

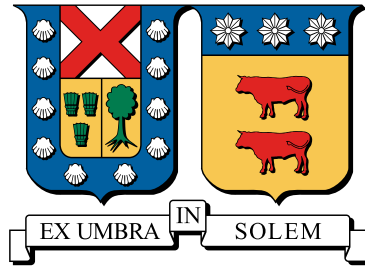
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS DE SEGUNDO
ORDEN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS
ESTOCÁSTICOS POR MEDIO DE LA TÉCNICA
CONTROL VARIATES**

CRISTÓBAL HERNÁN ACEVEDO FARÍAS

Ingeniero Civil
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

septiembre de 2021



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS DE SEGUNDO
ORDEN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS
ESTOCÁSTICOS POR MEDIO DE LA TÉCNICA
CONTROL VARIATES**

Memoria de Título y Tesis de Grado presentada por
CRISTÓBAL HERNÁN ACEVEDO FARÍAS

Como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil
y al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Profesor Guía
Dr. Marcos Alberto Valdebenito Castillo

septiembre de 2021

TÍTULO DE LA TESIS

**ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS DE SEGUNDO ORDEN DE
MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS POR MEDIO
DE LA TÉCNICA CONTROL VARIATES**

AUTOR

CRISTÓBAL HERNÁN ACEVEDO FARÍAS

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Diego Andrés Álvarez Marín

Dr. Héctor Antonio Jensen Velasco

Dr. Marcos Alberto Valdebenito Castillo

Valparaíso, Chile, septiembre de 2021.

Dedicado a los niños

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Dirección General de Investigación, Innovación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María por el apoyo a través de becas que financiaron la difusión de los conocimientos generados con este trabajo, tanto a través de esta tesis como en ponencias realizadas en congresos nacionales e internacionales.

El autor de esta tesis agradece el apoyo de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) a través la beca de estudios de postgrado CONICYT-PFCHA/ Magíster-Nacional/ 2019-22191834.

Agradezco a mi profesor guía Marcos Valdebenito, por efectivamente guiar mis pasos hacia la consecución de los resultados obtenidos en este trabajo. Agradezco esos pequeños consejos que permitieron mejorar mi rendimiento en el área de investigación, lo que sin duda va a repercutir de manera positiva en mi rendimiento profesional en el futuro. Agradezco el trato amable en nuestras interacciones, lo cual hizo que este proceso fuera más agradable de llevar. Por último, le agradezco los dulces que me ofrecía en las reuniones. Estaban muy ricos.

Agradezco a mis profesores de la Universidad Técnica Federico Santa María. Especialmente quiero destacar a los profesores del Departamento de Obras Civiles que me enseñaron las distintas áreas que comprende la carrera de ingeniería civil.

Agradezco a mis profesores del colegio Sara Cruchaga y del Instituto del Puerto de San Antonio, por construir la base tanto de mis competencias como de mis conocimientos; claramente no hubiese podido entender las integrales si ellos no me hubieran enseñado a sumar.

Agradezco a la Kelita, por tenerme en su pensión desde el día uno. Fue un apoyo importante en mi estadía en Valparaíso, siempre preocupada de mi bienestar, ofreciéndome alguna galletita o un pedazo de queque de vez en cuando.

Agradezco a mi madre por la preocupación de mi bienestar físico y psicológico. Fue un apoyo fundamental en mis momentos de flaqueza durante estos años. Solo por ello considero no burlarme cuando hablas del 'este', el 'coso' y la 'cuestión'.

Agradezco a mi padre por ser un gran apoyo en este proceso, siempre preocupado de que el 'perro guacho' no pasara hambre ni frío.

Agradezco a mi hermana ya que siempre supe que contaba con ella en caso de que lo necesitara. Eso compensa las veces que me hizo jugar a 'el que ordena más la pieza gana' y que curiosamente me dejaba ganar siempre.

Agradezco a la Tammy, por acompañarme en las noches mientras estudiaba algunos días, aunque entorpecía mi trabajo desordenando los lápices.

Por último, este trabajo va dedicado a los 'niños', motivos de felicidad para mí.

RESUMEN

La ingeniería civil es un área que se preocupa del diseño de obras civiles. Para desempeñar esta tarea se debe generar un modelo, el cual es una aproximación del futuro sistema de ingeniería civil. Ahora, este modelo debe ser alimentado con datos llamados parámetros de entrada para así poder obtener respuestas. Sin embargo, una complicación práctica es la incerteza en la determinación de estos parámetros de entrada, lo que inevitablemente acarrea incertidumbre a las respuestas.

Estas respuestas son importantes de calcular, ya que con sus valores se pueden verificar criterios de resistencia y serviciabilidad en los sistemas de ingeniería civil. Por lo tanto, es un problema el hecho de que estas respuestas sean inciertas, por lo que es conveniente tener una forma de cuantificar esta incertidumbre.

Una manera de llevar a cabo esta tarea ha sido el cálculo de las estadísticas de segundo orden asociadas a la respuesta de interés. Para ello, tradicionalmente se han calculado sus estimadores en base a simulaciones Monte Carlo, las cuales demandan gran tiempo de cálculo. Existen otras opciones más económicas computacionalmente, denominadas como métodos aproximados, los cuales poseen menos exactitud que el método Monte Carlo. Frente a este panorama, se ha probado con éxito combinar ambos métodos (Monte Carlo y un método aproximado) bajo la técnica control variates. Sin embargo, su uso se ha limitado solo al cálculo de la esperanza. Lo que se pretende con esta memoria es extender la aplicabilidad del método control variates al caso de la estimación de la varianza. Adicionalmente, la aplicación de esta técnica ha necesitado que el método aproximado usado pueda entregar de manera cerrada las estadísticas de la respuesta que genera. Lo que se busca es ampliar la aplicación de esta técnica al caso donde este método aproximado no puede entregar estas estadísticas de manera cerrada y, por lo tanto, estas deban ser estimadas. Además, los estimadores control variates presentes en la literatura han resultado ser sesgados, entendiendo el sesgo como una desviación del estimador respecto del valor que pretende estimar. El objetivo principal de esta memoria es generar un procedimiento que permita el cálculo de estimadores insesgados de las estadísticas de segundo orden usando modelos de elementos finitos estocásticos.

El procedimiento resultante de esta investigación disminuye los costos computacionales en comparación al método tradicional usado para el mismo fin, el cual se basaba en simulaciones Monte Carlo.

ABSTRACT

Civil engineering is an area that deals with the design of civil works. To perform this task, a model should be generated, which is an approximation of the future civil engineering system. Now, this model needs input parameters to generate responses. However, a great difficulty is the uncertainty in the determination of these input parameters, which inevitably brings uncertainty to the responses.

Calculating these responses is important because, with their values, it is possible to verify resistance and serviceability criteria in civil engineering systems. Therefore, it is a problem that these responses are uncertain, so it is convenient to have a way to quantify this uncertainty.

One way to carry out this task has been the calculation of the second-order statistics associated with the response of interest. To do this, its estimators have traditionally been calculated based on Monte Carlo simulations which require long calculation times. There are other options with lower computational costs, known as approximate methods, which have less accuracy than the Monte Carlo method. Within this context, it has been successfully tried to combine both methods (Monte Carlo and an approximate method) using the control variates technique. However, its use has been limited only to the calculation of the expected value. This thesis aims to extend the applicability of the control variates method to the variance estimation. Additionally, the application of this technique has required that the approximate method can give the statistics of the response it generates in a precise way. This thesis seeks to expand the application of this technique to the case where this approximate method can not give these statistics in a precise way and, therefore, these must be estimated. In addition, the control variates estimators in the literature have turned out to be biased, understanding the bias as a deviation of the estimator from the value it intends to estimate. The main objective of this thesis is to generate a procedure that allows the calculation of unbiased estimators of second-order statistics using stochastic finite element models.

The procedure developed in this research reduces computational costs compared to the traditional method used for the same purpose, which was based on Monte Carlo simulations.

GLOSARIO

Base: conjunto de vectores de dimensión n que, al combinarlos linealmente, pueden generar cualquier otro vector de dimensión n . Para ello, esta base debe estar compuesta de n vectores.

Base reducida: base que pretende representar cualquier vector de dimensión n , pero que cuenta con un número de vectores menor a n , por lo que sólo puede generar un vector aproximado.

Campo aleatorio: conjunto de variables aleatorias distribuidas en el espacio que se encuentran correlacionadas entre sí.

Combinación lineal de vectores: expresión compuesta por una suma de vectores, donde cada uno de estos vectores es multiplicado por una constante.

Control variates: técnica que permite construir un estimador a partir de otros estimadores, aprovechando la correlación existente entre estos para reducir la varianza del estimador construido.

Costo computacional equivalente: tiempo ocupado por el computador para completar una serie de cálculos, expresado en un número de simulaciones equivalentes.

Ensamblaje de la matriz de rigidez: proceso de incorporación de las matrices de rigideces locales de elementos a una matriz de rigidez global del sistema completo.

Error cuadrático medio: medida no negativa de la calidad de un estimador, donde valores menores indican mayor calidad.

Esperanza o valor esperado: intuitivamente, es el promedio de muchas realizaciones de una variable aleatoria.

Estadísticas de segundo orden: en términos simples, hace referencia a la esperanza y a la varianza.

Estimador insesgado: estimador cuyo sesgo es igual a cero.

Expansión Karhunen-Loève: forma de representar un proceso estocástico (en esta memoria el proceso estocástico es un campo aleatorio) mediante una combinación lineal de funciones

ortogonales con coeficientes aleatorios.

Factorización de la matriz de rigidez: descomposición de la matriz de rigidez en un producto de matrices. La factorización es usada para invertir matrices y, de esta manera, resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Función de densidad de probabilidad: función usada para jerarquizar el grado de ocurrencia de los valores que puede tomar una variable aleatoria.

Método de elementos finitos: método numérico ampliamente usado para resolver problemas en un espacio bi o tridimensional que involucran ecuaciones diferenciales parciales, obteniéndose soluciones aproximadas ante la imposibilidad de obtener soluciones exactas.

Método de elementos finitos estocásticos: extensión del método de elementos finitos, donde se considera incerteza ya sea en las condiciones iniciales, propiedades de los materiales o geometría del sistema.

Método Monte Carlo: método consistente en el muestreo aleatorio repetitivo con el fin de obtener múltiples respuestas. Es ampliamente usado en física, matemática e ingeniería dada su simplicidad. Entre sus usos, se encuentra la integración numérica y la caracterización de funciones de densidad de probabilidad.

Momentos estadísticos: medidas cuantitativas de una función de densidad de probabilidad. Mientras el momento de primer orden es igual a la esperanza de la variable aleatoria asociada, el momento central de segundo orden equivale a la varianza de la variable aleatoria.

Norma euclidiana de un vector: raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los componentes de un vector. Informalmente, hace referencia al ‘largo’ del vector.

Ortonormalización: proceso de transformación de un grupo de vectores en otro grupo donde cada vector es ortogonal a cualquier otro vector del grupo y, a la vez, su norma euclidiana es igual a uno. A su vez, dos vectores son ortogonales cuando el producto punto entre ellos es igual a cero.

Serie de Taylor: aproximación de una función mediante un polinomio cuyos coeficientes son las derivadas de la función evaluadas en un punto, y las variables del polinomio coinciden con las variables de la función.

Sesgo de un estimador: diferencia entre la esperanza del estimador de un parámetro y el valor real del parámetro.

Sistema lineal, elástico y estático: conjunto de elementos capaces de resistir un sistema de cargas. Sus materiales presentan deformaciones que guardan una relación lineal con los esfuerzos aplicados. Estos sistemas vuelven a su configuración previa a la aplicación de las cargas cuando estas dejan de actuar. Por último, este sistema resiste cargas estáticas (cargas que no cambian en el tiempo).

Técnica splitting: técnica que consiste en la separación de muestras de los parámetros de entrada en grupos. Su objetivo es la eliminación del sesgo presente en los estimadores construidos con la técnica control variates.

Variable aleatoria: variable cuyo valor depende de un fenómeno aleatorio.

Variable intermedia: variable originada a partir de otra, cuyo objetivo es mejorar la precisión del método usado. En este trabajo, la variable intermedia es usada en series de Taylor para mejorar la calidad de la aproximación. Este concepto ha sido ampliamente utilizado en optimización estructural.

Varianza: intuitivamente, es una medida de la dispersión de los datos que puede originar una variable aleatoria ante la repetición de experimentos aleatorios.

Vectores linealmente independientes: un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser expresado como una combinación lineal de los otros vectores del conjunto.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	V
ABSTRACT	VII
GLOSARIO	IX
CONTENIDO	XII
ÍNDICE DE FIGURAS	XVII
ÍNDICE DE TABLAS	XXIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Algunos conceptos de probabilidad	2
1.2.1. Momentos Estadísticos	4
1.3. El modelo	5
1.4. Parámetros de entrada	6
1.4.1. Campo aleatorio	6
1.4.2. Expansión Karhunen-Loève	9
1.4.3. Discretización del campo aleatorio	10
1.4.4. Campo aleatorio log-normal	11
1.5. Caracterización de la Incertidumbre en la Respuesta	14
1.5.1. Aspectos Generales	14
1.5.2. Métodos para la obtención de las Estadísticas de Segundo Orden de la Res- puesta - Estado del Arte	15
1.6. Objetivos generales	16
1.7. Objetivos específicos	17
1.8. Alcance del trabajo	17
2. PROPAGACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN SISTEMAS LINEALES ESTÁTI- COS, REVISIÓN DE LA LITERATURA	19
2.1. Expansión en series de Taylor	20

2.1.1.	Estadísticas de segundo orden	22
2.1.2.	Variable intermedia	22
2.1.2.1.	Variable intermedia tipo I	24
2.1.2.2.	Variable intermedia tipo II	32
2.2.	Método de base reducida	37
2.2.1.	Método de Gogu y Passieux	38
2.2.2.	Método de Noor y Correa	40
2.2.3.	Comparación entre métodos	40
3.	REDUCCIÓN DE LA VARIANZA EN LA ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTI-	
	CAS DE SEGUNDO ORDEN	43
3.1.	Método Monte Carlo	44
3.1.1.	Estimación de las estadísticas de segundo orden	44
3.1.2.	Error cuadrático medio de los estimadores	45
3.2.	Técnica control variates	47
3.2.1.	Estadísticas conocidas de la variable de control	48
3.2.1.1.	Esperanza	50
3.2.1.2.	Varianza	52
3.2.1.3.	Ejemplo con función analítica	54
3.2.2.	Estadísticas desconocidas de la variable de control	57
3.2.2.1.	Esperanza	60
3.2.2.2.	Varianza	62
3.2.2.3.	Ejemplo con función analítica	64
3.2.3.	Sesgo en los estimadores control variates	67
4.	ELIMINACIÓN DEL SESGO EN LA ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS	
	DE SEGUNDO ORDEN OBTENIDAS MEDIANTE LA TÉCNICA CONTROL	
	VARIATES USANDO UN ESQUEMA SPLITTING	71
4.1.	Técnica splitting	72
4.1.1.	Concepto	72
4.2.	Estadísticas de la variable de control conocidas	73
4.2.1.	Sesgo	75
4.2.2.	Error cuadrático medio	76
4.2.3.	Esperanza	79
4.2.4.	Varianza	80
4.2.5.	Ejemplo con función analítica	83
4.3.	Estadísticas de la variable de control desconocidas	87
4.3.1.	Sesgo	87
4.3.2.	Error cuadrático medio	88
4.3.3.	Esperanza	91
4.3.4.	Varianza	93

4.3.5. Ejemplo con función analítica	96
4.4. Elección del número de grupos de muestras de entrada	100
4.4.1. Estadísticas de la variable de control conocidas	100
4.4.2. Estadísticas de la variable de control desconocidas	105
5. APLICACIONES	111
5.1. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo	111
5.2. Flujo bajo una tablestaca	121
5.3. Losa sobre fundación Winkler	135
6. CONCLUSIONES	151
A. CÓDIGOS	153
BIBLIOGRAFÍA	157

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Funcionamiento de un modelo.	1
1.2. Ejemplo de malla de elementos finitos.	5
1.3. Representación del área transversal $A(x)$ de una viga como un campo aleatorio unidimensional. En rojo se muestra una realización de este campo.	7
1.4. Varias realizaciones de un campo aleatorio unidimensional.	7
1.5. Esquema de representación de la incertidumbre a partir de la probabilidad de excedencia \mathbb{P}_{exc}	14
1.6. Esquema de representación de la incertidumbre a partir de las estadísticas de segundo orden $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{V}[X]$	15
2.1. Aproximación de una función mediante polinomios lineales y cuadráticos. Se muestra solo una variable incierta para simplificar la figura.	21
2.2. Comparación cualitativa entre el uso de (a) Taylor lineal y (b) Taylor lineal con variable intermedia. Se muestra solo una variable incierta para simplificar las figuras.	23
2.3. Ejemplo de enrejado isostático de 3 barras.	24
2.4. Ejemplo de flujo a través de 3 capas de suelo.	29
2.5. Representación cualitativa de bases reducidas en \mathbb{R}^3 : (a) \mathcal{B}_1 y (b) \mathcal{B}_2 , junto con las proyecciones del vector u sobre dichas bases reducidas.	37
3.1. Representación esquemática de la varianza $\mathbb{V}\left[\widehat{H}^{(CV-C)}\right]$ en función del parámetro de control ρ_C	50
3.2. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	55
3.3. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_1^{(CV-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	55
3.4. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	57
3.5. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	57
3.6. Representación esquemática de la varianza $\mathbb{V}\left[\widehat{H}^{(CV-D)}\right]$ en función del parámetro de control ρ_D	59

3.7. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	65
3.8. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_1^{(CV-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	65
3.9. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	67
3.10. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_2^{(CV-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	67
4.1. Esquema de separación (splitting scheme). Separación de n muestras en k grupos. En este ejemplo, $n = 12$ y $k = 3$	72
4.2. Asignación del parámetro de control óptimo usando el esquema de separación de muestras (splitting scheme). En este ejemplo, $n = 12$ y $k = 3$	74
4.3. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-C) y la técnica splitting (SP-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	84
4.4. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_1^{(SP-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	85
4.5. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-C) y la técnica splitting (SP-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	86
4.6. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	86
4.7. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-D) y la técnica splitting (SP-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	98
4.8. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_1^{(SP-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	98
4.9. Ejemplo analítico: Histogramas de $\widehat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-D) y la técnica splitting (SP-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	99
4.10. Ejemplo analítico: Estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	100
4.11. Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_1^{(SP-C)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	105
4.12. Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-C)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	105
4.13. Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_1^{(SP-D)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	110

4.14. Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-D)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2	110
5.1. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Esquema del problema.	111
5.2. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Error cuadrático medio de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza vs. costo numérico n_E . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1.	116
5.3. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Error cuadrático medio de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza vs. costo numérico n_E . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos estimados.	116
5.4. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR1 y parámetros de control iguales a 1.	117
5.5. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR2 y parámetros de control iguales a 1.	118
5.6. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR1 y parámetros de control óptimos.	118
5.7. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR2 y parámetros de control óptimos.	119
5.8. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1.	119
5.9. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos.	120
5.10. Flujo bajo una tablestaca. Esquema del problema.	121
5.11. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	127
5.12. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	127
5.13. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	128

5.14. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	128
5.15. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	129
5.16. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	129
5.17. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	130
5.18. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	130
5.19. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	131
5.20. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	131
5.21. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	132
5.22. Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	132
5.23. Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	133

5.24. Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10 [m]$	133
5.25. Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	134
5.26. Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$	134
5.27. Losa sobre fundación Winkler. Esquema del problema.	135
5.28. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	141
5.29. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	142
5.30. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	142
5.31. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	143
5.32. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	143
5.33. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	144
5.34. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	144

5.35. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	145
5.36. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	145
5.37. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	146
5.38. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	146
5.39. Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	147
5.40. Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	147
5.41. Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$	148
5.42. Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	148
5.43. Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$	149

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Comparación de métodos para la construcción de una base reducida.	41
4.1. Número de muestras por grupo n^* según el número de grupos k	104
4.2. Números de muestras por grupo n^* y m^* según el número de grupos k	110
5.1. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Variables aleatorias del modelo.	112
5.2. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1.	114
5.3. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos estimados.	115
5.4. Flujo bajo una tablestaca. Propiedades del campo aleatorio.	121
5.5. Flujo bajo una tablestaca. Estadísticas de la respuesta aproximada.	122
5.6. Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 10 [m]$	123
5.7. Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 20 [m]$	124
5.8. Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 10 [m]$	125
5.9. Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 20 [m]$	126
5.10. Losa sobre una fundación Winkler. Propiedades del campo aleatorio.	135
5.11. Losa sobre una fundación Winkler. Estadísticas de la respuesta aproximada.	136
5.12. Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 2 [m]$	137

5.13. Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 5$ [m].	138
5.14. Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 2$ [m].	139
5.15. Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 5$ [m].	140
A.1. Códigos usados para la obtención de la varianza y covarianza de los estimadores de las estadísticas de segundo orden usados en esta memoria.	154
A.2. Códigos usados para la obtención de los momentos centrales bivariados.	155

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

Al ser humano le interesa estudiar los fenómenos que están presentes en la realidad. Uno de los problemas con los que se encuentra para llevar a cabo esta tarea es la complejidad de esta realidad. Esta complejidad se puede ver, por ejemplo, al calcular las precipitaciones que caerán en un área de interés, en el cálculo de los esfuerzos mecánicos que experimentarán las alas de un avión, o los desplazamientos de la superestructura de un puente a lo largo de su vida útil. El estudio de los problemas mencionados es de gran utilidad, ya que al entender el problema se puede predecir el comportamiento del sistema involucrado y, en algunos casos, tomar decisiones en un proceso de diseño para generar resultados deseables.

Dado lo anterior, es que se usan *modelos* en diferentes campos de la ciencia, los cuales pretenden explicar el sistema en cuestión, simplificando algunos de sus aspectos para entenderlo. En esta memoria se trata con modelos matemáticos, los que traducen la realidad física en términos matemáticos. Estos modelos reciben unos parámetros de entrada (*input*) y devuelven respuestas (*output*) las cuales son útiles para entender el comportamiento del sistema (figura 1.1).

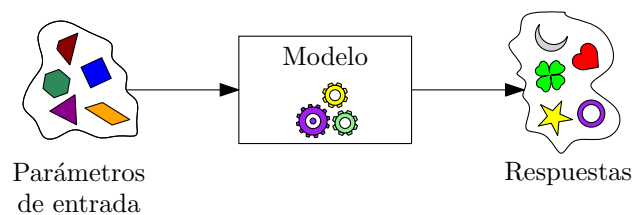


Figura 1.1: Funcionamiento de un modelo.

Ahora, otra complejidad con la que se encuentra el ser humano es la dificultad en la determi-

nación de los parámetros de entrada. Por ejemplo, si se quiere calcular el desplazamiento de techo en un edificio de hormigón armado, es necesario conocer el módulo de Young de este material. El problema es que, si bien existen estimaciones de este valor que se pueden obtener de la literatura o de pruebas de laboratorio, no dejan de ser solo estimaciones; no es conocido el valor que toma en la realidad, tanto por factores climáticos y humanos, entre otros. En otras palabras, no se tiene certeza de cuál es el valor real de este parámetro, por lo que existen muchos valores candidatos posibles, unos más probables de ocurrir que otros. Cada uno de estos candidatos genera una respuesta posible del sistema estudiado, generando de esta manera un grupo de respuestas que, en este caso, corresponderían a distintos desplazamientos de techo, unos más probables de ocurrir que otros.

Esta incertidumbre presente en los problemas puede ser tomada en cuenta y trabajada con la *teoría de la probabilidad*. Para ello, se hace necesario definir algunos conceptos que van a ser usados a lo largo de este trabajo. Más adelante en este capítulo, se va a profundizar en las características del modelo, los parámetros de entrada y la respuesta. Se realiza una revisión del estado del arte para identificar los problemas de los métodos existentes y, en función de ellos, identificar los objetivos que persigue esta memoria. Para finalizar este capítulo, se establece el alcance que tiene este trabajo.

1.2. Algunos conceptos de probabilidad

Una *variable aleatoria* X es, intuitivamente, un número generado por un fenómeno aleatorio. Ahora, puede que este fenómeno sea más susceptible a generar ciertos números, mientras que otros números se generan muy rara vez. Esto sugiere la necesidad de producir una medida de probabilidad la cual *jerarquice* el grado de ocurrencia de los resultados del fenómeno aleatorio. La *función de distribución acumulada* (cdf) permite cumplir este objetivo. La *función de distribución de probabilidad* o *función de distribución acumulada* de X entrega la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x . Esto se expresa matemáticamente como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (1.1)$$

donde $F_X(x)$ simboliza la *función de distribución acumulada* de X evaluada en x y $\mathbb{P}(A)$ representa la probabilidad de que ocurra el evento A .

Ya que esta función entrega una probabilidad, su recorrido comprende el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, la función $F_X(x)$ debe cumplir con las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (1.2)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad (1.3)$$

Derivando la *función de distribución acumulada*, se obtiene (cuando dicha derivada existe) la *función de densidad de probabilidad* o *función de densidad* (pdf). Entonces,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (1.4)$$

donde $f_X(x)$ simboliza la *función de densidad* de la variable X evaluada en x .

Combinando (1.2), (1.3) y (1.4) se obtiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Esta propiedad indica que el área bajo la curva de una *función de densidad* es igual a 1.

Existen diferentes funciones de distribución de variable aleatoria continua, cada una con sus parámetros para definir una curva de densidad de probabilidad específica. Las diferencias entre estas funciones son las diferentes *jerarquizaciones* del grado de ocurrencia de los resultados; dependiendo de la naturaleza del fenómeno aleatorio, este produce muestras con ciertas características (grado de cercanía entre las muestras, grado de asimetría respecto a un valor medio, entre otras), las cuales pueden ser consideradas apropiadamente si se elige una función de densidad adecuada.

A continuación, se presentan las *funciones de densidad de probabilidad* ocupadas en esta memoria.

■ Uniforme

Si la variable X sigue una distribución *uniforme* tal que $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, entonces su *función de densidad de probabilidad* es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde a y b son los parámetros de la distribución.

■ Normal o Gaussiano

Si la variable X sigue una distribución *normal* tal que $X \sim \mathcal{N}(\mu_N, \sigma_N)$, entonces su *función de densidad de probabilidad* es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right)^2\right)$$

donde μ_N es conocida como la *media* o *valor esperado* de la distribución y σ_N es la *desviación estándar* de la distribución.

■ Log-normal

Si la variable X sigue una distribución *log-normal* tal que $X \sim \mathcal{LN}(m_{LN}, s_{LN})$, entonces su *función de densidad de probabilidad* es

$$f(x) = \frac{1}{x \sigma_{LN} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x - m_{LN})^2}{2\sigma_{LN}^2}\right), \quad x > 0$$

donde m_{LN} y s_{LN} son la media y desviación estándar de la variable X , mientras que μ_{LN} y σ_{LN} son la media y desviación estándar del logaritmo natural de X .

Bucher (2009) muestra las relaciones entre los dos grupos de parámetros:

$$\mu_{LN} = \ln \left(\frac{m_{LN}^2}{\sqrt{s_{LN}^2 + m_{LN}^2}} \right) \quad (1.5)$$

y

$$\sigma_{LN} = \sqrt{\ln \left(\frac{s_{LN}^2}{m_{LN}^2} + 1 \right)} \quad (1.6)$$

1.2.1. Momentos Estadísticos

Otro concepto de la *teoría de la probabilidad* usado en esta memoria son los *momentos estadísticos*, los cuales son una medida cuantitativa de la forma de una *función de densidad de probabilidad*. Los *momentos estadísticos* se calculan como

$$\mu_d = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^d f(x) dx$$

donde μ_d es el *momento estadístico* de orden d , $f(x)$ es la *función de densidad de probabilidad* de la variable aleatoria continua X , x es la *realización* de la variable X y c es una constante. Cuando $c = 0$, se habla de *momentos estadísticos no centrales*. Para ellos se utiliza la notación μ'_d . Así,

$$\mu'_d = \int_{-\infty}^{\infty} x^d f(x) dx$$

Por otra parte, cuando $c = \mu'_1$, se habla de *momentos estadísticos centrales*. De aquí en adelante, se usa μ_d para referirse a momentos centrales de orden d .

En esta tesis se pone especial atención a dos momentos estadísticos; estos son μ'_1 y μ_2 llamados en la literatura como la *esperanza* (o *valor esperado*) y la *varianza* de la variable aleatoria X , respectivamente. La esperanza $\mathbb{E}[X]$ de la variable aleatoria X está dada por la ecuación

$$\mathbb{E}[X] = \mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Por otro lado, la varianza $\mathbb{V}[X]$ de la variable aleatoria X se define con la expresión

$$\mathbb{V}[X] = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu'_1)^2] = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu'_1)^2 f(x) dx$$

donde σ_X es la *desviación estándar* de la variable X . En su conjunto, ambos momentos se conocen como las *estadísticas de segundo orden*.

Por último, es ampliamente usado el concepto de *coeficiente de variación* asociado a la variable aleatoria X , el cual es una medida estandarizada de la dispersión de la distribución de probabilidad de X . Matemáticamente se define con la expresión

$$CoV_X = \frac{\sigma_X}{\mathbb{E}[X]}$$

siempre y cuando $\mathbb{E}[X] \neq 0$.

Bucher (2009) desarrolla estos conceptos probabilísticos con una mayor profundidad.

1.3. El modelo

Los modelos matemáticos que pretenden simular el comportamiento de los sistemas de ingeniería tratados en esta memoria son originados a partir del *método de elementos finitos*, ampliamente usado en ingeniería. Bathe (1996) y Hughes (2000) explican los fundamentos de esta técnica. El método de elementos finitos discretiza espacialmente el sistema en estudio, usando una malla compuesta de elementos finitos y nodos (figura 1.2). Este método es usado para resolver ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son difíciles de solucionar de manera exacta en la mayoría de las aplicaciones ingenieriles de interés. El método de elementos finitos genera una solución aproximada, transformando estas ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones algebraicas cuyo tamaño crece con una discretización más fina de la malla. Este método es versátil, ya que puede trabajar con geometrías complejas y propiedades de los materiales no homogéneas en el sistema. Esta memoria aplica el *método de elementos finitos estocásticos*, en donde las propiedades de los materiales pueden no ser definidas por un valor único, sino que pueden ser definidas por una función de densidad de probabilidad. Matthies et al. (1997) y Stefanou (2009) explican este método con mayor profundidad.

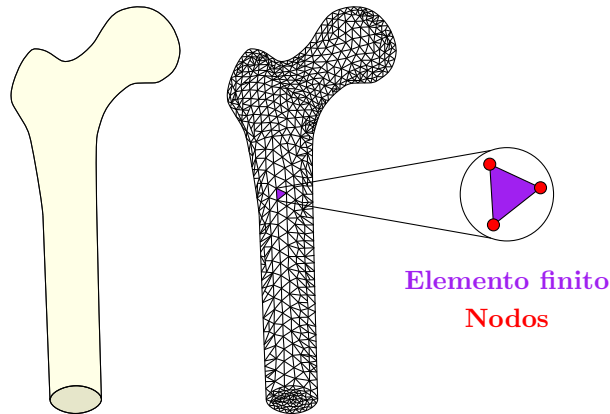


Figura 1.2: Ejemplo de malla de elementos finitos.

Con el fin de introducir las incertezas en el modelo, se definen los vectores \mathbf{v} y $\boldsymbol{\xi}$ a continuación. Sea \mathbf{v} un vector de variables aleatorias de dimensión n_v que tiene asociado una función de densidad de probabilidad $f_{\mathcal{V}}(\mathbf{v})$. Este vector recopila las incertezas existentes en las cargas. Por otra parte, sea $\boldsymbol{\xi}$ un vector de variables aleatorias de dimensión n_{ξ} que tiene asociado una función de densidad de probabilidad $f_{\Xi}(\boldsymbol{\xi})$. Este vector recopila las incertezas existentes en las propiedades del sistema.

Así, la condición de equilibrio estático obtenida luego de aplicar el método de elementos finitos estocásticos está dada por la ecuación

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (1.7)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de dimensión $N_d \times N_d$, \mathbf{u} es el vector desplazamiento de dimensión N_d , \mathbf{f} es el vector de cargas de dimensión N_d y N_d es el número de grados de libertad del sistema.

La matriz de rigidez \mathbf{K} contiene la información asociada a la geometría y los materiales del sistema de ingeniería civil. Ahora, en ambas propiedades puede existir incertidumbre, la cual es incluida en el modelo mediante el vector $\boldsymbol{\xi}$. Por ello es que en la ecuación (1.7) la matriz \mathbf{K} depende del vector $\boldsymbol{\xi}$. Por la misma razón, el vector de cargas \mathbf{f} depende del vector \mathbf{v} , el cual refleja la incertidumbre en las cargas que afectarán al sistema de ingeniería civil en su vida útil. Por lo tanto, como existe incerteza en \mathbf{K} y \mathbf{f} (*input*), existe incerteza en el vector de desplazamiento \mathbf{u} (*output*), la cual se manifiesta en la dependencia de \mathbf{u} a los vectores $\boldsymbol{\xi}$ y \mathbf{v} .

Se debe notar que en la ecuación (1.7), la dimensión de los vectores y matrices involucradas puede ser muy grande si el sistema estudiado es de gran dimensión y/o la malla usada es muy fina. Esto supone una dificultad, ya que mientras mayor es la dimensión del problema, mayor será el *costo computacional* asociado, dado el proceso de ensamblaje (proceso de incorporación de las matrices de rigideces locales de elementos a una matriz de rigidez global del sistema completo) y factorización (descomposición de la matriz de rigidez en un producto de matrices) de la matriz \mathbf{K} , necesarios para la resolución del sistema de ecuaciones, entendiéndose por resolución la obtención del vector de desplazamiento \mathbf{u} .

1.4. Parámetros de entrada

Los datos que se ingresan al modelo son, por naturaleza, *inciertos*. Para esta memoria, se asume que esta incerteza es causada por fenómenos aleatorios. De esta manera, es posible trabajar con la *teoría de la probabilidad*. Así, estos parámetros de entrada inciertos pueden ser tratados como variables aleatorias o con modelos más sofisticados, como campos aleatorios, los que se describen a continuación.

1.4.1. Campo aleatorio

Las incertezas de los parámetros del sistema pueden tener variaciones espaciales. En estos casos, es conveniente modelar estas incertezas con *campos aleatorios*. Este término es explicado por Bucher (2009), quien plantea el ejemplo ilustrado en la figura 1.3, consistente en la fabricación industrial de vigas. En esta línea de producción, es imposible que todas las vigas sean totalmente idénticas. En efecto, presentan variaciones, por ejemplo en su área $A(x)$ a una distancia x del apoyo izquierdo. Se considera que la causa de estas variaciones es un *fenómeno aleatorio*. En consecuencia, la propiedad $A(x)$ es una *variable aleatoria*. Si se realizan estas mediciones para diferentes vigas, en la misma posición x , se obtendrán distintos valores del área buscada (figura 1.4). Si ahora se mide esta área, pero ahora a una distancia y del apoyo izquierdo, se obtiene otra área $A(y)$ la cual, como en el caso anterior, sufre variaciones aleatorias entre una viga y otra.

Las áreas $A(x)$ y $A(y)$ para $x \neq y$ serán, muy probablemente, diferentes entre sí, pero esta diferencia varía aleatoriamente entre las diferentes vigas (figura 1.4). Por otra parte, si las posiciones de medición x e y son relativamente cercanas, las áreas asociadas no pueden ser tan diferentes por razones físicas (por ejemplo, tomando en cuenta que la línea de producción no debiese sufrir cambios

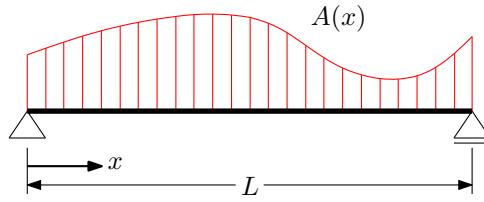


Figura 1.3: Representación del área transversal $A(x)$ de una viga como un campo aleatorio unidimensional. En rojo se muestra una realización de este campo.

instantáneos). Es decir, existe una *correlación espacial* entre las variables aleatorias $A(x)$ y $A(y)$, la cual (habitualmente) es más fuerte mientras menor sea la diferencia entre x e y .

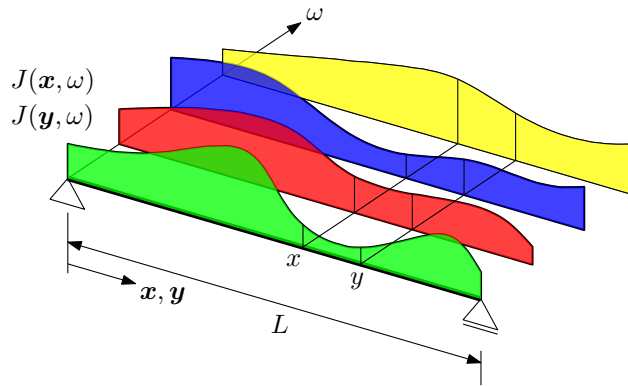


Figura 1.4: Varias realizaciones de un campo aleatorio unidimensional.

Así, el comportamiento en el espacio de una variable aleatoria (en este caso, el área transversal) es la idea intuitiva detrás del concepto *campo aleatorio*.

Sea $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n_x}]^T$ el vector posición, siendo n_x el número de dimensiones físicas involucradas en el problema. Además, se define ω como el resultado de un fenómeno aleatorio, el cual pertenece al conjunto Ω , denominado *espacio muestral* (conjunto que contempla todos los resultados posibles del fenómeno aleatorio). Así, un *campo aleatorio* $J(\mathbf{x}, \omega)$ es una función de dos variables que asigna un número real a cada elemento de su dominio. Un campo aleatorio se puede interpretar como una colección de variables aleatorias, donde cada punto en el espacio tiene asociado una variable aleatoria. A modo de simplificación, se omite el término ω , por lo que el campo $J(\mathbf{x}, \omega)$ se simboliza simplemente como $J(\mathbf{x})$.

A su vez, estas variables aleatorias en el espacio pueden tener distintos momentos estadísticos entre sí. Por ejemplo, el *valor medio* del campo aleatorio J en la posición \mathbf{x} se representa por $\bar{J}(\mathbf{x})$ y se define con la ecuación

$$\bar{J}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[J(\mathbf{x})]$$

Como cada punto tiene sus propios momentos estadísticos, este valor medio puede ser distinto para cada posición \mathbf{x} .

La *correlación espacial* existente entre la variable aleatoria en la posición \mathbf{x} y la variable aleatoria

en la posición \mathbf{y} de la figura 1.4 se puede expresar matemáticamente con la *función de autocovarianza* $C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, dada por la ecuación

$$C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{E} [\{J(\mathbf{x}) - \bar{J}(\mathbf{x})\} \{J(\mathbf{y}) - \bar{J}(\mathbf{y})\}]$$

Los campos aleatorios pueden tener ciertas propiedades. Específicamente, los campos usados en esta memoria son débilmente homogéneos e isotrópicos. Se dice que un campo aleatorio J es *débilmente homogéneo* si satisface las siguientes dos condiciones:

- Todas las variables aleatorias en el espacio \mathcal{D} poseen el mismo valor medio, donde \mathcal{D} es el espacio en el cual el campo aleatorio J está definido. Esta condición se define con la expresión

$$\bar{J}(\mathbf{x}) = \text{constante} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

- La función de autocovarianza C_{JJ} no depende de los puntos específicos, sino del vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ que une ambos puntos. Esta condición se define con la expresión

$$C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = C_{JJ}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$$

Además, se dice que el campo aleatorio J es *isotrópico* si su función de autocovarianza depende únicamente de la distancia entre los puntos de medición. Esta condición se define con la expresión

$$C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = C_{JJ}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$$

donde $\|\cdot\|$ denota módulo o norma euclidiana de un vector.

A partir de la función de autocovarianza, es posible definir el concepto de *largo de correlación* L_c para el caso de campos aleatorios isotrópicos, el cual se expresa matemáticamente en la ecuación

$$L_c = \frac{\int_0^{\infty} r |C_{JJ}(r)| dr}{\int_0^{\infty} |C_{JJ}(r)| dr}$$

donde $|\cdot|$ denota valor absoluto y r es la distancia entre los puntos de medición. El largo de correlación de un campo aleatorio es una medida de qué tan correlacionadas están las variables aleatorias en el espacio. Así, cuando L_c tiende a infinito, se habla de un campo completamente correlacionado lo que, en la práctica, significa que este campo es descrito solo por una variable aleatoria. En el otro extremo, cuando L_c tiende a cero, se tiene un campo aleatorio sin ninguna correlación espacial entre las variables.

Una manera de definir la función de autocovarianza es mediante una función exponencial. En esta memoria (recordando que solo se estudian campos aleatorios débilmente estacionarios y homogéneos), se usará la forma mostrada a continuación:

$$C_{JJ}(r) = \sigma_{JJ}^2 \exp\left(- (r/L_c)^2\right) \quad (1.8)$$

donde σ_{JJ} es la desviación estándar del campo aleatorio J y $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Se debe notar que esta función de autocovarianza asume que todas las variables aleatorias en el espacio poseen la misma desviación estándar σ_{JJ} . Es posible ver que esta función es máxima cuando $r = 0$, tomando el valor de la varianza σ_{JJ}^2 . Por otra parte, cuando la distancia r entre los puntos de medición tiende a infinito, la función de autocovarianza tiende a 0.

1.4.2. Expansión Karhunen-Loève

Para cálculos computacionales, es útil expresar un campo aleatorio *continuo* en términos de variables aleatorias *discretas*. Loève (1963) propone descomponer este campo mediante una serie. Esta se basa en el resultado de Mercer (1909), quien prueba que la función de autocovarianza C_{JJ} puede expandirse como una serie de productos de autofunciones, es decir,

$$C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \iota_i(\mathbf{x}) \iota_i(\mathbf{y}) \quad (1.9)$$

donde λ_i y ι_i son los autovalores y autofunciones asociados al operador lineal $T_{C_{JJ}}$, respectivamente. Este operador viene dado por la ecuación

$$[T_{C_{JJ}}f](x) = \int_{\mathcal{D}} C_{JJ}(x, y) f(y) dy, \text{ para todo } x, y \in \mathcal{D}$$

donde f es una función cualquiera.

Los autovalores y autofunciones presentes en (1.9) son las soluciones del problema

$$\int_{\mathcal{D}} C_{JJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \iota_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_i \iota_i(\mathbf{y})$$

Es importante notar que estas autofunciones forman una base ortonormal de \mathcal{D} , por lo que cumplen con la propiedad

$$\int_{\mathcal{D}} \iota_i(\mathbf{x}) \iota_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Así, Loève (1963) propone la siguiente alternativa para representar a un campo aleatorio $J(\mathbf{x})$:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \iota_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \quad (1.10)$$

donde c_i son variables *aleatorias* no correlacionadas y ι_i son las autofunciones definidas previamente, las cuales son *deterministas* y continuas en el dominio del campo aleatorio.

Los coeficientes c_i se definen como las proyecciones de $J(\mathbf{x})$ en las respectivas autofunciones ι_i :

$$c_i = \int_{\mathcal{D}} J(\mathbf{x}) \iota_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Con esta definición, es posible probar que los coeficientes c_i no están correlacionados entre sí (Loève, 1963). Además, su varianza es igual a su autovalor asociado. Así,

$$\text{Cov}[c_i, c_j] = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i, & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.11)$$

Para probar (1.9), se calcula la covarianza entre $J(\mathbf{x})$ y $J(\mathbf{y})$, y se usa la definición de la

expresión (1.10). De esta forma,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[J(\mathbf{x}), J(\mathbf{y})] &= \mathbb{E}[J(\mathbf{x})J(\mathbf{y})] - \mathbb{E}[J(\mathbf{x})]\mathbb{E}[J(\mathbf{y})] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j \iota_i(\mathbf{x})\iota_j(\mathbf{y})\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}c_i \iota_i(\mathbf{x})\right]\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty}c_j \iota_j(\mathbf{y})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\iota_i(\mathbf{x})\iota_j(\mathbf{y})\mathbb{E}[c_i c_j] - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\iota_i(\mathbf{x})\iota_j(\mathbf{y})\mathbb{E}[c_i]\mathbb{E}[c_j] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\iota_i(\mathbf{x})\iota_j(\mathbf{y})(\mathbb{E}[c_i c_j] - \mathbb{E}[c_i]\mathbb{E}[c_j]) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\iota_i(\mathbf{x})\iota_j(\mathbf{y})\text{Cov}[c_i, c_j]
\end{aligned}$$

Haciendo uso de (1.11) se obtiene:

$$\text{Cov}[J(\mathbf{x}), J(\mathbf{y})] = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \iota_i(\mathbf{x})\iota_i(\mathbf{y})$$

De esta manera, se comprueba que la covarianza de los campos aleatorios evaluados en dos puntos, cuando son expresados mediante una expansión Karhunen-Loève, es equivalente a la expresión (1.9) obtenida por Mercer (1909).

En la práctica, para construir esta expansión se toma un número finito de términos. Más detalles de cómo se lleva a cabo este truncamiento se discuten en las siguientes secciones.

1.4.3. Discretización del campo aleatorio

El modelo explicado en la sección 1.3 se basa en una discretización del sistema de ingeniería civil con una malla de elementos finitos. Entonces, cuando se quiere usar un campo aleatorio en este sistema discretizado, se hace necesario reemplazar la función campo aleatorio J por un vector, donde cada una de sus entradas está asociada a un elemento finito. En otras palabras, se realiza una *discretización del campo aleatorio*.

Sudret y Der Kiureghian (2000) y Stefanou (2009) establecen que el valor del campo aleatorio en un elemento finito puede ser representado de diferentes formas, entre las que se encuentra el promedio espacial de la propiedad sobre el elemento y el valor que toma la propiedad en el centroide del elemento. Der Kiureghian y Ke (1988) analizan ambas técnicas, señalando las ventajas de cada una. En esta memoria se opta por la segunda opción, denominada en la literatura como el *método del punto medio*, el cual se define matemáticamente con la ecuación

$$\widehat{J}_p = J(\mathbf{x}_c^p), \quad p = 1, \dots, N_e$$

donde \widehat{J}_p es el valor del campo aleatorio en el elemento p , \mathbf{x}_c^p es la posición del centroide del elemento p y N_e es el número de elementos finitos.

Al discretizar el campo aleatorio con este método, se debe resaltar la importancia de la elección del tamaño de la malla; mientras más fina es la malla, más pequeños los elementos finitos y, por

tanto, más adecuado es aproximar la propiedad de un elemento finito a la propiedad evaluada solo en su centroide.

1.4.4. Campo aleatorio log-normal

Uno de los tipos de campo aleatorio más usado es el Gaussiano o normal. Sin embargo, este tipo de campo no es adecuado para modelar propiedades que siempre toman valores positivos, ya que para grandes coeficientes de variación, las realizaciones (muestras) de este campo podrían tomar valores negativos. Por ello, se usa un campo *log-normal*, cuyas realizaciones siempre toman valores positivos. Ghanem (1999) desarrolla y analiza estas representaciones de procesos estocásticos log-normales.

Sea J un campo log-normal, el cual se obtiene de la transformación de un campo Gaussiano G . Esta transformación se expresa matemáticamente con la ecuación

$$J(\mathbf{x}) = \exp(G(\mathbf{x})) \quad (1.12)$$

El campo Gaussiano G se define completamente con dos parámetros: el valor esperado $\boldsymbol{\mu}^G$ y la covarianza \mathbf{C}^G . Como se explicó anteriormente, este campo se discretiza, por lo que interesa conocer sus versiones discretas: el vector valor esperado $\hat{\boldsymbol{\mu}}^G$ y la matriz de covarianza $\hat{\mathbf{C}}^G$. Estos parámetros de la distribución Gaussiana asociada se obtienen a partir de los parámetros discretos de la distribución log-normal $\hat{\boldsymbol{\mu}}^J$ y $\hat{\mathbf{C}}^J$. Obtener los parámetros discretos del campo Gaussiano es importante, ya que estos se utilizan para construir la expansión Karhunen-Loève asociada a dicho campo, la cual luego se utiliza para construir la versión discreta del campo log-normal.

Haciendo uso del método del punto medio, el elemento $\hat{\mu}_p^J$ del vector $\hat{\boldsymbol{\mu}}^J$ es el valor esperado del campo log-normal evaluado en el centroide del elemento finito p . Además, el elemento \hat{C}_{pq}^J de la matriz $\hat{\mathbf{C}}^J$ es la covarianza entre las variables aleatorias ubicadas en los centroides de los elementos p y q . Esta covarianza se obtiene utilizando la ecuación (1.8), donde r es la distancia entre los centroides de los elementos.

Los parámetros discretos de la distribución Gaussiana asociada se calculan al generalizar las ecuaciones (1.5) y (1.6) al caso multivariado (Ghanem, 1999):

$$\hat{\mu}_p^G = \ln(\hat{\mu}_p^J) - \frac{1}{2}\hat{C}_{pp}^G, \quad p = 1, \dots, N_e$$

y

$$\hat{C}_{pq}^G = \ln\left(\frac{\hat{C}_{pq}^J}{\hat{\mu}_p^J \hat{\mu}_q^J} + 1\right), \quad p, q = 1, \dots, N_e$$

En las expresiones anteriores, $\hat{\mu}_p^G$ es el valor esperado de la variable aleatoria definida por el campo Gaussiano G y ubicada en el elemento p , \hat{C}_{pq}^G es la covarianza entre las variables aleatorias definidas por el campo Gaussiano G y ubicadas en los elementos p y q , y N_e es el número de elementos finitos.

Para construir la expansión Karhunen-Loève asociada al campo Gaussiano \hat{G}_p evaluado en el elemento p , se definen los coeficientes c_i de (1.10) con la expresión

$$c_i = \sqrt{\lambda_i^G} \xi_i, \quad i = 1, \dots, N_e$$

donde ξ_i son variables Gaussianas estándar independientes y λ_i^G es el i -ésimo valor propio de la matriz $\widehat{\mathbf{C}}^G$, el cual resuelve el problema de valores y vectores propios

$$\widehat{\mathbf{C}}^G \boldsymbol{\iota}_i^G = \lambda_i^G \boldsymbol{\iota}_i^G, \quad i = 1, \dots, N_e$$

En la expresión precedente, $\boldsymbol{\iota}_i^G = \{[\iota_{1i}^G, \dots, \iota_{N_e i}^G]^T \in \mathbb{R}^{N_e}\}$ es el i -ésimo vector propio de la matriz $\widehat{\mathbf{C}}^G$. Su componente ι_{pi}^G está asociado al p -ésimo elemento finito.

Se puede demostrar que

$$\text{Cov}[c_i, c_j] = \text{Cov}\left[\sqrt{\lambda_i^G} \xi_i, \sqrt{\lambda_j^G} \xi_j\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i^G, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Esta expresión cumple con el criterio establecido en (1.11). Por otra parte, $\iota_i(\mathbf{x})$ de (1.10) se reemplaza por su versión discreta $\boldsymbol{\iota}_i^G$.

Usando los resultados obtenidos en la ecuación (1.10), el valor del campo aleatorio Gaussiano en el elemento finito p es

$$\widehat{G}_p = \widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^{N_e} \zeta_{pi}^G \xi_i, \quad p = 1, \dots, N_e, \quad i = 1, \dots, N_e \quad (1.13)$$

donde la constante ζ_{pi}^G viene dada por la ecuación

$$\zeta_{pi}^G = \sqrt{\lambda_i^G} \iota_{pi}^G, \quad p = 1, \dots, N_e, \quad i = 1, \dots, N_e$$

Hay que señalar que, a diferencia de la expresión (1.10), la ecuación (1.13) contiene una suma *finita*, limitada por el número de elementos finitos N_e . Además, se encuentra el término $\widehat{\mu}_p^G$, el cual está fuera de la sumatoria. Este término es incluido para que el campo aleatorio se centre alrededor de su valor esperado, que en el caso discreto viene representado por el vector $\widehat{\boldsymbol{\mu}}^G$. Así,

$$\mathbb{E}[\widehat{G}_p] = \widehat{\mu}_p^G, \quad p = 1, \dots, N_e$$

Por otro lado, se calcula la varianza de \widehat{G}_p :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\widehat{G}_p] &= \mathbb{V}\left[\widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^{N_e} \zeta_{pi}^G \xi_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \mathbb{V}[\zeta_{pi}^G \xi_i] \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} (\zeta_{pi}^G)^2 \mathbb{V}[\xi_i] \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} (\zeta_{pi}^G)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{V}[\widehat{G}_p] = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i^G (\iota_{pi}^G)^2$$

Es común hablar de la variabilidad de un campo aleatorio, la cual se toma como la suma de las varianzas de todas las variables aleatorias asociadas a cada elemento finito. Para el caso del campo Gaussiano, su variabilidad es

$$\sum_{p=1}^{N_e} \mathbb{V} [\widehat{G}_p] = \sum_{p=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i^G (\iota_{pi}^G)^2 = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i^G \sum_{p=1}^{N_e} (\iota_{pi}^G)^2$$

Se debe recordar que los vectores propios ι_i^G están normalizados. Entonces,

$$\sum_{p=1}^{N_e} (\iota_{pi}^G)^2 = 1, \quad i = 1, \dots, N_e$$

y en consecuencia,

$$\sum_{p=1}^{N_e} \mathbb{V} [\widehat{G}_p] = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i^G \quad (1.14)$$

Por consiguiente, la variabilidad del campo Gaussiano es considerada como la suma de los valores propios.

Con el campo Gaussiano discreto determinado, es posible definir el campo log-normal discreto. De acuerdo a (1.12), el campo log-normal evaluado en el p -ésimo elemento \widehat{J}_p se define con la expresión

$$\widehat{J}_p = \exp(\widehat{G}_p),$$

es decir,

$$\widehat{J}_p = \exp\left(\widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^{N_e} \zeta_{pi}^G \xi_i\right), \quad p = 1, \dots, N_e$$

Es común usar una serie Karhunen-Loève *truncada* en la que, en vez de ocupar los N_e valores y vectores propios de la matriz $\widehat{\mathbf{C}}^G$, solo se ocupan M , donde $M \leq N_e$. Para ello, los valores propios λ_i^G se deben ordenar de manera descendente, de tal forma que $\lambda_1^G \geq \lambda_2^G \geq \dots \geq \lambda_{N_e}^G$, para luego seleccionar los primeros M términos, los cuales son los que más aportan a la variabilidad del campo aleatorio, según el resultado (1.14). De esta manera, el campo aleatorio evaluado en el p -ésimo elemento se calcula con la expresión

$$\widehat{J}_p = \exp\left(\widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^M \zeta_{pi}^G \xi_i\right), \quad p = 1, \dots, N_e \quad (1.15)$$

Un criterio para seleccionar el número M es encontrar el mínimo valor que cumpla con la desigualdad

$$\sum_{p=1}^M \lambda_p \geq p_v \sum_{p=1}^{N_e} \lambda_p,$$

donde p_v es la fracción de la variabilidad del campo aleatorio Gaussiano asociado que se quiere retener con la expansión Karhunen-Loève. En la práctica, este truncamiento genera una disminución en el costo computacional. Un valor usual de p_v es 0,95 (Lee y Verleysen, 2007).

Note que si la incerteza en las propiedades del sistema quedan definidas por un campo aleatorio log-normal, las variables ξ_i de (1.15) son las componentes del vector $\boldsymbol{\xi}$ de la ecuación (1.7). En tal caso, $\boldsymbol{\xi}$ es un vector de variables aleatorias normales estándar independientes.

1.5. Caracterización de la Incertidumbre en la Respuesta

1.5.1. Aspectos Generales

Dado que los parámetros de entrada son inciertos, como se vio en la sección 1.4, la respuesta de interés también lo es, existiendo valores más y menos probables que puede tomar esta respuesta. Por lo tanto, dicha respuesta se puede modelar como una *variable aleatoria*, con una función de densidad de probabilidad (pdf) asociada. Si bien la incertidumbre en la respuesta quedaría completamente definida con su función de densidad de probabilidad, en los casos de interés ingenieril es usualmente imposible obtener esta función analíticamente. Por ello, se calculan cantidades de interés relacionadas con la pdf, las cuales son más fáciles de obtener.

Una de estas cantidades es la *probabilidad de excedencia*, la cual es la probabilidad de que una respuesta de interés X supere un umbral prestablecido b , es decir,

$$\mathbb{P}_{exc}(b) = \mathbb{P}[X \geq b]$$

Usando la definición de la función de distribución acumulada mostrada en (1.1), la expresión anterior se puede escribir como

$$\mathbb{P}_{exc}(b) = 1 - F_X(b)$$

o alternativamente

$$\mathbb{P}_{exc}(b) = \int_b^{\infty} f_X(x) dx$$

Este concepto se muestra esquemáticamente en la figura 1.5.

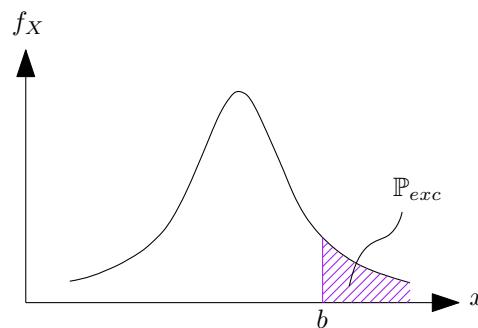


Figura 1.5: Esquema de representación de la incertidumbre a partir de la probabilidad de excedencia

\mathbb{P}_{exc} .

Otra manera de caracterizar cuantitativamente la incertidumbre en la respuesta es mediante el cálculo de las estadísticas de segundo orden, es decir el valor esperado y la varianza (Yamazaki et al., 1988). El cálculo de estas estadísticas se aborda en la sección 1.2.1. El valor esperado $\mathbb{E}[X]$ es la cantidad media que se espera como resultado de un fenómeno aleatorio. Por otra parte, la varianza $\mathbb{V}[X]$ es una medida de la dispersión de las muestras de X respecto del valor esperado. Estos conceptos se muestran cualitativamente en la figura 1.6.

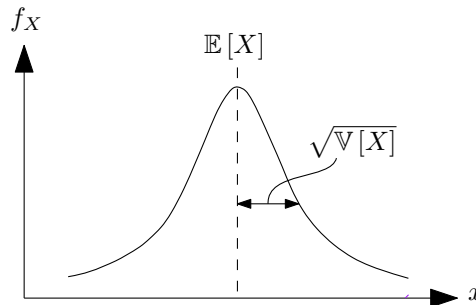


Figura 1.6: Esquema de representación de la incertidumbre a partir de las estadísticas de segundo orden $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{V}[X]$.

En esta memoria se busca caracterizar la incertidumbre de la respuesta mediante sus estadísticas de segundo orden.

1.5.2. Métodos para la obtención de las Estadísticas de Segundo Orden de la Respuesta - Estado del Arte

Diversos métodos han surgido para calcular las estadísticas de segundo orden. Por ejemplo, el *método de la perturbación* (W. Liu et al., 1987; Schuëller, 1997; Kamiński, 2006) ha aparecido como una alternativa, la cual usa expansiones de series de Taylor para reescribir la respuesta de interés como una función explícita de las variables inciertas. Esta función presenta coeficientes los cuales se obtienen usando la información del valor de la respuesta y sus derivadas en un punto específico, conocido como el *punto de expansión*. Si bien en el campo de optimización estructural se ha probado con éxito el uso de series de Taylor que usan más de un punto (Fadel et al., 1990), en este trabajo sólo se considera el uso del método de la perturbación tradicional, el cual usa solo un punto. Este método es muy fácil de implementar y tiene asociados tiempos de cálculo relativamente bajos. Sin embargo, entrega malos resultados cuando la variabilidad de los parámetros inciertos es alta. Este método es tratado con mayor profundidad en la sección 2.1.

También existen los *métodos espectrales*, los cuales usan polinomios cuyas variables son los parámetros inciertos y los coeficientes se obtienen a través del método de Galerkin. Estos métodos han sido ampliamente explorados en mecánica computacional (Sun, 1979; Ghanem y Spanos, 1990; Pellissetti y Ghanem, 2000; Sudret y Der Kiureghian, 2002; Panayirci y Schuëller, 2011). Presentan una buena exactitud en sus resultados, la cual mejora con el orden de los polinomios usados, incluso con grandes niveles de incertidumbre en los parámetros de entrada. Sin embargo, aplicar estos métodos a problemas con muchas variables aleatorias puede conducir a un aumento exponencial en

los tiempos de cálculo. Estos métodos no son abordados más allá en esta tesis.

Un tercer grupo para obtener estadísticas de segundo orden lo conforman aquellos métodos que usan una *base reducida*. Estos procedimientos han sido usados tanto en optimización estructural (Gogu y Passieux, 2013; Amsallem et al., 2015) como en cuantificación de la incertidumbre (Boyaval et al., 2009; Gallimard et al., 2017; Freitag et al., 2018). Esta técnica consiste en aproximar la respuesta como una combinación lineal de vectores previamente calculados. El número de vectores considerados es menor a la dimensión del vector respuesta, por lo que sólo se puede generar una aproximación de la respuesta. La idea es reducir la dimensionalidad del problema, lo cual permite disminuir los tiempos de cálculo. Sin embargo, su uso puede requerir varios análisis completos del sistema. Este método es abordado con mayor profundidad en la sección 2.2.

Por último, existen los *métodos de simulación*, incluyendo el método de simulación *Monte Carlo* y sus variantes más avanzadas (Fishman, 1996; Au y Wang, 2014). Estos consisten en evaluar repetidas veces la respuesta de interés para distintas muestras de los parámetros de entrada, con el fin de calcular la medida buscada. Esta técnica es fácil de usar y muy versátil, pudiendo trabajar con un alto número de variables aleatorias que presenten grandes niveles de incerteza. Sin embargo, tiene asociado un alto costo computacional, ya que se requieren múltiples evaluaciones de la respuesta. El método Monte Carlo es discutido en la sección 3.1.

En la literatura (Lavenberg y Welch, 1981; Nelson, 1990; Glasserman, 2003) se propone una técnica llamada *control variates*, la cual hace uso de dos métodos de cálculo (como los mencionados anteriormente), aprovechando las ventajas de cada uno para construir un nuevo estimador. En otras palabras, se combinan dos estimadores provenientes de dos enfoques distintos para formar un estimador mejorado. Esto se explica con mayor detalle en la sección 3.2.

Sin embargo, en la literatura sólo se han limitado a construir una expresión cuyo uso se restringe a la estadística de primer orden o esperanza. Adicionalmente, todos los trabajos existentes actualmente que usan este método presentan el mismo problema: el estimador de la esperanza está sesgado, lo que quiere decir que estima un valor diferente al que pretende estimar. Mayores detalles de por qué se produce este problema son dados en la sección 3.2.3.

1.6. Objetivos generales

De acuerdo a la revisión de la literatura realizada, los objetivos generales de investigación son los siguientes:

- Extender la aplicabilidad del método control variates a la estimación de la varianza.
- Eliminar el sesgo en la estimación de las estadísticas de segundo orden al aplicar la técnica control variates.

1.7. Objetivos específicos

Para cumplir con los objetivos generales, se necesitan satisfacer los siguientes objetivos específicos:

- Incorporar las incertezas de los parámetros del sistema de ingeniería civil al modelo usado.
- Generar modelos de elementos finitos estocásticos.
- Implementar técnicas de reducción de modelos y perturbación para la resolución de sistemas lineales.
- Desarrollar expresiones que permitan incorporar métodos aproximados, de los cuales se pueda obtener momentos estadísticos de manera exacta o aproximada.
- Aplicar los métodos propuestos a problemas de interés en ingeniería civil.

1.8. Alcance del trabajo

Los procedimientos presentes en este trabajo asumen ciertas características respecto a los sistemas tratados. Una de ellas es que los sistemas son *lineales*, lo que implica que los esfuerzos aplicados en estos sistemas presentan una relación lineal con las deformaciones experimentadas. Por otra parte, también se asume que estos sistemas son *elásticos*, lo que quiere decir que vuelven a su configuración previa a la aplicación de las cargas cuando estas dejan de actuar. Por último, se trabaja con sistemas sometidos a cargas *estáticas* (no cambian con el tiempo).

Además, se restringe el alcance de esta tesis a las estadísticas de segundo orden, aunque la estimación de estadísticas de orden superior (coeficiente de asimetría y curtosis) puede ser importante en algunas áreas, tal como Kamiński (2007) y Kamiński y Świta (2011) han manifestado.

Capítulo 2

PROPAGACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN SISTEMAS LINEALES ESTÁTICOS, REVISIÓN DE LA LITERATURA

Como se estableció en el capítulo anterior, la existencia de incertidumbre en los parámetros de entrada de un modelo hace que las respuestas que entrega ese modelo también sean inciertas. Al proceso involucrado detrás de esto se le conoce como *propagación de la incertidumbre*. Para poder cuantificar la incertidumbre en la respuesta, primero se debe ser capaz de obtener respuestas del modelo, a partir de la resolución del sistema lineal estático en cuestión. Un posible problema es la gran dimensionalidad de este sistema, lo que hace que el proceso de ensamblaje y factorización de la matriz de rigidez tenga un gran costo computacional. Esta dificultad se ve empeorada por el hecho de que, al realizar un análisis no determinista, diferentes análisis estructurales deben ser llevados a cabo, lo que aumenta los tiempos de cálculo.

Para abordar este problema, es posible encontrar en la literatura diferentes técnicas para obtener una respuesta *aproximada*. Por ejemplo, existe el método de la perturbación, cuya aplicación y efectividad ha sido documentada por Kamiński (2006), Rahman y Rao (2001) y W. Liu et al. (1987). Por otra parte, existe el método de la base reducida, cuya efectividad ha sido probada por Noor y Lowder (1974), Kirsch (2003) y Gogu y Passieux (2013). En este capítulo se hace una revisión de ambos métodos.

2.1. Expansión en series de Taylor

Las *series de Taylor* son representaciones de una función cualquiera como una suma de términos, los cuales se obtienen calculando el valor de la función y sus derivadas en un punto específico, denominado *punto de expansión*. En esta memoria, la respuesta de interés es una función de variables inciertas, por lo que se puede aproximar esta respuesta mediante series de Taylor. Por simplicidad, se considera que las incertezas están concentradas solo en los parámetros del sistema, contenidos en la matriz \mathbf{K} , de manera que el sistema de ecuaciones de equilibrio estático, para N_d grados de libertad, está dado por la expresión

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Asumiendo que la incerteza en las propiedades del sistema quedan definidas por un campo aleatorio log-normal, $\boldsymbol{\xi}$ es un vector de dimensión n_ξ , cuyos elementos son variables aleatorias normales estándar independientes. En caso de que las variables aleatorias del problema no sigan esta distribución, siempre es posible introducir una transformación (posiblemente no lineal) para conseguir tal objetivo (P. Liu y Der Kiureghian, 1986).

De esta manera, las expansiones lineal \mathbf{u}^L y cuadrática \mathbf{u}^C asociadas a la respuesta \mathbf{u} se representan respectivamente como

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^L(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \mathbf{u}_{,i}(\xi_i - \xi_i^0) \quad (2.2)$$

y

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^C(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \mathbf{u}_{,i}(\xi_i - \xi_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\xi} \mathbf{u}_{,ij}(\xi_i - \xi_i^0)(\xi_j - \xi_j^0) \quad (2.3)$$

donde ξ_i es la i -ésima variable incierta del vector $\boldsymbol{\xi}$. Por otra parte, $\mathbf{u}_{,i}$ junto con $\mathbf{u}_{,ij}$ son las derivadas de primer y segundo orden, respectivamente, del vector \mathbf{u} evaluados en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$, escritos de manera tensorial, es decir,

$$\mathbf{u}_{,i} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0}$$

y

$$\mathbf{u}_{,ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0}$$

El vector de desplazamiento $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0)$ se obtiene al realizar un análisis estructural completo. Esto requiere invertir de la matriz de rigidez $\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})$ y sustituir $\boldsymbol{\xi}$ por $\boldsymbol{\xi}^0$ en la expresión resultante, de modo que

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^0)^{-1} \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Por lo general, $\boldsymbol{\xi}^0$ se elige como el valor esperado del vector de variables inciertas $\boldsymbol{\xi}$. En este caso, $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$.

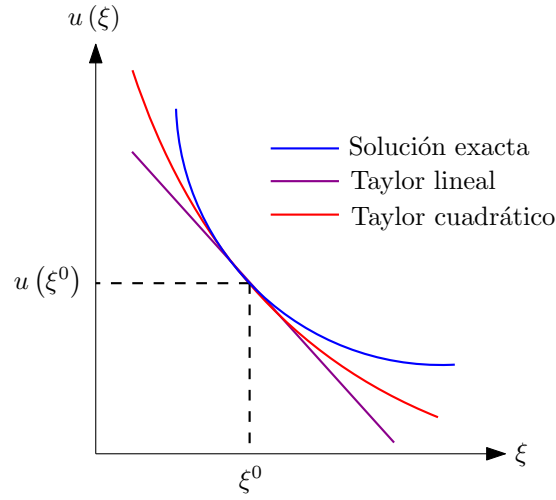


Figura 2.1: Aproximación de una función mediante polinomios lineales y cuadráticos. Se muestra solo una variable incierta para simplificar la figura.

La aproximación de una función mediante expansiones lineales y cuadráticas se muestra cualitativamente en la figura 2.1.

En las expresiones (2.2) y (2.3), las derivadas del vector \mathbf{u} se obtienen derivando la ecuación de equilibrio estático (2.1), es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = 0 \quad (2.5)$$

Reordenando y evaluando en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$, se obtiene la primera derivada del vector \mathbf{u} evaluada en $\boldsymbol{\xi}^0$:

$$\mathbf{u}_{,i} = -\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^0)^{-1} \mathbf{K}_{,i} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0)$$

donde

$$\mathbf{K}_{,i} = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0}$$

Derivando con respecto a ξ_j la ecuación (2.5), se obtiene la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = 0$$

Reordenando los términos y evaluando en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$, es posible obtener la segunda derivada del vector \mathbf{u} evaluado en $\boldsymbol{\xi}^0$:

$$\mathbf{u}_{,ij} = -\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^0)^{-1} (\mathbf{K}_{,ij} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \mathbf{K}_{,i} \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{K}_{,j} \mathbf{u}_{,i})$$

donde

$$\mathbf{u}_{,ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0}$$

y

$$\mathbf{K}_{,ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0}$$

Se debe notar que la derivada de la matriz de rigidez \mathbf{K} respecto de la variable incierta ξ_i es simplemente la derivada de cada una de sus entradas con respecto a ξ_i .

Con estas expresiones, se pueden calcular las expansiones lineales y cuadráticas del vector de desplazamiento \mathbf{u} . Estas expansiones requieren de solo un análisis estructural completo, correspondiente a la evaluación del desplazamiento nominal $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0)$, mostrado en (2.4), el cual usa el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$. Para las otras realizaciones del vector $\boldsymbol{\xi}$, simplemente se usa (2.2) o (2.3), sin necesidad de realizar nuevos análisis estructurales, disminuyendo así el costo computacional.

2.1.1. Estadísticas de segundo orden

Cuando la respuesta \mathbf{u} se aproxima mediante series de Taylor, es posible obtener sus estadísticas de segundo orden de manera exacta. Yamazaki et al. (1988) señalan cuáles son estas estadísticas para expansiones lineales y cuadráticas de Taylor. Si la respuesta \mathbf{u} , para un sistema de N_d grados de libertad, se aproxima mediante una expansión de Taylor lineal o de primer orden \mathbf{u}^L , las estadísticas de su n -ésima componente $\mathbb{E}[u_n^L]$ y $\mathbb{V}[u_n^L]$ están dadas por las ecuaciones

$$\mathbb{E}[u_n^L] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0), \quad n = 1, \dots, N_d \quad (2.6)$$

y

$$\mathbb{V}[u_n^L] = \sum_{i=1}^{n_\xi} u_{n,i}^2, \quad n = 1, \dots, N_d \quad (2.7)$$

donde u_n^L , u_n y $u_{n,i}$ son las n -ésimas componentes de los vectores \mathbf{u}^L , \mathbf{u} y \mathbf{u}_i , respectivamente. En el caso de una aproximación cuadrática \mathbf{u}^C , las estadísticas de segundo orden son

$$\mathbb{E}[u_n^C] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\xi} u_{n,ii}, \quad n = 1, \dots, N_d$$

y

$$\mathbb{V}[u_n^C] = \sum_{i=1}^{n_\xi} u_{n,i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\xi} u_{n,ij}^2, \quad n = 1, \dots, N_d$$

donde u_n^C y $u_{n,ij}$ son las n -ésimas componentes de los vectores \mathbf{u}^C y \mathbf{u}_{ij} , respectivamente.

2.1.2. Variable intermedia

El uso de la aproximación de la respuesta \mathbf{u} mediante expansiones de Taylor es conveniente para orden uno (Taylor lineal). El uso de aproximaciones cuadráticas requiere del cálculo de las segundas derivadas de la respuesta respecto de las variables inciertas, el cual tiene un costo computacional asociado que crece cuadráticamente con el número de variables involucradas en el sistema. Además,

en este caso se hace un mayor uso de almacenamiento para guardar estas derivadas de segundo orden. Por ello, se suele limitar el uso de la expansión de Taylor solo al caso lineal.

La efectividad de la aproximación de una respuesta \mathbf{u} con una expansión lineal de Taylor \mathbf{u}^L , depende de qué tan lineal es la respuesta respecto de los parámetros inciertos contenidos en el vector $\boldsymbol{\xi}$. La exactitud de este método aproximado podría ser muy baja, incluso en la vecindad del punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$. Para solucionar este problema, es posible aplicar la expansión lineal de Taylor a la respuesta \mathbf{u} , pero con respecto a otro vector de variables $\boldsymbol{\kappa}$, con la cual presenta un comportamiento más lineal (figura 2.2). Cada componente κ_i del vector $\boldsymbol{\kappa}$ depende de los parámetros inciertos ξ_i , de manera que $\kappa_i = \kappa_i(\xi_i)$. Las variables κ_i son llamadas *variables intermedias*, concepto proveniente de la optimización estructural (Haftka y Gürdal, 1992). De esta manera, con el uso de variables intermedias se pretende mejorar la exactitud de la expansión de Taylor lineal.

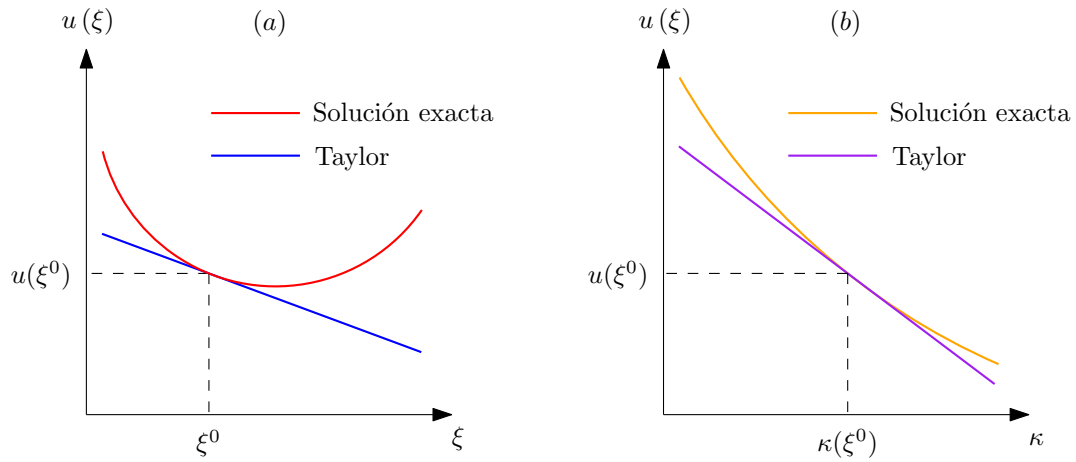


Figura 2.2: Comparación cualitativa entre el uso de (a) Taylor lineal y (b) Taylor lineal con variable intermedia. Se muestra solo una variable incierta para simplificar las figuras.

Así, aproximando la respuesta \mathbf{u} usando Taylor lineal y variables intermedias κ_i , se obtiene la aproximación \mathbf{u}^{κ} (Valdebenito et al., 2013):

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_{\xi}} \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \kappa_i} \right|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}^0)} (\kappa_i(\xi_i) - \kappa_i(\xi_i^0))$$

La ecuación anterior puede ser expresada alternativamente en la forma

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_{\xi}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} (\kappa_i(\xi_i) - \kappa_i(\xi_i^0)) \quad (2.8)$$

La calidad de la aproximación de \mathbf{u}^{κ} depende de la elección de las variables intermedias κ_i . Por su parte, esta elección depende de cómo se modela la incerteza en los parámetros de entrada. En esta memoria se ha optado por usar un campo aleatorio log-normal, el cual define dos tipos de variables intermedias, a saber: las variables intermedias tipo I y tipo II, las cuales se analizarán a continuación.

2.1.2.1. Variable intermedia tipo I

Para elegir esta variable de manera adecuada se plantean dos ejemplos, los cuales van a dar origen a dos variables intermedias tipo I, a saber: $\kappa_i^{\text{TI}-1}$ y $\kappa_i^{\text{TI}-2}$. El primer ejemplo consiste en un enrejado de tres barras sometida a una carga P en el nodo B, tal como muestra la figura 2.3. El objetivo es calcular el desplazamiento horizontal δ del nodo B. Todas las barras poseen un largo L y un área A . Por otra parte, el módulo de Young E de las barras es modelado como un campo aleatorio log-normal con una *correlación nula*. En otras palabras, se tienen tres variables aleatorias no correlacionadas entre sí. Sin embargo, se plantea como campo aleatorio ya que luego se generaliza al caso donde este campo presenta una estructura de correlación no nula. En este caso, el número de términos M de la expansión Karhunen-Loève es igual al número de barras N_e y al número de variables aleatorias n_ξ ($M = N_e = n_\xi = 3$).

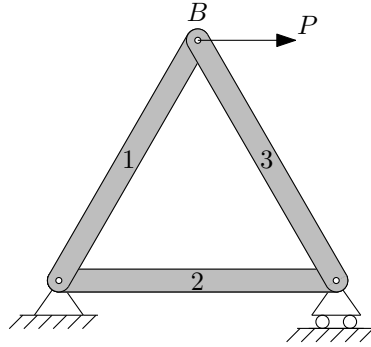


Figura 2.3: Ejemplo de enrejado isostático de 3 barras.

De acuerdo a (1.15), el módulo de Young del p -ésimo elemento es

$$\widehat{E}_p = \exp \left(\widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^M \zeta_{pi}^G \xi_i \right), \quad p = 1, 2, 3$$

Cuando la correlación entre las variables de un campo aleatorio es nula, es posible demostrar que $\zeta_{pi}^G = 0$ cuando $i \neq p$, de modo que

$$\widehat{E}_p = \exp \left(\widehat{\mu}_p^G + \zeta_{pp}^G \xi_p \right), \quad p = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Desarrollando un análisis estructural, es posible encontrar que el desplazamiento buscado es

$$\delta = \frac{PL}{A} \left(\frac{1}{\widehat{E}_1} + \frac{1}{4\widehat{E}_2} + \frac{1}{\widehat{E}_3} \right) \quad (2.10)$$

La expresión (2.10) puede ser escrita de manera alternativa como

$$\delta = \sum_{p=1}^{N_e} \frac{C_p}{\widehat{E}_p}$$

donde

$$C_1 = \frac{PL}{A},$$

$$C_2 = \frac{PL}{4A}$$

y

$$C_3 = \frac{PL}{A}$$

Se puede desprender de las expresiones anteriores que C_p es una constante que depende del elemento analizado, del grado de libertad analizado, las condiciones de carga y la geometría del sistema. Considerando la definición del módulo de Young del p -ésimo elemento (2.9), el desplazamiento buscado δ toma la forma

$$\delta = \sum_{p=1}^{N_e} \left(\frac{C_p}{\exp(\hat{\mu}_p^G)} \right) \frac{1}{\exp(\zeta_{pp}^G \xi_p)}$$

Si se quisiera aproximar esta respuesta mediante una aproximación de Taylor, se puede emplear una variable intermedia κ_p que tiene la estructura de la ecuación

$$\kappa_p(\xi_p) = \frac{1}{\exp(\zeta_{pp}^G \xi_p)}$$

Al usar dicha representación recíproca, la aproximación de Taylor genera el resultado exacto para el desplazamiento buscado. Schmit y Farshi (1974) y Noor y Lowder (1975) señalan que esto se sigue cumpliendo para cualquier enrejado con un número mayor de barras que el mostrado en este ejemplo, siempre y cuando sea isostático y el módulo de Young sea modelado con variables aleatorias independientes que sigan una distribución log-normal.

Para los casos en que estas condiciones no se cumplan, Valdebenito et al. (2013) construyen la variable intermedia tipo I dada por la ecuación

$$\kappa_i^{\text{TI-1}}(\xi_i) = \frac{1}{\exp(\beta_i \xi_i)}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.11)$$

donde el coeficiente real β_i es

$$\beta_i = \frac{\sum_{p=1}^{N_e} |\zeta_{pi}^G|}{\sum_{p=1}^{N_e} \chi[|\zeta_{pi}^G| > 0]}, \quad i = 1, \dots, M; \quad (2.12)$$

aquí $\chi[\cdot]$ denota la función indicatriz, la cual toma un valor 1 cuando su argumento es verdadero y 0 cuando es falso. El coeficiente β_i es interpretado como una medida de la variabilidad promedio que aporta ξ_i a la variabilidad de la propiedad modelada (el módulo de Young en el ejemplo anterior).

La variable intermedia (2.11) es válida para el ejemplo del enrejado, donde el desplazamiento en los nodos es inversamente proporcional al módulo de Young, el cual es la propiedad incierta modelada con un campo aleatorio log-normal.

La variable intermedia $\kappa_i^{\text{TI-1}}$ da origen a la respuesta $\mathbf{u}^{\text{TI-1}}$, la cual se construye usando la ecuación (2.8), de modo que

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{\text{TI-1}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI-1}}} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} (\kappa_i^{\text{TI-1}}(\xi_i) - \kappa_i^{\text{TI-1}}(\xi_i^0)) \quad (2.13)$$

De acuerdo a (2.13), para calcular la respuesta aproximada se necesita la derivada de $\kappa_i^{\text{TI}-1}$ con respecto a ξ_i , así,

$$\frac{\partial \kappa_i^{\text{TI}-1}}{\partial \xi_i} = -\exp(-\beta_i \xi_i) \beta_i, \quad i = 1, \dots, M$$

Siempre y cuando esta derivada sea distinta de 0, utilizando el teorema de la función inversa se obtiene

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI}-1}} = \frac{1}{\frac{\partial \kappa_i^{\text{TI}-1}}{\partial \xi_i}} = -\frac{1}{\exp(-\beta_i \xi_i) \beta_i} = -\frac{\exp(\beta_i \xi_i)}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.14)$$

La variable intermedia (2.11) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\kappa_i^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}^0) = 1, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.15)$$

La derivada (2.14) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\left. \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI}-1}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} = -\frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.16)$$

De esta manera, al reemplazar (2.11), (2.15) y (2.16) en (2.13), el vector respuesta \mathbf{u} puede ser aproximado por

$$\mathbf{u}^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{u}_i}{\beta_i} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i))$$

Las estadísticas de segundo orden asociadas a la respuesta fueron obtenidas por Valdebenito et al. (2013). Estas se calcularon para la respuesta

$$u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}) = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i)), \quad n = 1, \dots, N_d$$

donde $u_n^{\text{TI}-1}$, u_n y $u_{n,i}$ son las n -ésimas componentes de los vectores $\mathbf{u}^{\text{TI}-1}$, \mathbf{u} y \mathbf{u}_i , respectivamente.

Teniendo presente que $\mathbb{E}[c] = c$ (siendo c una constante), la esperanza de $u_n^{\text{TI}-1}$ llega a ser

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TI}-1}] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \mathbb{E}[\exp(-\beta_i \xi_i)])$$

Recordando que ξ_i sigue una distribución Gaussiana estándar, la esperanza $\mathbb{E}[\exp(-\beta_i \xi_i)]$, de la expresión anterior, toma la forma

$$\mathbb{E}[\exp(-\beta_i \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta_i \xi_i) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i = \exp(\beta_i^2/2)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TI}-1}] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \exp(\beta_i^2/2)), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Luego, la varianza de $u_n^{\text{TI}-1}$ es

$$\mathbb{V} [u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi})] = \mathbb{E} \left[(u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}))^2 \right] - (\mathbb{E} [u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi})])^2 \quad (2.17)$$

Para desarrollar la expresión anterior, se necesita elevar al cuadrado la respuesta $u_n^{\text{TI}-1}$:

$$\begin{aligned} (u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}))^2 &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i)) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i)) (1 - \exp(-\beta_j \xi_j)) \\ &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i)) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \exp(-\beta_i \xi_i) - \exp(-\beta_j \xi_j) + \exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)) \end{aligned}$$

La esperanza de $(u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}))^2$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(u_n^{\text{TI}-1}(\boldsymbol{\xi}))^2 \right] &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (1 - \mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i)]) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i)] - \mathbb{E} [\exp(-\beta_j \xi_j)] + \mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)]) \end{aligned} \quad (2.18)$$

La esperanza $\mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)]$ presente en la ecuación (2.18) toma la forma

$$\mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j) f_{\Xi}(\xi_i, \xi_j) d\xi_i d\xi_j \quad (2.19)$$

En (2.19), la función de distribución $f_{\Xi}(\xi_i, \xi_j)$ es

$$f_{\Xi}(\xi_i, \xi_j) = \begin{cases} \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\xi_j^2/2)}{\sqrt{2\pi}}, & \text{si } \xi_i \neq \xi_j \\ \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}}, & \text{si } \xi_i = \xi_j \end{cases}$$

Para el caso en que $\xi_i \neq \xi_j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\xi_j^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i d\xi_j \\ &= \exp(\beta_i^2/2 + \beta_j^2/2) \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $\xi_i = \xi_j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)] &= \mathbb{E} [\exp(-2\beta_i \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta_i \xi_i) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i \\ &= \exp(2\beta_i^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E} [\exp (-\beta_i \xi_i - \beta_j \xi_j)] = \begin{cases} \exp (\beta_i^2 / 2 + \beta_j^2 / 2), & \text{si } \xi_i \neq \xi_j \\ \exp (2\beta_i^2), & \text{si } \xi_i = \xi_j \end{cases}$$

Para obtener la varianza buscada, se necesitan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(u_n^{\text{TI-1}}(\boldsymbol{\xi}) \right)^2 \right] &= \left(u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \right)^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} \left(1 - \exp (\beta_i^2 / 2) \right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} \left(1 - \exp (\beta_i^2 / 2) - \exp (\beta_j^2 / 2) \right) + \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} \exp (\beta_i^2 / 2 + \beta_j^2 / 2) + \\ &\sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\beta_i^2} \exp (2\beta_i^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left[u_n^{\text{TI-1}}(\boldsymbol{\xi}) \right] \right)^2 &= \left(u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \right)^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} \left(1 - \exp (\beta_i^2 / 2) \right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} \left(1 - \exp (\beta_i^2 / 2) - \exp (\beta_j^2 / 2) + \exp (\beta_i^2 / 2 + \beta_j^2 / 2) \right) \end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.17) se obtiene la varianza buscada

$$\mathbb{V} \left[u_n^{\text{TI-1}} \right] = \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\beta_i^2} \left(\exp (2\beta_i^2) - \exp (\beta_i^2) \right), \quad n = 1, \dots, N_d$$

El ejemplo anterior ilustra cómo se deduce una variable intermedia tipo I para el caso en que hay incertidumbre en el módulo de Young de una estructura lineal, elástica sometida a carga estática. La selección de este tipo de variable intermedia depende del problema que se esté estudiando. Para probar este punto, se propone un segundo ejemplo consistente en tres capas de suelo de ancho unitario dispuestas horizontalmente, a través de las cuales fluye un caudal Q de agua paralelo a los planos de estratificación. La i -ésima capa posee un espesor h_i , tal como muestra la figura 2.4. Las permeabilidades k_i de estas capas son modeladas como un campo aleatorio log-normal con una correlación nula. En este caso, el número de términos M de la expansión Karhunen-Loève es igual al número de capas de suelo N_e y al número de variables aleatorias n_ξ ($M = N_e = n_\xi = 3$).

De acuerdo a (1.15), la permeabilidad del p -ésimo elemento es

$$\widehat{k}_p = \exp \left(\widehat{\mu}_p^G + \sum_{i=1}^M \zeta_{pi}^G \xi_i \right), \quad p = 1, 2, 3$$

Cuando la correlación entre las variables de un campo aleatorio es nula, es posible demostrar que $\zeta_{pi}^G = 0$ cuando $i \neq p$, de modo que

$$\widehat{k}_p = \exp \left(\widehat{\mu}_p^G + \zeta_{pp}^G \xi_p \right), \quad p = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

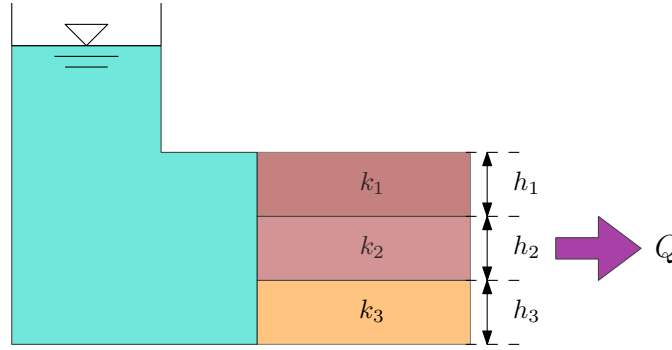


Figura 2.4: Ejemplo de flujo a través de 3 capas de suelo.

El caudal Q que circula por el suelo se puede calcular utilizando la ley de Darcy, de modo que

$$Q = g(k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3) \quad (2.21)$$

donde g es el gradiente hidráulico que genera el flujo de agua (asumido constante en este ejemplo).

Considerando (2.20), la expresión (2.21) puede ser escrita de manera alternativa con la ecuación

$$Q = \sum_{p=1}^{N_e} g h_p \hat{k}_p = \sum_{p=1}^{N_e} (g h_p \exp(\hat{\mu}_p^G)) \exp(\zeta_{pp}^G \xi_p)$$

En este ejemplo, la mejor variable intermedia κ_p para aproximar esta respuesta mediante una aproximación de Taylor es

$$\kappa_p(\xi_p) = \exp(\zeta_{pp}^G \xi_p) \quad (2.22)$$

La aproximación de Taylor que usa la variable (2.22) genera el resultado exacto, siempre y cuando la permeabilidad sea modelada con variables aleatorias independientes que sigan una distribución log-normal. Cuando estas condiciones no se cumplen, la variable intermedia tipo I es

$$\kappa_i^{\text{TI-2}}(\xi_i) = \exp(\beta_i \xi_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (2.23)$$

donde β_i se definió en (2.12).

La variable intermedia $\kappa_i^{\text{TI-2}}$ da origen a la respuesta $\mathbf{u}^{\text{TI-2}}$, la cual se construye usando la ecuación (2.8), de modo que

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{\text{TI-2}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI-2}}} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} (\kappa_i^{\text{TI-2}}(\xi_i) - \kappa_i^{\text{TI-2}}(\xi_i^0)) \quad (2.24)$$

De acuerdo a (2.24), para calcular la respuesta aproximada se necesita la derivada de $\kappa_i^{\text{TI-2}}$ con respecto a ξ_i :

$$\frac{\partial \kappa_i^{\text{TI-2}}}{\partial \xi_i} = \exp(\beta_i \xi_i) \beta_i, \quad i = 1, \dots, M$$

Siempre y cuando esta derivada sea distinta de 0, utilizando el teorema de la función inversa se obtiene

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI}-2}} = \frac{1}{\frac{\partial \kappa_i^{\text{TI}-2}}{\partial \xi_i}} = \frac{1}{\exp(\beta_i \xi_i) \beta_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.25)$$

La variable intermedia (2.23) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\kappa_i^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}_i^0) = 1, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.26)$$

Por otra parte, la derivada (2.25) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\left. \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TI}-2}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} = \frac{1}{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.27)$$

De esta manera, al reemplazar (2.23), (2.26) y (2.27) en (2.24), el vector respuesta \mathbf{u} puede ser aproximado por

$$\mathbf{u}^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{u}_i}{\beta_i} (\exp(\beta_i \xi_i) - 1)$$

Específicamente para el n -ésimo grado de libertad, esta respuesta es

$$u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}) = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i \xi_i) - 1), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Teniendo presente que $\mathbb{E}[c] = c$ (siendo c una constante), la esperanza de $u_n^{\text{TI}-2}$ es

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TI}-2}] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i)] - 1)$$

Recordando que ξ_i sigue una distribución Gaussiana estándar, la esperanza $\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i)]$, de la expresión anterior, viene dada por la ecuación

$$\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i \xi_i) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i = \exp(\beta_i^2/2)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TI}-2}] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i^2/2) - 1), \quad n = 1, \dots, N_d$$

La varianza de $u_n^{\text{TI}-2}$ se calcula con la ecuación

$$\mathbb{V}[u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi})] = \mathbb{E}[(u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}))^2] - (\mathbb{E}[u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi})])^2 \quad (2.28)$$

Se eleva al cuadrado la respuesta $u_n^{\text{TI}-2}$:

$$\begin{aligned} (u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}))^2 &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i \xi_i) - 1) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (\exp(\beta_i \xi_i) - 1) (\exp(\beta_j \xi_j) - 1) \\ &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i \xi_i) - 1) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \exp(\beta_i \xi_i) - \exp(\beta_j \xi_j) + \exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)) \end{aligned}$$

Se calcula la esperanza de la expresión anterior

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(u_n^{\text{TI}-2}(\boldsymbol{\xi}))^2 \right] &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i)] - 1) + \\ &\quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i)] - \mathbb{E}[\exp(\beta_j \xi_j)] + \mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)]) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para evaluar (2.29), se necesita calcular adicionalmente la esperanza de $\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)$, la cual es

$$\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j) f_{\Xi}(\xi_i, \xi_j) d\xi_i d\xi_j$$

Para el caso en que $\xi_i \neq \xi_j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\xi_j^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i d\xi_j \\ &= \exp(\beta_i^2/2 + \beta_j^2/2) \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $\xi_i = \xi_j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)] &= \mathbb{E}[\exp(2\beta_i \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\beta_i \xi_i) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i \\ &= \exp(2\beta_i^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[\exp(\beta_i \xi_i + \beta_j \xi_j)] = \begin{cases} \exp(\beta_i^2/2 + \beta_j^2/2), & \text{si } \xi_i \neq \xi_j \\ \exp(2\beta_i^2), & \text{si } \xi_i = \xi_j \end{cases}$$

Para obtener la varianza buscada, se necesitan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(u_n^{\text{TI-2}}(\boldsymbol{\xi}))^2 \right] &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i^2/2) - 1) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \exp(\beta_i^2/2) - \exp(\beta_j^2/2)) + \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} \exp(\beta_i^2/2 + \beta_j^2/2) + \\ &\sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\beta_i^2} \exp(2\beta_i^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\mathbb{E} [u_n^{\text{TI-2}}(\boldsymbol{\xi})])^2 &= (u_n(\boldsymbol{\xi}^0))^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i} (\exp(\beta_i^2/2) - 1) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\beta_i \beta_j} (1 - \exp(\beta_i^2/2) - \exp(\beta_j^2/2) + \exp(\beta_i^2/2 + \beta_j^2/2)) \end{aligned}$$

Finalmente, usando la expresión (2.28), la varianza buscada es

$$\mathbb{V} [u_n^{\text{TI-2}}] = \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\beta_i^2} (\exp(2\beta_i^2) - \exp(\beta_i^2)), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Al comparar la variable intermedia (2.23) con (2.11), se aprecia que la elección de la variable intermedia tipo I depende del problema a tratar; en el primer ejemplo mostrado, la propiedad incierta es inversamente proporcional a la respuesta de interés, mientras que en el segundo ejemplo es directamente proporcional.

2.1.2.2. Variable intermedia tipo II

Un segundo tipo de variable intermedia puede ser formado al agregar un grado de libertad adicional a la variable intermedia tipo I. De esta manera, se obtiene la variable intermedia tipo II definida como el vector

$$\boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}(\xi_i) = \exp(\beta_i \mathbf{m}_i \xi_i), \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.30)$$

el cual está asociado a la i -ésima variable aleatoria ξ_i .

Además, $\mathbf{m}_i = \{[m_{1i}, \dots, m_{N_d i}]^T \in \mathbb{R}^{N_d}\}$ es un vector cuya componente m_{ni} es una constante real cuyo valor está asociado al n -ésimo grado de libertad y a la i -ésima variable aleatoria. Su valor se define más adelante. Así, cada componente del vector $\boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}$ está asociado a un grado de libertad del sistema estudiado.

La variable intermedia $\boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}$ da origen a la respuesta \mathbf{u}^{TH} , la cual se construye usando la ecuación (2.8), de modo que

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}} \right) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} (\boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}(\xi_i) - \boldsymbol{\kappa}_i^{\text{TH}}(\xi_i^0)) \quad (2.31)$$

A diferencia de las ecuaciones (2.13) y (2.24) asociadas a la variable intermedia tipo I, los términos de la sumatoria en (2.31) involucran vectores que deben ser multiplicados y divididos (según corresponda) utilizando las reglas del producto y división de Hadamard (Styan, 1973).

De acuerdo a (2.31), para calcular la respuesta aproximada se necesita la derivada

$$\frac{\partial \kappa_i^{\text{TH}}}{\partial \xi_i} = \exp(\beta_i \mathbf{m}_i \xi_i) \beta_i \mathbf{m}_i, \quad i = 1, \dots, M$$

Siempre y cuando esta derivada sea distinta de 0, utilizando el teorema de la función inversa se obtiene

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TH}}} = \frac{1}{\frac{\partial \kappa_i^{\text{TH}}}{\partial \xi_i}} = \frac{1}{\exp(\beta_i \mathbf{m}_i \xi_i) \beta_i \mathbf{m}_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.32)$$

La variable intermedia (2.30) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\kappa_i^{\text{TH}}(\xi_i^0) = \mathbf{1}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.33)$$

donde $\mathbf{1} = \{[1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N_d}\}$.

La derivada (2.32) evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\left. \frac{\partial \xi_i}{\partial \kappa_i^{\text{TH}}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} = \frac{1}{\beta_i \mathbf{m}_i}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.34)$$

De esta manera, al reemplazar (2.30), (2.33) y (2.34) en (2.31), el vector respuesta \mathbf{u} puede ser aproximado por

$$\mathbf{u}^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{u}_i}{\beta_i \mathbf{m}_i} (\exp(\beta_i \mathbf{m}_i \xi_i) - 1)$$

Así, la n -ésima componente de \mathbf{u}^{TH} es

$$u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi}) = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} (\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) - 1), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Para definir los valores de m_{ni} se debe elegir un criterio, el cual será la igualdad entre las segundas derivadas no mixtas de la respuesta aproximada u_n^{TH} y las segundas derivadas no mixtas de la respuesta exacta u_n . Valdebenito et al. (2013) han aplicado esta idea, obteniendo resultados satisfactorios. Este criterio se impone haciendo:

$$\left. \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi_i^2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} = \left. \frac{\partial^2 u_n^{\text{TH}}}{\partial \xi_i^2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} \quad (2.35)$$

Se toma este criterio, ya que así se introduce información proveniente de las segundas derivadas en el punto de expansión. Se debe indicar que la información de las primeras derivadas ya está incluida cuando se construye una serie de Taylor lineal. Por otro lado, se toman solo las segundas derivadas no mixtas porque, en el caso contrario, el número de cálculos necesarios crecería exponencialmente con el número de variables aleatorias del problema.

A modo de aplicar este criterio, se calcula la derivada

$$\frac{\partial u_n^{\text{TH}}}{\partial \xi_i} = u_{n,i} \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i), \quad i = 1, \dots, M$$

y derivando por segunda vez se obtiene

$$\frac{\partial^2 u_n^{\text{TH}}}{\partial \xi_i^2} = u_{n,i} \beta_i m_{ni} \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i), \quad i = 1, \dots, M$$

La segunda derivada de u_n^{TH} evaluada en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$ es

$$\left. \frac{\partial^2 u_n^{\text{TH}}}{\partial \xi_i^2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^0} = u_{n,i} \beta_i m_{ni}, \quad i = 1, \dots, M$$

Aplicando el criterio (2.35), se obtiene una expresión para el cálculo de m_{ni} :

$$m_{ni} = \frac{u_{n,ii}}{\beta_i u_{n,i}}, \quad n = 1, \dots, N_d, \quad i = 1, \dots, M$$

donde $u_{n,i}$ y $u_{n,ii}$ son la primera y segunda derivada de la respuesta exacta, respectivamente, en el n -ésimo grado de libertad, respecto de la variable incierta ξ_i , evaluadas en el punto de expansión $\boldsymbol{\xi}^0$.

Fadel et al. (1990) hacen notar que es necesario fijar ciertos límites al valor que puede tomar el exponente en una variable recíproca. En el caso de la variable intermedia tipo II, se debe poner atención a m_{ni} , ya que la derivada de primer orden $u_{n,i}$ puede tener valores muy pequeños (incluso 0), lo que produce valores de m_{ni} muy grandes. Para ello, se establece la siguiente condición:

$$m_{ni} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_{n,i} = 0 \\ m_{ni}^*, & \text{si } u_{n,i} \neq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

donde m_{ni}^* se define como

$$m_{ni}^* = \begin{cases} -3, & \text{si } u_{n,ii} / (\beta_i u_{n,i}) \leq -3 \\ u_{n,ii} / (\beta_i u_{n,i}), & \text{si } -3 \leq u_{n,ii} / (\beta_i u_{n,i}) \leq 3 \\ 3, & \text{si } u_{n,ii} / (\beta_i u_{n,i}) \geq 3 \end{cases} \quad (2.37)$$

Se debe notar que en la expresión (2.36) se toma un valor arbitrario 1 cuando la primera derivada $u_{n,i}$ es nula. El valor 1 es, en realidad, irrelevante, ya que cuando la derivada $u_{n,i} = 0$, se anula su aporte en la expansión de Taylor. Por otra parte, en (2.37) se establecen límites para evitar grandes valores de m_{ni} . El valor 3 fue tomado siguiendo el criterio de Wood y Groenwold (2009), el cual fue corroborado por Valdebenito et al. (2013).

Para calcular las estadísticas de segundo orden de $u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})$, se comienza por su esperanza, la cual está dada por la expresión

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} (\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i)] - 1)$$

Recordando que ξ_i sigue una distribución Gaussiana estándar, la esperanza $\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i)]$ es

$$\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i = \exp\left(\frac{(\beta_i m_{ni})^2}{2}\right)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[u_n^{\text{TH}}] = u_n(\boldsymbol{\xi}^0) + \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} \left(\exp\left(\frac{(\beta_i m_{ni})^2}{2}\right) - 1 \right), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Por otro lado, la varianza de u_n^{TH} es

$$\mathbb{V}[u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})] = \mathbb{E}\left[\left(u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}[u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})]\right)^2 \quad (2.38)$$

Se eleva al cuadrado la respuesta u_n^{TH} :

$$\begin{aligned} \left(u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})\right)^2 &= \left(u_n(\boldsymbol{\xi}^0)\right)^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} \left(\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) - 1 \right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{(\beta_i m_{ni})(\beta_j m_{nj})} \left(\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) - 1 \right) \left(\exp(\beta_j m_{nj} \xi_j) - 1 \right) \\ &= \left(u_n(\boldsymbol{\xi}^0)\right)^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} \left(\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) - 1 \right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{(\beta_i m_{ni})(\beta_j m_{nj})} \left(1 - \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i) - \exp(\beta_j m_{nj} \xi_j) + \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j) \right) \end{aligned}$$

Se calcula la esperanza de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(u_n^{\text{TH}}(\boldsymbol{\xi})\right)^2\right] &= \left(u_n(\boldsymbol{\xi}^0)\right)^2 + 2u_n(\boldsymbol{\xi}^0) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}} \left(\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i)] - 1 \right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{(\beta_i m_{ni})(\beta_j m_{nj})} \left(1 - \mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i)] - \mathbb{E}[\exp(\beta_j m_{nj} \xi_j)] + \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)] \right) \end{aligned}$$

Para evaluar la expresión anterior, se necesita calcular la esperanza $\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)]$. Esta se da en la ecuación

$$\mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j) f_{\boldsymbol{\xi}}(\xi_i, \xi_j) d\xi_i d\xi_j$$

Para el caso en que $\xi_i \neq \xi_j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j) \frac{\exp(-\xi_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\xi_j^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\xi_i d\xi_j \\ &= \exp\left(\frac{(\beta_i m_{ni})^2}{2} + \frac{(\beta_j m_{nj})^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $\xi_i = \xi_j$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\exp (\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)] &= \mathbb{E} [\exp (2 \beta_i m_{ni} \xi_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp (2 \beta_i m_{ni} \xi_i) \frac{\exp (-\xi_i^2 / 2)}{\sqrt{2 \pi}} d \xi_i \\ &= \exp \left(2\left(\beta_i m_{ni}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E} [\exp (\beta_i m_{ni} \xi_i + \beta_j m_{nj} \xi_j)] = \begin{cases} \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2 + \left(\beta_j m_{nj}\right)^2 / 2\right), & \text{si } \xi_i \neq \xi_j \\ \exp \left(2\left(\beta_i m_{ni}\right)^2\right), & \text{si } \xi_i = \xi_j \end{cases}$$

Para obtener la varianza buscada, se necesitan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(u_n^{\text{III}}(\boldsymbol{\xi})\right)^2\right] &= \left(u_n\left(\boldsymbol{\xi}^0\right)\right)^2 + 2 u_n\left(\boldsymbol{\xi}^0\right) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}}\left(\exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2\right) - 1\right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\left(\beta_i m_{ni}\right)\left(\beta_j m_{nj}\right)}\left(1 - \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2\right) - \exp \left(\left(\beta_j m_{nj}\right)^2 / 2\right)\right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\left(\beta_i m_{ni}\right)\left(\beta_j m_{nj}\right)} \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2 + \left(\beta_j m_{nj}\right)^2 / 2\right) + \\ &\sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\left(\beta_i m_{ni}\right)^2} \exp \left(2\left(\beta_i m_{ni}\right)^2\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E} \left[u_n^{\text{III}}(\boldsymbol{\xi})\right]\right)^2 &= \left(u_n\left(\boldsymbol{\xi}^0\right)\right)^2 + 2 u_n\left(\boldsymbol{\xi}^0\right) \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}}{\beta_i m_{ni}}\left(\exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2\right) - 1\right) + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{u_{n,i} u_{n,j}}{\left(\beta_i m_{ni}\right)\left(\beta_j m_{nj}\right)}\left(1 - \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2\right) - \exp \left(\left(\beta_j m_{nj}\right)^2 / 2\right) + \right. \\ &\left. \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2 / 2 + \left(\beta_j m_{nj}\right)^2 / 2\right)\right)\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.38), la varianza de la respuesta u_n^{III} es

$$\mathbb{V} \left[u_n^{\text{III}}\right] = \sum_{i=1}^M \frac{u_{n,i}^2}{\beta_i^2} \left(\exp \left(2\left(\beta_i m_{ni}\right)^2\right) - \exp \left(\left(\beta_i m_{ni}\right)^2\right)\right), \quad n = 1, \dots, N_d$$

Se debe notar que el cálculo de la variable intermedia tipo II requiere del cálculo de segundas derivadas, lo cual supone un aumento en el tiempo de cálculo. Sin embargo, esto es requerido solo una vez, ya que se requieren estas derivadas evaluadas solamente en el punto de expansión y, además, se necesita solo la evaluación de las segundas derivadas no mixtas.

Advierta que, a diferencia de la variable intermedia tipo I, la selección de la variable intermedia tipo II no depende del problema que se esté analizando, siendo así su aplicación más general. Esto es consecuencia de la incorporación del grado de libertad adicional m_{ni} .

2.2. Método de base reducida

Una *base* es un conjunto de vectores linealmente independientes entre sí los cuales, mediante combinaciones lineales, permiten generar cualquier vector del espacio vectorial al que pertenecen. Por ejemplo, sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Con esta definición, se puede decir que los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} forman una base \mathcal{B} del espacio vectorial \mathbb{R}^3 , ya que son linealmente independientes y cualquier vector \mathbf{v} en \mathbb{R}^3 puede ser expresado como una combinación lineal de ellos. Se debe hacer notar que esta no es la única base posible para los vectores que pertenecen a \mathbb{R}^3 . Sin embargo, todas ellas poseen el mismo número de vectores que, en este caso, es tres.

Ahora, en una *base reducida* se disminuye el número de vectores que necesita una base para poder generar cualquier vector del espacio vectorial al que pertenece. Por ejemplo, si a la base \mathcal{B} se le quita el vector \mathbf{k} , la nueva base \mathcal{B}_1 es una base reducida; si bien los vectores de \mathcal{B}_1 son linealmente independientes, no es posible generar todos los vectores posibles del espacio \mathbb{R}^3 . En concreto, los vectores que poseen una componente no nula en la dirección \mathbf{k} no pueden ser representados exactamente por esta base, tal como se muestra en la figura 2.5 (a). Por lo tanto, con bases reducidas solo se pueden obtener *aproximaciones* de los vectores.

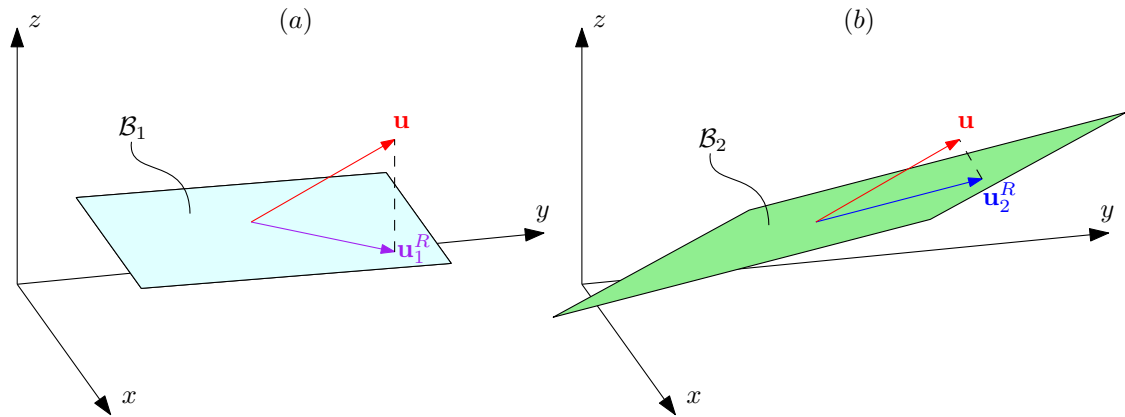


Figura 2.5: Representación cualitativa de bases reducidas en \mathbb{R}^3 : (a) \mathcal{B}_1 y (b) \mathcal{B}_2 , junto con las proyecciones del vector \mathbf{u} sobre dichas bases reducidas.

En este trabajo, se pretende aproximar la respuesta \mathbf{u} de la ecuación (2.1) mediante una base reducida Φ , tal que

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_r}]$$

donde ϕ_m es el m -ésimo vector de la base reducida Φ y N_r es el número de vectores que conforman esta base. De esta manera, se aproxima el vector \mathbf{u} mediante la respuesta \mathbf{u}^R , la cual es una combinación lineal de estos vectores. Así,

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^R = \phi_1 \eta_1 + \phi_2 \eta_2 + \dots + \phi_{N_r} \eta_{N_r} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.39)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es un vector de dimensión N_r formado por coeficientes que deben ser determinados. Es importante notar que, en una base reducida, N_r es menor al número de grados de libertad del sistema en estudio N_d . De esta manera, se puede reemplazar (2.39) en la ecuación (2.1) para así obtener el sistema reducido

$$\mathbf{K}_{N_d \times N_d} \boldsymbol{\Phi}_{N_d \times N_r} \boldsymbol{\eta}_{N_r \times 1} = \mathbf{f}_{N_d \times 1} \quad (2.40)$$

donde $(\cdot)_{n_1 \times n_2}$ significa que el argumento (\cdot) posee n_1 filas y n_2 columnas.

El sistema de ecuaciones (2.40) está sobredeterminado, ya que el número de incógnitas N_r es menor al número de ecuaciones N_d . Para encontrar la mejor solución, se recurre al método de los mínimos cuadrados (Strutz, 2011). Entonces,

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad (2.41)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{N_r \times N_r} \boldsymbol{\eta}_{N_r \times 1} = \tilde{\mathbf{f}}_{N_r \times 1} \quad (2.42)$$

Como $N_r < N_d$, es posible observar que pasar del sistema de ecuaciones original (2.1) al sistema reducido (2.42) implica una reducción en el costo numérico dada la disminución en la dimensionalidad del problema. Esta es precisamente la ventaja de usar el método de la base reducida.

Volviendo al ejemplo anterior mostrado en la figura 2.5, es posible elegir otra base \mathcal{B}_2 , la cual cubre un espacio más cercano al vector de interés, lo que se traduce en una mejor aproximación. Por lo tanto, es importante la elección de la base, ya que influye en la efectividad de la aproximación de la respuesta \mathbf{u} . Se debe precisar que, como se evalúan distintas respuestas \mathbf{u} para los diferentes parámetros de entrada, la base reducida debe cubrir lo mejor posible el espacio formado por este conjunto de respuestas. En las siguientes secciones se explican dos métodos para generar bases reducidas eficientes.

2.2.1. Método de Gogu y Passieux

Gogu y Passieux (2013) proponen un algoritmo para fabricar una base reducida, el cual se describe a continuación:

1. Se generan N_m muestras de prueba de los parámetros inciertos de entrada $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, las cuales se agrupan en la matriz

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(N_m)} \right]$$

2. Se evalúa la respuesta exacta \mathbf{u} usando $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ con $i = 1$:

$$\mathbf{u} \left(\boldsymbol{\xi}^{(1)} \right) = \mathbf{K} \left(\boldsymbol{\xi}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{f}$$

3. Se normaliza el vector $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})$ y se define como la base reducida

$$\boldsymbol{\Phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = \frac{\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})}{\|\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(1)})\|}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana. Se actualiza el valor de i ($i \leftarrow i + 1$). Además, el número actual de vectores en la base reducida N_r es igual a 1.

4. Se evalúa la respuesta $\boldsymbol{\eta}$ usando $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ y el sistema de ecuaciones reducido (2.41):

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}$$

5. Se evalúa el residuo

$$e_{rb}^2 = \frac{\|\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}\|^2}{\|\mathbf{f}\|^2}$$

6. Dependiendo del valor del residuo e_{rb} (medida del error de la aproximación), existen dos caminos:

6.1 Si el residuo e_{rb} es menor a un cierto límite preestablecido ϵ_{rb} e $i < N_m$, se vuelve al paso 4 actualizando el valor de i ($i \leftarrow i + 1$). En caso de que $i = N_m$, se termina el proceso.

6.2 Si el residuo e_{rb} es mayor a un cierto límite preestablecido ϵ_{rb} , se evalúa la respuesta exacta

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})^{-1} \mathbf{f}$$

7. Se ortogonaliza $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})$ con respecto a los vectores existentes en la base mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (Trefethen y Bau III, 1997), obteniendo el vector

$$\boldsymbol{\phi}_{N_r+1} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) - \sum_{j=1}^{N_r} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}_j$$

8. Se normaliza el vector $\boldsymbol{\phi}_{N_r+1}$:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{N_r+1} = \frac{\boldsymbol{\phi}_{N_r+1}}{\|\boldsymbol{\phi}_{N_r+1}\|}$$

9. Se añade el vector $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{N_r+1}$ a la base reducida $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi} \leftarrow \left\{ \boldsymbol{\Phi}, \hat{\boldsymbol{\phi}}_{N_r+1} \right\}$$

Al agregarse un vector a la base, se actualiza el valor de N_r ($N_r \leftarrow N_r + 1$).

10. Si $i = N_m$, se termina el proceso. En caso contrario, se actualiza el valor de i ($i \leftarrow i + 1$) y se vuelve al paso 4.

Siguiendo los pasos anteriores, se puede obtener una base reducida de manera eficiente. En el método de Gogu y Passieux, la elección de la base reducida es dependiente de la elección de las muestras de los parámetros de entrada agrupadas en Ξ . Por lo tanto, es importante la selección de estas muestras. van Dam et al. (2007) presentan esquemas que aplican el método del hipercubo latino, los cuales permiten cubrir de manera eficiente el espacio de los parámetros de entrada.

2.2.2. Método de Noor y Correa

Este método sugiere construir una base reducida a partir de vectores que no dependan de la elección de las muestras de entrada $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, sino que sean fijos. La construcción de esta base fue originalmente propuesta por Noor y Lowder (1974), quienes la concibieron dentro del área de la optimización estructural. Por otra parte, Correa (2016) adaptó esta base para ser usada dentro del contexto de la mecánica computacional estocástica. Para ello, se usa como primer vector la respuesta nominal $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^0)$, donde $\boldsymbol{\xi}^0 = [0, \dots, 0]^T$; como $\boldsymbol{\xi}$ es un vector aleatorio cuyas componentes son independientes entre sí y siguen una distribución normal estándar, su valor medio o esperanza es el vector nulo, por lo que se asume que las muestras generadas $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ se distribuyen alrededor de este punto.

Para los siguientes vectores de la base, se toman las derivadas del vector respuesta con respecto al parámetro incierto ξ_i , evaluadas en el punto nominal $\boldsymbol{\xi}^0$. Esta elección sigue la misma idea que está detrás de las series de Taylor, explicadas en la sección 2.1: aproximar la respuesta \mathbf{u} mediante las derivadas de ese vector.

Si se limita solo a las derivadas de primer orden $\mathbf{u}_{,i}$, se tiene que la base reducida propuesta es

$$\boldsymbol{\Phi} = \text{orth}([\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_{,1}, \dots, \mathbf{u}_{,n_\xi}])$$

donde la función orth denota que los vectores de $\boldsymbol{\Phi}$ deben ser ortonormalizados. Para ello, se puede usar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt o la ortogonalización simétrica (Löwdin, 1970), entre otros. Correa (2016) y González (2019) han probado la efectividad de este método, obteniendo resultados satisfactorios.

2.2.3. Comparación entre métodos

En la tabla 2.1 se muestra una comparación entre las propuestas presentadas para la construcción de una base reducida.

En esta tabla se puede ver que, si los parámetros inciertos tienen baja variabilidad, es recomendable usar el método de Noor y Correa, ya que es fácil de implementar y tiene asociado un tiempo de cálculo menor. Por otro lado, si esta variabilidad es alta, es importante que la base elegida cubra gran parte del espacio de los parámetros inciertos, por lo que la propuesta de Gogu y Passieux es una mejor opción en ese caso.

Tabla 2.1: Comparación de métodos para la construcción de una base reducida.

Método	Ventajas	Desventajas
Gogu y Passieux	<ul style="list-style-type: none">• Puede cubrir eficientemente el espacio de respuestas	<ul style="list-style-type: none">• Requiere de un método adecuado para la elección de los vectores de la base• Se requiere un número de análisis completos del sistema mayor o igual que el número de vectores que van a constituir la base
Noor y Correa	<ul style="list-style-type: none">• Requiere solo un análisis completo del sistema, por lo que su tiempo de cálculo es relativamente bajo	<ul style="list-style-type: none">• Su exactitud decae cuando las realizaciones de los parámetros inciertos se alejan del valor nominal de estos parámetros

REDUCCIÓN DE LA VARIANZA EN LA ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS DE SEGUNDO ORDEN

Tal como se expuso en el capítulo 1, la incertidumbre existente en los parámetros de entrada es traspasada a la respuesta. En el capítulo 2 se estableció que este traspaso se puede realizar mediante un análisis estructural completo o mediante técnicas aproximadas, como aquellas que usan series de Taylor o una base reducida. Ahora que la incertidumbre está en la respuesta, lo que se busca es una manera de caracterizar esta incerteza.

También en el capítulo 1 se vio que esta incertidumbre puede ser completamente descrita si se conoce la función de densidad de probabilidad de la respuesta. Como esto es prácticamente imposible para los casos de interés ingenieril, se recurre al cálculo de las estadísticas de segundo orden. Sin embargo, estas no pueden ser obtenidas de manera exacta, por lo que deben ser estimadas, generándose así los *estimadores de las estadísticas de segundo orden*.

Al igual que cualquier estimador, estos poseen una variabilidad, la cual es deseable que sea la más pequeña posible. En otras palabras, se quiere que la cercanía entre las estimaciones sea la más alta posible. Kamiński y Kleiber (2000) señalan que, aumentando el número de muestras con el que se calcula este estimador, es factible reducir el coeficiente de variación asociado. Sin embargo, esto genera un aumento en el costo computacional que, en muchos casos, puede ser muy elevado. Otra

solución consiste en modificar el estimador para que entregue estimaciones más cercanas entre sí (Fishman, 1996).

En este capítulo, se pretende explicar el método tradicional con el que se calculan estas estadísticas a través de simulación Monte Carlo. Sin embargo, el problema de este método es que sus estimadores poseen un *error cuadrático medio* relativamente alto, el cual es una medida no negativa de la variabilidad del estimador. La segunda parte de este capítulo se centra en la técnica *control variates* (Nelson, 1990), la cual permite reducir esta variabilidad para el caso de la estimación de la esperanza de la respuesta de interés. La extensión de esta técnica al caso de la varianza es parte de los aspectos novedosos de esta memoria.

3.1. Método Monte Carlo

Un método de uso común dentro del área de la ingeniería estocástica es el método Monte Carlo. Mientras Metropolis y Ulam (1949) presentan este método como un enfoque para el estudio de ecuaciones íntegro-diferenciales, Stefanou (2009) lo expone como un recurso para el estudio de la variabilidad de las respuestas de interés. Desde este último punto de vista, esta técnica consiste en la generación de realizaciones de los parámetros de entrada inciertos y la evaluación de las respuestas asociadas a cada una de estas realizaciones. En otras palabras, se realizan análisis deterministas repetitivos. En este caso, las respuestas generadas son muestras de la respuesta de interés, las cuales son usadas para la estimación de las estadísticas de segundo orden μ'_1 y μ_2 , conocidas como la esperanza (o valor medio) y varianza, respectivamente.

Para las secciones posteriores, se utiliza la notación para los momentos estadísticos desarrollada en el capítulo 1. Es decir, el momento no central de orden d es

$$\mu'_d = \int_{-\infty}^{\infty} x^d f(x) dx = \mathbb{E} [X^d]$$

y el momento central de orden d es

$$\mu_d = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu'_1)^d f(x) dx = \mathbb{E} [(X - \mu'_1)^d]$$

3.1.1. Estimación de las estadísticas de segundo orden

Para obtener n muestras de la respuesta de interés r , primero se deben generar n realizaciones de los parámetros de entrada $\theta_n^{(i)}$, las cuales se agrupan en la matriz Θ_n . Así,

$$\Theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^{(1)} & \theta_n^{(2)} & \dots & \theta_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Note que $r = r(\theta)$. Esto quiere decir que la respuesta r es una variable aleatoria, ya que sus muestras dependen de los parámetros de entrada θ de un modelo los cuales, a su vez, se consideran que son resultado de un fenómeno aleatorio.

La esperanza μ'_1 de la respuesta r es aproximada con su estimador Monte Carlo $\widehat{\mu}'_1^{(MCS)}$ usando n realizaciones de los parámetros de entrada, es decir,

$$\mu'_1(r) \approx \widehat{\mu}'_1^{(MCS)}(r, \Theta_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(\theta_n^{(i)}) = \frac{s_1}{n} \quad (3.2)$$

donde $\theta_n^{(i)}$ es el i -ésimo vector de parámetros de entrada, los cuales se agrupan en la matriz Θ_n .

De la misma manera, la varianza μ_2 se estima con $\widehat{\mu}_2^{(MCS)}$:

$$\mu_2(r) \approx \widehat{\mu}_2^{(MCS)}(r, \Theta_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(r(\theta_n^{(i)}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r(\theta_n^{(j)}) \right)^2 = \frac{ns_2 - s_1^2}{(n-1)n} \quad (3.3)$$

En las expresiones (3.2) y (3.3), el término s_p viene dado por la expresión

$$s_p \equiv s_p(\Theta_n) = \sum_{i=1}^n \left(r(\theta_n^{(i)}) \right)^p$$

El término s_p ayuda a definir las expresiones para momentos estadísticos de orden mayor que aparecen más adelante en esta tesis.

3.1.2. Error cuadrático medio de los estimadores

Una manera de medir la calidad de un estimador es mediante el cálculo de su *error cuadrático medio* o MSE. Este representa el promedio de los errores elevados al cuadrado, entendiéndose como *error* la diferencia entre el estimador y el valor que este pretende estimar. Suponga que se quiere estimar w usando el estimador \widehat{w} . De esta manera, el error cuadrático medio de \widehat{w} es

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{E} \left[(\widehat{w} - w)^2 \right]$$

La expresión anterior puede ser escrita en términos de la varianza y el *sesgo* del estimador.

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{E} \left[\widehat{w}^2 - 2\widehat{w}w + w^2 \right]$$

Ya que w es una constante (no es una variable aleatoria), se tiene que

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{E} \left[\widehat{w}^2 \right] - 2\mathbb{E}[\widehat{w}]w + w^2$$

Se suma un cero a la derecha de la ecuación, obteniendo la expresión

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{E} \left[\widehat{w}^2 \right] - (\mathbb{E}[\widehat{w}])^2 + (\mathbb{E}[\widehat{w}])^2 - 2\mathbb{E}[\widehat{w}]w + w^2$$

Recordando que $\mathbb{V}[\widehat{w}] = \mathbb{E}[\widehat{w}^2] - (\mathbb{E}[\widehat{w}])^2$, se tiene que

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{V}[\widehat{w}] + (\mathbb{E}[\widehat{w}] - w)^2$$

Finalmente,

$$\text{MSE}[\widehat{w}] = \mathbb{V}[\widehat{w}] + (\text{Sesgo}[\widehat{w}])^2$$

donde

$$\text{Sesgo}[\hat{w}] = \mathbb{E}[\hat{w}] - w$$

Por lo tanto, para estimadores insesgados,

$$\text{MSE}[\hat{w}] = \mathbb{V}[\hat{w}] \quad (3.4)$$

De acuerdo a (3.4), el error cuadrático medio de un estimador insesgado es una medida de la variabilidad del estimador. Por lo tanto, entre varios estimadores insesgados de un valor de interés, el mejor de ellos es el que presenta el menor error cuadrático medio.

Es importante mencionar que las expresiones (3.2) y (3.3) muestran estimadores insesgados de las estadísticas de segundo orden. Por lo tanto, sus errores cuadráticos medios se calculan tomando la varianza de los estimadores. Esto involucra un procedimiento en el cual se necesitan calcular momentos estadísticos asociados a otros momentos estadísticos. Este tópico ha sido abordado por Dwyer (1937), Rose y Smith (2002) y Pisaroni et al. (2017). Las expresiones de los errores cuadráticos medios son

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{MCS})}(r, \Theta_n) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{MCS})}(r, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_2}{n} \quad (3.5)$$

y

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{MCS})}(r, \Theta_n) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{MCS})}(r, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_4}{n} - \frac{(n-3)\mu_2^2}{(n-1)n} \quad (3.6)$$

Las expresiones matemáticas anteriores son obtenidas mediante el uso de *mathStatistica*, el cual es un paquete complementario del programa computacional *Mathematica*. Rose y Smith (2002) indican las instrucciones de uso de este paquete. Los códigos usados para obtener estas expresiones se muestran en la tabla A.1 del apéndice.

En la expresión (3.5), la estadística μ_2 puede ser estimada de manera insesgada con la fórmula (3.3). Por otro lado, en la expresión (3.6), μ_4 y μ_2^2 pueden ser estimadas de manera insesgada con $\widehat{\mu}_4$ y $\widehat{\mu}_2^2$. Así,

$$\widehat{\mu}_4(r, \Theta_n) = \frac{(-4n^2 + 8n - 12) s_3 s_1 + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_4 + 6n s_2 s_1^2 + (9 - 6n) s_2^2 - 3s_1^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

y

$$\widehat{\mu}_2^2(r, \Theta_n) = \frac{(n^2 - 3n + 3) s_2^2 + (n - n^2) s_4 - 2n s_2 s_1^2 + (4n - 4) s_3 s_1 + s_1^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

Los códigos usados para obtener estas expresiones se muestran en la tabla A.2 del apéndice.

El método Monte Carlo tiene una gran aplicabilidad, pudiendo emplearse, por ejemplo, en problemas no lineales. Sin embargo, al ser una repetición sucesiva de análisis estructurales completos, posee un costo computacional elevado. Además, el estimador Monte Carlo (y cualquier otro) es más confiable mientras menor sea su error cuadrático medio, lo cual ocurre mientras mayor es el número de muestras con el que se trabaja. Por lo tanto, con el fin de generar estimadores Monte

Carlo fiables, se deben realizar, en la mayoría de los casos, muchos análisis estructurales, lo que implica grandes tiempos de cálculo.

Para solventar tal problema, existen técnicas que permiten generar estimadores que poseen un menor error cuadrático medio respecto al método Monte Carlo. Entre ellas se encuentra la técnica *control variates*.

3.2. Técnica control variates

La técnica *control variates* (Ng y Willcox, 2014) es una técnica de reducción de varianza que utiliza dos modelos los cuales, teniendo los *mismos* parámetros de entrada, entregan respuestas distintas. Sin embargo, estas respuestas están *correlacionadas* entre sí, característica que es usada por la técnica control variates para poder reducir la varianza de los estimadores. Estudios anteriores han demostrado la eficiencia de esta técnica (Rubinstein y Marcus, 1985).

En este caso, el primer modelo usado es el generado por el método de elementos finitos, cuya respuesta es obtenida con el ensamblaje y la factorización de la matriz de rigidez. Estos procesos se deben llevar a cabo para cada realización de los parámetros de entrada. El modelo de elementos finitos, si bien entrega resultados r exactos, puede tener un alto costo computacional. De aquí en adelante, r se usa para hacer referencia a las muestras que surjan de este tipo de modelos, conocidos de aquí en adelante como modelos de alta fidelidad.

Por otro lado, el segundo modelo que utiliza control variates viene de un método aproximado, el cual entrega su respuesta \tilde{r} en un menor tiempo respecto al modelo anterior, pero sus resultados poseen menor exactitud. En este caso, \tilde{r} se usa para los resultados que surjan de este tipo de modelo.

La técnica control variates calcula la estadística H de interés, usando la siguiente igualdad:

$$H(r) = H(r) - \rho(H(\tilde{r}) - H(\tilde{r})) \quad (3.7)$$

donde r es la respuesta entregada por el modelo de alta fidelidad, \tilde{r} es la respuesta entregada por un método aproximado (conocida en este contexto como *variable de control*) y ρ es conocido como el *parámetro de control*, cuyo valor se elige convenientemente para reducir la variabilidad del estimador control variates. Específicamente, el valor de ρ que minimiza la varianza del estimador control variates es conocido como el *parámetro de control óptimo*. Detalles acerca del cálculo de este parámetro se entregan más adelante. De esta manera:

- $H(r)$ es la estadística calculada con un modelo de alta fidelidad.
- $H(\tilde{r})$ es la estadística calculada con un modelo aproximado.

Los términos de la expresión (3.7) deben ser reemplazados por sus estimadores muestrales para poder construir el estimador control variates. Sin embargo, dependiendo de si el modelo aproximado puede entregar de manera cerrada o no las estadísticas de segundo orden asociadas a la respuesta que genera (*variable de control*), el estimador control variates puede adoptar dos formas; en la sección 3.2.1 se muestra este estimador cuando el modelo aproximado permite conocer estas estadísticas de

manera cerrada, mientras que en la sección 3.2.2 se muestra este estimador cuando no se pueden conocer de manera cerrada, debiendo ser estimadas.

En la literatura se ha trabajado con la técnica control variates para la estimación de la esperanza. Este tópico es recogido en las secciones 3.2.1.1 y 3.2.2.1 de este trabajo. Sin embargo, no se ha entregado un estimador para el caso de la varianza. Eso es parte de la contribución de este trabajo, realizada específicamente en las secciones 3.2.1.2 y 3.2.2.2.

La eficacia de la estimación de ambas estadísticas se verificará con un ejemplo numérico. Por último, se demuestra que los estimadores control variates tienen el problema de ser sesgados. Esta dificultad es tratada en el próximo capítulo de este trabajo.

En las próximas secciones, el término $\mu_{p,q}$ se usará para los momentos centrales bivariados. Este término viene dado por la expresión

$$\mu_{p,q} = \mathbb{E} [(r - \mathbb{E}[r])^p (\tilde{r} - \mathbb{E}[\tilde{r}])^q]$$

De acuerdo a la definición anterior, $\mu_{1,1}$ es la covarianza entre r y \tilde{r} , $\mu_{2,0}$ es la varianza de r , $\mu_{0,2}$ es la varianza de \tilde{r} , etc.

Se aclara que las expresiones matemáticas de todos los momentos centrales bivariados presentes en esta tesis son obtenidas mediante el uso de *mathStatica*, el cual es un paquete complementario del programa computacional *Mathematica*. Rose y Smith (2002) indican las instrucciones de uso de este paquete. En el apéndice de esta memoria se presentan los códigos empleados para obtener los estimadores de los momentos centrales bivariados, junto con las varianzas y las covarianzas asociadas a los estimadores de las estadísticas de segundo orden usados en este trabajo.

3.2.1. Estadísticas conocidas de la variable de control

Este caso se da, por ejemplo, cuando se utiliza una aproximación de series de Taylor, las cuales fueron explicadas en la sección 2.1. Aquí, los estimadores del valor esperado y de la varianza son números precisos dados por una fórmula cerrada (ver por ejemplo ecuaciones (2.6) y (2.7)).

El estimador control variates para el caso en que la estadística de segundo orden $H(\tilde{r})$ se conoce es $\hat{H}^{(CV-C)}$. Su expresión se obtiene a partir de (3.7), de modo que:

$$\hat{H}^{(CV-C)} = \hat{H}(r, \Theta_n) - \rho_C \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right) \quad (3.8)$$

donde ρ_C es el parámetro de control del estimador control variates, construido cuando la estadística $H(\tilde{r})$ es conocida. Además:

- $\hat{H}(r, \Theta_n)$ es el estimador de $H(r)$, calculado con n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de $H(\tilde{r})$, calculado con n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .

Se recuerda que Θ_n es una matriz que se definió en (3.1). Así,

$$\Theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^{(1)} & \theta_n^{(2)} & \dots & \theta_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Para calcular el parámetro de control óptimo ρ_C^* de la expresión (3.8), se asume en primera instancia que ρ_C es un valor conocido (no tiene variabilidad). Luego, recordando que

$$\mathbb{V}[aX - bY] = a^2\mathbb{V}[X] - 2ab\text{Cov}[X, Y] + b^2\mathbb{V}[Y],$$

la varianza de $\widehat{H}^{(CV-C)}$ es

$$\mathbb{V}[\widehat{H}^{(CV-C)}] = \mathbb{V}[\widehat{H}(r, \Theta_n)] - 2\rho_C\text{Cov}[\widehat{H}(r, \Theta_n), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)] + \rho_C^2\mathbb{V}[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)] \quad (3.9)$$

Derivando con respecto a ρ_C e igualando a cero, se obtiene una expresión para el parámetro de control óptimo ρ_C^* , el cual minimiza la varianza. Su expresión es

$$\rho_C^* = \frac{\text{Cov}[\widehat{H}(r, \Theta_n), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)]}{\mathbb{V}[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)]} \quad (3.10)$$

Reemplazando ρ_C^* en (3.9), se obtiene la menor varianza que toma el estimador $\widehat{H}^{(CV-C)}$:

$$\mathbb{V}[\widehat{H}^{(CV-C)}] \Big|_{\rho_C=\rho_C^*} = \mathbb{V}[\widehat{H}(r, \Theta_n)] - \frac{(\text{Cov}[\widehat{H}(r, \Theta_n), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)])^2}{\mathbb{V}[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)]} \quad (3.11)$$

Se debe hacer notar lo siguiente: si se quisiera estimar la estadística H y solo se tuviera el modelo de alta fidelidad, se calcularía $\widehat{H}(r, \Theta_n)$ mediante el método Monte Carlo, cuya varianza sería $\mathbb{V}[\widehat{H}(r, \Theta_n)]$. Sin embargo, disponer de un segundo modelo permite construir el estimador $\widehat{H}^{(CV-C)}$, el cual tiene una varianza menor a $\mathbb{V}[\widehat{H}(r, \Theta_n)]$ dado que el sustraendo de la expresión (3.11) siempre es positivo. Esta reducción de la varianza es el fin que se persigue cuando se utiliza la técnica control variates. Además, se hace notar la importancia de una alta correlación entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado, ya que de esta manera la covarianza será alta y, por consiguiente, la reducción de la varianza será mayor.

Puede ser visto en la ecuación (3.9) y en la figura 3.1 que la varianza del estimador es un polinomio cuadrático respecto de ρ_C . Además, en la figura 3.1 se ve que el parámetro de control propicia una reducción de la varianza cuando se elige su valor en el intervalo $[0; 2\rho_C^*]$.

Expresiones específicas de estos estimadores dependen de la estadística H que se analice; concretamente, en este trabajo se usarán la esperanza y la varianza. Las expresiones particulares para ambos casos son dadas en las secciones 3.2.1.1 y 3.2.1.2.

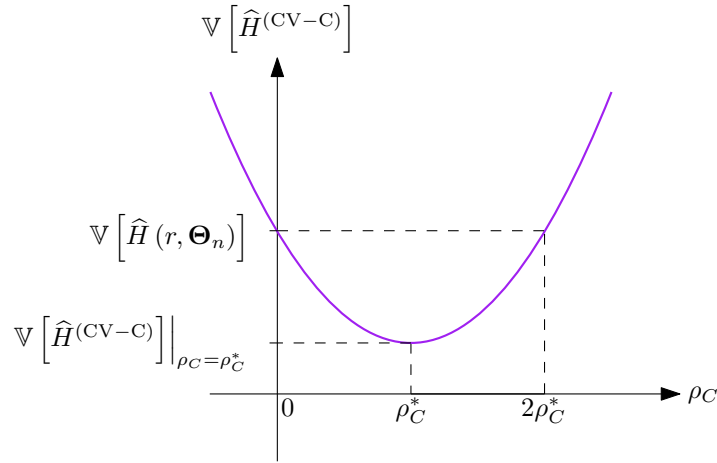


Figura 3.1: Representación esquemática de la varianza $\mathbb{V} \left[\widehat{H}^{(CV-C)} \right]$ en función del parámetro de control ρ_C .

3.2.1.1. Esperanza

A partir de (3.8), se deduce que el estimador control variates de la esperanza con la estadística $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ conocida es

$$\widehat{\mu}_1^{(CV-C)} = \widehat{\mu}_1'(r, \Theta_n) - \alpha_C \left(\widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_n) - \mathbb{E}[\tilde{r}] \right) \quad (3.12)$$

donde $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ es la esperanza entregada por el modelo aproximado y α_C es el parámetro de control del estimador de la esperanza cuando la esperanza $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ es conocida. Además:

- $\widehat{\mu}_1'(r, \Theta_n)$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .

Asumiendo que el parámetro α_C es conocido, se puede aplicar la ecuación (3.9) para obtener la varianza de $\widehat{\mu}_1^{(CV-C)}$. Para ello, se necesitan los siguientes resultados:

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1'(r, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n}$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{\mu}_1'(r, \Theta_n), \widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{1,1}}{n}$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{n}$$

Así,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1^{(CV-C)} \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n} - 2\alpha_C \frac{\mu_{1,1}}{n} + \alpha_C^2 \frac{\mu_{0,2}}{n} \quad (3.13)$$

El parámetro de control óptimo α_C^* se obtiene al minimizar la expresión anterior (calculando su derivada con respecto a α_C e igualando a cero). Así,

$$\alpha_C^* = \frac{\mu_{1,1}}{\mu_{0,2}} \quad (3.14)$$

Reemplazando en (3.13), se obtiene la menor varianza que puede tomar el estimador. Así,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1^{(CV-C)} \right] \Big|_{\alpha_C = \alpha_C^*} = \frac{1}{n} \left(\mu_{2,0} - \frac{\mu_{1,1}^2}{\mu_{0,2}} \right) \quad (3.15)$$

El parámetro de control óptimo α_C^* puede ser estimado usando las mismas n muestras agrupadas en Θ_n . Para ello, es necesario reemplazar los momentos en (3.14) por sus estimadores, obteniendo $\widehat{\alpha}_C^*$, de modo que

$$\widehat{\alpha}_C^* = \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_n)}{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)}$$

donde

$$\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_n) = \frac{ns_{1,1} - s_{0,1}s_{1,0}}{(n-1)n} \quad (3.16)$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n) = \frac{ns_{0,2} - s_{0,1}^2}{(n-1)n} \quad (3.17)$$

En las expresiones anteriores, $s_{p,q}$ se define por

$$s_{p,q} \equiv s_{p,q}(\Theta_n) = \sum_{i=1}^n \left(r(\theta_n^{(i)}) \right)^p \left(\tilde{r}(\theta_n^{(i)}) \right)^q$$

donde $r(\theta_n^{(i)})$ es la respuesta entregada por el modelo de alta fidelidad y $\tilde{r}(\theta_n^{(i)})$ es la respuesta entregada por el modelo aproximado cuando estos reciben $\theta_n^{(i)}$ como entrada.

De igual manera, los momentos de la expresión (3.15) no son conocidos. Por lo tanto, la varianza puede ser estimada al reemplazar estos momentos desconocidos por sus estimadores. Entonces,

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_1^{(CV-C)} \right] \Big|_{\alpha_C = \widehat{\alpha}_C^*} = \frac{1}{n} \left(\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_n) - \frac{\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n)}{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)} \right)$$

donde

$$\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_n) = \frac{ns_{2,0} - s_{1,0}^2}{(n-1)n} \quad (3.18)$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n) = & \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 2) s_{1,1}^2 + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ & (2 - 2n) s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + \\ & \left. s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - s_{2,0} s_{0,1}^2 - s_{0,2} s_{1,0}^2 + s_{0,2} s_{2,0} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.1.2. Varianza

A partir de (3.8), se deduce que el estimador control variates de la varianza con la estadística $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ conocida es

$$\widehat{\mu}_2^{(CV-C)} = \widehat{\mu}_2(r, \Theta_n) - \gamma_C (\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n) - \mathbb{V}[\tilde{r}]) \quad (3.20)$$

donde $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ es la varianza entregada por el modelo aproximado y γ_C es el parámetro de control del estimador de la varianza cuando la varianza $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ es conocida. Además:

- $\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n)$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .

Asumiendo que el parámetro γ_C es conocido, la varianza de $\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}$ es

$$\mathbb{V}[\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}] = B_1 - 2\gamma_C B_2 + \gamma_C^2 B_3 \quad (3.21)$$

donde

$$B_1 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n)] = \frac{\mu_{4,0}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{2,0}^2}{(n-1)n},$$

$$B_2 = \text{Cov}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n-1)n} + \frac{\mu_{2,2}}{n} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n}$$

y

$$B_3 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)] = \frac{\mu_{0,4}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{0,2}^2}{(n-1)n}$$

El parámetro de control óptimo γ_C^* se obtiene al minimizar la expresión (3.21). Así,

$$\gamma_C^* = \frac{B_2}{B_3}$$

Reemplazando este parámetro en (3.21), se obtiene la mínima varianza asociada al estimador $\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}$:

$$\mathbb{V}[\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}] \Big|_{\gamma_C = \gamma_C^*} = B_1 - \frac{(B_2)^2}{B_3} \quad (3.22)$$

El parámetro de control óptimo γ_C^* puede ser estimado usando las mismas n muestras agrupadas en Θ_n . Para ello, se deben reemplazar los momentos necesarios para calcular B_2 y B_3 por sus estimadores, obteniendo $\widehat{\gamma}_C^*$, de modo que

$$\widehat{\gamma}_C^* = \frac{\widehat{B}_2}{\widehat{B}_3}$$

donde

$$\widehat{B}_2 = \frac{2\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n)}{(n-1)n} + \frac{\widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_n)}{n} - \frac{\widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)}{n}$$

y

$$\widehat{B}_3 = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_n)}{n} - \frac{(n-3)\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_n)}{(n-1)n}$$

Los estimadores insesgados de los momentos centrales bivariados de las expresiones anteriores son

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 2) s_{1,1}^2 + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ &\quad (2 - 2n) s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + \\ &\quad \left. s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - s_{2,0} s_{0,1}^2 - s_{0,2} s_{1,0}^2 + s_{0,2} s_{2,0} \right), \\ \widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-2n^2 + 4n - 6) s_{2,1} s_{0,1} + (-2n^2 + 4n - 6) s_{1,0} s_{1,2} + \right. \\ &\quad (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{2,2} + n s_{2,0} s_{0,1}^2 + 4n s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + n s_{0,2} s_{1,0}^2 + \\ &\quad \left. (6 - 4n) s_{1,1}^2 + (3 - 2n) s_{0,2} s_{2,0} - 3 s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 \right), \\ \widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 1) s_{0,2} s_{2,0} + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ &\quad (2 - n) s_{2,0} s_{0,1}^2 + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2 - n) s_{0,2} s_{1,0}^2 + \\ &\quad \left. (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - 4 s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + 2 s_{1,1}^2 \right), \\ \widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-4n^2 + 8n - 12) s_{0,3} s_{0,1} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{0,4} + \right. \\ &\quad \left. 6n s_{0,2} s_{0,1}^2 + (9 - 6n) s_{0,2}^2 - 3 s_{0,1}^4 \right) \end{aligned}$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_n) = \frac{(n^2 - 3n + 3) s_{0,2}^2 + (n - n^2) s_{0,4} - 2n s_{0,2} s_{0,1}^2 + (4n - 4) s_{0,3} s_{0,1} + s_{0,1}^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

La varianza (3.22) puede ser estimada al reemplazar los momentos desconocidos por sus estimadores. Así,

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(CV-C)} \right] \Big|_{\gamma_C = \widehat{\gamma}_C^*} = \widehat{B}_1 - \frac{\widehat{B}_2^2}{\widehat{B}_3}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 &= \frac{\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_n)}{n} - \frac{(n-3)\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_n)}{(n-1)n}, \\ \widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-4n^2 + 8n - 12) s_{3,0} s_{1,0} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{4,0} + \right. \\ &\quad \left. 6n s_{2,0} s_{1,0}^2 + (9 - 6n) s_{2,0}^2 - 3 s_{1,0}^4 \right) \end{aligned}$$

y

$$\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_n) = \frac{(n^2 - 3n + 3) s_{2,0}^2 + (n - n^2) s_{4,0} - 2n s_{2,0} s_{1,0}^2 + (4n - 4) s_{3,0} s_{1,0} + s_{1,0}^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

3.2.1.3. Ejemplo con función analítica

Sea r la respuesta proveniente de un modelo de alta fidelidad, la cual se define por la expresión

$$r = r(\theta) = \exp(3\theta)$$

donde θ es el parámetro incierto del problema con función de densidad de probabilidad $f(\theta)$, el cual sigue una distribución uniforme, tal que $\theta \sim \mathcal{U}(0, 4)$.

En los problemas reales de ingeniería, obtener la respuesta de interés en función de los parámetros inciertos es bastante improbable. En la práctica, solo se pueden tener muestras de esta respuesta para valores fijos de los parámetros inciertos. Sin embargo, en este ejemplo numérico se conoce esta función, ya que así se pueden calcular de manera exacta las estadísticas de segundo orden. En el caso de la esperanza, su valor exacto es

$$\mu'_1 = \mathbb{E}[r] = \int_{-\infty}^{\infty} r(\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^4 \exp(3\theta) \frac{1}{4-0} d\theta = 1,36 \times 10^4$$

Este valor es usado como referencia para probar la efectividad del método Monte Carlo y la técnica control variates. Para esta última, es necesario definir modelos aproximados. En este ejemplo, se definen dos respuestas aproximadas: la primera es

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_1(\theta) = \exp(6)(3\theta - 5),$$

la cual surge de aplicar la aproximación de Taylor de primer orden de la ecuación (2.2) a la respuesta r , y la segunda es

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_2(\theta) = \frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26),$$

la cual surge de aplicar la aproximación de Taylor de segundo orden (2.3). Ambas respuestas se calculan alrededor del punto de expansión $\theta = 2$. La esperanza de ambas es

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_1(\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^4 \exp(6)(3\theta - 5) \frac{1}{4-0} d\theta = 4,03 \times 10^2$$

y

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_2(\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^4 \frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26) \frac{1}{4-0} d\theta = 2,82 \times 10^3$$

En la figura 3.2 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo de la esperanza $\widehat{\mu}_1^{(MCS)}$ de la ecuación (3.2) y al estimador control variates $\widehat{\mu}_1^{(CV-C)}$ de la ecuación (3.12), el cual usa el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\alpha}_C^*$. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . Para fabricar estos histogramas, se tomaron 10^6 repeticiones de los estimadores de la esperanza, donde cada repetición a su vez fue fabricada con $n = 300$ muestras de la respuesta r del modelo de alta fidelidad y de las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 de los modelos de baja fidelidad. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador control

variates poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 , de lo que se puede inferir que, mientras mayor es la calidad de la respuesta aproximada, menor es la varianza del estimador.

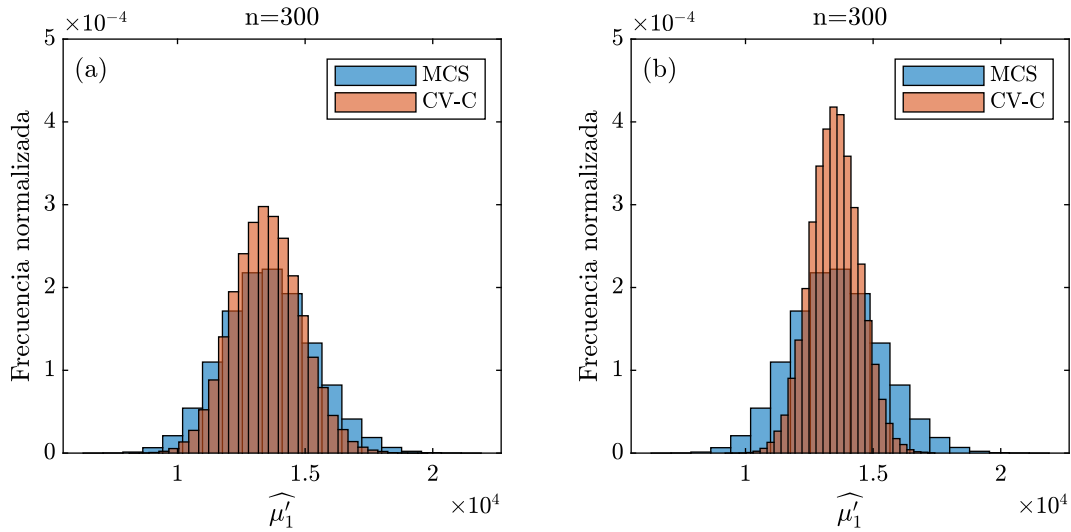


Figura 3.2: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

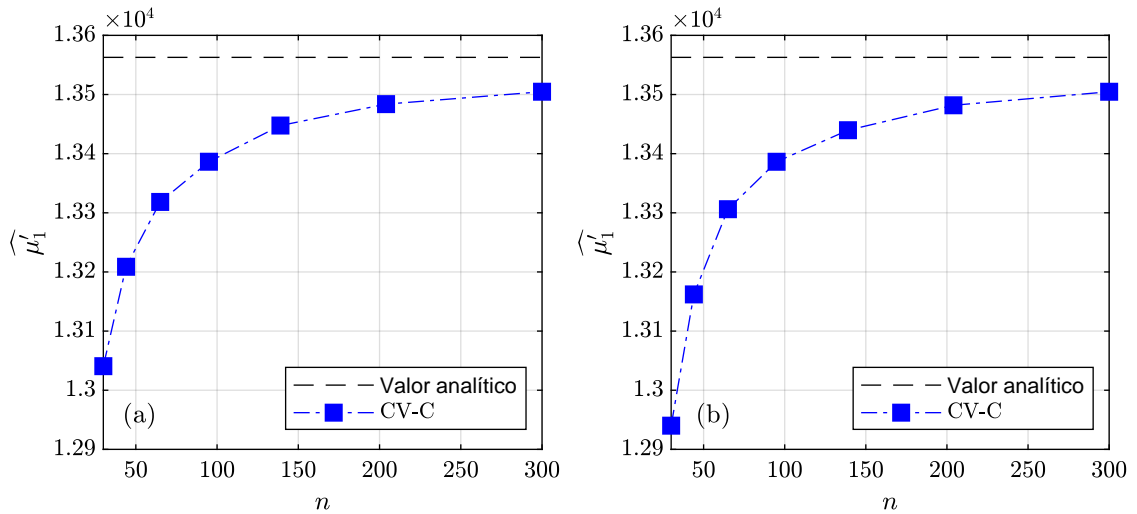


Figura 3.3: Ejemplo analítico: Estimador $\hat{\mu}_1^{(CV-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

En la figura 3.3 se muestra la evolución del estimador control variates de la esperanza con respecto al número n de muestras de la respuesta r (a partir de n muestras, se calcula una realización

del estimador). Para realizar estas gráficas, cada punto se obtiene tomando el promedio de 10^6 realizaciones del estimador control variates, el cual es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\alpha}_C^*$. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un sesgo en el estimador control variates. Este sesgo es mayor mientras menor es el número de muestras utilizadas, y va disminuyendo a medida que se aumenta el número de muestras.

Para el caso de la varianza, el valor exacto buscado μ_2 para este problema analítico es

$$\mu_2 = \mathbb{V}[r] = \int_{-\infty}^{\infty} (r(\theta) - \mathbb{E}[r])^2 f(\theta) d\theta = \int_0^4 (\exp(3\theta) - 1,36 \times 10^4)^2 \frac{1}{4-0} d\theta = 9,20 \times 10^8$$

Para la aplicación de la técnica control variates, se calcula la varianza exacta de las respuestas aproximadas \widetilde{r}_1 y \widetilde{r}_2 , las cuales son

$$\mathbb{V}[\widetilde{r}_1] = \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{r}_1(\theta) - \mathbb{E}[\widetilde{r}_1])^2 f(\theta) d\theta = \int_0^4 (\exp(6)(3\theta - 5) - 4,03 \times 10^2)^2 \frac{1}{4-0} d\theta = 1,95 \times 10^6$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\widetilde{r}_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{r}_2(\theta) - \mathbb{E}[\widetilde{r}_2])^2 f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^4 \left(\frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26) - 2,82 \times 10^3 \right)^2 \frac{1}{4-0} d\theta \\ &= 6,64 \times 10^6 \end{aligned}$$

En la figura 3.4 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo de la varianza $\widehat{\mu}_2^{(MCS)}$ de la ecuación (3.3) y al estimador control variates de la varianza $\widehat{\mu}_2^{(CV-C)}$ de la ecuación (3.20), el cual usa el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\gamma}_C^*$. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \widetilde{r}_1 , mientras que el segundo a \widetilde{r}_2 . La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 3.2. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador control variates poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \widetilde{r}_2 respecto del método que utiliza \widetilde{r}_1 .

En la figura 3.5 se muestra la evolución del estimador control variates de la varianza con respecto al número n de muestras de la respuesta r . El estimador control variates es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\gamma}_C^*$. La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 3.3. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro óptimo genera un sesgo en el estimador control variates. Este sesgo alcanza su máximo cuando el número de muestras n es mínimo, y va disminuyendo a medida que aumenta este número.

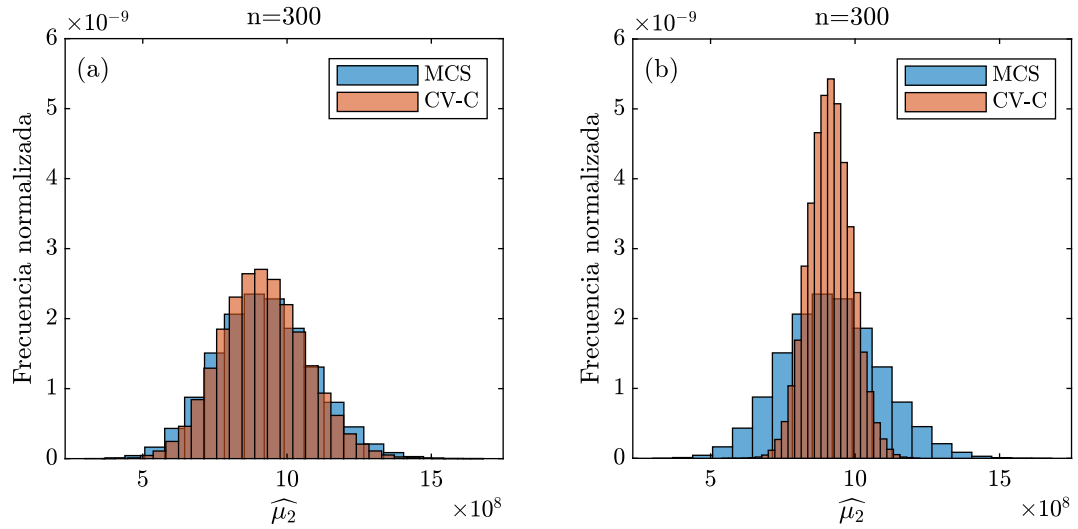


Figura 3.4: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

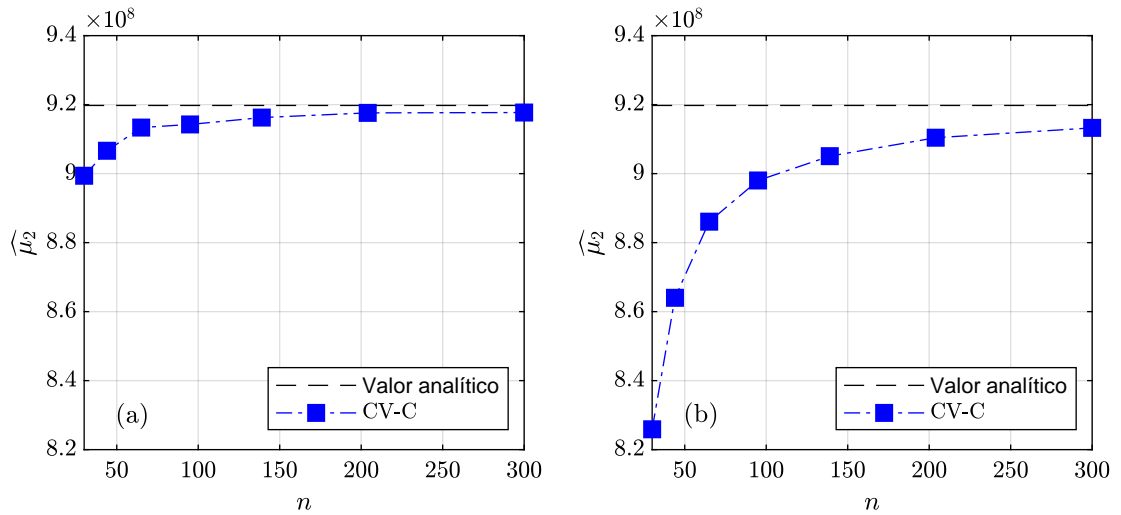


Figura 3.5: Ejemplo analítico: Estimator $\hat{\mu}_2^{(CV-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

3.2.2. Estadísticas desconocidas de la variable de control

La sección 3.2.1 presentó el caso donde la estadística asociada a la variable de control está disponible de manera cerrada. En cambio, en esta sección se considera el caso donde estas estadísticas no están disponibles y deben ser estimadas. Esto se da, por ejemplo, cuando se utiliza el modelo de base reducida explicado en la sección 2.2. Este modelo de base reducida permite aproximar la respuesta de interés, pero las estadísticas de segundo orden asociadas no se conocen de forma

precisa y deben ser estimadas, por ejemplo, utilizando simulación Monte Carlo.

El estimador control variates para el caso en que la estadística $H(\tilde{r})$ se desconoce es $\hat{H}^{(CV-D)}$. Su expresión se obtiene a partir de (3.7), de modo que:

$$\hat{H}^{(CV-D)} = \hat{H}(r, \Theta_n) - \rho_D \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right) \quad (3.23)$$

donde ρ_D es el parámetro de control del estimador control variates, construido cuando la estadística $H(\tilde{r})$ no se conoce y debe ser estimado mediante $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)$. Además:

- $\hat{H}(r, \Theta_n)$ es el estimador de $H(r)$, calculado con n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de $H(\tilde{r})$, calculado con n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)$ es el estimador de $H(\tilde{r})$, calculado con m muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_m .

Se recuerda que Θ_n es una matriz que se definió en (3.1). Así,

$$\Theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^{(1)} & \theta_n^{(2)} & \dots & \theta_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

En (3.23), se debe hacer notar que Θ_m agrupa muestras que son *diferentes* de las n muestras de Θ_n . Así,

$$\Theta_m = \begin{bmatrix} \theta_m^{(1)} & \theta_m^{(2)} & \dots & \theta_m^{(m)} \end{bmatrix}$$

Se recalca que, de acuerdo a la expresión (3.23), Θ_n agrupa muestras que son *compartidas* por el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado, mientras que Θ_m agrupa muestras que son usadas *exclusivamente* por el modelo aproximado.

Para calcular el parámetro de control óptimo ρ_D^* asociado, se asume en primera instancia que ρ_D es un valor conocido (no tiene variabilidad). Luego, recordando que

$$\mathbb{V}[aX - bY] = a^2\mathbb{V}[X] - 2ab \text{Cov}[X, Y] + b^2\mathbb{V}[Y],$$

la varianza de $\hat{H}^{(CV-D)}$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\hat{H}^{(CV-D)}] &= \mathbb{V}[\hat{H}(r, \Theta_n)] - 2\rho_D \text{Cov}[\hat{H}(r, \Theta_n), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)] + \rho_D^2 \mathbb{V}[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)] \\ &\quad + \rho_D^2 \mathbb{V}[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Al establecer que las muestras de Θ_m sean distintas a las muestras en Θ_n , se facilita el cálculo de la varianza del estimador $\hat{H}^{(CV-D)}$. En caso contrario, los términos $\text{Cov}[\hat{H}(r, \Theta_n), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)]$ y $\text{Cov}[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)]$ aparecerían en la expresión (3.24), los cuales serían distintos de cero.

Derivando con respecto a ρ_D e igualando a cero, se obtiene una expresión para el parámetro de control óptimo ρ_D^* , el cual minimiza la varianza. Esta expresión es

$$\rho_D^* = \frac{\text{Cov}[\hat{H}(r, \Theta_n), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)]}{\mathbb{V}[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)] + \mathbb{V}[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)]} \quad (3.25)$$

Reemplazando ρ_D^* en (3.24), se obtiene la menor varianza que puede tomar el estimador $\widehat{H}^{(CV-D)}$, es decir,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] \Big|_{\rho_D = \rho_D^*} = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) \right] - \frac{\left(\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] \right)^2}{\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) \right]} \quad (3.26)$$

Tal como se comentó en la sección 3.2.1, si se quisiera estimar la estadística H y solo se tuviera el modelo de alta fidelidad, se calcularía $\widehat{H}(r, \Theta_n)$ mediante el método Monte Carlo, cuya varianza sería $\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) \right]$. Sin embargo, disponer de un segundo modelo permite construir el estimador $\widehat{H}^{(CV-D)}$, el cual tiene una varianza menor a $\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) \right]$ dado que el sustraendo de la expresión (3.26) siempre es positivo. Esta reducción de la varianza es el fin que se persigue cuando se utiliza la técnica control variates.

Adicionalmente, viendo la expresión (3.26), es deseable minimizar la varianza $\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right]$ para así maximizar el sustraendo y, por consiguiente, maximizar la reducción de la varianza. Para ello, el número de muestras m con el que se construye el estimador $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)$ debe ser lo más grande posible. Obtener un número de muestras m relativamente alto es viable, dado que las m muestras de la respuesta \tilde{r} vienen de un modelo aproximado, el cual tiene un costo computacional mucho menor al costo asociado al modelo de alta fidelidad.

Además, se hace notar la importancia de una alta correlación entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado, ya que de esta manera la covarianza será alta y, por consiguiente, la reducción de la varianza será mayor. Puede ser visto en la ecuación (3.24) y en la figura 3.6 que la varianza del estimador es un polinomio cuadrático respecto de ρ_D . Además, en la figura 3.6 se ve que el parámetro de control propicia una reducción de la varianza cuando se elige su valor en el intervalo $[0; 2\rho_D^*]$.

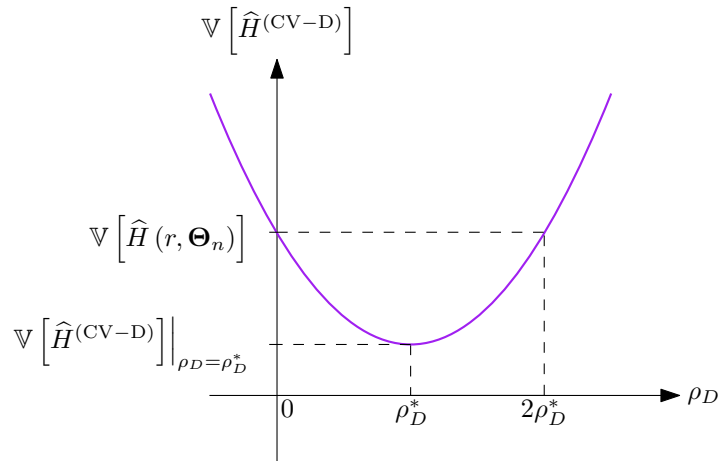


Figura 3.6: Representación esquemática de la varianza $\mathbb{V} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right]$ en función del parámetro de control ρ_D .

Las expresiones específicas para los casos en que la estadística H sea la esperanza y la varianza son dadas en las secciones 3.2.2.1 y 3.2.2.2.

3.2.2.1. Esperanza

A partir de (3.23), se deduce que el estimador control variates de la esperanza, usado cuando la esperanza de la variable de control $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ no se conoce, es

$$\widehat{\mu}'_1^{(CV-D)} = \widehat{\mu}'_1(r, \Theta_n) - \alpha_D \left(\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_m) \right) \quad (3.27)$$

donde α_D es el parámetro de control del estimador de la esperanza cuando la esperanza $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ no se conoce, por lo que es estimada con $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_m)$. Además:

- $\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_n)$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_m)$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las m muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_m .

Asumiendo que el parámetro α_D es conocido, se puede aplicar la ecuación (3.24) para obtener la varianza de $\widehat{\mu}'_1^{(CV-D)}$. Para ello, se necesitan los siguientes resultados:

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n}$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_n), \widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{1,1}}{n}$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_n) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{n}$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_m) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{m}$$

Así,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1^{(CV-D)} \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n} - 2\alpha_D \frac{\mu_{1,1}}{n} + \alpha_D^2 \frac{\mu_{0,2}}{n} + \alpha_D^2 \frac{\mu_{0,2}}{m} \quad (3.28)$$

El parámetro de control óptimo α_D^* se obtiene al minimizar la expresión anterior. Así,

$$\alpha_D^* = \frac{\frac{\mu_{1,1}}{n}}{\frac{\mu_{0,2}}{n} + \frac{\mu_{0,2}}{m}} \quad (3.29)$$

Reemplazando en (3.28), se obtiene la menor varianza que puede tomar el estimador. Así,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1^{(CV-D)} \right] \Big|_{\alpha_D = \alpha_D^*} = \frac{\mu_{2,0}}{n} - \frac{\frac{\mu_{1,1}^2}{n^2}}{\frac{\mu_{0,2}}{n} + \frac{\mu_{0,2}}{m}} \quad (3.30)$$

El parámetro de control óptimo α_D^* puede ser estimado usando las mismas n y m muestras agrupadas en Θ_n y Θ_m , respectivamente. Para ello, es necesario reemplazar los momentos en (3.29) por sus estimadores, obteniendo $\widehat{\alpha}_D^*$, de modo que

$$\widehat{\alpha}_D^* = \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_n)}{\frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)}{n} + \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_m)}{m}}$$

Los estimadores $\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_n)$ y $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)$ se mostraron en (3.16) y (3.17), respectivamente:

$$\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_n) = \frac{ns_{1,1} - s_{0,1}s_{1,0}}{(n-1)n}$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n) = \frac{ns_{0,2} - s_{0,1}^2}{(n-1)n}$$

donde

$$s_{p,q} \equiv s_{p,q}(\Theta_n) = \sum_{i=1}^n \left(r(\theta_n^{(i)}) \right)^p \left(\widetilde{r}(\theta_n^{(i)}) \right)^q$$

En la expresión anterior, $r(\theta_n^{(i)})$ es la respuesta entregada por el modelo de alta fidelidad y $\widetilde{r}(\theta_n^{(i)})$ es la respuesta entregada por el modelo aproximado cuando estos reciben $\theta_n^{(i)}$ como entrada.

Por otra parte, el estimador $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_m)$ se define en la ecuación

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_m) = \frac{mt_{0,2} - t_{0,1}^2}{(m-1)m}$$

donde

$$t_{p,q} \equiv t_{p,q}(\Theta_m) = \sum_{i=1}^m \left(r(\theta_m^{(i)}) \right)^p \left(\widetilde{r}(\theta_m^{(i)}) \right)^q$$

Se debe hacer notar que, mientras $s_{p,q}$ se calcula con las muestras de los parámetros de entrada agrupadas en Θ_n , el término $t_{p,q}$ se calcula con las muestras agrupadas en Θ_m .

Los momentos de la expresión (3.30) tampoco son conocidos. Por lo tanto, la varianza puede ser estimada al reemplazar estos momentos desconocidos por sus estimadores, es decir,

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_1^{(CV-D)} \right] \Big|_{\alpha_D = \widehat{\alpha}_D^*} = \frac{\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_n)}{n} - \frac{\frac{\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n)}{n^2}}{\frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)}{n} + \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_m)}{m}}$$

donde los estimadores $\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_n)$ y $\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n)$ se mostraron en (3.18) y (3.19) respectivamente:

$$\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_n) = \frac{ns_{2,0} - s_{1,0}^2}{(n-1)n}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n) = & \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 2) s_{1,1}^2 + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ & (2 - 2n) s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + \\ & \left. s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - s_{2,0} s_{0,1}^2 - s_{0,2} s_{1,0}^2 + s_{0,2} s_{2,0} \right) \end{aligned}$$

3.2.2.2. Varianza

A partir de (3.23), se deduce que el estimador control variates de la varianza, usado cuando la varianza de la variable de control $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ no se conoce, es

$$\widehat{\mu}_2^{(\text{CV-D})} = \widehat{\mu}_2(r, \Theta_n) - \gamma_D (\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_m)) \quad (3.31)$$

donde γ_D es el parámetro de control del estimador de la varianza cuando la varianza $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ no se conoce, por lo que es estimada con $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_m)$. Además:

- $\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n)$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las n muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_n .
- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_m)$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las m muestras de los parámetros de entrada, agrupadas en Θ_m .

Asumiendo que el parámetro γ_D es conocido, la varianza de $\widehat{\mu}_2^{(\text{CV-D})}$ es

$$\mathbb{V}[\widehat{\mu}_2^{(\text{CV-D})}] = B_1 - 2\gamma_D B_2 + \gamma_D^2 (B_3 + B_4) \quad (3.32)$$

donde B_1 , B_2 y B_3 fueron definidos previamente:

$$B_1 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n)] = \frac{\mu_{4,0}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{2,0}^2}{(n-1)n},$$

$$B_2 = \text{Cov}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n-1)n} + \frac{\mu_{2,2}}{n} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n},$$

y

$$B_3 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)] = \frac{\mu_{0,4}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{0,2}^2}{(n-1)n}$$

Por otro lado, B_4 se define con la expresión

$$B_4 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_m)] = \frac{\mu_{0,4}}{m} - \frac{(m-3)\mu_{0,2}^2}{(m-1)m}$$

El parámetro de control óptimo γ_D^* se obtiene al minimizar la expresión (3.32). Entonces,

$$\gamma_D^* = \frac{B_2}{B_3 + B_4}$$

Se reemplaza este parámetro en (3.32). Así,

$$\mathbb{V}[\widehat{\mu}_2^{(\text{CV-D})}] \Big|_{\gamma_D = \gamma_D^*} = B_1 - \frac{(B_2)^2}{B_3 + B_4} \quad (3.33)$$

El parámetro de control óptimo γ_D^* puede ser estimado usando las mismas n y m muestras agrupadas en Θ_n y Θ_m , respectivamente. Para ello, se deben reemplazar los momentos necesarios para calcular B_2 , B_3 y B_4 por sus estimadores, obteniendo $\widehat{\gamma}_D^*$, de modo que

$$\widehat{\gamma}_D^* = \frac{\widehat{B}_2}{\widehat{B}_3 + \widehat{B}_4}$$

donde \widehat{B}_2 y \widehat{B}_3 fueron definidos previamente:

$$\widehat{B}_2 = \frac{2\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n)}{(n-1)n} + \frac{\widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_n)}{n} - \frac{\widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n)}{n}$$

y

$$\widehat{B}_3 = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_n)}{n} - \frac{(n-3)\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_n)}{(n-1)n}$$

Por otro lado, \widehat{B}_4 se define con la expresión

$$\widehat{B}_4 = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_m)}{m} - \frac{(m-3)\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_m)}{(m-1)m}$$

Los estimadores insesgados de los momentos centrales bivariados de las expresiones anteriores se mostraron previamente:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 2) s_{1,1}^2 + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ &\quad \left. (2 - 2n) s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + \right. \\ &\quad \left. s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - s_{2,0} s_{0,1}^2 - s_{0,2} s_{1,0}^2 + s_{0,2} s_{2,0} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-2n^2 + 4n - 6) s_{2,1} s_{0,1} + (-2n^2 + 4n - 6) s_{1,0} s_{1,2} + \right. \\ &\quad \left. (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{2,2} + n s_{2,0} s_{0,1}^2 + 4n s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + n s_{0,2} s_{1,0}^2 + \right. \\ &\quad \left. (6 - 4n) s_{1,1}^2 + (3 - 2n) s_{0,2} s_{2,0} - 3 s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((n^2 - 3n + 1) s_{0,2} s_{2,0} + (n - n^2) s_{2,2} + \right. \\ &\quad \left. (2 - n) s_{2,0} s_{0,1}^2 + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2 - n) s_{0,2} s_{1,0}^2 + \right. \\ &\quad \left. (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - 4 s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + 2 s_{1,1}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_n) &= \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-4n^2 + 8n - 12) s_{0,3} s_{0,1} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{0,4} + \right. \\ &\quad \left. 6n s_{0,2} s_{0,1}^2 + (9 - 6n) s_{0,2}^2 - 3 s_{0,1}^4 \right) \end{aligned}$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_n) = \frac{(n^2 - 3n + 3) s_{0,2}^2 + (n - n^2) s_{0,4} - 2n s_{0,2} s_{0,1}^2 + (4n - 4) s_{0,3} s_{0,1} + s_{0,1}^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

Por otra parte, los estimadores $\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_m)$ y $\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_m)$ son

$$\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_m) = \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)m} \left((-4m^2 + 8m - 12) t_{0,3}t_{0,1} + (m^3 - 2m^2 + 3m) t_{0,4} + 6mt_{0,2}t_{0,1}^2 + (9 - 6m)t_{0,2}^2 - 3t_{0,1}^4 \right)$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_m) = \frac{(m^2 - 3m + 3) t_{0,2}^2 + (m - m^2) t_{0,4} - 2mt_{0,2}t_{0,1}^2 + (4m - 4)t_{0,3}t_{0,1} + t_{0,1}^4}{(m-3)(m-2)(m-1)m}$$

La varianza de la expresión (3.33) puede ser estimada al reemplazar los momentos desconocidos por sus estimadores. Así:

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(CV-D)} \right] \Big|_{\gamma_D = \widehat{\gamma}_D} = \widehat{B}_1 - \frac{\widehat{B}_2^2}{\widehat{B}_3 + \widehat{B}_4}$$

donde \widehat{B}_1 se definió previamente:

$$\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_n)}{n} - \frac{(n-3)\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_n)}{(n-1)n}$$

Los momentos de la expresión anterior son

$$\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_n) = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \left((-4n^2 + 8n - 12) s_{3,0}s_{1,0} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{4,0} + 6ns_{2,0}s_{1,0}^2 + (9 - 6n)s_{2,0}^2 - 3s_{1,0}^4 \right)$$

y

$$\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_n) = \frac{(n^2 - 3n + 3) s_{2,0}^2 + (n - n^2) s_{4,0} - 2ns_{2,0}s_{1,0}^2 + (4n - 4)s_{3,0}s_{1,0} + s_{1,0}^4}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

3.2.2.3. Ejemplo con función analítica

Se retoma el ejemplo anterior, en el cual existe una respuesta r , representada por una función $r(\theta)$, a la cual se le quieren calcular las estadísticas de segundo orden mediante el método control variates. Para ello, se usan las funciones aproximadas $\widetilde{r}_1 = \widetilde{r}_1(\theta)$ y $\widetilde{r}_2 = \widetilde{r}_2(\theta)$. Estas respuestas fueron definidas previamente:

$$r = r(\theta) = \exp(3\theta),$$

$$\widetilde{r}_1 = \widetilde{r}_1(\theta) = \exp(6) (3\theta - 5)$$

y

$$\widetilde{r}_2 = \widetilde{r}_2(\theta) = \frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26)$$

donde θ es el parámetro incierto del problema con función de densidad de probabilidad $f(\theta)$, el cual sigue una distribución uniforme, tal que $\theta \sim \mathcal{U}(0, 4)$.

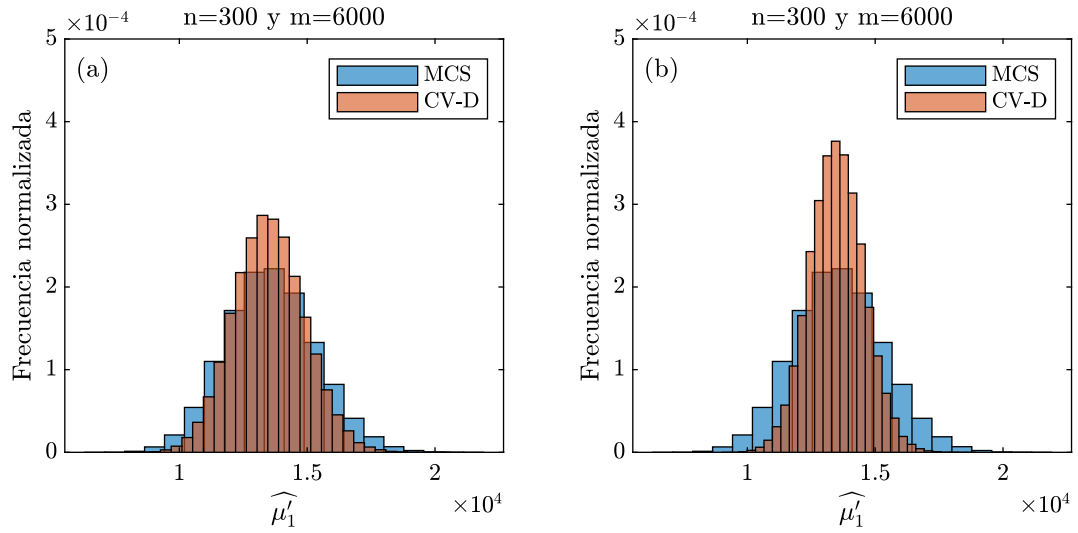


Figura 3.7: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}'_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

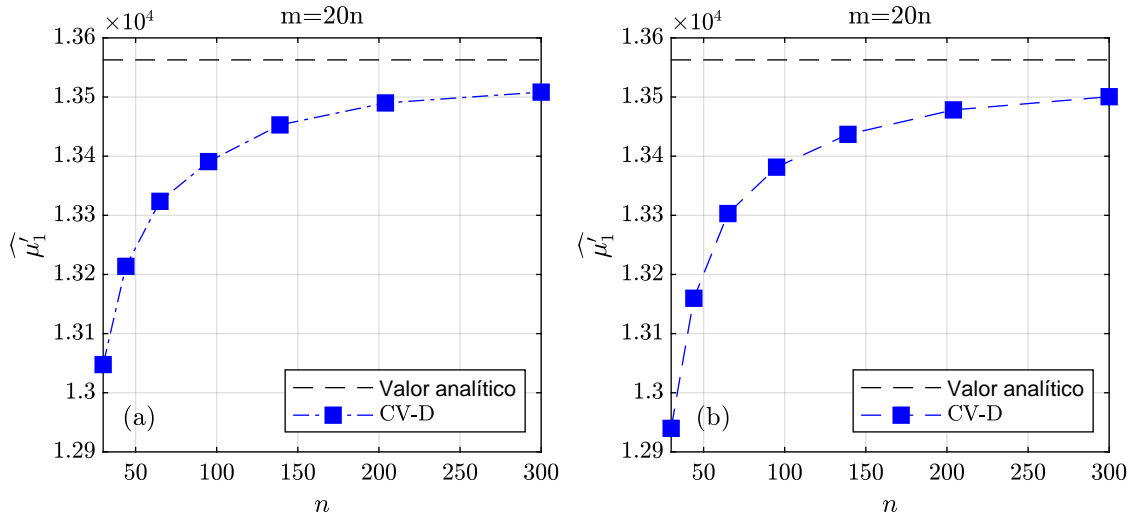


Figura 3.8: Ejemplo analítico: Estimator $\hat{\mu}'_1^{(CV-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

En el caso de la esperanza, su valor exacto μ'_1 es

$$\mu'_1 = \mathbb{E}[r] = 1,36 \times 10^4$$

En la figura 3.7 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo de la esperanza $\hat{\mu}'_1^{(MCS)}$, proveniente de la ecuación (3.2), y al estimador control variates de la esperanza $\hat{\mu}'_1^{(CV-D)}$, proveniente de la ecuación (3.27), el cual usa el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\alpha}_D^*$. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . Para

fabricar estos histogramas, se tomaron 10^6 repeticiones de los estimadores de la esperanza, donde cada repetición a su vez fue fabricada con $n = 300$ muestras de la respuesta r del modelo de alta fidelidad y de las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 de los modelos de baja fidelidad, junto con $m = 6000$ muestras de \tilde{r}_1 o \tilde{r}_2 , según sea el caso. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador control variates poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 , de lo que se puede inferir que, mientras mayor es la calidad de la respuesta aproximada, menor es la varianza del estimador.

En la figura 3.8 se muestra la evolución del estimador control variates de la esperanza con respecto al número n de muestras de la respuesta r y \tilde{r} (a partir de n muestras, se calcula una realización del estimador). En este caso, la estadística $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ se estima con $m = 20n$ muestras de \tilde{r} . Para realizar estas gráficas, cada punto se obtiene tomando el promedio de 10^6 realizaciones del estimador control variates, el cual es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\alpha}_D^*$. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un sesgo en el estimador control variates. Este sesgo es mayor mientras menor es el número de muestras utilizadas, y va disminuyendo a medida que se aumenta el número de muestras.

Para el caso de la varianza, el valor exacto buscado μ_2 para este problema analítico es

$$\mu_2 = \mathbb{V}[r] = 9,20 \times 10^8$$

En la figura 3.9 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo de la varianza $\hat{\mu}_2^{(MCS)}$, proveniente de la ecuación (3.3), y al estimador control variates de la varianza $\hat{\mu}_2^{(CV-D)}$, de la ecuación (3.31), el cual usa el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\gamma}_D^*$. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 3.7. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador control variates poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 , de lo que se puede inferir que, mientras mayor es la calidad de la respuesta aproximada, menor es la varianza del estimador.

En la figura 3.10 se muestra la evolución del estimador control variates de la varianza con respecto al número n de muestras de la respuesta r . El estimador control variates es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\gamma}_D^*$. La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 3.8. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un sesgo en el estimador control variates. Este sesgo alcanza su máximo cuando el número de muestras n es mínimo, y va disminuyendo a medida que aumenta el número de muestras.

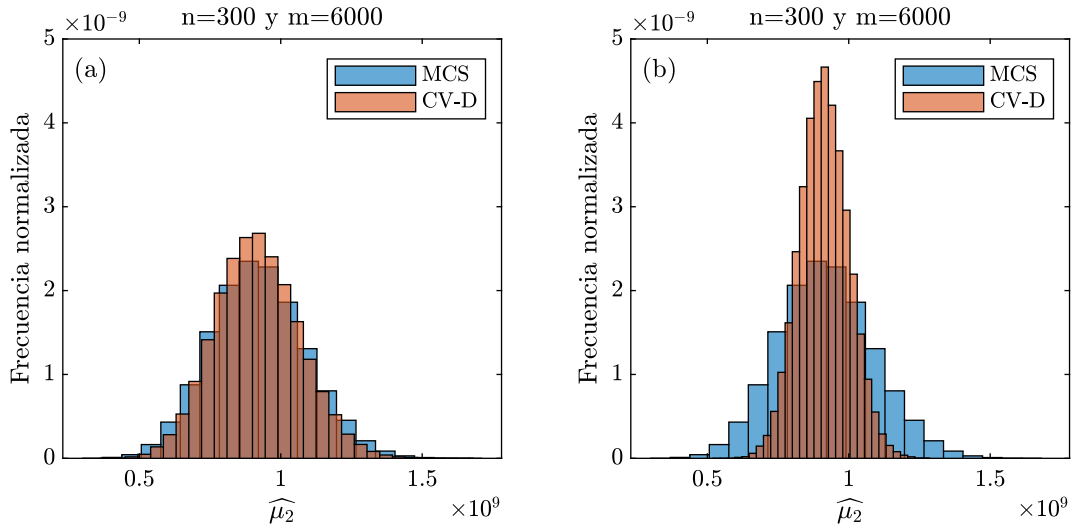


Figura 3.9: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS) y control variates (CV-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

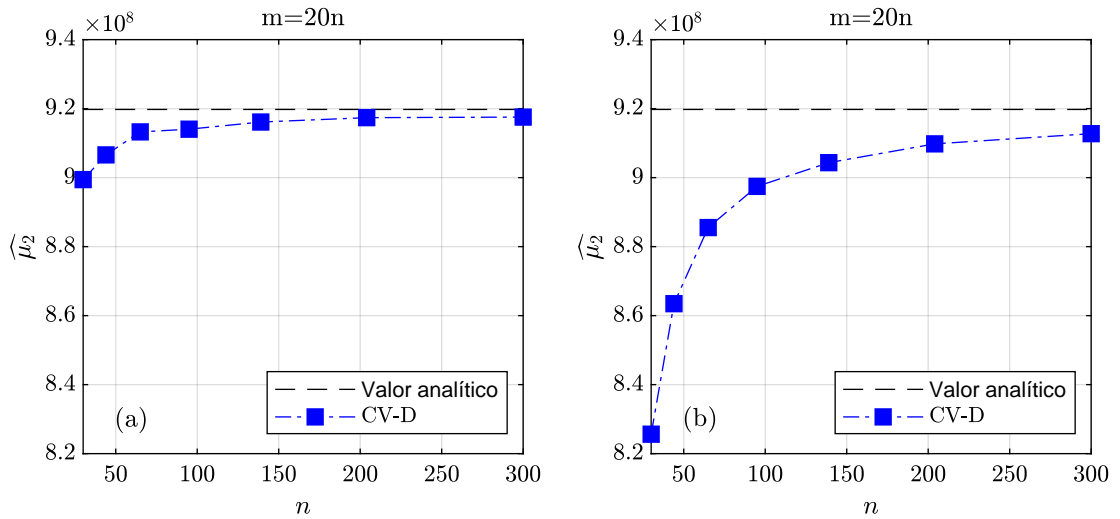


Figura 3.10: Ejemplo analítico: Estimator $\hat{\mu}_2^{(CV-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

3.2.3. Sesgo en los estimadores control variates

Previamente en esta memoria, se ha dicho que los estimadores que surgen de la aplicación de la técnica control variates se encuentran sesgados. Esto ha sido probado con un ejemplo numérico en las secciones 3.2.1.3 y 3.2.2.3. En esta sección se estudia cuál es el origen de ese sesgo.

El sesgo de un estimador \hat{w} es la diferencia entre el valor esperado del estimador \hat{w} y el parámetro

w que pretende estimar. Esto se expresa matemáticamente en la ecuación

$$\text{Sesgo} [\hat{w}] = \mathbb{E} [\hat{w}] - w \quad (3.34)$$

La definición de (3.34) puede ser aplicada a los estimadores control variates con las estadísticas conocidas o desconocidas de la variable de control, denotadas como $\hat{H}^{(\text{CV-C})}$ y $\hat{H}^{(\text{CV-D})}$, respectivamente.

En el primer caso, la estadística $\hat{H}^{(\text{CV-C})}$ se definió previamente en (3.8). Así,

$$\hat{H}^{(\text{CV-C})} = \hat{H}(r, \Theta_n) - \widehat{\rho}_C^* \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right)$$

Note que, a diferencia de la expresión (3.8), se reemplaza ρ_C por el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_C^*$, para así poder obtener un estimador $\hat{H}^{(\text{CV-C})}$ con la menor varianza posible. Luego, se calcula el sesgo de $\hat{H}^{(\text{CV-C})}$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] &= \mathbb{E} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\hat{H}(r, \Theta_n) - \widehat{\rho}_C^* \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right) \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\hat{H}(r, \Theta_n) \right] + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_C^* \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right) \right] - H(r) \end{aligned}$$

Suponga que $\hat{H}(r, \Theta_n)$ es un estimador insesgado de $H(r)$. Entonces,

$$\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_C^* \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right) \right]$$

Se aplica la propiedad $\mathbb{E} [X_1 X_2] = \mathbb{E} [X_1] \mathbb{E} [X_2] + \text{Cov} [X_1, X_2]$:

$$\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_C^* \right] \mathbb{E} \left[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right] + \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_C^*, \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right]$$

Si $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$ es un estimador insesgado de $H(\tilde{r})$, entonces

$$\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_C^*, \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - H(\tilde{r}) \right]$$

Ya que $H(\tilde{r})$ es una constante, se aplica la propiedad $\text{Cov} [X_1, X_2 + c] = \text{Cov} [X_1, X_2]$ (siendo c una constante). Así,

$$\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = -\text{Cov} \left[\widehat{\rho}_C^*, \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) \right]$$

Dado que el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_C^*$ depende de las muestras agrupadas en Θ_n según (3.10), $\widehat{\rho}_C^* = \widehat{\rho}_C^*(\Theta_n)$. Así,

$$\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = -\text{Cov} \left[\widehat{\rho}_C^*(\Theta_n), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) \right] \quad (3.35)$$

Por lo tanto, existe relación entre el parámetro de control óptimo y $\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$, lo cual implica que la covarianza de la expresión (3.35) no es nula. Así, el estimador control variates $\hat{H}^{(\text{CV-C})}$ está sesgado.

Recordando que la expresión para el error cuadrático medio es

$$\text{MSE} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] = \mathbb{V} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] + \left(\text{Sesgo} \left[\hat{H}^{(\text{CV-C})} \right] \right)^2,$$

el error cuadrático medio del estimador $\widehat{H}^{(CV-C)}$ no es igual a su varianza, dado que el sesgo es distinto de cero.

Por otra parte, para el caso en que las estadísticas de la variable de control sean desconocidas, la estadística $\widehat{H}^{(CV-D)}$ se definió previamente en (3.23). Así,

$$\widehat{H}^{(CV-D)} = \widehat{H}(r, \Theta_n) - \widehat{\rho}_D^* \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right)$$

Note que, a diferencia de la expresión (3.23), se reemplaza ρ_D por el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_D^*$, para así poder obtener un estimador $\widehat{H}^{(CV-D)}$ con la menor varianza posible. Luego, se calcula el sesgo de $\widehat{H}^{(CV-D)}$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) - \widehat{\rho}_D^* \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right) \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_n) \right] + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^* \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right) \right] - H(r) \end{aligned}$$

Si $\widehat{H}(r, \Theta_n)$ es un estimador insesgado de $H(r)$, entonces

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^* \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right) \right]$$

Se aplica la propiedad $\mathbb{E} [X_1 X_2] = \mathbb{E} [X_1] \mathbb{E} [X_2] + \text{Cov} [X_1, X_2]$:

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] &= \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^* \right] \mathbb{E} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] + \\ &\quad \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_D^*, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] \end{aligned}$$

Si $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)$ son estimadores insesgados de $H(\tilde{r})$, entonces

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_D^*, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right]$$

Se aplica la propiedad $\text{Cov} [X_1, X_2 + X_3] = \text{Cov} [X_1, X_2] + \text{Cov} [X_1, X_3]$:

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^*, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] - \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^*, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) \right]$$

Dado que el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_D^*$ depende de las muestras agrupadas en Θ_n y Θ_m según (3.25), $\widehat{\rho}_D^* = \widehat{\rho}_D^*(\Theta_n, \Theta_m)$. Así,

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^*(\Theta_n, \Theta_m), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m) \right] - \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^*(\Theta_n, \Theta_m), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n) \right] \quad (3.36)$$

Por lo tanto, existe relación entre el parámetro de control y los estimadores $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_n)$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_m)$, lo cual implica que las covarianzas de (3.36) no son nulas. Así, el estimador control variates $\widehat{H}^{(CV-D)}$ está sesgado.

Recordando que la expresión para el error cuadrático medio es

$$\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] + \left(\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] \right)^2,$$

el error cuadrático medio del estimador $\widehat{H}^{(CV-D)}$ no es igual a su varianza, dado que el sesgo es distinto de cero.

Por supuesto, es deseable que los estimadores sean insesgados. Para eliminar el sesgo, una opción posible es fabricar el estimador del parámetro de control con un grupo de muestras $\Theta_{n'}$ y $\Theta_{m'}$, independientes de Θ_n y Θ_m . Así:

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-C)} \right] = -\text{Cov} \left[\widehat{\rho}_C^* (\Theta_{n'}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_n) \right] = 0$$

y

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(CV-D)} \right] = \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^* (\Theta_{n'}, \Theta_{m'}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_m) \right] - \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^* (\Theta_{n'}, \Theta_{m'}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_n) \right] = 0$$

Como se puede apreciar, los estimadores control variates pasan a ser insesgados con este método. Sin embargo, el problema de usar esta solución es el aumento en el costo computacional que supone la evaluación de muestras adicionales de parte del modelo de alta fidelidad, lo que hace que el método sea inviable para gran parte de los problemas de ingeniería. Por ello, es necesario formular otro método para eliminar el sesgo de los estimadores control variates.

ELIMINACIÓN DEL SESGO EN LA ESTIMACIÓN DE LAS ESTADÍSTICAS DE SEGUNDO ORDEN OBTENIDAS MEDIANTE LA TÉCNICA CONTROL VARIATES USANDO UN ESQUEMA SPLITTING

En la sección anterior se plantearon expresiones para la estimación de las estadísticas de segundo orden, las cuales surgen de la aplicación de la técnica control variates. También se determinó que estos estimadores están sesgados, lo cual es una característica indeseable. Este sesgo, por lo tanto, debe ser eliminado con algún método, el cual no debe provocar un aumento significativo de los costos numéricos. Para ello, en este capítulo se desarrolla un esquema de separación (splitting) de muestras, el cual asegura la eliminación del sesgo en la estimación de las estadísticas de segundo orden.

y

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(\text{CV-D})} \right] = \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^* (\Theta_n, \Theta_m), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_m) \right] - \text{Cov} \left[\widehat{\rho}_D^* (\Theta_n, \Theta_m), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_n) \right] \quad (4.2)$$

Se evidencia que el sesgo es producido por la correlación entre el estimador del parámetro de control óptimo y los estimadores de la estadística H . Esta correlación es ocasionada por el hecho de que estos estimadores son calculados con el *mismo* grupo de muestras. Aquí está el fundamento para el uso de un esquema de separación de muestras; se busca que el estimador del parámetro de control óptimo y los estimadores de la estadística H se calculen con grupos *distintos* de muestras. De esa manera, las covarianzas de las expresiones (4.1) y (4.2) son iguales a cero y, por lo tanto, el sesgo se anula.

Si bien Avramidis y Wilson (1993) proponen este esquema de separación de muestras de entrada, el estimador presentado es válido solo para el cálculo de la esperanza. En la sección siguiente se propone un estimador con una aplicabilidad general.

La forma de este estimador (*estimador splitting*) depende del modelo aproximado usado, específicamente de si este modelo posee la capacidad o no de entregar de manera precisa las estadísticas de segundo orden asociadas a la respuesta que genera (*variable de control*). En la sección 4.2 se muestra el estimador splitting cuando el modelo aproximado permite conocer estas estadísticas de manera cerrada, mientras que en la sección 4.3 se muestra el estimador splitting cuando no se pueden conocer de manera cerrada, debiendo ser estimadas. Para finalizar, en la sección 4.4 se hace un análisis, con el objetivo de encontrar el número óptimo de grupos a formar para aplicar el esquema de separación de muestras o técnica splitting.

4.2. Estadísticas de la variable de control conocidas

Cuando las estadísticas son conocidas, el estimador splitting toma la forma

$$\widehat{H}^{(\text{SP-C})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \quad (4.3)$$

donde

$$\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} = \widehat{H} (r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H (\tilde{r}) \right) \quad (4.4)$$

Los términos en la expresión (4.4) se muestran a continuación:

- $\widehat{H} (r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la estadística H calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la estadística H calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $H (\tilde{r})$ es la estadística H que entrega el modelo aproximado.

Además, el término $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$ de la expresión (4.4) es el estimador del parámetro de control que reduce el error cuadrático medio del estimador $\widehat{H}_{(i)}^{(SP-C)}$. Este estimador está construido con el grupo $\tau(i)$. El número $\tau(i)$ viene dado por la expresión

$$\tau(i) = (i \bmod k) + 1 \tag{4.5}$$

donde \bmod es un operador tal que $a \bmod b$ es el resto que surge de dividir a entre b .

De esta manera, se asigna al grupo i otro grupo *distinto* de i (que en este caso es el grupo $\tau(i)$) con el cual se fabrica el parámetro de control que actúa sobre las muestras del grupo i (figura 4.2). Por lo tanto,

$$i \neq \tau(i), \quad i = 1, \dots, k$$

En otras palabras, las estadísticas $\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ *no están correlacionadas* con el parámetro de control $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$.

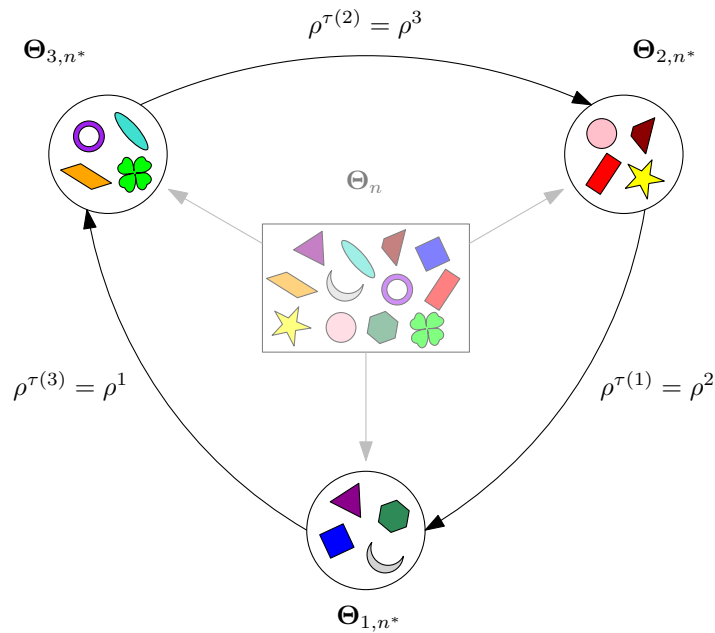


Figura 4.2: Asignación del parámetro de control óptimo usando el esquema de separación de muestras (splitting scheme). En este ejemplo, $n = 12$ y $k = 3$.

4.2.1. Sesgo

El estimador splitting de la expresión (4.3) tiene la ventaja por sobre el estimador control variates de ser *insesgado*. Para probar esto, se calcula el sesgo del estimador splitting:

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] - H(r) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] - H(r) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para el desarrollo, se necesita calcular la esperanza $\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \right] \end{aligned}$$

Suponiendo que $\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})$ es un estimador insesgado de la estadística $H(r)$ y aplicando la propiedad $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] + \text{Cov}[X_1, X_2]$, la esperanza $\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$ llega a ser

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] &= H(r) + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right] \mathbb{E} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right] + \\ &\quad \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right] \end{aligned}$$

Suponiendo que $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es un estimador insesgado de $H(\tilde{r})$ y aplicando la propiedad $\text{Cov}[X_1, X_2 + c] = \text{Cov}[X_1, X_2]$ (con c constante), la esperanza $\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$ toma la forma

$$\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] = H(r) + \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] \quad (4.7)$$

Hay que notar que en la expresión (4.7) existe un término de covarianza entre $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$ y el estimador $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$. Ambos son calculados con grupos de muestras distintas; mientras que $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$ es obtenido con el grupo $\tau(i) \neq i$, el estimador $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es calculado con el grupo i . Por lo tanto, *no existe correlación* entre ambos estimadores. Así,

$$\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] = H(r) \quad (4.8)$$

Se reemplaza este resultado en la expresión (4.6). Así,

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k H(r) \right) - H(r) \\ &= \frac{1}{k} (kH(r)) - H(r) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] = 0 \quad (4.9)$$

La expresión (4.9) indica que el estimador splitting $\widehat{H}^{(\text{SP-C})}$ es *insesgado*. Este es el resultado buscado con el método de separación de muestras en grupos.

4.2.2. Error cuadrático medio

Tal como se estableció en el capítulo anterior, la calidad de los estimadores puede ser cuantificada calculando su error cuadrático medio MSE. De ahí que es deseable calcular este error para el estimador splitting propuesto. Se recuerda que el error cuadrático medio de un estimador \hat{w} es

$$\text{MSE}[\hat{w}] = \mathbb{V}[\hat{w}] + (\text{Sesgo}[\hat{w}])^2$$

Como se probó en la sección 4.2.1, el sesgo del estimador splitting $\hat{H}^{(\text{SP-C})}$ es nulo. Por lo tanto,

$$\text{MSE}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}] = \mathbb{V}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}] \quad (4.10)$$

Así, el error cuadrático medio del estimador splitting es igual a su varianza. Se usa la expresión (4.3) en (4.10). Así,

$$\begin{aligned} \text{MSE}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}] &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}\right] \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \text{Cov}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}, \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

La expresión anterior requiere del cálculo del término de covarianza

$$\text{Cov}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}, \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] = \mathbb{E}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)} \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] - \mathbb{E}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}] \mathbb{E}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}]$$

Se usa el resultado (4.8), por lo que la covarianza llega a ser

$$\text{Cov}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}, \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] = \mathbb{E}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)} \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] - (H(r))^2 \quad (4.12)$$

Se reemplaza la expresión (4.4) en (4.12). Así,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}, \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] &= \mathbb{E}[\hat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \hat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*})] + \\ &\quad \mathbb{E}\left[-\hat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r})\right)\right] + \\ &\quad \mathbb{E}\left[-\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r})\right) \hat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*})\right] + \\ &\quad \mathbb{E}\left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r})\right) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r})\right)\right] - \\ &\quad (H(r))^2 \end{aligned}$$

Suponiendo que $i \neq j$ y recordando que $i \neq \tau(i)$ y $j \neq \tau(j)$, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(i)}, \hat{H}^{(\text{SP-C})}_{(j)}] &= \mathbb{E}\left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r})\right) \right. \\ &\quad \left. \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r})\right)\right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Es importante destacar que la expresión anterior es válida solo si $i \neq j$. Encontrar expresiones analíticas asociadas a (4.13) es muy difícil. Sin embargo, imponiendo que el número de grupos de muestras k sea por lo menos 3, es posible anular esta expresión. Esta nueva condición, sumado a la definición (4.5), asegura la ocurrencia de alguna de estas situaciones: $i \neq \tau(j)$ o $j \neq \tau(i)$. Esto se

puede traducir en palabras de la siguiente manera: si el grupo i se utiliza para controlar al grupo j , el grupo j no puede usarse para controlar al grupo i . Con esta interpretación se hace evidente que dos grupos son insuficientes para cumplir con la condición. En el primer caso correspondiente a $i \neq \tau(j)$, el término $\left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r})\right)$ es obtenido con muestras distintas a los términos restantes de (4.13). De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right] \cdot \\ &\quad \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \right] \\ &= 0 \cdot \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

En el segundo caso posible correspondiente a $j \neq \tau(i)$, por el mismo argumento del caso anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{j,n^*}) - H(\tilde{r}) \right] \cdot \\ &\quad \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \right] \\ &= 0 \cdot \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \widehat{\rho}_C^{\tau(j)} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con este resultado y recordando que $\text{Cov}[X, X] = \mathbb{V}[X]$, el error cuadrático medio (4.11) es

$$\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] \quad (4.14)$$

La expresión anterior requiere del cálculo de la varianza del estimador de la estadística H en el grupo i . Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \right] \\ &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \right] - 2\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}), \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \right] + \\ &\quad \mathbb{V} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right) \right] \end{aligned}$$

Para obtener el parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_C^{*\tau(i)}$, se asume en primera instancia que el parámetro $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$ no posee variabilidad. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \right] - 2\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \right] + \\ &\quad \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \boldsymbol{\Theta}_{i,n^*}) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se deriva el error cuadrático medio (4.14) con respecto a $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$. De este modo,

$$\frac{d \left(\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} = \frac{1}{k^2} \sum_{l=1}^k \frac{d \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} \quad (4.16)$$

Note que en la expresión (4.16) se cambia el índice i de la sumatoria por l para evitar que i tenga un doble significado (índice de la sumatoria y número de grupo de muestras). Ya que el término $\widehat{\rho}_C^{\tau(i)}$ está presente sólo en $\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-C})} \right]$ cuando $l = i$, entonces la derivada

$$\frac{d \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} = 0 \quad \text{cuando } l \neq i$$

Por lo tanto,

$$\frac{d \left(\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} = \frac{1}{k^2} \frac{d \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)}$$

Esta derivada se iguala a cero para obtener una condición para encontrar el mínimo error cuadrático medio. Así,

$$\frac{1}{k^2} \frac{d \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} = 0$$

Esta condición se cumple si

$$\frac{d \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] \right)}{d \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad (4.17)$$

Derivando la expresión (4.15) y aplicando la condición (4.17), se obtiene una definición del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_C^{*\tau(i)}$ para el i -ésimo grupo de muestras:

$$\widehat{\rho}_C^{*\tau(i)} = \frac{\text{Cov} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right]}{\mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right]} \quad (4.18)$$

El parámetro de control $\widehat{\rho}_C^{*\tau(i)}$ controla al grupo i de parámetros de entrada. Sin embargo, en (4.18) se observa que este parámetro está construido con el i -ésimo grupo de muestras Θ_{i,n^*} . En otras palabras, se intenta controlar al grupo de parámetros i con el mismo grupo i , lo cual no tiene sentido en el contexto de la aplicación de la técnica splitting. Por lo tanto, para construir el parámetro de control, se toma el grupo $\tau(i)$ de muestras de parámetros de entrada $\Theta_{\tau(i),n^*}$ tal como se definió en (4.5). Finalmente, el parámetro de control usado para obtener el estimador splitting de una estadística H es

$$\widehat{\rho}_C^{*\tau(i)} = \frac{\text{Cov} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{\tau(i),n^*}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{\tau(i),n^*}) \right]}{\mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{\tau(i),n^*}) \right]}$$

A continuación, se discuten cuáles son las expresiones asociadas cuando la estadística H toma el valor de la esperanza y la varianza.

4.2.3. Esperanza

A partir de (4.3) y (4.4), se deduce que el estimador splitting de la esperanza, obtenido cuando la esperanza de la variable de control $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ se conoce, es

$$\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-C})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \quad (4.19)$$

donde

$$\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} = \widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \mathbb{E}[\tilde{r}] \right) \quad (4.20)$$

Los términos en la expresión (4.20) se definen a continuación:

- $\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de los parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de los parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ es la esperanza obtenida del modelo aproximado.

Además, $\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)}$ es el parámetro de control del estimador de la esperanza, con la estadística $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ conocida. Según (4.14), el error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-C})}$ es

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$$

Para calcular $\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$, se necesitan los siguientes resultados:

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n^*} \quad (4.21)$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{1,1}}{n^*} \quad (4.22)$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{n^*} \quad (4.23)$$

Si se asume que $\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)}$ no posee variabilidad, entonces

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n^*} - 2\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \frac{\mu_{1,1}}{n^*} + \left(\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\mu_{0,2}}{n^*}$$

Note que las varianzas y la covarianza de los estimadores $\widehat{\mu}'_1$, de las expresiones (4.21), (4.22) y (4.23), son independientes del grupo de muestras particular. No obstante, los momentos estadísticos de las expresiones anteriores no son conocidos, por lo que son reemplazados por sus estimadores. De esta manera, el estimador del error cuadrático medio del estimador de la esperanza $\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-C})}$ es

$$\widehat{\text{MSE}} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \right]$$

donde

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - 2\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} + \left(\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} \quad (4.24)$$

Los momentos estadísticos de la expresión (4.24) son

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{n^* s_{2,0}^i - (s_{1,0}^i)^2}{(n^* - 1)n^*}, \\ \widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{n^* s_{1,1}^i - s_{0,1}^i s_{1,0}^i}{(n^* - 1)n^*} \end{aligned} \quad (4.25)$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{n^* s_{0,2}^i - (s_{0,1}^i)^2}{(n^* - 1)n^*} \quad (4.26)$$

donde

$$s_{p,q}^i \equiv s_{p,q}(\Theta_{i,n^*}) = \sum_{j=1}^{n^*} \left(r(\theta_{i,n^*}^{(j)}) \right)^p \left(\tilde{r}(\theta_{i,n^*}^{(j)}) \right)^q$$

El parámetro de control óptimo $\widehat{\alpha}_C^{*\tau(i)}$ se obtiene al minimizar (derivar con respecto a $\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)}$ e igualar a cero) la expresión (4.24). Hay que recordar que este parámetro debe ser estimado usando las n^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),n^*}$, con el fin de eliminar el sesgo del estimador $\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-C})}$. Así,

$$\widehat{\alpha}_C^{*\tau(i)} = \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{\tau(i),n^*})}{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),n^*})} \quad (4.27)$$

Se debe hacer notar que los términos $\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{\tau(i),n^*})$ y $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),n^*})$ se calculan con las expresiones (4.25) y (4.26) respectivamente, teniendo consideración en utilizar el grupo $\Theta_{\tau(i),n^*}$ de muestras de entrada para el cálculo de los estimadores correspondientes.

4.2.4. Varianza

A partir de (4.3) y (4.4), se deduce que el estimador splitting de la varianza, construido cuando la varianza de la variable de control $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ se conoce, es

$$\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})(i)} \quad (4.28)$$

donde

$$\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})(i)} = \widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \left(\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \mathbb{V}[\tilde{r}] \right) \quad (4.29)$$

Los términos en la expresión (4.29) se definen a continuación:

- $\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de los parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .

- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de los parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ es la varianza obtenida del modelo aproximado.

Además, $\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)}$ es el parámetro de control del estimador de la varianza, con la estadística $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ conocida. Según (4.14), el error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})}$ es

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right]$$

Si se asume que $\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)}$ no posee variabilidad, entonces

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = B_1 - 2\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} B_2 + \left(\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right)^2 B_3$$

donde

$$B_1 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{4,0}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{2,0}^2, \quad (4.30)$$

$$B_2 = \text{Cov} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\mu_{2,2}}{n^*} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n^*} \quad (4.31)$$

y

$$B_3 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{0,4}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{0,2}^2 \quad (4.32)$$

Note que las varianzas y la covarianza de los estimadores $\widehat{\mu}_2$, de las expresiones (4.30), (4.31) y (4.32), son independientes del grupo de muestras particular. No obstante, los momentos estadísticos de las expresiones anteriores no son conocidos, por lo que son reemplazados por sus estimadores. De esta manera, el estimador del error cuadrático medio del estimador de la varianza $\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})}$ es

$$\widehat{\text{MSE}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right]$$

y

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = \widehat{B}_1^i - 2\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \widehat{B}_2^i + \left(\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right)^2 \widehat{B}_3^i \quad (4.33)$$

donde

$$\widehat{B}_1^i = \frac{\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_{i,n^*}),$$

$$\widehat{B}_2^i = \frac{2\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_{i,n^*})}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{\widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} \quad (4.34)$$

y

$$\widehat{B}_3^i = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{n^*(n^* - 1)} \widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,n^*}) \quad (4.35)$$

Los estimadores insesgados de los momentos centrales bivariados de las expresiones anteriores son

$$\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-4(n^*)^2 + 8n^* - 12) s_{3,0}^i s_{1,0}^i + \right. \\ \left. ((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^*) s_{4,0}^i + 6n^* s_{2,0}^i (s_{1,0}^i)^2 + \right. \\ \left. (9 - 6n^*) (s_{2,0}^i)^2 - 3 (s_{1,0}^i)^4 \right),$$

$$\widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 3) (s_{2,0}^i)^2 + \right. \\ \left. (n^* - (n^*)^2) s_{4,0}^i - 2n^* s_{2,0}^i (s_{1,0}^i)^2 + (4n^* - 4) s_{3,0}^i s_{1,0}^i + (s_{1,0}^i)^4 \right),$$

$$\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 2) (s_{1,1}^i)^2 + \right. \\ \left. (n^* - (n^*)^2) s_{2,2}^i + (2 - 2n^*) s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + (2n^* - 2) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \right. \\ \left. (2n^* - 2) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 - s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 - s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + \right. \\ \left. s_{0,2}^i s_{2,0}^i \right),$$

$$\widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-2(n^*)^2 + 4n^* - 6) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \right. \\ \left. (-2(n^*)^2 + 4n^* - 6) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + ((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^*) s_{2,2}^i + \right. \\ \left. n^* s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 + 4n^* s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + n^* s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + \right. \\ \left. (6 - 4n^*) (s_{1,1}^i)^2 + (3 - 2n^*) s_{0,2}^i s_{2,0}^i - 3 (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 \right),$$

$$\widehat{\mu}_{2,0} \widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 1) s_{0,2}^i s_{2,0}^i + \right. \\ \left. (n^* - (n^*)^2) s_{2,2}^i + (2 - n^*) s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 + (2n^* - 2) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \right. \\ \left. (2 - n^*) s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + (2n^* - 2) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 - \right. \\ \left. 4s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + 2 (s_{1,1}^i)^2 \right),$$

$$\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-4(n^*)^2 + 8n^* - 12) s_{0,3}^i s_{0,1}^i + \right. \\ \left. ((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^*) s_{0,4}^i + 6n^* s_{0,2}^i (s_{0,1}^i)^2 + \right. \\ \left. (9 - 6n^*) (s_{0,2}^i)^2 - 3 (s_{0,1}^i)^4 \right)$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,n^*}) = \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 3) (s_{0,2}^i)^2 + \right. \\ \left. (n^* - (n^*)^2) s_{0,4}^i - 2n^* s_{0,2}^i (s_{0,1}^i)^2 + (4n^* - 4) s_{0,3}^i s_{0,1}^i + (s_{0,1}^i)^4 \right)$$

El parámetro de control óptimo $\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)}$ se obtiene al minimizar (derivar con respecto a $\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)}$ e igualar a cero) la expresión (4.33). Hay que recordar que este parámetro debe ser estimado usando

las n^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),n^*}$, con el fin de eliminar el sesgo del estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-C)}$. Así,

$$\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} = \frac{\widehat{B}_2^{\tau(i)}}{\widehat{B}_3^{\tau(i)}} \quad (4.36)$$

Se debe hacer notar que los términos $\widehat{B}_2^{\tau(i)}$ y $\widehat{B}_3^{\tau(i)}$ se calculan con las expresiones (4.34) y (4.35) respectivamente, teniendo consideración en utilizar el grupo $\Theta_{\tau(i),n^*}$ de muestras de entrada para el cálculo de los estimadores correspondientes.

4.2.5. Ejemplo con función analítica

Se utiliza el mismo ejemplo analítico utilizado en el capítulo anterior. en el cual existe una respuesta r , representada por una función $r(\theta)$, a la cual se le quieren calcular las estadísticas de segundo orden mediante la técnica splitting. Para ello, se usan las funciones aproximadas $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_1(\theta)$ y $\tilde{r}_2 = \tilde{r}_2(\theta)$. Estas funciones se definen en las expresiones

$$r = r(\theta) = \exp(3\theta),$$

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_1(\theta) = \exp(6)(3\theta - 5)$$

y

$$\tilde{r}_2 = \tilde{r}_2(\theta) = \frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26)$$

donde θ es el parámetro incierto del problema con función de densidad de probabilidad $f(\theta)$, el cual sigue una distribución uniforme, tal que $\theta \sim \mathcal{U}(0, 4)$.

Hay que notar que \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 son las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden, respectivamente, alrededor del punto de expansión $\theta = 2$.

El valor exacto de la esperanza de la respuesta r es

$$\mu_1' = \mathbb{E}[r] = 1,36 \times 10^4$$

La esperanza de las respuestas aproximadas son

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_1] = 4,03 \times 10^2$$

y

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_2] = 2,82 \times 10^3$$

Ya que se desea aplicar un esquema de separación (*splitting*) de muestras a la técnica control variates, se opta por separar las muestras de los parámetros de entrada en 3 grupos. Para cada uno de estos grupos, se deben calcular los parámetros de control óptimo $\alpha_{C,1}^{\tau(i)}$ y $\alpha_{C,2}^{\tau(i)}$, asociados a las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 respectivamente, que van a ser usados con el i -ésimo grupo de muestras de

entrada para obtener los estimadores splitting de la esperanza. La ecuación (4.27) debe usarse para realizar el cálculo de estos parámetros.

En la figura 4.3 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo, control variates y splitting de la esperanza, los cuales se obtuvieron usando las ecuaciones (3.2), (3.12) y (4.19), respectivamente. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . Para fabricar estos histogramas, se tomaron 10^6 repeticiones de los estimadores de la esperanza, donde cada repetición a su vez fue fabricada con $n = 300$ muestras de la respuesta r del modelo de alta fidelidad y de las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 de los modelos de baja fidelidad. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador splitting poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. A su vez, las muestras del estimador splitting poseen una variabilidad similar a la que posee el método control variates. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 , de lo que se puede inferir que, mientras mayor es la calidad de la respuesta aproximada, menor es el error cuadrático medio del estimador.

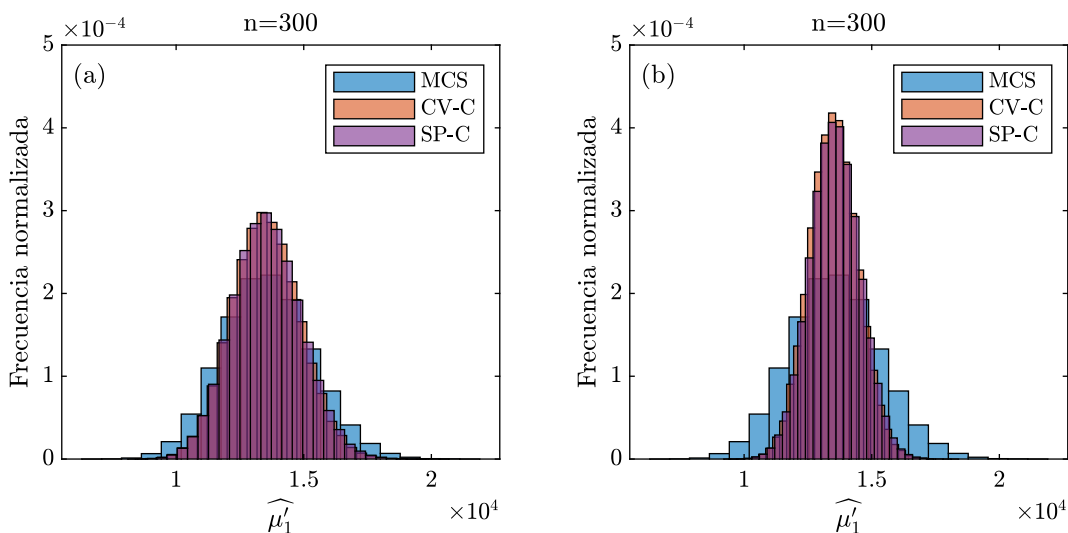


Figura 4.3: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-C) y la técnica splitting (SP-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

En la figura 4.4 se muestra la evolución del estimador splitting de la esperanza con respecto al número n de muestras de la respuesta r (a partir de n muestras, se calcula una realización del estimador). Para realizar estas gráficas, cada punto se obtiene calculando el promedio de 10^6 realizaciones del estimador. El estimador splitting es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\alpha}_C^{*\tau(i)}$. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo junto con la técnica de separación de muestras genera un estimador insesgado de la esperanza, a diferencia del estimador control variates el cual está sesgado.

Para el caso de la varianza, el valor exacto buscado μ_2 para este problema analítico es

$$\mu_2 = \mathbb{V}[r] = 9,20 \times 10^8$$

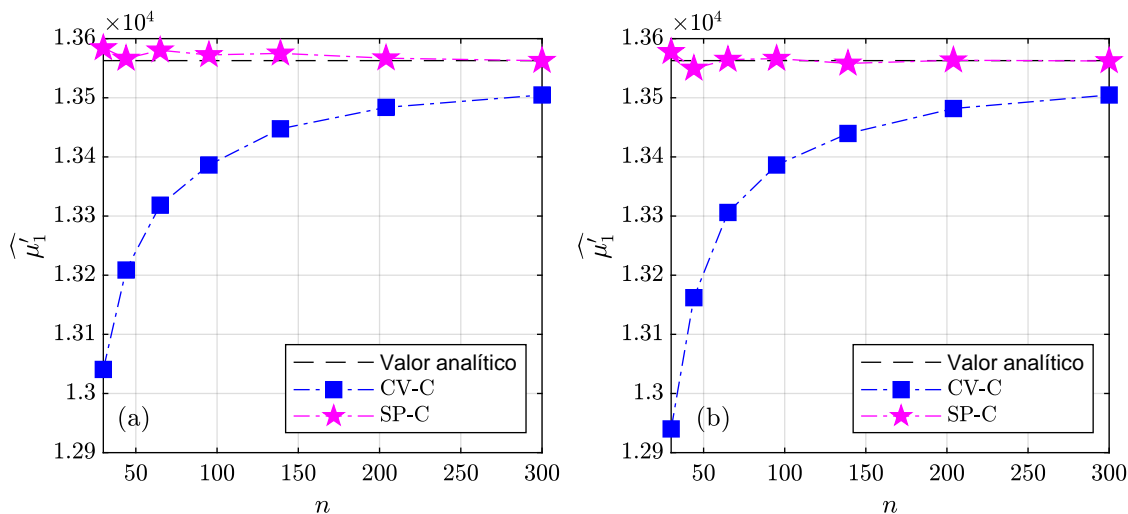


Figura 4.4: Ejemplo analítico: Estimador $\hat{\mu}_1^{(SP-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

La varianza exacta de las respuestas aproximadas son

$$\mathbb{V}[\tilde{r}_1] = 1,95 \times 10^6$$

y

$$\mathbb{V}[\tilde{r}_2] = 6,64 \times 10^6$$

Ya que se desea aplicar un esquema de separación (*splitting*) de muestras a la técnica control variates, se opta por separar las muestras de los parámetros de entrada en 3 grupos. Para cada uno de estos grupos, se deben calcular los parámetros de control óptimo $\gamma_{C,1}^{*\tau(i)}$ y $\gamma_{C,2}^{*\tau(i)}$, asociados a las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 respectivamente, que van a ser usados con el i -ésimo grupo de muestras de entrada para obtener los estimadores *splitting* de la varianza. La ecuación (4.36) debe usarse para realizar el cálculo de estos parámetros.

En la figura 4.5 se muestran histogramas asociados al estimador Monte Carlo, control variates y *splitting* de la varianza, los cuales se obtuvieron usando las ecuaciones (3.3), (3.20) y (4.28), respectivamente. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 4.3. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador *splitting* poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo. A su vez, la variabilidad de las muestras del estimador *splitting* y control variates son similares. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 .

En la figura 4.6 se muestra la evolución del estimador *splitting* de la varianza con respecto al número n de muestras de la respuesta (a partir de n muestras, se calcula una realización del

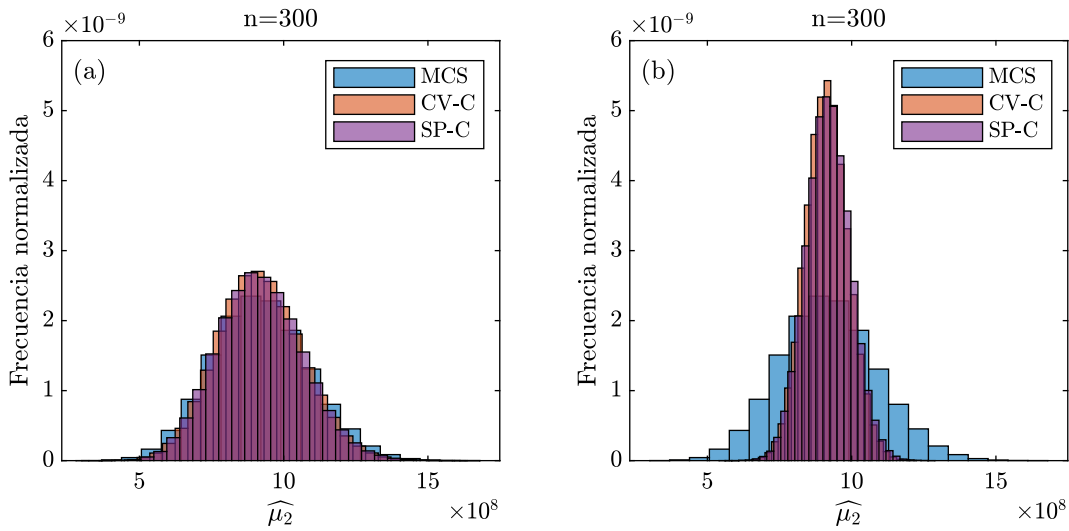


Figura 4.5: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-C) y la técnica splitting (SP-C) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

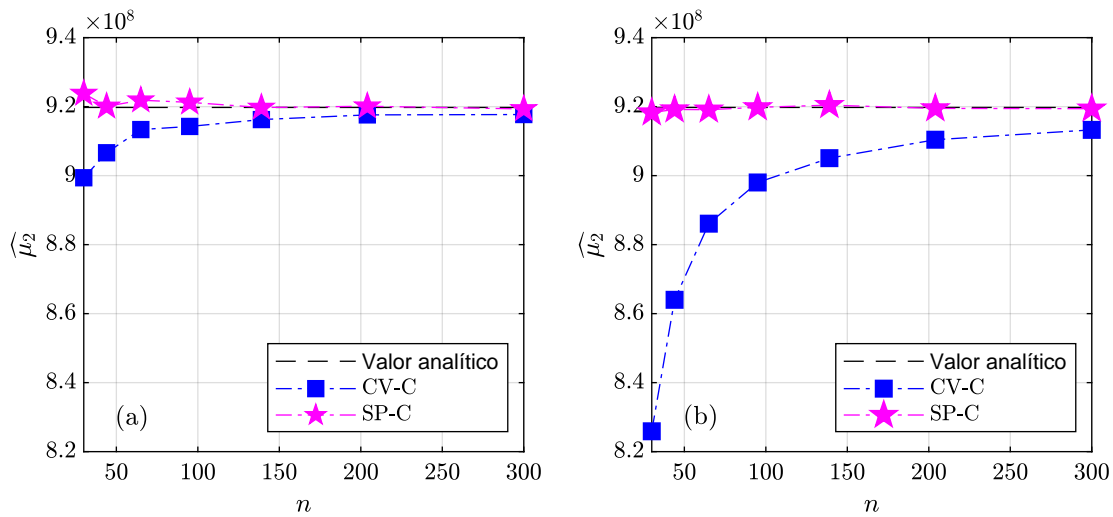


Figura 4.6: Ejemplo analítico: Estimador $\hat{\mu}_2^{(SP-C)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

estimator). El estimador splitting es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\gamma}_C^{*\tau(i)}$. La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 4.4. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un estimador insesgado de la varianza, a diferencia del estimador control variates el cual está sesgado.

4.3. Estadísticas de la variable de control desconocidas

Cuando las estadísticas de la variable de control son desconocidas, el estimador splitting de la estadística H es

$$\widehat{H}^{(\text{SP-D})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \quad (4.37)$$

donde

$$\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} = \widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \quad (4.38)$$

Los términos en la expresión (4.38) se definen a continuación:

- $\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la estadística H calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la estadística H calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ es el estimador de la estadística H calculado con el modelo aproximado y las m^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,m^*} .

El término $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$ de la expresión (4.38) es el estimador del parámetro de control que reduce el error cuadrático medio del estimador $\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}$. Este estimador está construido con el grupo $\tau(i)$. El número $\tau(i)$ se definió en la expresión (4.5). Así

$$\tau(i) = (i \bmod k) + 1$$

donde \bmod es un operador tal que $a \bmod b$ es el resto que surge de dividir a entre b .

Por lo tanto, las estadísticas $\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})$, $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ *no están correlacionadas* con el parámetro de control $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$.

4.3.1. Sesgo

El estimador splitting de la expresión (4.37) tiene la ventaja por sobre el estimador control variates de ser *insesgado*. Para probar esto, se calcula el sesgo del estimador splitting con un procedimiento similar al usado en la sección 4.2.1. De esta forma,

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] - H(r) \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] - H(r) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] - H(r) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para proseguir con el desarrollo, se calcula $\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right] \end{aligned}$$

Suponiendo que $\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})$ es un estimador insesgado de la estadística $H(r)$ y aplicando la propiedad $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] + \text{Cov}[X_1, X_2]$, la esperanza $\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right]$ toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] &= H(r) + \mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \mathbb{E} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] + \\ &\quad \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] \end{aligned}$$

Si $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ son estimadores insesgados de $H(\tilde{r})$, entonces

$$\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] = H(r) + \text{Cov} \left[-\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}, \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] \quad (4.40)$$

Hay que notar que en la expresión (4.40) existe un término de covarianza entre $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$ y la expresión $\left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right)$. Ambos son calculados con grupos de muestras distintas; mientras que $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$ es obtenido con los grupos $\Theta_{\tau(i),n^*}$ y $\Theta_{\tau(i),m^*}$, los estimadores $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ y $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ son calculados con los grupos Θ_{i,n^*} y Θ_{i,m^*} . Por lo tanto, *no existe correlación* entre ambos estimadores. Por esta razón,

$$\mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] = H(r) \quad (4.41)$$

Se reemplaza este resultado en la expresión (4.39). Así,

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k H(r) \right) - H(r) \\ &= \frac{1}{k} (kH(r)) - H(r) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Sesgo} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] = 0$$

Este resultado indica que el estimador splitting $\widehat{H}^{(SP-D)}$ es *insesgado*.

4.3.2. Error cuadrático medio

Como el sesgo del estimador splitting $\widehat{H}^{(SP-D)}$ es nulo, su error cuadrático medio es

$$\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] \quad (4.42)$$

Así, el error cuadrático medio del estimador splitting es igual a su varianza. Se reemplaza la expresión (4.37) en (4.42). Así,

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] &= \mathbb{V} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)}, \widehat{H}_{(j)}^{(SP-D)} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

La expresión anterior requiere del cálculo del término de covarianza

$$\text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] = \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] - \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right]$$

El resultado (4.41) es usado en la expresión anterior:

$$\text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] = \mathbb{E} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] - (H(r))^2 \quad (4.44)$$

Se reemplaza la expresión (4.38) en (4.44). Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \widehat{H}(r, \Theta_{j,n^*}) \right] + \\ &\mathbb{E} \left[-\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \rho_D^{\tau(j)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,m^*}) \right) \right] + \\ &\mathbb{E} \left[-\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \widehat{H}(r, \Theta_{j,n^*}) \right] + \\ &\mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \rho_D^{\tau(j)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,m^*}) \right) \right] - \\ &(H(r))^2 \end{aligned}$$

Suponiendo que $i \neq j$ y recordando que $i \neq \tau(i)$ y $j \neq \tau(j)$, la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right. \\ &\left. \rho_D^{\tau(j)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{j,m^*}) \right) \right] \end{aligned}$$

Por el mismo argumento presentado en la sección 4.2.2, se deben dividir las muestras de entrada por lo menos en 3 grupos para asegurar que

$$\text{Cov} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}, \widehat{H}_{(j)}^{(\text{SP-D})} \right] = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Con este resultado y recordando que $\text{Cov}[X, X] = \mathbb{V}[X]$, el error cuadrático medio (4.43) toma la forma

$$\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] \quad (4.45)$$

Se usa la propiedad $\mathbb{V}[X_1 - X_2] = \mathbb{V}[X_1] - 2\text{Cov}[X_1, X_2] + \mathbb{V}[X_2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right] \\ &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] - \\ &2\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right] + \\ &\mathbb{V} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \right] \end{aligned}$$

Si se asume que el parámetro de control no posee variabilidad, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] - \\ &2\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] + \\ &\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Recordando que las muestras de entrada agrupadas en Θ_{i,n^*} son independientes de las muestras agrupadas en Θ_{i,m^*} y usando que la covarianza $\text{Cov}[X_1, X_2 + X_3] = \text{Cov}[X_1, X_2] + \text{Cov}[X_1, X_3]$ y que la varianza $\mathbb{V}[X_1 - X_2] = \mathbb{V}[X_1] - 2\text{Cov}[X_1, X_2] + \mathbb{V}[X_2]$, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}\right] &= \mathbb{V}\left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*})\right] - 2\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \text{Cov}\left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})\right] + \\ &\quad \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)^2 \mathbb{V}\left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})\right] + \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)^2 \mathbb{V}\left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})\right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Es deseable que la varianza (4.47) sea lo más baja posible. Para conseguir ello, un camino es bajar la varianza $\mathbb{V}\left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})\right]$ mediante un aumento en el número de muestras m^* con el que se construye el estimador $\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$. Esto es factible, ya que estas muestras vienen del modelo aproximado, el cual ocupa un tiempo relativamente bajo para generarlas.

Otro camino complementario es usar el parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_D^{*\tau(i)}$. Para obtenerlo, se deriva el error cuadrático medio (4.45) con respecto a $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$. De esta manera,

$$\frac{d\left(\text{MSE}\left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} = \frac{1}{k^2} \sum_{l=1}^k \frac{d\left(\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} \quad (4.48)$$

Note que en la expresión (4.48) se cambia el índice i de la sumatoria por l para evitar que i tenga un doble significado (índice de la sumatoria y número de grupo de muestras). Ya que el término $\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}$ está presente sólo en $\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-D})}\right]$ cuando $l = i$, entonces la derivada

$$\frac{d\left(\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(l)}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} = 0 \quad \text{cuando } l \neq i$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\left(\text{MSE}\left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} = \frac{1}{k^2} \frac{d\left(\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)}$$

Esta derivada se iguala a cero para obtener una condición para encontrar el mínimo error cuadrático medio. Así,

$$\frac{1}{k^2} \frac{d\left(\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} = 0$$

Esta condición se cumple si

$$\frac{d\left(\mathbb{V}\left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})}\right]\right)}{d\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)}\right)} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad (4.49)$$

Derivando la expresión (4.46) y aplicando la condición (4.49), se obtiene una definición del parámetro de control óptimo $\widehat{\rho}_D^{*\tau(i)}$ para el i -ésimo grupo de muestras:

$$\widehat{\rho}_D^{*\tau(i)} = \frac{\text{Cov}\left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})\right]}{\mathbb{V}\left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})\right] + \mathbb{V}\left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})\right]} \quad (4.50)$$

El parámetro de control $\widehat{\rho}_D^{*\tau(i)}$ controla al grupo i de parámetros de entrada. Sin embargo, en (4.50) se observa que este parámetro está construido con las muestras contenidas en los i -ésimos grupos Θ_{i,n^*} y Θ_{i,m^*} . En otras palabras, se intenta controlar al grupo de muestras i con los mismos grupos de muestras i , lo cual no tiene sentido en el contexto de la aplicación de la técnica splitting. Por lo tanto, para construir el parámetro de control, se toman los grupos $\tau(i)$ de muestras de parámetros de entrada $\Theta_{\tau(i),n^*}$ y $\Theta_{\tau(i),m^*}$ tal como se definió en (4.5). Finalmente, el parámetro de control usado para obtener el estimador splitting de una estadística H es

$$\widehat{\rho}_D^{*\tau(i)} = \frac{\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{\tau(i),n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{\tau(i),n^*}) \right]}{\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{\tau(i),n^*}) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{\tau(i),m^*}) \right]}$$

A continuación, se discuten cuáles son las expresiones asociadas cuando la estadística H toma la forma de la esperanza y de la varianza.

4.3.3. Esperanza

A partir de (4.37) y (4.38), se deduce que el estimador splitting de la esperanza obtenido cuando no se conoce la esperanza de la variable de control $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ es

$$\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-D})} \quad (4.51)$$

donde

$$\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-D})} = \widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \quad (4.52)$$

Los términos en la expresión (4.52) se definen a continuación:

- $\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ es el estimador de la esperanza calculado con el modelo aproximado y las m^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,m^*} .

Además, $\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)}$ es el parámetro de control del estimador splitting de la esperanza. En la construcción de este estimador, la estadística $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ no es conocida con exactitud, por lo que es reemplazada por su estimador $\widehat{\mu}'_1(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$. Según (4.45), el error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})}$ es

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-D})} \right]$$

Para calcular $\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_{1(i)}^{(\text{SP-D})} \right]$, se necesitan los siguientes resultados:

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}'_1(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n^*} \quad (4.53)$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{\mu}_1'(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{1,1}}{n^*} \quad (4.54)$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{n^*} \quad (4.55)$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1'(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] = \frac{\mu_{0,2}}{m^*} \quad (4.56)$$

Si se asume que $\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)}$ no posee variabilidad, entonces

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n^*} - 2\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \frac{\mu_{1,1}}{n^*} + \left(\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\mu_{0,2}}{n^*} + \left(\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\mu_{0,2}}{m^*}$$

Note que las varianzas y la covarianza de los estimadores $\widehat{\mu}_1'$, de las expresiones (4.53), (4.54), (4.55) y (4.56), son independientes del grupo de muestras particular. No obstante, los momentos estadísticos de las expresiones anteriores no son conocidos, por lo que son reemplazados por sus estimadores. De esta manera, el estimador del error cuadrático medio del estimador de la esperanza $\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})}$ es

$$\widehat{\text{MSE}} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} \right]$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - 2\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} + \\ &\quad \left(\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} + \left(\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right)^2 \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,m^*})}{m^*} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Los estimadores insesgados de los momentos centrales bivariados que trabajan con las muestras agrupadas en Θ_{i,n^*} , de la ecuación (4.57) fueron definidos previamente. Sus expresiones son

$$\widehat{\mu}_{2,0}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{n^* s_{2,0}^i - (s_{1,0}^i)^2}{(n^* - 1)n^*},$$

$$\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{n^* s_{1,1}^i - s_{0,1}^i s_{1,0}^i}{(n^* - 1)n^*} \quad (4.58)$$

y

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*}) = \frac{n^* s_{0,2}^i - (s_{0,1}^i)^2}{(n^* - 1)n^*} \quad (4.59)$$

donde

$$s_{p,q}^i \equiv s_{p,q}(\Theta_{i,n^*}) = \sum_{j=1}^{n^*} \left(r(\theta_{i,n^*}^{(j)}) \right)^p \left(\tilde{r}(\theta_{i,n^*}^{(j)}) \right)^q$$

Por otra parte, el momento $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,m^*})$ viene dado por la ecuación

$$\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,m^*}) = \frac{m^* t_{0,2}^i - (t_{0,1}^i)^2}{(m^* - 1)m^*} \quad (4.60)$$

donde

$$t_{p,q}^i \equiv t_{p,q}(\Theta_{i,m^*}) = \sum_{j=1}^{m^*} \left(r(\theta_{i,m^*}^{(j)}) \right)^p \left(\tilde{r}(\theta_{i,m^*}^{(j)}) \right)^q$$

Se debe hacer notar que, mientras $s_{p,q}$ se calcula con las muestras de los parámetros de entrada agrupadas en Θ_n , el término $t_{p,q}$ se calcula con las muestras agrupadas en Θ_m .

El parámetro de control óptimo $\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)}$ se obtiene al minimizar (derivar con respecto a $\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)}$ e igualar a cero) la expresión (4.57). Hay que recordar que este parámetro debe ser estimado usando las n^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),n^*}$, y con las m^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),m^*}$, con el fin de eliminar el sesgo del estimador $\widehat{\mu}_1^{(\text{SP-D})}$. Así,

$$\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} = \frac{\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{\tau(i),n^*})}{\frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),n^*})}{n^*} + \frac{\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),m^*})}{m^*}} \quad (4.61)$$

Se debe hacer notar que los términos $\widehat{\mu}_{1,1}(\Theta_{\tau(i),n^*})$ y $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),n^*})$ se calculan con las expresiones (4.58) y (4.59) respectivamente, teniendo consideración en utilizar el grupo $\Theta_{\tau(i),n^*}$ de muestras de entrada para el cálculo de los estimadores correspondientes. Similar atención se debe tener con el estimador $\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{\tau(i),m^*})$, el cual se debe calcular con la expresión (4.60) utilizando el grupo $\Theta_{\tau(i),m^*}$ de muestras de entrada.

4.3.4. Varianza

A partir de (4.37) y (4.38), se deduce que el estimador splitting de la varianza, construido cuando la varianza de la variable de control $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ se desconoce, es

$$\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \quad (4.62)$$

donde

$$\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} = \widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} (\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})) \quad (4.63)$$

Los términos en la expresión (4.63) se explican a continuación:

- $\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo de alta fidelidad y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las n^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,n^*} .
- $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$ es el estimador de la varianza calculado con el modelo aproximado y las m^* muestras del i -ésimo grupo de parámetros de entrada Θ_{i,m^*} .

Además, $\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)}$ es el parámetro de control del estimador de la varianza que opera sobre el i -ésimo grupo de muestras. En la construcción de este estimador splitting, la estadística $\mathbb{V}[\tilde{r}]$ no es

conocida con exactitud, por lo que es reemplazada por su estimador $\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})$. Según (4.45), el error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})}$ es

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right]$$

Si se asume que $\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)}$ no posee variabilidad, entonces

$$\mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] = B_1 - 2\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} B_2 + \left(\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right)^2 B_3 + \left(\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right)^2 B_4$$

donde B_1 , B_2 y B_3 fueron definidos previamente en (4.30), (4.31) y (4.32), respectivamente, es decir,

$$B_1 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{4,0}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{2,0}^2, \quad (4.64)$$

$$B_2 = \text{Cov} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\mu_{2,2}}{n^*} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n^*} \quad (4.65)$$

y

$$B_3 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{0,4}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{0,2}^2 \quad (4.66)$$

Por otra parte,

$$B_4 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] = \frac{\mu_{0,4}}{m^*} - \frac{(m^* - 3)}{(m^* - 1)m^*} \mu_{0,2}^2 \quad (4.67)$$

Note que las varianzas y la covarianza de los estimadores $\widehat{\mu}_2$, de las expresiones (4.64), (4.65), (4.66) y (4.67) son independientes del grupo de muestras particular. No obstante, los momentos estadísticos de las expresiones anteriores no son conocidos, por lo que son reemplazados por sus estimadores. Así, el estimador del error cuadrático medio del estimador de la varianza $\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})}$ es

$$\widehat{\text{MSE}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right]$$

y

$$\widehat{\mathbb{V}} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] = \widehat{B}_1^i - 2\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \widehat{B}_2^i + \left(\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right)^2 \widehat{B}_3^i + \left(\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right)^2 \widehat{B}_4^i \quad (4.68)$$

donde

$$\widehat{B}_1^i = \frac{\widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_{i,n^*}),$$

$$\widehat{B}_2^i = \frac{2\widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_{i,n^*})}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{\widehat{\mu}_{2,0}\widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*})}{n^*}, \quad (4.69)$$

$$\widehat{B}_3^i = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,n^*})}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{n^*(n^* - 1)} \widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,n^*}) \quad (4.70)$$

y

$$\widehat{B}_4^i = \frac{\widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,m^*})}{m^*} - \frac{(m^* - 3)}{m^*(m^* - 1)} \widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,m^*}) \quad (4.71)$$

Los estimadores inescgados de los momentos centrales bivariados que trabajan con las muestras agrupadas en Θ_{i,n^*} de las expresiones anteriores se definieron previamente:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{4,0}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-4(n^*)^2 + 8n^* - 12) s_{3,0}^i s_{1,0}^i + \right. \\ &\quad \left((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^* \right) s_{4,0}^i + 6n^* s_{2,0}^i (s_{1,0}^i)^2 + \\ &\quad \left. (9 - 6n^*) (s_{2,0}^i)^2 - 3 (s_{1,0}^i)^4 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,0}^2(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 3) (s_{2,0}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left. (n^* - (n^*)^2) s_{4,0}^i - 2n^* s_{2,0}^i (s_{1,0}^i)^2 + (4n^* - 4) s_{3,0}^i s_{1,0}^i + (s_{1,0}^i)^4 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{1,1}^2(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 2) (s_{1,1}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left(n^* - (n^*)^2 \right) s_{2,2}^i + (2 - 2n^*) s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + (2n^* - 2) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \\ &\quad \left. (2n^* - 2) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 - s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 - s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left. s_{0,2}^i s_{2,0}^i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,2}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-2(n^*)^2 + 4n^* - 6) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \right. \\ &\quad \left(-2(n^*)^2 + 4n^* - 6 \right) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + ((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^*) s_{2,2}^i + \\ &\quad \left. n^* s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 + 4n^* s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + n^* s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left. (6 - 4n^*) (s_{1,1}^i)^2 + (3 - 2n^*) s_{0,2}^i s_{2,0}^i - 3 (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{2,0} \widehat{\mu}_{0,2}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 1) s_{0,2}^i s_{2,0}^i + \right. \\ &\quad \left(n^* - (n^*)^2 \right) s_{2,2}^i + (2 - n^*) s_{2,0}^i (s_{0,1}^i)^2 + (2n^* - 2) s_{2,1}^i s_{0,1}^i + \\ &\quad \left. (2 - n^*) s_{0,2}^i (s_{1,0}^i)^2 + (2n^* - 2) s_{1,0}^i s_{1,2}^i + (s_{1,0}^i)^2 (s_{0,1}^i)^2 - \right. \\ &\quad \left. 4s_{1,0}^i s_{1,1}^i s_{0,1}^i + 2 (s_{1,1}^i)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left((-4(n^*)^2 + 8n^* - 12) s_{0,3}^i s_{0,1}^i + \right. \\ &\quad \left((n^*)^3 - 2(n^*)^2 + 3n^* \right) s_{0,4}^i + 6n^* s_{0,2}^i (s_{0,1}^i)^2 + \\ &\quad \left. (9 - 6n^*) (s_{0,2}^i)^2 - 3 (s_{0,1}^i)^4 \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,n^*}) &= \frac{1}{(n^* - 3)(n^* - 2)(n^* - 1)n^*} \left(((n^*)^2 - 3n^* + 3) (s_{0,2}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left. (n^* - (n^*)^2) s_{0,4}^i - 2n^* s_{0,2}^i (s_{0,1}^i)^2 + (4n^* - 4) s_{0,3}^i s_{0,1}^i + (s_{0,1}^i)^4 \right) \end{aligned}$$

Por otra parte, los momentos que trabajan con las muestras agrupadas en Θ_{i,m^*} de las expresiones anteriores son

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{0,4}(\Theta_{i,m^*}) &= \frac{1}{(m^* - 3)(m^* - 2)(m^* - 1)m^*} \left((-4(m^*)^2 + 8m^* - 12) t_{0,3}^i t_{0,1}^i + \right. \\ &\quad \left. (m^*)^3 - 2(m^*)^2 + 3m^* \right) t_{0,4}^i + 6m^* t_{0,2}^i (t_{0,1}^i)^2 + \\ &\quad (9 - 6m^*) (t_{0,2}^i)^2 - 3 (t_{0,1}^i)^4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{0,2}^2(\Theta_{i,m^*}) &= \frac{1}{(m^* - 3)(m^* - 2)(m^* - 1)m^*} \left(((m^*)^2 - 3m^* + 3) (t_{0,2}^i)^2 + \right. \\ &\quad \left. (m^* - (m^*)^2) t_{0,4}^i - 2m^* t_{0,2}^i (t_{0,1}^i)^2 + (4m^* - 4) t_{0,3}^i t_{0,1}^i + (t_{0,1}^i)^4 \right) \end{aligned}$$

El parámetro de control óptimo $\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)}$ se obtiene al minimizar (derivar con respecto a $\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)}$ e igualar a cero) la expresión (4.68). Hay que recordar que este parámetro debe ser estimado usando las n^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),n^*}$, y con las m^* muestras de entrada del grupo $\tau(i)$ reunidas en $\Theta_{\tau(i),m^*}$, con el fin de eliminar el sesgo del estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-D)}$. Así,

$$\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} = \frac{\widehat{B}_2^{\tau(i)}}{\widehat{B}_3^{\tau(i)} + \widehat{B}_4^{\tau(i)}} \quad (4.72)$$

Se debe hacer notar que los términos $\widehat{B}_2^{\tau(i)}$, $\widehat{B}_3^{\tau(i)}$ y $\widehat{B}_4^{\tau(i)}$ se calculan con las expresiones (4.69), (4.70) y (4.71) respectivamente, teniendo consideración en utilizar el grupo $\Theta_{\tau(i),n^*}$ de muestras de entrada para el cálculo de los estimadores correspondientes.

4.3.5. Ejemplo con función analítica

Se retoma el ejemplo anterior, en el cual existe una respuesta r , representada por una función $r(\theta)$, a la cual se le quieren calcular las estadísticas de segundo orden mediante la técnica splitting. Para ello, se usan las funciones aproximadas $\widetilde{r}_1 = \widetilde{r}_1(\theta)$ y $\widetilde{r}_2 = \widetilde{r}_2(\theta)$. Estas respuestas vienen dadas por las expresiones

$$r = r(\theta) = \exp(3\theta),$$

$$\widetilde{r}_1 = \widetilde{r}_1(\theta) = \exp(6) (3\theta - 5)$$

y

$$\widetilde{r}_2 = \widetilde{r}_2(\theta) = \frac{\exp(6)}{2} (9\theta^2 - 30\theta + 26)$$

donde θ es el parámetro incierto del problema con función de densidad de probabilidad $f(\theta)$, el cual sigue una distribución uniforme, tal que $\theta \sim \mathcal{U}(0, 4)$. Hay que notar que \widetilde{r}_1 y \widetilde{r}_2 son las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden, respectivamente, alrededor del punto de expansión $\theta = 2$.

El valor exacto de la esperanza de la respuesta r es

$$\mu_1' = \mathbb{E}[r] = 1,36 \times 10^4$$

Ya que se desea aplicar un esquema de separación (*splitting*) de muestras a la técnica control variates, se opta por separar las muestras de los parámetros de entrada en 3 grupos. Para cada uno de estos grupos, se deben calcular los parámetros de control óptimo $\alpha_{D,1}^{*\tau(i)}$ y $\alpha_{D,2}^{*\tau(i)}$, asociados a las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 respectivamente, que van a ser usados con el i -ésimo grupo de muestras de entrada para obtener los estimadores splitting de la esperanza. La ecuación (4.61) debe usarse para realizar el cálculo de estos parámetros.

En la figura 4.7 se muestran histogramas asociados al estimador de la esperanza obtenidos con el método Monte Carlo, control variates y la técnica splitting, los cuales se obtuvieron usando las ecuaciones (3.2), (3.27) y (4.51), respectivamente. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . Para fabricar estos histogramas, se tomaron 10^6 repeticiones de los estimadores de la esperanza, donde cada repetición a su vez fue fabricada con $n = 300$ muestras de la respuesta r del modelo de alta fidelidad y de las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 de los modelos de baja fidelidad, junto con $m = 6000$ muestras de \tilde{r}_1 o \tilde{r}_2 , según sea el caso. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador splitting poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo, mientras que las variabilidades de los métodos control variates y splitting son similares. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método que utiliza \tilde{r}_1 , de lo que se puede inferir que, mientras mayor es la calidad de la respuesta aproximada, menor es el error cuadrático medio del estimador.

En la figura 4.8 se muestra la evolución del estimador splitting de la esperanza con respecto al número n de muestras de la respuesta r (a partir de n muestras, se calcula una realización del estimador). Ya que $\mathbb{E}[\tilde{r}]$ no es conocida, esta se estima con $m = 20n$ muestras de \tilde{r} . Cada punto se obtiene tomando el promedio de 10^6 realizaciones del estimador, el cual es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\widehat{\alpha}_D^{*\tau(i)}$. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un estimador splitting insesgado de la esperanza, a diferencia del estimador control variates el cual es sesgado.

Para el caso de la varianza, el valor exacto buscado μ_2 es

$$\mu_2 = \mathbb{V}[r] = 9,20 \times 10^8$$

Ya que se desea aplicar un esquema de separación (*splitting*) de muestras a la técnica control variates, se opta por separar las muestras de los parámetros de entrada en 3 grupos. Para cada uno de estos grupos, se deben calcular los parámetros de control óptimo $\gamma_{D,1}^{*\tau(i)}$ y $\gamma_{D,2}^{*\tau(i)}$, asociados a las respuestas \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 respectivamente, que van a ser usados con el i -ésimo grupo de muestras de entrada para obtener los estimadores splitting de la varianza. La ecuación (4.72) debe usarse para realizar el cálculo de estos parámetros.

En la figura 4.9 se muestran histogramas asociados al estimador de la varianza obtenidos con el método Monte Carlo, control variates y la técnica splitting, los cuales se obtuvieron usando las

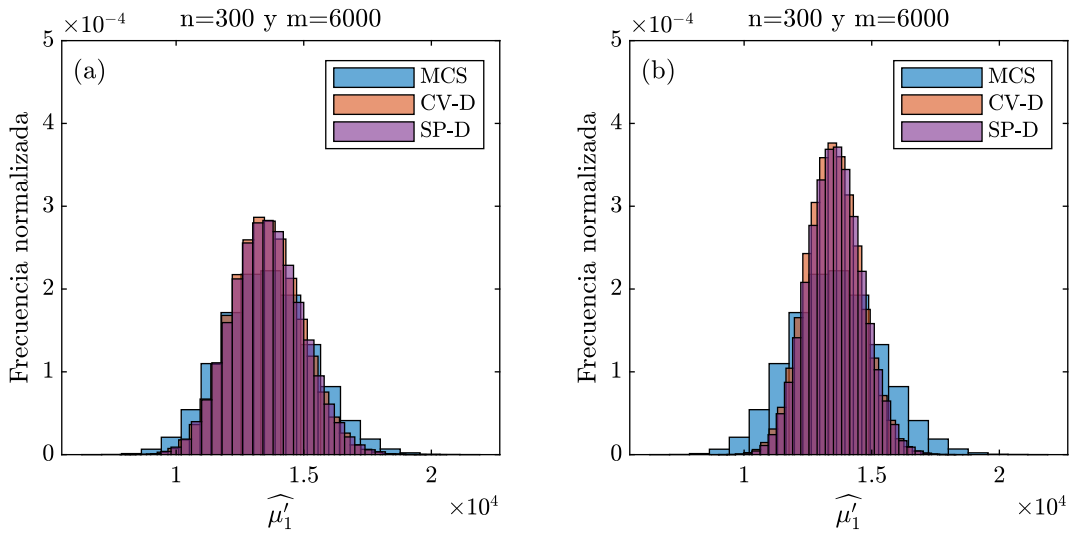


Figura 4.7: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_1$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-D) y la técnica splitting (SP-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

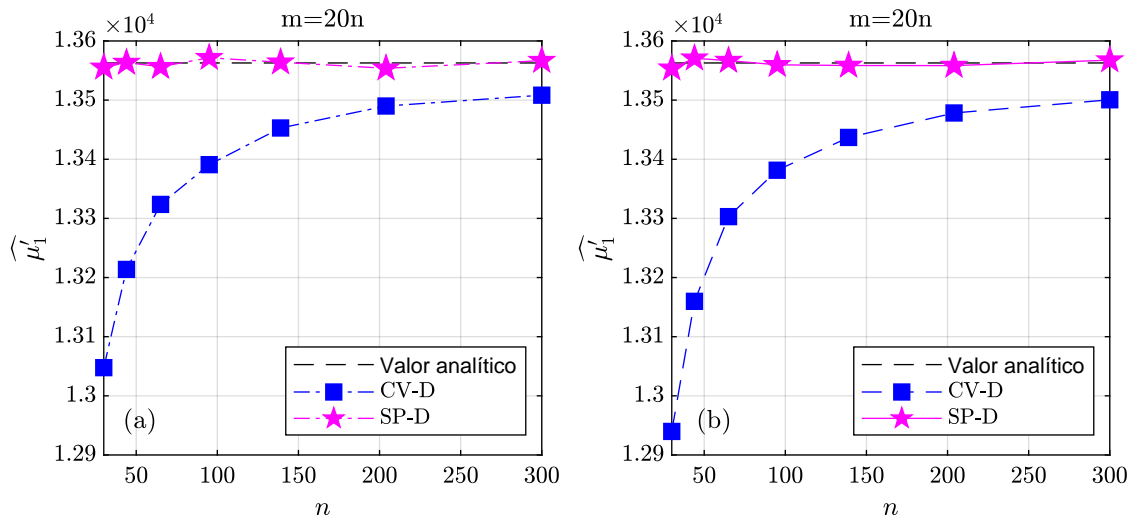


Figura 4.8: Ejemplo analítico: Estimador $\hat{\mu}_1^{(SP-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

ecuaciones (3.3), (3.31) y (4.62), respectivamente. El primer gráfico está asociado a la respuesta aproximada \tilde{r}_1 , mientras que el segundo a \tilde{r}_2 . La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 4.7. Se aprecia que, en ambos gráficos, las muestras del estimador splitting poseen una menor variabilidad respecto de las muestras entregadas por el método Monte Carlo, mientras que las variabilidades de los métodos control variates y splitting son similares. Además, esta disminución en la varianza del estimador es mayor cuando se usa la respuesta aproximada \tilde{r}_2 respecto del método

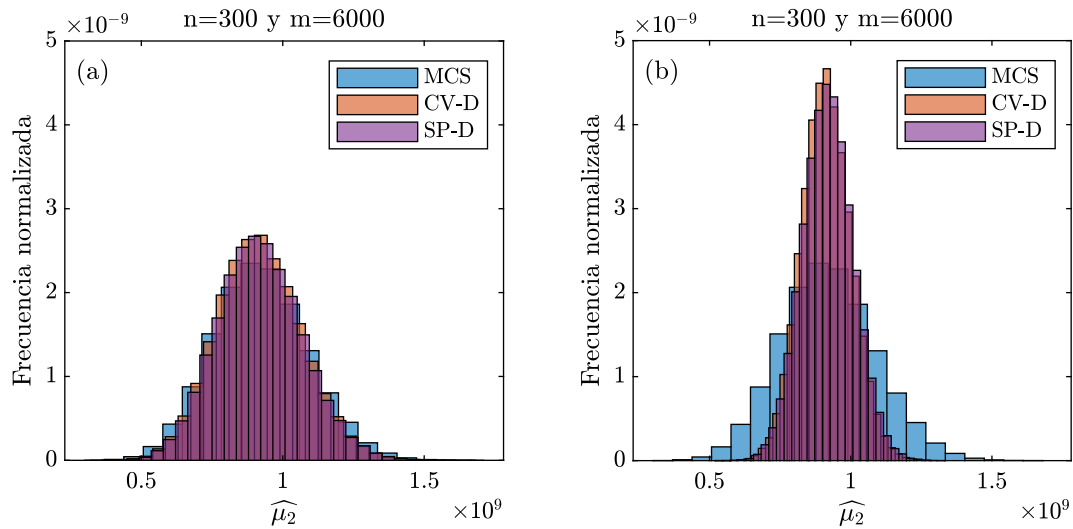


Figura 4.9: Ejemplo analítico: Histogramas de $\hat{\mu}_2$ obtenidos con el uso del método Monte Carlo (MCS), control variates (CV-D) y la técnica splitting (SP-D) (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

que utiliza \tilde{r}_1 .

En la figura 4.10 se muestra la evolución del estimador splitting de la varianza con respecto al número n de muestras de la respuesta (a partir de n muestras, se calcula una realización del estimador). El estimador splitting es calculado con el estimador del parámetro de control óptimo $\hat{\gamma}_D^{*\tau(i)}$. La fabricación de estos gráficos es similar a la creación de la figura 4.8. Se aprecia que, para ambas respuestas aproximadas, usar el estimador del parámetro de control óptimo genera un estimador splitting insesgado de la varianza, a diferencia del estimador control variates el cual es sesgado.

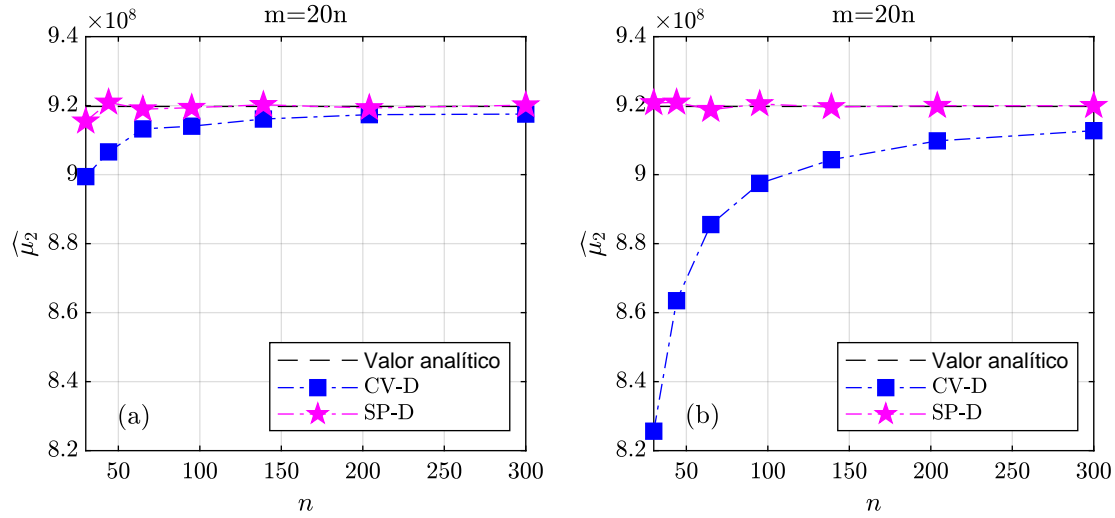


Figura 4.10: Ejemplo analítico: Estimador $\hat{\mu}_2^{(SP-D)}$ vs. número de muestras n (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

4.4. Elección del número de grupos de muestras de entrada

La técnica splitting requiere de la separación de muestras de los parámetros de entrada en grupos. De acuerdo con las secciones 4.2.2 y 4.3.2, el número de grupos debe ser por lo menos 3 para eliminar la correlación entre los estimadores de las estadísticas (esperanza o varianza) por grupo ($H_{(i)}^{(SP-C)}$ y $H_{(i)}^{(SP-D)}$). Recordando que el error cuadrático medio MSE es una medida de la calidad de un estimador, se evalúa cómo afecta el número de grupos formados al MSE de los estimadores splitting.

4.4.1. Estadísticas de la variable de control conocidas

El error cuadrático medio del estimador splitting construido cuando las estadísticas de la variable de control son conocidas se expresó en (4.14). Así,

$$\text{MSE} \left[\hat{H}^{(SP-C)} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\hat{H}_{(i)}^{(SP-C)} \right] \quad (4.73)$$

donde

$$\hat{H}_{(i)}^{(SP-C)} = \hat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \left(\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - H(\tilde{r}) \right)$$

Se calcula la varianza de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\hat{H}_{(i)}^{(SP-C)} \right] &= \mathbb{V} \left[\hat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] - 2\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\hat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \hat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] + \\ &\quad \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\hat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] \end{aligned}$$

Tanto la varianza de los estimadores de las estadísticas $H(r)$ y $H(\tilde{r})$, como la covarianza entre estos estimadores no dependen del grupo de muestras particular, sino que del tamaño del grupo, tal como se ha señalado previamente en las secciones 4.2.3 y 4.2.4, es decir,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-C})} \right] &= \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - 2\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \\ &\quad \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Se reemplaza la expresión (4.74) en (4.73). Así,

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right) \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \right) \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Las sumatorias de (4.75) pueden ser interpretadas como los estimadores de los siguientes valores esperados:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\rho}_C^{\tau(i)} = \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right]$$

y

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 = \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \right]$$

Se reemplazan las expresiones precedentes en (4.75). Así,

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - 2\mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right] \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right)^2 \right] \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \right) \end{aligned}$$

Se aplica la propiedad $\mathbb{E} [X^2] = (\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{V}[X]$ a la expresión anterior. De esta forma,

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-C})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - 2\mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right] \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right] \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{\rho}_C^{\tau(i)} \right] \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para el caso de la esperanza, se tiene que la expresión (4.76) toma la forma

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}'_1^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{1}{k} \left(\frac{\mu_{2,0}}{n^*} - 2\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{1,1}}{n^*} + \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \right)^2 \frac{\mu_{0,2}}{n^*} + \mathbb{V} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{0,2}}{n^*} \right)$$

Ya que el número de muestras por grupo se define como $n^* = n/k$, donde n es el número total de muestras de entrada y k es el número de grupos, entonces

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}'_1^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{\mu_{2,0}}{n} - 2\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{1,1}}{n} + \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \right)^2 \frac{\mu_{0,2}}{n} + \mathbb{V} \left[\widehat{\alpha}_C^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{0,2}}{n}$$

En la expresión anterior, hay que notar que la varianza del parámetro de control óptimo es el único término que depende del número de grupos; a medida que aumenta el número de grupos, el estimador del parámetro de control óptimo es construido con un número menor de muestras, lo que implica un aumento en la variabilidad del estimador y, con ello, un aumento en el error cuadrático medio de la esperanza. Por lo tanto, desde el punto de vista de la esperanza, conviene escoger el número de grupos k lo más pequeño posible. Es decir, $k = 3$ para anular la covarianza entre las estadísticas por grupo.

Para el caso de la varianza, se tiene que la expresión (4.76) toma la forma

$$\text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = \frac{B_1}{k} - 2\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] \frac{B_2}{k} + \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] \right)^2 \frac{B_3}{k} + \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] \frac{B_3}{k} \quad (4.77)$$

donde B_1 , B_2 y B_3 fueron definidos previamente en (4.30), (4.31) y (4.32), respectivamente. Así,

$$B_1 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{4,0}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{2,0}^2,$$

$$B_2 = \text{Cov} \left[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\mu_{2,2}}{n^*} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n^*}$$

y

$$B_3 = \mathbb{V} \left[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \frac{\mu_{0,4}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{0,2}^2$$

Para verificar si el error cuadrático medio del estimador de la varianza aumenta con el número de grupos k , se toma la derivada de (4.77) con respecto a k . La hipótesis planteada se cumple si esta derivada es positiva. Su expresión es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] &= \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{2,0}^2 - 2 \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] + \\ &\quad \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] \right)^2 + \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] + \\ &\quad \frac{B_3}{k} \left(\frac{d}{dk} \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{\tau(i)} \right] \right) \end{aligned}$$

Se puede factorizar la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] = & \\ \frac{2}{(k-n)^2} \underbrace{\left(\mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)}_{(1C)} + & \\ \underbrace{\frac{B_3}{k} \left(\frac{d}{dk} \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)}_{(2C)} & \end{aligned} \quad (4.78)$$

En el término (1C) de la expresión (4.78), el factor fuera del paréntesis es positivo. Por lo tanto, para estudiar el signo del término (1C), se trabaja con la expresión

$$\mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \quad (4.79)$$

Para seguir, se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Mukhopadhyay, 2000), es decir,

$$\mu_{1,1}^2 \leq \mu_{2,0} \mu_{0,2} \quad (4.80)$$

Al combinar las expresiones (4.79) y (4.80) se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \geq & \\ \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{2,0} \mu_{0,2} \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] & \end{aligned}$$

Al factorizar el lado derecho de la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \geq & \\ \left(\mu_{2,0} - \mu_{0,2} \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_C^{*\tau(i)} \right] & \end{aligned} \quad (4.81)$$

Se puede observar en la desigualdad (4.81) que el lado derecho es positivo. Por lo tanto,

$$(1C) > 0$$

En el término (2C) de (4.78), la derivada del parámetro de control es positiva, ya que un aumento en el número de grupos implica un aumento en la variabilidad del parámetro, tal como se explicó para el caso de la esperanza. Además, el término B_3 es positivo, puesto que representa una varianza. Por lo tanto,

$$(2C) > 0$$

De acuerdo con los análisis anteriores,

$$\frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-C})} \right] > 0$$

De esta manera, se comprueba que el error cuadrático medio de la varianza aumenta con el número de grupos. Por lo tanto, desde el punto de vista de la varianza, conviene escoger el número de grupos k lo más pequeño posible. Es decir, $k = 3$ para anular la covarianza entre las estadísticas por grupo.

Para apreciar el efecto del número de grupos, se toma el ejemplo analítico de las secciones 4.2.5 y 4.3.5. En la figura 4.11 y la figura 4.12 se muestra el error cuadrático medio del estimador de la esperanza y de la varianza, respectivamente, en función del número de grupos k . Para fabricar estos gráficos, se toma un número fijo $n = 240$ muestras de entrada para cada realización del estimador en cuestión. En la tabla 4.1 se indica el número de muestras por grupo n^* .

Tabla 4.1: Número de muestras por grupo n^* según el número de grupos k .

k	n^*
3	80
4	60
5	48
6	40

Para cada número de grupos, se grafica un punto correspondiente al promedio de 10^6 realizaciones del error cuadrático medio del estimador. Es posible apreciar en ambos gráficos que, a medida que aumenta el número de grupos, aumenta el error cuadrático medio, lo cual es indeseable en un estimador. Esto sugiere que el número de grupos formados debe ser el mínimo posible lo cual, sumado al mínimo recomendado para anular la covarianza entre las estadísticas por grupo, deja el número óptimo de grupos de muestras en 3.

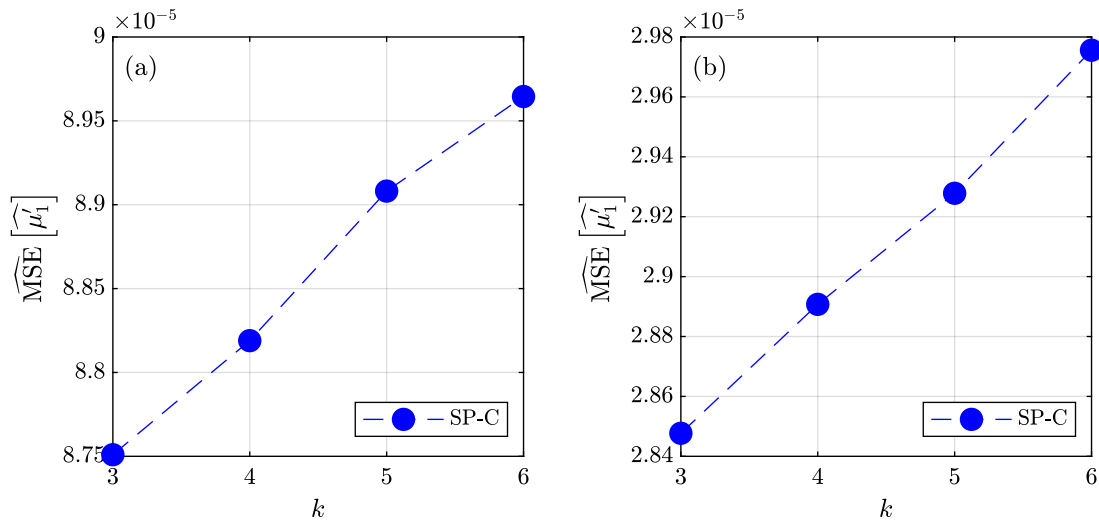


Figura 4.11: Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_1^{(SP-C)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

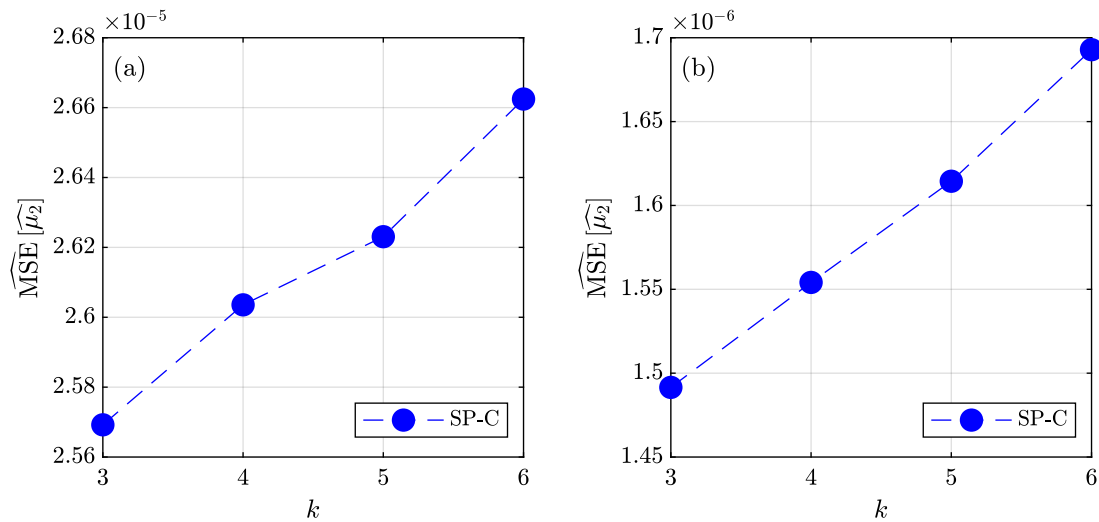


Figura 4.12: Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\widehat{\mu}_2^{(SP-C)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

4.4.2. Estadísticas de la variable de control desconocidas

El error cuadrático medio del estimador splitting construido cuando las estadísticas de la variable de control son desconocidas, expresado previamente en (4.45), es

$$\text{MSE} \left[\widehat{H}^{(SP-D)} \right] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(SP-D)} \right] \quad (4.82)$$

donde

$$\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} = \widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \left(\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) - \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right) \quad (4.83)$$

Se calcula la varianza de la expresión (4.83):

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] = & \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] - 2\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] + \\ & \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] + \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] \end{aligned}$$

Tanto la varianza de los estimadores de las estadísticas $H(r)$ y $H(\tilde{r})$ como la covarianza entre estos estimadores no dependen del grupo de muestras particular, sino que del tamaño del grupo, tal como se ha señalado previamente en las secciones 4.3.3 y 4.3.4, es decir,

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*}) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*}) \right] = \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left[\widehat{H}_{(i)}^{(\text{SP-D})} \right] = & \mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - 2\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \\ & \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \end{aligned} \quad (4.84)$$

Reemplazando la expresión (4.84) en (4.82), se obtiene que el error cuadrático medio es

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] = & \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}) \right] - \right. \\ & 2 \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right) \text{Cov} \left[\widehat{H}(r, \Theta_{n^*}), \widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \\ & \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right) \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \\ & \left. \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right) \mathbb{V} \left[\widehat{H}(\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Las sumatorias de la expresión (4.85) pueden ser interpretadas como estimadores de valores esperados, tal como muestran las expresiones

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \widehat{\rho}_D^{\tau(i)} = \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right]$$

y

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 = \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right]$$

Se reemplazan las expresiones precedentes en (4.85). Entonces,

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}) \right] - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \text{Cov} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right] \mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right] \mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \right) \end{aligned}$$

Se factoriza por el factor común $\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right]$:

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}) \right] - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \text{Cov} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right)^2 \right] \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \right) \right) \end{aligned}$$

Ya que $\mathbb{E} [X^2] = (\mathbb{E} [X])^2 + \mathbb{V} [X]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{H}^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}) \right] - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \text{Cov} \left[\widehat{H} (r, \Theta_{n^*}), \widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \right. \\ &\quad \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \right)^2 \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \right) \\ &\quad \left. + \mathbb{V} \left[\widehat{\rho}_D^{\tau(i)} \right] \left(\mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{n^*}) \right] + \mathbb{V} \left[\widehat{H} (\tilde{r}, \Theta_{m^*}) \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Para el caso de la esperanza, se tiene que la expresión (4.86) toma la forma

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}'_1^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{1}{k} \left(\frac{\mu_{2,0}}{n^*} - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{1,1}}{n^*} + \right. \\ &\quad \left. \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \right)^2 \left(\frac{\mu_{0,2}}{n^*} + \frac{\mu_{0,2}}{m^*} \right) + \mathbb{V} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \left(\frac{\mu_{0,2}}{n^*} + \frac{\mu_{0,2}}{m^*} \right) \right) \end{aligned}$$

Ya que $n^* = n/k$ y $m^* = m/k$, entonces

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}'_1^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{\mu_{2,0}}{n} - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \frac{\mu_{1,1}}{n} + \\ &\quad \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \right)^2 \left(\frac{\mu_{0,2}}{n} + \frac{\mu_{0,2}}{m} \right) + \mathbb{V} \left[\widehat{\alpha}_D^{\tau(i)} \right] \left(\frac{\mu_{0,2}}{n} + \frac{\mu_{0,2}}{m} \right) \end{aligned}$$

Tal como en la sección 4.4.1, la varianza del parámetro de control óptimo es el único término que depende del número de grupos; esta varianza aumenta con el número de grupos, lo que genera un aumento en el error cuadrático medio de la esperanza. Por lo tanto, desde el punto de vista de la esperanza, conviene escoger el número de grupos k lo más pequeño posible. Es decir, $k = 3$ para anular la covarianza entre las estadísticas por grupo.

Para el caso de la varianza, se tiene que la expresión (4.86) toma la forma

$$\begin{aligned} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{B_1}{k} - 2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right] \frac{B_2}{k} + \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right] \right)^2 \frac{B_3 + B_4}{k} + \\ &\quad \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{\tau(i)} \right] \frac{B_3 + B_4}{k} \end{aligned} \quad (4.87)$$

donde B_1 , B_2 , B_3 y B_4 fueron definidos previamente en (4.30), (4.31), (4.32) y (4.67), respectivamente. Sus expresiones son

$$B_1 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*})] = \frac{\mu_{4,0}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{2,0}^2,$$

$$B_2 = \text{Cov}[\widehat{\mu}_2(r, \Theta_{i,n^*}), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})] = \frac{2\mu_{1,1}^2}{(n^* - 1)n^*} + \frac{\mu_{2,2}}{n^*} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n^*},$$

$$B_3 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,n^*})] = \frac{\mu_{0,4}}{n^*} - \frac{(n^* - 3)}{(n^* - 1)n^*} \mu_{0,2}^2$$

y

$$B_4 = \mathbb{V}[\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_{i,m^*})] = \frac{\mu_{0,4}}{m^*} - \frac{(m^* - 3)}{(m^* - 1)m^*} \mu_{0,2}^2$$

Para verificar si el error cuadrático medio del estimador de la varianza aumenta con el número de grupos k , se toma la derivada de (4.87) con respecto a k . Esta derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] &= \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{2,0}^2 - 2 \frac{2}{(k-n)^2} \mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \\ &\quad \left(\frac{2}{(k-n)^2} + \frac{2}{(k-m)^2} \right) \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \\ &\quad \left(\frac{2}{(k-n)^2} + \frac{2}{(k-m)^2} \right) \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \\ &\quad \frac{B_3 + B_4}{k} \left(\frac{d}{dk} \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right) \end{aligned}$$

La hipótesis planteada anteriormente se cumple si esta derivada es positiva. Se factoriza la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] &= \\ &\underbrace{\frac{2}{(k-n)^2} \left(\mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)}_{(1D)} + \\ &\underbrace{\frac{2}{(k-m)^2} \left(\mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)}_{(2D)} + \underbrace{\frac{B_3 + B_4}{k} \left(\frac{d}{dk} \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)}_{(3D)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

En el término (1D) de (4.88), el factor fuera del paréntesis es positivo. Por lo tanto, para estudiar el signo del término (1D), se trabaja con la expresión

$$\mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right]$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz expresada en (4.80), se tiene que

$$\begin{aligned} & \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \geq \\ & \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{2,0}\mu_{0,2} \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \end{aligned}$$

Se factoriza el lado derecho de la desigualdad:

$$\begin{aligned} & \mu_{2,0}^2 - 2\mu_{1,1}^2 \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] + \mu_{0,2}^2 \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \geq \\ & \left(\mu_{2,0} - \mu_{0,2} \mathbb{E} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \right)^2 + \mu_{0,2}^2 \mathbb{V} \left[\widehat{\gamma}_D^{*\tau(i)} \right] \end{aligned} \tag{4.89}$$

Se puede observar en (4.89) que el lado derecho de la desigualdad es positivo. Así, el término (1D) es también positivo, es decir,

$$(1D) > 0$$

El término (2D) de (4.88) posee solo términos positivos. Por lo tanto,

$$(2D) > 0$$

En el término (3D) de (4.88), la derivada del parámetro de control es positiva, ya que un aumento en el número de grupos implica un aumento en la variabilidad del parámetro, tal como se explicó para el caso de la esperanza. Además, los términos B_3 y B_4 son positivos, puesto que representan varianzas. Por lo tanto,

$$(3D) > 0$$

De acuerdo con los análisis anteriores,

$$\frac{d}{dk} \text{MSE} \left[\widehat{\mu}_2^{(\text{SP-D})} \right] > 0$$

De esta manera, se comprueba que el error cuadrático medio de la varianza aumenta con el número de grupos. Por lo tanto, desde el punto de vista de la varianza, conviene escoger el número de grupos k lo más pequeño posible. Es decir, $k = 3$ para anular la covarianza entre las estadísticas por grupo.

Para apreciar el efecto del número de grupos de muestras de entrada, se toma el ejemplo analítico de las secciones 4.2.5 y 4.3.5. En la figura 4.13 y la figura 4.14 se muestra el error cuadrático medio del estimador de la esperanza y de la varianza, respectivamente, en función del número de grupos k . Para fabricar estos gráficos, se toma un número fijo de $n = 240$ muestras de entrada agrupadas en Θ_n y de $m = 12000$ muestras agrupadas en Θ_m , para cada realización del estimador. En la tabla 4.2 se indican los números de muestras por grupo n^* y m^* .

Para cada número de grupos se grafica un punto correspondiente al promedio de 10^6 realizaciones del error cuadrático medio del estimador. Es posible apreciar en ambos gráficos que, a medida que aumenta el número de grupos, aumenta el error cuadrático medio, lo cual es indeseable en un estimador. Por la misma razón explicada en la sección 4.4.1, el número de grupos de muestras de entrada recomendado es 3.

Tabla 4.2: Números de muestras por grupo n^* y m^* según el número de grupos k .

k	n^*	m^*
3	80	4000
4	60	3000
5	48	2400
6	40	2000

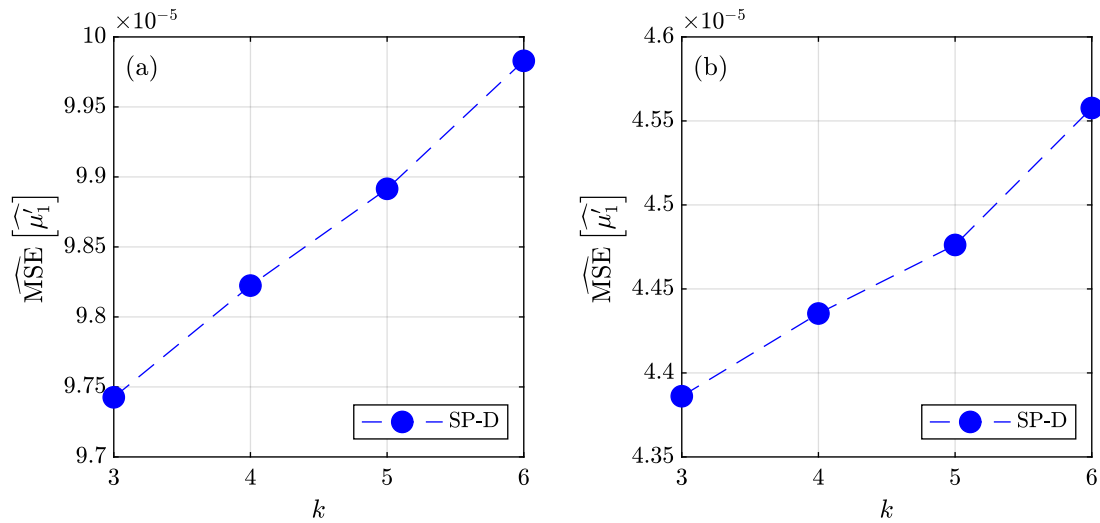


Figura 4.13: Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\hat{\mu}_1^{(SP-D)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

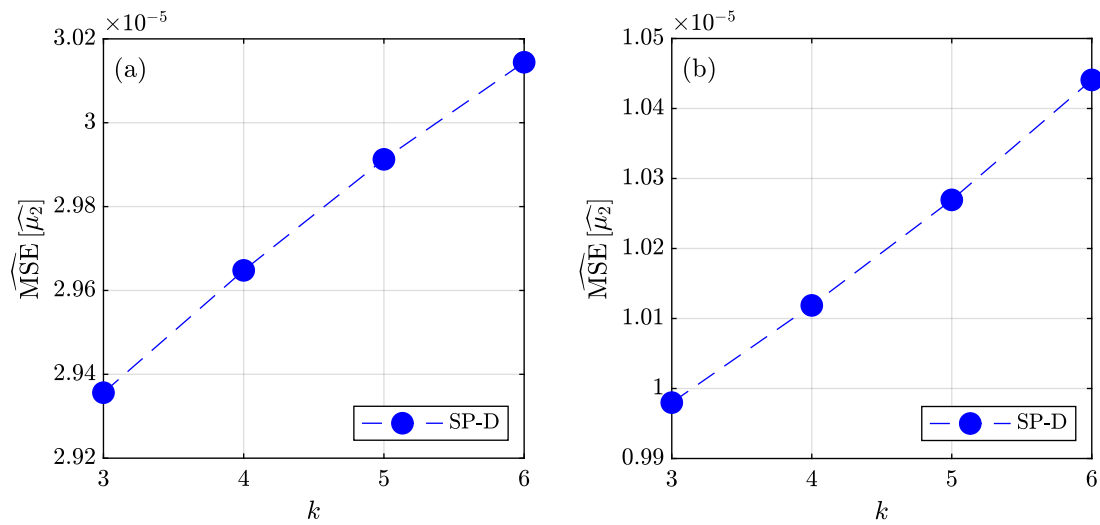


Figura 4.14: Ejemplo analítico: Gráfico del error cuadrático medio del estimador $\hat{\mu}_2^{(SP-D)}$ versus el número de grupos formados (a) usando \tilde{r}_1 (b) usando \tilde{r}_2

APLICACIONES

5.1. Flujo en medio poroso de dos capas de suelo

El presente ejemplo fue presentado por Valdebenito et al. (2018). En esta sección se presenta una presa impermeable la cual está fundada sobre un suelo poroso formado por dos capas. A su vez, este suelo descansa sobre roca impermeable. Los espesores de las capas y el tipo de suelo que las conforman se muestran en la figura 5.1. La presa retiene agua solo en uno de sus lados, la cual alcanza una altura h .

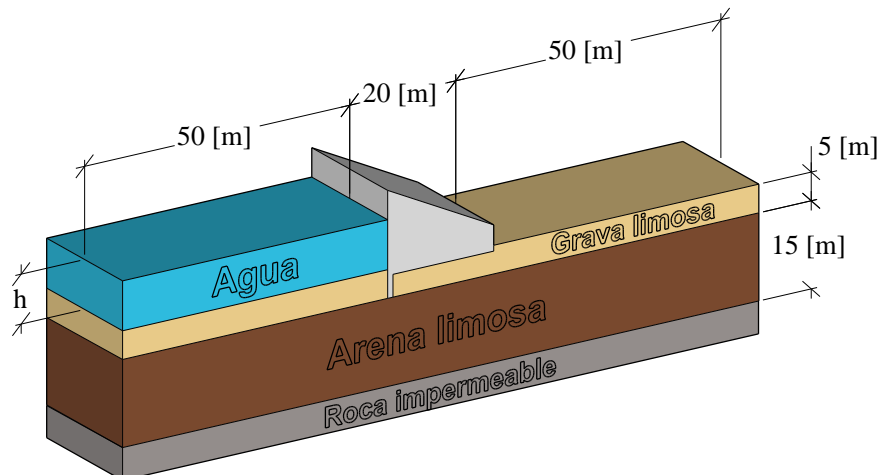


Figura 5.1: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Esquema del problema.

Dada esta configuración, interesa calcular el caudal de agua que escurre hacia el otro lado de la

presa a través del suelo. Para ello, un dato importante es la permeabilidad del medio poroso por el cual circula el agua. Sin embargo, este dato no es conocido con precisión. Por otro lado, la altura del agua tampoco es conocida. Por lo tanto, el caudal de agua buscado es incierto.

Para poder solventar esta dificultad, la incertidumbre en las permeabilidades de las capas del suelo y la altura del agua retenida por la presa son caracterizadas mediante funciones de densidad de probabilidad cuyos parámetros se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Variables aleatorias del modelo.

Variable	Descripción	Distribución	Valor medio	Coef. de Variación
h	Altura de agua retenida	$\mathcal{U}(7[\text{m}], 10[\text{m}])$	-	-
$k_{xx}^{(1)}$	Permeabilidad horizontal de la grava limosa	Log-normal	$5 \times 10^{-7}[\text{m/s}]$	100 %
$k_{yy}^{(1)}$	Permeabilidad vertical de la grava limosa	Log-normal	$2 \times 10^{-7}[\text{m/s}]$	100 %
$k_{xx}^{(2)}$	Permeabilidad horizontal de la arena limosa	Log-normal	$5 \times 10^{-6}[\text{m/s}]$	100 %
$k_{yy}^{(2)}$	Permeabilidad vertical de la arena limosa	Log-normal	$2 \times 10^{-6}[\text{m/s}]$	100 %

Por otra parte, la incertidumbre en el caudal de salida es caracterizada mediante sus estadísticas de segundo orden (esperanza y varianza), cuyo cálculo es la finalidad de este ejemplo. Para lograrlo, se construye un modelo de elementos finitos de las capas de suelo, el cual contempla 1628 elementos triangulares y 3413 nodos. Con este modelo discretizado del sistema en estudio, es posible evaluar respuestas de alta fidelidad. De ahí que se puede categorizar al modelo de elementos finitos como el modelo de alta fidelidad en este ejemplo. Degrauwe et al. (2010) muestra el sistema de ecuaciones que domina el comportamiento del flujo, junto con la definición de nodos internos y nodos de borde de la malla.

Ahora, para obtener las estadísticas de segundo orden del caudal de salida se utiliza el método control variates. Como ya se explicó, este método requiere de dos tipos de respuestas, relacionadas entre sí; las respuestas de alta fidelidad (característica que tienen las respuestas que surgen del modelo de elementos finitos) y las respuestas de baja fidelidad. Este segundo grupo va a ser tomado como los resultados que se originan al aplicar un modelo reducido. Se utilizará el método de Noor y Correa para fabricar las bases reducidas. Hay que notar que el método de base reducida no permite conocer las estadísticas de segundo orden de la respuesta de baja fidelidad de manera analítica. De hecho, solo es posible estimar las estadísticas de segundo orden de este modelo de baja fidelidad mediante simulación Monte Carlo. A fin de probar la efectividad del método propuesto en esta tesis, se calculan los estimadores de las estadísticas splitting $H^{(\text{SP-D})}$ usando tres grupos de muestras, los cuales se comparan con los estimadores Monte Carlo $H^{(\text{MCS})}$ y los estimadores control variates $H^{(\text{CV-D})}$.

Se crean dos bases reducidas para este ejemplo; BR1 es una base que incorpora la solución nominal y las derivadas de primer orden respecto de las variables inciertas, lo que resulta en una base de 6 vectores. Por otra parte, BR2 contiene los vectores de BR1 y las derivadas de segundo orden, lo que origina una base de 31 vectores.

En la tabla 5.2 se muestran los estimadores de las estadísticas de segundo orden usando parámetros de control iguales a 1, tanto para el método control variates tradicional como para el método que incorpora la técnica splitting. Esta tabla presenta las siguientes notaciones:

- MCS (ref): Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad. Sus valores son usados como referencia para los demás procedimientos dado el mayor número de muestras con que trabaja.
- MCS: Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad.
- MCS - BR1: Método Monte Carlo. Trabaja con m muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo reducido que trabaja con la base BR1.
- MCS - BR2: Método Monte Carlo. Trabaja con m muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo reducido que trabaja con la base BR2.
- CV - BR1: Método control variates tradicional. Trabaja con dos tipos de muestras; n muestras de los parámetros de entrada evaluadas tanto en el modelo de elementos finitos como en el modelo reducido que trabaja con la base BR1, y m muestras distintas de las n anteriores, evaluadas solo en el modelo reducido que trabaja con la base BR1. Se debe considerar que se tienen diferentes valores de m .
- CV - BR2: Similar al método anterior, salvo que el modelo reducido trabaja con la base BR2.
- SP - BR1: Método control variates que incorpora la técnica splitting de separación de muestras. Trabaja con dos tipos de muestras; n muestras de los parámetros de entrada evaluadas tanto en el modelo de elementos finitos como en el modelo reducido que trabaja con la base BR1, y m muestras distintas de las n anteriores, evaluadas solo en el modelo reducido que trabaja con la base BR1. Se debe considerar que se tienen diferentes valores de m .
- SP - BR2: Similar al método anterior, salvo que el modelo reducido trabaja con la base BR2.

Además, también se muestra el costo computacional relativo n_E , el cual se define como

$$n_E = \frac{t}{t_1}$$

donde:

- t : Tiempo que toma un método específico en obtener los estimadores de las estadísticas de segundo orden de la respuesta de interés (en este caso, el caudal).
- t_1 : Tiempo necesario para obtener una respuesta del modelo de alta fidelidad.

Tabla 5.2: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1.

	n	m	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	6000	0	6000.0	2.18×10^{-6}	2.33×10^{-16}	1.35×10^{-12}	2.46×10^{-27}
MCS	300	0	300.0	2.09×10^{-6}	3.95×10^{-15}	1.18×10^{-12}	6.32×10^{-26}
MCS – BR1	0	300	0.6	2.29×10^{-6}	6.41×10^{-15}	1.92×10^{-12}	1.53×10^{-25}
MCS – BR2	0	300	1.0	2.26×10^{-6}	5.75×10^{-15}	1.72×10^{-12}	9.06×10^{-26}
CV – BR1	300	600	301.3	2.15×10^{-6}	8.00×10^{-15}	1.11×10^{-12}	1.72×10^{-25}
		1500	303.1	2.19×10^{-6}	3.44×10^{-15}	1.51×10^{-12}	1.03×10^{-25}
		3000	306.3	2.17×10^{-6}	1.92×10^{-15}	1.40×10^{-12}	7.95×10^{-26}
		4500	309.6	2.18×10^{-6}	7.18×10^{-16}	1.43×10^{-12}	6.21×10^{-26}
CV – BR2	300	600	302.0	2.15×10^{-6}	7.26×10^{-15}	1.11×10^{-12}	9.05×10^{-26}
		1500	305.0	2.18×10^{-6}	2.98×10^{-15}	1.42×10^{-12}	4.17×10^{-26}
		3000	310.0	2.17×10^{-6}	1.65×10^{-15}	1.32×10^{-12}	2.47×10^{-26}
		4500	313.5	2.18×10^{-6}	4.36×10^{-16}	1.35×10^{-12}	1.20×10^{-26}
SP – BR1	300	600	301.3	2.15×10^{-6}	8.09×10^{-15}	1.11×10^{-12}	1.80×10^{-25}
		1500	303.2	2.13×10^{-6}	3.47×10^{-15}	1.36×10^{-12}	1.10×10^{-25}
		3000	306.3	2.15×10^{-6}	2.09×10^{-15}	1.49×10^{-12}	8.02×10^{-26}
		4500	309.6	2.16×10^{-6}	7.26×10^{-16}	1.48×10^{-12}	6.26×10^{-26}
SP – BR2	300	600	302.1	2.15×10^{-6}	7.28×10^{-15}	1.11×10^{-12}	9.15×10^{-26}
		1500	305.1	2.13×10^{-6}	2.98×10^{-15}	1.35×10^{-12}	4.18×10^{-26}
		3000	310.1	2.15×10^{-6}	1.60×10^{-15}	1.48×10^{-12}	2.51×10^{-26}
		4500	313.6	2.16×10^{-6}	4.37×10^{-16}	1.46×10^{-12}	1.49×10^{-26}

Es posible ver que el método control variates origina resultados más cercanos a los entregados por el método de referencia a partir de $m = 1500$, pero con menos muestras, lo cual es un aspecto positivo y esperable, considerando que este método es una técnica de reducción de varianza. Por otra parte, a medida que aumenta el número m de muestras, se mejora la exactitud de los estimadores de las estadísticas de segundo orden, tanto del método control variates tradicional como del método que ocupa la técnica splitting. El uso del método control variates involucra un aumento insignificante en el costo computacional relativo n_E respecto del método Monte Carlo, produciendo resultados mejores a este último, usando la misma cantidad de muestras n . La disminución del error cuadrático medio puede ser aún mayor al usar el parámetro de control óptimo, tal como se muestra en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos estimados.

	n	m	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	6000	0	6000.0	2.18×10^{-6}	2.33×10^{-16}	1.35×10^{-12}	2.46×10^{-27}
MCS	300	0	300.0	2.09×10^{-6}	3.95×10^{-15}	1.18×10^{-12}	6.32×10^{-26}
MCS – BR1	0	300	0.6	2.29×10^{-6}	6.41×10^{-15}	1.92×10^{-12}	1.53×10^{-25}
MCS – BR2	0	300	1.0	2.26×10^{-6}	5.75×10^{-15}	1.72×10^{-12}	9.06×10^{-26}
CV – BR1	300	600	301.3	2.13×10^{-6}	1.35×10^{-15}	1.13×10^{-12}	2.13×10^{-26}
		1500	303.1	2.16×10^{-6}	8.80×10^{-16}	1.39×10^{-12}	1.67×10^{-26}
		3000	306.3	2.16×10^{-6}	5.18×10^{-16}	1.35×10^{-12}	1.43×10^{-26}
		4500	309.6	2.16×10^{-6}	4.04×10^{-16}	1.38×10^{-12}	1.35×10^{-26}
CV – BR2	300	600	302.0	2.13×10^{-6}	1.31×10^{-15}	1.12×10^{-12}	1.17×10^{-26}
		1500	305.0	2.16×10^{-6}	8.11×10^{-16}	1.38×10^{-12}	1.13×10^{-26}
		3000	310.0	2.16×10^{-6}	4.52×10^{-16}	1.31×10^{-12}	6.15×10^{-27}
		4500	313.5	2.17×10^{-6}	3.42×10^{-16}	1.36×10^{-12}	5.98×10^{-27}
SP – BR1	300	600	301.3	2.12×10^{-6}	1.47×10^{-15}	1.21×10^{-12}	6.11×10^{-26}
		1500	303.2	2.16×10^{-6}	9.31×10^{-16}	1.46×10^{-12}	4.58×10^{-26}
		3000	306.3	2.16×10^{-6}	5.24×10^{-16}	1.32×10^{-12}	2.93×10^{-26}
		4500	309.6	2.16×10^{-6}	4.09×10^{-16}	1.37×10^{-12}	2.18×10^{-26}
SP – BR2	300	600	302.1	2.12×10^{-6}	1.45×10^{-15}	1.20×10^{-12}	4.52×10^{-26}
		1500	305.1	2.16×10^{-6}	8.58×10^{-16}	1.40×10^{-12}	4.10×10^{-26}
		3000	310.1	2.16×10^{-6}	4.63×10^{-16}	1.29×10^{-12}	1.73×10^{-26}
		4500	313.6	2.17×10^{-6}	3.50×10^{-16}	1.34×10^{-12}	1.39×10^{-26}

Se puede ver en la tabla 5.3 que la técnica splitting produce un leve aumento en la variabilidad de los estimadores buscados respecto del método control variates tradicional, atribuible a la mayor variabilidad en el parámetro de control óptimo; mientras el método control variates tradicional trabaja solo con un parámetro, la técnica splitting presenta tantos parámetros como grupos de muestras se hayan formado (en este caso tres). Sin embargo, respecto a este último punto es importante hacer notar que el error cuadrático medio asociado a los métodos CV debe ser mayor que el mostrado, ya que en su cálculo no se está considerando el sesgo que poseen los estimadores CV.

En las figuras 5.2 y 5.3 se grafica el error cuadrático medio contra el costo computacional relativo n_E . El error graficado fue tomado como el promedio de 1000 realizaciones independientes del mismo.

A su vez, para cada realización se tomó un número de muestras n para el método Monte Carlo que varía entre 18 y 600, mientras que se tomó $n = 102$ para los métodos control variates, con un número m que varía entre 102 y 6000. Se debe indicar que se toma el número 102 para poder repartir el mismo número de muestras a los tres grupos formados.

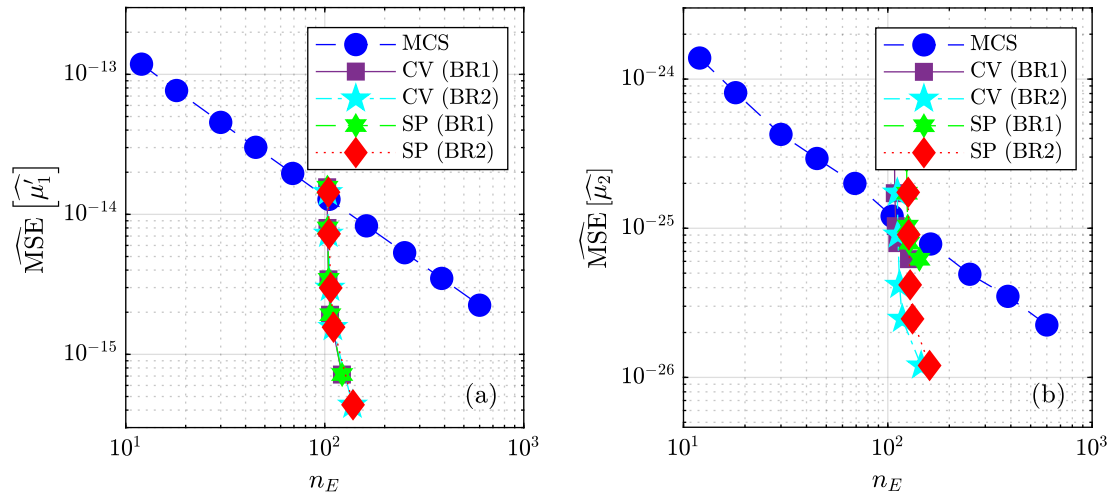


Figura 5.2: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Error cuadrático medio de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza vs. costo numérico n_E . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1.

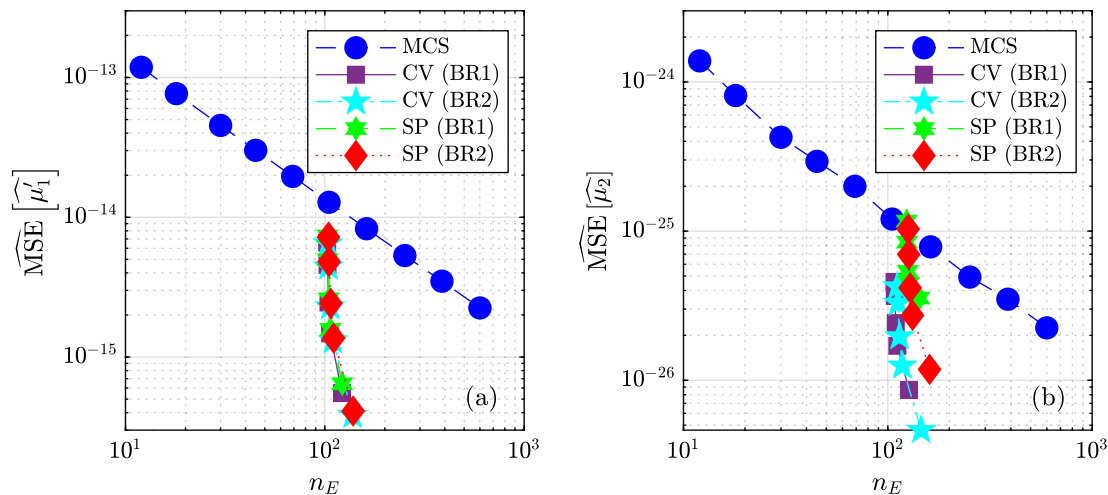


Figura 5.3: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Error cuadrático medio de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza vs. costo numérico n_E . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos estimados.

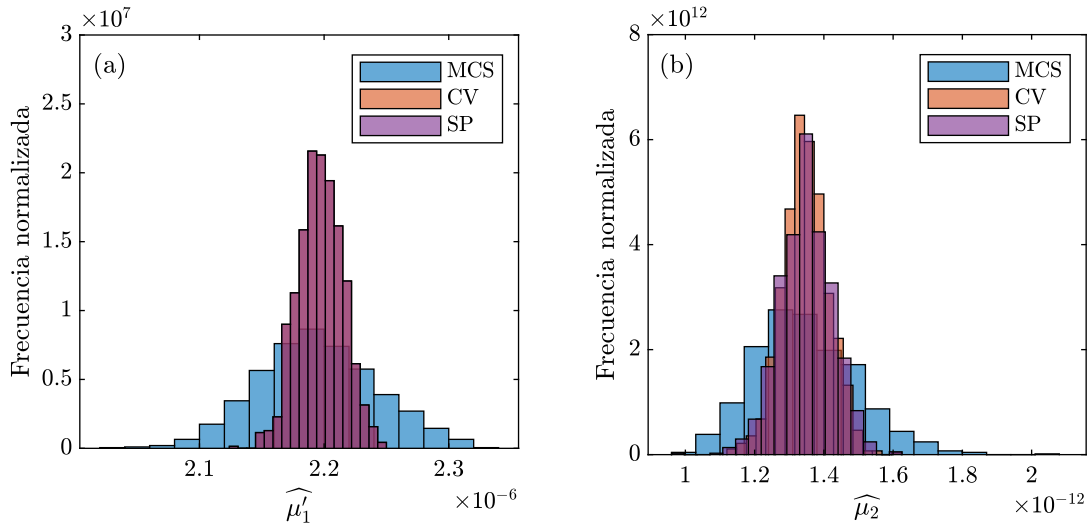


Figura 5.4: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR1 y parámetros de control iguales a 1.

Se puede ver que la disminución en el error cuadrático medio de los estimadores control variates y splitting es más rápida comparada con el método Monte Carlo. En el caso de la varianza, es evidente que las gráficas asociadas a la base reducida BR2 se encuentran bajo las asociadas a BR1 lo que prueba que, mientras mayor es la calidad del modelo aproximado (entendiendo calidad como el grado de correlación con las respuestas de un modelo de alta fidelidad), mayor será la disminución en el error cuadrático medio. Las curvas de la figura 5.3 se encuentran por debajo de las curvas de la figura 5.2, lo que era esperable, ya que la primera trabaja con los parámetros de control óptimo.

En la figura 5.3 se observa que los estimadores splitting poseen una disminución más lenta del error cuadrático medio respecto de los estimadores control variates, lo que se explica con la variabilidad aportada por el parámetro de control óptimo en el caso de la técnica splitting y con el sesgo que no es graficado en la figura 5.3, pero que está presente en los estimadores control variates, tal como se explicó anteriormente.

Entre las figuras 5.4 y 5.7 se observan histogramas de los estimadores de las estadísticas de segundo orden, obtenidos con los métodos Monte Carlo (MCS), control variates tradicional (CV) y control variates usando la técnica splitting (SP). Estos gráficos fueron fabricados con 1000 realizaciones independientes de los estimadores de las estadísticas de segundo orden. Cada realización fue hecha con $n = 600$ muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado y $m = 6000$ muestras exclusivas del modelo aproximado, diferentes de las n muestras anteriores. La suma de las áreas de las barras correspondientes a un método es igual a 1, por lo que es posible comparar las gráficas de los métodos visualmente.

En las figuras 5.8 y 5.9 se observa la evolución de los estimadores de las estadísticas de segundo orden con respecto al número de muestras n . Se define para efectos de cálculo que $m = 10n$ para

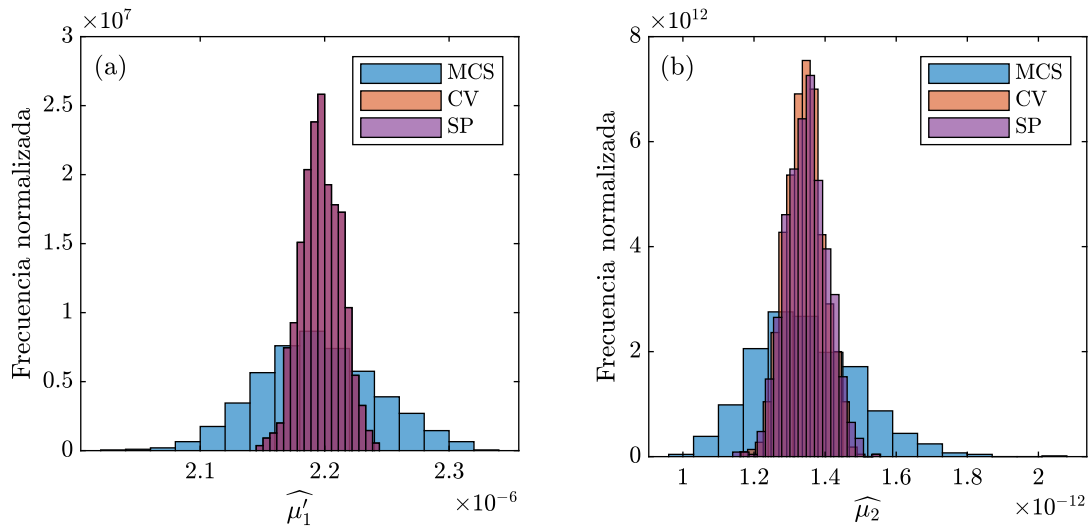


Figura 5.5: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR2 y parámetros de control iguales a 1.

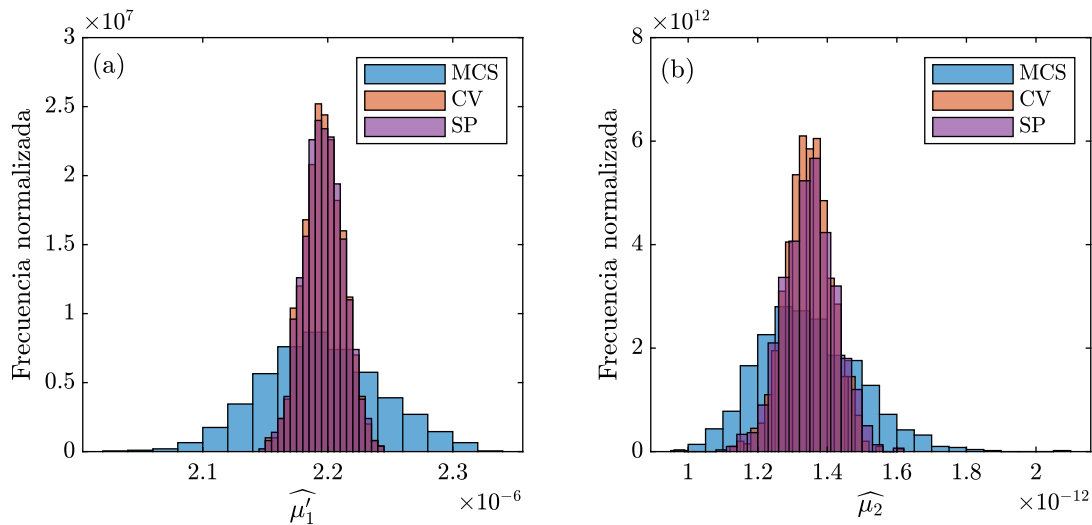


Figura 5.6: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR1 y parámetros de control óptimos.

poder construir los estimadores correspondientes. Los puntos de las gráficas fueron tomados como el promedio de 1000 realizaciones independientes de los estimadores, donde cada realización fue hecha con n muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado, y con m muestras exclusivas del modelo aproximado, distintas de las n muestras anteriores.

Es posible observar en la figura 5.9 que el método control variates tradicional (CV) desarrolla

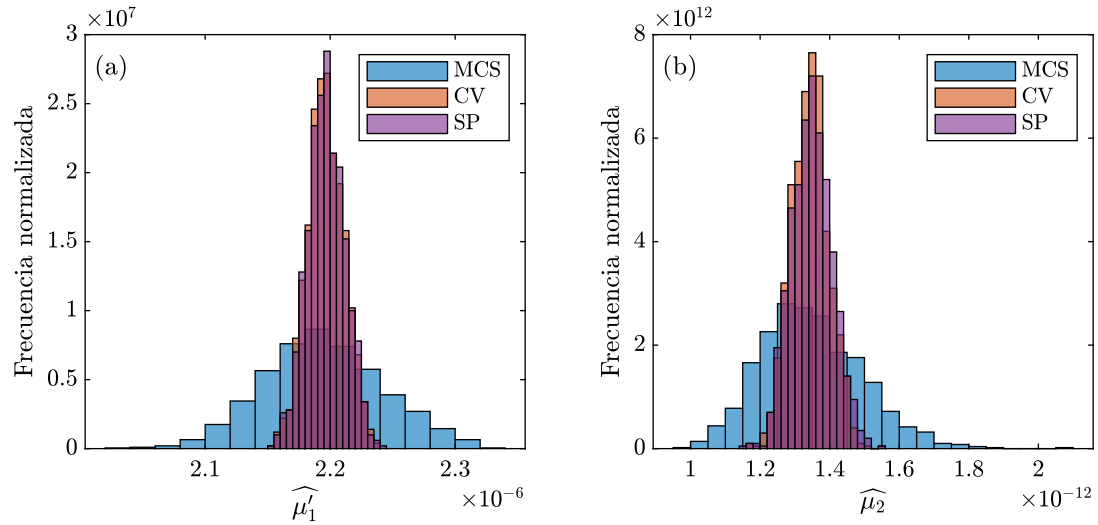


Figura 5.7: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting con BR2 y parámetros de control óptimos.

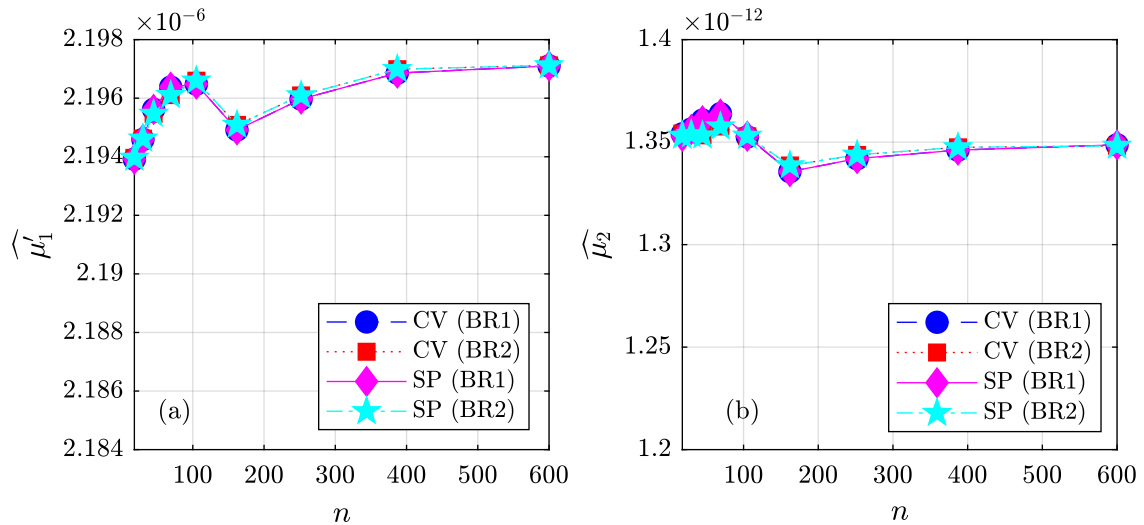


Figura 5.8: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1.

estimadores que presentan un sesgo respecto del valor que debiera estimar. Esto se observa claramente para valores bajos de n , donde existe un desplazamiento sostenido de la curva; al ser estos valores un promedio de 1000 realizaciones, se descarta la posibilidad de que esa desviación esté fundamentada en la aleatoriedad de las muestras. Este sesgo surge al usar el parámetro de control óptimo, tal como se explicó en la sección 3. La figura 5.8 apoya lo anteriormente dicho, la cual fue

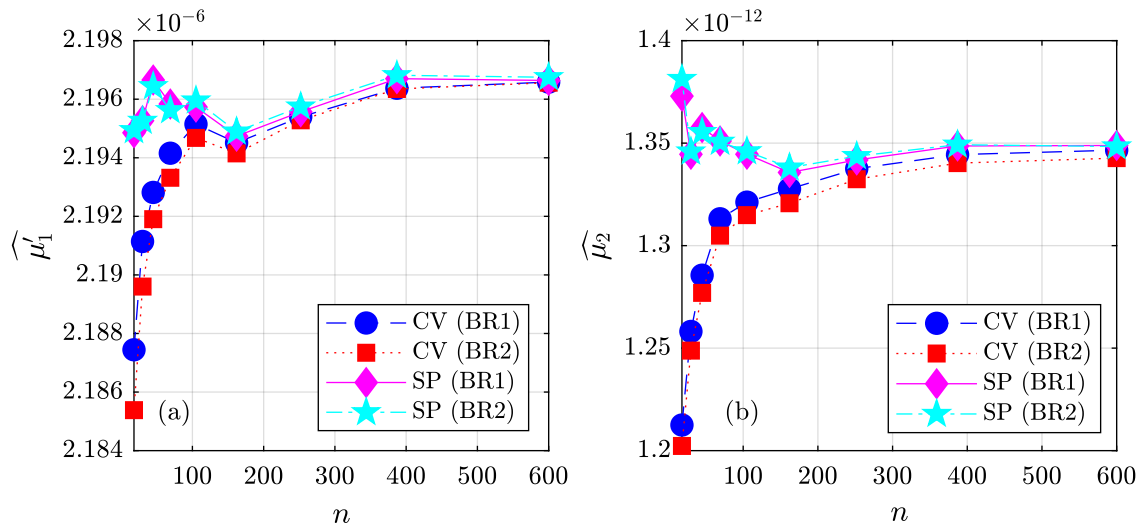


Figura 5.9: Flujo en medio poroso de dos capas de suelo. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos.

hecha con un parámetro de control igual a 1 y donde se aprecia que este sesgo no existe.

5.2. Flujo bajo una tablestaca

En este ejemplo se presenta una tablestaca, la cual está enterrada en un suelo poroso. Solo en un lado de la tablestaca se retiene agua, la cual alcanza una altura de 7 [m]. La configuración del problema se presenta en la figura 5.10.

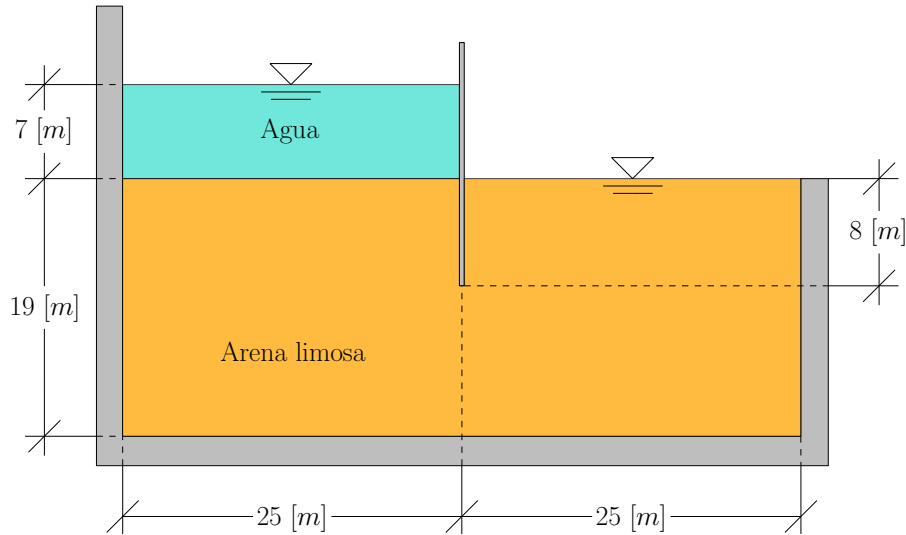


Figura 5.10: Flujo bajo una tablestaca. Esquema del problema.

Es de interés calcular el caudal de agua que escurre hacia el otro lado de la presa. Esta respuesta depende en gran medida de la permeabilidad del suelo, la cual es incierta. En este ejemplo, se opta por modelar esta incerteza como un campo aleatorio log-normal homogéneo e isotrópico, cuyas propiedades se muestran en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Flujo bajo una tablestaca. Propiedades del campo aleatorio.

Variable	Descripción	Tipo	Valor medio	Coefficiente de variación	Largo de correlación
k	Permeabilidad de arena limosa	Log-normal	5×10^{-6} [m/s]	100 %	10 [m] 20 [m]

Dada la incerteza en los parámetros de entrada, se reconoce la existencia de incertidumbre en el caudal de salida la cual interesa caracterizar, en este caso, mediante la estimación de las estadísticas de segundo orden del caudal buscado. Para lograrlo, se construye un modelo de elementos finitos de la capa de suelo, el cual contempla 6090 elementos triangulares y 12427 nodos. Con este modelo discretizado del sistema en estudio, es posible evaluar respuestas de alta fidelidad. Por lo anterior, es posible referirse al modelo de elementos finitos como el modelo de alta fidelidad.

Para obtener las estadísticas de segundo orden de la respuesta buscada, se utiliza el método control variates el cual requiere de dos modelos para obtener muestras del caudal de salida; por un

Tabla 5.5: Flujo bajo una tablestaca. Estadísticas de la respuesta aproximada.

Modelos aproximados	$L_c = 10 [m]$		$L_c = 20 [m]$	
	Esperanza	Varianza	Esperanza	Varianza
Lineal	1.29×10^{-5}	5.47×10^{-11}	1.29×10^{-5}	8.95×10^{-11}
Variable intermedia tipo I	1.48×10^{-5}	7.55×10^{-11}	1.65×10^{-5}	1.78×10^{-10}
Variable intermedia tipo II	1.55×10^{-5}	9.50×10^{-11}	1.69×10^{-5}	2.03×10^{-10}

lado, se usa el modelo de elementos finitos (modelo de alta fidelidad) y por otro se usa un modelo aproximado basado en la expansión lineal de Taylor. Esta expansión lineal contempla distintas opciones de uso; se considera linealidad tanto con respecto a las variables aleatorias normales estándar con las que se construye el campo aleatorio log-normal, como con las variables intermedias tipo I y tipo II. Estas variables intermedias fueron definidas en el capítulo 2.

Para fabricar las respuestas aproximadas, se requieren de las derivadas de primer orden del caudal respecto de las variables aleatorias normales estándar o de las variables intermedias, según el método aproximado usado. Las variables aleatorias normales estándar tomadas para construir las series de Taylor son las mismas que se tomaron para construir el campo aleatorio log-normal mediante una expansión Karhunen-Loève, donde la cantidad de estas variables es la necesaria para tener una buena caracterización del campo aleatorio. El criterio tomado para lograr esta buena caracterización fue lograr capturar un 95 % de la variabilidad del campo aleatorio Gaussiano asociado. Así, la respuesta aproximada asociada con el campo aleatorio con un largo de correlación $L_c = 10 [m]$ se construye con 11 términos de la serie de Taylor (incluyendo la solución nominal), mientras que la respuesta aproximada asociada con el campo con un largo $L_c = 20 [m]$ se representa solo con 5 términos (incluyendo la solución nominal).

Hay que notar que, al usar un modelo aproximado basado en expansiones de Taylor, las estadísticas de segundo orden asociadas a las respuestas del modelo aproximado son conocidas. Los valores de estas estadísticas son mostrados en la tabla 5.5. En esta tabla, los modelos aproximados se definen a continuación:

- Lineal: Método aproximado que usa la serie de Taylor lineal. La linealidad de la respuesta se considera directamente respecto de las variables aleatorias normales estándar.
- Variable intermedia tipo I: Similar al método anterior, salvo que la linealidad de la respuesta se considera respecto de las variables intermedias tipo I.
- Variable intermedia tipo II: Similar al método anterior, salvo que la linealidad de la respuesta se considera respecto de las variables intermedias tipo II.

A fin de probar la efectividad del método propuesto en esta tesis, se calculan los estimadores de las estadísticas splitting $H^{(SP-C)}$ usando tres grupos de muestras, los cuales se comparan con los estimadores Monte Carlo $H^{(MCS)}$ y los estimadores control variates $H^{(CV-C)}$.

En las tablas 5.6 y 5.7 se muestran los estimadores de las estadísticas de segundo orden usando un parámetro de control igual a 1 para el método control variates, tanto tradicional como aquel

Tabla 5.6: Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 10$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	3000	3000.00	1.479×10^{-5}	3.098×10^{-14}	9.295×10^{-11}	3.192×10^{-23}
MCS	60	60.00	1.455×10^{-5}	1.162×10^{-12}	6.972×10^{-11}	4.473×10^{-22}
Lin	0	2.08	1.293×10^{-5}	[-]	5.470×10^{-11}	[-]
IV-I	0	2.09	1.478×10^{-5}	[-]	7.546×10^{-11}	[-]
IV-II	0	16.97	1.551×10^{-5}	[-]	9.504×10^{-11}	[-]
CV-Lin	60	63.31	1.475×10^{-5}	5.291×10^{-13}	8.486×10^{-11}	2.036×10^{-21}
CV-IV-I	60	63.31	1.479×10^{-5}	7.991×10^{-14}	8.823×10^{-11}	4.380×10^{-22}
CV-IV-II	60	79.73	1.483×10^{-5}	8.123×10^{-14}	9.098×10^{-11}	4.226×10^{-23}
SP-Lin	60	63.42	1.475×10^{-5}	5.400×10^{-13}	8.495×10^{-11}	2.390×10^{-21}
SP-IV-I	60	63.42	1.479×10^{-5}	8.209×10^{-14}	8.832×10^{-11}	5.029×10^{-22}
SP-IV-II	60	79.82	1.482×10^{-5}	8.189×10^{-14}	9.102×10^{-11}	4.160×10^{-23}

que incorpora la técnica splitting. Estas tablas usan los siguientes métodos:

- MCS (ref): Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad. Sus valores son usados como referencia para los demás procedimientos dado el mayor número de muestras con que trabaja.
- MCS: Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad.
- Lin: Método aproximado que usa la serie de Taylor lineal. La linealidad de la respuesta se considera directamente respecto de las variables aleatorias normales estándar. Este método posee estadísticas conocidas (no es necesario estimarlas).
- IV-I: Similar al método anterior, salvo que la linealidad de la respuesta se considera respecto de las variables intermedias tipo I.
- IV-II: Similar al método anterior, salvo que la linealidad de la respuesta se considera respecto de las variables intermedias tipo II.
- CV-Lin: Método control variates tradicional. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas tanto en el modelo de elementos finitos como en la serie de Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar.

Tabla 5.7: Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 20$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	12000	12000.00	1.654×10^{-5}	1.604×10^{-14}	1.986×10^{-10}	4.864×10^{-23}
MCS	60	60.00	1.858×10^{-5}	3.698×10^{-12}	2.219×10^{-10}	7.620×10^{-21}
Lin	0	1.58	1.293×10^{-5}	[-]	8.953×10^{-11}	[-]
IV-I	0	1.67	1.650×10^{-5}	[-]	1.780×10^{-10}	[-]
IV-II	0	6.79	1.690×10^{-5}	[-]	2.029×10^{-10}	[-]
CV-Lin	60	63.16	1.656×10^{-5}	9.082×10^{-13}	1.969×10^{-10}	7.481×10^{-21}
CV-IV-I	60	63.16	1.654×10^{-5}	1.810×10^{-14}	1.955×10^{-10}	8.988×10^{-23}
CV-IV-II	60	69.41	1.653×10^{-5}	1.829×10^{-14}	1.960×10^{-10}	1.565×10^{-22}
SP-Lin	60	63.26	1.656×10^{-5}	9.081×10^{-13}	1.967×10^{-10}	6.797×10^{-21}
SP-IV-I	60	63.26	1.654×10^{-5}	1.776×10^{-14}	1.954×10^{-10}	7.381×10^{-23}
SP-IV-II	60	69.87	1.653×10^{-5}	1.890×10^{-14}	1.961×10^{-10}	1.631×10^{-22}

- CV-IV-I: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto de las variables intermedias tipo I.
- CV-IV-II: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto de las variables intermedias tipo II.
- SP-Lin: Método control variates usando la técnica splitting de separación de muestras. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas tanto en el modelo de elementos finitos como en la serie de Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar.
- SP-IV-I: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto a las variables intermedias tipo I.
- SP-IV-II: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto a las variables intermedias tipo II.

Además, también se muestra el costo computacional relativo n_E , el cual se define como

$$n_E = \frac{t}{t_1}$$

donde:

Tabla 5.8: Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 10$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	3000	3000.00	1.479×10^{-5}	3.098×10^{-14}	9.295×10^{-11}	3.192×10^{-23}
MCS	60	60.00	1.455×10^{-5}	1.162×10^{-12}	6.972×10^{-11}	4.473×10^{-22}
Lin	0	2.08	1.293×10^{-5}	[-]	5.470×10^{-11}	[-]
IV-I	0	2.09	1.478×10^{-5}	[-]	7.546×10^{-11}	[-]
IV-II	0	16.97	1.551×10^{-5}	[-]	9.504×10^{-11}	[-]
CV-Lin	60	63.42	1.463×10^{-5}	1.935×10^{-13}	8.449×10^{-11}	2.302×10^{-22}
CV-IV-I	60	63.42	1.475×10^{-5}	3.310×10^{-14}	8.773×10^{-11}	2.220×10^{-23}
CV-IV-II	60	79.47	1.480×10^{-5}	4.093×10^{-14}	9.175×10^{-11}	3.368×10^{-23}
SP-Lin	60	63.42	1.471×10^{-5}	2.719×10^{-13}	8.579×10^{-11}	4.314×10^{-22}
SP-IV-I	60	63.42	1.478×10^{-5}	3.401×10^{-14}	9.071×10^{-11}	6.343×10^{-23}
SP-IV-II	60	81.19	1.480×10^{-5}	6.076×10^{-14}	9.281×10^{-11}	3.470×10^{-23}

- t : Tiempo que toma un método específico en obtener los estimadores de las estadísticas de segundo orden de la respuesta de interés (en este caso, el caudal).
- t_1 : Tiempo necesario para obtener una respuesta del modelo de alta fidelidad.

Es posible observar que el método control variates origina resultados más cercanos a los entregados por el método de referencia, pero con menos muestras. Así, el uso del método control variates produce mejores resultados respecto al método Monte Carlo que usa la misma cantidad de muestras n , produciendo un aumento insignificante en el costo computacional relativo n_E respecto del método Monte Carlo, salvo en los métodos que usan la variable intermedia tipo II, los cuales presentan un costo mayor a los demás, debido al cálculo de segundas derivadas necesario para su implementación. A pesar de esto, hay que considerar que este costo sigue siendo bastante menor al método Monte Carlo, consiguiendo errores cuadráticos medios similares a este.

Se puede observar que el error cuadrático medio de los estimadores control variates y splitting es menor al asociado al método Monte Carlo (MCS). Esta disminución puede ser incluso mayor si se selecciona el parámetro de control óptimo, produciendo los resultados que se muestran en las tablas 5.8 y 5.9.

Cuando se usan los parámetros de control óptimos, la técnica splitting produce un leve aumento en la variabilidad de los estimadores buscados respecto del método control variates tradicional, atribuible a la mayor variabilidad en el parámetro de control óptimo; mientras el método control

Tabla 5.9: Flujo bajo una tablestaca. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del caudal de salida. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 20$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	12000	12000.00	1.654×10^{-5}	1.604×10^{-14}	1.986×10^{-10}	4.864×10^{-23}
MCS	60	60.00	1.858×10^{-5}	3.698×10^{-12}	2.219×10^{-10}	7.620×10^{-21}
Lin	0	1.58	1.293×10^{-5}	[-]	8.953×10^{-11}	[-]
IV-I	0	1.67	1.650×10^{-5}	[-]	1.780×10^{-10}	[-]
IV-II	0	6.79	1.690×10^{-5}	[-]	2.029×10^{-10}	[-]
CV-Lin	60	61.86	1.621×10^{-5}	2.049×10^{-13}	1.773×10^{-10}	2.851×10^{-22}
CV-IV-I	60	61.87	1.648×10^{-5}	1.051×10^{-14}	1.926×10^{-10}	4.021×10^{-24}
CV-IV-II	60	69.86	1.652×10^{-5}	1.073×10^{-14}	1.976×10^{-10}	4.076×10^{-24}
SP-Lin	60	61.94	1.631×10^{-5}	2.872×10^{-13}	1.817×10^{-10}	6.775×10^{-22}
SP-IV-I	60	61.94	1.652×10^{-5}	1.222×10^{-14}	1.940×10^{-10}	7.469×10^{-24}
SP-IV-II	60	69.93	1.655×10^{-5}	1.192×10^{-14}	1.980×10^{-10}	4.817×10^{-24}

variates tradicional trabaja solo con un parámetro de control, la técnica splitting presenta tantos parámetros como grupos de muestras se hayan formado (en este caso tres). Sin embargo, respecto a este último punto es importante hacer notar que el error cuadrático medio asociado a los métodos CV debe ser mayor que el mostrado, ya que en su cálculo no se está considerando el sesgo que poseen los estimadores CV.

Entre las figuras 5.11 y 5.16 se observan histogramas de los estimadores de las estadísticas de segundo orden, obtenidos con los métodos Monte Carlo (MCS), control variates tradicional (CV) y control variates usando la técnica splitting (SP), con un largo de correlación de 10 [m]. Estos gráficos fueron fabricados con 1000 realizaciones independientes de los estimadores de las estadísticas de segundo orden. Cada realización fue hecha con $n = 600$ muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado. La suma de las áreas de las barras correspondientes a un método es igual a 1, por lo que es posible comparar las gráficas de los métodos visualmente.

Por otra parte, entre las figuras 5.17 y 5.22 se observan histogramas del mismo tipo que el grupo anterior, pero con un largo de correlación de 20 [m]. En todos los histogramas se observa una reducción en la dispersión de las estimaciones cuando se usan los métodos CV y SP, en comparación con el método Monte Carlo. También se puede observar la importancia de fabricar variables intermedias adecuadas para reducir esta variabilidad en las estimaciones, produciendo los mejores resultados los métodos que usan una variable intermedia tipo II.

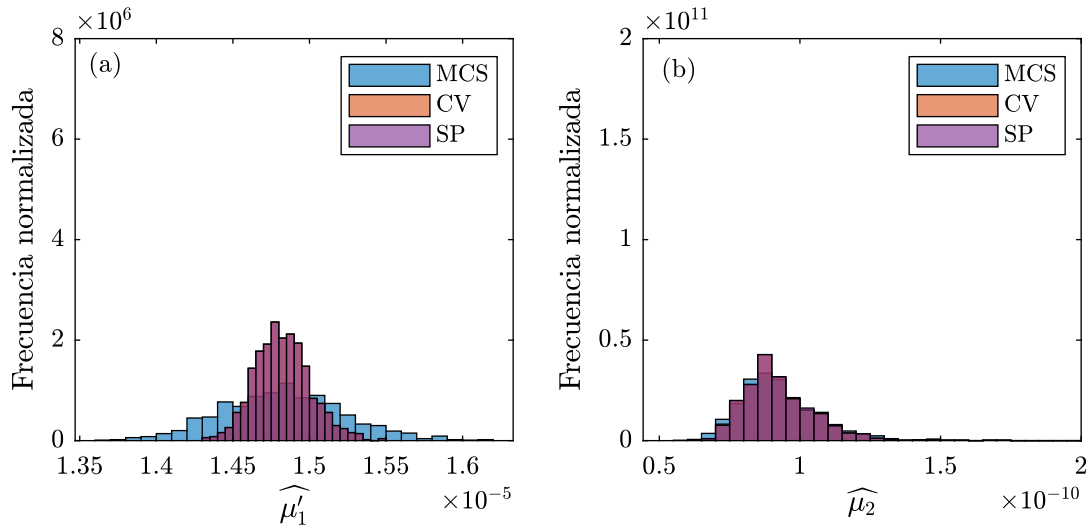


Figura 5.11: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

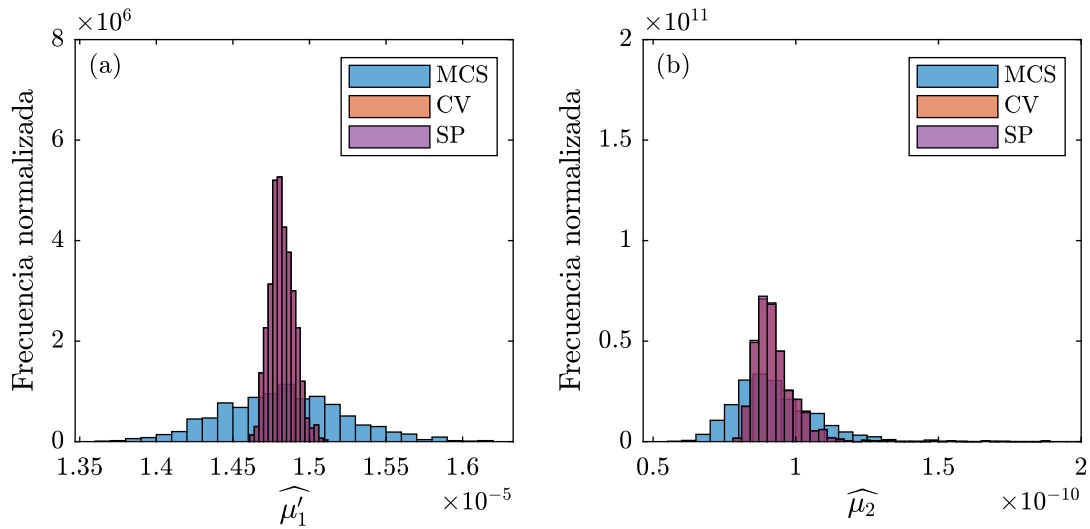


Figura 5.12: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

Entre las figuras 5.23 y 5.26 se observa la evolución de los estimadores de las estadísticas de segundo orden con respecto al número de muestras n . Los puntos de las gráficas fueron tomados como el promedio de 1000 realizaciones independientes de los estimadores, donde cada realización fue hecha con n muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado.

Es posible observar en las figuras 5.24 y 5.26 que el método control variates tradicional (CV) que

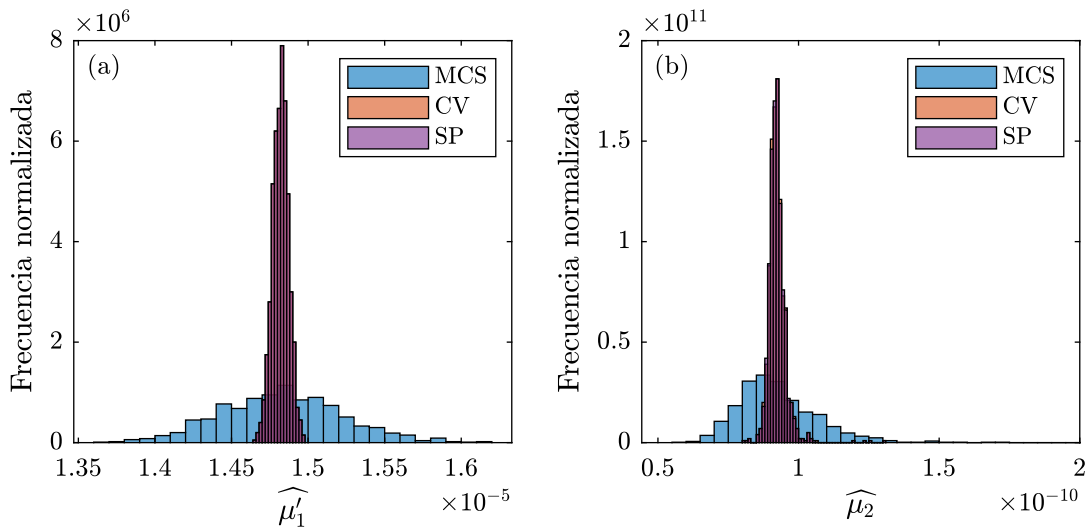


Figura 5.13: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

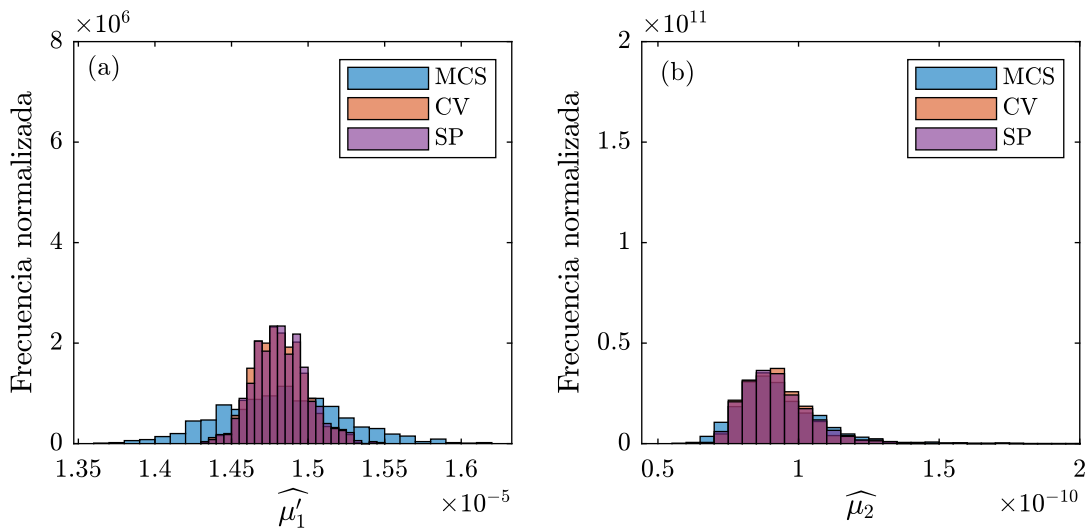


Figura 5.14: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

utiliza los parámetros de control óptimos desarrolla estimadores que presentan un sesgo respecto del valor que debiera estimar, salvo en el estimador cuyo método aproximado usa la variable intermedia tipo II. Esto se observa para valores bajos de n , donde existe un desplazamiento sostenido de la curva respecto de la referencia. Las figuras 5.23 y 5.25 apoyan lo anteriormente dicho, las cuales fueron hechas con un parámetro de control igual a 1 y donde se aprecia que este sesgo no existe.

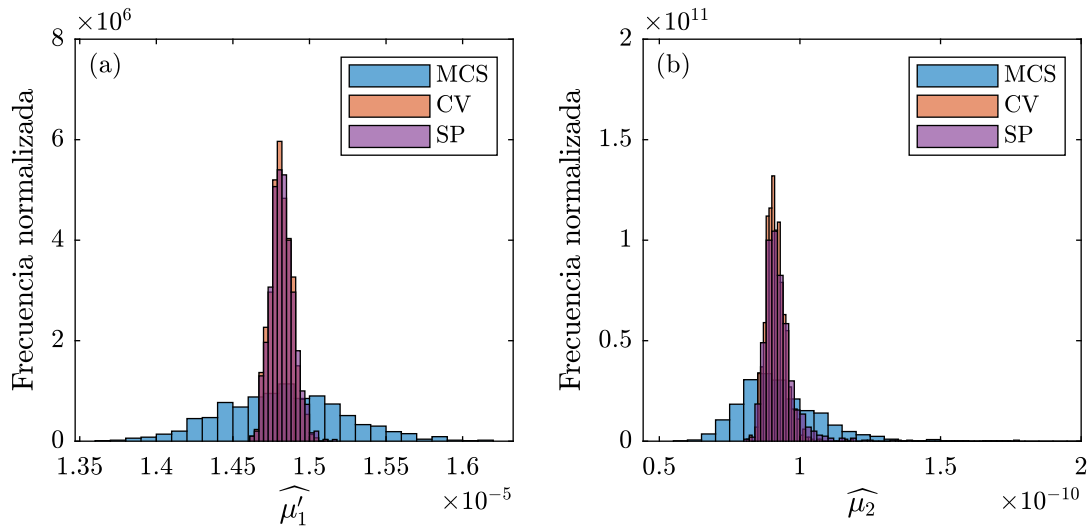


Figura 5.15: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

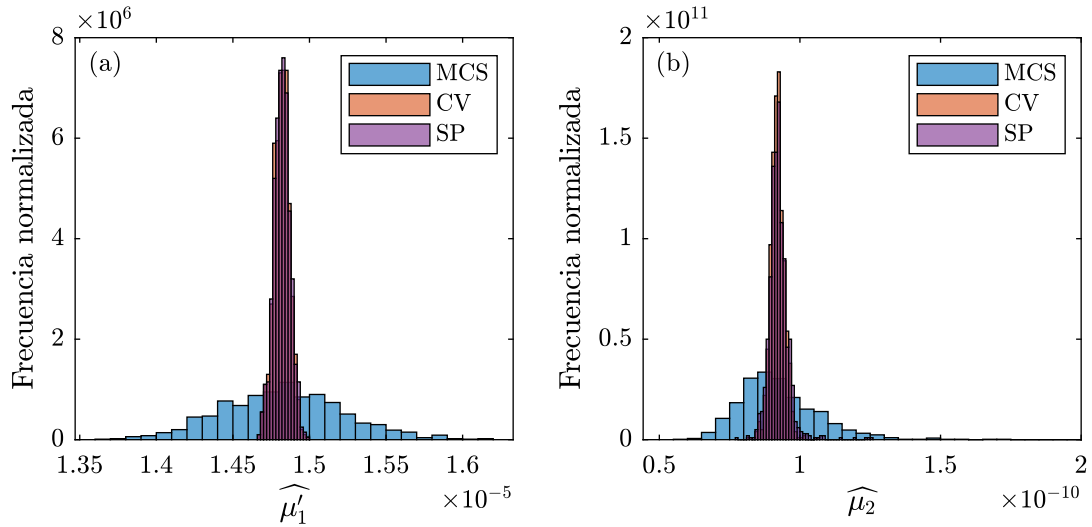


Figura 5.16: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

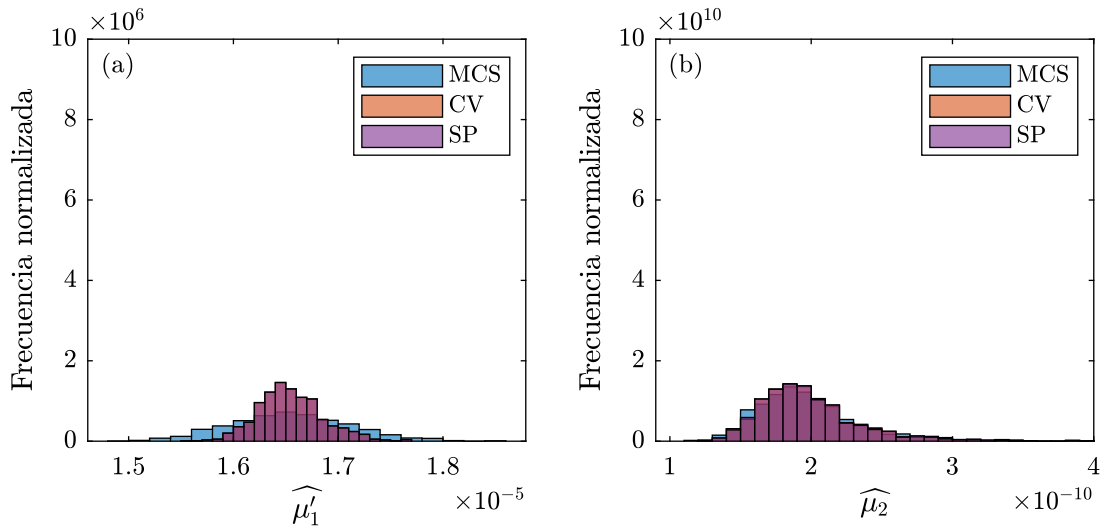


Figura 5.17: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

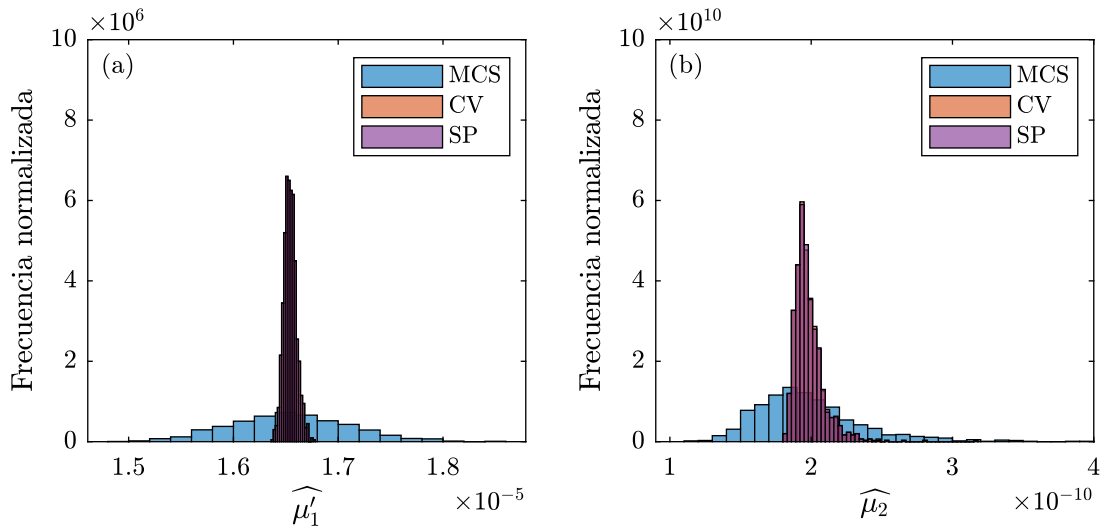


Figura 5.18: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

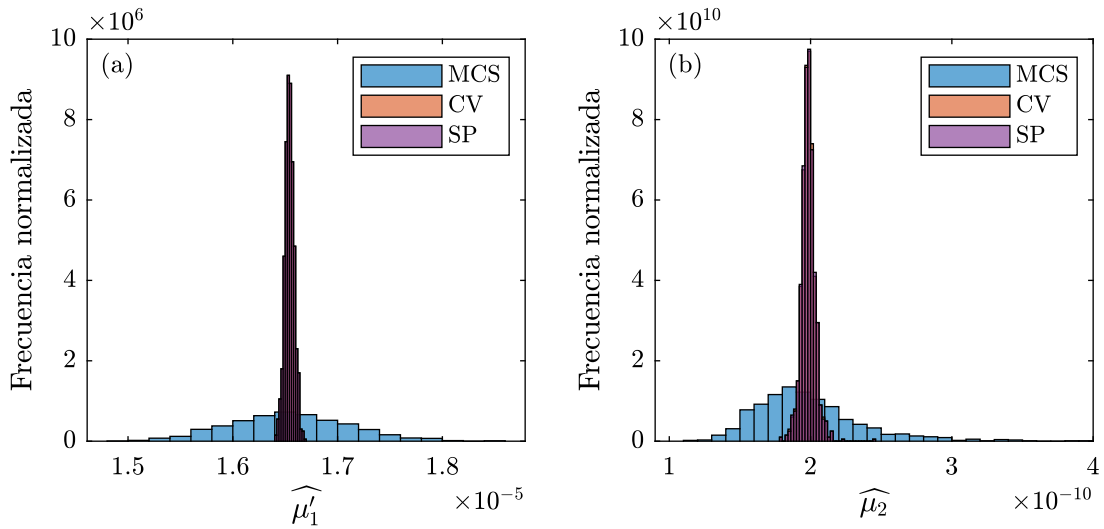


Figura 5.19: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

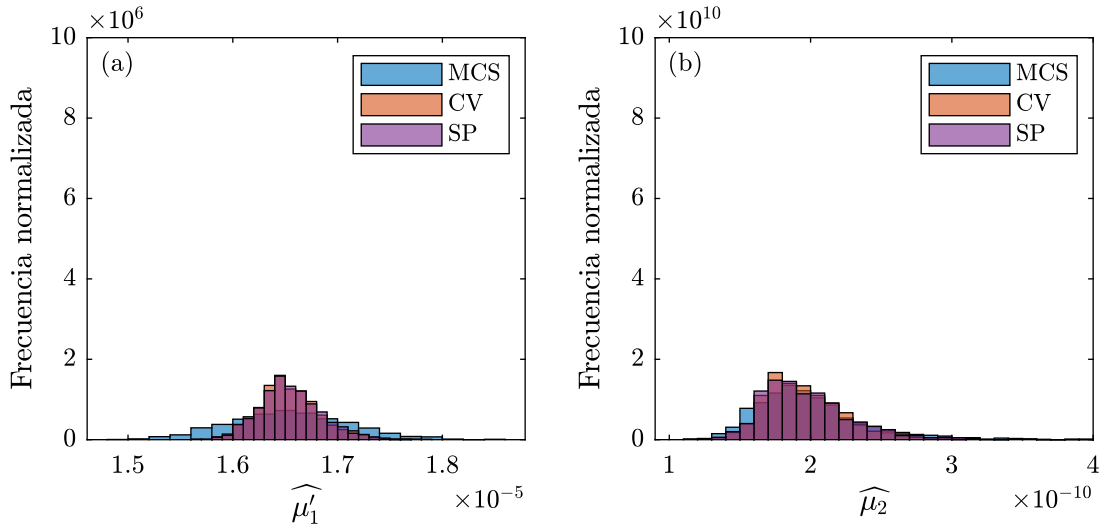


Figura 5.20: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

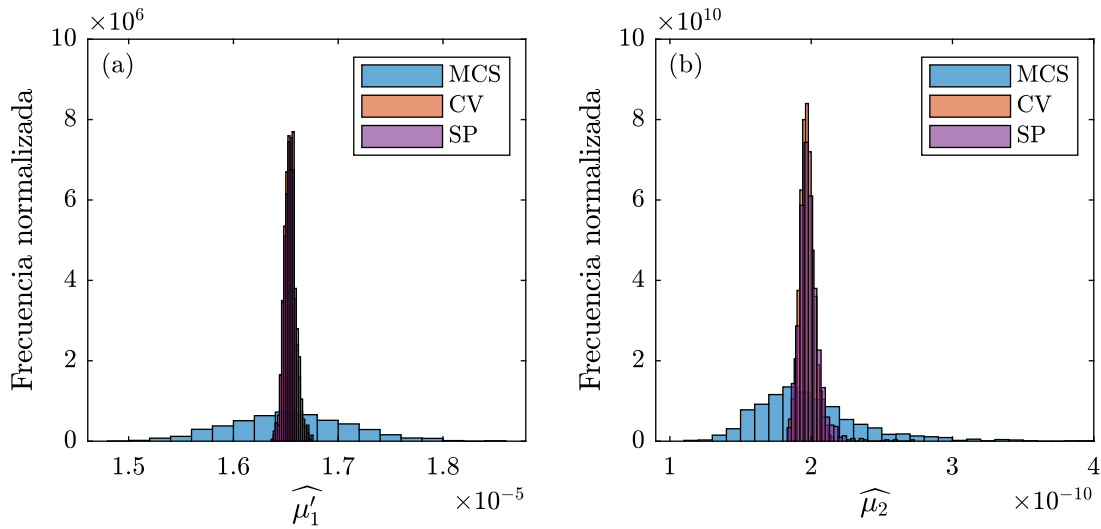


Figura 5.21: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varian-za. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo I y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$.

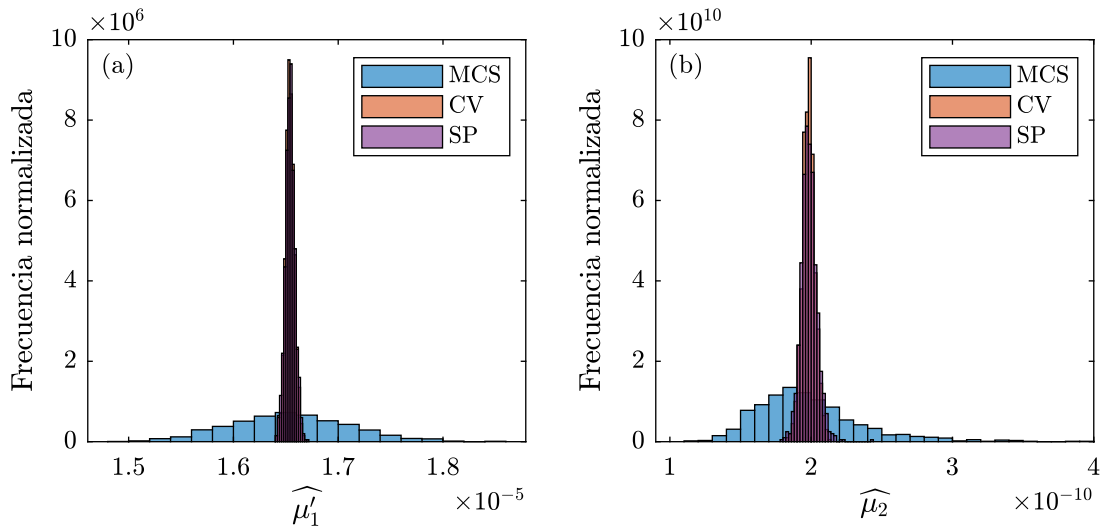


Figura 5.22: Flujo bajo una tablestaca. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varian-za. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20 [m]$.

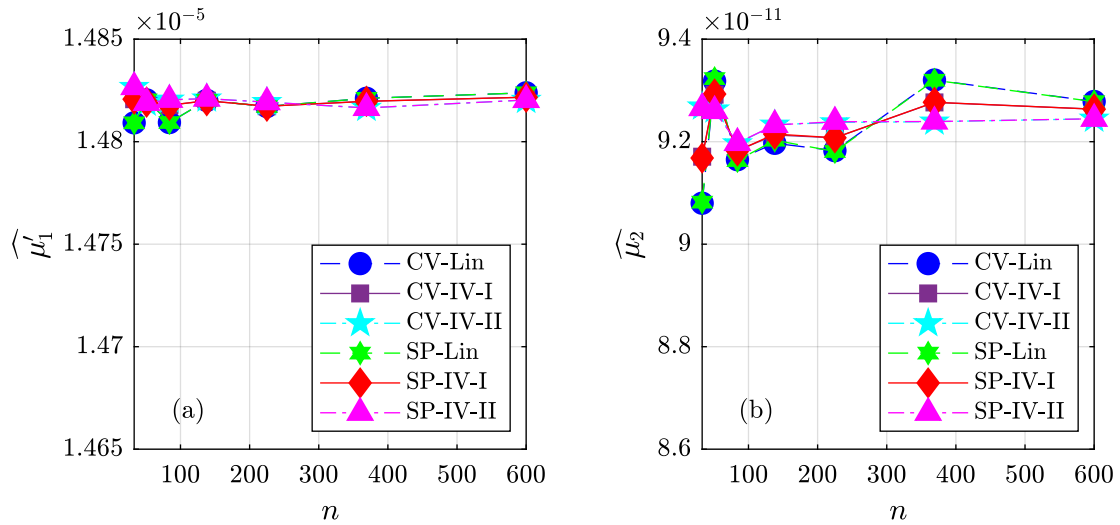


Figura 5.23: Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

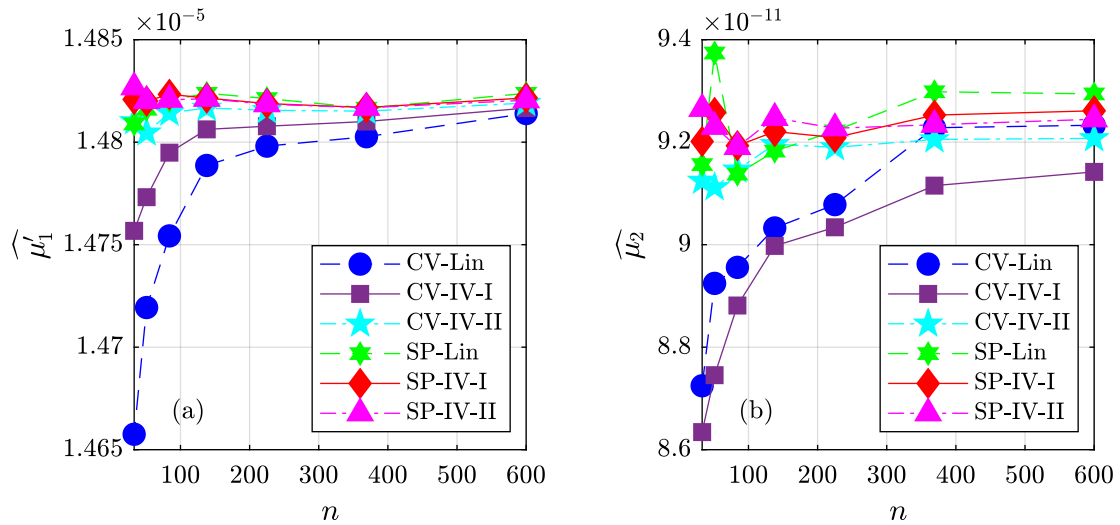


Figura 5.24: Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 10$ [m].

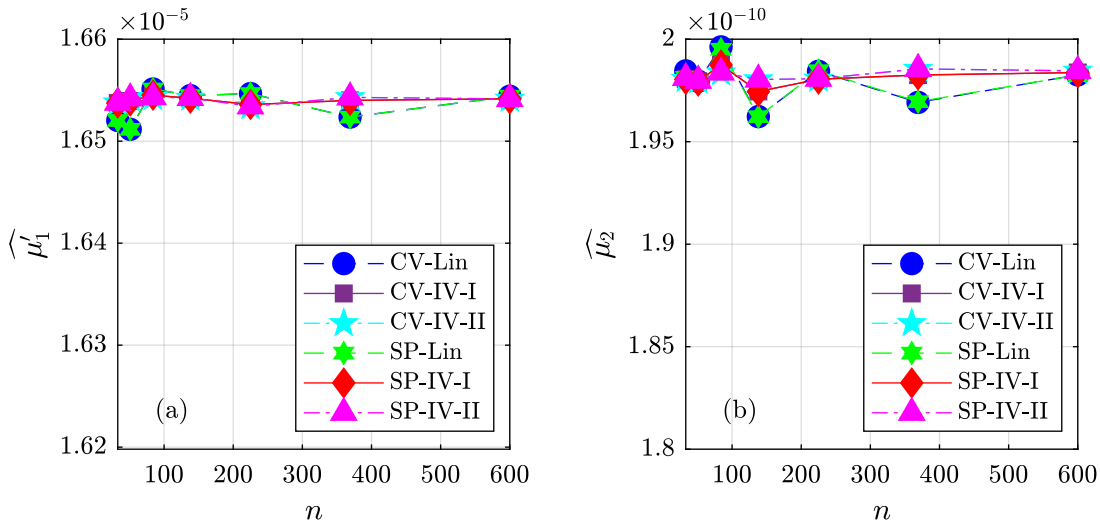


Figura 5.25: Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

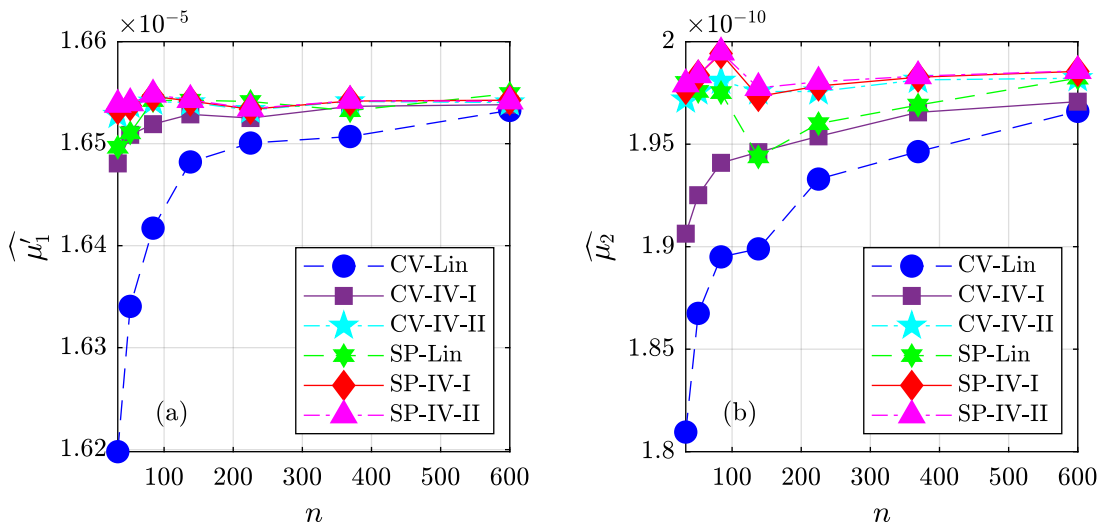


Figura 5.26: Flujo bajo una tablestaca. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 20$ [m].

5.3. Losa sobre fundación Winkler

En este caso se tiene una losa cuadrada de hormigón armado cuyas medidas son 5 [m] de largo y 20 [cm] de espesor, la cual se encuentra apoyada sobre un suelo. Entre sus características, se tiene que el módulo de Young de la losa es de 2×10^{10} [N/m²] y el coeficiente de Poisson es 0.3. Sobre ella actúa una carga distribuida de 10 [kPa] perpendicular a la losa.

Para poder modelar este sistema, se asume que esta losa se encuentra simplemente apoyada en sus bordes. Además, el suelo bajo la losa se modela como una fundación Winkler, la cual supone una relación lineal entre la fuerza aplicada sobre ella y el desplazamiento que sufre esta. Esta relación se expresa en el módulo de reacción del suelo k . La configuración del problema se presenta en la figura 5.27.

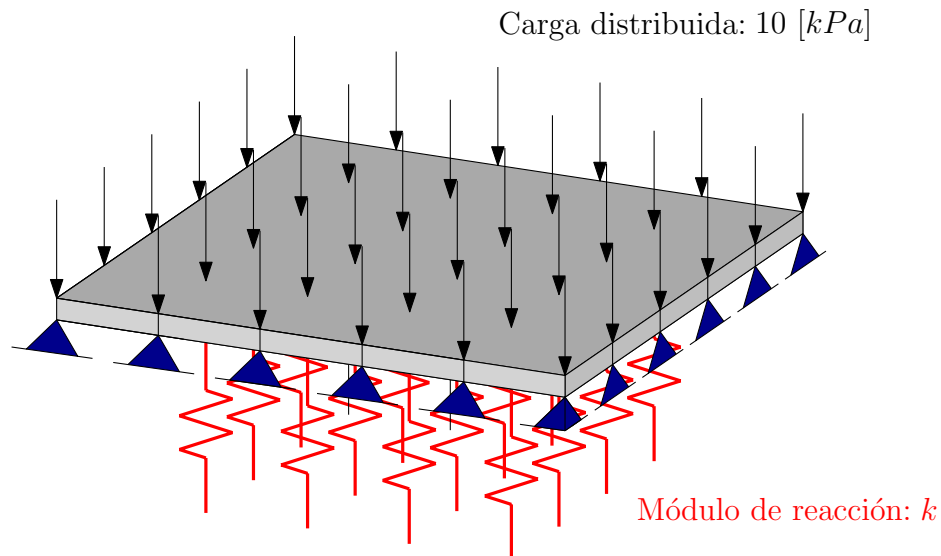


Figura 5.27: Losa sobre fundación Winkler. Esquema del problema.

En este ejemplo, interesa calcular el desplazamiento vertical en el centro de la losa. El valor de esta respuesta de interés depende del módulo de reacción del suelo, del cual no se tiene certeza en su valor. Para considerar su incertidumbre, este módulo de reacción se modela como un campo aleatorio log-normal homogéneo e isotrópico, cuyas propiedades se muestran en la tabla 5.10.

Tabla 5.10: Losa sobre una fundación Winkler. Propiedades del campo aleatorio.

Variable	Descripción	Tipo	Valor medio	Coficiente de Variación	Largo de correlación
k	Módulo de reacción	Log-normal	10^7 [N/m/m ²]	30 %	2 [m] y 5 [m]

Dada la incerteza en los parámetros de entrada, se reconoce la existencia de incertidumbre en

Tabla 5.11: Losa sobre una fundación Winkler. Estadísticas de la respuesta aproximada.

Modelos aproximados	$L_c = 2 [m]$		$L_c = 5 [m]$	
	Esperanza	Varianza	Esperanza	Varianza
Lineal	8.27×10^{-4}	9.54×10^{-9}	8.27×10^{-4}	1.49×10^{-8}
Cuadrático	8.20×10^{-4}	9.55×10^{-9}	8.26×10^{-4}	1.50×10^{-8}
Variable intermedia tipo II	8.26×10^{-4}	9.54×10^{-9}	8.27×10^{-4}	1.50×10^{-8}

el desplazamiento buscado. El objetivo es caracterizar esta incerteza mediante la estimación de sus estadísticas de segundo orden, para lo cual se construye un modelo de elementos finitos de la losa, el cual contempla 900 elementos cuadrados y 961 nodos. La fundación Winkler por su parte se modela como una serie de resortes longitudinales cuya rigidez corresponde al módulo de reacción del suelo. Con estos modelos del sistema en estudio, es posible evaluar respuestas de alta fidelidad. Por lo anterior, en este ejemplo el modelo de elementos finitos es caracterizado como el modelo de alta fidelidad.

Para obtener las estadísticas de segundo orden del desplazamiento buscado, se utiliza el método control variates, el cual requiere de dos modelos de los cuales se puedan obtener muestras de la respuesta de interés; por un lado, se usa el modelo de elementos finitos (modelo de alta fidelidad) y por otro se usa un modelo aproximado basado en la expansión de Taylor. Los modelos aproximados usados son:

- Lineal: Método aproximado que usa la serie de Taylor lineal. La linealidad de la respuesta se considera directamente respecto de las variables aleatorias normales estándar con las que se construye el campo aleatorio log-normal.
- Cuadrático: Método aproximado que usa la serie de Taylor cuadrática. En este caso, la respuesta es escrita como una función cuadrática de las variables aleatorias normales estándar con las que se construye el campo aleatorio log-normal. Esta serie no incorpora las derivadas cruzadas de segundo orden.
- Variable intermedia tipo II: Similar al método “Lineal” salvo que, en este caso, la linealidad de la respuesta se considera respecto de las variables intermedias tipo II. Este tipo de variables fue definido en el capítulo 2.

Las variables aleatorias normales estándar usadas para construir las series de Taylor anteriores son las mismas que se ocupan para construir el campo aleatorio log-normal mediante una expansión Karhunen-Loève. El número de variables aleatorias ocupadas es la cantidad suficiente para tener una buena representación de la variabilidad del campo. En este caso, el criterio para lograr esa buena representación es capturar un 99 % de la variabilidad del campo aleatorio Gaussiano asociado. Así, la respuesta aproximada asociada con el campo aleatorio de largo de correlación $L_c = 2 [m]$ se construye con 16 términos de la serie de Taylor (incluyendo la solución nominal), mientras que la respuesta aproximada asociada con el campo de largo $L_c = 5 [m]$ se fabrica solo con 6 términos (incluyendo la solución nominal).

Tabla 5.12: Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 2$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}} [\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}} [\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	15000	15000.00	8.203×10^{-4}	6.137×10^{-13}	9.227×10^{-9}	1.069×10^{-20}
MCS	60	60.00	8.233×10^{-4}	1.476×10^{-10}	8.854×10^{-9}	2.470×10^{-18}
Lin	0	1.90	8.267×10^{-4}	[-]	9.536×10^{-9}	[-]
Cuad	0	3.88	8.204×10^{-4}	[-]	9.550×10^{-9}	[-]
IV-II	0	3.90	8.259×10^{-4}	[-]	9.539×10^{-9}	[-]
CV-Lin	60	62.20	8.204×10^{-4}	3.305×10^{-13}	9.276×10^{-9}	1.839×10^{-20}
CV-Cuad	60	63.72	8.207×10^{-4}	1.130×10^{-13}	9.270×10^{-9}	1.054×10^{-20}
CV-IV-II	60	63.77	8.205×10^{-4}	3.171×10^{-13}	9.277×10^{-9}	1.728×10^{-20}
SP-Lin	60	63.03	8.204×10^{-4}	3.316×10^{-13}	9.279×10^{-9}	1.874×10^{-20}
SP-Cuad	60	64.55	8.207×10^{-4}	1.151×10^{-13}	9.266×10^{-9}	1.096×10^{-20}
SP-IV-II	60	64.60	8.205×10^{-4}	3.189×10^{-13}	9.278×10^{-9}	1.832×10^{-20}

Al usar un modelo aproximado basado en expansiones de Taylor, las estadísticas de segundo orden asociadas a las respuestas del modelo aproximado son conocidas. Los valores de estas estadísticas son mostrados en la tabla 5.11.

A continuación, se calculan los estimadores de las estadísticas splitting de segundo orden $H^{(\text{SP-C})}$ propuestos en esta tesis, los cuales luego se comparan con los estimadores Monte Carlo $H^{(\text{MCS})}$ y los estimadores control variates $H^{(\text{CV-C})}$.

En la tablas 5.12 y 5.13 se muestran los estimadores de las estadísticas de segundo orden usando un parámetro de control igual a 1 para el método control variates tradicional (CV) y para el método control variates que incorpora la técnica de separación de muestras (SP). Estas tablas usan los siguientes métodos:

- MCS (ref): Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad. Sus valores son usados como referencia para los demás procedimientos dado el gran número de muestras con el que trabaja, otorgando confianza a sus resultados. Este número de muestras n es distinto para cada largo de correlación, donde el criterio usado para elegir este número fue la obtención de un error cuadrático medio cercano al conseguido con los métodos que usan la técnica control variates.
- MCS: Método Monte Carlo. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada evaluadas en el modelo de alta fidelidad.

Tabla 5.13: Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 5$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	60000	60000.00	8.257×10^{-4}	2.380×10^{-13}	1.437×10^{-8}	6.345×10^{-21}
MCS	60	60.00	8.259×10^{-4}	2.375×10^{-10}	1.425×10^{-8}	6.416×10^{-18}
Lin	0	0.63	8.267×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
Cuad	0	1.21	8.257×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
IV-II	0	1.22	8.271×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
CV-Lin	60	60.70	8.258×10^{-4}	1.842×10^{-13}	1.436×10^{-8}	5.164×10^{-20}
CV-Cuad	60	61.32	8.257×10^{-4}	1.545×10^{-13}	1.435×10^{-8}	4.938×10^{-20}
CV-IV-II	60	61.32	8.257×10^{-4}	1.757×10^{-13}	1.436×10^{-8}	4.902×10^{-20}
SP-Lin	60	61.13	8.258×10^{-4}	1.842×10^{-13}	1.436×10^{-8}	5.142×10^{-20}
SP-Cuad	60	62.03	8.257×10^{-4}	1.542×10^{-13}	1.435×10^{-8}	4.919×10^{-20}
SP-IV-II	60	62.04	8.257×10^{-4}	1.758×10^{-13}	1.436×10^{-8}	4.879×10^{-20}

- Lin: Método aproximado que usa la serie de Taylor lineal. La linealidad de la respuesta se considera directamente respecto de las variables aleatorias normales estándar. Este método genera estadísticas conocidas (no es necesario estimarlas).
- Cuad: Método aproximado que usa la serie de Taylor cuadrática. La respuesta aproximada formada es una función cuadrática de las variables aleatorias normales estándar. Este método genera estadísticas conocidas (no es necesario estimarlas).
- IV-II: Método aproximado que usa la serie de Taylor lineal. La linealidad de la respuesta se considera directamente respecto de las variables intermedias tipo II. Este método genera estadísticas conocidas (no es necesario estimarlas).
- CV-Lin: Método control variates tradicional. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada, evaluadas tanto en el modelo de alta fidelidad como en la serie de Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar.
- CV-Cuad: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es una función cuadrática de las variables aleatorias normales estándar.
- CV-IV-II: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto a las variables intermedias tipo II.

Tabla 5.14: Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 2$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}} [\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}} [\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	15000	15000.00	8.203×10^{-4}	6.137×10^{-13}	9.227×10^{-9}	1.069×10^{-20}
MCS	60	60.00	8.233×10^{-4}	1.476×10^{-10}	8.854×10^{-9}	2.470×10^{-18}
Lin	0	1.90	8.267×10^{-4}	[-]	9.536×10^{-9}	[-]
Cuad	0	3.88	8.204×10^{-4}	[-]	9.550×10^{-9}	[-]
IV-II	0	3.90	8.259×10^{-4}	[-]	9.539×10^{-9}	[-]
CV-Lin	60	62.39	8.204×10^{-4}	3.104×10^{-13}	9.260×10^{-9}	1.136×10^{-20}
CV-Cuad	60	64.42	8.204×10^{-4}	8.043×10^{-14}	9.238×10^{-9}	4.921×10^{-21}
CV-IV-II	60	64.42	8.204×10^{-4}	2.927×10^{-13}	9.258×10^{-9}	1.020×10^{-20}
SP-Lin	60	63.36	8.204×10^{-4}	3.292×10^{-13}	9.245×10^{-9}	1.690×10^{-20}
SP-Cuad	60	65.39	8.204×10^{-4}	9.292×10^{-14}	9.211×10^{-9}	1.186×10^{-20}
SP-IV-II	60	65.40	8.203×10^{-4}	3.106×10^{-13}	9.240×10^{-9}	1.518×10^{-20}

- SP-Lin: Método control variates usando la técnica splitting de separación de muestras. Trabaja con n muestras de los parámetros de entrada, evaluadas tanto en el modelo de alta fidelidad como en la serie de Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar.
- SP-Cuad: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es una función cuadrática de las variables aleatorias normales estándar.
- SP-IV-II: Similar al método anterior, salvo que la serie de Taylor es lineal respecto a las variables intermedias tipo II.

Además, también se muestra el costo computacional relativo n_E , el cual se define como

$$n_E = \frac{t}{t_1}$$

donde:

- t : Tiempo que toma un método específico en obtener los estimadores de las estadísticas de segundo orden de la respuesta de interés (en este caso, el desplazamiento vertical en el centro de la losa).
- t_1 : Tiempo necesario para obtener una respuesta del modelo de alta fidelidad.

Tabla 5.15: Losa sobre una fundación Winkler. Estimadores de las estadísticas de segundo orden del desplazamiento. Estimadores control variates con parámetros de control óptimos. Largo de correlación del campo aleatorio $L_c = 5$ [m].

	n	n_E	$\widehat{\mu}'_1$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}'_1]$	$\widehat{\mu}_2$	$\widehat{\text{MSE}}[\widehat{\mu}_2]$
MCS (ref)	60000	60000.00	8.257×10^{-4}	2.380×10^{-13}	1.437×10^{-8}	6.345×10^{-21}
MCS	60	60.00	8.257×10^{-4}	2.375×10^{-10}	1.425×10^{-8}	6.416×10^{-18}
Lin	0	0.63	8.267×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
Cuad	0	1.21	8.257×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
IV-II	0	1.22	8.271×10^{-4}	[-]	1.495×10^{-8}	[-]
CV-Lin	60	60.89	8.257×10^{-4}	7.587×10^{-14}	1.441×10^{-8}	8.835×10^{-21}
CV-Cuad	60	61.75	8.257×10^{-4}	4.508×10^{-14}	1.440×10^{-8}	6.510×10^{-21}
CV-IV-II	60	61.95	8.258×10^{-4}	7.070×10^{-14}	1.441×10^{-8}	7.908×10^{-21}
SP-Lin	60	61.45	8.258×10^{-4}	9.470×10^{-14}	1.438×10^{-8}	1.856×10^{-20}
SP-Cuad	60	62.90	8.257×10^{-4}	6.811×10^{-14}	1.437×10^{-8}	1.531×10^{-20}
SP-IV-II	60	62.87	8.258×10^{-4}	8.277×10^{-14}	1.438×10^{-8}	1.702×10^{-20}

En estas tablas se puede observar que la técnica control variates (CV y SP) arroja estimadores de las estadísticas más cercanos al método de referencia *MCS (ref)* en relación con el método Monte Carlo *MCS*. Esto se explica en parte por el menor error cuadrático medio del método control variates respecto de Monte Carlo, cuyos valores están distanciados en tres órdenes de magnitud, usando el mismo número de muestras de entrada y produciendo un aumento despreciable en el costo computacional n_E .

Se debe notar que los valores del error cuadrático medio asociados a la técnica control variates son semejantes a los errores obtenidos con el método de referencia *MCS (ref)*, pero con un costo computacional mucho menor.

Este error puede ser aún más bajo si se elige el parámetro de control óptimo para la técnica control variates. Los resultados asociados al uso de este parámetro se muestran en las tablas 5.14 y 5.15.

En estas dos tablas se observa que el error cuadrático medio de los métodos que utilizan la técnica control variates (CV y SP) con el parámetro de control óptimo es menor al error asociado a los métodos que utilizan otro parámetro (igual a 1 en las tablas anteriores de este ejemplo), a cambio de un ligero aumento en el costo computacional n_E . Además, se observa que el error cuadrático medio asociado a los procedimientos SP son mayores a los errores asociados a los métodos CV correspondientes, lo que se explica por la variabilidad del parámetro de control óptimo, el cual

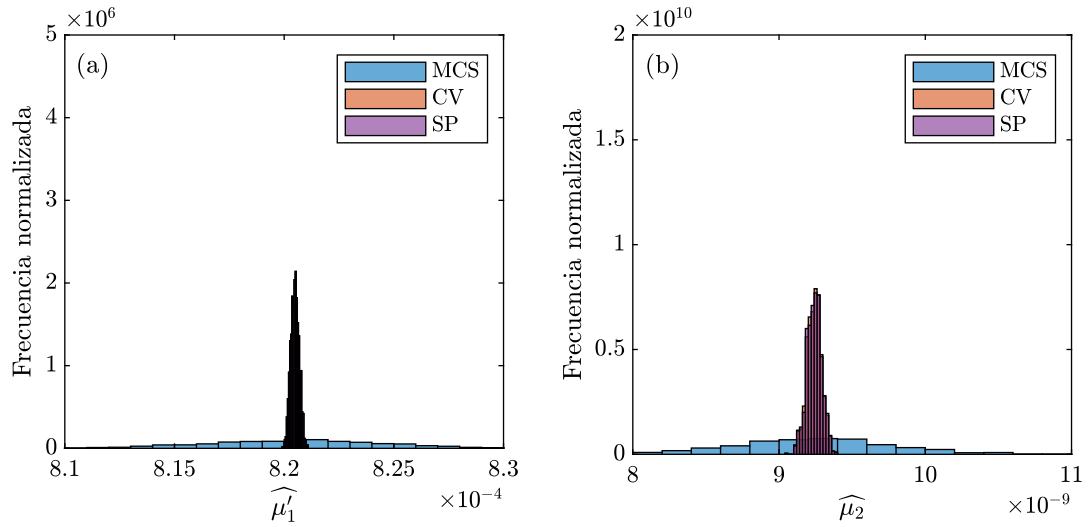


Figura 5.28: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

toma tres valores con los procedimientos SP (al generarse tres grupos de muestras de entrada), mientras que toma solo uno con los métodos CV. Sin embargo, respecto a este último punto es importante hacer notar que el error cuadrático medio asociado a los métodos CV debe ser mayor que el mostrado, ya que en su cálculo no se está considerando el sesgo que poseen los estimadores CV.

Entre las figuras 5.28 y 5.33 se observan histogramas de los estimadores de las estadísticas de segundo orden, obtenidos con los métodos Monte Carlo (MCS), control variates tradicional (CV) y control variates usando la técnica splitting (SP), con un largo de correlación de $2 [m]$. Estos gráficos fueron fabricados con 1000 realizaciones independientes de los estimadores de las estadísticas de segundo orden. Cada realización fue hecha con $n = 600$ muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado. La suma de las áreas de las barras correspondientes a un método es igual a 1, por lo que es posible comparar las gráficas de los métodos visualmente.

Por otra parte, entre las figuras 5.34 y 5.39 se observan histogramas del mismo tipo que el grupo anterior, pero con un largo de correlación de $5 [m]$. En todos los histogramas se observa una reducción en la dispersión de las estimaciones cuando se usan los métodos CV y SP, en comparación con el método Monte Carlo (MCS). Esta reducción es tan grande que se confunden los datos asociados a CV y SP. En este ejemplo los mejores resultados son obtenidos cuando se usa una aproximación cuadrática.

Entre las figuras 5.40 y 5.43 se ve la evolución de los estimadores de las estadísticas de segundo orden con respecto al número de muestras n . Los puntos de las gráficas fueron tomados como el promedio de 1000 realizaciones independientes de los estimadores, donde cada realización fue hecha con n muestras compartidas entre el modelo de alta fidelidad y el modelo aproximado.

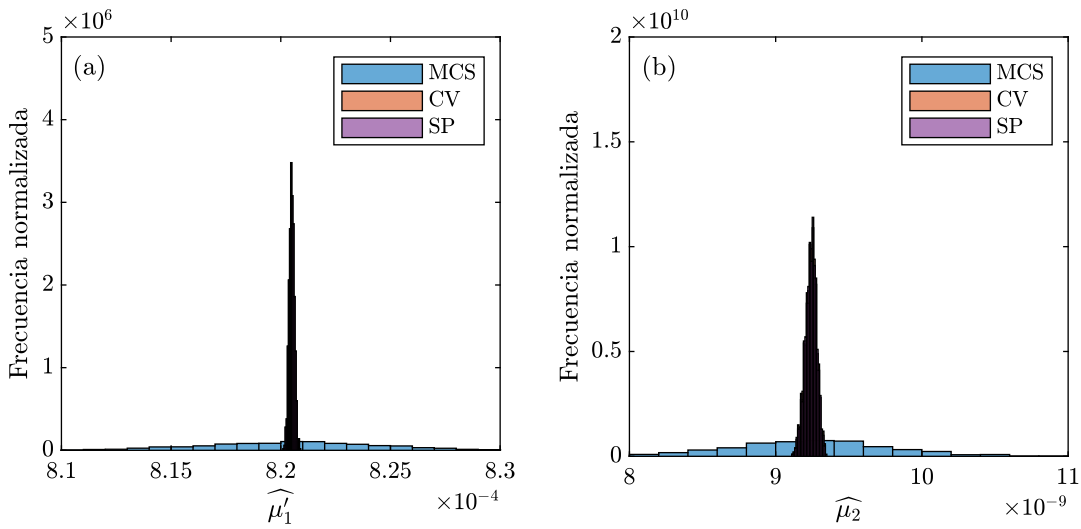


Figura 5.29: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

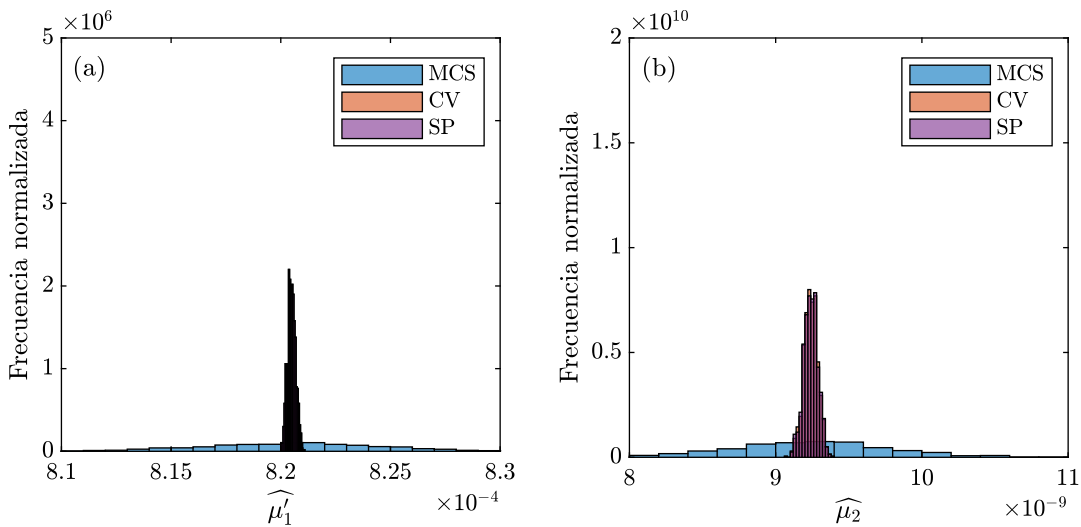


Figura 5.30: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

En la figura 5.41 y 5.43 se ve que el uso del parámetro de control óptimo en los métodos que usan el método control variates tradicional (CV) genera un sesgo en la estimación de la varianza de la respuesta, manifestado en un desplazamiento sostenido hacia arriba de la curva respecto del valor real de la varianza. Este desplazamiento va disminuyendo mientras el número de muestras de los parámetros de entrada con el que se trabaja es mayor. Por otra parte, en el caso de la esperanza

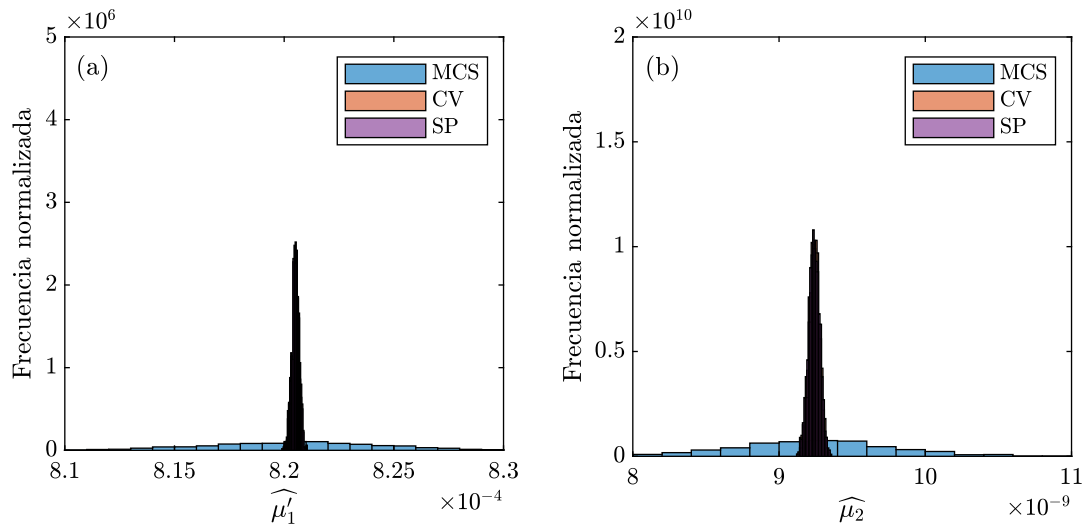


Figura 5.31: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

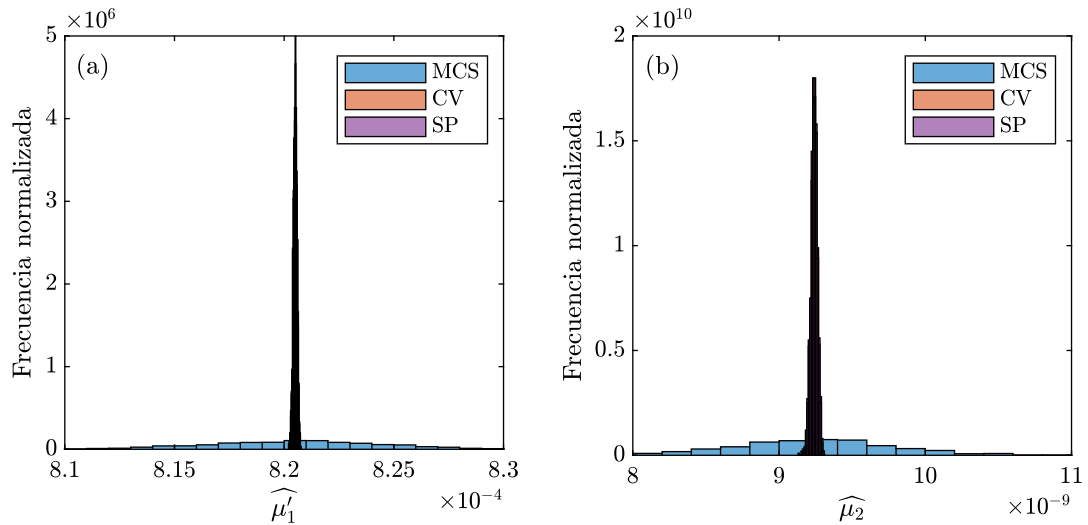


Figura 5.32: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

no se aprecia a simple vista la existencia de sesgo en su estimación. En el caso de que no se utilice el parámetro de control óptimo (figura 5.40 y figura 5.42), este sesgo no se presenta en ningún gráfico.

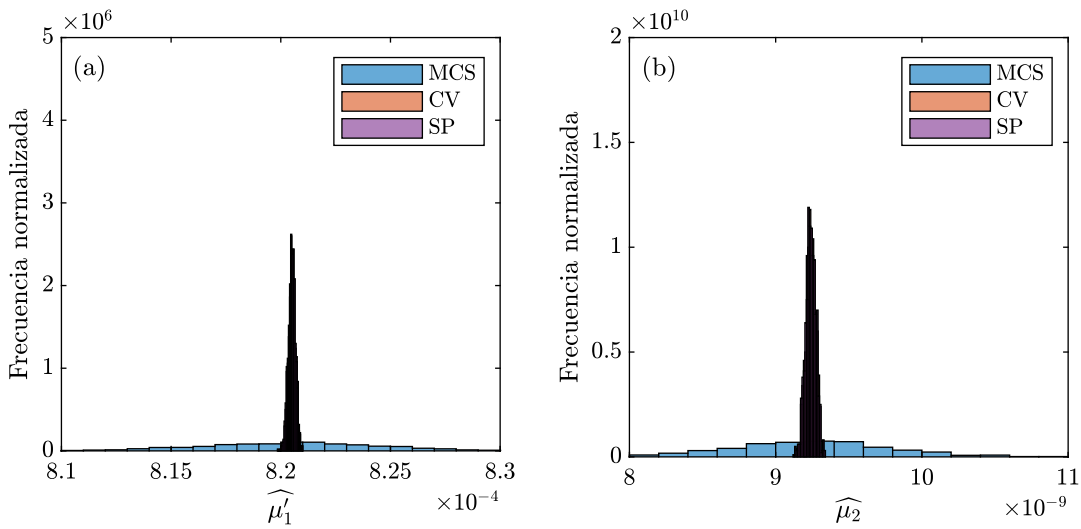


Figura 5.33: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

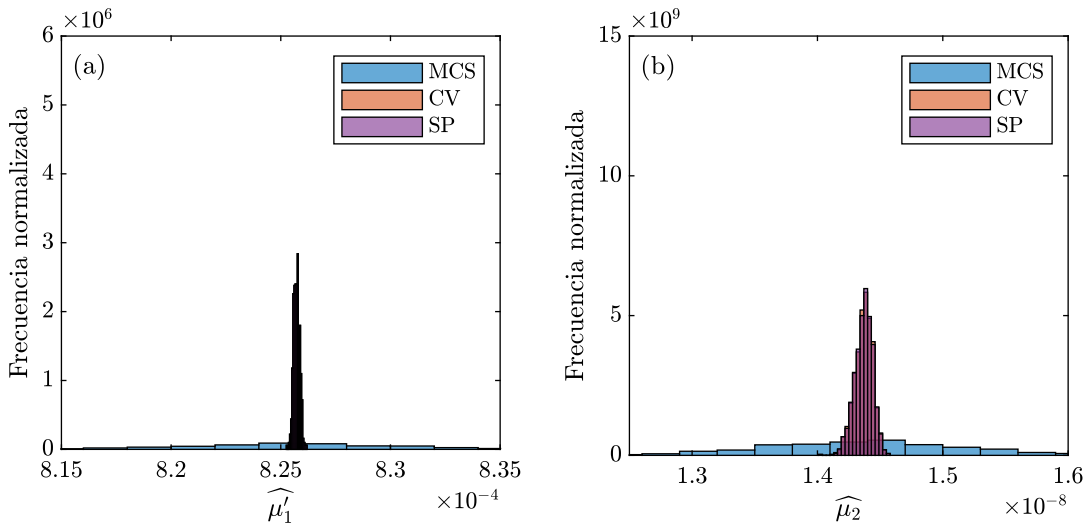


Figura 5.34: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$.

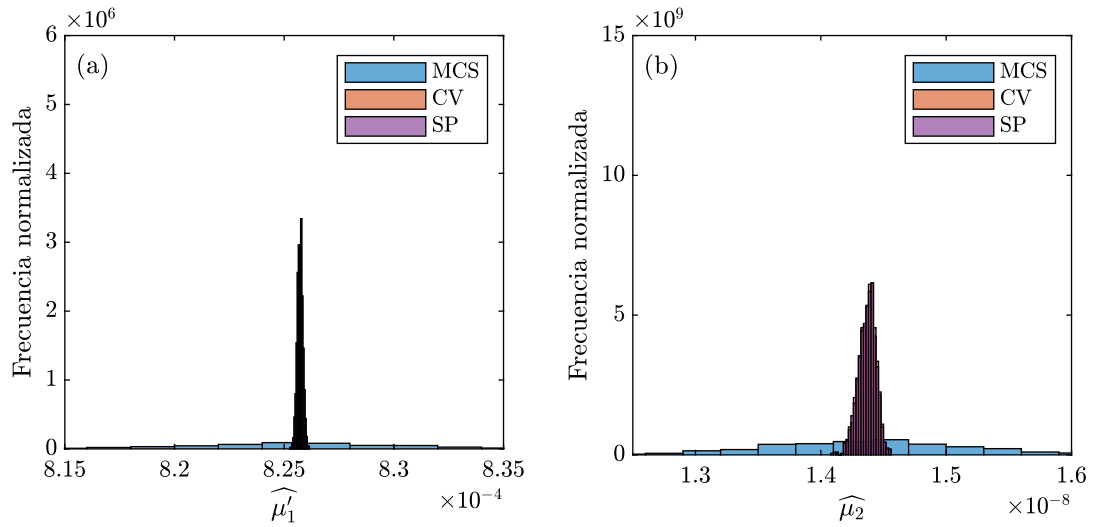


Figura 5.35: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5$ [m].

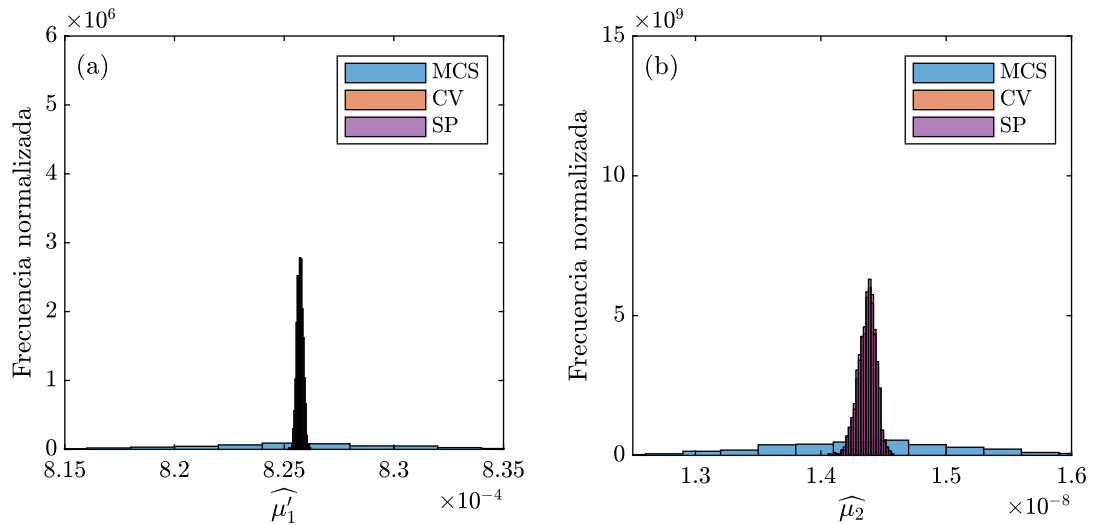


Figura 5.36: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5$ [m].

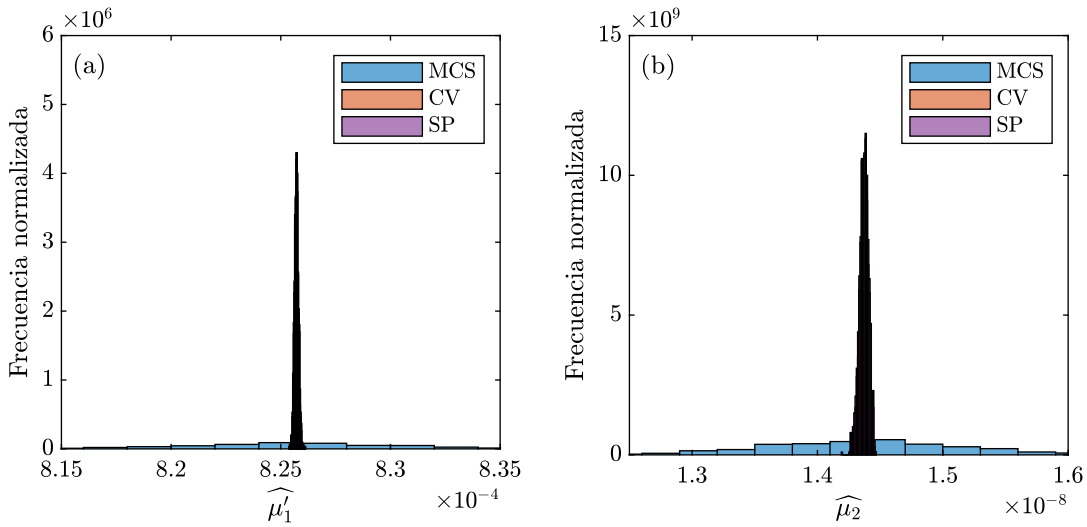


Figura 5.37: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5$ [m].

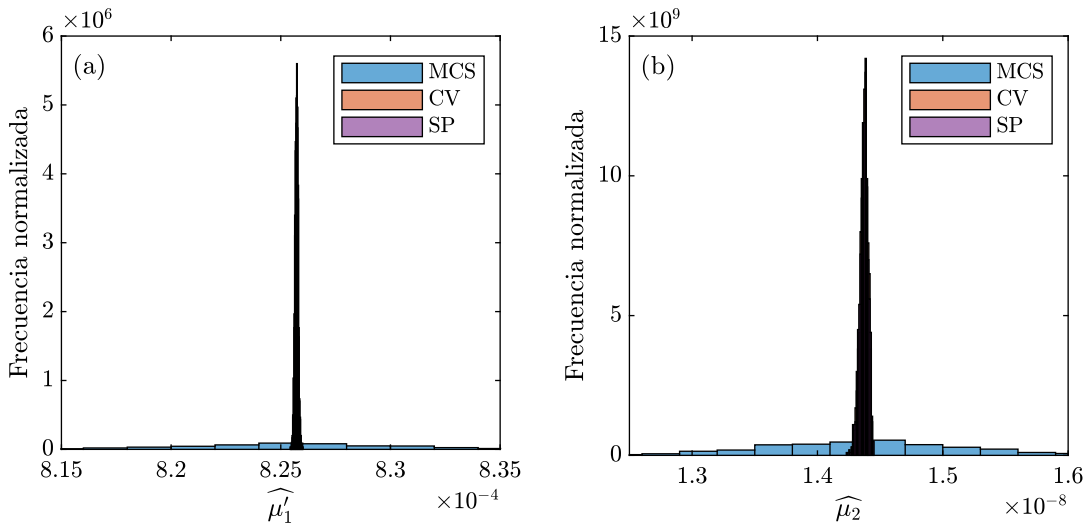


Figura 5.38: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor cuadrático respecto de las variables aleatorias normales estándar y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5$ [m].

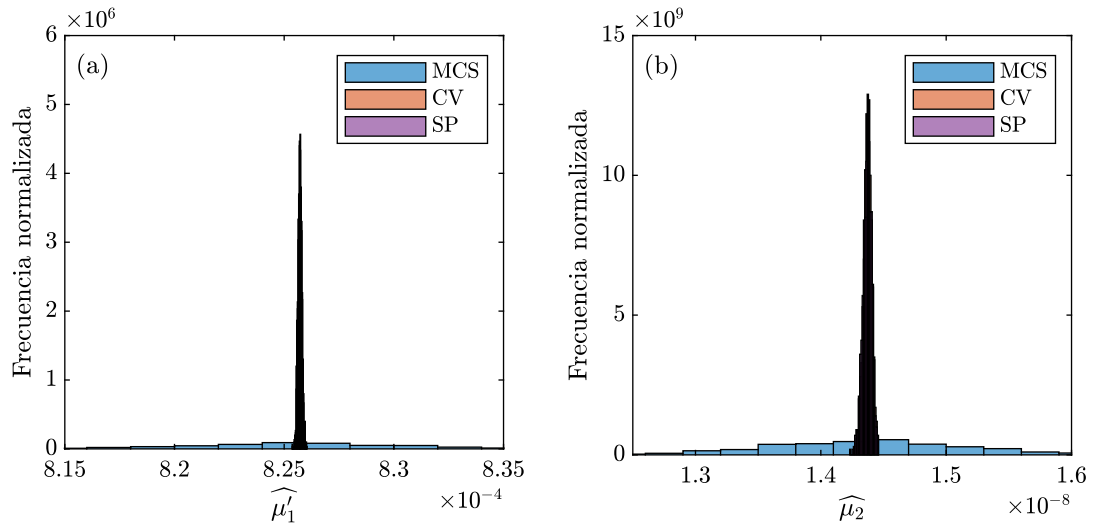


Figura 5.39: Losa sobre una fundación Winkler. Histogramas de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza. Estimadores control variates y splitting usando Taylor lineal respecto de las variables intermedias tipo II y parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$.

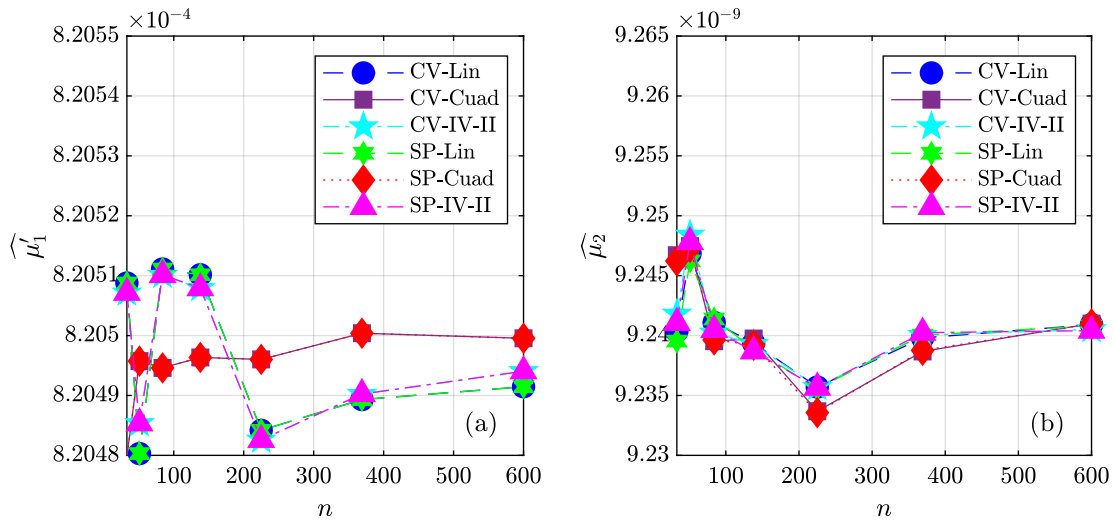


Figura 5.40: Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 2 [m]$.

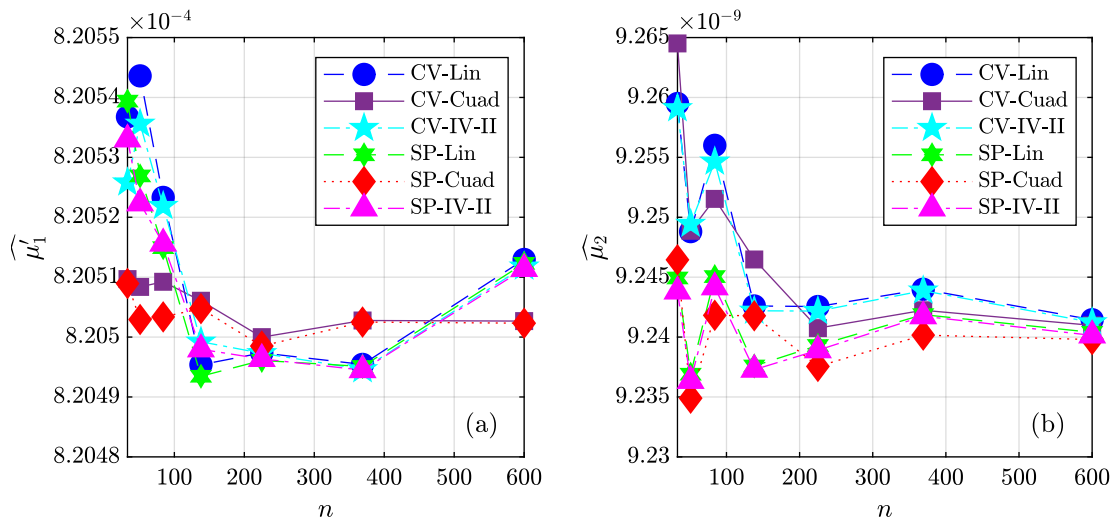


Figura 5.41: Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 2$ [m].

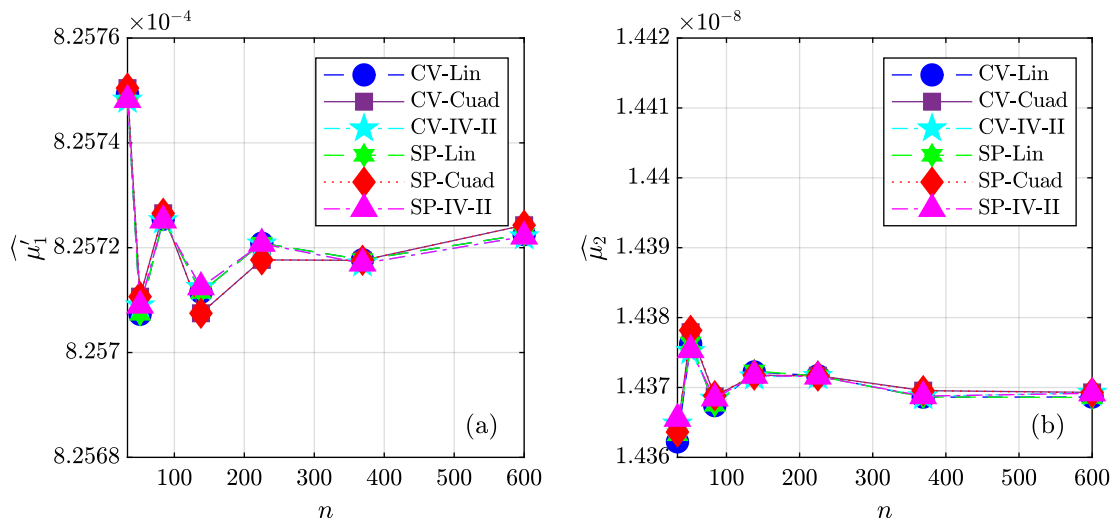


Figura 5.42: Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control iguales a 1. Largo de correlación $L_c = 5$ [m].

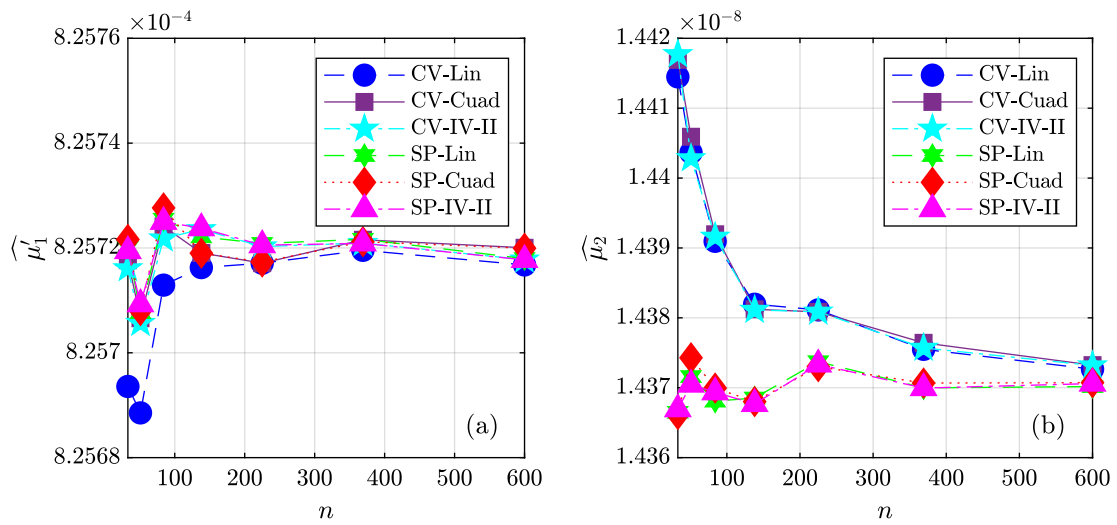


Figura 5.43: Losa sobre una fundación Winkler. Gráfico de los estimadores de (a) esperanza y (b) varianza versus el número de muestras n . Estimadores control variates y splitting con parámetros de control óptimos. Largo de correlación $L_c = 5 [m]$.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Esta tesis se enmarca dentro de la cuantificación de incertidumbre de respuestas asociadas a sistemas de ingeniería civil lineales estáticos. Específicamente, a lo que se abocó este trabajo fue a la técnica de reducción de varianza conocida como control variates.

Por un lado, se desarrollaron las expresiones necesarias para utilizar el método control variates en la estimación de las estadísticas de segundo orden de la respuesta incierta, en el caso en que el método aproximado usado entregue las estadísticas de segundo orden de la respuesta aproximada de manera precisa, y en el caso donde estas estadísticas deben ser estimadas. Los métodos aproximados usados en este trabajo utilizan bases reducidas y series de Taylor con variables intermedias.

Con ejemplos de aplicación en ingeniería civil, se probó que se producía una disminución en la variabilidad de las muestras de las estadísticas buscadas, con un costo computacional muy inferior al costo asociado al método tradicional Monte Carlo, para lograr una variabilidad similar. Se evidenció que esta disminución es máxima cuando se usa el parámetro de control óptimo dentro de la técnica control variates. Sin embargo, también se notó la existencia de un sesgo en estas muestras al usar este parámetro, el cual disminuía al trabajar con más muestras. Esto puede constituir una limitante en su uso, considerando que existen modelos de alta dimensionalidad que no pueden generar muchas muestras de la respuesta de interés dado el gran tiempo de cálculo que eso significaría.

La segunda parte de esta tesis ataca precisamente este punto mediante la técnica de separación de muestras (splitting). Se establecieron las expresiones asociadas para calcular los estimadores de las estadísticas de segundo orden considerando esta estrategia. Se aplicó a ejemplos prácticos y se visualizó la eliminación del sesgo en los resultados, a cambio de un aumento menor en el costo computacional.

Como propuesta de trabajo futuro, el método control variates junto con la técnica de separación de muestras puede ser ocupado para reducir la variabilidad de los estimadores de los llamados índices de Sobol', los cuales permiten realizar un análisis de sensibilidad, identificando el impacto que tiene una variable incierta o un grupo de variables inciertas en la variabilidad de alguna res-

puesta de interés. Además, también se deja propuesta la posibilidad de ampliar el alcance de los procedimientos explicados a sistemas de ingeniería civil dinámicos.

Apéndice A

CÓDIGOS

Este apéndice muestra los códigos necesarios para obtener la varianza y covarianza de los estimadores de las estadísticas de segundo orden, además de los códigos usados para conseguir los estimadores insesgados de los momentos estadísticos usados en esta memoria. Estos códigos trabajan con el paquete *mathStatica*, perteneciente al programa computacional *Mathematica*. Para la expresión de los estimadores, se usan sumas de potencias, donde el término $s_{p,q}$ se define por

$$s_{p,q} \equiv s_{p,q}(\Theta_n) = \sum_{i=1}^n \left(r(\theta_n^{(i)}) \right)^p \left(\tilde{r}(\theta_n^{(i)}) \right)^q$$

Tabla A.1: Códigos usados para la obtención de la varianza y covarianza de los estimadores de las estadísticas de segundo orden usados en esta memoria.

Expresión	Resultado	Código
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_1^{(MCS)}(r, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_2}{n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{S_1}{n}$]
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_2^{(MCS)}(r, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_4}{n} - \frac{(n-3)\mu_2^2}{(n-1)n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{ns_2 - s_1^2}{(n-1)n}$]
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_1(r, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_{2,0}}{n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{S_{1,0}}{n}$]
$\text{Cov} [\widehat{\mu}_1(r, \Theta_n), \widehat{\mu}_1(\tilde{r}, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_{1,1}}{n}$	CentralMomentToCentral [{"1,1"}, { $\frac{S_{1,0}}{n}, \frac{S_{0,1}}{n}$ }]
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_1(\tilde{r}, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_{0,2}}{n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{S_{0,1}}{n}$]
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_{4,0}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{2,0}^2}{(n-1)n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{ns_{2,0} - s_{1,0}^2}{(n-1)n}$]
$\text{Cov} [\widehat{\mu}_2(r, \Theta_n), \widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)]$	$\frac{2\mu_{1,1}^2}{(n-1)n} + \frac{\mu_{2,2}}{n} - \frac{\mu_{2,0}\mu_{0,2}}{n}$	CentralMomentToCentral [{"1,1"}, { $\frac{ns_{2,0} - s_{1,0}^2}{(n-1)n}, \frac{ns_{0,2} - s_{0,1}^2}{(n-1)n}$ }]
$\mathbb{V} [\widehat{\mu}_2(\tilde{r}, \Theta_n)]$	$\frac{\mu_{0,4}}{n} - \frac{(n-3)\mu_{0,2}^2}{(n-1)n}$	CentralMomentToCentral [2, $\frac{ns_{0,2} - s_{0,1}^2}{(n-1)n}$]

Tabla A.2: Códigos usados para la obtención de los momentos centrales bivariados.

Momento	Estimador	Código
$\mu_{1,1}$	$\frac{ns_{1,1} - s_{0,1}s_{1,0}}{(n-1)n}$	<code>HStatistic[{{1,1}}</code>
$\mu_{1,1}^2$	$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} ((n^2 - 3n + 2) s_{1,1}^2 + (n - n^2) s_{2,2} + (2 - 2n) s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - s_{2,0} s_{0,1}^2 - s_{0,2} s_{1,0}^2 + s_{0,2} s_{2,0})$	<code>PolyH[{{1,1},{1,1}}</code>
$\mu_{2,0}^2$	$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} ((n^2 - 3n + 3) s_{2,0}^2 + (n - n^2) s_{4,0} - 2ns_{2,0}s_{1,0}^2 + (4n - 4) s_{3,0} s_{1,0} + s_{1,0}^4)$	<code>PolyH[{{2,0},{2,0}}</code>
$\mu_{2,2}$	$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} ((-2n^2 + 4n - 6) s_{2,1} s_{0,1} + (-2n^2 + 4n - 6) s_{1,0} s_{1,2} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{2,2} + ns_{2,0} s_{0,1}^2 + 4ns_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + ns_{0,2} s_{1,0}^2 + (6 - 4n) s_{1,1}^2 + (3 - 2n) s_{0,2} s_{2,0} - 3s_{1,0}^2 s_{0,1}^2)$	<code>HStatistic[{{2,2}}</code>
$\mu_{4,0}$	$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} ((-4n^2 + 8n - 12) s_{3,0} s_{1,0} + (n^3 - 2n^2 + 3n) s_{4,0} + 6ns_{2,0} s_{1,0}^2 + (9 - 6n) s_{2,0}^2 - 3s_{1,0}^4)$	<code>HStatistic[{{4,0}}</code>
$\mu_{2,0} \mu_{0,2}$	$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} ((n^2 - 3n + 1) s_{0,2} s_{2,0} + (n - n^2) s_{2,2} + (2 - n) s_{2,0} s_{0,1}^2 + (2n - 2) s_{2,1} s_{0,1} + (2 - n) s_{0,2} s_{1,0}^2 + (2n - 2) s_{1,0} s_{1,2} + s_{1,0}^2 s_{0,1}^2 - 4s_{1,0} s_{1,1} s_{0,1} + 2s_{1,1}^2)$	<code>PolyH[{{2,0},{0,2}}</code>

Bibliografía

- Amsallem, D., Zahr, M., Choi, Y., y Farhat, C. (2015). Design optimization using hyper-reduced-order models. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(4), 919-940.
- Au, S.-K., y Wang, Y. (2014). *Engineering risk assessment with subset simulation*. John Wiley & Sons.
- Avramidis, A. N., y Wilson, J. R. (1993). A splitting scheme for control variates. *Operations Research Letters*, 14(4), 187-198.
- Bathe, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall.
- Boyaval, S., Le Bris, C., Maday, Y., Nguyen, N. C., y Patera, A. T. (2009). A reduced basis approach for variational problems with stochastic parameters: Application to heat conduction with variable Robin coefficient. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41-44), 3187-3206.
- Bucher, C. (2009). *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. CRC Press.
- Correa, J. (2016). *Desarrollo de una técnica de base reducida para la aproximación eficiente de la respuesta estática y dinámica de modelos de elementos finitos* (Tesis de maestría). Universidad Técnica Federico Santa María.
- Degrauwe, D., Lombaert, G., y De Roeck, G. (2010). Improving interval analysis in finite element calculations by means of affine arithmetic. *Computers & Structures*, 88(3-4), 247-254.
- Der Kiureghian, A., y Ke, J.-B. (1988). The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2), 83-91.
- Dwyer, P. S. (1937). Moments of any rational integral isobaric sample moment function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 8(1), 21-65.
- Fadel, G., Riley, M., y Barthelemy, J. (1990). Two point exponential approximation method for structural optimization. *Structural Optimization*, 2(2), 117-124.
- Fishman, G. S. (1996). *Monte Carlo: Concepts, algorithms and applications*. Springer Nature.
- Fox, R., y Miura, H. (1971). An approximate analysis technique for design calculations. *AIAA Journal*, 9(1), 177-179.
- Freitag, S., Cao, B., Ninić, J., y Meschke, G. (2018). Recurrent neural networks and proper orthogonal decomposition with interval data for real-time predictions of mechanised tunnelling processes. *Computers & Structures*, 207, 258-273.
- Gallimard, L., Florentin, E., y Ryckelynck, D. (2017). Towards error bounds of the failure probability of elastic structures using reduced basis models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(9), 1216-1234.

- Ghanem, R. (1999). The nonlinear Gaussian spectrum of lognormal stochastic processes and variables. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 66(4), 964-973.
- Ghanem, R., y Spanos, P. (1990). Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of applied mechanics*, 57(1), 197-202.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer New York.
- Gogu, C., y Passieux, J.-C. (2013). Efficient surrogate construction by combining response surface methodology and reduced order modeling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(6), 821-837.
- González, I. (2019). *Cuantificación de la incertidumbre en sistemas estructurales aplicando técnicas de reducción de modelos, remuestreo y reducción de varianza* (Tesis de maestría). Universidad Técnica Federico Santa María.
- Haftka, R., y Gürdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization* (3rd). Kluwer.
- Hughes, T. (2000). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications.
- Kamiński, M. (2006). On generalized stochastic perturbation-based finite element method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22(1), 23-31.
- Kamiński, M., y Kleiber, M. (2000). Numerical homogenization of N -component composites including stochastic interface defects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(5), 1001-1027.
- Kamiński, M. (2007). Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics. *Computers & structures*, 85(10), 586-594.
- Kamiński, M., y Świta, P. (2011). Generalized stochastic finite element method in elastic stability problems. *Computers & Structures*, 89(11-12), 1241-1252.
- Kirsch, U. (2003). A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2), 67-85.
- Lavenberg, S. S., y Welch, P. D. (1981). A perspective on the use of control variables to increase the efficiency of Monte Carlo simulations. *Management Science*, 27(3), 322-335.
- Lee, J. A., y Verleysen, M. (2007). *Nonlinear dimensionality reduction*. Springer Science & Business Media.
- Liu, P., y Der Kiureghian, A. (1986). Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1(2), 105-112.
- Liu, W., Mani, A., y Belytschko, T. (1987). Finite element methods in probabilistic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2(4), 201-213.
- Loève, M. (1963). *Probability theory* (Third). D. Van Nostrand Company, Inc.
- Löwdin, P.-O. (1970). On the nonorthogonality problem. *Advances in quantum chemistry* (pp. 185-199). Elsevier.
- Matthies, H., Brenner, C., Bucher, C., y Soares, C. (1997). Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements. *Structural Safety*, 19(3), 283-336.

- Mercer, J. (1909). Xvi. functions of positive and negative type, and their connection the theory of integral equations. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 209(441-458), 415-446.
- Metropolis, N., y Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335-341.
- Mukhopadhyay, N. (2000). *Probability and statistical inference*. Marcel Dekker.
- Nelson, B. (1990). Control Variate Remedies. *Operations Research*, 38(6), 974-992.
- Ng, L. W. T., y Willcox, K. E. (2014). Multifidelity approaches for optimization under uncertainty. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(10), 746-772.
- Noor, A. K., y Lowder, H. E. (1974). Approximate techniques of structural reanalysis. *Computers & Structures*, 4(4), 801-812.
- Noor, A., y Lowder, H. (1975). Structural reanalysis via a mixed method. *Computers & Structures*, 5(1), 9-12.
- Panayirci, H., y Schuëller, G.-I. (2011). On the capabilities of the polynomial chaos expansion method within SFE analysis—an overview. *Archives of computational methods in engineering*, 18(1), 43-55.
- Pellissetti, M. F., y Ghanem, R. G. (2000). Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31(8-9), 607-616.
- Pisaroni, M., Krumscheid, S., y Nobile, F. (2017). *Quantifying uncertain system outputs via the multilevel Monte Carlo method - Part I: Central moment estimation* (inf. téc.). Mathicse Group at EPFL.
- Rahman, S., y Rao, B. (2001). A perturbation method for stochastic meshless analysis in elastostatics. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 50(8), 1969-1991.
- Rose, C., y Smith, M. D. (2002). *Mathematical statistics with Mathematica*[®]. Springer.
- Rubinstein, R. Y., y Marcus, R. (1985). Efficiency of Multivariate Control Variates in Monte Carlo Simulation. *Operations Research*, 33(3), 661-677.
- Schmit, L., y Farshi, B. (1974). Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. *AIAA Journal*, 12(5), 692-699.
- Schuëller, G. (1997). A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 4(12), 197-321.
- Stefanou, G. (2009). The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12), 1031-1051.
- Strutz, T. (2011). *Data fitting and uncertainty a practical introduction to weighted least squares and beyond*. Vieweg + Teubner.
- Styan, G. P. (1973). Hadamard products and multivariate statistical analysis. *Linear Algebra and its Applications*, 6, 217-240.
- Sudret, B., y Der Kiureghian, A. (2000). *Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report* (inf. téc.). University of California, Berkeley.

- Sudret, B., y Der Kiureghian, A. (2002). Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(4), 337-348.
- Sun, T.-C. (1979). A finite element method for random differential equations with random coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(6), 1019-1035.
- Trefethen, L. N., y Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra* (Vol. 50). Society for Industrial; Applied Mathematics.
- Valdebenito, M., Jensen, H., Hernández, H., y Mehrez, L. (2018). Sensitivity Estimation of Failure Probability Applying Line Sampling. *Reliability Engineering & System Safety*, 171, 99-111.
- Valdebenito, M., Labarca, A., y Jensen, H. (2013). On the application of intervening variables for stochastic finite element analysis. *Computers & Structures*, 126, 164-176.
- van Dam, E. R., Husslage, B., den Hertog, D., y Melissen, H. (2007). Maximin Latin Hypercube Designs in Two Dimensions. *Operations Research*, 55(1), 158-169.
- Wood, D. W., y Groenwold, A. A. (2009). Non-convex dual forms based on exponential intervening variables, with application to weight minimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(12), 1544-1572.
- Yamazaki, F., Shinozuka, M., y Dasgupta, G. (1988). Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis. *Journal of engineering mechanics*, 114(8), 1335-1354.

