

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO FÍSICA

# Efecto calórico debido al flujo de Aharonov-Bohm en un antiodot semiconductor

**Patricia Constansa Martínez Rojas**

Tesis presentada al Departamento de Física de la Universidad de Técnica  
Federico Santa María para optar al grado académico de Magister en Ciencias  
Mención Física

Febrero 2024  
Valparaíso, Chile

**Profesor Guía: Dr. Patricio Vargas Cantín, Universidad Técnica  
Federico Santa María**

*"Nunca te disculpes por brillar demasiado o por colapsar en ti misma cualquier noche. Así es como nacen las galaxias."*



# Promoción del acceso abierto y colaboración en la investigación

Esta tesis estará disponible en la biblioteca sin restricciones, lo que significa que cualquier persona interesada tendrá acceso a ella. Esta decisión se basa en nuestro compromiso con la idea de que la investigación debe ser abierta y de dominio público (open access), permitiendo así que los hallazgos y el conocimiento generados estén disponibles para toda la comunidad. Creemos firmemente que el acceso libre y abierto a la investigación es esencial para fomentar el progreso y la innovación en todos los ámbitos del conocimiento.

Nos gustaría invitar a los lectores y lectoras de esta tesis a que participen activamente en este proceso colaborativo. Si encuentran algún error, omisión o cualquier otro detalle que consideren relevante, les animamos a que se pongan en contacto con la autora a través de su correo electrónico ([patricia.martinez@usm.cl](mailto:patricia.martinez@usm.cl)). Apreciamos enormemente cualquier contribución que pueda mejorar la calidad y la precisión de nuestro trabajo.

Además, estamos abiertos a cualquier comentario, sugerencia o pregunta que puedan tener sobre el contenido de esta tesis. Nuestro objetivo es promover el intercambio de ideas y el diálogo constructivo en el ámbito académico y científico. Juntos, podemos trabajar para avanzar en nuestro entendimiento del mundo que nos rodea y contribuir de manera significativa al cuerpo de conocimientos existente.

Valparaíso, Abril 2024.



# Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi sincero agradecimiento al Dr. Patricio Vargas, mi profesor tutor, por su constante apoyo y orientación a lo largo de estos intensos dos años de magister. Aprecio su disposición al responder cada una de mis preguntas y su constante estímulo para participar en diversos seminarios y congresos, los cuales han enriquecido significativamente mi formación científica. Su confianza en mis habilidades ha sido fundamental para mi desarrollo académico.

Quiero extender mi agradecimiento a los profesores y profesoras que he tenido el privilegio de conocer y aprender durante este período, en especial al Profesor Francisco Peña. Su respaldo y enseñanzas han contribuido de manera sustancial a mi comienzo en la investigación científica. También, agradezco a mis compañeros, compañeras y amigos del postgrado, quienes siempre estuvieron dispuestos a resolver mis dudas y brindarme apoyo en momentos difíciles. En particular, agradezco a Juan Marchant por su constante ayuda y ánimo para culminar este proceso.

A mis amigas, amigos y a mi pareja, les agradezco de corazón por su apoyo emocional, un pilar fundamental durante esta travesía académica. No puedo dejar de mencionar a mi gatita Amatista, cuyo ronroneo reconfortante me recibía cada vez que regresaba a casa después de jornadas largas y agotadoras, proporcionándome el cálido refugio que tanto necesitaba.

Asimismo, quiero expresar mi agradecimiento a CEDENNA y al proyecto BASAL AFB220001 por fomentar la investigación científica y el respaldo económico que me han proporcionado para asistir a seminarios y congresos.

Este viaje académico ha sido desafiante, pero también repleto de momentos gratificantes gracias a la colaboración y respaldo de estas personas tan especiales en mi vida. A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento.

Y, finalmente, deseo dedicar este trabajo a mi madre, Patricia Rojas y a mi padre Walter Martínez, que descansa en paz, como muestra de mi profundo agradecimiento por su entrega incondicional y esfuerzos incansables para proporcionarme una educación sólida y establecer los cimientos que me han permitido llegar hasta este punto. Este logro es, en gran medida, un reflejo de su dedicación. A ellos, mi eterno cariño y reconocimiento.

# Resumen

En este trabajo, se presenta un estudio sobre el efecto calórico en un sistema electrónico tipo antidot, modelado mediante la combinación de un potencial repulsivo y atractivo (confinamiento parabólico). En este sistema, se analiza la influencia de un campo magnético externo perpendicular a la estructura y un flujo Aharonov-Bohm (flujo AB) generado por una corriente que atraviesa un solenoide ubicado en el centro de la estructura, es decir, dentro de la zona prohibida para el electrón. Los niveles de energía se obtienen de manera analítica, utilizando el modelo de Bogachek y Landman [1]. Se propone que la respuesta calórica del sistema se puede controlar variando únicamente el flujo AB. Se encuentra que, en ausencia de un campo magnético externo, la maximización del efecto ocurre siempre a la misma intensidad de flujo AB, independientemente de la temperatura. Sin embargo, al fijar el campo magnético externo a un valor distinto de cero, esta simetría se rompe, y el punto donde se maximiza el fenómeno calórico cambia, siendo diferente según la temperatura a la que se lleve a cabo el proceso. Los cálculos indican que, utilizando una masa efectiva de electrones de las heteroestructuras de GaAs y una intensidad de la trampa parabólica del orden de 2.896 meV, la modificación del flujo AB logra una variación de la temperatura del orden de 1 K. El análisis sugiere que duplicar el confinamiento parabólico duplica el efecto, mientras que aumentar el tamaño del antidot genera una disminución significativa del fenómeno calórico estudiado. Debido a la diversidad de aplicaciones tecnológicas de los antidots en electrónica, la posibilidad de controlar su respuesta térmica variando únicamente la intensidad de la corriente que atraviesa el solenoide (es decir, la intensidad del flujo AB) podría ser una plataforma de interés para futuros estudios experimentales.

Esta tesis está basada en el siguiente trabajo:

- Martínez-Rojas, P.; Benavides-Vergara, M.E.; Peña, F.J.; Vargas, P. Caloric Effect Due to the Aharonov–Bohm Flux in an Antidot. *Nanomaterials* **2023**, *13*, 2714. <https://doi.org/10.3390/nano13192714>.



# Abstract

In this work, we present a study on the caloric effect in an antidot electronic system, modeled by combining a repulsive and attractive potential (parabolic confinement). In this system, the influence of an external magnetic field perpendicular to the structure and an Aharonov-Bohm flux (AB flux) generated by a current passing through a solenoid located in the center of the structure, i.e., within the forbidden zone for the electron, is analyzed. The energy levels are obtained analytically, using the Bogachek and Landman model [1]. It is proposed that the caloric response of the system can be controlled by varying only the AB flux. It is found that, in the absence of an external magnetic field, the maximization of the effect always occurs at the same AB flux intensity, regardless of the temperature. However, fixing the external magnetic field to a nonzero value, this symmetry is broken, and the point where the caloric phenomenon is maximized changes, being different depending on the temperature at which the process is carried out. Calculations indicate that, using an effective electron mass of the GaAs heterostructures and a parabolic trap intensity of the order of 2.896 meV, the modification of the AB flux achieves a temperature variation of the order of 1 K. The analysis suggests that doubling the parabolic confinement doubles the effect, while increasing the size of the antidot generates a significant decrease in the studied caloric phenomenon. Due to the diversity of technological applications of antidots in electronics, the possibility of controlling their thermal response by varying only the intensity of the current through the solenoid (i.e., the intensity of the AB flux) could be a platform of interest for future experimental studies.

This thesis is based on the following work:

- Martínez-Rojas, P.; Benavides-Vergara, M.E.; Peña, F.J.; Vargas, P. Caloric Effect Due to the Aharonov–Bohm Flux in an Antidot. *Nanomaterials* **2023**, *13*, 2714. <https://doi.org/10.3390/nano13192714>.



# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	VI
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo del sistema antidot . . . . .	9
2.1.1. Punto cuántico y Antidot . . . . .	9
2.1.2. Efecto Aharonov–Bohm . . . . .	12
2.1.3. Efecto Magnetocalórico y Efecto Calórico . . . . .	14
2.1.4. Modelo Bogachev Landman . . . . .	15
<b>3. Función de partición y funciones termodinámicas</b>	<b>19</b>
3.1. Cálculo de la función de partición y de las funciones termodinámicas	19
3.1.1. Función de partición . . . . .	19
3.1.2. Entropía del sistema y respuesta calórica . . . . .	20
3.1.2.1. Trayectoria adiabática . . . . .	21
3.1.2.2. Trayectoria isotérmica . . . . .	21
<b>4. Efecto calórico debido al flujo de Aharonov-Bohm en un antidot semiconductor</b>	<b>24</b>
4.1. Efecto calórico en ausencia de campo magnético externo . . . . .	24
4.2. Efecto calórico en presencia de campo magnético externo . . . . .	31
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Apéndices</b>	<b>43</b>
<b>A. Contribución efecto de Aharonov-Bohm</b>	<b>43</b>
A1. Campo magnético $\mathcal{H}$ y flujo AB . . . . .	43
A2. Potenciales vectoriales . . . . .	45
<b>Referencias</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

2.1.1.Descripción esquemática de un sistema bidimensional de gas de electrones restringido (región sombreada de radio $R$ ), con un antidot (región interior no sombreada de radio efectivo $r_0$ ), en un campo magnético aplicado $H$ , y un flujo Aharonov-Bohm ( $\Phi_{AB}$ ), creado por un solenoide infinitamente largo inserto en el interior del antidot. También se muestran los estados de borde interior y exterior (líneas con flechas en negrita) cerca del límite del antidot y de toda la muestra, respectivamente [1]. . . . .	11
2.1.2.Representación de un antidot, con un electrón atrapado en una estructura anular sometida a un campo magnético uniforme, más un flujo Aharonov-Bohm en el centro del anillo, representado como un solenoide infinito que produce un campo magnético confinado en su interior [2]. . . . .	13
4.1.1.Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en función de $\alpha$ en ausencia de campo magnético externo, para el caso diferentes valores de $a$ . $S_e(T, 0, \alpha) = \text{cte.}$ en unidades de $k_B$ . . . . .	26
4.1.1.Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en ausencia de campo magnético externo para el caso diferentes valores de $a$ . $S_e(T, 0, \alpha) = \text{cte.}$ en unidades de $k_B$ . . . . .	27
4.1.2.(a) Gráfico de contorno para el caso $S(T, 0, \alpha) = \text{constante}$ . La línea blanca representa el contorno de $S_e(1.3, 0, 0.22)$ , mientras que la línea horizontal roja establece una temperatura de 1.3 K como referencia para cuantificar el efecto. (b) Variación de entropía en unidades de $k_B$ para diferentes temperaturas. En este caso, hemos seleccionado el valor inicial del parámetro $\alpha$ como 0.22. . . . .	28
4.1.3. $-\Delta S_i$ en unidades de $k_B$ , calculado como $S(1.3, 0, 0.22) - S(1.3, 0, \alpha)$ , donde (a) se presenta para diferentes valores de $a$ , y (b) se muestra para distintos valores de $\omega_0$ . . . . .	29
4.1.4.Entropía en función del parámetro de control $\alpha$ para distintos valores de temperatura, abarcando el rango desde 0.3 K hasta 1.8 K. . . . .	30

4.2.1.	Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en presencia de un campo magnético externo de 1 T, mostrando la variación con respecto a $\alpha$ para diferentes valores de $a$ . Los contornos representan $S_e(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$ en unidades de $k_B$ . . . . .	32
4.2.1.	Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en presencia de un campo magnético externo de 1 T, mostrando la variación con respecto a $\alpha$ para diferentes valores de $a$ . Los contornos representan $S_e(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$ en unidades de $k_B$ . . . . .	33
4.2.2.(a)	Gráfico de contorno para el caso de $S(T, 1, 0, 22) = \text{cte.}$ con $a = 4$ . Se han destacado las curvas $S(T, 1, \alpha) = S(1.3, 1, 0.22)$ (línea verde), $S(T, 1, \alpha) = S(1.7, 1, 0.22)$ (línea amarilla) y $S(T, 1, \alpha) = S(2.1, 1, 0.22)$ (línea de contorno naranja). También se incluyen las líneas horizontales que representan procesos isotérmicos a $T = 1.3$ K (línea horizontal roja), $T = 1.7$ K (línea horizontal naranja) y $T = 2.1$ K (línea horizontal rosada). (b) Diferencias de entropía para el caso $a = 4$ y para $T = 1.3$ K (línea azul), $T = 1.7$ K (línea naranja) y $T = 2.1$ K (línea verde).	34
4.2.3.(a)	Gráfico de contorno para el caso de $S(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$ La línea blanca representa el contorno de $S_e(0.5, 1, 0.0)$ , y la línea horizontal roja establece una temperatura de 0.5 K como referencia para cuantificar el efecto. (b) $-\Delta S_e$ para diferentes temperaturas. En este caso, se ha seleccionado el valor inicial del parámetro $\alpha$ como 0.0. . . . .	36
4.2.4.	$-\Delta S_e$ en unidades de $k_B$ para diferentes valores de temperatura constante, considerando los casos de (a) $a = 4$ sin campo magnético externo, (b) $a = 5$ sin campo magnético externo, (c) $a = 4$ con campo magnético externo, y (d) $a = 5$ con campo magnético externo. . . . .	37
4.2.5.	Gráficos de contorno que representan un proceso isentrópico en relación con el parámetro $\alpha$ , considerando diversos valores de intensidad del campo magnético externo $B$ , para el caso con $a = 4$ .	38
4.2.6.	Variación de entropía en unidades de $k_B$ a temperatura constante $T = 1.3$ K, para distintos valores de campo magnético externo y distintos valores de $a$ . . . . .	40

# Capítulo 1

## Introducción

La investigación sobre la innovación en los sistemas de refrigeración se ha vuelto crucial en el contexto de la profunda crisis climática que afecta nuestro planeta [3]. La búsqueda de materiales sustitutos para los gases de compresión convencionalmente utilizados en estas técnicas se ha convertido en un foco primordial de interés en la industria [4, 5]. En este marco, se ha desarrollado un área de estudio estrechamente relacionada con los materiales, conocida como efectos calóricos. Estos efectos se rigen por un concepto sencillo: cuando una sustancia posee un parámetro de control que regula un proceso termodinámico, cualquier variación en este parámetro genera un cambio en la entropía del sistema. Esta variación es proporcional al calor que se podría emplear para calentar o enfriar otro dispositivo tecnológico, según la segunda ley de la termodinámica. Por esta razón, los sistemas con transiciones de fase controlables son los más estudiados en la mayoría de los casos. En general, en este tipo de transiciones, se maximiza la variación de entropía del sistema, lo que se traduce en un aumento de calor y, por ende, en la capacidad de calentar o enfriar un sistema externo de manera más eficiente [5, 6]. Entre estos fenómenos destacan los efectos magnetocalóricos (MCE) [7–15], electrocalóricos (ELC) [16–18], elastocalóricos (EC) [19, 20] y barocalóricos (BC) [21–24]. El primero de estos efectos se debe a cambios en el campo magnético externo sobre el sistema, el segundo a cambios en el campo eléctrico, el tercero a cambios en la tensión y el último a cambios en la presión.

Uno de los efectos calóricos más extensamente investigado es el efecto magnetocalórico (MCE), ya que se refiere principalmente a la variación

de la temperatura de un material magnético inducida por cambios en el campo magnético externo aplicado al sistema. Este fenómeno ha despertado un considerable interés en la comunidad científica debido a su potencial aplicabilidad y versatilidad en diversas áreas, así como al extenso estudio de las propiedades magnéticas de diversos tipos de materiales en la actualidad [25–56]. Destacamos especialmente los estudios relacionados con materiales calóricos de alta temperatura [38], interacciones antiferromagnéticas y ferromagnéticas [25, 32, 46–48], lantánidos pesados [49], aleaciones Fe-Rh [50] y sistemas diamagnéticos [51–56]. Asimismo, queremos resaltar la investigación llevada a cabo por V. Franco et al. [57] y D. Serantes et al. [58] en el ámbito del MCE en sistemas magnéticos, donde exploraron matrices de nanohilos magnéticos aplicando el campo magnético perpendicular al eje de los nanohilos partiendo del estado de saturación magnética en la remanencia. Variaron el campo magnético aplicado tanto por debajo como por encima del valor del campo de anisotropía magnética del material.

El estudio del MCE se ha extendido a un conjunto de puntos cuánticos, donde la variación de la temperatura del material debido al cambio en el campo magnético externo ha sido analizada en relación con efectos adicionales controlables. Estos incluyen el confinamiento geométrico, efectos Zeeman, acoplamiento espín-órbita, campo eléctrico y efecto Rashba [59, 60]. Estos efectos no solo potencian el efecto térmico, sino que también pueden hacer que el sistema responda de manera directa o inversa, convirtiéndolo en una plataforma ideal para aplicaciones en sensores tecnológicos [61]. Un área menos explorada en términos de efectos calóricos son los antidots, estructuras con un potencial significativo para el almacenamiento de datos de alta densidad debido a la capacidad de controlar las paredes de dominio del sistema. En términos simples, un antidot es una colina potencial inaccesible para los electrones 2D [62–67]. Los avances tecnológicos permiten que estos sistemas funcionen incluso a temperaturas por debajo de  $T = 1$  K [68–71]. En este contexto, destaca el trabajo realizado por M. Salaheldeen et al. [72] con estructuras magnéticas tipo antidot de Ni, donde se explora el papel e influencia de la anisotropía en el MCE con este tipo de materiales.

Un modelo sencillo utilizado para caracterizar un antidot es el propuesto

por el modelo de Bogachek y Landman [1]. Este modelo combina un potencial repulsivo ( $U(r) \propto r^{-2}$ ) y un potencial atractivo ( $U(r) \propto r^2$ ), lo que resulta en una confinación del electrón dentro de una región finita del espacio. Además de estos potenciales de naturaleza puramente geométrica, el modelo también tiene en cuenta la influencia de un campo magnético externo, perpendicular a la estructura anular que alberga al electrón. Asimismo, considera la posibilidad de tener un flujo Aharonov-Bohm (flujo AB) en el espacio, generado por una corriente que atraviesa un solenoide ubicado en un agujero en el centro del sistema. El flujo AB está asociado a un fenómeno conocido como el efecto Aharonov-Bohm, que se relaciona con los potenciales electrodinámicos escalar ( $\phi$ ) y vectorial ( $\mathbf{A}$ ) de la teoría electromagnética [73]. Este enfoque proporciona una descripción detallada de cómo la combinación de potenciales geométricos y la influencia de campos magnéticos externos pueden afectar el comportamiento del electrón dentro de la estructura anular del antídoto.

Durante muchos años, se creía que en una región específica del espacio, sin la presencia de campos eléctricos y magnéticos, no habría influencias electromagnéticas sobre partículas cargadas. Sin embargo, en 1959, Yakir Aharonov y David Bohm demostraron que el potencial vectorial puede afectar el comportamiento mecánico cuántico de una partícula cargada, incluso cuando se desplaza en una región donde el campo magnético es nulo. Este fenómeno puede entenderse considerando un solenoide infinito a través del cual fluye una corriente eléctrica, generando un campo magnético uniforme en su interior y un campo magnético nulo fuera del solenoide. Sin embargo, el potencial vectorial no es nulo en las regiones exterior e interior del solenoide. Esto influye en los niveles de energía de los electrones, volviéndolos dependientes del flujo de campo magnético a través del solenoide (flujo AB). Este descubrimiento subraya la complejidad de las interacciones electromagnéticas en el ámbito cuántico, desafiando las concepciones previas sobre la independencia de las partículas cargadas respecto a campos magnéticos en ciertas regiones del espacio. Este resultado era inalcanzable mediante la teoría electromagnética clásica, lo que justifica denominar a estos fenómenos como un efecto cuántico puro. La imposibilidad de prever este resultado a través de la teoría electromagnética clásica destaca la naturaleza distintiva de estos fenómenos.

La confirmación experimental de este efecto se logró mediante interferencia, con Chambers siendo uno de los investigadores que llevó a cabo pruebas en 1960, junto con otros grupos contemporáneos [74]. Aunque estos potenciales escalares y vectoriales no son directamente medibles, su impacto en los fenómenos físicos ha sido objeto de un estudio intensivo en diversas áreas, como el transporte electrónico [75–77] y la termodinámica [78, 79]. Esta investigación ha contribuido a la comprensión más profunda de los aspectos cuánticos que rigen el comportamiento de las partículas cargadas, abriendo nuevas vías de exploración en la intersección entre la teoría electromagnética cuántica y los fenómenos físicos observables.

En un trabajo previo [2], observamos que el flujo AB ejerce un fuerte control sobre el comportamiento oscilatorio del MCE, actuando como un parámetro determinante para el enfriamiento o calentamiento del sistema. Dado este análisis previo, surge una pregunta pertinente: ¿es posible obtener un efecto calórico relacionado únicamente con las variaciones en el flujo AB sobre el sistema, y bajo qué condiciones se puede cuantificar, intensificar y medir este efecto para el modelo propuesto? En otras palabras, incluso en ausencia de un campo magnético externo, ¿cómo respondería térmicamente este sistema a los cambios en la corriente dentro del solenoide, que está vinculada al control de la intensidad del flujo AB?

En el contexto de esta tesis, se abordará detalladamente la naturaleza del efecto calórico (CE), explorando cómo las variaciones en el flujo AB pueden modular la temperatura del sistema sin modificar el campo magnético externo. El estudio del CE se realizará considerando distintos parámetros controlables, como el tamaño del antidot, la intensidad de la trampa parabólica y la presencia del campo magnético externo fijo. Los resultados obtenidos no solo contribuirán al entendimiento fundamental de este fenómeno, sino que también podrían abrir nuevas perspectivas en la manipulación térmica de materiales magnéticos a escala nanométrica, brindando posibilidades fascinantes para aplicaciones tecnológicas innovadoras.

La estructura de este trabajo se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2, proporcionaremos una introducción al modelo energético, discutiendo

la termodinámica utilizada para cuantificar el efecto calórico. Luego, en el capítulo 4, presentaremos los resultados y las discusiones tanto para el caso sin campo magnético externo como para el caso con campo magnético externo presente en el material. Finalmente, en el capítulo 5, presentaremos las conclusiones de nuestra investigación.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Modelo del sistema antidot

#### 2.1.1. Punto cuántico y Antidot

Durante un largo periodo, la investigación en sistemas electrónicos se enfocó principalmente en átomos o partículas aisladas de origen natural, así como en cristales metálicos o semiconductores, siendo los sistemas tridimensionales el enfoque más común. No obstante, a principios de la década de 1970, se inició una nueva era con la exploración de estructuras electrónicas limitadas a dos dimensiones, conocidas como pozos cuánticos [80, 81]. Estos pozos cuánticos están conformados por capas planas extremadamente delgadas de semiconductor entre dos capas con energías de banda de conducción diferentes, lo que permite el confinamiento bidimensional de electrones. El material más utilizado para la creación de pozos cuánticos es el arseniuro de galio, GaAs. En combinación con una solución ternaria de arseniuro de aluminio y galio,  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ , que actúa como barrera, se pueden generar capas epitaxiales muy delgadas debido a las constantes de red casi iguales [82].

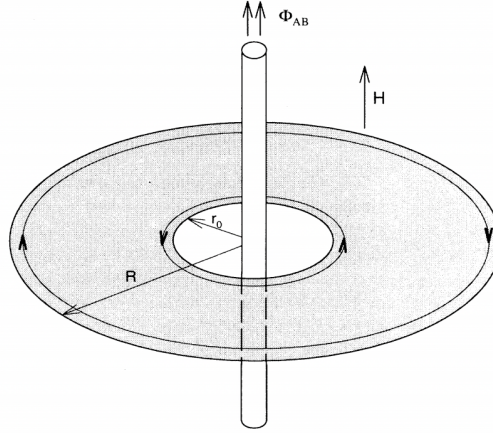
El avance en la tecnología litográfica durante la década de 1980 facilitó la creación de estructuras casi unidimensionales conocidas como hilos cuánticos. Estos hilos son miniaturas grabadas en muestras que contienen pozos cuánticos, con dimensiones transversales generalmente mayores que la profundidad del pozo cuántico [83]. Sin embargo, la cuantización completa del movimiento libre del electrón se logró al atraparlo en puntos cuánticos de

dimensiones extremadamente pequeñas. Los puntos cuánticos, derivados de un fuerte confinamiento en tres dimensiones, se asemejan a átomos artificiales, superátomos o átomos de puntos cuánticos. Su singularidad radica en la capacidad de controlar dimensiones, la estructura de los niveles de energía y el número de electrones confinados. Esto posibilita la creación de modelos, como pozos de potencial rectangular o parabólico, la cuantización de Landau del movimiento de electrones bajo campos magnéticos y la recombinación radiativa en sistemas de pocas partículas.

A diferencia de los pozos cuánticos, que restringen el movimiento a un plano mediante capas epitaxiales, la creación de hilos o puntos cuánticos, confinando portadores en dos o tres dimensiones, requiere tecnología más avanzada. El método más antiguo es el "grabado", que fue utilizado y aplicado por primera vez por Reed et al. [84] para crear puntos cuánticos mediante la estructuración de un gas de electrones bidimensional. Este avance promete aplicaciones significativas en electrónica y optoelectrónica, con investigaciones y desarrollos en constante progreso.

En contraste, un antidot es lo opuesto a un punto cuántico, describiendo regiones prohibidas en sistemas bidimensionales de electrones. Se formula como un potencial repulsivo, aunque por sí solo no confina electrones. Sin embargo, en presencia de un campo magnético externo, aparecen estados ligados debido a la cuantización de los niveles de Landau, y se añade un campo magnético uniforme constante para este propósito. Al combinar un punto cuántico y un antidot, se introduce un parámetro de control adicional, modificando tanto las propiedades electrónicas como el espectro de energía del sistema. E. Ley-Koo [85] explora los estados de Landau en presencia de campos magnéticos. Además, investiga el efecto Aharonov-Bohm sobre estados de Landau en una caja cilíndrica anular [86].

El efecto de confinamiento de los electrones en tales estructuras se ha modelado de dos formas alternativas: una utilizando cajas con paredes impenetrables representadas por barreras de potencial infinitamente altas, como se describe en la Ref. [86]; y otra utilizando un potencial de oscilador armónico para el confinamiento en una región finita y el potencial centrífugo para excluir al electrón de una región central, como en el modelo de Tan e



**Figura 2.1.1:** Descripción esquemática de un sistema bidimensional de gas de electrones restringido (región sombreada de radio  $R$ ), con un antidot (región interior no sombreada de radio efectivo  $r_0$ ), en un campo magnético aplicado  $H$ , y un flujo Aharonov-Bohm ( $\Phi_{AB}$ ), creado por un solenoide infinitamente largo inserto en el interior del antidot. También se muestran los estados de borde interior y exterior (líneas con flechas en negrita) cerca del límite del antidot y de toda la muestra, respectivamente [1].

Inkson [87]. Ambos modelos pueden resolverse exactamente e incluyen las formas mencionadas como casos particulares. Al mismo tiempo, permiten soluciones exactas para el efecto Aharonov-Bohm. La geometría del trabajo teórico original de Aharonov y Bohm [88] y la implementación experimental de Chambers [74] incorpora la exclusión del electrón de la región donde está presente el flujo magnético, coincidiendo con la geometría de un antidot cuántico.

E. N. Bogachek y Uzi Landman [1] exploran las propiedades magnéticas de estructuras con geometrías restringidas, es decir, antidots cuánticos, como se muestra en la figura 2.1.1. Por otro lado, C.W.J. Beenakker y H. van Houten [89] demuestran que las propiedades de transporte y magnetización pueden ser influenciadas por estados de borde asociados con antidots, discutiendo cómo estos estados internos interactúan con estados de borde externos en presencia de campos magnéticos. Este trabajo resalta las diferencias en las consecuencias físicas de los estados de borde en puntos cuánticos y antidots cuánticos, subrayando la importancia de estos conceptos en sistemas mesoscópicos y nanofabricación [90].

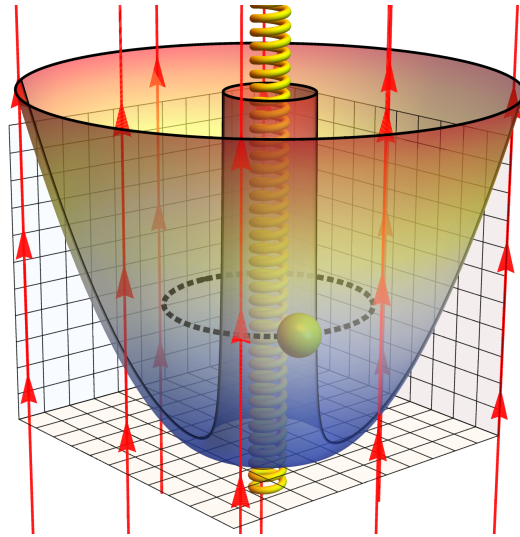
### 2.1.2. Efecto Aharonov–Bohm

El efecto Aharonov-Bohm (AB) es un fenómeno cuántico fundamental que ilustra la influencia de un campo electromagnético en una región donde la intensidad del campo magnético es nula. Este fenómeno fue propuesto por Yakir Aharonov y David Bohm en 1959 [88] y desde entonces ha sido objeto de numerosas investigaciones teóricas y experimentales. Para obtener una comprensión más detallada del cálculo del campo magnético y el potencial vectorial relacionado con este efecto, se puede consultar el apéndice A.

La explicación típica de este fenómeno cuántico involucra el desplazamiento del patrón de interferencia generado por una partícula cargada que se desplaza fuera de un solenoide. Sin embargo, esta explicación plantea la interrogante sobre el momento preciso en que se manifiesta dicho efecto. Dado que el desplazamiento está vinculado a una alteración en la fase relativa entre los dos paquetes de ondas de la partícula, la cuestión central radica en identificar cuándo ocurre este fenómeno. Este efecto implica que un electrón, aunque no experimente una fuerza electromagnética directa en una región donde el campo magnético es nulo, es afectado por un potencial electromagnético no nulo en esa región. Este potencial electromagnético, llamado potencial vectorial, tiene un impacto cuántico significativo, incluso cuando el campo magnético en sí mismo es insignificante [91].

En física, el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$  están intrínsecamente relacionados. Aunque el campo magnético puede ser nulo en una región, el potencial vectorial puede no serlo. Por lo tanto, intentar eliminar el efecto Aharonov-Bohm sería equivalente a separar artificialmente estas dos cantidades, lo cual no es consistente con la formulación cuántica.

Experimentos han confirmado las predicciones teóricas del efecto Aharonov-Bohm, respaldando la validez de su inclusión en la teoría cuántica [92]. Eliminar este efecto conduciría a inconsistencias con los resultados experimentales observados. En el pasado, se han llevado a cabo diversas investigaciones centradas en los impactos de campos magnéticos externos y campos magnéticos debido al efecto Aharonov-Bohm en varios sistemas [93–96]. En trabajos



**Figura 2.1.2:** Representación de un antidot, con un electrón atrapado en una estructura anular sometida a un campo magnético uniforme, más un flujo Aharonov-Bohm en el centro del anillo, representado como un solenoide infinito que produce un campo magnético confinado en su interior [2].

recientes, el efecto de estos campos se ha utilizado para investigar las propiedades térmicas y magnéticas de algunas moléculas [97]. En la Ref. [98], se estudiaron las propiedades magneto-transporte y térmicas de la molécula diatómica TiH. Este análisis se lleva a cabo en condiciones donde la molécula está influenciada por campos magnéticos y campos de Aharonov-Bohm. Así, el estudio de las propiedades magneto-transporte implica la observación y medición de cómo las propiedades electrónicas y de transporte de la molécula responden a la presencia de un campo magnético. No obstante, es relevante destacar que el estudio de un sistema magnético con anisotropía, como se aborda en la Ref. [72], desde la perspectiva de los procesos calóricos, resulta altamente deseable. La presencia de anisotropías magnéticas, como la anisotropía magnetocristalina o la anisotropía de forma, entre otras, ejerce una influencia adicional en las energías del sistema y debe desempeñar un papel crucial en los procesos termodinámicos abordados en este trabajo.

### 2.1.3. Efecto Magnetocalórico y Efecto Calórico

El descubrimiento del efecto magnetocalórico (MCE) por Alisultanov, Paixão y Reis marcó el inicio de una área de investigación aún poco explorada [99]. Este fenómeno se refiere a la variación de la temperatura de un material en respuesta a cambios en un campo magnético. La descripción del MCE implica alteraciones en la entropía y la temperatura, ya que permite observar cómo un material intercambia calor mediante cambios en la entropía ( $\Delta S$ ) y la temperatura ( $\Delta T$ ). El MCE se manifiesta como una propiedad intrínseca de los materiales magnéticos, revelándose como un fenómeno fascinante que se define por la variación de la temperatura del material cuando se expone a la influencia de un campo magnético.

Diversos autores han explorado el MCE en diferentes escenarios, realizando revisiones de los efectos magnetocalóricos y barocalóricos de complejos metálicos como alternativa para la refrigeración de estado sólido. Destacan su viabilidad en comparación con la tecnología convencional de compresión de gas [3]. También se ha investigado las propiedades magnetocalóricas de un punto cuántico en el contexto del acoplamiento espín-órbita tipo Rashba y la división de Zeeman en nanohilos estrechos [60], así como la exploración del MCE, la susceptibilidad magnética, la capacidad calorífica y las propiedades ópticas de un punto cuántico en forma de cuña (WSQD) de GaAs [100]. En un trabajo anterior realizado por O. Negrete, F. Peña y P. Vargas [2], se abordó el estudio del efecto magnetocalórico en el contexto de un electrón interactuando con un antidot bajo la influencia de un flujo de Aharonov-Bohm, utilizando el modelo de Bogachev-Landman. Los resultados revelaron que el flujo AB ejerce un fuerte control sobre el comportamiento oscilatorio del MCE, desempeñando un papel crucial como parámetro de control para la capacidad de enfriar o calentar el sistema. A diferencia de estos trabajos, especialmente del último, la investigación expuesta en esta tesis se enfoca en el estudio del efecto calórico (CE).

El CE, a diferencia del MCE, se centra en una respuesta exclusivamente calórica del sistema y es provocado únicamente por las variaciones del flujo de Aharonov-Bohm. Este fenómeno es particularmente intrigante, ya que

implica que incluso en ausencia de cambios en el campo magnético externo, es posible inducir alteraciones térmicas notables en el material. El flujo AB, al actuar como un parámetro de control independiente, ofrece una herramienta única para ajustar la respuesta calórica del sistema. Este enfoque permite un análisis más profundo de las propiedades termomagnéticas, con implicaciones potenciales en diversas aplicaciones, desde el diseño de dispositivos de refrigeración hasta el desarrollo de sensores térmicos altamente sensibles.

#### 2.1.4. Modelo Bogachek Landman

Consideremos el modelo propuesto por Bogachek y Landman, que describe un sistema compuesto por un electrón interactuando con un potencial repulsivo  $U_{AD}(r)$ , un flujo Aharonov-Bohm ( $\Phi_{AB}$ ), un campo magnético externo  $\mathbf{B}$  y, finalmente, un potencial parabólico  $U_D(r)$ . El Hamiltoniano total que rige el sistema se expresa como

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + U_{AD}(r) + U_D(r). \quad (2.1)$$

Aquí,  $m^*$  representa la masa efectiva del electrón,  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial total, y  $U_{AD}(r)$  es el potencial repulsivo que describe la estructura del antidot y está definido por

$$U_{AD}(r) = \frac{\zeta}{r^2}, \quad (2.2)$$

donde la constante  $\zeta$  se relaciona con el potencial químico  $\mu$  y el radio efectivo del antidot  $r_0$  mediante la relación  $\mu = \frac{\zeta}{r_0^2}$ .

El término  $U_D(r)$  corresponde al potencial atractivo de confinamiento parabólico y está definido por

$$U_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m^*\omega_0^2r^2, \quad (2.3)$$

donde  $\omega_0$  representa la frecuencia de la trampa parabólica.

El potencial vectorial total implica la suma de dos términos,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ ,

donde  $\mathbf{A}_1$  está relacionado con el campo magnético externo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  describe el flujo magnético adicional  $\Phi_{AB}$  dentro del antidot (2.1.1), con  $\nabla \times \mathbf{A}_2 = 0$ . Esto se explica más detalladamente en el Apéndice A2.

Para el caso de un campo magnético externo perpendicular a lo largo de la dirección  $z$ ,  $\mathbf{B} = \hat{z}B$ , podemos resolver la ecuación de Schrödinger en coordenadas cilíndricas y utilizar el gauge de Coulomb (gauge simétrico) para obtener los niveles de energía para el electrón confinado, dados por

$$E_{nm}^{ad} = \hbar\Omega \left( 2n + [(m + \alpha)^2 + a^2]^{1/2} + 1 \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c (m + \alpha), \quad (2.4)$$

donde  $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$  es la frecuencia del ciclotrón,

$$\Omega = \omega_0 \left( 1 + \left( \frac{\omega_c}{2\omega_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

es la frecuencia efectiva de la trampa, y  $n$ ,  $m$  son los números cuánticos radial y magnético ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) respectivamente. Además,

$$a^2 = \frac{2m^*\zeta}{\hbar^2} = \frac{2m^*\mu}{\hbar^2}r_0^2 = k_F^2 r_0^2, \quad (2.6)$$

es una constante proporcional al radio del antidot ( $r_0$ ), donde  $k_F$  es el vector de onda de Fermi del electrón. Los valores para  $a$  se encuentran en el rango de  $0 \leq a \leq 10$  según la investigación original [1].

El parámetro  $\alpha$  se define de la forma

$$\alpha = \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0}, \quad (2.7)$$

donde  $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$  es el flujo magnético cuántico. La relación entre el parámetro  $\alpha$  y el flujo AB viene dada por [2]:

$$\alpha = \frac{\mathcal{A}\mathcal{H}}{\Phi_0} = \frac{\pi r_s^2 \mathcal{H}}{\Phi_0}, \quad (2.8)$$

donde  $r_s$  corresponde al radio del solenoide,  $\mathcal{H}$  es el valor del campo magnético generado por la corriente en su interior, y  $\mathcal{A} = \pi r_s^2$  es el área de sección del

solenoides, cuyo vector normal es paralelo al campo magnético  $\mathcal{H}$ . Es importante tener en cuenta que el campo  $\mathcal{H}$  solo existe para  $0 < r \leq r_s$  y es nulo fuera del solenoide ( $r > r_s$ ), como se detalla en el Apéndice A2. Así, para valores dados de  $\alpha$ , la intensidad del campo magnético dentro del solenoide se describe como

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha \Phi_0}{\pi r_s^2}. \quad (2.9)$$

Los avances tecnológicos recientes han posibilitado la fabricación de nano solenoides con un radio de  $r_s = 35$  nm, utilizando grafeno como material [101]. Esto implica que, para un valor específico como  $\alpha = 0.5$ , se generaría un campo magnético de aproximadamente  $\mathcal{H} = 0.25$  T.

Podemos analizar tres casos asintóticos a partir del espectro de energía dado por la Ecuación (2.4): a) El caso de un punto cuántico, b) el caso de un antidot puro, y c) el caso Landau. En el caso (a), se obtiene cuando  $\alpha = 0$  y  $a = 0$ , lo que significa que la Ecuación (2.4) se reduce a la conocida expresión para los niveles de Fock-Darwin, como se describe en [102, 103]:

$$E_{nm}^{dot} = \hbar\Omega (2n + |m| + 1) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c m. \quad (2.10)$$

Aquí,  $a = 0$  implica  $\zeta = 0$ , haciendo que el potencial repulsivo antidot de la Ecuación (2.2) desaparezca, y el sistema corresponda a un punto cuántico.

En el caso (b), se obtiene cuando  $\omega_0 \rightarrow 0$ , y a partir de la Ecuación (2.4), el espectro de energía toma la forma

$$E_{nm}^{antidot} = \hbar\omega_c \left[ n + \frac{[(m + \alpha)^2 + a^2]^{1/2} + (m + \alpha) + 1}{2} \right]. \quad (2.11)$$

Por último, en el caso c), podemos obtener el espectro de energía aplicando a la Ecuación (2.11) el caso de  $\alpha = 0$  (flujo AB desaparece) y  $a = 0$  (radio del antidot desaparece). El resultado es el espectro de energía dado por

$$E_{nm}^{Landau} = \frac{\hbar\omega_c}{2} (2n + |m| + m + 1), \quad (2.12)$$

que corresponde a los niveles de Landau en coordenadas cilíndricas. Es esencial mencionar que los niveles de energía de Landau son fuertemente degenerados

para todos los valores negativos de  $m$ . Sin embargo, la inclusión del potencial repulsivo antidot  $U_{AD}$  en la forma de la Ecuación (2.2) elimina esta degeneración asintótica cuando  $m \rightarrow \infty$ . En conjunto con el potencial atractivo  $U_D$ , que restringe las funciones de onda a una región finita, los niveles electrónicos se vuelven no degenerados para todo  $m$ . Los niveles de energía toman la forma de la Ecuación (2.4), lo que permite un estudio detallado de las propiedades termodinámicas de las estructuras cuánticas con un antidot en un campo magnético. La discusión de estos tres casos muestra la completitud del problema de Bogachev-Landman y la versatilidad que se puede obtener para analizar parámetros reales con aplicaciones experimentales.

# Capítulo 3

## Función de partición y funciones termodinámicas

### 3.1. Cálculo de la función de partición y de las funciones termodinámicas

#### 3.1.1. Función de partición

La función de partición  $\mathcal{Z}_{ad}$  se puede calcular utilizando la solución general de la Ecuación (2.4), sumando sobre  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) y  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$\mathcal{Z}_{ad} = \sum_{n,m} e^{-\beta E_{nm}^{ad}} \quad (3.1)$$

Lamentablemente, la estructura de los niveles de energía de la Ecuación (2.4) no permite una solución analítica completa, por lo que recurrimos a cálculos numéricos para obtener la función de partición canónica de la Ecuación (3.1). Separando las contribuciones de energía del antidot ( $E_{nm}^{ad}$ ) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_n e^{-2\beta\hbar\Omega(n+\frac{1}{2})} \sum_m e^{-\beta\hbar\Omega[(m+\alpha)^2+a^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{\beta\hbar\omega_B}{2}(m+\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{csch}(\beta\hbar\Omega) \sum_m e^{-\beta\hbar\Omega[(m+\alpha)^2+a^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{\beta\hbar\omega_B}{2}(m+\alpha)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Los valores que puede tomar  $\alpha$  no están restringidos a priori. Sin embargo,

hay una peculiaridad en el espectro de energía dado por la Ecuación (2.4) que afecta la función de partición y, por ende, las magnitudes termodinámicas. Si  $\alpha$  toma valores enteros  $\mathbb{N}$ , la función de partición asumirá los mismos valores que cuando  $\alpha = 0$ . Esto se debe a que siempre es posible (si  $\alpha$  es un número entero) escribir un nuevo número cuántico de la forma  $\tilde{m} = m + \alpha$  y sumar los diferentes niveles de energía de la función de partición con el nuevo número cuántico. En cuanto al rango de temperatura en nuestros cálculos, trabajamos en el intervalo de 0.5 K a 2 K, lo que nos permite considerar el número cuántico  $m = -70$  a  $m = 30$ , suficiente para garantizar una buena convergencia en los cálculos termodinámicos presentados en este trabajo.

### 3.1.2. Entropía del sistema y respuesta calórica

En nuestro análisis termodinámico, es crucial recordar que la entropía electrónica se deriva de la función de partición  $\mathcal{Z}$  en la forma genérica:

$$S_e(T, B, \alpha) = k_B T \left( \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial T} \right)_{B, \alpha} + k_B \ln \mathcal{Z}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, la entropía total para este modelo puede expresarse como

$$S = S_e(T, B, \alpha) + S_l(T), \quad (3.4)$$

donde  $S_l(T)$  es la entropía de la red relacionada con la contribución de los fonones en el sistema. La ecuación (3.4) asume las siguientes aproximaciones: La entropía de los fonones depende únicamente de la temperatura, despreciando así la influencia del acoplamiento de los fonones con los campos magnéticos externos. Además, para la evaluación exhaustiva de la entropía, de forma diferenciada para electrones y fonones, la discusión dentro de este estudio excluye la consideración de las interacciones electrón-fonón.

Para comprender la cuantificación del fenómeno calórico, debemos pensar en la entropía como una función de estado que depende de tres variables termodinámicas:  $T, B$  y  $\alpha$ . Esto significa que tenemos una función para la entropía de la forma  $S \equiv S(T, B, \alpha)$ . Esto nos permite escribir la expresión

diferencial total para la entropía como:

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{B,\alpha} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial B} \right)_{T,\alpha} dB + \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{T,B} d\alpha \quad (3.5)$$

A partir de esta última ecuación, podemos tomar dos caminos para cuantificar el efecto: 1) a través de una trayectoria adiabática y 2) por medio de una trayectoria isotérmica.

### 3.1.2.1. Trayectoria adiabática

Analizar un proceso de tipo adiabático implica que la ecuación (3.5) debe ser cero. De esta forma, podemos despejar  $dT$  y obtener la variación de temperatura a lo largo de este proceso por integración. Esta variación de temperatura se denomina  $\Delta T_{ad}$  y viene dada por la expresión:

$$\Delta T_{ad} = - \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \frac{T}{C_{B,\alpha}} \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{T,B} d\alpha, \quad (3.6)$$

donde utilizamos  $C_{B,\alpha} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{B,\alpha}$  que corresponde al calor específico a parámetros constantes  $B, \alpha$ . En nuestra formulación, fijamos el valor del campo magnético externo a lo largo del proceso (es decir,  $dB = 0$ ).

### 3.1.2.2. Trayectoria isotérmica

Al cuantificar el efecto empleando una trayectoria isotérmica, lo que implica  $dT = 0$ , obtenemos de la Ecuación (3.5) una variación de entropía a temperatura constante ( $\Delta S$ ) dada por

$$\Delta S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{T,B} d\alpha. \quad (3.7)$$

Observando la Ecuación (3.6) y la Ecuación (3.7), podemos establecer una relación entre estas magnitudes. Se encuentra que  $-\Delta S \propto \Delta T_{ad}$  únicamente cuando  $C_{B,\alpha} > 0$ . Esta condición se verifica debido a que  $\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{B,\alpha} > 0$ , dado que la entropía  $S$  aumenta siempre con la temperatura  $T$ . En consecuencia, es esencial tener en cuenta que cuando se tiene un caso en el que  $-\Delta S > 0$ , el sistema se calentará, denominaremos a este tipo de respuesta como directa.

En cambio, cuando la respuesta es del tipo  $-\Delta S < 0$ , el sistema se enfriará, y llamaremos a esta respuesta inversa. Por lo tanto, esperamos que para la respuesta directa exista una  $\Delta T_{ad} > 0$ , y que para el caso de una respuesta inversa, se tenga  $\Delta T_{ad} < 0$  para el resultado final del fenómeno calórico.

También es posible cuantificar el fenómeno empleando el cálculo explícito sin realizar la integración presentada en las ecuaciones (3.6) y (3.7), procediendo de la siguiente forma. Para obtener directamente la variación de temperatura ( $\Delta T_{ad}$ ) al realizar un proceso adiabático, podemos utilizar un gráfico de contorno aplicando las siguientes condiciones:

$$S_e(T, B_0, \alpha) = S_e(T_0, B_0, \alpha_0) = \text{cnt.}, \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.8),  $\alpha_0$  representa el valor inicial del flujo AB,  $T_0$  el valor inicial de la temperatura del proceso, y  $B_0$  el valor constante del campo magnético externo sobre la muestra durante el proceso. Hemos utilizado la aproximación  $S_e \gg S_l$  para bajas temperaturas, lo que nos permite expresar la entropía como  $S \sim S_e$ . Este gráfico de contorno proporcionará una representación visual de  $T$  frente a  $\alpha$  para diferentes valores de entropía constante, mostrando de manera explícita cómo varía la temperatura durante un proceso adiabático al cambiar el flujo AB.

En el caso de la variación de entropía a temperatura constante y con un campo magnético externo constante, la expresión puede describirse como la diferencia de entropía entre el punto inicial y final del proceso de la siguiente manera:

$$-\Delta S_t = -\Delta S_e = S_e(T_0, B_0, \alpha_0) - S_e(T_0, B_0, \alpha), \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.9), la contribución de  $S_l$  se anula, ya que solo depende de la temperatura y representa un proceso isotérmico sin variaciones asociadas. Esta ecuación generará, para valores dados de  $T_0$ ,  $B_0$  y  $\alpha_0$ , una función que dependerá únicamente de la variable  $\alpha$ . Esto proporcionará una representación gráfica directa de  $-\Delta S_e$  frente a  $\alpha$ , permitiendo cuantificar el efecto resultante. Es crucial señalar que los resultados del fenómeno calórico propuesto, presentados en el siguiente capítulo, siguen el enfoque discutido para la

ecuación (3.8) y la ecuación (3.9).

Es crucial subrayar las distinciones entre esta investigación y el trabajo desarrollado en la Ref. [2]. En dicho estudio, se abordó el MCE de este modelo, donde las variaciones de temperatura reportadas se derivaron directamente mediante la integración sobre el calor específico a campo magnético constante y la derivada de magnetización del sistema. En contraste, en esta tesis, la expresión para  $\Delta T_{ad}$ , como se presenta en la Ecuación (3.6), representa un fenómeno calórico (CE) puramente asociado con el cambio en el flujo AB. Por lo tanto, no podemos categorizar este estudio como MCE.

Esencialmente, mientras que el enfoque en la Ref. [2] se centró en las variaciones de temperatura relacionadas con el efecto magnetocalórico, la presente tesis se adentra específicamente en las variaciones de temperatura resultantes del fenómeno calórico provocado por la alteración del flujo AB. Esta distinción conceptual es vital para comprender la naturaleza específica del efecto estudiado aquí y destacar su carácter único en el contexto de la respuesta térmica del sistema.

# Capítulo 4

## Efecto calórico debido al flujo de Aharonov-Bohm en un antidot semiconductor

### 4.1. Efecto calórico en ausencia de campo magnético externo

Comenzaremos nuestra discusión de los resultados examinando el comportamiento del efecto calórico en ausencia de un campo magnético externo, utilizando parámetros específicos:  $\omega_0 = 4.4$  THz (equivalente a una energía del orden de  $\sim 2.896$  meV) y  $m^* = 0.067m_e$  (GaAs) [82, 104]. Se ha seleccionado este conjunto de parámetros para analizar distintos valores de  $a$  en el rango de 1 a 10. Es fundamental destacar que el material considerado es no magnético y se caracteriza como un sistema de electrones libres, es decir, sin la presencia de momentos magnéticos asociados a sitios atómicos, como ocurre en el caso de Fe, Ni, Co, entre otros. En este contexto, los electrones cuasi-libres pueden ser confinados en una heteroestructura semiconductor, como GaAs y  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  ( $x = 0.3$ ) [105].

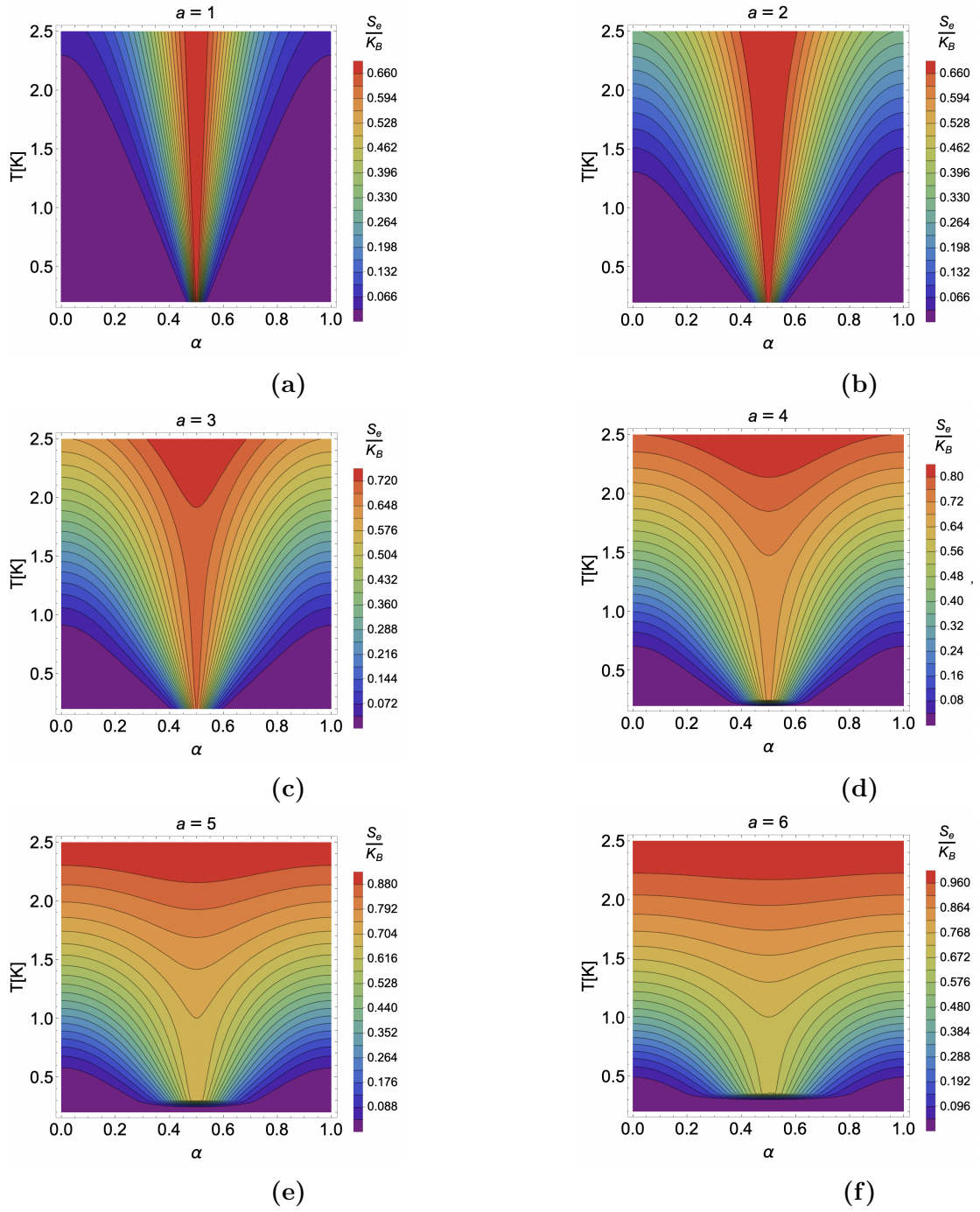
La brecha energética del GaAs a temperatura ambiente es de 1.43 eV, mientras que para el AlAs es de 1.79 eV [105]. Como resultado, los electrones en GaAs experimentan un confinamiento en un pozo potencial unidimensional a lo largo de la dirección "z". En esta situación, los electrones quedan atrapados

en un espacio 2D, permitiendo la aplicación de un campo magnético externo  $B$  a lo largo del eje "z", que en este primer análisis de resultados es nulo. Estos electrones son cuasi-libres, lo que indica que están deslocalizados y susceptibles a ser confinados por campos magnéticos elevados, aunque no poseen momentos magnéticos asociados a los sitios atómicos.

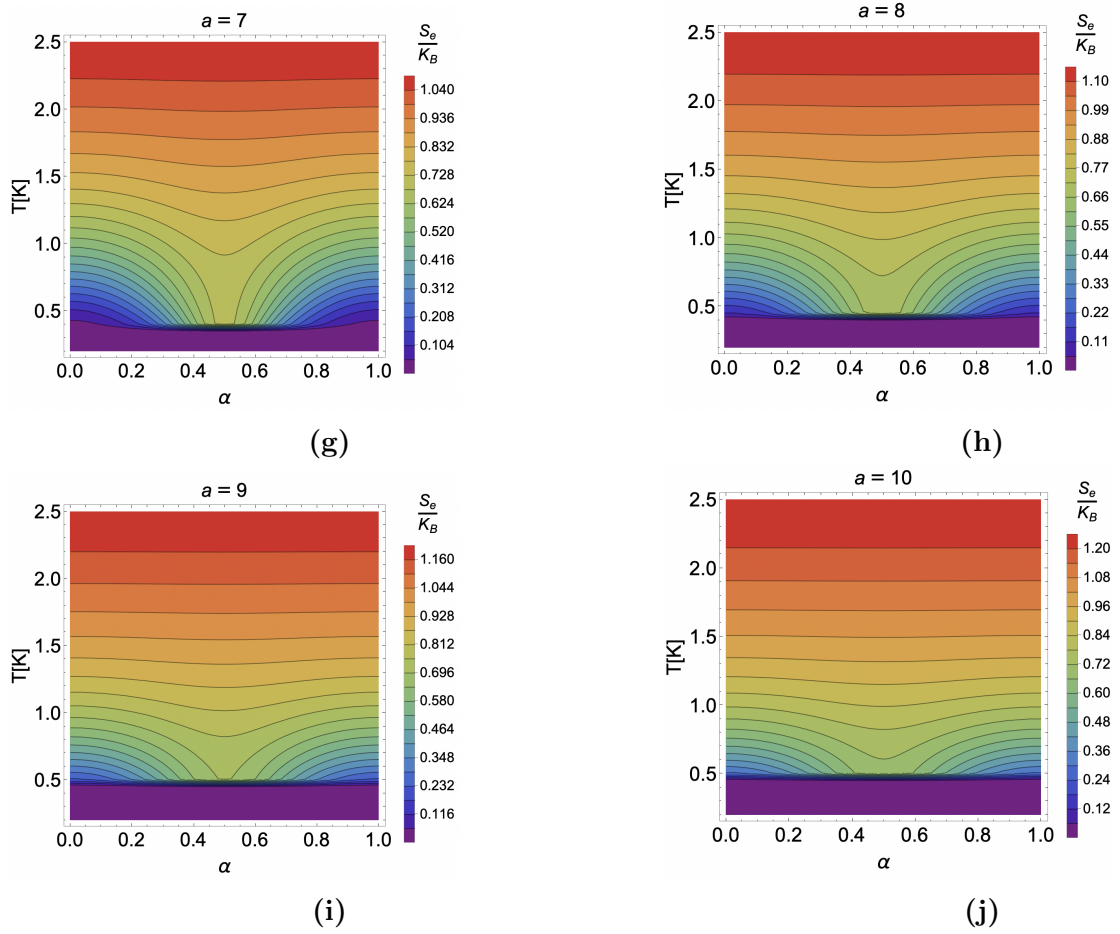
Posteriormente, sometemos el antidot a un potencial vectorial magnético generado por la corriente a través de un solenoide situado de manera perpendicular al sistema, dentro del agujero del antidot. Este aspecto se relaciona con el fenómeno de Aharonov-Bohm.

En la Figura 4.1.1, se presentan los gráficos de contorno para un proceso isentrópico definido por  $S_e(T, 0, \alpha) = \text{cte.}$ , permitiéndonos obtener directamente la relación entre la temperatura y  $\alpha$  (relacionado al flujo AB). A partir de estos gráficos, se observa un comportamiento inicial decreciente seguido de un aumento en la temperatura. Esto indica que, dependiendo del valor inicial tomado como referencia para iniciar el proceso, el sistema puede experimentar un enfriamiento o calentamiento. Además, se destaca que, independientemente del tamaño del antidot (parametrizado por  $a$ ), el efecto se maximiza en todos los casos cuando  $\alpha = 0.5$  en ausencia de campo magnético externo.

Es importante notar que, aunque la intensidad varía, a medida que aumenta el valor de  $a$ , la variación de temperatura disminuye. En otras palabras, el efecto calórico tiende a desaparecer, siendo más pronunciado para  $a = 3$ , como se muestra en la Figura 4.1.1c. Por ejemplo, desde el caso  $a = 6$  (Figura 4.1.1f) hasta el caso  $a = 10$  (Figura 4.1.1j), se observan curvas casi horizontales en los gráficos de contorno, indicando una nula variación de temperatura con cambios en el parámetro  $\alpha$  y, por ende, la pérdida del fenómeno calórico.



**Figura 4.1.1:** Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en función de  $\alpha$  en ausencia de campo magnético externo, para el caso diferentes valores de  $a$ .  $S_e(T, 0, \alpha) = \text{cte.}$  en unidades de  $k_B$ .



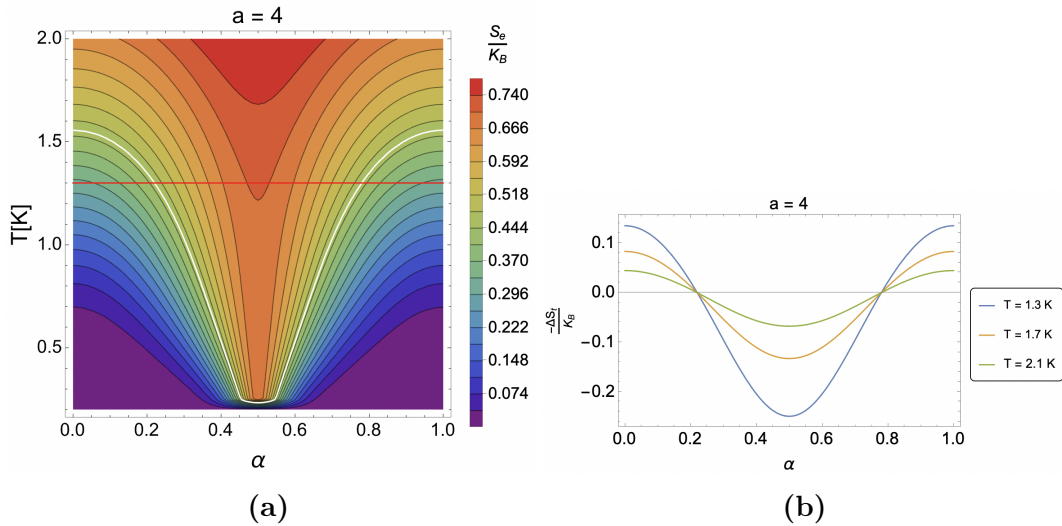
**Figura 4.1.1:** Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en ausencia de campo magnético externo para el caso diferentes valores de  $a$ .  $S_e(T, 0, \alpha) = \text{cte.}$  en unidades de  $k_B$ .

En la Figura 4.1.2, se presenta un caso específico con  $a = 4$ . Para ilustrar el comportamiento decreciente y creciente de la temperatura en el gráfico de contorno, trazamos una trayectoria a temperatura constante de  $T = 1.3$  K (línea horizontal roja en la Figura 4.1.2a). Además, marcamos el proceso de entropía constante en blanco correspondiente a  $S_e(1.3, 0, 0.22)$  (Figura 4.1.2a).

Al analizar la figura, notamos que según la región de  $\alpha$ , la temperatura inicial del sistema puede ser menor o mayor, dependiendo del valor final que tome el parámetro de control. Los puntos a lo largo de la línea blanca que se encuentran por encima de la línea roja indican una temperatura final siempre superior a la inicial, es decir,  $\Delta T_{ad} > 0$ , lo que corresponde a una respuesta calórica directa. Por otro lado, los puntos debajo de la línea roja dan como resultado temperaturas finales inferiores a la temperatura inicial de referencia,

lo que implica  $\Delta T_{ad} < 0$  y, por lo tanto, una respuesta calórica inversa.

Es relevante destacar que el efecto máximo para este caso ocurre cuando  $\alpha = 0.5$ . Más adelante, examinaremos si este patrón se mantiene para todos los rangos de parámetros del modelo. La variación máxima de temperatura observada en este caso es de aproximadamente  $\sim 1$  K en valor absoluto. Esto se evidencia al observar que la temperatura en el punto mínimo del contorno, marcado por la línea blanca en  $\alpha = 0.5$ , es  $T = 0.34$  K, resultando en  $\Delta T = T - 1.3$  K =  $-0.96$  K. Este análisis preliminar sienta las bases para explorar en detalle el comportamiento del efecto calórico en función de los parámetros del sistema.

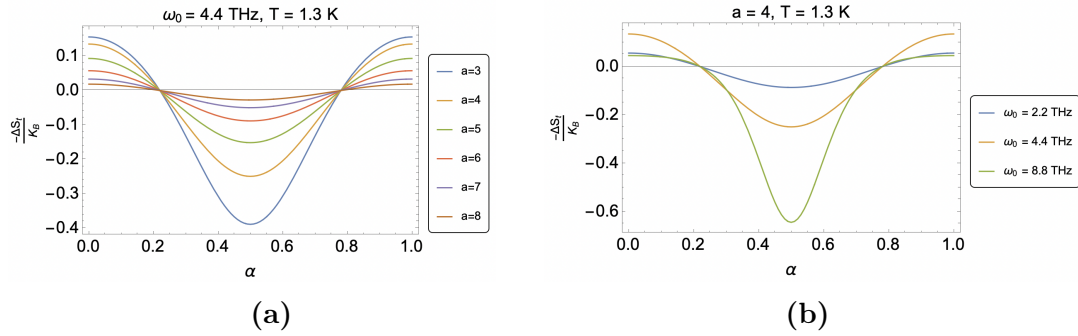


**Figura 4.1.2:** (a) Gráfico de contorno para el caso  $S(T, 0, \alpha) = \text{constante}$ . La línea blanca representa el contorno de  $S_e(1.3, 0, 0.22)$ , mientras que la línea horizontal roja establece una temperatura de 1.3 K como referencia para cuantificar el efecto. (b) Variación de entropía en unidades de  $k_B$  para diferentes temperaturas. En este caso, hemos seleccionado el valor inicial del parámetro  $\alpha$  como 0.22.

Los resultados de la variación de temperatura, analizados a partir de la Figura 4.1.2a, deberían ser coherentes con los obtenidos para  $-\Delta S_t$ . Por ende, se espera encontrar regiones donde este resultado sea positivo y en otras negativo. Esta relación se visualiza en la Figura 4.1.2b, donde se observa un comportamiento oscilatorio para la variación de entropía a temperatura constante en función de  $\alpha$ , alcanzando el mínimo para todas las temperaturas mostradas en  $\alpha = 0.5$ . Además, se aprecia que, para las mismas condiciones iniciales, a temperaturas más altas, el efecto calórico disminuye

considerablemente.

Para ilustrar esto, tomemos el caso  $T = 1.3$  K de la Figura 4.1.2b, que da una  $-\Delta S_t/k_B$  de aproximadamente -0.25; para  $T = 1.7$  K, se obtiene una  $-\Delta S_t/k_B$  de -0.13; y para  $T = 2.1$  K, se tiene una  $-\Delta S_t/k_B$  de -0.07. Estos valores resaltan la sensibilidad de nuestro sistema a la temperatura. La extrapolación de estos resultados sugiere que la variación de entropía tiende a cero a altas temperaturas, haciendo que la respuesta calórica desaparezca gradualmente. Es crucial comprender este comportamiento térmico del sistema para interpretar adecuadamente su respuesta ante diferentes condiciones termodinámicas.

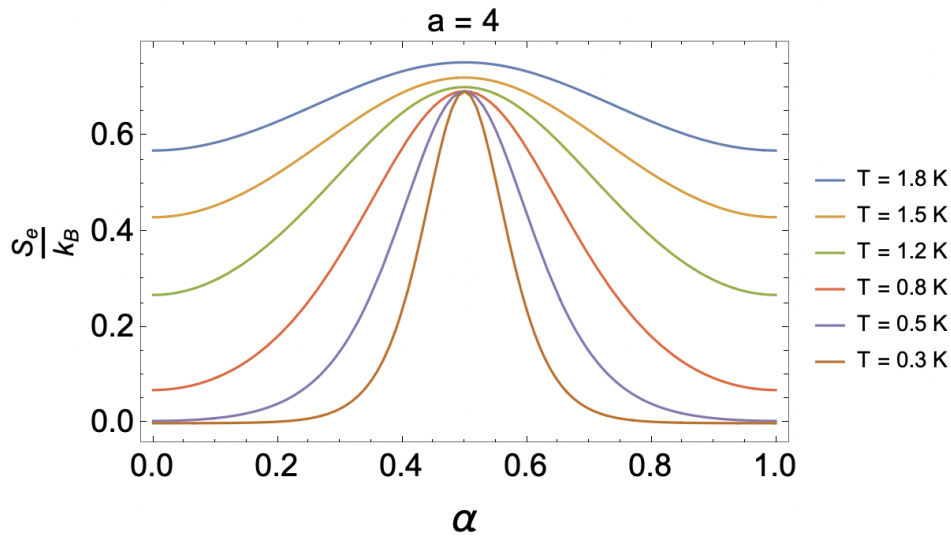


**Figura 4.1.3:**  $-\Delta S_t$  en unidades de  $k_B$ , calculado como  $S(1,3,0,0,22) - S(1,3,0,\alpha)$ , donde (a) se presenta para diferentes valores de  $a$ , y (b) se muestra para distintos valores de  $\omega_0$ .

Ahora, exploremos cómo varía el efecto calórico en función del tamaño del antidot, representado por el parámetro  $a$ . En la Figura 4.1.3a, se muestra la variación de la entropía en relación con  $\alpha$ , manteniendo constantes la temperatura inicial (1.3 K), el campo magnético externo nulo y variando el flujo AB asociado al parámetro  $\alpha$  de 0 a 1. Observamos que a medida que aumenta el tamaño del antidot, el efecto calórico tiende a disminuir, concordando con el análisis de la Figura 4.1.1. Esto se debe a que, al examinar el espectro de energía según la Ecuación (2.4),  $\alpha$  (que oscila entre 0 y 1 en este estudio) se vuelve insignificante en comparación con los valores de  $a$  presentados. Como resultado, las pequeñas variaciones de  $\alpha^2$  no compensarán el término cuadrático de  $a^2$  en la energía, lo que hace que los cambios térmicos sean menos evidentes cuando se utiliza el flujo AB como parámetro de control

del modelo.

Otro parámetro ajustable corresponde a la frecuencia de la trampa parabólica,  $\omega_0$ . La Figura 4.1.3b exhibe la variación de la entropía respecto a  $\alpha$  para diferentes frecuencias de acoplamiento, manteniendo constantes los parámetros de temperatura, campo magnético externo nulo y valor inicial de  $\alpha$ . A medida que  $\omega_0$  aumenta, el efecto calórico propuesto también se incrementa. Esta observación es coherente con el comportamiento del parámetro  $a$ , donde discutimos que a medida que  $a$  disminuye, el efecto calórico aumenta. En consecuencia, al aumentar la intensidad de la trampa, se confinan más los electrones. Así, ambos efectos combinados, la disminución de  $a$  y el aumento de  $\omega_0$ , conducen a resultados análogos en este modelo.



**Figura 4.1.4:** Entropía en función del parámetro de control  $\alpha$  para distintos valores de temperatura, abarcando el rango desde 0.3 K hasta 1.8 K.

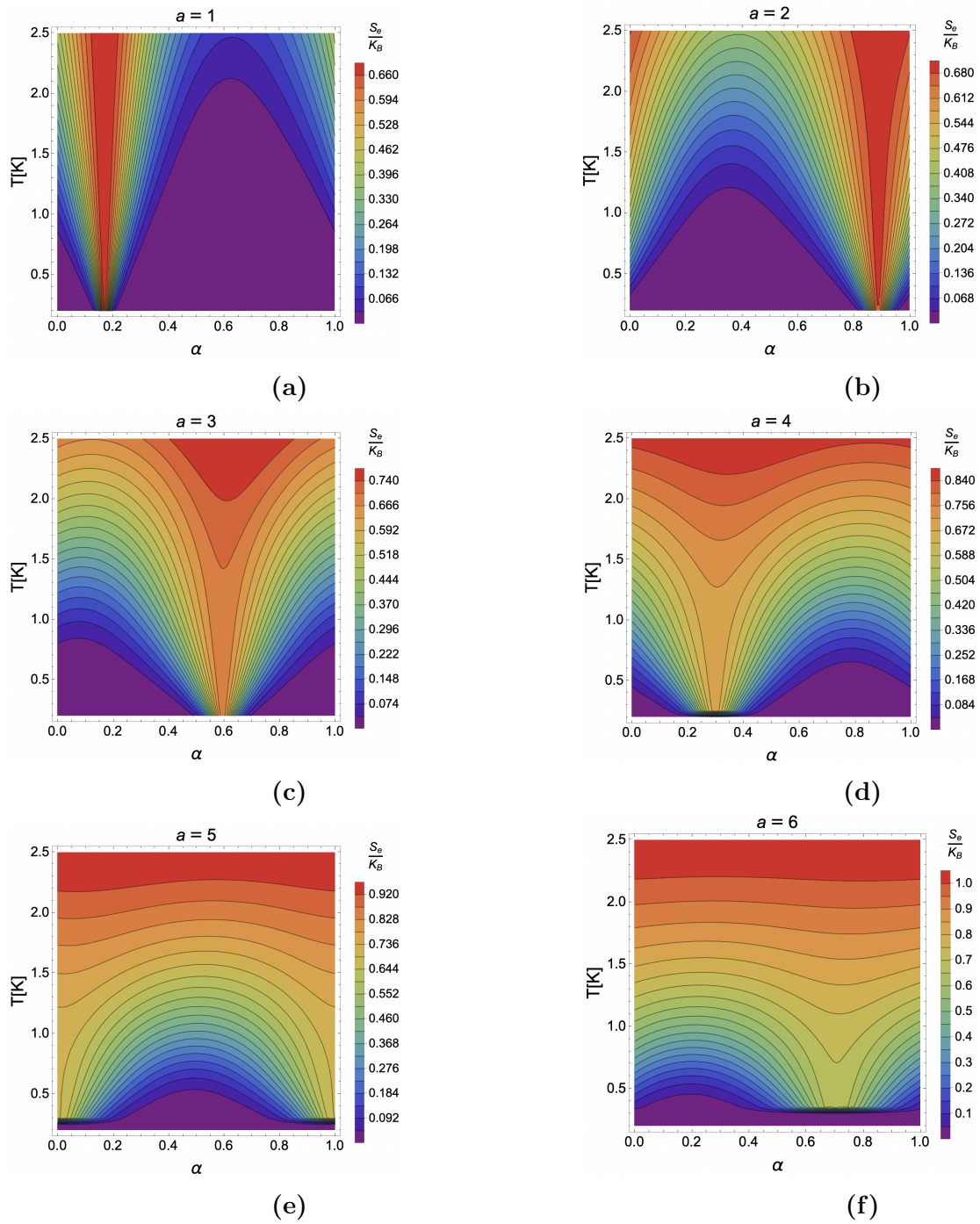
Este interesante hallazgo sobre la ubicación del máximo efecto calórico en ausencia de un campo magnético externo puede explicarse a través del gráfico de entropía en función del parámetro  $\alpha$  que se muestra en la Figura 4.1.4 para el caso de  $S(T, 0, \alpha)$ . Aquí,  $T$  toma diferentes valores entre 1.8 K y 0.3 K. La entropía para cualquier  $T$  exhibe claramente un máximo en  $\alpha = 0.5$ , independientemente del valor de  $T$ . Por lo tanto, el pico del fenómeno calórico siempre se localiza en el mismo punto. Notablemente, los cambios más pronunciados ocurren a temperaturas más bajas. En contraste, a medida que la

temperatura aumenta, la entropía apenas varía en relación con el parámetro  $\alpha$ , generando curvas horizontales, y no se observa ningún efecto calórico vinculado a la desviación del flujo AB, consistente con la Figura 4.1.2b.

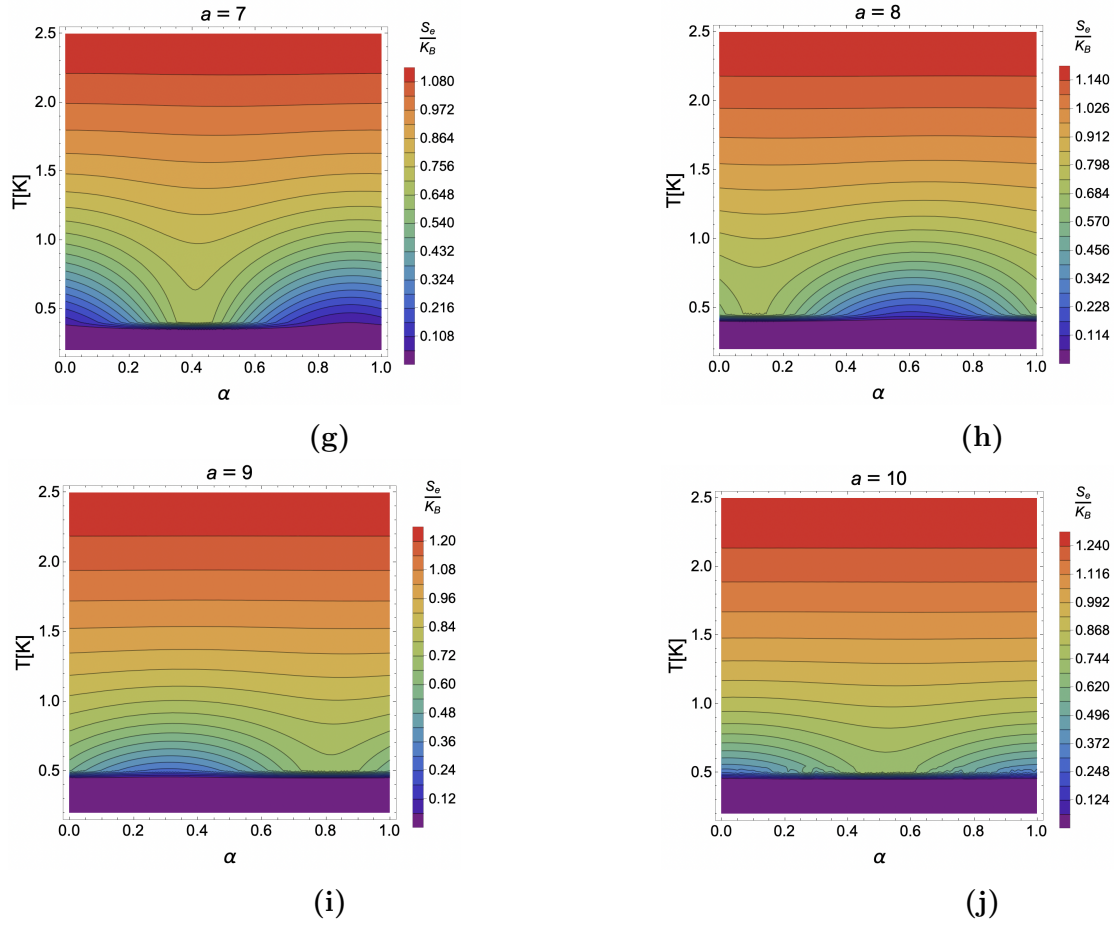
En resumen, según lo discutido en esta primera sección, la configuración óptima para lograr una respuesta calórica notable en este sistema sin la presencia de un campo magnético externo implica una temperatura baja ( $T < 2$  K), un tamaño de antidot reducido ( $a < 3$ ) y un confinamiento parabólico elevado.

## 4.2. Efecto calórico en presencia de campo magnético externo

En esta sección, examinaremos el caso en el que se introduce un campo magnético externo perpendicular a la estructura anular (constante) mientras se llevan a cabo procesos termodinámicos que varían el parámetro  $\alpha$ . La Figura 4.2.1 presenta contornos de entropía constante de  $S_e(T, 1, 0.22)$  para diferentes tamaños de antidot, es decir, diversos valores de  $a$ , manteniendo constante un campo magnético externo de 1 T.



**Figura 4.2.1:** Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en presencia de un campo magnético externo de 1 T, mostrando la variación con respecto a  $\alpha$  para diferentes valores de  $a$ . Los contornos representan  $S_e(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$  en unidades de  $k_B$ .

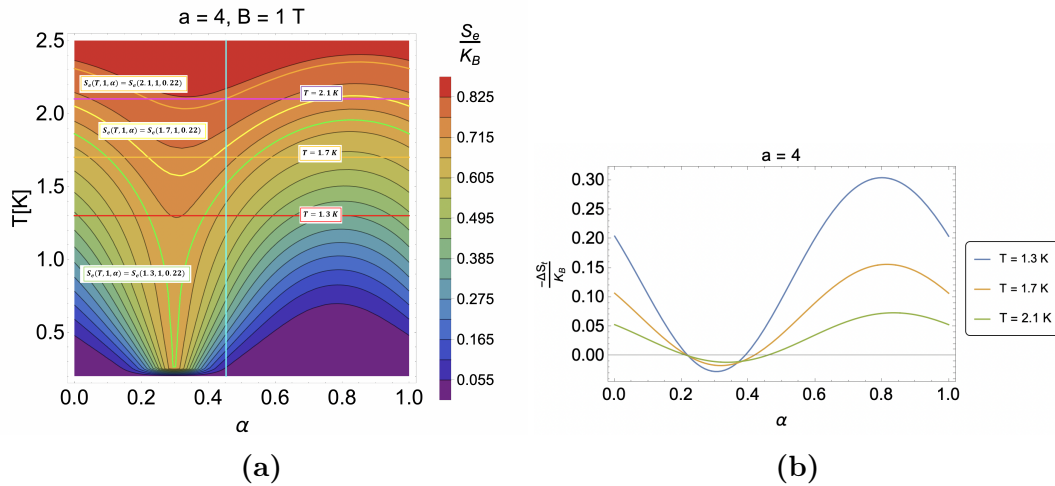


**Figura 4.2.1:** Gráficos de contorno para un proceso isentrópico en presencia de un campo magnético externo de 1 T, mostrando la variación con respecto a  $\alpha$  para diferentes valores de  $a$ . Los contornos representan  $S_e(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$  en unidades de  $k_B$ .

En la Figura 4.2.1, se presentan las curvas de nivel correspondientes al caso de  $S(T, 1, \alpha) = \text{cte.}$  Se evidencia la ruptura de simetría en el efecto calórico inducido por el campo magnético externo para distintos tamaños del antidot. Al igual que en la situación sin campo magnético externo analizada en la sección 4.1, se confirma que el efecto disminuye a medida que  $a$  aumenta. En cuanto a la magnitud del efecto, no se percibe un incremento ni disminución notable del fenómeno calórico debido al campo magnético externo. En consecuencia, el campo magnético constante perpendicular al material genera principalmente un desplazamiento en el espacio del parámetro  $\alpha$ , donde se produce el cambio de una respuesta directa a una respuesta inversa, y viceversa. Este desplazamiento del máximo en los fenómenos calóricos puede ser beneficioso, ya que es posible encontrar configuraciones que maximizan el efecto para incrementos pequeños

de  $\alpha$  (cerca de cero). Experimentalmente, esto implicaría la necesidad de menos corriente para atravesar el solenoide, generando un flujo AB menor, lo cual es rentable y reduce las posibles interacciones adicionales que el sistema pueda tener con su entorno, las cuales podrían alterar la respuesta calórica.

En la Figura 4.2.2a, se muestra un caso particular de contornos de entropía constante para  $a = 4$  de  $S_e(T, 1, 0.22)$ , donde se aprecia que el efecto máximo ahora se produce en otro punto diferente a  $\alpha = 0,5$ . Se observa una ruptura de simetría en la respuesta calórica en comparación con el caso sin campo magnético externo. Además, en la Figura 4.2.2b, la temperatura afecta ahora al punto máximo del efecto y, de nuevo, a diferencia del caso sin campo magnético externo, el máximo para una temperatura fija no se observa para todos los casos en el mismo punto. En otras palabras, el campo magnético externo genera un desplazamiento en la respuesta térmica y efectos de calentamiento directo e inverso no simétricos a la variación del parámetro de control propuesto. Además de modificar la localización del máximo, el campo magnético externo también influye en el cambio de una respuesta inversa a una directa para el efecto calórico.

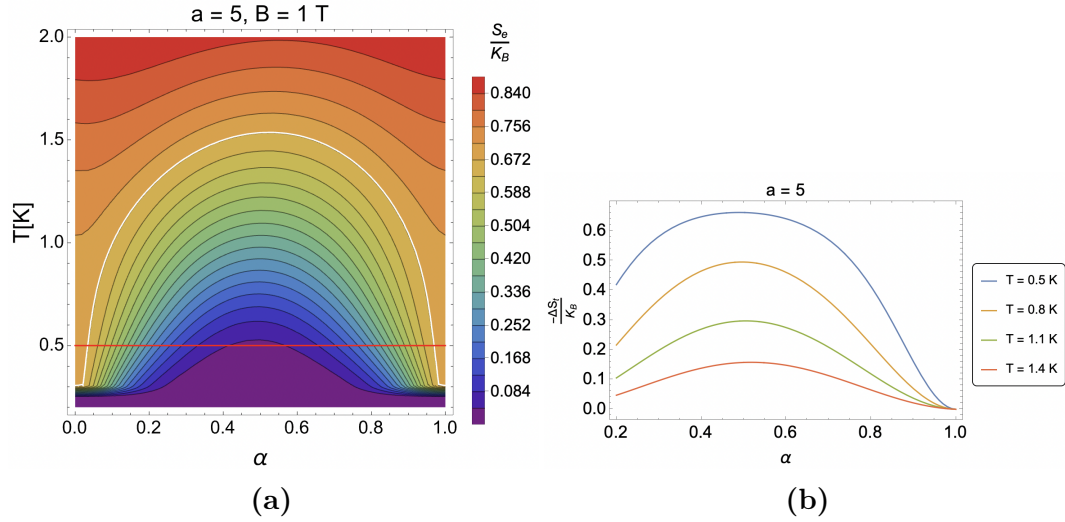


**Figura 4.2.2:** (a) Gráfico de contorno para el caso de  $S(T, 1, 0,22) = \text{cte.}$  con  $a = 4$ . Se han destacado las curvas  $S(T, 1, \alpha) = S(1.3, 1, 0.22)$  (línea verde),  $S(T, 1, \alpha) = S(1.7, 1, 0.22)$  (línea amarilla) y  $S(T, 1, \alpha) = S(2.1, 1, 0.22)$  (línea de contorno naranja). También se incluyen las líneas horizontales que representan procesos isotérmicos a  $T = 1.3$  K (línea horizontal roja),  $T = 1.7$  K (línea horizontal naranja) y  $T = 2.1$  K (línea horizontal rosada). (b) Diferencias de entropía para el caso  $a = 4$  y para  $T = 1.3$  K (línea azul),  $T = 1.7$  K (línea naranja) y  $T = 2.1$  K (línea verde).

Comparemos la Figura 4.1.2b con la Figura 4.2.2b para  $a = 4$ . La transición de una respuesta inversa a una directa en el caso sin campo magnético externo ocurre en el mismo punto del espacio de parámetros  $\alpha$  para cualquier temperatura (con la misma condición inicial). En contraste, en el caso con un campo magnético de 1 T, este punto varía según la temperatura en la cual se realiza el proceso isotérmico. A medida que aumenta la temperatura, la transición de un efecto calórico directo a uno inverso requiere un cambio más pronunciado en el parámetro  $\alpha$  cuando se aplica el campo magnético externo.

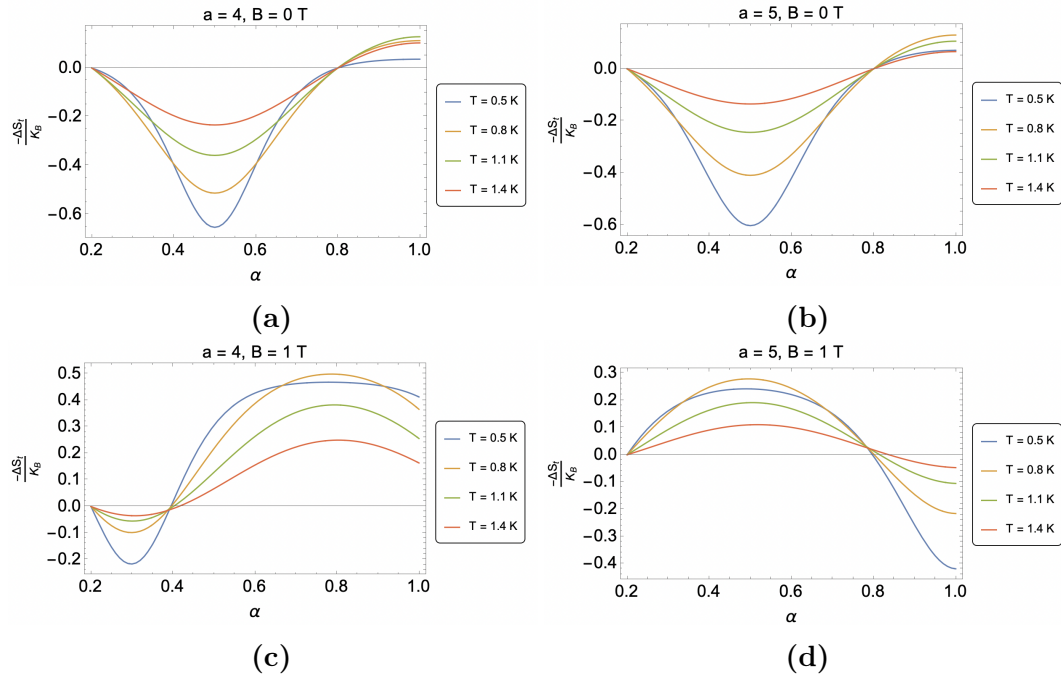
Los distintos puntos en los que se produce el cambio en la respuesta calórica se visualizan en la Figura 4.2.2a, donde se representan los casos  $S_e(T, 1, \alpha) = S_e(1.3, 1, 0.22)$  (línea verde),  $S_e(T, 1, \alpha) = S_e(1.7, 1, 0.22)$  (línea amarilla), y  $S_e(T, 1, \alpha) = S_e(2.1, 1, 0.22)$  (línea naranja), junto con sus respectivas curvas horizontales a temperaturas constantes de  $T = 1.3$  K (línea roja),  $T = 1.7$  K (línea naranja) y  $T = 2.1$  K (línea rosada). Por ejemplo, hemos trazado la línea vertical (línea celeste) en  $\alpha \sim 0.45$ , que es el punto de intersección del efecto para el caso  $T = 2.1$  K. Todos los demás puntos de transición se encuentran antes de ese valor, en coherencia con lo presentado en la Figura 4.2.2b.

En el caso de la Figura 4.2.3, la respuesta calórica siempre será positiva. Esto significa que si comenzamos con  $\alpha = 0.0$  (sin flujo AB, lo que implica inicialmente la ausencia de corriente a través del solenoide) y con una temperatura inicial de 0.5 K, la temperatura final siempre será mayor que la temperatura inicial. La mayor diferencia de temperatura y el efecto calórico más pronunciado se observarán cuando  $\alpha$  aumenta a 0.5.



**Figura 4.2.3:** (a) Gráfico de contorno para el caso de  $S(T, 1, \alpha) = \text{cte}$ . La línea blanca representa el contorno de  $S_e(0.5, 1, 0.0)$ , y la línea horizontal roja establece una temperatura de 0.5 K como referencia para cuantificar el efecto. (b)  $-\Delta S_e$  para diferentes temperaturas. En este caso, se ha seleccionado el valor inicial del parámetro  $\alpha$  como 0.0.

Finalmente, en la Figura 4.2.4, podemos realizar una comparación directa de la influencia del tamaño del antidot tanto en ausencia como en presencia de un campo magnético externo para los casos de  $a = 4$  y  $a = 5$ , considerando distintos valores de temperatura constante. Se observa que sin campo magnético externo, el máximo efecto se produce en  $\alpha = 0.5$  y la transición de una respuesta inversa a una directa ocurre en  $\alpha = 0.8$ , tanto para  $a = 4$  como para  $a = 5$ . Es decir, independientemente del tamaño del antidot, el máximo efecto calórico y la transición de la respuesta siempre tienen lugar en el mismo valor de  $\alpha$ . En contraste, con campo magnético externo se aprecian cambios significativos, ya que el máximo efecto calórico no ocurre siempre en el mismo punto; en consecuencia, la transición del efecto se da en diferentes valores de  $\alpha$  con pequeñas variaciones.

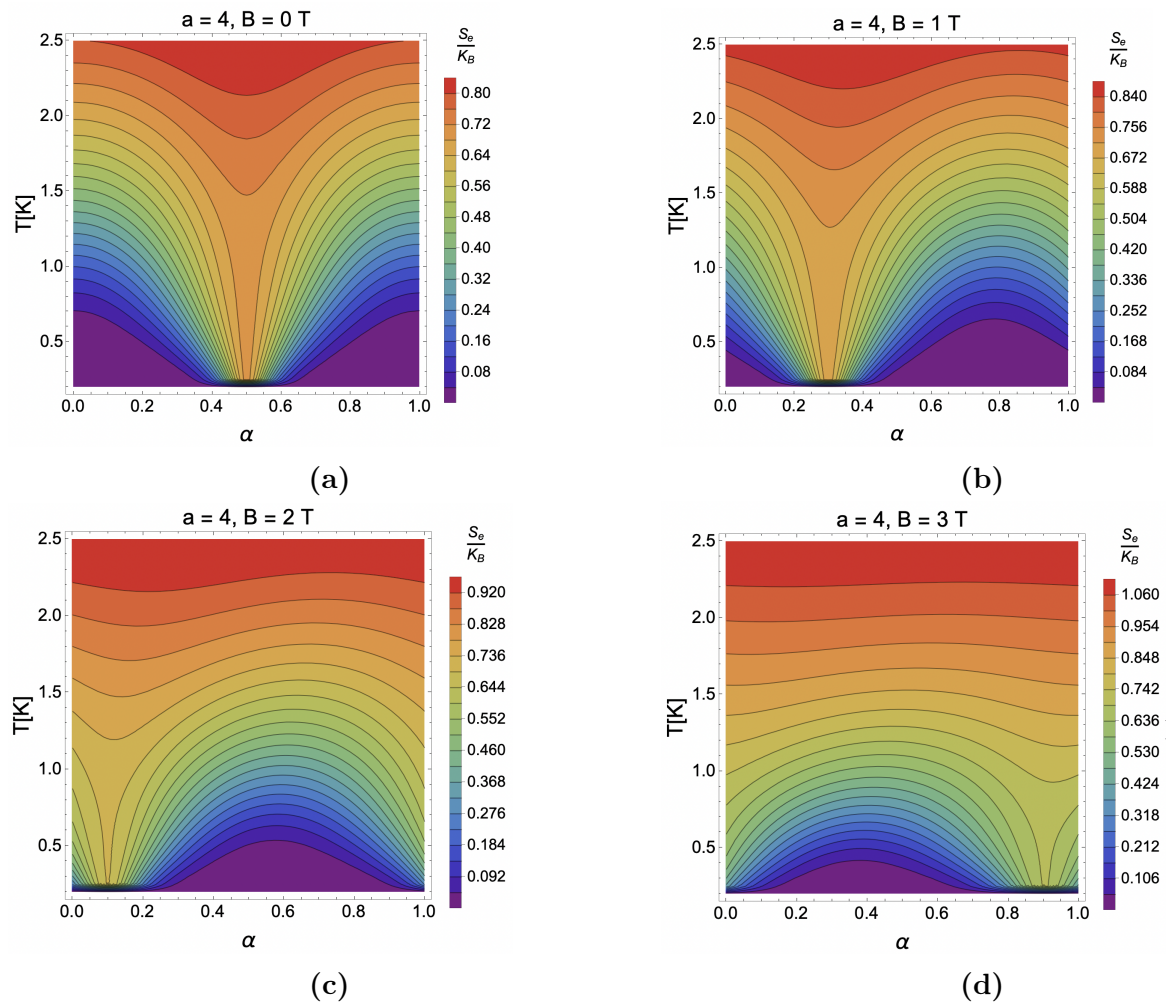


**Figura 4.2.4:**  $-\Delta S_e$  en unidades de  $k_B$  para diferentes valores de temperatura constante, considerando los casos de (a)  $a = 4$  sin campo magnético externo, (b)  $a = 5$  sin campo magnético externo, (c)  $a = 4$  con campo magnético externo, y (d)  $a = 5$  con campo magnético externo.

Examinemos la respuesta térmica en condiciones donde la intensidad del campo magnético externo supera 1 T. La Figura 4.2.5 ofrece una visión detallada del impacto en el efecto calórico a medida que se incrementa la intensidad del campo magnético externo, manteniéndolo constante en este análisis. Se presentan representaciones para los casos de  $B = 0$  T y  $B = 1$  T, junto con  $B = 2$  T y  $B = 3$  T. Los gráficos de contorno ilustran las variaciones en la temperatura para un proceso isentrópico específico, considerando un tamaño de antidot  $a = 4$ .

Al analizar estos resultados, observamos cómo la intensificación del campo magnético externo afecta el comportamiento del efecto calórico. La comparación entre los casos de  $B = 0$  T y  $B = 1$  T resalta cambios en la respuesta térmica, proporcionando una perspectiva sobre cómo la presencia de un campo magnético más fuerte modifica el perfil de temperatura en el sistema. Al aumentar la intensidad a  $B = 2$  T y  $B = 3$  T, se aprecian nuevas alteraciones en la distribución de temperaturas, lo que indica una mayor influencia del campo magnético en los procesos termodinámicos.

Es esencial destacar que, para cada nivel de intensidad del campo magnético externo, el tamaño del antidot sigue siendo  $a = 4$ . Esta constante nos permite evaluar específicamente el impacto del campo magnético en la respuesta térmica, proporcionando valiosa información sobre cómo la variación de este parámetro afecta la respuesta térmica en el sistema.

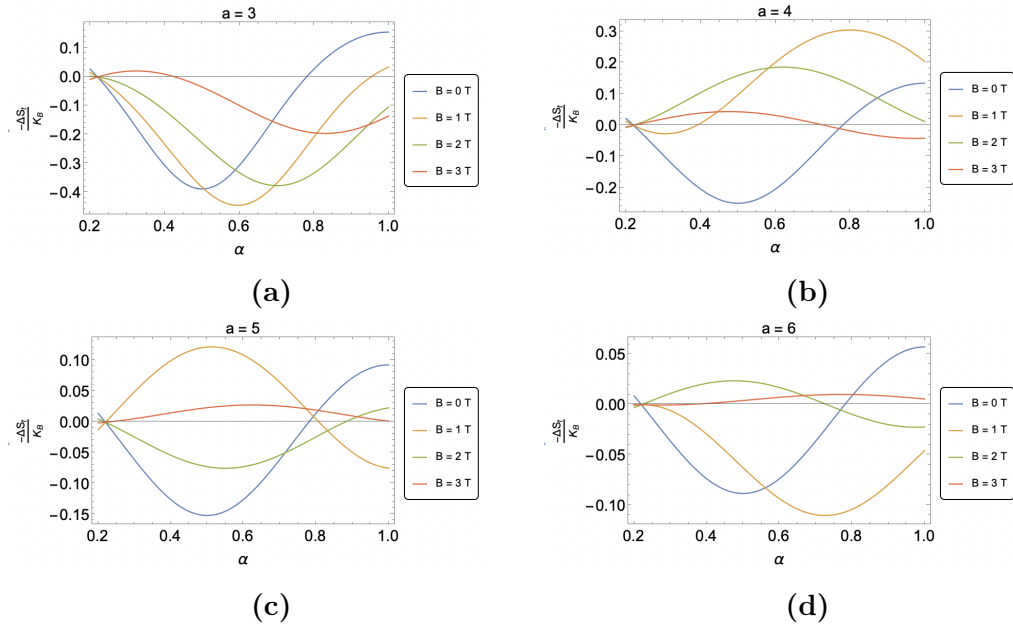


**Figura 4.2.5:** Gráficos de contorno que representan un proceso isentrópico en relación con el parámetro  $\alpha$ , considerando diversos valores de intensidad del campo magnético externo  $B$ , para el caso con  $a = 4$ .

Se confirma el análisis de la Figura 4.2.1 al considerar el caso  $B = 1$  T, donde se evidencia un desplazamiento en el punto de máximo efecto calórico. En la Figura 4.2.5c, se observa que el valor de  $\alpha$  correspondiente al punto de máximo efecto calórico es aún menor cuando  $B = 1$  T. Este descubrimiento podría resultar altamente beneficioso desde una perspectiva

experimental, ya que implica la necesidad de aplicar una corriente menor a través del solenoide para obtener la misma respuesta térmica. Sin embargo, se observa que a medida que aumenta la intensidad del campo magnético externo, se disipa el efecto calórico, ya que las curvas de contorno se atenúan a temperaturas más elevadas. Es decir, la variación de temperatura disminuye gradualmente, siendo la Figura 4.2.5d con  $B = 3 \text{ T}$  el caso más destacado, donde se aprecia que el efecto calórico ya no es discernible por encima de la temperatura de  $1.5 \text{ K}$ . Esto contrasta con  $B = 1 \text{ T}$ , donde el fenómeno es apreciable hasta aproximadamente una temperatura de  $2.5 \text{ K}$ . Además, este comportamiento resalta la sensibilidad del sistema a cambios en la intensidad del campo magnético externo, indicando que ajustes precisos en este parámetro son esenciales para optimizar la respuesta térmica del sistema.

Al contrastar estos resultados con los gráficos de la Figura 4.2.6, que representan la variación de entropía para un proceso isotérmico bajo diferentes intensidades de campo magnético externo, tanto para el caso particular de  $a = 4$  como para otros valores de  $a$ , se evidencia una coherencia en los hallazgos. Destacamos que la máxima variación de entropía en la mayoría de los casos se registra para  $B = 0 \text{ T}$  y  $B = 1 \text{ T}$ . Asimismo, se observa que, para valores pequeños de  $a$ , el máximo efecto calórico se manifiesta con intensidades similares para los cuatro valores de campo magnético externo. Sin embargo, a medida que el valor de  $a$  aumenta, especialmente a partir de  $a = 4$ , el efecto comienza a disiparse para valores de campo de  $B = 2 \text{ T}$  y  $B = 3 \text{ T}$ .



**Figura 4.2.6:** Variación de entropía en unidades de  $k_B$  a temperatura constante  $T = 1.3$  K, para distintos valores de campo magnético externo y distintos valores de  $a$ .

Este análisis proporciona un parámetro de control adicional que podemos aprovechar. La capacidad de seleccionar valores específicos de  $a$ , combinados con valores particulares del campo magnético  $B$ , nos permite modular la respuesta térmica según nuestras necesidades, ya sea para enfriar o calentar un sistema a una temperatura específica. Este enfoque de ajuste más específico ofrece una versatilidad valiosa en la optimización de la respuesta calórica del sistema, brindando mayor flexibilidad en la adaptación a condiciones experimentales y aplicaciones específicas.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta investigación, hemos explorado la presencia de un efecto calórico vinculado a la variación del flujo Aharonov-Bohm en un sistema tipo antidot semiconductor expuesto a un campo magnético fijo perpendicular al mismo. Nuestros resultados revelan que en la ausencia de este campo externo, el efecto alcanza su máxima expresión para todos los casos estudiados en un valor específico de  $\alpha = 0.5$  del flujo Aharonov-Bohm, independientemente de la temperatura que caracterice el proceso. Sin embargo, la incorporación del campo magnético externo introduce una alteración significativa en la ubicación donde se maximiza el efecto. Esta modificación brinda la oportunidad de optimizar el efecto cerca de  $\alpha = 0$ , lo que implica que se requeriría una corriente menor a través del solenoide para medir una variación  $\Delta T$  equivalente en comparación con el caso sin campo magnético externo.

Observamos que los efectos calóricos son más pronunciados a temperaturas muy bajas, ya que, en el orden de  $\sim 3$  K, la respuesta térmica se ve prácticamente anulada tanto en presencia como en ausencia de campo magnético externo. Además, destacamos que la variación de temperatura asociada al cambio de entropía es más significativa en presencia de tamaños pequeños de antidot en comparación con tamaños mayores. También hemos examinado el impacto de la intensidad de la trampa parabólica en el sistema, demostrando que a medida que aumenta el valor de la trampa, la respuesta calórica se vuelve más notable. En términos del efecto de la intensidad del campo magnético externo, notamos que la máxima respuesta calórica se observa principalmente para  $B = 0$  T y  $B = 1$  T. Sin embargo, a medida que

el parámetro  $a$  aumenta, el efecto calórico tiende a disiparse, especialmente para  $B = 2$  T y  $B = 3$  T. En última instancia, estos hallazgos proporcionan un entendimiento más profundo de las condiciones que optimizan la respuesta térmica en este sistema, lo cual es esencial para su uso en futuras aplicaciones prácticas.

Finalmente, resaltamos uno de los aspectos más interesantes de nuestra investigación: en la ausencia de un campo magnético externo, al ajustar la intensidad del parámetro asociado al flujo Aharonov-Bohm, observamos variaciones significativas de temperatura, del orden de  $\sim 1$  K para  $\omega_0 = 4.4$  THz, donde  $\omega_0$  representa el parámetro de confinamiento parabólico. Es importante destacar que el flujo Aharonov-Bohm tiene una débil incidencia o acoplamiento en la entropía fonónica del sistema en comparación con el efecto que tendría un campo magnético externo sobre los fonones. Esta particularidad es una ventaja, ya que la entropía fonónica tiende a ser dominante en los fenómenos calóricos en comparación con otras entropías del sistema. Aunque generalmente se modela como una función que depende únicamente de la temperatura ( $T$ ), su dependencia del parámetro que controla el fenómeno calórico añade una capa adicional de complejidad. Por lo tanto, esta contribución no podría ser fácilmente compensada o cancelada en un camino isotérmico, lo cual puede complicar la medición pura de la variación de temperatura de la entropía de la sustancia debido a cambios en su parámetro de control. En función de estas consideraciones, esta propuesta surge como un tema de interés experimental, especialmente en relación con los efectos calóricos y sus posibles aplicaciones tecnológicas. La capacidad de manipular la respuesta térmica mediante ajustes precisos en el flujo Aharonov-Bohm, sin la interferencia significativa de la entropía fonónica, presenta un enfoque prometedor para su exploración en el ámbito experimental y, por ende, para futuras aplicaciones tecnológicas.

# Apéndice A

## Contribución efecto de Aharonov-Bohm

### A1. Campo magnético $\mathcal{H}$ y flujo AB

En este apéndice, calcularemos la contribución de la parte Aharonov-Bohm al hamiltoniano del sistema y, por ende, a los niveles de energía del electrón.

Para determinar el flujo de Aharonov-Bohm ( $\Phi_{AB}$ ) a través del solenoide, utilizamos la ley de Gauss. Esto nos lleva a la expresión:

$$\Phi_{AB} = \int \mathcal{H} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

Donde  $\mathcal{H}$  es el campo magnético generado por la corriente a través del solenoide.

Debido a la simetría, la magnitud del campo magnético  $\mathcal{H}$  creado en el interior del solenoide es constante a lo largo de una trayectoria circular de radio  $s$  centrada en el solenoide. Aplicando la ley de Ampère [106], obtenemos:

$$\oint \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathcal{I}_{enc} \quad (\text{A.2})$$

En la región fuera del solenoide, la trayectoria amperiana de longitud  $d\mathbf{l}$  no encierra carga, lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathcal{H}L = \mu_0 \mathcal{I}_{enc} = 0 \quad (\text{A.3})$$

En el interior del solenoide, la trayectoria amperiana encierra corriente, y así obtenemos:

$$\mathcal{H}L = \mu_0 \mathcal{I}_{enc} = \mu_0 N \mathcal{I}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $N$  es el número de vueltas y  $L$  es la longitud del solenoide. Simplificando la ecuación, nos queda:

$$\mathcal{H} = \frac{\mu_0 N \mathcal{I}}{L} = \mu_0 n \mathcal{I}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $n$  es el número de vueltas por unidad de longitud.

Finalmente, el campo magnético  $\mathcal{H}$  existe solo en la región interior del solenoide, en la dirección del eje  $z$ :

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathcal{H} \hat{z} = \mu_0 n \mathcal{I} \hat{z} & \text{si } r \leq r_s, \\ 0 & \text{si } r > r_s. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, al hacer uso de la Ecuación A.1, obtenemos que dentro del solenoide, el flujo AB para radios inferiores al radio del solenoide ( $r_s$ ) se expresa como:

$$\Phi_{AB} = \mu_0 n \mathcal{I} (\pi r^2) \quad (\text{A.7})$$

De manera análoga, fuera del solenoide, el flujo AB toma la forma:

$$\Phi_{AB} = \mu_0 n \mathcal{I} (\pi r_s^2) \quad (\text{A.8})$$

Recordemos que el parámetro  $\alpha$  está relacionado al flujo AB mediante la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \quad (\text{A.9})$$

Donde  $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$  representa el cuanto de flujo magnético. Por lo tanto, para  $\alpha = 0.5$ , el valor del flujo AB es  $\Phi_{AB} = 10^{-15} \text{ Tm}^2$ .

Además, utilizando estos valores, podemos calcular el campo magnético dentro del solenoide con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{\mathcal{A}\mathcal{H}}{\Phi_0} = \frac{\pi r_s^2 \mathcal{H}}{\Phi_0} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{\alpha \Phi_0}{\pi r_s^2} \quad (\text{A.10})$$

Considerando los avances tecnológicos recientes que permiten la fabricación de nanosolenoides con un radio de  $r_s = 35 \text{ nm}$ , el campo magnético dentro del solenoide es  $\mathcal{H} = 0.26 \text{ T}$ .

## A2. Potenciales vectoriales

El potencial vectorial total implica la suma de dos términos,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , donde  $\mathbf{A}_1$  es el potencial vectorial debido al campo magnético externo  $\mathbf{B}$  perpendicular al sistema en la dirección del eje  $z$ . Tenemos que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1$ , por lo que el potencial vector  $\mathbf{A}_1$  queda:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{Br}{2} \hat{\phi} \quad (\text{A.11})$$

Para el caso de  $\mathbf{A}_2$ , es el potencial vectorial debido al flujo AB, es decir, que está relacionado con el campo magnético  $\mathcal{H}$ , generado por la corriente al interior de un solenoide infinito de radio  $r_s$ .

Aplicamos el teorema de Stokes, y tenemos que

$$\oint \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathcal{H} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{A.12})$$

Donde  $S$  es la circunferencia de radio  $r$  centrada en el eje de simetría del

solenoides, por lo que la integral de línea en la Ecuación A.12 nos queda

$$\oint \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \Phi_{AB}$$

$$A_2(2\pi r) = \Phi_{AB}$$

$$A_2 = \frac{\Phi_{AB}}{2\pi r} \quad (\text{A.13})$$

En la dirección de la corriente (azimutal)  $\mathbf{A}_2 = \frac{\Phi_{AB}}{2\pi r} \hat{\phi}$ .

Finalmente, al sustituir las expresiones A.7 y A.8 de  $\Phi_{AB}$  en la Ecuación A.13, obtenemos que la magnitud del potencial vectorial es:

$$A_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 n \mathcal{I} (\pi r)}{2} & \text{si } r < r_s, \\ \frac{\mu_0 n \mathcal{I} (r_s^2)}{2r} & \text{si } r \geq r_s. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

De esta manera, observamos que existe un potencial vectorial tanto dentro como fuera del solenoide, a pesar de que el campo magnético  $\mathcal{H}$  generado por el flujo de Aharonov-Bohm solamente existe dentro del solenoide.

# Bibliografía

- [1] E. N. Bogachek and Landman U. Edge states, aharonov-bohm oscillations, and thermodynamic and spectral properties in a two-dimensional electron gas with an antidot. *Phys. Rev. B*, 52:14067, 1995.
- [2] O. A. Negrete, F. J. Peña, and P. Vargas. Magnetocaloric effect in an antidot: the effect of the aharonov-bohm flux and antidot radius. *Entropy*, 20(11):888, 2018.
- [3] M. S. Reis. Magnetocaloric and barocaloric effects of metal complexes for solid state cooling: Review, trends and perspectives. *Coordination Chemistry Reviews*, 417:213357, 2020.
- [4] K. A. Gschneidner Jr and V. K. Pecharsky. Magnetocaloric materials. *Annual Review of Materials Science*, 30(1):387–429, 2000.
- [5] V. Franco, J. S. Blázquez, J. J. Ipus, J. Y. Law, L. M. Moreno-Ramírez, and A. Conde. Magnetocaloric effect: From materials research to refrigeration devices. *Progress in Materials Science*, 93:112–232, 2020.
- [6] A. M. Fishin and Y. I. Spichkin. *The magnetocaloric effect and its applications*. PCRC Press, 2016.
- [7] E. Warburg. Magnetische untersuchungen. ueber einige wirkungen der coërcitivkraft. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 249:141–164, 1881.
- [8] P. Weiss and A. Piccard. Le pheénomène magnétocalorique. *J. Phys. (Paris)*, 7:103–109, 1917.
- [9] P. Weiss and A. Piccard. Sur un nouveau phénomène magnétocalorique. *Comptes Rendus*, 166:352–354, 1918.
- [10] P. Debye. Einige bemerkungen zur magnetisierung bei tiefer temperatur. *Annals of Physics*, 81:1154–60, 1926.
- [11] W. F. Giaque and D. P. Macdougall. The production of temperatures below one degree absolute by adiabatic demagnetization of gadolinium sulfate. *Journal of the American Chemical Society*, 57:1175–1185, 1935.
- [12] G. V. Brown. Magnetic heat pumping near room temperature. *Journal of Applied Physics*, 47:3673–3680, 1976.

- [13] V. K. Pecharsky and K. A. Jr. Gschneidner. Giant magnetocaloric effect in  $\text{Gd}_5(\text{Si}_2\text{Ge}_2)$ . *Phys. Rev. Lett.*, 78:4494–4497, 1997.
- [14] M. S. Reis. Oscillating magnetocaloric effect. *Appl. Phys. Lett.*, 99:052511, 2011.
- [15] R. Tarasenko, V. Tkáč, A. Orendáčová, M. Orendáč, V. Valentab, V. Sechovský, and A. Feher. Experimental study of magnetocaloric effect in the two-level quantum system  $\text{KTM}(\text{MOO}_4)_2$ . *Physica B: Condensed Matter*, 536:450–453, 2018.
- [16] C. Shao, A. A. Amirov, and H. Huang. A review on different theoretical models of electrocaloric effect for refrigeration. *Frontiers in Energy*, pages 1–26, 2023.
- [17] J. F. Scott. Electrocaloric materials. *Annual Review of Materials Research*, 41:229–240, 2011.
- [18] Y. Jia and Y. Sungtaek Ju. A solid-state refrigerator based on the electrocaloric effect. *Applied Physics Letters*, 100(24), 2012.
- [19] Y. Jia, Y. Sungtaek Ju, S. Qian, Y. Geng, Y. Wang, J. Ling, Y. Hwang, R. Radermacher, and J. Cui. A review of elastocaloric cooling: Materials, cycles and system integrations. *International journal of refrigeration*, 64: 101380, 2016.
- [20] J. Chen, L. Lei, and G. Fang. Elastocaloric cooling of shape memory alloys: A review. *Materials Today Communications*, 28:102706, 2021.
- [21] P. Lloveras and J. L. Tamarit. Advances and obstacles in pressure-driven solid-state cooling: A review of barocaloric materials. *MRS Energy & Sustainability*, 8:3–15, 2021.
- [22] L. Cirillo, A. Greco, and C. Masselli. Cooling through barocaloric effect: A review of the state of the art up to 2022. *Thermal Science and Engineering Progress*, 33:101380, 2022.
- [23] P. Lloveras, E. Stern-Taulats, M. Barrio, J. L. Tamarit, S. Crossley, W. Li, and X. Moya. Giant barocaloric effects at low pressure in ferroelectric ammonium sulphate. *Nature communications*, 6(1):8801, 2015.
- [24] P. Lloveras, A. Aznar, M. Barrio, P. Negrier, C. Popescu, A. Planes, and J. L. Tamarit. Colossal barocaloric effects near room temperature in plastic crystals of neopentylglycol. *Nature communications*, 10(1):1803, 2019.
- [25] A. Pathak, K. A. Gschneidner, and V. K. Pecharsky. Negative to positive magnetoresistance and magnetocaloric effect in  $\text{Pr}_0.6\text{Er}_0.4\text{Al}_2$ . *Journal of Alloys and Compounds*, 621:411–414, 2015.

- [26] J. M. Florez, P. Vargas, C. Garcia, and C. A. Ross. Magnetic entropy change plateau in a geometrically frustrated layered system: FeCrAs-like iron-pnictide structure as a magnetocaloric prototype. *J. Phys. Condens. Matter*, 25(22):226004, 2013.
- [27] M. Hudl, D. Campanini, L. Caron, V. Hoglin, M. Sahlberg, P. Nordblad, and A. Rydh. Thermodynamics around the first-order ferromagnetic phase transition of Fe<sub>2</sub>P single crystals. *Phys. Rev. B*, 90(14):144432, 2014.
- [28] X. F. Miao, L. Caron, P. Roy, N. H. Dung, L. Zhang, W. A. Kockelmann, et al. Tuning the phase transition in transition-metal-based magnetocaloric compounds. *Phys. Rev. B*, 89(17):174429–6, 2014.
- [29] S. Sosin, L. Prozorova, A. Smirnov, A. Golov, I. Berkutov, O. Petrenko, et al. Magnetocaloric effect in pyrochlore antiferromagnet Gd<sub>2</sub>Ti<sub>2</sub>O<sub>7</sub>. *Phys. Rev. B*, 71(9):2005094413, 2005.
- [30] F. Wang, F.-Y. Yuan, J.-Z. Wang, T.-F. Feng, and G.-Q. Hu. Conventional and inverse magnetocaloric effect in Pr<sub>2</sub>CuSi<sub>3</sub> and Gd<sub>2</sub>CuSi<sub>3</sub> compounds. *Journal of Alloys and Compounds*, 592:63–66, 2014.
- [31] Q. Du, G. Chen, W. Yang, J. Wei, M. Hua, H. Du, et al. Magnetic frustration and magnetocaloric effect in AlFe<sub>2-x</sub>Mn<sub>x</sub>B<sub>2</sub> (x = 0–0.5) ribbons. *Journal of Physics D-Applied Physics*, 48(33):335001, 2015.
- [32] M. Balli, D. Fruchart, and R. Zach. Negative and conventional magnetocaloric effects of a MnRhAs single crystal. *Journal of Applied Physics*, 115(20):203909, 2014.
- [33] V. S. Kolat, T. Izgi, A. O. Kaya, N. Bayri, H. Gencer, and S. Atalay. Metamagnetic transition and magnetocaloric effect in charge-ordered Pr<sub>0.68</sub>Ca<sub>0.32-x</sub>Sr<sub>x</sub>MnO<sub>3</sub> (x=0, 0.1, 0.18, 0.26 and 0.32) compounds. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 322(4):427–433, 2010.
- [34] M. H. Phan, M. B. Morales, N. S. Bingham, H. Srikanth, C. L. Zhang, and S.-W. Cheong. Phase coexistence and magnetocaloric effect in La<sub>5/8-y</sub>Pr<sub>y</sub>Ca<sub>3/8</sub>MnO<sub>3</sub> (y = 0.275). *Phys. Rev. B*, 81(9):094413, 2010.
- [35] M. Patra, S. Majumdar, S. Giri, G. N. Iles, and T. Chatterji. Anomalous magnetic field dependence of magnetocaloric effect at low temperature in Pr<sub>0.52</sub>Sr<sub>0.48</sub>MnO<sub>3</sub> single crystal. *Journal of Applied Physics*, 107:076101, 2010.
- [36] K. Szalowski and T. Balcerzak. Normal and inverse magnetocaloric effect in magnetic multilayers with antiferromagnetic interlayer coupling. *Journal of Physics Condensed Matter*, 26(38):386003, 2014.

- [37] A. Midya, N. Khan, D. Bhoi, and P. Mandal. Giant magnetocaloric effect in magnetically frustrated  $euho_2o_4$  and  $eudy_2o_4$  compounds. *Applied Physics Letters*, 101(13):132415, 2012.
- [38] X. Moya, S. Kar-Narayan, and N. D. Mathur. Caloric materials near ferroic phase transitions. *Nature Materials*, 13(5):439–450, 2014.
- [39] F. Guillou, G. Porcari, H. Yibole, N. van Dijk, and E. Bruck. Taming the first-order transition in giant magnetocaloric materials. *Advanced Materials*, 26(17):2671–2675, 2014.
- [40] Y.-Y. Gong, D.-H. Wang, Q.-Q. Cao, E.-K. Liu, J. Liu, and Y.-W. Du. Electric field control of the magnetocaloric effect. *Advanced Materials*, 27(5):801–805, 2014.
- [41] V. B. Nalbandyan, E. A. Zvereva, A. Y. Nikulin, I. L. Shukaev, M.-H. Whangbo, H.-J. Koo, et al. New phase of  $mnsb_2o_6$  prepared by ion exchange: Structural, magnetic, and thermodynamic properties. *Inorganic Chemistry*, 54(4):1705–1711, 2015.
- [42] V. Tkac, A. Orendacova, E. Cizmar, M. Orendac, A. Feher, and A. G. Anders. Giant reversible rotating cryomagnetocaloric effect in  $ker(moo_4)_2$  induced by a crystal-field anisotropy. *Phys. Rev. B*, 92(2):024406–5, 2015.
- [43] R. Tamura, T. Ohno, and H. Kitazawa. A generalized magnetic refrigeration scheme. *Applied Physics Letters*, 104(5):052415–5, 2014.
- [44] R. Tamura, S. Tanaka, T. Ohno, and H. Kitazawa. Magnetic ordered structure dependence of magnetic refrigeration efficiency. *Journal of Applied Physics*, 116(5):053908–13, 2014.
- [45] G. Li, J. Wang, Z. Cheng, Q. Ren, C. Fang, and S. Dou. Large entropy change accompanying two successive magnetic phase transitions in  $tbn_2si_2$  for magnetic refrigeration. *Applied Physics Letters*, 106(18):182405, 2015.
- [46] K. Szałowski and T. Balcerzak. Normal and inverse magnetocaloric effect in magnetic multilayers with antiferromagnetic interlayer coupling. *J. Phys.: Condens. Matter*, 26:386003, 2014.
- [47] J. P. von Ranke, B. P. Alho, B. P. Nóbrega, and N. A. de Oliveira. Understanding the inverse magnetocaloric effect through a simple theoretical model. *Physica B*, 404:056004, 2009.
- [48] J. P. von Ranke, N. A. de Oliveira, B. P. Alho, E. J. R. Plaza, V. S. R. de Sousa, L. Caron, and M. S. Reis. Understanding the inverse magnetocaloric effect in antiferro- and ferrimagnetic arrangements. *J. Phys.: Condens. Matter*, 21:3045–3047, 2009.

- [49] V. I. Zverev, A. M. Tishin, Z. Min, Y. Mudryk, K. A. Gschneidner Jr, and V. K. Pecharsky. Magnetic and magnetothermal properties, and the magnetic phase diagram of single-crystal holmium along the easy magnetization direction. *J. Phys.: Condens. Matter*, 27:146002, 2015.
- [50] V. I. Zverev, A. M. Saletsky, R. R. Gimaev, A. M. Tishin, T. Miyanaga, and J. B. Staunton. Influence of structural defects on the magnetocaloric effect in the vicinity of the first order magnetic transition in  $\text{Fe}_{50.4}\text{Rh}_{49.6}$ . *Applied Physics Letters*, 108:192405, 2016.
- [51] M. S. Reis. Oscillating adiabatic temperature change of diamagnetic materials. *Solid State Communications*, 152:921–923, 2012.
- [52] M. S. Reis. Oscillating magnetocaloric effect on graphenes. *Appl. Phys. Lett.*, 101:222405, 2012.
- [53] M. S. Reis. Step-like features on caloric effects of graphenes. *Physics Letters A*, 378:918–921, 2014.
- [54] M. S. Reis. Magnetocaloric cycle with six stages: Possible application of graphene at low temperature. *Appl. Phys. Lett.*, 107:102401, 2015.
- [55] Z. Z. Alisultanov and M. S. Reis. Oscillating magneto- and electrocaloric effects on bilayer graphenes. *Solid State Communications*, 206:17–21, 2015.
- [56] N. Ma and M. S. Reis. Barocaloric effect on graphene. *Scientific Reports*, 7:13257, 2017.
- [57] V. Franco, K. R. Pirota, V. M. Prida, A. M. J. Neto, A. Conde, M. Knobel, and M. Vazquez. Tailoring of magnetocaloric response in nanostructured materials: Role of anisotropy. *Physical Review B*, 77(10):104434, 2008.
- [58] D. Serantes, V. Vega, W. D. O. D. Rosa, V. M. Prida, B. Hernando, M. Pereiro, and D. Baldomir. Interplay between magnetic anisotropy and dipolar interaction in one-dimensional nanomagnets: Optimized magnetocaloric effect. *Physical Review B*, 86(10):104431, 2012.
- [59] H. R. Sedehi and R. Khordad. Magnetocaloric effect, magnetic susceptibility and specific heat of tuned quantum dot/ring systems. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 134:114886, 2021.
- [60] H. R. Rastegar-Sedehi. Magnetocaloric effect in rashba spin-orbit coupling and zeeman splitting of a narrow nanowire quantum dot. *The European Physical Journal Plus*, 136(5):1–8, 2021.
- [61] Oscar A. Negrete, F. J. Peña, J. M. Florez, and P. Vargas. Magnetocaloric effect in non-interactive electron systems: “the landau problem” and its extension to quantum dots. *Entropy*, 20(8):557, 2018.

- [62] M. Kato, Endo A., Katsumoto S., and Iye Y. Aharonov-bohm-type oscillations in antidot lattices in the quantum hall regime. *Phys. Rev. B*, 77:155318, 2008.
- [63] J. Gräfe, M. Weigand, Stahl C., N. Träger, M. Kopp, G. Schütz, E. Goering, Haering F., P. Ziemann, and Wiedwald U. Combined first-order reversal curve and x-ray microscopy investigation of magnetization reversal mechanisms in hexagonal antidot lattices. *Phys. Rev. B*, 93:014406, 2016.
- [64] J. Gräfe, M. Weigand, Stahl C., N. Träger, G. Schütz, E. Goering, M. Skripnik, U. Nowak, Haering F., P. Ziemann, and Wiedwald U. Geometric control of the magnetization reversal in antidot lattices with perpendicular magnetic anisotropy. *Phys. Rev. B*, 93:104421, 2016.
- [65] D. Weiss, K. Richter, A. Menschig, R. Bergmann, H. Schweizer, K. von Klitzing, and G. Weimann. Quantized periodic orbits in large antidot arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 70:4118, 1993.
- [66] N. Vukmirović, V. Stojanović, and M. Vanević. Electron-phonon coupling in graphene antidot lattices: An indication of polaronic behavior. *Phys. Rev. B*, 81:041408 (R), 2010.
- [67] M. Tornow, Weiss D., K. Klitzing, K. Eberl, E. Bergman, and Y. Strelniker. Anisotropic magnetoresistance of a classical antidot array. *Phys. Rev. Lett.*, 77:147, 1996.
- [68] J. R. Prance, C. G. Smith, J. P. Griffiths, S. J. Chorley, D. Anderson, G. A. C. Jones, I. Farrer, and D. A. Ritchie. Electronic refrigeration of a two-dimensional electron gas. *PRL*, 102:146602, 2009.
- [69] A. Hübel, K. Held, J. Weis, and K. v. Klitzing. Correlated electron tunneling through two separate quantum dot systems with strong capacitive interdot coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 101:186804 (2008), 2008.
- [70] A. Hübel, J. Weis, W. Dietsche, and K. v. Klitzing. Two laterally arranged quantum dot systems with strong capacitive interdot coupling. *Appl. Phys. Lett.*, 91:102101, 2007.
- [71] S. Donsa, Andergassen S., and K. Held. Double quantum dot as a minimal thermoelectric generator. *Phys. Rev. B*, 89:125103, 2014.
- [72] M. Salaheldeen, M. Méndez, V. Vega, A. Fernández, and V. M. Prida. Tuning nanohole sizes in ni hexagonal antidot arrays: Large perpendicular magnetic anisotropy for spintronic applications. *ACS Applied Nano Materials*, 2(4):1866–1875, 2019.
- [73] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

- [74] R. G. Chambers. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, 5(1):3, 1960.
- [75] S. Washburn and R. A. Webb. Aharonov-bohm effect in normal metal quantum coherence and transport. *Advances in Physics*, 35(4):375–422, 1986.
- [76] F. Chi and S. S. Li. Spin-polarized transport through an aharonov-bohm interferometer with rashba spin-orbit interaction. *Journal of Applied Physics*, 100(11), 2006.
- [77] W. Gou, T. Chen, D. Xie, T. Xiao, T. S. Deng, B. Gadway, and B. Yan. Tunable nonreciprocal quantum transport through a dissipative aharonov-bohm ring in ultracold atoms. *Physical Review Letters*, 124(7):070402, 2020.
- [78] R. A. El-Nabulsi. Nonlocal thermodynamics properties of position-dependent mass particle in magnetic and aharonov-bohm flux fields. *Few-Body Systems*, 61(4):37, 2020.
- [79] M. Eshghi, I. A. Azar, and S. Souidi. Effect of the electric and magnetic fields with aharonov-bohm flux field in quantum dots. *International Journal of Nanoscience*, 20(02):2150013, 2021.
- [80] L\_L Chang, Leo Esaki, and R Tsu. Resonant tunneling in semiconductor double barriers. *Applied physics letters*, 24(12):593–595, 1974.
- [81] Raymond Dingle, William Wiegmann, and Charles H Henry. Quantum states of confined carriers in very thin al x ga 1- x as-gaas-al x ga 1- x as heterostructures. *Physical Review Letters*, 33(14):827, 1974.
- [82] L. Jacak, P. Hawrylak, and Wójs. *Quantum Dots*. Springer-Verlag, 1998.
- [83] PM Petroff, AC Gossard, RA Logan, and W Wiegmann. Toward quantum well wires: Fabrication and optical properties. *Applied Physics Letters*, 41(7):635–638, 1982.
- [84] MA Reed, RT Bate, K Bradshaw, WM Duncan, WR Frensley, JW Lee, and HD Shih. Spatial quantization in gaas–algaas multiple quantum dots. *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics Processing and Phenomena*, 4(1):358–360, 1986.
- [85] N Aquino, E Castano, and E Ley-Koo. The aharonov-bohm effect on quantum antidot landau states. *Chinese Journal of Physics*, 41(3):276–287, 2003.
- [86] E Ley-Koo, G Villa-Torres, and D Kouznetsov. Aharonov-bohm effect on landau states in annular cylindrical boxes. *Chinese Journal of Physics*, 40(2):130–141, 2002.

- [87] WC Tan and JC Inkson. Electron states in a two-dimensional ring-an exactly soluble model. *Semiconductor science and technology*, 11(11): 1635, 1996.
- [88] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959. doi: 10.1103/PhysRev.115.485. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485>.
- [89] CWJ Beenakker and Henk van Houten. Quantum transport in semiconductor nanostructures. In *Solid state physics*, volume 44, pages 1–228. Elsevier, 1991.
- [90] Tsuneya Ando and H Fukuyama. *Transport phenomena in mesoscopic systems: proceedings of the 14th Taniguchi symposium, Shima, Japan, November 10-14, 1991*. Springer, 1992.
- [91] Murray Peshkin. The aharonov-bohm effect: Why it cannot be eliminated from quantum mechanics. *Physics Reports*, 80(6):375–386, 1981.
- [92] G. Timp, A. M. Chang, J. E. Cunningham, T. Y. Chang, P. Mankiewich, R. Behringer, and R. E. Howard. Observation of the aharonov-bohm effect for  $\omega_c\tau \gg 1$ . *Phys. Rev. Lett.*, 58:2814–2817, Jun 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.2814. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2814>.
- [93] Sameer M. Ikhdair and Ramazan Sever. Relativistic two-dimensional harmonic oscillator plus cornell potentials in external magnetic and ab fields. *Advances in High Energy Physics*, 2013:562959, 2013. doi: 10.1155/2013/562959. URL <https://doi.org/10.1155/2013/562959>.
- [94] Reza Khordad and Babak Vaseghi. Magnetic properties in three electrons under rashba spin-orbit interaction and magnetic field. *International Journal of Quantum Chemistry*, 119:e25994, 2019. doi: 10.1002/qua.25994. URL <https://doi.org/10.1002/qua.25994>.
- [95] Sameer M. Ikhdair, Babatunde J. Falaye, and Majid Hamzavi. Nonrelativistic molecular models under external magnetic and ab flux fields. *Annals of Physics*, 353:282–298, 2015. ISSN 0003-4916. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.11.017>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491614003376>.
- [96] Collins O. Edet, Akpan N. Ikot, Michael C. Onyeaju, Uduakobong S. Okorie, Gaotsiwe J. Rampho, Mantile L. Lekala, and Savas Kaya. Thermo-magnetic properties of the screened kratzer potential with spatially varying mass under the influence of aharonov-bohm(ab) and position-dependent magnetic fields. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 131:114710, 2021. ISSN 1386-9477. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physe.2021.114710>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S138694772100093X>.

- [97] Clement O. Edet and Akpan N. Ikot. Analysis of the impact of external fields on the energy spectra and thermo-magnetic properties of n<sub>2</sub>, i<sub>2</sub>, co, no and hcl diatomic molecules. *Molecular Physics*, 119:e1957170, 2021. doi: 10.1080/00268976.2021.1957170.
- [98] C. O. Edet, R. Khordad, E. B. Ettah, et al. Magneto-transport and thermal properties of TiH diatomic molecule under the influence of magnetic and aharonov-bohm (ab) fields. *Scientific Reports*, 12:15430, 2022. doi: 10.1038/s41598-022-19396-x. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-022-19396-x>.
- [99] Z. Z. Alisultanov, L. S. Paixão, and M. S. Reis. Oscillating magnetocaloric effect of a multilayer graphene. *Applied Physics Letters*, 105(23):232406, 12 2014. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.4903833. URL <https://doi.org/10.1063/1.4903833>.
- [100] Abdolhossein Sayyari, Mehdi Servatkah, and Ramin Pourmand. Magnetocaloric effect, magnetic susceptibility, heat capacity and optical properties of wedge-shaped quantum dots. *Pramana - Journal of Physics*, 97:75, 2023. doi: 10.1007/s12043-023-02535-y. URL <https://doi.org/10.1007/s12043-023-02535-y>.
- [101] F. Xu, H. Yu, A. Sadrzadeh, and B. Yakobson. Riemann surfaces of carbon as graphene nanosolenoids. *Nano Letters*, 16(1):34–39, 2016.
- [102] Vladimir Fock. Bemerkung zur quantelung des harmonischen oszillators im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, 47(5-6):446–448, 1928.
- [103] C. G. Darwin. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 27:86–98, 1931.
- [104] E. Muñoz, Z. Barticevic, and M. Pacheco. Electronic spectrum of a two-dimensional quantum dot array in the presence of electric and magnetic fields in the hall configuration. *Phys. Rev. B*, 71:165301, 2005.
- [105] R. G. Mani, J. H. Smet, K. von Klitzing, V. Narayanamurti, W. B. Johnson, and V. Umansky. Zero-resistance states induced by electromagnetic-wave excitation in gaas/algaas heterostructures. *Nature*, 420(6916):646–650, 2002.
- [106] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3 edition, 1999.