



Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Electricidad

**UNA ESTRATEGIA DE REFINAMIENTO ADAPTIVO
PARA EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

Tesis presentada por

Alejandro Alberto Angulo Cárdenas

en conformidad a los requerimiento para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Profesor Guía

Dr. Jörg Müller Steidtmann

Profesores Correferentes

Dr. Franco Perazzo Maggi
Dr. Patricio Cendoya Hernández

Valparaíso - Chile
Junio 2007

TÍTULO DE LA TESIS:

**UNA ESTRATEGIA DE REFINAMIENTO ADAPTIVO PARA EL
MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

AUTOR:

ALEJANDRO ALBERTO ANGULO CÁRDENAS

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Jörg Müller Steidtmann

Dr. Franco Perazzo Maggi

Dr. Patricio Cendoya Hernández

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, amigos y colegas por su apoyo y colaboración en este trabajo y por su confianza en mí.

La educación es el mejor vehículo para alcanzar la libertad. Cuando se es libre, nos debemos a la consecución de la libertad de los otros, como única garantía de la perduración de la nuestra ...

Juan Rodríguez Uribe

Agradecimientos

Gracias a mi familia, Isabel y Vanessa, y a todos los que de una u otra forma fueron partícipes de este trabajo y permitieron su feliz término.

Resumen

En el presente trabajo se describe una técnica para la adaptación de los métodos sin malla aplicada a la resolución de problemas de valor frontera en una y dos dimensiones, y fácilmente extensible a tres. El método propuesto combina el uso de funciones implícitas para la definición de la geometría, aproximación por mínimos cuadrados fijos de los potenciales y campos involucrados, estimación del error mediante fórmulas simples y estrategia de refinamiento robusta basada en la naturaleza propia de las nubes utilizadas por los métodos libres de malla. Todos estos aspectos, en conjunto, transforman al método propuesto en una alternativa atractiva para la determinación adaptativa de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en todo ámbito de la ingeniería. Los resultados numéricos obtenidos a partir de su implementación computacional dan cuenta de su gran eficiencia.

Palabras Clave : Métodos libres de malla, funciones implícitas, mínimos cuadrados fijos, estimador de error, refinamiento adaptativo.

Summary

A technique for the adaptation of the meshfree methods is described applied to the resolution of boundary value problems in one and two dimensions, and easily extensible to three dimensions. The proposed method combines the use of implicit functions for the definition of geometry, the approach by fixed least square of the potentials and fields involved, error estimation by means of simple formulas and robust strategy of refinement based on the own nature of clouds used by the meshfree methods. With all these aspects, the proposed method becomes an attractive alternative for the adaptive determination of solutions of partial differential equations in all scopes of engineering. The obtained numerical results from their computacional implementation give account of their great efficiency.

Keywords : Meshfree methods, implicit functions, fixed least square, error estimator, adaptive refinement.

Contenidos

Preliminar	ii
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Summary	iv
Contenidos	v
1 Introducción	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Estructura	2
2 Métodos sin malla	5
2.1 Fundamentos	6
2.2 Aproximaciones por Kernel	7
2.3 Particiones de la Unidad	9
2.4 Aproximación por Mínimos Cuadrados	9
3 Método de puntos finitos	11
3.1 Generación de subdominios o nubes para aproximación local	11
3.2 Aproximación por mínimos cuadrados ponderados	13
3.3 Derivabilidad de la aproximación	16

3.4	Colocación puntual	19
3.5	Convergencia del MPF	21
3.5.1	Consistencia	21
3.5.2	Estabilidad	22
3.6	Funciones de ponderación	24
3.6.1	Definición de la forma	28
3.6.2	Definición del tamaño	29
3.6.3	Definición de la ubicación	29
3.7	Funciones de forma	32
3.8	Construcción de una base	33
4	Discretización del problema	37
5	Método de refinamiento	41
5.1	Estrategia para la adición de nodos	41
5.2	Estimador de error	43
5.3	Criterio de adaptación	46
5.3.1	Criterio para nodos de refinamiento interiores	46
5.3.2	Criterio para nodos de refinamiento frontera	46
5.3.3	Criterio de parada	47
6	Resultados	49
6.1	Problemas unidimensionales	50
6.1.1	Test de Rachford & Wheeler	50
6.1.2	Descarga corona unipolar en configuración coaxial	54
6.2	Problemas bidimensionales de electromagnetismo	57
6.2.1	Ecuación de Laplace en dominio anular	57
6.2.2	Ecuación de Poisson en dominio cuadrado	59

6.3	Problemas bidimensionales de mecánica de sólidos	61
6.3.1	Viga empotrada	62
6.3.2	Cilindro hueco sujeto a presión interna	64
6.3.3	Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional	67
6.3.4	Análisis de resultados	70
7	Conclusiones	71
A	Condicionamiento Numérico de Matrices	73
B	Programación del Método de Puntos Finitos	77
B.1	Listado programa: fpml.d.m	78
C	Resultados de experimentos numéricos	83
	Listado de Tablas	95
	Listado de Figuras	97
	Bibliografía	101

12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de valor frontera han sido enfrentados con éxito en el pasado utilizando distintas técnicas numéricas, como por ejemplo, el método de los elementos finitos, el método de los volúmenes finitos, el método de los elementos de contorno o el método de las diferencias finitas. La principal desventaja de estas técnicas, radica en que requieren de un proceso de generación de mallas, que generalmente ocupa un esfuerzo computacional mayor que el de la resolución misma del problema.

En el último tiempo han aparecido nuevas técnicas que no requieren de una malla, razón por la cuál se denominan naturalmente “métodos sin malla” o “métodos libres de malla”. En estos métodos, el dominio corresponde a un conjunto de puntos o nodos, dividido en subdominios más pequeños denominados nubes, conformados por un punto central o estrella y varios puntos próximos a éste. En general, estas técnicas son computacionalmente eficientes y simples de implementar, y han sido utilizadas con éxito en problemas de mecánica de sólidos y mecánica de fluidos. En lo que concierne a electricidad, su uso se ha limitado a problemas simples de potencial electrostático y corrientes parásitas en una y dos dimensiones [5]-[13].

Un elemento clave de los métodos libres de malla, fundamental en el presente trabajo, es su capacidad de adaptar el dominio de solución agregando puntos donde se necesite. De esta forma es posible obtener resultados numéricos con exactitudes predefinidas para cualquier problema que pueda ser modelado a través de ecuaciones diferenciales parciales [1] [2].

En este trabajo se presenta una implementación adaptiva del método de puntos finitos (MPF) [3] [4] [23] para resolver problemas de valor frontera en una y dos dimensiones. La geometría inicial del dominio de solución se define de manera implícita [14], a través de una función de distancia. La estrategia de adaptación se basa en una estimación de los errores de las aproximaciones tanto del potencial como de su gradiente, junto con

un procedimiento de refinamiento de la solución que utiliza la topología de la nube y el concepto de vecinos de Voronoi para insertar nuevos puntos en el dominio. Todos estos aspectos, en conjunto, transforman al método propuesto en una alternativa atractiva para la determinación adaptiva de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en todo ámbito de la ingeniería. Los resultados de los experimentos numéricos demuestran la eficacia y estabilidad del método propuesto.

1.1 Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es implementar una alternativa adaptiva del método de puntos finitos y verificar su comportamiento mediante la resolución de un conjunto de problemas de prueba con solución analítica conocida.

Objetivos secundarios del presente trabajo son,

- Hacer una revisión histórica de los métodos sin malla y mostrar sus bases.
- Revisar en detalle el método de los puntos finitos y estudiar el comportamiento de los factores que lo afectan.
- Mostrar el concepto de función distancia como elemento fundamental para la definición implícita de la geometría.
- Hacer una revisión de los “estimadores de error a posteriori” utilizados en métodos libres de malla.
- Estudiar la estrategias de adaptación, junto con los criterios de refinamiento por ella utilizados.

1.2 Estructura

El presente trabajo se estructura en 7 secciones y un apéndice, cuyos contenidos se resumen a continuación,

- En la sección 1 se entrega una breve introducción sobre el tema central de esta tesis, se establecen los objetivos principales y secundarios del trabajo y se indica la manera en que los contenidos serán desarrollados en el presente documento.

- En la sección 2 se hace una revisión de la historia de los métodos sin malla, mostrando sus bases matemáticas y su clasificación típica.
- En la sección 3 se estudia el método de los puntos finitos y su aplicación a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Se estudia además, los distintos factores que afectan la calidad de los resultados por él generados.
- En la sección 4 se muestra la problemática involucrada en la definición de la geometría del dominio de solución de una ecuación diferencial parcial, explicándose cómo se define ésta a partir de funciones implícitas y de qué manera se genera el conjunto inicial de nodos que discretiza el dominio.
- En la sección 5 se estudia la estrategia de adaptación en lo referido a la definición del estimador de error y al criterio de refinamiento a utilizar.
- En la sección 6 se entregan los principales resultados de los experimentos numéricos realizados para validar el buen comportamiento del método propuesto.
- En la sección 7 se presentan las conclusiones derivadas del presente estudio junto con las posibilidades de trabajos futuros que pueden ser desarrollados en este mismo ámbito.
- En el apéndice A, se hace una pequeña revisión de algunos conceptos básicos del condicionamiento numérico de matrices.
- En el apéndice B y con fines didácticos, se lista un código programado en *MATLAB* donde se resuelve una ecuación diferencial parcial unidimensional mediante el Método de Puntos Finitos.
- Por último, en el apéndice C, se muestra el detalle de todos los resultados de los experimentos numéricos realizados. Esto incluye, discretizaciones, potenciales y gradientes tanto de las soluciones numéricas como analíticas, errores entre ambas soluciones, etc.

El presente documento tiene como objetivo principal proporcionar una visión general de los conceptos y principios fundamentales que rigen el desarrollo de un sistema de gestión de la información.

En primer lugar, se abordará la importancia de la información en el mundo actual y cómo esta ha evolucionado desde su uso tradicional hasta convertirse en un recurso estratégico para las organizaciones.

Posteriormente, se explorarán los diferentes tipos de sistemas de información, desde los sistemas de procesamiento de datos hasta los sistemas de apoyo a la decisión, pasando por los sistemas de gestión de recursos humanos y los sistemas de gestión de la cadena de suministro.

Además, se discutirán los factores que influyen en el éxito o fracaso de un sistema de información, como la calidad de los datos, la seguridad, la privacidad y la interoperabilidad.

Finalmente, se presentarán algunas tendencias actuales y futuras en el campo de la gestión de la información, como el uso de la inteligencia artificial, el big data y la computación en la nube.

Este documento está diseñado para ser una guía introductoria para aquellos que deseen comprender los fundamentos de la gestión de la información y su aplicación en el mundo empresarial.

Esperamos que este documento sea de gran utilidad para todos los lectores interesados en este campo.

El presente documento es una obra de carácter informativo y no constituye un asesoramiento profesional. Los datos y estadísticas aquí presentados son de carácter general y no deben ser utilizados como base para la toma de decisiones.

Este documento es propiedad de la editorial y no puede ser reproducido, distribuido o transmitido en ninguna forma sin el consentimiento escrito de la editorial.

Capítulo 2

Métodos sin malla

Los métodos sin malla registran su primera aparición en la década del 70, con Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [15]. Este método, permitió la modelación de problemas de astrofísica, y contaba con una gran versatilidad, pero con el inconveniente de tener muy baja precisión. En 1995, Swegle presentó un trabajo que permitía solucionar las inestabilidades de este método. Junto con él surgió Generalized Finite Difference (GFD), que pretendía aprovechar las características del método de las diferencias finitas, pero independizándolas de las grillas conformes, que hasta el momento eran indispensables para su aplicación. En ambos métodos, mediante colocaciones puntuales, se obtienen sistemas de ecuaciones discretas.

También en 1995, aparece Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), que hace correcciones a las funciones de forma de SPH, las que permiten mejorar la precisión de la aproximación en zonas cercanas a los contornos.

En 1992 Nayroles [16] propone el método de los elementos difusos (DEM), basado en la técnica de interpolación por mínimos cuadrados (MLS), sin embargo, las numerosas simplificaciones hechas por el autor hicieron surgir muchas críticas al respecto, aunque sus ventajas frente a el método de los elementos finitos (FEM) [34] hicieron que se siguiera investigando al respecto.

En base a una serie de mejoras a DEM implementadas por Belystchko et al [17], surgió Element Free Galerkin Method (EFGM), que solucionó los inconvenientes en el cálculo de las derivadas, aunque esto incrementó notablemente los costos computacionales. Duarte [18] y Babuska [19] hicieron un aporte relevante a los fundamentos de las aproximaciones MLS, al reconocer a las funciones de forma generadas de esta manera como un caso particular de la Partición de la Unidad. A partir de estos trabajos surgieron los métodos HP-Clouds y Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM), ambos basados en formulaciones

débiles.

Atluri et al [20] [21], en el 2000, dieron lugar a dos nuevas familias de métodos, el primero es el Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) que utiliza MLS y formulaciones débiles locales, y el Local Boundary Integral Equations (LBIE), que permite evaluar integrales fácilmente, en círculos bidimensionales y esferas tridimensionales.

En 2001, Idelsohn et al [22] propusieron el Meshless Finite Element Method (MFEM), que recoge las bondades de FEM, aunque independiza las funciones de forma de las conectividades de los elementos.

Oñate et al [23] en 1996, define Finite Point Method (FPM) - Método de Puntos Finitos (MPF) - y establece las condiciones básicas para que una aproximación numérica pueda ser considerada una técnica sin malla. Estas condiciones son:

- Las incógnitas y sus derivadas deben poder ser representadas en términos de coordenadas de un conjunto de puntos pertenecientes al dominio de análisis.
- La función de ponderación y sus derivadas deben poder ser definidas solamente en términos de la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis.
- No es necesario realizar ninguna integración de volumen o superficie, o
- en caso de ser necesario la evaluación de integrales, esta debería ser realizada independientemente del procedimiento de interpolación escogido.

A modo general, una aproximación sin malla es un método para reconstruir funciones y sus derivadas, a partir de valores discretos de una serie de puntos, regular o irregularmente distribuidos, y de cierta información de “bajo nivel”, por ejemplo, coordenadas geométricas y funciones de ponderación. La reconstrucción no requiere por lo tanto, la existencia de una interconexión más compleja entre los puntos.

2.1 Fundamentos

Dentro de los métodos sin malla, los más importantes son los basados en particiones de la unidad, kernels y mínimos cuadrados. A continuación se describirán brevemente los principios básicos de estas aproximaciones, para lo cual será necesario introducir primero algunas definiciones.

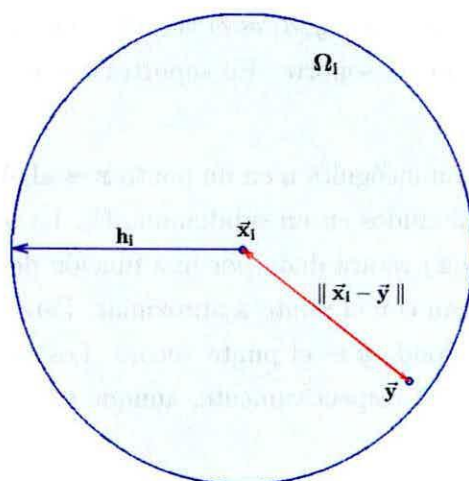


Figura 2.1: Soporte en dos dimensiones.

Supóngase que se quiere conocer el valor de una función incógnita $u(x)$ en N puntos del dominio Ω . Para esto, los métodos sin malla generan M vecindades Ω_i , de tamaño h_i en torno a x_i , tal que:

$$\Omega_i = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n} < h_i\} \quad (2.1)$$

La vecindad así obtenida, denominada soporte o nube, será el subdominio sobre el cual se realizará la aproximación. La figura 2.1 muestra gráficamente la definición anterior para el caso bidimensional.

Para procurar el carácter local de la aproximación, la cantidad de puntos n_i que se encontrará dentro de cada subdominio Ω_i , deberá ser mucho menor que el número total de nodos del dominio en estudio N .

2.2 Aproximaciones por Kernel

En estas aproximaciones el valor de la función incógnita $u(x)$ se encuentra mediante la relación siguiente,

$$u(\mathbf{x}) \cong \int_{\Omega_i} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) \cdot u(\mathbf{y}) d\Omega \quad (2.2)$$

en que Ω_i es una vecindad de \mathbf{x} , $\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ es el kernel, también llamado función de peso, y h es una medida del tamaño del soporte. En soportes circulares h podría ser el radio o el área del disco.

Según 2.2 el valor de la función incógnita u en un punto \mathbf{x} es algún promedio ponderado de los valores de sus vecinos contenidos en un subdominio Ω_i . La importancia o ponderación del valor de los vecinos en $u(\mathbf{x})$ estará dada por una función de ponderación y dependerá de la cercanía que estos tengan con el punto a aproximar. Esta distancia está dada por la norma euclídeana $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ donde \mathbf{y} es el punto vecino. Los soportes más usados son los discos y las esferas en 2D y 3D respectivamente, aunque también suelen usarse soportes rectangulares y prismáticos.

La forma discreta de la ecuación 2.2 está dada por la ecuación 2.3 y será esta relación la que se emplee para encontrar numéricamente una aproximación de u :

$$u(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^M \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot u_i \cdot \Delta V_i \quad (2.3)$$

donde la sumatoria debe hacerse sobre los M subdominios en Ω , y ΔV_i es una medida de la distancia al vecino. Por ejemplo, en una dimensión se tiene,

$$u^h(x) = \sum_i \varphi(x - x_i) \cdot u_i \cdot \Delta x_i \quad (2.4)$$

donde para puntos x_i interiores:

$$\Delta x_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2 \quad (2.5)$$

Para nodos extremos izquierdos:

$$\Delta x_{iz} = (x_{iz+1} - x_{iz}) \quad (2.6)$$

y para nodos extremos derechos:

$$\Delta x_{de} = (x_{de} - x_{de-1}) \quad (2.7)$$

donde x_{iz} y x_{de} son las fronteras izquierda y derecha respectivamente. En esta aproximación

las funciones de forma $N^i(x)$ están dadas por:

$$N^i(x) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot \Delta V_i \quad (2.8)$$

2.3 Particiones de la Unidad

Se define partición de la unidad a un conjunto de funciones $P_{n_i} = \{p_j\}_{j=1}^{n_i}$ que cumplen con las siguientes propiedades:

$$p_j \in C_0^\infty(\Omega_i) \quad , 1 \leq j \leq n_i \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} p_j(\mathbf{x}) = 1 \quad , \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.10)$$

donde Ω es el dominio de aproximación en \mathfrak{R}^n y Ω_i es un segmento, disco o esfera, que se llamará nube de radio h_i y está centrado en $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n$.

La condición 2.9 establece que las componentes de la partición de la unidad deben ser de clase C_0^∞ dentro de cada una de las nubes definidas sobre el dominio. Por otro lado, la relación 2.10 indica que los elementos p_j de las familias P_{n_i} deben sumar 1 para cualquier punto perteneciente al dominio. Esto último define la propiedad fundamental de cualquier método que se defina como partición de la unidad.

2.4 Aproximación por Mínimos Cuadrados

Supóngase que se quiere resolver un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{A}_{n \times m} \cdot \mathbf{X}_{m \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1} \quad (2.11)$$

en que cada ecuación del sistema es linealmente independiente de las demás.

De esta forma se tiene que si $n < m$ entonces el sistema está restringido en sólo n de sus dimensiones, con lo que existen $m - n$ grados de libertad que permitirían encontrar infinitas soluciones, y en consecuencia el sistema proporciona menos información de la requerida.

En caso que $n = m$ existirá una solución única para la cual se satisface el sistema, ya que el espacio está definido en sus m dimensiones.

En caso que $n > m$ entonces existirán más restricciones que dimensiones del problema y por lo tanto el sistema no tendría solución. Sin embargo, podría lograrse una buena solución si el sistema es resuelto intentando cometer el menor error posible. Lo recién expuesto es el fundamento o base de todos métodos basados en mínimos cuadrados.

En general, cuando se quiera aproximar una distribución cualquiera con una base de m elementos mediante n puntos, con $m < n$, la curva así definida no se podrá ajustar exactamente a todos esos puntos. Por ello, en estos casos, se recurre a una aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados, la cual minimiza la suma de los cuadrados de todos los errores cometidos al aproximar la distribución mediante una combinación lineal de los elementos (funciones) de la base.

La interrelación entre todos los métodos recién presentados se puede observar en la figura 2.2.

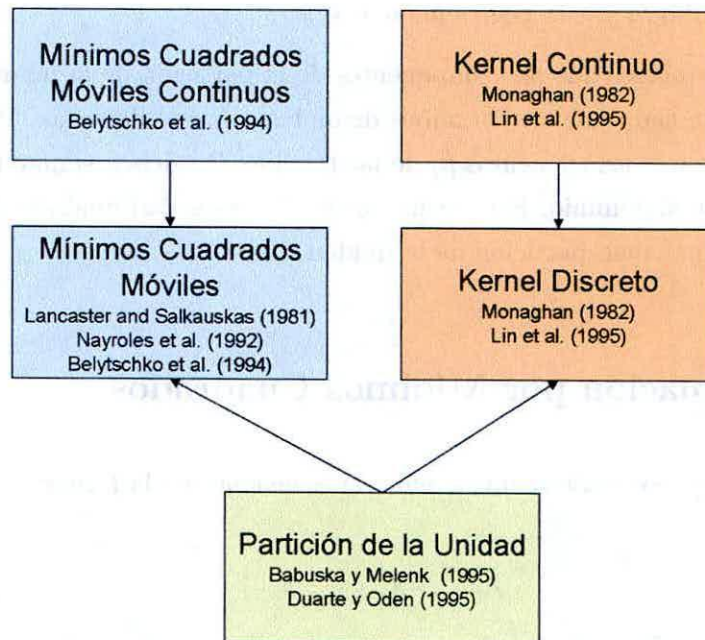


Figura 2.2: Interrelación entre los métodos de aproximación libres de malla.

Capítulo 3

Método de puntos finitos

El método de puntos finitos aproxima localmente la solución de una ecuación diferencial parcial en cada uno de los puntos con los que el dominio es discretizado. Para ello aproxima las distribuciones espaciales involucradas mediante la técnica estándar de mínimos cuadrados ponderados, utilizando la colocación puntual para la obtención del sistema final de ecuaciones discretas.

3.1 Generación de subdominios o nubes para aproximación local

Debido al carácter local de la aproximación utilizada por este método, resulta necesario definir para cada nodo del dominio una vecindad que considere sólo los nodos más próximos a él. A este conjunto de puntos generalmente se le denomina “nube” y a su punto central de referencia se le conoce como “nodo estrella”. Se puede observar que un mismo nodo podrá ser estrella o vecino dependiendo de la nube en que se encuentre. La figura 3.1 muestra un esquema típico de partición de un dominio en nubes circulares de radios variables.

Un punto sumamente relevante al momento de definir las nubes asociadas a cada uno de los nodos, es que su superposición debe conformar el dominio estudiado en toda su amplitud. Si se considera a n_p como el número total de nodos, la relación 3.1 representa lo anteriormente expuesto.

$$\bigcup_{k=1}^{n_p} \Omega_k = \Omega \quad (3.1)$$

Otro aspecto importante a considerar en la definición de estas nubes, pero que es de más

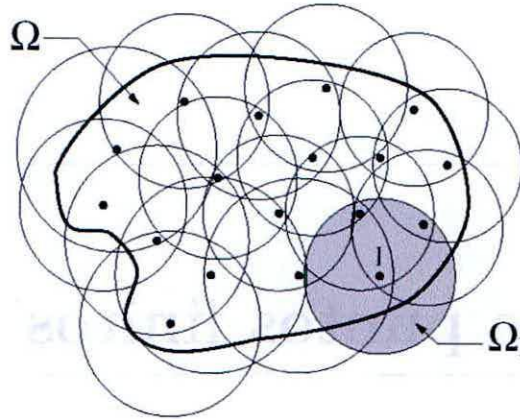


Figura 3.1: Dominio del problema Ω y nube Ω_I asociada a nodo I .

difícil cuantificación, es el hecho de que los subdominios asociados a “nodos vecinos” deben tener suficiente traslapeo como para asegurar la convergencia global de las aproximaciones locales por mínimos cuadrados. Criterios generalmente utilizados en la generación de nubes que permiten la satisfacción adecuada de esta condición son:

1. el criterio “en cruz”, mostrado en la figura 3.2-a para el caso bidimensional,
2. y el criterio de “vecinos de Voronoi”, representado en la figura 3.2-b también para el caso bidimensional.

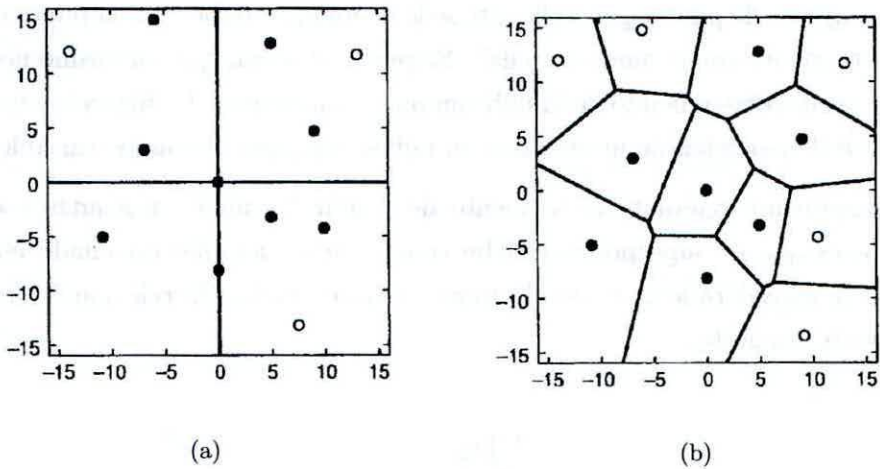


Figura 3.2: Criterios para la generación de nubes: (a) cruz; (b) Voronoi.

En el presente trabajo se utiliza el criterio de “vecinos de Voronoi” para la definición de las nubes asociadas a cada uno de los nodos con los que se caracteriza el dominio.

3.2 Aproximación por mínimos cuadrados ponderados

Como se mencionó anteriormente, la aproximación por mínimos cuadrados ponderados (WLS) es el elemento basal del MPF, por lo que resulta absolutamente necesario profundizar más sobre este tema.

Considere la aproximación local $\hat{u}(\mathbf{x})$ de la función $u(\mathbf{x})$ en el subdominio o nube Ω_k asociado al nodo estrella \mathbf{x}_k , como una combinación lineal de funciones conocidas $\mathbf{p}(\mathbf{x})$,

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_k \quad (3.2)$$

donde,

- $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ es una base de m funciones linealmente independientes,
- $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector de parámetros constantes válido solamente en Ω_k .

En rigor, los elementos de la base de funciones de interpolación pueden pertenecer a cualquier familia de funciones, sin embargo, por simplicidad, se utilizarán los m primeros polinomios mónicos. Las bases polinómicas de uso más extendido, mostradas aquí para el caso bidimensional, son las bases lineales,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y]$$

y las bases cuadráticas,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$$

Cabe mencionar la posibilidad de usar bases completas o incompletas en la aproximación, dependiendo de las características del problema, sin embargo, es requisito incluir dentro de la base el término constante $p_i(x) = 1$, ya que este término asegurará que las funciones de forma generadas mediante WLS sean particiones de la unidad.

$$\mathbf{p}_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1 \dots m \quad (3.3)$$

Puesto que la ecuación 3.2 es válida para cada uno de los n puntos del subdominio k -ésimo, las aproximaciones $\hat{u}(\mathbf{X})$ en su conjunto conformarán el sistema de Vondermonde dado por la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ u(\mathbf{x}_j) \\ \vdots \\ u(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \hat{u}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \hat{u}(\mathbf{x}_j) \\ \vdots \\ \hat{u}(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_k(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_j) & \cdots & p_k(\mathbf{x}_j) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_k(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Ésta, a su vez, puede ser expresada en forma compacta como,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}^k) \cong \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}^k) = \mathbf{P}(\mathbf{X}^k) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (3.5)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^k &= [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]^T \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}^k) &= [u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)]^T \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}^k) &= [\hat{u}(\mathbf{x}_1), \dots, \hat{u}(\mathbf{x}_n)]^T \\ \mathbf{P}(\mathbf{X}^k) &= [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]^T \\ \boldsymbol{\alpha} &= [\alpha_1, \dots, \alpha_m]^T \end{aligned}$$

En general, el número de puntos que conforma la nube, n , es mayor que el número de funciones que definen la base, m , por lo que la matriz $\mathbf{P}(\mathbf{X}^k)$ es normalmente rectangular.

Esto último implica que el carácter interpolante se pierde y el problema se transforma en una aproximación numérica, en donde el vector de coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ debe ser determinado de manera que la suma ponderada del cuadrado de las diferencias entre los valores exactos $u(\mathbf{x})$ y los valores aproximados $\hat{u}(\mathbf{x})$ en cada punto del dominio sea minimizada. Esto se muestra gráficamente en la figura 3.3 y queda matemáticamente establecido a través de la siguiente expresión,

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n \varphi(\mathbf{x}_j) \cdot (u(\mathbf{x}_j) - \hat{u}(\mathbf{x}_j))^2 \right\} \quad (3.6)$$

donde $\varphi(\mathbf{x}_j)$ es una función de peso definida en Ω_k , evaluada en el nodo \mathbf{x}_j .

El desarrollo del proceso de minimización descrito por la ecuación 3.6, conduce a la siguiente expresión para el vector α :

$$\begin{aligned} \alpha &= A^{-1}(X^k)B(X^k)u(X^k) \\ A(X^k) &= P(X^k)W(X^k)P^T(X^k) \\ B(X^k) &= P^T(X^k)W(X^k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde,

$$W = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi(x_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi(x_n) \end{pmatrix}$$

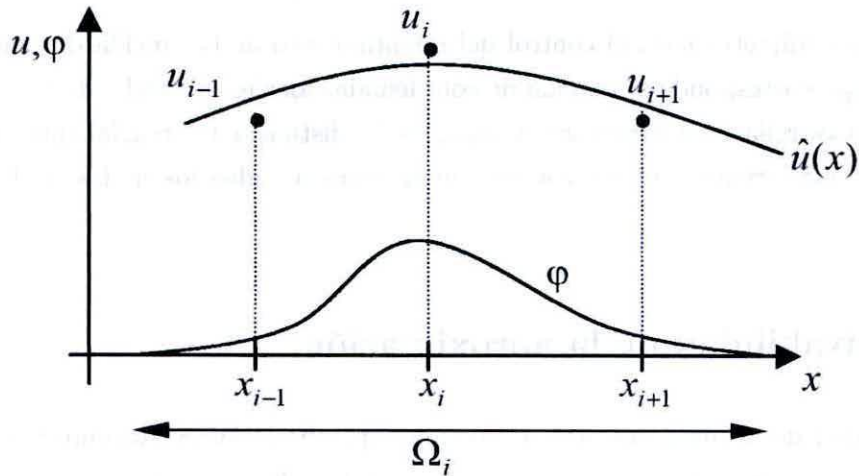


Figura 3.3: Concepto de la interpolación de mínimos cuadrados.

Finalmente, reemplazando la ecuación 3.7 en la ecuación 3.2, se obtiene la siguiente expresión para la función aproximante $\hat{u}(X)$ en Ω_k ,

$$\hat{u}(x) = p(x)^T \cdot [A(x)]^{-1} \cdot B(x) \cdot u^h \quad (3.8)$$

o equivalentemente:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{X}^k) \quad (3.9)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{X}^k) \\ \mathbf{C}(\mathbf{X}^k) &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}^k)\mathbf{B}(\mathbf{X}^k) \end{aligned}$$

Las funciones de peso se construyen de manera que adopten valores unitarios en torno al nodo estrella, y se anulen fuera de Ω_k . Elecciones comunes para esta función son las curvas de Gauss normalizadas o las splines de distintos órdenes. En este trabajo se optó por el uso de una función del tipo exponencial, la cual por sus características de apuntamiento se adapta de mejor forma a la técnica de colocación puntual utilizada en la definición del sistema de ecuaciones discreto. La expresión que la define es la siguiente,

$$\varphi(\mathbf{x}_j) = \frac{\exp(-|\xi(\mathbf{x}_j)|/k) + k \exp(-1/k)}{2k} \quad (3.10)$$

Aquí, k es un parámetro para el control del apuntamiento de la función de ponderación, $\xi(\mathbf{x}_j) = d_j/d_{\max}$ corresponde al sistema de coordenadas locales utilizado, d_j es la distancia entre el nodo estrella y el punto \mathbf{x}_j , y d_{\max} es la distancia referencial que permite la definición de una circunferencia cuya sección encierra a todos los nodos de la nube en cuestión.

3.3 Derivabilidad de la aproximación

La derivabilidad de la aproximación construida a partir de WLS, dependerá de la base y la función de ponderación. Según Lancaster y Salkauskas [28], si se demuestra que la base es continuamente derivable hasta el orden k en Ω y la función de ponderación es continuamente derivable hasta el orden l en Ω , se tendrá que las funciones de forma y por tanto la aproximación, será derivable hasta un orden dado por $\min\{k, l\}$. Considerando el uso de bases polinómicas (infinitamente derivables), se tendrá que $k = \infty$, con lo que las funciones de forma serán derivables hasta el orden l . De esta forma, se pueden considerar aproximaciones con funciones de ponderación derivables hasta el orden requerido o deseado por el modelo. Si el orden de derivabilidad es suficientemente alto, entonces se pueden calcular las derivadas.

La derivación de la aproximación debe considerar variables los términos \mathbf{p} , \mathbf{A} y \mathbf{B} ya que dependen de \mathbf{x} .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^h \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^h \quad (3.12)$$

Para reducir el esfuerzo de cálculo que implica derivar la inversa de la matriz \mathbf{A} , puede realizarse el siguiente reemplazo derivando con respecto a la variable i en la fórmula 3.11:

$$[\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]_i = [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h \quad (3.13)$$

con lo que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]_i = [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h - [\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]_i = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h - [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

Si se reemplaza la expresión 3.12 en la 3.15 se obtiene,

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]_i = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h - [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h \quad (3.16)$$

Por otro lado, la derivación de la ecuación 3.12 entrega,

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]_i = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \cdot \mathbf{u}^h + [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^h \quad (3.17)$$

De la comparación de las expresiones 3.16 y 3.17 se deduce,

$$[\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i^{-1} = -[\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \quad (3.18)$$

Con el desarrollo anterior podrán expresarse las derivadas parciales de las funciones de

forma de la manera siguiente,

$$N_j = \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{B}) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} N_{ij} &= (\mathbf{p}^T \mathbf{G}_i - \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}_j \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{B}_{,j}) \\ &+ (\mathbf{p}^T \mathbf{G}_j - \mathbf{p}_j^T \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{B}_i) \\ &+ \mathbf{p}_{ij}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{p}^T (\mathbf{G}_{ij} \mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{ij}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{A}_{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_{-1} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{-1} \quad (3.21)$$

Con el fin de facilitar la comprensión de las expresiones anteriores, se ha escrito $\mathbf{N}(x)$, $\mathbf{p}(x)$, $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{G}_i(x)$, $\mathbf{G}_{ij}(x)$ sin indicar explícitamente su dependencia de la variable espacial \mathbf{x} .

Puede observarse la evidente complejidad en la obtención de las derivadas de las funciones de forma, sin embargo, según Nayroles et al [16], las derivadas parciales de estas funciones pueden ser aproximadas mediante las relaciones siguientes,

$$N_{,j} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.22)$$

$$N_{,ij} = \mathbf{p}_{ij}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.23)$$

En ellas se ha despreciado el aporte que la variación de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen sobre las derivadas de las funciones de forma. Esto hace que las expresiones así obtenidas sean más simples y que su implementación en técnicas numéricas como el Método de Puntos Finitos sea más eficiente.

3.4 Colocación puntual

Sea Ω_S el dominio de solución de un problema de valor frontera y $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ su contorno. Asuma que el problema se encuentra expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(u) &= b, & \text{en } \Omega_S \\ B(u) &= t, & \text{en } \Gamma_t \quad (\text{Condición de Neumann}) \\ u &= u_p, & \text{en } \Gamma_u \quad (\text{Condición de Dirichlet}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde A y B son operadores diferenciales, u es la función incógnita, b y t representan funciones forzantes sobre el dominio Ω_S y sobre su contorno Γ_t , y u_p son los valores prescritos de u en Γ_u .

Un procedimiento general para resolver esta clase de problemas es el método de los residuos ponderados, donde la función incógnita se aproxima mediante funciones de prueba \hat{u} , siendo el sistema de ecuaciones 3.24 reemplazado por:

$$\int_{\Omega_S} \Phi_i [A(\hat{u}) - b] d\Omega_S + \int_{\Gamma_t} \hat{\Phi}_j [B(\hat{u}) - t] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}_k [\hat{u} - u_p] d\Gamma = 0 \quad (3.25)$$

donde,

$$\begin{aligned} i = 1, \dots, n_S & \text{ es el número de nodos que pertenecen a } \Omega_S \text{ pero no a } \Gamma. \\ j = 1, \dots, n_t & \text{ es el número de nodos que pertenecen a } \Gamma_t. \\ k = 1, \dots, n_u & \text{ es el número de nodos que pertenecen a } \Gamma_u. \end{aligned}$$

Con el fin de explotar el carácter sin malla de la metodología, el MPF utiliza un esquema de colocación puntual, donde las funciones de ponderación se definen como funciones delta de Dirac,

$$\Phi_i = \hat{\Phi}_j = \tilde{\Phi}_k = \delta \quad (3.26)$$

De esta manera se obtiene el conjunto siguiente de ecuaciones discretas,

$$\begin{aligned} [A(\hat{u})]_i - b_i &= 0 \\ [B(\hat{u})]_j - t_j &= 0 \\ \hat{u}_k - u_p &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si en la expresión 3.25, la aproximación \hat{u} de la solución del problema de valor de frontera definido por 3.24 se representa como:

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^{n_p} N_j^T u_j \quad (3.28)$$

donde n_p es el número total de nodos, y las funciones de forma N_j^T se construyen según la formulación de mínimos cuadrados mostrada en la sección anterior. Entonces, al reemplazar la ecuación 3.26 en el sistema 3.25, se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas que permite evaluar la aproximación de la solución buscada como:

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.29)$$

De esta forma, la colocación puntual, permite satisfacer ecuaciones diferenciales en puntos del dominio de solución, sin tener que definir subdominios de integración como en el caso de las formulaciones débiles (por ejemplo FEM).

3.5 Convergencia del MPF

Para asegurar la convergencia del MPF, es necesario que se cumplan las condiciones de consistencia y estabilidad. La consistencia depende de los requisitos impuestos por la ecuación diferencial y corresponde a la capacidad de la base para representar exactamente la función a interpolar. Las condiciones de consistencia serán satisfechas si se cumplen las condiciones de completitud y reproductividad. Una aproximación de orden k es considerada completa si y solo si es capaz de representar exactamente cualquier polinomio de orden inferior o igual a k . La reproductividad está relacionada con la capacidad de la aproximación para representar los valores nodales de la función. La estabilidad de un método tiene relación con la capacidad del mismo para acercarse gradualmente a la solución exacta, sin que se presenten oscilaciones que empeoren la solución cada vez que se pasa de un grado de refinamiento a otro.

3.5.1 Consistencia

Sea $u(\mathbf{x})$ una función de prueba dada por un polinomio completamente contenido en la base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, de modo que, como en 3.2:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (3.30)$$

De acuerdo a 3.8, el MPF aproximará localmente la función como,

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \mathbf{p}^T(x) \cdot [\mathbf{A}(x)]^{-1} \cdot \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{u}^h \\ \hat{u}(x) &= \mathbf{p}^T(x) \cdot [\mathbf{A}(x)]^{-1} \cdot \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} \\ \hat{u}(x) &= \mathbf{p}^T(x) \cdot [\mathbf{A}(x)]^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}(x) \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} \\ \hat{u}(x) &= \mathbf{p}^T(x) \cdot [\mathbf{A}(x)]^{-1} \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \boldsymbol{\alpha} \\ \hat{u}(x) &= \mathbf{p}^T(x) \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (3.31)$$

y para todos los puntos \mathbf{x} en la nube se tendrá que,

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{p}^T(x) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (3.32)$$

El MPF es capaz de representar un polinomio que esté contenido completamente en su base de aproximación $\mathbf{p}(x)$, por lo que la consistencia de este método está asegurada.

Adicionalmente, se demuestra que en aproximaciones del tipo WLS, usando una base polinómica completa de m elementos y una función de peso con sus m primeras derivadas continuas en el subdominio de aproximación Ω_i , o lo que es equivalente, perteneciente al espacio $C^m(\Omega_i)$, se puede reproducir exactamente cualquier función polinómica f de grado menor o igual que el de la base, esto es:

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}) \quad (3.33)$$

donde N_j es la función de forma del nodo j -ésimo de la nube.

En el caso de funciones de forma generadas por una base polinómica completa de orden k se cumplen las siguientes condiciones de consistencia:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^\alpha N_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^\alpha \cdot D_x^\beta N_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \mathbf{x}^{\alpha - \beta} \quad \begin{array}{l} 1 \leq \alpha \leq k \\ \alpha \geq k \end{array} \quad (3.35)$$

La ecuación 3.34 corresponde a la condición de consistencia para las funciones mónicas de orden α y la ecuación 3.35 es la condición de consistencia para sus derivadas, lo que indica que las aproximaciones WLS son capaces de reproducir exactamente derivadas de orden β con respecto a la variable \mathbf{x} de un monomio de grado α . Ambas condiciones se cumplen cuando el grado de la base k , es superior o igual al grado del monomio α , y la función de peso $\varphi(x)$ pertenece a $C^m(\Omega_i)$, con $m \geq \beta$.

3.5.2 Estabilidad

En lo referido a la estabilidad del método, existen diversos factores que lo afectan y perturban su solución. Uno de ellos corresponde a que las matrices \mathbf{A} suelen estar mal condicionadas o ser singulares (ver apéndice A), de modo que su inversión introduce grandes errores o incluso puede ser imposible. Además, la matriz \mathbf{K} genéricamente es rectangular y puede también estar mal condicionada o ser singular, además de no ser simétrica en el caso que sea cuadrada. Otro factor que influye de manera importante en la convergencia

del método es la definición de las funciones de peso y la estructura de las nubes de puntos. Con el fin de acotar los errores cometidos durante el proceso de inversión de la matriz \mathbf{A} , generalmente los nodos en el dominio se distribuyen de manera tal que dicha matriz tenga un número de condición (ver apéndice A) dentro de límites tolerables. En caso de no cumplirse, los puntos deben ser dispuestos de manera distinta. Si bien esta puede ser una alternativa viable de solución, su uso limita la capacidad que el método tiene respecto a la distribución arbitraria de los nodos.

En lo referido al mal condicionamiento que tiene la matriz \mathbf{K} del sistema mostrado en la ecuación 3.29, se han propuesto distintas alternativas para mejorarlo, dentro de las cuales destaca la técnica conocida como estabilización residual (FIC). En ella se agregan nuevas componentes a la matriz \mathbf{K} que contribuyen a su estabilidad y rescatan la información relevante proveniente de las condiciones de frontera tipo Neumann. La finalidad de esta técnica es incluir algunos de los términos que se han suprimido en los desarrollos en series de Taylor de las variables,

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h) + h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2!} f''(x_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_k) + O(h^{n+1}) \quad (3.36)$$

donde h es el tamaño del subdominio analizado y n es el número de términos de considerados en la serie. Cuando $h \rightarrow 0$ se transforma en un diferencial dx para un punto arbitrario en el dominio. Este truncamiento hará surgir errores en las soluciones de éstos métodos y el efecto acumulativo de éste determinará las propiedades de estabilidad de la solución.

Las relaciones 3.37 muestran los nuevos operadores diferenciales derivados de la aplicación del procedimiento recién expuesto.

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial}{\partial x_k} A &= 0 && \text{en } \Omega \\ u_j^h - u_j^p &= 0 && \text{en } \Gamma_u \\ B - \frac{1}{2} h_k n_k A &= 0 && \text{en } \Gamma_t \end{aligned} \quad (3.37)$$

Aquí, n_k son los cosenos directores del vector unitario normal de la frontera Γ_t y h_k es el tamaño del dominio sobre el cual se hizo el balance.

Con la realización de esta modificación, se introduce en el sistema de ecuaciones 3.29 la estabilidad necesaria para su buen comportamiento a nivel discreto de la metodología. De

este modo, el nuevo sistema de ecuaciones obtenido será,

$$\begin{aligned} [A(\hat{u}_j) - \frac{1}{2}h_k \frac{\partial}{\partial(x_k)} A(\hat{u}_j)] &= 0 & j = \overline{1, n_\Omega} \\ [\hat{u}_j - u_p^j] &= 0 & j = \overline{1, n_{\Gamma_u}} \\ [B(\hat{u}_j) - \frac{1}{2}h_k n^k A(\hat{u}_j)] &= 0 & j = \overline{1, n_{\Gamma_j}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

El cual se expresa de modo compacto como,

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s(h_k)) \cdot \mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (3.39)$$

En esta expresión, \mathbf{u}^h es el vector de incógnitas a ser determinado, \mathbf{K} representa a la matriz de rigidez sin estabilizar y \mathbf{K}_s contiene los términos estabilizantes que dependerán del tamaño característico del dominio considerado h_k .

Otra forma de estabilizar la solución en la frontera, con resultados relativamente aceptables, consiste en enlazar las aproximaciones sin malla en el interior del dominio con las de elementos finitos en las fronteras. Mas, dado que esto requiere de la definición de elementos en los bordes, el método implementado dejaría de ser “libre de malla”.

Existe una estabilización que destaca por sobre las demás por su simplicidad de aplicación y por la gran mejora que proporciona a la estabilidad de la solución. Esta corresponde a una propuesta de Nayroles et al., que consiste básicamente en la normalización de los términos de las bases de aproximación según algún parámetro dimensional característico de las nubes. Con esto se consigue independizar a los subdominios de su posición respecto al origen y de su dimensión relativa respecto del dominio de solución.

3.6 Funciones de ponderación

Según se ha indicado en las secciones anteriores, la aproximación a utilizar depende fuertemente de la elección de la función de peso. Dependiendo de su configuración, forma, tamaño y ubicación, se podrán obtener resultados variados en lo referido a costo computacional y calidad de la solución.

Las funciones de ponderación deben cumplir con ciertas condiciones generales para ser introducidas en la aproximación WLS. Está definido que el valor de la función incógnita u en un punto \mathbf{x} corresponde a un promedio ponderado de los valores de la función en sus vecinos contenidos en el subdominio o nube Ω_i . La importancia o ponderación del

valor de los vecinos en $u(\mathbf{x})$ está dada por la función de ponderación y depende de la cercanía relativa que estos puntos tengan respecto del punto a aproximar. Esta distancia corresponde a la norma euclídeana $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ donde \mathbf{y} es el punto vecino. Los soportes más usados para las funciones de ponderación son nuevamente los discos y esferas en 2D y 3D respectivamente, aunque también pueden ser usados soportes rectangulares y prismáticos. A continuación se presentan las condiciones generales que deben cumplir las funciones de ponderación:

$$\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) > 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_i \quad (3.40)$$

$$\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega_i^C \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega_i} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) d\Omega = 1 \quad (3.42)$$

La relación 3.40 indica que la importancia o peso para todos los puntos vecinos que afectan el valor de $u(\mathbf{x})$ es positivo. Por otro lado, la expresión 3.41 indica que la importancia de todos los puntos no pertenecientes a la nube es nula. Finalmente, la integral 3.42 indica que el valor de $u(\mathbf{x})$ está dado por la totalidad de sus vecinos cercanos incluido él mismo.

Algunos autores incluyen las siguientes condiciones en forma adicional, aunque no son estrictamente necesarias:

$$\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, h) \text{ es monótona decreciente} \quad (3.43)$$

$$\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, h) \rightarrow \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \quad \text{cuando } h \rightarrow 0 \quad (3.44)$$

Estas expresiones indican que el peso será simétrico respecto del nodo estrella y que la influencia de los vecinos aumentará al disminuir la distancia respecto del mismo. También consideran que si el tamaño del soporte es demasiado pequeño, el valor asociado a la función de ponderación deberá corresponder a una función impulso tipo delta de Dirac.

Algunas funciones de ponderación comúnmente utilizadas en métodos sin malla son las siguientes,

- Spline cúbica

$$\varphi(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

- Spline cuarta

$$\varphi(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

- Spline quinta

$$\varphi(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 10\bar{d}^3 + 15\bar{d}^4 - 6\bar{d}^5 & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

La figura 3.4 muestra una comparación entre las funciones de peso anteriores, todas pertenecientes a la clase C^2 .

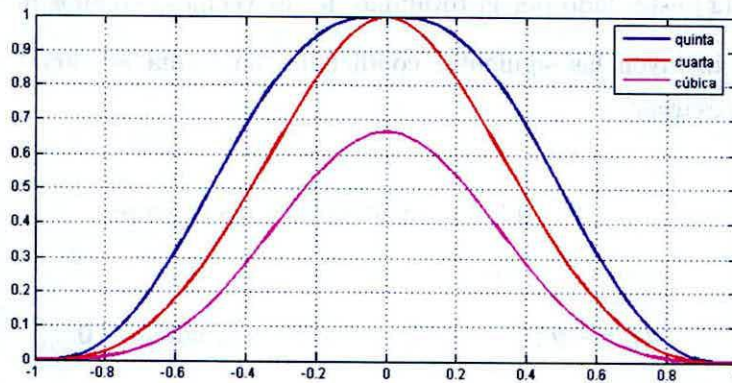


Figura 3.4: Contrastación funciones de peso tipo spline.

- Función de Gauss

$$\varphi(d) = \begin{cases} \frac{\exp(-(r\bar{d})^{2k}) - \exp(-r^{2k})}{1 - \exp(-r^{2k})} & d \leq d_{max} \\ 0 & d > d_{max} \end{cases} \quad (3.48)$$

Acá, r y k son parámetros que permiten ajustar la forma de las funciones gaussianas. Esta dependencia se muestra gráficamente en la figuras 3.5 y 3.6, en donde se ha sensibilizado el comportamiento de esta función respecto de cada uno de sus parámetros. Cabe destacar que en la definición anterior k siempre es un entero positivo.

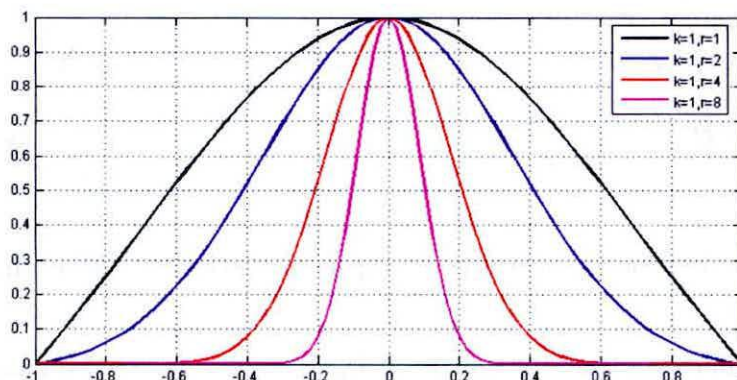


Figura 3.5: Funciones de peso gaussianas para distintos valores del parámetros r .

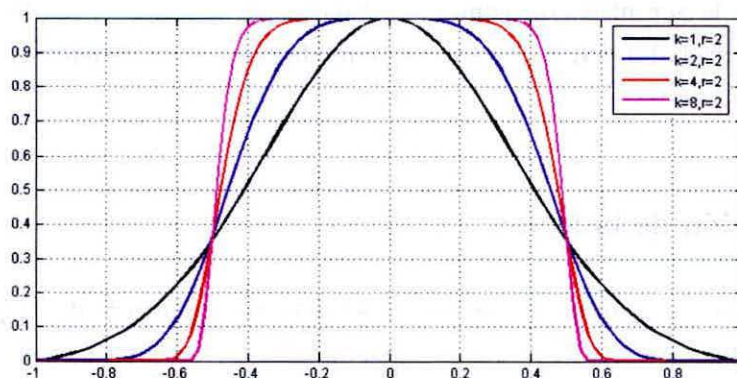


Figura 3.6: Funciones de peso gaussianas para distintos valores del parámetros k .

- Función cónica

$$\varphi(d) = \begin{cases} 1 - (d/d_{max})^{2k} & d \leq d_{max} \\ 0 & d > d_{max} \end{cases} \quad (3.49)$$

En este caso k también es un entero positivo. Algunas de las curvas pertenecientes a esta familia se muestran en la figura 3.7.

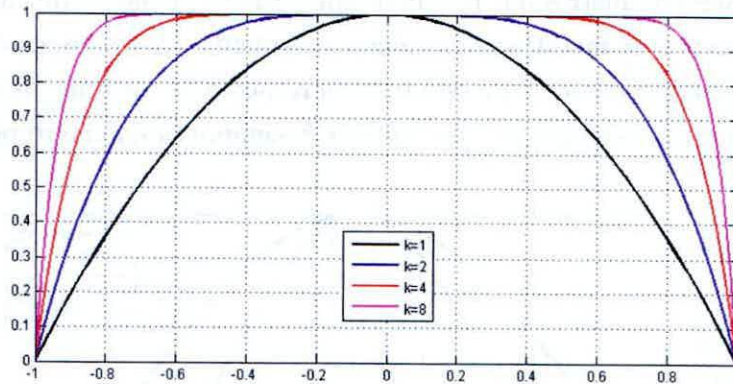


Figura 3.7: Funciones de peso cónicas para distintos valores del parámetro k .

En todas las definiciones anteriores, $\bar{d} = d/d_{max}$, donde d es la distancia entre el nodo estrella y un punto cualquiera del soporte, es decir, $d = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$, y d_{max} es la máxima distancia entre el nodo central y la frontera del soporte.

Debe tenerse en cuenta que cualquier curva que cumpla con las condiciones generales establecidas, puede ser utilizada como una función de ponderación, de hecho, algunas distribuciones de probabilidad, como la t-student o la beta, han sido exitosamente utilizadas como funciones de peso.

3.6.1 Definición de la forma

La definición de la forma de una función de ponderación considera dos aspectos, uno que tiene relación con el soporte de la misma, subdominio en el cual su valor es distinto de cero, y otro que está asociado con su estructura matemática.

En la figura 3.8 se representan algunos soportes de funciones de peso. Los soportes deben ser capaces de asignar valores distintos de cero a cada uno de los puntos pertenecientes a la nube, o sea, deben contener a la nube en su totalidad. Se podrá asignar una ponderación cero a los nodos vecinos que queden en la frontera del soporte, aunque al hacer esto se obtendrán matrices \mathbf{A} que contendrán ceros en algún elemento de su diagonal, con los que su inversión será imposible. Para evitar esto se recomienda que el soporte sea algo mayor que la nube de puntos, de esta forma ninguno de los puntos contenidos en la nube tendrá ponderación cero.

La forma más común de definir la forma de las funciones de peso es hacer que su valor

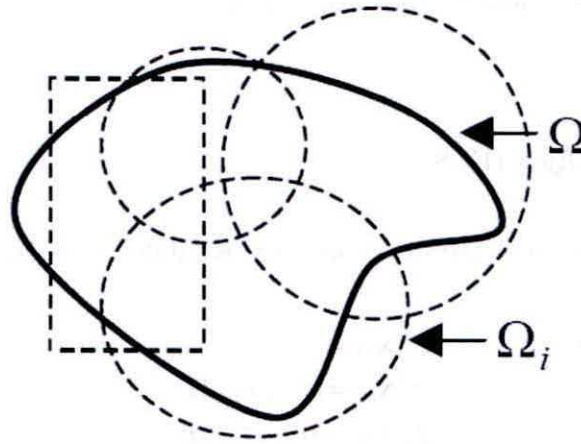


Figura 3.8: Soportes bidimensionales.

sea máximo en el nodo estrella de Ω_i y que decrezca al alejarse de éste hasta hacerse cero fuera del soporte.

3.6.2 Definición del tamaño

La definición del tamaño del soporte debe realizarse de manera tal que todos los nodos pertenecientes a la nube a él asociada tengan ponderaciones no nulas. Debe recordarse que si la ponderación en algún nodo de la nube es nula o muy cercana al cero del computador, algunos valores de la diagonal de las matrices de peso también serán cero y por lo tanto la matriz \mathbf{A} contendrá elementos nulos en su diagonal. Esto implica que \mathbf{A} no podrá ser invertida si resulta singular, o su inversión contendrá grandes errores numéricos si su número de condición es muy alto. Esto puede evitarse, como se mencionó anteriormente, procurando que el soporte contenga a la nube de puntos en su totalidad, excediéndola mínimamente en tamaño.

3.6.3 Definición de la ubicación

En adición a los puntos antes mencionados, también es posible definir las funciones de ponderación respecto de la posición que adoptarán en la aproximación. De esta forma, la función de ponderación estará relacionada con la coordenada en que la función de peso tomará su valor máximo dentro de la nube. Esta definición da origen a 2 formas de aplicar las aproximaciones WLS: mínimos cuadrados fijos (FLS), que será el método aplicado en

este estudio, y mínimos cuadrados móviles (MLS).

Mínimos cuadrados fijos (FLS)

Si se define la función de peso para cada uno de los subdominios Ω_i , de modo que:

$$\begin{aligned}\varphi_i(\mathbf{x}_i) &= 1 \\ \varphi_i(\mathbf{x}_i) &\neq 0, \mathbf{x} \in \Omega_i \\ \varphi_i(\mathbf{x}_i) &= 0, \mathbf{x} \in \Omega_i^C\end{aligned}\tag{3.50}$$

El error de aproximación queda definido por 3.52,

$$e = \left[\int_{\Omega_i} \varphi_I(\mathbf{x}) \cdot (u(\mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x}))^2 d\Omega \right]^{1/2}\tag{3.51}$$

con lo que $\mathbf{W}(x)$ en 3.7 deberá ser reemplazado por $\mathbf{W}_i(x)$ con:

$$\mathbf{W}_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_i(\mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_i(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}\tag{3.52}$$

En la figura 3.9 se muestra una aproximación unidimensional donde es posible visualizar esta forma de definir la función de peso.

Si en esta definición se considera que $\varphi_i(\mathbf{x})$ es una constante, entonces se obtendrá la forma tradicional de los mínimos cuadrados, LSQ, en donde la matriz de pesos \mathbf{W} es la matriz identidad, cuya incidencia en el cálculo de la aproximación es nula.

Mínimos cuadrados móviles (MLS)

En este caso se define la función de peso φ de modo tal que tome su valor máximo para una coordenada arbitraria de x_k , donde la función incógnita \hat{u} será evaluada. De este modo φ

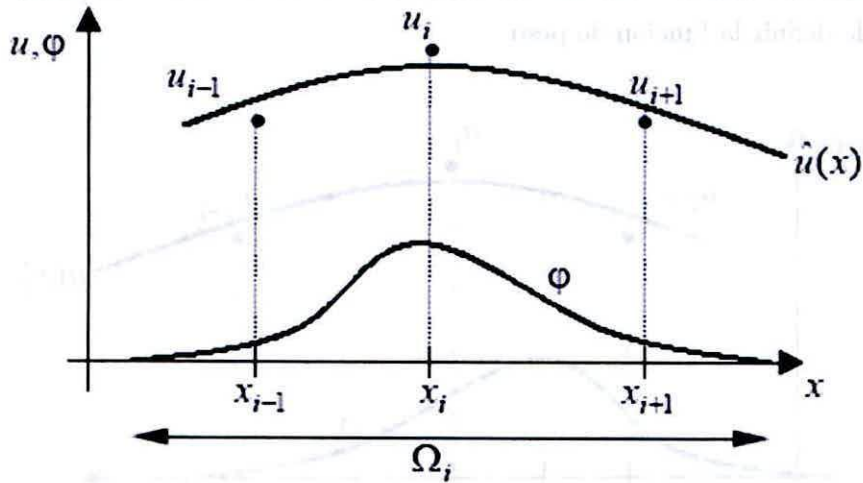


Figura 3.9: Aproximación por mínimos cuadrados fijos.

queda definida por:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(x) &= 1 & , x = x_k \\
 \varphi_k(x) &\neq 0 & , x \in \Omega_k \\
 \varphi_k(x) &= 0 & , x \in \Omega_k^C
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

donde φ_k se “moverá” según la posición que adopte x_k , con lo que el error quedará determinado ahora como,

$$e = \left[\int_{\Omega_i} \varphi_k(\mathbf{x}) \cdot (u(\mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x}))^2 d\Omega \right]^{1/2}
 \tag{3.54}$$

y $\mathbf{W}(x)$ en 3.7 deberá ser reemplazado por $\mathbf{W}_k(x)$ con:

$$\mathbf{W}_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_k(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_k(\mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_k(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}
 \tag{3.55}$$

En la figura 3.10 se muestra una aproximación unidimensional donde es posible visualizar esta forma de definir la función de peso.

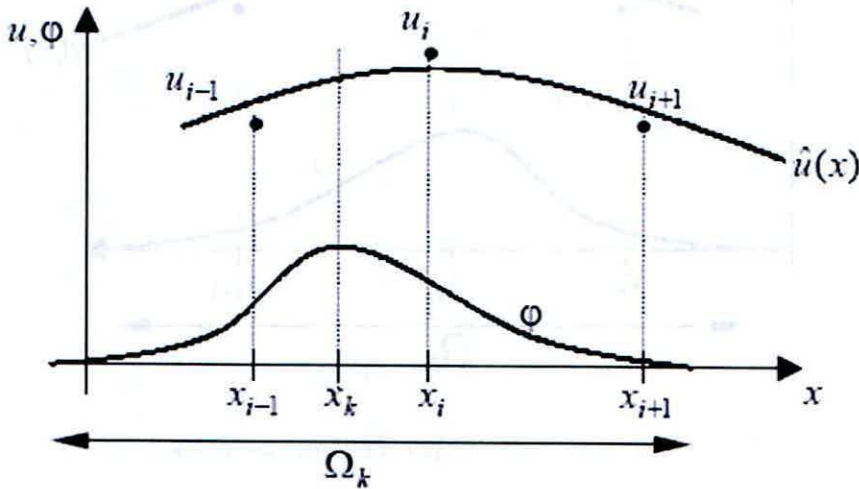


Figura 3.10: Aproximación por mínimos cuadrados móviles.

Dado que las ponderaciones de la función de peso varían punto a punto en MLS, la existencia de las derivadas de las funciones de forma dependerá de las propiedades de continuidad que las funciones de peso tengan. En el caso FLS, en donde los valores de la función de ponderación son puntuales y se mantienen fijos una vez evaluados, no sucede esto.

3.7 Funciones de forma

Las funciones de forma en WLS, definidas por la ecuación 3.9, serán particiones de la unidad en Ω_i siempre y cuando se incluya el término constante en la base, es decir, siempre y cuando $p_1(x) = 1$ en cualquier tipo de base empleada. La ecuación 3.56 da cuenta de esta condición,

$$\{1\} \in \mathbf{p}(x) \Rightarrow \sum_{j=1}^n N_j(x) = 1 \forall x \in \Omega_i \quad (3.56)$$

El que las funciones de forma sean particiones de la unidad asegura el cumplimiento de las condiciones de reproductividad y de consistencia, debido a que la ponderación de las funciones de peso para los nodos vecinos es siempre 100%.

Junto con lo anterior, será deseable que las funciones de forma cumplan con la condición de delta de Dirac:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.57)$$

Con lo que se asegura que en un nodo perteneciente al subdominio de aproximación o nube, la única función de forma que influya en el valor nodal de la variable será la función de forma generada en el propio nodo.



3.8 Construcción de una base

Según se estableció en los capítulos anteriores, la aplicación del MLS o FLS requiere de la inversión de la matriz \mathbf{A} , por lo que ésta debe estar correctamente condicionada para evitar la aparición de errores numéricos en el proceso. La definición del número de condición adecuado dependerá de la capacidad de la máquina y del software utilizados para realizar los cálculos.

Al observar la estructura de la matriz \mathbf{A} , se puede ver que está compuesta por la multiplicación de dos matrices de Vandermonde y una matriz diagonal, por lo que se puede esperar que tenga algunas de las propiedades de las matrices de Vandermonde, las que son bien conocidas por sus problemas de condicionamiento (ver apéndice A). Para observar estas dificultades se construirán las matrices \mathbf{A} sobre un intervalo unidimensional comprendido entre -100 y 100 , con 201 nodos equiespaciados, bases de aproximación cuadráticas unidimensionales definidas por $[1 \ x \ x^2]$ y funciones de ponderación gaussianas de parámetros $k = 1$, $r = 3.5$, $d_{max} = 2.1h$, donde h indica la distancia entre los nodos. Se utilizarán nubes de 5 nodos en donde el nodo estrella es el nodo central.

Por ejemplo, la matriz \mathbf{A} construida en torno del nodo $x = 0$ está dada por,

$$\mathbf{A}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0.241 \cdot 10^1 & 0.000 \cdot 10^0 & 0.153 \cdot 10^1 \\ 0.000 \cdot 10^0 & 0.153 \cdot 10^1 & 0.000 \cdot 10^0 \\ 0.153 \cdot 10^1 & 0.000 \cdot 10^0 & 0.203 \cdot 10^1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

y la matriz construida en torno de $x = 90$ estará dada por:

$$\mathbf{A}_{x=90} = \begin{bmatrix} 0.241 \cdot 10^1 & 0.217 \cdot 10^3 & 0.195 \cdot 10^5 \\ 0.217 \cdot 10^3 & 0.195 \cdot 10^5 & 0.176 \cdot 10^7 \\ 0.195 \cdot 10^5 & 0.176 \cdot 10^7 & 0.158 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Se puede observar que mientras en $\mathbf{A}_{x=0}$ los elementos de la diagonal son los mayores de sus filas respectivas, en la matriz $\mathbf{A}_{x=90}$ esto no ocurre. Lo anterior indica que la primera matriz está mejor condicionada que la segunda, con lo que se infiere que la distancia al origen afectará el condicionamiento de las matrices \mathbf{A} . El efecto que tiene la distancia al origen en el condicionamiento de estas matrices se puede observar en la figura 3.11.

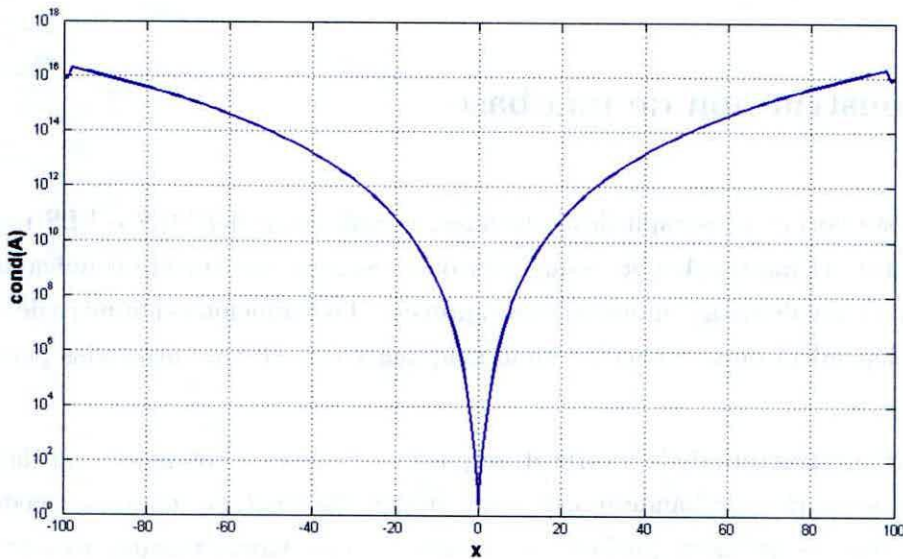


Figura 3.11: Efecto de la distancia al origen en el condicionamiento de la matriz \mathbf{A} .

Para corregir este efecto Nayroles propuso usar ejes locales en cada nube, lo que se traduce en calcular las bases respecto de ejes de coordenadas ubicados en los nodos estrella. Por ejemplo, para bases unidimensionales lineales y cuadráticas se tiene,

$$\mathbf{p}(x)^T = [1 \quad (x - x_i)] \quad (3.60)$$

$$\mathbf{p}(x)^T = [1 \quad (x - x_i) \quad (x - x_i)^2] \quad (3.61)$$

Mientras que para bases lineales y cuadráticas completas en dos dimensiones se tiene,

$$\mathbf{p}(x)^T = [1 \quad (x - x_i) \quad (y - y_i)] \quad (3.62)$$

$$\mathbf{p}(x)^T = [1 \quad (x - x_i) \quad (x - x_i)^2 \quad (x - x_i) \cdot (y - y_i) \quad (y - y_i) \quad (y - y_i)^2] \quad (3.63)$$

De este modo se ha logrado independizar el condicionamiento de \mathbf{A} de la distancia del nodo estrella al origen. De hecho, en el caso analizado, todas las matrices \mathbf{A} de las distintas nubes definidas son iguales.

En todo caso, aún existe la posibilidad de que la distancia entre nodos dentro de una misma nube afecte el condicionamiento de \mathbf{A} , lo que se puede observar en la figura 3.12. Para evitar esto, se ha propuesto normalizar las bases para lograr que las máximas distancias entre nodos sean valores en torno a la unidad, que es el valor de distancia en el que se observan los mejores resultados.

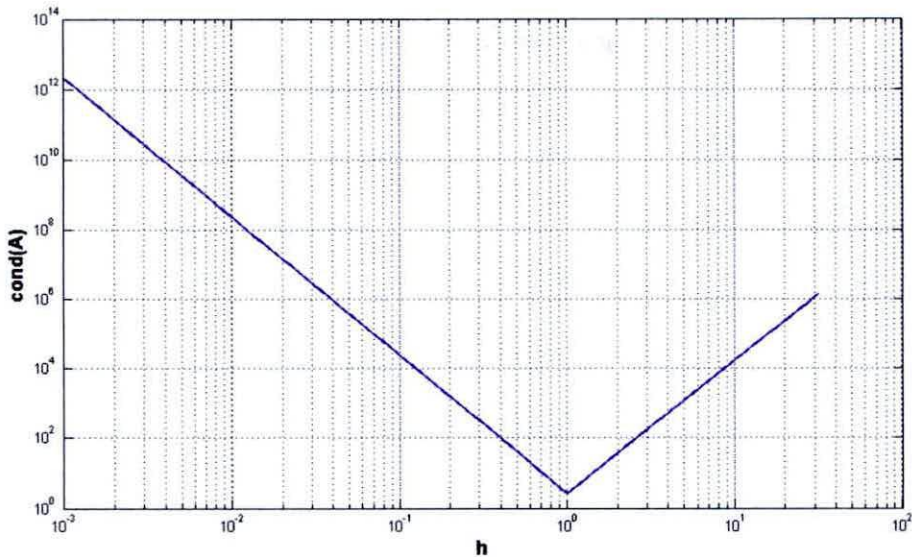


Figura 3.12: Efecto de la distancia entre nodos en el condicionamiento de \mathbf{A} .

Una opción para hacer esto es utilizar la distancia máxima entre el nodo estrella y sus vecinos como parámetro característico para la normalización de los valores de las variables dentro de la nube. De este modo, las bases lineales y cuadráticas en una y dos dimensiones

que se obtienen son,

$$\mathbf{p}(x)^T = \left[1 \quad \frac{(x - x_i)}{d_{max}} \right] \quad (3.64)$$

$$\mathbf{p}(x)^T = \left[1 \quad \frac{(x - x_i)}{d_{max}} \quad \frac{(x - x_i)^2}{d_{max}^2} \right] \quad (3.65)$$

$$\mathbf{p}(x)^T = \left[1 \quad \frac{(x - x_i)}{d_{max}} \quad \frac{(y - y_i)}{d_{max}} \right] \quad (3.66)$$

$$\mathbf{p}(x)^T = \left[1 \quad \frac{(x - x_i)}{d_{max}} \quad \frac{(x - x_i)^2}{d_{max}^2} \quad \frac{(x - x_i) \cdot (y - y_i)}{d_{max}^2} \quad \frac{(y - y_i)}{d_{max}} \quad \frac{(y - y_i)^2}{d_{max}^2} \right] \quad (3.67)$$

Esta forma de definir las bases hará que la implementación del MPF mediante colocaciones puntuales directas se torne especialmente simple, puesto que en este tipo de colocación sólo se evalúa la base en el nodo $x = x_i$, de modo que ésta adopta la forma,

$$\mathbf{p}(x)^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.68)$$

Capítulo 4

Discretización del problema

Antes de resolver cualquier problema de contorno, resulta necesario caracterizar primero su dominio de solución. En el método de puntos finitos, esto implica definir un conjunto de nodos que representen tanto al interior del dominio como a su frontera. Esto se puede efectuar mediante cualquier método geométrico destinado para este fin. En el caso particular del presente trabajo, la metodología adoptada se basa en la utilización de funciones implícitas para la definición de la geometría [14].

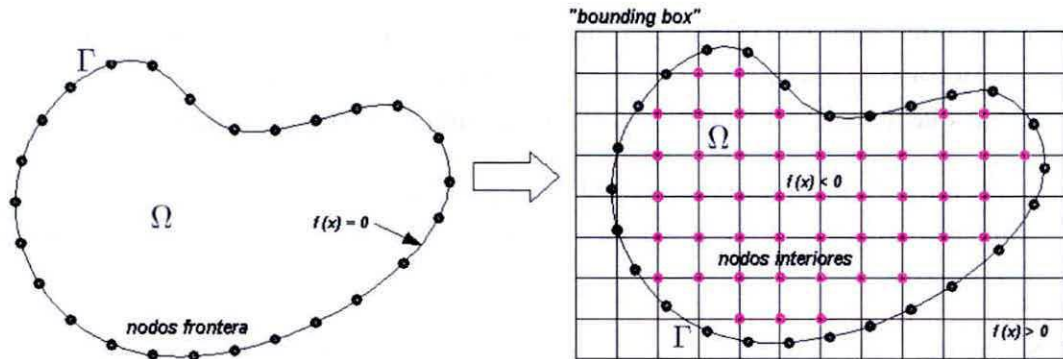


Figura 4.1: Definición de la geometría de un dominio a partir de la función implícita $f(\mathbf{X})$.

De acuerdo a esta metodología, y como se muestra en la figura 4.1, el dominio Ω de solución de un problema particular puede ser representado mediante una función escalar $f(\mathbf{X})$ que mida la distancia desde la frontera Γ a cualquier punto del espacio \mathbf{X} . Esta funcionalidad debe considerar la asignación de valores negativos o nulos para las distancias sólo en aquellos casos en que el punto en cuestión pertenezca al dominio de solución o a su frontera. En caso contrario los signos deben ser positivos.

- $f(\mathbf{X}) = 0$ si el nodo pertenece a la frontera Γ .
- $f(\mathbf{X}) < 0$ si el nodo pertenece al dominio de solución Ω .
- $f(\mathbf{X}) > 0$ si el nodo no pertenece ni al dominio de solución ni a su frontera.

Una elección natural para esta función es la conocida norma euclidiana entre un punto y una curva para el caso bidimensional, y un punto y una superficie en el caso tridimensional. En ambas situaciones, esta norma corresponde a la “menor distancia” entre los elementos en cuestión.

Una de las principales ventajas de la representación de geometrías mediante este tipo de técnicas es la natural conexión que existe entre ésta y los métodos propios del procesamiento de imágenes, lo cual permite la generación de modelos discretos a partir del scanner o fotografía de los dominios en estudio.

La representación gráfica del procedimiento de discretización del dominio utilizado por el presente estudio se muestra en la figura 4.1. De acuerdo a él, se deduce la siguiente secuencia de pasos para su adecuada implementación:

1. Se generan nodos en la frontera Γ del dominio mediante, por ejemplo, discretización paramétrica de las curvas o superficies a ella asociadas. En esta etapa se calculan además las normales exteriores asociadas a cada uno de estos puntos.
2. Se encierra el dominio de estudio Ω por una región, eventualmente rectangular, de geometría simple y de fácil discretización. A ella se la denomina como “bounding box”.
3. Se genera una cuadrícula inicial en la región denominada “bounding box”, calculándose para cada uno de sus vértices la distancia entre ellos y la frontera Γ del dominio. La función distancia $f(\mathbf{X})$ aquí utilizada, debe respetar las condiciones anteriormente establecidas para la representación implícita de geometrías.
4. Se seleccionan como nodos iniciales para la discretización del dominio a todos los nodos frontera, más aquellos nodos de la cuadrícula “bounding box” cuyas distancias signadas sean inferiores a cero.

La figura 4.2 muestra el resultado de la implementación computacional de la secuencia de pasos recién establecida.

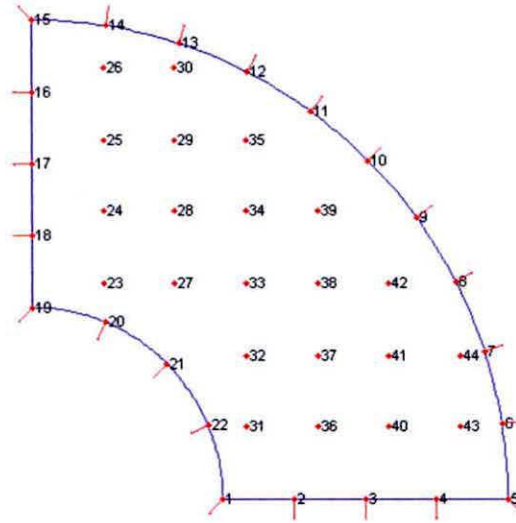


Figura 4.2: Implementación de metodología de discretización implícita donde se muestran nodos interiores y frontera con sus correspondientes normales.

Un procedimiento alternativo para generar el conjunto inicial de nodos sería la implementación completa mediante funciones implícitas del proceso de discretización. Esto elimina la necesidad de definir nodos interiores y frontera por caminos independientes, ya que la localización de estos últimos se obtiene a partir de la misma cuadrícula utilizada para los nodos interiores. A primera vista esto podría parecer atractivo pues permite una representación más compacta del proceso de discretización, mas la complejidad agregada a la metodología para el reposicionamiento de los nodos exteriores y/o interiores cercanos a la frontera, involucra algoritmos no lineales cuya aplicación práctica se traduce en elevados costos computacionales que merman las ventajas comparativas de los métodos sin malla frente a otros métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

El problema de encontrar una solución exacta para un problema de optimización es, en general, un problema NP-completo. Esto significa que, a menos que se descubra un algoritmo más eficiente, el tiempo necesario para encontrar una solución exacta crece exponencialmente con el tamaño del problema.

En este capítulo, se introduce el concepto de discretización, que consiste en aproximar un problema de optimización continuo por un problema de optimización discreto. Esto se hace mediante la sustitución de las variables continuas por variables discretas, lo que permite utilizar algoritmos de optimización más eficientes. Sin embargo, la discretización introduce un error de aproximación, que puede ser controlado mediante la elección adecuada del tamaño de la discretización. Este error puede ser reducido aumentando el número de puntos de discretización, pero a costa de un mayor costo computacional.

Capítulo 5

Método de refinamiento

La adaptación es una manera efectiva de lograr exactitud y eficiencia en forma simultánea. Esta se logra refinando la discretización en aquellas zonas donde los gradientes de los potenciales estimados sean elevados. Ahora bien, dado que estos valores son desconocidos a priori, será necesario disponer de un estimador que indique la región en la cual se debe agregar nodos (refinar), para mejorar la calidad de la solución. Todo esto en un proceso iterativo que sea eficiente desde el punto de vista computacional, y que amalgame adecuadamente número de refinamientos, agregación de nodos y mínima desviación de la aproximación.

El método de refinamiento utilizado en el presente estudio, y presentado en esta sección, se basa en una estimación del error *a posteriori* tanto para el potencial como para su gradiente. A partir de estos valores y de la estrategia de adición de nodos mostrada más adelante, se determinan aquellas zonas donde los errores son elevados y por tanto se requiere de nuevos nodos para el control de la desviación respecto a la solución real.

5.1 Estrategia para la adición de nodos

La idea que hay detrás de la adaptación no es otra que mejorar la solución, introduciendo nuevos nodos en las regiones del dominio donde los errores de aproximación tanto para el potencial como para el gradiente, no cumplan con una tolerancia previamente establecida.

La estrategia aquí utilizada, puede ser descrita a través del siguiente procedimiento:

1. Se genera una discretización inicial del dominio cuya denominación será *nodos de soporte*.

2. Se generan nuevos nodos a partir de los *nodos de soporte*, cuya denominación será *nodos de refinamiento*. Estos serán los candidatos a ser incluidos en el conjunto de *nodos de soporte* durante el proceso iterativo.
3. Se resuelve numéricamente el problema para los *nodos de soporte*.
4. A partir de los resultados anteriores, y de acuerdo a los estimadores definidos en la sección 5.2, se determinan las desviaciones del potencial y del gradiente en cada uno de los *nodos de refinamiento* establecidos.
5. Si el criterio de adaptación definido en la sección 5.3 se cumple para alguno de los *nodos de refinamiento*, entonces éste pasa a formar parte del conjunto *nodos de soporte* del dominio discretizado.
6. Este proceso se repite hasta alcanzar alguna tolerancia definida a priori.

Es importante destacar aquí, que la generación de los nodos de refinamiento, se hace en el mismo momento en que se están determinando las nubes mediante el criterio de vecinos de Voronoi. Para cada uno de los trazos definidos por el nodo estrella y sus vecinos, se establece un nuevo nodo en la zona media de los mismos. Esto se hace sobre la base del principio que establece que el máximo de error en aproximaciones polinómicas cuadráticas se produce precisamente en dichos puntos. La figura 5.1 muestra gráficamente lo recién indicado.

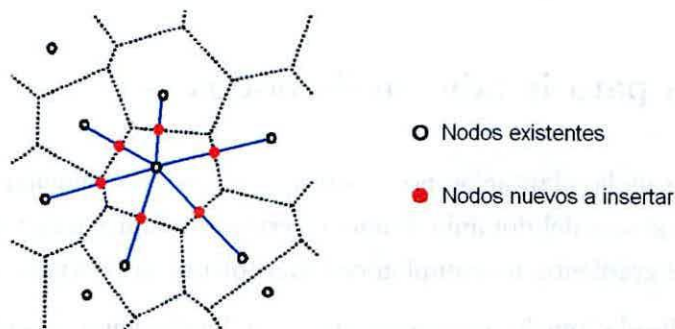


Figura 5.1: Definición de nodos de refinamiento a partir de los conceptos de nube y vecinos de Voronoi.

5.2 Estimador de error

El estimador del error es un aspecto central dentro de todo mecanismo de adaptación. La exactitud lograda depende directamente de su desempeño. En el presente trabajo se utiliza un estimador de error a posteriori cuya deducción se muestra en los párrafos siguientes. Este estimador asume bases cuadráticas para las funciones interpolantes y base lineal para las aproximaciones.

Considere dos nodos cualesquiera del espacio bidimensional, \vec{x}_1 y \vec{x}_2 , donde los valores del potencial u son conocidos y quedan definidos por la siguiente distribución cuadrática:

$$u(x, y) = C_0 + C_1x + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3y + \frac{1}{2}C_4y^2 + C_5xy \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla}u(x, y) = (C_1 + C_2x + C_5y) \hat{a}_x + (C_3 + C_4y + C_5x) \hat{a}_y \quad (5.2)$$

Defina a partir de ellos el nodo \vec{x}_m , nodo de refinamiento donde se debe estimar el error del potencial, como el punto medio del segmento lineal que los une, tal como se muestra en la figura 5.2.

De acuerdo a lo anterior, el valor que tomarán los potenciales y gradientes en los nodos de referencia \vec{x}_1 y \vec{x}_2 serán,

$$u_1 = C_0 + C_1x_1 + \frac{1}{2}C_2x_1^2 + C_3y_1 + \frac{1}{2}C_4y_1^2 + C_5x_1y_1 \quad (5.3)$$

$$u_2 = C_0 + C_1x_2 + \frac{1}{2}C_2x_2^2 + C_3y_2 + \frac{1}{2}C_4y_2^2 + C_5x_2y_2 \quad (5.4)$$

$$\vec{\nabla}u_1 = (C_1 + C_2x_1 + C_5y_1) \hat{a}_x + (C_3 + C_4y_1 + C_5x_1) \hat{a}_y \quad (5.5)$$

$$\vec{\nabla}u_2 = (C_1 + C_2x_2 + C_5y_2) \hat{a}_x + (C_3 + C_4y_2 + C_5x_2) \hat{a}_y \quad (5.6)$$

A partir de ellos, será posible determinar la aproximación lineal del potencial \tilde{u}_m en el

nodo de refinamiento \vec{x}_m como,

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \tag{5.7}$$

donde, evaluando las expresiones 5.3 y 5.4, se obtiene,

$$\tilde{u}_m = C_0 + \frac{1}{2}C_1(x_1 + x_2) + \frac{1}{4}C_2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}C_3(y_1 + y_2) + \frac{1}{4}C_4(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}C_5(x_1y_1 + x_2y_2) \tag{5.8}$$

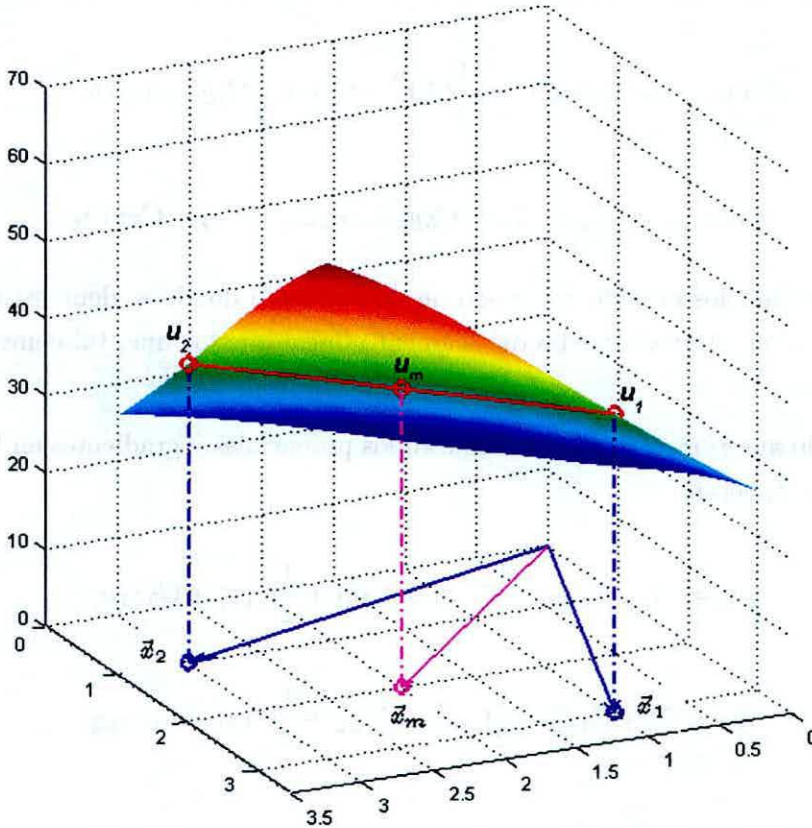


Figura 5.2: Topología utilizada para derivación de fórmula de error bidimensional.

A partir de esta relación, y considerando que el potencial u_m en el nodo \vec{x}_m viene dado

por la evaluación de 5.3 en dicho punto,

$$u_m = C_0 + \frac{1}{2}C_1(x_1+x_2) + \frac{1}{8}C_2(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{2}C_3(y_1+y_2) + \frac{1}{8}C_4(y_1+y_2)^2 + \frac{1}{4}C_5(x_1+x_2)(y_1+y_2) \quad (5.9)$$

es posible determinar un estimador de error para el potencial como,

$$\tilde{\varepsilon}_m = \|u_m - \tilde{u}_m\| = \left\| \frac{1}{8}C_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{8}C_4(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{4}C_5(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \right\| \quad (5.10)$$

Esta expresión puede ser enormemente simplificada si es reescrita en términos de los gradientes de los nodos referenciales mostrados en 5.5 y 5.6. Con ello se obtiene la expresión,

$$\tilde{\varepsilon}_m = \frac{1}{8} \left\| (\vec{\nabla}u_2 - \vec{\nabla}u_1) \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \right\| \quad (5.11)$$

cuyo carácter, al estar expresada en términos de vectores y operadores diferenciales, es general y permite extender su uso a casos tridimensionales sin ningún problema.

Así, de acuerdo a la deducción recién expuesta, el estimador propuesto para el error de potencial es,

$$\varepsilon_u = \frac{1}{8} \left\| \Delta \vec{\nabla}u \cdot \Delta \vec{x} \right\| \quad (5.12)$$

obteniéndose su valor mediante la comparación del valor promedio de los potenciales de los nodos de soporte a partir de los cuales se obtuvo el nodo de refinamiento, y el valor cuadráticamente interpolado del potencial en el mismo nodo.

Respecto al estimador del error para cada una de las componentes del gradiente de la aproximación, su valor se deduce de la relación 5.12, y puede ser expresado del modo siguiente,

$$\varepsilon_{(\vec{\nabla}u)_i} = \frac{1}{8} \left\| \Delta \vec{\nabla}(\vec{\nabla}u \cdot \hat{a}_i) \cdot \Delta \vec{x} \right\| = \frac{1}{8} \left\| \Delta(\vec{\nabla}u + \nabla^2u \cdot \hat{a}_i) \cdot \Delta \vec{x} \right\| \quad (5.13)$$

Para cualquier otro tipo de expresión diferencial derivada de los potenciales aproximados, tales como los esfuerzos en el caso de mecánica de sólidos, podrán obtenerse fórmulas similares que permitan evaluar el error en cada uno de los nodos de refinamiento definidos.

5.3 Criterio de adaptación

Como se mencionó en la sección 5.1, el criterio de adaptación permite determinar cuáles *nodos de refinamiento* pasan a formar parte del conjunto de *nodos de soporte* del problema y cuáles no. Para ello, se debe identificar entre los nodos de refinamiento interiores, cuya función distancia es estrictamente menor que cero, y los nodos de refinamiento frontera, cuya función distancia es exactamente igual a cero.

5.3.1 Criterio para nodos de refinamiento interiores

Dado que el objetivo perseguido por la presente estrategia de refinamiento es controlar tanto la norma como el valor máximo de los errores de aproximación del potencial y del gradiente, se adoptó el siguiente criterio filtro para la agregación de nodos:

- todos aquellos nodos de refinamiento cuyos errores de aproximación para el potencial y para cada una de las componentes del gradiente, sean superiores a los correspondientes errores cuadráticos medios estimados, norma Frobenius, pasan a formar parte de los *nodos de soporte* del problema.

5.3.2 Criterio para nodos de refinamiento frontera

Para los nodos ubicados en la frontera del dominio de solución, el criterio de selección adoptado es el siguiente:

- si la razón entre la distancia nodo de refinamiento - nodo de soporte frontera más cercano, y la distancia nodo de refinamiento - nodo de soporte interior más cercano, es mayor que 1, entonces el *nodo de refinamiento* pasa a formar parte del conjunto de *nodos de soporte*.

Este criterio es especialmente útil en los casos en que la frontera en cuestión es del tipo Dirichlet. En estos casos, un *nodo de refinamiento* nunca pasaría a formar parte de los *nodos de soporte*, pues su error de potencial siempre sería nulo.

El uso de este criterio puede ser extendido al conjunto de nodos interiores cada vez que se estime conveniente controlar el gradiente de la discretización utilizada. Es altamente recomendable hacer esto en todos aquellos problemas que desde el punto de vista numérico presentan una elevada rigidez.

5.3.3 Criterio de parada

Para determinar cuándo se debe detener el proceso iterativo de refinamiento, se mide al final de cada iteración el error global de la solución y se compara con una tolerancia predefinida. Este error global se determina como el promedio de las normas de Frobenius de los errores estimados tanto para los potenciales como para los gradientes. Las normas utilizadas para este fin son la norma H^1 y la norma L_2 , las cuales son generalmente definidas como,

$$L_2 = \left[\sum_{k=1}^n [u_k - \hat{u}_k]^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \left[\sum_{k=1}^n u_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

$$H_i^1 = \left[\sum_{k=1}^n [(\vec{\nabla} u_k - \vec{\nabla} \hat{u}_k) \cdot \hat{a}_i]^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \left[\sum_{k=1}^n (\vec{\nabla} u_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Dado que las expresiones 5.14 y 5.15 utilizan en su definición la solución real del problema, cuyo valor es desconocido, su aplicación práctica es imposible. Para poder hacer uso de estas expresiones en una implementación computacional real, sus valores deben ser necesariamente aproximados. En el caso particular de disponer de estimadores de error para el potencial y el gradiente, como los mostrados en las ecuaciones 5.12 y 5.13 del presente documento, esta aproximación podrá lograrse de manera simple, expresándose su resultado como,

$$L_2 \approx \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_u^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \left[\sum_{k=1}^n \hat{u}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

$$H_i^1 \approx \left[\sum_{k=1}^n (\varepsilon_{(\vec{\nabla} u)_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \left[\sum_{k=1}^n (\vec{\nabla} \hat{u}_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

Formas de los factores de estructura

El problema de la determinación de la estructura cristalina de un compuesto orgánico es un problema de gran complejidad. En este capítulo se describen los métodos de refinamiento de la estructura cristalina de un compuesto orgánico. El refinamiento de la estructura cristalina de un compuesto orgánico es un proceso iterativo que consiste en la determinación de la estructura cristalina de un compuesto orgánico a partir de los datos de difracción de rayos X. El refinamiento de la estructura cristalina de un compuesto orgánico es un proceso iterativo que consiste en la determinación de la estructura cristalina de un compuesto orgánico a partir de los datos de difracción de rayos X.

$$(5.1) \quad F_o = \sum_{hkl} |F_{hkl}|^2 = \sum_{hkl} \left(\sum_{j=1}^n f_j \exp(2\pi i h x_j + 2\pi i k y_j + 2\pi i l z_j) \right)^2$$

$$(5.2) \quad F_c = \sum_{hkl} |F_{hkl}|^2 = \sum_{hkl} \left(\sum_{j=1}^n f_j \exp(2\pi i h x_j + 2\pi i k y_j + 2\pi i l z_j) \right)^2$$

El refinamiento de la estructura cristalina de un compuesto orgánico es un proceso iterativo que consiste en la determinación de la estructura cristalina de un compuesto orgánico a partir de los datos de difracción de rayos X. El refinamiento de la estructura cristalina de un compuesto orgánico es un proceso iterativo que consiste en la determinación de la estructura cristalina de un compuesto orgánico a partir de los datos de difracción de rayos X.

$$(5.3) \quad \Delta F = \sum_{hkl} \left(|F_o| - |F_c| \right) \exp(2\pi i h x_j + 2\pi i k y_j + 2\pi i l z_j)$$

$$(5.4) \quad \Delta F = \sum_{hkl} \left(|F_o| - |F_c| \right) \exp(2\pi i h x_j + 2\pi i k y_j + 2\pi i l z_j)$$

Capítulo 6

Resultados

El método de puntos finitos con el criterio de adaptación anteriormente definido fue puesto a prueba para un conjunto de casos en que las soluciones analíticas son conocidas. Dentro de este grupo se incluyen problemas unidimensionales y bidimensionales, con distintos grados de complejidad matemática y distinto número de grados de libertad por nodo de discretización. La base polinómica utilizada en todos los análisis fue de orden cuadrático. El tamaño de las nubes fue de 5 nodos para el caso unidimensional, de 10 nodos para el caso bidimensional con un grado de libertad por nodo y de 12 nodos para el caso bidimensional con dos grados de libertad por nodo.

- Problemas unidimensionales.
 1. Test de Rachford & Wheeler.
 2. Descarga corona unipolar en configuración coaxial.
- Problemas bidimensionales de electromagnetismo.
 1. Ecuación de Laplace en dominio anular.
 2. Ecuación de Poisson en dominio cuadrado.
- Problemas bidimensionales de mecánica de sólidos.
 1. Viga empotrada.
 2. Cilindro hueco sujeto a presión interna.
 3. Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional.

Dado que todos los casos analizados son de solución analítica conocida, será posible utilizar las normas L_2 y H^1 definidas en 5.14 y 5.15, para evaluar la calidad de la solución aproximada respecto de la solución exacta.

Resultados detallados de cada uno de los experimentos realizados pueden ser encontrados en el apéndice C del presente reporte. Además, y a modo de ejemplo para el lector inexperto, en el apéndice ?? de este documento, se entrega un código totalmente comentado de la resolución mediante el Método de Puntos Finitos del Test de Rachford & Wheeler, con el fin de transparentar la manera en que este método se aplica.

6.1 Problemas unidimensionales

6.1.1 Test de Rachford & Wheeler

El test de Rachford & Wheeler[24] fue propuesto inicialmente para estudiar la convergencia del método de Galerkin. Luego, fue utilizado por Babuska[25] y Liu[26] para estudiar la convergencia de un método de elementos finitos alternativo y del método de núcleo generador, respectivamente.

El problema consiste en resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + b(x) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (6.1)$$

sujeta a las condiciones de contorno: $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, y donde,

$$b(x) = 2\frac{\delta}{1 + \delta^2(x - x_0)^2} + 2(1 - x)(x - x_0)\frac{\delta^3}{(1 + \delta^2(x - x_0)^2)^2}(x - x_0) \quad (6.2)$$

Los parámetros δ y x_0 permiten controlar, respectivamente, la magnitud del gradiente máximo y el punto en el cual éste se produce.

La solución exacta de este problema es,

$$u(x) = (1 - x) [\arctan(\delta(x - x_0)) + \arctan(\delta x_0)] \quad (6.3)$$

mientras que su derivada viene dada por,

$$\frac{du}{dx} = -\arctan(\delta(x - x_0)) - \arctan(\delta x_0) + (1 - x)\frac{\delta}{1 + \delta^2(x - x_0)^2} \quad (6.4)$$

En este caso, se estudia el comportamiento de las soluciones numéricas logradas a partir

de las siguientes metodologías:

- método de puntos finitos con discretización uniforme del dominio, 119 nodos.
- método de puntos finitos adaptivo, que se inicializa con 7 nodos uniformemente distribuidos y alcanza la tolerancia deseada, 10^{-3} , cuando el número de estos es 119.

La figura 6.1 muestra la representación gráfica de las discretizaciones utilizadas tanto por el proceso adaptivo de solución, como por el que utiliza nodos uniformemente distribuidos sobre el dominio.

Los valores de los parámetros δ y x_0 fueron elegidos como 60 y 0.5, respectivamente.

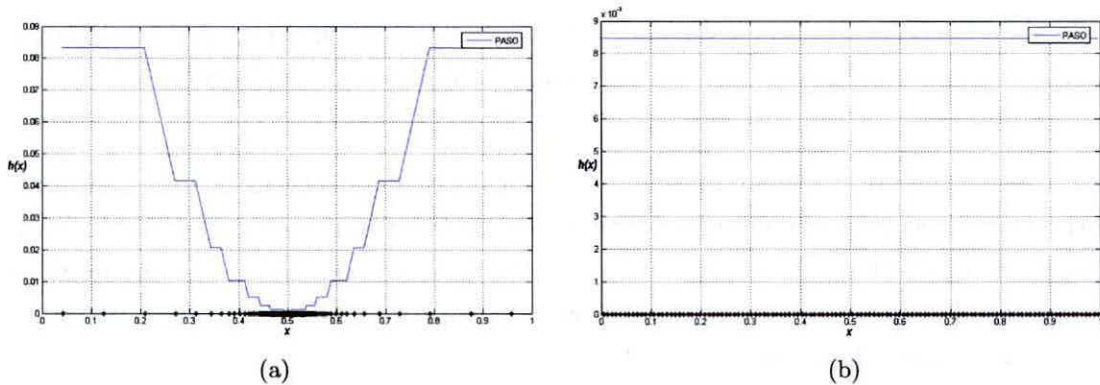


Figura 6.1: Discretización utilizada por: a) método de refinamiento propuesto, b) nodos uniformemente distribuidos.

Los resultados obtenidos al aplicar ambas estrategias de solución son desplegados en su totalidad en las figuras C.1 y C.2 del apéndice C.

La forma de la curva mostrada en la figura 6.1(a) da cuenta de la acción del proceso de refinamiento adaptativo propuesto, apreciándose una alta concentración de nodos en aquellas zonas donde la distribución de potencial presenta gradientes elevados ($x_0 = 0.5$).

Comportamiento del estimador de error propuesto

Con el fin de verificar la capacidad del estimador propuesto para aproximar el error local de la solución numérica, se contrasta gráficamente su valor con el del error real medido respecto a la solución analítica. Esto se hace tanto para el potencial como para su gradiente, desplegándose ambos resultados en la figura 6.2.

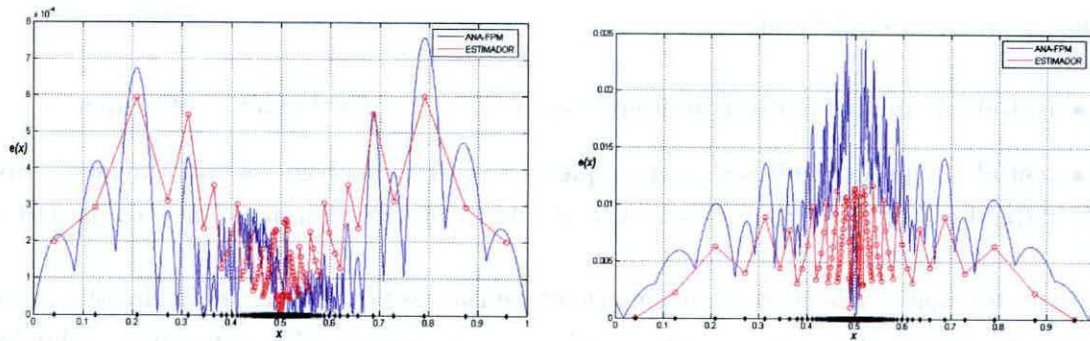


Figura 6.2: Contrastación entre error real y el estimador propuesto.

La simple observación de las curvas mostradas en la figura 6.2 da cuenta de la calidad del estimador propuesto, validándose su buen comportamiento para la estimación del error local de aproximación tanto del potencial como de su gradiente.

Otro aspecto relevante y atribuible a la técnica de refinamiento es el hecho de que la distribución de error local converge globalmente a un valor único, el cual, dadas las características de la estrategia de adaptación aquí definida, corresponderá a la norma Frobenius de la misma. Por lo tanto, si la cantidad de refinamientos aumentara, la forma que tomaría la distribución local de errores sería cada vez más plana.

Contrastación entre soluciones analítica y adaptiva

Dado que la solución analítica es conocida, será posible contrastar su valor con el obtenido a partir de la aplicación del método de refinamiento aquí propuesto. La figura 6.3 da cuenta de estos resultados.

El análisis de estas distribuciones muestra el buen desempeño de la nueva técnica de refinamiento aquí definida. Se observa que tanto para el potencial como para el gradiente las desviaciones respecto a la solución analítica son mínimas. Esto tiene directa relación con la estrategia de adaptación utilizada, la cual, dado que dispone de estimadores de error tanto para potencial como para gradiente, controla conjuntamente las desviaciones de ambas.

Contrastación entre soluciones uniforme y adaptiva

Otra arista de análisis relevante en el estudio de técnicas adaptivas, es la contrastación de los resultados por ellas generados con sus equivalentes considerando discretizaciones

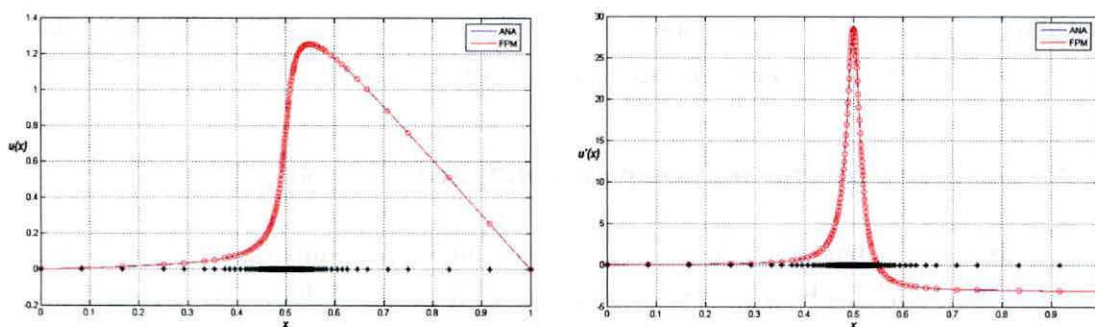


Figura 6.3: Aproximaciones numéricas del potencial y de su gradiente logradas a partir del método de refinamiento propuesto.

con nodos uniformemente distribuidos. Para ello, se resuelve el problema en cuestión con ambas estrategias de solución, tabulándose los errores globales obtenidos en la tabla 6.1. Para el caso de la solución adaptativa el criterio de parada se estableció en 10^{-3} .

	H^1	L_2
Resolución con refinamiento adaptivo	6.4×10^{-4}	2.1×10^{-4}
Resolución con nodos uniformemente distribuidos	2.9×10^{-2}	2.2×10^{-3}

Tabla 6.1: Errores globales asociados a la resolución numérica del test de Rachford & Wheeler utilizando 119 nodos.

Respecto de las distribuciones de errores locales obtenidas, éstas pueden ser observadas en las figuras C.1 y C.2 del apéndice C del presente documento.

El análisis de errores tanto globales como locales, dan cuenta nuevamente del buen comportamiento de la estrategia adaptativa propuesta. En lo referido al error global, se observa un aumento de un orden de magnitud en la aproximación de los potenciales (norma L_2) y de dos en el caso de los gradientes (norma H^1). Esto último es sumamente importante, pues en aplicaciones de ingeniería, generalmente, son los valores de los gradientes los que inciden directamente en la toma de decisiones. Respecto al error local, se observa claramente que el “aplanamiento” logrado con la técnica de refinamiento propuesta, no aparece en la solución con discretización uniforme. En ésta, y en aquellas zonas de alto gradiente, el error crece descontroladamente muy por encima del valor medio de toda la distribución.

Por último se indica, que de los valores registrados en la tabla 6.1, se deduce otra característica destacable del método de refinamiento aquí definido. Ésta corresponde a su

capacidad de mantener el error global tanto del potencial como del gradiente por debajo de un valor predefinido (en este caso se utilizó una tolerancia de 10^{-3}).

6.1.2 Descarga corona unipolar en configuración coaxial

El modelamiento del fenómeno de descarga corona unipolar ha sido ampliamente estudiado y distintas metodologías basadas principalmente en elementos y diferencias finitas han sido evaluadas con resultados satisfactorios [29] [30] [33]. En el presente estudio, se analiza un caso unidimensional simple de solución analítica conocida, con el fin de evaluar el comportamiento de la técnica de puntos finitos adaptiva aquí propuesta. La geometría asociada a este modelo se muestra en la figura 6.4.

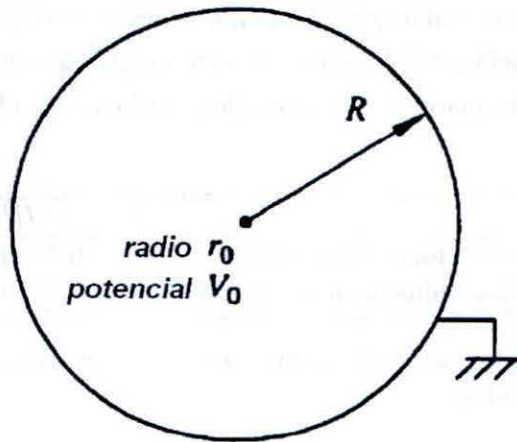


Figura 6.4: Geometría coaxial estudiada.

Este problema, pese a ser unidimensional, posee características que lo hacen altamente atractivo en la evaluación de algoritmos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. Dentro de ellas, las más interesantes son:

- Para ser expresado como sistema de segundo orden, requiere de la definición de dos grados de libertad por cada nodo de la discretización (potencial y carga eléctrica).
- Presenta no linealidades del tipo producto, que desde el punto de vista numérico son de alta complejidad.
- La solución de este tipo de problemas presenta gradientes sumamente elevados en el electrodo que se encuentra a potencial alto, razón por la cual es ideal para evaluar técnicas adaptivas.

La formulación matemática de este problema se basa en las ecuaciones de Maxwell, y su expresión en términos del potencial y de la densidad de carga eléctrica es la siguiente,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \rho = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} \frac{d\rho}{dr} - \rho^2 = 0, \quad \text{en } \Omega = [r_o, R] \quad (6.5)$$

Acá, tanto potenciales como densidades de carga están en por unidad de las cantidades base $\phi_{base} = V_o$ y $\rho_{base} = \epsilon_o V_o$, respectivamente, donde V_o es el potencial del conductor “coronado” y $\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$ es la permitividad dieléctrica de vacío.

Las condiciones de frontera asociadas son,

$$\phi(r) \Big|_{r=r_o} = V_o, \quad \phi(r) \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r=r_o} = -E_o \quad (6.6)$$

donde E_o es el valor del campo eléctrico crítico sobre la superficie del conductor “coronado” determinado a partir de la ley de Peek [30].

La solución analítica de este problema viene dada por la expresión,

$$\phi(r) = -\frac{E_o r_o}{\left(1 + \left(\frac{r_o}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}} \left[\left(1 + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2} - \sinh^{-1}\left(\frac{\alpha}{r}\right) \right] + \beta \quad (6.7)$$

para el potencial eléctrico, y por,

$$\rho(r) = -\frac{\epsilon_o E_o r_o}{\left[(r^2 + \alpha^2)(r_o^2 + \alpha^2)\right]^{1/2}} \quad (6.8)$$

para la distribución espacial de carga eléctrica. Los parámetros α y β de las expresiones anteriores se determinan a partir de la geometría y de las condiciones de borde antes establecidas. Para $r_o = 0.0025m$, $R = 4m$, $V_o = 300kV$ y $E_o = 48.06kV/cm$, el valor de los parámetros α y β es $0.135m$ y $355kV$, respectivamente.

Dado que las ecuaciones que rigen el comportamiento de los campos es no lineal, se requiere de una estrategia numérica para la resolución de este tipo de problemas. En este caso particular, la técnica seleccionada es Newton-Raphson y la tolerancia definida para su convergencia es 10^{-9} . No se utilizan técnicas de relajación, con lo cual eventualmente se podría acelerar la convergencia del método.

La resolución de este problema mediante la técnica propuesta se inicializa con una discretización de 16 nodos uniformemente distribuidos. Para lograr una tolerancia relativa de

0.002, la metodología desarrolla 7 refinamientos adaptivos, cuya evolución se observa en la figura 6.5.

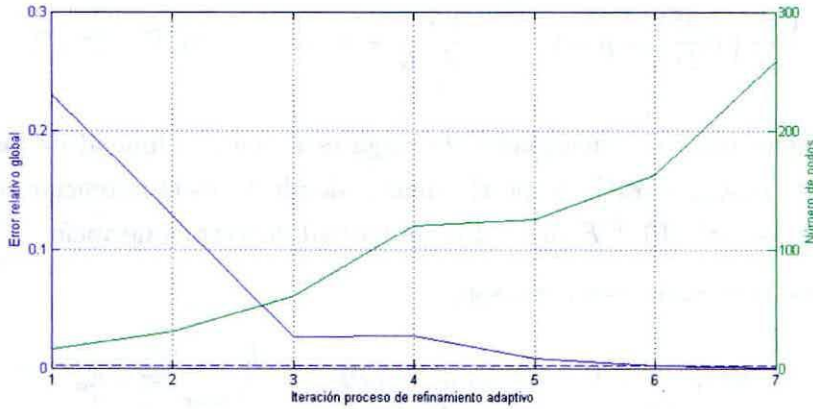


Figura 6.5: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

Con el fin de mostrar el buen comportamiento local de la aproximación lograda, en la figura 6.6 se muestra superpuestas las soluciones analítica y numérica adaptiva, tanto para potencial como para distribución espacial de carga eléctrica.

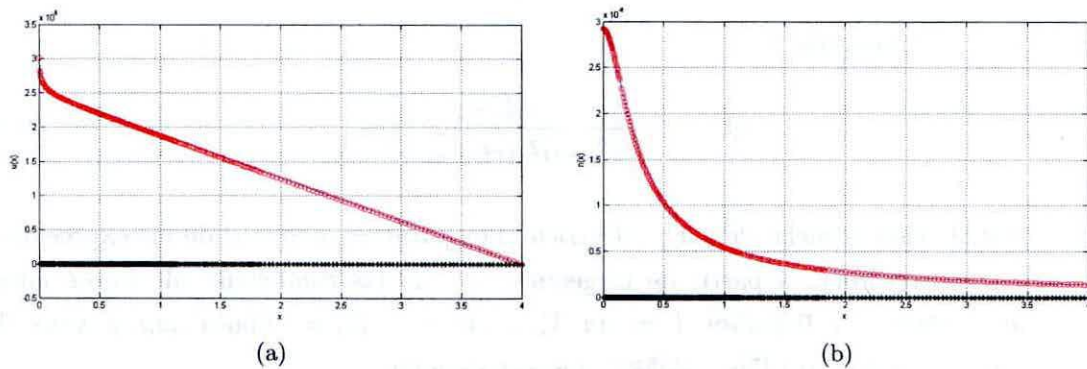


Figura 6.6: Distribuciones analítica y numérica adaptiva de (a) potencial, y (b) densidad de carga eléctrica.

Se observa claramente en las figuras anteriores que el tamaño del paso de discretización se ha adaptado correctamente al problema. Esto es, en las zonas de gradiente elevando, cercanas al conductor “coronado”, los nodos se encuentran mucho más juntos que en la región exterior, donde el conductor está aterrizado y los gradientes son menores.

Otros resultados específicos asociados a las distribuciones espaciales de potenciales y gra-

dientes pueden ser encontrados en la figura C.3 del anexo C, al final del presente reporte. Vale la pena indicar aquí, que este tipo de problemas con mallas uniformemente distribuidas y una cantidad de nodos similar a la obtenida al final del proceso de adaptación, simplemente no converge a la solución real después de un número prudente de iteraciones de Newton. Esto refuerza la necesidad de desarrollar estrategias adaptivas que respondan de mejor manera al comportamiento intrínseco de los distintos problemas de la ingeniería y faciliten su resolución computacional.

6.2 Problemas bidimensionales de electromagnetismo

6.2.1 Ecuación de Laplace en dominio anular

En este caso se resuelve un problema de electrostática, extraído del texto de electromagnetismo del MIT de Hauss y Melcher [36], en donde tanto el potencial como el campo eléctrico presentan fuertes variaciones en regiones bien definidas del espacio. Dadas sus características, este problema se transforma en un caso de prueba ideal para la experimentación de métodos numéricos adaptivos. La ecuación diferencial parcial a resolver es la siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \text{en } \Omega = [0.4, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \quad (6.9)$$

Las condiciones de contorno asociadas son:

$$u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0 \qquad u(r, \varphi) \Big|_{r=1} = 0 \quad (6.10)$$

$$u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \sin \left(3\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{0.4} \right)}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right) \qquad u(r, \varphi) \Big|_{r=0.4} = 0 \quad (6.11)$$

y su solución analítica es:

$$u(r, \varphi) = \sin \left(3\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{0.4} \right)}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right) \frac{\sinh \left(3\pi \frac{\varphi}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)}{\sinh \left(3\pi \frac{\frac{\pi}{2}}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{3\pi}{r} \cos \left(3\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{0.4} \right)}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right) \frac{\sinh \left(3\pi \frac{\varphi}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)}{\sinh \left(3\pi \frac{\frac{\pi}{2}}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)} \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{3\pi}{r} \sin \left(3\pi \frac{\ln \left(\frac{r}{0.4} \right)}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right) \frac{\cosh \left(3\pi \frac{\varphi}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)}{\sinh \left(3\pi \frac{\frac{\pi}{2}}{\ln \left(\frac{1}{0.4} \right)} \right)} \quad (6.14)$$

La resolución de este problema mediante la técnica propuesta se inicializa con una discretización del dominio sumamente rala, compuesta sólo por 14 nodos. Después de 8 refinamientos adaptivos, el dominio se encuentra discretizado por 435 nodos cuya distribución se puede observar en la figura 6.7, lado derecho. Se observa claramente que la distribución de nodos obtenida responde cabalmente al comportamiento fuertemente variable tanto del potencial como del campo eléctrico en la frontera $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

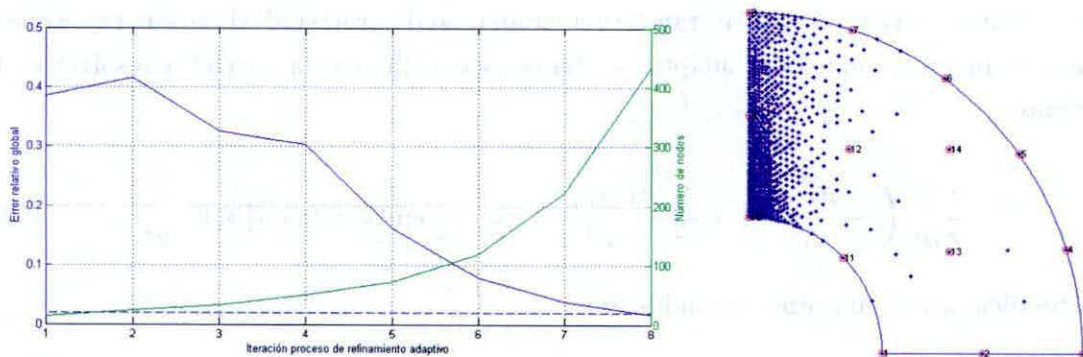


Figura 6.7: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

Respecto al error global de la aproximación, cuyo valor considera las normas L_2 de potencial y H^1 de gradiente, en la figura 6.7 se muestra su evolución a medida que se realizan los refinamientos adaptivos de la solución numérica. Se observa además en la misma figura, el

incremento gradual del número de nodos durante el mismo proceso.

Con el fin de mostrar el buen comportamiento local de la aproximación lograda, en la figura 6.8 se muestra las soluciones analítica y numérica adaptativa.

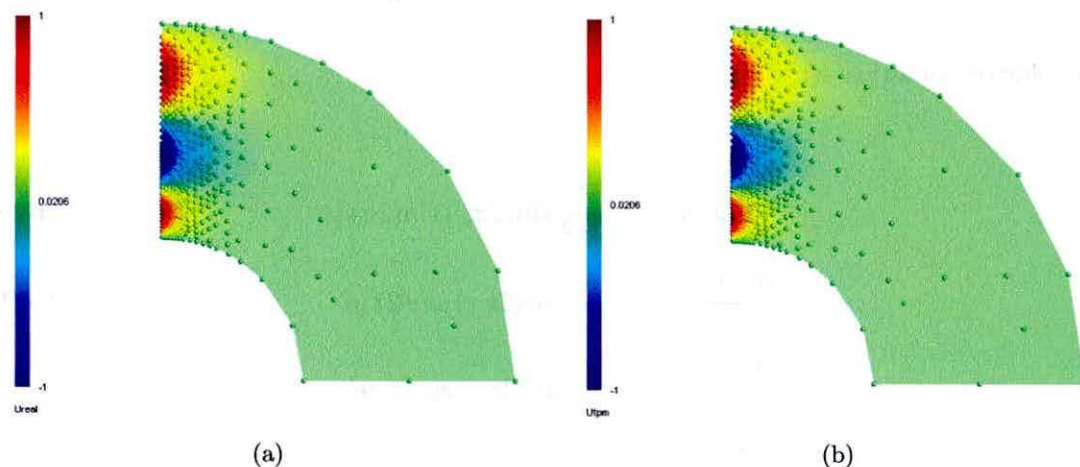


Figura 6.8: Distribuciones de potencial asociadas a solución: a)analítica, b)numérica adaptiva.

Otros resultados específicos asociados a las distribuciones espaciales de potenciales y gradientes pueden ser encontrados en la figura C.4 del anexo C, al final del presente reporte.

6.2.2 Ecuación de Poisson en dominio cuadrado

Este problema se resuelve con el fin de mostrar que el comportamiento del método de refinamiento adaptivo es independiente del tipo de condiciones de frontera utilizadas. Para ello, se resuelve la ecuación de Poisson en un dominio cuadrado considerando condiciones de frontera mixtas en su formulación. El problema a resolver es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) = 0, \quad \text{en } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \quad (6.15)$$

Las condiciones de contorno son:

$$u(x, y) \Big|_{y=0} = 0 \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y) \qquad (6.16)$$

$$u(x, y) \Big|_{y=1} = 0 \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y) \qquad (6.17)$$

y su solución analítica es:

$$u(x, y) = -\frac{1}{8\pi^2} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \qquad (6.18)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \qquad (6.20)$$

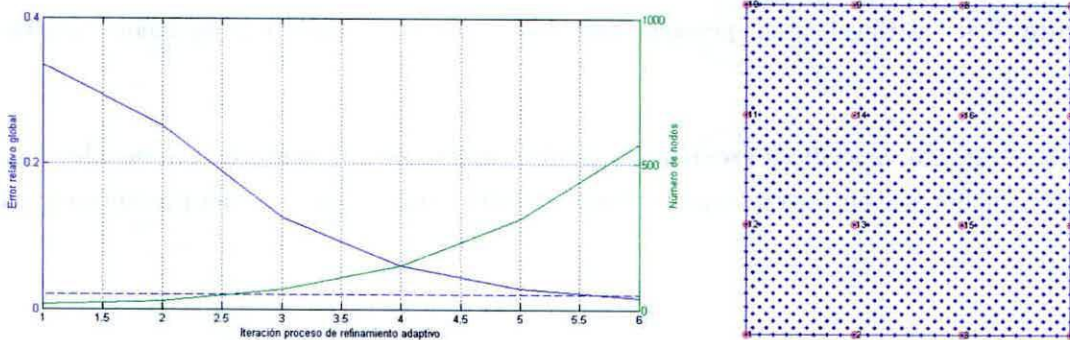


Figura 6.9: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

El método adaptivo se inició con 16 puntos regularmente distribuidos y finalizó con 569 puntos dispuestos de la manera indicada en la figura 6.9, lado derecho. La tolerancia definida como condición de parada en este caso fue de 2×10^{-2} . Al final del proceso de refinamiento las normas de error L_2 y H^1 alcanzaron valores de 1.40×10^{-2} y 1.24×10^{-2} , respectivamente, siendo ambas inferiores a la tolerancia anteriormente definida. El detalle del comportamiento del error global de aproximación a medida que avanza el proceso adaptivo se muestra en la figura 6.9, lado izquierdo, junto con la evolución del número de nodos considerados para el cálculo de la aproximación.

El comportamiento local de la aproximación para el caso del potencial puede ser verificado en la figura 6.10. Ésta nuevamente da cuenta de la calidad de las soluciones logradas al aplicar el presente procedimiento de adaptación al método tradicional de puntos finitos.

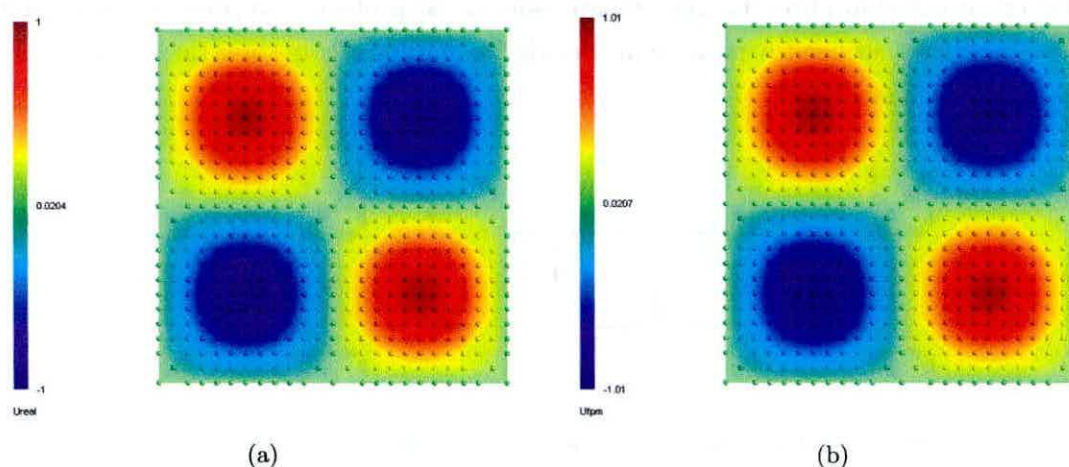


Figura 6.10: Distribuciones de potencial asociadas a solución: a)analítica, b)numérica adaptiva.

Otros resultados específicos asociados a las distribuciones espaciales de potenciales y gradientes pueden ser encontrados en la figura C.5 del anexo C, al final del presente reporte.

En este experimento, al presentarse variaciones suaves tanto de potencial como de gradiente, es posible verificar otra propiedad atractiva del presente procedimiento. Ésta tiene relación con la convergencia de la discretización lograda por el proceso de refinamiento hacia una distribución uniforme de nodos, cada vez que las funciones involucradas no presentan fuertes variaciones en sus valores dentro del dominio de análisis.

6.3 Problemas bidimensionales de mecánica de sólidos

A continuación se estudian tres problemas clásicos de mecánica de sólidos lineal elástica [35] que poseen solución analítica conocida. Para ello, primero, se describen sus características y se definen sus parámetros, luego, se determinan aproximaciones para los desplazamientos mediante la estrategia adaptativa propuesta, y finalmente, se analizan sus resultados a la luz de la calidad y estabilidad de las aproximaciones logradas.

6.3.1 Viga empotrada

El primer problema de elasticidad estudiado corresponde al análisis estático de una viga empotrada sometida a la acción de una carga puntual (representada como carga distribuida) en su extremo libre. La geométrica asociada al problema se presenta en la figura 6.11. Los valores utilizados para cada uno de los parámetros geométricos son, $D = 1$, $L = 8$ y espesor unitario.

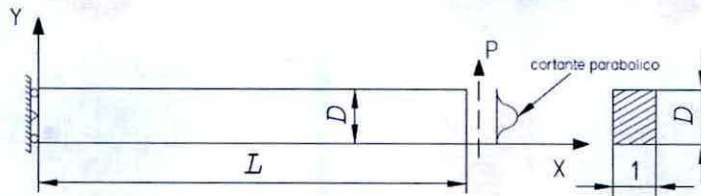


Figura 6.11: Viga empotrada sujeta a carga vertical en su extremo libre.

La carga total viene dada por un esfuerzo constante parabólico, donde $P = 1.0$. Los parámetros constitutivos del material son $E = 1000$ y $\nu = 0.3$. Bajo estos supuestos y considerando una condición de tensión plana, la solución teórica para los desplazamientos es,

$$u(x, y) = -\frac{P(1 - \nu^2)}{6EI} \left(y - \frac{D}{2} \right) \left(3x(2L - x) + \frac{2 - \nu}{1 - \nu} y(y - D) \right) \quad (6.21)$$

$$v(x, y) = \frac{P(1 - \nu^2)}{6EI} \left(x^2(3L - x) + \frac{3\nu}{1 - \nu}(L - x) \left(y - \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{4 + \nu}{4 - 4\nu} D^2 x \right) \quad (6.22)$$

donde $I = \frac{D^3}{12}$ es el momento de inercia de la barra.

Las componentes del tensor esfuerzos bajo los mismos supuestos son,

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{P}{I}(L - x) \left(y - \frac{D}{2} \right) \quad (6.23)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0 \quad (6.24)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{Py}{2I}(y - D) \quad (6.25)$$

Algunos resultados relevantes asociados a la resolución numérica del problema se entregan en las figuras 6.12, 6.13 y 6.14. Dentro de éstos se incluyen, la evolución durante el proceso de refinamiento del error global de aproximación y del número de nodos utilizados, la distribución espacial del vector desplazamiento y la componente σ_{xx} del tensor esfuerzo.

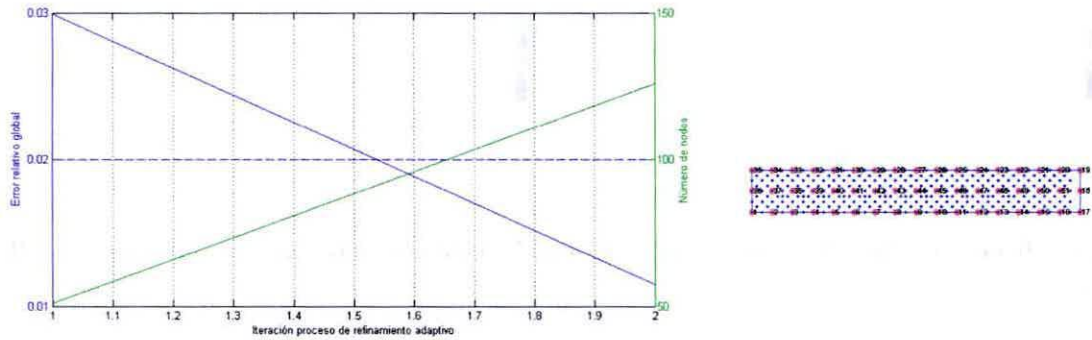


Figura 6.12: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

El proceso adaptivo de solución se inicia con 51 nodos uniformemente distribuidos, los cuales después de 2 etapas de refinamientos aumentan a 126, dispuestos según se muestra en la figura 6.12, lado derecho.

La tolerancia global utilizada como criterio de parada se establece en 2×10^{-2} , lográndose con ello valores para las normas de error L_2 y H^1 de 1.21×10^{-5} y 2.02×10^{-2} , respectivamente.

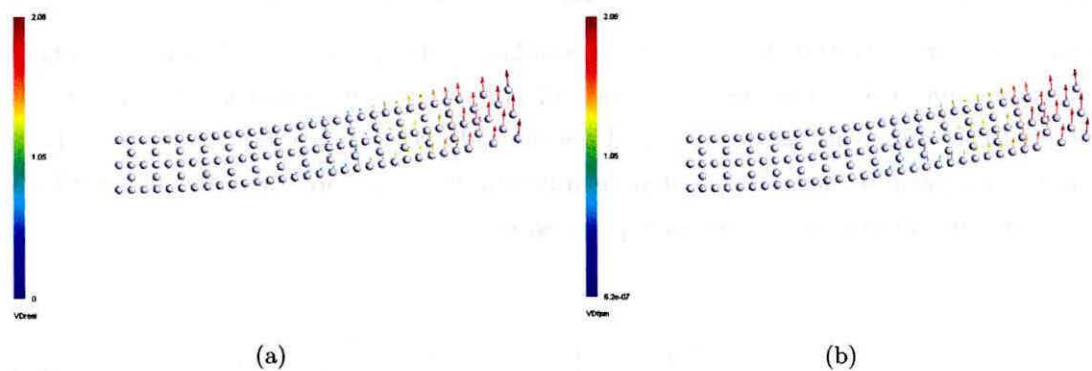


Figura 6.13: Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

Resultados adicionales asociados a las distribuciones espaciales de cada una de las com-

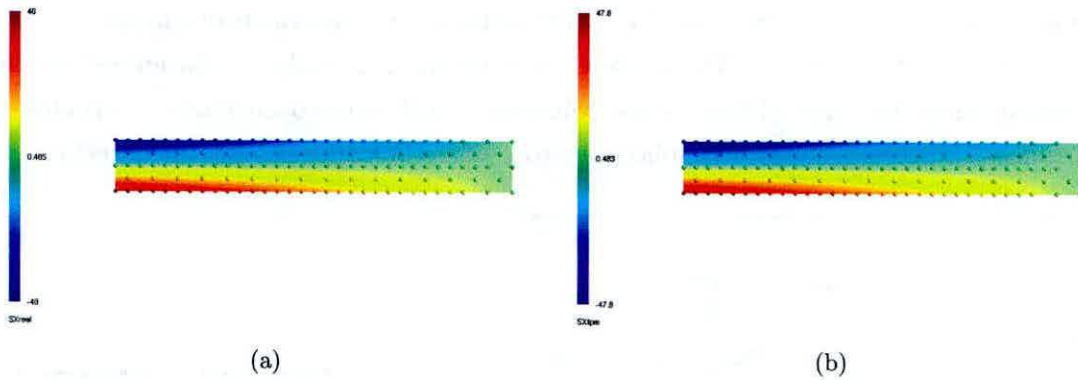


Figura 6.14: Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

ponentes del vector desplazamiento y del tensor esfuerzo, pueden ser encontrados en las figuras C.6 y C.7 del anexo C, al final del presente reporte.

6.3.2 Cilindro hueco sujeto a presión interna

El siguiente problema de elasticidad lineal analizado corresponde a un cilindro presurizado de radio interior R_a y radio exterior R_b . La superficie interna del cilindro está sometida a una presión de valor P . El esquema de la figura 6.15 muestra la topología recién descrita.

El radio interior y exterior de la región estudiada se definen como 1 y 5, respectivamente. La presión interna a la cual está sometida el cilindro hueco se considera unitaria. Las características constitutivas del material considerado son $E = 1000$ y $\nu = 0.3$. La solución teórica para los desplazamientos, asumiendo una condición de deformación plana y expresando sus valores en coordenadas polares, son:

$$u_r(r, \varphi) = \frac{PR_a^2 r}{E(R_b^2 - R_a^2)} \left\{ (1 - \nu) + \left(\frac{R_b}{r} \right)^2 (1 + \nu) \right\} \quad (6.26)$$

$$v_\varphi(r, \varphi) = 0 \quad (6.27)$$

Las componentes del tensor esfuerzos bajo los mismos supuestos son,

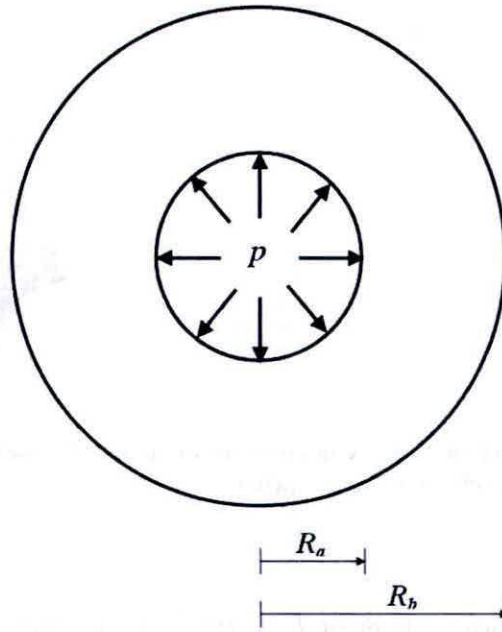


Figura 6.15: Cilindro hueco sujeto a presión interna.

$$\sigma_{rr}(r, \varphi) = \frac{PR_a^2}{E(R_b^2 - R_a^2)} \left\{ 1 - \left(\frac{R_b}{r} \right)^2 \right\} \quad (6.28)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = \frac{PR_a^2}{E(R_b^2 - R_a^2)} \left\{ 1 + \left(\frac{R_b}{r} \right)^2 \right\} \quad (6.29)$$

$$\tau_{r\varphi}(r, \varphi) = 0 \quad (6.30)$$

Algunos resultados relevantes asociados a la resolución numérica del problema se entregan en las figuras 6.16, 6.17 y 6.18. Dentro de éstos se incluyen, la evolución durante el proceso de refinamiento del error global de aproximación y del número de nodos utilizados, la distribución espacial del vector desplazamiento y la componente σ_{xx} del tensor esfuerzo.

El proceso adaptivo de solución se inicia con 43 nodos uniformemente distribuidos, los cuales después de 4 etapas de refinamientos aumentan a 250, dispuestos según se muestra en la figura 6.16, lado derecho.

La tolerancia global utilizada como criterio de parada se establece en 2×10^{-2} , lográndose

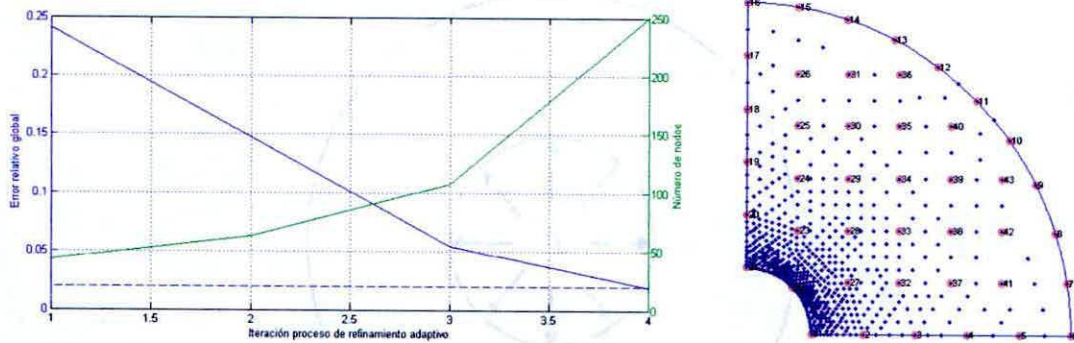


Figura 6.16: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

con ello valores para las normas de error L_2 y H^1 de 1.83×10^{-3} y 1.42×10^{-2} , respectivamente.

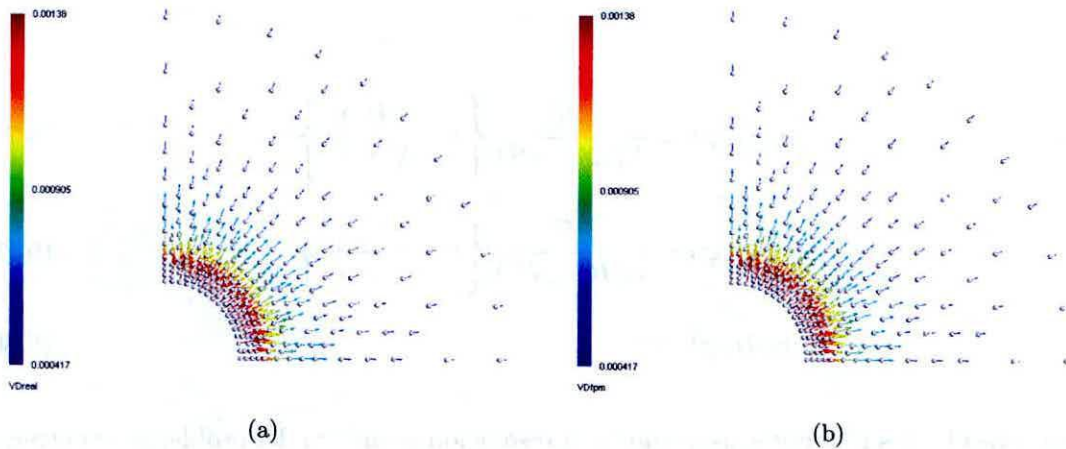


Figura 6.17: Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

Resultados adicionales asociados a las distribuciones espaciales de cada una de las componentes del vector desplazamiento y del tensor esfuerzo, pueden ser encontrados en las figuras C.8 y C.9 del anexo C, al final del presente reporte.

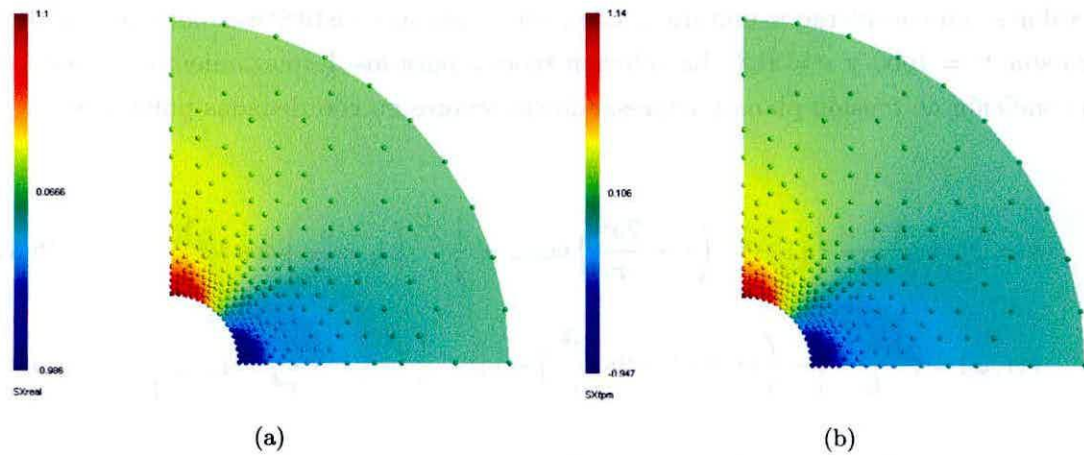


Figura 6.18: Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

6.3.3 Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional

El ultimo problema estudiado corresponde a una placa infinita de espesor unitario, con un agujero circular de radio a y sometida a una tracción horizontal de valor σ . El esquema mostrado en la figura 6.19 da cuenta de lo recién indicado.

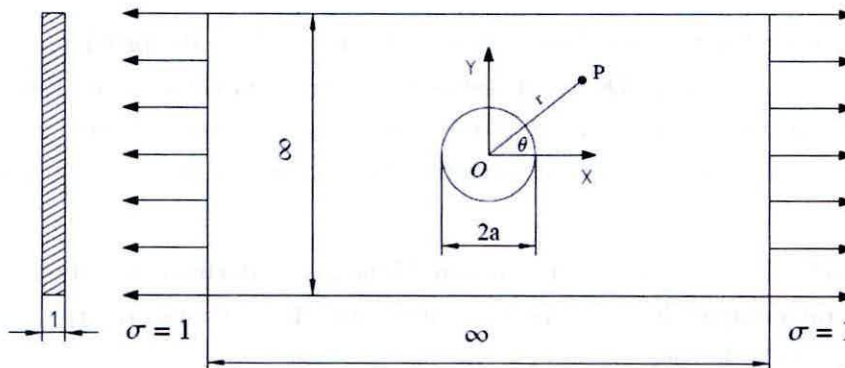


Figura 6.19: Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional.

Dado que el problema tiene un dominio infinito, la región real de análisis se reduce a una placa cuadrada de longitud 8. Respecto a los parámetros a y σ anteriormente indicados,

sus valores son considerados unitarios. Las características constitutivas del material de la placa son $E = 1000$ y $\nu = 0.3$. La solución teórica para los desplazamientos, asumiendo una condición de tensión plana y expresando sus valores en coordenadas polares, son:

$$u(r, \varphi) = t \frac{1+\nu}{E} \left\{ (1-\nu) \left(r + \frac{2a^2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 3\varphi \right\} \quad (6.31)$$

$$v(r, \varphi) = t \frac{1+\nu}{E} \left\{ - \left(\nu r + (1-2\nu) \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 3\varphi \right\} \quad (6.32)$$

Las componentes del tensor esfuerzos bajo los mismos supuestos son,

$$\sigma_{xx}(r, \varphi) = \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\varphi + \cos 4\varphi \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\varphi \right) \quad (6.33)$$

$$\sigma_{yy}(r, \varphi) = -\sigma \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi - \cos 4\varphi \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\varphi \right) \quad (6.34)$$

$$\tau_{xy}(r, \varphi) = \sigma \left(-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \sin 4\varphi \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\varphi \right) \quad (6.35)$$

Algunos resultados relevantes asociados a la resolución numérica del problema se entregan en las figuras 6.20, 6.21 y 6.22. Dentro de éstos se incluyen, la evolución durante el proceso de refinamiento del error global de aproximación y del número de nodos utilizados, la distribución espacial del vector desplazamiento y la componente σ_{xx} del tensor esfuerzo.

El proceso adaptivo de solución se inicia con 35 nodos uniformemente distribuidos, los cuales después de 5 etapas de refinamientos aumentan a 614, dispuestos según se muestra en la figura 6.20, lado derecho.

La tolerancia global utilizada como criterio de parada se establece en 2×10^{-2} , lográndose con ello valores para las normas de error L_2 y H^1 de 1.05×10^{-3} y 7.36×10^{-3} , respectivamente.

Resultados adicionales asociados a las distribuciones espaciales de cada una de las com-

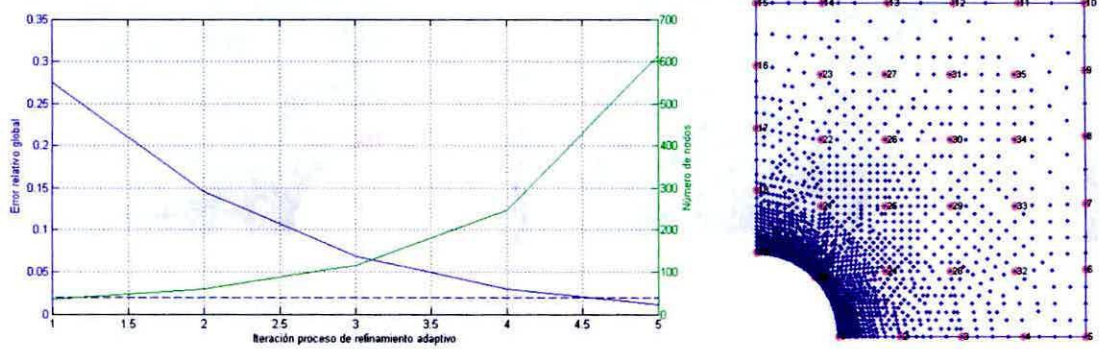


Figura 6.20: Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.

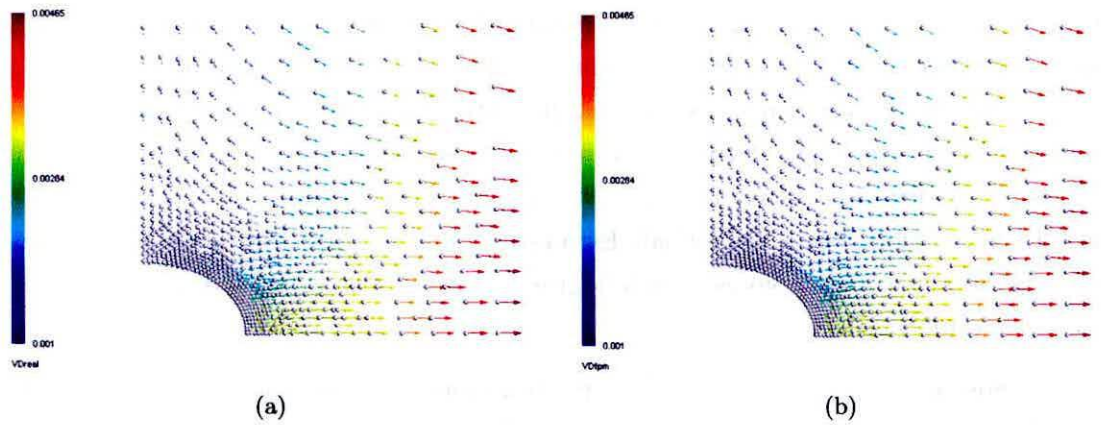


Figura 6.21: Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

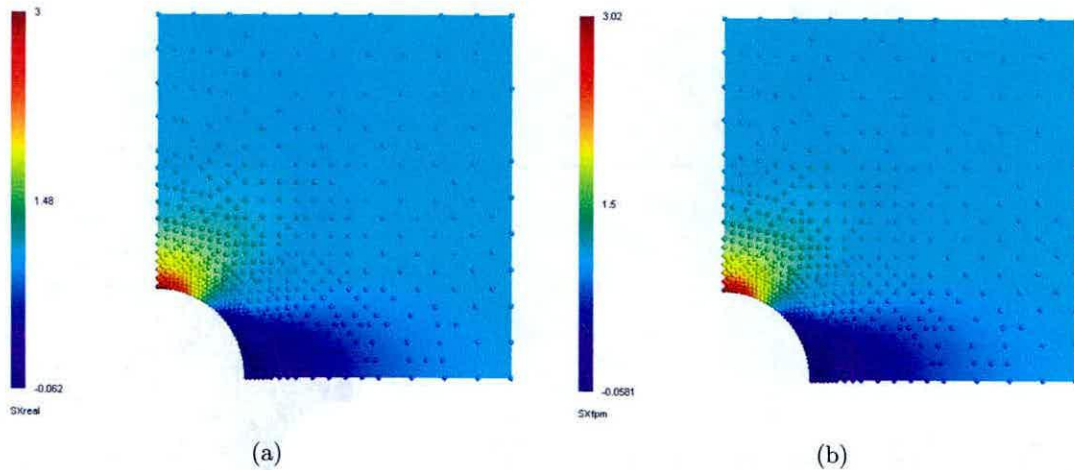


Figura 6.22: Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.

ponentes del vector desplazamiento y del tensor esfuerzo, pueden ser encontrados en las figuras C.10 y C.11 del anexo C, al final del presente reporte.

6.3.4 Análisis de resultados

La observación de las figuras anteriormente desplegadas dan cuenta del buen comportamiento de la estrategia de adaptación propuesta. Esto se verifica tanto para los vectores desplazamiento como para los tensores esfuerzo. La convergencia obtenida a medida que avanza el proceso de refinamiento se ve bastante estable y se refleja tanto en los valores de la norma L_2 como en la H^1 . Otro aspecto relevante que se desprende del análisis de estos casos es que los valores críticos de todas las variables de interés son rescatados con la precisión definida por la tolerancia global. Esto es de suma importancia, pues en la mayoría de los procesos adaptivos sólo es posible lograr este resultado para los desplazamientos y no para los esfuerzos.

Por otro lado, el comportamiento de las aproximaciones obtenidas, da cuenta del control que realiza el método de refinamiento tanto del comportamiento global de la solución, donde se incluyen los potenciales y sus gradientes, como de los valores locales de los mismos, impidiendo de este modo que el error se dispare en zonas específicas del dominio. Esto refleja, además, la calidad del estimador propuesto, pues indica que la predicción ha sido la adecuada al permitir la agregación de nodos en aquellas regiones del dominio donde realmente se requería.

Capítulo 7

Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado una estrategia de refinamiento adaptivo aplicable a métodos libres de malla, en particular al método de puntos finitos. En ella, y con el fin de hacer más eficiente el procedimiento, se reúnen los procesos de discretización, estimación de error y resolución numérica de los sistemas lineales involucrados en una secuencia que agrega nodos cada vez que las condiciones de selección y parada no son satisfechas. El alma de este procedimiento, es un estimador de error que permite predecir las desviaciones tanto del potencial como de su gradiente de manera simple y efectiva. Su excelente comportamiento ha quedado en manifiesto en todos los experimentos numéricos desarrollados. En cada uno de estos casos, se ha logrado control absoluto del error de aproximación tanto global, asociado a las normas L_2 y H^1 , como local. Para este último error, se destaca la tendencia que la metodología propuesta tiene a homogeneizarlo espacialmente.

Otro aspecto relevante, deducido de los resultados de los experimentos numéricos realizados, es la capacidad del presente método para rescatar valores tanto generales como específicos de las distribuciones aproximadas, incluyendo dentro de estas últimas a los potenciales y a sus correspondientes gradientes. Esto es sumamente importante, pues desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas de los métodos numéricos, lo que generalmente interesa rescatar con cierta precisión son los valores críticos de los gradientes y no de los potenciales.

Futuros trabajos que pueden ser desarrollados en este mismo ámbito, pueden ser clasificados según las tres etapas fundamentales de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales,

- **Preproceso**

- Estudio de métodos para generación de puntos con especial énfasis en técnicas

de adaptación.

- Evaluación de técnicas tipo quadtree-octree para la generación de grillas estructuradas.
- Estudio de métodos para la determinación óptima de nubes según sistema de ecuaciones diferenciales parciales a resolver.
- Evaluación de posibilidades de formular un problemas único que determine tanto nodos como nubes.
- Estudio de la interacción entre herramientas de CAD-CAE y preprocesadores para métodos libres de malla.

• Proceso

- Evaluación del comportamiento de la estrategia propuesta a problemas tridimensionales.
- Estudio de los métodos sin malla a la luz de las condiciones de continuidad que se deben satisfacer cada vez que existe más de un medio material en el dominio de solución.
- Estudio de posibles mejoras en la inclusión de condiciones de frontera naturales en los métodos sin malla.
- Estudio de métodos sin malla alternativos, como por ejemplo “Least-square Collocation Meshless Method”, y evaluación de posibilidades de mejora.

• Postproceso

- Estudio de estrategias de procesamiento de imágenes y su aplicación a métodos sin malla.
- Estudio de métodos de postprocesamiento que permitan el despliegue de distribuciones espaciales a partir de la data nodal.
- Aplicación de estructuras tipo quadtree-octree al postprocesamiento de resultados en métodos sin malla.

Apéndice A

Condicionamiento Numérico de Matrices

Si bien los tiempos de ejecución y la memoria requerida son aspectos muy relevantes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de computadoras, también existe la necesidad de asegurar que la solución obtenida sea lo más cercana a la solución real. Existen varios factores que contribuyen a la pérdida de precisión en cada uno de los pasos del proceso de resolución. Por ejemplo:

1. Los elementos de la matriz \mathbf{A} a considerar pueden traer errores inherentes al problema en si. Tal es el caso de utilizar datos correspondientes a alguna medida física. En este caso se debe considerar un error correspondiente a una cota δ , como por ejemplo la precisión del instrumento, entre otras. Entonces la matriz \mathbf{A} es perturbada por una matriz $\mathbf{E} = \{e_{ij}\}$ donde los $|e_{ij}| < \delta$, y por lo tanto la matriz en la cual se realizarán las operaciones es $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ y no \mathbf{A} .
2. En otros casos, aún cuando los elementos de la matriz estén exactamente contenidos por alguna fórmula algebraica, estos sufren modificaciones al ser procesados por el lenguaje de la computadora (*punto flotante*), y además al utilizar las funciones de *redondeo*.

En todas las situaciones anteriores el sistema ha sufrido ligeras modificaciones y cabe preguntarse si las soluciones habrán variado también ligeramente, o si, por el contrario, la variación ha sido muy grande comparada con la variación de los coeficientes. Sería deseable que el sistema fuera estable, es decir, que variaciones en los datos produjeran variaciones del mismo tamaño en las soluciones. Se verá que esto no siempre es así, y que la variación depende en gran medida de los coeficientes de las matrices.

Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{pmatrix} -5.96 & 11.94 \\ -3.98 & 7.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.02 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

El determinante de la matriz \mathbf{A} es 0.02, y como es no nulo, el sistema tiene solución única. La solución correcta es,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Suponga que redondea los términos independientes del vector \mathbf{b} en el primer decimal, o que estos datos se han obtenido experimentalmente y sus valores son,

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

El nuevo sistema es entonces,

$$\begin{pmatrix} -5.96 & 11.94 \\ -3.98 & 7.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

y corresponde a una ligera variación del problema original, siendo su solución ahora (que nuevamente es única),

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La máxima diferencia entre las componentes de \mathbf{b} y $\tilde{\mathbf{b}}$ es 0.02, mientras que la máxima diferencia entre las componentes de \mathbf{x} y $\tilde{\mathbf{x}}$ es 2. El error inicial se ha magnificado 100 veces.

En general, si se parte de una ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y se supone que el lado derecho se modifica ligeramente convirtiéndose en $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$, entonces la solución también se modificará y podrá expresarse como $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$. Una estimación del valor que tiene la variación $\Delta\mathbf{x}$ como función de la perturbación $\Delta\mathbf{b}$ puede obtenerse de la siguiente manera,

$$\begin{array}{ll} \text{Ecuación original :} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{Ecuación con error :} & \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \end{array}$$

Restando ambas expresiones se obtiene la ecuación,

$$\mathbf{A}(\Delta\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{b} \quad (\text{A.6})$$

a partir de la cual es posible calcular el error como,

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b} \quad (\text{A.7})$$

De la relación anterior se deduce que el valor del error crece cada vez que \mathbf{A}^{-1} también lo hace.

Existe una cantidad que permite medir la sensibilidad de los sistemas frente a perturbaciones introducidas en los coeficientes de las matrices involucradas. Turing [32], Von Neumann y Goldstine [31] denominaron a dicha cantidad como *número de condición* y lo definieron de la forma siguiente,

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (\text{A.8})$$

Para ejemplificar este concepto, considere la siguiente matriz \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La norma de esta matriz es $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 3.0001$. Por otro lado,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5.0005 & -5000 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

cuya norma es $\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = 20000$, y de esa forma $\kappa(\mathbf{A}) = (20000)(3.0001) = 60002$. En este ejemplo, el número de condición obtenido claramente indica que hay que ser cauteloso al momento de referirse a la precisión de la solución del sistema en cuestión.

De esa manera, se observa que $\kappa(\mathbf{A})$ da una medida de cuánto se amplifica el error relativo de la solución con respecto a la perturbación introducida en la entrada. O dicho de otra forma, el término hace referencia a la certeza relativa de que un vector residual pequeño implique una buena solución aproximada.

Cuando la matriz \mathbf{A} no es invertible, o sea es singular, el número de condición no está definido, y por completitud se asume que $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$.

Se dice que una matriz está *bien condicionada* (well-conditioned) si $\kappa(\mathbf{A})$ se aproxima a 1 y está *mal condicionada* (ill-conditioned) si $\kappa(\mathbf{A})$ es significativamente mayor que 1.

$$(A.1) \quad \kappa(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$$

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es el cociente entre el valor absoluto del mayor y el menor de los valores propios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es el cociente entre el valor absoluto del mayor y el menor de los valores propios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

$$(A.2) \quad \kappa(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}}$$

A una matriz \mathbf{A} se le llama *matriz bien condicionada* cuando el número de condición es cercano a 1.

$$(A.3) \quad \kappa(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}}$$

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es el cociente entre el valor absoluto del mayor y el menor de los valores propios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

$$(A.4) \quad \kappa(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}}$$

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es el cociente entre el valor absoluto del mayor y el menor de los valores propios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es el cociente entre el valor absoluto del mayor y el menor de los valores propios de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Apéndice B

Programación del Método de Puntos Finitos

En el presente apéndice y con fines didácticos, se entrega un código totalmente comentado, programado en *MATLAB*, con el cual se resuelve eficientemente y mediante la técnica de puntos finitos, el test de Rachford & Wheeler descrito en la sección 6.1.1.

En este código se identifican claramente cinco de los pasos que comúnmente son seguidos cada vez que este método se aplica,

- **Paso 1:** Discretización del dominio estudiado. Incluye definición de nodos y generación nubes.
- **Paso 2:** Definición de las condiciones de frontera y de las característica de los materiales constitutivos del dominio.
- **Paso 3:** Generación de las matrices locales, colocación puntual de la formulación estudiada y ensamble final del sistema lineal de ecuaciones.
- **Paso 4:** Resolución del sistema de ecuaciones.
- **Paso 5:** Postproceso de la solución y generación de resultados numéricos y gráficos.

En el código adjunto y cada vez que fue posible, se hizo referencia a las distintas secciones de este documento con el fin de permitir al lector inexperto aclarar las dudas teóricas que le surgiesen a medida que sigue las líneas del programa.

Para la ejecución de este código, copie el listado adjunto en la sección siguiente a un archivo de texto, guárdelo en su disco duro con el nombre "*fpm1d.m*" y finalmente es-

criba en el *prompt* de *MATLAB*, posicionado en la carpeta donde guardó el archivo:
fpm1d<*ENTER*>.

B.1 Listado programa: *fpm1d.m*

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% APLICACION DEL METODO DE PUNTOS FINITOS A UN PROBLEMA UNIDIMENSIONAL ...
%   >> Test de Rachford & Wheeler (ver seccion 6.1.1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function fpm1d,
    clc;
    clear all;
    close all;
    tic;
    %-----
    %(PASO.1) DISCRETIZACION DEL DOMINIO DE SOLUCION ...
    %-----
    % 1a) Se discretiza el intervalo [0,1] con 11 nodos,
    nn=51;
    nodos=linspace(0,1,nn)';
    % 1b) Se generan nubes de 5 nodos,
    npn=5;
    [nubes,dmax]=cg(nodos,npn);
    %-----
    %(PASO.2) DEFINICION DE CONDICIONES DE BORDE ...
    %-----
    % 2a) Se define condicion de frontera izquierda,
    cf(1).tipo='dirichlet';
    cf(1).valor=0;
    % 2b) Se define condicion de frontera derecha,
    cf(2).tipo='dirichlet';
    cf(2).valor=0;
    %-----
    %(PASO.3) ENSAMBLE LOCAL Y GLOBAL DE ECUACIONES ...
    %-----
    % 3a) Reserva de memoria almacenamiento para matrices globales,
    K=zeros(nn,nn) ;
    Kx=zeros(nn,nn) ;
    F=zeros(nn,1) ;
    cero=zeros(npn,1);
    uno=ones(npn,1);

```

```

% 3b) Iteracion nodos. Ensamble de matrices globales a partir de
%           matrices locales,
for i=1:nn,
    % Identificacion nodos asociados a nube i-esima
    in=nubes(i,:); % indices
    x=nodos(in'); % coordenadas
    % Identificacion coordenada nodo estrella
    xi=nodos(i);
    % Identificacion radio de nube i-esima
    di=dmax(i);
    % Transformacion de coordenadas globales a locales
    psi=(x-xi)/di;
    % Evaluacion de matriz de ponderacion W
    W=diag(wf(psi)) ;
    % Evaluacion de matriz polinomica P (base)
    P=[uno psi psi.^2];
    % Evaluacion de matriz locales A, B y C
    A=P'*W*P;
    B=P'*W;
    C=inv(A)*B;
    % Evaluacion de funciones de forma y sus derivadas en nodo estrella
    N=[1 0 0]*C;
    Nx=[0 1/di 0]*C;
    Nxx=[0 0 2/di^2]*C;
    % Identificacion tipo de nodo: forontera izquierda - frontera derecha - interior
    if (i==1),
        % Nodo estrella es frontera izquierda
        if (cf(1).tipo=='dirichlet'),
            % Colocacion puntual para nodo dirichlet
            Ki=cero';
            Ki(1)=1;
            Fi=cf(1).valor;
        else
            % Colocacion puntual para nodo neumman
            Ki=Nx;
            Fi=cf(1).valor;
        end
    elseif (i==nn),
        % Nodo estrella es frontera derecha
        if (cf(2).tipo=='dirichlet'),
            % Colocacion puntual para nodo dirichlet
            Ki=cero';
            Ki(1)=1;
            Fi=cf(2).valor;
        else
            % Colocacion puntual para nodo neumman
            Ki=Nx;
            Fi=cf(2).valor;
        end
    end
end

```

```

else
    % Colocacion puntual para nodo neumman
    Ki=Nx;
    Fi=cf(2).valor;
end
else
    % Nodo estrella es interior
    % Colocacion puntual para nodo interior (EDP a resolver)
    Ki=Nxx;
    Fi=ff(xi);
end
% Ensamble de matrices locales en matrices globales K, Kx y F
K(i,in)=Ki; % Matriz de rigidez potencial
Kx(i,in)=Nx; % Matriz de rigidez gradiente
F(i)=Fi; % Vector forzante
end
%-----
%(PASO.4) SOLUCION DE SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES ...
%-----
% Solucion de sistema de ecuaciones mediante eliminacion Gaussiana
u=K\F;
% Calculo del gradiente a partir de la solucion de potencial
du=Kx*u;
%-----
%(PASO.5) POSTPROCESO DE LA SOLUCION ...
%-----
% Evaluacion de la solucion analitica para discretizacion considerada
[uo,duo]=sf(nodos);
% Impresion de potenciales y gradientes en archivo de texto
filename='fpm.solucion.txt';
flog=1;
fprintf(flog,'\n');
fprintf(flog,' IMPRESION DE RESULTADOS FPM\n');
fprintf(flog,' + Nombre archivo .... %s\n',filename);
fout=fopen(filename,'w');
for i=1:nn,
    fprintf(fout,'%4d %14.6e %14.6e %14.6e %14.6e %14.6e\n', ...
            i,nodos(i),uo(i),u(i),duo(i),du(i));
end
fclose(fout);
% Calculo de normas de error L2 y H1 para solucion obtenida
L2=sqrt(sum(power(u-uo,2))/sum(power(uo,2)));
H1=sqrt(sum(power(du-duo,2))/sum(power(duo,2)));
dtsol=toc;

```

```

% Impresion en pantalla de resultados globales de la simulacion
fprintf(flog,' RESUMEN RESULTADOS FPM\n');
fprintf(flog,' + Numero de nodos ... %d\n',nn);
fprintf(flog,' + Paso ..... %.3e\n',nodos(2)-nodos(1));
fprintf(flog,' + Error.H1 ..... %.3e\n',H1);
fprintf(flog,' + Error.L2 ..... %.3e\n',L2);
fprintf(flog,' + Tiempo solucion ... %.2fs\n',dtsol);
fprintf(flog,'\n');
pos=[120 150 900 500] ;
% Despliegue grafico del potenciales (soluciones analitica y numerica)
figure;
plot(nodos,uo,'r',nodos,u,'b','LineWidth',1.5);
xlabel('Posicion');
ylabel('Potencial');
grid;
legend('Analitica','Numerica','Location','Best') ;
set(gcf,'Position',pos);
% Despliegue grafico del gradientes (soluciones analitica y numerica)
figure;
plot(nodos,duo,'r',nodos,du,'b','LineWidth',1.5);
xlabel('Posicion');
ylabel('Gradiente');
grid;
legend('Analitica','Numerica','Location','Best') ;
set(gcf,'Position',pos);
return

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% EVALUACION DE LA FUNCION FORZANTE ...
% >> -b(x) del test de Rachford & Wheeler (ver seccion 6.1.1)
function f=ff(x),
    delta=60;
    xo=0.5;
    px=delta./(1+power(delta*(x-xo),2));
    f=-2*px-2*delta*(1-x).*(x-xo).*power(px,2);
return

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% EVALUACION DE LA FUNCION SOLUCION ...
% >> u(x) del test de Rachford & Wheeler (ver seccion 6.1.1)
function [u,du]=sf(x),
    delta=60;
    xo=0.5;
    px=delta./(1+power(delta*(x-xo),2));

```

```

u=(1-x).*(atan(delta*(x-xo))+atan(delta*xo));
du=(1-x).*px-atan(delta*(x-xo))-atan(delta*xo);
return

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% EVALUACION DE LA FUNCION DE PONDERACION ...

```

```

% >> Funcion de Gauss (ver seccion 3.6)

```

```

function w=wf(psi),
    k=1;
    r=3.5;
    e1=power(r*abs(psi),2*k);
    e2=power(r,2*k);
    w=(exp(-e1)-exp(-e2))/(1-exp(-e2)) ;
return

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% GENERACION DE NUBES A PARTIR DE COORDENADAS NODOS ...

```

```

% >> Distancia minima (ver seccion 3.1)

```

```

function [nubes,dmax] = cg(nodos,n),
    nn=length(nodos) ;
    nubes=zeros(nn,n) ;
    dmax=zeros(nn,1) ;
    for i=1:nn,
        dn=[[1:nn]' 1.05*abs(nodos-nodos(i))] ;
        dns=sortrows(dn,2);
        nubes(i,:)=dns(1:n,1);
        dmax(i)=max(dns(1:n,2));
    end
return

```

Apéndice C

Resultados de experimentos numéricos

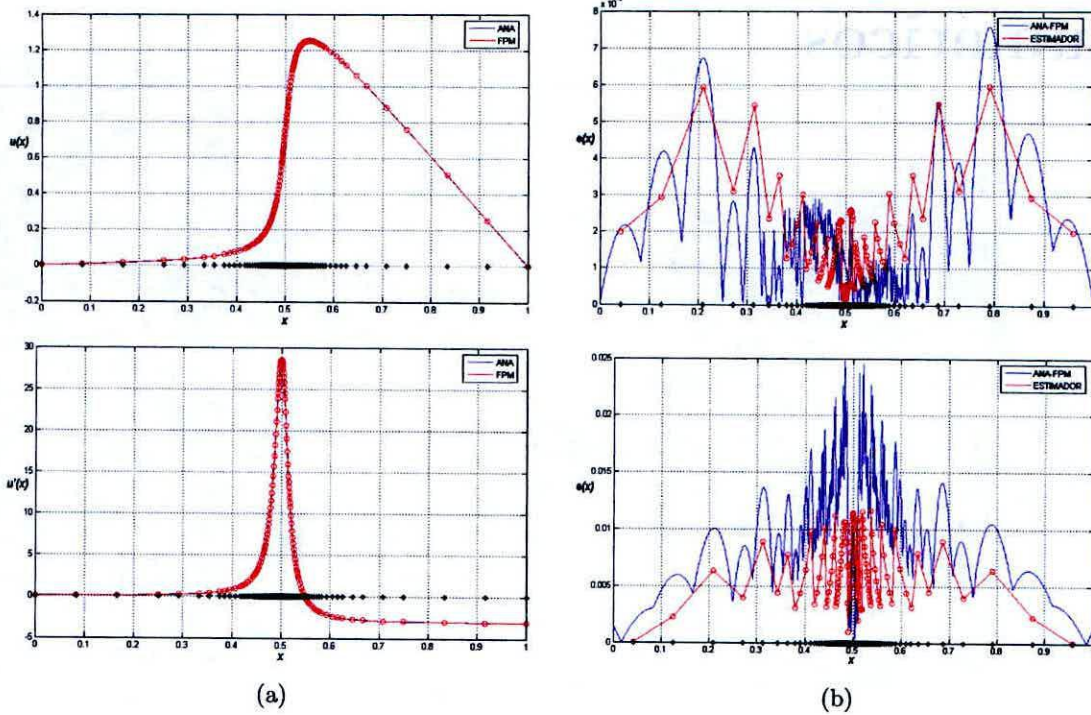


Figura C.1: Test de Rachford & Wheeler. Distribución de potencial, gradiente de potencial, error real y error estimado, asociados a solución mediante MPF adaptivo.

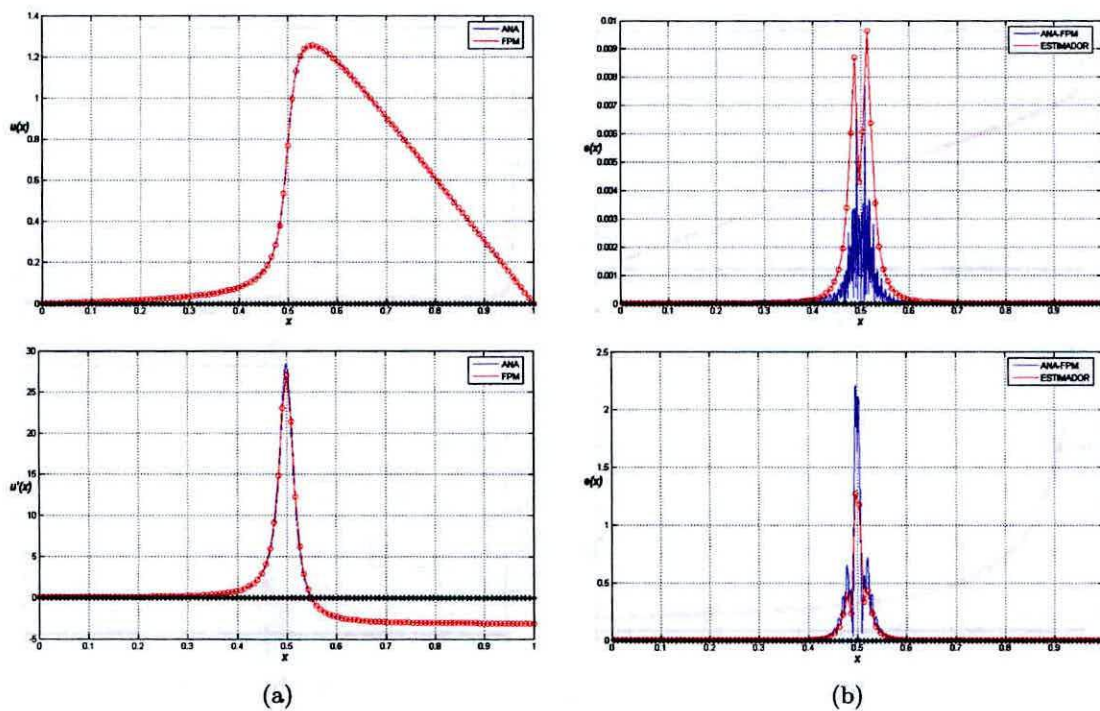


Figura C.2: Test de Rachford & Wheeler. Distribución de potencial, gradiente de potencial, error real y error estimado, asociados a solución mediante MPF con nodos uniformemente distribuidos.

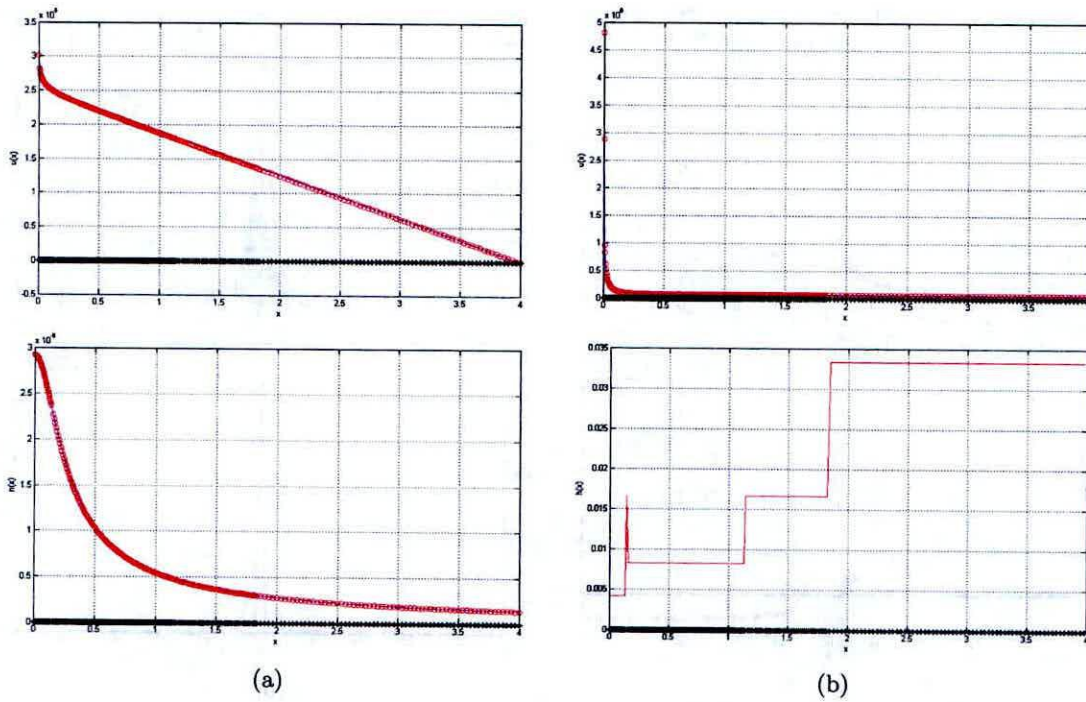


Figura C.3: Descarga corona unipolar en configuración coaxial. Distribución de potencial, gradiente de potencial, densidad de carga eléctrica y paso de discretización, asociados a solución mediante MPF adaptivo.

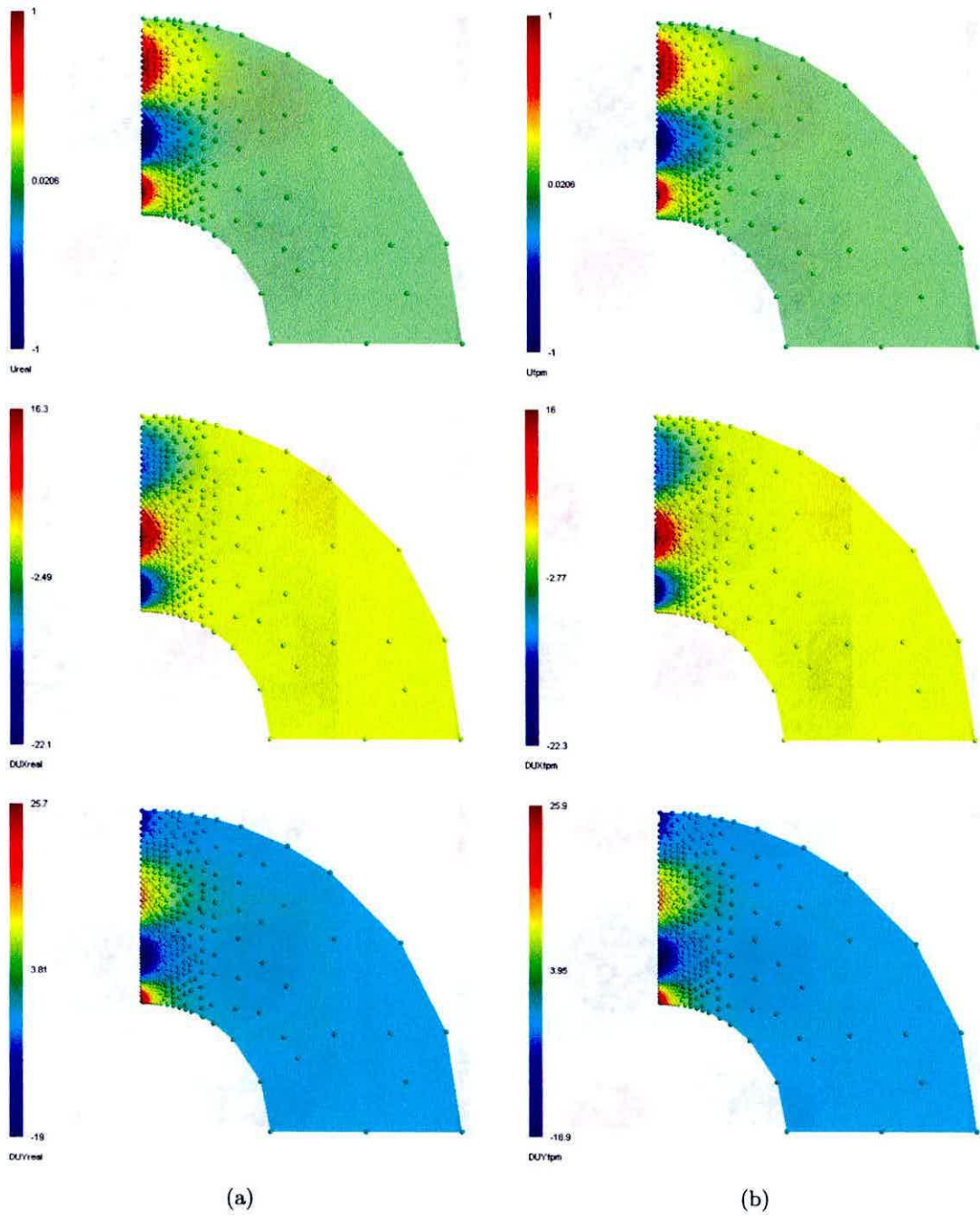


Figura C.4: Ecuación de Laplace en dominio anular. Distribución de potencial y gradiente de potencial correspondiente a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

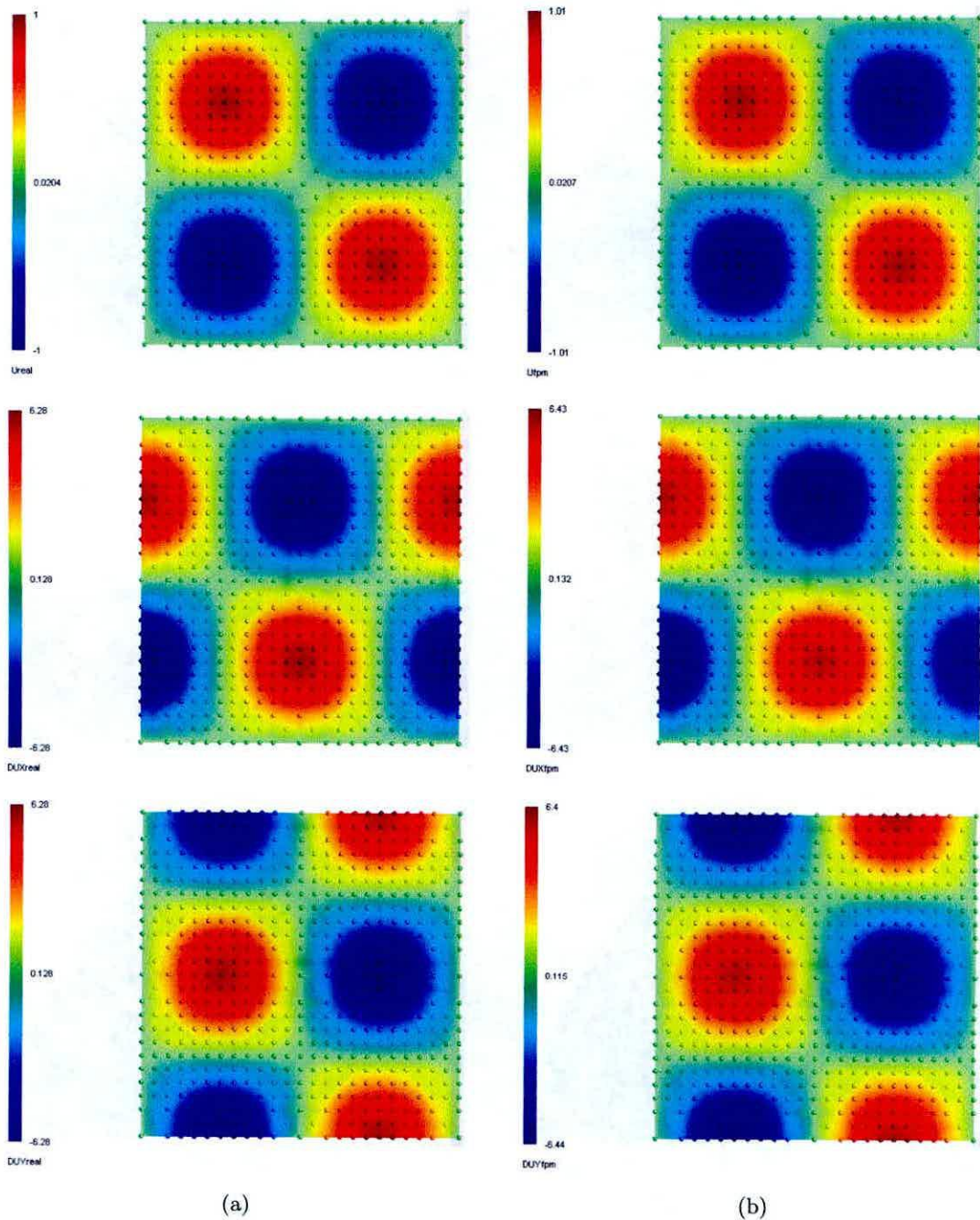


Figura C.5: Ecuación de Poisson en dominio cuadrado. Distribución de potencial y gradiente de potencial correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

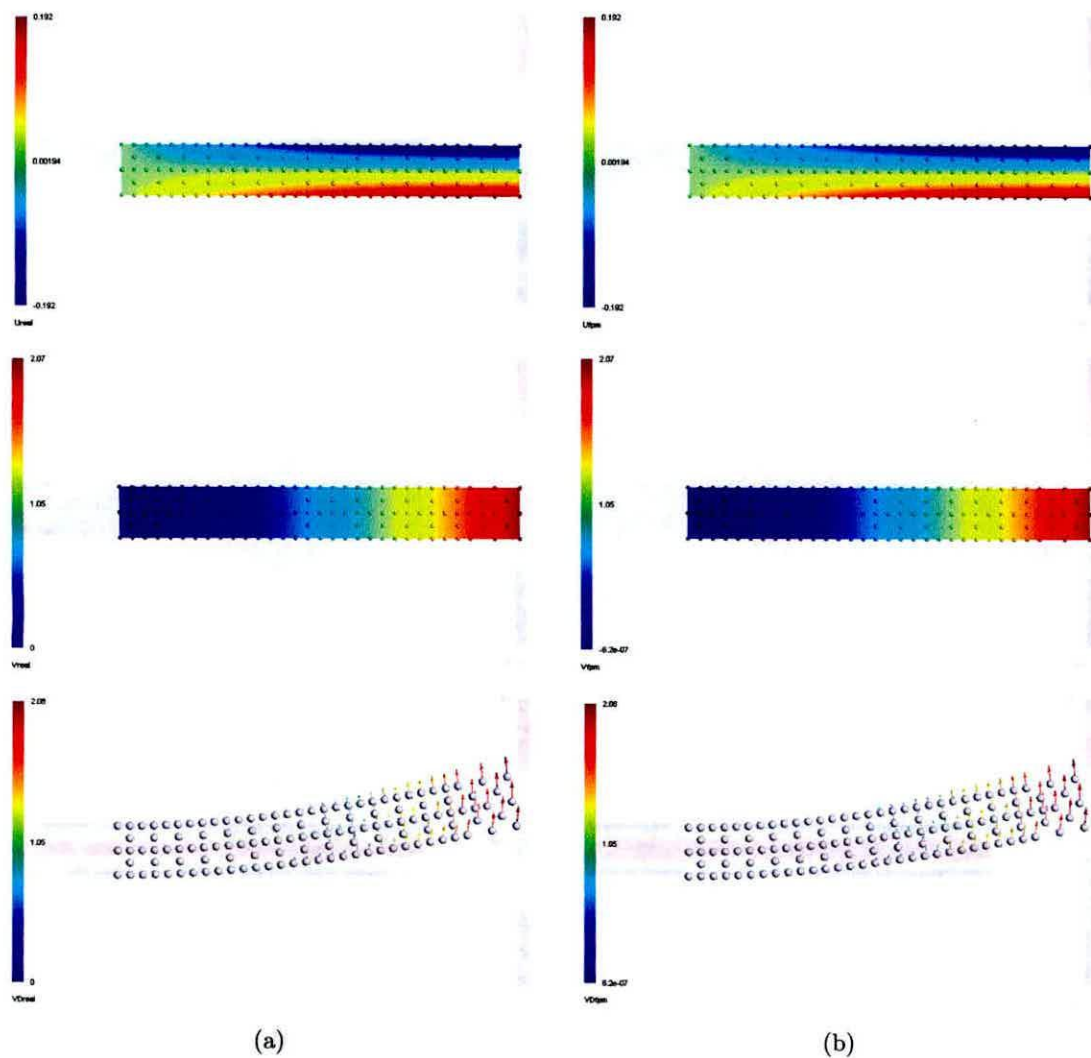


Figura C.6: **Viga empotrada.** Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

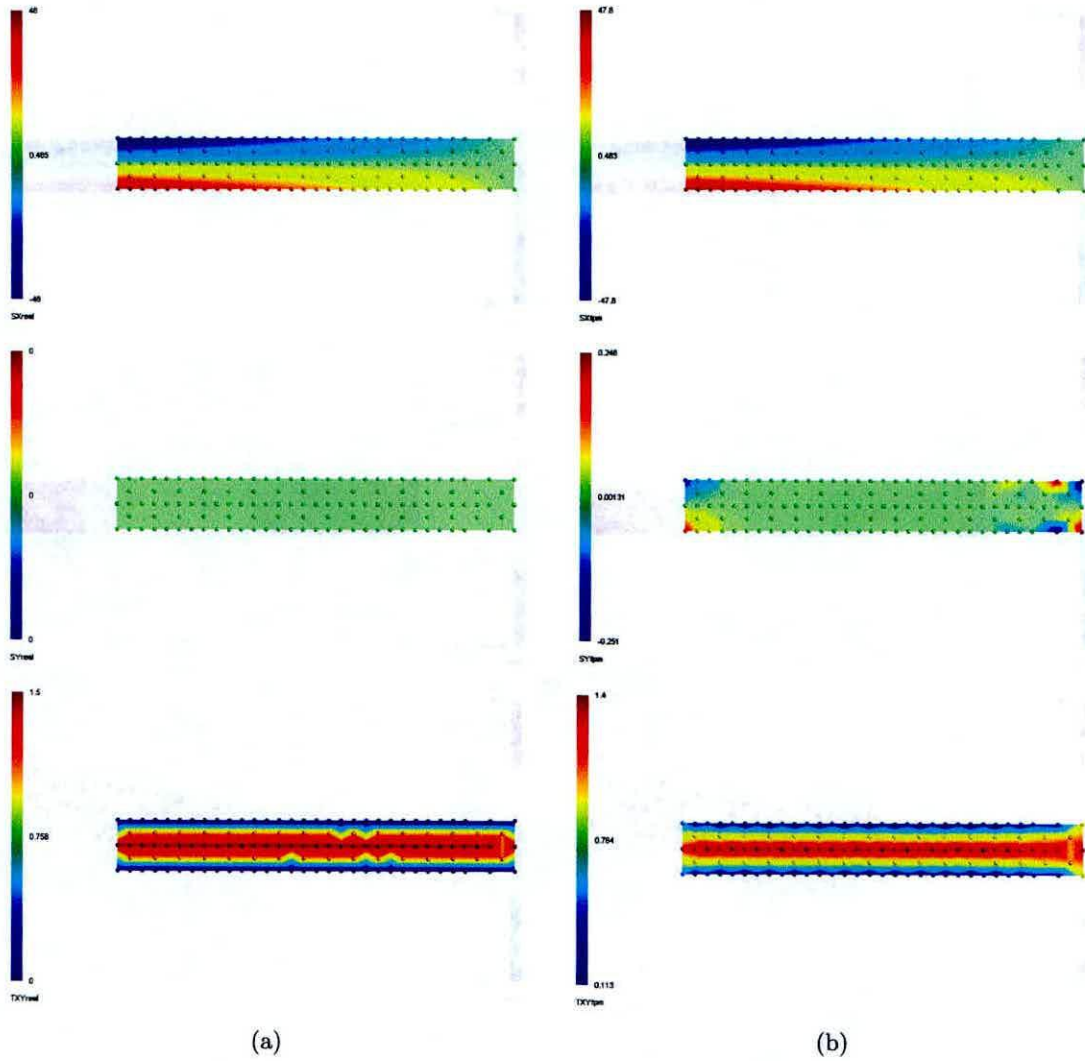


Figura C.7: **Viga empotrada.** Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

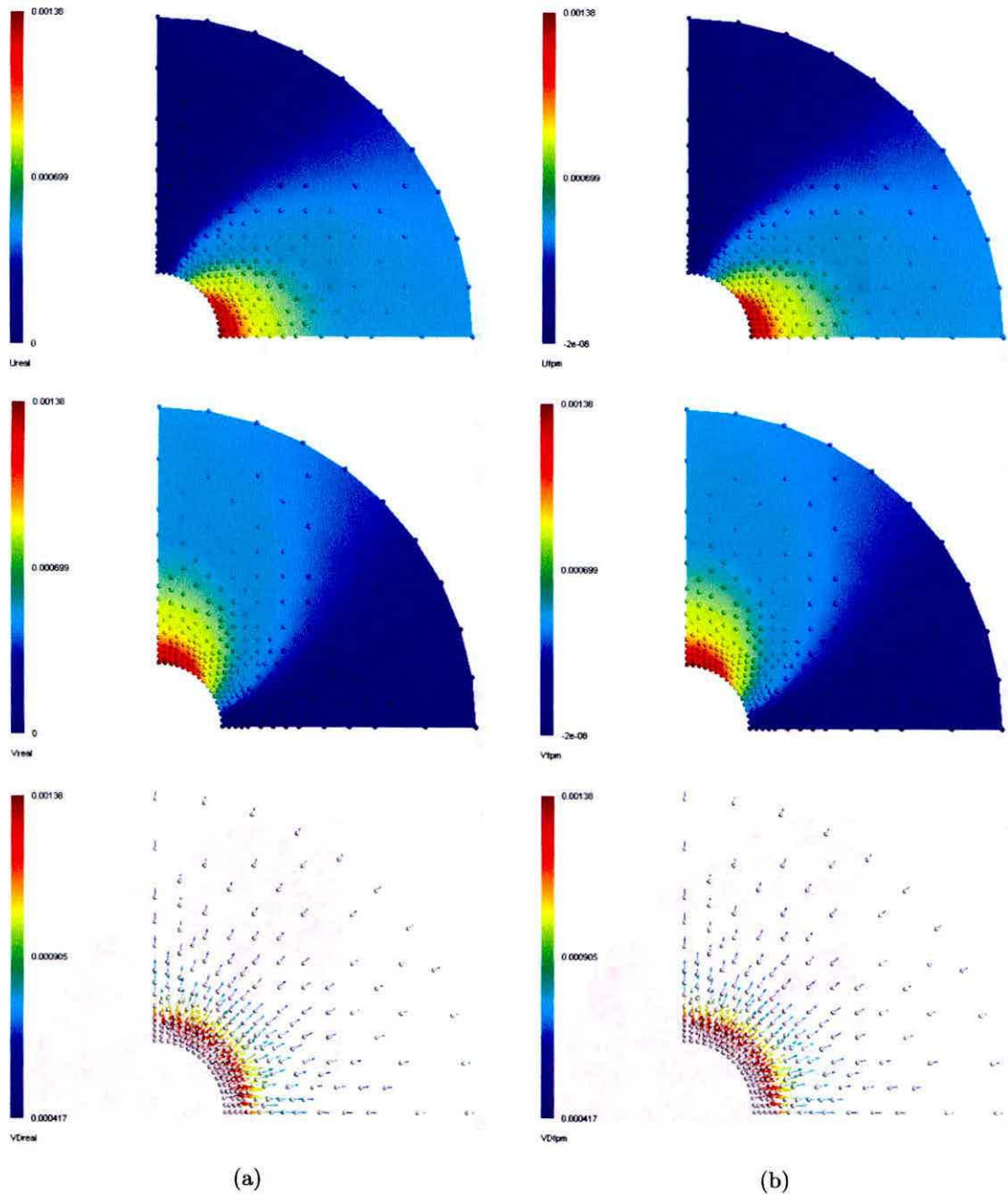


Figura C.8: **Cilindro hueco sujeto a presión interna.** Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

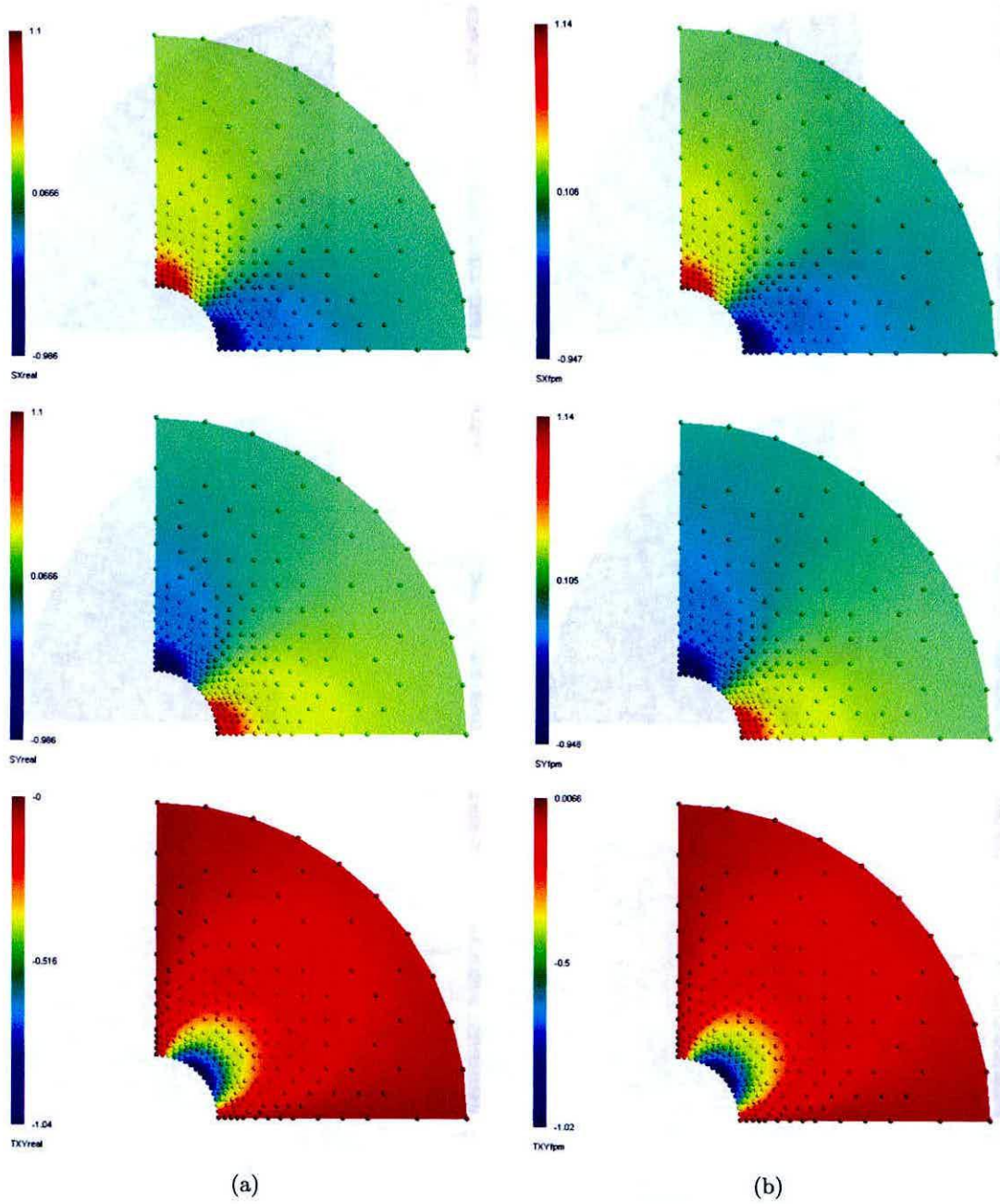


Figura C.9: **Cilindro hueco sujeto a presión interna.** Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

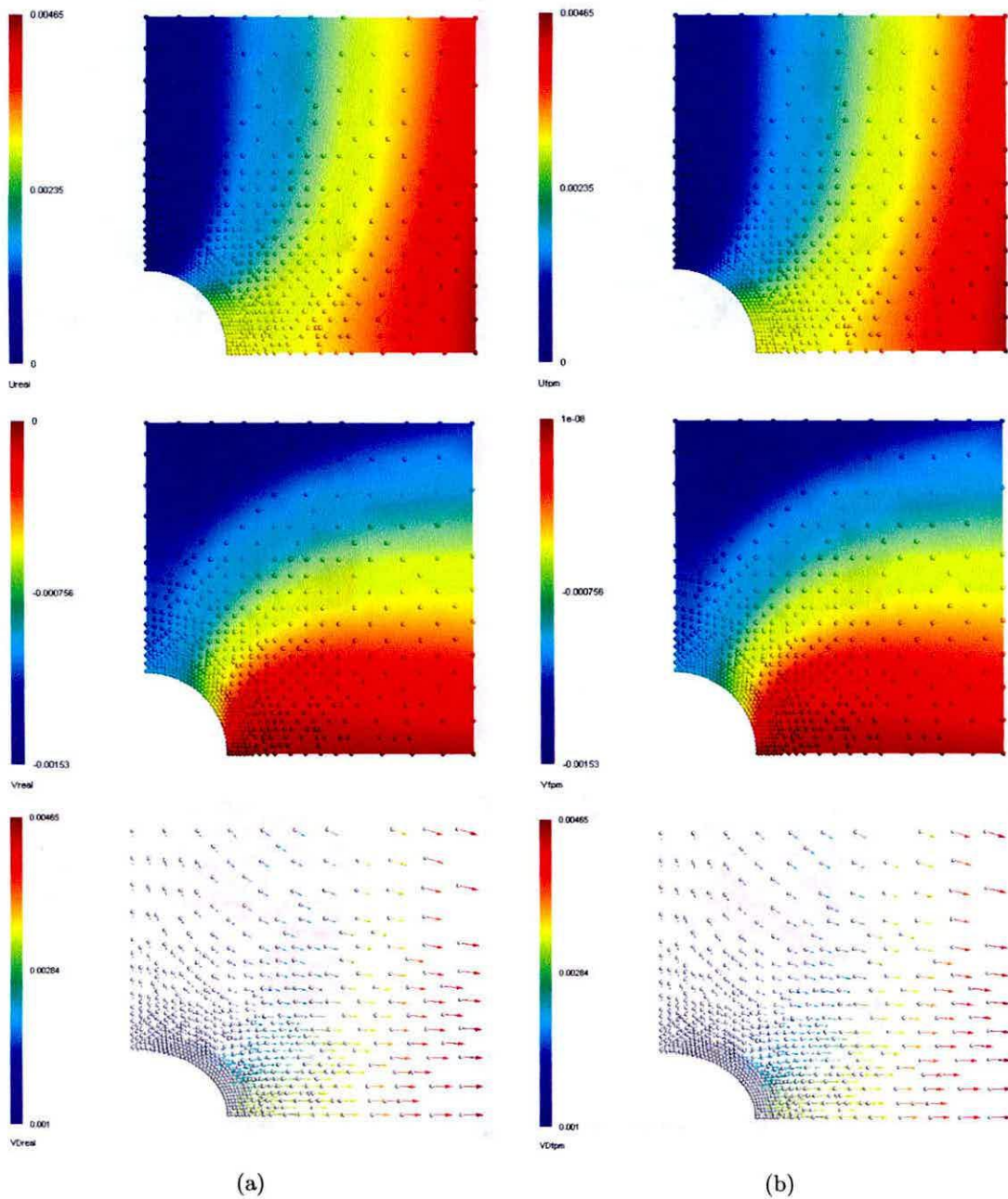


Figura C.10: Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional. Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

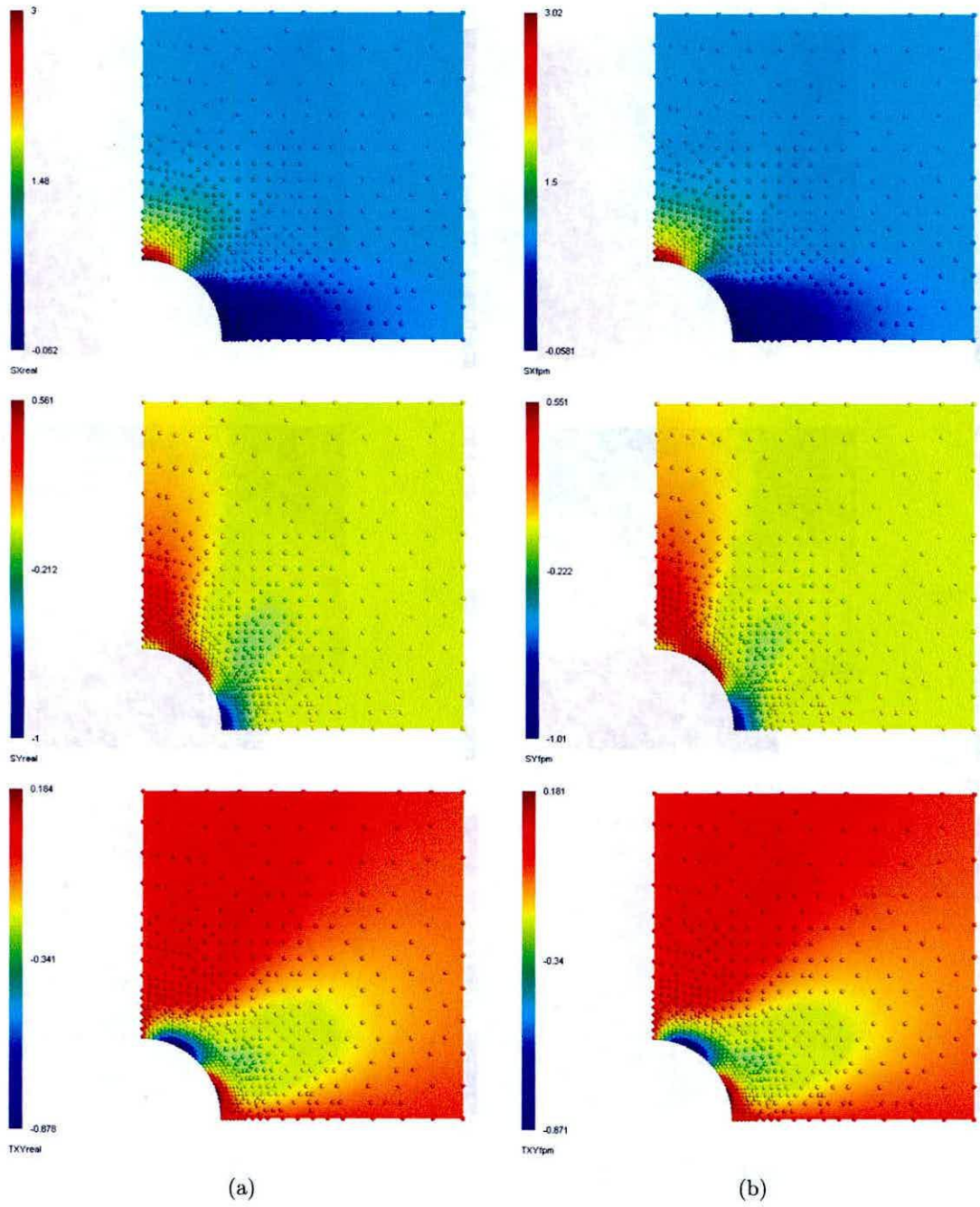


Figura C.11: Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional. Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.

Listado de Tablas

6.1 Errores globales asociados a la resolución numérica del test de Rachford & Wheeler utilizando 119 nodos.	53
--	----

Índice de Tablas

Las tablas de este libro están numeradas en el orden en que aparecen en el texto. El índice de tablas se encuentra al final de cada capítulo.

Listado de Figuras

2.1	Soporte en dos dimensiones.	7
2.2	Interrelación entre los métodos de aproximación libres de malla.	10
3.1	Dominio del problema Ω y nube Ω_I asociada a nodo I	12
3.2	Criterios para la generación de nubes: (a) cruz; (b) Voronoi.	12
3.3	Concepto de la interpolación de mínimos cuadrados.	15
3.4	Contrastación funciones de peso tipo spline.	26
3.5	Funciones de peso gaussianas para distintos valores del parámetros r	27
3.6	Funciones de peso gaussianas para distintos valores del parámetros k	27
3.7	Funciones de peso cónicas para distintos valores del parámetro k	28
3.8	Soportes bidimensionales.	29
3.9	Aproximación por mínimos cuadrados fijos.	31
3.10	Aproximación por mínimos cuadrados móviles.	32
3.11	Efecto de la distancia al origen en el condicionamiento de la matriz \mathbf{A}	34
3.12	Efecto de la distancia entre nodos en el condicionamiento de \mathbf{A}	35
4.1	Definición de la geometría de un dominio a partir de la función implícita $f(\mathbf{X})$. . .	37
4.2	Implementación de metodología de discretización implícita donde se muestran nodos interiores y frontera con sus correspondientes normales.	39

5.1	Definición de nodos de refinamiento a partir de los conceptos de nube y vecinos de Voronoi.	42
5.2	Topología utilizada para derivación de fórmula de error bidimensional.	44
6.1	Discretización utilizada por: a) método de refinamiento propuesto, b) nodos uniformemente distribuidos.	51
6.2	Contrastación entre error real y el estimador propuesto.	52
6.3	Aproximaciones numéricas del potencial y de su gradiente logradas a partir del método de refinamiento propuesto.	53
6.4	Geometría coaxial estudiada.	54
6.5	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	56
6.6	Distribuciones analítica y numérica adaptiva de (a)potencial, y (b) densidad de carga eléctrica.	56
6.7	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	58
6.8	Distribuciones de potencial asociadas a solución: a)analítica, b)numérica adaptiva.	59
6.9	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	60
6.10	Distribuciones de potencial asociadas a solución: a)analítica, b)numérica adaptiva.	61
6.11	Viga empotrada sujeta a carga vertical en su extremo libre.	62
6.12	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	63
6.13	Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	63
6.14	Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	64
6.15	Cilindro hueco sujeto a presión interna.	65
6.16	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	66

6.17	Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	66
6.18	Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	67
6.19	Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional.	67
6.20	Evolución del error global y del número de nodos utilizado en la discretización, para cada iteración del proceso de refinamiento adaptivo.	69
6.21	Distribución espacial del vector desplazamiento obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	69
6.22	Distribución espacial de esfuerzo σ_{xx} obtenido mediante solución: a)analítica, b)MPF adaptivo.	70
C.1	Test de Rachford & Wheeler. Distribución de potencial, gradiente de potencial, error real y error estimado, asociados a solución mediante MPF adaptivo.	84
C.2	Test de Rachford & Wheeler. Distribución de potencial, gradiente de potencial, error real y error estimado, asociados a solución mediante MPF con nodos uniformemente distribuidos.	85
C.3	Descarga corona unipolar en configuración coaxial. Distribución de potencial, gradiente de potencial, densidad de carga eléctrica y paso de discretización, asociados a solución mediante MPF adaptivo.	86
C.4	Ecuación de Laplace en dominio anular. Distribución de potencial y gradiente de potencial correspondiente a: a)solución analítica, b)solución mediante MPF adaptivo.	87
C.5	Ecuación de Poisson en dominio cuadrado. Distribución de potencial y gradiente de potencial correspondientes a: a)solución analítica, b)solución mediante MPF adaptivo.	88
C.6	Viga empotrada. Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a)solución analítica, b)solución mediante MPF adaptivo.	89
C.7	Viga empotrada. Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a)solución analítica, b)solución mediante MPF adaptivo.	90

C.8	Cilindro hueco sujeto a presión interna. Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.	91
C.9	Cilindro hueco sujeto a presión interna. Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.	92
C.10	Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional. Distribución espacial del vector desplazamiento y sus componentes correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.	93
C.11	Placa infinita con agujero circular sometida a tensión unidireccional. Distribución espacial de componentes del tensor esfuerzo correspondientes a: a) solución analítica, b) solución mediante MPF adaptivo.	94

Bibliografía

- [1] You Y, Chen J, Lu H, “Adaptive Galerkin Particle Method”, *Lecture Notes in Comput. Sci. Eng.*, 2002, 251-267.
- [2] Rabczuk R, Belytschko T, “Adaptativity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63:1559-1582.
- [3] Oñate E, Perazzo F, Miquel J, “A finite point method for elasticity problems”, *Computers & Structures*, 2001, 79:2151-2163.
- [4] Löhner R, Sacco C, Oñate E, Idelsohn S, “A finite point method for compressible flow”, *Technical Report. School of Computational Science and Informatics of George Mason University and International Center for Numerical Methods in Engineering of Universida Técnica de Cataluña*, 2000.
- [5] Hiroyuki Fukutomi, Haoyu Huang, Toshiyuki Takagi, Junji Tani, “Some Meshless Methods For Electromagnetic Field Computations”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, Septiembre 1998.
- [6] C. Héroult Y. Maréchal, “Boundary And Interface Conditions In Meshless Methods”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, Mayo 1999.
- [7] S. L. Ho, S. Yang, J. M. Machado, H. C. Wong, “Application of a Meshless Method in Electromagnetics”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 37, No. 5, Septiembre 2001.
- [8] Liang Xuan, Zhiwei Zeng, Balasubramaniam Shanker, Lalita Udpa, “Element-Free Galerkin Method for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Computation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 40, No. 1, Enero 2004.

- [9] Yong Zhang, K. R. Shao, D. X. Xie, J. D. Lavers, "Meshless Method Based on Orthogonal Basis for Computational Electromagnetics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, Mayo 2005.
- [10] Kok-Meng Lee, Qiang Li, Hungson Sun, "Effects of Numerical Formulation on Magnetic Field Computation Using Meshless Methods", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 9, Septiembre 2006.
- [11] Liang Xuan, Zhiwei Zeng, Balasubramaniam Shanker, Lalita Udpa, "Meshless Method for Numerical Modeling of Pulsed Eddy Currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 40, No. 6, Noviembre 2004.
- [12] Yong Zhang, K. R. Shao, Youguang Guo, and J. D. Lavers, "A Boundary Meshless Method for Transient Eddy Current Problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 10, Octubre 2005.
- [13] Oriano Bottauscio, Mario Chiampì, Alessandra Manzin, "Element-Free Galerkin Method in Eddy-Current Problems With Ferromagnetic Media", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 5, Mayo 2006.
- [14] Per-Olof Persson, "Mesh Generation for Implicit Geometries", *PhD. Thesis. Department of Mathematics. Massachusetts Institute of Technology*, 2004.
- [15] Gingold R, Monaghan J, "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1977, 181:375-389.
- [16] Nayroles B, Touzot G, Villon P, "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximations and Diffuse Elements", *Computational Mechanics*, 1992, 10:307-318.
- [17] Belytschko T, Gu L, Lu Y, "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 1994, 37:229-256.
- [18] Duarte C, Oden J, "HP-Cloud a Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1996, 139:237-262.
- [19] Babuska I, Melenk J, "The Partition of Unity Method", *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 1997, 40:727-758.
- [20] Atluri S, Zhu T, "A New Meshless Local Petrov-Galerkin Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, 1998, 22:117-127.

- [21] Atluri S, Zhu T, “A New Meshless Local Petrov-Galerkin Approach to Nonlinear Problems in Computer Modeling and Simulation”, *Computer Modeling and Simulation in Eng.*, 1998, 3:187-196.
- [22] Liu W, Jun S, Zhang Y, “Reproducing Kernel Particle Methods”, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 1995, 20:1081-1106.
- [23] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O, Taylor R, “Finite Point Method in Computational Mechanics Application to Convective Transport and Fluid Flow”, *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 1996, 39:3839-3866.
- [24] Rachford H, Wheeler M, “An H^{-1} -Galerkin procedure for the two-point boundary value problem”, *Carl de Boor(Ed.), Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, 1974, 353-382.
- [25] Babuska I, Oden J, Lee J, “Mixed-Hybrid Finite Element Approximations of Second-Order Elliptic Boundary-Value Problems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1977, 11:175-206.
- [26] Liu W, Li S, Belytschko T, “Moving Least Square Reproducing Kernel Method. Part I: Methodology and Convergence”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1997, 143:422-453.
- [27] Atluri S, Kim G, “Arbitrary Placement of Secondary Nodes, and Error Control, in the Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPG)”, *CMES*, 2000, (1)(3):11-32.
- [28] Lancaster P, Salkauskas K, “Surfaces generated by moving least square methods”, *Mathematics of computation*, 1981, 37:141-158.
- [29] Mazen Abdel-Salam, Al-Hamouz, “Analysis of Monopolar Ionized Field as Influenced by Ion Diffusion”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 31, No. 3, Mayo/Junio 1995.
- [30] Xin Li, “Numerical Analysis of Ionized Fields Associated with HVDC Transmission Lines Including Effect of Wind”, *PhD. Thesis. Department of Electrical and Computer Engineering. The University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada, Diciembre 1997.*
- [31] Von Neumann, H. Goldstine, “Numerical inverting of matrices of high order”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, 1021-1099.

- [32] A.M. Turing, "Rounding-off errors in matrix processes", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1948, 287-308.
- [33] Jamshid Zamany, *Modelling the Particle Transport in Commercial Electrostatic Precipitators*, Akademiet for de Tekniske Videnskaver, ATV, Department of Fluid Mechanics, Technical University of Denmark, Septiembre 1992.
- [34] Zienkiewicz O, Taylor R, *The finite element method*, London:Butterworth-Heinemann, 3 volúmenes, 5ª edición, 2000.
- [35] Timoshenko S, Goodier J, *Theory of elasticity*, New York:Mc-Graw Hill, 3ª edición, 1970.
- [36] Hauss H, Melcher J, *Electromagnetic Fields and Energy*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1989.