

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Motores de Otto en Sistemas Bidimensionales: Rol de los Estados de Borde

**Rafael García Zamora**

Tesis presentada al Departamento de Física de la Universidad Técnica  
Federico Santa María para optar al grado académico de Magíster en Ciencias  
con Mención en Física

20 Enero 2025  
Valparaíso, Chile

**Tutor de Tesis: Dr. Francisco Peña**

## Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi profesor guía Francisco Peña por su paciencia y orientación en el proceso de crear esta tesis, también a mis amigos que me dan ganas de seguir haciendo cosas y proseguir en mi vida, finalmente a mi familia por mantenerme vivo y cuidarme por este tiempo.

Este proyecto fue apoyado por ANID Fondecyt Grant No. 1240582

## Resumen

La termodinámica cuántica ha revolucionado el aprovechamiento energético mediante el diseño de motores basados en las propiedades cuánticas de la materia. Sin embargo, un aspecto frecuentemente ignorado en este contexto es el efecto de los bordes de los materiales, los cuales tienen un impacto potencialmente significativo en el rendimiento de los sistemas.

En esta investigación, se analiza cómo los bordes afectan el desempeño de un motor de Otto con una sustancia de trabajo cuántica. El estudio comienza con una revisión de las propiedades fundamentales de la termodinámica cuántica, incluyendo sus leyes y procesos aplicados al mundo cuántico. A continuación, se abordan los ciclos de Carnot y Otto en sus versiones cuánticas, destacando que la eficiencia de Carnot continúa siendo un límite teórico en este contexto. Luego, se describe un sistema bidimensional sin considerar los bordes, en el cual los electrones están confinados mediante un campo magnético. Finalmente, se incorpora un potencial polinómico que modela los bordes del material, permitiendo explorar diferentes configuraciones y áreas, y comparando estos resultados con el caso base sin bordes.

Los resultados muestran que la inclusión de bordes reduce consistentemente el campo magnético máximo necesario, al tiempo que mejora tanto el trabajo como la eficiencia del motor en comparación con el caso sin bordes. Además, se observa una convergencia hacia el comportamiento del sistema sin bordes al incrementar la potencia del polinomio utilizado para modelar los bordes. Estos hallazgos sugieren que, en el diseño de motores cuánticos, el caso sin bordes representa el límite inferior en términos de trabajo y eficiencia, subrayando la importancia de considerar los efectos de los bordes en la optimización del desempeño de estos sistemas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Termodinamica Cuantica</b>	<b>5</b>
2.1. Leyes de la termodinámica cuántica . . . . .	5
2.1.1. Ley cero . . . . .	5
2.1.2. Primera ley . . . . .	6
2.1.3. Segunda ley . . . . .	7
2.1.4. Tercera Ley . . . . .	8
2.2. Procesos Termodinámicos Cuánticos . . . . .	9
2.2.1. Proceso Isotérmico Cuántico . . . . .	9
2.2.2. Proceso Isocórico Cuántico . . . . .	9
2.2.3. Proceso Adiabático Cuántico . . . . .	10
<b>3. Ciclos termodinámicos</b>	<b>11</b>
3.1. Ciclo de Carnot Cuántico . . . . .	11
3.1.1. Procesos del Ciclo . . . . .	11
3.1.2. Reversibilidad . . . . .	12
3.1.3. Calor, Trabajo y Eficiencia . . . . .	13
3.2. Ciclo de Otto Cuántico . . . . .	14
3.2.1. Procesos del Ciclo . . . . .	14
3.2.2. Calor, Trabajo y Eficiencia . . . . .	15
3.3. Motor de Otto con una Sustancia de Trabajo Cuántica . . . . .	16
<b>4. Material bidimensional con campo magnético</b>	<b>19</b>
4.1. Sistema . . . . .	19
4.2. Degeneración . . . . .	20
4.3. Termodinámica . . . . .	21
4.4. Resultados . . . . .	22
<b>5. Caso con Borde</b>	<b>25</b>
5.1. Sistema . . . . .	25
5.2. Degeneración . . . . .	27
5.3. Resultados . . . . .	29
5.3.1. Cantidades Termodinámicas . . . . .	29
5.3.2. Trabajo y Eficiencia . . . . .	31

<b>6. Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>Referencias</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La creación de motores termodinámicos cuánticos consiste en desarrollar motores cuya sustancia de trabajo es un sistema cuántico, lo que permite establecer una conexión entre la termodinámica clásica y la mecánica cuántica. Uno de los primeros trabajos en esta área fue realizado por J. E. Geusic en 1967 [1], donde se mostró cómo lograr un equivalente cuántico del motor de Carnot clásico. Posteriormente, otros motores, como el de Otto, también han sido adaptados a su contraparte cuántica. En 2008, H.T. Quan definió de manera más consistente la máquina de Otto cuántica [2], estableciendo un marco de acuerdo entre las distintas descripciones previas.

Los motores termodinámicos cuánticos exhiben propiedades interesantes [2] que no se encuentran en sus versiones clásicas. Además, al igual que los motores clásicos, tienen el potencial de generar energía si se comprenden y desarrollan adecuadamente. Un sistema comúnmente utilizado como sustancia de trabajo en estos motores son electrones confinados mediante diferentes métodos [3]. En el trabajo de F. J. Peña *et al.*, se estudió la termodinámica de un motor de Otto cuya sustancia de trabajo es un electrón atrapado en una superficie bidimensional mediante un campo magnético [4]. Las energías de este sistema corresponden a los niveles de Landau, descritos por primera vez en 1930 por L. Landau [5]. Aunque estos niveles han sido estudiados ampliamente debido a su degeneración, el sistema sigue presentando un comportamiento complejo.

Los bordes en sistemas físicos son una característica fundamental que muchas veces se evita, a pesar de que en experimentos físicos siempre existen límites en los sistemas. Para electrones en un sistema bidimensional, como en el caso de un gas de electrones, los bordes se suelen modelar utilizando un potencial

cuadrático [6], aunque también se han explorado otros enfoques, como funciones escalón [7] o potenciales infinitos [8].

En este trabajo, se estudiará el efecto de los bordes, modelados mediante potenciales polinómicos, en el trabajo y la eficiencia de un motor de Otto cuya sustancia de trabajo es de naturaleza cuántica y consiste en electrones confinados en una superficie bidimensional. Para ello, primero se abordarán las leyes cuánticas de la termodinámica, describiendo los ciclos de Carnot y Otto en sus versiones cuánticas. Posteriormente, se establecerá el hamiltoniano del sistema para encontrar su función de partición y demás magnitudes termodinámicas en función de un potencial  $q$  arbitrario. Finalmente, se compararán estos sistemas con bordes con el caso base sin bordes para identificar relaciones generales entre ellos.

En esta tesis por tanto, la **hipótesis fundamental** es que al considerar los bordes en un sistema físico la eficiencia y el trabajo útil se obtienen desde un ciclo termodinámico cualquiera serán fuertemente afectados (ya sea de forma positiva o negativa).

En esta línea, el **objetivo general** corresponde entonces a analizar el impacto de los bordes en la eficiencia y el trabajo útil de un motor termodinámico cuántico, evaluando cómo estos factores afectan el desempeño de ciclos termodinámicos en sistemas cuánticos confinados en superficies bidimensionales.

# Capítulo 2

## Termodinamica Cuantica

### 2.1. Leyes de la termodinámica cuántica

#### 2.1.1. Ley cero

Un sistema termodinámico puede describirse mediante coordenadas termodinámicas, como la presión y el volumen en un gas ideal. Estas coordenadas pueden ser dependientes o independientes entre sí, generando distintos estados del sistema a medida que sus valores cambian. Si dos sistemas en estados diferentes se ponen en contacto mediante una pared que permite el intercambio de calor, después de un tiempo alcanzarán el mismo estado y llegarán al equilibrio térmico [9]. Imaginemos ahora dos sistemas,  $A$  y  $B$ , que no están en contacto entre sí, pero ambos intercambian calor con un tercer sistema  $C$ . Después de alcanzar el equilibrio térmico con  $C$ , al aislar cada sistema y luego juntar  $A$  y  $B$ , observaremos que también estarán en equilibrio térmico entre ellos. Este principio, conocido como la “Ley Cero de la Termodinámica”, proporciona la base para definir la temperatura de un sistema, una métrica crucial en el estudio de los sistemas termodinámicos.

En un sistema cuántico, debido a su naturaleza, no es práctico medir directamente la temperatura de la sustancia de trabajo. En su lugar, se utiliza un baño térmico, que permite el intercambio de calor entre el sistema cuántico y sus alrededores. Esto plantea la posibilidad de que, para sustancias cuánticas, la Ley Cero no esté perfectamente definida. Para nuestros propósitos, definiremos que los procesos sean cuasiestáticos, de modo que la Ley cero de la Termodinámica es aplicable en nuestro sistema.

### 2.1.2. Primera ley

La Primera Ley de la Termodinámica describe la relación entre la energía interna de un sistema y el trabajo y calor intercambiados con su entorno. Generalmente, se expresa como:

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (2.1)$$

donde  $dU$  representa el cambio infinitesimal en la energía interna,  $\delta Q$  es el calor que ingresa al sistema, y  $\delta W$  es el trabajo realizado por el sistema [10]. Podemos interpretar el trabajo como la energía que podemos controlar directamente en el sistema, mientras que el calor representa la energía que intercambia con los reservorios externos. Cabe señalar que tanto el calor como el trabajo son derivadas inexactas, lo que implica que sus valores dependen del camino recorrido en el proceso, a diferencia de la energía interna, que es una función de estado y solo depende del estado inicial y final del sistema.

Para definir procesos termodinámicos en sistemas cuánticos, es necesario formular la Primera Ley en el contexto cuántico. Aunque existen varias maneras de describirla y aún no hay un consenso claro [11], consideraremos en esta tesis el enfoque donde los procesos en nuestro sistema son cuasiestáticos. Los procesos cuasiestáticos se caracterizan por mantener el sistema en un estado infinitesimalmente próximo al equilibrio, permitiendo así describir la Primera Ley en un contexto cuántico.

Consideremos un sistema cuántico genérico cuyo hamiltoniano puede expresarse como [2, 12]:

$$H = \sum_n E_n |n\rangle \langle n| \quad (2.2)$$

donde  $E_n$  representa la energía del nivel  $n$ -ésimo. Usando el estado fundamental  $|0\rangle$  como referencia, podemos expresar la energía interna como el valor esperado del hamiltoniano:

$$U = \langle H \rangle = \sum_n P_n E_n \quad (2.3)$$

donde  $P_n$  es la probabilidad de ocupación del nivel  $n$ -ésimo. Derivando ambos lados de la ecuación (2.3), obtenemos:

$$dU = \sum_n (E_n dP_n + P_n dE_n) \quad (2.4)$$

El primer término depende del cambio en las probabilidades de ocupación y se relaciona con el cambio en la entropía de Von Neumann, lo que nos permite asociarlo con el calor:

$$\delta Q = \sum_n E_n dP_n \quad (2.5)$$

El segundo término, que corresponde a cambios en los niveles de energía con probabilidades constantes, lo identificamos como el trabajo:

$$\delta W = \sum_n P_n dE_n \quad (2.6)$$

De esta manera, el calor depende de las variaciones en las probabilidades de ocupación mientras los niveles de energía permanecen fijos, y el trabajo corresponde a los cambios en los niveles de energía con probabilidades constantes. Así, podemos adaptar la Primera Ley de la Termodinámica para su aplicación en sistemas cuánticos.

### 2.1.3. Segunda ley

La Segunda Ley de la Termodinámica explica por qué el calor fluye de objetos con mayor temperatura a los de menor temperatura o por qué el tiempo parece fluir en una dirección definida. Esta ley establece que el cambio en la entropía de un sistema cerrado que evoluciona a lo largo del tiempo debe ser siempre positivo o nulo:

$$\Delta S \geq 0 \quad (2.7)$$

La entropía termodinámica surge de la necesidad de definir una diferencial exacta para el calor. Por ello, se establece que, para un proceso reversible en un camino cerrado, se cumple:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (2.8)$$

Esta integral es independiente del camino, permitiéndonos definir una nueva

cantidad llamada entropía [10]:

$$dS = \frac{\dot{d}Q}{T} \quad (2.9)$$

En el contexto cuántico, el cumplimiento de la Segunda Ley es más complejo debido a que el sistema utiliza baños térmicos para establecer la temperatura y a la presencia de interacciones de largo alcance entre partículas. Sin embargo, para sistemas puramente cuánticos, se ha demostrado que pueden generarse restricciones adicionales que incluyen la Segunda Ley [13], o que esta se sigue cumpliendo al considerar los baños térmicos y otras condiciones específicas [14]. En nuestro caso, al trabajar con procesos cuasiestáticos y formar un ciclo, podemos asumir que la Segunda Ley se comportará de manera similar a la de un sistema clásico.

La entropía es una cantidad termodinámica fundamental que determina los límites de eficiencia en nuestros ciclos termodinámicos. Además, nos proporciona la relación entre la temperatura y el campo magnético durante ciertos procesos, y permite calcular el calor y el trabajo del motor que utilizaremos. Todo esto se explicará en las siguientes secciones.

#### 2.1.4. Tercera Ley

La Tercera Ley de la Termodinámica establece que para una sustancia cristalina pura se cumple:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0 \quad (2.10)$$

Es decir, cuando la sustancia se aproxima al cero absoluto, el cambio de entropía del sistema debe ser nulo. Esto ocurre únicamente en cristales perfectos, ya que al no haber movimiento térmico solo existe un estado posible. En otros sistemas, al reducir la temperatura, estos tienden a un valor de entropía que puede no ser cero. En el caso de sistemas cuánticos, se han estudiado diversos ejemplos que presentan dificultades para cumplir con la Tercera Ley; sin embargo, con descripciones más precisas y considerando interacciones adicionales, se ha observado que muchos sistemas cuánticos respetan la Tercera Ley [15, 16]. En nuestro trabajo, dada la aproximación cuasiestática utilizada, podemos asumir que la Tercera Ley se mantendrá válida.

## 2.2. Procesos Termodinámicos Cuánticos

### 2.2.1. Proceso Isotérmico Cuántico

Un proceso es isotérmico cuando la temperatura se mantiene constante. Esto puede lograrse ajustando cuidadosamente las coordenadas del sistema o utilizando un reservorio térmico que mantenga estable la temperatura. En un sistema de dos niveles,  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  (estado base y primer estado excitado), separados por una energía  $\Delta E$ , designamos las probabilidades de ocupación como  $P_0$  y  $P_1$ , respectivamente [2]. Dado que nuestros procesos serán cuasiestáticos, la relación entre las probabilidades debe cumplir la distribución de Boltzmann:

$$r(t) = \frac{P_1}{P_0} = e^{-\beta\Delta E(t)} \quad (2.11)$$

donde  $\beta = 1/k_B T$ , con  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura. Además, como condición de normalización, la suma de estas probabilidades debe ser igual a 1:

$$P_0 + P_1 = 1 \quad (2.12)$$

Observamos que, al igual que en un proceso isotérmico clásico, aquí puede haber intercambio de calor y trabajo, debido a las variaciones en el ratio de probabilidades y en la diferencia de energía entre los niveles. Si el proceso ocurre de forma suficientemente lenta, podremos mantener la temperatura constante durante todo el proceso.

### 2.2.2. Proceso Isocórico Cuántico

Un proceso isocórico se caracteriza por un intercambio de calor sin realización de trabajo. En la termodinámica clásica, esto se logra manteniendo el volumen constante; en el caso cuántico, el proceso depende de un parámetro externo  $\omega$ , que se mantendrá constante mientras se intercambia calor [17]. Usando la Primera Ley de la Termodinámica, observamos que para que el trabajo sea nulo no debe haber cambios en los niveles de energía, lo que implica que el cambio en el sistema se debe únicamente a variaciones en las probabilidades de ocupación en cada nivel de energía. Debido a la entropía de Von Neumann, la entropía del sistema cambiará durante el proceso.

Dado que este proceso se utiliza en diversos ciclos termodinámicos, se requiere un parámetro externo  $\omega$  adecuado para este propósito. Una opción común son los campos magnéticos, ya que su interacción es compatible con los hamiltonianos estudiados y permite cambios en las probabilidades sin afectar la diferencia entre los niveles de energía, como ocurre en los niveles de Landau. Por este motivo, nos referiremos a estos procesos como “Isomagnéticos”.

### 2.2.3. Proceso Adiabático Cuántico

Un proceso adiabático es aquel en el que no hay intercambio de calor entre el sistema y el reservorio. En el caso clásico, esto se logra al realizar el proceso de manera rápida, de modo que no hay tiempo suficiente para la transferencia de calor. En su versión cuántica, usando la Primera Ley, vemos que para evitar el intercambio de calor, el cambio en las probabilidades de ocupación debe ser nulo. Esto se consigue realizando el proceso de manera suficientemente lenta, para que sea cuasiestático, siendo esta una de nuestras condiciones [3]. Además, al no cambiar las probabilidades durante el proceso, la entropía del sistema se mantendrá constante.

# Capítulo 3

## Ciclos termodinámicos

### 3.1. Ciclo de Carnot Cuántico

El ciclo de Carnot es uno de los ciclos termodinámicos más conocidos e importantes, ya que responde a la pregunta sobre la máxima eficiencia posible para un motor termodinámico clásico [9]. Esto nos motiva a buscar un análogo cuántico y verificar si dicha eficiencia máxima sigue cumpliéndose en el contexto cuántico.

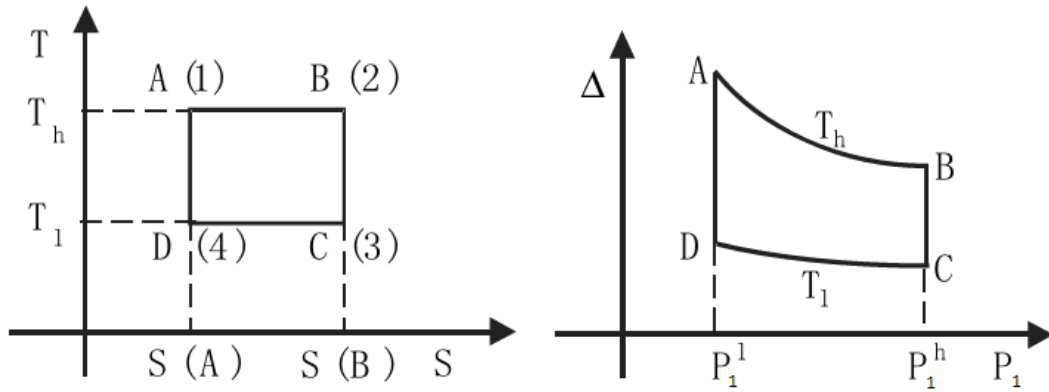
#### 3.1.1. Procesos del Ciclo

Imitando la configuración de su contraparte clásica, el ciclo de Carnot cuántico consta de dos procesos isotérmicos cuánticos y dos procesos adiabáticos cuánticos. Cada proceso se describe en la Figura 3.1.1 para un sistema de dos niveles:

1. Proceso  $A \rightarrow B$ : Este es el primer proceso isotérmico, donde el sistema está en contacto con el reservorio caliente y las probabilidades de ocupación cambian, aumentando la entropía de  $S(A)$  a  $S(B)$  sin alterar la temperatura  $T_h$ .
2. Proceso  $B \rightarrow C$ : Este es un proceso adiabático en el que la temperatura varía de  $T_h$  a  $T_l$  mediante un cambio en los niveles de energía, manteniendo constante la entropía  $S(B)$ .
3. Proceso  $C \rightarrow D$ : El segundo proceso isotérmico en el cual el sistema está en contacto con el reservorio frío. Las probabilidades de ocupación

cambian, reduciendo la entropía de  $S(B)$  a  $S(A)$  mientras la temperatura permanece en  $T_l$ .

4. Proceso  $D \rightarrow A$ : Finalmente, en el segundo proceso adiabático, la temperatura aumenta de  $T_l$  a  $T_h$ , manteniendo constante la entropía en  $S(A)$  y regresando al estado inicial.



((a)) Temperatura contra Entropía para un ciclo de Carnot clásico y cuántico.

((b)) Diferencia de los niveles de energía contra la probabilidad de ocupación del estado excitado ( $P_1$ ) para un ciclo de Carnot cuántico.

**Figura 3.1.1:** Diagramas para un ciclo de Carnot cuántico. Los procesos  $A \rightarrow B$  y  $C \rightarrow D$  son isotérmicos, mientras que los procesos  $B \rightarrow C$  y  $D \rightarrow A$  son adiabáticos.

### 3.1.2. Reversibilidad

Para que el ciclo de Carnot cuántico sea reversible, es esencial que la distribución de Boltzmann se conserve después de cada proceso adiabático y que la temperatura al final del ciclo coincida con la temperatura inicial del proceso isotérmico. Estas condiciones se cumplen si los niveles de energía cambian en la misma proporción durante el proceso adiabático, igual a la relación entre las temperaturas de los reservorios. Proponemos entonces que el ratio entre dos niveles de energía,  $n$  y  $m$ , se mantenga constante al inicio y final del proceso adiabático:

$$\frac{P_n(B)}{P_m(B)} = e^{-\frac{1}{k_B T_h} (E_n(B) - E_m(B))} = \frac{P_n(C)}{P_m(C)} = e^{-\frac{1}{k_B T_l} (E_n(C) - E_m(C))} \quad (3.1)$$

donde  $P_n(B)$  y  $P_n(C)$  representan las probabilidades de ocupación en los puntos  $B$  y  $C$ , y  $E_n(B)$  y  $E_n(C)$  son los niveles de energía correspondientes. Esto lleva a la siguiente relación:

$$(E_n(B) - E_m(B)) = \frac{T_h}{T_l}(E_n(C) - E_m(C)) \quad (3.2)$$

lo que verifica que se cumplen todas las condiciones para la reversibilidad del ciclo.

### 3.1.3. Calor, Trabajo y Eficiencia

Podemos calcular el calor y el trabajo de los cuatro procesos del ciclo utilizando la Primera y Segunda Leyes [18]. Sin embargo, en este análisis nos enfocamos en la eficiencia del ciclo, calculando el calor liberado ( $Q_{out}$ ) e incorporado ( $Q_{in}$ ) en los procesos isotérmicos. Dado que la temperatura es constante en estos procesos, podemos aplicar la Segunda Ley:

$$Q_{in} = T_h(S(B) - S(A)) \quad (3.3)$$

$$Q_{out} = T_l(S(C) - S(D)) \quad (3.4)$$

donde  $S(A), S(B), S(C)$  y  $S(D)$  representan la entropía en los puntos  $A, B, C$  y  $D$  respectivamente. Como la entropía depende solo de las probabilidades de ocupación, y estas no cambian en los procesos adiabáticos, se cumple que  $S(B) = S(C)$  y  $S(A) = S(D)$ , permitiendo calcular el trabajo total del sistema:

$$W = Q_{in} - Q_{out} = (T_h - T_l)(S(B) - S(A)) \quad (3.5)$$

Finalmente, la eficiencia del ciclo se define como [9]:

$$\eta \equiv \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_l}{T_h} = \eta_C \quad (3.6)$$

lo que muestra que es posible alcanzar la eficiencia del ciclo de Carnot clásico en condiciones cuasiestáticas. Si es necesario, la eficiencia puede expresarse en términos de los niveles de energía mediante la ecuación (3.2):

$$\eta_C = 1 - \frac{E_n(C) - E_m(C)}{E_n(B) - E_m(B)} \quad (3.7)$$

Un ciclo de Carnot cuántico también puede funcionar como un refrigerador, en cuyo caso su coeficiente de rendimiento (COP) es:

$$COP \equiv \frac{Q_{in}}{W} = \frac{T_h}{T_h - T_l} \quad (3.8)$$

indicando que las métricas de eficiencia dependen únicamente de las temperaturas de los reservorios.

## 3.2. Ciclo de Otto Cuántico

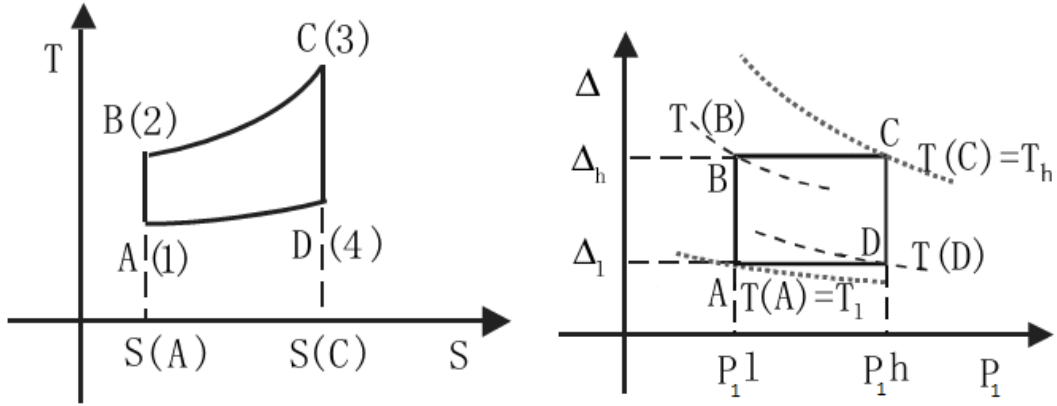
El ciclo de Otto cuántico es ampliamente utilizado en experimentos [3], ya que permite calcular el calor y el trabajo de manera individual en los procesos isocóricos y adiabáticos. Dado su amplio uso, este será el ciclo que estudiaremos en este trabajo.

### 3.2.1. Procesos del Ciclo

Al igual que en su equivalente clásico, el ciclo de Otto cuántico consta de dos procesos isocóricos cuánticos y dos procesos adiabáticos cuánticos. A continuación, se describen los procesos mostrados en la Figura 3.2.1 para un sistema de dos niveles:

1. Proceso  $A \rightarrow B$ : En el primer proceso adiabático, partiendo de la temperatura del reservorio frío  $T_l$ , la temperatura del sistema se incrementa hasta  $T_B$ , manteniendo constante la entropía  $S(A) = S(B)$ . Para lograr esto, el parámetro externo  $\omega_l$  aumenta hasta  $\omega_h$ .
2. Proceso  $B \rightarrow C$ : En el proceso isocórico, la temperatura se incrementa desde  $T_B$  hasta la del reservorio caliente  $T_h$ , cambiando las probabilidades de ocupación y, por tanto, la entropía. Esto se realiza sin alterar el parámetro externo  $\omega_h$ .
3. Proceso  $C \rightarrow D$ : En el segundo proceso adiabático, la temperatura disminuye de  $T_h$  a  $T_D$ , manteniendo constante la entropía  $S(C) = S(D)$ . Este cambio de temperatura se debe a la modificación del parámetro externo desde  $\omega_h$  hasta  $\omega_l$ .

4. Proceso  $D \rightarrow A$ : Finalmente, en el segundo proceso isocórico, la temperatura del sistema disminuye desde  $T_D$  hasta  $T_l$ , y las probabilidades de ocupación cambian, retornando el sistema al estado inicial.



((a)) Temperatura contra Entropía para un ciclo de Otto clásico y cuántico. ((b)) Diferencia de los niveles de energía contra la probabilidad de ocupación del estado excitado ( $P_1$ ) para un ciclo de Otto cuántico, las líneas curvas punteadas representan isothermas.

**Figura 3.2.1:** Diagramas para un ciclo de Otto cuántico. Los procesos  $A \rightarrow B$  y  $C \rightarrow D$  son adiabáticos, mientras que los procesos  $B \rightarrow C$  y  $D \rightarrow A$  son isocóricos.

### 3.2.2. Calor, Trabajo y Eficiencia

Siguiendo el análisis de [2], utilizamos la Primera Ley para calcular el calor que ingresa ( $Q_{in}$ ) y sale ( $Q_{out}$ ) del sistema en los procesos isocóricos:

$$Q_{in} = \sum_n \int_B^C E_n dP_n = \sum_n E_n^{(in)} [P_n(C) - P_n(B)] \quad (3.9)$$

$$Q_{out} = \sum_n - \int_D^A E_n dP_n = \sum_n E_n^{(out)} [P_n(D) - P_n(A)] \quad (3.10)$$

donde  $E_n^{(in)}$  y  $E_n^{(out)}$  son las energías de los niveles en cada proceso. Asumimos que las diferencias entre niveles son proporcionales:

$$E_n^{(in)} - E_m^{(in)} = \alpha(E_n^{(out)} - E_m^{(out)}) \quad (3.11)$$

donde  $\alpha$  es una constante. Usando la energía base  $E_0^{(in)} = E_0^{(out)} = 0$ ,

obtenemos  $E_n^{(in)} = \alpha E_n^{(out)}$ . Como en el ciclo de Carnot, las probabilidades de ocupación permanecen inalteradas en los procesos adiabáticos ( $P_n(A) = P_n(B)$  y  $P_n(C) = P_n(D)$ ), lo cual permite expresar el trabajo y la eficiencia del ciclo como:

$$W = Q_{in} - Q_{out} = \sum_n (E_n^{(in)} - E_n^{(out)}) [P_n(C) - P_n(B)] \quad (3.12)$$

$$\eta_O = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{E_n^{(out)} - E_m^{(out)}}{E_n^{(in)} - E_m^{(in)}} = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (3.13)$$

Para un sistema de dos niveles, esta eficiencia es la misma que la del ciclo de Otto clásico. Es importante señalar que el ciclo de Otto cuántico tiene la posibilidad de funcionar como motor, refrigerador, acelerador o calentador [18], demostrando su versatilidad.

### 3.3. Motor de Otto con una Sustancia de Trabajo Cuántica

Como se mencionó anteriormente, utilizaremos el ciclo de Otto cuántico para construir un motor. Dado que todos nuestros procesos son cuasiestáticos, el motor de Otto clásico puede aplicarse a una sustancia de naturaleza cuántica, y procederemos a detallar los calores, trabajos y la eficiencia del motor cuántico de Otto.

Nuestro sistema, que actuará como la sustancia de trabajo del motor, consiste en electrones confinados en una superficie bidimensional bajo la influencia de un campo magnético. El parámetro externo  $\omega_{B_i}$  depende de la magnitud del campo magnético  $B_i$ , donde  $B_0$  representa el campo magnético inicial en el punto  $A$  y  $B_1$  es el campo en el punto  $C$ . En la Figura 3.3.1 se presenta el ciclo del motor de Otto, donde calcularemos el calor y el trabajo en cada proceso del ciclo, utilizando la diferencia de energía interna de acuerdo con la Primera Ley de la Termodinámica:

1. Proceso  $A \rightarrow B$ : Este es un proceso adiabático, en el cual no hay intercambio de calor; solo se realiza trabajo.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{B_0}^{B_1} dB \left( \frac{\partial U}{\partial B} \right)_S = U(T_B, B_1) - U(T_A, B_0) \quad (3.14)$$

2. Proceso  $B \rightarrow C$ : Este es un proceso isomagnético, en el cual no se realiza trabajo porque el campo magnético se mantiene constante, permitiendo únicamente el intercambio de calor.

$$Q_{B \rightarrow C} = \int_{T_B}^{T_h} dT \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{B_1} = U(T_h, B_1) - U(T_B, B_1) \quad (3.15)$$

Denotaremos el calor en este proceso como  $Q_{in}$ .

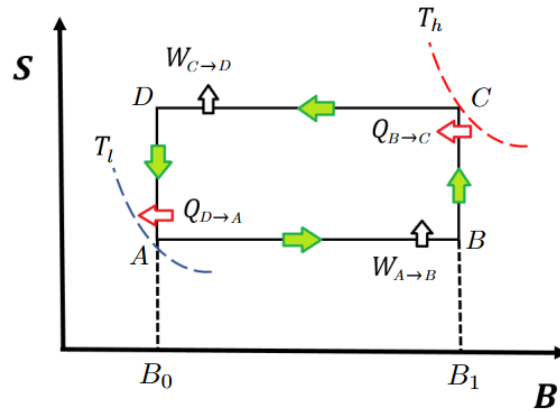
3. Proceso  $C \rightarrow D$ : Al igual que el primer proceso, este es adiabático, por lo que solo se realiza trabajo sin intercambio de calor.

$$W_{C \rightarrow D} = \int_{B_1}^{B_0} dB \left( \frac{\partial U}{\partial B} \right)_S = U(T_D, B_0) - U(T_h, B_1) \quad (3.16)$$

4. Proceso  $D \rightarrow A$ : En este segundo proceso isomagnético, el sistema intercambia calor sin realizar trabajo, retornando al punto de partida.

$$Q_{D \rightarrow A} = \int_{T_D}^{T_l} dT \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{B_0} = U(T_l, B_0) - U(T_D, B_0) \quad (3.17)$$

Definimos este calor como  $Q_{out}$ .



**Figura 3.3.1:** Diagrama de entropía contra campo magnético para nuestro ciclo de Otto.

Este análisis es válido para el caso en que  $B_0 < B_1$ . Cabe destacar que, al incrementar el campo magnético, la temperatura del sistema puede disminuir [4], lo que en ciertas condiciones podría invertir los roles de los reservorios, con  $T_h$  actuando como el reservorio frío y  $T_l$  como el reservorio caliente, como

consecuencia los calores de entrada ( $Q_{in}$ ) y salida ( $Q_{out}$ ) invierten su ubicación en el ciclo.

El trabajo total del sistema, obtenido como la suma de los trabajos realizados en los procesos adiabáticos, es:

$$W_T = W_{A \rightarrow B} + W_{C \rightarrow D} = U(T_B, B_1) - U(T_l, B_0) + U(T_D, B_0) - U(T_h, B_1) \quad (3.18)$$

Finalmente, la eficiencia del motor,  $\eta$ , en términos de la energía interna, se expresa como:

$$\eta = -\frac{W_T}{Q_{in}} = -\frac{U(T_B, B_1) - U(T_l, B_0) + U(T_D, B_0) - U(T_h, B_1)}{U(T_h, B_1) - U(T_B, B_1)} \quad (3.19)$$

# Capítulo 4

## Material bidimensional con campo magnético

### 4.1. Sistema

Nuestro primer paso será replicar el procedimiento hecho en [4] para tener un caso base en el cual no se consideran los bordes. Este sistema consta de un material de forma rectangular, siendo sus dimensiones  $L_x$  por  $L_y$  y área  $A = L_x L_y$ , en donde se tienen electrones afectados por un campo magnético  $\vec{B} = B\hat{z}$  perpendicular al material. Este campo magnético hace que los electrones tengan un movimiento circular uniforme debido a la fuerza de Lorentz [6]. El hamiltoniano del sistema para un electrón es:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \quad (4.1)$$

donde  $m$  es la masa del electrón,  $e$  es su carga,  $\mathbf{p}$  es el vector de momento, y  $\mathbf{A}$  es el vector potencial. En esta ocasión usaremos el gauge de Landau [6] ( $\mathbf{A} = (0, xB)$ ), aunque se pueden obtener los mismos resultados con el gauge simétrico [6, 19]. Nuestro hamiltoniano será entonces:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + exB)^2) \quad (4.2)$$

Ya que  $H$  conmuta con  $p_y$ , podemos usar su autovalor  $\hbar k_y$ :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2}{2} (x + k_y l_B^2)^2 \quad (4.3)$$

donde definimos:

$$\omega_B \equiv \frac{eB}{m} \quad (4.4)$$

siendo esta la frecuencia ciclotrónica [6], que representa la frecuencia del movimiento ciclotrónico. También definimos:

$$l_B^2 \equiv \frac{\hbar}{eB} \quad (4.5)$$

llamado largo magnético [6, 20], que representa el radio del movimiento hecho por el electrón. Podemos apreciar que la forma del hamiltoniano es la de un oscilador armónico centrado en  $-k_y l_B^2$ . Esta energía es conocida [6] y estará dada por:

$$E_n = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.6)$$

con  $n \in \mathbb{N}_0$ . Se puede ver que el número cuántico  $k_y$  no está presente en la expresión de la energía. Debido a esto, el sistema tiene una gran degeneración.

## 4.2. Degeneración

Ya que nuestra muestra está restringida a un área rectangular de tamaño  $L_x$  por  $L_y$ , debemos determinar cuántos estados  $k_y$  caben en esta área. Debido a cómo es el sistema, restringirlo a una distancia  $L_y$  hará que el número cuántico  $k_y$  esté cuantizado por unidades de  $2\pi/L_y$  [6]. Por otro lado, al estar centrado en  $x = -k_y l_B^2$ , y considerando que los posibles valores de  $x$  están entre  $-L_x/2$  y  $L_x/2$ , podemos comprobar que los valores de  $k_y$  estarán entre  $-L_x/2l_B^2$  y  $L_x/2l_B^2$ . Con esto, podemos calcular la cantidad total de estados:

$$\frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/2l_B^2}^{L_x/2l_B^2} dk_y = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi\hbar} \quad (4.7)$$

donde  $A = L_x L_y$ , este valor es la degeneración del sistema [6]. La definiremos de aquí en adelante como:

$$D \equiv \frac{eBA}{2\pi\hbar} \quad (4.8)$$

### 4.3. Termodinámica

Con la energía y la degeneración podemos calcular la función partición del sistema, con la cual podremos derivar las cantidades termodinámicas necesarias para describir el motor de Otto. La función partición para 1 partícula está definida como:

$$Z = D \sum_n^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (4.9)$$

donde  $E_n$  es la energía del sistema,  $D$  es la degeneración dada por la ecuación (4.8), y  $\beta$  es:

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (4.10)$$

siendo  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura. Reemplazando con los datos obtenidos, la función partición del sistema es:

$$Z = \frac{D}{2} \operatorname{csch} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \quad (4.11)$$

También podemos calcular la energía interna y la entropía del sistema:

$$U = \frac{\hbar \omega_B}{2} \operatorname{coth} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \quad (4.12)$$

$$S = \frac{\hbar \omega_B}{2T} \operatorname{coth} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) + k_B \ln \left[ \frac{D}{2} \operatorname{csch} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \right] \quad (4.13)$$

$$C_B = \frac{B^2 e^2 \hbar^2}{4k_B m^2 T^2} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \quad (4.14)$$

Para futuras comparaciones, será importante analizar el comportamiento de la entropía a bajas temperaturas. Tomemos el límite cuando  $T \rightarrow 0$ . Primero, reordenamos la entropía:

$$S = k_B \left( \operatorname{coth} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \ln \left[ e^{\frac{\beta \hbar \omega_B}{2}} \right] + \ln \left[ \frac{D}{2} \operatorname{csch} \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) \right] \right) \quad (4.15)$$

Al tomar el límite  $T \rightarrow 0$ , el término  $\operatorname{coth}$  converge a 1:

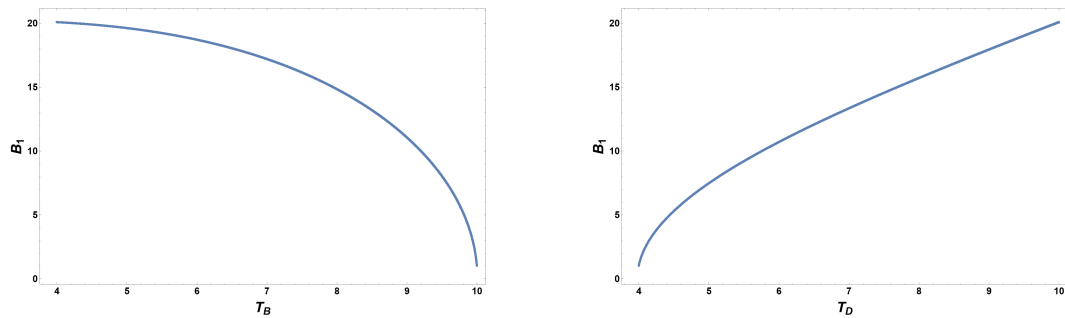
$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \coth \left( \frac{\beta \hbar \omega_B}{2} \right) = 1 \quad (4.16)$$

y juntando los logaritmos, el límite se convierte en:

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} S = k_B \ln D \quad (4.17)$$

Este valor, que depende del área del material y el campo magnético aplicado, servirá para establecer un puente entre este caso y el caso en el que se consideran los bordes.

## 4.4. Resultados



**((a))** Relación entre el campo magnético  $B_1$  (en Teslas) y la temperatura  $T_B$  (en Kelvin).

**((b))** Relación entre el campo magnético  $B_1$  (en Teslas) y la temperatura  $T_D$  (en Kelvin).

**Figura 4.4.1:** Relaciones entre el campo magnético  $B_1$  y las temperaturas  $T_B$  y  $T_D$  en procesos adiabáticos.

Para llevar a cabo el ciclo de Otto descrito en la sección anterior, es necesario determinar las temperaturas  $T_B$  y  $T_D$ . Estas dependen de los parámetros  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $T_l$  y  $T_h$ . En este análisis, fijamos el campo magnético inicial  $B_0$  en 1 T, la temperatura baja  $T_l$  en 4 K, y la temperatura alta  $T_h$  en 10 K. Utilizamos la característica del proceso adiabático, que requiere que la entropía permanezca constante durante el proceso, para establecer la relación entre  $T_B$  y  $B_1$ :

$$S(T_l, B_0) = S(T_B, B_1) \quad (4.18)$$

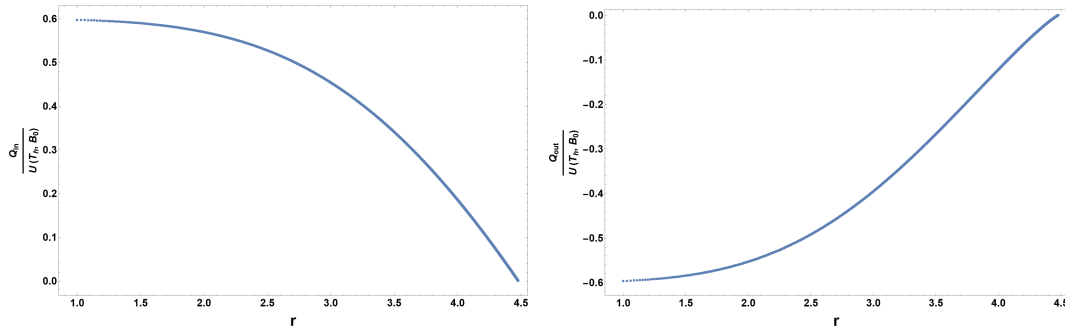
A partir de esta ecuación, fijamos valores de  $T_B$  y calculamos el correspondiente  $B_1$ , obteniendo la relación mostrada en la figura 4.4.1(a).

Observamos que, al aumentar la temperatura  $T_B$ , el campo magnético  $B_1$  debe disminuir para mantener la entropía constante. Esto implica que, al diseñar un motor, es necesario comenzar desde el reservorio caliente con un campo magnético bajo, de manera que al incrementar el campo magnético, la temperatura disminuya.

Un resultado destacado de los cálculos presentados en [4] es que, al no considerar la degeneración del sistema físico estudiado (asumiendo  $D = 1$  en la función de partición), se obtiene una relación completamente lineal entre  $B$  y  $T$  para las trayectorias adiabáticas, lo cual resulta coherente con los resultados esperados para un oscilador armónico y previamente reportados en la literatura.

De manera similar, podemos encontrar la relación entre  $T_D$  y  $B_1$  utilizando la condición de entropía constante durante el segundo proceso adiabático:

$$S(T_h, B_1) = S(T_D, B_0) \quad (4.19)$$



((a)) Calor absorbido ( $Q_{in}$ ) durante el proceso  $D \rightarrow A$ . ((b)) Calor liberado ( $Q_{out}$ ) durante el proceso  $B \rightarrow C$ .

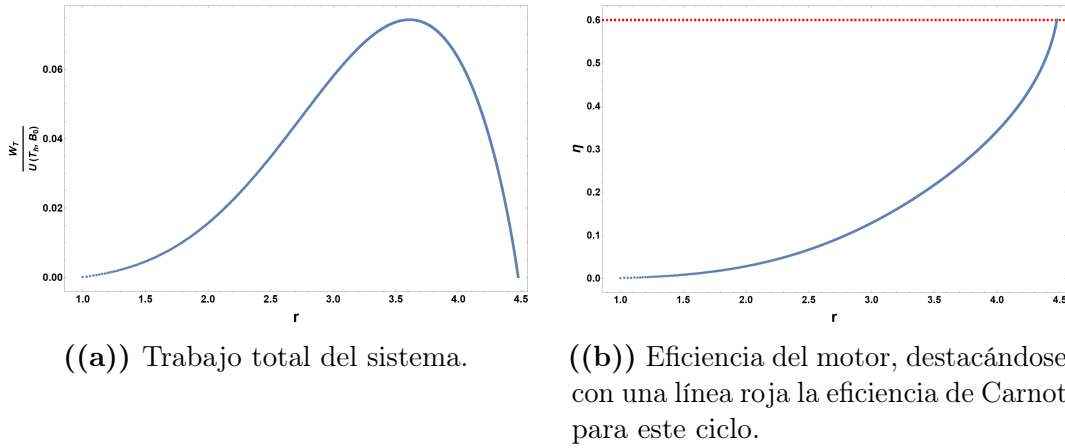
**Figura 4.4.2:** Calor transferido en función del cociente  $r$ .

En la figura 4.4.1(b), observamos que, a diferencia del primer proceso adiabático, cuando el campo magnético aumenta, la temperatura  $T_D$  también debe incrementarse para mantener la entropía constante, lo cual es consistente con el resto del ciclo.

Con los valores obtenidos para  $T_B$ ,  $T_D$  y  $B_1$ , calculamos las cantidades termodinámicas del ciclo. En particular, evaluamos el calor absorbido ( $Q_{in}$ ) y el calor liberado ( $Q_{out}$ ). Cabe destacar que todas las cantidades se presentan normalizadas respecto a la energía interna inicial  $U(T_h, B_0)$  y se grafican en función del cociente entre los largos magnéticos:

$$r = \frac{l_{B_1}}{l_{B_0}} = \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} \quad (4.20)$$

En la figura 4.4.2, observamos que la cantidad de calor absorbido y liberado es mayor cuando la diferencia entre los campos magnéticos es pequeña, y disminuye conforme aumenta el cociente  $r$ .



**Figura 4.4.3:** Trabajo total y la eficiencia del sistema en función del cociente  $r$ .

Por otro lado, en la figura 4.4.3 se representa el trabajo total realizado por el sistema y la eficiencia del motor en función de  $r$ . Se observa un máximo en el trabajo total cuando  $r \approx 3.7$ , correspondiente al cociente entre los campos magnéticos donde se produce la mayor cantidad de trabajo. En este punto, la eficiencia del motor alcanza un valor aproximado de  $\eta \approx 0.31$ .

Finalmente, es importante notar que, como se muestra en la figura 4.4.3(b), la eficiencia del motor nunca supera la eficiencia de Carnot, aunque se aproxima de manera significativa en valores altos de  $r$ .

Este motor magnético basado en el problema de Landau representa una alternativa interesante para explorar ciclos termodinámicos en sistemas cuánticos. Aunque requiere refinamientos para aplicaciones prácticas, el modelo ofrece una perspectiva única sobre la interacción entre degeneración cuántica y termodinámica.

# Capítulo 5

## Caso con Borde

### 5.1. Sistema

Consideremos el mismo sistema anterior, con un área rectangular  $A = L_x L_y$ , en el cual se aplica un campo magnético perpendicular al área para mantener a los electrones. Esta vez, sin embargo, tomaremos en cuenta el borde del material, que se modelará como un potencial. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.2.1. Este potencial debe aumentar rápidamente cerca de los bordes [21], lo que nos lleva a considerar el hamiltoniano del caso base con un término adicional correspondiente al potencial:

$$H_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2 (k_y l_B^2 + x)^2 + V(x) \quad (5.1)$$

Si el potencial varía lentamente en comparación con la longitud magnética  $l_B$ , podemos expandir el potencial alrededor del punto  $x_0 = -k_y l_B^2$ , que es el centro del oscilador armónico en este caso:

$$H_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2 (k_y l_B^2 + x)^2 + V(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} \quad (5.2)$$

Dado que solo nos interesa la forma del potencial, fijaremos el nivel de energía mínimo de modo que los valores constantes no intervengan:

$$H_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2 (k_y l_B^2 + x)^2 + x \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} \quad (5.3)$$

Finalmente, podemos reescribir el hamiltoniano para obtener la forma de

un oscilador armónico similar al caso anterior:

$$H_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2 \left( \left( k_y l_B^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} \frac{1}{m\omega_B^2} \right) + x \right)^2 - \frac{1}{2m\omega_B^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} \right)^2 - k_y l_B^2 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} \quad (5.4)$$

Los términos adicionales, al ser constantes, se sumarán a la energía del oscilador, obteniendo la energía para nuestro sistema al considerar los bordes:

$$E_n(k_y) = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2m\omega_B^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} \right)^2 - k_y l_B^2 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} \quad (5.5)$$

Utilizaremos un potencial de la forma  $V(x) = \alpha x^q$ , donde  $\alpha$  es una constante con unidades de  $\frac{M \cdot L^2}{T^2} \frac{1}{L^q}$ , es decir, energía dividida por longitud elevada a la potencia  $q$ . Insertando esta forma de potencial, obtenemos la siguiente energía:

$$E_n(k_y) = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha^2 q^2 x_0^{2q}}{2m\omega_B^2 x_0^2} - \frac{\alpha q x_0^q k_y l_B^2}{x_0} \quad (5.6)$$

Utilizando los valores de  $x_0$  y  $\omega_B$ , simplificamos un poco más:

$$E_n(k_y) = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{m\alpha^2 q^2 k_y^{2(q-1)} l_B^{4q}}{2\hbar^2} + (-1)^q \alpha q k_y^q l_B^{2q} \quad (5.7)$$

Como deseamos una función que sea simétrica, imponemos la condición de que  $q$  sea par, es decir,  $q = 2p$ :

$$E_n(k_y) = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{2m\alpha^2 p^2 k_y^{2(2p-1)} l_B^{8p}}{\hbar^2} + 2\alpha p k_y^{2p} l_B^{4p} \quad (5.8)$$

Al inspeccionar el segundo término, se observa que siempre será negativo. Afortunadamente, este crece más lentamente que el tercer término, por lo que, a partir de ciertos valores, el segundo término será despreciable. Para que esto ocurra, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{m\alpha p}{\hbar^2 k_y^2} k_y^{2p} l_B^{4p} \ll 1 \quad (5.9)$$

Sabemos que el valor de  $k_y^{2p}$  para cualquier  $p$  es creciente desde 0 hasta  $L_x/2l_B^2$ , por lo que si su valor máximo es mucho menor que 1, los demás valores también lo serán. Así, podemos expresar la condición anterior de la siguiente

manera:

$$\frac{m\alpha p}{e^2 B^2} \left( \frac{L_x}{2} \right)^{2(p-1)} \ll 1 \quad (5.10)$$

Por otro lado, aunque no es necesario, debemos tener en cuenta que la energía del tercer término sea de la misma magnitud que la del primer término en los bordes. Para ello, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{4m\alpha p}{\hbar e B} \left( \frac{L_x}{2} \right)^{2p} \approx 1 \quad (5.11)$$

La función de partición de nuestro sistema será:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_B (n+1/2)} \frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/2l_B^2}^{L_x/2l_B^2} g_n(k_y) e^{-\beta(2\alpha p k_y^{2p} l_B^{4p})} dk_y \quad (5.12)$$

donde el factor  $L_y/2\pi$  aparece por la misma razón que se dio al calcular la degeneración para el caso base.

## 5.2. Degeneración

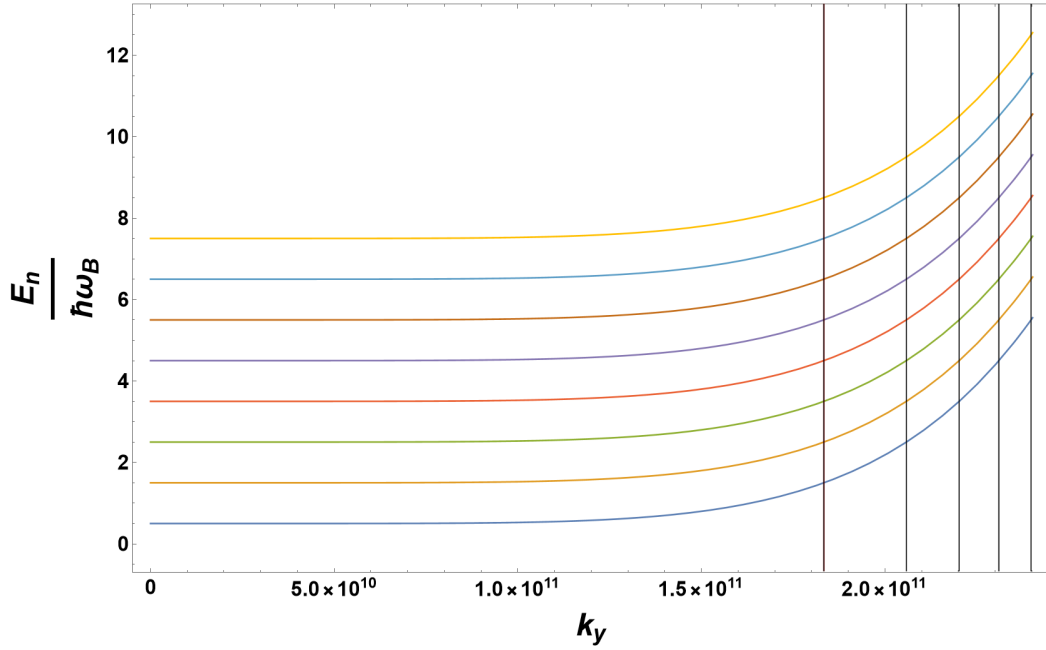
La degeneración  $g_n(k_y)$ , definida en la ecuación (5.12), depende del rango energético en el que se encuentra el sistema. Para determinar los valores de  $k_y$  que separan dichos rangos, tomaremos el tercer término de la energía, lo adimensionalizaremos en unidades de  $\hbar\omega_B$ , y lo igualaremos a un valor  $\gamma$ . Este parámetro  $\gamma$  identificará los diferentes rangos energéticos que se analizarán. Resolviendo para  $k_y$  en esta ecuación, se obtiene:

$$k_y(\gamma) = \left( \frac{\hbar\omega_B \gamma}{2\alpha p l_B^{4p}} \right)^{\frac{1}{2p}} \equiv k_p(\gamma) \quad (5.13)$$

De esta ecuación, se observa que asignando valores enteros positivos a  $\gamma$ , se encuentran los valores exactos de  $k_y$  correspondientes a la aparición de un nuevo nivel de Landau. Al igualar esta expresión con el valor del borde del material y despejar  $\gamma$ , podemos determinar hasta qué nivel energético  $n$  los estados comparten al menos un valor de  $k_y$ :

$$\gamma_{max} = \frac{2\alpha p}{\hbar\omega_B} \left( \frac{L_x}{2} \right)^{2p} \quad (5.14)$$

Por ejemplo, para los parámetros  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  y un área de  $10^{-7} \text{ m}^2$ , se obtiene  $\gamma_{max} \approx 5.054$ . Esto significa que el nivel base de energía comparte valores con hasta el quinto nivel de Landau ( $n = 5$ ). En la Figura 5.2.1, las líneas negras representan los valores enteros de  $\gamma$ . A partir de esta información, se pueden identificar los tramos energéticos y su degeneración, los cuales dependen del número cuántico  $n$ .



**Figura 5.2.1:** Niveles de Landau para  $n = 0$  a  $n = 7$ , afectados por el potencial en los bordes, se usan los parámetros  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  y un área de  $10^{-7} \text{ m}^2$ . Las líneas negras indican los valores de  $k_y$  donde un nivel energético coincide con el siguiente, compartiendo valores. En este caso, cada nivel comparte con otros cinco niveles de Landau.

Definimos  $\gamma_{dec} = \gamma_{max} - \lfloor \gamma_{max} \rfloor$ , que corresponde a la parte decimal de  $\gamma_{max}$ . La degeneración tiene dos contribuciones para todo  $n$ , descritas por:

$$g_n(\gamma) = \begin{cases} \text{mín}[2(m+n+1), 2\lceil \gamma_{max} \rceil], & \text{si } m < \gamma < \gamma_{dec} + m < \gamma_{max} \\ \text{mín}[2(m+n+1), 2(\lceil \gamma_{max} \rceil - 1)], & \text{si } \gamma_{dec} + m < \gamma < m + 1 < \gamma_{max} \end{cases} \quad (5.15)$$

para  $m \in \{0, 1, \dots, \lfloor \gamma_{max} \rfloor\}$ .

Si  $n > \gamma_{max}$ , la degeneración se simplifica a:

$$g(\gamma) = \begin{cases} 2\lceil\gamma_{max}\rceil, & \text{si } m < \gamma < \gamma_{dec} + m < \gamma_{max} \\ 2(\lceil\gamma_{max}\rceil - 1), & \text{si } \gamma_{dec} + m < \gamma < m + 1 < \gamma_{max} \end{cases} \quad (5.16)$$

para  $m \in \{0, 1, \dots, \lceil\gamma_{max}\rceil\}$ .

La ecuación (5.15) muestra que la degeneración depende de  $n$ , mientras que en la ecuación (5.16) no. Modificando la expresión de la degeneración y separando las variables  $n$  y  $k_y$ , se obtiene finalmente la función de partición del sistema:

$$\begin{aligned} Z = & \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_B(n+1/2)} \frac{L_y}{\pi} \int_0^{L_x/2l_B^2} g(\gamma) u_p(k_y) dk_y \\ & - \frac{L_y}{\pi} \sum_{n=0}^{\lceil\gamma_{max}\rceil-1} e^{-\beta\hbar\omega_B(n+1/2)} \sum_{m=0}^{\lceil\gamma_{max}\rceil-n-1} 2 \left[ \delta_{m,n} \int_{k_p(m)}^{k_p(m+\gamma_{dec})} u_p(k_y) dk_y \right. \\ & \left. + (\delta_{m,n} - 1) \int_{k_p(m+\gamma_{dec})}^{k_p(m+1)} u_p(k_y) dk_y \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $\delta_{m,n} = \lceil\gamma_{max}\rceil - m - n$  y  $u_p(k_y) = e^{-\beta(2\alpha p k_y^2 l_B^4)}$ .

Si  $\gamma_{max} \leq 1$ , el segundo término de  $Z$  desaparece, lo que simplifica la función de partición. Para este caso, se obtiene:

$$Z = \frac{1}{2} \operatorname{csch} \left( \frac{\beta\hbar\omega_B}{2} \right) \frac{L_y}{\pi} \int_0^{L_x/2l_B^2} e^{-\beta(2\alpha p k_y^2 l_B^4)} dk_y \quad (5.18)$$

Es fácil verificar que, al eliminar el potencial ( $\alpha = 0$ ), la función de partición vuelve a la expresión base. En este caso, el valor de la integral corresponde a  $L_x/2l_B^2$ , recuperando así la degeneración y función de partición originales.

## 5.3. Resultados

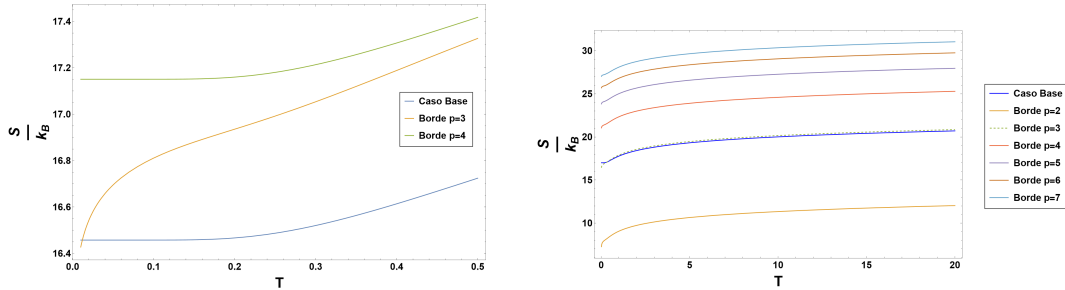
### 5.3.1. Cantidades Termodinámicas

Para analizar las cantidades termodinámicas, comparamos distintos valores de  $p$  con el caso base (borde infinito). Para solo tomar en cuenta los bordes tomaremos la función de partición simplificada con el máximo valor de  $\gamma$

permitido, el área necesaria para lograr este valor de  $\gamma$  se encontrara despejando  $L_x$  en la ecuación correspondiente a  $\gamma_{max}$ . Elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos el área para un valor de  $\gamma_{max} = 1$  como:

$$A_p = 4 \left( \frac{\hbar\omega_B}{2\alpha p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.19)$$

Usando esta área y la función de partición, se calcularon numéricamente las cantidades termodinámicas relevantes. En la figura 5.3.1(a), observamos que, a diferencia del caso base donde la entropía converge hacia un valor definido al enfriarse, la entropía cae rápidamente cuando se considera el efecto del borde. Esto impide encontrar una fórmula sencilla para describir su comportamiento. No obstante, en casos donde el potencial no crece suficientemente rápido (e.g., valores altos de  $p$  y áreas pequeñas,  $\gamma \ll 1$ ), la entropía se comporta de manera similar al caso base. Esto ocurre porque, al no contribuir significativamente a la energía cerca del centro, los bordes no elevan los niveles energéticos, resultando en valores casi constantes para todos los  $k_y$ .



((a)) Entropías entre los 0.01 K y 0.5 K con un área de aproximadamente  $5.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$  para el caso base,  $p = 3$  y  $p = 4$ .

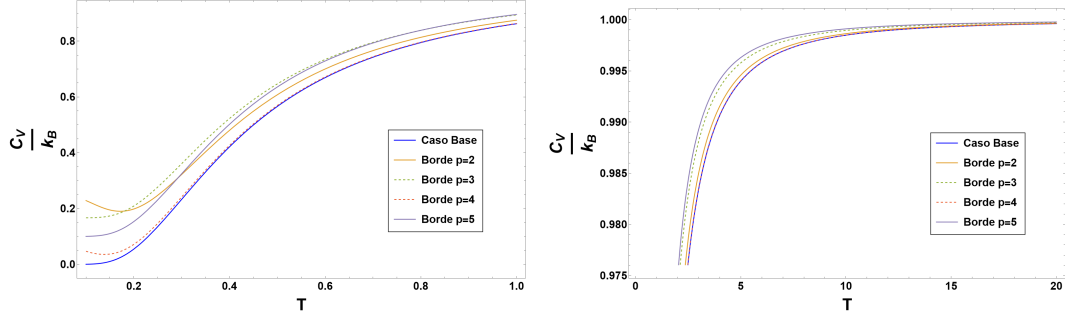
((b)) Entropías entre los 0.01 K y 20 K para el caso base y distintos valores de  $p$ .

**Figura 5.3.1:** Entropías para valores bajos de temperaturas y valores altos de temperatura.

En la figura 5.3.1(b), se presentan las entropías para distintos valores de  $p$ . A temperaturas altas, el valor de la entropía está fuertemente influenciado por el área, mientras que a temperaturas bajas la forma de la entropía cambia ligeramente dependiendo del valor de  $p$  y su relación con el área, como se evidencia en la figura 5.3.1(a).

Otra cantidad termodinámica de interés es el calor específico. En la figura 5.3.2(a), se observa que a bajas temperaturas se presenta un mínimo. Este

mínimo corresponde a los puntos de inflexión en las curvas de entropía y refleja un cambio en su curvatura. A altas temperaturas, mostrado en la figura 5.3.2(b), el calor específico muestra el comportamiento esperado, convergiendo hacia  $k_B$ .



((a)) Calor específico entre los 0.1 K y 1 K, para el caso base y distintos valores de  $p$ . ((b)) Calor específico entre 0.1 K y 20 K para el caso base y distintos valores de  $p$ .

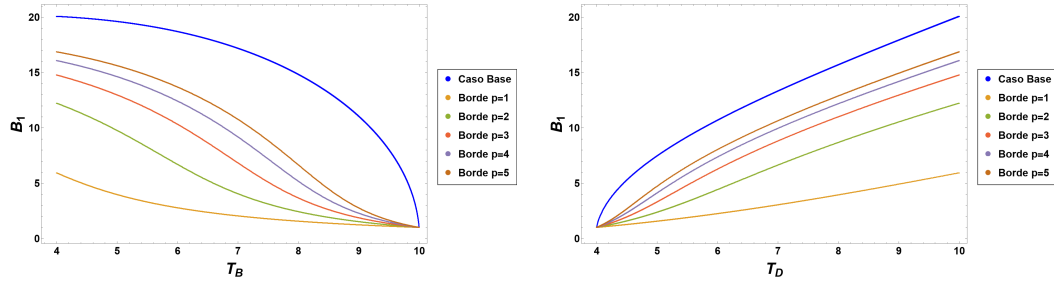
**Figura 5.3.2:** Calor específico para baja temperatura y alta temperatura.

### 5.3.2. Trabajo y Eficiencia

Utilizando la misma metodología que en el caso base, calculamos los calores, trabajos y eficiencias de los motores para potenciales con distintos valores de  $p$ . Fijamos los parámetros  $B_0 = 1$  T,  $T_l = 4$  K y  $T_h = 10$  K. Manteniendo la entropía constante durante los procesos adiabáticos, se obtuvieron las relaciones entre  $B_1$  y  $T_B$  (figura 5.3.3(a)) y entre  $B_1$  y  $T_D$  (figura 5.3.3(b)). Al aumentar el valor de  $p$ , estos resultados tienden al caso base. Además, se observa que un  $p$  pequeño reduce significativamente la potencia del campo magnético necesario, alcanzando un máximo de aproximadamente 20 T para el caso base.

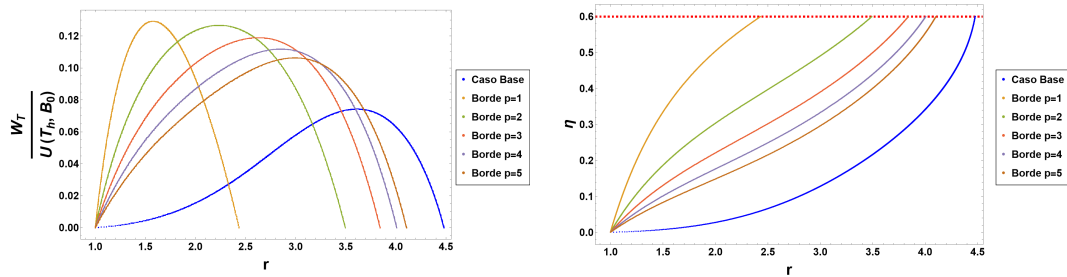
El trabajo total realizado por el sistema, presentado en la figura 5.3.4(a), muestra que a medida que aumenta  $p$ , el trabajo converge al caso base. Sin embargo, los valores máximos de trabajo disminuyen con  $p$ , siendo el más bajo para el caso base.

Finalmente, en la figura 5.3.4(b), se presenta la eficiencia. Conforme  $p$  aumenta, la eficiencia se aproxima al caso base. Ninguna de las eficiencias supera la eficiencia de Carnot, aunque los valores más bajos de  $p$  permiten una aproximación más suave, mientras que los cercanos al caso base presentan un comportamiento más abrupto.



((a)) Relación entre el campo magnético  $B_1$  y la temperatura  $T_B$  del punto  $B$ , para el caso base y para  $p = 1$  hasta  $p = 5$ . ((b)) Relación entre el campo magnético  $B_1$  y la temperatura  $T_D$ , para el caso base y con bordes ( $p = 1$  a  $p = 5$ ).

**Figura 5.3.3:** Relaciones entre el campo magnético  $B_1$  y las temperaturas  $T_B$  y  $T_D$  en procesos adiabáticos.



((a)) Trabajo total del ciclo contra el ratio entre los campos magnéticos, para el caso base y  $p = 1$  hasta  $p = 5$ . ((b)) Eficiencia obtenida contra el ratio de los campos magnéticos. Línea punteada: eficiencia de Carnot.

**Figura 5.3.4:** Trabajo total y eficiencia del motor de Otto para el caso base y distintos valores de  $p$ .

Caso	$W_T$	$\eta$
Base	0.074	0.240
$p = 1$	0.130	0.367
$p = 2$	0.127	0.348
$p = 3$	0.119	0.323
$p = 4$	0.112	0.306
$p = 5$	0.106	0.295

**Tabla 5.3.1:** Trabajo total y eficiencia para el caso base y con bordes ( $p = 1$  hasta  $p = 5$ ).

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se estudió la implementación de un motor de Otto utilizando electrones confinados por un campo magnético en una superficie bidimensional como sustancia de trabajo cuántica. El sistema fue replicado siguiendo modelos establecidos en la literatura, y posteriormente se incorporó un borde mediante un potencial polinómico para evaluar su impacto en el desempeño del motor de Otto. Se resolvió el hamiltoniano del sistema, se determinaron los valores de la degeneración de manera general y se simplificó el análisis al caso donde los resultados se ven exclusivamente afectados por los bordes. Esto permitió calcular las principales cantidades termodinámicas, como la entropía, y construir el motor de Otto variando los campos magnéticos en presencia de diferentes potenciales polinómicos.

El análisis comparativo reveló diferencias significativas entre el caso base (sin bordes) y los sistemas con bordes. En el caso base, la entropía converge a un valor definido al acercarse al cero absoluto, mientras que en presencia de bordes, esta disminuye rápidamente. Sin embargo, no se pudo determinar si también converge a un valor específico. Por otro lado, el calor específico mostró un comportamiento distinto en bajas temperaturas, presentando un mínimo que no aparece en el caso base. Este fenómeno está relacionado con un cambio en la concavidad de la entropía. A altas temperaturas, las cantidades termodinámicas se comportaron de manera similar en todos los casos.

La diferencia más notable se observó en las métricas de desempeño del motor de Otto: calor, trabajo y eficiencia. Se encontró una relación clara entre la potencia del polinomio del potencial y la convergencia hacia el caso base. Específicamente, a medida que aumenta la potencia del polinomio, el sistema

tiende a comportarse como en el caso sin bordes. Esto se explica porque los polinomios de mayor potencia generan potenciales más planos en el centro del sistema y un crecimiento rápido en los bordes. Dependiendo del área asignada, ciertos valores de potencia resultan más efectivos para modelar bordes que otros.

El resultado principal de este estudio es que la inclusión de bordes altera significativamente el rendimiento del motor de Otto. En particular, los bordes mejoran consistentemente el trabajo total, la eficiencia y el campo magnético máximo requerido durante el ciclo, en comparación con el caso base. El efecto más notable se observa con potenciales de baja potencia, que concentran más energía en un área reducida, lo que se refleja en un mejor desempeño del motor.

Finalmente, se identificaron áreas para futuras investigaciones. Queda pendiente estudiar cómo la interacción entre los niveles de Landau puede influir en el desempeño de los motores de Otto. Esto podría abordarse eliminando algunas simplificaciones realizadas en este trabajo o utilizando técnicas más precisas para calcular la función de partición del sistema. Además, los resultados podrían ampliarse explorando diferentes topologías del sistema, considerando otros tipos de potenciales o usando la estadística de Fermi-Dirac, lo que permitiría una comprensión más amplia del impacto de los bordes en motores termodinámicos cuánticos.

# Bibliografía

- [1] J. E. Geusic, E. O. Schulz-DuBios, and H. E. D. Scovil. Quantum equivalent of the carnot cycle. *Phys. Rev.*, 156:343–351, Apr 1967. doi: 10.1103/PhysRev.156.343. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.156.343>.
- [2] H. T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori. Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. *Phys. Rev. E*, 76: 031105, Sep 2007. doi: 10.1103/PhysRevE.76.031105. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.76.031105>.
- [3] Nathan M. Myers, Obinna Abah, and Sebastian Deffner. Quantum thermodynamic devices: From theoretical proposals to experimental reality. *AVS Quantum Science*, 4(2):027101, 04 2022. ISSN 2639-0213. doi: 10.1116/5.0083192. URL <https://doi.org/10.1116/5.0083192>.
- [4] Francisco J. Peña, A. González, Alvaro Nunez, P. Orellana, Rene Rojas, and patricio vargas. Magnetic engine for the single-particle landau problem. *Entropy*, 19:639, 11 2017. doi: 10.3390/e19120639.
- [5] L. Landau. Diamagnetismus der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 64(9): 629–637, Sep 1930. ISSN 0044-3328. doi: 10.1007/BF01397213. URL <https://doi.org/10.1007/BF01397213>.
- [6] David Tong. Lectures on the quantum hall effect, 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1606.06687>.
- [7] I. Bartos and B. Rosenstein. Electron structure near abrupt edges in 2deg under strong magnetic field. *physica status solidi (b)*, 193(2):411–425, February 1996. ISSN 1521-3951. doi: 10.1002/pssb.2221930215. URL <http://dx.doi.org/10.1002/pssb.2221930215>.
- [8] A. H. MacDonald and P. Středa. Quantized hall effect and edge currents. *Phys. Rev. B*, 29:1616–1619, Feb 1984. doi: 10.1103/PhysRevB.29.1616. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.29.1616>.
- [9] M.W. Zemansky and R.H. Dittman. *Calor y termodinámica*. McGraw-Hill, 1984. ISBN 9789684516311. URL <https://books.google.cl/books?id=wVtoQwAACAAJ>.

- [10] Sebastian Deffner and Steve Campbell. Quantum thermodynamics: An introduction to the thermodynamics of quantum information, 2019. URL <https://arxiv.org/abs/1907.01596>.
- [11] Roie Dann and Ronnie Kosloff. Unification of the first law of quantum thermodynamics. *New Journal of Physics*, 25(4):043019, apr 2023. doi: 10.1088/1367-2630/acc967. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/acc967>.
- [12] Samarth Kumar, Nikhil Gupt, Shuvadip Ghosh, and Arnab Ghosh. Introduction to quantum thermodynamic cycles. *Journal of Chemical Sciences*, 135, 04 2023. doi: 10.1007/s12039-023-02154-5.
- [13] Fernando Brandão, Michał Horodecki, Nelly Ng, Jonathan Oppenheim, and Stephanie Wehner. The second laws of quantum thermodynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(11):3275–3279, February 2015. ISSN 1091-6490. doi: 10.1073/pnas.1411728112. URL <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1411728112>.
- [14] Ronnie Kosloff. Quantum thermodynamics: A dynamical viewpoint. *Entropy*, 15(6):2100–2128, 2013. ISSN 1099-4300. doi: 10.3390/e15062100. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/15/6/2100>.
- [15] J.-T. Hsiang, C. H. Chou, Y. Subaş ı, and B. L. Hu. Quantum thermodynamics from the nonequilibrium dynamics of open systems: Energy, heat capacity, and the third law. *Phys. Rev. E*, 97:012135, Jan 2018. doi: 10.1103/PhysRevE.97.012135. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.012135>.
- [16] Amikam Levy, Robert Alicki, and Ronnie Kosloff. Quantum refrigerators and the third law of thermodynamics. *Phys. Rev. E*, 85:061126, Jun 2012. doi: 10.1103/PhysRevE.85.061126. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.061126>.
- [17] Ronnie Kosloff and Yair Rezek. The quantum harmonic otto cycle. *Entropy*, 19(4), 2017. ISSN 1099-4300. doi: 10.3390/e19040136. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/19/4/136>.
- [18] Onofre Rojas and Moises Rojas. Quantum machines based on cu3-like compounds using the heisenberg antiferromagnetic model in a triangular ring, 06 2024.
- [19] Orion Ciftja. Detailed solution of the problem of landau states in a symmetric gauge. *European Journal of Physics*, 41(3):035404, apr 2020. doi: 10.1088/1361-6404/ab78a7. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ab78a7>.
- [20] M. O. Goerbig. Quantum hall effects, 2009. URL <https://arxiv.org/abs/0909.1998>.

- [21] Severin Meng. Integer quantum hall effect. *Proseminar in Theoretical Physics*, 2018.