos una suma telescópica:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (b r_k - r_{k+1}) b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} e c_k b^{n+1-k}.$$

El lado izquierdo es

$$b^{n+2} r_0 - r_{n+2} = tD,$$

por lo que

$$\frac{Dt}{e} = \sum_{k=0}^{n+1} c_k b^{n+1-k}.$$

Comparando con la representación

$$\frac{Dt}{e} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k b^k,$$

se deduce que

$$a_k = c_{n+1-k}.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k = - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k c_k.$$

Por otra parte, desde $br_k - r_{k+1} = ec_k$ se sigue que

$$e \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (br_k - r_{k+1}) = (b+1) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k r_k,$$

y entonces

$$e \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k = -(b+1) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k r_k.$$

Ahora observamos que

$$[t(-b)^k]_e = \begin{cases} r_k, & \text{si } k \text{ es par,} \\ e - r_k, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{n+1} [t(-b)^k]_e = \left(\frac{n}{2} + 1\right) e + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k r_k.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos

$$e \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k = -(b+1) \left(\sum_{k=0}^{n+1} [t(-b)^k]_e - \left(\frac{n}{2} + 1\right) e \right),$$

y se sigue

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k = 0 \iff \sum_{k=0}^{n+1} [t(-b)^k]_e = \left(\frac{n}{2} + 1\right) e.$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Observación importante. Si $e \mid d$ con $e \neq 1$, entonces desde el teorema [3.6.6](#) se sigue que

$$e \mid Q_h \iff D_h \mid (d/e) \iff \phi^*(d/e) = \frac{md}{e}(b^{n+1}, \dots, -b^2, b, -1) \in \mathfrak{D}_D^n,$$

pero $md/e = D/e$, entonces esto último equivale a que

$$[(1, -b, \dots, (-b)^{n+1})]_e \in \mathfrak{D}_e^n \subseteq \mathfrak{B}_e^n(\mathcal{F}),$$

nos referiremos a $[\alpha_0]_e = [(1, -b, \dots, (-b)^{n+1})]_e$ como el vector test asociado a $e \mid d$.

A continuación juntamos la proposición [3.7.1](#) y el teorema [3.7.5](#) para dar una descripción estructural del conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^n$, veremos que la aparición de elementos excepcionales e solo depende de la clase de m (mód e).

Teorema 3.7.6. Para cada $n \geq 2$ par, el conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^n$ es de la forma

$$\mathcal{E}_m^n = \{e_{([m]_e \in S_e)}\}_{e \in \mathcal{E}^n},$$

donde $S_e \subseteq \{3, \dots, e-1\}$. Entonces, $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ se escribe como la unión disjunta:

$$\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m^n} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times.$$

Demostración. Fijemos $n \geq 2$ par y sea $\mathcal{E}_m^n$ como en la definición [3.7.4](#), entonces la descomposición en unión disjunta

$$\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K}) = \mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K}) \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m^n} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times.$$

es inmediata. Se define

$$S_e = \{m \in \{3, \dots, e-1\} : e \in \mathcal{E}_m^n\}.$$

Observar que

$$d(m) := \frac{(m-1)^{n+2} - 1}{m} \in \mathbb{Z}[m],$$

luego

$$d(m) = d([m]_e) \pmod{e},$$

en particular,

$$e \mid d(m) \iff e \mid d([m]_e).$$

El razonamiento anterior implica también que $e \mid Q_h(m) \iff e \mid Q_h([m]_e)$.

Sea $m \geq 3$, $b = m - 1$, $d(m) = \frac{(m-1)^{n+2} - 1}{m}$ y $e \mid d(m)$ tales que $[m]_e \in S_e$, entonces

$$[m]_e \in S_e \iff e \in \mathcal{E}_{[m]_e}^n,$$

y esto último equivale a que

$$e \mid d([m]_e), \quad e \nmid Q_h([m]_e), \quad (d/e) \in \mathfrak{B}_{[m]_e}^n(\mathcal{K}),$$

pero desde el teorema [3.7.5](#) se sigue que

$$(d/e) \in \mathfrak{B}_{[m]_e}^n(\mathcal{K}) \iff [(1, -[b]_e, \dots, (-[b]_e)^{n+1})]_e \in \mathfrak{B}_e^n(\mathcal{F}),$$

pero $[(1, -[b]_e, \dots, (-[b]_e)^{n+1})]_e = [(1, -b, \dots, (-b)^{n+1})]_e$, así que

$$e \mid d(m), \quad e \nmid Q_h(m), \quad (d/e) \in \mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$$

nuevamente gracias al teorema [3.7.5](#), esto equivale a que $e \in \mathcal{E}_m^n$. En consecuencia,

$$e \in \mathcal{E}_m^n \iff e \in \mathcal{E}_{[m]_e}^n,$$

es decir, cada elemento de $\mathcal{E}_m^n$ (en función de m) puede escribirse como

$$e_{([m]_e \in S_e)},$$

pues su aparición depende exclusivamente del valor $[m]_e \in \{3, \dots, e-1\}$. El conjunto $\mathcal{E}^n$ se define por la unión de $\mathcal{E}_m^n$ sobre m . □

Ilustramos el teorema [3.7.6](#) con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 36. En la Sección [3.4](#) se calculó explícitamente $\mathcal{E}_m^4$ para $m \leq 54$, volvemos a mostrar los resultados obtenidos:

m	e	m	e
3	21	32	126, 42, 14
4	14	33	21
5	39	34	28, 14
6	84, 42, 28, 14	36	78
11	39	44	78, 39
12	42, 21	45	21
18	168, 156, 84, 78, 42, 28, 14	46	28, 14
20	42, 14	48	42, 14
24	78, 42, 21	50	78, 39
30	78	54	42, 21

y nos concentraremos en el caso $m = 3$ donde $\mathcal{E}_3^4 = \{21\}$, esto implica que la órbita asociada a $d/21$ es Hodge (y excepcional) en la Klein Y_3^4 , acá

$$b = m - 1 = 2, \quad d = \frac{(m-1)^6 - 1}{m} = 21.$$

La condición de ser una órbita de Hodge en Klein queda caracterizada por el teorema [3.7.5](#), en este caso, esto equivale a que

$$[\alpha_0]_e = [(1, -b, b^2, -b^3, b^4, -b^5)]_{21} = [(1, 19, 4, 13, 16, 10)]_{21} \in \mathfrak{B}_{21}^4(\mathcal{F}).$$

Es fácil comprobar que $[\alpha_0]_{21} \in \mathfrak{B}_{21}^4(\mathcal{F})$, notar que

$$|[\alpha_0]_{21}|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{21}(1 + 19 + 4 + 13 + 16 + 10) = 3 = \frac{n}{2} + 1,$$

y esta condición resulta también ser estable por la acción de $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times$.

Ahora consideremos $m' = m + e = 3 + 21 = 24$, entonces

$$b' = m' - 1 = 23, \quad d' = \frac{(m' - 1)^4 - 1}{m'} = 11660,$$

y notamos que $e \mid d'$ pues $d' \equiv d \equiv 0 \pmod{e}$. Para verificar que la órbita asociada a d'/e es Hodge en Klein, basta estudiar el vector

$$[(1, -b', (b')^2, -(b')^3, (b')^4, -(b')^5)]_e$$

pero por construcción tenemos $b' \equiv b \pmod{e}$, así

$$[(1, -b', (b')^2, -(b')^3, (b')^4, -(b')^5)]_e = [(1, 19, 4, 13, 16, 10)]_{21} \in \mathfrak{B}_{21}^4(\mathcal{F}),$$

lo que permite concluir por el teorema [3.7.5](#) que

$$11660/21 \in \mathfrak{B}_{24}^4(\mathcal{K})$$

y en particular,

$$e = 21 \in \mathcal{E}_{24}^4,$$

tal como se evidencia en la tabla obtenida explícitamente (la excepcionalidad se sigue desde $Q'_h \equiv Q_h \not\equiv 0 \pmod{e}$).

Este mismo razonamiento permite concluir que

$$e = 21 \in \mathcal{E}_m^4 \quad \text{para } m = 3, 24, 45, 66, 87, \dots,$$

sin haber calculado $\mathcal{E}_m^4$ para $m > 54$. Como $e = 21 \in \mathcal{E}^4$, basta verificar cuando aparecen órbitas excepcionales asociada a $21 \mid d$ hasta $m < 21$, desde la tabla se deduce que

$$S_{21} = \{3, 12\}$$

y por lo tanto,

$$21_{([m]_{21}=3,12)} \in \mathcal{E}_m^4 \subseteq \mathcal{E}^4, \quad \forall m \geq 3.$$

Observación 3.7.7. En el ejemplo [36](#) tenemos que $Q_h := b^h + (-1)^h = b^3 - 1 = 7$ (cf. ejemplo [33](#)), todos los divisores $e \mid 21$ verificando $e \mid 7$ (con $e \neq 1$) proveen órbitas Hodge que son triviales en la Klein Y_3^4 por la proposición [3.7.3](#), esto también resulta inmediato al mirar $[\alpha_0]_e$:

$$[\alpha_0]_7 = (1, 4, 2, 1, 4, 2) \in \mathfrak{D}_7^4$$

el cual es un carácter lineal en la Fermat X_7^4 y por lo tanto Hodge. En el ejemplo [36](#) se muestra $e = 21$ el cual nos da $[\alpha_0]_{21} \in \mathfrak{B}_{21}^4(\mathcal{F})$ pero

$$[\alpha_0]_{21} = (1, 19, 4, 13, 16, 10) \notin \mathfrak{D}_{21}^4$$

no resulta en un carácter lineal en la Fermat X_{21}^4 , pero si logra ser un carácter de Hodge.

El teorema [3.7.6](#) nos permite reducir el estudio a encontrar $\mathcal{E}^n \subseteq \mathbb{N}^{\geq 4}$, pues en tal caso se deduce $\mathcal{E}_m^n \subseteq \mathcal{E}^n$ con una búsqueda finita.

La siguiente sección será dedicada a encontrar $\mathcal{E}_m^2$: usaremos el vector test

$$\alpha_0 = (1, -b, \dots, (-b)^{n+1}) \pmod{e}$$

que enuncia el teorema [3.7.5](#) y vamos a aprovechar que $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{F})$ es bien entendida. En la Sección [3.9](#) lo combinaremos con un análisis computacional para conjeturar los conjuntos excepcionales $\mathcal{E}_m^n$ hasta $n = 8$.

3.8. Clasificación completa de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$

La clasificación de los caracteres de Hodge en superficies de Fermat fue completada por Aoki mediante una descripción explícita y exhaustiva del conjunto $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{F})$ en caracteres descomponibles, regularmente indescomponibles y excepcionales. Esta clasificación constituye el caso en que la estructura general se vuelve completamente explícita y, por ello, permite conectar de manera precisa los fenómenos aritméticos observados en Klein con la teoría conocida en Fermat. En particular, veremos que la componente excepcional en Klein se corresponde con los caracteres excepcionales en Fermat, lo que muestra que esto no es una coincidencia notacional, sino una relación estructural profunda entre ambas familias.

Como ya hemos visto, hay una familia evidente que aparecen en Fermat que son los caracteres lineales:

$$\mathfrak{D}_m^2 = \{\alpha \sim (a, m-a, b, m-a)\},$$

los cuales se conocen como la parte *descomponible* de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{F})$.

También surge otra familia que aparecen naturalmente (cf. teorema [2.6.3](#)), estos son permutaciones de

- $(a, m/2, m/2 + a, -2a)$
- $(a, m/2 + a, m/2 + 2a, -4a)$
- $(a, m/3 + a, 2m/3 + a, -3a)$

para valores de $a \in \mathbb{Z}$ de modo que estos no sean descomponibles y con coordenadas no nulas, estos serán llamados la parte *regularmente indescomponibles* de $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{F})$.

Proposición 3.8.1. *Si $e \mid d$, entonces $[\alpha_0]_e = [(1, -b, b^2, -b^3)]_e$ no es regularmente indescomponible en $\mathfrak{B}_e^2(\mathcal{F})$.*

Demostración. Dado que $D = dm$ y

$$(D, b) = (b^4 - 1, b) = (-1, b) = 1,$$

se sigue que $(e, b) = 1$. De este modo,

$$[\alpha_0]_e = (1, g, g^2, g^3),$$

para $g = -b \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$, en particular, todas las coordenadas son unidades módulo e .

Si $[\alpha_0]_e \sim (a, e/2, e/2 + a, -2a)$ entonces $[e]_2 = 0$, pero $-2a$ contiene un factor de 2 por lo que no puede ser una unidad módulo e .

Los otros dos casos se razona idénticamente. □

Finalmente, los caracteres de Hodge en superficies de Fermat que no son descomponibles ni regularmente indescomponibles son llamados *excepcionales*, estos forman una lista finita y conocida de 22080 elementos (véase [8]).

Más aún, estos aparecen en $\mathfrak{B}_e^2(\mathcal{F})$ hasta $e \leq 180$. Esta cota explícita permite obtener todos los elementos de $\mathcal{E}^2$ tras una búsqueda computacional finita: fijamos $e \leq 180$ y recorremos cada $m \in \{3, \dots, 179\}$, se comprueba las condiciones

$$e \mid d, \quad [\alpha_0]_e \in \mathfrak{B}_e^2(\mathcal{F}), \quad e \nmid Q_h \quad \forall h$$

y en caso positivo agregamos e a $\mathcal{E}^2$ y $m \in S_e$. La cota teórica permite asegurar que el conjunto $\mathcal{E}_m^2$ está completo al finalizar.

El conjunto obtenido es el esperado: $\mathcal{E}^2 = \{20, 30, 60, 120\}$, y las condiciones modulares también es consistente. Mostramos explícitamente los caracteres excepcionales en Fermat

X_m^2 , estos se reducen a 5 elementos de la lista de 22080 de caracteres excepcionales:

$$\begin{aligned}
v_1 \sim (1, 17, 9, 13) &= (1, -3, 3^2, -3^3) \in \mathfrak{B}_{20}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 4 \\
v_1 \sim (1, 13, 9, 17) &= (1, -7, 7^2, -7^3) \in \mathfrak{B}_{20}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 8 \\
v_2 \sim (1, 23, 19, 17) &= (1, -7, 7^2, -7^3) \in \mathfrak{B}_{30}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 4 \\
v_2 \sim (1, 17, 19, 23) &= (1, -13, 13^2, -13^3) \in \mathfrak{B}_{30}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 8 \\
v_3 \sim (1, 53, 49, 17) &= (1, -7, 7^2, -7^3) \in \mathfrak{B}_{60}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 8 \\
v_3 \sim (1, 17, 49, 53) &= (1, -43, 43^2, -43^3) \in \mathfrak{B}_{60}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 44 \\
v_4 \sim (1, 47, 49, 23) &= (1, -13, 13^2, -13^3) \in \mathfrak{B}_{60}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 14 \\
v_4 \sim (1, 23, 49, 47) &= (1, -37, 37^2, -37^3) \in \mathfrak{B}_{60}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 38 \\
v_5 \sim (1, 107, 49, 83) &= (1, -13, 13^2, -13^3) \in \mathfrak{B}_{120}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 14 \\
v_5 \sim (1, 83, 49, 107) &= (1, -37, 37^2, -37^3) \in \mathfrak{B}_{120}^2(\mathcal{F}) \rightarrow m = 38
\end{aligned}$$

esto permite concluir el siguiente resultado.

Teorema 3.8.2. *El conjunto excepcional de la superficie de Klein Y_m^2 es*

$$\mathcal{E}_m^2 = \{20_{([m]_{20}=4,8)}, 30_{([m]_{30}=8,14)}, 60_{([m]_{60}=8,14,38,44)}, 120_{([m]_{120}=14,38)}\},$$

y en particular,

$$\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K}) = \{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \setminus \{0\} : d_1 \mid i \vee d_4 \mid i\} \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m^2} \frac{d}{e} \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$$

El resultado anterior prueba finalmente que el teorema [3.3.8](#) es una igualdad en cada caso. Las órbitas excepcionales son organizadas por el teorema [3.7.6](#), esto último implica inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 3.8.3. *El número de Picard de la superficie de Klein Y_m^2 es*

$$\begin{aligned}
\rho(Y_m^2) &= m^2 - m + \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m \text{ impar} \\ 0, & \text{otro caso} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(20), & m = 4, 8 \pmod{20} \\ 0, & \text{otro caso} \end{array} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(30), & m = 8, 14 \pmod{30} \\ 0, & \text{otro caso} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(60), & m = 8, 14, 38, 44 \pmod{60} \\ 0, & \text{otro caso} \end{array} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(120), & m = 14, 38 \pmod{120} \\ 0, & \text{otro caso} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

La descripción completa de $\mathcal{E}_m^2$ nos da el siguiente corolario.

Corolario 3.8.4. *La conjetura de Hodge se satisface en la superficie de Klein Y_m^2 usando ciclos lineales provenientes de la superficie de Fermat X_D^2 , si y solo si,*

$$m \neq 4, 8, 14, 24, 28, 38, 44, 48, 64, 68, 74, 84, 88, 98, 104, 108 \pmod{120}$$

Observación 3.8.5. *El corolario [3.8.3](#) coincide con resultados actuales sobre el cálculo del número de Picard de superficies de tipo Delsarte, véase especialmente [\[8\]](#). El método es basado en el trabajo de Shioda en [\[14\]](#) donde se enuncia $\rho(Y_m^2)$ como en [3.8.3](#) pero omitiendo el último paréntesis, lo que es corregido en publicaciones posteriores.*

El caso de superficies queda completamente resuelto lo que cierra la discusión de la Sección [3.3](#) y deja planteado el problema natural en dimensiones superiores. En la siguiente sección recurrimos a cálculos computacionales para encontrar elementos en $\mathcal{E}_m^n$ para $n \leq 8$ y mostramos más casos explícitos donde la conjetura de Hodge queda verificada en la hipersuperficie de Klein Y_m^n .

3.9. Conjunto excepcional $\mathcal{E}_m^n$ para $n \geq 4$ por búsqueda computacional

Una vez establecida la estructura teórica de la componente trivial y las órbitas excepcionales en Klein, queda la pregunta: ¿hasta qué punto la lista de denominadores excepcionales $\mathcal{E}_m^n$ puede completarse de manera efectiva en dimensiones superiores? En el caso de superficies, la clasificación de Aoki permite cerrar completamente el problema; sin embargo, para $n \geq 4$ la situación es considerablemente más compleja y no parece admitir una descripción tan inmediata. Por este motivo, en esta sección recurrimos a una búsqueda computacional para identificar los valores de $e \in \mathcal{E}^n$ con ayuda del teorema [3.7.5](#) y la proposición [3.7.3](#).

Aoki establece en [\[1\]](#) una teoría más general sobre $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{F})$, extendiendo la noción de caracteres excepcionales en dimensión superior pero con el coste de no poder asegurar finitud. Observar que la finitud de los caracteres de Hodge en superficies de Fermat implica inmediatamente que $\mathcal{E}^2$ también lo es, pero es importante notar que desde la lista de 22080 solo 5 de ellos provienen de la estructura de Klein, esto sugiere que, incluso si no hubiera finitud de la parte excepcional en X_D^n con $n \geq 4$, la rígida estructura de Klein puede forzar que $\mathcal{E}^n$ sea finito.

Recordamos que en la Sección [3.4](#) calculamos explícitamente $\mathfrak{B}_m^n(\mathcal{K})$ hasta $m \leq 54$, y con ello se obtuvo parcialmente que

$$\mathcal{E}_m^4 = \{14_{([m]_{14}=4,6)}, 21_{([m]_{21}=3,12)}, 28_{([m]_{28}=6,18)}, 39_{([m]_{39}=5,11)}, 42_{([m]_{42}=6,12,18,20,24,32)}, \dots\}$$

encontrando divisores excepcionales hasta $e = 168$. En lugar de recorrer en el grado, se hará una búsqueda directa sobre $e \geq 4$ y sobre $m < e$ para verificar

$$e \mid d \quad \wedge \quad e \nmid Q_h \quad \wedge \quad [\alpha_0]_e \in \mathfrak{B}_e^n(\mathcal{F}).$$

Esto nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 3.9.1. *Con una búsqueda hasta $e \leq 20000$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m^4 &\supseteq \{14_{([m]_{14}=4,6)}, 21_{([m]_{21}=3,12)}, 28_{([m]_{28}=6,18)}, 39_{([m]_{39}=5,11)}, 42_{([m]_{42}=6,12,18,20,24,32)}, \dots \\ &\dots 78_{([m]_{78}=18,24,30,36,44,50)}, 84_{([m]_{84}=6,18)}, 126_{([m]_{126}=32,62)}, 156_{([m]_{156}=18,102)}, \dots \\ &\dots 168_{([m]_{168}=18,90)}, 210_{([m]_{210}=102,132)}\} \\ \mathcal{E}_m^6 &\supseteq \{20_{([m]_{20}=4,8)}, 30_{([m]_{30}=8,14)}, 60_{([m]_{60}=8,14,38,44)}, 102_{([m]_{102}=20,26,44,50)}, \dots \\ &\dots, 120_{([m]_{120}=14,38)}, 170_{([m]_{170}=54,78,84,128)}, 204_{([m]_{204}=20,44,128,152)}, 510_{([m]_{510}=128,224,248,254)}\} \\ \mathcal{E}_m^8 &\supseteq \{33_{([m]_{33}=8,14,20,29)}, 55_{([m]_{55}=5,10,15,50)}, 62_{([m]_{62}=16,24,28,30)}, 66_{([m]_{66}=8,14,20,62)}, \dots \\ &\dots, 110_{([m]_{110}=10,20,30,40,42,50,52,60,62,70,80,102)}, 124_{([m]_{124}=30,78,86,90)}, 186_{([m]_{186}=86,92,140,152)}, \dots \\ &\dots, 220_{([m]_{220}=30,130,150,190)}, 330_{([m]_{330}=20,80,140,260)}, 363_{([m]_{363}=41,95,113,119)}, \dots \\ &\dots, 682_{([m]_{682}=214,334,340,512)}, 726_{([m]_{726}=404,458,476,482)}, 2046_{([m]_{2046}=512,896,1016,1022)}\} \end{aligned}$$

La evidencia computacional es suficientemente robusta como para conjeturar que $\mathcal{E}_m^4, \mathcal{E}_m^6$ y $\mathcal{E}_m^8$ están completas. La búsqueda también fue realizada para $n = 10$ obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{10} &\supseteq \{14, 20, 21, 28, 30, 39, 42, 52, 60, 70, 78, 84, 90, 105, 120, 126, 140, 155, 156, 168, 180, 182, 195, \dots \\ &\dots, 210, 234, 280, 310, 360, 390, 420, 546, 620, 630, 910, 1170, 1638, 2730, 8190\} \end{aligned}$$

junto con cada conjunto S_e .

El coste de calcular $\mathcal{E}_m^n$ variando m es muy distinto del de variar e , y cada enfoque tiene consecuencias diferentes. En la Sección [3.4](#) calculamos explícitamente $\mathcal{E}_m^4$ hasta $m \leq 54$, obteniendo así el corolario [3.6.13](#), aunque sin detectar divisores excepcionales como $e = 210$. En cambio, al variar e aparecen rápidamente los elementos $e_{([m]_e \in S_e)} \in \mathcal{E}_m^4$, y es posible explorar hasta $e \leq 20000$; la desventaja evidente de este segundo enfoque es que no garantiza que $\mathcal{E}_m^4$ esté completa.

Una estrategia natural consiste en encontrar una cota para $\mathcal{E}^n$ y combinarla con el análisis computacional anterior. Asumiendo la forma de $\mathcal{E}_m^4$ descrita previamente, denotamos

$$N = \gcd\{e : e \in \mathcal{E}^4\} = 32760,$$

y sea $S \subseteq \{1, \dots, N-1\}$ el conjunto de residuos para los cuales $\mathcal{E}_m^n = \emptyset$. Entonces se verifica que $|S| = 22800$, y por tanto

$$Y_m^4 \text{ satisface la conjetura de Hodge si } [m]_N \in S,$$

aunque por el momento este resultado sigue siendo conjetural.

Los resultados efectivos obtenidos son los siguientes. El Corolario [3.6.13](#), que volvemos a enunciar por completitud:

Teorema 3.9.2. *La conjetura de Hodge en la 4-variedad de Klein Y_m^4 se verifica para*

$$m = 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 47, 49, 51, 52, 53,$$

con ciclos algebraicos provenientes de ciclos lineales en la 4-variedad de Fermat X_D^4 .

De modo análogo, calculamos explícitamente $\mathcal{E}_m^6$ hasta $m \leq 19$, obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 3.9.3. *La conjetura de Hodge en la 6-variedad de Klein Y_m^6 se verifica para*

$$m = 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19,$$

con ciclos algebraicos provenientes de ciclos lineales de la 6-variedad de Fermat X_D^6 .

Y recordamos que desde la condición $\gcd(D, (n+2)!) = 1$ podemos deducir el siguiente resultado (ver teorema [3.6.10](#) y observación [3.6.11](#)).

Teorema 3.9.4. *La conjetura de Hodge en la hipersuperficie de Klein Y_m^n se satisface en los siguientes casos:*

- $(n = 4) \longrightarrow m \equiv 1, 13, 19 \pmod{30}$
- $(n = 6) \longrightarrow m \equiv 1, 31, 61, 151, 181 \pmod{210}$
- $(n = 8) \longrightarrow m \equiv 1, 13, 19, 31, 43, 61, 73, 103, 109, 139, 151, 169, 181, 193, 199 \pmod{210}$
- $(n = 10) \longrightarrow m \equiv 1, 421, 631, 841, 1051, 1261, 1471, 1681, 1891 \pmod{2310}$

Es fácil comprobar que los valores de m en el teorema [3.9.4](#) no satisface ninguna condición modular de los conjuntos excepcionales $\mathcal{E}_m^n$, lo que resulta consistente con la teoría.

Conclusiones y discusión

En esta tesis se estudió la conjetura de Hodge en hipersuperficies de Klein a partir de su relación con las hipersuperficies de Fermat. El enfoque adoptado permitió trasladar la descomposición espectral de Shioda al contexto de Klein mediante un cubrimiento monomial, lo que hizo posible describir la estructura de los caracteres de Hodge en términos aritméticos explícitos. En particular, se determinó completamente $\mathfrak{B}_{\text{trivial}}^{m,n}(\mathcal{K})$ y el problema quedó reducido al análisis de la componente excepcional $\mathcal{E}_m^n$. Esta reducción tiene aplicaciones tanto teóricas como computacionales.

Los resultados alcanzados cumplen el objetivo inicial de la tesis: se formuló una teoría análoga a la de Fermat para el caso de Klein y se dejó planteado un método efectivo para determinar familias de hipersuperficies de Klein donde la conjetura de Hodge se satisface, basta determinar $\mathcal{E}^n$ e imponer la condición $\mathcal{E}_m^n = \emptyset$.

La estrategia desarrollada permitió obtener nuevos casos en los que la hipersuperficie de Klein Y_m^n satisface la conjetura de Hodge en las dimensiones $n = 4$ y $n = 6$. Asimismo, se determinó completamente $\mathcal{E}^2$, lo que implica inmediatamente resultados clásicos sobre superficies de Klein, como el cálculo del número de Picard. Sin embargo, el alcance de nuestro método es más amplio: la descripción explícita de $\mathcal{E}_m^2$ determina completamente el conjunto $\mathfrak{B}_m^2(\mathcal{K})$, y con ello la descomposición espectral de

$$(H_{\text{prim}}^{1,1}(Y_m^2) \cap H^2(Y_m^2, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

En particular, el número de Picard aparece solo como una consecuencia numérica de una descripción estructural más precisa. Esto contrasta con el enfoque clásico para superficies de tipo Delsarte basado en el cubrimiento monomial y la teoría de Shioda, donde típicamente se obtiene la dimensión del espacio de clases de Hodge mediante el conteo de levantamientos, mientras que aquí se recupera explícitamente la estructura de la componente de Hodge correspondiente.

La evidencia obtenida sugiere además que la componente excepcional $\mathcal{E}^n$ es finita y está gobernada por números con una estructura aritmética muy restrictiva, contruidos a partir

de primos pequeños y potencias bajas. Este fenómeno indica que la excepcionalidad en Klein responde a una lógica modular fina, comparable en espíritu a la que Aoki obtuvo para las superficies de Fermat.

En cuanto al trabajo futuro, el caso más natural es el de $n = 4$. Se conjetura que la lista hallada para $\mathcal{E}^4$ podría estar completa, y un objetivo razonable consiste en demostrarlo por métodos algebraicos explícitos, aprovechando la rigidez de los levantamientos de caracteres en Klein. Queda también pendiente probar la finitud de $\mathcal{E}^n$ en general.

Bibliografía

- [1] N. Aoki, *On Some Arithmetic Problems Related to the Hodge Cycles on the Fermat Varieties*, *Math. Ann.* **266** (1983), 23–54.
- [2] A. Degtyarev, I. Itenberg and J. C. Ottem, *Planes in cubic fourfolds*, arXiv preprint arXiv:2105.13951 (2021).
- [3] J. Duque Franco and R. Villafior Loyola, *On fake linear cycles inside Fermat varieties*, *Algebra & Number Theory* **17** (2023), no. 10, 1847–1865.
- [4] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals*, *Annals of Mathematics*, Second Series **90** (1969), no. 3, 460–541.
- [5] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
- [6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Mathematics* **52**, Springer, 1977.
- [7] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] B. Heijne, *Picard numbers of complex Delzarte surfaces with only isolated ADE-singularities*, *J. Math. Soc. Japan* **68** (2016), no. 1, 101–118.
- [9] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves*, *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [10] H. Matsumura and P. Monsky, *On the automorphisms of hypersurfaces*, *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963), no. 3, 347–361.
- [11] M. Schütt, *Lines on Fermat surfaces*, arXiv preprint arXiv:0812.2377, 2008.
- [12] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, *Annales de l’Institut Fourier* **6** (1956), 1–42.
- [13] T. Shioda, *The Hodge Conjecture for Fermat Varieties*, *Math. Ann.* **245** (1979), no. 2, 175–184.

- [14] T. Shioda, *An explicit algorithm for computing the Picard number of certain algebraic surfaces*, *Amer. J. Math.* **108** (1986), no. 2, 415–432.
- [15] T. Terasoma, *Lines in Fermat hypersurface and $M_{0,n}$* , Conference notes (Hokkaido, 2009). Available online: <https://www.mathsoc.jp/meeting/msjsi09/files/terasoma/hokudai2009.pdf>
- [16] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry II*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **77**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [17] C. Voisin, *On integral Hodge classes on uniruled or Calabi–Yau threefolds*, In: *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **45**, Mathematical Society of Japan, 2006, 43–73.
- [18] C. Voisin, *Abel–Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal*, *J. Algebraic Geom.* **22** (2013), 141–174.
- [19] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **76**, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.