

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



# CONJUNTO DE UMBRALES SOSTENIBLES BAJO INCERTIDUMBRE

TESIS PRESENTADA POR  
CLAUDIA ALVAREZ LATUZ  
PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS MENCIÓN MATEMÁTICA  
Y AL TÍTULO PROFESIONAL DE  
INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

DIRECTOR DE TESIS  
CRISTOPHER HERMOSILLA JIMÉNEZ  
PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
VALPARAÍSO

CO-DIRECTOR DE TESIS  
PEDRO GAJARDO ADARO  
PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
VALPARAÍSO

OCTUBRE, 2022



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



## CONJUNTO DE UMBRALES SOSTENIBLES BAJO INCERTIDUMBRE

TESIS PRESENTADA POR  
CLAUDIA ALVAREZ LATUZ  
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS MENCIÓN MATEMÁTICA  
Y AL TÍTULO PROFESIONAL DE  
INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

DIRECTOR DE TESIS  
CRISTOPHER HERMOSILLA JIMÉNEZ  
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, VALPARAÍSO

Co-DIRECTOR DE TESIS  
PEDRO GAJARDO ADARO  
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, VALPARAÍSO

EXAMINADORES  
HÉCTOR RAMÍREZ  
UNIVERSIDAD DE CHILE, SANTIAGO  
ALFREDO ALEGRÍA  
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, VALPARAÍSO

OCTUBRE, 2022

MATERIAL DE REFERENCIA, SU USO NO INVOLUCRA RESPONSABILIDAD DEL AUTOR O DE LA INSTITUCIÓN.

*En memoria a mi abuela, Mary Ruth.*

-

# Agradecimientos

Agradezco primeramente a mi familia, quienes me apoyaron cuando decidí partir de casa a los 18 años para estudiar una carrera diferente, un poco rara y desconocida; gracias a mis padres, Claudia y Boris, por enseñarme con el ejemplo a ser resiliente y dar siempre lo mejor de uno mismo. Gracias a mi hermana Catalina por cuidarme durante estos años a pesar de la distancia y ser mi mejor amiga.

A mi pareja, Simón, te agradezco ser mi pilar en todos los sentidos. Juntos estudiamos durante estos años y sin ti no podría haberlo logrado, con tu infinita alegría e inteligencia hiciste que todo momento difícil se transformara en tan sólo un instante. Gracias también a la familia Masnú Berríos, por recibirme en su hogar y darme la oportunidad de sentirme en familia, aunque estuviera lejos de casa.

A todos los amigos que hice durante la universidad, Gustavo, Bernardo, Bruno, Ike, Sebastián, Fabián, Bastián, Eduardo, Joaquín, Ernesto y todos los del grupo auto-denominado *sansanosaurios*; gracias por acompañarme, no sólo en los estudios sino también en el día a día, haciéndolos alegres cada vez que nos juntábamos. Gracias a mis amigos Melissa, Javiera, Nicolás y Marcelo, por siempre estar ahí para mí, especialmente cuando volvía a mi ciudad cansada de un semestre de estudio y compartíamos (esporádicamente) para conversar de nuestras vidas.

Gracias a mis profesores, Christopher Herмосilla y Pedro Gajardo. Desde que tuve mi primera asignatura con ustedes los admiré como docentes, por ser dedicados en la enseñanza y humanos con sus estudiantes. De ahí que elegí comenzar a trabajar en investigación, oportunidad que desencadenó en este trabajo y por la cual estoy muy agradecida. La confianza que ustedes tenían en mí hizo que yo empezara también a creer en mi misma, por lo cual les agradeceré siempre.

## Resumen

Diversos problemas matemáticos, como por ejemplo aquellos asociados al manejo de recursos naturales, son modelados con dinámicas controladas sujetas a una restricción. Por ejemplo, considerando como control una cantidad de recurso extraído, la dinámica nos dice cómo evolucionaría en el tiempo esta cantidad. Usualmente es necesario y conveniente considerar restricciones asociadas a los elementos del problema, como en el caso de la extracción de recursos podría ser mantener un nivel de extracción y recursos mínimos. Es de interés estudiar las restricciones que son posibles de implementar en este tipo de problemas, con el objetivo de conocer cuales pueden ser sostenibles en el tiempo. De esta manera, se tiene más información sobre el problema y por ende es posible tomar decisiones de manera más informada.

El objetivo de este trabajo es extender el resultado expuesto en [1], donde se obtiene una forma de encontrar las restricciones posibles para un modelo general de dinámica controlada, a tiempo discreto y con incertidumbre. Dicho trabajo a extender considera un criterio “robusto”, esto es, exige cumplir las restricciones para toda incertidumbre. En este trabajo, se estudiará el mismo problema, pero con un criterio menos exigente, cumplir las restricciones con al menos cierta probabilidad fija.

## Abstract

Many mathematical problems, as for example those related to management of natural resources, are modeled by controlled dynamics subject to some constraint. For example, considering as control an amount of resource extracted, the dynamics tell us how will the resource evolve in time. In general, it is necessary and convenient to consider restrictions related to the variables of the problem, for example, in the case of resource extraction, a minimum of resource and extraction could be guaranteed. Analyse the type of restrictions suitable for this kind of problem allows us to know which of these restrictions are sustainable in time. In this way, we gain more information about the problem, allowing us to make more informed decisions.

The objective of this work is to extend the results seen in [1], which consists of a way of finding the possible constraints for a general controlled dynamic model with discrete time and uncertainty. Said work considered a “robust” criterion, this is, demanding to satisfy the constraints for every uncertainty. In this work we will study the same problem, but with a less exigent criterion, which is to satisfy the constraints with at least a fixed probability value.

# Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Introducción	1
<b>1 Umbrales sostenibles para sistemas dinámicos restringidos</b>	<b>5</b>
1.1 Caso robusto . . . . .	5
1.2 Adaptación para el caso estocástico . . . . .	8
<b>2 Aproximación del conjunto de umbrales sostenibles</b>	<b>13</b>
2.1 Extensión de resultado de Viabilidad . . . . .	13
2.2 Umbrales no sostenibles . . . . .	17
<b>3 Aplicaciones de los resultados</b>	<b>25</b>
3.1 Algoritmos . . . . .	25
3.2 Recurso renovable con crecimiento incierto . . . . .	29
<b>4 Conclusiones</b>	<b>32</b>
Bibliografía	34

# Introducción

Las matemáticas son una gran herramienta para predecir situaciones de la vida real, especialmente si se trata del manejo de recursos. Mediante el modelamiento de estas situaciones es posible estudiar cómo se desenvuelve el recurso en su entorno, dando también la posibilidad de incluir un manejo externo de éste. De esta manera, mediante las matemáticas somos capaces de tomar decisiones más conscientes e informadas sobre el manejo de los bienes.

Considere, por ejemplo, un modelo extracción de un recurso natural renovable. La cantidad de recurso disponible será expresada por  $x_k$ , donde  $k$  es un instante en una ventana de tiempo finita  $\{0, 1, \dots, N\}$ . Denominemos a la cantidad extraída de este recurso en cada instante de tiempo mediante  $u_k$ . Supongamos que la cantidad de recurso evoluciona en el tiempo de manera lineal, es decir, la cantidad que se tendrá de recurso en un instante  $k+1$  es la cantidad que se tenía en  $k$ , multiplicada por un índice de crecimiento. Generalmente este índice de crecimiento no es preciso y puede tener variaciones, con lo cual lo consideraremos como  $r(w)$ , donde  $w$  es una variable aleatoria que representa esta incertidumbre. Por lo tanto, el recurso variará en el tiempo de la siguiente manera

$$x_{k+1} = r(w) (x_k - u_k).$$

Ahora, puesto que estamos hablando de un recurso natural, es preciso garantizar una cantidad mínima de éste en todo momento. Lo anterior es importante ya que se relaciona con la prevención de una posible extinción del recurso. Por otra parte, el recurso es extraído por una necesidad (como lo podría ser la comercialización de éste), con lo cual es usual que sea necesario también mantener un nivel de extracción mínimo. Los dos requerimientos anteriores implican para el modelo la creación de restricciones. Siendo  $x_{min}$  y  $u_{min}$  los valores límites que deben tener el recurso y la extracción, entonces se debe cumplir

$$x_k \geq x_{min} \quad \text{y} \quad u_k \geq u_{min},$$

para todo  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Note que teniendo un estado inicial  $x_0$ , una cadena de incertidumbres  $(w_0, \dots, w_N)$  y una de controles  $(u_0, \dots, u_N)$ , es posible construir una secuencia de estados  $(x_0, \dots, x_{N+1})$ . Entonces, algo interesante de estudiar es cuáles serían los valores  $x_{min}$  y  $u_{min}$  para los cuales se cumplirán las restricciones con al menos una probabilidad

fija. Lo anterior se refiere a estudiar la existencia de una cadena de controles mayores a  $u_{min}$  para la cual el conjunto de todas aquellas cadenas de incertidumbres que, junto con dicho control, generen una secuencia de estados mayores a  $x_{min}$ , tenga una probabilidad mayor a cierto parámetro  $\beta \in (0, 1]$ . Es decir, encontrar el conjunto

$$\left\{ (x, u) \mid \exists(u_0, \dots, u_N) : \mathbb{P}\left((w_0, \dots, w_N) \mid x_k \geq x, u_k \geq u, \forall k \in \{0, \dots, N\}\right) \geq \beta \right\}.$$

Conocer dicho conjunto crea una gran ventaja en el manejo del recurso, puesto que nos dice qué valores límites son posibles establecer para su extracción de forma que se ajuste de la mejor manera a las diferentes situaciones del mundo real. Claramente puede ser de interés mantener la cantidad del recurso y su extracción en sus máximos valores posibles. Lo anterior se puede precisar conociendo el conjunto antes mencionado, puesto que al encontrar su elemento máximo (mayor o igual a cualquier otro elemento del conjunto en todas sus coordenadas), estamos encontrando las mejores cotas inferiores para el estado y control sin sacrificar la probabilidad de que se cumplan estas cotas. La motivación del presente trabajo es estudiar estos valores límite, a los cuales llamaremos umbrales.

Formalmente estudiaremos un sistema dinámico con incertidumbre y restringido, cuyos componentes se describirán a continuación. Denominaremos por  $X$  al conjunto de estados del sistema, y por  $N \in \mathbb{N}$  al horizonte finito. Entonces, cada elemento  $x_k$  generado por el sistema dinámico en un instante  $k \in \{0, \dots, N\}$  pertenecerá al conjunto  $X$ . Se asumirá el conocimiento de un estado inicial al cual denominaremos  $\xi \in X$ . El conjunto de controles queda definido por  $U$  y al igual que con el estado, en cada instante se tendrá que  $u_k \in U$ . Por último asumiremos una perturbación asociada a la dinámica en cada tiempo, la cual estará compuesta de variables aleatorias  $w_k$  en un espacio de probabilidad  $\Omega$ . Con todo lo anterior, el sistema queda definido como

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, \dots, N, \quad x_0 = \xi, \quad (D_\xi^u(\omega))$$

donde la función  $F : X \times U \times \Omega \rightarrow X$  representa la evolución de la variable de estado en el tiempo y es llamada dinámica. Al considerar las aplicaciones de este sistema, existen ciertas restricciones que permiten tener coherencia con la realidad o control sobre el resultado deseado según parámetros conocidos. En nuestro caso nos enfocaremos en restricciones del tipo mixtas, es decir, ecuaciones que limiten tanto a la variable de estado como al control. Considerando que una secuencia de estados solución de la ecuación dinámica es determinada por una condición inicial, un control y una perturbación, indirectamente las restricciones son también impuestas sobre estos elementos. Se definen las restricciones sobre el sistema mediante el mapeo  $g : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tal que

$$g(x_k, u_k) \geq c, \quad k = 0, \dots, N. \quad (I^c)$$

Aquí, el vector  $c \in \mathbb{R}^m$  representa el umbral bajo el cual se deben mantener, bajo el mapeo restricción  $g$ , las variables de estado y control del sistema en todo momento; por lo tanto,

denominaremos a los elementos  $c$  por **umbrales restricción**. Note que la desigualdad en  $(I^c)$  debe entenderse coordenada a coordenada.

En pos de tener una notación más simplista, a continuación daremos nombre a los conjuntos asociados a las secuencias generadas por el sistema.

- Para las secuencias de controles posibles definimos el conjunto

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} = (u_k)_{k=0}^N \mid u_0, u_1, \dots, u_N \in U \right\} \cong U^{N+1}.$$

Además, denominaremos por  $\mathfrak{U}$  al conjunto de mapeos  $\mathbf{u} : \mathbb{N} \times X \rightarrow U$ , generalmente llamados “*feedbacks*”.

- Consideremos que todas las perturbaciones pertenecen al conjunto  $\Omega$ , en cualquier instante de tiempo. Por lo anterior, la colección de todas las secuencias de perturbaciones posibles será

$$\Omega = \left\{ \omega = (w_k)_{k=0}^N \mid w_0, w_1, \dots, w_N \in \Omega \right\} \cong \Omega^{N+1}.$$

- Finalmente una secuencia de estados solución del sistema  $(D_{\xi}^{\mathbf{u}}(\omega))$  asociada a un control  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  y una incertidumbre  $\omega \in \Omega$  es un elemento del espacio

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{x} = (x_k)_{k=0}^{N+1} \mid x_0, \dots, x_{N+1} \in X \right\} \cong X^{N+2}.$$

Además, denotaremos a cada solución del sistema  $(D_{\xi}^{\mathbf{u}}(\omega))$  dependiendo de una condición inicial  $\xi$ , un control  $\mathbf{u}$  y una perturbación  $\omega$  como la secuencia  $\mathbf{x}_{\xi}^{\omega}(\mathbf{u})$ .

A continuación definiremos el elemento principal de este trabajo. Note que la posibilidad de que exista una solución al problema (dígase un control) tal que, para un número considerable de perturbaciones, se cumplan las restricciones en todo momento, depende directamente de la condición inicial y el umbral restricción. Además, estos dos elementos comparten la particularidad de ser potencialmente manipulables, dependiendo de las condiciones del problema. El análisis de los valores que puede tomar la condición inicial para un umbral fijo, es la llamada viabilidad del problema; diversos resultados en relación a este tema se encuentran en [2], como también para el caso con tiempo continuo en [3]. En nuestro caso, el enfoque de estudio será el umbral restricción.

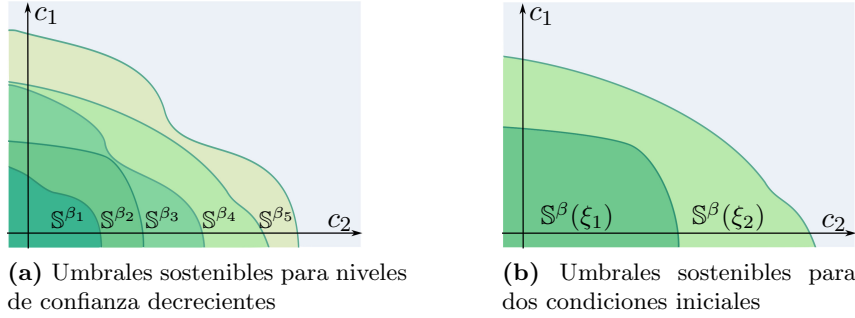
El objetivo de este trabajo es obtener una descripción útil para el conjunto de umbrales sostenibles. Dicho conjunto lo denominaremos por  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$  y reúne a todos aquellos umbrales restricción para los cuales un estado inicial  $\xi$  fijo resulta ser viable con un nivel de confianza  $\beta \in (0, 1]$ , es decir,

$$\mathbb{S}^{\beta}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \mathbb{P} \left( \omega \in \Omega \mid \mathbf{x}_{\xi}^{\omega}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \text{ satisfacen } (I^c) \right) \geq \beta \right\}.$$

En este caso,  $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad sobre el espacio  $\Omega$ , la cual permanecerá fija a lo largo del manuscrito. Algunas cualidades interesantes del conjunto de umbrales sostenibles son:

- La naturaleza de la restricción ( $I^c$ ) permite asegurar que existe una contención en los conjuntos de umbrales sostenibles al exigir un nivel de confianza menor. Esto sería, para niveles de confianza  $\beta_1 \geq \beta_2$  se tiene  $\mathbb{S}^{\beta_1}(\xi) \subseteq \mathbb{S}^{\beta_2}(\xi)$ .
- Si para dos condiciones iniciales diferentes  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , se tuviera la relación  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi_1) \subseteq \mathbb{S}^{\beta}(\xi_2)$ , entonces, conceptualmente hablando,  $\xi_2$  es mejor condición inicial que  $\xi_1$ . Esto ya que el sistema asociado a  $\xi_2$  es igual de sostenible para restricciones menos exigentes.

Lo anterior se puede ver explicado gráficamente en la Figura 1.



**Figura 1:** (a) muestra la relación  $\mathbb{S}^{\beta_1}(\xi) \subseteq \dots \subseteq \mathbb{S}^{\beta_5}(\xi)$  para  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_5$ ; (b) muestra la situación  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi_1) \subseteq \mathbb{S}^{\beta}(\xi_2)$ .

Actualmente se tienen resultados sobre aproximaciones del conjunto  $\mathbb{S}^{\beta}$ , para diferentes casos. En [4] se explicita el conjunto de umbrales en el caso de una dinámica monótona en las variables de estado y control. En [5] se expone un método para calcular la probabilidad asociada a un umbral en la definición del conjunto de umbrales sostenibles, bajo supuestos sobre la incertidumbre. Importantes son los resultados que se tienen para el caso determinista [6], el cual no considera una incertidumbre; y el caso “robusto” [1], el cual exige cumplir las restricciones para toda incertidumbre. Estos últimos resultados son el punto de partida de todo lo que veremos a continuación.

En el capítulo 1 veremos una posible adaptación del resultado relacionado al caso “robusto” de [1]. En el capítulo 2 cambiaremos el enfoque hacia una modificación de un resultado asociado a viabilidad, complementándolo con otro resultado similar al obtenido en el capítulo 1. Finalmente en el capítulo 3 veremos un ejemplo práctico aplicando los resultados obtenidos en el capítulo 2.

# Capítulo 1

## Umbrales sostenibles para sistemas dinámicos restrictos

En este capítulo hablaremos de los principales resultados expuestos en [1], los cuales hablan de un método que permite encontrar el conjunto de umbrales robusto. El caso “robusto” pide que la restricción  $(I^c)$  se cumpla para toda incertidumbre, por lo cual es más exigente que el caso de umbrales sostenibles con nivel de confianza fija. El objetivo de mencionar estos resultados es poder extenderlos, para ser aplicados al caso no robusto. Explicaremos las principales dificultades encontradas y mostraremos algunos resultados parciales que pudimos obtener al respecto.

### 1.1 Caso robusto

**Definición 1.1.1.** Denominaremos conjunto de umbrales robustos al conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ , el cual consta de todos aquellos umbrales  $c$  para los cuales existe un control  $\mathbf{u}$  tal que cualquier solución de  $(D_\xi^{\mathbf{u}}(\omega))$  cumplirá la restricción mixta  $(I^c)$ , esto es:

$$\mathbb{S}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u} \text{ satisfacen } (I^c), \forall \omega \in \Omega \right\}.$$

El caso robusto ha sido previamente estudiado en [1]; allí se expone una construcción aproximada de la frontera de Pareto débil del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ , de manera que finalmente es posible caracterizarlo. A continuación explicaremos esta metodología con el objetivo de poder utilizarla en las siguientes secciones. Comenzaremos notando la siguiente característica del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ , que justifica el poder describirlo mediante su frontera.

**Observación 1.** Tomando  $c^*, c \in \mathbb{R}^m$ , dada la estructura de la restricción  $(I^c)$ , si  $c^* \geq c$  entonces para cualquier  $\xi \in \mathbf{X}$  se tiene que

$$c^* \in \mathbb{S}(\xi) \implies c \in \mathbb{S}(\xi).$$

Lo anterior quiere decir que  $\mathbb{S}(\xi) = \mathbb{S}(\xi) + \mathbb{R}_-^m$ , por lo que es posible caracterizar al conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$  por su frontera, y en particular por su frontera superior de Pareto débil, la cual definiremos a continuación.

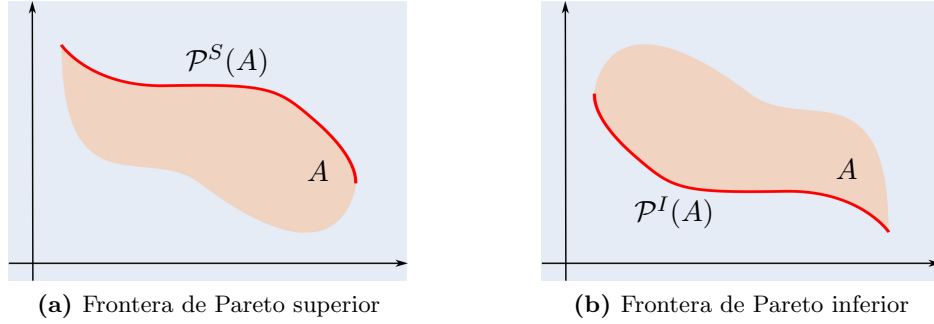
**Definición 1.1.2.** Para un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  se define su frontera de Pareto débil inferior como

$$\mathcal{P}^I(A) := \left\{ c \in A : \forall c' \in A, \exists i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } c_i \leq c'_i \right\},$$

y su frontera de Pareto débil superior como

$$\mathcal{P}^S(A) := \left\{ c \in A : \forall c' \in A, \exists i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } c_i \geq c'_i \right\}.$$

Además, se llamarán mínimos y máximos de Pareto a los elementos de las fronteras de Pareto débil inferior y superior, respectivamente.



Para adaptarnos a los resultados que mencionaremos y también aquellos nuevos de la siguiente sección, se requiere el cumplimiento de supuestos sobre el sistema formado por  $(D_\xi^u(\omega))$  y  $(I^c)$ .

**Supuestos 1.** Los siguientes ítem son supuestos a mantener por el resto de este capítulo.

- 1.1  $X$  será un espacio vectorial normado de dimensión finita.
- 1.2  $F(\cdot, \cdot, w)$  es continua en  $X \times U$ , para todo  $w \in \Omega$ .
- 1.3 Las restricciones  $g_i : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  son semi-continuas superior, para todo  $i = 1, \dots, m$ .
- 1.4  $U \subseteq \mathbb{R}^l$  es un conjunto compacto.

Los supuestos recién definidos resultan importantes para asegurar la compacidad del conjunto de trayectorias solución de la dinámica  $(D_\xi^u(\omega))$  con restricción  $(I^c)$ , como se describe en [6] y [1].

El objetivo a continuación es describir el conjunto de umbrales robusto mediante su frontera de Pareto débil superior. Para obtener ese resultado es que definimos la siguiente “distancia” hacia la frontera. Se define entonces la función  $W_\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$W_\xi(c) := \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_k) \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\},$$

donde,

$$\Phi_W(c; x, u) := \min_{i=1, \dots, m} (g_i(x, u) - c_i).$$

**Observación 2.** *El máximo se alcanza en la definición de  $W_\xi$  ya que se trata de una maximización de funciones semi-continuas superiores en un conjunto compacto gracias a los Supuestos 1.*

A continuación se enuncia el resultado principal de esta sección, que relaciona  $W_\xi$  con la frontera de Pareto superior débil del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ .

**Teorema 1.1.1.** *Para todo  $c^*, \bar{c} \in \mathbb{R}^m$ , se tiene que*

1.  *$c^*$  pertenece a la frontera de Pareto débil superior de los umbrales robustos,  $\mathcal{P}^S(\mathbb{S}(\xi))$ , si y sólo si  $W_\xi(c^*) = 0$ .*
2. *Si  $W_\xi(\bar{c}) < 0$ , entonces*

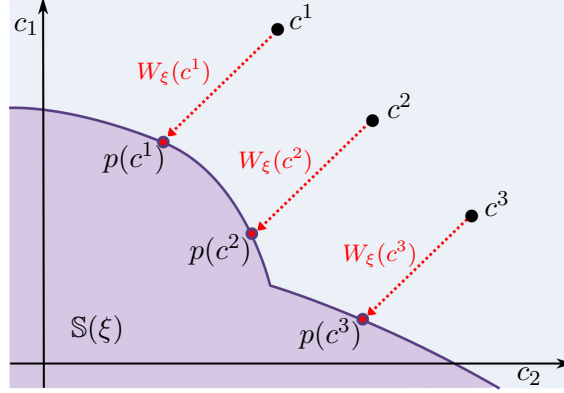
$$p(\bar{c}) := \bar{c} + W_\xi(\bar{c}) \vec{\mathbf{1}}$$

*es un máximo de Pareto débil de  $\mathbb{S}(\xi)$ .*<sup>1</sup>

El inciso 1 del Teorema nos permite saber si un elemento pertenece o no a la frontera de Pareto, mientras que el inciso 2 permite construir un algoritmo para encontrar estos elementos. La idea general de este algoritmo se puede ver en la Figura 1.1, donde se toman umbrales  $c$  lo suficientemente grandes tales se pueda asegurar estar fuera del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ , para luego proyectarlos a  $\mathcal{P}^S(\mathbb{S}(\xi))$ .

---

<sup>1</sup>Donde  $\vec{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}) \in \mathbb{R}^m$ .



**Figura 1.1:** Algoritmo relacionado al inciso 2 del Teorema 1.1.1

El cálculo de la función  $W_\xi(c)$  puede llegar a ser complicado computacionalmente. Al incrementar el horizonte  $N$ , el problema de optimización incrementa su dimensión exponencialmente; por lo cual resulta conveniente utilizar programación dinámica para resolverlo, como se expone a continuación. Definamos para cada  $n \in \{0, \dots, N\}$  la función valor

$$\mathcal{W}_n^c(\xi) := \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \min_{k=n, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_k) \mid x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k), k \in \{n, \dots, N\}, x_n = \xi \right\}.$$

Note que  $W_\xi(c) = \mathcal{W}_0^c(\xi)$ .

**Proposición 1.1.1.** *Para cualquier  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$  y  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tenemos*

$$\mathcal{W}_n^c(\xi) = \max_{u \in U} \min \left\{ \Phi_W(c; \xi, u), \min_{w \in \Omega} \mathcal{W}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\}. \quad (1.1)$$

$$\text{y } \mathcal{W}_N^c(\xi) = \max_{u \in U} \Phi_W(c; \xi, u).$$

Teniendo en cuenta los resultados recién expuestos, es natural pensar en extenderlos al caso estocástico con nivel de seguridad  $\beta$ . A continuación veremos una forma intuitiva de realizar lo anterior que nos permite entender de otra manera el problema.

## 1.2 Adaptación para el caso estocástico

A continuación veremos cómo es posible obtener un resultado similar al del Teorema 1.1.1 pero adaptado al caso  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ . Para comenzar, notamos que la observación 1 también existe para la versión estocástica, por lo cual es posible describir al conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  si se conoce su frontera.

**Observación 3.** Tomando  $c^*, c \in \mathbb{R}^m$ , dada la estructura de la restricción ( $I^c$ ), si  $c^* \geq c$  entonces para cualquier  $\xi \in \mathbf{X}$  se tiene que

$$c^* \in \mathbb{S}^\beta(\xi) \implies c \in \mathbb{S}^\beta(\xi).$$

Lo anterior quiere decir que  $\mathbb{S}^\beta(\xi) = \mathbb{S}^\beta(\xi) + \mathbb{R}_-^m$ , por lo que es posible caracterizar al conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  por su frontera, y en particular por su frontera de Pareto débil superior.

Recordando la sección anterior, la función  $W_\xi$  calcula una distancia hacia el conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ . Para poder expresar el mismo tipo de función en el caso estocástico, consideramos aquellos conjuntos contenidos dentro de las incertidumbres que tengan probabilidad al menos  $\beta$ . Lo anterior motivado por el hecho que, para un umbral fijo y algún control, el exigir que la restricción se cumpla para cualquier incertidumbre que pertenezca a uno de esos conjuntos con probabilidad mayor a  $\beta$ , nos asegura que ese umbral pertenece a  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ . Para obtener los resultados esperados definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{P}_\beta(\Omega) := \{\Omega_\beta \subseteq \Omega : \mathbb{P}(\Omega_\beta) \geq \beta\}.$$

Luego, para cada  $\Omega_\beta \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)$  definimos

$$S_\xi(\Omega_\beta) := \left\{ c \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u} \text{ satisfacen } (I^c), \forall \omega \in \Omega_\beta \right\}.$$

Esta definición permite utilizar los resultados de la sección anterior considerando un espacio reducido de perturbaciones,  $\Omega_\beta$ , en vez de todo el espacio. Además, existe una clara relación entre los conjuntos  $S_\xi$  y el conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  que permite obtener la conclusión esperada, la cual se observa a continuación.

**Observación 4.** Se tiene lo siguiente

$$\mathbb{S}^\beta(\xi) = \bigcup_{\Omega_\beta \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)} S_\xi(\Omega_\beta).$$

Definamos el elemento que permitirá encontrar elementos en la frontera de Pareto del conjunto de umbrales sostenibles. Para cada  $\Omega_\beta \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)$  definimos,

$$\mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta) := \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega_\beta} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_k) \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\}.$$

**Observación 5.** Note que el máximo se alcanza en  $\mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta)$  puesto que el ínfimo sobre todas las perturbaciones  $\omega \in \Omega_\beta$  se toma en una función semi-continua superior, por lo que resulta también ser semi-continua superior. Además, se tiene como supuesto que el conjunto de controles  $\mathbf{U}$  es compacto.

La siguiente proposición muestra la relación entre los conjuntos  $S_\xi$  y la función  $\mathcal{M}_\xi^\beta$  y será de utilidad.

**Proposición 1.2.1.** *Se tiene lo siguiente*

$$\mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta) \geq 0 \iff c \in S_\xi(\Omega_\beta). \quad (1.2)$$

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta) \geq 0$  y sea  $\mathbf{u}_\beta \in \mathbf{U}$  el elemento donde se alcanza el máximo en  $\mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta)$ . Notemos que

$$\inf_{\omega \in \Omega_\beta} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_{\beta_k}) \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}_\beta) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\} \geq 0,$$

con lo cual

$$\min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_{\beta_k}) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_\beta.$$

Se concluye entonces que  $c \in S_\xi(\Omega_\beta)$ . Supongamos ahora que  $c \in S_\xi(\Omega_\beta)$ . Luego, existe  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  tal que

$$\min_{k=0, \dots, N} \min_{i=1, \dots, m} g_i(x_k, u_k) - c_i \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_\beta,$$

con lo cual

$$\inf_{\omega \in \Omega_\beta} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_{\beta_k}) \right\} \geq 0,$$

y se concluye. □

Utilizando las funciones  $\mathcal{W}_\xi^\beta$  intentaremos definir una función distancia al conjunto de umbrales sostenibles, análoga a la función  $W_\xi$ . Esta función cumplirá también una relación similar a la obtenida en la Proposición 2.1.1, lo cual veremos a continuación. Definamos,

$$W_\xi^\beta(c) := \sup_{\Omega_\beta \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)} \mathcal{W}_\xi^\beta(c; \Omega_\beta)$$

y se tiene entonces el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $c \in \mathbb{R}^m$ . Si  $W_\xi^\beta(c) \geq 0$ , entonces  $c \in \overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $W_\xi^\beta(c) \geq 0$ . Por definición de supremo se tiene que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\Omega_\beta \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)$  tal que

$$W_\xi^\beta(c; \Omega_\beta) \geq -\varepsilon.$$

Siendo  $\mathbf{u}_\beta \in \mathbf{U}$  el elemento donde se alcanza el máximo en  $W_\xi^\beta(c; \Omega_\beta)$ , lo anterior implica que

$$\inf_{\omega \in \Omega_\beta} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c; x_k, u_{\beta_k}) \right\} \geq -\varepsilon,$$

y por ende

$$\inf_{\omega \in \Omega_\beta} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c - \varepsilon \vec{\mathbf{1}}; x_k, u_{\beta_k}) \right\} \geq 0.$$

Luego, por (1.2) se obtiene que  $c - \varepsilon \vec{\mathbf{1}} \in S^\beta(\Omega_\beta) \subseteq \mathbb{S}^\beta(\xi)$ . Por lo tanto,  $c - \varepsilon \vec{\mathbf{1}} \in \mathbb{S}^\beta(\xi)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , se concluye  $c \in \overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$ .  $\square$

Los resultados anteriores permiten obtener lo siguiente, similar al Teorema 1.1.1.

**Teorema 1.2.1.** *Para todo  $c^*, \bar{c} \in \mathbb{R}^m$ , se tiene que*

1. Si  $W_\xi^\beta(c^*) = 0$ , entonces  $c^*$  pertenece a la frontera de Pareto débil superior de  $\overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$ .
2. Si  $W_\xi^\beta(\bar{c}) < 0$ , entonces

$$p(\bar{c}) := \bar{c} + W_\xi^\beta(\bar{c}) \vec{\mathbf{1}}$$

es un máximo de Pareto débil de  $\overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$ .

*Demostración.* 1. Tenemos que  $W_\xi^\beta(c^*) = 0$ . Por Proposición 1.2.2 se tiene que  $c^* \in \overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$ . Supongamos por contradicción que existe  $c \in \overline{\mathbb{S}^\beta(\xi)}$  tal que  $c > c^*$ . Como  $c$  está en la cerradura del conjunto de umbrales sostenibles, se tiene que existe una sucesión  $(c_n)_n \subset \mathbb{S}^\beta(\xi)$  tal que  $c_n \rightarrow c$ . Luego, para cada  $c_n \in \mathbb{S}^\beta(\xi)$  existen  $\mathbf{u}_n \in \mathbf{U}$  y un conjunto  $\Omega_{\beta_n} \in \mathcal{P}_\beta(\Omega)$  tales que

$$g(x_k, u_{n,k}) \geq c, \quad \forall k = 0, \dots, N, \quad \forall \omega \in \Omega_{\beta_n}, \quad (1.3)$$

donde  $(x_k)_{k=0}^{N+1} = \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}_n)$ . Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} 0 = W_\xi^\beta(c^*) &\geq \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega_{\beta_n}} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c^*; x_k, u_k) \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\} \\ &\geq \inf_{\omega \in \Omega_{\beta_n}} \left\{ \min_{k=0, \dots, N} \Phi_W(c^*; x_k, u_{n,k}) \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}_n) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\} \\ &\stackrel{(1.3)}{\geq} \min_{i=1, \dots, m} c_{n,i} - c_i^*, \end{aligned}$$

$$\therefore \min_{i=1, \dots, m} c_{n,i} - c_i^* \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Por otra parte notemos que

$$c_n \rightarrow c \implies c_{n,i} - c_i^* \rightarrow c_i - c_i^*,$$

y como  $c_i - c_i^* > 0$ , entonces para cada  $i = 1, \dots, m$  existe  $N_i \in \mathbb{N}$  tal que

$$c_{n,i} - c_i^* > 0, \quad \forall n \geq N_i.$$

Por lo tanto, definiendo  $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$  se tiene que

$$c_n - c^* > 0, \forall n \geq N,$$

lo cual es una contradicción con (1.4).

2. El resultado viene del hecho que

$$M_\xi^\beta(p(\bar{c})) = M_\xi^\beta(\bar{c}) - M_\xi^\beta(\bar{c}) = 0,$$

con lo cual se concluye al aplicar el inciso 1. del Teorema.

□

Como pudimos ver, el resultado de la sección anterior es extensible, pero no completamente. La dificultad viene en la demostración de la implicancia contraria del inciso 1 del teorema. Además, es importante recalcar que incluso teniendo el resultado del inciso 2, el cual por sí sólo permite describir la frontera del conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ , de todas maneras aproximar  $W_\xi^\beta(c)$  no sería tarea sencilla. Lo anterior puesto que trabajar con el conjunto  $\mathcal{P}_\beta(\Omega)$ , en la gran mayoría de casos, es un problema altamente complejo.

En el siguiente capítulo veremos un enfoque diferente para obtener una descripción de la frontera de  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ , que resulta aplicable a una gran cantidad de casos.

## Capítulo 2

# Aproximación del conjunto de umbrales sostenibles

En este capítulo veremos un resultado importante sobre el *kernel de viabilidad* [2], el cual puede ser extendido a nuestro problema. Este resultado permite identificar si un umbral pertenece o no al conjunto de umbrales sostenibles de nivel  $\beta$ . Además, se expondrá una modificación del resultado de la Sección 1.1, que permitirá encontrar una forma de localizar donde se encuentra el conjunto de umbrales sostenibles.

### 2.1 Extensión de resultado de Viabilidad

Definimos el kernel de viabilidad  $\mathbb{V}^\beta(c)$  para un umbral  $c$ , como el conjunto de todos aquellos estados iniciales  $\xi$  tales que existe un control para el cual la restricción  $(I^c)$  se cumple con un nivel de confianza  $\beta \in (0, 1]$ , es decir,

$$\mathbb{V}^\beta(c) = \left\{ \xi \in X \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u} \text{ satisfacen } (I^c)\right) \geq \beta \right\}.$$

Actualmente se tienen resultados sobre aproximaciones para encontrar este conjunto, principalmente en [2]. Existe una dualidad entre el kernel de viabilidad y los umbrales sostenibles, la cual viene dada por la relación

$$\xi \in \mathbb{V}^\beta(c) \iff c \in \mathbb{S}^\beta(\xi).$$

Producto de esta relación es posible adaptar ciertos resultados de un problema al otro. A continuación obtendremos una expresión que permite describir al conjunto  $\mathbb{S}^\beta$ , mediante una adaptación de [2](Capítulo 7, Sección 7.5).

**Definición 2.1.1.** Para cada  $c \in \mathbb{R}^m$  definimos

$$A(c) := \{(x, u) \in X \times U : g(x, u) \geq c\},$$

y la siguiente función valor estocástica<sup>1</sup> de manera recursiva

$$\begin{cases} V_N^c(x) = \sup_{u \in U} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u), \\ V_n^c(x) = \sup_{u \in U} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) \mathbb{E}_w [V_{n+1}^c(F(x, u, w))], \end{cases} \quad (2.1)$$

para  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Por simplicidad asumiremos que  $\omega \in \Omega$  es una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.). El resultado que relaciona la función valor antes definida con el conjunto de umbrales sostenibles se enuncia a continuación.

**Proposición 2.1.1.** *Supongamos que existe un feedback óptimo para la programación dinámica (2.1). Entonces, un umbral  $c \in \mathbb{R}^m$  pertenece al conjunto de umbrales sostenibles con nivel de confianza  $\beta$  si la condición inicial  $\xi$  pertenece al conjunto de nivel superior  $\beta$  de la función valor estocástica:*

$$c \in \mathbb{S}^\beta(\xi) \iff V_0^c(\xi) \geq \beta.$$

Antes de realizar la demostración es necesario construir algunas herramientas que serán de utilidad. Definamos el operador  $\pi^u : \mathbb{N} \times X \times \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  como

$$\pi^u(n, x, \omega) := \prod_{k=n}^N \mathbf{1}_{A(c)}(x_k, u_k), \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{u} \in \mathfrak{U}$ ,  $x_n = x$ ,  $u_k = \mathbf{u}_k(x_k)$  y  $x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k)$ , para todo  $k \in \{n, \dots, N\}$ ; siendo  $\mathfrak{U}$  el conjunto de mapeos  $\mathbf{u} : \mathbb{N} \times X \rightarrow U$ . También definamos a partir de lo anterior,

$$\pi_{\mathbb{E}}^u(n, x) := \mathbb{E}_\omega [\pi^u(n, x, \omega)].$$

**Observación 6.** *Para cada  $\mathbf{u} \in \mathfrak{U}$ ,  $x \in X$  y  $n = 0, \dots, N$  definamos  $u_n = \mathbf{u}_n(x)$  y notemos que se tiene lo siguiente:*

$$\begin{cases} \pi_{\mathbb{E}}^u(N, x) = \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_N), \\ \pi_{\mathbb{E}}^u(n, x) = \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n) \cdot \mathbb{E}_w \left[ \pi_{\mathbb{E}}^u(n+1, F(x, u_n, w)) \right]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lo anterior es directo de concluir puesto que  $\pi^u(N, \cdot, \cdot)$  no depende de la perturbación  $w$  y  $\pi^u(n, \cdot, \cdot)$  depende solamente de  $(w_n, w_{n+1}, \dots, w_N)$ .

El siguiente lema es la última herramienta necesaria para proceder con la demostración de la Proposición 2.2.1.

---

<sup>1</sup>Entiéndase  $\mathbf{1}_A$  como la función indicatriz del conjunto  $A$ , esto es,  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  si  $x \in A$  y  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  en otro caso.

**Lema 2.1.1.** *Supongamos que existe un feedback óptimo  $\mathbf{u}^* \in \mathfrak{U}$  respecto a la programación dinámica (2.1), es decir,*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_N^*(x) \in \arg \max_{u \in U} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u), \\ \mathbf{u}_n^*(x) \in \arg \max_{u \in U} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) \mathbb{E}_w [V_{n+1}^c(F(x, u, w))], \end{cases} \quad (2.4)$$

para todo  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . Entonces, para todo  $x \in X$  y  $n \in \{0, \dots, N\}$  se tendrá que

$$\pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(n, x) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n, x) = V_n^c(x).$$

*Demostración.* Para probar lo anterior procedamos por inducción hacia atrás. En el caso  $n = N$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(N, x) &= \mathbb{E}_\omega [\pi^{\mathbf{u}^*}(N, x, \omega)] \\ &= \mathbf{1}_{A(c)}(x, \mathbf{u}_N^*(x)) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \sup_{u \in \mathbf{U}} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) = V_N^c(x) \\ &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(N, x). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que

$$\pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(n+1, x) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n+1, x) = V_{n+1}^c(x). \quad (2.5)$$

Note que, considerando la Observación 6 y  $u_n^* = \mathbf{u}_n^*(x)$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(n, x) &\stackrel{(2.3)}{=} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n^*) \mathbb{E}_w \left[ \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(n+1, F(x, u_n^*, w)) \right] \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n^*) \mathbb{E}_w \left[ V_{n+1}^c(F(x, u_n^*, w)) \right] \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \sup_{u \in \mathbf{U}} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) \mathbb{E}_w \left[ V_{n+1}^c(F(x, u, w)) \right] \\ &= V_n^c(x). \end{aligned}$$

Es más, para cualquier *feedback*  $\mathbf{u} \in \mathfrak{U}$ ,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n, x) &\stackrel{(2,3)}{=} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n) \mathbb{E}_w \left[ \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n+1, F(x, u_n, w)) \right] \\
&\leq \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n) \mathbb{E}_w \left[ \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n+1, F(x, u_n, w)) \right] \\
&\stackrel{(2,5)}{=} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u_n) \mathbb{E}_w \left[ V_{n+1}^c(F(x, u_n, w)) \right] \\
&\leq \sup_{u \in \mathbf{U}} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) \mathbb{E}_w \left[ V_{n+1}^c(F(x, u, w)) \right] \\
&= V_n^c(x),
\end{aligned}$$

con lo cual tomando supremo se obtiene

$$\sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(n, x) \leq V_n^c(x) = \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(n, x),$$

y se concluye. □

*Demostración Proposición 2.1.1.* Tomemos  $c \in \mathbb{S}^\beta(\xi)$ , y tendremos que existe  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  tal que

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\bar{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{u}} \text{ satisfacen } (I^c)\right) \geq \beta.$$

Considerando la definición del conjunto  $A(c)$  y que la secuencia de perturbaciones  $\omega = (w_0, \dots, w_N)$  es tal que  $w_n$  son i.i.d, entonces la probabilidad anterior se puede escribir como

$$\beta \leq \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega \mid (x_k, \bar{u}_k) \in A(c), \forall k \in \{0, \dots, N\}\right) = \mathbb{E}_\omega \left[ \prod_{k=0}^N \mathbf{1}_{A(c)}(x_k, \bar{u}_k) \right].$$

Definamos el *feedback*  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathfrak{U}$  tal que  $\bar{u}_n(x) = \bar{u}_n$  para todo  $x \in X$ . Entonces, lo anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\beta &\leq \mathbb{E}_\omega \left[ \prod_{k=0}^N \mathbf{1}_{A(c)}(x_k, \bar{u}_k) \right] \\
&= \mathbb{E}_\omega \left[ \pi^{\bar{\mathbf{u}}}(0, \xi, \omega) \right] = \pi_{\mathbb{E}}^{\bar{\mathbf{u}}}(0, \xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando lo obtenido en el Lema 2.1.1 se concluye que

$$\pi_{\mathbb{E}}^{\bar{\mathbf{u}}}(0, \xi) \geq \beta \implies V_0^c(\xi) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}}(0, \xi) \geq \beta.$$

Supongamos ahora que  $V_0^c(\xi) \geq \beta$  y sea  $\mathbf{u}^* \in \mathfrak{U}$  un *feedback* óptimo de la programación dinámica (2.1). El Lema 2.1.1 dice entonces que

$$\pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(0, \xi) = V_0^c(\xi) \geq \beta.$$

Entonces, se tendrá que

$$\begin{aligned} \beta \leq \pi_{\mathbb{E}}^{\mathbf{u}^*}(0, \xi) &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \mathbb{E}_{\omega} \left[ \prod_{k=0}^N \mathbf{1}_{A(c)}(x_k, \mathbf{u}_k(x_k)) \right] \\ &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathfrak{U}} \mathbb{P} \left( \omega \in \Omega \mid (x_k, \mathbf{u}_k(x_k)) \in A(c), \forall k \in \{0, \dots, N\} \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \mathbb{P} \left( \omega \in \Omega \mid (x_k, u_k) \in A(c), \forall k \in \{0, \dots, N\} \right) \end{aligned}$$

y por lo tanto,  $c \in \mathbb{S}^{\beta}(\xi)$ . □

## 2.2 Umbrales no sostenibles

Considerando el resultado expuesto en la sección anterior, ahora somos capaces de identificar si un umbral  $c \in \mathbb{R}^m$  pertenece al conjunto de umbrales sostenibles de nivel  $\beta$  o no. Por si solo este resultado es bastante útil, pero podría ser aún más sencillo acotar el espacio de umbrales sostenibles conociendo el siguiente conjunto.

**Definición 2.2.1.** Denominaremos conjunto de umbrales no sostenibles a todos aquellos  $c \in \mathbb{R}^m$  tales que no importa con qué control ni con qué perturbación se genere la secuencia de estados  $\mathbf{x}_{\xi}^{\omega}(\mathbf{u})$ , ésta nunca será capaz de satisfacer las restricciones:

$$\mathbb{U}(\xi) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \mid \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \omega \in \Omega, \mathbf{x}_{\xi}^{\omega}(\mathbf{u}) \text{ y } \mathbf{u} \text{ no satisfacen } (I^c) \right\}. \quad (2.6)$$

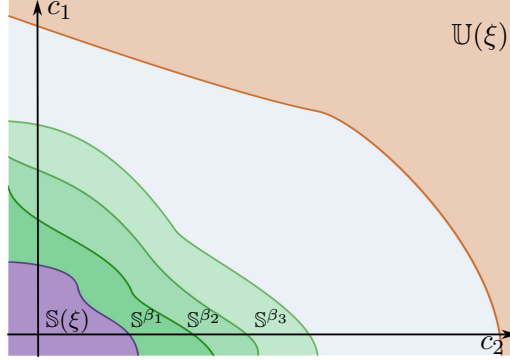
**Observación 7.** Es claro que para cualquier condición inicial  $\xi$  y nivel de confianza  $\beta$  se tendrá

$$\mathbb{S}(\xi) \subseteq \mathbb{S}^{\beta}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{U}(\xi).$$

Lo anterior nos permite encontrar una franja de valores entre los cuales se encuentra la frontera de  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$ , justamente entre la frontera inferior de  $\mathbb{U}(\xi)$  y superior de  $\mathbb{S}(\xi)$  (ver Figura 2.1). Además, se tiene la relación

$$\mathbb{U}(\xi) = \mathbb{U}(\xi) + \mathbb{R}_+^m,$$

por lo que es posible definir  $\mathbb{U}(\xi)$  por su frontera de Pareto inferior débil.



**Figura 2.1:** Relación entre los conjuntos  $\mathbb{S}(\xi)$ ,  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  y  $\mathbb{U}(\xi)$ .

**Supuestos 2.** *Los siguientes ítem son supuestos a mantener por el resto de este capítulo.*

2.1  $X$  será un espacio vectorial normado de dimensión finita.

2.2  $F : X \times U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en todas sus variables.

2.3 Las restricciones  $g_i : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, para todo  $i = 1, \dots, m$ .

2.4  $U \subseteq \mathbb{R}^l$  y  $\Omega$  son conjuntos compactos.

El resultado expuesto en la Sección 1.1 es adaptado a continuación para el caso no sostenible. Específicamente, utilizando la frontera de Pareto débil inferior es posible describir el conjunto  $\mathbb{U}(\xi)$ . Para realizar lo anterior definimos la siguiente función “distancia” hacia la frontera inferior del conjunto.

**Definición 2.2.2.** Definimos la función  $M_\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$M_\xi(c) := \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=0, \dots, N} \left[ \max_{i=1, \dots, m} c_i - g_i(x_k, u_k) \right] \mid \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}) = (x_k)_{k=0}^{N+1} \right\}.$$

Definamos también por simplicidad

$$Q(c; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \max_{k=0, \dots, N} \left[ \max_{i=1, \dots, m} c_i - g_i(x_k, u_k) \right].$$

**Observación 8.** *Para obtener un resultado similar al del Teorema 1.1.1, es necesario exigir que los ínfimos se alcancen en  $M_\xi(c)$ . Por lo anterior es que se tiene los Supuestos 2, los cuales implican la compacidad de los conjuntos  $\mathbf{U}$  y  $\Omega$ . Entonces, podemos asegurar que se tienen mínimos en vez de ínfimos ya que tanto la dinámica  $F$  como la restricción  $g$  son continuas en todas sus variables y por ende el mapeo  $(\mathbf{u}, \omega) \mapsto Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u})$  resulta ser continuo. Por lo tanto se tendrá*

$$M_\xi(c) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}).$$

**Lema 2.2.1.** *Se tiene lo siguiente*

$$c \in \mathbb{U}(\xi) \iff M_\xi(c) > 0. \quad (2.7)$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $M_\xi(c) > 0$ ; luego, para todo  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  y todo  $\omega \in \mathbf{\Omega}$  se tiene

$$\max_{k=0,\dots,N} \left[ \max_{i=1,\dots,m} c_i - g_i(x_k, u_k) \right] = Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) > 0.$$

Lo anterior implica que existen  $i_c \in \{1, \dots, m\}$  y  $k_c \in \mathbb{N}$  tales que

$$c_{i_c} > g_{i_c}(x_{k_c}, u_{k_c}),$$

con lo cual no se cumple la restricción  $(I^c)$  y por ende  $c \in \mathbb{U}(\xi)$ .

Supongamos que  $c \in \mathbb{U}(\xi)$ . Por contradicción asumamos que  $M_\xi(c) \leq 0$ , con lo cual existen  $\mathbf{u}' \in \mathbf{U}$  y  $\omega' \in \mathbf{\Omega}$  tales que

$$M_\xi(c) = Q(c; \mathbf{x}_\xi(\mathbf{u}', \omega'), \mathbf{u}') = \max_{k=0,\dots,N} \left[ \max_{i=1,\dots,m} c_i - g_i(x'_k, u'_k) \right] \leq 0.$$

Por lo tanto, para todo  $k \in \{1, \dots, N\}$  se tiene  $g(x'_k, u'_k) \geq c$ . Es decir,  $\mathbf{x}_\xi(\mathbf{u}', \omega')$  y  $\mathbf{u}'$  cumplen la restricción  $(I^c)$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Se tiene lo siguiente*

$$c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)} \iff M_\xi(c) \geq 0. \quad (2.8)$$

*Demostración.* Sea  $c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$ ; entonces, existe una sucesión  $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}(\xi)$  tal que  $c_j \rightarrow c$ . Dado que  $c_j \in \mathbb{U}(\xi)$ , por (2.7) se tiene  $M_\xi(c_j) > 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Note que la función  $M_\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es semi-continua superior (s.c.s.) al ser ínfimo de funciones s.c.s., lo cual implica la conclusión pues

$$M_\xi(c) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} M_\xi(c_j) \geq 0.$$

Supongamos ahora que  $M_\xi(c) \geq 0$ . En el caso de la desigualdad estricta,  $M_\xi(c) > 0$ , la conclusión se obtiene directamente de (2.7). Por lo tanto, consideremos

$$M_\xi(c) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \mathbf{\Omega}} Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , note que

$$\begin{aligned} M_\xi(c + \varepsilon \vec{\mathbf{1}}) &= \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \mathbf{\Omega}} Q(c + \varepsilon \vec{\mathbf{1}}; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \\ &= \left( \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \mathbf{\Omega}} Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \right) + \varepsilon \\ &= M_\xi(c) + \varepsilon = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el resultado (2.7) se obtiene  $c + \varepsilon \vec{\mathbf{1}} \in \mathbb{U}(\xi)$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Finalmente tomamos  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  y se concluye  $c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$ .  $\square$

A continuación se enuncia el resultado principal de esta sección, que relaciona  $M_\xi$  con la frontera de Pareto inferior débil del conjunto  $\mathbb{U}(\xi)$ .

**Teorema 2.2.3.** *Para todo  $c^*, \bar{c} \in \mathbb{R}^m$ , se tiene que*

1.  $c^*$  pertenece a la frontera de Pareto débil inferior de los umbrales no-controlables,  $\mathcal{P}^I(\overline{\mathbb{U}(\xi)})$ , si y sólo si  $M_\xi(c^*) = 0$ .

2. Si  $M_\xi(\bar{c}) < 0$ , entonces

$$p(\bar{c}) := \bar{c} - M_\xi(\bar{c}) \vec{\mathbf{1}}$$

es un mínimo de Pareto débil de  $\overline{\mathbb{U}(\xi)}$ .<sup>2</sup>

*Demostración.* 1. Supongamos que  $c^*$  pertenece a la frontera de Pareto débil inferior de  $\overline{\mathbb{U}(\xi)}$ . Luego,  $c^*$  pertenece a  $\overline{\mathbb{U}(\xi)}$  y por (2.8) se obtiene que

$$M_\xi(c^*) \geq 0.$$

Supongamos por contradicción que  $M_\xi(c^*) > 0$  y definamos

$$c := c^* - \frac{1}{2} M_\xi(c^*) \vec{\mathbf{1}}.$$

Note lo siguiente

$$\begin{aligned} M_\xi(c) &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \\ &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} \max_{k=0, \dots, N} \left[ \max_{i=1, \dots, m} c_i - g_i(x_k, u_k) \right] \\ &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} \max_{k=0, \dots, N} \left[ \max_{i=1, \dots, m} \max_{k=0, \dots, N} c_i^* - \frac{1}{2} M_\xi(c^*) - g_i(x_k, u_k) \right] \\ &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} \max_{k=0, \dots, N} \left[ \max_{i=1, \dots, m} c_i^* - g_i(x_k, u_k) \right] - \frac{1}{2} M_\xi(c^*) \\ &= \frac{1}{2} M_\xi(c^*) \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, por (2.8) se tiene que  $c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$ . Lo anterior implica que  $c^*$  no es un mínimo de Pareto débil, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que  $M_\xi(c^*) = 0$ . Entonces, por (2.7) se tiene que  $c^* \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$ . Asumamos por contradicción que existe  $c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$  tal que  $c < c^*$ . Como  $c \in \overline{\mathbb{U}(\xi)}$ ,

---

<sup>2</sup>Donde  $\vec{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}) \in \mathbb{R}^m$ .

entonces para todo  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  y todo  $\omega \in \Omega$  se tiene  $Q(c; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \geq 0$ . Esto es, existen  $k_c$  e  $i_c$  tales que <sup>3</sup>

$$c_{i_c} \geq g_{i_c}(x_{k_c}, u_{k_c}),$$

con lo cual, considerando  $\mathbf{u}^*$  y  $\omega^*$  como los argumentos mínimos de  $M_\xi(c^*)$  tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = M_\xi(c^*) &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} Q(c^*; \mathbf{x}_\xi^\omega(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \\ &= Q(c^*; \mathbf{x}_\xi^{\omega^*}(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^*) \\ &\geq c_{i_{c^*}}^* - g_{i_{c^*}}(x_{k_{c^*}}, u_{k_{c^*}}) \\ &\geq c_{i_{c^*}}^* - c_{i_{c^*}}. \end{aligned}$$

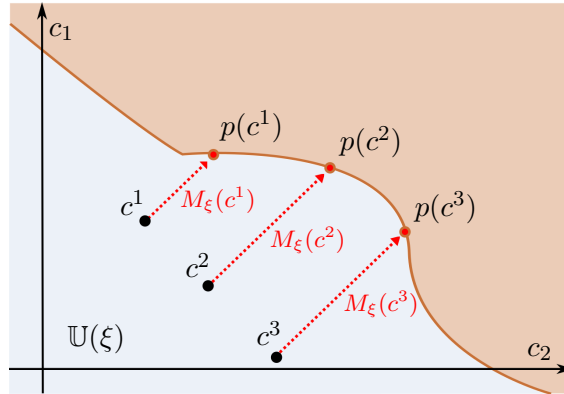
Por lo tanto, existe un  $i_{c^*}$  tal que  $c_{i_{c^*}}^* \leq c_{i_{c^*}}$ , lo cual es una contradicción

2. El resultado viene del hecho que

$$M_\xi(p(\bar{c})) = M_\xi(\bar{c}) - M_\xi(\bar{c}) = 0,$$

con lo cual se concluye al aplicar el inciso 1 del Teorema. □

El inciso 1 del Teorema nos permite saber si un elemento pertenece o no a la frontera de Pareto, mientras que el inciso 2 permite construir un algoritmo para encontrar estos elementos. La idea general de este algoritmo se puede ver en la Figura 2.2, donde se toman umbrales  $c$  lo suficientemente pequeños tales se pueda asegurar estar fuera del conjunto  $\mathbb{U}(\xi)$ , para luego proyectarlos a  $\mathcal{P}^S(\overline{\mathbb{U}(\xi)})$ . En el siguiente capítulo se explicará a detalle el funcionamiento de este algoritmo y se entregará un ejemplo aplicado a un problema concreto.



**Figura 2.2:** Algoritmo relacionado al inciso 2 del Teorema 2.2.3

---

<sup>3</sup>Note que  $i_c$  y  $k_c$  dependen de  $\mathbf{u}$  y  $\omega$ .

El calculo de la función  $M_\xi(c)$  puede llegar a ser complicado computacionalmente, por lo cual resulta conveniente utilizar programación dinámica para resolverlo, como se expone a continuación.

Definamos para cada  $n \in \{0, \dots, N\}$  la función valor

$$\mathcal{M}_n^c(\xi) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, u_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k), \\ k \in \{n, \dots, N\}, \\ x_n = \xi \end{array} \right. \right\},$$

donde para  $x \in X$ ,  $u \in U$

$$\Phi_M(c; x, u) = \max_{i=1, \dots, m} (c_i - g_i(x, u)).$$

Note que  $M_\xi(c) = \mathcal{M}_0^c(\xi)$ .

**Observación 9.** *El mínimo se alcanza en  $\mathcal{M}_n^c(\xi)$  por los mismos argumentos explicados en la Observación 8. Además,  $\mathcal{M}_n^c$  será continua puesto que toma ínfimos sobre funciones continuas en espacios compactos.*

**Proposición 2.2.1.** *Para cualquier  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$  y  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tenemos*

$$\mathcal{M}_n^c(\xi) = \min_{u \in U} \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\}. \quad (2.9)$$

$$\text{y } \mathcal{M}_n^c(\xi) = \min_{u \in U} \Phi_M(c; \xi, u).$$

*Demostración.* Procedamos por inducción hacia atrás, con el caso  $N$ . Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N^c(\xi) &= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \min_{\omega \in \Omega} \Phi_M(c; \xi, u_N) \\ &= \min_{u \in U} \Phi_M(c; \xi, u). \end{aligned}$$

Sabemos por Observación 9 que existe  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^c(\xi) &= \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}_n), \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}_n, w_n) \end{array} \right. \right\} \\ &= \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}_n), \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}_n, w_n) \end{array} \right. \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}_n, w_n) \end{array} \right. \right\} \\
&= \inf_{w \in \Omega} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}_n, w) \end{array} \right. \right\} \\
&\geq \inf_{w \in \Omega} \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, u_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}_n, w) \end{array} \right. \right\} \\
&= \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, \bar{u}_n, w)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_n^c(\xi) &\geq \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}_n), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, \bar{u}_n, w)) \right\} \\
&\geq \inf_{u \in U} \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\}.
\end{aligned}$$

Sean  $\bar{u} \in U$ ,  $\bar{w} \in \Omega$  fijos. Entonces, nuevamente la Observación 9 nos permite tomar un control  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  tal que

$$\mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, \bar{u}, \bar{w})) = \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}, \bar{w}) \end{array} \right. \right\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_n^c(\xi) &= \inf_{u \in U} \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \inf_{w \in \Omega} \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, u_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, u_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, u_n, w_n) \end{array} \right. \right\} \\
&\leq \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}), \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}, \bar{w}) \end{array} \right. \right\} \\
&= \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}), \inf_{\omega \in \Omega} \left\{ \max_{k=n+1, \dots, N} \Phi_M(c; x_k, \bar{u}_k) \left| \begin{array}{l} x_{k+1} = F(x_k, \bar{u}_k, w_k), \\ k \in \{n+1, \dots, N\}, \\ x_{n+1} = F(\xi, \bar{u}, \bar{w}) \end{array} \right. \right\} \right\} \\
&= \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, \bar{u}), \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, \bar{u}, \bar{w})) \right\}.
\end{aligned}$$

□

Como lo anterior se tiene para cualesquiera  $\bar{u}, \bar{w}$  tomamos ínfimo y se concluye como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^c(\xi) &\leq \inf_{u \in U} \inf_{w \in \Omega} \max \{ \Phi_M(c; \xi, u), \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \} \\ &= \inf_{u \in U} \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\} \end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces

$$\mathcal{M}_n^c(\xi) = \inf_{u \in U} \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\}.$$

Finalmente, sabemos que  $\mathcal{M}_{n+1}^c$  es continua al igual que  $F(\xi, \cdot, \cdot)$ , por lo que el mapeo

$$u \longmapsto \max \left\{ \Phi_M(c; \xi, u), \inf_{w \in \Omega} \mathcal{M}_{n+1}^c(F(\xi, u, w)) \right\},$$

es continuo. Al ser  $U$  compacto concluimos que el ínfimo se alcanza.

## Capítulo 3

# Aplicaciones de los resultados

Es este capítulo veremos los algoritmos obtenidos como consecuencia de los resultados vistos en el capítulo anterior, explicándolos en detalle y entregando un pseudocódigo. Luego, utilizaremos dichos algoritmos para resolver un problema aplicado relacionado con el manejo de recursos naturales.

### 3.1 Algoritmos

En esta sección veremos los algoritmos que son consecuencia de las Secciones 1.1, 2.1 y 2.2; y también un nuevo algoritmo tipo *puntos medios*, que mezclando los resultados anteriores permite obtener elementos cercanos a la frontera del conjunto de umbrales sostenibles.

#### Frontera del conjunto robusto

El inciso 2 del Teorema 1.1.1 permite encontrar elementos en la frontera de Pareto débil inferior del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$  (ver Figura 1.1). Además, la Proposición 2.1.1 explicita una forma recursiva de encontrar la expresión  $W_\xi(c)$ , para un vector  $c \in \mathbb{R}^m$ . Juntando ambos resultados es que se desarrolla el siguiente algoritmo. Primero, se deben tomar umbrales fuera del conjunto de umbrales sostenibles, a los cuales asignaremos al conjunto  $C_d$ . Estos umbrales serán evaluados en  $c \mapsto W_\xi(c)$  para obtener el elemento en la frontera, por lo cual es importante que los elementos de  $C_d$  se encuentren espaciados adecuadamente y lo suficientemente alejados.

Dada la magnitud del problema, resolver la minimización asociada al cálculo de  $W_\xi(c)$  puede ser muy complicado. Por lo anterior, el algoritmo considera una discretización de los espacios de estados y controles, denominadas  $X_h$  y  $U_b$ . Teniendo en cuenta la dinámica  $F : X \times U \times \Omega \rightarrow X$  y la restricción  $g : X \times U \rightarrow X$ , el algoritmo se describe en 1.

---

**Algorithm 1** Frontera de Pareto de  $\mathbb{S}(\xi)$ 

---

1:  $X_h \leftarrow$  discretización de  $X$

```

2:  $U_b \leftarrow$  discretización de  $U$ 
3:  $C_d \leftarrow$  vectores en  $\mathbb{R}^m$ 
4: for  $c \in C_d$  do
5:   for  $k = N, \dots, 0$  do
6:     for  $x \in X_h$  do
7:       if  $k = N$  then
8:          $W_N^c(x) \leftarrow \max_{u \in U_b} \Phi_W(c; x, u)$ 
9:       else
10:         $W_n^c(x) \leftarrow \max_{u \in U_b} \min \left\{ \Phi_W(c; x, u), \min_{w \in \Omega} W_{n+1}^c(F(x, u, w)) \right\}$ 
11:      end if
12:    end for
13:  end for
14: end for
15:  $\mathcal{P}_S \leftarrow$  vector vacío
16:  $S \leftarrow$  vector vacío
17: for  $c \in C_d$  do
18:   Añadir  $c + W_0^c(\xi) \mathbf{1}$  a  $\mathcal{P}_S$ 
19: end for
20:  $S \leftarrow \mathcal{P}_S + \mathbb{R}_-^m$ 
    return  $S$ 

```

---

### Frontera del conjunto de umbrales no sostenibles

Análogamente al algoritmo anterior, veremos cómo encontrar elementos en la frontera de Pareto débil superior del conjunto  $\overline{U}(\xi)$  utilizando el inciso 2 del Teorema 2.2.3 (ver Figura 2.2) y la Proposición 2.2.1. Al igual que el algoritmo para encontrar el conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$ , consideramos discretizaciones de los conjuntos  $X$  y  $U$ , pero en este caso el conjunto de umbrales  $C_d$  debe tomarse fuera de los umbrales no sostenibles. Teniendo en cuenta la dinámica  $F : X \times U \times \Omega \rightarrow X$  y la restricción  $g : X \times U \rightarrow X$ , describimos el Algoritmo 2.

---

#### Algorithm 2 Frontera de Pareto de $\overline{U}(\xi)$

---

```

1:  $X_h \leftarrow$  discretización de  $X$ 
2:  $U_b \leftarrow$  discretización de  $U$ 
3:  $C_d \leftarrow$  vectores en  $\mathbb{R}^m$ 
4: for  $c \in C_d$  do
5:   for  $k = N, \dots, 0$  do
6:     for  $x \in X_h$  do
7:       if  $k = N$  then
8:          $M_N^c(x) \leftarrow \min_{u \in U_b} \Phi_M(c; x, u)$ 
9:       else

```

```

10:            $M_n^c(x) \leftarrow \min_{u \in U_b} \max \left\{ \Phi_M(c; x, u), \min_{w \in \Omega} M_{n+1}^c(F(x, u, w)) \right\}$ 
11:       end if
12:   end for
13: end for
14: end for
15:  $\mathcal{P}_U \leftarrow$  vector vacío
16:  $U \leftarrow$  vector vacío
17: for  $c \in C_d$  do
18:     Añadir  $c - M_0^c(\xi) \vec{\mathbf{1}}$  a  $\mathcal{P}_U$ 
19: end for
20:  $U \leftarrow \mathcal{P}_U + \mathbb{R}_+^m$ 
    return  $U$ 

```

---

## Probabilidad máxima

Teniendo en cuenta los algoritmos recién definidos, análogamente podemos encontrar el valor de  $V_0^c(\xi)$ , el cual representa la probabilidad máxima de que un umbral  $c \in \mathbb{R}^m$  pertenezca al conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ . Teniendo en cuenta el resultado de la Proposición 2.1.1, se obtiene el Algoritmo 3.

---

### Algorithm 3 $V_0^c(\xi)$

---

```

1:  $X_h \leftarrow$  discretización de  $X$ 
2:  $U_b \leftarrow$  discretización de  $U$ 
3: for  $k = N, \dots, 0$  do
4:   for  $x \in X_h$  do
5:     if  $k = N$  then
6:        $V_N^c(x) \leftarrow \max_{u \in U_b} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u)$ 
7:     else
8:        $V_n^c(x) \leftarrow \max_{u \in U_b} \mathbf{1}_{A(c)}(x, u) \mathbb{E}_w [V_{n+1}^c(F(x, u, w))]$ 
9:     end if
10:   end for
11: end for
    return  $V_0^c(\xi)$ 

```

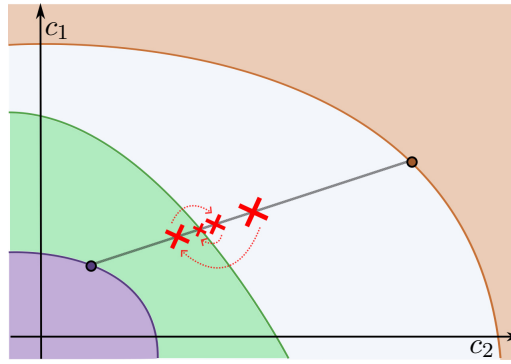
---

## Frontera del conjunto de umbrales sostenibles

A continuación explicaremos brevemente un algoritmo tipo puntos medios, que permite encontrar elementos en la frontera de  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ . El algoritmo comienza tomando dos umbrales, uno en la frontera de  $\mathbb{S}(\xi)$  (utilizando el algoritmo 1) y otro en la frontera de  $\overline{\mathbb{U}(\xi)}$  (utilizando el algoritmo 2). Luego, se encuentra el punto medio entre ambos umbrales, donde se calcula

el valor  $V_0^c(\xi)$  con  $c$  el punto medio. Teniendo este valor, de ser menor a  $\beta$  se debe tomar el segmento inferior formado por el elemento del conjunto  $\mathbb{S}(\xi)$  y el punto medio. De ser mayor a  $\beta$ , se debe tomar el segmento superior formado por el elemento del conjunto  $\overline{\mathbb{U}}(\xi)$  y el punto medio. En este nuevo segmento se marca un punto medio y se sigue iterando el algoritmo hasta que  $V_0^c(\xi)$  llegue lo suficientemente cerca a  $\beta$ . Lo anterior se encuentra descrito en Algoritmo 4.

**Observación 10.** *Es importante destacar que al tomar elementos en las fronteras de  $\mathbb{S}(\xi)$  y  $\overline{\mathbb{U}}(\xi)$ , el segmento que se trace entre esos puntos debe tener pendiente positiva, puesto que de no ser así no es posible asegurar el comportamiento esperado.*



**Figura 3.1:** Algoritmo 4 de puntos medios

---

**Algorithm 4** Frontera de  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$

---

- 1:  $C_S \leftarrow$  vectores en la frontera de  $\mathbb{S}(\xi)$
- 2:  $C_U \leftarrow$  vectores en la frontera de  $\overline{\mathbb{U}}(\xi)$
- 3:  $\beta \leftarrow$  nivel de confianza en  $(0, 1]$
- 4:  $tol_\beta \leftarrow$  diferencia máxima entre  $V_0^c(\xi)$  y  $\beta$
- 5:  $S_\beta \leftarrow$  vector vacío
- 6: **for**  $c_s \in C_S$  y  $c_u \in C_U$  **do**
- 7:      $c \leftarrow$  punto medio( $c_s, c_u$ )
- 8:      $V \leftarrow V_0^c(\xi)$
- 9:     **if**  $|V - \beta| \leq tol_\beta$  **then**
- 10:         Añadir  $c$  a  $S_\beta$
- 11:     **else if**  $V < \beta$  **then**
- 12:          $c_u \leftarrow c$
- 13:         Volver a línea 9
- 14:     **else**
- 15:          $c_s \leftarrow c$
- 16:         Volver a línea 9

```

17:   end if
18: end for
19:  $S_\beta \leftarrow S_\beta + \mathbb{R}^m$ 
   return  $S_\beta$ 

```

---

## 3.2 Recurso renovable con crecimiento incierto

El siguiente problema es una modificación de [2] (Sección 7.6), bastante similar al ejemplo conversado en la introducción de este trabajo. Consideremos como variable de estado a  $x_k$ , representando la abundancia de cierto recurso. Ésta evoluciona de manera lineal con una tasa de crecimiento incierta, es decir,

$$x_{k+1} = (1 + r(x_k, w_k))(x_k - u_k), \quad (3.1)$$

donde el control  $u_k$  representa la extracción del recurso en el instante  $k$  y  $r(x_k, w_k)$  es el crecimiento incierto. La incertidumbre  $w_k$  se origina por estocasticidad ambiental y demográfica. La estocasticidad ambiental hace que  $r$  fluctúe de manera aleatoria con media  $\bar{r}$  y varianza  $\sigma_e^2$ . La estocasticidad demográfica está caracterizada por una varianza individual ajustada  $\sigma_d^2$ , con lo cual

$$r(x, w) = \bar{r} + \sqrt{\sigma_e^2 + \frac{\sigma_d^2}{x}} w,$$

donde

$$w_k = \begin{cases} -1, & \text{con probabilidad } p = 0,5 \\ 1, & \text{con probabilidad } 1 - p = 0,5 \end{cases}.$$

Supongamos que una agencia reguladora exige asegurar una extracción mínima de  $u_{min}$  en cada instante, manteniendo un stock de precaución mínimo  $x_{min}$ . Lo anterior se traduce como:

$$u_k \geq u_{min}, \quad x_k \geq x_{min}, \quad k = 0, \dots, N.$$

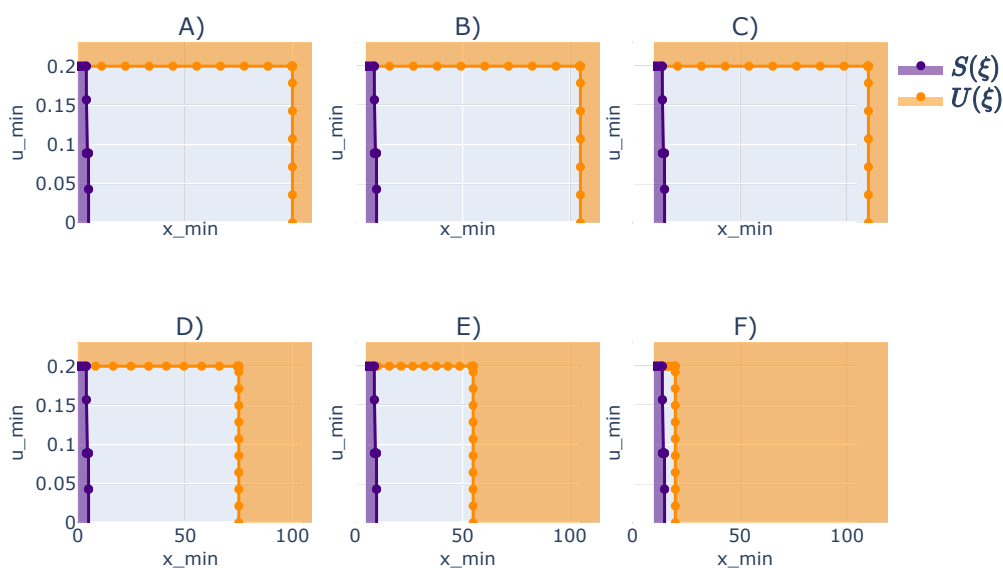
Podemos describir entonces el conjunto de umbrales sostenibles con un nivel de confianza  $\beta \in (0, 1]$  y condición inicial  $\xi \in \mathbb{R}^2$  como

$$\mathbb{S}^\beta(\xi) = \left\{ (x_{min}, u_{min}) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \exists (u_k)_{k=0}^N \in [0, x_{max}]^N \text{ tal que} \\ \mathbb{P}(\omega \mid x_k \geq x_{min} \text{ y } u_k \geq u_{min}, \forall k = 0, \dots, N) \geq \beta \end{array} \right. \right\},$$

donde  $\omega = (w, \dots, w)$  es la variable aleatoria que representa las perturbaciones en cada instante de tiempo, compuesto de  $N$  variables  $w$ , y  $x_{max}$  es la cantidad máxima que podría

tenerse de recurso, obtenida a partir de la dinámica y una condición inicial dada.

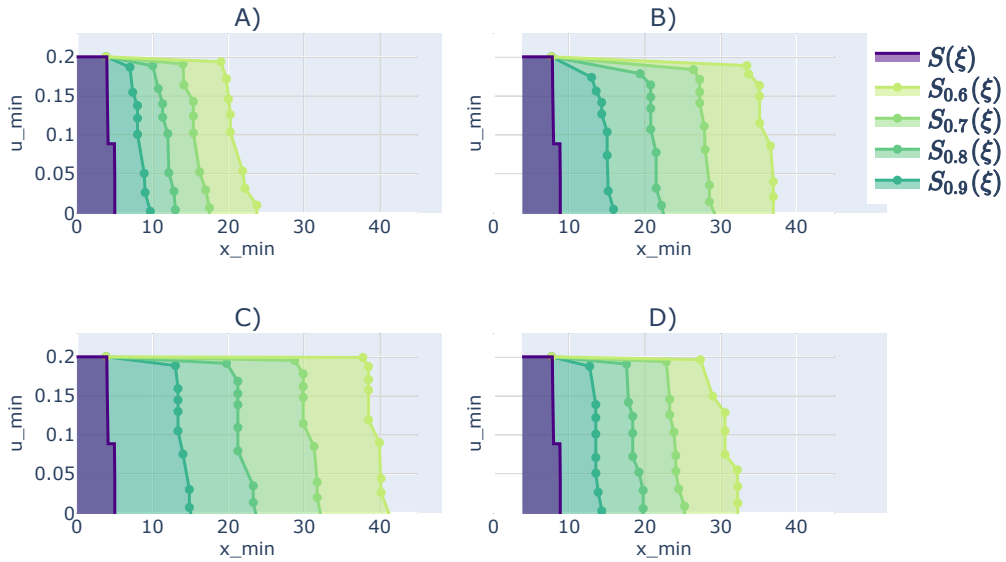
A continuación vemos los resultados de aplicar los algoritmos de la sección anterior para obtener  $\mathbb{S}(\xi)$  y  $\mathbb{U}(\xi)$ , considerando  $x_{max} = 1000$ ,  $\bar{r} = 0,03$ ,  $\sigma_e = 0,2$  y  $\sigma_d = 0,1$ . Comenzamos encontrando los conjuntos  $\mathbb{S}(\xi)$  y  $\mathbb{U}(\xi)$  para diferentes horizontes  $N$  y condiciones iniciales  $\xi$ . Como se puede apreciar en la Figura 3.2, el conjunto de umbrales robusto,  $\mathbb{S}(\xi)$  no cambia en relación al horizonte ni la condición inicial. En cuanto al conjunto de umbrales no sostenibles, este tampoco cambia al variar el horizonte, pero si lo hace cuando se modifica la condición inicial.



**Figura 3.2:** A)  $N = 250$ ,  $\xi = 100$    B)  $N = 100$ ,  $\xi = 100$    C)  $N = 50$ ,  $\xi = 100$   
D)  $N = 100$ ,  $\xi = 75$    E)  $N = 100$ ,  $\xi = 50$    F)  $N = 100$ ,  $\xi = 10$

Considerando los mismos valores para las constantes, obtuvimos el conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  para distintos valores de  $\beta$  con el Algoritmo 4 de puntos medios, para diferentes valores de  $N$  y  $\xi$ , como se puede ver en la Figura 3.3. Como es de esperar según la definición del conjunto de umbrales sostenibles, al mantener la misma condición inicial (como en A) y C)), los conjuntos  $\mathbb{S}^\beta$  tienen mayor tamaño para un horizonte más pequeño. También, considerando el mismo horizonte (como en B) y D)), el caso con condición inicial mayor lleva a conjuntos  $\mathbb{S}^\beta$  de mayor tamaño. Cualquiera sea el caso, en todas las variaciones de horizonte y condición inicial se evidencia que, por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{S}^{0,9}(\xi)$  parece tener

casi el doble de tamaño que el conjunto robusto  $\mathbb{S}(\xi)$ , lo cual demuestra el beneficio de realizar un estudio estocástico.



**Figura 3.3:** Conjunto  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$  para  $\beta = 0.9, 0.8, 0.7$  y  $0.6$  con,  
 A)  $N = 250, \xi = 100$    B)  $N = 100, \xi = 100$   
 C)  $N = 50, \xi = 100$    D)  $N = 100, \xi = 75$

## Capítulo 4

# Conclusiones

En este trabajo se llegó a un método para aproximar elementos en la frontera del conjunto de umbrales sostenibles, de manera que resulta posible describirlo de manera completa. Lo anterior se obtuvo mediante la adaptación y extensión de distintos resultados relacionados a problemas similares.

Al comienzo de la investigación para este trabajo se tenía como objetivo extender resultados que permiten encontrar el conjunto de umbrales robusto, expuestos en [1], hacía el conjunto de umbrales sostenibles. Dicha tarea se realizó de manera parcial, dado que fue posible extender algunos resultados pero en la práctica la solución encontrada no es sencilla de trabajar. Lo anterior puesto que nos enfrentamos con un problema de optimización bastante complejo de resolver.

Llegados a este punto, se decidió divergir a otro enfoque. Se encuentra entonces un resultado [2] que permite calcular la probabilidad de viabilidad del sistema dinámico restringido dado por  $(D_{\xi}^u(\omega))$  y  $(I^c)$ . Este método resulta ser adaptable para el estudio de *sostenibilidad*, de forma que obtuvimos una manera de calcular la probabilidad de que un umbral restricción sea sostenible en relación a un nivel de confianza  $\beta$ . Esto permite saber si un umbral pertenece o no al conjunto de umbrales sostenibles. Por lo tanto, generamos un algoritmo que encuentra la frontera de este conjunto; con lo cual, como se explicó en la Sección 1.1, somos capaces de describirlo completamente.

Complementando el resultado descrito en el párrafo anterior, probamos que es posible modificar el método que permite describir al conjunto de umbrales robusto para aplicarlo a un nuevo conjunto, el de umbrales no sostenibles. Describimos como umbral no sostenible a aquellos que ninguna secuencia de estados posible puede cumplir. Para una condición inicial dada, el conjunto de umbrales no sostenibles cumple con estar en el complemento del conjunto  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$ , mientras que el conjunto de umbrales robusto cumple con estar contenido en  $\mathbb{S}^{\beta}(\xi)$ , para cualquier  $\beta \in (0, 1]$ . Por lo tanto, es posible encontrar la frontera del conjunto de umbrales sostenibles entre las fronteras de esos dos conjuntos. Lo anterior permitió generar un algoritmo tipo puntos medios, que toma puntos en el conjunto de

umbrales robustos y en el conjunto de umbrales no sostenibles; y mediante el cálculo de la probabilidad de que un umbral sea sostenible, se itera hasta encontrar el elemento más cercano a la frontera. De esta manera, encontrar el conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  se vuelve más sencillo pues el espacio de posibles elementos en su frontera está siendo reducido.

Finalmente concluimos que es posible describir al conjunto de umbrales sostenibles  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$ , de una manera aplicable. Además, entregamos algoritmos y un ejemplo donde se evidencia el beneficio que tiene estudiar al conjunto  $\mathbb{S}^\beta(\xi)$  en comparación con el caso robusto . Específicamente, observamos en el ejemplo que el conjunto  $\mathbb{S}^{0,9}(\xi)$  tiene casi el doble de elementos que el conjunto robusto  $\mathbb{S}(\xi)$ , lo cual evidencia el beneficio de estudiar al conjunto de umbrales sostenibles.

# Bibliografía

- [1] Pedro Gajardo, Cristopher Herмосilla, and Athena Picarelli. On the set of robust sustainable thresholds. *Natural Resource Modeling*, 34, 11 2021.
- [2] Luc Doyen Michel De Lara. *Sustainable Management of Natural Resources*. Environmental Science and Engineering. Springer Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2008.
- [3] Jean-Pierre Aubin, Alexandre Bayen, and Patrick Saint-Pierre. *Viability Theory: New Directions*. Springer Berlin, Heidelberg, 01 2011.
- [4] Michel De Lara and Vincent Martinet. Multi-criteria dynamic decision under uncertainty: A stochastic viability analysis and an application to sustainable fishery management. *Mathematical biosciences*, 217:118–24, 12 2008.
- [5] Wim van Ackooij and René Henrion. Gradient formulae for nonlinear probabilistic constraints with gaussian and gaussian-like distributions. *SIAM Journal on Optimization*, 24(4):1864–1889, 2014.
- [6] Pedro Gajardo and Cristopher Herмосilla. Pareto fronts of the set of sustainable thresholds for constrained control systems. *Applied Mathematics & Optimization*, 83, 04 2021.