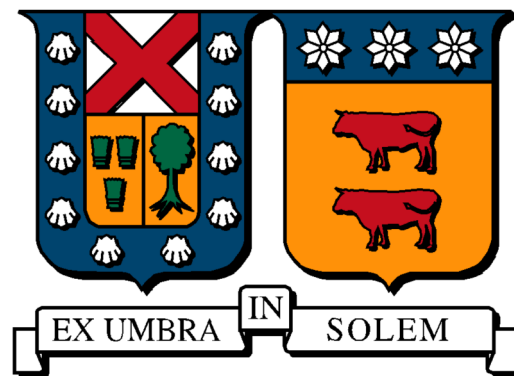


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA



Análisis de estabilidad en cuerda para pelotones de vehículos con canales de comunicación afectados por ruido aditivo

Tesis de grado presentada por
Marco Anthony Gordon Almeida

Como requisito parcial para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Supervisor
Francisco J. Vargas, Ph.D.

Valparaíso, 19 de junio de 2023

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
Departamento de Ingeniería Electrónica

Análisis de estabilidad en cuerda para pelotones de vehículos con canales de comunicación afectados por ruido aditivo

Tesis de grado presentada por
Marco Anthony Gordon Almeida

Como requisito parcial para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Supervisor
Francisco J. Vargas, Ph.D.

Valparaíso, 19 de junio de 2023

Tesis:

Análisis de estabilidad en cuerda para pelotones de vehículos con canales de comunicación afectados por ruido aditivo

Autor:

Marco Anthony Gordon Almeida

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

Supervisor,

Francisco J. Vargas, Ph.D.

Revisor Interno,

Juan C. Agüero, Ph.D.

Revisor Externo,

Karina A. Barbosa, Ph.D.

(Universidad de Santiago de Chile)

Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de familiares, profesores, amigos y el financiamiento que he recibido por parte de instituciones.

Para empezar, me gustaría reconocer el cariño incondicional y el soporte anímico que ha sido mi familia. A pesar de la distancia, mis padres, Cecilia y Jorge, y mi hermana Gabriela, han encontrado la forma de apoyarme con sus palabras de ánimo, consejos y buenos deseos. Agradezco su esfuerzo en virtud de mi bienestar y preparación académica.

Un especial agradecimiento va dirigido a Francisco Vargas, quien ha sido un excelente profesor, tutor, además de un amigo. Su paciencia y conocimientos son de gran admiración y han guiado e inspirado mi camino en este mundo de la investigación.

También, quisiera agradecer a Andrés Peters y Alejandro Maass con quienes he colaborado y cuya contribución ha sido valiosa a la hora de entregar un trabajo de investigación de calidad.

Agradezco a la Universidad Técnica Federico Santa María, por haberme acogido como parte de su programa de posgrado. Además, fueron quienes, a través del programa de becas internas financiaron mi primer año de estudios (2019-2020).

Agradezco a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, ANID, quienes a través de la Beca Doctorado Nacional , N° folio 21202404, financian mis estudios de investigación desde el año 2020.

En general, un agradecimiento a todos mis profesores del posgrado, amigos y compañeros del laboratorio Fourier, con quienes he compartido mi tiempo y me han apoyado en mi camino académico.

Contenido

Resumen	iii
Símbolos y Acrónimos	iv
Lista de Figuras	vi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación	1
1.2 Estado del arte	3
1.3 Principales contribuciones	6
1.4 Publicaciones asociadas	7
1.5 Organización de la tesis	7
2 PRELIMINARES Y GENERALIDADES SOBRE PELOTONES	8
2.1 Notación	8
2.1.1 Matrices y vectores	8
2.1.2 Funciones clase \mathcal{K} , normas y factorización espectral	9
2.1.3 Procesos estocásticos	11
2.2 Caracterización de un pelotón de vehículos	14
3 ESTABILIDAD EN CUERDA PARA PELOTONES ESTOCÁSTICOS	17
3.1 Nociones de estabilidad en cuerda para pelotones determinísticos	17
3.1.1 Señales de interés	17
3.1.2 Definiciones de estabilidad en cuerda para configuraciones determinísticas	18
3.2 Estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos	22
3.2.1 Condiciones de estabilidad en cuerda y sus métodos de análisis	24
4 CONDICIONES DE ESTABILIDAD EN CUERDA PARA UN PELOTÓN CON CANALES AFECTADOS POR RUIDO ADITIVO	25
4.1 Descripción del sistema	25
4.1.1 Representación en espacio de estados	29
4.2 Análisis de convergencia en el tiempo ($k \rightarrow \infty$)	31
4.3 Análisis de convergencia en el número de vehículos ($N \rightarrow \infty$)	32
4.4 Análisis de estabilidad en cuerda	33
4.5 Resultados de simulación	35

5 ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DEL RUIDO EN EL PRIMER AGENTE	39
5.1 Representación en espacio de estados	39
5.2 Análisis de convergencia en el tiempo ($k \rightarrow \infty$)	40
5.3 Análisis de convergencia en el número de vehículos ($N \rightarrow \infty$)	41
5.4 Análisis de estabilidad en cuerda	43
5.5 Resultados de simulación	44
6 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	46
APÉNDICES	47
A Demostración del Lema 1	47
B Demostración del Lema 2	48
C Demostración del Teorema 2	50
D Demostración del Corolario 1	52
E Demostración del Teorema 3	53
F Demostración del Lema 3	56
G Demostración del Lema 4	57
H Demostración del Teorema 4	59
I Demostración del Corolario 2	60
J Demostración del Teorema 5	61
BIBLIOGRAFÍA	64

Resumen

La propiedad de estabilidad en cuerda de los sistemas interconectados es fundamental en las aplicaciones de pelotones de vehículos. La presente tesis está enfocada en acortar la brecha en la literatura relacionada con la noción de estabilidad en cuerda cuando los fenómenos estocásticos son una parte inherente del problema. El pelotón bajo análisis está formado por vehículos modelados como sistemas lineales, con topología de seguimiento al predecesor, cuya comunicación se lleva a cabo a través de canales afectados por ruido blanco aditivo. Las dos principales contribuciones son: (a) caracterizar la evolución de la media y la varianza del error de seguimiento de cada vehículo, obteniendo así las condiciones necesarias y suficientes que garantizan la estabilidad en cuerda en dicho escenario estocástico y (b) proponer una definición técnica que permita la evaluación analítica de la propiedad de estabilidad en cuerda. Mediante simulaciones se ilustra el comportamiento del pelotón para los casos estable e inestable en cuerda. Dada la generalidad, tanto de la definición propuesta, como de la metodología de estudio, se espera que este trabajo sirva de guía para el análisis de estabilidad en cuerda en diferentes escenarios estocásticos como por ejemplo: pérdida aleatoria de datos, retardos de tiempo aleatorios, entre muchos otros problemas de comunicación.

Palabras clave: estabilidad en cuerda, sistemas multi-agente, estabilidad en sentido cuadrático medio, pelotón de vehículos, ruido aditivo.

Símbolos y acrónimos

A continuación se presenta una lista de los símbolos y acrónimos más usados en la presente tesis. Aquellos símbolos y acrónimos que requieren una definición rigurosa se detallan en la sección de notación, o en su defecto, justo antes de ser necesarios.

a-wss	asintóticamente estacionario en sentido amplio
DARE	ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto
GF	geometría de la formación
i.i.d.	independiente e idénticamente distribuido
ITC	intervalo de tiempo constante
LTI	lineal e invariante en el tiempo
MAS	sistema multi agente
MSS	estabilidad/estable en sentido cuadrático medio
PSD	densidad espectral de potencia
SP	seguimiento al predecesor
TFI	topología del flujo de la información
wss	estacionario en sentido amplio
\triangleq	igual por definición
$ \cdot $	valor absoluto
\in	pertenencia a un conjunto
\cup	unión
\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	números reales
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n veces)
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$
I_n	matriz identidad de dimensiones $n \times n$
A^\top	transpuesta de la matriz A
A^*	conjugado transpuesto de la matriz A
$A \geq 0$	la matriz A es positiva semi-definida
$A > 0$	la matriz A es positiva definida
$diag\{a_1, \dots, a_n\}$	matriz diagonal que contiene a $\{a_1, \dots, a_n\}$ en su diagonal

$\rho(A)$	radio espectral de la matriz A
$\sigma_{max}(A)$	máximo valor singular de la matriz A
$\ x\ _p$	norma p del vector $x \in \mathbb{R}^n$ con $p \in \mathbb{N}$
$\ x\ _\infty$	norma infinito del vector $x \in \mathbb{R}^n$
$\ x(k)\ _{\mathcal{L}_p}$	norma \mathcal{L}_p de la señal vectorial en tiempo discreto $x(k) \in \mathbb{R}^n$
$\ x(k)\ _{\mathcal{L}_\infty}$	norma \mathcal{L} -infinito de la señal vectorial en tiempo discreto $x(k) \in \mathbb{R}^n$
$\ A(k)\ _{\mathcal{L}_p}$	norma \mathcal{L}_p de la matriz variante en el tiempo $A(k)$
$\ A(k)\ _{\mathcal{L}_\infty}$	norma \mathcal{L} -infinito de la matriz variante en el tiempo $A(k)$
$*$	convolución
\bar{h}	respuesta impulso
z	argumento de la transformada Z
$T(z)$	función de transferencia en tiempo discreto
$T(z)^\sim$	corto para $T(z^{-1})^\top$
$\ T(z)\ _\infty$	norma infinito del sistema $T(z)$
\otimes	producto de Kronecker
$vec\{\cdot\}$	operador vectorización
$vec^{-1}\{\cdot\}$	inversa del operador vectorización
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	operador esperanza
$\mu_x(k)$	media al instante k del proceso x
μ_x	media estacionaria del proceso x
$P_x(k)$	matriz de varianza del proceso x al instante k
P_x	matriz de varianza estacionaria del proceso x
$R_x(k + \tau, k)$	función de covarianza del proceso x al instante k
$R_x(\tau)$	función de covarianza estacionaria del proceso x
$\Omega_x(z)$	factor espectral del proceso x
$\phi_x(z)$	densidad espectral de potencia del proceso x
\lim	límite
\max	máximo
\sup	supremo
\mathcal{R}	conjunto de todas las funciones de transferencia racionales reales
\mathcal{R}_p	subconjunto de \mathcal{R} de todas las funciones de transferencia propias
\mathcal{RH}_∞	subconjunto de \mathcal{R}_p de todas las funciones de transferencia estables

Lista de Figuras

1.1	Sistema de pelotones.	2
2.1	Topologías: (a) Seguimiento de predecesor y (b) Seguimiento de líder-predecesor.	15
2.2	(a) Cálculo de la constante time-headway. (b) Gráfico de la posición de dos vehículos viajando a velocidad constante con una separación dependiente de la constante time-headway.	15
3.1	Concatenación de un pelotón determinístico con topología SP.	19
3.2	Comportamiento de un pelotón determinístico.	20
4.1	Esquema de un pelotón homogéneo de tres vehículos con topología SP . . .	25
4.2	Lazo de realimentación para el vehículo en la posición i	27
4.3	Concatenación de un pelotón con canales de ruido aditivo en dos representaciones equivalentes.	28
4.4	Comportamiento de un pelotón con canales afectados por ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales igual a cero.	36
4.5	Comportamiento de un pelotón con canales afectados por ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales diferentes de cero.	37
5.1	Concatenación de un pelotón con perturbación solo en el primer seguidor para (a) posición como entrada, (b) error local como entrada (representación usando el líder virtual).	39
5.2	Comportamiento de un pelotón con ruido en el primer agente. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero.	44
5.3	Comportamiento de un pelotón con ruido en el primer agente. Simulación realizada con condiciones iniciales diferentes de cero.	45

CAPÍTULO



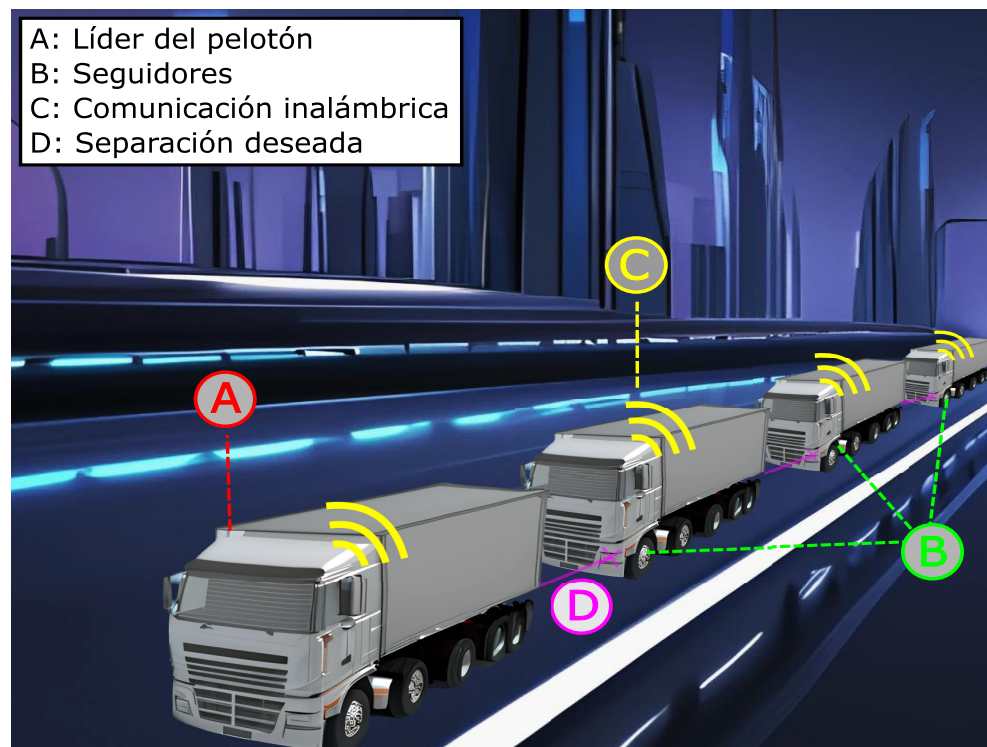
INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

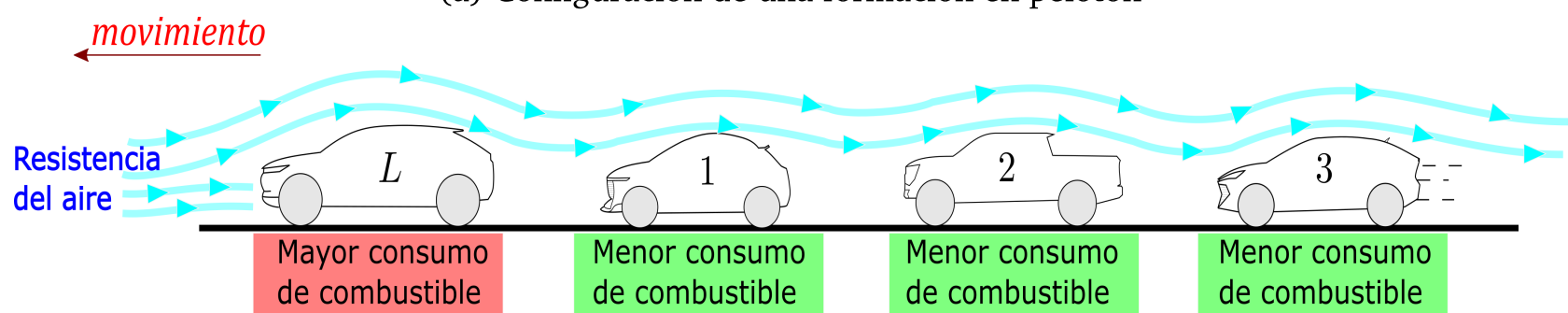
El sistema de transporte por carretera es una actividad crucial para el progreso de las ciudades y sus habitantes. En los últimos años, el creciente número de vehículos, el limitado espacio físico y el deterioro de las condiciones medioambientales han impulsado el desarrollo de nuevas tecnologías de transporte. Una alternativa ampliamente estudiada son los pelotones de vehículos autónomos. Un pelotón es un sistema en el cual varios vehículos viajan uno a continuación del otro a una velocidad constante. Cada vehículo, referido también como un agente, está destinado a seguir a su predecesor inmediato, manteniendo una distancia de separación deseada.

Hoy en día los vehículos autónomos están equipados con sensores a bordo (por ejemplo, sensores lidar, GPS, sensores ultrasónicos y cámaras) que les permiten medir su posición, velocidad, aceleración y proximidad con otros vehículos. En adición a estas mediciones, la tecnología de pelotones incorpora la capacidad de compartir (enviar y recibir) información entre los miembros del pelotón. Así, mediante canales de comunicación inalámbricos, los vehículos se encuentran integrados en un ambiente cooperativo que mejora significativamente el desempeño de la tarea de seguimiento [1, 2] y además permite que los vehículos viajen a una corta distancia de separación, reduciendo así la resistencia del aire [3, 4, 5]. Los beneficios potenciales de una formación en pelotón incluyen: menores emisiones contaminantes, mayor capacidad vial [6], menor congestión vehicular y un consumo eficiente de energía [7, 8, 9]. Adicionalmente, la conducción automatizada reduce el tiempo de respuesta (respecto al frenado y maniobrabilidad), en comparación con la

conducción manual, lo que también supone una importante mejora en la seguridad [10]. En la Figura 1.1a se muestra una típica formación de un pelotón compuesto por un camión líder y tres seguidores. En la Figura 1.1b se muestra cómo una corta distancia de separación entre vehículos permite la reducción de la resistencia del aire y en consecuencia un menor consumo de energía (e.g. combustible en el caso de vehículos de combustión interna).



(a) Configuración de una formación en pelotón



(b) Resistencia del aire y el consumo de energía

Figura 1.1: Sistema de pelotones.

Para obtener los mayores beneficios de esta tecnología se requiere un sistema de control capaz de mantener la menor distancia de separación entre vehículos, como sea posible, siempre y cuando no se comprometa la seguridad del pelotón. Con el objetivo de garantizar un buen desempeño en la tarea de seguimiento y a su vez evitar posibles colisiones entre vehículos, es importante asegurar que cualquier efecto adverso, ocasionado por algún tipo de perturbación (por ejemplo un cambio de velocidad), no se amplifique a lo largo de la cadena de vehículos. La aparición de dicho efecto perjudicial se evita garantizando la propiedad conocida como *estabilidad en cuerda* [11, 12]. Esta propiedad es exclusiva de los sistemas multi-agente, y además es uno de los principales problemas de estudio en pelotones ya que involucra al desempeño del pelotón y la seguridad del mismo.

La estabilidad en cuerda ha sido ampliamente estudiada para pelotones con canales de comunicación ideales. Sin embargo, en aplicaciones reales, la comunicación entre vehículos podría verse afectada por diversos fenómenos aleatorios, como por ejemplo, pérdida de datos, ruido, retardos, entre otros. La inclusión de aleatoriedad da origen a los denominados pelotones estocásticos, en cuyo caso, el estudio de la estabilidad en cuerda permanece poco explorado. Es importante señalar que los resultados de estabilidad en cuerda que se han propuesto para pelotones ideales, no se pueden aplicar cuando se consideran fenómenos aleatorios. Por tanto, es necesario proponer nuevas definiciones y métodos de análisis que sean aplicables a configuraciones estocásticas. Una revisión del estado del arte deja en claro la falta de una definición propia de estabilidad en cuerda estocástica. Además, casos como pelotones con canales afectados por ruido, no han sido explorados, a pesar de ser muy comunes en aplicaciones reales. Con esta motivación, en la presente tesis se estudia la estabilidad en cuerda de un pelotón cuyos canales de comunicación se ven afectados por ruido aditivo. La principal contribución consiste en derivar las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el pelotón bajo análisis es estable en cuerda. En el marco de este análisis, además se propone una definición de estabilidad en cuerda estocástica, misma que tiene por objetivo orientar a futuros estudios que aborden diferentes problemas de comunicación.

1.2 Estado del arte

Un pelotón considera el estudio de un conjunto de vehículos autónomos que viajan juntos de manera coordinada para optimizar el uso de las vías, el consumo de energía y mejorar las condiciones de seguridad [13, 14]. La teoría de control respecto a pelotones comenzó hace décadas [15, 16, 17, 18] y ha despertado un gran interés en la comunidad investigadora debido a los avances en la navegación autónoma de los últimos años [2, 19]. Por ejemplo, la tecnología de control crucero cooperativo y adaptativo (CACC) ha permitido que los vehículos viajen a velocidades predefinidas, manteniendo distancias fijas entre vehículos, en su mayoría gracias a la información compartida entre agentes a través de comunicación inalámbrica [20].

El principal desafío de control en CACC consiste en mantener las distancias de separación deseadas, mientras se asegura la estabilidad en cuerda. La propiedad de estabilidad en cuerda garantiza que el efecto perjudicial de las perturbaciones no se amplifique a lo largo de la cadena de vehículos, permitiendo un comportamiento adecuado del sistema, independientemente del número de vehículos que componen el pelotón. Debido a su importancia, la estabilidad en cuerda ha sido ampliamente estudiada para varias configuraciones de pelotones, como se resume en [21, 22]. La mayoría de estos resultados

se basan en la suposición de una comunicación perfecta entre vehículos [23, 18], o suponen problemas determinísticos en la comunicación, como el caso de retrasos determinísticos, o el efecto del muestreo [24, 25, 26, 27]. Sin embargo, en aplicaciones reales, los enlaces inalámbricos no están exentos a problemas, especialmente cuando los miembros de la red están en constante movimiento y en ambientes cambiantes. Dado que el sistema de control de cada vehículo utiliza la información enviada por su predecesor, la calidad del canal de comunicación juega un papel importante en el desempeño de la tarea de seguimiento y la estabilidad en cuerda del pelotón.

Los estudios de estabilidad en cuerda se enfocan principalmente en derivar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el error de seguimiento satisface una determinada definición de estabilidad en cuerda. Si bien la estabilidad en cuerda para sistemas determinísticos (pelotones con canales de comunicación ideales) tiene varias definiciones [21] y se ha estudiado ampliamente (ver, por ejemplo [12, 28, 29, 30]), actualmente hay pocos resultados analíticos que proporcionan condiciones para diseñar esquemas CACC en entornos estocásticos. Esto se debe principalmente a que la noción de estabilidad en cuerda estocástica aún no se ha explorado a fondo. Los primeros acercamientos sobre estabilidad en cuerda estocástica se pueden encontrar en [31, 32]. No obstante, existe un interés creciente por estudiar pelotones que involucran fenómenos de aleatoriedad, aunque dichos estudios se han abordado (en su mayoría) de forma numérica, y se basan en observar si las estadísticas de los errores de seguimiento muestran un comportamiento estable en cuerda o no, más que aplicando un enfoque analítico bien definido [33, 34, 35].

El problema de comunicación que más atención ha recibido por parte de los investigadores es la pérdida aleatoria de datos. Sin embargo, en la mayoría de estos estudios, el análisis de estabilidad en cuerda estocástica está restringido [36, 37, 38] o ausente [39, 40, 41]. Por ejemplo, en [41] se lleva a cabo un análisis de estabilidad en cuerda, basado en simulación, que estudia la convergencia de la media del error de seguimiento, pero excluye el análisis de la varianza del error de seguimiento. Los trabajos [42, 38] establecieron a través de estudios de simulación que la pérdida de datos tiene, en general, un efecto negativo en las propiedades de estabilidad en cuerda, el cual se ve reflejado en el comportamiento de las estadísticas de segundo orden (media y varianza) del error de seguimiento. En [43] se estudia el efecto de diferentes estrategias de compensación para hacer frente a la pérdida de datos, y se concluye que la elección de dichas estrategias tiene consecuencias directas sobre la estabilidad en cuerda del pelotón. Los trabajos [44, 45] discuten, con simulaciones y resultados experimentales, los beneficios de usar control predictivo (MPC) y el filtrado de Kalman, para hacer frente a la pérdida de datos. En [46], se presenta una definición de estabilidad en cuerda basada en la norma \mathcal{L}_2 y se utiliza para diseñar un esquema de control que permite lidiar con canales de desvanecimiento y pérdida de datos.

La metodología para estudiar la convergencia en el tiempo en pelotones estocásticos es el uso de la estabilidad en sentido cuadrático medio (MSS), comúnmente adoptada para estudiar sistemas dinámicos donde están involucrados procesos aleatorios [47, 48, 49]. En términos generales, un pelotón estocástico es estable en sentido cuadrático medio si la potencia del error de seguimiento no se amplifica cuando el tiempo tiende a infinito [48, 50, 36]. Esto último además garantiza la existencia de valores estacionarios de las estadísticas de segundo orden. Por ejemplo, en [48] el controlador está diseñado para lograr la convergencia en sentido cuadrático medio del error de posición y el error de velocidad. Los autores de [37] proponen una definición analítica de estabilidad en cuerda en términos del segundo momento de las señales de interés. El diseño de control propuesto en [51] minimiza la varianza del error y logra una estabilidad en cuerda definida en términos de la trayectoria esperada del pelotón. En [52], los autores presentan condiciones analíticas para la estabilidad en sentido cuadrático de pelotones sujetos a pérdida de datos, y establecen que tales condiciones son necesarias para la estabilidad en cuerda, pero no suficientes. También se observa en [52] que, en algunos casos, la media del error de seguimiento puede presentar un comportamiento estable de cadena, pero la varianza correspondiente puede no hacerlo.

El efecto de los retardos aleatorios en un pelotón se ha estudiado en [33, 35, 53, 54, 55, 27], donde se proponen diferentes formas de abordar dicho problema. Sin embargo, de los trabajos antes mencionados, solo [53] presenta una definición analítica de estabilidad en cuerda considerando la naturaleza estocástica del problema. Esta noción se denomina estabilidad en cuerda $n\sigma$ y tiene como objetivo garantizar que el comportamiento estacionario del pelotón (alrededor de la media) permanezca dentro de una vecindad de radio n veces la desviación estándar σ . En este estudio además se destaca que, debido a la no linealidad de la dinámica de la covarianza, esta no proporciona una relación directa entre la entrada y la salida, como sí sucede con la dinámica de la media.

Al contrario de los problemas de comunicación anteriores, considerar canales afectados por ruido blanco aditivo, en el contexto de pelotones es, hasta donde se conoce, un tema inexplorado, excepto por el trabajo en [56], mismo que es parte de esta tesis. Esto es sorprendente, dado que este tipo de problemas de comunicación son una parte fundamental del análisis de la comunicación inalámbrica [57], cuyo efecto en los problemas de control también ha sido ampliamente estudiado, por ejemplo, en [58, 59, 60, 61]. Es importante mencionar que las definiciones de estabilidad en cuerda que se han propuesto para pelotones con problemas de comunicación, no se pueden aplicar directamente cuando existen canales de ruido aditivo. Esto último debido a la particular forma de convergencia de la varianza del error de seguimiento, como se discute mediante resultados de simulación en [56].

1.3 Principales contribuciones

Esta tesis tiene como objetivo analizar las condiciones de estabilidad en cuerda en pelotones con canales de comunicación afectados por ruido aditivo. Además, se busca cerrar parte de la brecha con respecto al tratamiento analítico de la estabilidad en cuerda en entornos estocásticos, proporcionando una definición técnica que puede ser utilizada en una amplia gama de configuraciones de pelotones.

Las dos principales contribuciones de esta tesis se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Se propone el concepto de estabilidad en cuerda en base a la media del error de seguimiento, con norma \mathcal{L}_p , y la varianza del error de seguimiento, con norma \mathcal{L}_q . Esta definición se combina con la estabilidad en sentido cuadrático medio y permite formular la definición final de *estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio*. Estas definiciones capturan la esencia de la noción determinística de estabilidad en cuerda, pero son lo suficientemente generales como para aplicarse a una amplia gama de problemas de formación de pelotones con fenómenos estocásticos, incluidos diferentes tipos de problemas de comunicación (por ejemplo, retardos aleatorios, pérdida aleatoria de datos, canales con desvanecimiento o restricciones de la relación señal-ruido), topologías de flujo de información, políticas de espaciado y modelos de vehículos. En general, estas nociones son válidas para aplicaciones en sistemas multiagente (MAS), donde sea necesario analizar el comportamiento de estabilidad en cuerda [62].
2. Aplicando la noción propuesta de estabilidad en cuerda estocástica, se analiza el caso de un pelotón homogéneo con una topología predecesor-seguidor, política de separación de intervalo de tiempo constante, y cuya comunicación entre vehículos se realiza a través de canales afectados por ruido blanco aditivo. Los vehículos se modelan como sistemas lineales e invariantes en el tiempo, descritos en una configuración de tiempo discreto. Bajo la configuración de pelotón mencionada, la principal contribución de esta tesis es la obtención de las condiciones necesarias y suficientes que garantizan la estabilidad en cuerda (bajo la definición propuesta). En particular, dichas condiciones aseguran que las estadísticas de segundo orden del error de seguimiento convergen cuando el tiempo tiende a infinito y cuando el número de vehículos tiende a infinito. De igual manera, se espera que estos resultados y la metodología de análisis sirvan como base para el estudio de pelotones con canales de ruido aditivo en diferentes configuraciones, así como en pelotones con diferentes problemas de comunicación.

1.4 Publicaciones asociadas

Los principales trabajos asociados a esta tesis son:

- **Título del artículo:** Platoon stability conditions under inter-vehicle additive noisy communication channels.
Autores: Marco A. Gordon, Francisco J. Vargas, Andrés A. Peters, Alejandro I. Maass.
Publicado en: Conferencia IFAC, 2020.
- **Título del artículo:** On stochastic string stability with applications to platooning over additive noise channels.
Autores: Francisco J. Vargas, Marco A. Gordon, Andrés A. Peters, Alejandro I. Maass.
Estado: Enviado a la revista Automatica, 2023.

1.5 Organización de la tesis

La presente tesis esta organizada por capítulos de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se detallan definiciones y notación relevantes para el desarrollo de la tesis. Además, se describen los componentes de un pelotón y se define el pelotón bajo análisis.
- El Capítulo 3 tiene por objetivo explicar la problemática de estabilidad en cuerda en pelotones. Además, se muestra la definición propuesta de estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos.
- En el Capítulo 4 se analizan las condiciones necesarias y suficientes para las que un pelotón con canales afectados por ruido aditivo es estable en cuerda. Además se acompaña con resultados de simulación que muestran el comportamiento del pelotón en los casos estables e inestables.
- En el Capítulo 5 se estudia un caso particular en el que solo el canal de comunicación entre el líder y el primer seguidor se ve afectado por el ruido aditivo. De igual manera se obtienen las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la estabilidad en cuerda. Este análisis tiene por objetivo mostrar la propagación del ruido a lo largo de la cadena de vehículos.
- Finalmente en el Capítulo 6 se mencionan las conclusiones y posibles trabajos futuros.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES Y GENERALIDADES
SOBRE PELOTONES

El propósito de este capítulo es introducir la notación, principales definiciones y resultados preliminares que serán utilizados en el desarrollo de la tesis. Además, se describe el conjunto de principales características que componen un pelotón de vehículos y se detalla la configuración en particular que estará sujeta a análisis.

2.1 Notación

2.1.1 Matrices y vectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada, su radio espectral se denota como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A . El i -ésimo valor singular de A se denota como $\sigma_i(A)$ y su mayor valor singular se denota como $\sigma_{\max}(A)$. La transpuesta de la matriz A se denota como A^\top . Para una matriz A , con todos sus elementos reales, su matriz adjunta, denotada por A^* , cumple que $A^* = A^\top$.

Dada una matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la operación de vectorización (por columnas) de la matriz B se denota como

$$\text{vec}(B) = [b_{1,1}, \dots, b_{m,1}, b_{1,2}, \dots, b_{m,2}, \dots, b_{1,n}, \dots, b_{m,n}]^\top,$$

donde $b_{i,j}$ son los elementos de la m -ésima fila y n -ésima columna de la matriz B .

Sea $v = \text{vec}(B) \in \mathbb{R}^{mn}$, si se conocen las dimensiones originales, se puede reconstruir la matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ aplicando la operación inversa vec^{-1} . Una forma de calcular esta operación inversa es

$$\text{vec}^{-1}(v) = (\text{vec}(I_n)^\top \otimes I_m)(I_n \otimes v),$$

donde I_n e I_m representan a la matriz identidad de dimensiones n y m respectivamente, y \otimes denota al producto de Kronecker.

Sean las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, el producto de Kronecker $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ está definido como

$$A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

donde $a_{mn} \in \mathbb{R}$ denota el (m, n) elemento de A . A continuación se mencionan tres propiedades importantes sobre el producto de Kronecker [63, 64, 65]:

- Sean A, B, C, D matrices de dimensiones apropiadas, tales que los productos AC y BD están bien definidos, entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (2.1)$$

- Sean A, X, B matrices de dimensiones apropiadas, tales que el producto AXB está bien definido, entonces

$$\text{vec}(AXB) = (B^\top \otimes A)\text{vec}(X). \quad (2.2)$$

- Sea A una matriz cuadrada, entonces $\rho(A \otimes A) = \rho(A)\rho(A)$.

Para ciertas demostraciones se hacen uso de dos resultados demostrados en [64]. Considere una matriz simétrica positiva semi-definida M y un vector columna x , ambos de dimensiones apropiadas, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

$$x^\top Mx \leq \rho(M) x^\top x, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\max}(M) = \rho(M). \quad (2.4)$$

2.1.2 Funciones clase \mathcal{K} , normas y factorización espectral

Funciones clase \mathcal{K} :

Sea $\mathbb{R}_{\geq 0} \triangleq [0, \infty)$, una función $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice de clase \mathcal{K} , si esta es continua, estrictamente creciente y $\gamma(0) = 0$. Dicha función se denota como $\gamma \in \mathcal{K}$.

Normas vectoriales y matriciales:

- Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector, donde el i -ésimo elemento de x se denota como $x\{i\}$. Su norma $\|x\|_p$, con $p \in \mathbb{N}$ y su norma $\|x\|_\infty$ se definen como

$$\|x\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x\{i\}|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty \triangleq \max_i |x\{i\}|.$$

- Sea $x(k) \in \mathbb{R}^n$ una señal en tiempo discreto, donde $x(k)$ denota a un vector x al instante $k \in \mathbb{N}_0$. Su norma $\|x\|_{\mathcal{L}_p}$, con $p \in \mathbb{N}$ y su norma $\|x\|_{\mathcal{L}_\infty}$ se definen como

$$\|x\|_{\mathcal{L}_p} \triangleq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \sup_k \|x(k)\|_\infty.$$

- Sea $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante, simétrica y positiva semi-definida, se definen la norma Schatten [64] (ó norma- σp) $\|X\|_p$, con $p \in \mathbb{N}$ y la norma $\|X\|_\infty$ como

$$\|X\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(X)^p \right)^{1/p}, \quad \|X\|_\infty \triangleq \sigma_{\max}(X).$$

- Sea $X(k)$ una matriz variante en el tiempo, con $k \in \mathbb{N}_0$, su norma $\|X\|_{\mathcal{L}_p}$, con $p \in \mathbb{N}$ y su norma $\|X\|_{\mathcal{L}_\infty}$ se definen como

$$\|X\|_{\mathcal{L}_p} \triangleq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \|X\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \sup_k \|X(k)\|_\infty.$$

Factorización espectral [66, 67]:

Teorema 1. Sea $T(z) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$ una realización mínima de la función de transferencia $T(z)$ (donde A , B , C y D son las matrices de su representación en espacio de estados), y $\gamma > \|T(z)\|_\infty$. Entonces, existe una matriz de transferencia $M(z) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, tal que $M(z)M(z)^\sim = \gamma^2 I - T(z)T(z)^\sim$ y $M(z)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$. Una realización particular de $M(z)$ viene dada por

$$M := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -R^{1/2}F & R^{1/2} \end{array} \right]$$

donde

$$\begin{aligned} R_D &= \gamma^2 I - D^\top D \\ R &= R_D + B^\top X B \\ F &= -(R_D + B^\top X B)^{-1} (B^\top X A - D^\top C), \end{aligned}$$

y $X = X^\top \geq 0$ es la solución que estabiliza la DARE

$$\begin{aligned} (A + B R_D^{-1} D^\top C)^\top X (A + B R_D^{-1} D^\top C) - X - C^\top (I + D R_D^{-1} D^\top) C \\ - (A + B R_D^{-1} D^\top C)^\top X B (R_D + B^\top X B)^{-1} B^\top X (A + B R_D^{-1} D^\top C) = 0. \end{aligned}$$

Demostración. La demostración del teorema se encuentra en [66, 67] y sus referencias. \square

2.1.3 Procesos estocásticos

Sea $x(k)$, con $k \in \mathbb{N}_0$, un proceso aleatorio en tiempo discreto, i.e. una secuencia de variables aleatorias con función de densidad de probabilidad bien definida. A continuación se detallan definiciones y conceptos estándar [68, 69] que serán utilizados.

Media, varianza, segundo momento y función de covarianza:

- La media de $x(k)$, denotada por $\mu_x(k)$, está definida, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, como $\mu_x(k) \triangleq \mathcal{E} \{x(k)\}$, donde $\mathcal{E} \{\cdot\}$ denota al operador esperanza.
- Para simplificar notación se define $\bar{x}(k) \triangleq x(k) - \mathcal{E} \{x(k)\}$. La matriz de varianza de $x(k)$, denotada por $P_x(k)$ se define, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, como $P_x(k) \triangleq \mathcal{E} \{\bar{x}(k) \bar{x}(k)^\top\}$.
- La matriz de segundo momento de $x(k)$, denotado por $Q_x(k)$, se define, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, como $Q_x(k) \triangleq \mathcal{E} \{x(k) x(k)^\top\}$. Alternativamente, es posible escribir el segundo momento en función de la media y la varianza como $Q_x(k) = P_x(k) + \mu_x(k) \mu_x(k)^\top$.
- La función de covarianza de $x(k)$, denotada por $R_x(k + \tau, k)$ se define, $\forall k, \tau \in \mathbb{N}_0$, como $R_x(k + \tau, k) \triangleq \mathcal{E} \{\bar{x}(k + \tau) \bar{x}(k)^\top\}$.

Tipos de procesos aleatorios:

- Dos procesos aleatorios $x(k)$ e $y(k)$ se dicen no correlacionados si y solo si, $\forall k_1, k_2$, su covarianza cruzada es igual a cero, es decir $\mathcal{E} \{\bar{x}(k_1) \bar{y}(k_2)^\top\} = 0$.
- Un proceso estocástico $x(k)$ se dice independiente e idénticamente distribuido (*i.i.d.*) si y solo si es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Un conjunto de variables aleatorias se dicen *i.i.d.* si comparten la misma distribución de probabilidad y además son mutuamente independientes entre ellas.

- Un proceso estocástico $x(k)$ se dice de segundo orden si y solo si su media $\mu_x(k)$ y su matriz de segundo momento $Q_x(k)$ existen y son finitas para todo $k \in \mathbb{N}_0$, y que además, permanecen finitas a medida de que $k \rightarrow \infty$.
- Un proceso estocástico $x(k)$ se dice ser una secuencia estacionaria de ruido blanco si y solo si es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas, que además poseen la misma media y matriz de varianza. Es decir $\mathcal{E} \{ \bar{x}(k) \bar{x}(k + \tau)^\top \} = 0$, $\forall \tau \neq 0$, con $k, k + \tau \in \mathbb{N}_0$.
- Un proceso de segundo orden se dice ser estacionario en sentido amplio (*wss*) si y solo si su media $\mu_x(k)$ es constante $\forall k \in \mathbb{Z}$ y su función de covarianza $R_x(k + \tau, k)$ es una función de τ solamente, $\forall k, \tau \in \mathbb{Z}$. Es decir $\mu_x \triangleq \mu_x(k)$ y $R_x(\tau) \triangleq R_x(k + \tau, k)$.
- Sea $x(k)$ un proceso de segundo orden, $x(k)$ además se dice ser asintóticamente estacionario en sentido amplio (*a-wss*) si y si solo si su media estacionaria y su función de covarianza estacionaria, denotadas por μ_x y $R_x(\tau)$ respectivamente, existen y son finitas, tales que, $\forall k, \tau \in \mathbb{N}_0$ existen:

$$\mu_x \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_x(k), \quad R_x(\tau) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k + \tau, k).$$

Esto también permite definir a la matriz de varianza estacionaria, denotada por P_x , la cual viene dada por

$$P_x \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_x(k).$$

Densidad espectral de potencia (PSD) y factorización espectral:

- Sea x un proceso de segundo orden y *a-wss*, definido $\forall k \in \mathbb{N}_0$, con función de covarianza estacionaria $R_x(\tau)$, su densidad espectral de potencia, denotada como $\phi_x(z)$, se define como

$$\phi_x(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \bar{R}_x(\tau) z^{-\tau}, \quad \text{donde} \quad \bar{R}_x(\tau) = \begin{cases} R_x(\tau), & \text{si } \tau \geq 0 \\ R_x(-\tau)^\top, & \text{si } \tau < 0. \end{cases}$$

$\phi_x(z)$ está bien definida en el círculo unitario, i.e. para $z = e^{j\omega}$, con $\omega \in [-\pi, \pi]$. Para facilitar el cálculo de la PSD es común realizar un cambio de variable y obtener

$$\phi_x(z) = \left[\sum_{\tau=1}^{\infty} R_x(\tau) z^{-\tau} \right]^\sim + \sum_{\tau=1}^{\infty} R_x(\tau) z^{-\tau} + R_x(0),$$

donde, para una función de transferencia $F(z)$, $F(z)^\sim$ es corto para $F(z^{-1})^\top$.

Además, a partir de la PSD, es posible obtener la varianza estacionaria mediante

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(e^{j\omega}) d\omega.$$

- Sea x un proceso de tipo wss con PSD $\phi_x(z)$ racional. Si $\phi_x(z)$ es de rango normal completo, entonces existe $\Omega_x(z)$, referido como el factor espectral del proceso x , tal que $\phi_x(z) = \Omega_x(z)\Omega_x(z)^{\sim}$.

Estabilidad en sentido cuadrático medio (MSS):

Sea el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), descrito en tiempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \text{ con } x(0) = x_0 \quad (2.5a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.5b)$$

donde A, B, C, D son las matrices (de dimensiones apropiadas) de la representación en espacio de estados, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el estado del sistema, x_0 es el estado inicial, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entradas del sistema e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ es la salida del sistema. Además, considere lo siguiente:

Suposición 1. Respecto al sistema (2.5):

1. El estado inicial x_0 es una variable aleatoria de segundo orden con media μ_{x_0} y matriz de varianza $P_{x_0} \geq 0$.
2. La entrada u es un proceso blanco de segundo orden, cuyas media y matriz de varianza están dadas por μ_u y $P_u \geq 0$, respectivamente.
3. El estado inicial x_0 no está correlacionado con la entrada u . ■

Definición 1. El sistema descrito en (2.5) se dice estable en sentido cuadrático medio (MSS) si y solo si, para todo x_0 y u que satisfacen la Suposición 1, existen $\mu_x \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $P_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P_x \geq 0$, ambos finitos e independientes de las estadísticas de la condición inicial (μ_{x_0} y P_{x_0}), tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{x(k)\} = \mu_x, \quad (2.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{\bar{x}(k)\bar{x}(k)^{\top}\} = P_x. \quad (2.7)$$

La estabilidad en sentido cuadrático medio garantiza la existencia de valores estacionarios a los que convergen la media y la matriz de varianza del estado. Dichos valores estacionarios están bien definidos, son finitos e independientes de las condiciones iniciales.

Notación relevante para funciones de transferencia y señales estocásticas:

Considere un sistema LTI en tiempo discreto cuya respuesta impulso está denotada como $w(k)$ y su función de transferencia como $W(z)$. Sea u la señal de entrada de sistema, siendo u un proceso estocástico; la salida de dicho sistema, debido a la entrada u , se puede obtener como $y(k) = w(k) * u(k)$, donde $*$ denota la convolución. Para facilitar la notación, en la presente tesis se denota la salida simplemente como $y = Wu$.

2.2 Caracterización de un pelotón de vehículos

La problemática de los pelotones de vehículos pertenece al campo de estudio llamado *Control en red de sistemas multi-agente* [70]. Este tipo de sistema de control se caracteriza por estar compuesto a su vez de múltiples sub-sistemas que intercambian información entre sí a través de un enlace de comunicación. Un pelotón de vehículos autónomos se define como un sistema multi-agente donde cada vehículo tiene por tarea seguir a su predecesor a una velocidad y con una distancia de separación determinadas. En un pelotón, los vehículos viajan alineados, uno detrás del otro. Únicamente el vehículo líder tiene movimiento libre y por tanto es quien determina la ruta y la velocidad para el resto de agentes. Dicha formación en cadena da lugar a la aparición de un problema propio de los sistemas multi-agente, la *estabilidad en cuerda*.

Para abordar la problemática de la estabilidad en cuerda, primero es necesario definir la configuración del pelotón bajo análisis. Un sistema de pelotón depende de la combinación de varias características que describen tanto el modelo de cada vehículo, como la interacción entre ellos. Dependiendo de cómo se seleccione esta configuración, se pueden aplicar diferentes métodos de análisis para estudiar la estabilidad de cuerda [21].

Las principales características que describen un sistema de pelotón se detallan a continuación:

- **Topología del flujo de información (TFI)**

Esta característica especifica cómo se intercambia la información de un vehículo a otro. Es decir, el sentido en el que fluye la comunicación (unidireccional o bidireccional) y entre qué vehículos existe un enlace de comunicación. Las topologías más comunes son: seguimiento de predecesor (SP) y seguimiento de líder-predecesor (SLP). En la topología SP la comunicación es unidireccional y cada vehículo puede comunicarse solo con su seguidor más cercano. En la topología SLP la comunicación es unidireccional y ocurre tanto entre dos vehículos consecutivos como con el líder del pelotón. En la Figura 2.1 se muestra un esquema del flujo de la comunicación para las topologías SP y SPL en un pelotón de $N \in \mathbb{N}$ seguidores.

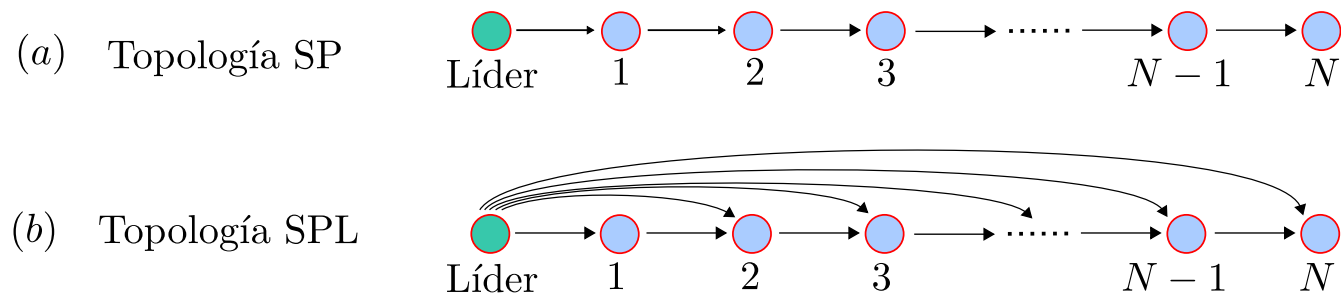


Figura 2.1: Topologías: (a) Seguimiento de predecesor y (b) Seguimiento de líder-predecesor.

- **Datos transmitidos (DT)**

La característica DT especifica la variable dinámica (medida por un vehículo) que se transmite a través del canal de comunicación. Esta señal puede ser la posición, velocidad, aceleración o combinaciones de estas.

- **Geometría de la formación (GF)**

La GF se refiere a la política de separación, es decir, la distancia deseada entre vehículos. Las políticas de espaciamento más comunes son: distancia constante (DC) e intervalo de tiempo constante (ITC). A diferencia de la política DC en la cual la separación entre vehículos es fija, la política de intervalo de tiempo modifica la separación entre vehículos en función de la velocidad a la que se aproximan dos vehículos consecutivos. Esta separación está ponderada por una constante referida como *time-headway* que mide la diferencia de tiempo en que la parte delantera de dos vehículos consecutivos cruzan el mismo punto. En la Figura 2.2 se muestra un esquema del cálculo de la constante *time-headway* y su interpretación en un gráfico del cambio de la posición en el tiempo para dos vehículos que viajan a una velocidad constante. La política ITC juega un papel muy importante en topologías SP.

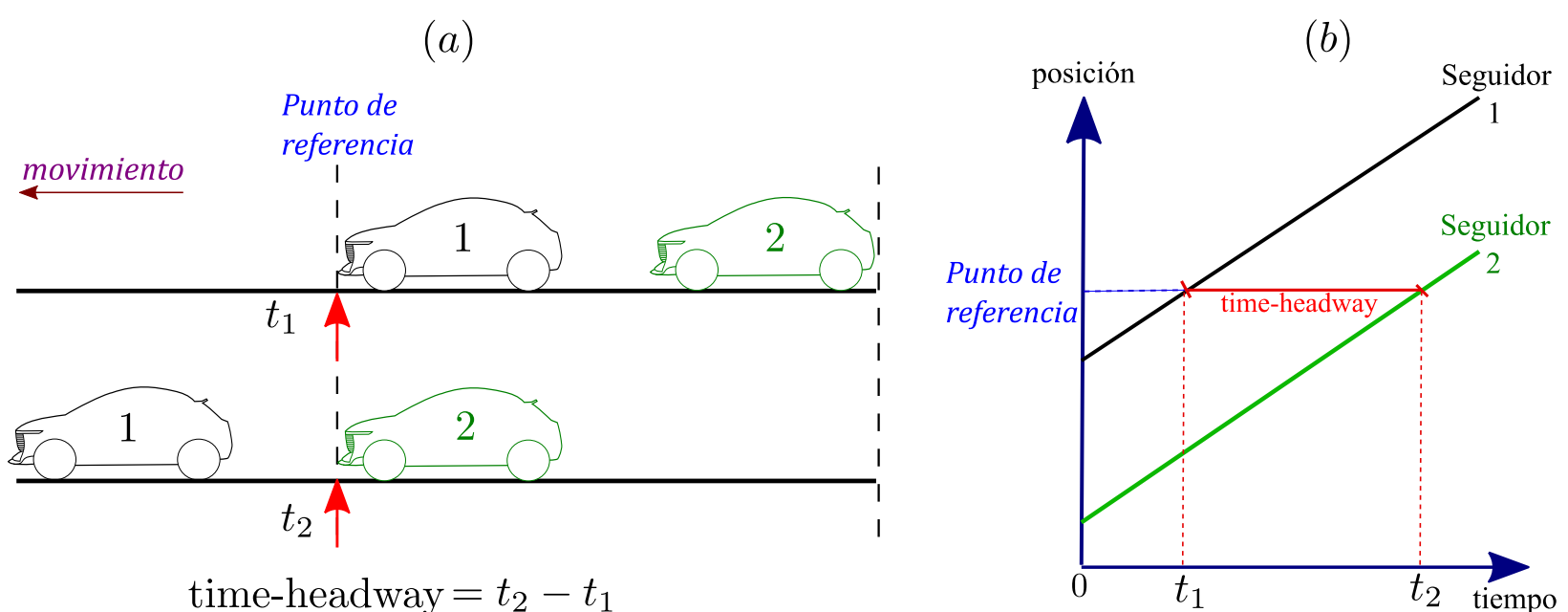


Figura 2.2: (a) Cálculo de la constante *time-headway*. (b) Gráfico de la posición de dos vehículos viajando a velocidad constante con una separación dependiente de la constante *time-headway*.

- **Calidad de la comunicación (CC)**

Esta característica describe qué tan confiable es el canal de comunicación entre los vehículos. Un pelotón es referido como determinístico cuando se consideran canales de comunicación ideales o casi ideales donde la información se asume es enviada y recibida sin problemas de tipo estocástico. Por otro lado, en un pelotón de tipo estocástico, los problemas de comunicación más comunes son pérdida aleatoria de datos, canales afectados por ruido y retardos aleatorios.

- **Composición (C)**

Esta característica describe si el pelotón está compuesto por vehículos homogéneos o heterogéneos. Se dice que un pelotón es homogéneo si todos los agentes tienen el mismo modelo dinámico; caso contrario se denomina pelotón heterogéneo.

- **Dinámica del nodo (DN)**

Esta característica hace referencia al modelo dinámico de cada vehículo. El movimiento de un vehículo se puede modelar como un integrador simple, un modelo de segundo orden o un modelo de tercer orden. La DN también especifica si los agentes tienen un modelo lineal o no lineal.

Descripción del pelotón bajo análisis: El presente trabajo de tesis se enfoca en pelotones compuestos por vehículos homogéneos, modelados como sistemas LTI, política de espaciado de tiempo constante (ITC) y topología predecesor-seguidor (SP). Esta configuración de pelotón, además de ser la más común debido a su simplicidad en la implementación, constituye un punto de partida para el estudio de nuevos conceptos que luego pueden ser extendidos a configuraciones más complejas.

Se considera además que la información transmitida a través de los canales de comunicación es la posición actual, misma que se asume afectada por ruido blanco aditivo. Finalmente, la descripción del pelotón se realiza en tiempo discreto. Esta última consideración es razonable ya que, en un escenario real, las comunicaciones se llevan a cabo digitalmente y la mayoría de los controladores están implementados en computadoras digitales. Además, el tratamiento de señales estocásticas es más manejable para una descripción en tiempo discreto [53].

CAPÍTULO

3

ESTABILIDAD EN CUERDA PARA PELOTONES ESTOCÁSTICOS

El presente capítulo tiene por objetivo exponer la problemática de estabilidad en cuerda en pelotones. Para ello, primero se introducen nociones y las principales definiciones de estabilidad en cuerda para configuraciones determinísticas. De este capítulo se destaca la proposición de una definición matemática de estabilidad en cuerda estocástica.

3.1 Nociones de estabilidad en cuerda para pelotones determinísticos

3.1.1 Señales de interés

Un pelotón está formado por un vehículo líder y $N \in \mathbb{N}$ seguidores. A cualquier instante de tiempo discreto $k \in \mathbb{N}$, el comportamiento de un vehículo determinado i , con $1 \leq i \leq N$, se puede estudiar en función de tres señales principales, denotadas como ζ_i , ξ_i y ν_i . La señal ζ_i está relacionada con el rendimiento del vehículo i -ésimo, que en este contexto corresponde al error de seguimiento. El vector ξ_i representa a un estado compuesto del vehículo i -ésimo. Esto último debido a que el pelotón es un sistema interconectado y el estado de un vehículo puede estar relacionado con el estado de uno o varios vehículos de la cadena, dependiendo de la topología de la comunicación. Naturalmente, el estado ξ_i es quien determina la evolución dinámica de la señal de rendimiento ζ_i . Finalmente, la señal ν_i contiene las entradas exógenas que pueden afectar el desempeño del i -ésimo vehículo como por ejemplo la trayectoria del líder, perturbaciones externas y ruidos. Dado que un pelotón es un sistema interconectado de varios sub sistemas, para analizar el desempeño de todo el pelotón se pueden concatenar las señales de interés de cada vehículo y definir los

vectores de estado, error de seguimiento y entradas exógenas como

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_N(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}(k) = \begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \\ \vdots \\ \zeta_N(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(k) = \begin{bmatrix} \nu_1(k) \\ \nu_2(k) \\ \vdots \\ \nu_N(k) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

El desempeño de un pelotón se puede ver afectado debido a la propagación de los errores a lo largo de la cadena. Tanto el comportamiento en estado estacionario como el comportamiento transitorio de dichos errores juegan un papel importante al momento de estudiar la estabilidad de un pelotón. Así, una perturbación en el vehículo i -ésimo se puede amplificar, a través del error, en los subsiguientes seguidores. La propiedad que nos permite estudiar este comportamiento se conoce como estabilidad en cuerda.

3.1.2 Definiciones de estabilidad en cuerda para configuraciones determinísticas

Existen varias definiciones de estabilidad en cuerda para configuraciones determinísticas como se resumen en [21]. Estas definiciones están basadas en cómo se propagan las perturbaciones a lo largo de la cadena de vehículos. En términos generales, se puede decir que un pelotón es estable en cuerda si los efectos de las entradas externas (medidas con alguna métrica específica) no se amplifican a medida que se propagan a lo largo de la cadena de vehículos interconectados. Caso contrario, el pelotón se denomina inestable en cuerda. Las definiciones que a continuación se van a presentar son un resumen de los principales resultados para pelotones determinísticos con configuraciones similares a la que se estudia en esta tesis. Si bien estas definiciones no se pueden aplicar directamente a pelotones estocásticos, son herramientas útiles a la hora de estudiar una definición propia de estabilidad en cuerda estocástica, como la propuesta en la Sección 3.2. Una de las primeras definiciones de estabilidad en cuerda para pelotones determinísticos fue propuesta en [16]:

Definición 2. *Una cadena de vehículos es estable, con una estructura de control de realimentación si, para cualquier conjunto de perturbaciones iniciales que sean acotadas, las fluctuaciones de posición de todos los vehículos permanecen acotadas y estas fluctuaciones se aproximan a cero cuando el tiempo tiende a infinito.*

De la Definición 2 se destaca que las señales deben permanecer acotadas (bajo alguna determinada métrica). Si bien se hace énfasis a la convergencia en el tiempo, un aspecto igual de importante es el análisis de la convergencia cuando el número de vehículos crece indefinidamente. Así, en base a la definición propuesta, se pueden obtener las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el pelotón bajo análisis es estable en cuerda.

Para pelotones determinísticos, modelados como sistemas LTI, con topología de seguimiento al predecesor, la Definición 3 (ver por ejemplo [71, 1, 72]) y su versión en el dominio de la frecuencia (ver por ejemplo [12, 18, 28]), expuesta en la Definición 4, son las más comunes en la literatura de pelotones.

Definición 3. Un pelotón se dice estable en cuerda si la función de transferencia entre dos vehículos consecutivos, llamada T , satisface

$$\|T\|_{\infty} \leq 1, \quad \text{donde} \quad \|T\|_{\infty} = \sup_{\omega} |T(j\omega)|.$$

Cuando $\|T\|_{\infty} = 1$ se denomina estabilidad marginal [1].

Definición 4. Un pelotón se dice estable en cuerda si, para cualquier frecuencia, la magnitud máxima de una secuencia relevante de funciones de transferencia se puede acotar uniformemente con el número de agentes:

$$|T(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega \in (0, 2\pi).$$

Para ilustrar el comportamiento estable e inestable en cuerda de un pelotón determinístico, se plantea el siguiente ejemplo. Considere un pelotón LTI, homogéneo, en tiempo discreto, con topología SP y política de espaciado ITC, cuya función de transferencia entre dos vehículos consecutivos se denota por $T(z) = \frac{y_i(z)}{y_{i-1}(z)}$, donde y_i es posición del vehículo i -ésimo, con $1 \leq i \leq N$, e y_0 es la posición del líder del pelotón. Esta configuración se muestra en la Figura 3.1.

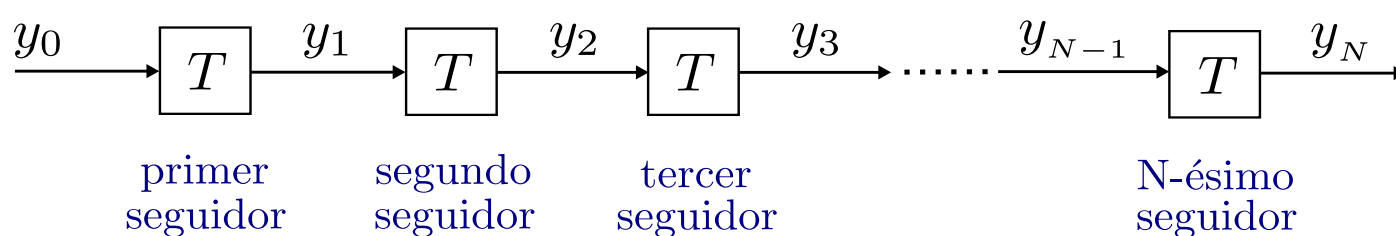
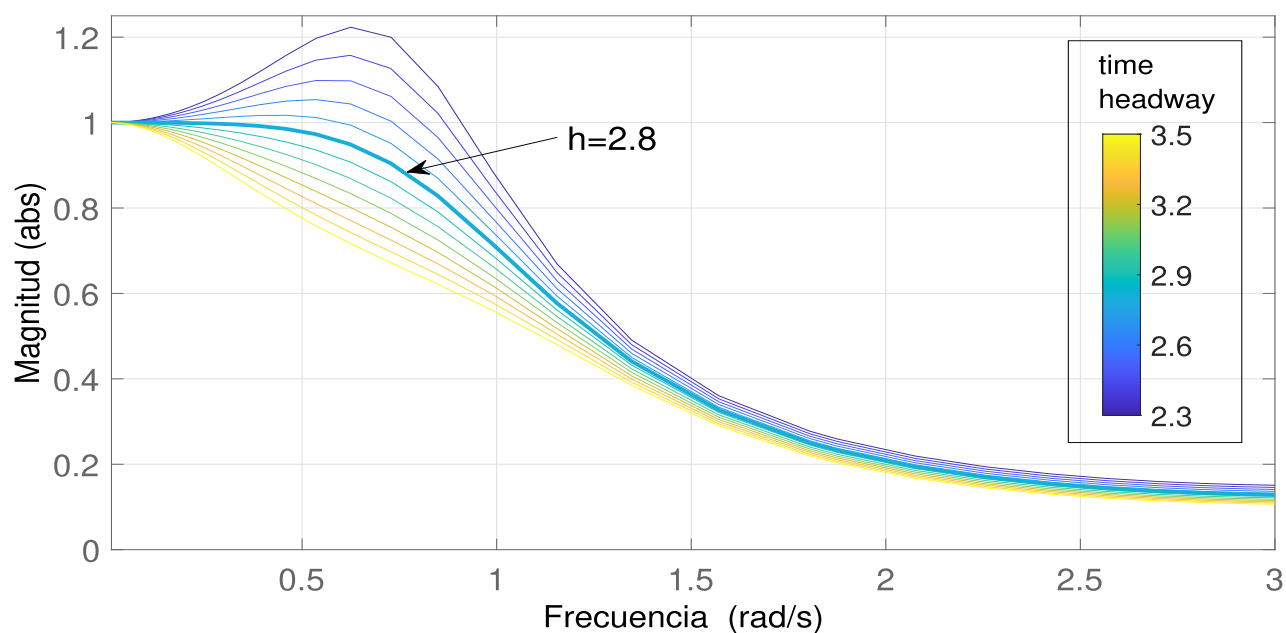


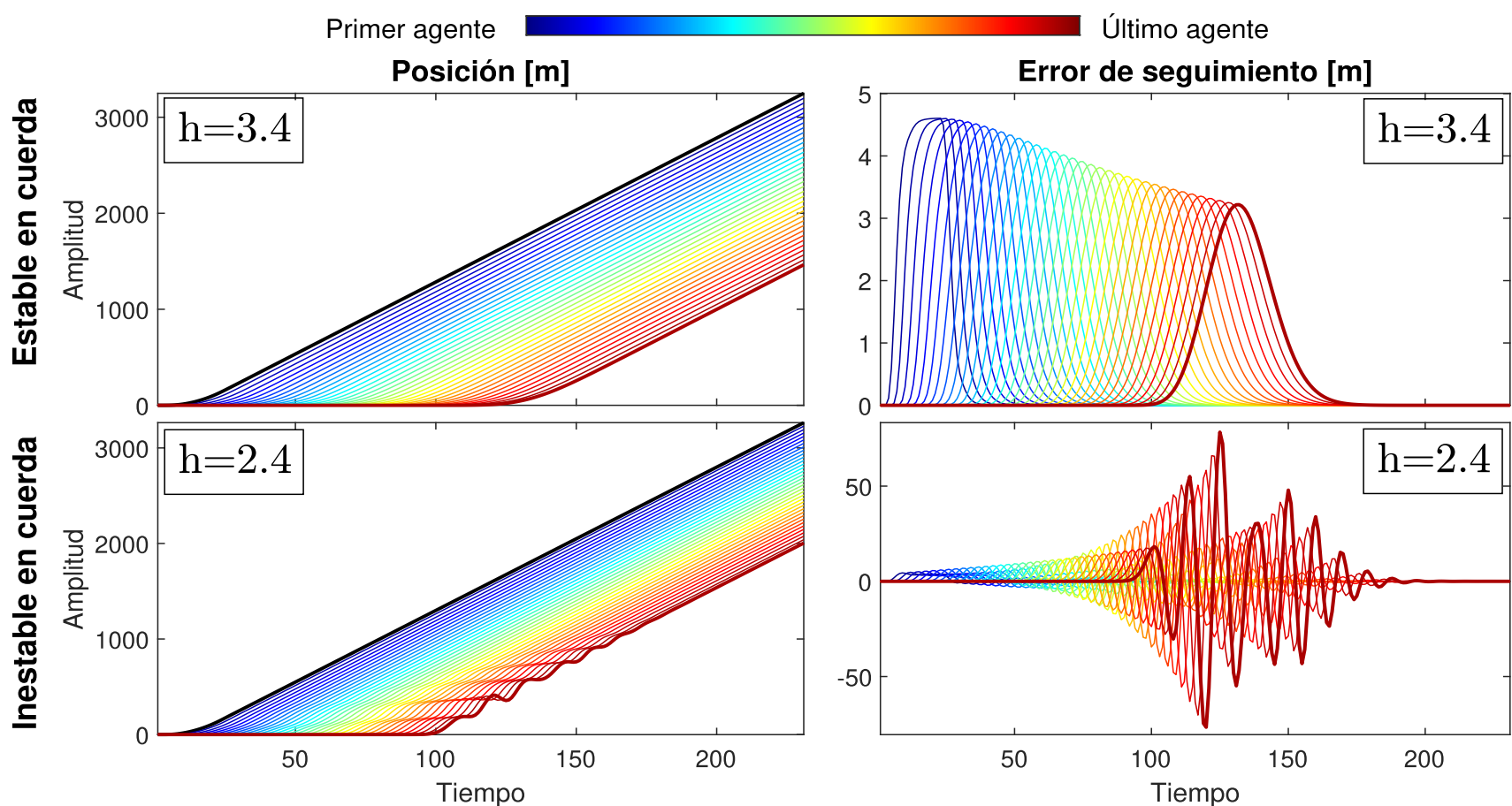
Figura 3.1: Concatenación de un pelotón determinístico con topología SP.

Debido a política de espaciado ITC, a medida que se aumenta el valor de la constante time headway, denotada como h , la función de transferencia $T(z)$ cambia y la distancia de separación entre vehículos crece. En la Figura 3.2a se muestra la respuesta en frecuencia de una $T(z)$ dada, para valores de $2.3 \leq h \leq 3.5$. En este ejemplo la estabilidad marginal se obtiene para $h \approx 2.8$, por lo que, para valores de $h > 2.8$ se tiene que $|T(e^{j\omega})| < 1$ y por tanto el pelotón es estable en cuerda (bajo la Definición 4). Por otro, cuando $h < 2.8$ se tiene que $|T(e^{j\omega})| > 1$ y el pelotón se dice inestable en cuerda. Para visualizar el comportamiento del error de seguimiento y la posición de los vehículos, en la Figura 3.2b se muestran el

comportamiento de 35 vehículos, para $h = 2.4$ y $h = 3.4$. En el caso estable ($h = 3.4$) se observa que, la posición del líder (con movimiento de velocidad constante) es seguida por el resto de agentes uniformemente y el error de seguimiento decrece en su máximo valor a medida que se avanza en la cadena de vehículos. Por otro lado, para el caso inestable en cuerda ($h = 2.4$), la posición presenta oscilaciones, que pueden resultar en posibles colisiones entre vehículos. Además, claramente, para cada vehículo, el error de seguimiento es oscilatorio y aumenta en su máximo valor mientras más vehículos se añaden a la cadena.



(a) Diagrama de Bode para $2.3 \leq h \leq 3.5$ (con pasos de 0.1)



(b) Comportamiento de la posición y el error de seguimiento para valores de $h = 3.4$ y $h = 2.4$.

Figura 3.2: Comportamiento de un pelotón determinístico.

Es importante resaltar que para el caso inestable en cuerda, a pesar de que el error de seguimiento converge a cero en el tiempo, su comportamiento transitorio, creciente a medida que aumenta el número de vehículos, es quien determina la inestabilidad en cuerda. Por ello, es importante tomar en cuenta la siguiente observación:

Observación 1. *La estabilidad en cuerda no debe confundirse con la estabilidad interna. En general, la estabilidad interna (en el sentido de Lyapunov) no conduce a la estabilidad en cuerda. Incluso si el sistema es internamente estable, las perturbaciones pueden amplificarse a lo largo de la cadena. [12, 73, 2]*

Otra definición común de estabilidad en cuerda determinística considera la existencia de funciones que acotan tanto a la condición inicial del estado, como al vector de entradas externas del pelotón. En [29, 74] se propone la definición de estabilidad en cuerda con base en la norma \mathcal{L}_2 . Considere un pelotón homogéneo descrito en tiempo continuo, con topología SP, cuya representación en espacio de estados viene dada por

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (3.2a)$$

$$y_i = C_i x, \quad \forall 1 \leq i \leq N \quad (3.2b)$$

donde $x = [x_1^\top \ x_2^\top \ \cdots \ x_N^\top]^\top$ es el estado concatenado del pelotón, cuya condición inicial viene dada por $x(0)$, v representa la entrada externa, y_i es la salida del vehículo i -ésimo y A, B, C_i son matrices de la representación en espacio de estados.

Definición 5. *El sistema (3.2) con un punto de equilibrio constante \bar{x} para $v \equiv 0$, es estable en cuerda bajo la norma \mathcal{L}_2 si existen funciones clase \mathcal{K} , α , β , tales que, para cualquier condición inicial del estado $x(0)$ y v se cumple que*

$$\|y_i(t) - C_i \bar{x}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \alpha(\|v(t)\|_{\mathcal{L}_2}) + \beta(\|x(0) - \bar{x}\|), \quad \forall 1 \leq i \leq N. \quad (3.3)$$

Para finalizar el análisis, en [74] además se obtiene la condición para la cual el sistema (3.2) satisface la Definición 5 (i.e. el pelotón es estable en cuerda), la cual viene dada por

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \|P_i(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \infty, \quad (3.4)$$

donde $P_i(s) = C_i(sI - A)^{-1}B$ es la función de transferencia en el dominio de Laplace, del i -ésimo agente, tal que $y_i(s) = P_i(s)v(s) + O_i(s)x(0)$. Se puede notar que esta definición es más amplia, respecto a las anteriores (definiciones 3 y 4), ya que acota al comportamiento transitorio y a la condición inicial, en todo instante de tiempo. Por ejemplo, es fácil notar que, en la Definición 3, la norma $\|T\|_\infty$ se obtiene de la transferencia de las normas \mathcal{L}_2 de las

señales de entrada y salida de cada vehículo. Por lo tanto, la Definición 3 solo asegura que la energía de estas señales no crezca indefinidamente, pero no entrega información sobre los máximos valores que alcanzan dichas señales. Se hace especial énfasis en la Definición 5, ya que posteriormente se propone una definición de estabilidad en cuerda inspirada en esta, pero que es aplicable para pelotones estocásticos con descripción en tiempo discreto.

3.2 Estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos

Cuando los enlaces de comunicación entre vehículos se ven afectados por fenómenos aleatorios, la influencia de tal aleatoriedad supone que las señales de interés $\xi(k)$, $\zeta(k)$ y $\nu(k)$ son procesos aleatorios y deben ser tratadas dentro de un entorno estocástico. Es importante destacar que las nociones habituales de estabilidad en cuerda, que utilizan métricas para señales determinísticas, no se pueden aplicar directamente a pelotones que involucran procesos estocásticos. En su lugar, es natural centrar el enfoque a las estadísticas de dichas señales.

A continuación se propone la definición matemática de estabilidad en cuerda para configuraciones estocásticas. Esta definición está basada en las estadísticas de segundo orden del error de seguimiento. Para ello, se denota como \mathcal{G} al conjunto de especificaciones técnicas requeridas para la condición inicial $\xi(0)$ y la entrada exógena ν . El conjunto \mathcal{G} puede definirse como general o específico según lo requiera el problema bajo análisis. Sin embargo, es natural requerir al menos acotación, bajo alguna métrica, para $\xi(0)$ y ν .

Definición 6. *Un pelotón de vehículos se dice estable en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_p y la varianza con norma \mathcal{L}_q , donde $p, q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, si existen las siguientes funciones clase \mathcal{K} , α_1 , α_2 , β_1 y β_2 , tales que, para cualquier $\{\xi(0), \nu\} \in \mathcal{G}$, se cumple*

$$\begin{aligned} \|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_p} &\leq \alpha_1(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_p}) + \beta_1(\|\mu_{\xi}(0)\|_p), \\ \|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_q} &\leq \alpha_2(\|P_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_q}) + \beta_2(\|P_{\xi}(0)\|_q), \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ y } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Definición 7. *Un pelotón que satisface la Definición 6 se dice **estable en cuerda en sentido cuadrático medio** si y solo si, para cualquier $\{\xi(0), \nu\} \in \mathcal{G}$, existen constantes finitas M_1 y M_2 tales que*

$$\lim_{k,i \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_i}(k) = M_1, \quad \lim_{k,i \rightarrow \infty} P_{\zeta_i}(k) = M_2.$$

La Definición 6 garantiza que las estadísticas de segundo orden estén acotadas (bajo las correspondientes normas) para $\zeta_i(k)$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ y $\forall N \in \mathbb{N}$. Además, tales límites son independientes del número de agentes. Este es un aspecto clave de las definiciones de estabilidad de cuerda ya que establece una propiedad relacionada con la escalabilidad del sistema interconectado.

Por otro lado, la Definición 7 complementa a la Definición 6 y asegura la convergencia, que es un requisito estándar en la teoría del control estocástico [75, 68]. Lo que se pretende con la Definición 7 es combinar la noción de estabilidad en sentido cuadrático medio con la Definición 6 para formalizar el concepto de *estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio*. Es importante destacar que en las definiciones 6 y 7, se asume implícitamente la existencia de las normas correspondientes para valores específicos de p y q . Por ejemplo, si $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_i}(k) \neq 0$, entonces $\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2}$ no se puede calcular; o puede ser el caso de algunos $\nu(k)$ en que $\|P_\nu(k)\|_{\mathcal{L}_\infty}$ exista y $\|P_\nu(k)\|_{\mathcal{L}_2}$ no.

Como se mencionó, la definición 6 está inspirada en la noción determinista de estabilidad en cuerda \mathcal{L}_p introducida en [29] (definición 5); pero convenientemente adaptado a una configuración estocástica. Es importante notar además que, de la definición 6 se puede reconstruir la definición 5, cuando no existen fenómenos aleatorios. Esto último es fácil de ver ya que la media de una señal determinística es la misma señal y no existiría varianza. Es decir, la definición propuesta se puede considerar como una extensión de la definición determinística, que la hace aplicable a sistemas estocásticos.

A diferencia de anteriores definiciones, la propuesta considera explícitamente la norma de la media y la varianza de la señal de interés y brindan flexibilidad para usar diferentes normas por separado. Esto está motivado por el hecho de que, dependiendo de la naturaleza de la secuencia que define las medias y las varianzas, algunas normas pueden existir, pero otras no, como se mencionó anteriormente. Por ejemplo, las definiciones de estabilidad en cuerda presentadas en [46, 37] se basan en la norma \mathcal{L}_2 y, por lo tanto, no se pueden emplear si las estadísticas de segundo orden no convergen a cero. Además, hay casos en los que la media de los errores convergen a valores estacionarios pero las varianzas no, como se informa en [52]. Con las definiciones propuestas, este fenómeno puede detectarse explícitamente, y según el caso, se seleccionan los valores de p y q que se estimen convenientes. Respecto a otros trabajos que han abordado el tema de estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos, es importante destacar que la Definición 6 es más general que: la definición propuesta en [51] donde solo se considera la media; o en [46, 37] donde se plantea exclusivamente la norma \mathcal{L}_2 ; y en [53], donde se garantiza un comportamiento estable en cuerda solo para una vecindad alrededor de la media.

3.2.1 Condiciones de estabilidad en cuerda y sus métodos de análisis

Garantizar la estabilidad en cuerda requiere de un análisis de la evolución de los errores de seguimiento, tanto cuando el tiempo, como cuando el número de vehículos se aproximan a infinito. Cualquier análisis de estabilidad en cuerda está completo cuando se plantean las condiciones necesarias y suficientes que satisfacen la definición propuesta. Esto da origen a dos métodos de análisis, de los cuales se derivan las condiciones de estabilidad en cuerda:

1. El análisis temporal permite derivar condiciones para las cuales el error de seguimiento $\zeta(k)$ converge a un valor estacionario cuando el tiempo crece indefinidamente ($k \rightarrow \infty$). Para una configuración estocástica, la convergencia temporal se estudia mediante la estabilidad en sentido cuadrático medio. Por tanto, se garantiza la existencia de valores estacionarios para la media y la varianza del error de seguimiento, denotados como μ_ζ y P_ζ respectivamente, tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\zeta(k) = \mu_\zeta \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_\zeta(k) = P_\zeta.$$

2. El análisis de escalabilidad permite analizar la evolución de los errores de seguimiento $\zeta_i(k)$ cuando el número de vehículos se acerca a infinito ($i \rightarrow \infty$). Es común, realizar este análisis utilizando una representación en el dominio de la frecuencia para desligar la dependencia temporal y así definir la evolución de la media y el espectro del error de seguimiento.

Observación 2. *Si bien una parte relevante de esta tesis es la definición de estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio, la principal contribución de esta tesis consiste en derivar las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el pelotón estocástico bajo análisis es estable en cuerda.*

CAPÍTULO

4

CONDICIONES DE ESTABILIDAD EN CUERDA PARA UN PELOTÓN CON CANALES AFECTADOS POR RUIDO ADITIVO

En el presente capítulo se estudia la estabilidad en cuerda de un pelotón cuyos canales de comunicación entre vehículos son afectados por ruido blanco aditivo. El principal resultado es la obtención de las condiciones necesarias y suficientes que garantizan un comportamiento estable en cuerda y satisfacen las definiciones 6 y 7.

4.1 Descripción del sistema

El pelotón bajo análisis está formado por $N \in \mathbb{N}$ agentes homogéneos (i.e. todos los vehículos tienen la misma dinámica y controlador local) que se mueven en línea recta (pelotón unidimensional) con una topología de seguimiento al predecesor. Esta última suposición significa que los vehículos están conectados a través de un enlace simple donde la información fluye unidireccionalmente y ocurre solo entre dos vehículos consecutivos. En la Figura 4.1 se muestra un esquema del pelotón bajo análisis.

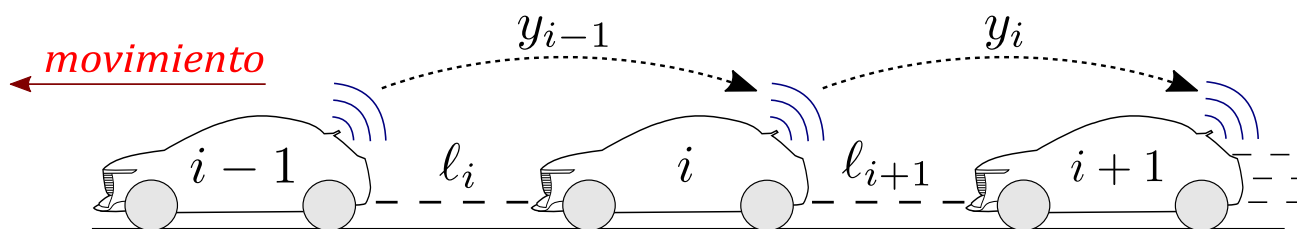


Figura 4.1: Esquema de un pelotón homogéneo de tres vehículos con topología SP

A cualquier instante de tiempo discreto $k \in \mathbb{N}$, la información enviada por el vehículo i -ésimo, hacia su seguidor más próximo, es la posición, denotada por $y_i(k)$, donde el subíndice $i = 0, 1, \dots, N$ es el identificador de cada vehículo y corresponde a su lugar en la cadena. El índice $i = 0$ será utilizado para denotar al vehículo líder.

La distancia de separación entre dos vehículos consecutivos se define como la diferencia entre las posiciones actuales de dichos vehículos $\ell_i(k) \triangleq y_{i-1}(k) - y_i(k)$. Dado que en un pelotón se espera que la velocidad del vehículo líder eventualmente converja a una constante (conocida como velocidad crucero), la posición $y_0(k)$ corresponde a una referencia tipo rampa. Así, el objetivo de control de cada vehículo es viajar a dicha velocidad crucero mientras se mantiene la distancia de separación $\ell_i(k)$ lo más cercana a una referencia establecida $r_i(k)$. Cuando además se consideran canales de comunicación poco fiables, esta tarea de seguimiento gana complejidad y requiere un análisis estocástico de la propagación de los errores. Para el pelotón bajo análisis, los canales de comunicación de cada agente se consideran contaminados por ruido blanco aditivo. Es decir, el agente en la posición i , tiene acceso a una medición ruidosa de la posición de su predecesor. La posición recibida viene dada por $\tilde{y}_{i-1}(k) = y_{i-1}(k) + d_i(k)$, donde d_i es un proceso estocástico que modela el ruido del canal. Esta incertidumbre en la posición recibida ocasiona que el i -ésimo vehículo no pueda calcular su distancia de separación real $\ell_i(k)$. En su lugar, el lazo de control local utiliza una versión corrupta, $\tilde{\ell}_i(k)$, que se define como $\tilde{\ell}_i(k) \triangleq \tilde{y}_{i-1}(k) - y_i(k)$.

Un resultado muy conocido para pelotones con topología SP concluye que el seguimiento de una señal rampa (posición de un vehículo con velocidad constante) y la estabilidad de cuerda de un pelotón no son compatibles con sistemas de control de un grado de libertad [2]. Esta última afirmación se debe a las limitaciones fundamentales [76], donde, dada una entrada rampa, la presencia de un doble integrador genera sobre respuesta y por tanto asegura la propagación de los errores en la cadena de vehículos. Para solucionar este inconveniente, el sistema de control se debe extender a una arquitectura de dos grados de libertad. Esta nueva arquitectura se consigue al incluir la contante time headway. Como se mencionó en el Capítulo 2, la política de espaciado ITC permite que la separación entre dos vehículos consecutivos aumente o disminuya según la velocidad a la que se aproxima un seguidor a su correspondiente predecesor [37, 25, 77]. En consecuencia, la distancia deseada entre vehículos queda definida como

$$r_i(k) = \epsilon_i + h \frac{y_i(k) - y_i(k-1)}{T_s}, \quad (4.1)$$

donde ϵ_i es la separación mínima deseada, $(y_i(k) - y_i(k-1))/T_s$ representa la tasa de cambio de la posición (velocidad) del vehículo i -ésimo, y $h > 0$ denota a la contante time headway.

Observación 3. Sin pérdida de generalidad, por simplicidad en la explicación se puede asumir que los vehículos no tienen dimensión y que $\epsilon_i = 0$ [78]. Además, se puede eliminar T_s de (4.1), dado que el tiempo de muestreo y sus unidades pueden ser incluidos en el valor de h .

Cada agente está modelado por un sistema de realimentación compuesto por una planta LTI, $G(z)$, y su controlador LTI local, $K(z)$. En adición, la inclusión de la velocidad en el lazo de control resulta en la señal de realimentación $w_i(k) = y_i(k) + h(y_i(k) - y_i(k-1))$, cuya función de transferencia está definida como

$$H(z) \triangleq (1 + h) - \frac{h}{z}. \quad (4.2)$$

En la Figura 4.2 se muestra el esquema de control para el vehículo i -ésimo, donde u_i es la señal de salida del controlador, d_i es el ruido que se suma a la entrada de la posición del predecesor y e_i es el error local.

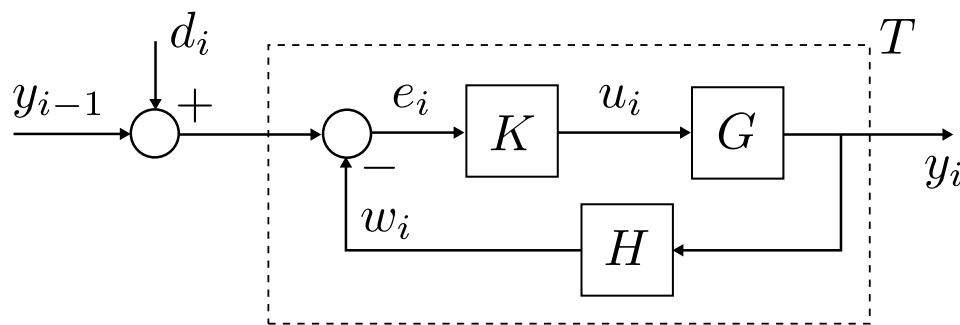


Figura 4.2: Lazo de realimentación para el vehículo en la posición i .

Claramente, para cada instante k , la señal del error local se calcula como

$$\begin{aligned} e_i(k) &= \tilde{\ell}_i(k) - r_i(k) \\ &= y_{i-1}(k) + d_i(k) - y_i(k) - h[y_i(k) - y_i(k-1)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dada la naturaleza estocástica del problema, el error local e_i no permite medir el error de seguimiento “real” ya que esta señal incluye la aleatoriedad del ruido d_i y por tanto una lectura corrupta de y_{i-1} . Es necesario entonces definir propiamente al error de seguimiento, denotando como ζ_i , el cual excluye al ruido d_i y viene dado por

$$\zeta_i(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - h[y_i(k) - y_i(k-1)]. \quad (4.4)$$

En base a la configuración anterior, el sistema de control de realimentación de cada vehículo se puede agrupar en la función de transferencia $T(z)$, la cual describe la transferencia entre la señal de entrada \tilde{y}_{i-1} y la salida y_i ; y está descrita como

$$T(z) = \frac{G(z)K(z)}{1 + G(z)H(z)K(z)}. \quad (4.5)$$

Finalmente, la función de sensibilidad $S(z)$, que relaciona a la señal de entrada y_{i-1} con el error local e_i está dada por

$$S(z) = 1 - H(z)T(z). \quad (4.6)$$

Suposición 2. Respecto al modelo de los vehículos y al ruido de los canales de comunicación:

1. La función de sensibilidad complementaria $T(z)$ es estable y estrictamente propia.
2. El producto $G(z)K(z)$ tiene al menos un integrador doble.
3. Los ruidos d_i son secuencias estacionarias de ruido blanco, mutuamente independientes e idénticamente distribuidas, cuyas media μ_{d_i} y varianza P_{d_i} están definidas como

$$\mu_{d_i}(k) = \mathcal{E} \{d_i(k)\} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.7)$$

$$P_{d_i}(k) = \mathcal{E} \{d_i(k)d_i(k)^\top\} = \begin{cases} 0, & \forall k < 0, \\ P_d, & \forall k \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

4. Cada ruido d_i no está correlacionado con el estado inicial de los agentes. □

En un entorno determinístico, es natural suponer que $T(z)$ es internamente estable. Además, dado que la entrada y_0 converge a una rampa; si se quiere conseguir error cero en estado estacionario, al menos se debe exigir la presencia de un doble integrador en el producto $G(z)K(z)$. Sin embargo, tales suposiciones no se adoptan *a priori* en pelotones estocásticos [38, 52]. A pesar de ello, los dos primeros supuestos son realmente necesarios para el posterior análisis de estabilidad en cuerda. Respecto a las suposiciones del ruido, se debe notar que la influencia de este empieza desde el instante $k = 0$. Esto último se considera para acompañar al inicio del movimiento de los vehículos.

Para ilustrar la concatenación de vehículos y la interconexión de las funciones de transferencia, en la Figura 4.3 (a) se muestra al pelotón bajo análisis cuya entrada es la posición del líder. En la Figura 4.3 (b) se muestra al mismo pelotón, pero descrito en función del error local. Esta representación alternativa permite visualizar la influencia directa que tiene $T(z)$ en la propagación de los errores.

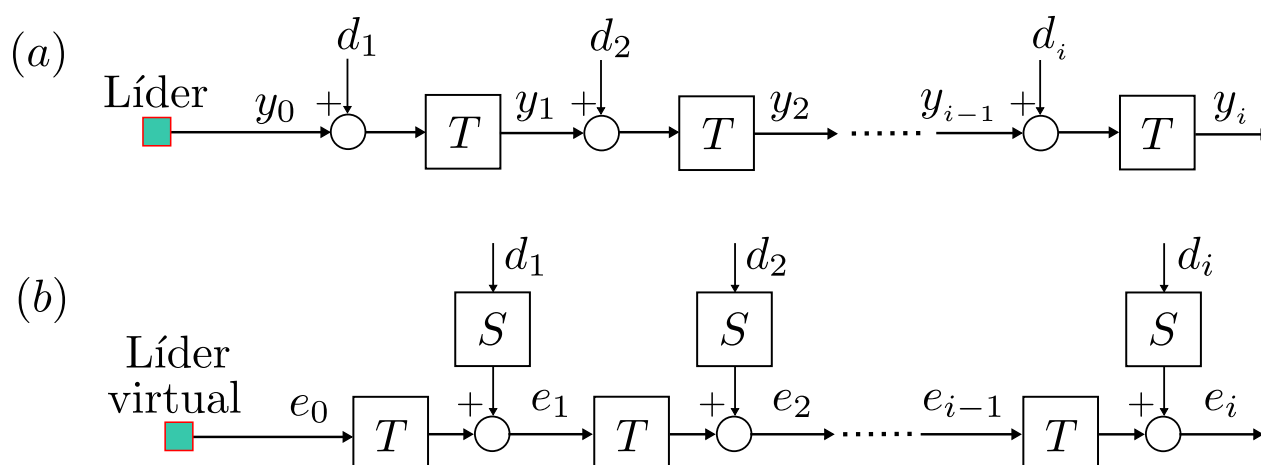


Figura 4.3: Concatenación de un pelotón con canales de ruido aditivo en dos representaciones equivalentes.

4.1.1 Representación en espacio de estados

Bajo los supuestos anteriores, la función de transferencia de cada vehículo se puede escribir como $T(z) \triangleq C(zI - A)^{-1}B$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son las matrices de la representación del sistema en espacio de estados. Entonces, definiendo el estado $x_i \in \mathbb{R}^n$ se tiene la siguiente representación

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + By_{i-1}(k) + Bd_i(k) \quad (4.9a)$$

$$y_i(k) = Cx_i(k), \quad (4.9b)$$

con $k \in \mathbb{N}_0$ y condiciones iniciales $x_i(0) = x_{i_0}$. Debido a la referencia rampa y la presencia del bloque $H(z)$, no se puede garantizar que los estados $x_i(k)$ estén delimitados. Esto supone un problema a la hora de analizar la condición de convergencia en el tiempo, necesaria para la estabilidad de cuerda. Por lo tanto, algunas propiedades de convergencia pueden no ser aplicables para la representación en espacio de estados (4.9). Sin embargo, dado que el interés es estudiar la convergencia del error de seguimiento, se define un estado alternativo $\xi_i(k)$ que se espera converja a un punto de equilibrio, y así describir los errores de seguimiento en términos de dicho estado. Además, se considera un líder virtual, para el cual es necesario definir su estado alternativo $\xi_0(k)$ y una referencia virtual $r_0(k)$.

Suposición 3. Respecto al líder virtual y su estado alternativo $\xi_0(k)$:

1. El líder ($i = 0$) sigue una referencia virtual $r_0(k)$ que depende del entorno, y no se ve afectada por el ruido.
2. r_0 es tal que la trayectoria del líder y_0 se convierte en una señal rampa (velocidad crucero), con cambios esporádicos debido a perturbaciones externas o cambios predefinidos en la velocidad del líder.
3. La señal ζ_0 es el error de seguimiento del líder al rastrear la referencia virtual r_0 , y converge a cero cuando k tiende a infinito. \square

Considerando la Suposición 3, para cualquier vehículo, el estado alternativo se define como

$$\xi_i(k) \triangleq x_{i-1}(k) - x_i(k) - h[x_i(k) - x_i(k-1)]. \quad (4.10)$$

Es importante notar que el estado $\xi_i(k)$ es la resta entre el estado del vehículo anterior x_{i-1} y la salida del bloque $H(z)$ cuando la entrada es el estado x_i . Así, con un apropiado diseño del controlador, las diferencias $x_{i-1}(k) - x_i(k)$ y $x_i(k) - x_i(k-1)$ se espera converjan aún cuando la referencia sea una rampa y los estados $x_i(k)$ y $x_{i-1}(k)$ se comporten como rampas. Finalmente, el estado del líder virtual queda definido como

$$\zeta_0(k) = e_0(k) = r_0(k) - y_0(k) - h[y_0(k) - y_0(k-1)]. \quad (4.11)$$

Lema 1. Con base en la representación alternativa del estado (4.10) y (4.11), la descripción en espacio de estados del pelotón, en función del estado $\xi(k)$ y el error de seguimiento $\zeta(k)$, vienen dados por

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}\xi(k) + \mathbf{B}_o \zeta_0(k) + \mathbf{B}_a \mathbf{d}(k) + \mathbf{B}_b \mathbf{d}(k-1) \quad (4.12a)$$

$$\zeta(k) = \mathbf{C}\xi(k), \quad (4.12b)$$

donde $\xi(k) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $\mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{B}_a \in \mathbb{R}^{nN \times N}$, $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{B}_b \in \mathbb{R}^{nN \times N}$, $\zeta(k) \in \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times nN}$ están descritas como

$$\xi(k) \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_N(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & & & & \\ BC & A & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & BC & A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_o \triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a \triangleq \begin{bmatrix} \lambda B & & & & \\ B & \lambda B & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & B & \lambda B \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}(k) \triangleq \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \\ \vdots \\ d_N(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b \triangleq \begin{bmatrix} hB & & & & \\ & hB & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & hB \end{bmatrix}, \quad \zeta(k) \triangleq \begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \\ \vdots \\ \zeta_N(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} C & & & & \\ & C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & C \end{bmatrix},$$

con $\lambda \triangleq -(1+h)$.

Demostración. Ver Apéndice A. □

Observación 4. Los elementos iguales a cero, presentes en las matrices de la representación de estados, pueden ser vectores o matrices de ceros, según corresponda de acuerdo a las dimensiones.

El Lema 1 especifica la representación en espacio de estados de la concatenación de vehículos, de acuerdo a la topología seleccionada. Como complemento a esta representación, es útil tener una descripción iterativa de los errores de seguimiento con el objetivo de analizar las propiedades de convergencia cuando el número de vehículos crece. Para ello se tiene en cuenta la simplificación de notación introducida al final de la Sección 2.1, la cual omite los argumentos de las señales estocásticas y las funciones de transferencia por simplicidad. Así, dado el lazo de control de la Figura 4.2, se puede escribir $\zeta_i = KGe_{i-1} - KGH e_i$, con $e_i = \zeta_i + d_i, \forall i \geq 1$. Finalmente, para cualquier vehículo, el error de seguimiento tiene la siguiente representación en transferencias

$$\zeta_i = \begin{cases} T\zeta_0 - HTd_1, & \text{para } i = 1, \\ T\zeta_{i-1} + Td_{i-1} - HTd_i, & \text{para } i > 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2 Análisis de convergencia en el tiempo ($k \rightarrow \infty$)

En el siguiente Lema, se especifican las estadísticas del sistema (4.12) y la condición necesaria para que dichas estadísticas converjan en el tiempo.

Lema 2. *Considere el pelotón descrito en (4.12). Las medias del estado y el error de seguimiento están dadas por*

$$\mu_{\xi}(k+1) = \mathbf{A}\mu_{\xi}(k) + \mathbf{B}_o \zeta_0(k), \quad \mu_{\xi}(0) = \mu_{\xi_0}, \quad (4.14a)$$

$$\mu_{\zeta}(k) = \mathbf{C}\mu_{\xi}(k) \quad (4.14b)$$

y sus matrices de varianza son

$$P_{\xi}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}P_{\xi}(k)\mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}_a P_d \mathbf{B}_a^{\top}, & \text{for } k = 0, \\ \mathbf{A}P_{\xi}(k)\mathbf{A}^{\top} + \Upsilon, & \text{for } k > 0, \end{cases} \quad (4.15a)$$

$$P_{\zeta}(k) = \mathbf{C}P_{\xi}(k)\mathbf{C}^{\top}, \quad (4.15b)$$

donde $P_{\xi}(0) = P_{\xi_0} \geq 0$, $\Upsilon = \mathbf{B}_a P_d \mathbf{B}_a^{\top} + \mathbf{B}_b P_d \mathbf{B}_b^{\top} + \mathbf{A} \mathbf{B}_a P_d \mathbf{B}_b^{\top} + \mathbf{B}_b P_d \mathbf{B}_a^{\top} \mathbf{A}^{\top}$ y $P_d = \text{diag}(P_d, P_d, \dots, P_d)$. Adicionalmente, $\mu_{\zeta}(k)$ y $P_{\zeta}(k)$ convergen (en el tiempo) a valores estacionarios, para todo $N \in \mathbb{N}$, si y solo si

$$\rho(A) < 1. \quad (4.16)$$

Dichos valores estacionarios están dados por

$$\mu_{\zeta} = 0 \quad (4.17a)$$

$$P_{\zeta} = \text{vec}^{-1} \left((\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec}(\Upsilon) \right). \quad (4.17b)$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Dado que $K(z)$ se diseña con el objetivo de lograr error cero en estado estacionario, y considerando que se cumple la condición de convergencia en el tiempo $\rho(A) < 1$, se demostró que la media de los errores de seguimiento tienen un valor estacionario igual a cero. Además, se mostró que la varianza de los errores de seguimiento no necesariamente converge a cero, esto debido a la presencia del canal aditivo cuya varianza P_d es un valor constante y diferente de cero, que actúa como entrada en (4.15).

La condición de convergencia temporal (4.16) en el Lema 2 es válida para cualquier tamaño de pelotón y los valores estacionarios (4.20) no dependen de las condiciones

iniciales. Claramente, (4.16) asegura tanto la estabilidad interna de $T(z)$ (requisito básico en la configuración determinista), como la estabilidad en sentido cuadrático, debido a la convergencia de las estadísticas de segundo orden (requisito fundamental cuando se trata de configuraciones estocásticas [75]). Además, (4.16) también asegura la existencia de estadísticas estacionarias de los errores, incluidas las densidades espectrales de potencia estacionaria. Este hecho se utiliza en la siguiente sección para estudiar la influencia del tamaño (número de vehículos) del pelotón.

4.3 Análisis de convergencia en el número de vehículos ($N \rightarrow \infty$)

Para completar las condiciones de estabilidad en cuerda es necesario analizar la evolución de los errores de seguimiento cuando el número de vehículos crece. Usualmente, esta propiedad es referida como análisis de escalabilidad del pelotón. Asumiendo $\rho(A) < 1$, la convergencia temporal del sistema (4.12) está garantizada, lo que también asegura la existencia de una media y una densidad espectral de potencia estacionarias. En el dominio de la frecuencia, las expresiones recursivas del error, y la condición que garantiza la escalabilidad del pelotón, se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Considere el sistema descrito en (4.12) y asumiendo que $\rho(A) < 1$. La media y la densidad espectral de potencia del error de seguimiento del i -ésimo vehículo, con $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, satisfacen*

$$\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = T(e^{j\omega})\mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) \quad (4.18)$$

$$\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + |T(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega})|^2 P_d + (1 - |T(e^{j\omega})|^2) |1 - S(e^{j\omega})|^2 P_d, \quad (4.19)$$

donde $\mu_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = T(e^{j\omega})\zeta_0(e^{j\omega})$, y $\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_d$. Adicionalmente, $\mu_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ y $\phi_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ permanecen acotados cuando $N \rightarrow \infty$, $\forall \omega$, si y solo si

$$|T(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega > 0. \quad (4.20)$$

Demostración. Ver Apéndice C. □

El Teorema 2 no solo permite caracterizar a la media y al espectro estacionario del error de seguimiento de cada vehículo, sino que también proporciona una condición necesaria para garantizar que dichas expresiones estacionarias permanezcan acotados a medida que el número de vehículos tiende a infinito. Esta condición permanece invariable independientemente de la longitud del pelotón. Es importante resaltar que si $\rho(A) \geq 1$, no es posible caracterizar la densidad espectral de potencia de los errores.

Observación 5. Dado el teorema 2, se puede notar que $\|T(z)\|_\infty \leq 1$ es una condición necesaria, pero no suficiente (como se mostró en la demostración) para que $\phi_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ permanezca acotado. De hecho, puede existir un ω^* diferente de cero, tal que $|T(e^{j\omega^*})| = 1$, y por lo tanto, la recursión $\phi_{\zeta_N}(e^{j\omega^*})$ no sería acotada, pues $S(e^{j\omega}) = 0$ solo cuando $\omega = 0$.

Para completar el análisis de escalabilidad se requiere conocer si el valor estacionario de la varianza de cada vehículo crece o disminuye a medida que se aumentan vehículos, y si existe un valor máximo al que convergen. Para ello, resulta conveniente escribir de forma alternativa la expresión (4.19). Así, reemplazando iterativamente los valores de ϕ_i , se concluye que

$$\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + |T^{i-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega})|^2 P_d, \quad \forall i \geq 2. \quad (4.21)$$

Corolario 1. Considere el pelotón descrito en (4.12) y que este satisface las condiciones (4.16) y (4.20). Entonces, para $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, las varianzas estacionarias P_{ζ_i} satisfacen

1. $P_{\zeta_{i-1}} \leq P_{\zeta_i} \quad \forall i > 1$
2. $\max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_N} = \|F_{\zeta_N}\|_2^2 P_d$
3. $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = \left(\left\| \frac{S(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - 1 \right) P_d.$

donde $F_{\zeta_N} = [ST^{N-1} \quad ST^{N-2} \quad \dots \quad ST \quad HT]$ y $M(z)$ es un factor espectral de fase mínima y estable, tal que $1 - T(z)T(z)^\sim = M(z)M(z)^\sim$.

Demostración. Ver Apéndice D. □

El corolario 1 establece que, si se cumplen las condiciones antes mencionadas, entonces las varianzas estacionarias aumentan con el índice de posición i , y están acotadas superiormente por un término que no depende de N . Es decir, los valores estacionarios de la varianza de cada vehículo convergen a un valor constante. Este límite superior es estacionario y no necesariamente válido para cualquier tiempo k , ya que algunas condiciones iniciales pueden generar variaciones transitorias que sobrepasen dicho valor estacionario.

4.4 Análisis de estabilidad en cuerda

Una vez conocidas las condiciones necesarias que aseguran la convergencia en el tiempo y la escalabilidad (convergencia en el número de vehículos) del pelotón, ahora resta analizar las condiciones de estabilidad en cuerda para el pelotón descrito en el sistema (4.12).

En particular, se estudian las condiciones que aseguran la estabilidad en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_p y la varianza con norma \mathcal{L}_q , según la Definición 6. Finalmente se proporcionan las condiciones que aseguran la estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio, según la Definición 7. Es importante resaltar que, dada la configuración bajo análisis, el enfoque es asegurar la estabilidad en cuerda con base a las normas \mathcal{L}_2 para la media y \mathcal{L}_∞ para la varianza. Sin embargo, la Definición 6 es válida para cualquier $p, q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, siempre que existan las normas correspondientes.

Se define \mathcal{G} como el conjunto de condiciones iniciales $\xi(0) \in \mathbb{R}^{nN}$ que son de segundo orden, con matriz de varianza definida positiva, y las entradas exógenas $\nu \in \mathbb{R}^N$ que se puede escribir como $\nu(k) = \eta_1 \zeta_0(k) + \mathbf{d}(k)$, donde $\eta_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^\top$. Esto implica que, dadas las suposiciones 2 y 3; su media y varianza son

$$\mu_\nu(k) = \eta_1 \zeta_0(k) \quad (4.22)$$

$$P_\nu(k) = P_{\mathbf{d}}(k) = \text{diag}(P_d, P_d, \cdots, P_d). \quad (4.23)$$

Además, se asume que sus correspondientes normas \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_∞ existen, y son tales que

$$\|\mu_\nu(k)\|_2 = \|\zeta_0(k)\|_2 \quad (4.24)$$

$$\|P_{\mathbf{d}}\|_{\mathcal{L}_\infty} = P_d. \quad (4.25)$$

Teorema 3. *Considere el pelotón descrito en (4.12). Las condiciones en (4.16) y (4.20) son necesarias y suficientes para lograr estabilidad en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_2 y la varianza con norma \mathcal{L}_∞ . Además, dichas condiciones también permiten lograr estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio. Los valores límite para la media y la varianza del error de seguimiento están dados por*

$$\lim_{k, N \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_N}(k) = 0,$$

$$\lim_{k, N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}(k) = \left(\left\| \frac{S(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - 1 \right) P_d.$$

Demostración. Ver Apéndice E. □

El teorema 3 presenta condiciones para la estabilidad en cuerda, mediante la selección de normas \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_∞ , para la media y la varianza respectivamente. Estas condiciones no dependen del tamaño del pelotón ni de las condiciones iniciales del estado y también son condiciones necesarias y suficientes para la **estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio**. Es importante destacar que (4.16) y (4.20) garantizan la estabilidad en cuerda para

la media y la varianza por separado. Sin embargo, esto no debe esperarse para diferentes configuraciones de pelotones o problemas de comunicación, como se informa en [43, 52] para canales con pérdida de datos, donde hay casos en los que la media se comporta de manera estable en cuerda, pero la varianza no.

4.5 Resultados de simulación

Para ilustrar los resultados teóricos expuestos en el presente capítulo se realizaron simulaciones del pelotón bajo análisis. Se consideró un pelotón de 20 agentes homogéneos, donde cada uno de ellos tiene una función de transferencia $T(z)$ (ver (4.5)) compuesta por

$$G(z) = \frac{1.11}{z-1}, \quad K(z) = \frac{(1.22/(1+h))z}{(z-1)(z+0.89)}, \quad \text{y} \quad H(z) = (1+h) - \frac{h}{z}.$$

Se seleccionaron dos valores para la constante *time-headway*, $h = 3.2$ con lo cual $\rho(A) = 0.5315$ y $\|T\|_\infty = 1$, y $h = 2.4$ con lo cual $\rho(A) = 0.6531$ y $\|T\|_\infty = 1.1577$. Estos valores permiten ilustrar el comportamiento en cuerda, tanto estable como inestable, respectivamente. De hecho, el Diagrama de Bode de la Figura 3.2a fue realizado con la transferencia $T(z)$ antes descrita, es decir, el límite de la estabilidad en cuerda sucede cuando $h = 2.8$.

La simulación consiste en un vehículo líder que parte del reposo (velocidad inicial cero) en la posición $y_0(0) = 0$. Dicho vehículo líder aplica una aceleración constante durante 15 segundos, y alcanza una velocidad de $28 [m/s] \approx 100 [Km/h]$. Luego, el vehículo líder mantiene su velocidad constante durante el resto del movimiento. Los restantes 20 vehículos del pelotón, deben seguir la referencia del líder y alcanzar la velocidad constante. Cuando se hace referencia a condiciones iniciales cero, quiere decir que todos los vehículos parten desde el reposo, desde el mismo punto ($y_i(0) = 0$). Cuando se hace referencia a condiciones iniciales diferentes de cero, significa que los vehículos parten desde el reposo, pero en diferentes posiciones iniciales (detrás del líder, y uno detrás del otro). Es importante destacar que, la posición inicial de los vehículos, es una variable aleatoria (con media $\mu_{y_i}(0)$ y varianza $P_{y_i}(0)$), y en los resultados de simulación se mostrará la media de dicha posición.

Por otro lado, los ruidos d_i son todos de media cero con varianza constante $P_d = 0.85$. Se realizaron 1×10^6 simulaciones de tipo Monte Carlo, para obtener las estadísticas de la media de la posición, la media del error de seguimiento y la varianza del error de seguimiento. Para facilitar la lectura de las siguientes gráficas, se usó un código de colores para distinguir a cada agente en el pelotón, donde el primer seguidor está representado en color azul oscuro y el último seguidor en color rojo oscuro.

Primero partimos por el caso con condiciones iniciales igual a cero, que a pesar de no ser un caso realista, ayuda a entender de mejor manera el comportamiento trasciende de las estadísticas del error. Los resultados de la simulación se muestran en la Figura. 4.4. Para la media del error de seguimiento, se puede observa en el caso estable en cuerda que para cada vehículo, las medias convergen (en el tiempo) a cero, y además su máxima amplitud va disminuyendo conforme se avanza en la cadena de vehículos. Por otro lado, si bien en el caso inestable en cuerda, la media del error también converge a cero (lo cual es de esperarse ya que $\rho(A) < 1$ y T está diseñado de tal manera que permite obtener error cero en estado estacionario), el comportamiento transitorio es oscilante. Lo importante a destacar es que dichas oscilaciones van incrementándose cuando se avanza en la cadena. Esto claramente se ve reflejado en el comportamiento oscilatorio de la media de la posición, lo cual puede provocar colisiones entre vehículos.

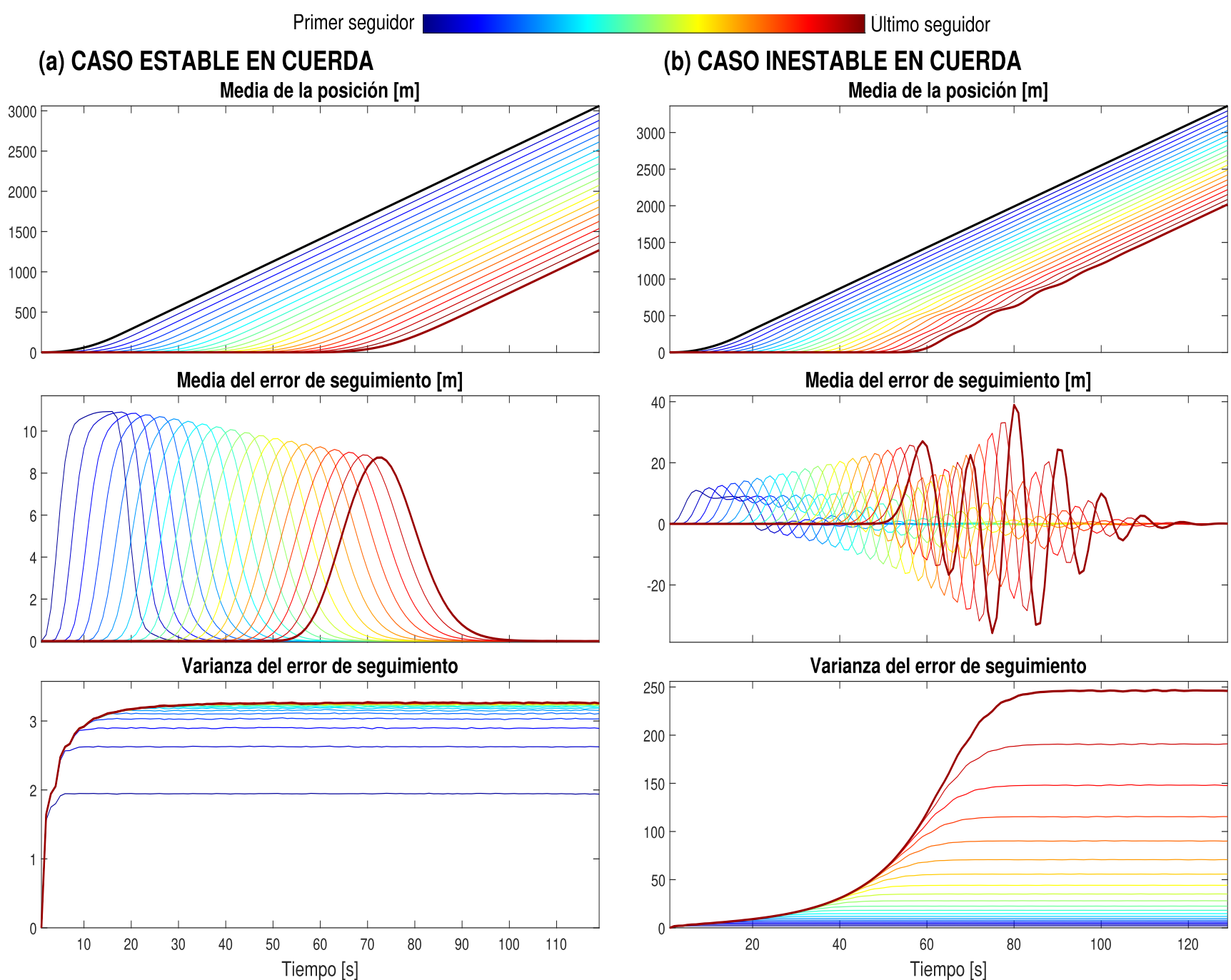


Figura 4.4: Comportamiento de un pelotón con canales afectados por ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales igual a cero.

Para el caso de las varianzas, en la Figura. 4.4 se puede apreciar que la varianza estacionaria de cada seguidor aumenta con el número de vehículos. Pero, cuando el pelotón es estable en cuerda, ese incremento converge a un valor constante; mientras que, cuando el pelotón es inestable en cuerda, sigue creciendo sin límites. Tanto de los gráficos de la media como de la varianza, vemos que en el caso inestable en cuerda, si se aumenta el número de vehículos, las estadísticas del error de seguimiento presentan un comportamiento oscilatorio.

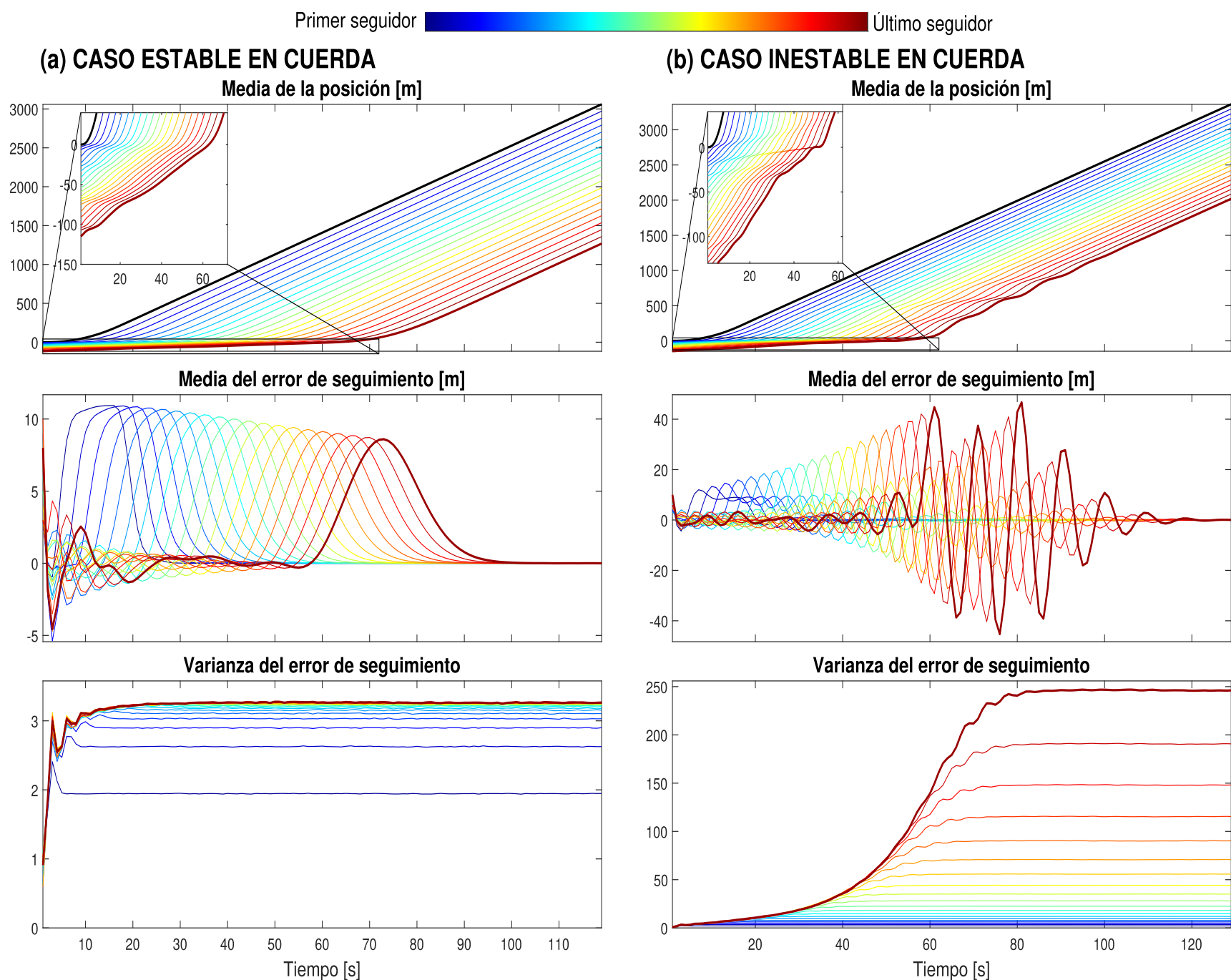


Figura 4.5: Comportamiento de un pelotón con canales afectados por ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales diferentes de cero.

En el Figura 4.5 se muestra la simulación del mismo pelotón, pero con condiciones iniciales distintas de cero. En este caso se observa que, durante el comportamiento transitorio, la varianza de algunos vehículos incluso podrían superar la varianza del último agente en la cadena. Sin embargo, el efecto de la condición inicial se desvanece en el tiempo y los valores de varianza de estado estacionario de cada vehículo son iguales al caso con condiciones iniciales cero.

Además de la media del error de seguimiento y de la media de la posición, se aprecia que cuando el pelotón es estable en cuerda, las oscilaciones producidas por las condiciones iniciales, tienen menos amplitud y se extinguen (en el tiempo) más rápido que cuando el pelotón es inestable.

CAPÍTULO

5

ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DEL RUIDO EN EL PRIMER AGENTE

En este capítulo se estudia al pelotón descrito en el Capítulo 4 pero considerando únicamente el canal de comunicación entre el líder y el primer seguidor afectado por ruido. Este análisis tiene por objetivo comprender mejor los fenómenos subyacentes de la propagación del ruido a lo largo de la cadena de vehículos.

5.1 Representación en espacio de estados

En el transcurso de este capítulo se estudian las condiciones de estabilidad en cuerda para el caso más simple donde solo la información del líder está corrompida por ruido aditivo. Es importante señalar que las consideraciones para las funciones de transferencia y el ruido aditivo (suposiciones 2 y 3), se mantienen en este caso particular de estudio. Así, la configuración que se analiza en este capítulo es la mostrada en el esquema de la Figura 5.1, donde d_1 denota el ruido del canal entre el líder y el primer seguidor.

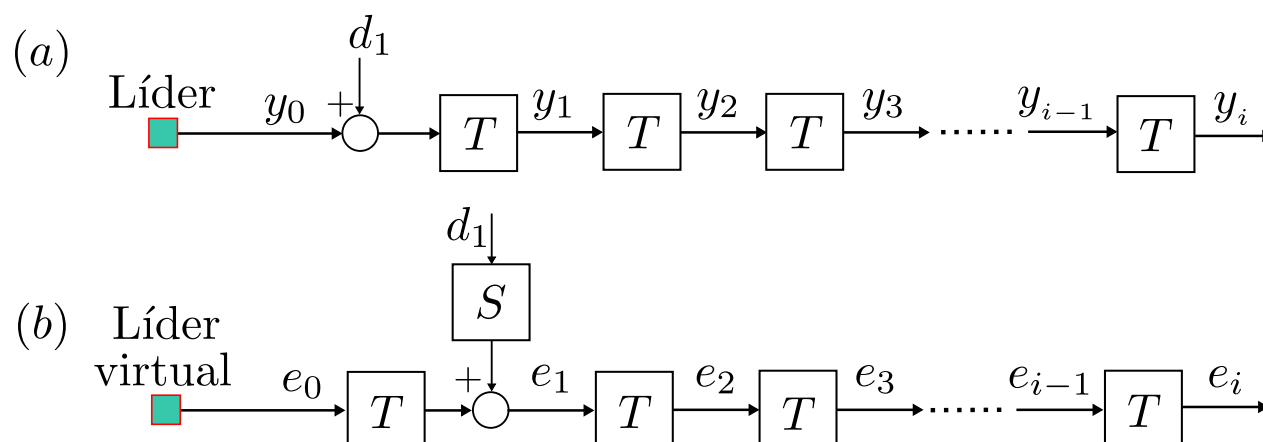


Figura 5.1: Concatenación de un pelotón con perturbación solo en el primer seguidor para (a) posición como entrada, (b) error local como entrada (representación usando el líder virtual).

De forma similar al caso anterior, se define el estado $x_i \in \mathbb{R}^n$ asociado a la función de transferencia $T(z) \triangleq C(zI - A)^{-1}B$, la cual tiene la siguiente representación

$$x_i(k+1) = \begin{cases} Ax_1(k) + By_0(k) + Bd_1(k) & \text{para } i = 1 \\ Ax_i(k) + BCx_{i-1}(k) & \text{para } i > 1 \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$y_i(k) = Cx_i(k), \quad (5.1b)$$

con $k \in \mathbb{N}_0$ y condiciones iniciales $x_i(0) = x_{i_0}$.

Lema 3. Con base en la representación alternativa del estado (4.10) y (4.11), la descripción en espacio de estados, en función del estado alternativo $\xi(k)$ y el error de seguimiento $\zeta(k)$, viene dada por

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}\xi(k) + \mathbf{B}_o \zeta_0(k) + \mathbf{B}_a d_1(k) + \mathbf{B}_b d_1(k-1) \quad (5.2a)$$

$$\zeta(k) = \mathbf{C}\xi(k), \quad (5.2b)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $\mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{B}_a \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{B}_b \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times nN}$ están dadas por

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & & & & \\ BC & A & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & BC & A & \end{bmatrix}, \mathbf{B}_o \triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_a \triangleq \begin{bmatrix} \lambda B \\ B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b \triangleq \begin{bmatrix} hB \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} C & & & & \\ & C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C & \end{bmatrix},$$

con $\lambda \triangleq -(1+h)$ y $d_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

Demostración. Ver Apéndice F. □

También, usando la representación de la Figura 5.1 se puede obtener la expresión del error de seguimiento asociado a sus funciones de transferencia

$$\zeta_i = \begin{cases} T\zeta_0 - HTd_1, & \text{para } i = 1, \\ T\zeta_1 + Td_1, & \text{para } i = 2, \\ T\zeta_{i-1}, & \text{para } i > 2. \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2 Análisis de convergencia en el tiempo ($k \rightarrow \infty$)

En el siguiente Lema, se especifican las estadísticas del sistema (5.2) y la condición necesaria para que dichas estadísticas converjan en el tiempo.

Lema 4. *Considere el pelotón descrito en (5.2). Entonces, las medias del estado y el error de seguimiento están dadas por*

$$\mu_{\xi}(k+1) = \mathbf{A}\mu_{\xi}(k) + \mathbf{B}_o \zeta_0(k), \quad \mu_{\xi}(0) = \mu_{\xi_0}, \quad (5.4a)$$

$$\mu_{\zeta}(k) = \mathbf{C}\mu_{\xi}(k) \quad (5.4b)$$

y sus matrices de varianza son

$$P_{\xi}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}P_{\xi}(k)\mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}_a P_{d_1} \mathbf{B}_a^{\top}, & \text{para } k = 0, \\ \mathbf{A}P_{\xi}(k)\mathbf{A}^{\top} + \Psi, & \text{para } k > 0, \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$P_{\zeta}(k) = \mathbf{C}P_{\xi}(k)\mathbf{C}^{\top}, \quad (5.5b)$$

donde $P_{\xi}(0) = P_{\xi_0}$ y $\Psi = [\mathbf{B}_a \mathbf{B}_a^{\top} + \mathbf{B}_b \mathbf{B}_b^{\top} + \mathbf{A} \mathbf{B}_a \mathbf{B}_b^{\top} + \mathbf{B}_b \mathbf{B}_a^{\top} \mathbf{A}^{\top}] P_{d_1}$. Adicionalmente, $\mu_{\zeta}(k)$ y $P_{\zeta}(k)$ convergen (en el tiempo) a valores estacionarios, para todo $N \in \mathbb{N}$, si y solo si

$$\rho(A) < 1. \quad (5.6)$$

Dichos valores estacionarios están dados por

$$\mu_{\zeta} = 0 \quad (5.7a)$$

$$P_{\zeta} = \text{vec}^{-1} \left((\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec}(\Psi) \right). \quad (5.7b)$$

Demostración. Ver Apéndice G. □

De los resultados del Lema 4, como es de esperarse, la condición de estabilidad en sentido cuadrático medio es la misma respecto al caso anterior y las expresiones de las estadísticas y valores estacionarios son similares, con los debidos cambios de matrices, según corresponda. El Lema 4 solo garantiza que las estadísticas del error de seguimiento convergen a valores estacionarios cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto, de la expresión de la varianza estacionaria (5.7b) no se puede aún concluir la influencia que tiene el ruido d_1 a lo largo de la cadena de N vehículos, para ello hace falta analizar la recursión en función del número de vehículos.

5.3 Análisis de convergencia en el número de vehículos ($N \rightarrow \infty$)

En adición a la condición de estabilidad en sentido cuadrático medio ($\rho(A) < 1$), a continuación se muestra la condición que asegura la escalabilidad del pelotón, es decir, si

las estadísticas del error de seguimiento permanecen acotadas cuando el número de vehículos se aproxima a infinito.

Teorema 4. *Considere el sistema descrito en (5.2) y asuma que $\rho(A) < 1$. La media estacionaria y la densidad espectral de potencia estacionaria del error de seguimiento del i -ésimo vehículo, con $i \in \{2, \dots, N\}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, satisfacen*

$$\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = T(e^{j\omega})\mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}), \quad (5.8)$$

$$\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = \begin{cases} |T(e^{j\omega})S(e^{j\omega})|^2 P_{d_1}, & \text{para } i = 2, \\ |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}), & \text{para } i > 2. \end{cases} \quad (5.9)$$

con $\mu_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = T(e^{j\omega})\zeta_0(e^{j\omega})$, y $\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_{d_1}$. Adicionalmente, $\mu_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ y $\phi_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ permanecen acotadas cuando $N \rightarrow \infty$, $\forall \omega$, si y solo si

$$\|T(z)\|_{\infty} \leq 1. \quad (5.10)$$

Demostración. Ver Apéndice H. □

Los resultados del Teorema 4 son ligeramente diferentes respecto al caso general analizado en el Capítulo 4. Esta diferencia está presente en la expresión recursiva para la densidad espectral de potencia, la cual, cuando solo existe perturbación en el primer seguidor, permite concluir directamente la condición necesaria y suficiente ($\|T(z)\|_{\infty} \leq 1$) cuando el número de vehículos crece indefinidamente.

Corolario 2. *Considere el sistema descrito en (5.2) y asuma que $\rho(A) < 1$ y $\|T(z)\|_{\infty} \leq 1$. Entonces, para $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, y $\forall N \in \mathbb{N}$, las varianzas estacionarias P_{ζ_i} satisfacen*

1. $P_{\zeta_i} \leq P_{\zeta_{i-1}} \quad \forall i > 1$
2. $\max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_1} = \|H(z)T(z)\|_2^2 P_{d_1}$
3. $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = 0$.

Demostración. Ver Apéndice I. □

Del Corolario 2, podemos ver que el vehículo con la máxima varianza estacionaria es el primer seguidor, que es el más afectado por el ruido. El valor de P_{ζ_1} es un límite superior para todas las variaciones estacionarias, que no depende del número de vehículos en el pelotón. Esto es diferente al caso estudiado en el Capítulo 4, donde el último vehículo presenta la mayor varianza.

5.4 Análisis de estabilidad en cuerda

Para este caso, definimos \mathcal{G} como el conjunto de condiciones iniciales de segundo orden $\xi(0) \in \mathbb{R}^{nN}$, con matriz de varianza definida positiva, y entradas exógenas $\nu \in \mathbb{R}^N$ que se puede escribir como $\nu(k) = \zeta_0(k) + d_1(k)$. Así $\mu_\nu(k) = \zeta_0(k)$, y $P_\nu(k) = P_{d_1}$.

Teorema 5. *Considere el sistema descrito en (5.2). Las condiciones $\rho(A) < 1$ y $\|T(z)\|_\infty \leq 1$ son necesarias y suficientes para conseguir estabilidad en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_2 y la varianza con norma \mathcal{L}_∞ . Además, dichas condiciones también permiten conseguir estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio. Los valores límite de la media y la varianza del error de seguimiento están dados por*

$$\lim_{k, N \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_N}(k) = 0,$$

$$\lim_{k, N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}(k) = 0.$$

Demostración. Ver Apéndice J. □

El Teorema 5 presenta las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la estabilidad en cuerda según las definiciones 6 y 7. En particular, tales condiciones son las mismas condiciones que garantizan la estabilidad de la cadena en algunas configuraciones deterministas con comunicación ideal [79].

Se puede notar que las condiciones para la estabilidad en cuerda, en este caso, son similares pero no iguales a las obtenidas en el Capítulo 4. La principal diferencia es que, en la configuración actual, la varianza estacionaria disminuye a lo largo de la cadena y se aproxima a cero a medida que el tamaño del pelotón crece sin límites. Por lo tanto, el efecto perjudicial del ruido se desvanece a lo largo de la cadena de vehículos. Esto explica por qué las variaciones en el Capítulo 4 tienen un límite superior, aunque cada vehículo se ve afectado por su propio canal ruidoso. En ese caso, cada vehículo sufre el efecto del ruido en el enlace de comunicación con sus predecesores, pero también se ve afectado por el efecto de la propagación del ruido de todos los vehículos que le preceden. Sin embargo, el efecto del ruido generado por un predecesor lejano a la posición del vehículo i es menos importante que los ruidos que están más cerca (en el índice de posición). De hecho, aquellos ruidos en una posición lejana van disminuyendo hacia cero cuando i crece, de tal forma que el valor estacionario de la varianza del último vehículo en la cadena, que además contiene la suma de los efectos de propagación, mismos que tienden a cero, resulta en la convergencia a un valor límite superior.

5.5 Resultados de simulación

Utilizando la misma función de transferencia $T(z)$ y las mismas consideraciones mencionadas en la Sección 4.5, en la Figura 5.2 se presenta el comportamiento estable e inestable en cuerda de las estadísticas del error de seguimiento para un pelotón con condiciones iniciales cero.

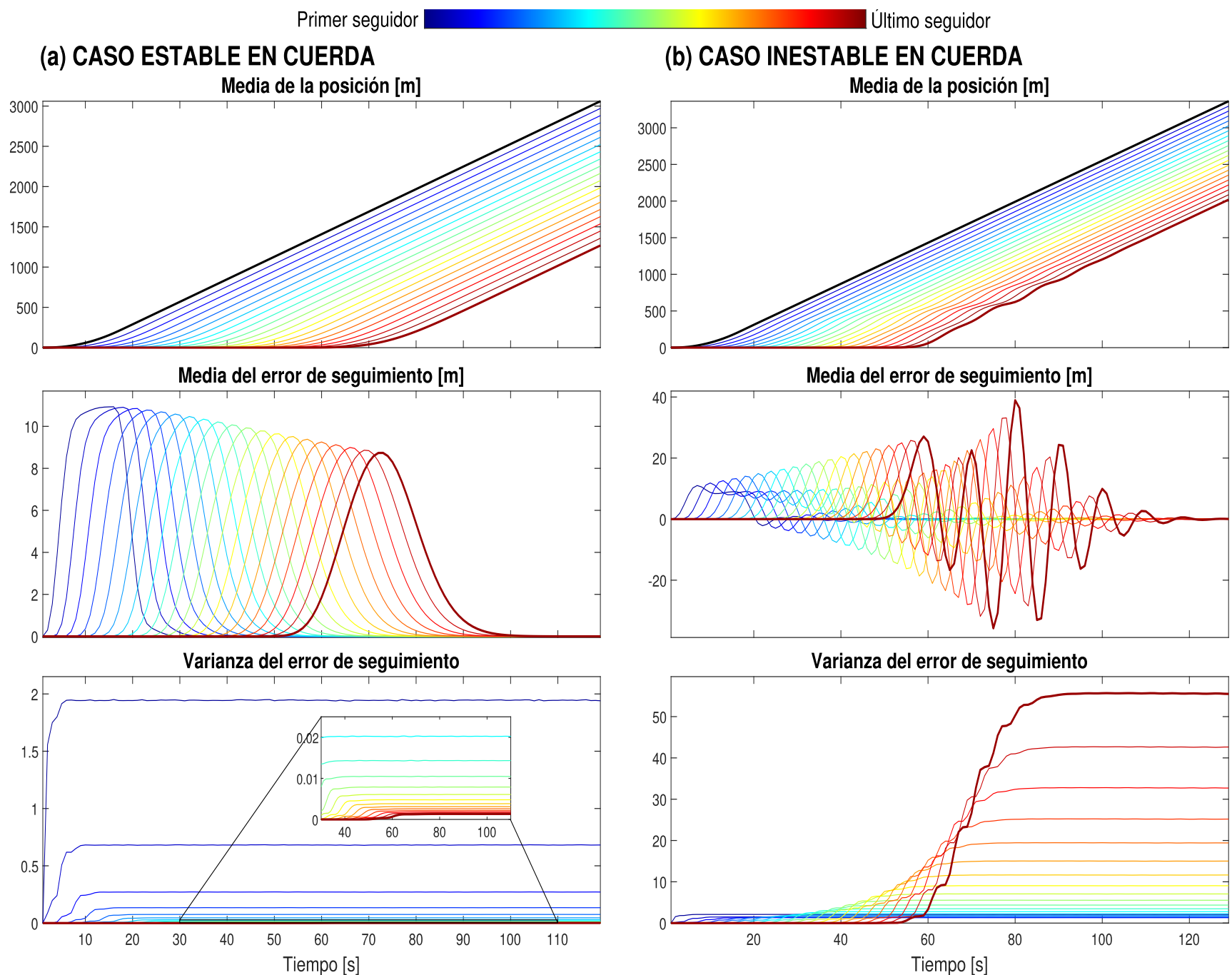


Figura 5.2: Comportamiento de un pelotón con ruido en el primer agente. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero.

En dicha gráfica se observa que la media del error de seguimiento de cada vehículo converge a cero, en el tiempo, en ambos casos ya que $\rho(A) < 1$; sin embargo, cuando el número de vehículos crece, la media está acotada (bajo la norma \mathcal{L}_2) solo en el caso estable. Esto muestra que la estabilidad en sentido cuadrático medio es una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad de la cuerda. El comportamiento de la media es similar al esperado para el error en un escenario con comunicación ideal. Por otro lado, la

varianza de cada vehículo converge en el tiempo a valores estacionarios; sin embargo, para el caso estable en cuerda, la varianza máxima se encuentra en el primer seguidor, y la varianza estacionaria de los siguientes vehículos disminuye a lo largo de la cadena. A medida que se agregan más vehículos a la cadena, la varianza estacionaria del N -ésimo vehículo se aproxima a cero como se esperaba del Teorema 5. Para el caso inestable en cuerda, agregar vehículos a la cadena implica que las varianzas estacionarias crecen sin límites, como se esperaba.

En la Figura 5.3 se repitió la simulación pero asumiendo condiciones iniciales distintas de cero. En comparación con el análisis anterior, las propiedades de estabilidad de la cuerda siguen siendo las mismas, siendo la principal diferencia en la evolución de las estadísticas transitorias, que como se comentó en el capítulo anterior, las oscilaciones producidas por las condiciones iniciales se extinguen más pronto en el caso estable en cuerda.

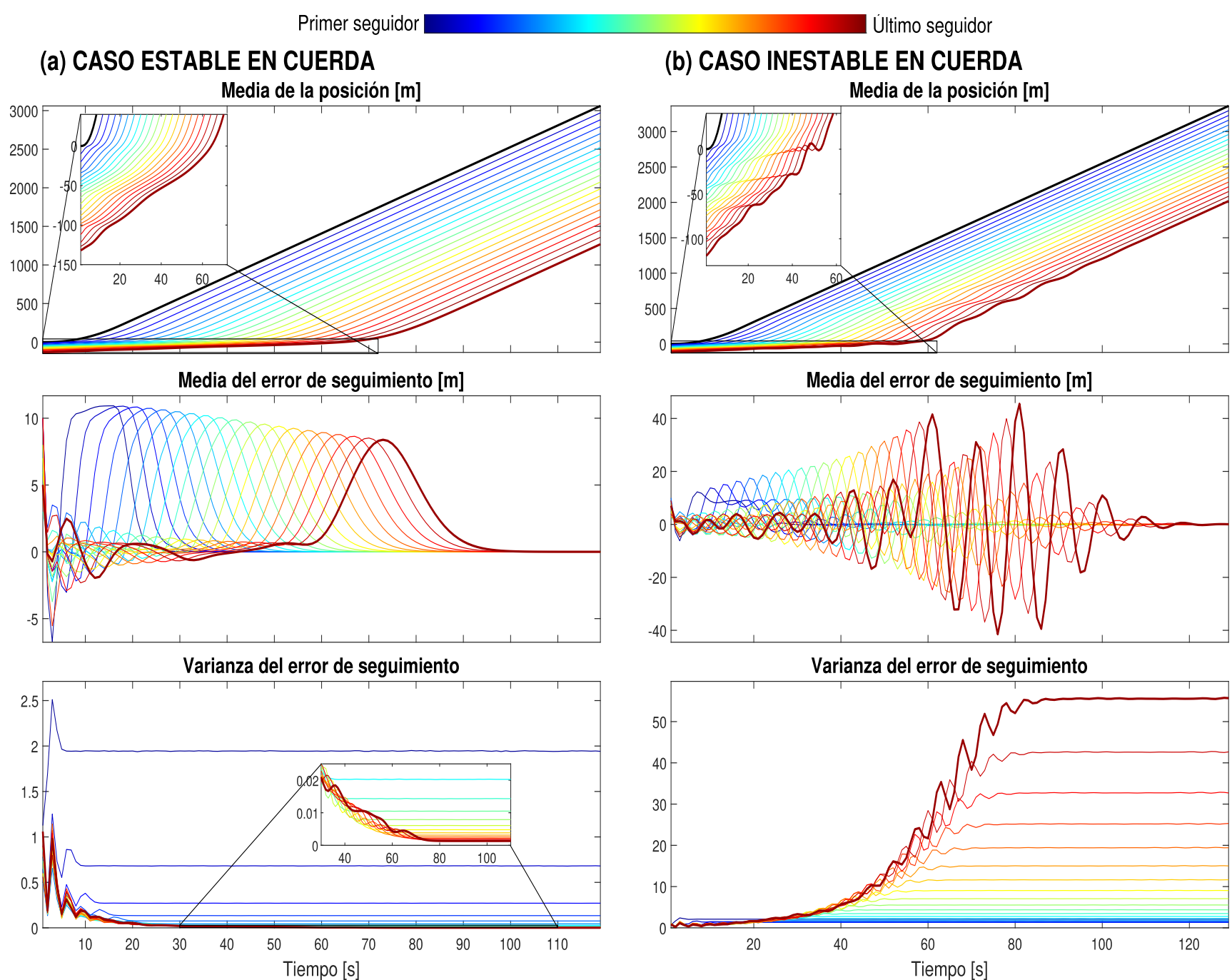


Figura 5.3: Comportamiento de un pelotón con ruido en el primer agente. Simulación realizada con condiciones iniciales diferentes de cero.

CAPÍTULO



CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Las definiciones proporcionadas para la estabilidad de cuerda estocástica se centran en la media y la varianza de las secuencias de señales del error de seguimiento que surgen en la interconexión de agentes dinámicos. Aunque la noción propuesta de estabilidad de cuerda se puede aplicar para estudiar diferentes problemas que involucran fenómenos estocásticos, la principal motivación son los pelotones que interactúan a través de canales de comunicación poco confiables. Específicamente, este trabajo se enfocó en analizar la propiedad de estabilidad en cuerda de un pelotón lineal, homogéneo con topología de seguimiento al predecesor, cuyos canales de comunicación se encuentran afectados por ruido blanco aditivo. Se ilustró la aplicabilidad de la definición propuesta, aplicada a dicha configuración, de la que se destaca que para garantizar la estabilidad en cuerda estocástica, se deben cumplir condiciones similares a las que aparecen en configuraciones deterministas. Los resultados obtenidos y la metodología de análisis (análisis de convergencia en el tiempo y análisis de escalabilidad) pueden servir como base para estudiar diferentes problemas y fenómenos que surgen cuando se utilizan canales de comunicación poco fiables. La noción proporcionada en este trabajo debería servir para analizar diversos esquemas de control cooperativo dentro del marco de los sistemas de control en red.

Como parte del trabajo futuro, el enfoque se pondrá en estudiar las condiciones necesarias y suficientes que satisfacen la definición de estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio, para canales de comunicación afectados por pérdida aleatoria de datos, y restricciones del tipo SNR (relación señal-ruido).

APÉNDICES

A Demostración del Lema 1

Considere la descripción en variables de estado dada en (4.9) y la representación del estado alternativo dada en (4.10). Respectivamente, para cada vehículo se pueden obtener las siguientes ecuaciones del estado alternativo $\xi_i(k)$:

Seguidor $i = 1$. Combinando el estado $x_1(k+1) = Ax_1(k) + By_0(k) + Bd_1(k)$ con la ecuación del estado alternativo $\xi_1(k) = x_0(k) - x_1(k) - hx_1(k) + hx_1(k-1)$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \xi_1(k+1) = & A\xi_1(k) + x_0(k+1) - Ax_0(k) - hx_1(k+1) + hAx_1(k) + hx_1(k) \\ & - hAx_1(k-1) - By_0(k) - Bd_1(k). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Entonces, dada la representación en espacio de estados del líder virtual

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= Ax_0(k) + Br_0(k) \\ y_0(k) &= Cx_0(k), \end{aligned}$$

se puede reemplazar x_0 en (A.1) para obtener el estado alternativo del primer seguidor

$$\begin{aligned} \xi_1(k+1) &= A\xi_1(k) + B[r_0(k) - (1+h)y_0(k) + hy_0(k-1)] - (1+h)Bd_1(k) + hBd_1(k-1) \\ &= A\xi_1(k) + B\zeta_0(k) - (1+h)Bd_1(k) + hBd_1(k-1). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Partiendo de la definición del error de seguimiento (4.4), se puede obtener la expresión de $\zeta_1(k)$ en función del estado $\xi_1(k)$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(k) &= C[x_0(k) - (1+h)x_1(k) + hx_1(k-1)] \\ &= C\xi_1(k). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Seguidor $i > 1$. Procediendo de forma similar que con el primer seguidor, se pueden combinar el estado $x_i(k+1) = Ax_i(k) + BCx_{i-1}(k) + Bd_i(k)$ con el estado alternativo $\xi_i(k) = x_{i-1}(k) - (1+h)x_i(k) + hx_i(k-1)$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= A\xi_i(k) + x_{i-1}(k+1) - Ax_{i-1}(k) - hx_i(k+1) + hAx_i(k) + hx_i(k) \\ &\quad - hAx_i(k-1) - BCx_{i-1}(k) - Bd_i(k). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando el estado $x_{i-1}(k+1) = Ax_{i-1}(k) + BCx_{i-2}(k) + Bd_{i-1}(k)$ en (A.4) se sigue

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= A\xi_i(k) + BC[x_{i-2}(k) - (1+h)x_{i-1}(k) + hx_{i-1}(k-1)] + Bd_{i-1}(k) \\ &\quad - (1+h)Bd_i(k) + hBd_i(k-1) \\ &= A\xi_i(k) + BC\xi_{i-1}(k) + Bd_{i-1}(k) - (1+h)Bd_i(k) + hBd_i(k-1). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Para el error de seguimiento es fácil ver que

$$\begin{aligned} \zeta_i(k) &= C[x_{i-1}(k) - (1+h)x_i(k) + hx_i(k-1)] \\ &= C\xi_i(k). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, escribiendo las expresiones (A.2), (A.5), (A.3) y (A.6) en forma matricial, para todos los $i \in \mathbb{N}$, se concluye la demostración. \square

B Demostración del Lema 2

Las medias en (4.14) se pueden obtener directamente aplicando el operador esperanza en (4.12) y recordando que $\zeta_0(k)$ es una entrada determinística y $\mu_d(k) = 0, \forall k \geq 0$. Por otro lado, la varianza del estado se obtiene como

$$\begin{aligned} P_\xi(k+1) &= \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k+1) \bar{\xi}(k+1)^\top \right\} \\ &= \mathbf{A} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\mathbf{d}}(k-1)^\top \right\} \mathbf{B}_b^\top + \mathbf{B}_b \mathcal{E} \left\{ \bar{\mathbf{d}}(k-1) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{A}^\top \\ &\quad + \mathbf{B}_a \mathcal{E} \left\{ \bar{\mathbf{d}}(k) \bar{\mathbf{d}}(k)^\top \right\} \mathbf{B}_a^\top + \mathbf{B}_b \mathcal{E} \left\{ \bar{\mathbf{d}}(k-1) \bar{\mathbf{d}}(k-1)^\top \right\} \mathbf{B}_b^\top, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{E} \left\{ \bar{\mathbf{d}}(k) \bar{\mathbf{d}}(k)^\top \right\} = P_d(k)$, y los términos cruzados $\mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\mathbf{d}}(k-1)^\top \right\} = \mathbf{B}_a P_d(k-1)$ y $\mathcal{E} \left\{ \bar{\mathbf{d}}(k-1) \bar{\xi}(k)^\top \right\} = P_d(k-1) \mathbf{B}_a^\top$. Para completar la demostración del estado, basta con notar la Suposición 2 en que, $P_d(k) = 0, \forall k < 0$ y $P_d(k) = P_d, \forall k \geq 0$.

Finalmente, la varianza del error de seguimiento se obtiene directamente de la varianza del estado, como $P_\zeta(k) = \mathcal{E} \left\{ \bar{\zeta}(k) \bar{\zeta}(k)^\top \right\} = \mathbf{C} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{C}^\top$.

Para derivar la condición que asegura la convergencia en el tiempo de la media y la varianza del error de seguimiento, i.e. el pelotón es estable en sentido cuadrático medio, se toma en cuenta la Suposición 3 en que el error de seguimiento del líder virtual converge a cero en estado estacionario, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_0(k) = \zeta_0$. Esta demostración se divide en dos partes, necesidad y suficiencia:

Necesidad: Si el pelotón es estable en sentido cuadrático medio, entonces existen los valores estacionarios $\mu_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\xi(k)$ y $\mu_\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\zeta(k)$ tales que las medias en (4.14) satisfacen

$$\mu_{\xi} = \mathbf{A}\mu_{\xi} + \mathbf{B}_o \zeta_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_o \zeta_0 \quad (\text{A.7a})$$

$$\mu_{\zeta} = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_o \zeta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{B}_o \zeta_0. \quad (\text{A.7b})$$

Esto implica que μ_{ζ} converge a un valor estacionario solo si el sumatorio permanece acotado, i.e. $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Notando que los autovalores de la matriz \mathbf{A} son los autovalores de su diagonal principal por bloques, es decir, los valores propios de A con multiplicidad i . Por lo tanto, $\rho(\mathbf{A}) < 1$ si y solo si $\rho(A) < 1$. Esto muestra que (4.16) es necesario para que la media del error de seguimiento converja en sentido cuadrático medio.

Bajo la misma suposición de convergencia en sentido cuadrático, deben existir los valores estacionarios $P_{\xi} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\xi}(k)$ y $P_{\zeta} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\zeta}(k)$, tales que las varianzas en (4.15) satisfacen

$$P_{\xi} = \mathbf{A}P_{\xi}\mathbf{A}^{\top} + \Upsilon \quad (\text{A.8a})$$

$$P_{\zeta} = \mathbf{C}P_{\xi}\mathbf{C}^{\top}. \quad (\text{A.8b})$$

Aplicando el operador lineal vec en (A.8) se puede obtener

$$vec\{P_{\xi}\} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})vec\{P_{\xi}\} + vec\{\Upsilon\} = (\mathbf{I} - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1}vec\{\Upsilon\} \quad (\text{A.9a})$$

$$vec\{P_{\zeta}\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})vec\{P_{\xi}\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^k vec\{\Upsilon\}. \quad (\text{A.9b})$$

Por tanto, la convergencia de la varianza está asegurada cuando $\rho(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) < \rho(\mathbf{A}) < 1$, que por la estructura diagonal por bloques de la matriz \mathbf{A} , se reduce a $\rho(A) < 1$. Esto concluye la demostración de que (4.16) es necesaria para la convergencia de la varianza del error de seguimiento, cuando $k \rightarrow \infty$.

Suficiencia: Alternativamente, las expresiones de la media y la varianza del error de seguimiento en (4.14b) y (4.15b) respectivamente, se pueden escribir de forma recursiva:

$$\mu_{\zeta}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1). \quad (\text{A.10a})$$

$$vec\{P_{\zeta}\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^k vec\{P_{\xi}(0)\} + (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{k-j} vec\{\Upsilon\}. \quad (\text{A.10b})$$

Suponga que se cumple la condición de estabilidad en sentido cuadrático medio (4.16). Entonces, claramente la convergencia de las estadísticas en (A.10) están aseguradas, ya que $\rho(A)$ es condición suficiente para que dichas expresiones recursivas permanezcan acotadas

en el tiempo. Esto concluye que $\rho(A)$ es condición suficiente para que las estadísticas de segundo orden converjan a valores estacionarios cuando $k \rightarrow \infty$.

Si las estadísticas del error de seguimiento son estables en sentido cuadrático medio y la entrada del error virtual ζ_0 converge a cero en estado estacionario, de (A.7) se concluye que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\zeta(k) = 0$. Finalmente, aplicando la operación vec^{-1} en (A.9) se puede concluir el valor estacionario $\lim_{k \rightarrow \infty} P_\zeta(k) = vec^{-1} \left((C \otimes C)(I - A \otimes A)^{-1} vec(\Upsilon) \right)$.

C Demostración del Teorema 2

Considerando las medias del estado y el error de seguimiento, presentadas en (4.14), es fácil ver que para cada vehículo ($\forall i \geq 1$) se cumple

$$\mu_{\xi_i}(k+1) = A\mu_{\xi_i}(k) + B\mu_{\zeta_{i-1}}(k) \quad (\text{A.11})$$

$$\mu_{\zeta_i}(k) = C\mu_{\xi_i}(k), \quad (\text{A.12})$$

donde $\mu_{\zeta_0}(k) = \zeta_0(k)$, debido a que ζ_0 es una señal determinística. Aplicando herramientas estándar del análisis en el dominio de la frecuencia, se puede concluir que la media del error de seguimiento satisface

$$\begin{aligned} \mu_{\zeta_i}(z) &= C(zI - A)^{-1} B\mu_{\zeta_{i-1}}(z) \\ &= T(z)\mu_{\zeta_{i-1}}(z). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado, para obtener la expresión del espectro estacionario se hace uso de las transferencias del error de seguimiento (4.13), y de la función de covarianza. Esta sección de la demostración se divide en dos partes, para $i = 1$ y posteriormente para $i > 1$.

Seguidor $i = 1$. De (4.13) se sabe que $\zeta_1 = T\zeta_0 - HTd_1$. Entonces, se puede escribir directamente la densidad espectral de potencia del error de seguimiento como

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})T(e^{j\omega}) \phi_{d_1} T(e^{j\omega})^{\sim} H(e^{j\omega})^{\sim} \\ &= |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_d \end{aligned}$$

donde se usó que ζ_0 es una señal determinística y por tanto $\phi_{\zeta_0}(e^{j\omega}) = 0$, y que $\phi_{d_1} = P_d$.

Seguidor $i > 1$. De forma similar, de (4.13) la transferencia del error de seguimiento satisface $\zeta_i = T\zeta_{i-1} + Td_{i-1} - HTd_i$. Entonces, la densidad espectral de potencia es

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_i}(z) &= T(z) \phi_{\zeta_{i-1}}(z) T(z)^{\sim} + T(z) P_d T(z)^{\sim} + H(z)T(z) P_d T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} \\ &\quad + T(z) \phi_{\zeta_{i-1}d_{i-1}} T(z)^{\sim} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde $\phi_{\zeta_{i-1}d_{i-1}}$ se debe a que el error ζ_{i-1} está correlacionado con el ruido d_{i-1} . Para obtener esta expresión se hace uso de la función de covarianza $R_{\zeta_i d_i}(k + \tau, k)$, la cual viene dada por $R_{\zeta_i d_i}(k + \tau, k) = \mathcal{E} \{ \bar{\zeta}_i(k + \tau) \bar{d}_i(k)^\top \} = C \mathcal{E} \{ \bar{\xi}_i(k + \tau) \bar{d}_i(k)^\top \}$.

De esta última expresión, realizando el análisis para $\tau > 0$ se obtiene la función de covarianza estacionaria $R_{\zeta_i d_i}(\tau)$ descrita por

$$R_{\zeta_i d_i}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{para } \tau = 0 \\ \lambda C B P_d, & \text{para } \tau = 1 \\ \lambda C A^{\tau-1} B P_d + h A^{\tau-2} B P_d, & \text{para } \tau > 1. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Luego, utilizando (A.15) se puede obtener la densidad espectral de potencia estacionaria como sigue

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_i d_i}(z) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\zeta_i d_i}(\tau) z^{-\tau} \\ &= \left[\sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_i d_i}(\tau) z^{-\tau} \right]^{\sim} + \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_i d_i}(\tau) z^{-\tau} + R_{\zeta_i d_i}(0) \\ &= \left[\sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda C A^{\tau-1} B P_d z^{-\tau} \right]^{\sim} + \left[\sum_{\tau=2}^{\infty} h C A^{\tau-2} B P_d z^{-\tau} \right]^{\sim} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda C A^{\tau-1} B P_d z^{-\tau} \\ &\quad + \sum_{\tau=2}^{\infty} h C A^{\tau-2} B P_d z^{-\tau} \\ &= P_d (\lambda + h z) B^\top (zI - A)^{-\sim} C^\top + (\lambda + h z^{-1}) C (zI - A)^{-1} B P_d \\ &= -P_d H(z)^{\sim} T(z)^{\sim} - H(z) T(z) P_d \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

donde se usaron las equivalencias $\sum_{\tau=1}^{\infty} A^{\tau-1} z^{-\tau} = (zI - A)^{-1}$ y $\sum_{\tau=2}^{\infty} A^{\tau-2} z^{-\tau} = z^{-1} (zI - A)^{-1}$, y que $\phi_{d_i}(z) = P_d$. Finalmente, reemplazando (A.16) en (A.14) y además, sumando y restando convenientemente el término $H(z) T(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} T(z)^{\sim} H(z)^{\sim}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_i}(z) &= T(z) \phi_{\zeta_{i-1}}(z) T(z)^{\sim} + T(z) P_d T(z)^{\sim} + H(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} \\ &\quad - T(z) P_d T(z)^{\sim} T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} - H(z) T(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} \\ &\quad + H(z) T(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} - H(z) T(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} \\ &= T(z) \phi_{\zeta_{i-1}}(z) T(z)^{\sim} + [1 - T(z) T(z)^{\sim}] H(z) T(z) P_d T(z)^{\sim} H(z)^{\sim} \\ &\quad + [1 - H(z) T(z)] T(z) P_d T(z)^{\sim} [1 - H(z)^{\sim} T(z)^{\sim}] \\ &= |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + |T(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega})|^2 P_d + (1 - |T(e^{j\omega})|^2) |1 - S(e^{j\omega})|^2 P_d \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde se usó que $S(z) = 1 - H(z) T(z)$.

Como se observa en (A.13) y (A.17), tanto la media como el espectro estacionario se pueden escribir como recursiones que relacionan las estadísticas del vehículo i -ésimo con las estadísticas de su predecesor inmediato. Además, nótese que dichas recursiones no dependen del tiempo k debido a la transformada z . Esto último permite estudiar la influencia de agregar un nuevo agente a la cadena de vehículos.

Claramente, si $|T(e^{j\omega})| > 1$ para cualquier ω , ni (A.13) o (A.17) generaran una secuencia acotada en i cuando $N \rightarrow \infty$. Cuando $\omega = 0$, la media (A.13) y la densidad espectral de potencia (A.17) generan una secuencia acotada dado que $S(1) = 0$ y $T(1) = 1$, por acción del doble integrador en $K(z)G(z)$. Para todo $\omega > 0$ la condición suficiente que garantiza la escalabilidad es $|T(e^{j\omega})| < 1$. Sin embargo, particularmente cuando $|T(e^{j\omega^*})| = 1$, para cualquier $\omega^* > 0$, la recursión en (A.17) crece indefinidamente dado que $|S(e^{j\omega^*})| = 0$ solo para $\omega^* = 0$. Nótese que en caso contrario $S(e^{j\omega^*}) = 1 - H(e^{j\omega^*})T(e^{j\omega^*}) = 0$, implica que $H(e^{j\omega^*}) = 1$, lo cual no es posible dada la estructura de $H(e^{j\omega^*})$, a menos que $\omega^* = 0$. Entonces, se concluye que $|T(e^{j\omega})| < 1$ es condición necesaria para asegurar la escalabilidad del pelotón.

D Demostración del Corolario 1

A partir de la densidad espectral de potencia del error de seguimiento en (4.21) se puede obtener la varianza estacionaria utilizando la definición estándar de norma-2 para sistemas

$$\begin{aligned} P_{\zeta_i} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + T^{i-1}(e^{j\omega}) S(e^{j\omega}) P_d S(e^{j\omega})^{\sim} T^{i-1}(e^{j\omega})^{\sim} \right) d\omega \\ &= P_{\zeta_{i-1}} + \|T^{i-1}(z)S(z)\|_2^2 P_d, \quad \forall i \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Claramente, de (A.18) se concluye que $P_{\zeta_i} > P_{\zeta_{i-1}}$ y por lo tanto P_{ζ_N} es el valor máximo, siendo N el último vehículo del pelotón. Por otro lado, usando (A.18) de forma iterativa, y explotando propiedades de la norma-2, se puede escribir $\max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_N} = \|F_{\zeta_N}\|_2^2 P_d$, donde $F_{\zeta_N} = \begin{bmatrix} ST^{N-1} & ST^{N-2} & \dots & ST & HT \end{bmatrix}$.

Para determinar el valor final cuando $N \rightarrow \infty$, se utiliza (4.19), y se define el factor espectral $|M(e^{j\omega})|^2 = 1 - |T(e^{j\omega})|^2$, de modo que $\phi_{\zeta_\infty} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{\zeta_N}$ satisface

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) &= |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) + (1 - |T(e^{j\omega})|^2) |1 - S(e^{j\omega})|^2 P_d + |S(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_d \\ |M(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_\infty} &= (|M(e^{j\omega})|^2 |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 - |M(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega})|^2 + |S(e^{j\omega})|^2) P_d \\ \phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) &= \left(\frac{|S(e^{j\omega})|^2}{|M(e^{j\omega})|^2} + H(e^{j\omega})T(e^{j\omega}) + H(e^{j\omega})^{\sim}T(e^{j\omega})^{\sim} - 1 \right) P_d. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Dado que $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) d\omega$, se sigue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = \left(\left\| \frac{S(z)}{M(z)} \right\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle H(z)T(z), 1 \rangle - 1 \right) P_d. \quad (\text{A.20})$$

La demostración se concluye notando que, dado el supuesto de que $T(z)$ es estrictamente propia, por tanto $H(z)T(z)$ y 1 son ortogonales, y su producto interno $\langle H(z)T(z), 1 \rangle = 0$.

E Demostración del Teorema 3

Media del error de seguimiento: Considere la ecuación recursiva (A.10a). Para acceder al vehículo i -ésimo se utiliza $\mu_{\zeta_i}(k) = \eta_i \mu_\zeta(k)$ donde $\eta_i \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ es un vector de ceros, excepto por el elemento en la posición i , que es igual a uno. Entonces la media del error de seguimiento del vehículo i -ésimo se escribe como

$$\mu_{\zeta_i}(k) = \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1), \quad (\text{A.21})$$

donde $\mu_\xi(0)$ es la media de la condición inicial del estado $\xi(0)$. Usando la desigualdad triangular se sigue que

$$\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \left\| \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) \right\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \sum_{j=1}^k \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1) \right\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Para el término asociado a la condición inicial, su norma se calcula como

$$\begin{aligned} \left\| \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) \mu_\xi(0)^\top \mathbf{A}^{k^\top} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mu_\xi(0)^\top \mathbf{A}^{k^\top} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\|\mu_\xi(0)\|_2^2 \rho(\mathbf{A}^{k^\top} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right] \\ &= \|\mu_\xi(0)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho(\mathbf{A}^{k^\top} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde se usó la propiedad (2.3). Por lo tanto,

$$\left\| \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|\mu_\xi(0)\|_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho(\mathbf{A}^{k^\top} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.23})$$

Por otro lado, dado que $\zeta_0(k)$ es una señal determinística y $\mu_{d_i}(k) = 0$, la respuesta debido a la entrada principal se puede tratar como en el caso determinístico. Es decir, para una entrada acotada que converge a cero, como lo es $\zeta_0(k)$, de (4.18) y (A.10a) se puede notar que $\sum_{j=1}^k \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1)$ es la repuesta de T^i a la entrada ζ_0 , y por lo tanto

$$\left\| \sum_{j=1}^k \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1) \right\|_{\mathcal{L}_2} = \|T(z)^i\|_{\infty} \|\zeta_0(k)\|_{\mathcal{L}_2}. \quad (\text{A.24})$$

Se puede notar que, si $\|T(z)\|_{\infty} \leq 1$, entonces (A.24) permanece acotada para cualquier norma \mathcal{L}_2 de la referencia acotada $\zeta_0(k)$, con $i \in \mathbb{N}$; caso contrario, la media no es acotada. Dado que $\mu_{\nu}(k) = \zeta_0(k)$ y asumiendo que $\|T(z)\|_{\infty} \leq 1$ se concluye que

$$\left\| \sum_{\ell=1}^k \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-\ell} \mathbf{B}_o \zeta_0(\ell-1) \right\|_{\mathcal{L}_2} < \|T(z)\|_{\infty} \|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}. \quad (\text{A.25})$$

Por lo tanto, bajo las condiciones anteriores, la media del error de seguimiento satisface

$$\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \alpha_1 (\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}) + \beta_1 (\|\mu_{\xi}(0)\|_2), \quad (\text{A.26})$$

donde las funciones clase- \mathcal{K} , α_1 y β_1 están definidas en (A.25) y (A.23), respectivamente.

Varianza del error de seguimiento: La expresión recursiva de la varianza del error de seguimiento tiene la forma

$$P_{\zeta_i}(k) = f_i(P_{\xi}(0), k) + g_i(P_d, k), \quad (\text{A.27})$$

donde $P_{\xi}(0)$ es la varianza de la condición inicial del estado $\xi(0)$ y $g_i(P_d, k)$ es una función lineal en P_d . Usando la desigualdad triangular se obtiene

$$\|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \leq \|f_i(P_{\xi}(0), k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} + \|g_i(P_d, k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}. \quad (\text{A.28})$$

De (4.15b) se puede obtener la expresión recursiva respecto a la condición inicial

$$f_i(P_{\xi}(0), k) = \eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k P_{\xi}(0) \mathbf{A}^{k\top} \mathbf{C}^{\top} \eta_i^{\top}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Explotando la propiedad (2.3) se continua

$$\begin{aligned} \|f_i(P_{\xi}(0), k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} &= \max_k (\eta_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k P_{\xi}(0) \mathbf{A}^{k\top} \mathbf{C}^{\top} \eta_i^{\top}) \\ &\leq \max_k \rho(\mathbf{A}^k P_{\xi}(0) \mathbf{A}^{k\top}) \|\eta_i \mathbf{C}\|_2. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Dado que el radio espectral $\rho(\mathbf{A}^k P_\xi(0) \mathbf{A}^{k\top})$ logra su máximo cuando $k = 0$ (pues se asume que $\rho(\mathbf{A}) < 1$), y como \mathbf{C} es diagonal por bloques, $\eta_i \mathbf{C} \mathbf{C}^\top \eta_i^\top = \mathbf{C} \mathbf{C}^\top$, y $\|\eta_i \mathbf{C}\|_2^2 = \|\mathbf{C}\|_2^2$, finalmente se concluye

$$\|f_i(P_\xi(0), k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \rho(P_\xi(0)) \|\eta_i \mathbf{C}\|_2 = \sigma_{max}(P_\xi(0)) \|\mathbf{C}\|_2, \quad (\text{A.30})$$

donde se usó la propiedad (2.4).

Para obtener la función que acota a $\|g_i(P_d, k)\|_{\mathcal{L}_\infty}$, primero se muestra que el máximo de $g_i(P_d, k)$ ocurre cuando $k \rightarrow \infty$. Para ello, se debe notar que $g_i(P_d, k) = P_{\zeta_i}(k)$ cuando $P_\xi(0) = 0$. Dado que la varianza del ruido $P_d > 0$ y asumiendo $P_\xi(0) = 0$, de (4.15a) se obtiene que $P_\xi(1) - P_\xi(0) = \mathbf{B}_a P_d \mathbf{B}_a^\top \geq 0$. La siguiente diferencia en el tiempo también es positiva semi-definida dado que

$$\begin{aligned} P_\xi(2) - P_\xi(1) &= \mathbf{A} P_\xi(1) \mathbf{A}^\top + \Upsilon - \mathbf{B}_a P_d \mathbf{B}_a^\top \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b) P_d (\mathbf{A} \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b)^\top \geq 0. \end{aligned}$$

Para $k \geq 2$, de (4.15a) se obtiene que $P_\xi(k+1) - P_\xi(k) = \mathbf{A} [P_\xi(k) - P_\xi(k-1)] \mathbf{A}^\top$. Por lo tanto, se concluye que $P_\xi(k+1) - P_\xi(k) \geq 0, \forall k \geq 0$. Finalmente, notando que $P_\zeta(k+1) - P_\zeta(k) = \mathbf{C} [P_\xi(k+1) - P_\xi(k)] \mathbf{C}^\top$, la diferencia en el tiempo de $P_\zeta(k+1) - P_\zeta(k)$, es también una matriz positiva semi-definida. Además, esto implica que $P_{\zeta_i}(k+1) - P_{\zeta_i}(k)$ es un escalar positivo, dado que cada sub matriz de una matriz positiva definida también es positiva definida [64]. Entonces, cuando $P_\xi(0) = 0$, $P_{\zeta_i}(k)$ es una función creciente en k , y su máximo valor se alcanza cuando $k \rightarrow \infty$.

Del Teorema 2 se sabe que $\|T(z)\|_\infty \leq 1$ asegura la existencia de varianzas estacionarias, para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, del Corolario 1 se concluyó que, para un pelotón de N agentes, la mayor varianza estacionaria está dada por P_{ζ_N} . Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} \|g_i(P_d, k)\|_{\mathcal{L}_\infty} &\leq \|g_N(P_d, k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &= \|P_{\zeta_N}(k)\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \text{cuando } P_\xi(0) = 0 \\ &= \left(\left\| \frac{S(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - 1 \right) P_d, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

donde se usó que $\|P_d\|_{\mathcal{L}_\infty} = P_d$, y el valor máximo de P_{ζ_N} cuando $N \rightarrow \infty$, obtenido en el Corolario 1. Entonces, se concluye que la varianza del error de seguimiento satisface

$$\|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \alpha_2(\|P_d\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \beta_2(\|P_\xi(0)\|_{\mathcal{L}_\infty}), \quad (\text{A.32})$$

donde las funciones clase- \mathcal{K} , α_2 y β_2 están definidas en (A.31) y (A.30), respectivamente.

La existencia de funciones límite (α_1 , β_1 , α_2 y β_2) permite concluir que las condiciones (4.16) y (4.20) son necesarias y suficientes para que el pelotón bajo análisis sea estable en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_2 y la varianza con norma \mathcal{L}_∞ . En adición a esta última afirmación, y utilizando los resultados del Lema 2 y el Teorema 2, se puede concluir que las condiciones (4.16) y (4.20) también son necesarias y suficientes para que las estadísticas del error converjan a valores estacionarios, lo cual implica, de acuerdo a la Definición 7, que el pelotón es **estable en cuerda en sentido cuadrático medio**. De hecho, es sencillo concluir de (4.18) que $\mu_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$, mientras que P_{ζ_N} converge al valor señalado en el Corolario 1.

F Demostración del Lema 3

Para el primer seguidor, la demostración es la misma que la presentada en el Anexo A.

Seguidor $i = 2$. Combinando el estado $x_2(k+1) = Ax_2(k) + BCx_1(k)$ con el estado alternativo $\xi_2(k) = x_1(k) - (1+h)x_2(k) + hx_2(k-1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \xi_2(k+1) = & A\xi_2(k) + x_1(k+1) - Ax_1(k) - hx_2(k+1) + hAx_2(k) + hx_2(k) \\ & - hAx_2(k-1) - BCx_1(k). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Reemplazando el estado $x_1(k+1) = Ax_1(k) + BCx_0(k) + Bd_1(k)$ en (A.33) se sigue

$$\begin{aligned} \xi_2(k+1) = & A\xi_2(k) + BC[x_0(k) - (1+h)x_1(k) + hx_1(k-1)] + Bd_1(k) \\ = & A\xi_2(k) + BC\xi_1(k) + Bd_1(k). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Para el error de seguimiento es fácil ver que

$$\zeta_2(k) = C[x_1(k) - (1+h)x_2(k) + hx_2(k-1)] = C\xi_2(k). \quad (\text{A.35})$$

Seguidor $i > 2$. Combinar el estado $x_i(k+1) = Ax_i(k) + BCx_{i-1}(k)$ con el estado alternativo $\xi_i(k) = x_{i-1}(k) - (1+h)x_i(k) + hx_i(k-1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) = & A\xi_i(k) + x_{i-1}(k+1) - Ax_{i-1}(k) - hx_i(k+1) + hAx_i(k) + hx_i(k) \\ & - hAx_i(k-1) - BCx_{i-1}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Reemplazando el estado $x_{i-1}(k+1) = Ax_{i-1}(k) + BCx_{i-2}(k)$ en (A.36) se sigue

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) = & A\xi_i(k) + BC[x_{i-2}(k) - (1+h)x_{i-1}(k) + hx_{i-1}(k-1)] \\ = & A\xi_i(k) + BC\xi_{i-1}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Para el error de seguimiento se sigue que

$$\zeta_i(k) = C [x_{i-1}(k) - (1+h)x_i(k) + hx_i(k-1)] = C\xi_i(k). \quad (\text{A.38})$$

La demostración está completa escribiendo las expresiones (A.2), (A.34), (A.37), (A.3), (A.35) y (A.38) en forma matricial, para todos los $i \in \mathbb{N}$.

G Demostración del Lema 4

Las medias en (5.4) se obtienen directamente aplicando el operador esperanza en (5.2). La varianza del estado ξ se obtiene como

$$\begin{aligned} P_\xi(k+1) &= \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k+1) \bar{\xi}(k+1)^\top \right\} \\ &= \mathbf{A} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{d}_1(k-1)^\top \right\} \mathbf{B}_b^\top + \mathbf{B}_b \mathcal{E} \left\{ \bar{d}_1(k-1) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{A}^\top \\ &\quad + \mathbf{B}_a \mathcal{E} \left\{ \bar{d}_1(k) \bar{d}_1(k)^\top \right\} \mathbf{B}_a^\top + \mathbf{B}_b \mathcal{E} \left\{ \bar{d}_1(k-1) \bar{d}_1(k-1)^\top \right\} \mathbf{B}_b^\top \end{aligned}$$

donde $\mathcal{E} \left\{ \bar{d}_1(k) \bar{d}_1(k)^\top \right\} = P_{d_1}(k)$ y los términos cruzados $\mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{d}_1(k-1)^\top \right\} = \mathbf{B}_a P_{d_1}$ y $\mathcal{E} \left\{ \bar{d}_1(k-1) \bar{\xi}(k)^\top \right\} = P_{d_1} \mathbf{B}_a^\top$. Luego, dada la Suposición 2, la demostración se completa notando que $P_{d_1}(k) = 0, \forall k < 0$ y $P_{d_1}(k) = P_{d_1}, \forall k \geq 0$. La varianza del error de seguimiento se obtiene como $P_\zeta(k) = \mathcal{E} \left\{ \bar{\zeta}(k) \bar{\zeta}(k)^\top \right\} = \mathbf{C} \mathcal{E} \left\{ \bar{\xi}(k) \bar{\xi}(k)^\top \right\} \mathbf{C}^\top$.

Al igual que en el caso anterior, se asume que $\zeta_0(k)$ converge a un valor estacionario, i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_0(k) = \zeta_0$. Para demostrar las condiciones de convergencia en el tiempo se utiliza la herramienta de estabilidad en sentido cuadrático medio:

Necesidad: Bajo la definición de estabilidad en sentido cuadrático medio, entonces existen los valores estacionarios $\mu_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\xi(k)$ y $\mu_\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\zeta(k)$ tales que

$$\mu_\xi = \mathbf{A} \mu_\xi + \mathbf{B}_o \zeta_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_o \zeta_0 \quad (\text{A.39a})$$

$$\mu_\zeta = \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_o \zeta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{B}_o \zeta_0. \quad (\text{A.39b})$$

Es decir, μ_ζ converge a un valor estacionario solo si el sumatorio permanece acotado, lo que solo es posible si $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Como los autovalores de la matriz \mathbf{A} son los autovalores de su diagonal principal por bloques, es decir, los valores propios de A con multiplicidad i , entonces se concluye que la condición necesaria de convergencia en el tiempo para la media del error de seguimiento es $\rho(A) < 1$.

Bajo la misma suposición de convergencia en sentido cuadrático medio, deben existir los valores estacionarios $P_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} P_\xi(k)$ y $P_\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} P_\zeta(k)$, tales que

$$P_\xi = \mathbf{A}P_\xi\mathbf{A}^\top + \Psi \quad (\text{A.40a})$$

$$P_\zeta = \mathbf{C}P_\xi\mathbf{C}^\top, \quad (\text{A.40b})$$

con $\Psi = [\mathbf{B}_a\mathbf{B}_a^\top + \mathbf{B}_b\mathbf{B}_b^\top + \mathbf{A}\mathbf{B}_a\mathbf{B}_b^\top + \mathbf{B}_b\mathbf{B}_a^\top\mathbf{A}^\top] P_{d_1}$. Aplicando el operador lineal vec en (A.40) se puede obtener

$$vec\{P_\xi\} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})vec\{P_\xi\} + vec\{\Psi\} = (I - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1}vec\{\Psi\} \quad (\text{A.41a})$$

$$vec\{P_\zeta\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})vec\{P_\xi\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^k vec\{\Psi\}. \quad (\text{A.41b})$$

Por tanto, la convergencia de la varianza está asegurada cuando $\rho(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) < \rho(\mathbf{A}) < 1$, que por la estructura diagonal por bloques de la matriz \mathbf{A} , se reduce a $\rho(A) < 1$. Esto concluye la demostración de que (5.6) es necesaria para la convergencia de la varianza del error de seguimiento, cuando $k \rightarrow \infty$.

Suficiencia: Alternativamente, las expresiones de la media y la varianza del error de seguimiento en (5.4b) y (5.5b) respectivamente, se pueden escribir de forma recursiva:

$$\mu_\zeta(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mu_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_o \zeta_0(j-1), \quad (\text{A.42a})$$

$$vec\{P_\zeta\} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^k vec\{P_\xi(0)\} + (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \sum_{j=1}^k (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{k-j} vec\{\Psi\}. \quad (\text{A.42b})$$

Suponiendo que se cumple la condición de estabilidad en sentido cuadrático medio (5.6). Entonces, claramente la convergencia de las estadísticas en (A.42) están aseguradas, ya que $\rho(A)$ es condición suficiente para que dichas expresiones recursivas permanezcan acotadas en el tiempo. Esto concluye que $\rho(A)$ es condición suficiente para que las estadísticas de segundo orden converjan a valores estacionarios cuando $k \rightarrow \infty$.

Finalmente, si el sistema es estable en sentido cuadrático medio ($\rho(A) < 1$), cuando la entrada del error virtual ζ_0 converge a cero en estado estacionario, de (A.39) se concluye que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_\zeta(k) = 0$. Para la varianza, su valor estacionario se calcula aplicando la operación vec^{-1} en (A.41), que conduce a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_\zeta(k) = vec^{-1} \left((\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})(I - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1}vec(\Psi) \right).$$

H Demostración del Teorema 4

Dado que $\mu_{d_1} = 0$, la demostración para la media, es la misma que en el Apéndice C.

Para obtener la expresión del espectro estacionario se hace uso de las transferencias del error de seguimiento (5.3). Esta sección de la demostración se divide en tres partes, para $i = 1$, para $i = 2$ y finalmente para $i > 2$.

Seguidor $i = 1$. De (5.3) se sabe que $\zeta_1 = T\zeta_0 - HTd_1$. Entonces, se puede escribir directamente la densidad espectral de potencia del error de seguimiento como

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})T(e^{j\omega}) \phi_{d_1} T(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})^* \\ &= |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_{d_1}\end{aligned}$$

donde se usó que ζ_0 es una señal determinística y por tanto $\phi_{\zeta_0}(e^{j\omega}) = 0$, y que $\phi_{d_1} = P_{d_1}$.

Seguidor $i = 2$. De (5.3) se sabe que $\zeta_2 = T\zeta_1 + Td_1$. Como se tiene un solo ruido, se puede escribir el error del segundo vehículo como una función del primer seguidor

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= T(T\zeta_0 - HTd_1) + Td_1 \\ &= T^2\zeta_0 + STd_1\end{aligned}\tag{A.43}$$

Por lo tanto, se puede escribir la densidad espectral de potencia del error como

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta_2}(e^{j\omega}) &= S(e^{j\omega})T(e^{j\omega}) \phi_{d_1} T(e^{j\omega})^* S(e^{j\omega})^* \\ &= |S(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 P_{d_1}\end{aligned}$$

donde nuevamente se usó que $\phi_{\zeta_0}(e^{j\omega}) = 0$, y que $\phi_{d_1} = P_{d_1}$.

Seguidor $i > 2$. De (5.3) se observa que el ruido no está presente y por tanto se puede escribir directamente su densidad espectral de potencia como función del vehículo anterior:

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= T(e^{j\omega}) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) T(e^{j\omega})^* \\ &= |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}).\end{aligned}\tag{A.44}$$

Como se observa en (A.44), la condición necesaria y suficiente para que la densidad espectral de potencia esté acotada para todo N es $\|T(z)\|_\infty \leq 1$. Esto se debe a que, en este caso, una frecuencia ω^* , distinta de cero, tal que $|T(e^{j\omega^*})| = 1$, no afecta la acotación de la densidad espectral de potencia como sucedió en el caso de perturbación en todos los agentes.

I Demostración del Corolario 2

Para conocer si el valor de las varianzas estacionarias disminuye cuando se añaden vehículos a la cadena, se calculan las diferencias entre dos vehículos consecutivos. Para ello, se utiliza la PSD estacionaria de cada vehículo, obtenida en el Teorema 4. Entre el primer y el segundo seguidor se obtiene

$$\begin{aligned}
P_{\zeta_1} - P_{\zeta_2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) - \phi_{\zeta_2}(e^{j\omega})] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 - |S(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2] P_{d_1} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(1 - S(e^{j\omega}))(1 - S(e^{j\omega}))^\sim - |S(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2] P_{d_1} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - S(e^{j\omega})^\sim - S(e^{j\omega}) + |S(e^{j\omega})|^2 - |S(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2] P_{d_1} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [H(e^{j\omega})^\sim T(e^{j\omega})^\sim + H(e^{j\omega})T(e^{j\omega}) - 1 + |S(e^{j\omega})|^2(1 - |T(e^{j\omega})|^2)] P_{d_1} d\omega \\
&= [\|M(z)S(z)\|_2^2 - 1 + 2\text{Re}\langle H(z)T(z), 1 \rangle] P_{d_1} \\
&= [\|M(z)S(z)\|_2^2 - 1] P_{d_1} \tag{A.45}
\end{aligned}$$

donde se usó que $S(z) = 1 - H(z)T(z)$, $M(z)M(z)^\sim = 1 - T(z)T(z)^\sim$ es una factorización espectral, y que $T(z)$ es estrictamente propia, por tanto $H(z)T(z)$ y 1 son ortogonales, y su producto interno $\langle H(z)T(z), 1 \rangle = 0$.

La norma en (A.45) se puede escribir de forma alternativa como

$$\|M(z)S(z)\|_2^2 = |M(\infty)S(\infty)|^2 + \|\Delta(z)\|_2^2, \tag{A.46}$$

donde se usó que $\Delta(z) \in \mathcal{RH}_2$ es ortogonal a $M(\infty)S(\infty)$.

Por otro lado, como $T(z)$ es estrictamente propia, $S(\infty) = 1 - H(\infty)T(\infty) = 1$, Además, del Teorema 1 se conoce que $M(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ y su representación en espacio de estados vienen dada por $M(z) := (A, B, -R^{1/2}F, R^{1/2})$, entonces se sigue que $M(\infty) = R^{1/2}$. Luego, del Teorema 1, se tiene que $R = 1 + B^\top X B \geq 1$ (dado que $X \geq 0$) y en consecuencia $|M(\infty)S(\infty)|^2 \geq 1$.

Finalmente, de (A.46) se concluye que $\|M(z)S(z)\|_2^2 > 1$ y por lo tanto, (de (A.45)) $P_{\zeta_1} > P_{\zeta_2}$.

Para el resto de vehículos ($i > 2$), de la PSD estacionaria en (5.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{\zeta_i} - P_{\zeta_{i-1}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_i(e^{j\omega}) - \phi_{i+1}(e^{j\omega})] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T^{i-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega})P_{d_1}(T^{i-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega}))^\sim d\omega \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T^i(e^{j\omega})S(e^{j\omega})P_{d_1}(T^i(e^{j\omega})S(e^{j\omega}))^\sim d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - T(e^{j\omega})T(e^{j\omega})^\sim)(T^{i-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega}))(T^{i-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega}))^\sim P_{d_1} d\omega \\
&= \left\| T^{i-1}(z)M(z)S(z) \right\|_2^2 P_{d_1}. \tag{A.47}
\end{aligned}$$

Entonces, de (A.47) es claro que $P_{\zeta_i} - P_{\zeta_{i-1}} > 0$. Por lo tanto $P_{\zeta_i} > P_{\zeta_{i-1}} \forall i > 2$. Todo esto permite concluir que el máximo valor estacionario de la varianza del error de seguimiento se consigue en el primer seguidor. Es decir, $\max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_1} = \|H(z)T(z)\|_2^2 P_{d_1}$.

Finalmente, de la PSD estacionaria obtenida en (5.9) se puede escribir de forma recursiva la varianza estacionaria del último vehículo (índice N) como:

$$\begin{aligned}
P_{\zeta_N} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_N(e^{j\omega}) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T^{N-1}(e^{j\omega})S(e^{j\omega})P_{d_1}T^{N-1}(e^{j\omega})^\sim S(e^{j\omega})^\sim d\omega \\
&= \left\| T^{N-1}(z)S(z) \right\|_2^2 P_{d_1}. \tag{A.48}
\end{aligned}$$

Sabiendo que, de la convergencia en el tiempo $\rho(A) < 1$, de la condición de escalabilidad $|T(z)|^2 \leq 1$ y que la varianza estacionaria decrece conforme se aumentan los vehículos ($P_{\zeta_i} > P_{\zeta_{i+1}}, \forall i \geq 1$), se concluye que $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = 0$.

J Demostración del Teorema 5

Media del error de seguimiento: Dado que la ecuación para la media es la misma que con perturbación en todos los agentes, el resultado obtenido en el Anexo E es válido en este caso también. Es decir, $\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \alpha_1(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}) + \beta_1(\|\mu_{\xi}(0)\|_2)$, donde las funciones clase- \mathcal{K} que acotan a la entrada y a la condición inicial de la media, están dadas por

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \|T(z)\|_{\infty}, \\
\beta_1 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho(\mathbf{A}^k \mathbf{C}^{\top} \boldsymbol{\eta}_i^{\top} \boldsymbol{\eta}_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Varianza del error de seguimiento: La expresión recursiva de la varianza del error de seguimiento tiene la forma $P_{\zeta_i}(k) = f_i(P_{\xi}(0), k) + g_i(P_{d_1}, k)$, donde $P_{\xi}(0)$ es la varianza de la condición inicial del estado $\xi(0)$ y $g_i(P_{d_1}, k)$ es una función lineal en P_{d_1} . Usando la desigualdad triangular se obtiene

$$\|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \leq \|f_i(P_{\xi}(0), k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} + \|g_i(P_{d_1}, k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}. \quad (\text{A.49})$$

La función $f_i(P_{\xi}(0), k)$ es la misma que en la demostración del Anexo E, dado que esta función contiene únicamente la influencia de la condición inicial. Por lo tanto, el resultado obtenido previamente es también válido en este caso. Es decir, se cumple que

$$\begin{aligned} \|f_i(P_{\xi}(0), k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} &\leq \rho(P_{\xi}(0)) \|\eta_i \mathbf{C}\|_2 \\ &= \sigma_{max}(P_{\xi}(0)) \|\mathbf{C}\|_2, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Para obtener la función que acota a $\|g_i(P_{d_1}, k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$, primero se muestra que el máximo de $g_i(P_{d_1}, k)$ ocurre cuando $k \rightarrow \infty$. Para ello, cuando $P_{\xi}(0) = 0$ se tiene que $g_i(P_{d_1}, k) = P_{\zeta_i}(k)$. Dado que la varianza del ruido $P_{d_1} > 0$ y asumiendo $P_{\xi}(0) = 0$, de (5.5a) se obtiene que $P_{\xi}(1) - P_{\xi}(0) = \mathbf{B}_a \mathbf{B}_a^{\top} P_{d_1} \geq 0$. La siguiente diferencia en el tiempo también es positiva semi-definida dado que

$$\begin{aligned} P_{\xi}(2) - P_{\xi}(1) &= \mathbf{A} P_{\xi}(1) \mathbf{A}^{\top} + \Psi - \mathbf{B}_a \mathbf{B}_a^{\top} P_{d_1} \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b)(\mathbf{A} \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b)^{\top} P_{d_1} \geq 0. \end{aligned}$$

Para $k \geq 2$, de (5.5a) se obtiene que $P_{\xi}(k+1) - P_{\xi}(k) = \mathbf{A} [P_{\xi}(k) - P_{\xi}(k-1)] \mathbf{A}^{\top}$. Por lo tanto, se concluye que $P_{\xi}(k+1) - P_{\xi}(k) \geq 0, \forall k \geq 0$. Finalmente, notando que $P_{\zeta}(k+1) - P_{\zeta}(k) = \mathbf{C} [P_{\xi}(k+1) - P_{\xi}(k)] \mathbf{C}^{\top}$, la diferencia en el tiempo de $P_{\zeta}(k+1) - P_{\zeta}(k)$, es también una matriz positiva semi-definida. Además, esto implica que $P_{\zeta_i}(k+1) - P_{\zeta_i}(k)$ es un escalar positivo, dado que cada sub matriz de una matriz positiva definida también es positiva definida [64]. Entonces, cuando $P_{\xi}(0) = 0$, $P_{\zeta_i}(k)$ es una función creciente en k , y su máximo valor se alcanza cuando $k \rightarrow \infty$.

Luego, del Teorema 4 se sabe que $\|T(z)\|_{\infty} \leq 1$ asegura la existencia de varianzas estacionarias, para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Utilizando el resultado del Corolario 2, el máximo valor estacionario de la varianza del error de seguimiento sucede en el primer agente, por lo tanto

$$\begin{aligned} \|g_i(P_{d_1}, k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} &\leq \|g_1(P_{d_1}, k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \\ &= \|P_{\zeta_1}(k)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}, \quad \text{cuando } P_{\xi}(0) = 0 \\ &= \|H(z)T(z)\|_2^2 P_{d_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Entonces, se concluye que la varianza del error de seguimiento satisface

$$\|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \alpha_2(\|P_{d_1}\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \beta_2(\|P_\xi(0)\|_{\mathcal{L}_\infty}), \quad (\text{A.52})$$

donde las funciones clase- \mathcal{K} , α_2 y β_2 están definidas en (A.51) y (A.50), respectivamente. La existencia de funciones límite (α_1 , β_1 , α_2 y β_2) permite concluir que las condiciones (5.6) y (5.10) son necesarias y suficientes para que el pelotón bajo análisis sea estable en cuerda en base a la media con norma \mathcal{L}_2 y la varianza con norma \mathcal{L}_∞ . En adición a esta última afirmación, y utilizando los resultados del Lema 4 y el Teorema 4, se puede concluir que las condiciones (5.6) y (5.10) también son necesarias y suficientes para que las estadísticas del error converjan a valores estacionarios, lo cual implica, de acuerdo a la Definición 7, que el pelotón es **estable en cuerda en sentido cuadrático medio**. De hecho, es sencillo concluir de (5.8) y del Corolario 2 que, tanto $\mu_{\zeta_N}(e^{j\omega})$ como P_{ζ_N} convergen a cero cuando $N \rightarrow \infty$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. J. Naus, R. P. Vugts, J. Ploeg, M. J. van De Molengraft, and M. Steinbuch, “String-stable CACC design and experimental validation: A frequency-domain approach,” *IEEE Trans. on vehicular technology*, vol. 59, no. 9, pp. 4268–4279, 2010.
- [2] Z. Wang, G. Wu, and M. J. Barth, “A review on cooperative adaptive cruise control (CACC) systems: Architectures, controls, and applications,” in *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. IEEE, 2018, pp. 2884–2891.
- [3] S. E. Li, Y. Zheng, K. Li, L.-Y. Wang, and H. Zhang, “Platoon control of connected vehicles from a networked control perspective: Literature review, component modeling, and controller synthesis,” *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 2017.
- [4] S. Stüdli, M. M. Seron, and R. H. Middleton, “From vehicular platoons to general networked systems: String stability and related concepts,” *Annual Reviews in Control*, vol. 44, pp. 157–172, 2017.
- [5] S. T. Kaluva, A. Pathak, and A. Ongel, “Aerodynamic drag analysis of autonomous electric vehicle platoons,” *Energies*, vol. 13, no. 15, p. 4028, 2020.
- [6] J. Carbaugh, D. N. Godbole, and R. Sengupta, “Safety and capacity analysis of automated and manual highway systems,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 6, no. 1-2, pp. 69–99, 1998.
- [7] V. Turri, B. Besselink, and K. H. Johansson, “Cooperative look-ahead control for fuel-efficient and safe heavy-duty vehicle platooning,” *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 25, no. 1, pp. 12–28, 2016.
- [8] S. Thormann, A. Schirrer, and S. Jakubek, “Safe and efficient cooperative platooning,” *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, 2020.
- [9] J. Guanetti, Y. Kim, and F. Borrelli, “Control of connected and automated vehicles: State of the art and future challenges,” *Annual reviews in control*, vol. 45, pp. 18–40, 2018.
- [10] L. Xu, L. Y. Wang, G. Yin, and H. Zhang, “Communication information structures and contents for enhanced safety of highway vehicle platoons,” *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 63, no. 9, pp. 4206–4220, 2014.

- [11] Y. Liu and H. Gao, “Stability, scalability, speedability, and string stability of connected vehicle systems,” *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021.
- [12] P. Seiler, A. Pant, and K. Hedrick, “Disturbance propagation in vehicle strings,” *IEEE Trans. on automatic control*, vol. 49, no. 10, pp. 1835–1842, 2004.
- [13] M. Muratori, J. Holden, M. Lammert, A. Duran, S. Young, and J. Gonder, “Potentials for platooning in us highway freight transport,” National Renewable Energy Lab.(NREL), Golden, CO (United States), Tech. Rep., 2017.
- [14] C. Bergenheim, S. Shladover, E. Coelingh, C. Englund, and S. Tsugawa, “Overview of platooning systems,” in *Proceedings of the 19th ITS World Congress, Oct 22-26, Vienna, Austria (2012)*, 2012.
- [15] W. Levine and M. Athans, “On the optimal error regulation of a string of moving vehicles,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 3, pp. 355–361, 1966.
- [16] K.-c. Chu, “Decentralized control of high-speed vehicular strings,” *Transportation science*, vol. 8, no. 4, pp. 361–384, 1974.
- [17] D. Swaroop and J. K. Hedrick, “String stability of interconnected systems,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 41, no. 3, pp. 349–357, 1996.
- [18] R. H. Middleton and J. H. Braslavsky, “String instability in classes of linear time invariant formation control with limited communication range,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 55, no. 7, pp. 1519–1530, 2010.
- [19] G. Gunter, D. Gloudemans, R. E. Stern, S. McQuade, R. Bhadani, M. Bunting, M. L. Delle Monache, R. Lysecky, B. Seibold, J. Sprinkle *et al.*, “Are commercially implemented adaptive cruise control systems string stable?” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 22, no. 11, pp. 6992–7003, 2020.
- [20] K. C. Dey, L. Yan, X. Wang, Y. Wang, H. Shen, M. Chowdhury, L. Yu, C. Qiu, and V. Soundararaj, “A review of communication, driver characteristics, and controls aspects of cooperative adaptive cruise control (cacc),” *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 491–509, 2015.
- [21] S. Feng, Y. Zhang, S. E. Li, Z. Cao, H. X. Liu, and L. Li, “String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods,” *Annual Reviews in Control*, vol. 47, pp. 81–97, 2019.
- [22] C. Wu, Z. Xu, Y. Liu, C. Fu, K. Li, and M. Hu, “Spacing policies for adaptive cruise control: A survey,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 50 149–50 162, 2020.

- [23] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Trans. on automatic control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.
- [24] M. Di Bernardo, A. Salvi, and S. Santini, "Distributed consensus strategy for platooning of vehicles in the presence of time-varying heterogeneous communication delays," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 102–112, 2014.
- [25] A. A. Peters, R. H. Middleton, and O. Mason, "Leader tracking in homogeneous vehicle platoons with broadcast delays," *Automatica*, vol. 50, no. 1, pp. 64–74, 2014.
- [26] S. Öncü, J. Ploeg, N. Van de Wouw, and H. Nijmeijer, "Cooperative adaptive cruise control: Network-aware analysis of string stability," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 4, pp. 1527–1537, 2014.
- [27] Y. Liu, H. Gao, C. Zhai, and W. Xie, "Internal stability and string stability of connected vehicle systems with time delays," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 22, no. 10, pp. 6162–6174, 2020.
- [28] S. Öncü, N. Van de Wouw, W. M. H. Heemels, and H. Nijmeijer, "String stability of interconnected vehicles under communication constraints," in *2012 IEEE 51st IEEE conference on decision and control (cdc)*. IEEE, 2012, pp. 2459–2464.
- [29] J. Ploeg, N. Van De Wouw, and H. Nijmeijer, "Lp string stability of cascaded systems: Application to vehicle platooning," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 786–793, 2013.
- [30] B. Besselink and K. H. Johansson, "String stability and a delay-based spacing policy for vehicle platoons subject to disturbances," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 62, no. 9, pp. 4376–4391, 2017.
- [31] L. Socha, "Stochastic stability of interconnected string systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, no. 4, pp. 949–955, 2004.
- [32] L. Rybarska-Rusinek and L. Socha, "String stability of singularly perturbed stochastic systems," *Stochastic analysis and applications*, vol. 25, no. 4, pp. 719–737, 2007.
- [33] C. Zhao, X. Duan, L. Cai, and P. Cheng, "Vehicle platooning with non-ideal communication networks," *IEEE transactions on vehicular technology*, vol. 70, no. 1, pp. 18–32, 2020.
- [34] R. Liu, Y. Ren, H. Yu, Z. Li, and H. Jiang, "Connected and automated vehicle platoon maintenance under communication failures," *Vehicular Communications*, vol. 35, p. 100467, 2022.

- [35] A. Elahi, A. Alfi, and H. Modares, "Distributed consensus control of vehicular platooning under delay, packet dropout and noise: Relative state and relative input-output control strategies," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 11, pp. 20 123–20 133, 2022.
- [36] H. Li, Z. Chen, B. Fu, Z. Wu, X. Ji, and M. Sun, "Event-triggered vehicle platoon control under random communication noises," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 51 722–51 733, 2021.
- [37] C. Zhao, L. Cai, and P. Cheng, "Stability analysis of vehicle platooning with limited communication range and random packet losses," *IEEE Internet of Things Journal*, vol. 8, no. 1, pp. 262–277, 2020.
- [38] F. J. Vargas, A. I. Maass, and A. A. Peters, "String stability for predecessor following platooning over lossy communication channels," in *23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Hong Kong*, 2018.
- [39] A. Elahi, A. Alfi, and H. Modares, " H_∞ consensus of homogeneous vehicular platooning systems with packet dropout and communication delay," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021.
- [40] C. Wu, Y. Lin, and A. Eskandarian, "Cooperative adaptive cruise control with adaptive Kalman filter subject to temporary communication loss," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 93 558–93 568, 2019.
- [41] F. Acciani, P. Frasca, A. Stoorvogel, E. Semsar-Kazerooni, and G. Heijenk, "Cooperative adaptive cruise control over unreliable networks: an observer-based approach to increase robustness to packet loss," in *2018 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2018, pp. 1399–1404.
- [42] C. Lei, E. Van Eenennaam, W. K. Wolterink, G. Karagiannis, G. Heijenk, and J. Ploeg, "Impact of packet loss on CACC string stability performance," in *2011 11th International Conference on ITS Telecommunications*. IEEE, 2011, pp. 381–386.
- [43] M. A. Gordon, F. J. Vargas, and A. A. Peters, "Comparison of simple strategies for vehicular platooning with lossy communication," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 103 996–104 010, 2021.
- [44] E. van Nunen, J. Verhaegh, E. Silvas, E. Semsar-Kazerooni, and N. van de Wouw, "Robust model predictive cooperative adaptive cruise control subject to v2v impairments," in *2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. IEEE, 2017, pp. 1–8.

- [45] F. Villenas, F. Vargas, and A. Peters, "Numerical and empirical study of a kalman filtering-based strategy for platooning with lossy communication," *Submitted to Mathematics*, 2023.
- [46] Z. Li, B. Hu, M. Li, and G. Luo, "String stability analysis for vehicle platooning under unreliable communication links with event-triggered strategy," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 68, no. 3, pp. 2152–2164, 2019.
- [47] P. Seiler and R. Sengupta, "Analysis of communication losses in vehicle control problems," in *Proceedings of the 2001 American Control Conference*.(Cat. No. 01CH37148), vol. 2. IEEE, 2001, pp. 1491–1496.
- [48] Y. Tang, M. Yan, P. Yang, and L. Zuo, "Consensus based control algorithm for vehicle platoon with packet losses," in *2018 37th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE, 2018, pp. 7684–7689.
- [49] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, "A survey of recent results in networked control systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, 2007.
- [50] V. Vegamoor, S. Rathinam, and S. Darbha, "String stability of connected vehicle platoons under lossy v2v communication," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, 2021.
- [51] F. Acciani, P. Frasca, G. Heijenk, and A. A. Stoorvogel, "Stochastic string stability of vehicle platoons via cooperative adaptive cruise control with lossy communication," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 8, pp. 10 912–10 922, 2022.
- [52] M. A. Gordon, F. J. Vargas, and A. A. Peters, "Mean square stability conditions for platoons with lossy inter-vehicle communication channels," *Automatica*, vol. 147, p. 110710, 2023.
- [53] W. B. Qin, M. M. Gomez, and G. Orosz, "Stability and frequency response under stochastic communication delays with applications to connected cruise control design," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 388–403, 2016.
- [54] B. Liu, F. Gao, Y. He, and C. Wang, "Robust control of heterogeneous vehicular platoon with non-ideal communication," *Electronics*, vol. 8, no. 2, p. 207, 2019.
- [55] F. Ma, J. Wang, S. Zhu, S. Y. Gelbal, Y. Yang, B. Aksun-Guvenc, and L. Guvenc, "Distributed control of cooperative vehicular platoon with nonideal communication condition," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 2020.

- [56] M. A. Gordon, F. J. Vargas, A. A. Peters, and A. I. Maass, “Platoon stability conditions under inter-vehicle additive noisy communication channels,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 3150–3155, 2020.
- [57] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.
- [58] J. H. Braslavsky, R. H. Middleton, and J. S. Freudenberg, “Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 8, pp. 1391–1403, 2007.
- [59] F. J. Vargas, E. I. Silva, and J. Chen, “Stabilization of two-input two-output systems over SNR-constrained channels,” *Automatica*, vol. 49, no. 10, pp. 3133–3140, 2013.
- [60] R. A. González, F. J. Vargas, and J. Chen, “Mean square stabilization over SNR-constrained channels with colored and spatially correlated additive noises,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 11, pp. 4825–4832, 2019.
- [61] Y. Feng and H. Sun, “Robust optimal control for discrete-time lti systems over multiple additive white gaussian noise channels,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [62] M. Herrera, M. Pérez-Hernández, A. Kumar Parlikad, and J. Izquierdo, “Multi-agent systems and complex networks: Review and applications in systems engineering,” *Processes*, vol. 8, no. 3, p. 312, 2020.
- [63] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2013.
- [64] D. S. Bernstein, *Matrix mathematics*. Princeton university press, 2009.
- [65] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. Siam, 2000, vol. 71.
- [66] I. Khalil, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*. Prentice hall, 1996.
- [67] C.-C. Chu, “On discrete inner-outer and spectral factorizations,” in *1988 American Control Conference*. IEEE, 1988, pp. 1699–1700.
- [68] T. Söderström, *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [69] K. J. Åström, *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [70] K. You, N. Xiao, and L. Xie, *Analysis and design of networked control systems*. Springer, 2015.
- [71] L. Peppard, “String stability of relative-motion PID vehicle control systems,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 19, no. 5, pp. 579–581, 1974.

- [72] E. Shaw and J. K. Hedrick, "Controller design for string stable heterogeneous vehicle strings," in *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2007, pp. 2868–2875.
- [73] L. Xiao and F. Gao, "Practical string stability of platoon of adaptive cruise control vehicles," *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, vol. 12, no. 4, pp. 1184–1194, 2011.
- [74] J. Ploeg, D. P. Shukla, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, "Controller synthesis for string stability of vehicle platoons," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 854–865, 2013.
- [75] K. J. Åström, *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [76] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado *et al.*, *Control system design*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2001, vol. 240.
- [77] S. Klinge and R. H. Middleton, "Time headway requirements for string stability of homogeneous linear unidirectionally connected systems," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. IEEE, 2009, pp. 1992–1997.
- [78] F. Acciani, P. Frasca, G. Heijenk, and A. A. Stoorvogel, "Stochastic string stability of vehicle platoons via cooperative adaptive cruise control with lossy communication," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, 2021.
- [79] J. Chen, H. Liang, J. Li, and Z. Lv, "Connected automated vehicle platoon control with input saturation and variable time headway strategy," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 22, no. 8, pp. 4929–4940, 2020.