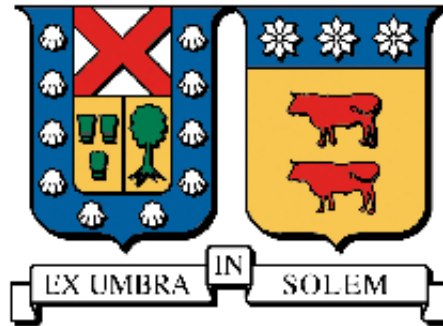


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO-CHILE



APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA HOMOGENEIZACIÓN
PARA MATERIALES COMPUESTOS MEDIANTE
EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

Tesis de Grado presentada por

Héctor Luis Palacios Huerta

como requisito parcial para optar al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica

y al título de:

Ingeniero Civil Mecánico

Profesor Guía: Dr. Luis Carlos Pérez Pozo

Profesores Correferentes: Msc. Felipe Chacana Yorda
Dr. Ignacio de Arteaga Jordá

Agosto de 2017

TITULO DE LA TESIS:


**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA HOMOGENEIZACIÓN
PARA MATERIALES COMPUESTOS MEDIANTE
EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

AUTOR:

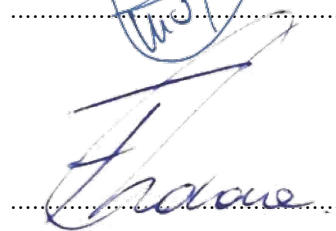
HÉCTOR LUIS PALACIOS HUERTA

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Título de Ingeniero Civil Mecánico y al Grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Luis Perez Pozo



Msc. Felipe Chacana Yorda



Dr. Ignacio de Arteaga Jordá



*Dedicada a mis padres Héctor y Corina,
a mis hermanas Anyel y Araceli.
Los amo con todo mi ser.*

Agradecimientos

Deseo agradecer a mis padres Héctor y Corina que me han dado todo en la vida, son la base de mi éxito y fuente de mis valores. Mi deuda hacia a ustedes jamás podrá ser pagada. A mis hermanas Anyel y Araceli, ustedes son la luz de mi vida, mi constante alegría. Estoy muy orgulloso de ambas, y siempre estaré ahí para ustedes como su hermano mayor.

A todos los grandes amigos de la vida que hice en esta travesía; Alfredo, Armando, Axel, Claudia, Emilio, Gonzalo, Hernan, Ismael, Javier, y Sebastián. Siento el más profundo respeto y admiración por todos ustedes, me han influenciado de sobremanera. La vida nos puede alejar, pero siempre será como ayer.

A mis familiares, a todos mis primos con los que tuve o no la suerte de vivir en Viña o Valparaíso, tengo mucha suerte de tenerlos. Mi querida tía Bernarda, que siempre ha estado ahí para mí con un apoyo incondicional. Roberto, mi mejor y más viejo amigo, el hermano que nunca tuve. Tomamos caminos distintos, pero siempre has sido parte integral en mi vida.

A los innumerables compañeros que tuve la suerte de conocer en la universidad, no tengo duda de lo exitosos que serán como profesionales y como personas.

A mi profesor guía Luis Pérez, cuyo apoyo ha sido incondicional en toda esta travesía del magister, y con quien me siento muy identificado como persona. Para mí siempre será mi profesor, y por supuesto, un gran amigo.

Mi profundo agradecimiento al Departamento de Mecánica y a la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Muchas gracias.

*"Demasiada cordura puede ser la peor de las locuras,
ver la vida como es y no como debería de ser".*

-Miguel de Cervantes

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA HOMOGENEIZACIÓN PARA MATERIALES COMPUESTOS MEDIANTE EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

PALABRAS CLAVE: *métodos sin malla, puntos finitos, colocación puntual, homogeneización, propiedades efectivas, elasticidad lineal.*

Resumen

En el presente trabajo se estudia numéricamente el comportamiento elástico lineal de materiales compuestos mediante la teoría de la homogeneización en dos escalas, la cual se implementa numéricamente a través del método sin malla de puntos finitos.

Los materiales compuestos son materiales formados por dos o más materiales que no reaccionan químicamente entre sí, con el fin de conseguir conjuntos de propiedades excepcionales que normalmente no se encuentran en materiales comunes. Este trabajo se enfoca en materiales compuestos jerárquicos con microestructura periódica, donde el cambio entre las fases de los materiales constituyentes ocurre a una escala muy inferior a la escala normal o macroscópica del compuesto, como es el caso de materiales reforzados con fibra o partículas. Bajo este concepto, *la teoría de la homogeneización en dos escalas* divide el problema en un problema macroestructural donde el material compuesto puede ser tratado como un material homogéneo, y un problema microestructural representado por un volumen elemental, del cual se extraen las propiedades efectivas u homogeneizadas del compuesto. Cada nodo de la discretización del problema macroestructural corresponderá a un problema microestructural distinto, el cual está sujeto a una nueva clase de condiciones conocidas como *condiciones de periodicidad*.

La aproximación numérica es realizada a través del *método sin malla de puntos finitos*. Los *métodos sin malla* se presentan como una alternativa viable para la resolución de problemas en que los prestigiosos métodos con malla como *el método de elementos finitos* encuentran sus limitaciones inherentes al uso de la malla. Por esta razón, resulta importante estudiar el comportamiento, adaptabilidad y eficacia de estos métodos en nuevos tipos de problemas como el presente. En lo particular, *el método de puntos finitos* nunca se ha utilizado para el estudio de materiales compuestos, sin embargo, sus particulares características suponen ciertas ventajas clave por sobre el general de los métodos sin malla, como la ausencia total de integración numérica en la aproximación, y el esquema de colocación puntual que permite reproducir con exactitud las condiciones de borde, lo cual resulta de vital importancia en *la teoría de la homogeneización*.

Los resultados son validados a través de resultados numéricos, analíticos y experimentales presentes en la literatura relacionada, y por comparación con problemas que pueden ser resueltos (no sin dificultad) por *el método de elementos finitos*.

Este trabajo ha sido financiado por CONICYT, bajo el proyecto FONDECYT Regular N° 1140583, y se ha desarrollado en el Aula UTFSM-CIMNE del Departamento de Mecánica, perteneciente a la Red de Aulas del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) de la Universidad Politécnica de Cataluña.

APPLICATION OF HOMOGENIZATION THEORY FOR COMPOSITES THROUGH THE MESHLESS FINITE POINT METHOD

KEYWORDS: *meshless method, finite point, point collocation, composites, effective properties, linear elasticity.*

Summary

In this thesis work, the linear elastic behaviour of composites is simulated numerically by means of two-scale homogenization theory, which is numerically implemented using a meshless finite point method.

Composite materials are composed of two or more materials that do not chemically react with each other to obtain a material with an exceptional set of properties not found in common materials.

This work is focused on hierarchical composites with periodic microstructure, where the phase change between constituent materials happens on a much smaller scale than the normal or macroscopic scale of the composite, as is the case of fiber and particulate reinforced composites. Seen under this perspective, the two-scale homogenization theory decomposes the problem into a macroscopic problem, in which the composite is treated as an homogeneous material, and a microstructural problem which is represented by an elemental volume of which the effective properties of the composite can be extracted. Each node of the discretization in the macrostructural problem is related to a microstructural problem subjected to a different kind of boundary condition known as 'periodicity condition'.

The numerical approximation is done through the *meshless finite points method*. *Meshfree methods* represent an interesting alternative to solve problems in which the methods of prestige like the *finite element method* are limited because they rely on a mesh. For this reason, it is important to study the behavior, adaptability and effectiveness of meshfree methods in new types of problems such as the present. In particular, the *finite point method* has never been used in the study of composites before, and yet its particular characteristics imply some key advantages over other *meshfree methods*, such as the absence of quadrature for the approximation function, and a point collocation scheme that reproduces accurately the boundary conditions, which is an essential part in homogenization theory.

Results are validated through numerical, analytical and experimental results found in literature, And by comparing problems that can be solved (not effortlessly) with the finite point method, as a reference point.

This project has been financed by CONICYT, through Project N^o 1140583, and developed in the UTFSM-CIMNE Classroom of Department of Mechanical, that belongs to the Classroom Net of International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), from the Polytechnic University of Catalonia.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Objetivos	5
1.4. Contenido	6
2. Métodos sin malla	7
2.1. Introducción	7
2.2. Breve historia de los métodos sin malla	8
3. Formulación del Método de Puntos Finitos	12
3.1. Construcción de la aproximación	13
3.2. Función de ponderación	16
3.3. Discretización mediante colocación puntual	17
3.4. Generación local de <i>nubes</i> de interpolación	19
3.4.1. Criterios de aceptabilidad para <i>nubes</i>	21
3.5. Polinomio <i>base de interpolación</i>	22
3.6. Derivabilidad de la aproximación	23
3.7. Tratamiento de la discontinuidad de material	24
3.8. Estabilización de la aproximación	27
4. Homogeneización, estado del arte	29
4.1. Introducción	29

4.2. Método de los promedios	30
4.3. Teoría de la expansión asintótica	31
4.4. Otros temas relacionados a la teoría	33
4.4.1. Condiciones de contorno e implementación	33
4.4.2. Solución en dos escalas del problema elástico	35
4.4.3. Cuestionamientos a la teoría de homogeneización y utilización de Métodos adaptativos y multi-grid	35
4.4.4. Homogeneización mediante el Método de Elementos Finitos Voronoi	38
5. Homogeneización en dos escalas basada en periodicidad local: Conceptos y formulación	40
5.1. Introducción	40
5.1.1. Utilización de dos escalas	40
5.2. División de la estructura interna del compuesto	41
5.2.1. División de un medio periódico en celdas unidad o células	42
5.2.2. Vectores de periodicidad	42
5.2.3. Clases de células	43
5.3. Periodicidad local de las variables	45
5.3.1. Efecto del campo de desplazamientos periódico	46
5.4. Tensor de deformaciones homogeneizado	48
5.5. Ecuación de equilibrio y tensor de tensiones homogeneizado	51
5.6. Planteamiento del problema en la escala macroscópica	54
5.6.1. Descripción del problema estándar de valores de contorno	54
5.6.2. Formulación fuerte del problema macroscópico	55
5.7. Planteamiento del problema en la escala microscópica	56
5.7.1. Descripción del problema microestructural	56
5.7.2. Ecuaciones de gobierno	57
5.7.3. Condiciones de continuidad en la interfaz entre materiales	57
5.7.4. Condiciones de contorno periódicas	58
5.7.5. Formulación fuerte del problema microscópico	61

6. Implementación numérica y solución	63
6.1. Ecuaciones de gobierno en ambas escalas	64
6.2. Implementación numérica	65
6.2.1. Ecuaciones 2D escala macroscópica:	65
6.2.2. Ecuaciones 2D escala microscópica:	67
6.2.3. Aproximación numérica de las variables mediante el MPF	69
6.2.4. Aproximación numérica de las ecuaciones de gobierno en ambas escalas	70
6.3. Obtención del tensor constitutivo elástico homogeneizado mediante el método de perturbaciones	73
6.4. Solución al problema de homogeneización en dos escalas	75
6.4.1. Aspectos técnicos de la solución	75
7. Análisis de materiales compuestos reforzados con fibras	81
7.1. Representación longitudinal de un compuesto de fibras continuas	82
7.1.1. Ejemplo compuesto Alúmina/Aluminio	84
7.2. Representación longitudinal de un compuesto de fibras discontinuas	87
7.2.1. Ejemplo compuesto Boro/Aluminio	89
7.3. Representación transversal de un compuesto reforzado con fibras	94
7.3.1. Ejemplo compuesto Boro/Aluminio disposición cuadrada	95
7.3.2. Ejemplo compuesto Alúmina/Aluminio	99
8. Determinación de las propiedades efectivas homogeneizadas	105
8.1. Ejemplo 1: Compuesto Alúmina/Aluminio	105
8.2. Ejemplo 2: Compuesto Boro/Aluminio	109
9. Solución a problemas doble escala	113
9.1. Tubo cilíndrico con presión interna	113
9.2. Placa con fibras transversales, disposición cuadrada de fibras	122
9.3. Placa con fibras transversales, disposición hexagonal de fibras	130
10. Conclusiones y posibles futuras líneas de investigación	139

10.1. Posibles líneas de investigación	141
A. Pérdida de precisión por el factor estabilizador	143
B. Principales rutinas numéricas código MATLAB	147
Bibliografía	175

Índice de figuras

3.1. Esquema de la función de forma para una aproximación por <i>mínimos cuadrados ponderados fijos</i> FWLS.	16
3.2. Representación del dominio del problema Ω y <i>nube</i> Ω_I asociada al <i>nodo estrella</i> I	19
3.3. Distintas técnicas de generación local de <i>nubes</i> 2D mediante el criterio de a) mínima distancia, b) ocho segmentos y c) cuatro cuadrantes.	20
3.4. Esquema de generación local de <i>nubes</i> 2D mediante triangulación Delaunay	21
3.5. Parámetros utilizados para la adimensionalización de la <i>base de interpolación</i> en una <i>nube</i> de puntos 2D.	22
3.6. Representación del tratamiento de <i>nubes</i> respecto a su posición dentro del dominio compuesto por los materiales Ω^+ , Ω^- y la interfaz $\partial\Omega_I$	25
3.7. Determinación de los componentes del vector \mathbf{h} en 2D para subdominios del a) dominio y b) contorno.	28
4.1. División de un medio en celdas unidad.	32
4.2. Idealización del medio heterogéneo mediante una partición del volumen representativo con elementos Voronoi.	38
5.1. Distintos ejemplos de microestructura junto a su celda unidad representativa.	42
5.2. Microestructura de un compuesto dividido en células hexagonales. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.	43
5.3. Microestructura de un compuesto dividido en células hexagonales, cuyas caras no son regulares. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.	43
5.4. Estructura interna del compuesto dividida en células cuadriláteras. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.	44

5.5. Estructura interna del compuesto dividida en células cuadriláteras (rectangulares). En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.	44
5.6. División de un medio en celdas unidad.	45
5.7. Deformación de una red cuadrilátera bajo un campo de desplazamiento periódico. No se produce un cambio en los vectores de periodicidad.	46
5.8. Deformación de una red cuadrilátera bajo un campo de desplazamiento periódico. Se produce un cambio en los vectores de periodicidad.	47
5.9. Campo de desplazamiento periódico en una red hexagonal. Se presenta un desplazamiento relativo de tres de los vértices periódicos.	48
5.10. Representación de los vectores de periodicidad: \mathbf{D}_i en la configuración de referencia (izquierda) y \mathbf{d}_i en la configuración actualizada (derecha).	49
5.11. Representación de las fuerzas que actúan en contornos periódicos. Son iguales en magnitud, pero con dirección contraria.	52
5.12. Representación de un material compuesto de dos materiales distintos junto a la línea interfaz que los une.	58
5.13. Representación de una célula con sus vértices. A la izquierda una célula cuadrilátera y a la derecha una célula hexagonal.	61
6.1. Diagrama solución del problema de homogeneización lineal.	76
6.2. División de la geometría de la célula en geometrías de 4 y 3 lados para discretización regular.	77
7.1. Representación de la célula original en 3D y su idealización para la implementación en 2D.	83
7.2. Representación idealizada de la microestructura de una matriz con fibras continuas y su célula correspondiente.	84
7.3. Dimensiones y discretización de la geometría de una célula de fibra continua en 195 nodos.	85
7.4. Distintos resultados para una célula sometida a tracción en dirección horizontal. a) Desplazamiento en x , b) Deformación en x . c) Tensión en x , d) h) Tensión en y .	85
7.5. Distintos resultados para una célula sometida a tracción en dirección vertical. a) Desplazamiento en x , b) b) Desplazamiento en y . c) e) Deformación en y , d) Tension de von mises.	86
7.6. Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. a) Desplazamiento en x , b) b) Desplazamiento en y . c), f) Deformación en y , d) i) Tensión en xy .	87
7.7. Varias distribuciones para un material compuesto reforzado con fibras cortas, y sus células asociadas.	88

7.8. Dimensiones y discretización de la geometría de una célula de fibra corta en 625 nodos.	89
7.9. Distintos resultados para una célula sometida a tracción horizontal. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i> .	90
7.10. Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i> .	91
7.11. Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i> .	92
7.12. Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción horizontal.	93
7.13. Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.	93
7.14. Tensión de Von Mises en la microestructura para esfuerzo cortante.	94
7.15. Representación de la microestructura de un compuesto de fibras transversales con disposición cuadrada y su división en células.	95
7.16. Dimensiones de la célula de un material reforzado con fibras transversales y su discretización en 241 con 13 nodos por nube.	96
7.17. Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i> .	96
7.18. Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i> .	97
7.19. Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.	98
7.20. Tensión de Von Mises en la microestructura para esfuerzo cortante.	98
7.21. Microestructura de un compuesto de fibras con disposición hexagonal y su división en células.	99
7.22. Dimensiones de la célula transversal con disposición hexagonal y su discretización en 609 nodos con 13 nodos por nube.	100

7.23. Distintos resultados para una célula sometida a tracción horizontal. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i>	100
7.24. Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i>	101
7.25. Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. <i>a)</i> Desplazamiento en <i>x</i> , <i>b)</i> Desplazamiento en <i>y</i> , <i>c)</i> Deformación aparente, <i>d)</i> Deformación en <i>x</i> , <i>e)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>f)</i> Deformación en <i>y</i> , <i>g)</i> Tensión en <i>x</i> , <i>h)</i> Tensión en <i>y</i> , <i>i)</i> Tensión en <i>xy</i>	102
7.26. Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción horizontal.	103
7.27. Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.	103
7.28. Tensión de Von Mises en la microestructura para un esfuerzo cortante.	104
8.1. Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera con disposición cuadrada en 281 nodos con 13 nodos por nube.	106
8.2. Dimensiones y discretización de la célula hexagonal con disposición hexagonal en 281 nodos con 13 nodos por nube.	106
8.3. Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera con disposición hexagonal en 921 nodos con 15 nodos por nube.	107
8.4. Dimensiones y discretización de la célula longitudinal en 483 nodos con 13 nodos por nube.	107
8.5. Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera en 281 nodos con 13 nodos por nube.	110
8.6. Dimensiones y discretización de la célula hexagonal en 281 nodos con 13 nodos por nube.	110
8.7. Dimensiones y discretización de la célula longitudinal en 168 nodos con 13 nodos por nube.	111
9.1. Dimensiones del problema macroscópico y discretización del tubo cilíndrico en 341 nodos.	114
9.2. Condiciones de contorno a las que se somete la geometría en la escala macroscópica.	115
9.3. Dimensiones de la célula cuadrilátera y discretización en 361 nodos y 13 nodos por nube.	115
9.4. Dimensiones de la célula hexagonal y discretización en 361 nodos y 13 nodos por nube.	116

9.5. Resultados de la tensión Von Mises para el problema macroestructural cuya microestructura posee disposición cuadrada de fibras. Los puntos señalados corresponden a las células que se muestran más abajo.	117
9.6. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 4.	117
9.7. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 166.	118
9.8. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 294.	118
9.9. Resultados comparativos de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural y las 3 células cuadriláteras de estudio.	119
9.10. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural con microestructura de disposición hexagonal de fibras. Los puntos señalados corresponden a las células que se muestran más abajo.	120
9.11. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 4.	120
9.12. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 166.	121
9.13. Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 294.	121
9.14. Resultados comparativos de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural y las 3 células hexagonales de estudio.	122
9.15. Geometría de la placa en Ansys, correspondiente a una placa compuesta de un arreglo 7×7 fibras cuadradas.	123
9.16. Condiciones de contorno para el caso de tracción.	123
9.17. Mallado de la geometría en Ansys, correspondiente a 650732 elementos y 1977639 nodos.	124
9.18. Geometría y discretización de la macroestructura de la placa en 49 nodos.	124
9.19. Geometría y discretización de la célula cuadrilátera representativa del compuesto en 3441 nodos.	125
9.20. Tensión Von Mises para el modelo en Ansys. En el cuadro rojo se señala la célula de estudio.	125
9.21. Tensión Von Mises para la célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 3.8443, valor máximo: 21.006.	126

9.22. Compuesto con distribución cuadrilátera de fibras sometido a tracción simple. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.	127
9.23. Condiciones de contorno para el caso de esfuerzo cortante.	128
9.24. Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de esfuerzo cortante. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.	129
9.25. Resultado de la tensión de Von Mises para la célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 10.29, valor máximo: 29.699.	129
9.26. Compuesto con distribución cuadrilátera de fibras sometido a esfuerzo cortante. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.	130
9.27. Geometría de la placa en Ansys, correspondiente a una placa compuesta de un arreglo 14×14 fibras cuadradas.	131
9.28. Mallado de la geometría en Ansys, correspondiente a 730607 elementos y 2239718 nodos.	131
9.29. Geometría y discretización de la macroestructura de la placa en 196 nodos.	132
9.30. Geometría y discretización de la célula cuadrilátera del compuesto en 3441 nodos.	132
9.31. Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de tracción vertical. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.	133
9.32. Resultado de la tensión de Von Mises para una célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 1.2651, valor máximo: 20.512.	133
9.33. Compuesto con distribución hexagonal de fibras sometido a tensión vertical. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.	134
9.34. Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de esfuerzo cortante. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.	135
9.35. Resultado de la tensión de Von Mises para una célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 13.676, valor máximo: 37.31.	136
9.36. Compuesto con distribución hexagonal de fibras sometido a esfuerzo cortante. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.	137
A.1. Condiciones de contorno para el caso de estudio.	143

A.2. Geometría y discretización del problema en 121 nodos. Las medidas están en [mm]. . . .	144
A.3. Tracción en dirección x para el problema resuelto de forma normal, sin factor estabilizador.	145
A.4. Tracción en dirección x para el problema resuelto utilizando el factor estabilizador. . . .	145

Índice de tablas

2.1. Principales combinaciones de métodos <i>sin malla</i> /con malla desarrollados hasta esta fecha.	10
2.2. Listado de <i>métodos sin malla</i> desarrollados hasta esta fecha.	11
7.1. Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras continuas.	86
7.2. Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras cortas. .	90
7.3. Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto con fibras transversales.	95
7.4. Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras transversales.	99
8.1. Propiedades mecánicas de los materiales componentes	108
8.2. Comparación con propiedades homogeneizadas compuesto Aluminio/Alúmina	108
8.3. Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras transversales.	110
8.4. Comparación con propiedades homogeneizadas en la literatura para compuesto Aluminio/Boro	111
9.1. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.	114
9.2. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.	124
9.3. Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 7×7 en estado de tracción vertical.	128
9.4. Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 7×7 en estado de corte.	128
9.5. Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 14×14 en estado de tracción vertical.	135

9.6. Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 14×14 en estado de corte.	136
A.1. Comparación de los resultados de la tracción para el contorno derecho de la geometría entre la resolución con y sin factor estabilizador.	146

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Es una realidad conocida que a nivel molecular no existe continuidad alguna en la materia. Esto claramente no ha impedido la formulación de las leyes de *la mecánica de medios continuos* (Malvern, 1969) bajo el supuesto de que los materiales existen como un continuo, puesto que la escala macroscópica en la que son tratados es sumamente superior a la escala molecular donde el panorama es distinto. Desde un punto de vista práctico, en ingeniería se ha acuñado el término de *material homogéneo* para materiales continuos cuyas propiedades son exactamente las mismas en todo su dominio. De acuerdo a su estructura molecular, pueden ser agrupados principalmente en metales y aleaciones, vidrios y cerámicas, y finalmente polímeros. Cada uno de estos tipos de materiales son usados en diversas aplicaciones que sacan buen provecho de sus propiedades particulares, sin embargo, muchas aplicaciones requieren conjuntos de propiedades que no se encuentran dentro de estos grupos. *Los materiales compuestos o heterogéneos* se definen como aquellos formados por dos o más materiales constituyentes o fases, las cuales no reaccionan químicamente entre sí (a diferencia de las aleaciones). Además, se supone que en todo su dominio los constituyentes guardan igual proporción de modo que sus propiedades sean similares en cualquier punto del dominio.

El gran potencial de los materiales compuestos se debe a la infinidad de formas en que pueden plantearse variando sus constituyentes, sus proporciones y su arreglo espacial. Entre esta infinidad de posibilidades, es lógico que muchas de ellas resulten en materiales con cualidades excepcionales y muy superiores a las de sus constituyentes para los fines específicos en que se requieren. El avance tecnológico solicita constantemente materiales con combinaciones de propiedades específicas tales como resistencia, ligereza, ductilidad, tenacidad, durabilidad y por supuesto, un menor costo. Entre las industrias que han motivado su investigación y desarrollo se encuentran la industria aeroespacial, naval, automotriz, ingeniería civil, artículos deportivos, entre otros.

Existen también desventajas relacionadas a los materiales compuestos y que retrasan su avance, algunas tales como; delaminación, desprendimiento de fibras, disminución de la durabilidad ante cargas cíclicas de temperatura y humedad, dispersión de resultados, fabricación, etc. Sin embargo, esto no ha impedido que los materiales compuestos sigan ganando terreno junto al avance tecnológico.

La modelación del comportamiento de esta clase de materiales no esta exenta de dificultades. Desde un punto de vista teórico, las leyes de la mecánica de medios continuos no pueden ser aplicadas directamente a un material de distintas fases, sino que deben ser extrapoladas considerando la geometría interna del material. Dada la gran variedad de arreglos espaciales que pueden presentar estos materiales, es imposible lograr una formulación general que sirva para todos y cada uno. En su lugar, existen muchas formulaciones distintas que abordan unicamente una clase de materiales compuestos. No obstante, al ignorar los fenomenos en la microestructura, los resultados obtenidos por este tipo de formulaciones no se corresponden bien con mediciones experimentales.

Para tratar con el complejo problema que representan los materiales compuestos es necesario tomar un enfoque numérico que permita modelar computacionalmente los fenómenos físicos relacionados a estos materiales, y de una forma general. Afortunadamente en la actualidad la *computación científica* se ha posicionado como el cuarto pilar de la investigación científica junto a la ciencia observacional, la ciencia experimental y la ciencia teórica. La computación científica permite resolver grandes problemas y en tiempos totalmente ajenos a las posibilidades humanas, debido a lo cual ha incidido indudablemente en la forma en que los científicos hacen ciencia. Su gran desarrollo no se debe solamente a los grandes avances en *hardware* que mejoran continuamente las capacidades de procesamiento de información, sino que también al constante desarrollo de algoritmos y técnicas matemáticas cada vez más eficientes para resolver toda clase de problemas.

La gran ventaja de la computación científica para la modelación de problemas físicos es la *capacidad predictiva*. Si bien la computación científica no puede reemplazar completamente al laboratorio, ciertamente si puede reducir bastante su quehacer, permitiendo predecir los resultados y preparar al personal para obtener mejores observaciones de lo que pueda ocurrir en un experimento, o bien puede simular convenientemente experimentos que sean muy costosos o peligrosos, y finalmente, es la única opción al modelar eventos pasados o fenómenos naturales que escapan del alcance de un laboratorio, como fenómenos climáticos y cosmológicos.

1.2. Planteamiento del problema

Como es usual, la física abunda en simplificaciones para comenzar a explicar un fenómeno desde el caso más simple hacia el más complejo, cada vez en mayor detalle. Esto no ha sido diferente en la mecánica de materiales en que existen rigurosas formulaciones para representar el comportamiento de los materiales homogéneos, ya sea este elástico, plástico, viscoso o con daño. Contrario a este esquema, el problema de los materiales compuestos es uno que parte ya desde la complejidad, y el gran volumen de información que lo caracteriza ha llevado a simplificaciones que generan modelos poco acertados.

Al abordar el problema de materiales compuestos mediante los métodos convencionales de la mecánica computacional los resultados tampoco han sido fructuosos. Las propiedades mecánicas de cada material componente son válidas únicamente en sus propios dominios, por lo cual la discretización del problema debe hacerse a nivel de sus componentes, volviéndose así un problema extremadamente costoso.

El enfoque natural ante un problema de esta envergadura es simplificarlo y tratarlo como un material homogéneo a nivel macroscópico, para lo cual se necesita una ley de comportamiento global del compuesto, donde se acote el rango de tensiones y deformaciones admisibles tanto en el rango lineal

como no-lineal y que a la vez obedezcan las leyes termodinámicas. Los modelos que siguen este enfoque son conocidos como *macromodelos*, y existen una gran variedad de ellos que abordan problemas para materiales particulares, como compuestos de fibras cortas, compuestos de fibras largas, laminados unidireccionales o en varias direcciones, laminados de una o varias capas, etc. Así bien, no existe una teoría general que aborde toda clase de materiales. Una recopilación de estos modelos puede encontrarse en (Oñate et al., 1991; Derek, 2000; Car, 2000; Oller, 2003).

La idea detrás de los macromodelos es extrapolar las ecuaciones constitutivas estándar para materiales homogéneos, e incluso isótropos, sumado a algunas modificaciones que permiten suponer el material como ortótropo o incluso anisótropo. Bajo esta perspectiva se desarrollaron los primeros de fluencia como una generalización del criterio de Von Mises (Hill, 1948). Los más conocidos son: el de *máxima tensión*, el de *rotura de Azzi-Tsai-Hill* y el de *fluencia de Tsai-Wu* (Tsai, 1964; Tsai & Wu, 1971). Posteriormente se han realizado varias propuestas, entre ellas una forma general de establecer leyes de comportamiento para materiales anisótropos a través de la teoría de mapeo de espacios (Betten, 1981, 1988; Oller et al., 1995a). Este método utiliza las ecuaciones constitutivas estándar a través de una transformación del espacio real anisótropo de tensiones y deformaciones en un espacio virtual isótropo. Para lo cual se requiere parametrizar dichos espacios en base a ensayos de laboratorio. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que los resultados de los ensayos de laboratorio realizados sobre un determinado material compuesto no son extrapolables a otros. Por ende, al cambiar las propiedades, forma, proporción o distribución de algún componente el material resultante es otro compuesto que se comporta de forma distinta. Por otra parte, una de las técnicas más utilizadas para representar el comportamiento de los materiales compuestos es la *teoría de mezclas* (Truesdell & Toupin, 1960). Este método trata al compuesto como un material homogéneo, en el cual participan el comportamiento de los diferentes constituyentes de acuerdo a su proporción en volumen. La formulación convencional admite que la deformación de los materiales componentes o fases es la misma (Green & Naghdi, 1965; Ortiz & Popov, 1982b,a). Una nueva propuesta permite una deformación diferente en las distintas fases bajo el concepto de *deformación serie-paralelo* (Oller et al., 1995b). Otra propuesta de carácter general para compuestos reforzados con fibras se realiza a través de una combinación de la teoría de mezclas con la teoría de anisotropía mediante mapeo de espacios (Car, 2000).

La obtención de leyes únicamente macroscópicas tienen el inconveniente de carecer de información microestructural, la cual es fundamental para analizar los fenómenos micromecánicos que generan el comportamiento no-lineal de los materiales compuestos. Con el propósito de solventar este inconveniente se han buscado nuevas alternativas basadas en el estudio del comportamiento de la estructura interna de estos materiales, lo cual da lugar a una nueva forma de obtener leyes de comportamiento denominada micromodelos (Obraztsov & Vasilev, 1982). En éstos se estudian los micromecanismos que se generan en el compuesto en base a ensayos sobre un determinado material compuesto, y también se intentan determinar las propiedades mecánicas efectivas. Un resumen acerca de micromodelos puede encontrarse en (Herakovich, 2012). Bajo un punto de vista similar se han abierto paso una serie de métodos que utilizan doble escala (o múltiples escalas), donde se aborda el problema de los materiales compuestos bajo dos puntos de vista diferentes, uno macroscópico y otro microscópico. Las propiedades macroscópicas del compuesto se extraen a través de la información microscópica que se genera en un volumen representativo de la microestructura. A partir de la forma de representar dicho volumen se han derivado diferentes métodos, entre los cuales se puede citar: el *modelo de ensamble de esferas* (Hashin, 1962, 1983), el *self-consistent method* (Hill, 1965; Budiansky, 1965; Hashin, 1970; Christensen, 2012), el *método de Mori-Tanaka* (Mori & Tanaka, 1973) y los métodos que utilizan una celda unidad

como la *teoría de promedios* (Suquet, 1982), la *teoría de los desarrollos asintóticos* (Sanchez-Palencia, 1974), la *homogeneización en dos escalas* (Zalamea et al., 2000), entre otros. Entre todos los métodos nombrados, los métodos de homogeneización son los de mayor aceptación y han demostrado una gran potencialidad, y es precisamente la *homogeneización en dos escalas* el método con el cual se trabaja en esta tesis. Estos métodos conocidos genéricamente como *teorías de homogeneización* toman ventaja de que un material heterogéneo tiene una distribución homogénea de sus heterogeneidades, y ha sido objeto de discusión durante más de 4 décadas, tiempo en el cual ha recibido importantes contribuciones, principalmente por investigadores franceses, holandeses y norteamericanos. No obstante, hace más de 40 años, Hill (Hill, 1967) puntualiza que el mayor inconveniente del estudio de un material a nivel microestructural es el enorme esfuerzo computacional que requiere, más aún para el comportamiento no-lineal de los materiales.

Comúnmente los trabajos relacionados a homogeneización se han llevado a cabo mediante el conocido *método de elementos finitos* (*Finite Element Method*, FEM), (Zienkiewicz & Taylor, 2000). Este método junto a muchos otros se caracterizan principalmente por el uso una malla que divide las complicadas geometrías en numerosos problemas de menor dificultad interconectados entre sí. No obstante, existen dificultades a la hora de generar mallas de calidad, y la generación de mallas distorsionadas o de baja calidad puede generar grandes errores. Además, la formulación es altamente dependiente del mallado utilizado, por lo cual, problemas con deformaciones suficientemente grandes distorsionan la malla y con ello la validez de la formulación. Para remediar esto frecuentemente se utiliza el re-mallado, lo que conlleva el mayor costo computacional. El *método de elementos finitos* que usualmente se utiliza para la *teoría de la homogeneización* es inadecuado para resolver problemas tales como aquellos que involucren grandes deformaciones, propagación de grietas que evolucionan dentro de elementos (y por ende no representan bien la discontinuidad), problemas con fronteras en movimiento, procesos adaptativos que requieran actualización de la malla, rompimiento de materiales en una gran cantidad de fragmentos, entre otros (Belytschko et al., 1996b; Liu, 2002; Li & Liu, 2004; Gu, 2005a).

Estos problemas no ocurren en los llamados *métodos sin malla* (*meshless, meshfree*), un tipo de métodos que se viene desarrollando con mayor interés desde hace dos décadas, y que a diferencia de los métodos tradicionales, su formulación no depende de una malla sino de un conjunto finito de nodos que se agrupan en sub-dominios. Estos métodos poseen varias ventajas sobre los con malla además de la ausencia de la misma y la necesidad de re-mallado. Por ejemplo, la mayoría están formulados en base a *coordenadas materiales o Lagrangianas*, lo que les hace ideales para abordar problemas de mecánica de fluidos y grandes deformaciones. También existe libertad al momento de escoger funciones de forma con alto grado de continuidad para abordar problemas de mayor orden, presentan mayor suavidad, sencillez a la hora de implementar métodos h y p adaptables, ciertas ventajas notables para problemas de propagación de grietas, como la ausencia de sensibilidad de alineación de la malla y la posibilidad de enriquecer con términos adicionales a las funciones de forma para representar discontinuidades en la aproximación o sus derivadas (Liu, 2009; Fries & Matthies, 2003; Liu & Gu, 2004; Gu, 2005b; Duarte & Oden, 1995; Chao, 1997; Li & Liu, 2007; Chen et al., 2006).

No obstante, en general los métodos sin malla carecen de la propiedad de *Delta de Kronecker* en sus funciones de forma, siendo incapaces de reproducir con exactitud las condiciones de contorno. Esto obligada a utilizar métodos diseñados para forzar su imposición tales como el *método de multiplicadores de lagrange*. Este método añade mas grados de libertad y afecta la forma de la matriz de rigidez, añadiéndole bandas adicionales que no siguen el carácter diagonal ideal de la matriz e incluyen ceros

en su diagonal, quitándole así su carácter de *matriz definida positiva* (Fries & Matthies, 2003). A su vez, la reproducción de condiciones de contorno adquiere vital importancia en materiales compuestos jerárquicos, donde deben establecerse condiciones de continuidad entre materiales, como también condiciones de periodicidad en el contorno.

Afortunadamente, dentro de métodos sin malla se encuentra el *Método de Puntos Finitos* (MPF) (Oñate et al., 1996a,b), que utiliza un número finito de puntos para discretizar el dominio, realiza su aproximación mediante el *método de mínimos cuadrados ponderados fijos*, y discretiza su sistema de ecuaciones aplicando una técnica de colocación puntual que permite reproducir condiciones de contorno con exactitud, así como prescindir de toda integración numérica.

Además, si se desea modelar el problema de los materiales compuestos para situaciones en que los métodos tradicionales como el FEM sean inadecuados, entonces es necesario abordar la teoría de homogeneización mediante métodos sin malla, para lo cual, este trabajo de tesis pretende sentar las bases de la modelación del comportamiento elástico lineal de la teoría de homogeneización en dos escalas mediante el uso del *método sin malla de puntos finitos* (MPF).

1.3. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es proponer una metodología libre de malla que permita resolver y modelar numéricamente el comportamiento elástico lineal en 2D de materiales compuestos reforzados con fibra, mediante el uso de la *teoría de la homogeneización* en dos escalas propuesta por (Zalamea et al., 2000), utilizando para ello el *método sin malla de puntos finitos* propuesto por (Oñate et al., 1996a,b).

Para lograr este cometido es necesario abordar ciertos aspectos tales como:

- Estudiar el concepto de métodos sin malla y comprender los aspectos generales que los relacionan, repasar su historia y clasificación.
- Comprender el MPF, sus conceptos básicos y formulación lineal, para su posterior extensión a materiales compuestos.
- Estudiar el concepto de discontinuidad de material en materiales compuestos, y el comportamiento de las variables a lo largo de la línea de discontinuidad o interfaz entre materiales.
- Extrapolar la formulación del *método de puntos finitos* al problema de elasticidad lineal en materiales compuestos.
- Estudiar y comprender los conceptos relacionados a la teoría de homogeneización en dos escalas.
- Implementar numéricamente la formulación del problema elástico lineal de homogeneización en dos escalas mediante el *método de puntos finitos*.
- Desarrollar un código en lenguaje *MATLAB* para la modelación del problema de elasticidad lineal, el tratamiento de materiales compuestos y el problema de homogeneización.
- Analizar distintos casos de microestructura para poder abordarlos con el *método de puntos finitos*.

- Comparar las propiedades homogeneizadas (efectivas) resolviendo problemas presentes en la literatura para su posterior comparación y verificación del procedimiento microestructural.
- Validar el código numérico de homogeneización en dos escalas con problemas que puedan ser resueltos con el *método de elementos finitos*.

1.4. Contenido

El contenido de esta tesis se divide en 9 capítulos y 2 apéndices resumidos de la siguiente manera:

- En el presente Capítulo 1 se introduce la principal temática de esta tesis, la motivación, el problema, los objetivos principales y el resumen del contenido de cada capítulo.
- En el Capítulo 2 se introduce el estado del arte de la teoría de homogeneización, dando énfasis a los conceptos clave del método de los promedios y la teoría de desarrollos asintóticos, así como a otros temas relevantes relacionados a la teoría.
- En el Capítulo 3 se presenta la teoría de homogeneización en dos escalas, sus principales conceptos y definiciones, y el planteamiento del problema en cada escala, incluyendo el problema de discontinuidad de material.
- En el Capítulo 4 se introduce el concepto de métodos sin malla y el estado del arte.
- En el Capítulo 5 se estudia el *método de puntos finitos*, sus principales conceptos y desarrollo de los mismos, además de la extensión de la formulación al problema de discontinuidad de material.
- En el Capítulo 6 se implementa numéricamente el problema de homogeneización en dos escalas mediante el *método sin malla* de puntos finitos, así como también se mencionan algunos aspectos técnicos relevantes en la programación y ajenos a la teoría.
- En el Capítulo 7 se analiza la forma de abordar numéricamente los materiales compuestos reforzados con fibra. Se exponen resultados numéricos para cada caso.
- En el Capítulo 8 se obtienen las propiedades efectivas obtenidas para distintos ejemplos de materiales compuestos reforzados con fibra, y se contrastan con resultados numéricos, analíticos y experimentales de la literatura relacionada.
- En el Capítulo 9 se trabaja con problemas de homogeneización en ambas escalas, comparando los resultados del problema global con los resultados locales de ciertas células de interés. También se validan por comparación los resultados obtenidos por la *teoría de la homogeneización* y el MEF para ciertos problemas.
- En el capítulo 10 se presentan las conclusiones derivadas del presente trabajo, y la presentación de posibles líneas de investigación futuras relacionadas.
- En el apéndice A se contrasta el error introducido al aplicar una técnica de estabilización en el MPF para problemas que no lo requieren.
- En el apéndice B se entregan algunas de las principales rutinas de código creado en *MATLAB* (MATLAB, 2007).

Capítulo 2

Métodos sin malla

2.1. Introducción

Los métodos numéricos resultan indispensables para la simulación de problemas físicos modelados mediante ecuaciones diferenciales parciales sin solución analítica, o cuya solución es compleja y requiere ser aproximada. Las complicadas geometrías de los problemas físicos reales escapan de la trivialidad de los ejemplos utilizados para enseñar la teoría en el aula, y por ello, una solución lógica es dividir un problema complejo en una gran cantidad de problemas menores con geometrías más fáciles de abordar. Los métodos convencionales definen estas geometrías mediante conectividad entre sus nodos, lo cual recae en la existencia de una malla. El *método de elementos finitos* (*Finite Element Method*, FEM) (Zienkiewicz & Taylor, 2000), el *método de volúmenes finitos* (*Finite Volume Method*, FVM) (Versteeg & Malalasekera, 2007) y el *método de diferencias finitas* (*Finite Difference Method*, FDM) (Mitchell & Griffiths, 1980) son los miembros más extendidos de esta clase de métodos y son considerados entre los grandes pilares de la computación científica. Este éxito y prestigio se debe principalmente a la fiabilidad de sus resultados y a la variada gama de problemas que permiten simular. No obstante, estos métodos tradicionales no carecen de limitaciones o desventajas. La generación de mallas distorsionadas o de baja calidad pueden producir altos errores, que a su vez requieren *remallado*, una tarea ardua debido a la dificultad que existe en automatizar la creación de mallas de alta calidad, y que además no garantiza ser factible en un tiempo finito para geometrías complejas tridimensionales. Por ejemplo, el FEM no resulta adecuado para aplicaciones específicas tales como problemas que involucren grandes deformaciones, propagación de grietas cuya línea de discontinuidad fácilmente evoluciona dentro de elementos (y por ende no representan bien la discontinuidad), problemas con fronteras en movimiento, procesos adaptativos que requieran actualización de la malla, rompimiento de materiales en una gran cantidad de fragmentos, entre otros (Pérez Pozo, 2008).

Como una alternativa viable para abordar los problemas en que los métodos tradicionales se ven limitados, nacen los *métodos sin malla* (*meshless*), también conocidos como *métodos libres de malla* (*meshfree*). Estos realizan la aproximación únicamente en base del conjunto de nodos sin la necesidad de depender de una malla, y con ello sus desventajas asociadas como la generación de malla, la necesidad de remallado, sensibilidad a la alineación de malla, entre otros. Estos métodos poseen también varias ventajas sobre los métodos con malla, como la formulación en base a *coordenadas materiales* o

lagrangianas, que les hace ideales para problemas de *mecánica de fluidos* y *problemas con grandes deformaciones*, libertad en la elección de la *función de forma* para adaptar según las necesidades de cada problema; funciones de alto grado de continuidad para problemas de mayor orden, y posibilidad de ser enriquecidas con términos adicionales para representar discontinuidades en la función aproximada y/o sus derivadas para problemas tales como *discontinuidad de material* y *propagación de grietas*, sencillez a la hora de implementar métodos h y p adaptables, mayor convergencia que métodos con malla para problemas con el mismo orden de consistencia, etc. Mientras que por parte de sus desventajas asociadas se pueden mencionar; un mayor costo computacional, mayor complejidad en su programación, ausencia de la propiedad de *delta de Kronecker* para satisfacer condiciones de borde con exactitud, mayor complejidad en integración numérica, problemas de exactitud y estabilidad en métodos con esquema de colocación puntual, entre otros (Fries & Matthies, 2003).

Numerosos tipos de métodos sin malla se han desarrollado en las últimas décadas, sobretodo en la década de 1990. Pero, a pesar de la gran variedad de nombres, son muchas las similitudes que mantienen entre si y se podría decir que aún se encuentran en una etapa temprana de desarrollo, con mucho potencial que explotar. Adicionalmente, merece la pena mencionar que el FEM suele entregar un límite inferior a la solución exacta en aquellos problemas en que es adecuado su uso. Sin embargo, lo que realmente se requiere en ingeniería es además proveer un límite superior para lograr el correcto acotamiento de la solución exacta. Los métodos sin malla pueden ofrecer tales soluciones, por lo cual, el uso de ambos métodos en conjunto pueden ofrecer límites para acotar la solución del problema (Liu, 2009).

En (Oñate et al., 1996b) se establecen las condiciones bajo las cuales un método numérico puede ser considerado sin malla:

- Las incógnitas y sus derivadas deben ser representadas en términos de las coordenadas de un conjunto de puntos pertenecientes al dominio de análisis y de los parámetros especificados por estos.
- La función de ponderación y sus derivadas deben poder ser definidas solamente en términos de la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis.
- No es necesario realizar ninguna integración de volumen o superficie, o
- Cualquier integración de volumen o superficie debiera ser realizada en forma independiente del procedimiento de interpolación escogido.

Adicionalmente se mencionan excepciones para métodos que siendo libres de malla presentan leves dependencias a una para calcular la cuadratura numérica de las ecuaciones de gobierno.

2.2. Breve historia de los métodos sin malla

El primer *método sin malla* reconocido como tal fue el denominado *Smooth Particle Hydrodynamics method* (SPH), y fue desarrollado para resolver problemas astrofísicos sin contorno en 1977 por (Lucy, 1977) y (Gingold & Monaghan, 1977). Este método se basa en la idea de reemplazar un fluido por

un conjunto de partículas en movimiento, y transformar las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el problema a integrales de la función aproximada.

Pocos años más tarde (Liszka & Orkisz, 1980) proponen el denominado *Generalized finite difference method* (GFD) como una forma alternativa de obtener la aproximación de la función incógnita y sus derivadas a través de desarrollos en series de Taylor alrededor de un punto en el dominio, con el objetivo de trabajar con mallas irregulares o variables, donde el método de diferencias finitas presenta dificultades.

No fue sino hasta los años 90 que los métodos sin malla comenzaron a desarrollarse más extensamente. Muchos autores afirman que el interés por estos métodos comienza realmente cuando en (Nayroles et al., 1992) se postula *Diffuse element method* (DE). La idea detrás de este método es reemplazar la interpolación FEM dentro de los elementos por una interpolación local mediante *mínimos cuadrados móviles* (*Moving least squares*, MLS). Este trabajo también motivó el desarrollo de *Element free Galerkin Method* (EFG) por parte de (Belytschko et al., 1994), superando varios de sus inconvenientes, tales como la apropiada determinación del cálculo de derivadas en la función de aproximación, la imposición de condiciones de contorno esenciales y la introducción de un proceso de integración numérica. Si bien este método se mostró más preciso que DE, con ello aumentó también el costo computacional.

Un año después (Liu et al., 1995, 1996) proponen *Reproducing Particle Kernel Method* (RPKM), en un intento de construir un procedimiento para corregir la falta de consistencia en el método SPH, logrando resultados satisfactorios en *técnicas de multiescala, análisis de vibraciones, dinámica de fluidos*, entre muchos otros. Más tarde, una combinación entre RPKM y la técnica de *mínimos cuadrados móviles* darían origen al *Moving Least Squares Reproducing Kernel Methods* (MLSRK) (Liu et al., 1996, 1997).

En (Oñate et al., 1996a,b) se propone *Finite Point Method* (en este trabajo *Método de Puntos Finitos*, MPF) para tratar con problemas de dinámica de fluidos, aunque su uso también se ha extendido posteriormente a problemas de mecánica de sólidos. El método se basa en la técnica de colocación puntual que permite prescindir de integración numérica en su formulación, sumado a técnicas de aproximación tales como *Least Squares Approximation* (LSQ), *Weighted Least Squares Approximation* (WLS) o *Moving Least Squares* (MLS) que se utilizan para construir las funciones base.

En (Atluri & Zhu, 1998) se presenta *Meshless Local Petrov-Galerkin approach* (MLPG) como un enfoque distinto para construir un *método sin malla*. Se basa en la idea *forma débil local* que elimina la necesidad de una malla de soporte para efectuar la integración numérica. Esta técnica utiliza el método *Petrov-Galerkin* para simplificar el integrando de la forma débil del problema. Además permite una elección libre de las funciones bases para la generación de distintos esquemas del mismo método, lo cual le ha permitido ser aplicado en un amplio rango de problemas tales como mecánica de sólidos, problema de vigas de *Euler-Bernoulli*, análisis de vibraciones para sólidos, conducción de calor en régimen transitorio, entre otros.

En (Zhu et al., 1998a,b) proponen *Local Boundary Integral Equation method* (LBIE), un método que permite evaluar integrales fácilmente, en círculos y esferas, reduciendo la dimensionalidad del problema al evaluar las funciones base y sus derivadas solo en la integral sobre el contorno del problema.

Otros trabajos a mencionar desarrollados en la misma década son; *Meshless Collocation Method* (MCM) (Kansa, 1990a,b), *Particle in Cell method* (PIC) (Sulsky et al., 1992), *Hp cloud method* (hp-cloud) (Duarte & Oden, 1996), *Partition of Unity method* (PU) (Babuska & Melenk, 1995, 1996), *Boundary*

Node Method (BNM) (Kothnur et al., 1999), entre otros.

La tabla 2.2 extraída de (Pérez Pozo, 2008) muestra una serie de métodos sin malla desarrollados desde el método SPH. Algunos de ellos quedaron solo en la etapa de formulación sin desarrollos posteriores.

Por otro lado, también se han desarrollado métodos híbridos que toman partida de las ventajas proporcionadas por métodos con y sin malla, contrarrestando a su vez sus debilidades. Entre las problemáticas que permiten abordar están la aplicación de condiciones de contorno esenciales en métodos sin malla, situando para esto elementos a lo largo del contorno (Belytschko et al., 1995b), o problemas que presentan discontinuidades dentro de elementos, como propagación de grietas, para lo cual se emplean funciones de enriquecimiento que presentan discontinuidades en el denominado *Extended Finite Element Method* (Belytschko & Black, 1999).

En la tabla 2.1 extraída de igual forma desde (Pérez Pozo, 2008), se entrega un listado de los principales métodos híbridos presentados en la literatura:

Para el lector interesado, se recomienda consultar (además de la referencia directa a cada método) la siguiente bibliografía para profundizar acerca de la historia, fundamentos y clasificación de algunos de los métodos expuestos (y otros más) en; (Liu, 2009; Fries & Matthies, 2003; Liu & Gu, 2004; Gu, 2005b; Duarte & Oden, 1995; Chao, 1997; Li & Liu, 2007; Chen et al., 2006).

Tabla 2.1: Principales combinaciones de métodos *sin malla*/con malla desarrollados hasta esta fecha.

Combinación método <i>sin malla</i> /con malla	Autor(es)
<i>SPH/FEM</i>	(Attaway et al., 1994) (Vuyst et al., 2005)
<i>EFG/FEM</i>	(Belytschko et al., 1995a) (Rao & Rahman, 2001)
<i>XFEM</i>	(Sukumar et al., 2000)
<i>GFEM</i>	(Strouboulis et al., 2001)
<i>EFG/BEM</i>	(Gu & Liu, 2002b)
<i>MPLG/FEM</i>	(Chen & Raju, 2002)
<i>MLPG/FEM/BEM</i>	(Gu & Liu, 2003)
<i>FCM/BEM</i>	(Li et al., 2003)
<i>HBPIM/EFG</i>	(Gu & Liu, 2003)

Tabla 2.2: Listado de *métodos sin malla* desarrollados hasta esta fecha.

<i>Método sin malla</i>	Autor(es)
<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i> (SPH)	(Lucy, 1977), (Gingold & Monaghan, 1977)
<i>Generalized Finite Difference method</i> (GFD)	(Liszka & Orkisz, 1980)
<i>Meshless Collocation Method</i> (MCM)	(Kansa, 1990a,b)
<i>Diffuse Element method</i> (DE)	(Nayroles et al., 1992)
<i>Particle in Cell method</i> (PIC)	(Sulsky et al., 1992)
<i>Wavelet Galerkin Method</i> (WGM)	(Qian & Weiss, 1993)
<i>Element Free Galerkin method</i> (EFG)	(Belytschko et al., 1994), (Lu et al., 1994)
<i>Reproducing Kernel Particle Method</i> (RKPM)	(Liu et al., 1995, 1996)
<i>Partition of Unity method</i> (PU)	(Babuska & Melenk, 1995, 1996)
<i>Hp cloud method</i> (hp-cloud)	(Duarte & Oden, 1996)
<i>Finite Point Method- Método de Puntos Finitos</i> (MPF)	(Oñate et al., 1996a,b)
<i>Local Boundary Integral Equation method</i> (LBIE)	(Zhu et al., 1998a,b)
<i>Meshless Local Petrov-Galerkin approach</i> (MLPG)	(Atluri & Zhu, 1998)
<i>Boundary Node Method</i> (BNM)	(Kothnur et al., 1999)
<i>Free-Mesh method</i> (FMM)	(Yeon & Youn, 2000)
<i>Finite Spheres Method</i> (FSM)	(De & Bathe, 2000)
<i>Extended Finite Element Method</i> (XFEM)	(Sukumar et al., 2000)
<i>Finite Cloud Method</i> (FCM)	(Aluru & Li, 2001)
<i>Local Radial Point Interpolation Method</i> (LRPIM)	(Liu & Gu, 2001a)
<i>Generalized Finite Element Method</i> (GFEM)	(Strouboulis et al., 2001)
<i>Least-Squares Collocation Meshless Method</i> (LSCMM)	(Zhang et al., 2001)
<i>Point Interpolation Method</i> (PIM)	(Liu & Gu, 2001b; Liu, 2002)
<i>Hybrid Boundary Node Method</i> (HBNM)	(Zhang et al., 2002)
<i>Boundary Point Interpolation Method</i> (BPIM)	(Gu & Liu, 2002a)
<i>Meshless Finite Element Method</i> (MFEM)	(Idelsohn et al., 2003)
<i>Hybrid Boundary Point Interpolation Method</i> (HBPIM)	(Gu & Liu, 2003)
<i>Moving Kriging Interpolation</i> (MKI)	(Tongsuk & Kanok-Nukulchai, 2004)
<i>Meshfree Weak-Strong form method</i> (MWS)	(Liu et al., 2004)

Capítulo 3

Formulación del Método de Puntos Finitos

El *Método de Puntos Finitos* (MPF) se define como un método sin malla que discretiza el dominio en un número finito de puntos, y se caracteriza principalmente por su técnica de colocación puntual que le permite prescindir de integración numérica. Las ecuaciones de gobierno se aplican directamente sobre los nodos, permitiendo un enfoque en formulación fuerte.

Este método fue propuesto por (Oñate et al., 1996a,b) originalmente con el objetivo de resolver problemas de dinámica de fluidos y transporte convectivo, extendiéndose más tarde a transporte difusivo advectivo (Oñate & Idelsohn, 1998) y fluidos incompresibles (Oñate et al., 2000).

En (Oñate et al., 2001) se establecen las bases que extienden el MPF al contexto de la mecánica de sólidos, para el problema de elasticidad lineal. También se implementa la técnica de estabilización en el contorno basada en el procedimiento de cálculo finitesimal *Finite Incremental Calculus* (FIC) propuesta en (Oñate, 1996; Oñate et al., 1996b).

En (Idelsohn et al., 2002) se utiliza el MPF para analizar el problema de Graetz en el área de transferencia de calor, el cual consiste en obtener el campo de temperaturas en un ducto de placas paralelas con un flujo impuesto. Los resultados obtenidos son comparables a los obtenidos por soluciones analíticas y el método de diferencias finitas.

En (Perazzo et al., 2004a) se aplica el MPF a problemas de dinámica lineal de sólidos. Se utiliza además un esquema de integración temporal explícita de diferencias finitas centradas para resolver los sistemas de ecuaciones dependientes del tiempo.

También en el contexto de elasticidad lineal de sólidos, (Perazzo et al., 2006; Martin, 2006; Perazzo et al., 2007), desarrollan un indicador del error para el MPF, basado en la evaluación del funcional de mínimos cuadrados utilizado para el cálculo de la función de forma.

En (Aranda, 2007) se desarrolla un módulo de cálculo para el análisis lineal de geometrías tridimensionales mediante el MPF, proponiendo algunas mejoras relacionadas con la adimensionalización del polinomio base de interpolación y de la *función de ponderación*, además, se integra una alternativa de

estabilización de la matriz de momentos.

En el trabajo de (Angulo, 2007) se presenta una estrategia de refinamiento bajo el concepto de *vecinos de voronoi* para insertar nuevos puntos en el dominio con el objetivo de reducir la estimación del error en la solución.

En (Pérez Pozo et al., 2009) se extiende el MPF para problemas de elasticidad no-lineal en mecánica de sólidos por medio de aproximaciones elásticas y la teoría de deformación total.

En (Pérez et al., 2011) se aborda la localización de deformaciones bajo un modelo de daño isotrópico inducido por el debilitamiento de una zona del material mediante el MPF. En esta formulación se considera al tensor constitutivo del material como una variable de campo, para representar de esta forma la degradación y/o variación de las propiedades mecánicas a lo largo del material.

En (Pérez Pozo et al., 2014) se utiliza una estrategia híbrida basada en algoritmos genéticos para la generación y corrección de los subdominios de interpolación necesarios y fundamentales para la implementación del método de puntos finitos.

En (Pérez Pozo et al., 2014) utiliza un enfoque continuo elasto-plástico para simular el comportamiento de fractura de los materiales, y para esto se regulariza el fenómeno de localización de las deformaciones mediante gradientes de deformación utilizando el MPF.

Otras aplicaciones del MPF se encuentran en; (Mitchell & Aluru, 1999), dónde se utiliza para desarrollar un procedimiento para la simulación del transporte de electro-ósmosis en capilaridades; (Wordelman et al., 2000), donde se utiliza para la modelación de la ecuación de Poisson en un semiconductor no-lineal; en (Cheng & Cheng, 2007) se propone una metodología para la estimación del error en el MPF; (Zhang et al., 2007) se desarrolla un procedimiento para simular la solidificación del metal en procesos de colada continua; y en los trabajos de (Pérez Pozo et al., 2012) se desarrolla la simulación de las soluciones de la *ecuación regularizada de ondas largas* en la aplicación en olas bajas y solitones.

3.1. Construcción de la aproximación

A continuación se describe la construcción de la aproximación del MPF. Sea Ω un dominio en el cual existe una variable de campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Este dominio es discretizado en un número finito de puntos, cada cual se relaciona con sus vecinos a través de subdominios Ω_I de interpolación de la función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, cada cual esta compuesto por un conjunto de n puntos de coordenadas $\mathbf{x}_j \in \Omega_I$ (con $j = 1, 2, \dots, n$). En el método de puntos finitos, el subdominio Ω_I es denominado *nube*, sus puntos asociados de coordenadas \mathbf{x}_j son *nodos nube*, y entre ellos, el punto principal de coordenadas \mathbf{x}_I es el *nodo estrella*.

La función incógnita $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es aproximada en el interior de Ω_I por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) \alpha_k = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.1)$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}$ un vector de coeficientes de ponderación y $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ un vector denominado *base de interpolación* el cual contiene típicamente monomios que aseguran una base completa en el espacio de coordenadas.

Como ejemplo para el caso 2D se tiene

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T \quad \text{para } m = 3 \quad (3.2)$$

y

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T \quad \text{para } m = 6 \text{ etc.} \quad (3.3)$$

La función incógnita $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ puede ser evaluada en los n puntos pertenecientes a la *nube* Ω_I , obteniendo

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}_I \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.4)$$

donde los valores $u_j^h = u(\mathbf{x}_j)$ son las incógnitas, $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$ son los valores aproximados, $p_j = p(\mathbf{x}_j)$ la base de interpolación evaluada en el punto j -ésimo de la *nube* y \mathbf{C}_I es una matriz conformada por la evaluación de la base de interpolación en todos los *nodos nube* del subdominio Ω_I .

Como es usual de una aproximación por mínimos cuadrados, la cantidad elegida de nodos por *nube* es mayor al número de términos en la base de interpolación $n > m$, lo cual implica que la aproximación utilizada no se adapta a todos los valores de \mathbf{u}_j^h . El problema puede ser resuelto mediante una aproximación de mínimos cuadrados ponderados (*Weighted Least Squares approximation*, WLSQ), esto es, determinando los valores de \hat{u} que minimicen la suma del cuadrado del error en cada punto, ponderado por una función $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$, es decir:

$$\mathbf{J}_I = \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) (\mathbf{u}_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha})^2. \quad (3.5)$$

Se debe destacar que si se elige $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) = 1$ se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar (*Least Square*, LSQ).

La aproximación WLSQ descrita anteriormente, depende en gran medida de la forma y manera de aplicar la *función de ponderación* $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$. El objetivo de la ponderación en WLSQ es darle mayor importancia a la minimización del error del *nodo estrella* y menor importancia a la minimización del error de aquellos nodos más lejanos. De esta manera, la aproximación se vuelve insensible a la cantidad de nodos por *nube* para polinomios de base cuadrática, y se obtienen buenos resultados aún en casos donde se ocupen muchos nodos por *nube*, a diferencia de las aproximaciones obtenidas con el método de mínimo cuadrados estándar. La forma más simple (y además utilizada en el MPF) consiste en definir la función de ponderación como una función fija en todo el dominio e igual en cada *nube*. De esta forma, el método pasa a llamarse *mínimos cuadrados ponderados fijos* - *Fixed Weighted Least Squares* (FWLS) (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001; Perazzo et al., 2007; Pérez Pozo et al., 2009). Aquí, la función de ponderación cumple:

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_I) &= 1 \\
\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) &\neq 0 \quad \mathbf{x}_j \in \Omega_I \\
\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) &= 0 \quad \mathbf{x}_j \notin \Omega_I.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

La *función de ponderación* $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$ más utilizada en el MPF corresponde a la *función de Gauss normalizada* (Oñate et al., 1996a,b; Taylor et al., 1995; Oñate et al., 2001), sin embargo, el método no se limita a su uso.

La ecuación 3.5 puede ser expresada en forma matricial compacta como sigue

$$\mathbf{J}_I = (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{W}_I (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h &= [u_1^h \ u_2^h \ \dots \dots \dots u_n^h]^T, \in Vec(n) \\
\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) &= \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \in Mat(n \times m) \\
\mathbf{W}_I &= \begin{bmatrix} \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \in Mat(n \times n).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Con el fin de obtener la mejor aproximación posible, se buscan las constantes del vector $\boldsymbol{\alpha}$ que minimicen el funcional \mathbf{J}_I . De esto se obtiene que,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \text{con } \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \tag{3.9}$$

con $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}(\mathbf{x}_I)$ (matriz de momentos) y $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)$

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \tag{3.10}$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I. \tag{3.11}$$

La aproximación final en el *método de puntos finitos* se obtiene reemplazando la expresión 3.9 en 3.1, con lo que se logra:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I. \tag{3.12}$$

El término que acompaña a u_i^h en la ecuación anterior, corresponde a la *función de forma* del MPF, es decir,

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I. \tag{3.13}$$

Y de esta forma la aproximación adopta la forma final:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I. \quad (3.14)$$

Se debe notar que debido al carácter de mínimos cuadrados de la aproximación, $u(\mathbf{x}_j) \simeq \hat{u}(\mathbf{x}_j) \neq u_j^h$, es decir, los valores locales de la función aproximada no coinciden con los valores nodales de la función incógnita, ver figura 3.1. De todas formas \hat{u} es una aproximación válida con la cual se busca satisfacer la ecuación diferencial y condiciones de contorno, siendo u_j^h simplemente parámetros desconocidos.

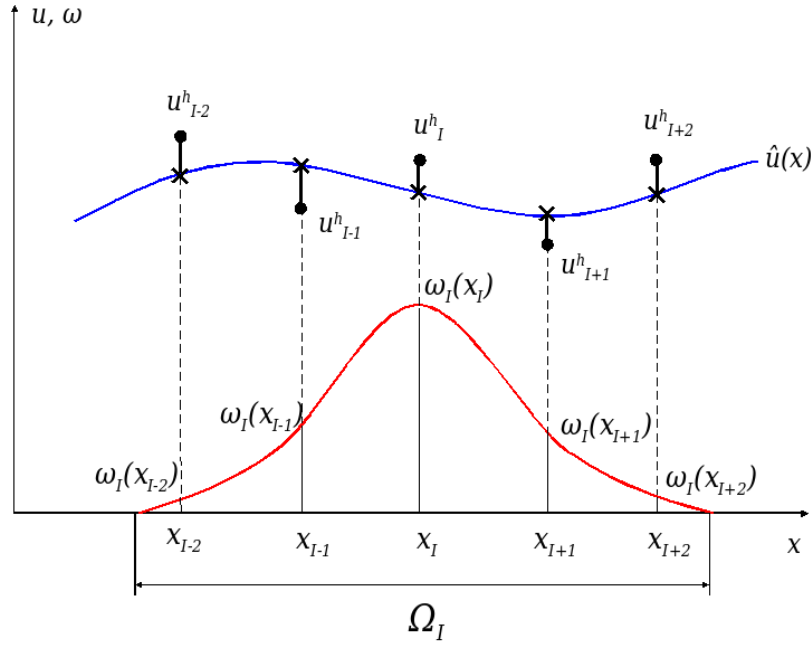


Figura 3.1: Esquema de la función de forma para una aproximación por *mínimos cuadrados ponderados fijos* FWLS.

3.2. Función de ponderación

En el MPF se recurre al uso de la *función de ponderación de Gauss normalizada* para conferir el carácter local a la interpolación y a la vez distribuir o ponderar el error cometido en esta, según el tamaño de la *nube* y su radio de influencia r , (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001).

$$\omega(d) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d/c)^{2k}) - \exp(-(r/c)^{2k})}{(1 - \exp(-(r/c)^{2k}))} & \text{si } d \leq r \\ 0 & \text{si } d > r, \end{cases} \quad (3.15)$$

siendo $d = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\|$ la norma euclidiana de la diferencia de los vectores posición entre el *nodo estrella* y un nodo de la *nube*. El parámetro $c = \beta r$, denominado factor de apuntamiento, junto al exponente k establecen la forma de la *función de ponderación*, y $r = q \max(\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\|)$ es el radio de influencia de

la función, donde q debe ser un poco mayor a 1 ($q > 1$) para que la función no se anule en el punto más lejano de la *nube*. El factor de apuntamiento determina el que los *pesos* de la *función de ponderación* sean mayores, tanto cerca como lejos de \mathbf{x}_I . Una explicación más detallada de la influencia de los factores k , q y β puede encontrarse en (Ortega et al., 2007; Pérez Pozo, 2008).

En este trabajo, los parámetros utilizados para el calculo de la *función de ponderación Gauss*: $q = 1,1$, $k = 0,5$ y $\beta = 0,25$.

Otra *función de ponderación* útil mediante la cual es posible obtener buenos resultados es la *función multicuadrática inversa*, más extensamente utilizada en el contexto de *funciones radiales*:

$$\omega(\mathbf{x}_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}} \quad (3.16)$$

con $r = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\| / \max(\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\|)$ y ε es un factor de apuntamiento, cuyo valor en esta tesis se fija como $\varepsilon = 20$.

3.3. Discretización mediante colocación puntual

De acuerdo con la ecuación 3.1, la función aproximada $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ se define para cada subdominio de interpolación Ω_I , por lo que un punto K que pertenece a las *nubes* de sus vecinos más cercanos no tiene un único valor al ser aproximado en cada una de ellas ($\phi_K^I \neq \phi_K^J \neq \dots \neq \phi_K^K$), ver figura 3.2. En el MPF esta disyuntiva se resuelve utilizando el *esquema de colocación puntual* (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001; Perazzo et al., 2007; Pérez Pozo et al., 2009) que se describe a continuación.

Considérese un problema general vectorial gobernado por la ecuación diferencial de equilibrio genérica

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.17)$$

con su condición de contorno de *Neumann* (natural) ¹

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (3.18)$$

y *condición de Dirichlet* (esencial) ²

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (3.19)$$

el cual debe satisfacerse en un dominio Ω con contorno $\Gamma := \Gamma_t \cup \Gamma_u$. En las expresiones anteriores, \mathcal{A} y \mathcal{B} son operadores diferenciales, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ es el vector de incógnitas³ y $\bar{\mathbf{u}}$ su valor prescrito a lo largo del contorno Γ_u . Por otro lado, \mathbf{b} y \mathbf{t} , representan las fuerzas forzantes⁴ actuando sobre el dominio Ω y a lo largo del contorno Γ_t , respectivamente.

Una forma general para resolver el problema anterior es el *método de los residuos ponderados* (Zienkiewicz & Taylor, 2000), técnica que permite obtener una aproximación a partir de una ecuación integral equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales del problema.

¹En este trabajo esta condición corresponde al *campo de tensiones prescritas*.

²En este trabajo esta condición corresponde al *campo de desplazamientos prescritos*.

³En este trabajo $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ es el *campo de desplazamientos*.

⁴En esta tesis corresponden a *fuerzas internas* y *fuerzas externas*.

Si la solución exacta $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ se aproxima por $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, por ejemplo utilizando la aproximación final del MPF definida en la ecuación 3.14, en general se tiene que las expresiones 3.17, 3.18 y 3.19 no son satisfechas, obteniéndose residuos o errores tanto en el dominio Ω como en el contorno Γ .

La solución aproximada al problema original se consigue ponderando el error cometido en la aproximación mediante el uso de N funciones test de acuerdo a

$$\int_{\Omega} v_I(\mathbf{x}) (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{v}_I(\mathbf{x}) (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t}) d\Gamma_t + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{v}}_I(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_u = 0 \quad (3.20)$$

$$\forall v_I(\mathbf{x}), \bar{v}_I(\mathbf{x}), \bar{\bar{v}}_I(\mathbf{x}) \in V, \quad I = 1, \dots, N,$$

siendo $v(x)$, $\bar{v}(x)$, $\bar{\bar{v}}(x)$ las funciones test, V un subespacio finito de *Sobolev* y N el número de incógnitas del problemas.

Si para la ecuación 3.20 se escogen funciones test tal que

$$v_I(\mathbf{x}) = \bar{v}_I(\mathbf{x}) = \bar{\bar{v}}_I(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad I = 1, \dots, N, \quad (3.21)$$

se obtiene la discretización mediante *colocación puntual* utilizada en el MPF, donde el término $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ corresponde a la función delta de *Dirac*, es decir,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Omega - \Gamma \\ (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\ (\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Reemplazando la aproximación 3.14 en el sistema de ecuaciones 3.22, se obtiene finalmente el conjunto de ecuaciones discretizadas cuya forma compacta es

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f}, \quad (3.23)$$

donde la matriz de rigidez $\mathbf{K} \in Mat(N \times N)$ contiene las ecuaciones que involucran a las funciones de forma $\phi_I(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}^h \in Vec(N)$ es el vector de incógnitas del problema, y $\mathbf{f} \in Vec(N)$ el vector de fuerzas que contiene los valores prescritos de fuerzas \mathbf{b} , \mathbf{t} y los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$.

De esta forma, la colocación puntual permite satisfacer ecuaciones diferenciales en puntos del dominio de solución, sin tener que definir subdominios de integración como en el caso de las formulaciones débiles (por ejemplo FEM). Un aspecto importante que se debe enfatizar, es que cada nodo solo puede cumplir un tipo de ecuación, de lo contrario, el sobrecondicionamiento evita que se cumpla cualquiera de las condiciones impuestas.

3.4. Generación local de *nubes* de interpolación

Debido al carácter local de la aproximación utilizada en el MPF, es indispensable definir para cada nodo del dominio una *nube de puntos* que considere sólo los nodos más próximos a él. Se puede observar que un mismo punto puede ser *nodo estrella* o vecino dependiendo de la *nube* en que se encuentre. La figura 3.2 muestra esquemáticamente una partición típica de un dominio en *nubes* circulares de radios variables.

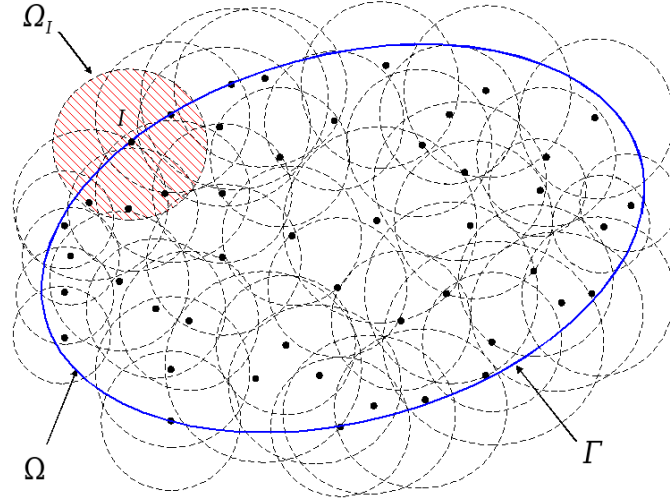


Figura 3.2: Representación del dominio del problema Ω y *nube* Ω_I asociada al *nodo estrella* I .

A pesar de no ser fácilmente cuantificables, se pueden establecer intuitivamente ciertos criterios que permitan generar *nubes* de buena calidad, por ejemplo

1. el *nodo estrella* debe estar completamente rodeado por los otros nodos pertenecientes a la *nube*.
2. el centro de gravedad de la *nube* debe estar situado lo más cerca posible al *nodo estrella*.
3. las *nubes* asociadas a nodos vecinos deben tener suficiente traslape como para asegurar la convergencia global de las aproximaciones locales por FWLS.
4. otro aspecto relevante en la definición las *nubes* asociadas a cada uno de los nodos, es que su superposición debe conformar el dominio estudiado en toda su amplitud, es decir,

$$\bigcup_{I=1}^N \Omega_I = \Omega. \quad (3.24)$$

De esta forma, la interdependencia que se logra entre los nodos mediante el uso de *nubes* asegura la continuidad de la variable de campo a aproximar. A continuación se señalan algunos criterios generalmente utilizados en la generación de *nubes* y que permiten la satisfacción adecuada de las condiciones indicadas previamente, la figura 3.3 muestra esquemáticamente estos criterios en un caso 2D. En esta gráfica los nodos candidatos a pertenecer a la *nube* se indican con fondo sólido azul.

- a) Criterio de mínima distancia (Jensen, 1972), es quizás el criterio más sencillo, elige los n nodos más cercanos al *nodo estrella*, lo cual se representa geoméricamente como un círculo de radio R_i cuyo centro es el *nodo estrella* x_i .
- b) Criterio de ocho segmentos (Perrone & Kao, 1975), que consiste en subdividir el entorno que rodea al *nodo estrella* en ocho segmentos, y seleccionar por cada sector cierto número de nodos más cercanos, dependiendo de la cantidad total de nodos escogida. La elección de nodos se realiza obteniendo un nodo por segmento a la vez, y repitiendo el proceso hasta obtener la cantidad de nodos deseada. Ver figura 3.3.
- c) Criterio de cuatro cuadrantes (Liszka & Orkisz, 1980; Oñate et al., 2001), sigue el mismo principio que el criterio de los 8 segmentos, solo que esta vez utiliza los 4 cuadrantes de un plano cartesiano imaginario cuyo centro referencial es el *nodo estrella*. figura 3.3.
- d) Triangulación de Delaunay (Löhner et al., 2002), es probablemente el procedimiento más elaborado. Se trata de un método ampliamente utilizado para FEM y ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Su principal idea es retener los nodos más valiosos y descartar aquellos con menor aporte a la aproximación. A grandes rasgos, en un mallado triangular realizado con los nodos más cercanos al *nodos estrella*, las circunferencias circunscritas a cada triangulo no deben contener ningún vértice (nodo) de otro triangulo . En la figura 3.4 se aprecian los pasos principales en la generación de *nubes* con este método, aunque el procedimiento de la triangulación no se especifica. Por esta razón, para una mayor explicación del procedimiento se sugiere consultar la referencia citada y la fuente original (George & Borouchaki, 1998).

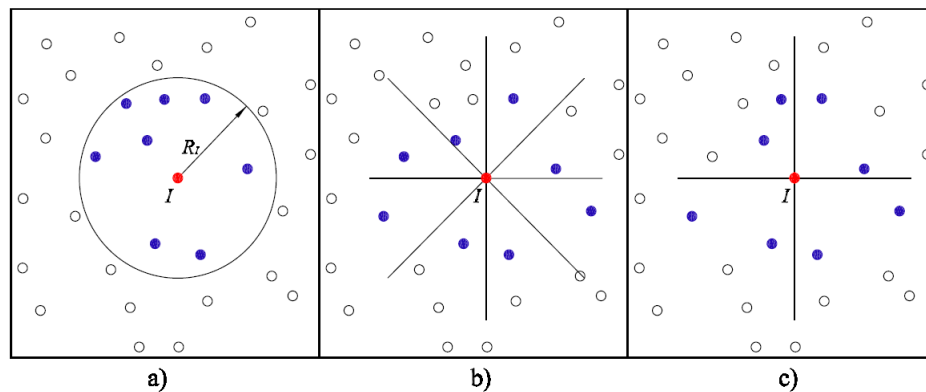


Figura 3.3: Distintas técnicas de generación local de *nubes* 2D mediante el criterio de a) mínima distancia, b) ocho segmentos y c) cuatro cuadrantes.

Es fácil intuir que todos los métodos de generación de *nubes* obtienen resultados similares si se elige una discretización regular de nodos. El MPF generalmente obtiene mejores resultados con dicha distribución, y al menos en este trabajo, no existen razones para no hacerlo. Dicho lo anterior, por simplicidad se utiliza el criterio de distancia mínima. La cantidad de nodos escogida influye directamente en los parámetros de la función de forma, por lo cual, no se conoce la cantidad óptima de nodos como respuesta absoluta. Puede ser materia de investigación el determinar qué cantidad de nodos es óptima según los parámetros de la geometría y discretización. No obstante, de la experiencia se sabe que buenos resultados se obtienen generalmente a partir de 13 nodos por *nube*.

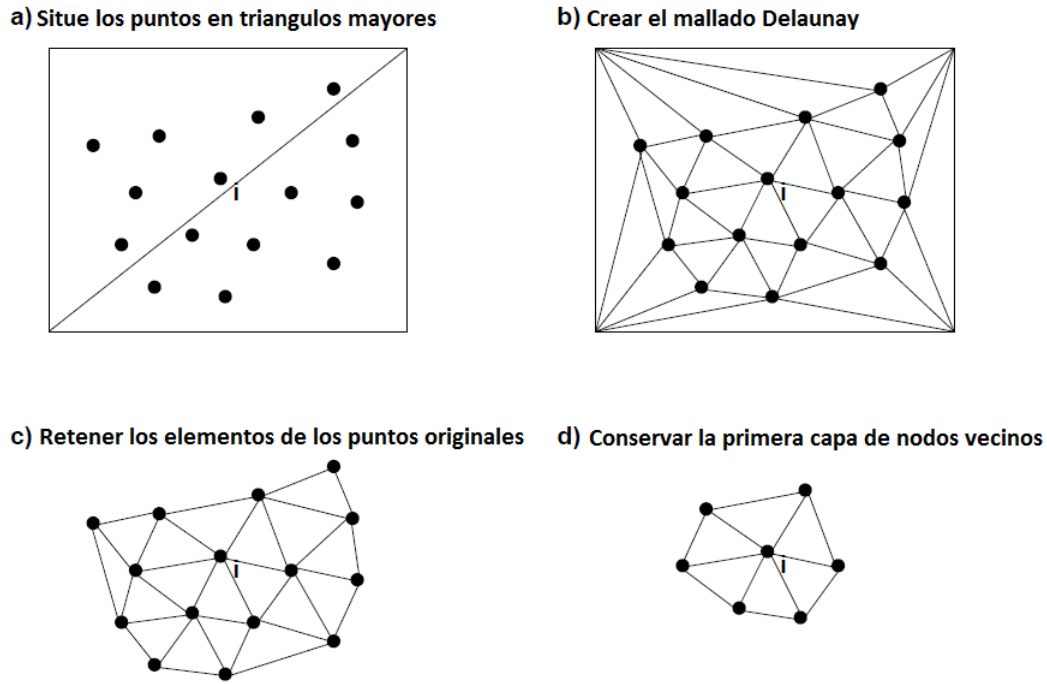


Figura 3.4: Esquema de generación local de *nubes* 2D mediante triangulación Delaunay

3.4.1. Criterios de aceptabilidad para *nubes*

Las *nubes* generadas por los criterios anteriores no son siempre aceptables. La razón de esto radica en el uso de la matriz inversa de la matriz de momentos \mathbf{A}_I^{-1} para la construcción de las funciones de forma en el aproximante. Si la matriz de momentos es singular, entonces no existe su inversa, y en consecuencia tampoco el aproximante. En un esfuerzo por abordar este problema, en (Löhner et al., 2002) se establecen dos tests de aceptabilidad para *nubes* de interpolación.

El primer test establece que aún existiendo la matriz inversa \mathbf{A}_I^{-1} , existen casos en que la aproximación es inadecuada, por lo cual, se requiere que el mayor término de la matriz inversa \mathbf{A}_I^{-1} sea menor a una tolerancia fijada, por ejemplo 10^6 , de lo contrario la *nube* es rechazada.

El segundo test toma una función conocida, y analiza cuán desviados están los resultados respecto a la solución exacta. Por ejemplo, para primeras derivadas la función $u = x + y$ debiese generar un gradiente $\nabla u = (1, 1)$. Y para segundas derivadas, se utiliza $u = x^2 + y^2$, cuyo laplaciano debiese cumplir con $\nabla^2 u = 4$. Por lo tanto, si el aproximante se desvía más allá de una tolerancia fijada, por ejemplo 10^{-10} , entonces la *nube* es rechazada.

En la siguiente sección se muestra no un criterio, sino un procedimiento adoptado en el desarrollo del MPF que ayuda a evitar el mal condicionamiento de matriz inversa de la matriz de momentos \mathbf{A}_I^{-1} .

3.5. Polinomio *base de interpolación*

Como se menciona en el apartado anterior, un aspecto importante en la construcción de la *función de forma* y el cálculo de sus derivadas cuando se utiliza una aproximación por mínimos cuadrados, es la necesidad de invertir la matriz de momentos \mathbf{A}_I presente en la ecuación 3.9 para cada punto de la discretización. Para evitar un posible mal condicionamiento de esta matriz cuando las coordenadas globales del punto se alejan del origen del sistema de referencia, es deseable expresar la *base de interpolación* en coordenadas locales (centrada en el *nodo estrella*) y adimensionales (Oñate et al., 2001). Con este cambio de coordenadas en el caso 2D, las *bases de interpolación* señaladas en las ecuaciones 3.2 y 3.3 son remplazadas por la nueva base cuadrática definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \left[1 \quad \frac{x_I - x}{dx_{max}} \quad \frac{y_I - y}{dy_{max}} \quad \left(\frac{x_I - x}{dx_{max}} \right)^2 \quad \left(\frac{(x_I - x)(y_I - y)}{dx_{max}dy_{max}} \right) \quad \left(\frac{y_I - y}{dy_{max}} \right)^2 \right]^T, \quad (3.25)$$

donde, tal como se indica esquemáticamente en la figura 3.5, se han utilizado las distancias máximas en la *nube* respecto al *nodo estrella* para adimensionalizar la base. En esta figura los nodos pertenecientes a la *nube I* se indican con fondo sólido azul.

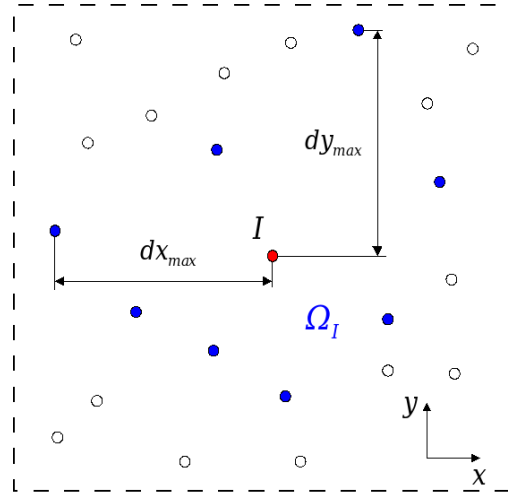


Figura 3.5: Parámetros utilizados para la adimensionalización de la *base de interpolación* en una *nube* de puntos 2D.

En el desarrollo de problemas matemáticos, muchos se esclarecen y se vuelven completamente sencillos luego de un cambio de coordenadas, por ejemplo, problemas que involucren circunferencias en coordenadas polares. Este resulta ser el caso al definir las bases adimensionales, logrando que la implementación del MPF mediante *colocación puntual* se torne especialmente simple, puesto que en este tipo de técnica sólo se evalúa la *base de interpolación* en el nodo $x = x_I$, anulando la mayoría de los términos de la base en el proceso.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{para } m=6. \quad (3.26)$$

3.6. Derivabilidad de la aproximación

La derivabilidad de la aproximación construida a partir de un procedimiento FWLS, depende de la *base de interpolación* y la *función de ponderación*. Según (Lancaster & Salkauskas, 1981), si se demuestra que la base es continuamente derivable hasta el orden k en Ω y la *función de ponderación* es continuamente derivable hasta el orden l en Ω , se tiene que las *funciones de forma* y por tanto la aproximación, es derivable hasta un orden dado por mín(k, l). De esta forma, se pueden considerar aproximaciones con *funciones de ponderación* derivables hasta el orden requerido por el problema a resolver, ecuación 3.22. Si el orden de derivabilidad es suficientemente alto, entonces se pueden calcular las derivadas.

Desde el punto de vista de la forma original del aproximante (3.1), el vector de parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ contiene términos constantes que no dependen de la posición del punto donde se requiere evaluar la aproximación, por lo cual, la derivabilidad del aproximante esta ligada únicamente a la derivabilidad del vector base

$$\hat{\mathbf{u}}_{(l,m)}(x, y) = \mathbf{p}_{(l,m)}^T(x, y)\boldsymbol{\alpha}, \quad (3.27)$$

dónde se expresa el vector de coordenadas \mathbf{x} utilizado hasta ahora como $\mathbf{x} = (x, y)$ para facilitar la comprensión de las derivadas en el caso bidimensional, l y m son el orden de la derivada respecto a “ x ” e “ y ” respectivamente. Respecto al vector $\boldsymbol{\alpha}$, éste está determinado por la ecuación 3.9.

A continuación se presenta el polinomio base y sus respectivas derivadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{(0,0)}^T(x, y) &= \mathbf{p}^T(x, y) &= \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{x_I - x}{dx_{máx}} & \frac{y_I - y}{dy_{máx}} & \left(\frac{x_I - x}{dx_{máx}}\right)^2 & \left(\frac{(x_I - x)(y_I - y)}{dx_{máx}dy_{máx}}\right) & \left(\frac{y_I - y}{dy_{máx}}\right)^2 \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_{(1,0)}^T(x, y) &= \frac{\partial \mathbf{p}^T(x, y)}{\partial x} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \frac{-1}{dx_{máx}} & 0 & -2\frac{x_I - x}{(dx_{máx})^2} & -\frac{y_I - y}{dx_{máx}dy_{máx}} & 0 \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_{(0,1)}^T(x, y) &= \frac{\partial \mathbf{p}^T(x, y)}{\partial y} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \frac{-1}{dy_{máx}} & 0 & -\frac{x_I - x}{dx_{máx}dy_{máx}} & -2\frac{y_I - y}{(dy_{máx})^2} \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_{(2,0)}^T(x, y) &= \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T(x, y)}{\partial x^2} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(dx_{máx})^2} & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_{(1,1)}^T(x, y) &= \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T(x, y)}{\partial x \partial y} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{dx_{máx}dy_{máx}} & 0 \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_{(0,2)}^T(x, y) &= \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T(x, y)}{\partial y^2} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(dy_{máx})^2} \end{array} \right]^T. \end{aligned}$$

De la misma forma que en la sección anterior, por colocación puntual, al evaluar cada derivada parcial en el *nodo estrella* se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{(0,0)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\
\mathbf{p}_{(1,0)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \frac{-1}{dx_{máx}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\
\mathbf{p}_{(0,1)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \frac{-1}{dy_{máx}} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\
\mathbf{p}_{(2,0)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(dx_{máx})^2} & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\
\mathbf{p}_{(1,1)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{dx_{máx}dy_{máx}} & 0 \end{array} \right]^T \\
\mathbf{p}_{(0,2)}^T(x_I, y_I) &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(dy_{máx})^2} \end{array} \right]^T .
\end{aligned}$$

De este modo, el cálculo de las derivadas parciales del aproximante local dentro de una *nube* se limita únicamente a obtener las distancias máximas características de cada *nube* ilustradas en la figura 3.5.

Finalmente, más adelante en la implementación numérica, se ve que lo único realmente necesario es la derivada de la función de forma $\phi(x, y)$, lo cual se obtiene sencillamente al reemplazar la ecuación 3.9 en la ecuación 3.27.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}_{(l,m)}(x, y) &= \mathbf{p}_{(l,m)}^T(x, y)\boldsymbol{\alpha} \\
&= \mathbf{p}_{(l,m)}^T(x, y)\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{B}_I\mathbf{u}^h \\
&= \boldsymbol{\phi}_{(l,m)}^T(x, y)\mathbf{u}^h .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por lo tanto, cualquier derivada de la función de forma se expresa como:

$$\boldsymbol{\phi}_{(l,m)}^T(x, y) = \mathbf{p}_{(l,m)}^T(x, y)\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{B}_I. \tag{3.29}$$

Las expresiones de \mathbf{A}_I y \mathbf{B}_I se encuentran en las ecuaciones 3.10 y 3.11, respectivamente.

3.7. Tratamiento de la discontinuidad de material

Un aspecto importante al trabajar con materiales compuestos, es definir lo que sucede en la línea de discontinuidad entre materiales, denominada comúnmente como *interfaz entre materiales*. Este es un problema que surge especialmente en los métodos sin malla que utilizan *nubes* para establecer la conectividad de sus nodos y la continuidad de la aproximación. Al generar las *nubes* de forma normal ignorando la interfaz, la aproximación de todas las variables genera un gradiente suave en dirección normal a la línea de interfaz, lo cual difiere con la realidad. En dirección normal a la interfaz, tanto el desplazamiento como la tracción son continuos, pero la deformación es discontinua. En el MEF, este no es un problema, puesto que solo basta que los elementos coincidan con la interfaz sin que esta atraviese ninguno de ellos.

Hasta ahora, la discontinuidad de material es un problema que no ha sido abordado en el MPF, puesto que no existe literatura que relacione a este método con materiales compuestos. No obstante, si se ha abordado en *Element Free Galerkin method* (EFG) (Cordes & Moran, 1996; Krongauz & Belytschko, 1998). El tratamiento de los nodos y *nubes* es muy similar en el EFG, por lo cual la extensión hacia el MPF es trivial. En el trabajo de (Cordes & Moran, 1996) se presenta la *técnica de separación de dominios* que extiende la idea de lo que sucede en el MEF, y trunca las *nubes* en la línea de interfaz, haciendo que solo los nodos pertenecientes a la interfaz puedan tener *nubes* en ambos dominios. En el trabajo de (Krongauz & Belytschko, 1998), se mejora la aproximación mediante la adición de *funciones de forma discontinuas* que generan un salto en dirección normal a la interfaz, pero solo para la primera derivada (que esta directamente relacionada con la deformación) en aquellas *nubes* que atraviesen la interfaz, mientras que se desvanece en aquellas *nubes* que no lo hacen. Una comparación de esta técnica con la de *separación de dominios* se realiza en (Pant & Sharma, 2014), sin embargo, también requiere tratar con más grados de libertad asociadas a la *función de forma discontinua*. No obstante, no representa una desventaja frente a la *técnica de separación de dominios*, puesto que ésta utiliza el *método de multiplicadores de Lagrange* para forzar los resultados en la interfaz (de la misma forma que lo hacen en el contorno), lo cual también involucra más grados de libertad. En el MPF, sin embargo, el *esquema de colocación puntual* permite reproducir las condiciones de borde con exactitud sin la necesidad de forzarlas mediante *multiplicadores de lagrange*. Por lo tanto, debido a su sencillez, y a que no requiere la adición de más grados de libertad, se escoge la *técnica de separación de dominios* para lidiar con este problema, y se describe con mayor detalle a continuación.

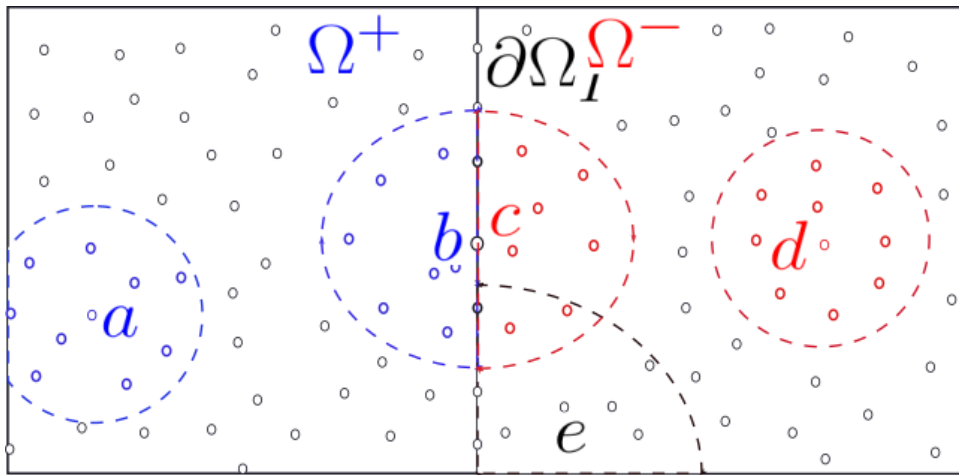


Figura 3.6: Representación del tratamiento de *nubes* respecto a su posición dentro del dominio compuesto por los materiales Ω^+ , Ω^- y la interfaz $\partial\Omega_I$.

Supóngase que el dominio Ω es un material compuesto por dos materiales Ω^+ y Ω^- , separados por una interfaz $\partial\Omega_I$ cuyos nodos están duplicados; un nodo por cada dominio en los puntos señalados en la figura 3.6. A modo de ejemplo, una *nube* cualquiera lejos de la interfaz como la *nube a*, se encuentra en el dominio Ω^+ , y por lo tanto, su aproximación responde a las propiedades de aquel material. De forma homóloga, la *nube d* se representa de forma normal, y su aproximación responde a las propiedades del material Ω^- . Una *nube* cualquiera *e* que se trunca en la interfaz, esta conformada tanto por nodos interiores como por nodos interfaz pertenecientes al dominio de su nodo estrella. Un punto perteneciente a la interfaz de materiales $\partial\Omega_I$ debe aproximarse en cada dominio; Una *nube b*

conformada por nodos interiores e interfaz del dominio Ω^+ , y una *nube c* conformada por por nodos interiores e interfaz del dominio Ω^- .

En términos simples, los material son tratados como problema separados que se conectan entre sí a través de condiciones en la interfaz. Una interfaz se forma por dos materiales, y por tanto los nodos que la discretizan están duplicados (uno para cada material). Las condiciones que deben cumplirse en la interfaz y rempazan la ecuación de gobierno son la *continuidad de desplazamientos*, que evita el despegue entre materiales; y la continuidad de tracciones en dirección normal a la interfaz, que a su vez implica la discontinuidad de la deformación en la misma dirección. Todo esto también se aborda en el apartado 5.7.3.

Considerando que la *continuidad de tracciones* es una variación de la *condición de Neumann* y la *continuidad de desplazamientos* una variante de la *condición de Dirichlet*, la formulación en el *método de residuos ponderados* se extiende a la forma:

$$\int_{\Omega - \partial\Omega_I} v_I(\mathbf{x}) (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} v_I^2(\mathbf{x}) (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t}) d\Gamma_t + \int_{\Gamma_u} v_I^3(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p) d\Gamma_u + \int_{\partial\Omega_I^-} v_I^4(\mathbf{x}) (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}^+) - \mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}^-)) d\Gamma_t + \int_{\partial\Omega_I^-} v_I^5(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{u}}^+ - \hat{\mathbf{u}}^-) d\Gamma_t = 0 \quad (3.30)$$

$$\forall v_I(\mathbf{x}), v_I^2(\mathbf{x}), v_I^3(\mathbf{x}), v_I^4(\mathbf{x}), v_I^5(\mathbf{x}) \in V, \quad I = 1, \dots, N,$$

siendo $v_I(\mathbf{x})$, $v_I^2(\mathbf{x})$, $v_I^3(\mathbf{x})$, $v_I^4(\mathbf{x})$ y $v_I^5(\mathbf{x})$ *funciones test*, V un subespacio finito de *Sobolev* y N el número de incógnitas del problemas.

Ahora, utilizando *colocación puntual*:

$$v_I(\mathbf{x}) = v_I^2(\mathbf{x}) = v_I^3(\mathbf{x}) = v_I^4(\mathbf{x}) = v_I^5(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad I = 1, \dots, N, \quad (3.31)$$

donde el término $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ corresponde a la función delta de *Dirac*, se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones modificado para el tratamiento de discontinuidad de material en un material compuesto cualquiera:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Omega - \Gamma \\ (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\ (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \\ (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}^+) - \mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}^-))_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \partial\Omega_I^+ \\ (\hat{\mathbf{u}}^+ - \hat{\mathbf{u}}^-)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \partial\Omega_I^- \end{aligned} \quad (3.32)$$

Es importante aclarar, que en problemas donde los nodos de interfaz sean a su vez nodos del contorno, entonces deben tratarse únicamente como nodos del contorno para evitar sobrecondicionamiento. En casi todos los casos posibles, la normal en la condición de interfaz difiere con la normal en la condición del contorno, y tratar de hacer cumplir ambas condiciones se vuelve un ejercicio imposible. Este método a su vez implica que cada material es un problema independiente que se une a los demás mediante condiciones de continuidad en la interfaz, por lo cual, la discretización en cada material debe ser tan generosa como para un problema común de un material homogéneo.

3.8. Estabilización de la aproximación

Debido a las características propias de la técnica de *colocación puntual* utilizada en el MPF, la prescripción de condición de contorno de *Dirichlet* se realiza en forma trivial imponiendo el valor directamente en el punto y sin un tratamiento adicional en el sistema de ecuaciones 3.22.

Por otro lado, la condición de contorno de *Neumann* debe asignarse en los puntos donde se conocen las componentes del vector de *fuerzas externas* y adicionalmente en los puntos del contorno libre (sistema de ecuaciones 3.22), por ende, se vuelve necesario preservar la simetría de la *nube* para una adecuada aproximación de las derivadas de la función incógnita, lo cual es difícil de conseguir en los subdominios del contorno. Otra particularidad de la técnica de *colocación puntual* es que las ecuaciones de equilibrio sólo se imponen en los nodos interiores del dominio, lo que suele afectar la exactitud de la solución cuando no se utiliza un número suficiente de puntos.

Una forma de abordar estas particularidades, en definitiva inestabilidades, consiste en modificar el sistema final de ecuaciones agregando nuevos términos que son función de las ecuaciones originales de gobierno del problema. En el contexto del *método de puntos finitos*, la técnica para obtener este nuevo sistema de ecuaciones, está basada en el procedimiento de cálculo finitesimal - *Finite Increment Calculus* (FIC) (Oñate, 1996, 2004).

Las ideas claves del procedimiento FIC se resumen en

1. Imponer las ecuaciones de equilibrio o balance sobre un dominio de tamaño finito
2. Aproximar el campo desconocido o incógnita del problema utilizando una expansión en serie de *Taylor*
3. Conservar solo los términos de un orden superior en vez de aquellos utilizados en una aproximación infinitesimal estándar

De este modo se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones estabilizado

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \nabla \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{b})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Omega - \Gamma \\
 (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2}h_n \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\
 (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

siendo ∇ el operador gradiente, \mathbf{h} un vector que contiene la longitud característica del subdominio donde son impuestas las ecuaciones de equilibrio y h_n corresponde a la proyección del vector \mathbf{h} en la dirección de la normal $\hat{\mathbf{n}}$ del contorno, es decir, $h_n = \mathbf{h}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Se debe notar que si en el sistema de ecuaciones 3.33 el vector \mathbf{h} tiende a cero, es decir, cuando la longitud característica del dominio es infinitesimal, se recupera la forma original de las ecuaciones del problema, ecuación 3.22.

En el uso del MPF para mecánica de sólidos, una alternativa para la longitud característica es $\mathbf{h} = \mathbf{d}_{min}$, donde \mathbf{d}_{min} contiene las distancias entre el *nodo estrella* y el nodo mas cercano a este en cada

dirección. La figura 3.7 muestra esquemáticamente lo anterior para un caso 2D. En esta figura los nodos pertenecientes a la *nube I* se indican con fondo sólido azul.

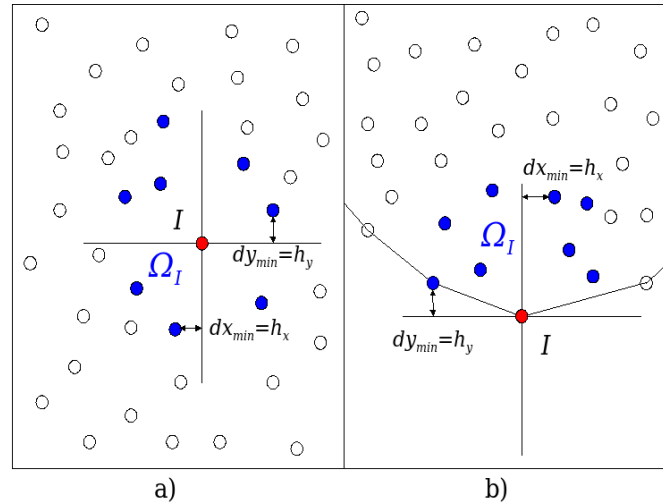


Figura 3.7: Determinación de los componentes del vector \mathbf{h} en 2D para subdominios del a) dominio y b) contorno.

Existen numerosos trabajos que utilizan la técnica de estabilización y avalan su efectividad (Pérez Pozo et al., 2009; Perazzo et al., 2004b; Oñate et al., 2003; Onate et al., 1996; Oñate, 1998; Idelsohn et al., 2002). Como se acaba de ver en la sección anterior, el tratamiento de la discontinuidad de material involucra *condiciones de continuidad* en la interfaz muy similares a la *condición de Neumann*. Si se utiliza una versión estabilizada de las *condiciones de continuidad*, estas condiciones no se cumplen. La razón de esto es que, si se analiza el efecto del uso de las ecuaciones estabilizadas en los contornos, se puede constatar que existe una pérdida de exactitud a cambio de la estabilidad (apéndice A). Es por esta particularidad del problema de materiales compuestos que se prescinde del uso de la técnica de estabilización.

Capítulo 4

Homogeneización, estado del arte

4.1. Introducción

Es un hecho ampliamente conocido que a nivel elemental la materia no es continua, mas bien todo lo contrario, el vacío predomina por sobre la materia generando extensas discontinuidades. Sin embargo, a un nivel denominado *macroscópico* los materiales homogéneos pueden ser tratados como si de medios continuos se tratasen. Esta es la premisa de la mecánica de medios continuos, y dentro de este contexto, la modelación del comportamiento de los materiales homogéneos se obtiene a través de leyes o formulaciones matemáticas que trabajan en esta escala macroscópica. Cuando se trata de materiales heterogéneos, la mayoría de las formulaciones extrapolan dicho concepto, ignorando en consecuencia lo que sucede a nivel de materiales constituyentes. No obstante, hace algunas décadas nacen formulaciones que consideran lo que sucede a nivel de los materiales constituyentes, dando así origen a un problema multi-escala, donde se utiliza un *volumen representativo elemental* (VRE) para representar la microestructura del material compuesto. Entre estas formulaciones, se pueden mencionar el *modelo de ensamble de esferas* (Hashin, 1962, 1983) donde se llena un dominio mediante esferas de diferente talla, respetando la relación volumétrica de las fases. Otros trabajos proponen un método que se denomina *self-consistent method* (Hill, 1965; Hashim, 1970; Budiansky, 1965; Christensen, 2012) donde se representa las heterogeneidades de un medio como una inclusión (elipsoidal o cilíndrica) dentro de una matriz infinita de propiedades elásticas desconocidas. Por otra parte, se propone también modelos micromecánicos basado en el *método de Mori-Tanaka* (Mori & Tanaka, 1973), estos consideran fibras o fracturas de forma elipsoidales, cilíndricas o planas embebidas en una matriz isótropa, transversalmente isótropa u ortótropa. En general, estos métodos siguen una formulación con *auto-deformaciones* (*eigenstrain*), donde se considera un sólido elástico lineal, homogéneo e infinito y se admite la inclusión de una autodeformación (*eigenstrain*) uniforme dentro una región elipsoidal. Esta idea es originalmente propuesta por (Eshelby, 1957). Por otra parte, según (Sanchez-Palencia & Zaoui, 1987), para el estudio de materiales heterogéneos se pueden adoptar dos puntos de vista. El primero, denominado global o macroscópico (denotado con “ x ”), trata al material heterogéneo como un material homogéneo puesto que las heterogeneidades son muy pequeñas a este nivel y pueden ser ignoradas. El segundo se denomina local o microscópico (denotado con “ y ”), trabaja a nivel de materiales componentes y es representado a través del ya mencionado *VRE*, que contiene toda la información microestructural

del material heterogéneo. Es necesario mencionar que si bien la microestructura se encuentra a una escala mucho menor que la macroestructura, esta sigue dentro del contexto de la mecánica de medios continuos al ser mucho mayor que la escala molecular. Otra acotación importante es que se trabaja bajo la hipótesis de que el medio heterogéneo es estadísticamente homogéneo, y aunque la experiencia sugiere que conseguir un dominio estadísticamente homogéneo no es tarea fácil, se debe partir de la idea de que es posible obtener un VRE que represente fielmente la microestructura (Suquet, 1987). Bajo este concepto, se pueden mencionar las formulaciones del *método de los promedios* y la *teoría de expansión asintótica*. A continuación se describen estas formulaciones.

4.2. Método de los promedios

Denominado también como *el método heurístico*, este método fue el punto de partida del trabajo realizado en (Suquet, 1982), donde también se realizan varias aportaciones a la teoría de homogeneización. Este autor define la teoría de homogeneización como: *el procedimiento que consiste en sustituir un material fuertemente heterogéneo por un material homogéneo el cual se desea equivalente al precedente dentro del rango usual de cargas*. Se denomina *material fuertemente heterogéneo* (o material compuesto) un material dentro del cual una muestra de tamaño manipulable contiene un gran número de heterogeneidades (granos, cristales, fibras, agujeros, fisuras, etc.) embebidos dentro de una matriz de propiedades diferentes (la matriz y las heterogeneidades son los constituyentes).

Con el propósito de obtener una ley de comportamiento macroscópico de algunos materiales, (Hill, 1967) y (Mandel, 1972) proponen que dichas magnitudes pueden ser obtenidas a través del promedio de las magnitudes microscópicas que definen el estado del sistema. Es decir, sea V el volumen de un dominio representativo del medio heterogéneo, entonces las variables macroscópicas de tensiones o deformaciones se obtienen a través del promedio de los respectivos campos de las variables microscópicas dentro de dicho dominio, esto es:

$$\sigma^x = \langle \sigma \rangle_V \quad \text{ó} \quad \epsilon^x = \langle \epsilon \rangle_V \quad (4.1)$$

Donde σ^x y ϵ^x representan el tensor de tensiones y deformaciones macroscópicos respectivamente, σ y ϵ son los campos correspondientes de tensiones y deformaciones a nivel microscópico. La conversión de estos campos microscópicos a la variable macroscópica se justifica a través del *operador promedio* ($\langle \bullet \rangle$), el cual se define de la siguiente forma: Sea “ x ” la coordenada de un punto en la escala macroscópica, V el dominio del volumen representativo y la función f es una variable de estado de dicho dominio que depende de dos escalas: una x_i que representan las variables macroscópicas y otra y_i para las variables microscópicas, entonces:

$$f^x(x) = \frac{1}{V} \int_V f(x, y) dV := \langle f(x, y) \rangle_V \quad (4.2)$$

En este caso, el problema de la microescala difiere del clásico problema de valores de contorno:

1. Las cargas consisten en promedios de campos y no de desplazamientos o fuerzas de masa o superficie.
2. No existen o no están claras las condiciones de contorno en el dominio representativo.

Cual sea el caso, el problema elástico de los materiales compuestos se aborda de la siguiente manera: se busca obtener de forma aproximada el tensor constitutivo homogeneizado elástico C^x (o su inverso D^x). Con lo cual, es posible desacoplar el problema y modelar el medio heterogéneo elástico, únicamente a través de la escala macroscópica x_i . En (Suquet, 1982) se generaliza el método de promedios para su aplicación a medios periódicos.

Existen distintos procedimientos que pueden considerarse sub-grupos del método de los promedios, entre ellos:

1. *Método de los promedios formulado en deformaciones*: Puede encontrarse trabajos relacionados con este procedimiento en (Hill, 1967; Mandel, 1972; Suquet, 1982, 1987).
2. *Método de los promedios formulado en tensiones*: Puede encontrarse trabajos relacionados con este procedimiento en (Mandel, 1972; Suquet, 1982, 1987).

4.3. Teoría de la expansión asintótica

Esta formulación matemática realizada a través de los desarrollos asintóticos descompone el problema de los medios heterogéneos en escalas de diferente orden de magnitud. De esta forma, se obtiene en cada una de las escalas las ecuaciones que gobiernan el comportamiento tenso-deformacional del material bajo un riguroso sustento matemático. Esta teoría fue propuesta y desarrollada en (Sanchez-Palencia, 1974, 1980; Duvaut, 1976; Lene & Duvaut, 1981; Bensoussan et al., 2011), entre otros. El lector interesado en profundizar acerca de los conceptos matemáticos de los métodos asintóticos puede consultar las siguientes referencias (Kevorkian et al., 1982; Sánchez-Hubert & Sánchez-Palencia, 1992).

Como se menciona anteriormente, el problema de materiales compuestos puede adoptar dos puntos de vista diferentes. Si se adopta un punto de vista microscópico, es posible apreciar el material a nivel de materiales constituyentes, y por consiguiente, los respectivos campos de las variables de estado. Estos campos microscópicos presentan fluctuaciones u oscilaciones, cuya longitud de onda está relacionada con la dimensión de los componentes. Si por el contrario se adopta un punto de vista macroscópico, entonces no se perciben las heterogeneidades del medio, ni las rápidas oscilaciones de los campos de las variables. Esta diferencia de magnitud entre la longitud de onda del campo microscópico y el macroscópico lleva a dividir el espacio de referencia. En consecuencia, se utiliza un espacio global o macroscópico, al cual se denomina con la variable x_i . Además, se considera un espacio local o microscópico y_i , en el cual se representa la estructura interna del compuesto o microestructura. Las escalas de estos espacios están relacionadas mediante un pequeño parámetro ϵ , que representa la diferencia de magnitud entre las longitudes de onda de las dos escalas

$$y = \frac{x}{\epsilon}. \quad (4.3)$$

Entonces, es posible deducir un operador diferencial en dos escalas de la siguiente forma: sea una función $f^\epsilon(x)$, donde ϵ es la longitud de onda del campo fluctuante microscópico. Entonces, esta función puede ser escrita de forma equivalente en las dos escalas $f^\epsilon(x) = f(z, y)$, tal que $z_i(z_i = x_i)$ es la variable macroscópica e $y_i = x_i/\epsilon$ es la microscópica. De esta forma, la derivada de la función $f^\epsilon(x)$ con respecto a las dos escalas es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (4.4)$$

puesto que las variables: y_i y z_i son consideradas independientes, se reemplaza la variable macroscópica z_i por x_i , esto es:

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.5)$$

Ahora bien, dentro de un contexto multiescala, el campo de desplazamientos u^ϵ se puede descomponer de la siguiente forma

$$u^\epsilon(x) = u(x, y) = u^0(x, y) + \epsilon u^1(x, y) + \epsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (4.6)$$

siendo u^ϵ el campo de desplazamientos del medio heterogéneo, el cual se descompone en la suma de funciones diferentes (u^0, u^1, u^2, \dots) que coexisten bajo diferentes órdenes de magnitud ($\epsilon^{-1}, \epsilon^0, \epsilon^1, \dots$). En general, se admite que estas funciones varían lentamente en cada una de las escalas.

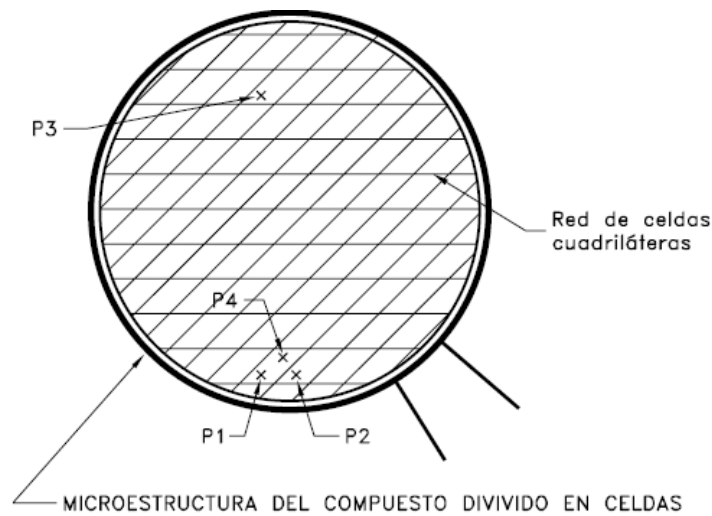


Figura 4.1: División de un medio en celdas unidad.

Si el compuesto es un medio periódico, este principio se lo conoce como *hipótesis de periodicidad local* (Bensoussan et al., 2011; Sanchez-Palencia & Zaoui, 1987; Lévy, 1987). Es decir, considérese que se tiene

un medio dividido en celdas unidad de dominio Y , tal como presenta la figura 4.1, considérese además que se han identificado dos puntos $P1$ y $P2$ en celdas vecinas que son homólogos por periodicidad. El principio expresa que el valor de la función f^ϵ (que representa el campo de una variable de estado del problema) es en estos puntos (aproximadamente) igual, puesto que dichos puntos con respecto a la escala local son equivalentes y en relación a la escala global dichos puntos se encuentran en posiciones muy cercanas. Por el contrario, el valor de la función es en general distinto para un punto cualquiera $P3$ homólogo por periodicidad pero alejado de $P1$, ya que la distancia es grande con respecto a la escala x_i . Así también, el valor de la función es distinto para un punto $P4$ que se encuentra dentro de la misma celda pero alejado del punto inicial $P1$, puesto que en este caso la distancia entre dichos puntos es grande con respecto a la escala y_i . Para obtener las ecuaciones que gobiernan en cada una de las dos escalas, la mayor parte de trabajos utilizan los tres primeros términos de la descomposición del campo de desplazamientos (ver ecuación 4.6) y además descomponen el campo de tensiones. Sin embargo, por sencillez y para una mejor explicación del método, es posible obtener las mismas expresiones utilizando únicamente los dos primeros términos del campo de desplazamientos, tal como se presenta a continuación. Aunque en lo posible, se intenta seguir la formulación estándar de esta teoría, que se puede encontrar en las siguientes referencias (Lene, 1986; Devries et al., 1989).

4.4. Otros temas relacionados a la teoría

4.4.1. Condiciones de contorno e implementación

Las condiciones de contorno aplicadas al VRE o *celda unidad* es uno de los temas que no presenta consenso entre los investigadores. Como es bien sabido en mecánica de sólidos, la solución del problema requiere conocer las condiciones de contorno. Estas pueden ser *condición de Dirichlet*; desplazamientos impuestos en parte o el total del contorno, *condición de Neumann*; fuerzas impuestas en parte o el total del contorno, o bien una combinación de ambas condiciones. Estas condiciones buscan reproducir las condiciones reales, aunque idealizadas, de la estructura. De igual forma, las condiciones de contorno prescritas en la celda unidad deben representar lo que sucede en la estructura interna del compuesto. La teoría de promedios plantea la hipótesis (de aceptación general) que las tensiones y deformaciones macroscópicas corresponden al promedio de los respectivos campos microscópicos. Para forzar el cumplimiento de al menos uno de los dos campos se utiliza ya sea la *condición de Dirichlet* (Hill, 1967) (imposición de un desplazamiento uniforme), o la *condición de Neumann* (Mandel, 1972) (imposición de una tensión uniforme). El error introducido por dichas condiciones es despreciable cuando las dimensiones de las heterogeneidades son muy pequeñas con respecto al volumen elemental representativo, pero la solución numérica de un volumen que contiene muchas heterogeneidades involucra un alto costo computacional. Esto condujo a que trabajos posteriores consideren los materiales periódicos, donde un volumen elemental relativamente simple contiene la información completa acerca de la microestructura del compuesto. Así, las propuestas de la teoría de homogeneización con media periódica, basados tanto en la teoría de promedios (Suquet, 1982), como en los desarrollos asintóticos (Sanchez-Palencia, 1980; Duvaut, 1976; Bensoussan et al., 2011; Lene & Leguillon, 1982), reproducen las condiciones de periodicidad a través de funciones periódicas. Pero estos métodos, al descomponer los campos de las variables microscópicas en una parte uniforme y otra periódica utilizan la superposición de efectos, lo cual los restringe a problemas elásticos (véase (Suquet, 1987) página 241). Es por ello, que algunos trabajos recientes exploran diferentes posibilidades para imponer las condiciones de contorno en el problema no

lineal.

En (Swan, 1994) se propone una técnica del control de deformaciones (ϵ_x), para la homogeneización de compuestos inelásticos periódicos, la cual se basa en la descomposición aditiva del campo de desplazamientos ($u = \bar{u} + u_p$), en una contribución lineal que es impuesta, más una contribución periódica que se desconoce. En este trabajo se indica que las celdas unidad presentan lados opuestos que tienen la misma forma. La solución se obtiene de forma incremental a través de una técnica predictor-corrector, en la que el predictor es la parte lineal del campo de desplazamientos y en adelante se aplican correctores periódicos, hasta conseguir el equilibrio del dominio. Se propone también una técnica de control de tensiones (σ_x), la cual presenta un mayor grado de complejidad puesto que además de buscar el equilibrio del dominio, se requiere adicionar restricciones en deformaciones y desplazamientos. Este problema se soluciona mediante una implementación basada en la formulación mixta de elementos finitos a través del método de penalización. El lector interesado en los principios de las formulaciones mixtas puede consultar a (Zienkiewicz & Taylor, 2000; Simo & Hughes, 2006; Hughes, 2012).

Por otra parte, en el trabajo de (Anthoine, 1995), que busca obtener las propiedades elásticas homogeneizadas en mampostería fundamentándose en la teoría de los promedios, propone una interesante forma de imponer las condiciones de contorno. La mampostería idealizada en dos dimensiones, puede de ser dividida en celdas cuadriláteras y hexagonales, cuyos lados están relacionados por una base de vectores conocidos como *vectores de periodicidad*. En este artículo se solucionan únicamente aquellas celdas cuadriláteras con base de vectores ortogonales. Para solucionar las celdas hexagonales se presenta que algunas de éstas pueden ser reemplazadas por una celda cuadrilátera de base ortogonal (aunque esta última tiene el doble de su tamaño). Para solucionar el problema sobre el dominio de la celda se utiliza los multiplicadores de Lagrange. Finalmente, para obtener las propiedades homogeneizadas utiliza únicamente un cuarto del problema original gracias a las simetrías del problema. Además, compara la solución obtenida con propuestas anteriores de homogeneización para mampostería; dichas propuestas siguen un procedimiento de varios pasos (dos, tres y múltiples pasos) (Pietruszczak & Niu, 1992; Maier et al., 1991; Pande et al., 1989), a diferencia de Anthoine que lo consigue en uno solo. En una publicación posterior, (Anthoine & Pegon, 1996) analiza nuevamente una mampostería, caso en el cual los componentes (ladrillo y mortero) tienen comportamiento no lineal. El estudio se realiza para tres tipos diferentes de carga. El ablandamiento o *softening* de los materiales generan dificultades de convergencia que son solucionadas a través de técnicas numéricas avanzadas como *arc-length*. Se propone un método de control de deformaciones y control de tensiones impuesto por los valores macroscópicos respectivos a través de los multiplicadores de Lagrange.

En (Michel et al., 1999) se propone otro método de control de deformaciones y tensiones para la determinación del comportamiento del compuesto. La formulación presentada se basa en la descomposición del campo de desplazamientos en una parte uniforme y otra periódica ($u = \bar{u} + u_p$). Su aplicación se restringe a materiales elásticos y materiales rígidos-plásticos (elásticos perfectamente plásticos). En esta formulación se propone el concepto de grado de libertad macroscópico. Esto es, se introduce en cada uno de los elementos de la celda unidad discretizada un nodo adicional llamado nodo macroscópico, el cual tiene la función de agregar los grados de libertad adicionales, donde se imponen o introducen las restricciones macroscópicas (ϵ_x ó σ_x).

4.4.2. Solución en dos escalas del problema elástico

El trabajo presentado en (Guedes & Kikuchi, 1990) se considera al material compuesto como un material con estructura periódica, se utiliza y discute la teoría de homogeneización a través de los desarrollos asintóticos, y se presentan detalladamente los procedimientos para determinar los coeficientes elásticos homogeneizados del material compuesto. También se presenta un estimador del error (a priori) para analizar la calidad de la aproximación numérica.

El problema elástico de los materiales compuestos se desarrolla de forma similar a la presentada en (Lene, 1986; Devries et al., 1989), esto es:

1. Realizar el pre-procesamiento del compuesto. Esto consiste en obtener los coeficientes homogeneizados a partir de la celda unidad.
2. Solucionar el problema macroscópico suponiendo que el material es homogéneo, cuyo comportamiento elástico fue establecido en el paso anterior (1.).
3. A continuación se realiza el post-proceso. Esto se refiere a la obtención posterior de los campos de tensiones y deformaciones a nivel microscópico, en los puntos de interés de la macroestructura.

Finalmente los autores introducen un método adaptativo para mejorar la precisión de los coeficientes homogeneizados. Este método consiste en realizar una discretización más fina en aquellas partes de la celda unidad donde se determinan los mayores errores de aproximación (según el estimador desarrollado) asociados a la solución numérica (mediante el Método de Elementos Finitos). Para verificar la bondad del método adaptativo, los autores comparan un refinamiento uniforme de la discretización de la celda unidad y los resultados con el método adaptativo, obteniéndose naturalmente mejores resultados con el último método.

4.4.3. Cuestionamientos a la teoría de homogeneización y utilización de Métodos adaptativos y multi-grid

Como se sabe, los métodos adaptativos son una estrategia para mejorar la calidad de la solución obtenida a través de métodos numéricos. Estos métodos se clasifican de acuerdo a la forma de conseguir la mejora. Entre estas se tienen; técnicas que utilizan un refinamiento de la malla *h-methods*, técnicas que incrementan el orden polinomial de las funciones de aproximación *p-methods*, técnicas que utilizan re-localización de los nodos *r-methods* o combinaciones de las anteriores, por ejemplo: *hp-methods*. Por otra parte, los métodos *multi-grid* son técnicas que busca acelerar la convergencia mediante la solución iterativa de la estructura discretizada en diferentes niveles. Es decir, transmitiendo la solución desde una malla más gruesa a una más fina y viceversa.

En esta sección se comentan los trabajos presentados por Fish y coautores (Fish & Wagiman, 1993; Fish & Markolefas, 1993; Fish et al., 1994b,a; Fish & Belsky, 1995b,a) que cuestionan la teoría de homogeneización, pero además han realizado varias contribuciones en el refinamiento de la solución del problema elástico de medios heterogéneos en varias escalas a través de los métodos ya indicados. Por ejemplo, en palabras de (Fish & Wagiman, 1993) se establece: “*Los desarrollos asintóticos presentan*

una rigurosa deducción matemática en los medios heterogéneos cuando se cumple con las siguientes suposiciones:

1. *La micro-estructura es periódica, es decir, el compuesto se forma de la repetición espacial de una estructura muy pequeña o celda unidad.*
2. *Los términos de la descomposición del desplazamiento $u_k(x, y)$ son periódicos dentro de “y” con el mismo periodo de la microestructura.*

“Sin embargo, si el material es localmente no-periódico o es periódico pero con solución no-periódica en “y” por la presencia de efectos locales (contorno de la macroestructura, despegue entre componentes, etc.), entonces los desarrollos asintóticos aproximan pobremente los campos locales”. En (Fish et al., 1994b) se expresa: “Desafortunadamente, en las áreas de alta concentración de tensiones, tanto en el nivel macromecánico (macro-crack) o nivel mesomecánico (lados libres, despegue de componentes), la suposición de que la solución macroscópica (o microscópica) es uniforme dentro del VRE no es válida”.

Finalmente, en (Fish & Belsky, 1995b) se dice: *“Es bien conocido que en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$ la solución del problema del medio heterogéneo se aproxima al problema de valores de contorno con coeficientes homogeneizados. Desafortunadamente, en muchas situaciones practicas cuando el valor de ϵ es finito y la solución del problema homogeneizado tiene un alto gradiente, la solución obtenida puede distar bastante de la solución del problema inicial. Las principales fuentes de error se localizan en las porciones del dominio donde la solución tiene altos gradientes. Irónicamente, estas son precisamente las regiones de mayor interés desde el punto de vista práctico”.* Por otra parte, la visión de estos investigadores puede resumirse en la siguiente opinión (Fish & Belsky, 1995a) *“La teoría matemática de la homogeneización sirve para capturar la frecuencia baja que presenta el medio heterogéneo, mientras que en los lugares con altos gradientes la respuesta es oscilatoria, es por ello que se introduce un término perturbador, la solución se determina aplicando técnicas de relajación hasta conseguir convergencia”.* Estas ideas tomadas de las publicaciones aclaran la forma de abordar el problema. En (Fish & Wagiman, 1993), proponen descomponer el dominio global en una parte periódica, en la cual se utiliza la solución de la teoría de homogeneización. En el resto del dominio, donde se suponen que dominan los efectos locales, se considera como una porción no periódica (por ejemplo: en el contorno). En esta porción del problema se sobrepone una malla fina, cuyas condiciones de contorno es el desplazamiento obtenido en la solución del problema global. En este caso, el campo de desplazamientos corresponde al campo de desplazamiento macroscópico (u_0) enriquecido por una contribución de la microestructura (a través del segundo término de la descomposición asintótica u_1). La solución se obtiene de forma acoplada (ver detalles en la referencia). Sin embargo, no está claro que esta división, ni la introducción de esta perturbación lleven a mejores resultados. Un trabajo más elaborado (Fish & Markolefas, 1993) propone un método adaptativo *s-method* para problemas elásticos, el cual se basa en la superposición de una malla fina donde un estimador de error indica que se requiere. Se opera de la siguiente forma:

1. Se propone un estimador de error, el cual se aplica nodo por nodo.
2. Se identifica las regiones criticas de acuerdo a los contornos de la densidad de error estimado.
3. Se sobrepone una malla fina en dichos lugares donde se han determinado errores inaceptables.

4. Se obtiene la solución del refinamiento adaptativo.
5. Se valora la calidad de la solución a través de una norma global y local.

el proceso repite los pasos 4 y 5 hasta obtener la precisión deseada. Luego en (Fish et al., 1994b), desarrollan un indicador y estimador de la reducción del error en la microescala (*Microscale reduction error indicator and estimators*), el cual se basa en la estimación de los términos de alto orden que se desprecian en la clásica formulación en doble escala de la teoría de la expansión asintótica. Otro artículo en esta misma dirección recoge los trabajos anteriores (Fish et al., 1994a). En este artículo se generaliza el *s-method* sobreponiendo mallas en varios niveles. Para ello se presenta dos versiones, una para mallas estructuradas y otra para no estructuradas. La versión con mallas estructuradas se soluciona con un solver iterativo para sistemas simétricos definidos positivos, se analiza dos procedimientos: el uso de pre-condicionador de gradiente conjugado y un algoritmo *multi-grid* jerárquico. Se discute el proceso adaptativo basado en un estimador de error y una estrategia de refinamiento. Finalmente se propone una estrategia para simular la formación de discontinuidades y su propagación a través de un método adaptativo jerárquico que utiliza campos discontinuos. Por otra parte, un cambio de estrategia se encuentra en (Fish & Belsky, 1995b,a). En este trabajo, se abandona la hipótesis de uniformidad de los campos de variables en la escala macroscópica. Se proponen unos operadores de transformación para pasar la información de la malla gruesa a la fina y viceversa (*intergrid transfer operators*), para lo cual se utilizan los términos de los desarrollos asintóticos. La solución se realiza de forma iterativa en las dos escalas, una en la macroscópica y otra a nivel de los componentes. Nuevamente se utiliza el indicador y estimador de reducción del error en la microescala. En palabras de (Zalamea et al., 2000), “Cabe agregar que, la descalificación de la solución periódica no se realiza de forma rigurosa. Por otra parte, puesto que la respuesta depende de la solución obtenida con el Método de los Elementos Finitos, es obvio que el uso de los métodos adaptativos (en cada una de las escalas) van a mejorar el resultado. Sin embargo, no está claro que la introducción de dichas perturbaciones y la correspondiente relajación sea lo adecuado, más bien da la impresión que en este caso la solución depende tanto del valor de la perturbación como del nivel o escala donde se lo introduce. Además, la utilización de todas estas técnicas de refinamiento eleva considerablemente la complejidad del problema elástico de materiales compuestos”.

Finalmente, se ha presentado una propuesta diferente para materiales heterogéneos, pero que sigue una línea de investigación en esta dirección. Ésta se denomina *Homogenized Dirichlet Projection Method (HPDM)*. En este caso se obtiene los efectos de la microestructura bajo diferentes escalas sobre la respuesta a nivel macroscópico del medio heterogéneo. Al igual que en el caso anterior, se introduce un estimador de error y se refina sucesivamente en los varios niveles o escalas mediante un método jerárquico. Ver los detalles en las siguientes referencias (Zohdi et al., 1996; Moës et al., 1998; Oden et al., 1999).

4.4.4. Homogeneización mediante el Método de Elementos Finitos Voronoi

Este método es una propuesta para problemas no lineales, el cual representa un material heterogéneo a través de *elementos finitos Voronoi* (Ghosh et al., 1995, 1996). Este método fue concebido para reproducir el comportamiento de materiales con distribución aleatoria de las heterogeneidades. Para ello, representa un volumen de un medio con dispersión arbitraria de heterogeneidades mediante una partición del dominio en polígonos convexos de varios lados denominados elementos Voronoi. Para representar las heterogeneidades, cada uno de estos elementos contienen una segunda fase o inclusión dentro del dominio, tal como se presenta en la figura 4.2. En este caso, cada uno de estos elementos Voronoi pueden ser considerados como una celda base, de tal forma que varios de estos elementos dentro del dominio representativo caracterizan un volumen de un medio con dispersión aleatoria de sus heterogeneidades. Con el propósito de facilitar su utilización los autores han desarrollado generadores de malla que crean estos polígonos basados en su forma, tamaño y localización de heterogeneidades (Ghosh & Mukhopadhyay, 1991, 1993).



Figura 4.2: Idealización del medio heterogéneo mediante una partición del volumen representativo con elementos Voronoi.

Esta formulación busca reducir el costo computacional que se genera al determinar los campos microestructurales dentro del compuesto, ya que en los materiales aleatorios la determinación exacta de los campos microscópicos no es tan relevante como la determinación de los campos a nivel macroscópicos. En este método cada elemento Voronoi representa un elemento finito, cuya formulación se realiza a través de un método híbrido de tensiones introducido por (Pian, 1964). Posteriormente, para representar al compuesto se incorpora una heterogeneidad dentro de la matriz del elemento Voronoi (Ghosh & Mukhopadhyay, 1993), cuyo efecto se introduce mediante la restricción de continuidad del vector de tracciones en la interfaz matriz-inclusión. En la interfaz, el campo de tensiones y deformaciones puede ser discontinuo, mientras que el campo de desplazamientos se considera continuo. Las discontinuidades

des en el campo de tensiones se consigue mediante la posibilidad de que se produzcan saltos dentro de los coeficientes en la interpolación polinómica de las tensiones. De tal manera que, el funcional de energía complementaria del elemento cumple la restricción de continuidad del vector de tracción en la interface matriz-inclusión impuesta a través de multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, se propone abordar el problema elástico de materiales compuestos mediante un método de dos escalas (Ghosh et al., 1995). El método presentado obtiene las ecuaciones que gobiernan en cada una de las escalas mediante la teoría de los desarrollos asintóticos y el análisis del VRE se realiza mediante el método de los *elementos finitos Voronoi*. En el artículo (Ghosh et al., 1996) se extiende este método a problemas no lineales. Además se presentan ejemplos que comparan el método propuesto con la *teoría de homogeneización* mediante los desarrollos asintóticos, con resultados obtenidos a partir de ensayos de laboratorio y con ecuaciones constitutivas determinadas para ciertos compuestos. Los resultados obtenidos son satisfactorios y a un costo computacional menor con respecto a los métodos que utilizan la celda unidad. En una publicación posterior (Lee et al., 1999) se introduce un criterio de fractura dentro del elemento y un método adaptativo en la escala macroscópica. Este innovador método resulta sumamente ventajoso para el estudio de compuestos con distribución aleatoria y además puede representar una celda unidad de un medio periódico, incluso en algunos casos con un solo elemento finito Voronoi, esto le confiere una gran ventaja por la rapidez del resultado. Pero, por las suposiciones que se realizan en su formulación, la precisión de los campos microscópicos, otorgado por un único elemento finito Voronoi, es menor que el obtenido mediante una celda unidad (con varios elementos finitos), aunque el valor promedio global de estos campos sea muy aproximado. Por otra parte, por su formulación se puede encontrar dificultades al intentar extender esta metodología a problemas (de medios periódicos) que presenten: despegue de componentes, formas complicadas de heterogeneidades, compuestos con más de dos fases, etc.

Capítulo 5

Homogeneización en dos escalas basada en periodicidad local: Conceptos y formulación

5.1. Introducción

Entre los métodos presentados en el estado del arte, es *la teoría de expansión asintótica* la que se ha impuesto en los últimos años. Sin embargo, la dificultad que presenta la extensión al caso no-lineal tanto para *la teoría de expansión asintótica* como para el *método de los promedios*, llevó al desarrollo de técnicas menos convencionales como los *elementos finitos Voronoi*.

En este capítulo se presenta la formulación de *la teoría de la homogeneización* desarrollada en (Zalamea et al., 2000, 2002), la cual utiliza la mecánica de medios continuos estándar y mantiene las principales ideas presentadas en el Estado del Arte. Por ejemplo, se admite que las variables efectivas macroscópicas son el promedio de los campos de las variables microscópicas y que el problema se descompone en dos escalas como sugiere la teoría de la expansión asintótica. El análisis parte de las consecuencias que se derivan de la periodicidad del medio y su división en celdas unidad. De aquí, se proporcionan una serie de conceptos que, junto a la hipótesis de periodicidad local (Sanchez-Palencia & Zaoui, 1987), permiten deducir de forma rigurosa algunas de las variables macroscópicas a partir de los campos de las variables microscópicas. Además, se obtienen las ecuaciones que gobiernan al problema en cada una de las dos escalas, sin tener que recurrir a los desarrollos asintóticos. A continuación se plantea el problema de valores de contorno a nivel de la microestructura a través de las restricciones de borde adecuadas para la celda unidad en el rango lineal.

5.1.1. Utilización de dos escalas

La principal distinción de los materiales heterogéneos es que su comportamiento, como es lógico asumir, se encuentra fuertemente influenciado por sus materiales constituyentes que interactúan en un nivel

microestructural. El comportamiento de un material heterogéneo bien podría obtenerse modelando el material desde el nivel de sus constituyentes (microestructural) hasta la escala macroscópica, y de la misma forma, discretizando el dominio desde ese nivel. Sin embargo, como se puede inferir, esto no solo escapa de la capacidad de los ordenadores actuales, sino también del sentido de practicidad en ingeniería. Por ejemplo, en la teoría de la información, el comportamiento aleatorio se dice ser complejo, puesto que es irreducible y no puede ser representado en una simple expresión. Por el contrario, el comportamiento ordenado puede ser reducido a una sola expresión o unidad de información, por lo cual se dice ser simple. Esta es la idealización necesaria que requiere *la teoría de la homogeneización* para abordar un problema altamente complejo con las herramientas disponibles, esto es, reducir el comportamiento microestructural del problema a una unidad de información manipulable y representativa, un volumen representativo elemental (VRE). Estas idealizaciones responden al sentido de la practicidad, otorgando soluciones considerablemente buenas a un costo computacional absolutamente menor. Aún así, aunque idealmente se dispusiese de las herramientas necesarias para modelar un compuesto desde el nivel microestructural, la inconmensurable cantidad de información fácilmente resultaría en un comportamiento caótico e inestable y el éxito al abordar el problema no estaría asegurado.

La división del problema en dos escalas se justifica cuando la diferencia de magnitud entre dichas escalas es grande. Es decir, si L es la dimensión del medio global o la longitud de onda característica del problema macroscópico y l es la dimensión de la celda o el período de la longitud de onda característica en la microestructura, la relación entre las dos escalas ϵ tiende a cero.

$$\epsilon = \frac{l}{L} \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

Esta formulación, al igual que las formulaciones presentadas, busca aprovechar las consecuencias que se derivan de la periodicidad de la estructura interna del compuesto. En este caso, la hipótesis de periodicidad local (Sanchez-Palencia & Zaoui, 1987; Lévy, 1987), presenta que las simetrías de los campos de las variables surgen de forma natural, como consecuencia del principio de minimización de energía. Bajo esta hipótesis se pretende determinar magnitudes macroscópicas de tensiones y deformaciones que sintetizan los campos microscópicos y representan el comportamiento del compuesto, como si este material fuera homogéneo. Para conectar ambas escalas microscópica y macroscópica, primero debe analizarse la división del medio en unidades estructurales (o celdas unidad) junto a las consecuencias de la periodicidad del medio a nivel microscópico.

5.2. División de la estructura interna del compuesto

La teoría de homogeneización analiza el problema de los materiales compuestos a nivel microestructural a través de un volumen elemental representativo del compuesto. Como se establece, estos materiales están formados por una distribución periódica o una distribución aleatoria de sus materiales componentes. En cualquier caso, la distribución y proporciones de los materiales componentes tiene que mantenerse en todo el dominio como una condición necesaria en todo material, el cual debe presentar las mismas propiedades en todo su dominio. En los medios con distribución aleatoria de heterogeneidades, el volumen representativo, entendido como una *muestra del compuesto*, requiere albergar muchas heterogeneidades para contener información suficiente y representativa del compuesto, lo cual dificulta la solución del problema sobre todo a nivel computacional. En cambio, en los medios periódicos un

volumen relativamente simple puede albergar toda la información de la microestructura. Para un material con distribución aleatoria, la obtención de un volumen representativo elemental requiere además de un estudio estadístico que escapa del área de interés, por lo cual, este trabajo no aborda la obtención del volumen representativo elemental, y asume que su obtención ya está determinada, por lo tanto se trabaja exclusivamente con medios periódicos.

5.2.1. División de un medio periódico en celdas unidad o células

Un medio periódico es aquel cuyos materiales constituyentes siguen un patrón apreciable, o una *distribución periódica* constante en todo su dominio. Como se menciona anteriormente, esta periodicidad permite obtener una *unidad estructural periódica* como *volumen representativo elemental* (VRE) o *celda unidad*. Adicionalmente, en este trabajo al igual que en sus predecesores, también se suele utilizar la denominación de *célula* para esta unidad estructural, lo cual resulta en una analogía atractiva, cómoda, familiar y que da mayor énfasis a lo que sucede en su interior (tanto *celda* como *célula* son traducciones del inglés *cell*). Volviendo al tema de interés, se puede establecer que la repetición y *traslación* ordenada de estas células reproducen al compuesto en sí. En la figura 5.1 se pueden apreciar tres ejemplos de microestructuras periódicas y sus células asociadas.

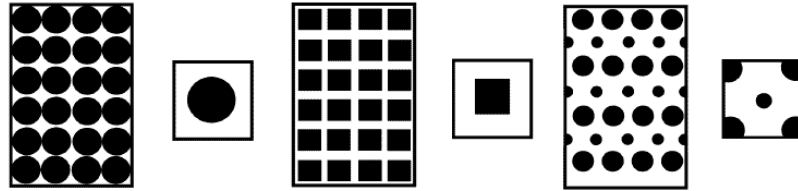


Figura 5.1: Distintos ejemplos de microestructura junto a su celda unidad representativa.

Cabe acotar que, este concepto de unidad estructural no es nuevo. Ha sido utilizado desde mucho antes en la física de estado sólido para estudiar la estructura de materiales cristalinos, usando la denominación de *celda unitaria*. Véase por ejemplo (Pavlov & Jojlov, 1987).

5.2.2. Vectores de periodicidad

Poco antes se menciona de cierta forma que el compuesto es simplemente la repetición y traslación ordenada de las células que lo componen. Esto significa, que existe una distancia regular de traslación que relaciona a cada célula del compuesto con sus adyacentes.

Como es de esperar, estas distancias de traslación son variables importantes en la microestructura del compuesto, y son denominadas de ahora en adelante como *vectores de periodicidad* \mathbf{D}_k ($k = 1, 2$ espacio bidimensional).

Aplicando este nuevo concepto, si se señala un punto P cualquiera en una célula (véase la Figura 5.2), y a continuación se señala el punto equivalente por periodicidad en cada una de las células vecinas, entonces a estas partículas o puntos se definen entre sí como puntos periódicos, y se relacionan entre sí mediante los vectores de periodicidad. Su cálculo es trivial y corresponde a la distancia entre vértices de la célula.

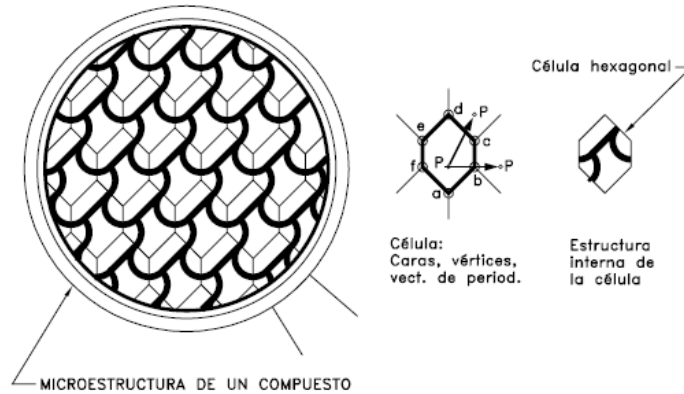


Figura 5.2: Microestructura de un compuesto dividido en células hexagonales. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.

5.2.3. Clases de células

El grupo o clase de célula está asociado al número de caras o lados que presenta. Debido a que por definición todas las células son equivalentes, y sumado a razones geométricas de *teselado*, el número de grupos de células es reducido únicamente a cuadriláteros y hexágonos en el espacio bidimensional. No es difícil llegar a concluir que con un mínimo ingenio, cualquier estructura periódica podría dividirse únicamente en células cuadriláteras. Sin embargo, pese a que las células hexagonales presentan un grado de complejidad mayor por tener un par adicional de lados periódicos, presenta la ventaja de requerir de un tamaño de geometría menor, y consecuentemente requiere un menor costo computacional. Dicho lo anterior, se debe aclarar que el nombre que recibe la célula hexagonal es debido a la cantidad de vértices y lados periódicos, puesto que en la práctica la célula hexagonal puede ser una geometría cuadrilátera, con la peculiaridad de que uno de sus pares de lados está dividido en dos, dando origen así a 3 pares de lados periódicos.

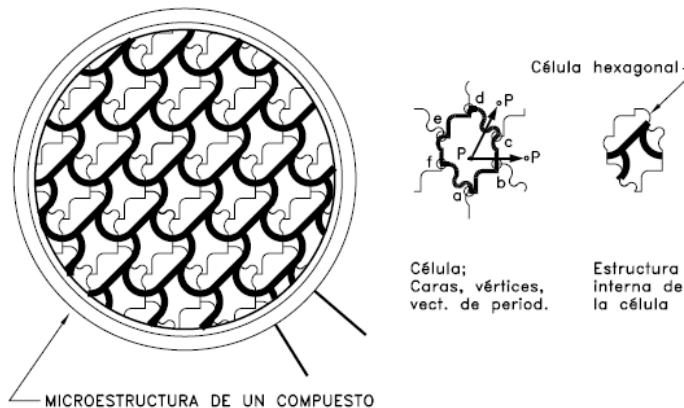


Figura 5.3: Microestructura de un compuesto dividido en células hexagonales, cuyas caras no son regulares. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.

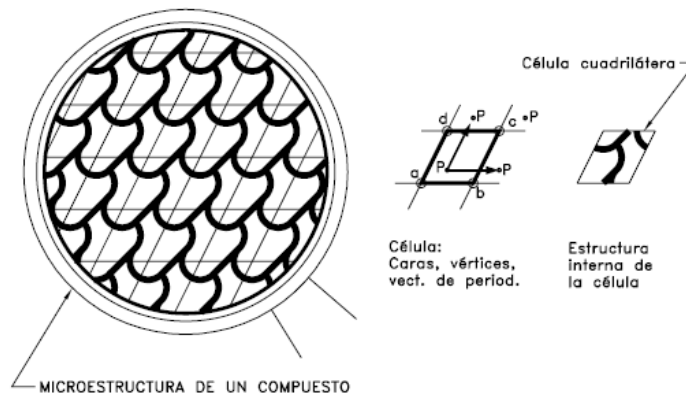


Figura 5.4: Estructura interna del compuesto dividida en células cuadriláteras. En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.

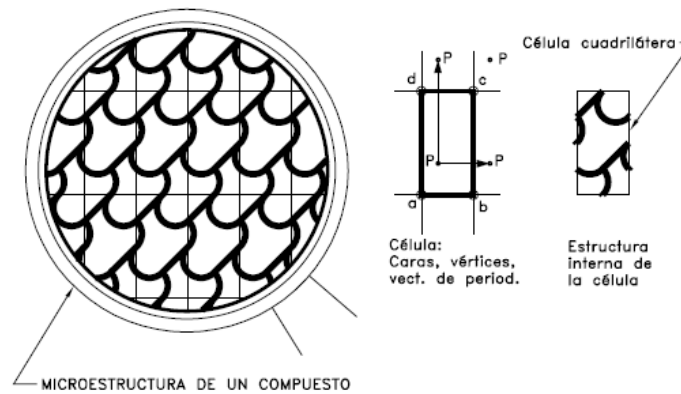


Figura 5.5: Estructura interna del compuesto dividida en células cuadriláteras (rectangulares). En la parte derecha se presenta: la célula, vectores de periodicidad, vértices y caras periódicas.

Las Figuras 5.2 y 5.3 ejemplifican dos tipos diferentes de célula hexagonal mientras que las figuras 5.4 y 5.5 muestran dos ejemplos de células cuadriláteras. Se debe observar que en la última célula cambian los vectores de periodicidad, así como también el área del dominio (se duplica). En las células cuadriláteras los vectores de periodicidad corresponden simplemente a la longitud de sus lados. No ocurre así en las células hexagonales, pero sigue siendo una tarea trivial que relaciona solamente distancias entre vértices. Cabe mencionar que el tercer vector de periodicidad en la célula hexagonal no es más que una combinación lineal de los primeros dos ($D_3 = D_2 - D_1$). De esta manera, la base de vectores se define a partir de solo dos vectores de periodicidad, como cabría esperar para geometrías bidimensionales.

Como es apreciable en las figuras, distintas clases de células pueden ser utilizadas para representar la misma microestructura. Estas divisiones son virtuales, y por ende, no deberían repercutir en los resultados obtenidos. Los valores homogeneizados de los campos de variables microscópicas son independientes de la célula utilizada, y todas ellas deberían ofrecer los mismos resultados.

5.3. Periodicidad local de las variables

En un medio continuo, las variables de campo tales como deformación y tensión están ligadas a un punto en el dominio, a diferencia de otras variables que se asocian a un dominio o porción como podrían ser la masa y la densidad. Esto significa que las variables de campos se comportan de forma continua y suave en su vecindad. Se puede asumir que el material a escala macroscópica sigue este supuesto, y es lo que se hace al asumir que el material es homogéneo a esa escala. No es lo que ocurre, sin embargo, en la escala microscópica, donde se producen cambios bruscos en el comportamiento de algunas variables de campo debido al cambio de material, problema que caracteriza a los materiales compuestos. En problemas bimaternal en 2D existe una línea de interfaz que une a ambos materiales, y a lo largo de esta interfaz los desplazamientos son continuos en toda dirección. En dirección normal a la interfaz la tensión es continua y la deformación presenta discontinuidad, mientras que en dirección tangencial de la interfaz ocurre exactamente lo opuesto.

Para considerar lo anterior dentro de la formulación del problema de homogeneización, se utiliza la alternativa propuesta por (Zalamea et al., 2000) basada en la hipótesis de periodicidad local (Sanchez-Palencia & Zaoui, 1987; Lévy, 1987) formulada para *la teoría de expansión asintótica* (apartado 4.3). Este principio asegura que dentro de un medio periódico los campos de variables presentan periodicidad local. Para explicar esto, se debe entender que los campos de variables en las células presentan un patrón similar, que bien se pueden acentuar o atenuar dependiendo de las condiciones impuestas en su contorno, pero mantienen esta forma característica. Entiéndase también que puesto que las variables de campo a nivel macroscópico se comportan de forma suave en su vecindad, significa que células vecinas presentan comportamientos prácticamente idénticos, con una diferencia muy tenue, y sus variables de campo presentan periodicidad, cuyo periodo es la dimensión de la célula.

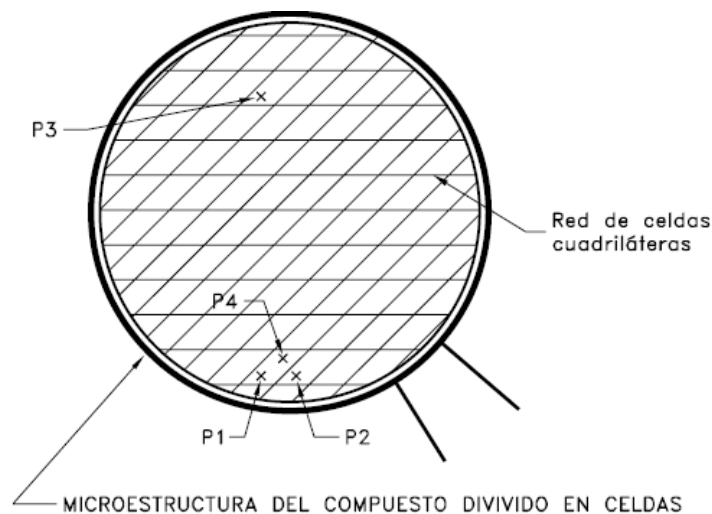


Figura 5.6: División de un medio en celdas unidad.

Con el objetivo de aclarar este concepto tanto como sea posible, se repite la explicación usada en la descripción del principio de periodicidad local para *la teoría de expansión asintótica* (apartado 4.3); Considérese el medio dividido en celdas unidad de dominio Y , tal como presenta la figura 5.6, considérese además que se han identificado dos puntos P_1 y P_2 en celdas vecinas que son homólogos por periodicidad. El principio expresa que el valor de una variable cualquiera es en estos puntos

(aproximadamente) igual, puesto que dichos puntos con respecto a la escala local son equivalentes y en relación a la escala global dichos puntos se encuentran en posiciones muy cercanas. Por el contrario, el valor de la función es en general distinto para un punto cualquiera P_3 homólogo por periodicidad pero alejado de P_1 , ya que la distancia es grande con respecto a la escala x_i . Así también, el valor de la función es distinto para un punto P_4 que se encuentra dentro de la misma celda pero alejado del punto inicial P_1 , puesto que en este caso la distancia entre dichos puntos es grande con respecto a la escala y_i .

El principio de minimización de energía asegura que cada célula busca su equilibrio interno con el mínimo consumo de energía. Puesto que por definición estas células son iguales (tanto en forma como en propiedades) y están distribuidas regularmente una a continuación de la otra, el campo de fuerzas y desplazamientos que se genera en ellas es el mismo (también es posible justificar este resultado por el principio de Saint-Venant en elasticidad (Oleinik et al., 2009; Anthoine, 1995)). En otras palabras, si se toma como referencia el contorno de la célula, las caras periódicas de las células vecinas, aunque cambien de forma, se mantienen paralelas (ver figura 5.7), lo cual asegura la compatibilidad de desplazamientos, de lo contrario se produciría un solapamiento del material o se formarían oquedades. Cabe observar que este peculiar campo de desplazamientos se caracteriza por mantener la periodicidad local del medio. Algo similar ocurre con las fuerzas que se generan en el contorno de la célula, dado que las fuerzas que actúan en la cara de una célula, por el principio de acción y reacción, se transmiten con la misma magnitud y en dirección opuesta a la célula vecina. De aquí que en estas celdas se producen fuerzas de la misma magnitud y dirección opuesta en sus caras periódicas. Este principio se ha denominado en la literatura sobre homogeneización como un campo de fuerzas anti-periódicas.

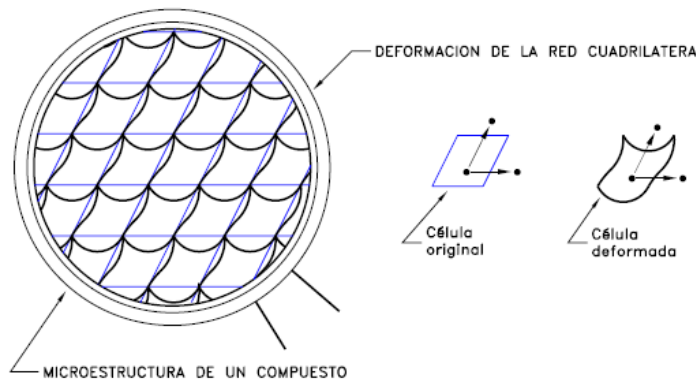


Figura 5.7: Deformación de una red cuadrilátera bajo un campo de desplazamiento periódico. No se produce un cambio en los vectores de periodicidad.

5.3.1. Efecto del campo de desplazamientos periódico

Como se menciona en el apartado anterior, en los medios periódicos se producen campos de desplazamientos que mantienen la periodicidad local del medio. Un análisis de estos campos revela que estos desplazamientos generan simultáneamente dos consecuencias. La primera es un desplazamiento diferencial de las partículas dentro de la célula, que provoca la deformación de los lados (ondulaciones). Si este desplazamiento no altera los vectores de periodicidad, dicho desplazamiento se puede entender como una perturbación, puesto que sólo se manifiesta a nivel microestructural. Por ejemplo, en la

figura 5.7 se presenta un dominio dividido en células a través de una red cuadrilátera; al dominio se le impone un campo de desplazamientos periódicos, con la particularidad de que afecta a su forma, pero los lados periódicos se mantienen paralelos. Obsérvese que, pese a la perturbación que sufren los dominios de las células, la dimensión global de la red cuadrilátera no cambia. Nótese además que la distancia entre vértices (y en general puntos periódicos) no se altera.

La segunda consecuencia de un campo de desplazamientos periódico es modificar la base de los vectores periódicos, deformándolos, pero a la vez los lados de la célula se mantienen paralelos. Por ejemplo, considere que la célula se deforma, pero en este caso se afecta la distancia (vector periodicidad) entre lados periódicos, ver figura 5.8. En este caso, puesto que las células vecinas sufren la misma transformación (condición periódica), ésta altera la dimensión global de la red y el efecto se amplifica desde el nivel microscópico al macroscópico. Quizás resulte más sencillo entender que las deformaciones macroscópicas tienen su origen en la deformación de sus células, puesto que si el dominio global se deforma, es porque sus células se deforman. Cada uno de estos dos efectos que se producen simultáneamente tiene su importancia. El primero, que se puede considerar como un desplazamiento diferencial de las partículas, se requiere para que las celdas alcancen su equilibrio interno. El segundo, que altera los vectores de periodicidad, está relacionado con la deformación del medio.

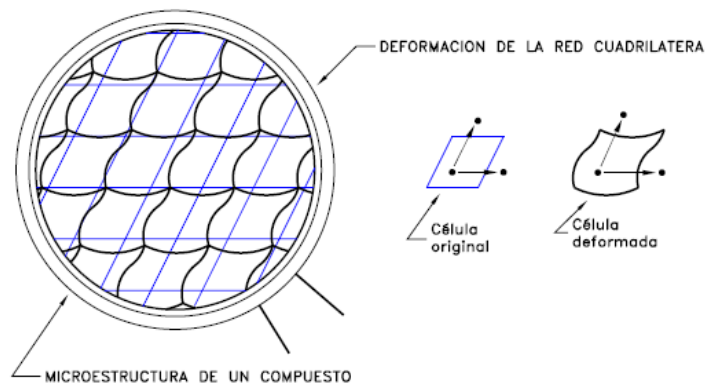


Figura 5.8: Deformación de una red cuadrilátera bajo un campo de desplazamiento periódico. Se produce un cambio en los vectores de periodicidad.

En las células hexagonales, se pueden generar perturbaciones tanto a partir de cambios de forma en los lados, como también con desplazamientos de tres de sus vértices periódicos, sin crear un efecto que se manifieste a nivel global, tal como lo presenta la figura 5.9. Esto sucede porque los vectores de periodicidad dentro de una célula hexagonal están definidos por tres vértices periódicos. Entonces, se pueden trasladar con igual desplazamiento los otros tres vértices sin alterar los vectores de periodicidad, puesto que la célula es muy pequeña, esta perturbación del dominio no se aprecia a nivel macroscópico. Sin embargo, si varía la distancia relativa entre los vértices periódicos, se requiere necesariamente que los otros vértices sufran la misma transformación para que el medio mantenga la periodicidad local y el efecto se amplifica desde la escala microscópica a la macroscópica. Se remarca que, la deformación en la escala macroscópica está relacionada con la transformación que sufren los vectores de periodicidad o lo que es lo mismo, con el desplazamiento relativo entre puntos periódicos. Dicha relación se obtiene en el siguiente apartado.

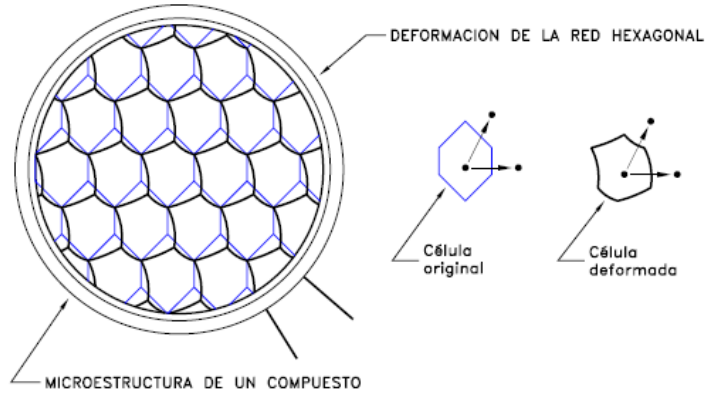


Figura 5.9: Campo de desplazamiento periódico en una red hexagonal. Se presenta un desplazamiento relativo de tres de los vértices periódicos.

5.4. Tensor de deformaciones homogeneizado

Considérese un cuerpo Ω de material compuesto cuyas partículas a nivel macroscópico se representan bajo un sistema de coordenadas de referencia X . Bajo dicho sistema de coordenadas se admite que el material es homogéneo. Sin embargo, bajo un punto de vista microscópico el material se encuentra formado por una distribución periódica de los materiales componentes. Supóngase que se amplifica un lugar cualquiera P , que bajo el punto de vista macroscópico es prácticamente un solo punto con coordenadas X_i , de tal forma que es posible apreciar los materiales componentes y por consiguiente los campos de las variables que se producen en la microescala. Sea una célula de dominio Y (ver figura 5.10) la ampliación de dicho punto en la macroescala, la cual se encuentran bajo a un sistema de coordenadas de referencia Y_i . Este dominio por definición está asociado a unos vectores de periodicidad D_i (para un espacio bidimensional i es 1 ó 2, es decir: D_1 ó D_2). En esta figura, los puntos P_0 , P_1 , P_2 , representan los puntos periódicos de una célula en las coordenadas de referencia. Por consiguiente, la distancia entre dichos puntos definen los vectores de periodicidad, esto es:

$$D_i = Y_{P_i} - Y_{P_0} \quad ; \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Considérese además, que el medio Ω sufre un desplazamiento $u(x, y)$. Dicho desplazamiento genera una nueva posición de las partículas a nivel macroscópico, esta es $x = X + u$. A su vez, a nivel microscópico la célula queda representada en las coordenadas actualizadas y_i , tal como lo presenta la figura 5.10, donde el campo de desplazamientos u traslada la posición de los puntos P_0 , P_1 y P_2 de las coordenadas de referencia a la posición p_0 , p_1 , p_2 en las coordenadas actualizadas. De acuerdo a la hipótesis de periodicidad local, el medio aunque se deforme mantiene la periodicidad local. En consecuencia, la célula está asociada a una nueva base de vectores de periodicidad d_i , definido por la posición de los puntos periódicos en el espacio actualizado,

$$d_i = y_{p_i} - y_{p_0} = D_i + u_{P_i} - u_{P_0} \quad ; \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$

donde, d se denomina *vector actualizado de periodicidad* y u_{P_i} , u_{P_0} es el desplazamiento relativo entre puntos periódicos.

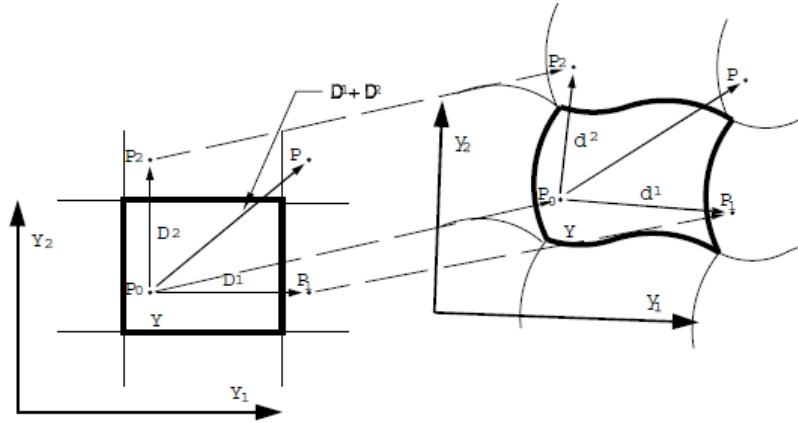


Figura 5.10: Representación de los vectores de periodicidad: \mathbf{D}_i en la configuración de referencia (izquierda) y \mathbf{d}_i en la configuración actualizada (derecha).

La transformación del espacio de las células está asociada al cambio de los vectores de periodicidad, y la derivada parcial de estos vectores es

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \mathbf{D}_j} = \frac{\partial (y_{p_i} - y_{p_0})}{\partial (Y_{p_j} - Y_{p_0})}. \quad (5.4)$$

Ahora bien, bajo el punto de vista macroscópico los vectores de periodicidad representan unos vectores infinitesimales ($|\mathbf{D}| \rightarrow 0$). En consecuencia, bajo la escala global el cambio de estos vectores puede ser entendido como

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \mathbf{D}_j} \simeq \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \mathbf{F}^x, \quad (5.5)$$

donde, el superíndice “ x ” es utilizado para denotar variables macroscópicas. Entonces, \mathbf{F}^x es el tensor gradiente de deformación homogeneizado. Este simple cambio de escala permite determinar el campo de deformaciones macroscópicas a través de los conceptos desarrollados en la mecánica de medios continuos, véase por ejemplo la siguiente referencia (Malvern, 1969).

Este tensor gradiente de deformación se utiliza en la mecánica de medios continuos para relacionar la configuración de referencia y actualizada. De una forma análoga, puede ser usado aquí para relacionar los vectores de periodicidad de referencia y actualizado de la siguiente forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^x \cdot \mathbf{D}. \quad (5.6)$$

El cuadrado de la longitud del vector actualizado de periodicidad es¹

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}|^2 &= \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} \\ &= \mathbf{D}^T \cdot (\mathbf{F}^x)^T \cdot \mathbf{F}^x \cdot \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

¹El superíndice T representa el transpuesto de un tensor

y la diferencia del cuadrado de la magnitud es

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}|^2 - |\mathbf{D}|^2 &= [\mathbf{D}^T \cdot (\mathbf{F}^x)^T] \cdot [\mathbf{F}^x \cdot \mathbf{D}] - \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} \\ &= \mathbf{D}^T \cdot [(\mathbf{F}^x)^T \cdot \mathbf{F}^x - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{D} \\ &= 2\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

siendo (\mathbf{E}) el tensor de *deformación de Green Lagrange*, una medida de la deformación para el compuesto. En pequeñas deformaciones no hay diferencia apreciable entre las distintas medidas de deformación, es decir $\mathbf{E} \simeq \boldsymbol{\epsilon}$. Entonces, es posible escribir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^x &= \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^x)^T \cdot \mathbf{F}^x - \mathbf{I}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{d}^T}{\partial \mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{D}} - \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por consiguiente, se define como tensor de deformación homogeneizado² ($\boldsymbol{\epsilon}^x$) la deformación medida entre puntos periódicos. Esta medida de deformación mide el cambio global del espacio de la célula bajo un campo de desplazamientos periódico y es independiente de las ondulaciones que se generan en los contornos de las células. Naturalmente, este tensor de deformación homogeneizado, al medir la deformación que se produce entre puntos del contorno del dominio de la célula, corresponde además al valor promedio de deformación³ $\langle \boldsymbol{\epsilon}(y) \rangle_Y$ en dicho dominio,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^x &= \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_Y \\ &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \boldsymbol{\epsilon} \, dV \\ &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \frac{1}{2} [\nabla_y \mathbf{u} + (\nabla_y \mathbf{u})^T] \, dV, \end{aligned} \quad (5.10)$$

siendo $\boldsymbol{\epsilon}$ el tensor de deformaciones en la escala microscópica, $\nabla_y \mathbf{u}$ el gradiente de desplazamientos de una partícula con respecto a la escala “ y ” y V_Y el volumen global del dominio Y .

Este resultado coincide con el *método de los promedios* (ver apartado 4.2) y con la teoría de la expansión asintótica⁴ (ver apartado 4.3). Sin embargo, en esta formulación no se descompone el campo de desplazamientos, evitando de esta manera la introducción del tensor denominado de localización (Suquet, 1987), de concentración (Mandel, 1972), o de influencia (Hill, 1967) de deformaciones o tensiones, como también se evita la introducción de funciones periódicas (Duvaut, 1976; Sanchez-Palencia, 1980; Lene & Duvaut, 1981). Esta innovadora forma de medir la deformación de la célula a través de la transformación de los vectores de periodicidad, permite (como se presenta posteriormente) imponer el requisito de periodicidad de desplazamientos en las restricciones de borde de la célula.

²El término homogeneizado se refiere directamente a variables macroscópicas

³Para simplificar notación se prescinde del superíndice “ y ” que representa la escala microscópica, por ejemplo el tensor de deformación a nivel microscópico se representa simplemente por $\boldsymbol{\epsilon}$.

⁴En la teoría de la expansión asintótica el tensor de deformación macroscópico $\boldsymbol{\epsilon}_x$ suele representarse como $\boldsymbol{\epsilon}_0$

5.5. Ecuación de equilibrio y tensor de tensiones homogeneizado

Nuevamente, se asume que Ω es el dominio de un cuerpo de material compuesto con distribución periódica de sus componentes, al cual se le subdivide en células de dominio Y . Por definición, estos dominios son iguales y su volumen V_Y es muy pequeño ($V_Y \rightarrow 0$) bajo el punto de vista macroscópico. Además, en cada uno de estos dominios se cumple el postulado básico de la mecánica de medios continuos conocido como balance del momento (Malvern, 1969)

$$\int_{S_Y} \sigma_{ij} n_j dS + \int_{V_Y} \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_{V_Y} \rho v_i dV, \quad (5.11)$$

donde σ es el tensor de tensiones (a nivel microscópico), n es un vector unitario normal al contorno, ρ es la densidad, b es la fuerza asociada a la masa, v es la velocidad y S_Y la superficie del contorno de la célula. En particular, el objeto de este trabajo está enfocado a problemas de la mecánica de sólidos en equilibrio estático, en consecuencia se considera que la aceleración (dv/dt) es igual a cero. Entonces, la ecuación que asegura el equilibrio en la microestructura se expresa como:

$$\int_{S_Y} \sigma_{ij} n_j dS + \int_{V_Y} \rho b_i dV = 0, \quad (5.12)$$

y aplicando el teorema de la divergencia (Malvern, 1969), se tiene que:

$$\int_{V_Y} \sigma_{ij,j} dV + \int_{V_Y} \rho b_i dV = 0. \quad (5.13)$$

No obstante, al considerar esta ecuación bajo el punto de vista de la escala macroscópica, resulta en el caso idealizado que el volumen de la célula es muy pequeño y tiende a cero. Por consiguiente, llevamos esta expresión a su límite

$$\lim_{V_Y \rightarrow 0} \left(\int_{V_Y} \sigma_{ij,j} dV + \int_{V_Y} \rho b_i dV \right) = 0, \quad (5.14)$$

las integrales de la ecuación 5.13 dependen del volumen de la célula ($V_Y \rightarrow 0$). Por consiguiente, es obvio que el segundo término que representa el valor de las fuerzas de volumen en la célula es de un orden de magnitud pequeño y tienden a cero; en consecuencia, lo mismo sucede con la divergencia del tensor de tensiones sobre el dominio de la célula

$$\int_{V_Y} \sigma_{ij,j} dV \simeq 0 \quad ; \quad \int_{V_Y} \rho b_i dV \simeq 0. \quad (5.15)$$

Las expresiones anteriores representan dos conceptos que frecuentemente se han utilizado en la teoría de homogeneización. La primera integral indica el concepto de equilibrio en la microestructura, esto es la integral de las fuerzas sobre el contorno del dominio de la célula se anula. En cambio, la segunda integral presenta que a nivel de la microestructura no se requiere considerar el efecto de las fuerzas de

masa, puesto que al ser la célula relativamente muy pequeña, la integral sobre las fuerzas másicas es de un orden de magnitud despreciable.

Por otra parte, la fuerza asociada a un elemento de superficie orientada $dS = \mathbf{n}dS$ (siendo \mathbf{n} un vector unitario perpendicular a dS) es igual a $\mathbf{t}(\mathbf{n})dS$, siendo $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ el vector de tracción en la superficie dada. Dicho vector depende no sólo de la posición, sino también de la orientación del elemento de superficie direccionada por \mathbf{n} , y se encuentra definido de la siguiente manera

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}dS}{dS} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.16)$$

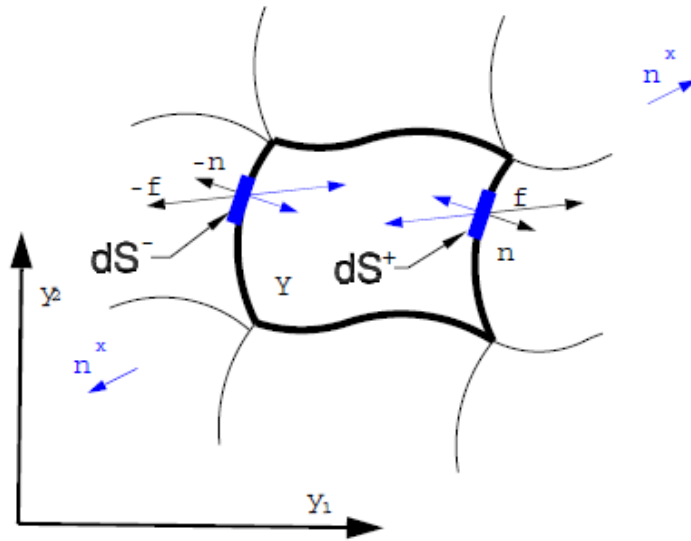


Figura 5.11: Representación de las fuerzas que actúan en contornos periódicos. Son iguales en magnitud, pero con dirección contraria.

Considérese dos elementos de superficie orientados periódicos que pertenecen al contorno de una célula $dS^+ = \mathbf{n}_1 dS$ y $dS^- = \mathbf{n}_2 dS$, tal como se presenta en la Figura 5.11. Por definición de superficies periódicas, los vectores de orientación \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 exteriores al dominio de la célula son iguales pero de sentido contrario. Si se desprecian los efectos de las fuerzas de masa e inercia (fuerzas relativamente muy pequeñas), el principio de acción y reacción asegura que la fuerza de superficie $\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n})dS$ en los dos elementos de superficie periódicos mencionados son de igual magnitud y dirección opuesta. Este principio viene expresado en la literatura sobre homogeneización cuando se afirma que el campo de tensiones en el contorno de la célula es antiperiódico, véase por ejemplo (Sanchez-Palencia, 1980; Suquet, 1982; Lene, 1986; Anthoine, 1995; Michel et al., 1999; Bensoussan et al., 2011), etc. En otras palabras, si se toma un elemento dS tan pequeño como se quiera, *la suma de fuerzas exteriores al dominio de la célula en puntos periódicos es igual a 0*.

Ahora bien, si se define un tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^x$ como el promedio de las reacciones en el contorno de la célula:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ik}^x = \frac{1}{V_Y} \int_{S_Y} y_k \sigma_{ij} n_j dS, \quad (5.17)$$

el teorema de la divergencia (también se puede utilizar el teorema de la tensión media (Malvern, 1969)), presenta

$$\int_{S_Y} y_k \sigma_{ij} n_j dS = \int_{V_Y} \sigma_{ij,j} dV + \int_{V_Y} y_{k,j} \sigma_{ij} dV, \quad (5.18)$$

despreciando el efecto de las fuerzas de masa $\sigma_{ij,j} = 0$ (ver también la ecuación 5.15), se tiene

$$\int_{S_Y} y_k \sigma_{ij} n_j dS = \int_{V_Y} y_{k,j} \sigma_{ij} dV, \quad (5.19)$$

y se obtiene la clásica ecuación de la teoría de promedios, como el valor medio de tensiones dentro del volumen de la célula. Pero esta vez no se obtiene de manera heurística, dado que

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^x &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} y_{k,j} \sigma_{ij} dS \\ &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \delta_{k,j} \sigma_{ij} dS \\ &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \sigma_{ik} dV, \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para cualquier vector unitario \mathbf{n}^x , el cual se puede entender como un vector unitario bajo la escala macroscópica, se define un vector de tracción homogeneizado \mathbf{t}^x como la fuerza promedio en el contorno de la célula S_Y determinada por la dirección (\mathbf{n}^x),

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i^x &= \frac{\int_{S_Y} y_k \sigma_{ij} n_j dS}{\int_{S_Y} y_k n_j dS} \mathbf{n}_k^x \\ &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} y_k \sigma_{ik} dV \mathbf{n}_k^x, \end{aligned} \quad (5.21)$$

el valor del lado derecho de la ecuación, es una función que depende de la dirección de \mathbf{n}^x , y puesto que

$$\mathbf{t}_i^x = \sigma_{ik}^x \mathbf{n}_k^x, \quad (5.22)$$

el tensor σ^x cumple para efectos macroscópicos iguales requisitos que el tensor de tensiones σ en los materiales homogéneos. En consecuencia, al tensor σ^x se denomina en adelante *tensor homogeneizado de tensiones*.

Por otra parte, bajo el punto de vista global, al considerar el cuerpo Ω formado por el material compuesto, la ecuación de equilibrio estático establece que:

$$\int_V \sigma_{ij,j} dV + \int_V \rho b_i dV = 0, \quad (5.23)$$

donde, naturalmente se han considerado los efectos de las fuerzas de volumen (o másicas), puesto que en la macroescala su magnitud puede ser apreciable. Admítase que el medio con microestructura periódica puede representarse como un material homogéneo formado por una infinidad de partículas

exactamente iguales, las cuales se han denominado células $Y \rightarrow 0$. Entonces, es posible expresar la ecuación de equilibrio global como la integral del equilibrio sobre cada una de estas células:

$$\int_V \left(\frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \sigma_{ij,j} dV \right) dV + \int_V \left(\frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \rho b_i dV \right) dV = 0, \quad (5.24)$$

y reemplazando las integrales sobre el volumen de la célula por las variables homogeneizadas, se tiene:

$$\int_V \sigma_{ij,j}^x dV + \int_V \rho^x b_i^x dV = 0, \quad (5.25)$$

donde, el efecto de las fuerzas másicas corresponde al promedio de sus correspondientes valores en la célula:

$$\rho^x b_i^x = \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \rho b_i dV. \quad (5.26)$$

La ecuación 5.25 es válida para cualquier región Ω del material compuesto, por lo tanto es válida también si se escoge un dominio pequeño cualquiera, cuyo límite es el dominio de la célula ($\Omega \rightarrow Y, Y \rightarrow 0$). En consecuencia se obtiene la forma *local homogeneizada de la cantidad de movimiento*:

$$\sigma_{ij,j}^x + \rho^x b_i^x = 0. \quad (5.27)$$

Debe considerarse que toda la formulación planteada responde a un caso genérico. Para problemas bidimensionales, se habla de superficie en vez de volumen, y de líneas de contorno en vez de superficies de contorno.

5.6. Planteamiento del problema en la escala macroscópica

Uno de los principales conceptos de la teoría de homogeneización es plantear al material compuesto como un material homogéneo en la escala macroscópica, y de esta forma, trabajar con un problema estándar de valores de contorno. Esto resulta ser una forma lógica de extender la formulación ya existente, y hacer uso tanto de la teoría como de las herramientas ya conocidas para abordar este tipo de problemas.

En este apartado se presentan los conceptos, variables y la formulación del problema estándar de valores de contorno.

5.6.1. Descripción del problema estándar de valores de contorno

Se considera el problema de valores de contorno cuyo dominio es Ω . El dominio es un material compuesto que en la escala macroscópica es considerado homogéneo. Este dominio está acotado por un contorno $\partial\Omega$, siendo $\partial\Omega_u$ la parte del contorno donde se conocen los desplazamientos (*Condición de Dirichlet*) y $\partial\Omega_t$ donde se conocen las fuerzas (*Condición de Neumann*). Estas divisiones del contorno deben cumplir:

$$\begin{aligned}\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t &= \emptyset \\ \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t &= \partial\Omega.\end{aligned}$$

Lo anterior simplemente plantea que ningún punto del contorno posee ambas condiciones, y que la unión de ambos *sub-contornos* forma el contorno en sí. Además, el contorno no necesariamente esta conformado por los dos tipos de condiciones, también puede estar formado por un solo tipo de condición. En el caso que no existan ni fuerzas ni desplazamientos prescritos en cierta parte del contorno, esta zona corresponde a una *condición de Neumann* donde la fuerza prescrita es 0.

El problema comprende como variables de campo el desplazamiento, la deformación y la tensión. La formulación del problema elástico puede ser en función de cualquiera de ellas. En este trabajo se utiliza la formulación basada en desplazamientos, por lo tanto, la variable que se calcula es ésta, y tanto la deformación como la tensión se definen en base a la misma.

Dicho lo anterior, la relación entre desplazamiento y deformación es:

$$\boldsymbol{\epsilon}^x = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{u}^x + (\nabla_x \mathbf{u}^x)^T), \quad (5.28)$$

donde ∇_x es el operador divergencia respecto a la variable macro. Mientras que la relación entre tensión y deformación se rige por la *ley de Hooke* (Malvern, 1969):

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{C}^x \cdot \boldsymbol{\epsilon}^x, \quad (5.29)$$

siendo \mathbf{C}^x la matriz de constantes elásticas homogeneizada, cuya obtención se describe más adelante puesto que contempla la resolución del problema microestructural que se aborda en la siguiente sección.

5.6.2. Formulación fuerte del problema macroscópico

De la mecánica de sólidos se sabe que las ecuaciones de equilibrio estático para un problema de valores de contorno son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^x + \rho \mathbf{b}^x &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^x \cdot \hat{\mathbf{n}}^x &= \bar{\mathbf{t}} & \forall x \in \partial\Omega_t \\ \mathbf{u}^x &= \bar{\mathbf{u}} & \forall x \in \partial\Omega_u,\end{aligned} \quad (5.30)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^x$ el tensor de tensiones macroscópico, ρ la densidad másica del material, \mathbf{b}^x la fuerza de cuerpo, $\hat{\mathbf{n}}^x$ el vector unitario normal al contorno, $\bar{\mathbf{t}}$ la fuerza o tracción prescrita en el *contorno de Neumann*, \mathbf{u}^x el desplazamiento macroscópico y $\bar{\mathbf{u}}$ su valor prescrito en el *contorno de Dirichlet*.

Como se describe en el apartado anterior, tanto la deformación como la tensión se describen en base a lo desplazamientos, los cuales son la solución del problema final. En la implementación numérica se aborda este tema, y las ecuaciones de gobierno se formulan unicamente en base a los desplazamientos.

5.7. Planteamiento del problema en la escala microscópica

En este apartado se establece el problema a nivel micromecánico del material compuesto. Se admite que el material es un medio periódico y por ende puede ser dividido en unidades estructurales. El comportamiento del compuesto se obtiene a través de la célula como unidad estructural, para lo cual se considera el problema cuasi-estático y en pequeñas deformaciones. Se establecen las variables del problema y se formulan las ecuaciones de gobierno. Además, se determinan las condiciones de contorno de la célula que reproducen la hipótesis de periodicidad local. Por simplicidad, se considera en este trabajo que los materiales componentes tienen adherencia perfecta, sin embargo el método no excluye la posibilidad del despegue de los materiales componentes a través de la inclusión de una adecuada interface.

Dicho lo anterior, debe entenderse que el problema microestructural dista de ser convencional, y esta sometido a nuevos tipos de condiciones. Las típicas condiciones de contorno son reemplazadas por *condiciones de periodicidad*, y además se deben incluir la *condiciones de continuidad* en la interfaz entre materiales.

5.7.1. Descripción del problema microestructural

Considérese un dominio Ω de material compuesto periódico susceptible a la división en unidades estructurales (células), cuyo dominio es Y . Tal que el dominio global Ω puede ser reproducido por la repetición ordenada de los pequeños dominios Y . Cada uno de estos dominios está constituido por la distribución ordenada de los diferentes materiales componentes. Entonces, las partículas de una célula se etiquetan de acuerdo a su posición en el espacio de referencia microscópico “ y ”. Al contorno del dominio se le denomina ∂Y y está formado por pares de lados periódicos. Se recuerda que cada punto del contorno de la célula tiene un punto periódico en el lado opuesto de este dominio, a excepción de los vértices que tienen más de un punto periódico. Los vectores de periodicidad están definidos por la posición relativa entre puntos periódicos, esto es

$$\mathbf{D}_i = Y_{P_i} - Y_{P_0}. \quad (5.31)$$

Estos dominios incluido su contorno pueden desplazarse en el espacio (de acuerdo al movimiento de las partículas). El campo de desplazamientos \mathbf{u} definen la nueva posición de todas las partículas del dominio Y . Se establece como medida de deformación en la escala microscópica al tensor de deformaciones (en pequeñas deformaciones) $\boldsymbol{\epsilon}$, que se puede expresar como el gradiente simétrico de los desplazamientos.

La relación entre desplazamientos y deformaciones es independiente de la escala, por lo tanto, al igual que en la escala macroscópica pueden definirse como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_y \mathbf{u} + (\nabla_y \mathbf{u})^T), \quad (5.32)$$

y de la misma manera, la relación de elasticidad entre la tensión y la deformación se rige por la *ley de Hooke*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (5.33)$$

siendo \mathbf{C} el tensor constitutivo elástico. Sin embargo esta vez distinto, puesto que el tensor constitutivo es diferente para cada material componente. En consecuencia, depende de la posición y_i dentro del dominio de la célula, o más bien, de la zona del dominio Y que comprenda a cada material.

5.7.2. Ecuaciones de gobierno

De la misma forma que en el problema elástico de la macroestructura, la ecuación diferencial de equilibrio que gobierna el problema micromecánico de los sólidos en equilibrio estático es

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (5.34)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones, ρ la densidad másica y \mathbf{b} las fuerzas de cuerpo o másicas. Sin embargo, tal como se ha comentado anteriormente, puesto que se supone que la célula es muy pequeña, las fuerzas másicas son de un orden de magnitud mucho menor que las fuerzas generadas por la interacción de los materiales componentes. En consecuencia, la ecuación que gobierna el problema a nivel micromecánico se reduce a:

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{micro - equilibrio.} \quad (5.35)$$

La ecuación anterior no es válida para todo el dominio interior del problema, puesto que esta vez además se lidia con un problema de interfaz de materiales, el cual se aborda a continuación.

5.7.3. Condiciones de continuidad en la interfaz entre materiales

Considérese el material compuesto de dominio Ω (figura 5.12), cuyo dominio esta dividido en Ω^+ y Ω^- representando a un material diferente cada uno. Entre materiales se define la interfaz $\partial\Omega_I$ que conecta a ambos. Nótese que para definir una interfaz en 2D solo se necesitan dos materiales, por lo cual esta formulación se extiende trivialmente a cualquier material compuesto constituido por más de dos materiales.

La división del dominio no representa gran dificultad, las ecuaciones de gobierno continúan siendo las mismas, pero considerando en cada dominio las propiedades mecánicas del material correspondiente. Lo que si debe considerarse, es que la aproximación a lo largo de la interfaz debe llevarse por separado en cada dominio, y además se debe forzar la igualdad para sus desplazamientos y tracciones normales a ésta.

Considerando una adherencia perfecta entre materiales, se debe cumplir con la continuidad de desplazamientos y tracciones en la dirección normal a la continuidad, esto es

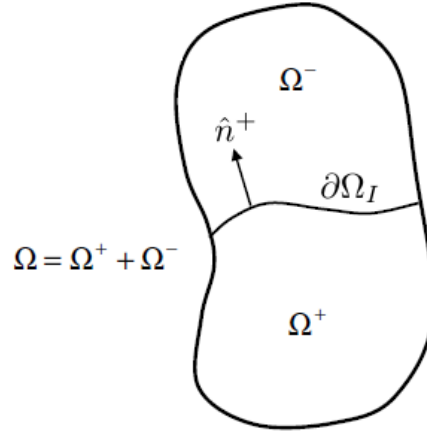


Figura 5.12: Representación de un material compuesto de dos materiales distintos junto a la línea interfaz que los une.

$$\begin{aligned}
 \sigma^+ \cdot \hat{n}^+ &= +t_i \\
 \sigma^- \cdot \hat{n}^- &= -t_i \\
 \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}^-
 \end{aligned}
 \quad \text{en } \partial\Omega_I. \tag{5.36}$$

Los superíndices $+$ y $-$ denotan las variables en el mismo punto dentro de la interfaz pero definidas desde los dominios Ω^+ y Ω^- , respectivamente. Estos valores deben ser equivalentes para establecer continuidad de tracciones y desplazamientos en dirección normal a la línea de interfaz. Los vectores unitarios normales a la interfaz \mathbf{n}^+ y \mathbf{n}^- son equivalentes en magnitud pero opuestos en signo, por lo que es posible hacer uso de solo uno. Las ecuaciones se reescriben como:

$$\begin{aligned}
 (\sigma^+ - \sigma^-) \cdot \hat{n}^+ &= 0 \\
 \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- &= 0
 \end{aligned}
 \quad \text{en } \partial\Omega_I. \tag{5.37}$$

5.7.4. Condiciones de contorno periódicas

Para establecer completamente el problema se debe introducir las condiciones de contorno en el dominio Y de la célula. Como se define para el problema macroestructural, el problema estándar de materiales homogéneos comprende condiciones de contorno de *Neumann* y *Dirichlet*, sin embargo, para la célula se requieren condiciones especiales que introduzcan la periodicidad local del campo de desplazamientos y fuerzas a nivel de la microestructura.

Al considerar que el compuesto sufre una deformación macroscópica, la hipótesis de periodicidad local implica que el dominio está asociado a una base de vectores periódicos en el espacio de referencia, y otra base de vectores periódicos en el espacio actualizado. El cambio o transformación de dicha base de vectores representa necesariamente un desplazamiento relativo entre puntos periódicos, entonces:

$$\mathbf{d}_i - \mathbf{D}_i = \mathbf{u}_{p+D_i} - \mathbf{u}_p, \tag{5.38}$$

donde, \mathbf{u}_p representa el desplazamiento de un punto cualquiera de coordenadas y_p y \mathbf{u}_{p+D_i} representa el desplazamiento del correspondiente punto periódico de coordenadas $y_p + \mathbf{D}_i$. Sin embargo, bajo el punto de vista global (donde $|\mathbf{D}| \rightarrow 0$) este desplazamiento relativo se puede interpretar como:

$$\mathbf{d} - \mathbf{D} = \lim_{|\mathbf{D}| \rightarrow 0} (\mathbf{u}_{p+D} - \mathbf{u}_p) = \nabla \mathbf{u}^x \cdot \mathbf{D}, \quad (5.39)$$

siendo $\nabla \mathbf{u}^x$ el gradiente de desplazamientos en la escala macroscópica.

El gradiente de desplazamientos se puede expresar como la suma de un tensor simétrico y otro anti-simétrico

$$\nabla \mathbf{u}^x = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^x + (\nabla \mathbf{u}^x)^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^x - (\nabla \mathbf{u}^x)^T) = \boldsymbol{\epsilon}^x + \boldsymbol{\omega}^x, \quad (5.40)$$

donde el tensor simétrico $\boldsymbol{\epsilon}$ representa un estiramiento y por ende se denomina *tensor de deformación Lagrangeano lineal*, mientras el otro tensor $\boldsymbol{\omega}$ representa un giro de cuerpo rígido, de ahí que se denomina *tensor de rotación Lagrangeano lineal* (Malvern, 1969). Por lo tanto, se puede expresar la ecuación 5.39 de la siguiente forma

$$\mathbf{u}_{p+D} - \mathbf{u}_p = \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{D} + \boldsymbol{\omega}^x \cdot \mathbf{D}, \quad (5.41)$$

donde el término $\boldsymbol{\omega}^x \mathbf{D}$ representa únicamente una rotación (de cuerpo rígido) y $\boldsymbol{\epsilon}^x \mathbf{D}$ la deformación del dominio de la célula. Puesto que la rotación $\boldsymbol{\omega}^x \mathbf{D}$ no afecta la medida de deformación del dominio, puede ser obviado

$$\mathbf{u}_{p+D} - \mathbf{u}_p \simeq \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{D}, \quad (5.42)$$

dicha condición de desplazamientos relativos entre puntos periódicos garantiza la periodicidad local de la microestructura, y más importante aún, establece la conexión entre ambas escalas, siendo $\boldsymbol{\epsilon}^x$ un término obtenido desde la escala macroscópica.

Por otra parte, al prescindir de las fuerzas máxicas ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$), las fuerzas exteriores al dominio de la célula asociadas a dos elementos de superficie (en puntos) periódicos son iguales en magnitud pero de sentido contrario,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS_{p+D} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS_p \\ \mathbf{t}_{p+D} \, dS &= -\mathbf{t}_p \, dS \\ \mathbf{f}_{p+D} &= -\mathbf{f}_p, \end{aligned} \quad (5.43)$$

esta condición garantiza la periodicidad del campo de fuerzas y debe ser satisfecha cuando la célula alcanza el equilibrio bajo el mínimo consumo de energía.

Ambas condiciones descritas reflejan la periodicidad local de la microestructura. No obstante, al tratar solamente con desplazamientos relativos, no son capaces de establecer la espacialidad de un problema

que normalmente confiere la *condición de Dirichlet*, y con ello, evitar la denominada *rotación de cuerpo rígido*. Hasta ahora no existen puntos fijos del dominio de la célula que sirvan como puntos de referencia para los desplazamientos de todo el resto del dominio, y ciertamente, esto resulta ser un problema a la hora de resolver numéricamente. Para resolver este problema, se establece una nueva *condición Dirichlet de anclaje* que trabaja con los vértices de la célula:

$$\mathbf{u}_v = \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{y}, \quad (5.44)$$

en que \mathbf{u}_v es el desplazamiento de los vértices de anclaje e \mathbf{y} son las coordenadas de cada vértice.

La cantidad de vértices sugeridos para anclar varía de trabajo a trabajo, y al parecer, no está del todo definido cuantos vértices son necesarios anclar. En (Kouznetsova et al., 2001), por ejemplo, se sugiere anclar los 3 vértices que definen los vectores de periodicidad en células cuadriláteras, y en (Zalamea et al., 2000) se sugiere anclar los 4 vértices de una célula cuadrilátera, y el primer trío de vértices periódicos en una célula hexagonal. No obstante, dichos trabajos utilizan el método de elementos finitos, y en particular, (Zalamea et al., 2000) utiliza el *método de los multiplicadores de Lagrange* para forzar las *condiciones de periodicidad y de anclaje*. Sin embargo, en el MPF utilizado en esta tesis suelen ocurrir inestabilidades puntuales en algunos vértices anclados al seguir las recomendaciones de los trabajos mencionados, o bien, funcionan para un rango limitado de problemas. Cuando ocurre inestabilidad en algún vértice, los valores de algunas de sus variables se alejan bastante del rango en el que se encuentra el resto del dominio. Desde un punto de vista práctico, al momento de promediar algunas variables en la célula, el error introducido por la inestabilidad en estos pocos nodos puntuales es despreciable. No obstante, cuando se trata de graficar, un valor fuera de rango arruina por completo toda la gráfica.

En esta tesis se ha logrado establecer una forma fiable bajo la cual las *condiciones de periodicidad y de anclaje* se cumplan sin la necesidad de forzarlas mediante otros métodos. Este procedimiento funciona correctamente para el MPF, pero se desconoce de su validez para otros métodos numéricos.

En el caso de células cuadriláteras, lo primero es elegir qué pares de vértices son periódicos entre sí. Luego, uno de los pares de vértices periódicos se anclará, mientras el otro par se trata con *condiciones de periodicidad* como el resto de nodos del contorno, por lo cual solo se deben anclar dos vértices. Si se fijase solo uno de ellos y se tratase al otro como su periódico, entonces es muy posible que surja alguna inestabilidad.

En el caso de la célula hexagonal, por otra parte, se debe anclar siempre el vértice a , mientras que los vértices b , c , f y e se deben considerar dentro de los contorno \overline{bc} y \overline{ef} , y finalmente, el vértice d se debe considerar como nodo interior y cumplir la ecuación de equilibrio, ya que cualquier otro tratamiento genera inestabilidad. Respecto a este último hecho, es una solución heurística que se deriva del uso de una técnica de estabilización para el MPF, como se ve más adelante en el apartado (3.8). Nuevamente el patrón es el mismo, el vértice anclado no se trata como nodo periódico, y el vértice sobrante, al no ser periódico del primero, no puede ser anclado puesto que genera inestabilidad.

Finalmente, en las condiciones de desplazamiento periódico y fuerzas antiperiódicas se relacionan dos nodos a la vez, lo que implica que si existen n_c nodos totales en el contorno, por cada condición existen $n_c/2$ ecuaciones, y en conjunto ambas condiciones conforman la igualdad necesaria entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones que las relacionan. Las ecuaciones de anclaje no cambian este

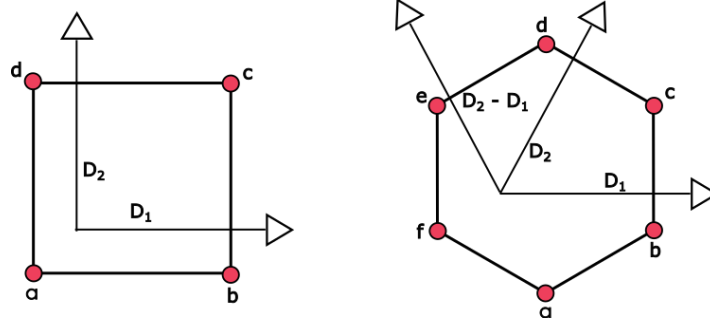


Figura 5.13: Representación de una célula con sus vértices. A la izquierda una célula cuadrilátera y a la derecha una célula hexagonal.

hecho, puesto que reemplazan en cada nodo la ecuación de fuerzas antiperiódicas, lo cual no resulta en una pérdida de precisión a considerar.

Para mantener congruencia entre la teoría y la posterior implementación numérica, si Y es el contorno de la célula, este es dividido estratégicamente en:

$$\begin{aligned}\partial Y_p \cup \partial Y_{p+D} \cup \partial Y_a &= \partial Y \\ \partial Y_p \cap \partial Y_{p+D} \cap \partial Y_a &= \emptyset,\end{aligned}$$

donde ∂Y_p carga con la condición de fuerzas antiperiódicas, ∂Y_{p+D} la condición de desplazamientos periódicos y ∂Y_a la *condición Dirichlet de anclaje*.

Cabe destacar, que estas *condiciones de periodicidad* no son propiamente validas para aquellas células que se encuentran en el contorno del problema global. Las *condiciones de periodicidad* son formuladas bajo el supuesto de que una célula esta completamente rodeada por sus células vecinas. No obstante, considerando que el tamaño de la célula tiende a 0 respecto al dominio global, y que la cantidad de células en el contorno es despreciable frente a la gran cantidad de células dentro del dominio, el error introducido al tratarlas como células interiores es despreciable.

5.7.5. Formulación fuerte del problema microscópico

Bajo las consideraciones de las secciones anteriores, el problema microestructural local de los materiales compuestos se reduce a solucionar el siguiente problema de valores de contorno en el dominio Y :

$$\begin{aligned}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 && \text{Ecuación de equilibrio } Y \\ (\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \hat{\mathbf{n}}^+ &= 0 && \text{Continuidad de tracciones en } \partial Y_I^+ \\ \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- &= 0 && \text{Continuidad de desplazamientos en } \partial Y_I^- \\ (\boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_{p+D}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 && \text{Fuerzas anti - periódicas en } \partial Y_p \\ \mathbf{u}_{p+D} - \mathbf{u}_p &= \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{D} && \text{Periodicidad de desplazamientos en } \partial Y_{p+D} \\ \mathbf{u}_v &= \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{y} && \text{Condición Dirichlet de anclaje en } \partial Y_a.\end{aligned} \tag{5.45}$$

Aquí, los campos microscópicos de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ y desplazamientos \mathbf{u} son las incógnitas

del problema, ϵ^x es el tensor de deformaciones homogeneizado proporcionado por el problema en la macroestructura, \mathbf{D} representa a los vectores de periodicidad que relacionan los puntos periódicos del contorno de la célula, \mathbf{t} el vector de tracción e \mathbf{y} las coordenadas locales de los vértices de anclaje dentro del dominio. Tanto ∂Y^+ como ∂Y^- representan los nodos interfaz pertenecientes respectivamente a los dominios Y^+ e Y^- . Ambas condiciones de interfaz relacionan los *nodos apareados* que comparten coordenadas pero pertenecen a distintos materiales, por lo cual las ecuaciones se reparten de modo que los nodos de la interfaz ∂Y^+ contienen la condición de continuidad de tracciones, mientras los nodos de la interfaz ∂Y^- contienen la condición de continuidad de desplazamientos (este orden es arbitrario). El contorno de la célula se divide en ∂Y_p , ∂Y_{p+D} y ∂Y_a que representan la primera mitad del contorno, su mitad periódica y los vértices de anclaje, respectivamente.

Obsérvese, que las condiciones de contorno imponen un campo periódico de desplazamientos (no determinado) cuya medida de deformación global ϵ^x se supone que es un valor conocido entregado por la solución del problema macroscópico. Al mismo tiempo se restringe la solución a un campo de fuerzas anti-periódicas en el contorno del dominio (en este caso, se suponen los vectores normales unitarios a la superficie \mathbf{n} en dirección saliente al dominio). Dicha condición de fuerzas *anti-periódicas* puede ser entendida también como una condición de periodicidad de fuerzas, solo que en este caso se hace referencia a la misma dirección para los vectores normales a los lados periódicos. Observe que, en el problema de valores de contorno a nivel microscópico, tanto el desplazamiento como la fuerza en cada punto del dominio (incluido el contorno) es la solución del problema cuando la célula alcanza el equilibrio.

Capítulo 6

Implementación numérica y solución

El trabajo propuesto en (Zalamea et al., 2000, 2002) está desarrollado mediante uso del MEF, y soluciona el problema tanto en el rango lineal como no-lineal para problemas bidimensionales, aunque claramente con mayor énfasis lo último. La presente tesis sienta las bases para resolver el problema de materiales compuestos en dos dimensiones mediante la teoría de la homogeneización en dos escalas, utilizando para ello el MPF, y se limita a trabajar en el rango elástico, esperando que trabajos futuros puedan extender el presente hacia el rango no-lineal. La utilización de *métodos sin malla* para problemas de homogeneización en mecánica de sólidos es prácticamente inexistente en la literatura, por lo cual, resulta interesante descubrir las ventajas asociadas a su utilización además de las obvias, tales como la resolución de los problemas en que el método de elementos finitos no es adecuado (capítulo 2), aunque esta vez para materiales heterogéneos. La naturaleza de *colocación puntual* del MPF ofrece ciertas ventajas inmediatas tanto para el problema de interfaz entre materiales constituyentes, como también para la aplicación de las condiciones de periodicidad en la célula, problemas en que tanto los *métodos sin malla* como los convencionales suelen recurrir a técnicas como *multiplicadores de Lagrange* para forzar su cumplimiento, lo cual aumenta los grados de libertad, y con ello el costo computacional.

La teoría de la homogeneización asume la escala macroscópica como un medio homogéneo cuyas propiedades elásticas provienen del análisis de la microestructura. En esta escala, cada nodo es el equivalente a una célula, cuyas condiciones de contorno dependen de la deformación macroscópica en aquel punto. A primera vista, ambos problemas parecen un argumento circular del cual no se aprecia un punto de partida, sin embargo, el primer paso es la obtención del tensor constitutivo elástico homogeneizado \mathbf{C}^x , que a la vez requiere la resolución del problema en la microestructura mediante el *método de perturbaciones* (Zalamea et al., 2000, 2002). En esta sección se aborda la implementación numérica del problema elástico de homogeneización en dos escalas, y el procedimiento mediante el cual se soluciona. Una vez establecido el problema microestructural, es posible abordar la obtención del tensor constitutivo elástico.

6.1. Ecuaciones de gobierno en ambas escalas

La formulación fuerte del problema elástico para la teoría de la homogeneización en dos escalas se establece en el apartado 5.6.2 para la escala macroscópica y en el apartado 5.7.5 para la escala microscópica. De aquí, se tiene que las ecuaciones de gobierno en la escala macroscópica son¹:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^x + \rho \mathbf{b}^x &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^x \cdot \hat{\mathbf{n}}^x &= \bar{\mathbf{t}} & \forall x \in \partial\Omega_t \\ \mathbf{u}^x &= \bar{\mathbf{u}} & \forall x \in \partial\Omega_u, \end{aligned} \quad (6.1)$$

siendo ∇_x el operador divergencia, $\boldsymbol{\sigma}^x$ el tensor de tensiones macroscópico, ρ la densidad másica del material, \mathbf{b}^x las fuerzas de cuerpo, $\hat{\mathbf{n}}^x$ el vector unitario normal al contorno, $\bar{\mathbf{t}}$ la fuerza o tracción prescrita en el *contorno Neumann*, \mathbf{u}^x el desplazamiento macroscópico y $\bar{\mathbf{u}}$ su valor prescrito en el *contorno Dirichlet*.

Además, la relación entre el desplazamiento \mathbf{u}^x y la deformación $\boldsymbol{\epsilon}^x$ se rige por

$$\boldsymbol{\epsilon}^x = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{u}^x + (\nabla_x \mathbf{u}^x)^T), \quad (6.2)$$

y la relación entre la tensión $\boldsymbol{\sigma}^x$ y la deformación $\boldsymbol{\epsilon}^x$ se rige por la ley de elasticidad de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{C}^x \cdot \boldsymbol{\epsilon}^x. \quad (6.3)$$

Ahora, para la escala microscópica, las ecuaciones de gobierno son

$$\begin{aligned} \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 & \text{Ecuación de equilibrio } Y \\ (\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \hat{\mathbf{n}}^+ &= 0 & \text{Continuidad de tracciones en } \partial Y_I^+ \\ \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- &= 0 & \text{Continuidad de desplazamientos en } \partial Y_I^- \\ \mathbf{t}_{p+D} + \mathbf{t}_p &= 0 & \text{Fuerzas antiperiódicas en } \partial Y_p \\ \mathbf{u}_{p+D} - \mathbf{u}_p &= \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{D} & \text{Periodicidad de desplazamientos en } \partial Y_{p+D} \\ \mathbf{u}_v &= \boldsymbol{\epsilon}^x \cdot \mathbf{y} & \text{Condición Dirichlet de anclaje en } \partial Y_a. \end{aligned} \quad (6.4)$$

dónde los campos microscópicos de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ y desplazamientos \mathbf{u} son las incógnitas del problema, $\boldsymbol{\epsilon}^x$ es el tensor de deformaciones homogeneizado proporcionado por el problema en la macroestructura, \mathbf{D} representa a los vectores de periodicidad que relacionan los puntos periódicos del contorno de la célula y \mathbf{t} el vector de tracción.

¹El superíndice x es utilizado para describir variables macroscópicas. Las variables microscópicas, y aquellas variables macroscópicas sin homólogos en la escala microscópica carecen de superíndice por simplicidad en la notación.

De igual forma que en la escala macroscópica, la relación entre el desplazamiento \mathbf{u} y la deformación $\boldsymbol{\epsilon}$ se rige por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_y \mathbf{u} + (\nabla_y \mathbf{u})^T), \quad (6.5)$$

y la relación entre la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y la deformación $\boldsymbol{\epsilon}$ según la ley de elasticidad de Hooke es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (6.6)$$

siendo $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{y})$ el tensor de elasticidad, distinto para cada material constituyente.

6.2. Implementación numérica

Con el fin de facilitar el entendimiento de la implementación numérica, primero se introduce la forma vectorial característica de un problema en 2D para las variables principales que se presentan en la formulación fuerte del apartado anterior.²

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} := \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}.$$

Esto se considera general y es válido para ambas escalas. La forma real tanto de $\boldsymbol{\epsilon}$ como de $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz de 2×2 . Estas formas vectoriales permiten trabajar solo con vectores y matrices, y así evitar el uso de tensores de mayor orden. Esta posibilidad surge solamente debido a simetrías en los tensores mencionados. ($\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ y $\tau_{12} = \tau_{21}$).

Ya introducidas la forma bidimensional de cada variable, se puede visualizar la forma bidimensional del problema elástico en ambas escalas.

6.2.1. Ecuaciones 2D escala macroscópica:

Las ecuaciones 2D para la escala macroscópica son:

Ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^x + \tau_{12,2}^x + \rho b_1 &= 0 \\ \tau_{21,1}^x + \sigma_{2,2}^x + \rho b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

²Se utilizan los subíndices 1 y 2 para denotar la dirección horizontal y vertical respectivamente, puesto que x e y se usan para denotar las escalas macro y micro respectivamente.

Condición de Neumann

$$\begin{aligned}\sigma_1^x n_1^x + \tau_{12}^x n_2^x &= \bar{t}_1 \\ \tau_{21}^x n_1^x + \sigma_2^x n_2^x &= \bar{t}_2.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Condición de Dirichlet

$$\begin{aligned}u_1^x &= \bar{u}_1 \\ u_2^x &= \bar{u}_2.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Forma matricial compacta:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_x^T \boldsymbol{\sigma}^x + \rho \mathbf{b}^x &= \mathbf{0} & \forall x \in \Omega - \Gamma \\ \mathbf{N}_x^T \boldsymbol{\sigma}^x &= \bar{\mathbf{t}} & \forall x \in \Gamma_t \\ \mathbf{u}^x &= \bar{\mathbf{u}} & \forall x \in \Gamma_u,\end{aligned}\tag{6.10}$$

siendo \mathbf{L}_x el operador diferencial que define la ecuación de equilibrio, \mathbf{N}_x la matriz que contiene los cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno, $\rho \mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{t}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ son las fuerzas másicas, fuerzas externas y desplazamientos prescritos respectivamente.

Para ser consecuentes con la forma vectorial en que se definieron $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ en ambas escalas, tanto el operador \mathbf{L}_x como la matriz \mathbf{N}_x deben tener la forma:

$$\mathbf{L}_x := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_x := \begin{bmatrix} n_1^x & 0 \\ 0 & n_2^x \\ n_2^x & n_1^x \end{bmatrix}.$$

Mediante estas mismas expresiones se puede definir las relaciones desplazamiento-deformación y la *ley de Hooke* como:

$$\boldsymbol{\epsilon}^x = \mathbf{L}_x \mathbf{u}^x \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{C}^x \boldsymbol{\epsilon}^x, \tag{6.12}$$

dónde \mathbf{C}^x es la matriz de constantes elásticas homogeneizada que se obtiene desde la microescala, cuya obtención aún esta por definirse.

6.2.2. Ecuaciones 2D escala microscópica:

Las ecuaciones 2D respecto a la escala microscópica son:

Ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned}\sigma_{1,1} + \tau_{12,2} &= 0 \\ \tau_{21,1} + \sigma_{2,2} &= 0.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Condición de continuidad de tracciones

$$\begin{aligned}(\sigma_1^+ - \sigma_1^-)n_1 + (\tau_{12}^+ - \tau_{12}^-)n_2 &= 0 \\ (\tau_{21}^+ - \tau_{21}^-)n_1 + (\sigma_2^+ - \sigma_2^-)n_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Condición de continuidad de desplazamientos

$$\begin{aligned}u_1^+ - u_1^- &= 0 \\ u_2^+ - u_2^- &= 0.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Condición de fuerzas anti-periódicas

$$\begin{aligned}(\sigma_{1,p+D} + \sigma_{1,p})n_1 + (\tau_{12,p+D} + \tau_{12,p})n_2 &= 0 \\ (\tau_{21,p+D} + \tau_{21,p})n_1 + (\sigma_{2,p+D} + \sigma_{2,p})n_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Condición de periodicidad de desplazamientos

$$\begin{aligned}u_{1,p+D} - u_{1,p} &= \epsilon_1^x D_1 + \epsilon_{12}^x D_2 \\ u_{2,p+D} - u_{2,p} &= \epsilon_{21}^x D_1 + \epsilon_2^x D_2.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Condición Dirichlet de anclaje

$$\begin{aligned}u_{1,v} &= \epsilon_1^x y_1 + \epsilon_{12}^x y_2 \\ u_{2,v} &= \epsilon_{21}^x y_1 + \epsilon_2^x y_2.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Forma matricial compacta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_y^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall y \in Y - \partial Y \\
\mathbf{k}_I \mathbf{N}_y^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y_I \\
\mathbf{k}_I \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y_I \\
\mathbf{k}_D \mathbf{N}_y^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y \\
\mathbf{k}_D \mathbf{u} &= \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}^x & \forall y \in \partial Y \\
\mathbf{u} &= \mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}^x & \forall y \in \partial Y_a,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

siendo \mathbf{L}_y el operador diferencial que define la ecuación de equilibrio, \mathbf{N}_y la matriz de cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno, \mathbf{D} la matriz que contiene los vectores de periodicidad e \mathbf{y}^T la matriz de coordenadas en la escala local³, \mathbf{k}_D es una matriz cuadrada que asigna el valor 1 a la primera mitad de nodos contorno (Y_p) y respectivos nodos nube, -1 a sus homólogos periódicos de la segunda mitad de nodos contorno (Y_{p+D}) y respectivos nodos nube, y 0 al resto de nodos. Finalmente, \mathbf{k}_I es una matriz que asigna 1 a los nodos de la interfaz y sus respectivos nodos nube del primer material, -1 a los nodos de la interfaz y sus respectivos nodos nube del segundo material y 0 a todas las demás entradas. Las representaciones de estas matrices son homólogas a aquellas en la macroescala:

$$\mathbf{L}_y := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_y := \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \\ \frac{D_2}{2} & \frac{D_1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \\ \frac{y_2}{2} & \frac{y_1}{2} \end{bmatrix}.$$

Las matrices \mathbf{k}_D y \mathbf{k}_I son cuadradas de orden $2n_t$, donde n_t es la cantidad total de nodos que discretizan el dominio. Esto implica que las matrices anteriores son irrepresentables al desconocer la numeración que toman los nodos contorno e interfaz. Pero a su vez, es importante entender, que estas matrices solo son representaciones necesarias para escribir la formulación compacta en una forma elegante y coherente, más no son un requerimiento a la hora de programar, puesto que basta con identificar de antemano tanto los nodos interfaz como los nodos del contorno para asignarles su tratamiento correspondiente de una forma más práctica.

Finalmente, las representaciones de la relación desplazamiento-deformación y la *ley de Hooke* son:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}_y \mathbf{u} \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^y \boldsymbol{\epsilon}. \tag{6.21}$$

Es aquí en la microescala donde verdaderamente se imprime la naturaleza mecánica de los materiales componentes, y se define la matriz de constantes elásticas de acuerdo a la clase de problema que se tratará; *tensión plana* o *deformación plana*. En términos generales, ambos estados de elasticidad plana son problemas tridimensionales que se pueden tratar como bidimensionales. En *tensión plana*, la tercera dimensión de profundidad (llámese z) es demasiado pequeña respecto a las otras dos, por lo

³Notar que ambas matrices \mathbf{D} e \mathbf{y} se encuentran modificadas para adaptarse a la forma en que se define el vector de deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}^x$

cual, todos los términos de tensión relacionados a z son despreciables. En *deformación plana*, la tercera dimensión (z) es demasiado grande respecto a las otras dos, y todos los campos de variables del plano perpendicular a z son idénticos a lo largo de z , por lo cual, los términos de deformación respecto a la variable z son despreciados. Para una mayor profundidad de estos conceptos se sugiere consultar la referencia (Sadd, 2009).

Estos cambios se ven reflejados en la matriz de elasticidad, la cual toma las siguientes formas:

Tensión plana:

$$\mathbf{C}^y = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Deformación plana:

$$\mathbf{C}^y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Dónde E es el modulo de elasticidad de Young y ν es el coeficiente de Poisson. Se debe recalcar que la matriz de elasticidad depende de cada material presente en el dominio de la *célula*, y solo los nodos de la interfaz entre materiales usan ambas matrices de elasticidad para definir sus aproximaciones en cada dominio.

6.2.3. Aproximación numérica de las variables mediante el MPF

A continuación se define la aproximación numérica de las variables principales, haciendo válido su uso para ambas escalas. La formulación en base a desplazamientos implica que todas las demás variables se escriben en términos del desplazamiento. Llevando la aproximación del desplazamiento como la forma definida en la ecuación 3.14 se obtiene:

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_I^1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \phi_I^n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_I^1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \phi_I^n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^h \\ v_1^h \\ \vdots \\ u_n^h \\ v_n^h \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_I^1 & \Phi_I^2 & \cdots & \Phi_I^n \end{bmatrix} \mathbf{u}^h \quad \Phi_I^i = \begin{bmatrix} \Phi_I^i & 0 \\ 0 & \Phi_I^i \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2), \quad i = 1, \dots, n \quad (6.25)$$

$$= \Phi \mathbf{u}^h. \quad (6.26)$$

El sistema matricial no es más que la representación en 2D de la aproximación definida en la ecuación 3.14, para ambas variables del desplazamiento.

Luego de definir la aproximación del desplazamiento, la aproximación de la deformación y tensión resultan sencillas:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{u}^h \quad (6.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{u}^h. \quad (6.28)$$

6.2.4. Aproximación numérica de las ecuaciones de gobierno en ambas escalas

Escala macroscópica:

Utilizando las aproximaciones numéricas de las variables obtenidas recientemente en la formulación compacta de la escala macroscópica (ecuación 6.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_x^T \mathbf{C}^x \mathbf{L}_x \boldsymbol{\Phi}^x] \mathbf{u}_x^h &= -\rho \mathbf{b}^x & \forall x \in \Omega - \Gamma \\ [\mathbf{N}_x^T \mathbf{C}^x \mathbf{L}_x \boldsymbol{\Phi}^x] \mathbf{u}_x^h &= \bar{\mathbf{t}} & \forall x \in \Gamma_t \\ [\boldsymbol{\Phi}^x] \mathbf{u}_x^h &= \bar{\mathbf{u}} & \forall x \in \Gamma_u, \end{aligned} \quad (6.29)$$

Desde aquí, el problema completo de valores de contorno se puede reducir a la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}^x \mathbf{u}_x^h = \mathbf{f}^x. \quad (6.30)$$

Esta matriz $\mathbf{K}^x \in \text{Mat}(2n_t \times 2n_t)$, donde n_t es el número de nodos totales, es normalmente conocida como *matriz de rigidez*, y no es representable puesto que en su mayoría esta compuesta de ceros y sub-matrices $\mathbf{K}_{i,j}^x \in \text{Mat}(2 \times 2)$ que dependen de la numeración del nodo estrella (i) y cada nodo de su nube (j), por lo cual la forma exacta de la matriz de rigidez depende de cada problema y su discretización, sin embargo, siempre existe una concentración de términos rodeando la diagonal. Los coeficientes de la matriz $\mathbf{K}_{i,j}^x$ vienen dados por:

◆ Si $i \in \Omega - \Gamma$

$$\mathbf{K}_{i,j}^x \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{11} = C_{11}^x \phi_{(0,2)}^{i,j} + C_{33}^x \phi_{(0,2)}^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{12} = \phi_{(1,1)}^{i,j} (C_{12}^x + C_{33}^x) \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{21} = \phi_{(1,1)}^{i,j} (C_{21}^x + C_{33}^x) \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{22} = C_{22}^x \phi_{(0,2)}^{i,j} + C_{33}^x \phi_{(2,0)}^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = - \begin{bmatrix} \rho b_1^x \\ \rho b_1^x \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \Gamma_t$

$$\mathbf{K}_{i,j}^x \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{11} = C_{11}^x \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1^x + C_{33}^x \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2^x \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{12} = C_{12}^x \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1^x + C_{33}^x \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2^x \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{21} = C_{33}^x \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1^x + C_{12}^x \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2^x \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{22} = C_{33}^x \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1^x + C_{22}^x \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2^x \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \Gamma_u$

$$\mathbf{K}_{i,j}^x \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{11} = \phi^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{12} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{21} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^x]_{22} = \phi^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}.$$

Al acoplar la matriz de rigidez, todo el problema se reduce resolver el sistema matricial de la ecuación 6.30, y su implementación se reduce a calcular las sub-matrices $\mathbf{K}_{i,j}^x$ como se establece arriba. Luego de resolver este problema se obtienen los valores \mathbf{u}_x^h a partir de los cuales se puede calcular \mathbf{u}^x , $\boldsymbol{\epsilon}^x$ y $\boldsymbol{\sigma}^x$. Los valores de $\boldsymbol{\epsilon}^x$ en cada nodo del dominio global se utilizan para establecer las condiciones de contorno en su célula asociada.

Escala microscópica

De la misma forma que en la escala microscópica, se procede a reemplazar las aproximaciones numéricas de las variables de interés en la forma compacta:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_y^T \mathbf{C}^y \mathbf{L}_y \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \mathbf{0} & \forall y \in Y - \partial Y \\ [\mathbf{k}_I \mathbf{N}_y^T \mathbf{C}^y \mathbf{L}_y \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y_I \\ [\mathbf{k}_I \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y_I \\ [\mathbf{k}_D \mathbf{N}_y^T \mathbf{C}^y \mathbf{L}_y \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \mathbf{0} & \forall y \in \partial Y \\ [\mathbf{k}_D \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \boldsymbol{\epsilon}^x \mathbf{D} & \forall y \in \partial Y \\ [\boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h &= \boldsymbol{\epsilon}^x \mathbf{y} & \forall y \in \partial Y_a, \end{aligned} \quad (6.31)$$

y de forma homóloga a la escala macroscópica, el sistema se reduce a:

$$\mathbf{K}^y \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^y, \quad (6.32)$$

dónde los coeficientes de la matriz $\mathbf{K}_{i,j}^y$ vienen dados por:

◆ Si $i \in Y - \partial Y - \partial Y_I$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = C_{11}^y \phi_{(0,2)}^{i,j} + C_{33}^y \phi_{(0,2)}^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = \phi_{(1,1)}^{i,j} (C_{12}^y + C_{33}^y) \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = \phi_{(1,1)}^{i,j} (C_{21}^y + C_{33}^y) \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = C_{22}^y \phi_{(0,2)}^{i,j} + C_{33}^y \phi_{(2,0)}^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \partial Y_I^+ - \partial Y$

$$C^y \begin{cases} C^{y,+} & j \in Y^+ \\ -C^{y,-} & j \in Y^- \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = C_{11}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1 + C_{33}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = C_{12}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1 + C_{33}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = C_{33}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1 + C_{12}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = C_{33}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1 + C_{22}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2 \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \partial Y_I^- - \partial Y$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = \phi_+^{i,j} - \phi_-^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = \phi_+^{i,j} - \phi_-^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \partial Y_p$

$$\text{Sea: } \begin{cases} \phi_{(1,0)}^{i,j} = (\phi_{(1,0),p}^{i,j} + \phi_{(1,0),p+D}^{i,j}) \\ \phi_{(0,1)}^{i,j} = (\phi_{(0,1),p}^{i,j} + \phi_{(0,1),p+D}^{i,j}) \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = C_{11}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1 + C_{33}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = C_{12}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1 + C_{33}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = C_{33}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_1 + C_{12}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_2 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = C_{33}^y \phi_{(1,0)}^{i,j} n_1 + C_{22}^y \phi_{(0,1)}^{i,j} n_2 \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \partial Y_{p+D}$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = \phi_{p+D}^{i,j} - \phi_p^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = \phi_{p+D}^{i,j} - \phi_p^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \epsilon_1^x D_1 + \epsilon_{12}^x D_2 \\ \epsilon_{21}^x D_1 + \epsilon_2^x D_2 \end{bmatrix}$$

◆ Si $i \in \partial Y_a$

$$\mathbf{K}_{i,j}^y \begin{cases} [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{11} = \phi^{i,j} \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{12} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{21} = 0 \\ [\mathbf{K}_{i,j}^y]_{22} = \phi^{i,j} \end{cases}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \epsilon_1^x y_1 + \epsilon_{12}^x y_2 \\ \epsilon_{21}^x y_1 + \epsilon_2^x y_2 \end{bmatrix}.$$

De esta forma el problema se limita a calcular la matriz $\mathbf{K}_{i,j}^y$ para cada tipo de condición expuesta. Al resolver el sistema matricial, se obtienen los valores \mathbf{u}^h que permiten calcular los valores de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$. Este último valor es utilizado para el cálculo del *tensor constitutivo elástico homogeneizado* \mathbf{C}^x .

6.3. Obtención del tensor constitutivo elástico homogeneizado mediante el método de perturbaciones

La obtención del tensor constitutivo elástico homogeneizado es la pieza clave para resolver el problema de homogeneización en dos escalas, sin embargo, para esto primero se requiere conocimiento de como resolver el problema de la microestructura, lo cual se ha abordado recientemente.

Generalmente los materiales compuestos se consideran bajo el concepto de anisotropía, en que sus propiedades elásticas dependen de la dirección de referencia. No obstante, materiales con distribución aleatoria de heterogeneidades como el hormigón presentan un comportamiento isótropo. Esto se puede justificar en el caso ideal en que las heterogeneidades se distribuyan de una forma homogénea en todo el material. Este hecho, conduce a que la rigurosa periodicidad de la microestructura pueda generar ciertas simetrías en el tensor constitutivo elástico. Existen numerosos trabajos en la literatura que determinan las propiedades elásticas de un material bajo el concepto de que este es ortótropo; (Lene & Duvaut, 1981; Lene & Leguillon, 1982; Lene, 1986; Guedes & Kikuchi, 1990; Jansson, 1992; Sun & Vaidya, 1996). El tensor constitutivo elástico es de cuarto orden y tiene 81 componentes, las cuales se reducen a 9 bajo la consideración de ortotropía.

La idea detrás de este método es aplicar distintas perturbaciones (pequeñas deformaciones) a la célula de modo que se mantenga en el rango elástico y activen ciertas constantes del tensor constitutivo elástico. Bajo cada una de estas perturbaciones se obtiene el tensor de tensiones homogeneizado $\boldsymbol{\sigma}^x$, y luego se pueden obtener las constantes elásticas siguiendo:

$$\mathbf{C}^x = \boldsymbol{\sigma}^x : (\boldsymbol{\epsilon}^x)^{-1}. \quad (6.33)$$

Normalmente existen infinitas soluciones, puesto que el tensor \mathbf{C}^x es de cuarto orden, y los tensores $\boldsymbol{\sigma}^x$ y $\boldsymbol{\epsilon}^x$ son de segundo orden, pero existe solución única bajo la condición de ortotropía y el uso de un método de perturbaciones que se describe a continuación.

En un problema bidimensional, sea \mathbf{C}^x de la forma:

$$\mathbf{C}^x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

.

Supóngase que se aplican las siguientes deformaciones:

$$\begin{aligned}\epsilon_1^x &= (e \ 0 \ 0) \\ \epsilon_2^x &= (0 \ e \ 0) \\ \epsilon_{12}^x &= (0 \ 0 \ e),\end{aligned}$$

siendo e una deformación lo suficientemente pequeña para mantenerse en la zona elástica (por ejemplo, $e < 10^{-3}$), fuera de eso su valor es irrelevante. Con cada una de estas deformaciones se resuelve un problema en la microestructura, y con ello se obtienen las tensiones homogeneizadas $\sigma^x(\epsilon_1^x)$, $\sigma^x(\epsilon_2^x)$ y $\sigma^x(\epsilon_{12}^x)$ (ecuación 5.17).

Para la primera perturbación ϵ_1^x se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^x(\epsilon_1^x) \\ \sigma_2^x(\epsilon_1^x) \\ \sigma_{12}^x(\epsilon_1^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y de aquí se extrae que:

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{\sigma_1^x(\epsilon_1^x)}{e} \\ C_{21} &= \frac{\sigma_2^x(\epsilon_1^x)}{e}.\end{aligned}$$

Para la segunda perturbación ϵ_2^x :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^x(\epsilon_2^x) \\ \sigma_2^x(\epsilon_2^x) \\ \sigma_{12}^x(\epsilon_2^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$$

de lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned}C_{12} &= \frac{\sigma_1^x(\epsilon_2^x)}{e} \\ C_{22} &= \frac{\sigma_2^x(\epsilon_2^x)}{e}.\end{aligned}$$

Y para la tercera perturbación ϵ_{12}^x se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^x(\epsilon_{12}^x) \\ \sigma_2^x(\epsilon_{12}^x) \\ \sigma_{12}^x(\epsilon_{12}^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}$$

y se extrae el último término:

$$C_{33} = \frac{\sigma_{12}^x(\epsilon_{12}^x)}{e}.$$

De esta forma el tensor constitutivo elástico homogeneizado se obtiene resolviendo 3 problemas microestructurales, que surgen de aplicar estratégicamente perturbaciones en las direcciones principales.

Muchos de los trabajos mencionados restringen de distintas formas las condiciones de contorno en la célula y suelen reducir la geometría a través de simetrías, pero estas condiciones fallan en el concepto de periodicidad, aunque los valores no difieren considerablemente. En este trabajo se evitan las simetrías y condiciones de contorno especiales, puesto que la formulación del problema microestructural basado en periodicidad del medio es suficiente y apropiada para tratar la determinación del tensor de elasticidad homogeneizado. Adicionalmente, la discretización de la célula y muchos datos relacionados con su geometría son reutilizados para evitar la redundancia de cálculos en un problema que lo requiere.

6.4. Solución al problema de homogeneización en dos escalas

Hasta ahora se ha descrito la teoría de homogeneización en dos escalas, y su implementación numérica mediante el MPF. Con el fin de esclarecer cualquier duda, en la figura 6.1 se presenta un diagrama del procedimiento para solucionar el problema elástico de homogeneización en 2 escalas. Los pasos son como siguen:

1. Aplicación de las perturbaciones (p.e. $e = 10^{-5}$) y solución de los 3 problemas microestructurales correspondientes para el cálculo del tensor constitutivo elástico homogeneizado. 6.3
2. Entrega del tensor constitutivo elástico homogeneizado al problema macro.
3. Solución del problema homogéneo macroestructural. 6.2.4
4. Entrega de la deformación global a cada célula asociada a un nodo del problema global.
5. Solución del problema microestructural para cada nodo global, o tan solo para aquellos de interés. Se entregan los resultados finales de la solución macroscópica y microscópica. 6.2.4

Por supuesto, la solución del problema rebosa de aspectos técnicos de utilidad que merecen ser mencionados para facilitar la experiencia de quien decida seguir un trabajo similar a este, lo cual se presenta en el siguiente apartado.

6.4.1. Aspectos técnicos de la solución

En el desarrollo de un trabajo como este existen muchos aspectos adicionales que no son parte de la teoría, ni de la generalidad de los procedimientos utilizados, pero si son igual de importantes y forman parte del conocimiento práctico. Estos aspectos pueden dividirse en el pre-procesamiento del problema, el procesamiento y el post-procesamiento. Para el lector interesado, algunos de estos aspectos pueden guiarse en el desarrollo de un trabajo que involucre la programación del problema.

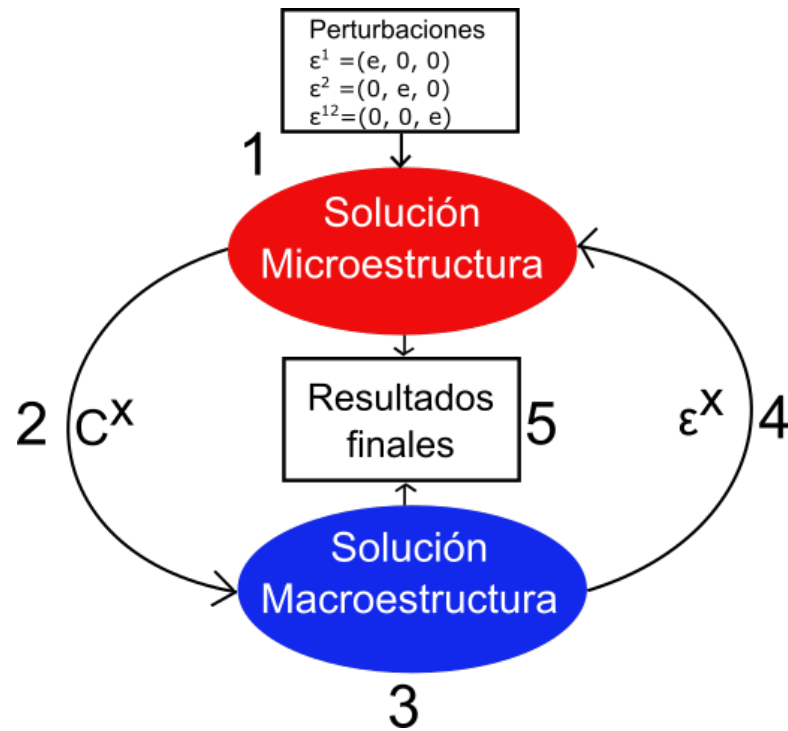


Figura 6.1: Diagrama solución del problema de homogeneización lineal.

Pre-procesamiento en GiD

El problema en 2 escalas, como es de esperar, necesita de dos geometrías; una para el problema macroscópico, y otra para la microestructura. Aquí se hace uso del software de pre y post-procesamiento *GiD* (GiDv12, 2016) desarrollado por el *Centro Internacional de Método Numéricos en Ingeniería* (CIMNE). Este software es una herramienta bastante útil, y se describe como universal y adaptativo, puesto que confiere una interfaz de desarrollo que permite:

- Creación de la geometría.
- Discretización personalizada de la geometría.
- Creación de cuestionarios bajo formato sencillo, que permiten asociar datos específicos a cada nodo.
- Asignación del orden y el formato de salida de los datos obtenidos para su posterior análisis.

Entre los datos que generalmente se entregan desde *GiD* hacia el procesador para este tipo de problema son:

- Datos generales no asociados a los nodos, como cantidad de nodos por nube, tipo de elasticidad plana y cualquier dato relacionado al procesamiento que se desee establecer en el pre-procesamiento.

- Numeración de cada nodo y sus coordenadas correspondientes (ambas escalas).
- Identificación de los nodos del contorno (ambas escalas) y sus valores prescritos de las condiciones de contorno (macroescala).
- Propiedades mecánicas asociadas a cada nodo según el material al que pertenece (microescala).

El programa provee ciertas facilidades a la hora de asociar nodos con datos específicos, permitiendo asignar valores a nodos específicos, o a todos los nodos que conforman un contorno, área o volumen. Todos los datos de salida son entregados en una carpeta, dentro de la cual se encuentran archivos con extensiones propias del programa (.dat), los cuales pueden ser modificados también mediante un algoritmo en el lenguaje base del sistema operativo (*MS-DOS* en *Windows* y *Unix* en *linux*) dentro de un archivo con extensión .bat. Por supuesto, para un mayor detalle de todo lo descrito se pueden consultar los manuales que provee la página oficial en la referencia (GiDv12, 2016). Una vez los archivos son renombrados, estos pueden ser identificados fácilmente por el procesador.

Respecto a la discretización del problema, esta se realiza en elementos puesto que el software es universal, sin embargo, para la formulación del MPF solo se utilizan los nodos generados y no los elementos. La generación de la discretización es sencilla y personalizada, sin embargo, podría existir más de algún caso en que sea necesario el ingenio para generar una discretización simétrica para la célula, lo cual se vuelve una condición necesaria al tratar con nodos periódicos. Esta simetría se logra con mayor facilidad en geometrías de 4 lados y en geometrías de estructura centrada donde se pueda discretizar de forma concéntrica. En el caso bidimensional resulta muchas veces útil la estrategia de dividir la geometría original en geometrías de 4 o 3 lados para lograr una discretización regular, como se aprecia en la figura 6.2.

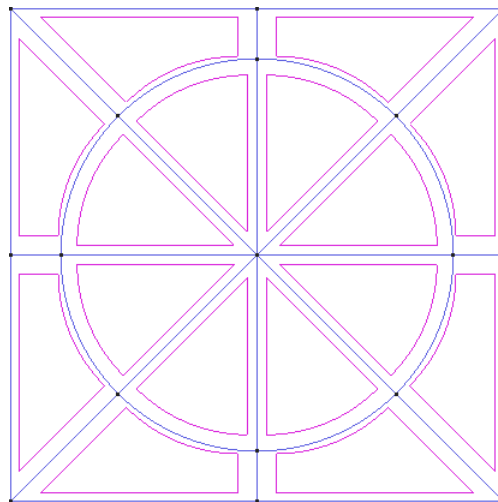


Figura 6.2: División de la geometría de la célula en geometrías de 4 y 3 lados para discretización regular.

Procesamiento en *MATLAB*

El procesamiento de los datos y la solución del problema se lleva a cabo mediante un algoritmo conformado de numerosas subrutinas desarrollado en *MATLAB* (MATLAB, 2007), un software matemático con lenguaje propio, el cual ofrece varias ventajas respecto a otros lenguajes comunes a la hora de realizar ciertos cálculos.

Los archivos entregados por el pre-procesador son leídos como matrices, las cuales son transformadas a matrices más complejas, que a la vez son útiles para crear otras. Los resultados se asocian en matrices puesto que contiene información para cada nodo del dominio, sea local o global. Algunas de las matrices principales son:

- **Matriz principal:** Contiene la numeración de cada nodo, sus coordenadas, su condición (nodo interior, Neumann, Dirichlet, interfaz o periódico), sus valores prescritos si pertenecen al contorno, su ángulo normal (contorno e interfaz), su nodo apareado ya sea periódico o su par en la interfaz, y cualquier otra información relevante. Su uso es general.
- **Matriz de nubes:** Contiene la numeración de cada nodo perteneciente a la nube de cada nodo estrella. Es usada para el cálculo de funciones de forma, matriz de rigidez y resultados finales (desplazamiento, deformación y tensión).
- **Matriz de funciones de forma:** Contiene todos los valores de ponderación entregados por la función de forma, para cada nodo de la nube (en el mismo orden), y para cada tipo de derivada. Se usa exclusivamente en el cálculo de la matriz de rigidez.
- **Matrices constitutivas elásticas:** Es la matriz de elasticidad con la forma usual descrita hasta ahora. Existen tantas matrices constitutivas como materiales en el problema. También dentro de este grupo esta la matriz constitutiva elástica homogeneizada. Se utilizan para el cálculo de la matriz de rigidez.
- **Matriz de rigidez K**
- **Vector de incógnitas u^h**
- **Vector de fuerzas b**
- **Matriz de desplazamientos u**
- **Matriz de deformaciones ϵ**
- **Matriz de tensiones σ**

Las tres primeras matrices son definidas para el dominio completo, como en el problema global, o por cada subdominio, como en el caso local. Ciertamente dentro de la programación existen más variables y subrutinas de las que se pueden prever, también existen algunos indicadores de error, de mal condicionamiento y de verificación de las condiciones impuestas.

Los problemas micro y macro coexisten como carpetas distintas dentro de un mismo problema. En *MATLAB*, es posible cambiar la carpeta de trabajo dentro de la misma rutina mientras mantiene la información en caché, lo cual facilita traspasar información de un problema a otro.

Para el problema elástico, el cálculo del problema macroscópico se realiza tan solo una vez, pero el cálculo del problema microscópico se puede realizar hasta $n_g + 3$ veces (n_g es el número de nodos en la macroestructura). En el problema elástico el costo computacional ya es un problema a considerar, pero en el caso no-lineal, donde los cálculos se realizan de forma iterativa y el tensor constitutivo tangente debe calcularse continuamente, es un tema muchísimo más complicado que requiere cálculo en paralelo (Zalamea et al., 2000).

La geometría de la microestructura es una sola, y el único factor que diferencia un problema de otro son las condiciones de periodicidad en el contorno que dependen de la deformación macroscópica provista por la solución del problema global. Lo anterior solo se ve reflejado en la actualización del vector de fuerzas b en cada problema. Por lo cual, la matriz de rigidez permanece intacta para cada problema, y con ello, todas las matrices involucradas en su cálculo no requieren ser calculadas nuevamente.

Todas las sub-rutinas del código *MATLAB* generan las matrices con información redundante solo una vez, y de ser necesario, solo se modifican partes específicas relacionadas con la condiciones de periodicidad en el contorno. El resto de las veces, se recicla la información utilizada en el primer cálculo. El ahorro computacional por evitar la redundancia de cálculo es enorme.

Otro factor que reduce considerablemente el tiempo de cálculo en *MATLAB* es evitar comandos bucle tales como *for* y *while* y usar en su reemplazo cálculos matriciales como permite *MATLAB*. La forma de programar matricialmente sin duda es menos intuitiva que programar término a término dentro de un bucle, y por ello requiere un esfuerzo adicional, pero la diferencia de tiempo de cálculo ya se aprecia con pocos nodos, y en problemas con discretización densa la diferencia se vuelve abismante. El utilizar *matrices sparse* cuando las matrices contienen una gran cantidad de ceros también es necesario para ahorrar memoria y tiempo de cálculo, de lo contrario es probable encontrarse con problemas de falta de memoria al tratar con una infinidad de ceros dentro de la matriz de rigidez. Se debe considerar que tan solo segundos de diferencia en el tiempo de resolución de la microestructura se puede transformar fácilmente a minutos en la solución del problema total, dependiendo de la cantidad de nodos globales, y al utilizar el par de consejos entregados en esta tesis, son bastantes segundos a minutos los que se ahorran por problema. Un estudio de cuanto tiempo se ahorra bajo este par de consideraciones hubiese sido interesante, pero está relacionado solo a la programación y escapa del objetivo de este trabajo, el cual debe asumir que el código es eficiente de antemano debido a la necesidad que presenta este tipo de problemas, lo cual es responsabilidad de cada programador.

Post-procesamiento

Luego de calculadas todas las variables de interés se procede a la visualización de los resultados. El software *GiD* tiene un formato de entrada de datos, donde cada valor se asocia únicamente a la numeración de los nodos. Este formato puede ser implementado en una rutina de *MATLAB* que sobrescribe el archivo de formato *.res* que *GiD* reconoce como archivo de resultados. Los datos pueden ser bien escalares o vectoriales. Se proveen además varias opciones de visualización de resultados, y entre ellas una importante característica; el usuario puede elegir los rangos de color en el que varían los resultados, donde el color representa la magnitud de las variables en este tipo de gráficos. Esto resulta importante cuando se quieren contrastar los resultados de un mismo problema para las distintas células que lo conforman. Automáticamente siempre el valor mínimo se identifica con el color azul mientras que el valor máximo se identifica con el rojo, lo cual no es útil cuando se requiere comparar dos células

del mismo problema que varían en distintos rangos. Lo ideal, es que las células críticas varíen entre tonos rojizos, mientras aquellas que están menos solicitadas varíen en tonos más fríos, para notar así la diferencia en las solicitudes de distintas células del mismo problema.

Capítulo 7

Análisis de materiales compuestos reforzados con fibras

Los materiales compuestos reforzados con fibra despiertan gran interés en ingeniería y a menudo son considerados los materiales compuestos más importantes. Se conforman por una matriz *dúctil* generalmente polimérica o metálica, que une a las fibras de mayor *rigidez* y *elasticidad*, actuando como un medio que les distribuye y transmite los esfuerzos externos aplicados, las protege de la abrasión mecánica y corrosión del medio ambiente, e impide la propagación de grietas entre ellas debido a su blandura y plasticidad. Las variadas formas de estos compuestos dependen de la *longitud de fibra*, que da lugar a las categorías de *compuestos de fibras largas* (continuas) y *compuestos de fibras cortas* (discontinuas), y de la *orientación de fibra*, que da lugar a *compuestos con fibras alineadas* y *compuestos con fibras aleatorias*. Idealmente solo una pequeña parte del esfuerzo es resistido por la matriz. La capacidad que tiene la matriz de transmitir los esfuerzos a las fibras depende de la longitud de estas últimas. El mejor reforzamiento se consigue en compuestos con fibras continuas y alineadas, pero solo en la dirección de la fibra, mientras que perpendicularmente el refuerzo es nulo. Le siguen los compuestos con fibras discontinuas y alineadas que alcanzan hasta el 90% y 50% del *módulo de elasticidad* y *resistencia a la tracción* de los compuestos con fibras continuas, pero se compensa con su facilidad de fabricación respecto a estas últimas. Finalmente en último lugar, los compuestos con fibras discontinuas y aleatorias presentan el menor refuerzo, pero con la ventaja de reforzar en todas direcciones, a diferencia de los compuestos con fibras alineadas que presentan una fuerte anisotropía.

Entre las propiedades generales que adhieren las fibras al compuesto están el aumento de *rigidez*, *resistencia* (mayormente a la tracción) y de casi todas las propiedades en general. Sin embargo, es la *resistencia específica* la propiedad más característica y deseada en los compuestos reforzados con fibra, es decir, alta resistencia a baja densidad (ligereza), una variable clave en la *industria aeroespacial*, *automovilística*, *ingeniería civil y arquitectura*, *deportes*, entre otros. Entre los tipos de fibras más utilizados están las fibras de vidrio, carbono, poliméricas, de boro y metálicas. Algunos ejemplos celebres de esta clase de materiales son los polímeros reforzados con fibra de vidrio y fibra de carbono, mientras que por parte de los materiales naturales, están la madera y los huesos.

Entre sus desventajas están las deficiencias en las propiedades esperadas del compuesto debido a

microdefectos en su fabricación, lo cual puede dar origen a un fallo en algunas fibras para valores de tracción inferiores a su resistencia normal. Uno de los primeros trabajos sobre estos aspectos lo presenta (Griffith, 1921), el cual utiliza fibras de vidrio de alta resistencia para probar que la aparente resistencia del material aumenta tanto como disminuye la talla de sus defectos internos, también se reportó un aumento de resistencia en relación a la disminución del diámetro de fibra. Otras investigaciones (Hitchon & Phillips, 1979) analizan la variación de resistencia de la fibra con respecto a su longitud, usando un análisis estadístico concluye que generalmente a mayor longitud, mayor es la probabilidad de que existan defectos. En este trabajo dichos efectos son ignorados, y se asume que no existen defectos de fabricación que afecten las propiedades del compuesto.

Debido al fuerte interés generado por los compuestos reforzados con fibra en la literatura de materiales compuestos, existen muchos trabajos relacionados que sirven como punto de comparación para los resultados obtenidos. Otra gran ventaja es que pueden ser analizados en dos dimensiones bajo los supuestos de la *elasticidad plana*, por lo cual, el problema de materiales compuestos reforzados con fibra debe analizarse desde dos perspectivas distintas; de forma longitudinal y de forma transversal a la dirección de la fibra. Los compuestos reforzados con fibras en que la fibra se distribuya en una dirección específica, son materiales ortótropos, lo cual es condición necesaria para el método de perturbaciones para obtener las constantes elásticas homogeneizadas (apartado 6.3)

En este apartado se busca estudiar la representación de los materiales reforzados con fibras, con el fin de definir correctamente el problema microscópico antes de homogeneizar las variables de interés, y verificar que cumplen con las condiciones de periodicidad expuestas. Se exponen además distintas suposiciones que permiten abordar este problema de forma bidimensional; contando con un modelo longitudinal, y un modelo transversal para distintas distribuciones de fibra. Adicionalmente, las deformaciones impuestas como condiciones de periodicidad, son las mismas que se utilizan más adelante con el método de perturbaciones para obtener las constantes elásticas homogeneizadas.

7.1. Representación longitudinal de un compuesto de fibras continuas

En esta sección se analiza el comportamiento longitudinal de un compuesto reforzado con fibras unidireccionales. Si se idealiza el material como un compuesto con distribución periódica, entonces se puede extraer un volumen representativo o célula desde la microestructura del material. Puesto que la fibra es continua, la longitud de la célula en dirección de la fibra no es relevante y puede ser arbitraria.

Obsérvese la figura 7.1. Dado que la sección longitudinal de la fibra es variable dependiendo en que zona de la sección transversal se realice un corte (en 3D), se debe recurrir a una idealización en 2D.

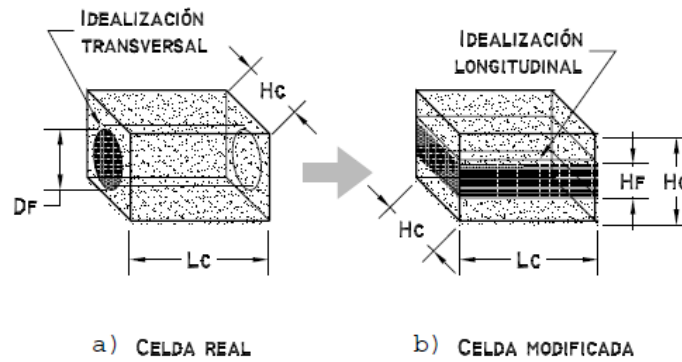


Figura 7.1: Representación de la célula original en 3D y su idealización para la implementación en 2D.

Como se acaba de mencionar, si la sección longitudinal se obtuviese realizando un corte en la célula original (7.1a), este sería distinto de cada vez que se realizase puesto que la sección transversal de la célula es variable. La idealización de la célula propone obtener un corte promedio (7.1b), el cual mantiene las proporciones de los materiales constituyentes.

Asumiendo que la longitudes de la célula original L_c y H_c se mantienen, para obtener el ancho de la fibra H_f se recurre a igualar los volúmenes que representan la fibra original, y el paralelepípedo resultante de su idealización.

$$\begin{aligned} V_f &= V_p \\ \frac{\pi D_f^2}{4} L_c &= H_f H_c L_c \\ \Rightarrow H_f &= \frac{\pi D_f^2}{4 H_c} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Además se sabe que la proporción de fibra en el compuesto c_f se determina como:

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{V_f}{V_c} \\ c_f &= \frac{\frac{\pi D_f^2}{4} L_c}{H_c^2 L_c} \\ c_f &= \frac{\pi D_f^2}{4 H_c^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

De lo cual se deduce sencillamente que:

$$H_f = c_f H_c \quad (7.3)$$

De esta manera, la relación entre el ancho de la fibra y de la célula sigue la misma proporción que la fibra dentro de la matriz. En la figura 7.2 se aprecia la microestructura de esta idealización en dos dimensiones. El tratamiento de este tipo de problema se realiza bajo el supuesto de tensión plana.

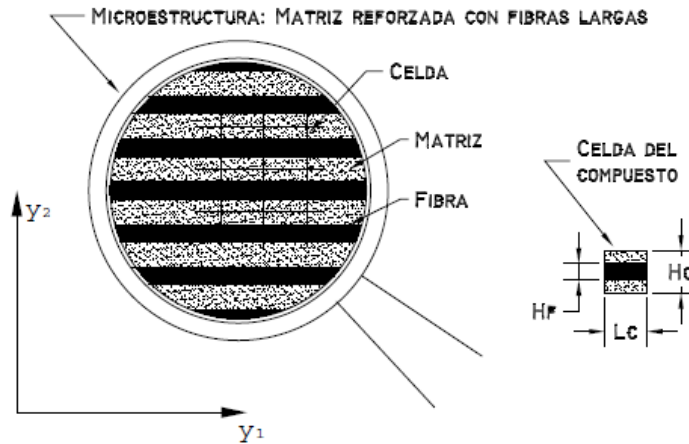


Figura 7.2: Representación idealizada de la microestructura de una matriz con fibras continuas y su célula correspondiente.

7.1.1. Ejemplo compuesto Alúmina/Aluminio

En esta sección se trabaja con una célula de la sección longitudinal de un compuesto de aluminio reforzado con fibras de alúmina u óxido de aluminio, el cual tiene la particularidad de ser más rígido que el aluminio. En la tabla 7.1 se resumen las propiedades mecánicas de interés. Cabe destacar que lo anterior solo busca darle identidad al problema, puesto que el real interés está en el comportamiento de la fibra que es un patrón similar para cualquier combinación de materiales y proporciones, además, este caso en particular requiere solo células cuadriláteras por defecto. En la figura 7.3 se muestran las dimensiones de la célula y su discretización, las unidades y dimensiones de la célula han demostrado ser irrelevantes, importando solamente la proporción entre sus lados. La utilización de dimensiones pequeñas para la célula justificaría solamente el supuesto de la diferencia de tamaño entre ambas escalas bajo el cual se sustenta la teoría de la homogeneización, mas no presenta relevancia alguna al momento de homogeneizar las constantes elásticas. Dicho lo anterior, se puede asumir de aquí en adelante que las unidades de la célula son del orden de un micrómetro [μm]. La geometría se ha discretizado en 195 puntos que corresponden a una estructura regular de 13×13 nodos más aquellos repetidos en la interfaz, y se agrupan en nubes de 13 puntos. Respecto a la discretización, se deben considerar un par de factores; La discretización debe ser regular al menos en el contorno y la interfaz para la correcta implementación de las condiciones de periodicidad y continuidad. La cantidad de nodos de discretización en un material compuesto es mayor que en un material homogéneo, puesto que se debe considerar que cada subdominio es como una geometría independiente, ya que los nodos de cada uno no se relacionan con los de otros subdominios para la formación de nubes.

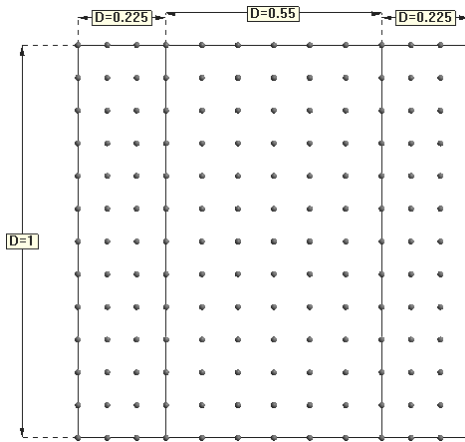


Figura 7.3: Dimensiones y discretización de la geometría de una célula de fibra continua en 195 nodos.

Para este problema en particular, no todas las variables son de interés y algunas resultan ser irrelevantes, por lo cual los resultados se presenta de una forma más selectiva. En la figura 7.4 se aprecian algunos resultados de una tracción horizontal impuesta a través de una deformación $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (10^{-5}, 0, 0)$. Arriba se aprecia el desplazamiento en dirección x , donde claramente la fibra es más rígida que la matriz en donde se observa el mayor gradiente. A su derecha se encuentra la deformación en x , y se ve cuan bien se representa la discontinuidad entre materiales. Abajo, la tensión en dirección x respeta la condición de continuidad, puesto que es normal a la interfaz, lo cual no sucede con la tensión en y que se observa a su izquierda.

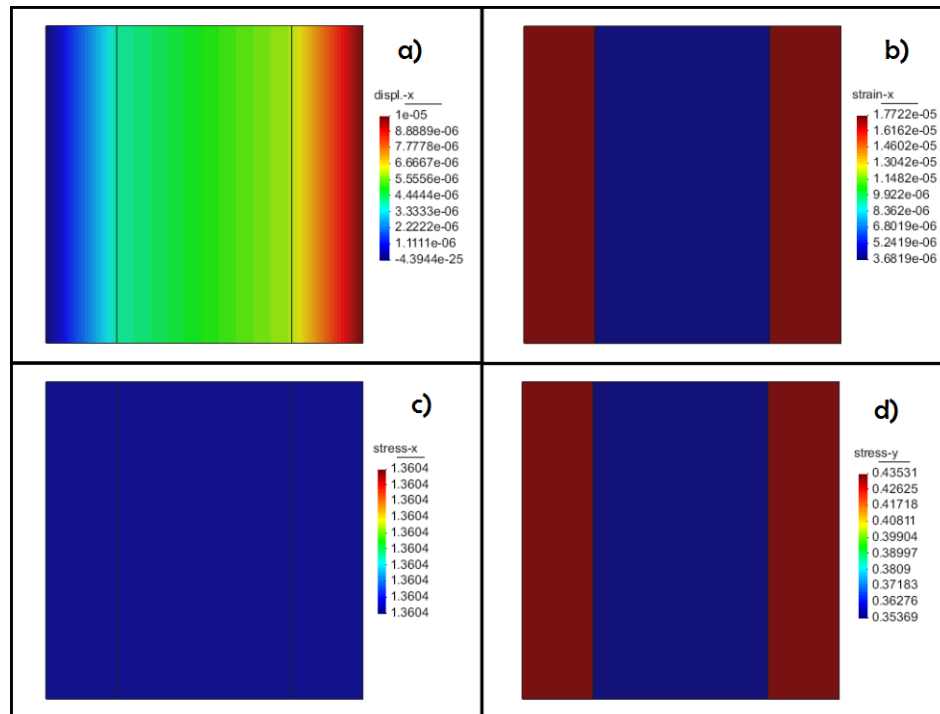


Figura 7.4: Distintos resultados para una célula sometida a tracción en dirección horizontal. a) Desplazamiento en x , b) Deformación en x . c) Tensión en x , d) Tensión en y .

Tabla 7.1: Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras continuas.

Material componente	Módulo elástico E [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	68900	0.32	0.45
Alumina (fibra)	344500	0.26	0.55

En la figura 7.5 se aprecian los resultados de una tracción vertical, esta vez en dirección de la fibra, mediante la deformación $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 10^{-5}, 0)$. Arriba se presenta el desplazamiento en dirección x , el cual señala una compresión axial. A su derecha se observa el desplazamiento en dirección y , esta vez puesto que la deformación se realizó en ambos materiales, el gradiente es más homogéneo en todo el material. Abajo se observa la deformación en dirección y , la cual al estar en dirección tangencial a la interfaz, es igual en todo el dominio de la célula. Finalmente, puesto que las gráficas de tensión son similares a las expuestas en la figura 7.4 por los mismos motivos de continuidad de tracción normal a la interfaz, se decide presentar esta vez la tensión de von mises, que responde al mismo patrón.

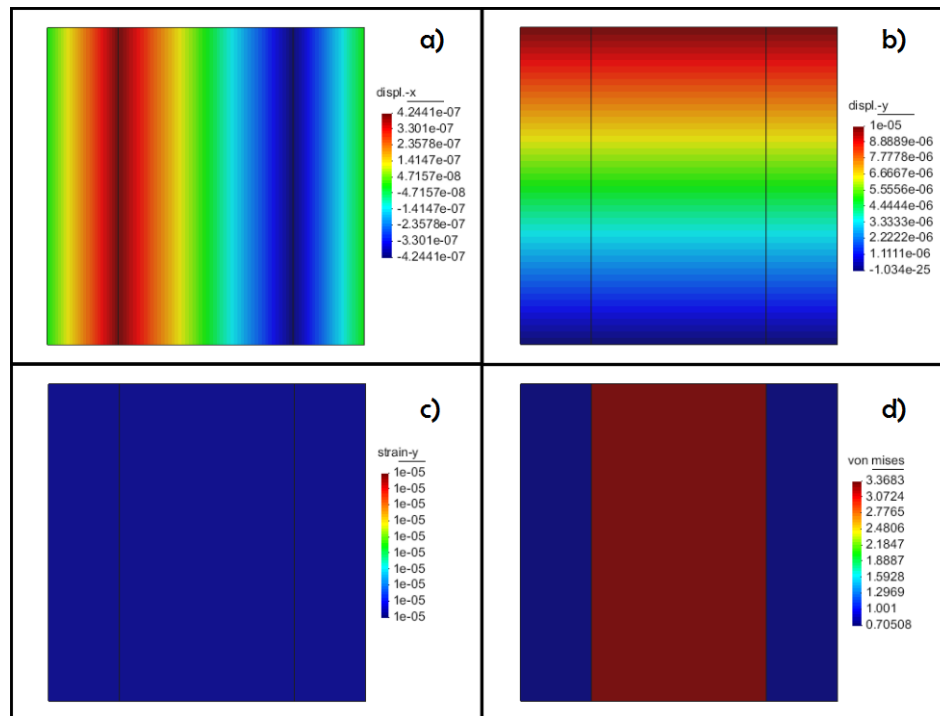


Figura 7.5: Distintos resultados para una célula sometida a tracción en dirección vertical. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y . c) Deformación en y , d) Tension de von mises.

Finalmente en la figura 7.6 se presenta la célula bajo un esfuerzo cortante impuesto por la deformación $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 0, 10^{-5})$. Arriba se presentan los desplazamientos en x e y , los cuales mantienen ambos patrones señalados en los ejemplos anteriores. Esta vez la deformación de la geometría no es lo suficientemente trivial para ser ignorada. Si bien esta deformación de la geometría es una exageración de la escala real (x20000), muestra bien como se mantiene el paralelismo entre sus contornos, una de las condiciones necesarias para la periodicidad, y que se refleja en las condiciones de contorno impuestas, además de que existe una pequeña rotación. Abajo se presentan tanto la deformación como la tensión

en el único plano en donde importan, el plano de corte. La forma de esta figura es importante y diferencia los trabajos que utilizan condiciones de periodicidad para representar a la célula de aquellos que utilizan condiciones homogéneas. Las condiciones homogéneas deforman la célula tal como si se tratase una geometría formada de un solo material. Aquí se puede observar que las deformaciones difieren por material, como es de esperarse en la realidad.

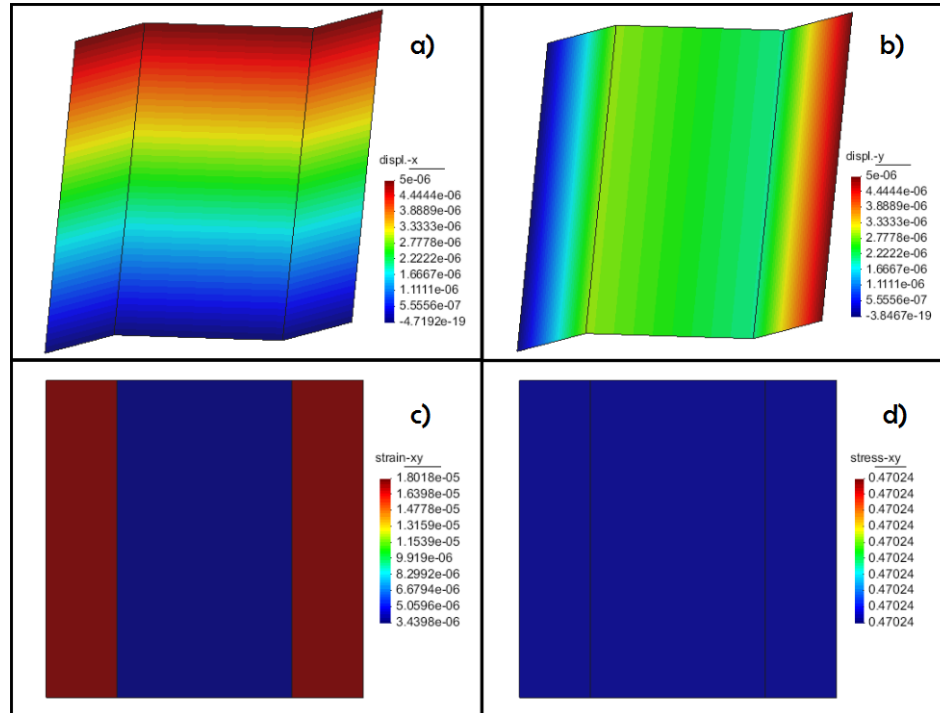


Figura 7.6: Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y . c), f) Deformación en xy , d) i) Tensión en xy .

7.2. Representación longitudinal de un compuesto de fibras discontinuas

En el caso de fibras discontinuas, la célula contiene completamente a la fibra, pero al igual y por las mismas razones que en el caso anterior, la célula debe ser idealizada para su tratamiento en 2D. La célula esta en función de las mismas variables anteriores, solo que esta vez se ha de considerar también la separación entre fibras s , que además relaciona el largo de la fibra y la célula mediante $L_c = L_f + s$.

Tomando como referencia la idealización de fibras continuas, se puede prescindir de todas las dimensiones en 3D si se conocen la proporción de la fibra en el compuesto, puesto que la única dimensión longitudinal de la célula original que no se conserva es el ancho de fibra H_f . Bajo este concepto, observando la idealización de la fibra discontinua plasmada en la figura 7.7, lo único que se requiere para obtener la altura de fibra H_f , es que la proporción entre el área de la fibra y el área de la célula mantengan la proporción de la fibra en la célula original. Esto es:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_f}{A_c} &= c_f \\
 \frac{H_f L_f}{H_c L_c} &= c_f \\
 \Rightarrow H_f &= \frac{c_f L_c H_c}{L_f}
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

En la figura 7.7 se muestran varias distribuciones plasmadas en la célula hexagonal, que como se ha mencionado, recibe su nombre por la cantidad de vértices más que por su geometría. En todos los materiales de la figura los contornos verticales $\bar{1}4$ y $\bar{3}6$ son periódicos entre sí. La diferencia entre las distribuciones en cada material se describen en las relaciones de periodicidad de sus contornos horizontales. Para el caso del material 2, con una distribución cuadrada, la periodicidad horizontal es únicamente entre sus lados $\bar{1}3$ y $\bar{4}6$. Para los materiales 1 y 3, los contornos $\bar{1}2$ y $\bar{2}3$ son periódicos a los contornos $\bar{5}6$ y $\bar{4}5$, respectivamente. Finalmente para el caso del material 4, los contornos $\bar{1}2$ y $\bar{2}3$ son periódicos a $\bar{5}4$ y $\bar{6}5$, donde se debe notar que el cambio en el orden de los dos últimos contornos es premeditado, de lo contrario sería exactamente la relación de periodicidad de una célula con disposición cuadrada como en el material 2. Si el lector observa con cuidado, puede notar que para el material 4 son requeridos dos tipos de célula, donde una es la inversa de la otra, razón por la cual se requieren las condiciones de periodicidad invertidas que se han citado.

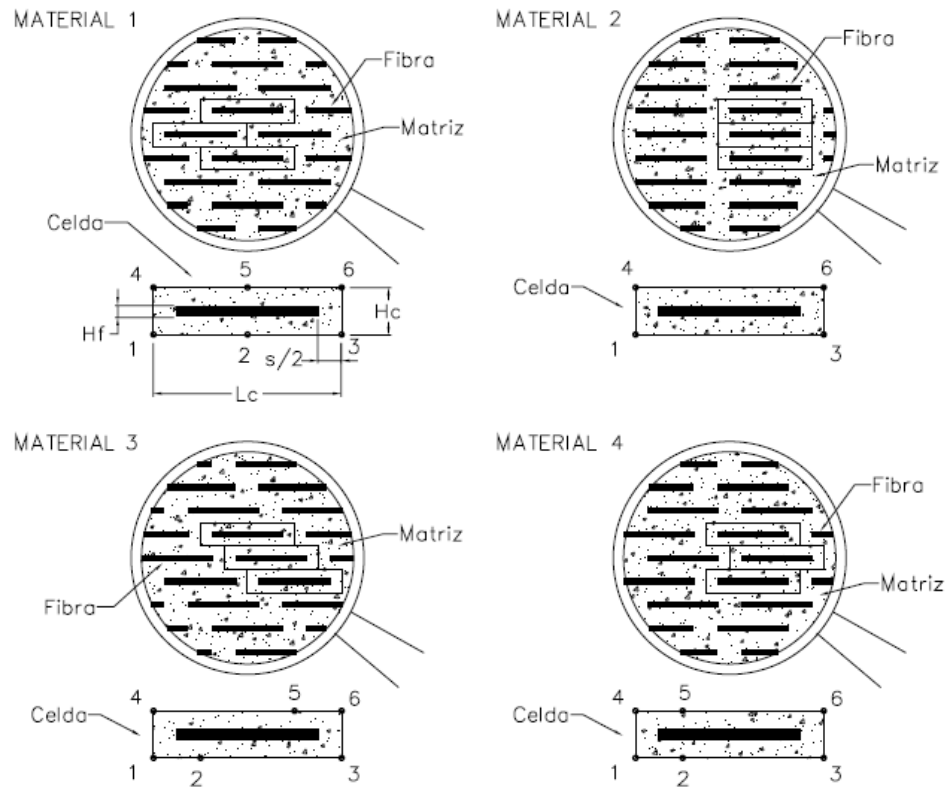


Figura 7.7: Varias distribuciones para un material compuesto reforzado con fibras cortas, y sus células asociadas.

7.2.1. Ejemplo compuesto Boro/Aluminio

En este apartado se trabaja con un compuesto de aluminio reforzado con fibras cortas de boro, las cuales se distribuyen de forma hexagonal. Se ha escogido una célula hexagonal para la representación de la microestructura del compuesto. La figura 7.8 muestra las dimensiones de la célula y su discretización en 625 puntos, en un arreglo regular de 33×17 nodos más aquellos repetidos en la interfaz, y se agrupan en 13 nodos por nube. La geometría de esta célula obliga a una discretización más densa con el fin de mantener su homogeneidad, y con ello mejor simetría en las nubes. Las propiedades del problema se resumen en la tabla 7.2. El caso de una fibra corta con disposición hexagonal es por lejos más interesante gráficamente que el de una fibra continua, para lo cual se han sometido a tracción horizontal $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (10^{-5}, 0, 0)$, tracción vertical $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 10^{-5}, 0)$ y esfuerzo cortante $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 0, 10^{-5})$, como se muestran en las figuras 7.9, 7.10 y 7.11, respectivamente. En cada una de estas figuras se presentan en su zona superior las gráficas de desplazamiento en x y en y , junto con la deformación aparente exagerada para fines visuales. En su zona centro se presentan las gráficas de la deformación en x , y y el plano cortante xy . Finalmente, en la zona inferior se presentan las gráficas de tensión en x , y y xy .

En todas estas gráficas se concluye lo mismo, la fibra de boro al ser más rígida se deforma menos, mientras que la matriz de aluminio es quien recibe la mayor deformación. La tensión se transmite desde la matriz a la fibra, pero solo a través de los planos normales a la interfaz entre materiales.

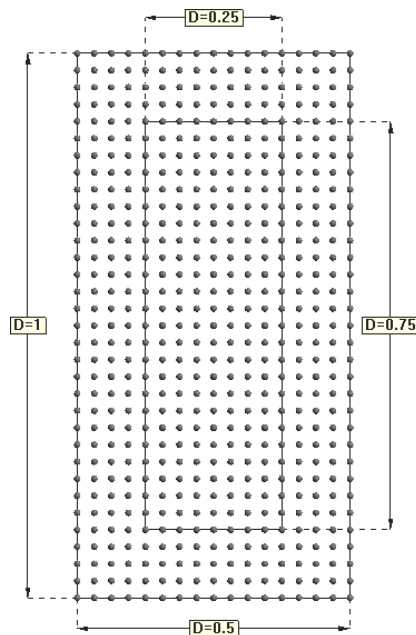
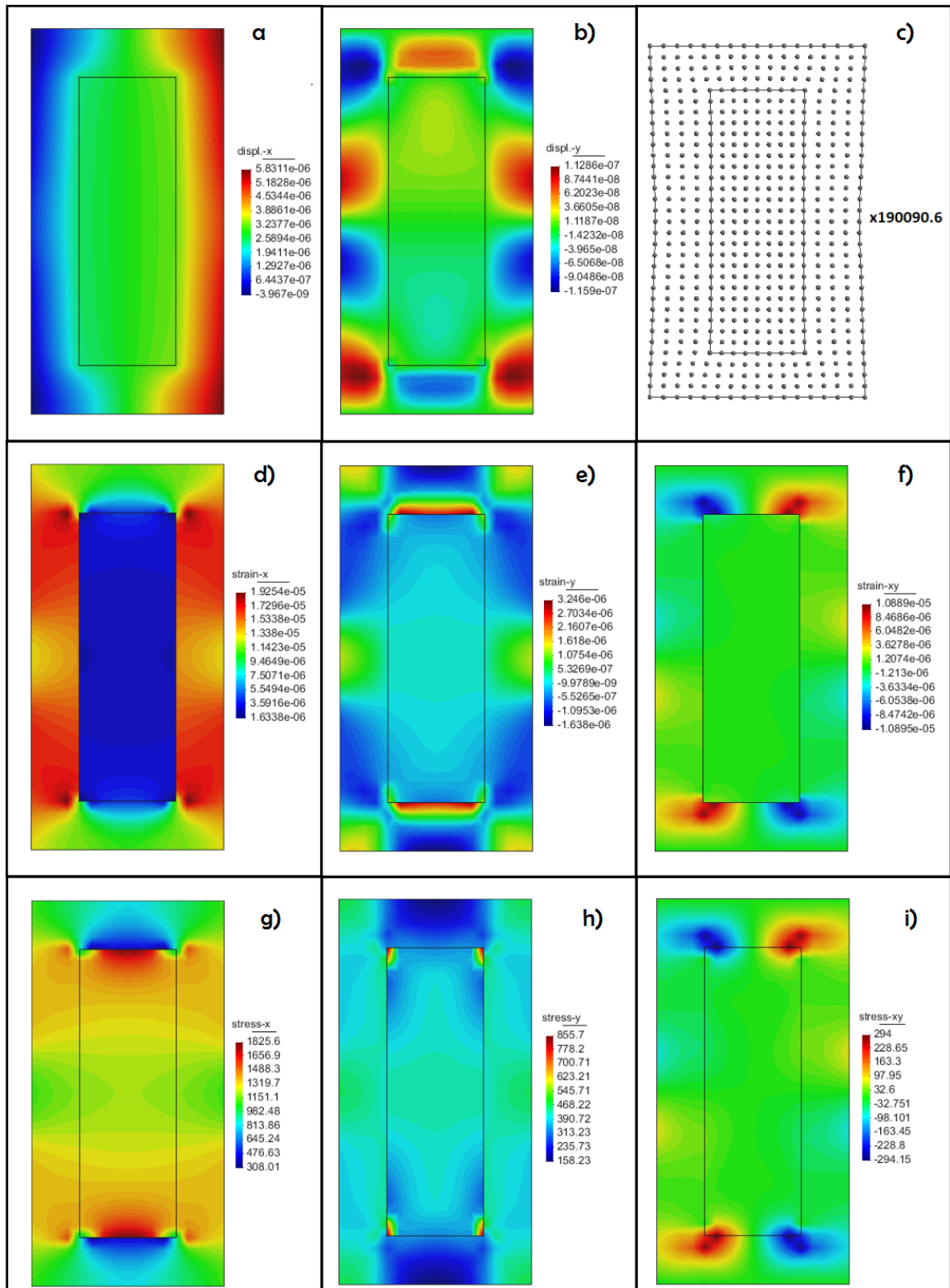


Figura 7.8: Dimensiones y discretización de la geometría de una célula de fibra corta en 625 nodos.

Tabla 7.2: Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras cortas.

Material componente	Módulo elástico E [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	72000	0.3333	0.625
Boro (fibra)	400000	0.3	0.375



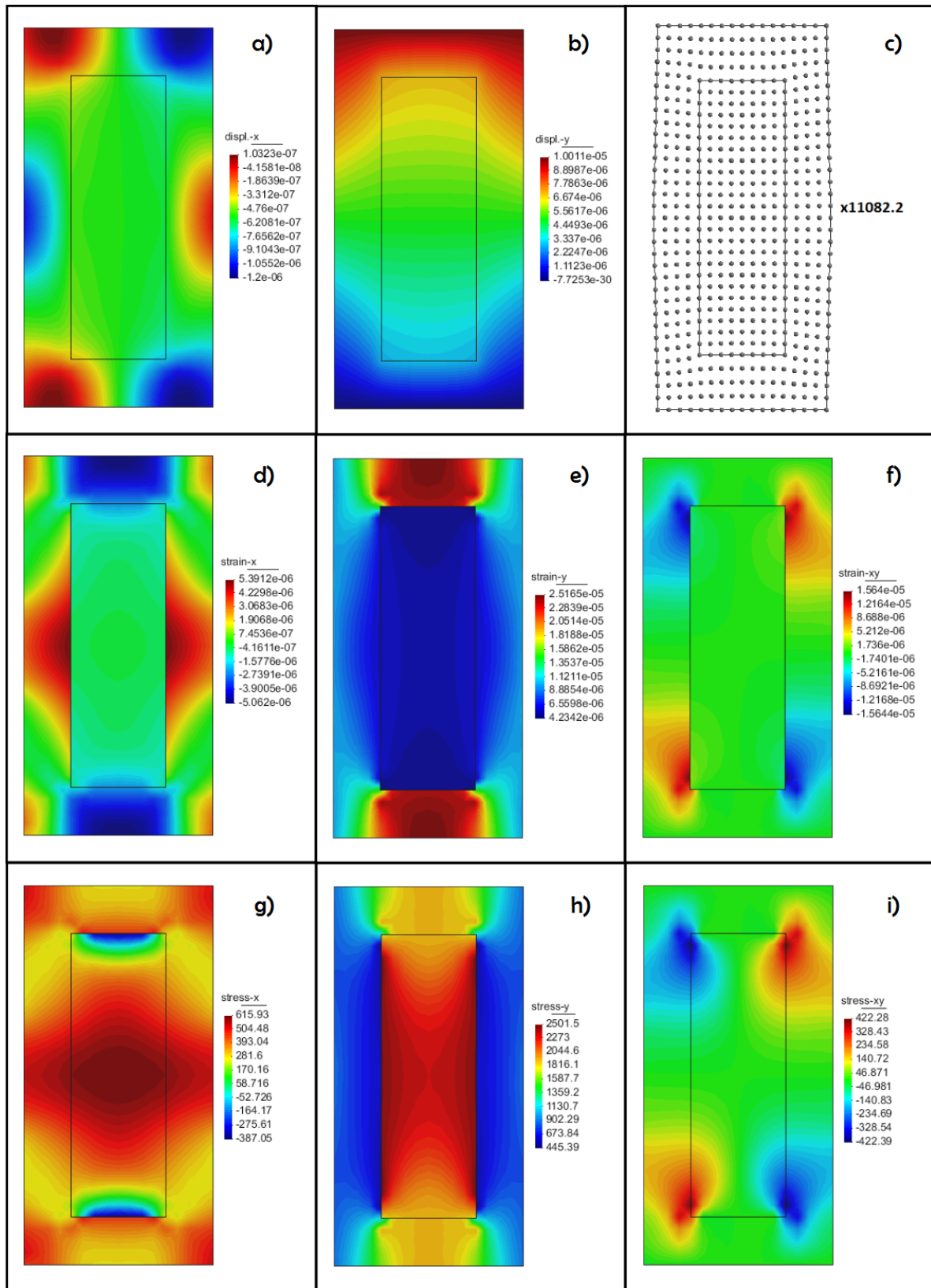


Figura 7.10: Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y , c) Deformación aparente, d) Deformación en x , e) Deformación en y , f) Deformación en y , g) Tensión en x , h) Tensión en y , i) Tensión en xy .

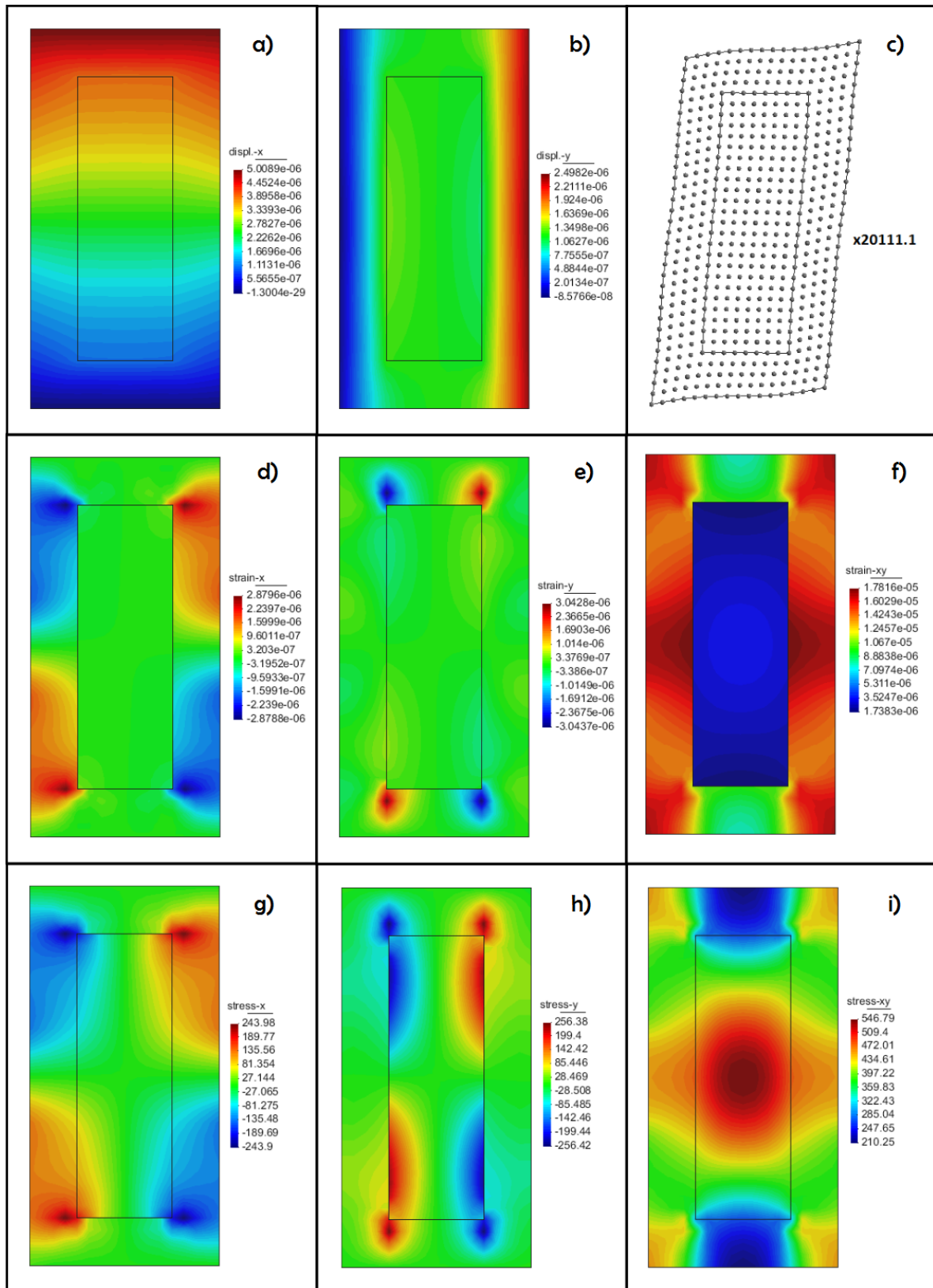


Figura 7.11: Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. *a)* Desplazamiento en x , *b)* Desplazamiento en y , *c)* Deformación aparente, *d)* Deformación en x , *e)* Deformación en y , *f)* Deformación en y , *g)* Tensión en x , *h)* Tensión en y , *i)* Tensión en xy .

En las figuras 7.12, 7.13 y 7.14 se aprecian las gráficas de la tensión equivalente de Von Mises para los 3 estados tensionales tratados. Estas figuras se realizan bajo el supuesto de que las variables macroscópicas varían lenta y suavemente, y que la microestructura es demasiado pequeña comparada con la escala macroscópica, por lo tanto los estados tensionales de las células vecinas deberían ser prácticamente iguales. En estas figuras se puede observar como la fibra cumple su labor de refuerzo, cargando siempre con las mayores tensiones, mientras la matriz cumple la labor de transmitir estas tensiones de fibra a fibra. También se puede observar lo bien que se adapta la célula hexagonal para describir una microestructura con disposición hexagonal.

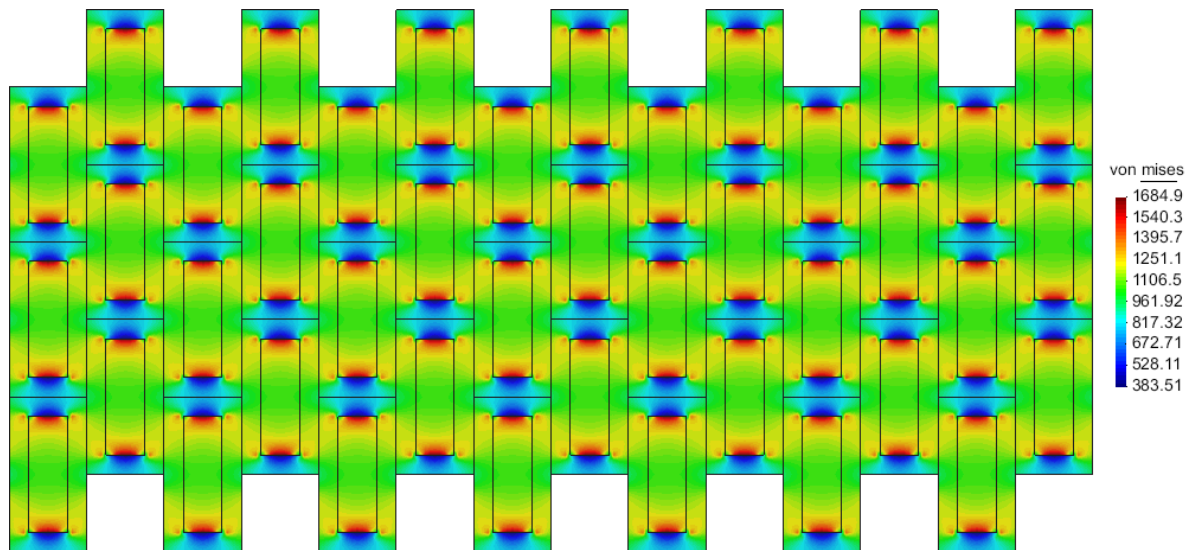


Figura 7.12: Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción horizontal.

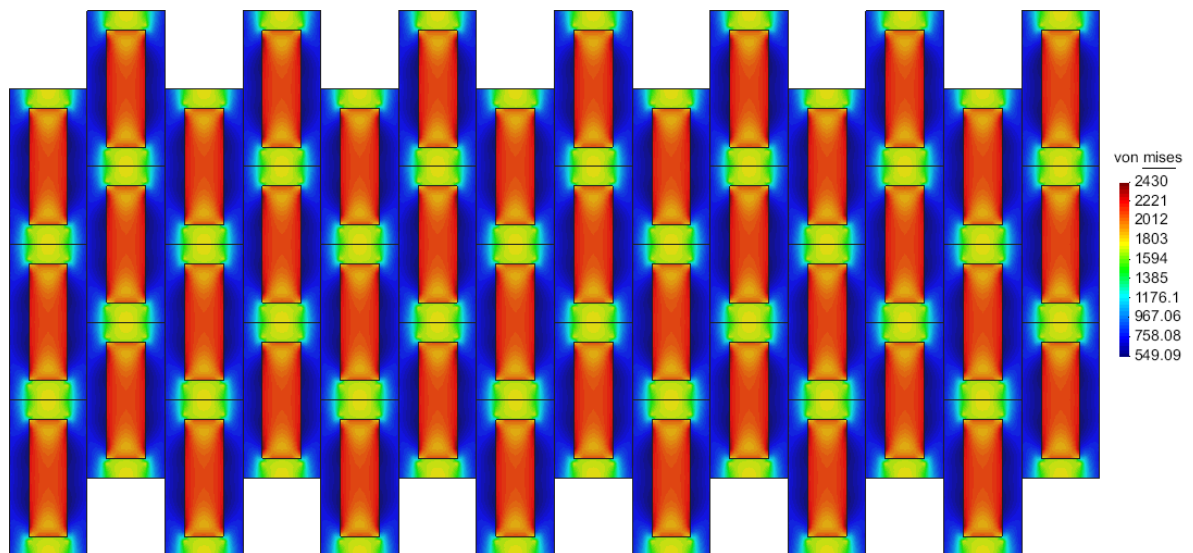


Figura 7.13: Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.

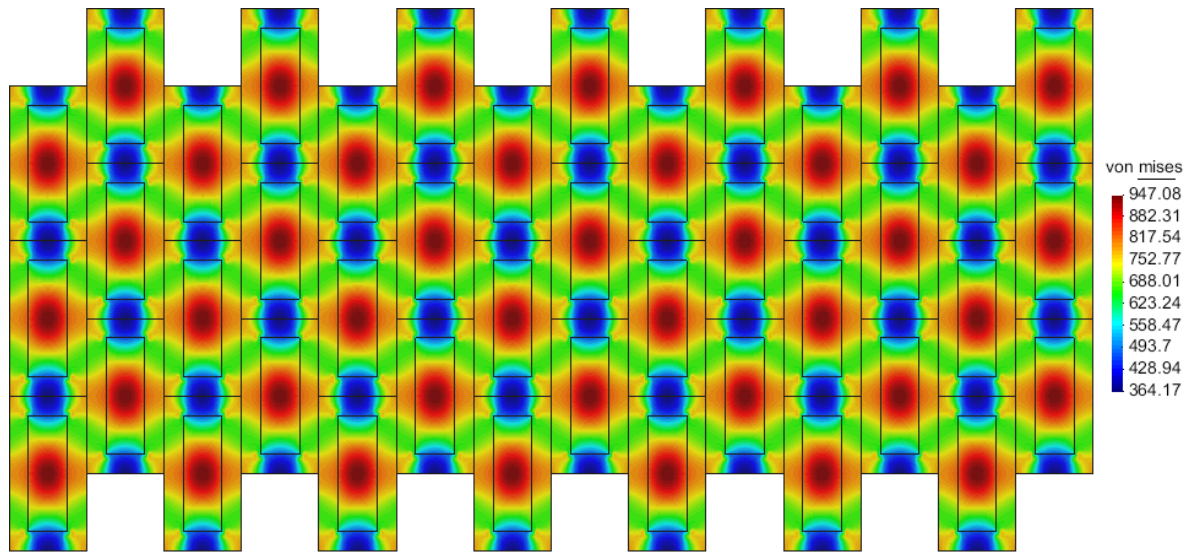


Figura 7.14: Tensión de Von Mises en la microestructura para esfuerzo cortante.

Finalmente, es necesario establecer que este tipo de problema genera una desventaja para el MPF debido a su geometría. Generalmente esta clase de problemas tiene una proporción entre las longitudes de la célula bastante más acentuada al problema realizado. El MPF funciona bien para discretizaciones con una densidad homogénea de nodos. Si la longitud de la célula es demasiado grande en comparación a su ancho, entonces se requieren discretizaciones muy densas. El cómo abordar este particular tipo de problemas requiere replantear la estrategia de la célula, quizás abordando varias fibras a lo ancho con el fin de igualar las proporciones de la célula en lo posible, o bien, mejorar la técnica para la formación de nubes en el MPF, lo cual quizás entregue resultados satisfactorios con discretizaciones normales.

7.3. Representación transversal de un compuesto reforzado con fibras

En esta sección se analiza el comportamiento transversal de un compuesto reforzado con fibras continuas y unidireccionales.

El comportamiento transversal de materiales reforzados con fibras es un tema que ha captado bastante atención en la literatura a través de los años, (Adams & Doner, 1967; Lene & Leguillon, 1982; Jansson, 1992; Ghosh et al., 1995; Sun & Vaidya, 1996; Michel et al., 1999; Xia et al., 2003), puesto que al contrario del caso de comportamiento longitudinal, métodos teóricos como la teoría de mezclas no obtienen resultados satisfactorios de las propiedades elásticas efectivas asociadas a este plano.

Este problema se analiza bajo un modelo de deformación plana, puesto que la longitud de la fibra es mucho mayor que las longitudes en el plano transversal. A diferencia del caso longitudinal, la sección transversal es constante a lo largo de la fibra, por lo cual no requiere de ninguna idealización adicional.

Siguiendo el mismo esquema, se analizan esta vez dos ejemplos mostrando el comportamiento transversal de las variables de interés para casos de disposición cuadrada y hexagonal de fibras.

Tabla 7.3: Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto con fibras transversales.

Material componente	Módulo elástico [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	72000	0.3333	0.6
Boro (fibra)	400000	0.3	0.4

7.3.1. Ejemplo compuesto Boro/Aluminio disposición cuadrada

En este ejemplo se analiza el comportamiento de la sección transversal de un compuesto aluminio reforzado con fibras de boro continuas que presentan una disposición cuadrada, tal como en la figura 7.15. Las propiedades del compuesto se resumen en la tabla 7.3. Tanto las dimensiones del problema como su discretización son mostradas en la figura 7.16, la fibra esta centrada.

Al tratarse de un problema simétrico respecto a los ejes coordenados, esta vez se analiza la tracción simple tan solo en la dirección vertical $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 10^{-5}, 0)$ y bajo esfuerzo cortante $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 0, 10^{-5})$, como se muestra en las figuras 7.17 y 7.18 respectivamente. Como ya es costumbre, en ambas figuras se presentan en su zona superior las gráficas de desplazamiento en x y en y , junto con la deformación aparente exagerada para fines visuales. En su zona centro se presentan las gráficas de la deformación en x , y y el plano cortante xy . Finalmente, en la zona inferior se presentan las gráficas de tensión en x , y y xy . Una muestra de la tensión de von mises en la microestructura del material se puede apreciar en las figuras 7.19 y 7.20.

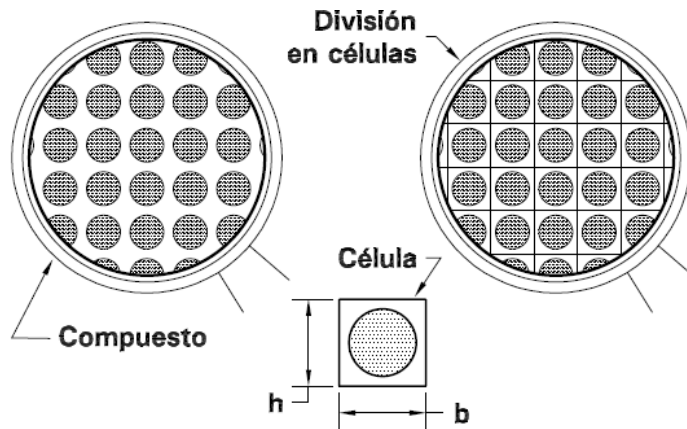


Figura 7.15: Representación de la microestructura de un compuesto de fibras transversales con disposición cuadrada y su división en células.

Como muestra la discretización en la figura 7.16, lograr una distribución regular de puntos lleva a que algunas zonas tengan una mayor densidad de nodos, lo cual puede repercutir en problemas de condicionamiento para la aproximación en aquellas zonas. Se debe procurar mantener una distribución homogénea de nodos en todo el dominio, aunque luego de cierta cantidad de nodos, el problema se vuelve irrelevante siempre y cuando también se aumente la cantidad de nodos por nube.

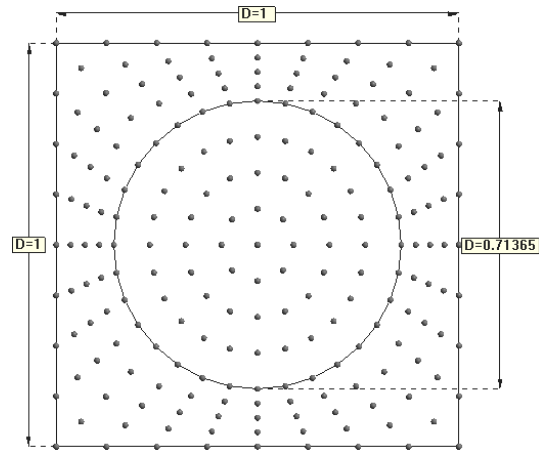


Figura 7.16: Dimensiones de la célula de un material reforzado con fibras transversales y su discretización en 241 con 13 nodos por nube.

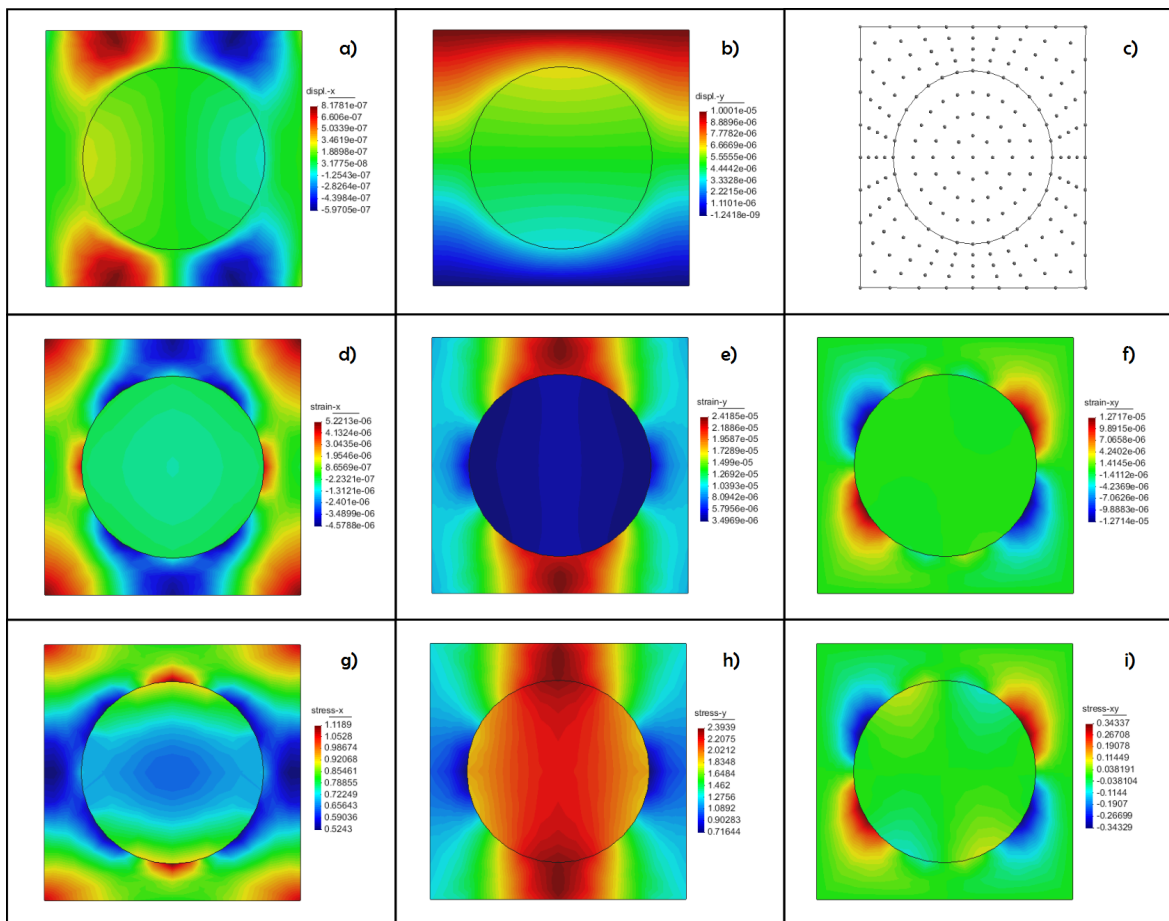


Figura 7.17: Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y , c) Deformación aparente, d) Deformación en x , e) Deformación en y , f) Deformación en y , g) Tensión en x , h) Tensión en y , i) Tensión en xy .

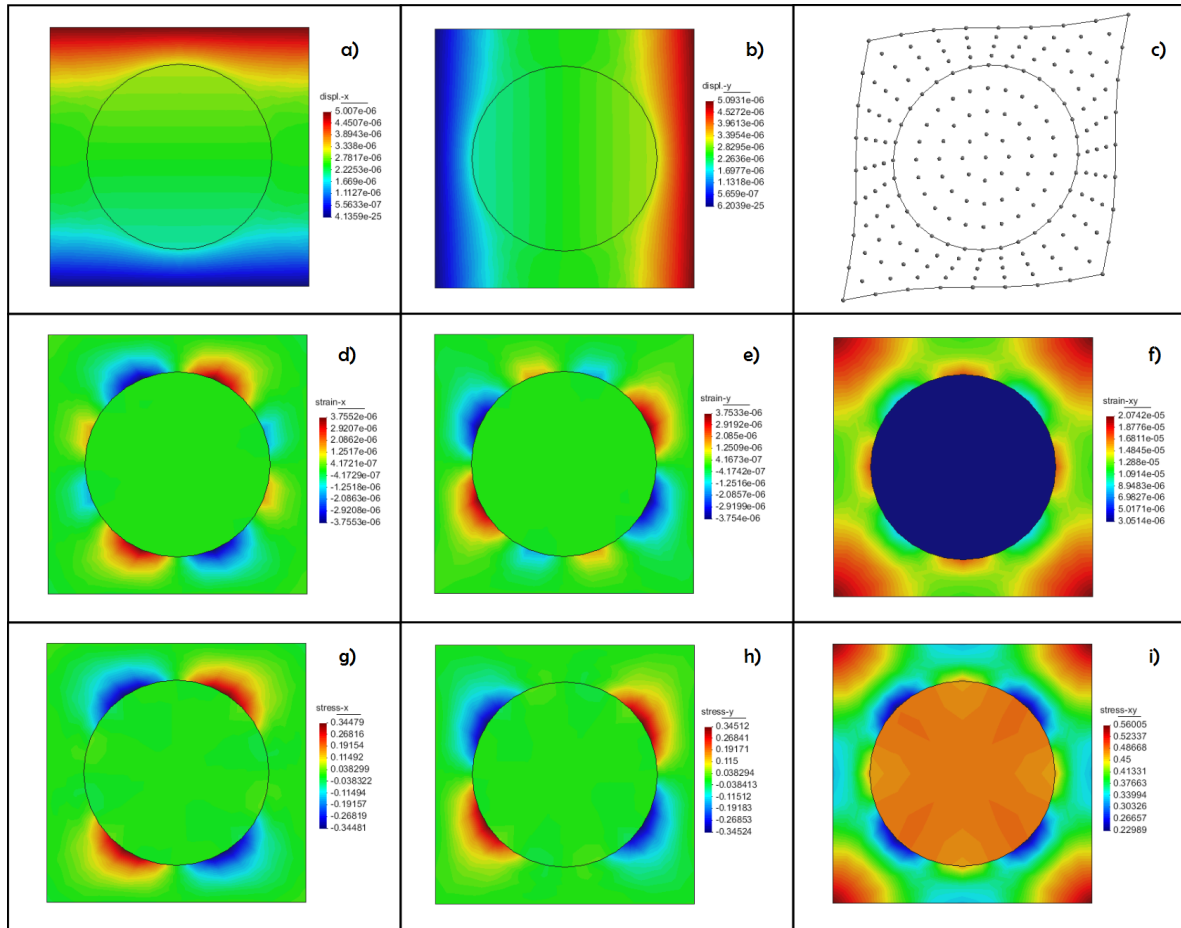


Figura 7.18: Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y , c) Deformación aparente, d) Deformación en x , e) Deformación en y , f) Deformación en y , g) Tensión en x , h) Tensión en y , i) Tensión en xy .

En la figura 7.17 se puede observar que la tensión es continua en aquellas zonas de la interfaz cuya normal corresponda al plano en que se analiza la tensión, mientras que se presentan cambios bruscos en aquellas zonas donde la normal de la interfaz es perpendicular (o casi) al plano en que se analiza la tensión. En cuanto a las deformaciones, estas presentan el comportamiento opuesto a lo mencionado en cuanto a tensiones, y la fibra se deforma mucho menos que la matriz. Las variables en el plano de corte presentan simetrías, y de igual forma para el caso de esfuerzo cortante en la figura 7.18, existen simetrías en los planos distintos al plano de corte xy , y para la tensión en el plano de corte se presenta continuidad de tensiones en las direcciones vertical y horizontal. Las deformaciones de la geometría corresponden en gran parte a las condiciones de anclaje, las cuales varían de trabajo a trabajo, y entre tipo de problemas. No obstante mantienen coherencia puesto que los lados periódicos se mantienen paralelos independiente de sus deformaciones.

En las figuras 7.19 y 7.20 se puede notar que para el caso transversal, la matriz puede presentar mayores tensiones que la fibra en sectores específicos, no obstante, en promedio es la fibra la que continua cargando con la mayor tensión, mientras la matriz cumple la labor de transmitir los esfuerzos desde una fibra a otra. Estas figuras que representan la microestructura se obtiene bajo el supuesto de

que los estados de carga son prácticamente idénticos entre las células pertenecientes a una vecindad. Se puede apreciar que las condiciones de periodicidad son bien logradas al mostrar correspondencia en los valores entre contornos periódicos, y la apreciación de simetrías propias del problema.

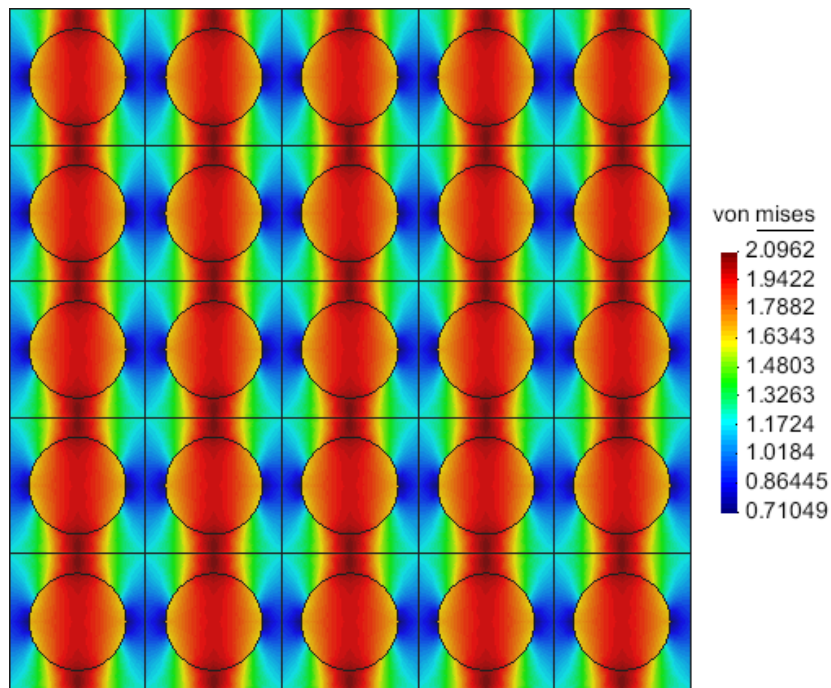


Figura 7.19: Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.

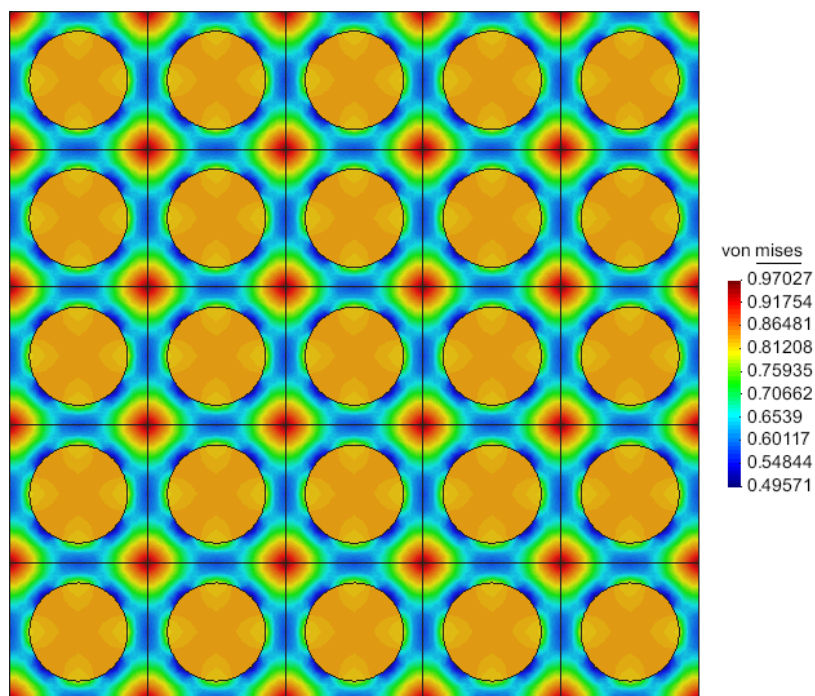


Figura 7.20: Tensión de Von Mises en la microestructura para esfuerzo cortante.

7.3.2. Ejemplo compuesto Alúmina/Aluminio

En este ejemplo se analiza el comportamiento de la sección transversal de un compuesto aluminio reforzado con fibras de alumina, continuas que presentan una disposición hexagonal, cuyos vértices adicionales se ubican en la mitad de los contornos horizontales de la célula, tal como se observa en la figura 7.21. Las propiedades del compuesto se resumen en la tabla 7.4. Tanto las dimensiones del problema como su discretización son mostradas en la figura 7.22, donde se debe asumir que la fibra está centrada. Generalmente las células hexagonales requieren discretizaciones más densas para lograr resultados estables.

A pesar de la simetría de la célula, la disposición hexagonal evita simetría en los resultados para los dos casos de tracciones, por lo cual se abordan los 3 casos vistos hasta ahora; tracción horizontal $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (10^{-5}, 0, 0)$, tracción vertical $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 10^{-5}, 0)$ y esfuerzo cortante $(\epsilon_x, \epsilon_y, 2\epsilon_{xy}) = (0, 0, 10^{-5})$, como se muestra en las figuras 7.23, 7.24 y 7.25, respectivamente. En estas figuras, aquellas gráficas que se presentan en su zona superior representan el desplazamiento en x y en y , junto con la deformación aparente y exagerada para fines visuales. En su zona centro se presentan las gráficas de la deformación en x , y y el plano cortante xy . Finalmente, en la zona inferior se presentan las gráficas de tensión en x , y y xy . Una muestra de la tensión de von mises en la microestructura del material se puede apreciar en las figuras 7.26, 7.27 y 7.28 para tres casos expuestos.

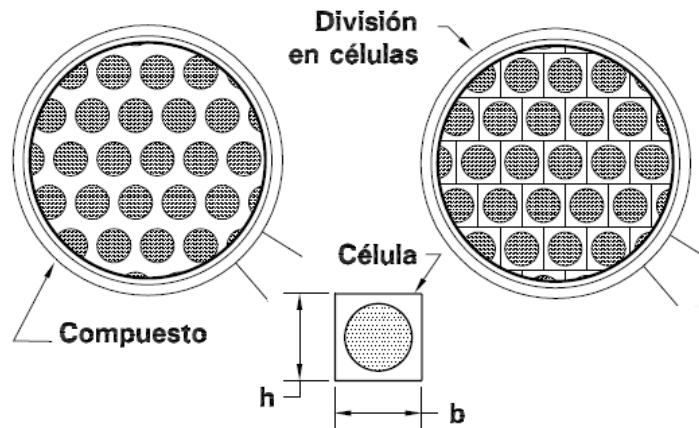


Figura 7.21: Microestructura de un compuesto de fibras con disposición hexagonal y su división en células.

Tabla 7.4: Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras transversales.

Material componente	Módulo elástico [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	69800	0.32	0.6
Alumina (fibra)	344500	0.26	0.4

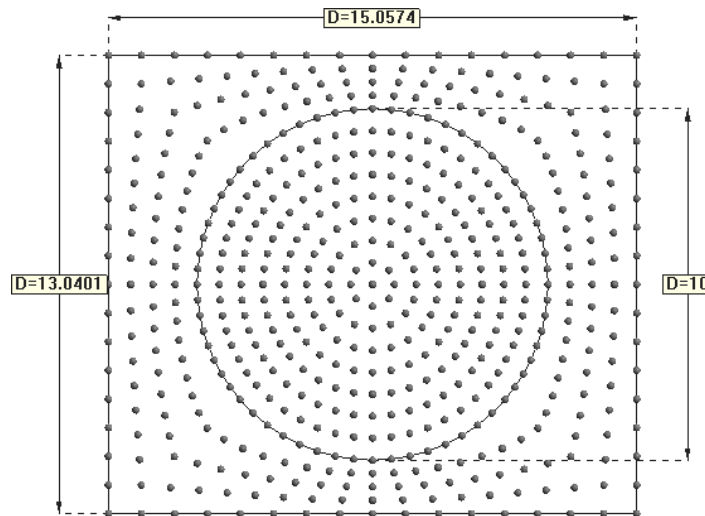


Figura 7.22: Dimensiones de la célula transversal con disposición hexagonal y su discretización en 609 nodos con 13 nodos por nube.

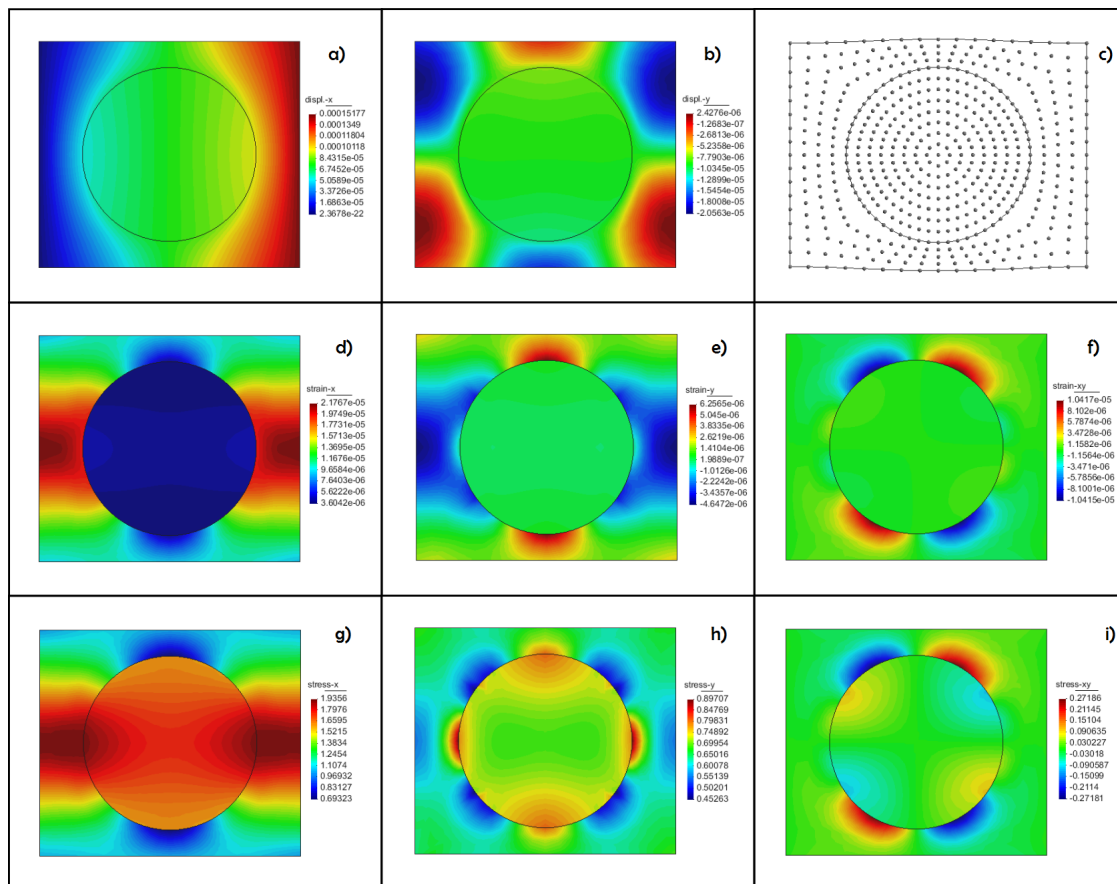


Figura 7.23: Distintos resultados para una célula sometida a tracción horizontal. *a)* Desplazamiento en x , *b)* Desplazamiento en y , *c)* Deformación aparente, *d)* Deformación en x , *e)* Deformación en y , *f)* Deformación en y , *g)* Tensión en x , *h)* Tensión en y , *i)* Tensión en xy .

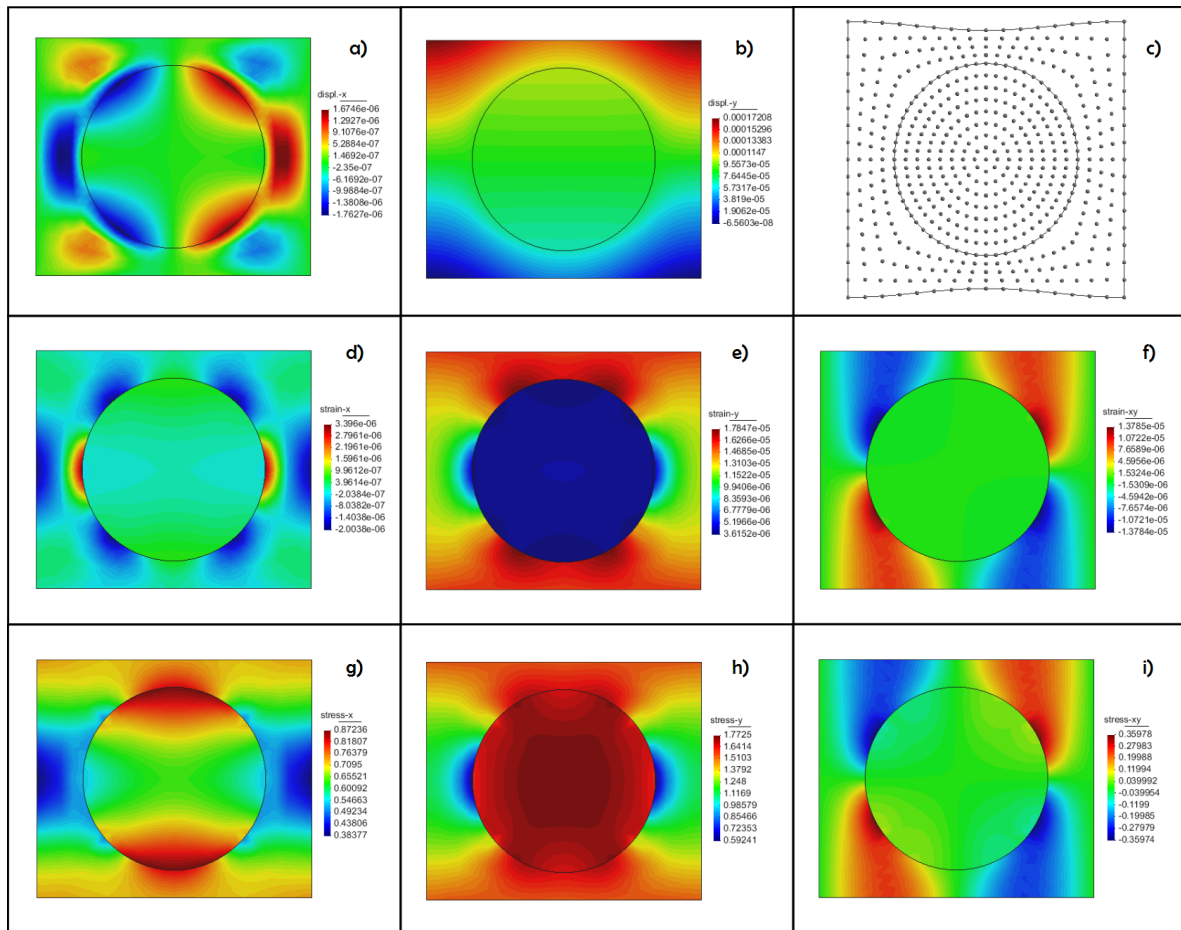


Figura 7.24: Distintos resultados para una célula sometida a tracción vertical. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y , c) Deformación aparente, d) Deformación en x , e) Deformación en y , f) Deformación en y , g) Tensión en x , h) Tensión en y , i) Tensión en xy .

En la figura 7.22 se muestra una discretización más fina que en el caso anterior de célula cuadrada, aunque al igual que para una célula cuadrada, ya se obtienen buenos resultados con discretizaciones más gruesas a la expuesta. Para algunos problemas o elecciones de parámetros, la célula hexagonal puede requerir una discretización más fina que la célula cuadrada con disposición cuadrada de las fibras, puesto que sus condiciones de contorno resultan ser un poco más complejas, y generalmente la condición de anclaje (que sustituye una condición de periodicidad) puede traer una inestabilidad menor que afecta al vértice en cuestión y a sus nodos vecinos. No obstante, esto ocurre para discretizaciones gruesas, cuyo tiempo de cálculo en comparación con algunas discretizaciones más finas no ameritan en absoluto la utilizations de menos nodos. Además, debe considerarse que para representar una disposición hexagonal mediante una célula cuadrada, se requeriría una célula del doble del tamaño a la célula expuesta, y por ende, un mayor costo computacional, y sin la garantía de que se adapte tan bien como la célula expuesta. Las células cuadradas con disposición hexagonal dificultan una discretización homogénea, y tienden a presentar inestabilidades con facilidad en aquellas zonas donde la densidad de nodos es mayor, por consiguiente generalmente requieren discretizaciones más finas para entregar los mismos resultados expuestos.

En todas las figuras (7.23, 7.24 y 7.25), las gráficas son simétricas respecto a un corte vertical a la mitad de la geometría, lo cual corresponde exactamente a la línea que une al par de vértices adicionales de la célula hexagonal, en este caso particular donde se sitúan a la mitad de los lados horizontales de la célula. Los resultados obtenidos mantienen patrones mencionados en el ejemplo anterior.

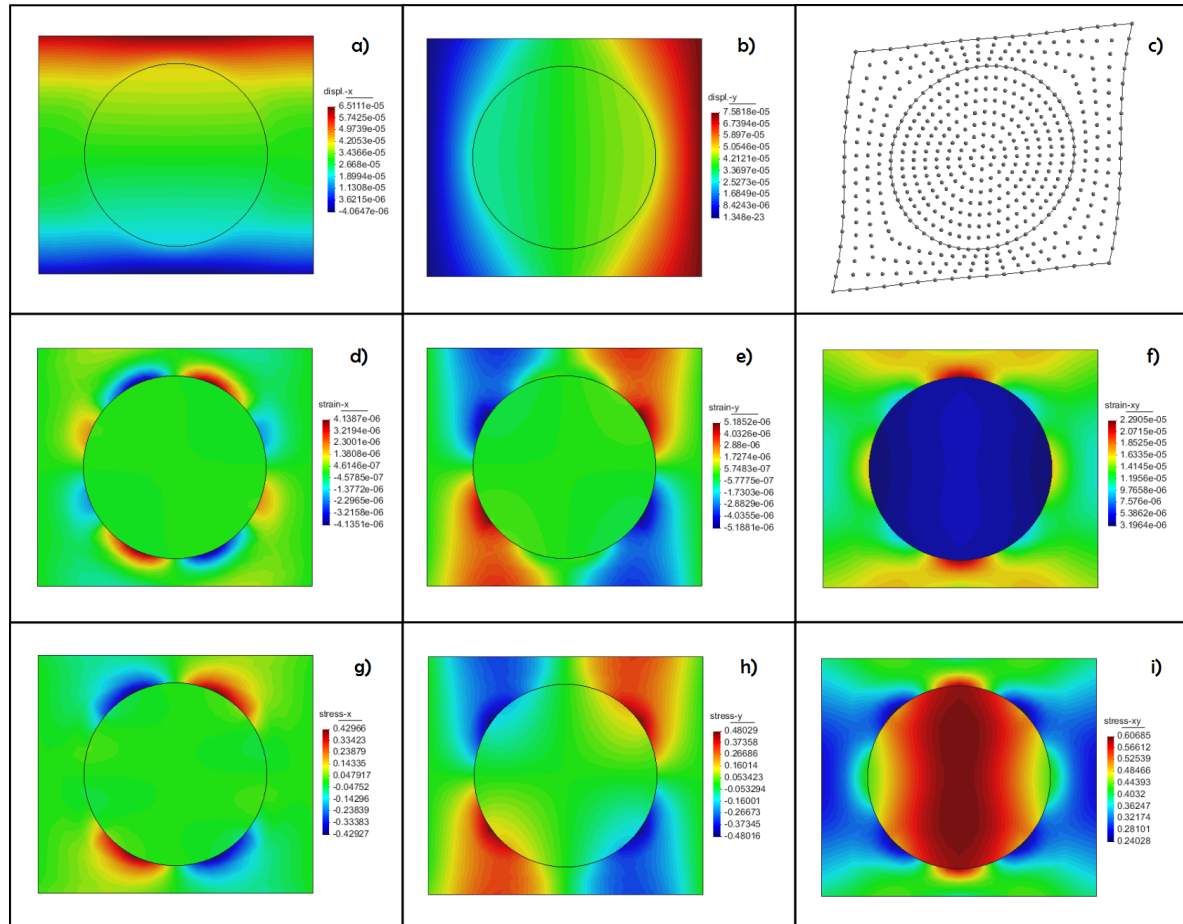


Figura 7.25: Distintos resultados para una célula sometida a esfuerzo cortante. a) Desplazamiento en x , b) Desplazamiento en y , c) Deformación aparente, d) Deformación en x , e) Deformación en y , f) Deformación en xy , g) Tensión en x , h) Tensión en y , i) Tensión en xy .

En las figuras 7.26, 7.27 y 7.28 que representan la microestructura de un compuesto con disposición de fibras hexagonal, se observa como la transmisión de tensiones entre fibras a través de la matriz, adquiere a su vez un carácter hexagonal, y así, los resultados cumplen con las condiciones de contorno de periodicidad.

Esta disposición hexagonal tiene una consecuencia especial. Primeramente, la célula mantiene una relación de proporcionalidad conocida entre sus contornos, donde aquel par de contornos divididos por los vértices adicionales (en este caso los contornos horizontales), mide $\sqrt{3}$ veces lo que el par contornos restante (en este caso, los verticales). Las propiedades homogeneizadas de este tipo de compuestos mantienen una relación isotrópica de sus constantes elásticas.

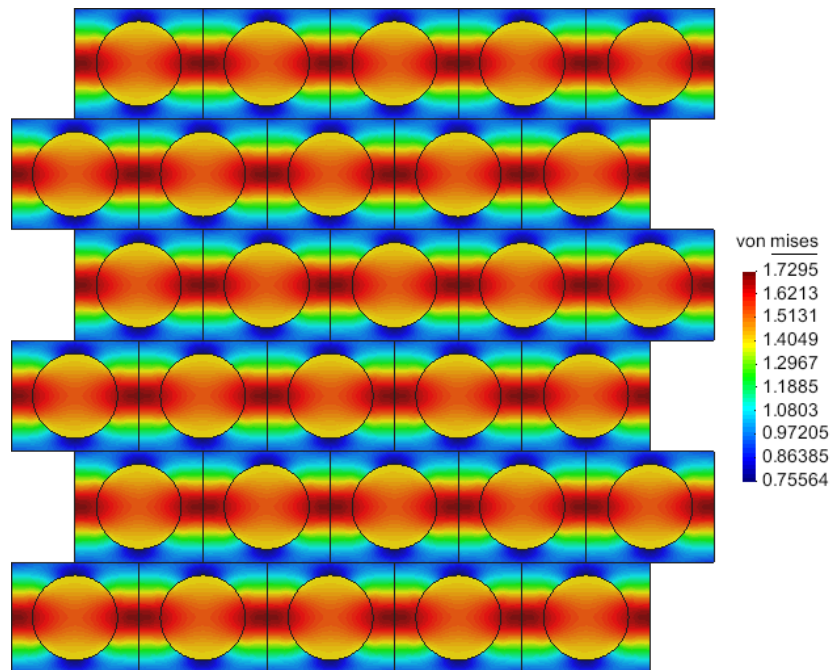


Figura 7.26: Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción horizontal.

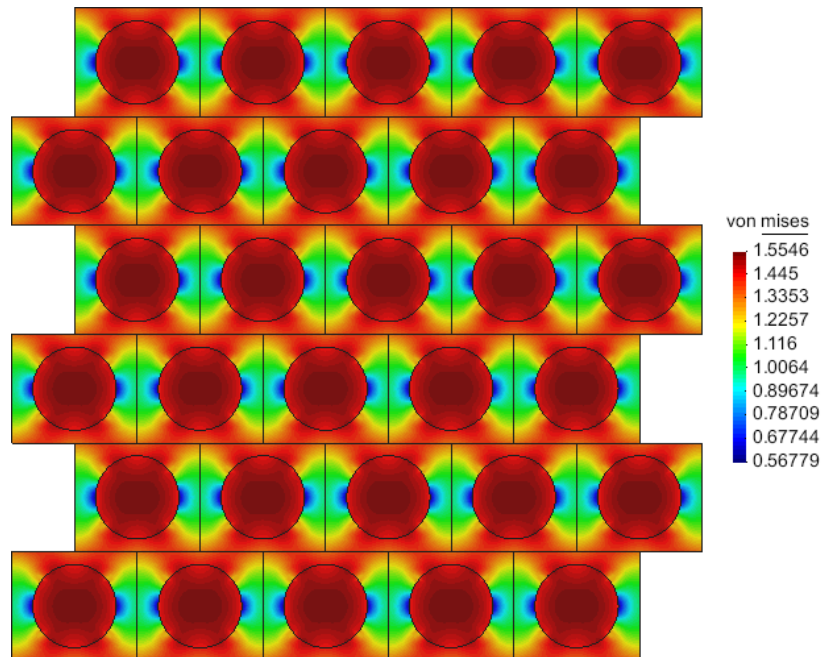


Figura 7.27: Tensión de Von Mises en la microestructura para tracción vertical.

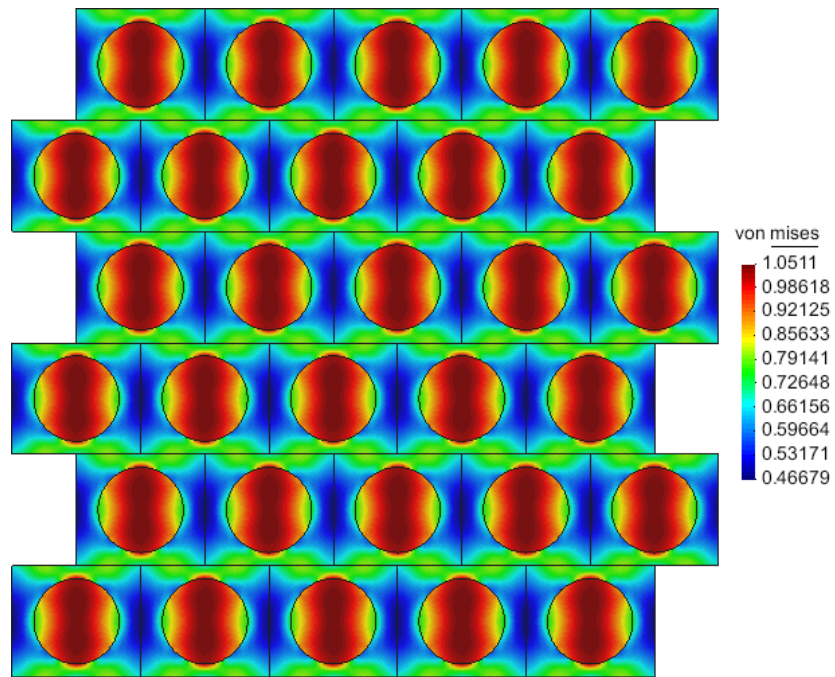


Figura 7.28: Tensión de Von Mises en la microestructura para un esfuerzo cortante.

Capítulo 8

Determinación de las propiedades efectivas homogeneizadas

En este capítulo se pretende abordar algunos ejemplos utilizados en la literatura para validar los resultados obtenidos en este trabajo. Los trabajos presentes en la literatura obtienen las propiedades efectivas de materiales compuestos reforzados con fibras, y reúnen tanto simulaciones numéricas realizadas con el método de elementos finitos, como resultados experimentales para distribución aleatoria de fibras.

En este capítulo se analizan dos ejemplos. El primero de ellos es un ejemplo propuesto en (Jansson, 1992), y abordado posteriormente en el trabajo de (Zalamea et al., 2002), donde se desarrolla la teoría de homogeneización en dos escalas que se utiliza en el presente trabajo. El segundo ejemplo contiene una tabla de resultados recopilatoria de numerosos trabajos para el mismo ejemplo, que ha sido utilizada en distintos trabajos, y se ha encontrado en su versión más reciente en (Xia et al., 2003). Esta tabla recopila además de los resultados del trabajo ya mencionado, los resultados de (Hashin & Rosen, 1964; Riley & Whitney, 1966; Chamis, 1984; Kenaga et al., 1987; Sun & Chen, 1991; Sun & Vaidya, 1996).

8.1. Ejemplo 1: Compuesto Alúmina/Aluminio

El siguiente ejemplo se abordó inicialmente en (Jansson, 1992) y luego fue abordado en (Zalamea et al., 2002), el cual debe considerarse como un trabajo previo al presente trabajo, y es razón justificada para el uso de este ejemplo como medio de comparación puesto que se sigue la misma metodología de homogeneización, pero implementada con un método numérico distinto.

En el problema se intenta obtener todas las propiedades elásticas posibles, analizando el problema de fibra tridimensional a través de dos problemas bidimensionales; longitudinal y transversal. Adicionalmente se trabaja con las distribuciones de fibra, cuadrilátera y hexagonal.

Los datos generales de la células a homogeneizar se resumen en la tabla 8.1. Las dimensiones de las células y sus discretizaciones se presentan en las figuras 8.1, 8.2 y 8.3. Para todos los modelos de célula

se utiliza la misma geometría longitudinal, cuyas dimensiones y discretización se presentan en la figura 8.4. Se destaca nuevamente que es la razón entre las dimensiones de cada célula lo que importa, y no las dimensiones en sí.

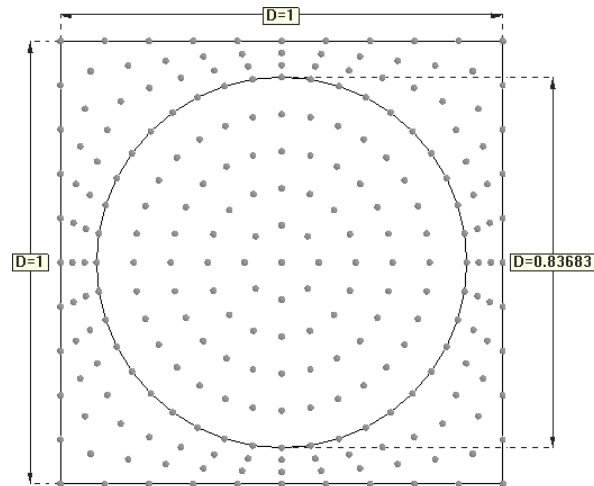


Figura 8.1: Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera con disposición cuadrada en 281 nodos con 13 nodos por nube.

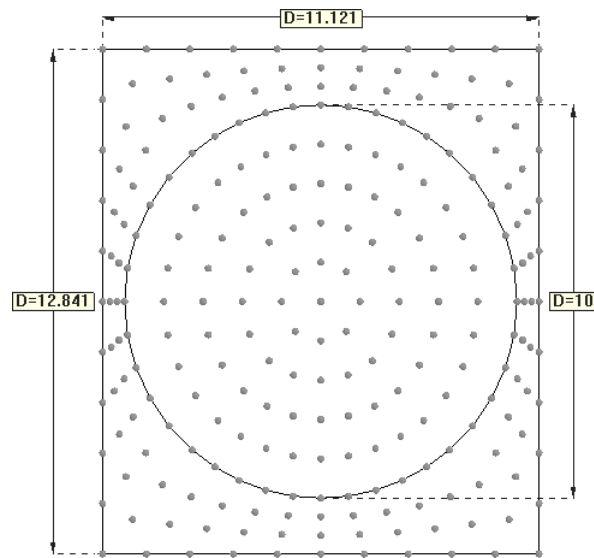


Figura 8.2: Dimensiones y discretización de la célula hexagonal con disposición hexagonal en 281 nodos con 13 nodos por nube.

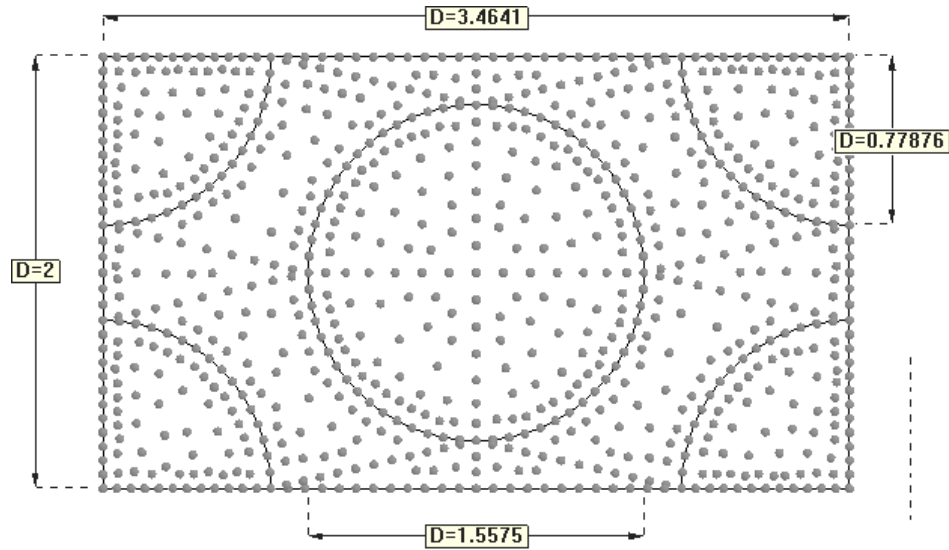


Figura 8.3: Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera con disposición hexagonal en 921 nodos con 15 nodos por nube.

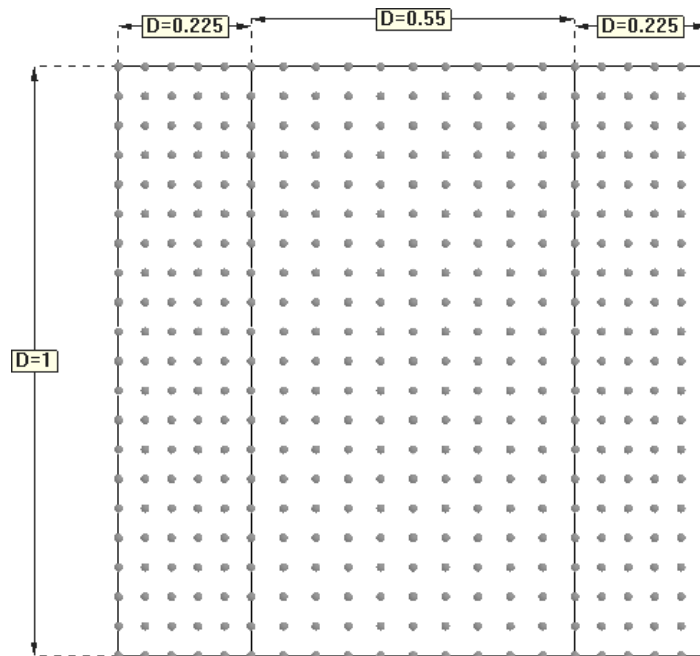


Figura 8.4: Dimensiones y discretización de la célula longitudinal en 483 nodos con 13 nodos por nube.

En (Jansson, 1992) se utilizan las simetrías de la célula para reducir la geometría a un cuarto de su tamaño original con el fin de reducir el costo computacional, aún así la malla para el caso de célula cuadrilátera con disposición cuadrada se utilizan 60 elementos finitos cuadriláteros de 8 nodos. Este trabajo de homogeneización se realiza mediante la teoría de expansión asintótica, y compara los resultados con resultados experimentales obtenidos por el mismo autor. El hecho de que se reduzca la simetría indica que no se establecen condiciones de periodicidad para el cálculo de las propiedades

Tabla 8.1: Propiedades mecánicas de los materiales componentes

Material componente	Módulo elástico E [MPa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	68900	0.32	0.45
Alúmina (fibra)	344500	0.26	0.55

efectivas, sino condiciones homogéneas.

Por su parte (Zalamea et al., 2002) realiza el procedimiento mediante las condiciones de borde periódicas, por lo cual trabaja con la geometría completa, la cual discretiza en 116 elementos finitos cuadriláteros de 8 nodos. Este trabajo se limita a entregar resultados para el caso hexagonal de este ejemplo, pero solo busca obtener el tensor de constantes elásticas homogeneizadas en el plano transversal, por lo cual, para obtener el grueso de variables a comparar, se añaden resultados longitudinales para prever el valor aproximado de las variables calculadas por Zalamea y así poder comparar. Los valores longitudinales obtenidos son muy cercanos para cada trabajo puesto la sencillez del problema longitudinal, por lo cual los resultados obtenidos por Zalamea hubiesen sido muy similares.

Tabla 8.2: Comparación con propiedades homogeneizadas compuesto Aluminio/Alúmina

Trabajo	Tipo de celda	Disposición de fibra	E_1/E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	ν_{12}	ν_{31}	ν_{13}	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]
Presente	Cuadrilátera	Cuadrada	159	220	0.282	0.287	0.207	49.8	-
	Cuadrilátera	Hexagonal	147	220	0.332	0.287	0.192	55.2	-
	Hexagonal	Hexagonal	147	220	0.332	0.287	0.192	54.8	-
Zalamea	Cuadrilátera	Hexagonal	147	220	0.335	0.287	0.191	54.6	-
	Hexagonal	Hexagonal	146	220	0.335	0.287	0.190	54.9	-
Jansson	Cuadrilátera	Cuadrada	159	220	0.283	0.294	0.205	49.3	57.9
	Cuadrilátera	Hexagonal	148	220	0.336	0.281	0.189	54.9	57.3
	Experimento	Aleatoria	150	225	0.31	0.28	0.18	55	58

Los resultados obtenidos por este trabajo y los trabajos previos se resumen en la tabla 8.2. Se puede apreciar que los presentes resultados son bastante similares a los obtenidos por (Zalamea et al., 2002), lo cual garantiza la correcta implementación de la teoría de homogeneización en dos escalas para ambos tipos de célula. A su vez los resultados obtenidos en general concuerdan con los resultados obtenidos por (Jansson, 1992), lo cual indica la compatibilidad entre ambas teorías de homogeneización.

Los resultados presentados provienen de la solución de dos problemas de elasticidad plana desacoplados. El primer problema es de una fibra continua idealizada en el plano longitudinal bajo un estado de tensión plana, a partir de la cual se obtienen las constantes elásticas longitudinales E_3 y ν_{31} . Ambas disposiciones de fibra obtienen los mismos resultados longitudinales, ya que este problema depende mayormente de la proporción entre fibra y matriz y no de la forma en que se distribuyan las fibras (siempre que se mantengan continuas). El segundo problema corresponde a la fibra en el plano transversal bajo un estado de deformación plana, mediante la cual se obtienen las constantes elásticas transversales E_1 , E_2 , ν_{12} y G_{12} . Como cabe esperar, no todos los valores del caso tridimensional pueden ser calculados

numéricamente, ν_{13} puede obtenerse mediante relaciones entre las constantes elásticas obtenidas, mientras que el modulo de corte longitudinal G_{13} no se obtiene satisfactoriamente a través de la idealización longitudinal, al menos mediante el método utilizado. No obstante, esta incógnita es independiente de las demás y no es necesaria para el calculo de las constantes elásticas transversales. Este trabajo se centra en el comportamiento transversal de materiales reforzados con fibra, y el cálculo de las constantes longitudinales solo se justifica para obtener las demás constantes elásticas para su comparación y validación, más no es necesario su cálculo para proceder con la teoría de la homogeneización, puesto que el tensor constitutivo elástico se obtiene de forma directa para su utilización.

Respecto a la discretización de las células, estas son de 483 nodos y 13 nodos por nube para la célula longitudinal, de 281 nodos y 13 nodos por nube para las células cuadrilátera de disposición cuadrada y hexagonal de disposición hexagonal, mientras que la discretización fue de 921 nodos y 15 nodos por nube para la célula cuadrilátera con disposición hexagonal. En este ejemplo se ocupan mas nodos para describir la célula longitudinal, sin embargo estos resultados son triviales en comparación a los longitudinales y se converge con bastantes menos nodos. El costo computacional de usar esta mayor cantidad de nodos no es apreciable. En el caso de las células transversales, se utilizan pocos nodos por nube con el fin de mostrar que aún así se obtienen buenos resultados. En el caso hexagonal, la célula se divide en 6 subdominios; 4 cuartos de fibra, 1 fibra, y la matriz. Cada uno de estos problemas es un problema independiente y debe ser discretizado como tal, por lo tanto, habrían 6 veces mas nodos que en un problemá común, versus las 2 veces que requiere una célula hexagonal. Esto demuestra que las células hexagonales se imponen por sobre las células cuadriláteras para disposiciones hexagonales al ser más sencillas geométricamente y requerir un menor costo computacional. Respecto a los parámetros de la función de ponderación de Gauss utilizados, estos son $k = 0,5$, $c = 0,25$ y $q = 1,1$ para todos los problemas.

8.2. Ejemplo 2: Compuesto Boro/Aluminio

El segundo ejemplo es un material compuesto con matriz de aluminio reforzada con fibras de boro, el cual se ha utilizado varias veces a través de los años para comparar los resultados obtenidos con aquellos presentes en la literatura, tanto de forma analítica (Hashin & Rosen, 1964; Riley & Whitney, 1966; Chamis, 1984), numérica (Sun & Chen, 1991; Sun & Vaidya, 1996; Xia et al., 2003) y experimental (Kenaga et al., 1987). Cabe destacar que los resultados obtenidos por (Hashin & Rosen, 1964) basados en un *método de energía variacional* acotan la solución exacta, y en caso de que ambas cotas coincidan, entonces se obtiene la solución exacta para disposición hexagonal de fibras.

La discretización utilizada para ambas células corresponde a 281 nodos totales agrupados en nubes de 13 nodos (figuras 8.5 y 8.6) y 168 nodos agrupados en nubes de 13 nodos para la célula longitudinal (figura 8.7), mientras que los parámetros de la función de Gauss son los utilizados en el ejemplo anterior.

Tabla 8.3: Propiedades mecánicas de los materiales componentes del compuesto de fibras transversales.

Material componente	Módulo elástico E [MPa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	68300	0.3	0.53
Boro (fibra)	379300	0.1	0.47

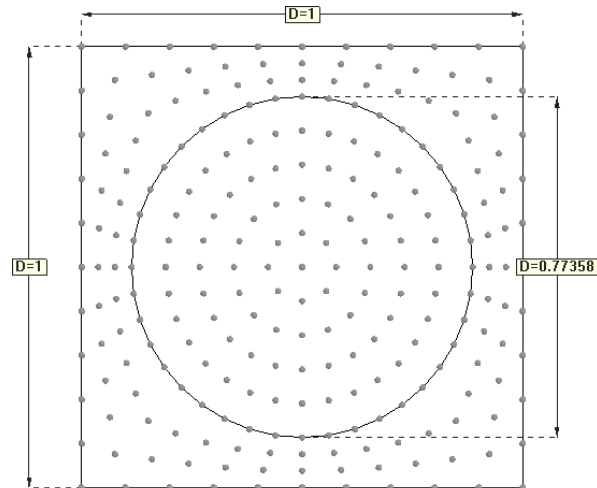


Figura 8.5: Dimensiones y discretización de la célula cuadrilátera en 281 nodos con 13 nodos por nube.

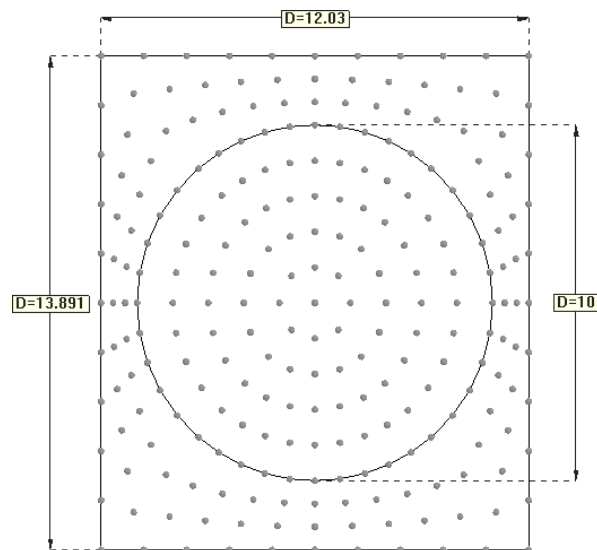


Figura 8.6: Dimensiones y discretización de la célula hexagonal en 281 nodos con 13 nodos por nube.

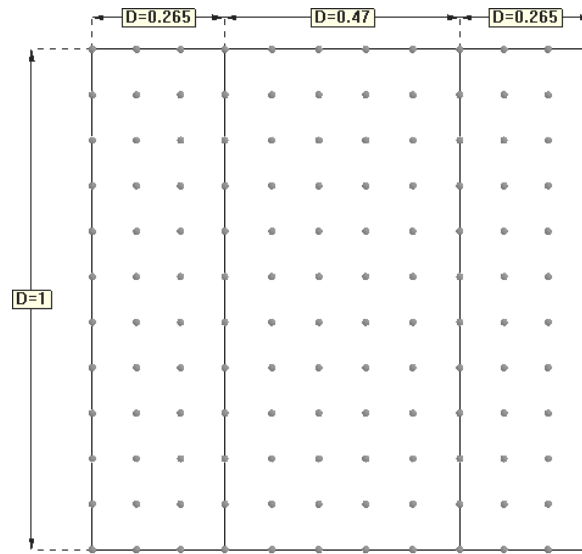


Figura 8.7: Dimensiones y discretización de la célula longitudinal en 168 nodos con 13 nodos por nube.

Tabla 8.4: Comparación con propiedades homogeneizadas en la literatura para compuesto Aluminio/-Boro

Trabajo	Disposición de fibra	E_1/E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	ν_{12}	ν_{31}	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]
Presente	Cuadrada	143	214	0.255	0.206	46.6	-
Xia	Cuadrada	143	214	0.253	0.195	45.7	54.2
Sun & Vaidya	Cuadrada	144	215	0.29	0.19	45.9	57.2
Presente	Hexagonal	135	215	0.291	0.2	52.3	-
Sun & Chen	Hexagonal	135	214	-	0.19	-	51.1
Sun & Vaidya	Hexagonal	137	215	0.34	0.19	52.5	54
Hashin & Rosen	Hexagonal	131.4 - 139.1	215	0.28 - 0.31	0.195	50 - 54.6	53.9
Chamis	Aleatoria	156	214	0.31	0.2	43.6	62.6
Riley & Whitney	Aleatoria	123	215	-	0.19	-	53.9
Kenaga	Aleatoria	140	216	-	0.29	-	52

En general, los resultados obtenidos concuerdan favorablemente con aquellos presentes en la literatura, y pueden mejorar para discretizaciones más finas. Solamente el modulo de Poisson longitudinal muestra una diferencia considerable en todas las predicciones teóricas y numéricas presentadas respecto al resultado experimental, aunque no se descarta que haya sido confundido con el modulo de Poisson transversal. Mas importante, los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo concuerdan muy favorablemente con los últimos estudios presentados en la literatura, de los cuales se espera mayor fiabilidad considerando los avances en los métodos numéricos y la capacidad de procesamiento de los ordenadores. Para el caso de disposición hexagonal, todos los resultados se encontraban dentro de

las cotas entregadas por (Hashin & Rosen, 1964). Es aquí donde se justifica mayormente el estudio de los materiales compuestos mediante métodos numéricos a dos escalas, puesto que los métodos teóricos presentados no son capaces de obtener resultados aceptables para el caso transversal de la fibra, solo (Hashin & Rosen, 1964) ofrece buenos resultados teóricos, aunque estos solo acoten el resultado exacto.

En ambos ejemplos vistos hasta ahora se puede notar que los valores experimentales suelen estar acotados por los valores numéricos de ambos tipos de disposición de fibras, aunque tal hipótesis requiere un estudio mas riguroso.

Capítulo 9

Solución a problemas doble escala

Los resultados obtenidos en la microestructura para la homogeneización del tensor constitutivo elástico demuestran la eficacia y validez del método de puntos finitos para abordar este tipo de problemas. El problema macroscópico resulta bastante más simple que el problema microscópico, por lo cual no hay razón para pensar que el método no se ajusta correctamente para este problema más sencillo. No obstante aún se requiere analizar el comportamiento de materiales compuestos mediante la técnica de homogeneización en dos escalas.

En la literatura son muy escasos los ejemplos con los cuales validar la teoría de la homogeneización, y cuando los hay, generalmente se enfocan en el caso no-lineal que despierta un mayor interés que el caso elástico lineal presentado en esta tesis. Aquí se presentan 3 ejemplos, un ejemplo abordado en (Zalamea et al., 2000, 2002; Oller, 2003), el cual corresponde a un tubo cilíndrico con presión interna para ambas distribuciones de fibra. El ejemplo aborda el problema no-lineal al aplicar 100 Mpa de presión al tubo, pero en el primero de sus incrementos, correspondiente a 10 Mpa, aún se encuentra en un estado de elasticidad lineal que sirve como punto de comparación. Los dos ejemplos restantes buscan validar el método al compararlo con el análisis clásico mediante FEM en el software Ansys. Para esto se lleva al método de homogeneización fuera de su área de comodidad al analizar problemas en que las fibras no son tan pequeñas en comparación al compuesto, como normalmente se requiere.

9.1. Tubo cilíndrico con presión interna

El siguiente ejemplo fue abordado inicialmente en (Ghosh et al., 1996), y luego en (Zalamea et al., 2000), aunque en el primero no se muestra ningún resultado para algún estado de linealidad como en el segundo.

Se trata de un tubo cilíndrico de pared gruesa hecho de un material compuesto de matriz de aluminio reforzado con fibras de alúmina, cuyas propiedades se resumen en la tabla 9.1. Al igual que en (Zalamea et al., 2000) el problema macroscópico se aborda únicamente con un cuarto de la geometría a raíz de las simetrías. Las dimensiones y discretización del problema macroscópico se presentan en la figura 9.1, mientras que sus condiciones de contorno se aprecian en la figura 9.2. En (Zalamea et al., 2000) se discretiza en 60 elementos, pero las células se asocian a puntos de integración, y por ende no es posible

comparar con el resultado microscópico que allí se expone. El tubo es sometido a una presión interna de 10 Mpa en su cara interior, las unidades de las dimensiones del problema macroscópico no son entregadas en los problemas anteriores, aunque se asume que puede estar en milímetros [mm]. Tanto las dimensiones como la discretización de ambos tipos de célula que son utilizados para representar la microestructura del compuesto se resumen en las figuras 9.3 y 9.4, sus unidades son en micrómetros [μm]. Los parámetros de la función de ponderación de Gauss utilizados son $k = 0,5$, $c = 0,25$ y $q = 1,1$ para todos los problemas. Los nodos son agrupados en nubes de 13 nodos para las células y el problema macro. Respecto a esto, en discretizaciones mas densas es preferible aumentar la cantidad de nodos por nube, ya que de mantenerse igual, el área de influencia de las nubes resultantes es muy pequeña y eso conlleva a un alto numero de condicionamiento en la matriz de momentos 3.10, y en consecuencia la solución es inestable. Adicionalmente, el MPF presenta problemas de estabilidad en los contornos por la falta de simetría en sus nubes. Este problema se acentúa con la adición de interfaz entre materiales donde ocurre el mismo problema, sobretodo en aquellas zonas donde la interfaz es cercana al contorno y resulta más complicado aún mantener simetría en las nubes de interpolación. Por esta razón, las discretizaciones y cantidad de nodos por nube en las células suele ser mayor que en problemas con materiales homogéneos.

Tabla 9.1: Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

Material componente	Módulo elástico [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Aluminio (matriz)	69800	0.32	0.6
Alúmina (fibra)	344500	0.26	0.4

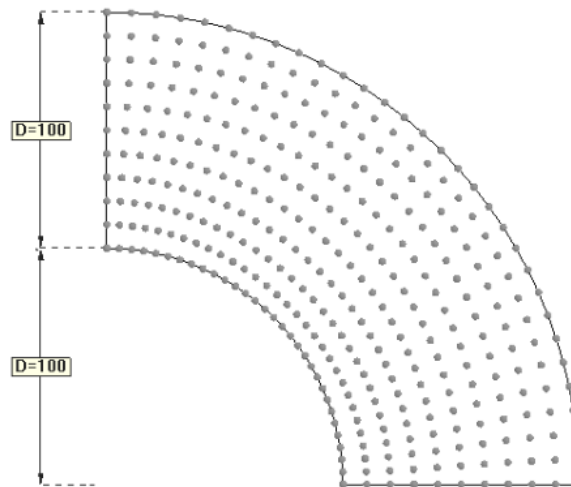


Figura 9.1: Dimensiones del problema macroscópico y discretización del tubo cilíndrico en 341 nodos.

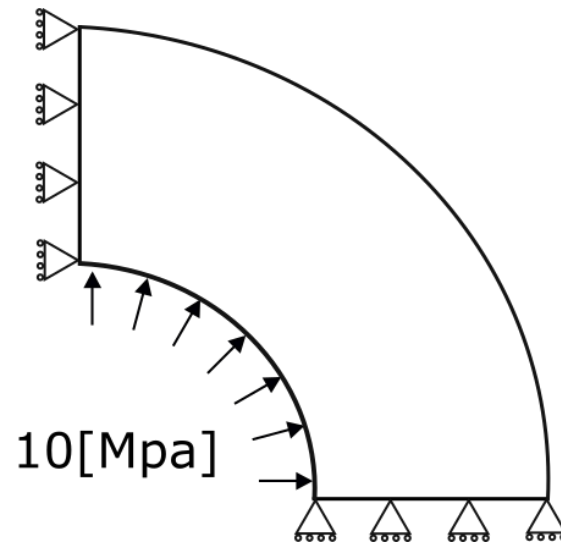


Figura 9.2: Condiciones de contorno a las que se somete la geometría en la escala macroscópica.

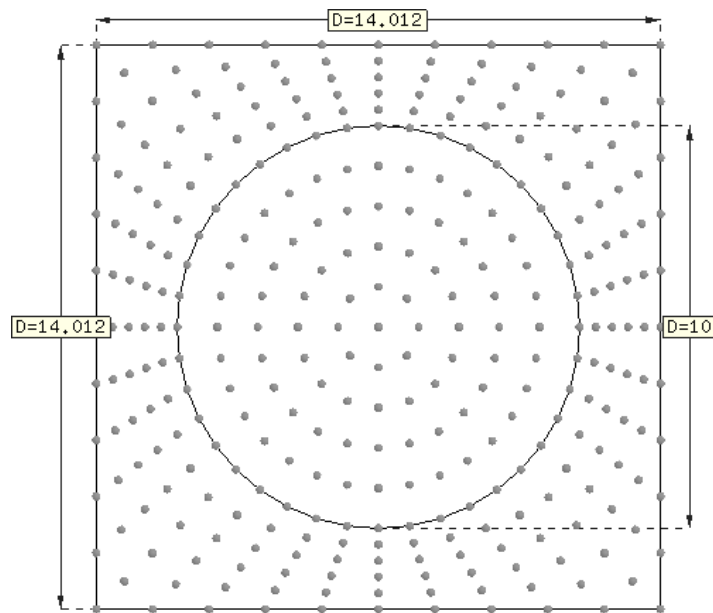


Figura 9.3: Dimensiones de la célula cuadrilátera y discretización en 361 nodos y 13 nodos por nube.

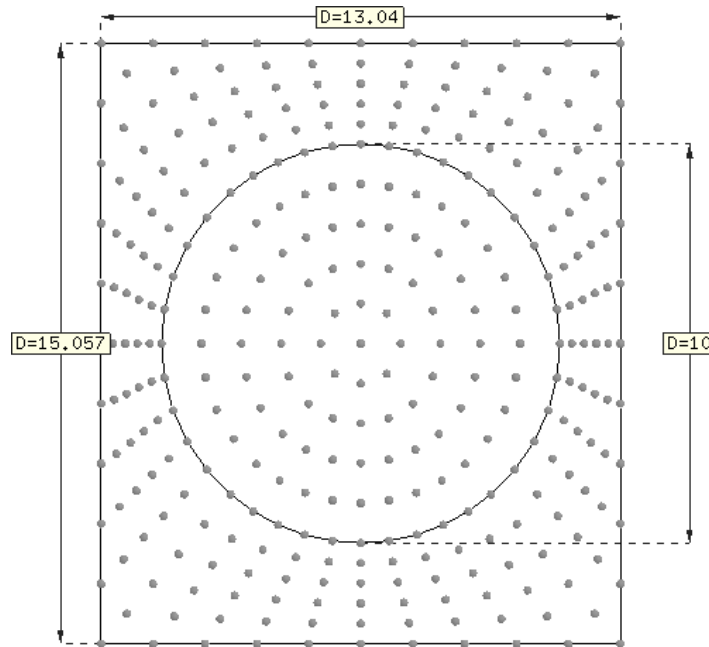


Figura 9.4: Dimensiones de la célula hexagonal y discretización en 361 nodos y 13 nodos por nube.

En (Zalamea et al., 2000) la discretización del problema suele ser gruesa con el objetivo de reducir la carga computacional debido a la forma iterativa del problema no-lineal, y con ello la constante recalculación del tensor constitutivo elástico. Dicha complejidad requiere una paralelización del problema en varios procesadores. Tampoco se ocupan técnicas de alisado para la tensión, con el fin de no alisar las discontinuidades en la línea de interfaz. Para el caso del MPF, las discretizaciones son ligeramente más finas puesto que cada material es un problema independiente, y debido a que la poca simetría en las nubes cerca del contorno e interfaz da poca estabilidad al método. Sin embargo, discretizaciones como las utilizadas son más que suficientes y no significan un costo computacional a considerar, más bien el tiempo de cálculo es una fracción de segundo. Además, MATLAB permite la utilización de ambos procesadores en un ordenador (cálculo en paralelo) común para realizar los cálculos en la microestructura, por lo cual, la resolución de todos los problemas microestructurales y macroestructural para este problema se realiza en cuestión de unos pocos segundos.

Las figura 9.5 muestra los resultados del esfuerzo para el criterio de Von Mises. Los puntos señalados corresponden a 3 células cualquiera representativas de los estados internos de la microestructura a lo largo del compuesto, lo cual puede apreciarse en las figuras 9.6, 9.7 y 9.8 que muestran sus resultados para el criterio de Von Mises. La célula 294 es la más cercana al caso microestructural de estudio en (Zalamea et al., 2000), el cual corresponde a un punto de integración. Los resultados obtenidos son similares y corresponden a aquellos obtenidos por Zalamea, tanto para el problema macroestructural como para la célula ya mencionada.

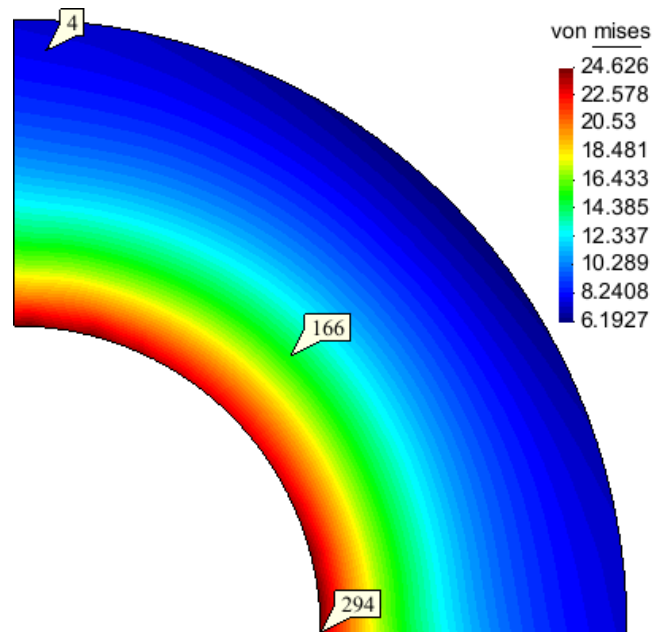


Figura 9.5: Resultados de la tensión Von Mises para el problema macroestructural cuya microestructura posee disposición cuadrada de fibras. Los puntos señalados corresponden a las células que se muestran más abajo.

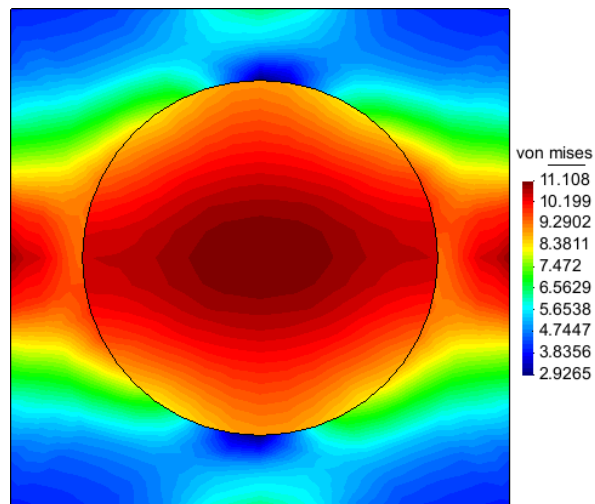


Figura 9.6: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 4.

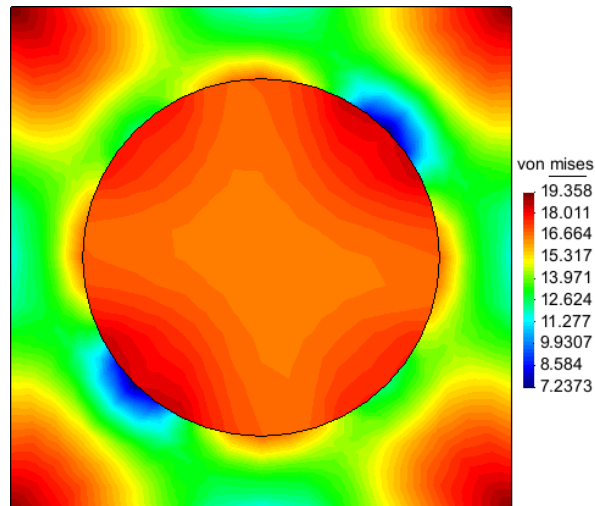


Figura 9.7: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 166.

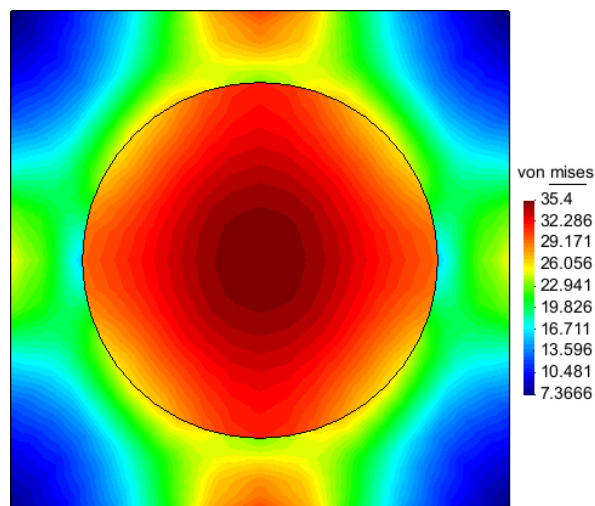


Figura 9.8: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula cuadrilátera número 294.

Los resultados expuestos hasta ahora están en su estado natural, con cada uno con su propio rango de valores. No obstante, resulta más interesante apreciar los resultados expuestos anteriormente bajo un mismo rango. Este rango de valores se establece mediante los valores mínimos y máximos entre todos los problemas de la microestructura y macroestructura resueltos. La figura 9.9 contrasta los resultados de los 4 problemas de estudio, donde el problema macro se ve más descolorido que en su forma original, mostrando que los valores máximos y mínimos del problema global se encuentran a nivel microestructural. Algunas células lucen colores más fríos puesto que sus valores varían dentro de un rango de cargas menores, mientras que otras poseen colores más cálidos cuando sus valores varían en rangos de cargas con mayor sollicitación.

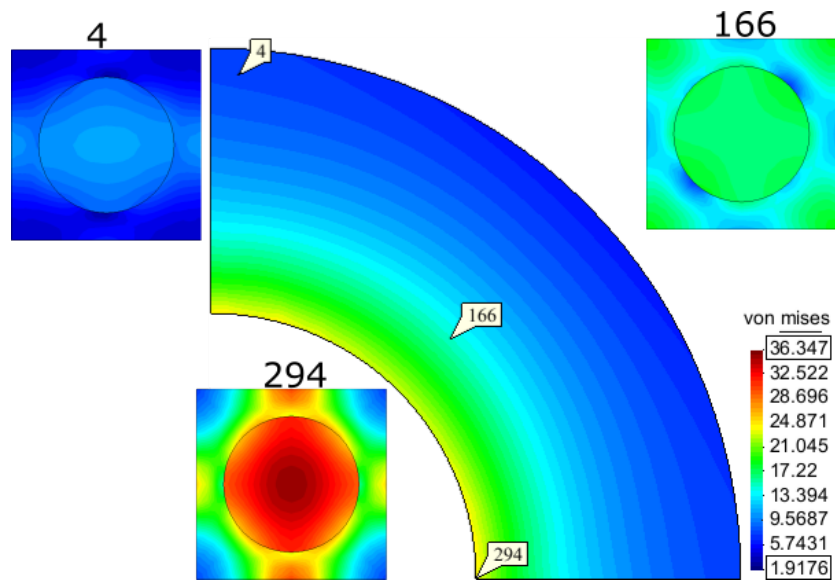


Figura 9.9: Resultados comparativos de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural y las 3 células cuadriláteras de estudio.

En cuanto a los resultados para el caso hexagonal, la figura 9.10 representa los resultados de la tensión obtenidos para el criterio de Von Mises, señalando a su vez las células de estudio. En las figuras 9.11, 9.12 y 9.13 se muestran los mismos resultados para las 3 células de estudio elegidas para este caso. De igual forma que en el caso anterior, la célula 294 es un punto de referencia al trabajo de Zalamea, aunque esta vez se nota una mayor diferencia que ratifica que no son células homólogas, sino solo cercanas. Los resultados obtenidos son similares y corresponden con aquellos obtenidos por Zalamea, tanto para el problema macroestructural como para el problema microestructural.

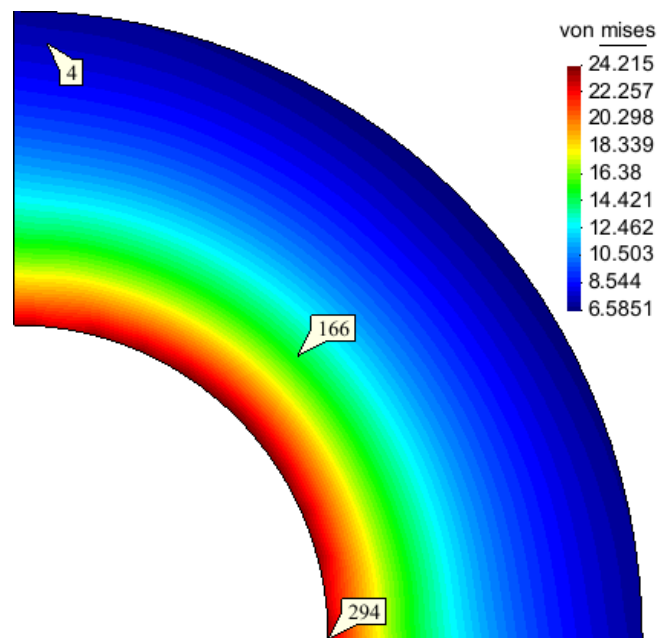


Figura 9.10: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural con microestructura de disposición hexagonal de fibras. Los puntos señalados corresponden a las células que se muestran más abajo.

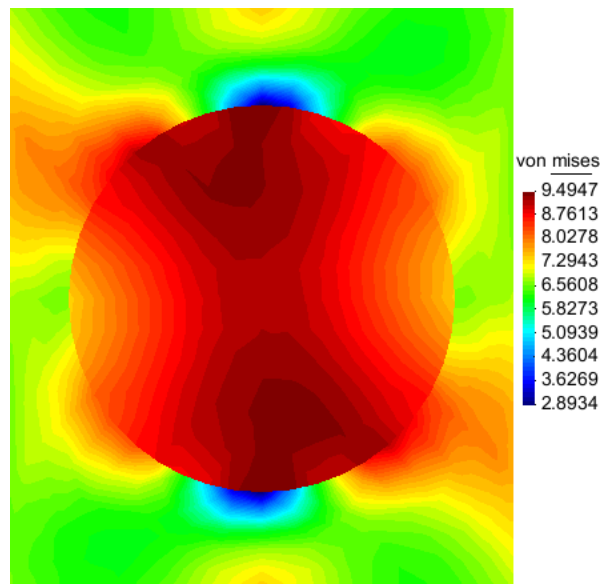


Figura 9.11: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 4.

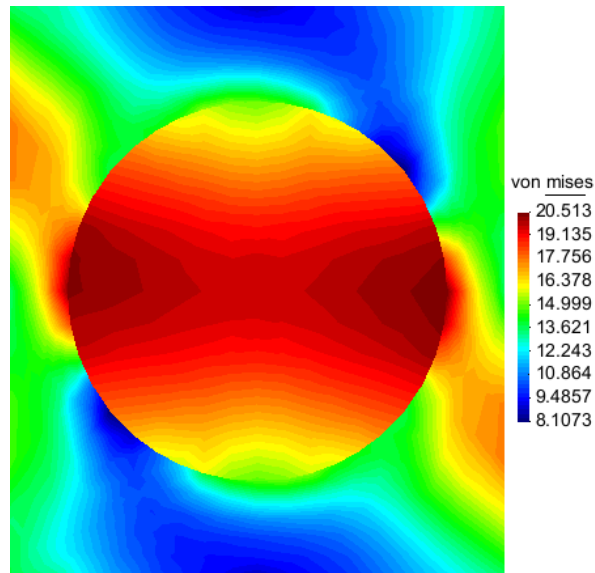


Figura 9.12: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 166.

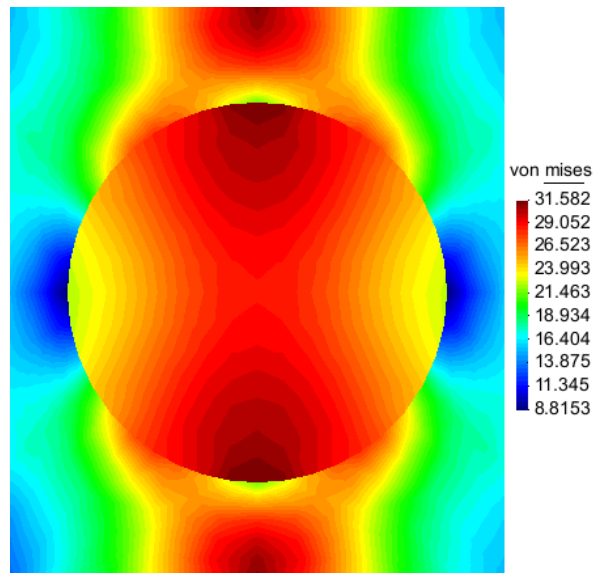


Figura 9.13: Resultados de la tensión de Von Mises para el problema microestructural de la célula hexagonal número 294.

Nuevamente, para establecer el contraste general entre los resultados obtenidos para las 3 células elegidas de la microestructura y el problema macroestructural, se reúnen todos los resultados bajo el rango global en que varían todos los resultados de este problema, como muestra la figura 9.14.

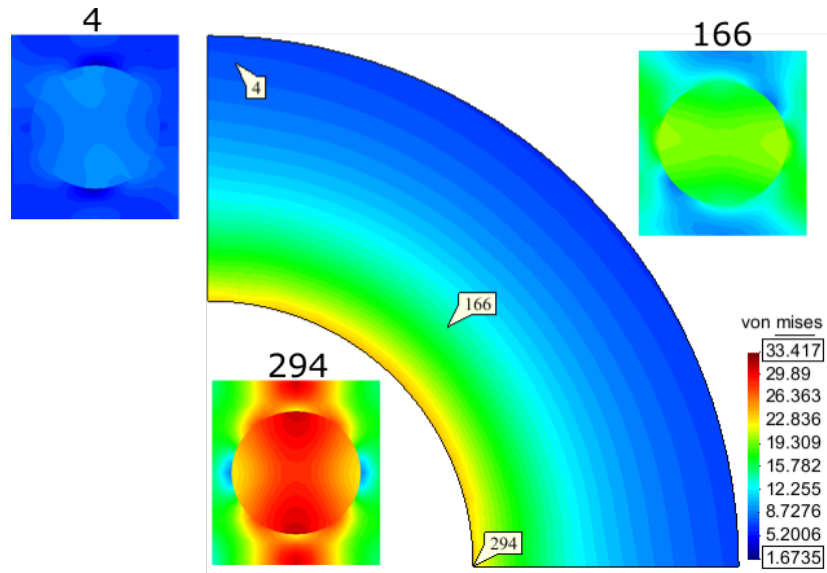


Figura 9.14: Resultados comparativos de la tensión de Von Mises para el problema macroestructural y las 3 células hexagonales de estudio.

Ambos ejemplos vistos hasta ahora se mantienen en un rango de valores similar a pesar de usar distintas disposiciones de fibra en la microestructura, lo cual implica que el caso real con disposición aleatoria de fibras debe estar en un rango similar de valores. Estos ejemplos a su vez constatan la importancia del estudio de la microestructura en problemas de este tipo, puesto que a pesar que estos materiales puedan parecer homogéneos en la escala macroscópica, es en la escala microscópica donde se encuentran las mayores solicitaciones y donde puede ocurrir la falla.

9.2. Placa con fibras transversales, disposición cuadrada de fibras

Ante la ausencia de ejemplos en la literatura con los cuales validar la teoría de la homogeneización para el caso elástico lineal, se ha procedido a diseñar ejemplos que nos permitan comparar la teoría de la homogeneización en dos escalas con la forma estándar en una escala. Por supuesto, los ejemplos que se pueden modelar de la forma estándar están lejos de tener relación de tamaño entre célula y compuesto para los cuales la teoría de la homogeneización ha sido formulada. Debido a que en este nivel las fibras no son tan pequeñas en relación al compuesto para asumir periodicidad local, se trabaja con condiciones de borde que permitan que el cuerpo a nivel macroscópico tenga un valor constante en la tensión, y todas las células presenten el mismo estado de carga para así emular la periodicidad.

El primer ejemplo es una placa cuadrada correspondiente a un compuesto de matriz resina reforzada con fibras de vidrio. La placa está compuesta por 49 células cuadradas (cuyo lado mide 1 [unidad]) de disposición cuadrada (7×7) como señala la su modelo en la figura 9.15. Esta placa está sometida a una deformación vertical prescrita de 10^{-3} [unidad] en el contorno superior, contornos laterales libres y desplazamiento vertical restringido en el contorno inferior, como muestra la figura 9.16. Las

propiedades del compuesto se resumen en la tabla 9.2.

Este modelo es resuelto mediante la teoría de homogeneización en dos escalas presentada en este trabajo, y mediante el método de elementos finitos con el software ANSYS 15.0 para la forma estándar en una escala, con el fin de comparar los resultados que se obtengan por procedimientos y métodos distintos.

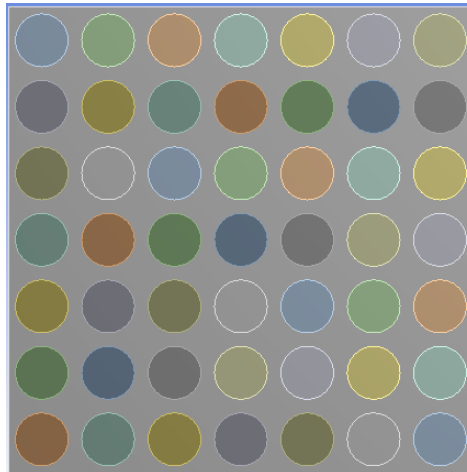


Figura 9.15: Geometría de la placa en Ansys, correspondiente a una placa compuesta de un arreglo 7×7 fibras cuadradas.

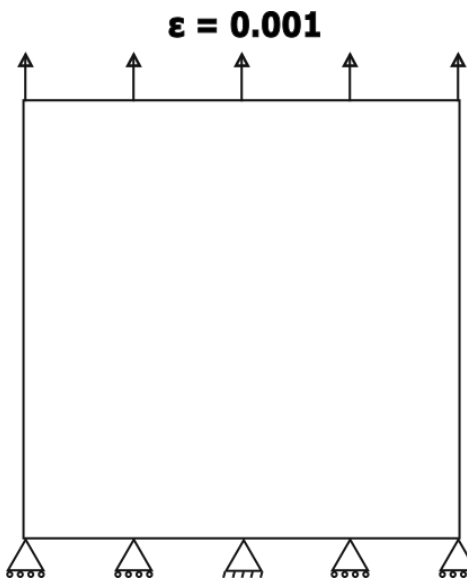


Figura 9.16: Condiciones de contorno para el caso de tracción.

El mallado del modelo en ANSYS se presenta en la figura 9.17. Se ha utilizado la malla más densa posible debido a la complejidad de la geometría y a la necesidad de contar con un resultado convergente como punto de comparación. Debido a la densidad de la malla utilizada, se muestra un acercamiento para su correcta apreciación, cosa que no es posible a escala normal. En cuanto al modelo resuelto

Tabla 9.2: Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

Material componente	Módulo elástico [Mpa]	Módulo de Poisson ν	Proporción
Resina (matriz)	4000	0.34	0.5
Fibra de vidrio (fibra)	84000	0.22	0.5

mediante la teoría de la homogeneización en el presente trabajo, se presentan resultados para 4 discretizaciones distintas. La discretización utilizada a nivel macro es la misma para los 4 problemas y se presenta en la figura 9.18. La geometría de la célula utilizada se presenta en la figura 9.19.

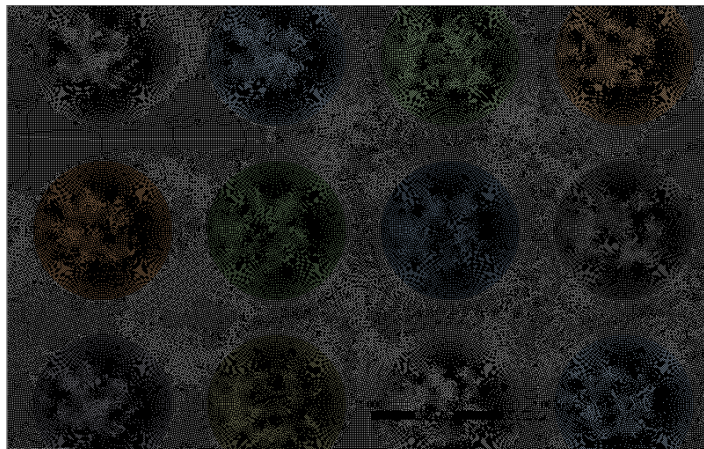


Figura 9.17: Mallado de la geometría en Ansys, correspondiente a 650732 elementos y 1977639 nodos.

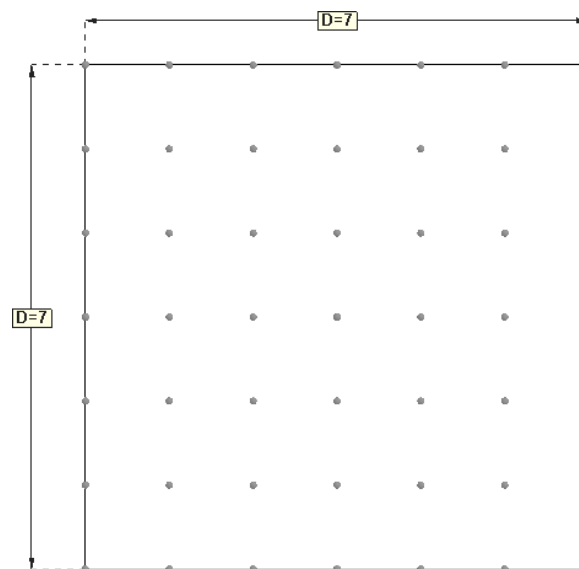


Figura 9.18: Geometría y discretización de la macroestructura de la placa en 49 nodos.

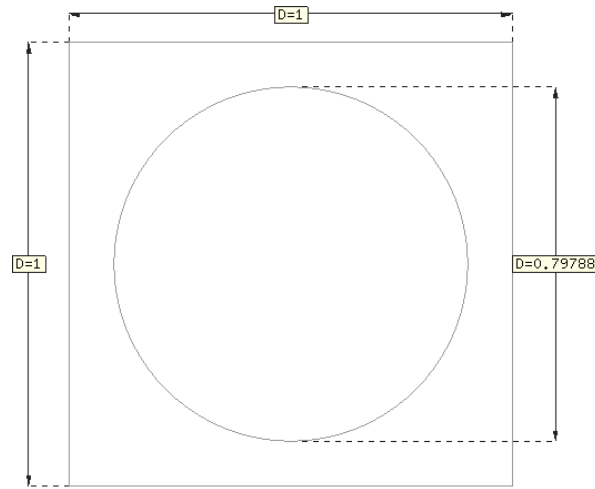


Figura 9.19: Geometría y discretización de la célula cuadrilátera representativa del compuesto en 3441 nodos.

Como se aprecia en la figura 9.20 del modelo en ANSYS para la tensión de Von Mises, las células del contorno se ven afectadas por las condiciones de contorno, y no siguen el mismo patrón que aquellas células interiores rodeadas completamente de otras células, lo cual es la base esencial de las condiciones de periodicidad en la teoría de la homogeneización. Estos efectos serían despreciables si la célula y el compuesto estuviesen en escalas de distinto orden de magnitud como establece la teoría de homogeneización.

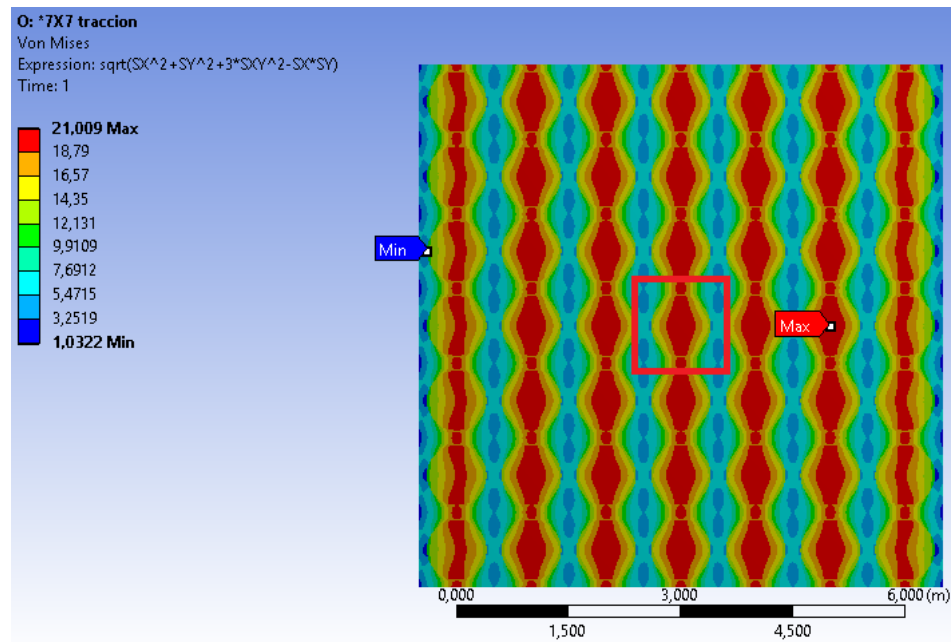


Figura 9.20: Tensión Von Mises para el modelo en Ansys. En el cuadro rojo se señala la célula de estudio.

El rango de valores para la tensión de Von Mises entregado por ANSYS no es representativo, puesto que

el valor mínimo ocurre en una de las células del contorno que no siguen un comportamiento periódico. Por otra parte, del principio de Saint-Venant¹ se puede extraer que los efectos de las condiciones de contorno se disipan para puntos lo suficientemente alejados de la aplicación de la carga. Por lo cual, las células menos afectadas por las condiciones de contorno (y que siguen un comportamiento periódico) son aquellas que se ubican al centro. Es por esto que la célula central (señalada en la figura 9.20) la utilizada para comparar sus valores máximo y mínimo con los obtenidos por la misma célula en el presente trabajo. Los resultados para esta célula en particular se presentan en la figura 9.21.

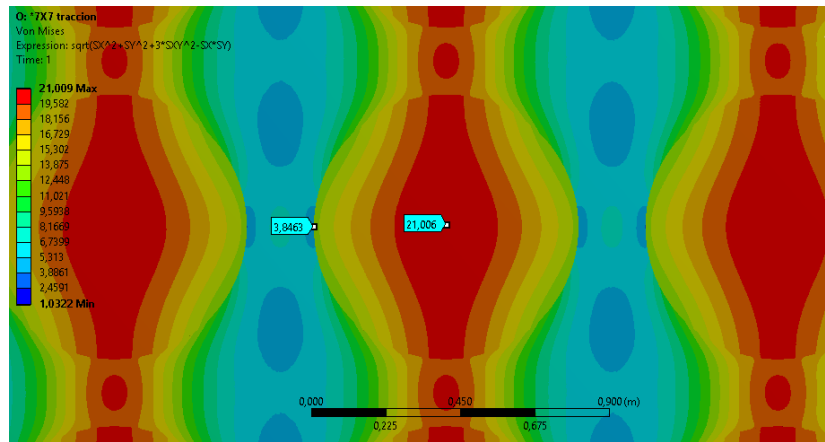


Figura 9.21: Tensión Von Mises para la célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 3.8443, valor máximo: 21.006.

En cuanto a la teoría de la homogeneización, en la figura 9.22 se presentan los 4 problemas con sus distintas discretizaciones en 145, 361, 921 y 3441 nodos con sus respectivos resultados macro y micro para la tensión de Von Mises. La última discretización es mas densa con el fin de contar con un resultado cerca de la convergencia como sucede en el modelo en una escala. Los nodos son agrupados en nubes de 13 nodos para todos los modelos macro y micro, excepto el modelo de 3441 nodos que posee 17 nodos por nube debido a la discretización más densa. Los parámetros de la función de ponderación de Gauss son $k = 0,5$, $c = 0,25$ y $q = 1,1$. Los resultados obtenidos mediante la teoría de homogeneización están cerca del rango (máximos y mínimos) del modelo en una escala ya con las discretizaciones mas gruesas. Los resultados de la tensión de Von Mises para la macroestructura son uniformes en cada modelo, por lo cual cada célula presenta el mismo estado tensional. Como los campos macroscópicos son el promedio de los campos microscópicos, estos sirven como un indicador de que tan bien se distribuye la tensión dentro de la célula en general. Se observa una tendencia fluctuante en los resultados camino a la convergencia, en cuanto a que los resultados del modelo a) con la discretización más gruesa se acercan mejor que el modelo b) al modelo d) con la discretización más fina. Los valores máximo y mínimo del modelo d) se aproximan con 3 dígitos a los del modelo en una escala.

Los resultados obtenidos por el modelo en una escala fueron exportados a MATLAB, e interpolados en una malla de 5000×5000 nodos. En este interpolante se evaluaron los nodos pertenecientes a cada

¹En el contexto de teoría de la elasticidad, el principio de Saint-Venant establece que las diferencias existentes entre dos sistemas con cargas estáticamente equivalentes pero con distinta distribución, se disipan en puntos suficientemente alejados del contorno. En ingeniería esto permite reemplazar complicadas condiciones de borde por otras más sencillas de implementar y resolver.

modelo, y se compararon con los resultados obtenidos por homogeneización como muestra la tabla 9.3. Se puede observar que el error relativo medio es bastante pequeño en cada modelo, especialmente en el modelo con discretización más fina, lo cual indica resultados muy favorables. El costo computacional del modelo en una escala es totalmente superior al del modelo con homogeneización, y puesto que solo contiene 49 fibras, da un indicio de la imposibilidad de resolver problemas para los cuales la teoría de la homogeneización ha sido formulada, cuya cantidad de fibras por modelo iría fácilmente de miles a millones.

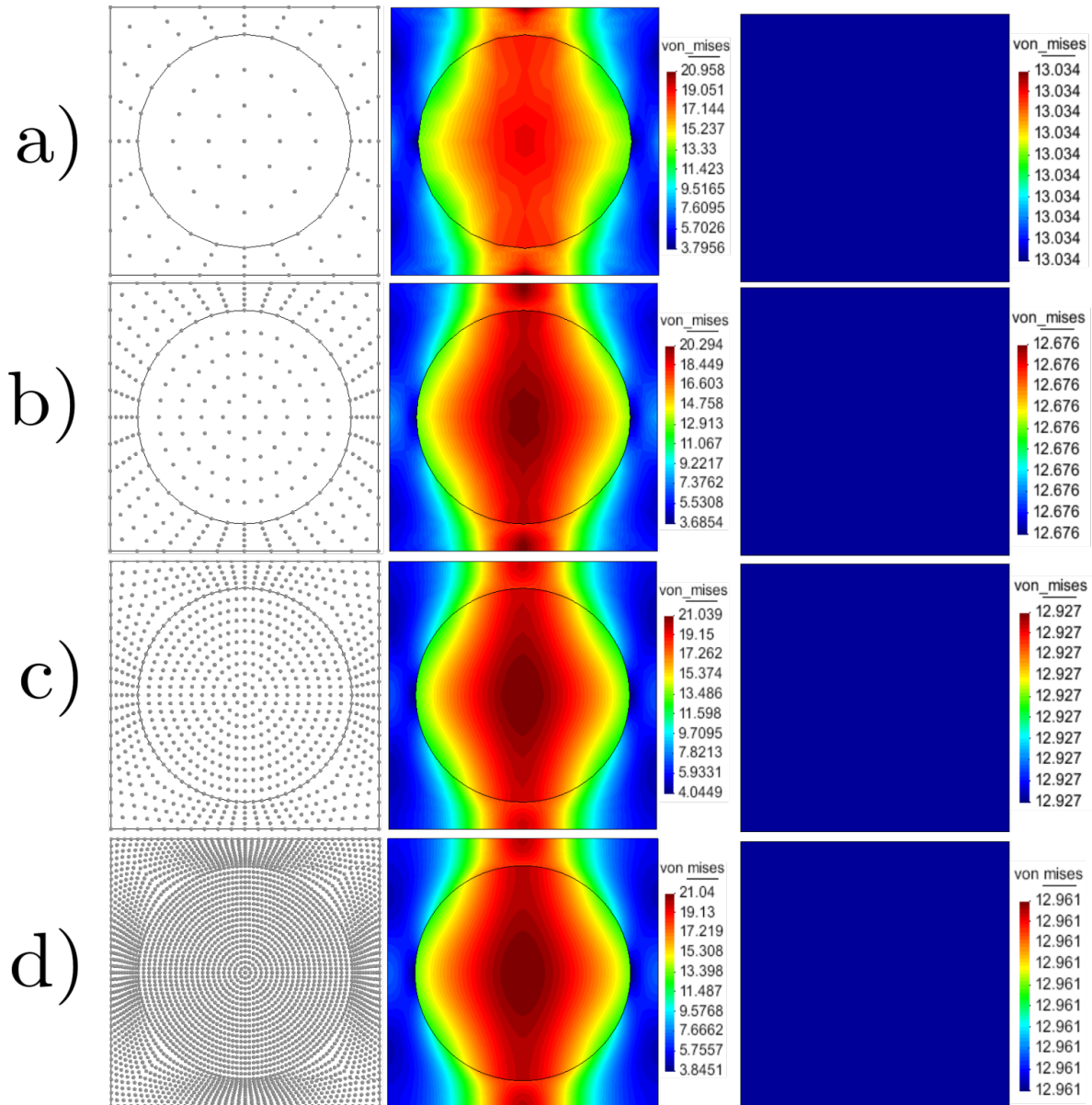


Figura 9.22: Compuesto con distribución cuadrilátera de fibras sometido a tracción simple. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.

En el segundo caso para el mismo problema se analiza la placa sometida a esfuerzo cortante, como

Tabla 9.3: Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 7×7 en estado de tracción vertical.

Nodos	Error relativo máximo	Error relativo medio
145	14.7 %	5.36 %
361	9.77 %	3.24 %
921	6.79 %	1.93 %
3441	2.19 %	0.30 %

se presenta en la figura 9.23. La geometría y mallado se conservan del caso anterior. En cuanto a los resultados de la tensión de Von Mises se presentan en la figura 9.24 para el modelo en una escala, mientras que un acercamiento para los valores en la célula central se presentan en la figura 9.25. Los mismos resultados se presentan para los 4 modelos con homogeneización en la figura 9.26. Los resultados coinciden con el modelo en una escala, aunque esta vez con mayor dificultad como muestra la tabla 9.4. El error del modelo de 921 nodos es mayor que el de 361 nodos para este caso. Esto indica claramente que distintos modelos convergen de distinta forma, que no siempre más nodos significan mayor exactitud, y por ende, es importante realizar un análisis de convergencia.

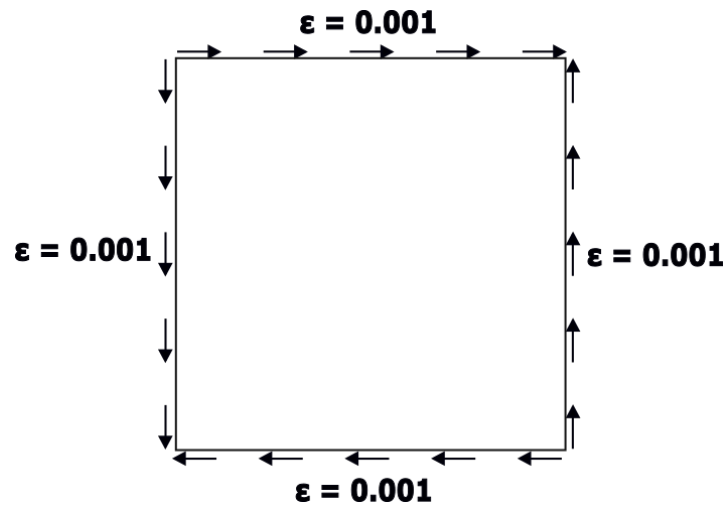


Figura 9.23: Condiciones de contorno para el caso de esfuerzo cortante.

Tabla 9.4: Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 7×7 en estado de corte.

Nodos	Error relativo máximo	Error relativo medio
145	24.5 %	7.07 %
361	7.96 %	2.00 %
921	25.3 %	3.83 %
3441	2.15 %	0.79 %

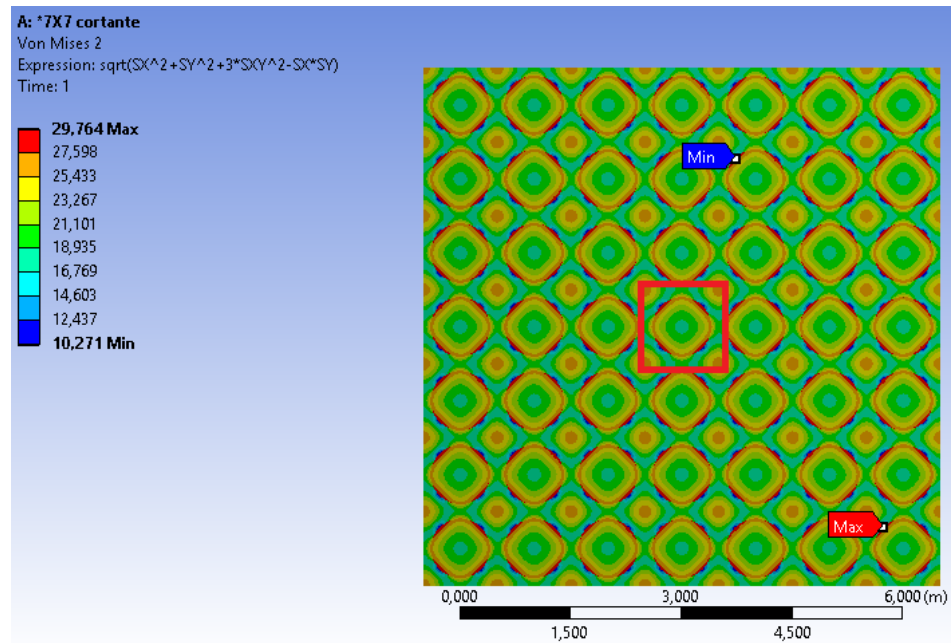


Figura 9.24: Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de esfuerzo cortante. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.

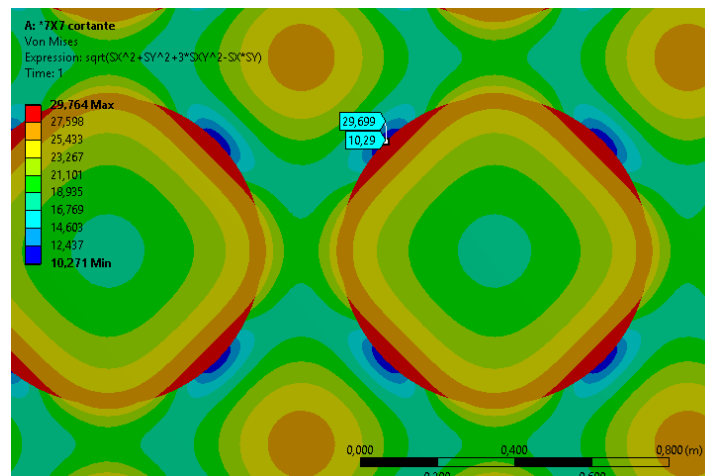


Figura 9.25: Resultado de la tensión de Von Mises para la célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 10.29, valor máximo: 29.699.

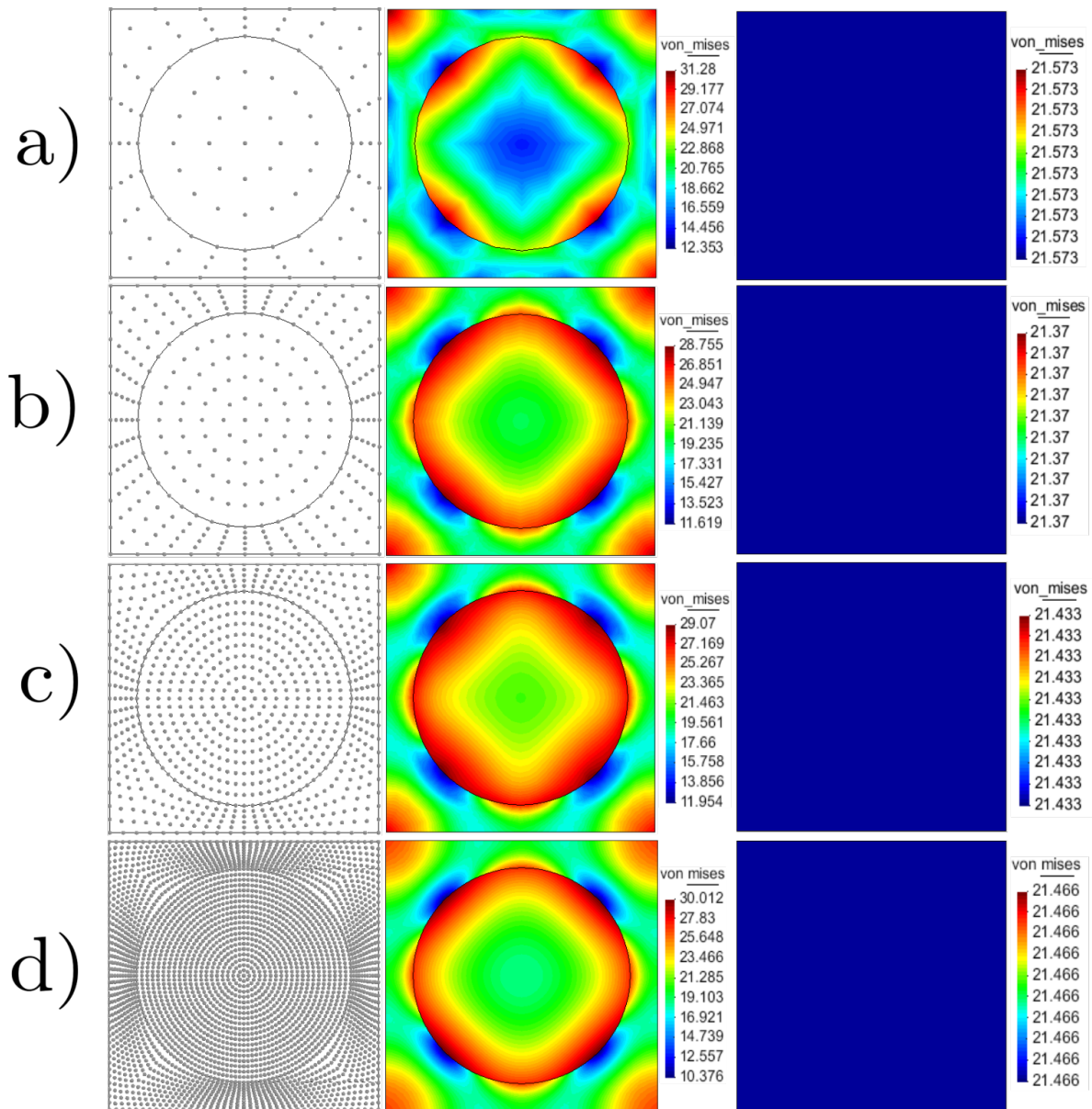


Figura 9.26: Compuesto con distribución cuadrilátera de fibras sometido a esfuerzo cortante. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.

9.3. Placa con fibras transversales, disposición hexagonal de fibras

Siguiendo la pauta del ejemplo anterior, esta vez se procede a evaluar los resultados para un material compuesto con disposición hexagonal de fibras. Como este es un caso más complejo, se trabaja con un modelo de placa cuadrada con 14×14 fibras cuadradas, como se señala en la figura 9.27, del modelo

en Ansys. Un acercamiento al mallado de la figura se muestra en la figura 9.28.

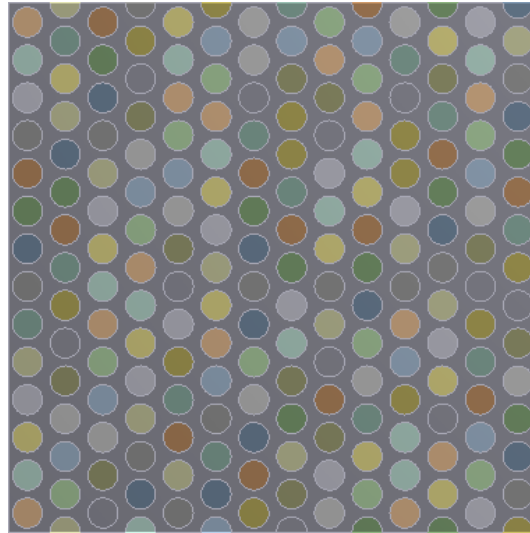


Figura 9.27: Geometría de la placa en Ansys, correspondiente a una placa compuesta de un arreglo 14×14 fibras cuadradas.

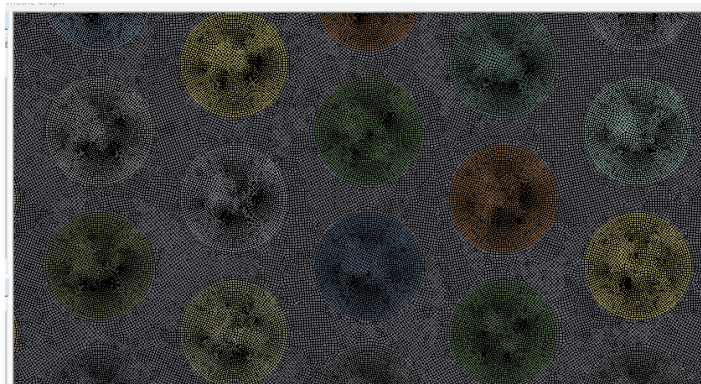


Figura 9.28: Mallado de la geometría en Ansys, correspondiente a 730607 elementos y 2239718 nodos.

Tanto las condiciones de borde para ambos casos, como las propiedades de los materiales constituyentes son los mismos señalados en las figuras 9.16 y 9.23, y la tabla 9.2 del ejemplo anterior. La figura 9.29 muestra la geometría y discretización para la macroestructura, mientras que las dimensiones de la célula son las mismas del ejemplo 9.19. Se analizan 4 modelos con diferentes discretizaciones (145, 361, 921 y 3441). Los nodos son agrupados en nubes de 13 y 15 puntos para la macroestructura y la microestructura respectivamente, mientras que los parámetros de la función de ponderación de Gauss son $k = 0, 5$, $c = 0, 25$ y $q = 1, 1$.

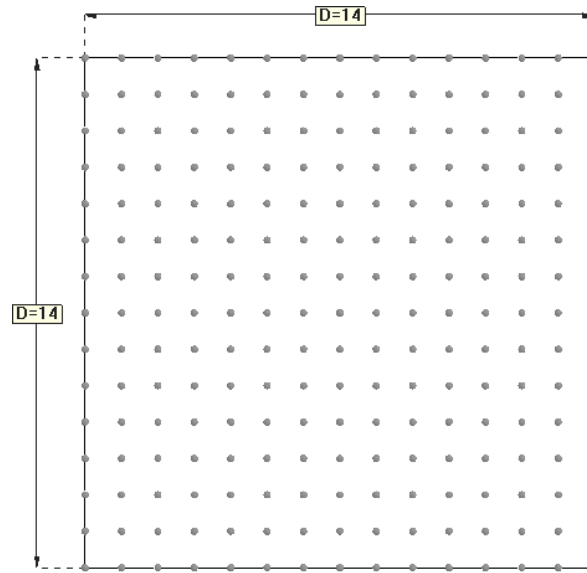


Figura 9.29: Geometría y discretización de la macroestructura de la placa en 196 nodos.

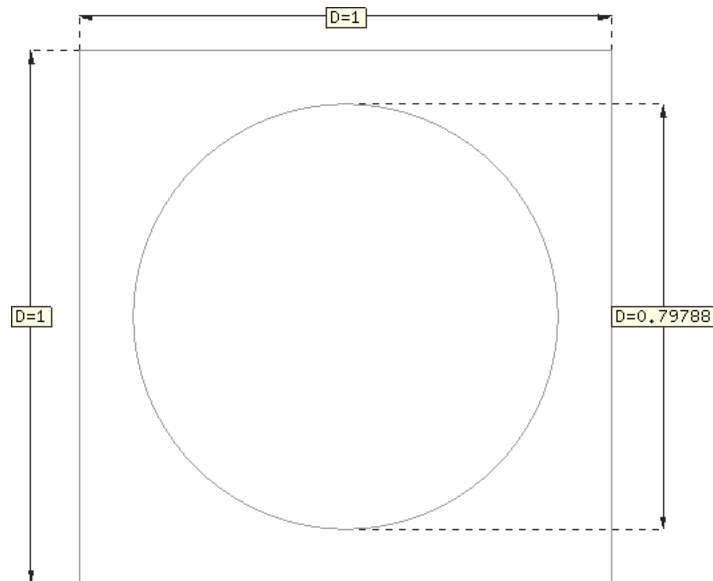


Figura 9.30: Geometría y discretización de la célula cuadrilátera del compuesto en 3441 nodos.

Los resultados para la tensión de Von Mises obtenidos por el modelo en una escala se presentan en la figuras 9.31 y 9.32, mientras que los resultados obtenidos mediante homogeneización para los 4 modelos se presentan en la figura 9.33, que presenta la tensión de Von Mises en la macroestructura y la microestructura, para 4 diferentes discretizaciones. Como muestra la tabla 9.5, los resultados nuevamente coinciden, aunque esta vez un arreglo de 7×7 células fue insuficiente para generar un modelo de referencia adecuado, y las discretizaciones mas gruesas muestran grandes errores que se reducen rápidamente al utilizar una mayor densidad de nodos. En desmedro, la malla utilizada en la modelación en ANSYS fue de menor densidad debido a que la cantidad de información generada superaba la memoria disponible.

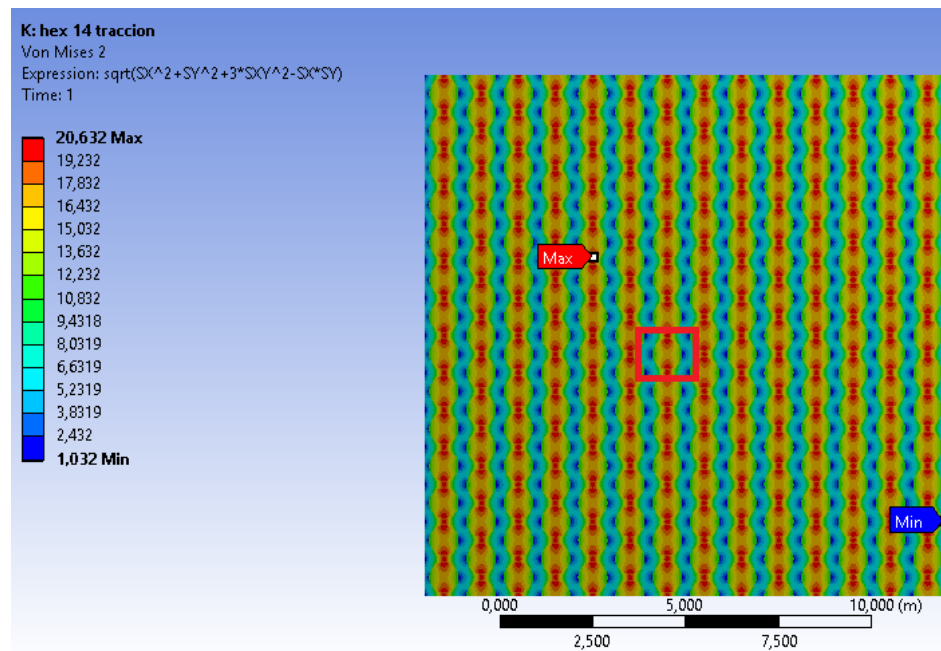


Figura 9.31: Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de tracción vertical. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.

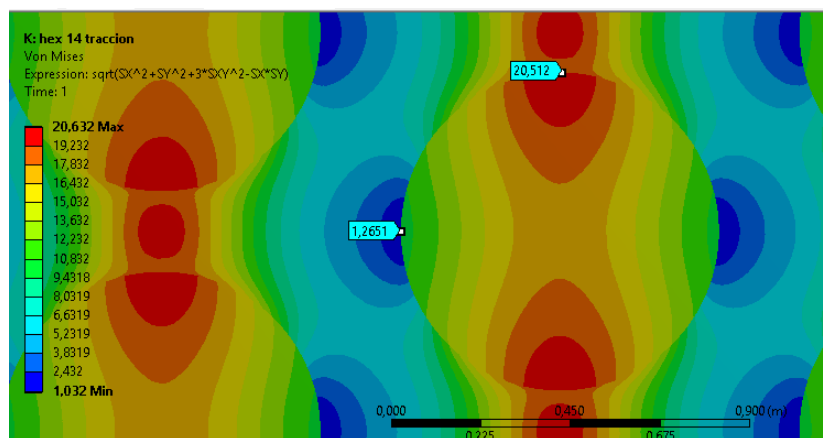


Figura 9.32: Resultado de la tensión de Von Mises para una célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 1.2651, valor máximo: 20.512.

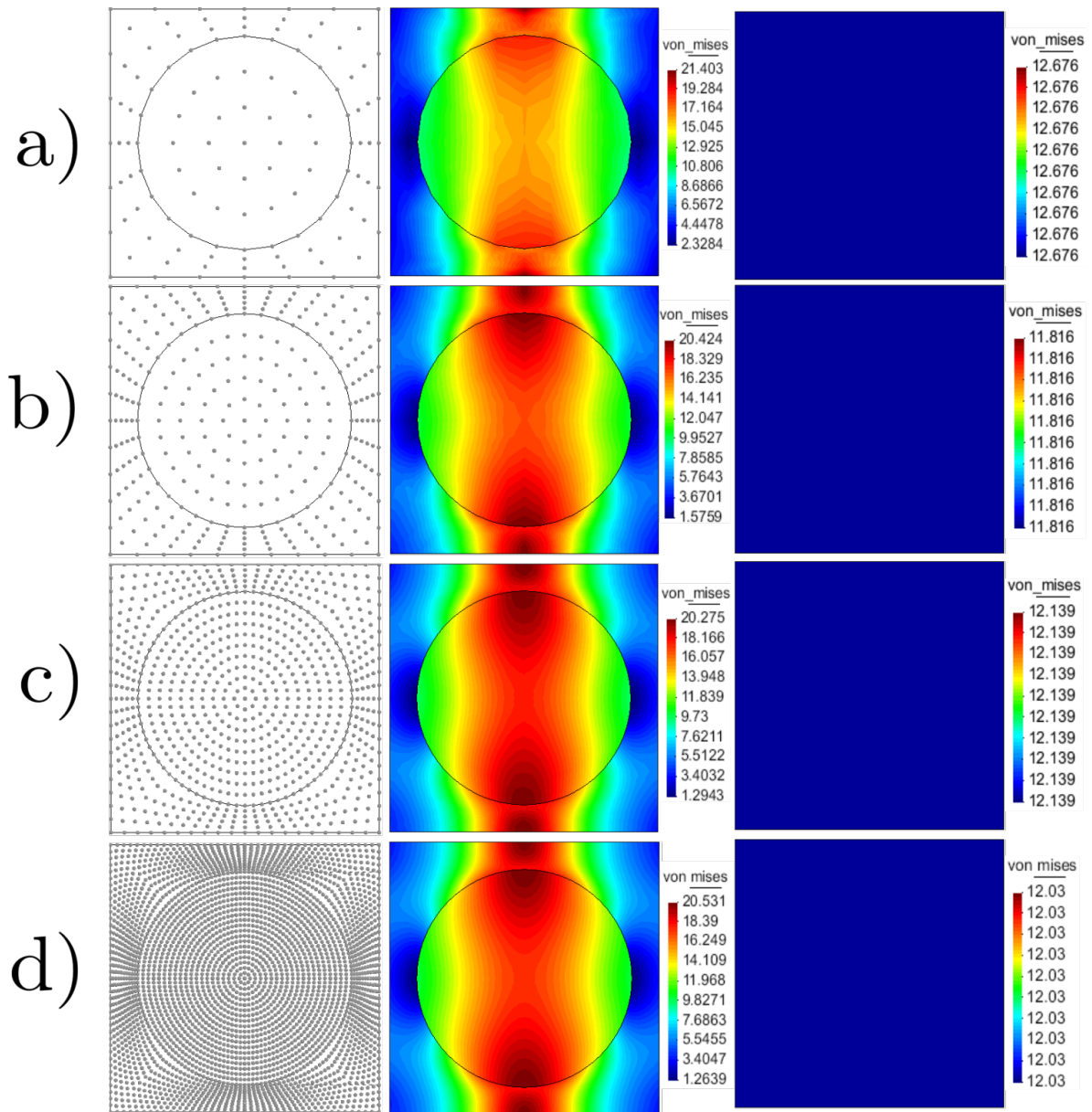


Figura 9.33: Compuesto con distribución hexagonal de fibras sometido a tensión vertical. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.

En cuanto a los resultados para el segundo caso de estado de esfuerzo cortante, los resultados del modelo en una escala se presentan en las figuras 9.34 y 9.35, mientras que los resultados obtenidos mediante homogeneización se presentan en la figura 9.36.

Tabla 9.5: Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 14×14 en estado de tracción vertical.

Nodos	Error relativo máximo	Error relativo medio
145	72.8 %	12.5 %
361	25.4 %	2.27 %
921	8.94 %	2.13 %
3441	2.85 %	0.53 %

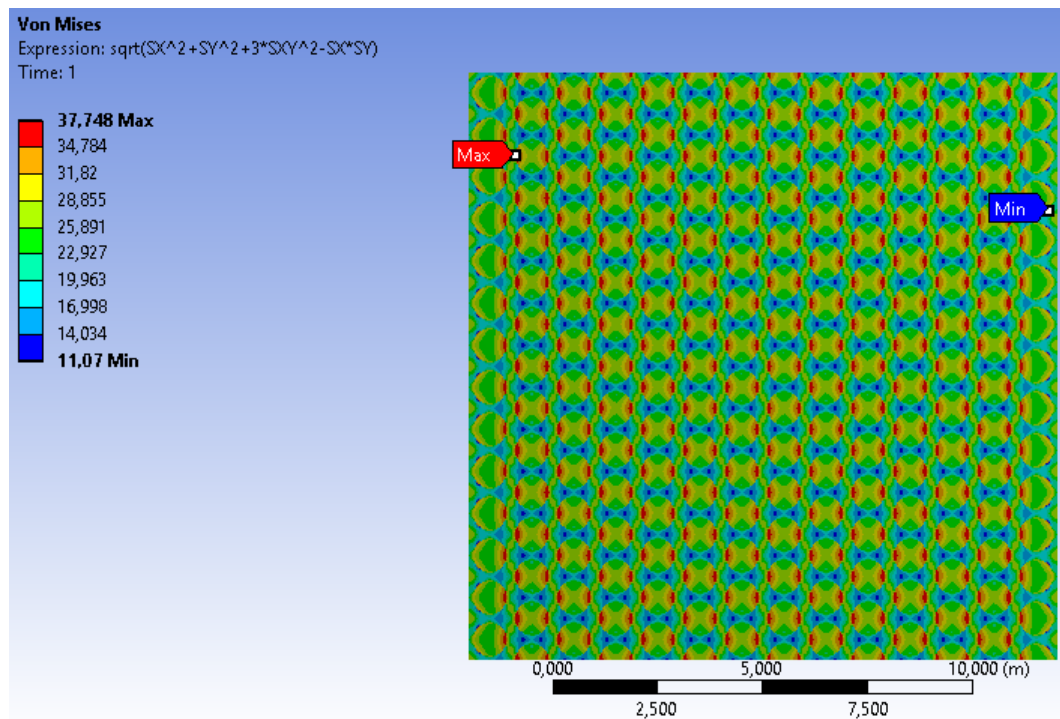


Figura 9.34: Resultado de la tensión de Von Mises para el modelo en ANSYS del caso de esfuerzo cortante. En del cuadro rojo se señala la célula de estudio.

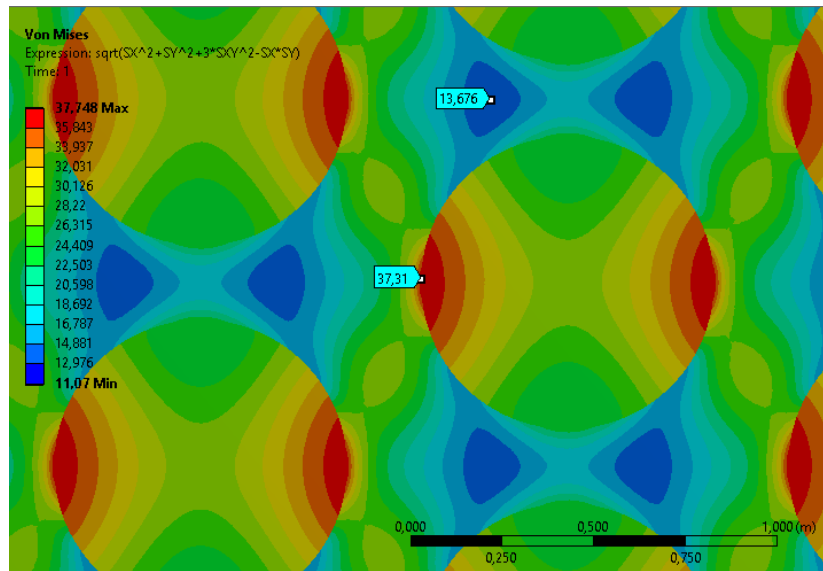


Figura 9.35: Resultado de la tensión de Von Mises para una célula central del modelo en Ansys. Valor mínimo: 13.676, valor máximo: 37.31.

Tabla 9.6: Error de los modelos de homogeneización respecto al modelo en una escala. Placa 14×14 en estado de corte.

Nodos	Error relativo máximo	Error relativo medio
145	17.1 %	5.51 %
361	8.44 %	2.37 %
921	10.6 %	4.21 %
3441	3.98 %	1.75 %

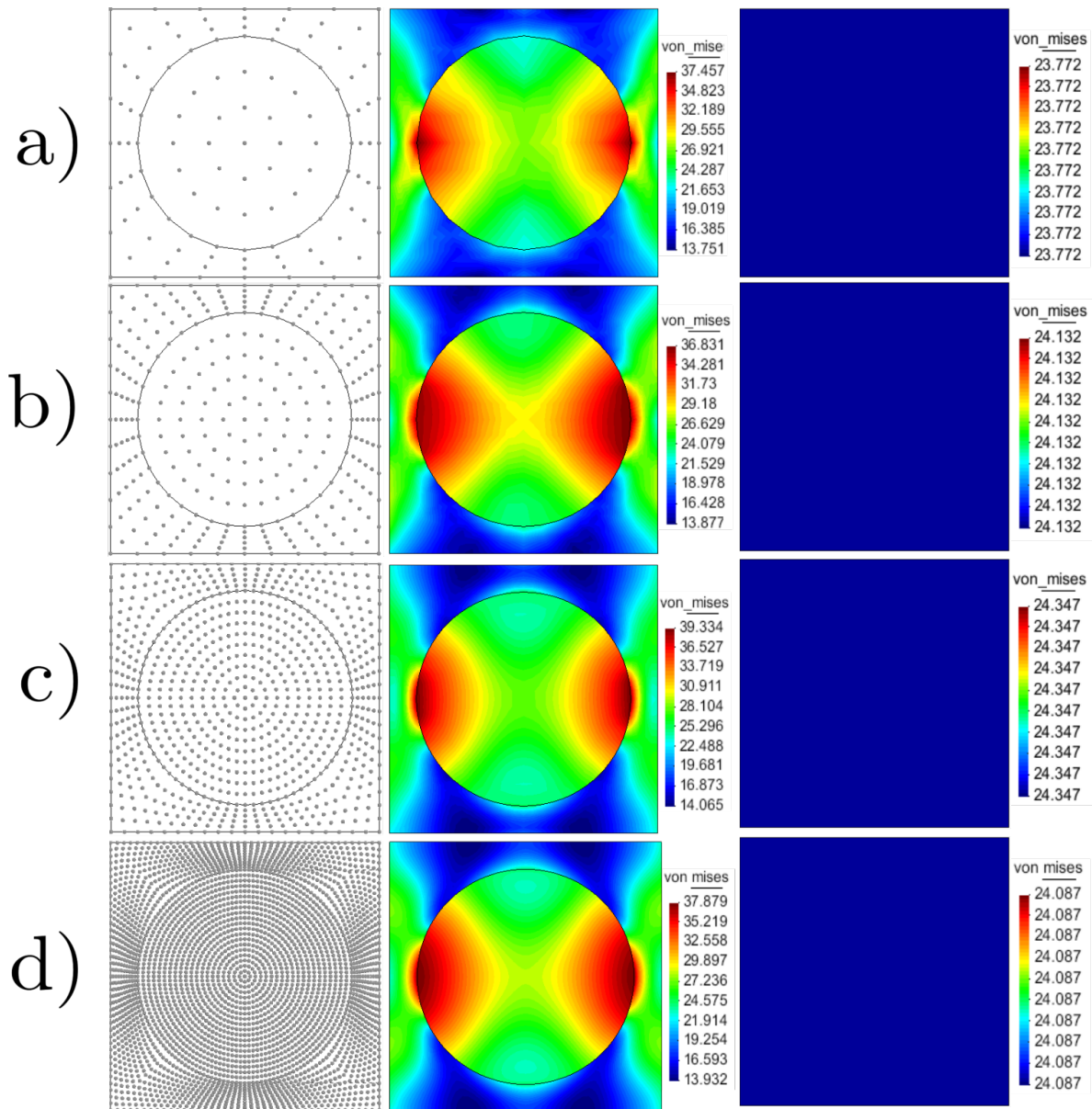


Figura 9.36: Compuesto con distribución hexagonal de fibras sometido a esfuerzo cortante. De izquierda a derecha; Discretización de la célula, tensión de Von Mises en la célula, y tensión de Von Mises en el compuesto para las discretizaciones en a) 145 nodos, b) 361 nodos, c) 921 nodos, y d) 3441 nodos.

Como indica la tabla 9.6, nuevamente los resultados coinciden. Se observa nuevamente el patrón de convergencia para el caso de esfuerzo cortante como en la placa 7×7 . Los resultados esta vez fueron un poco más lejanos por la dificultad adicional de la distribución hexagonal, pero se asume que a medida que aumentan la cantidad de células en el modelo, los resultados se asemejan más a los obtenidos por la teoría de la homogeneización. Todos los resultados obtenidos son favorables y avalan la utilización de la teoría de homogeneización para trabajar con materiales compuestos cuya microestructura es periódica. Cualquier otro estado tensional al que puedan estar sometidas las células de un material compuesto, es una combinación de los estados de tracción y esfuerzo cortante expuestos en esta sección. Los

últimos dos ejemplos abordados en esta sección son suficientemente reducidos en tamaño y simplicidad geométrica para poder ser modelados de forma estándar mediante el método de elementos finitos, sin embargo, exigen una malla densa para la convergencia de sus resultados y el costo computacional es elevado. Además, los resultados obtenidos no son uniformes y se ven afectados por las condiciones de contorno, lo cual sería un efecto despreciable si la célula y el compuesto estuvieran en escalas con ordenes de magnitud suficientemente distintos. La teoría de homogeneización se establece para casos en que el cociente de las longitudes características entre la microestructura y la macroestructura tienda a 0 ($l/L \rightarrow 0$).

Estos ejemplos ayudan a comprender la necesidad de la teoría de la homogeneización y la suposición de periodicidad en el medio para reducir la cantidad de información a tratar.

Capítulo 10

Conclusiones y posibles futuras líneas de investigación

En el presente trabajo se ha desarrollado la teoría de la homogeneización en dos escalas para el tratamiento de materiales compuestos con estructura periódica, mediante el método sin malla de puntos finitos, que posee una formulación fuerte y carece de la necesidad de integración numérica. Para ello, se ha extendido la formulación del MPF para abordar el problema de interfaz entre materiales en materiales compuestos, y dentro del marco de la teoría de homogeneización en dos escalas, se han establecido condiciones propias al MPF para abordar las condiciones de periodicidad de las células que representan la microestructura de un material compuesto con estructura periódica.

La teoría de homogeneización en dos escalas es una técnica que permite obtener los campos de variables macroscópicas a través de los campos de variables microscópicas. La macroestructura del material se considera un material homogéneo, cuyas propiedades elásticas efectivas (homogeneizadas) son obtenidas desde la microestructura del material mediante un método de perturbaciones, que consiste en resolver 3 problemas microestructurales con estados de carga estratégicos que permiten activar y determinar las distintas constantes elásticas por separado. La microestructura del material es representada mediante un volumen elemental representativo o célula, como patrón geométrico básico que se repite a si mismo para formar el compuesto. Éstas células son el problema principal de este trabajo, y están sometidas a condiciones de continuidad para la interfaz entre materiales propias de materiales compuestos, y condiciones de periodicidad propias de materiales compuestos con estructura periódica. La relación establecida entre el tensor de deformaciones macroscópicas y el cambio en el vector periodicidad de la célula, ha permitido definir ambos problemas (macro y micro) de forma separada, a diferencia de la teoría de expansión asintótica y teoría de los promedios.

El enfoque numérico de esta técnica permite abordar de forma general cualquier problema independientemente de su geometría, lo cual le otorga una gran ventaja respecto de métodos analíticos, además de la posibilidad de analizar lo que sucede a nivel microestructural.

Este método se ha desarrollado bajo la formulación de sólido elástico lineal en 2D, y ha sido programado completamente en lenguaje MATLAB. Mientras que el pre-proceso, que permite la creación de la geometría y asignación de propiedades y condiciones de borde, y el post-proceso, que permite el

análisis de los resultados obtenidos, han sido desarrollados en el software GiD 12.0.10. Considerando la cantidad de cálculos similares que se realizan en este tipo de problema, este programa fue diseñado para utilizar de una forma sumamente eficiente la información obtenida y evitar redundancias de cálculo que supongan un gran costo computacional.

Para validar los resultados obtenidos por el presente código, se han comparado las propiedades elásticas efectivas obtenidas con aquellas de varios trabajos de la literatura relacionada que incluyen resultados numéricos, analíticos y experimentales. También se han resuelto problemas mediante la forma clásica con el método de elementos finitos (Ansys 15.0.7), y se han comparado a los resultados obtenidos con homogeneización. Estos son satisfactorios en todos los casos de estudio mencionados.

Algunas conclusiones específicas que se pueden obtener de la aplicación de la teoría de homogeneización en dos escalas mediante el MPF son las siguientes:

- El MPF se establece como una técnica especialmente adecuada para el problema de homogeneización entre métodos sin malla, puesto que su esquema de colocación puntual permite reproducir con exactitud las condiciones de contorno sin la necesidad de métodos adicionales para forzar su cumplimiento, tales como los multiplicadores de Lagrange o el método de penalización. Esto es válido tanto en las condiciones de continuidad entre materiales como para las condiciones de periodicidad, cuyo tratamiento en la literatura suele estar acompañado de la utilización de multiplicadores de Lagrange.
- La utilización de un factor estabilizador presente en la literatura del MPF logra estabilidad a costa de precisión en los resultados de las condiciones de contorno comunes. Este factor es inadmisibles en las condiciones de continuidad y periodicidad de la célula, puesto que su uso evita que estas se cumplan. Las inestabilidades surgen generalmente en el contorno, y una forma efectiva de lidiar con ellas es limitar la cantidad de nodos del contorno en la nube. Esto también se aplica para las nubes de los nodos en la interfaz entre materiales.
- El MPF presenta problemas de estabilidad en el contorno donde no se cumple la simetría deseada en las nubes de interpolación. El problema se acentúa en materiales compuestos donde la interfaz entre materiales resulta en un contorno adicional en el interior del dominio. Existen zonas especialmente inestables en lugares en que la interfaz es cercana al contorno, y por ende las nubes son muy asimétricas. Adicionalmente el *método de separaciones de dominios* requiere que cada material se trate como un problema independiente, y por tanto, que se discreticen tan generosamente como un problema normal. Todas estas razones justifican discretizaciones más finas para materiales compuestos. A su vez, se ha observado que la utilización de más nodos por nube mejora considerablemente la estabilidad del problema sin deteriorar la calidad de la solución, gracias a la utilización del *método de mínimos cuadrados fijos* que insensibiliza la aproximación a la cantidad de nodos por nube.
- El MPF requiere idealmente de una densidad de nodos homogénea. Existen tipos de células como es el caso de fibras cortas en que el largo de la célula excede por mucho el ancho de la misma, llevando a que la distribución de nodos sea bastante irregular entre las direcciones horizontal y vertical. Bajo el entendimiento actual, para tratar estas células bajo el MPF, se requeriría una discretización homogénea, y por ende, muy densa en comparación al método de elementos finitos. No obstante, este tipo de casos requiere un estudio más exhaustivo, por ejemplo, el utilizar otro

tipo de célula en donde se abarquen más fibras a lo ancho, investigar acerca de la formación de nubes para discretizaciones poco homogéneas, o estudiar su comportamiento en un modelo 3D.

- La aplicación de condiciones de anclaje en la célula no es totalmente necesaria. Estas condiciones establecen la espacialidad del problema al medir relativamente los desplazamientos de todos los nodos de la célula respecto a los nodos de anclaje. No obstante, la única diferencia entre su uso o no uso, sería la opción de apreciar gráficamente los desplazamientos, los cuales no resultan importantes como los resultados de la tensión y deformación, resultados que permanecen inalterados. Además, las condiciones de anclaje resultan en grados de libertad adicionales para los vértices, y para evitar sobrecondicionamiento, éstas reemplazan las condiciones de periodicidad en los vértices introduciendo un pequeño error en el proceso. Si se prescinde de condiciones de anclaje, para las células cuadradas no hay mayor problema en establecer la periodicidad de los vértices, pero para la célula hexagonal, si se estudia la relación entre sus vértices, se puede concluir que dos pares vértices pueden ser apareados entre si, mientras que los dos vértices sobrantes no son periódicos entre si. Este problema surge debido a que 3 vértices convergen en un mismo punto coordinado, y el establecer su igualdad resulta en un sobrecondicionamiento inevitable si además se considera que sus vectores normales difieren. Otros métodos recurren a multiplicadores de Lagrange para lidiar con esto. En el caso del MPF, conviene tratar estos nodos como si fuesen nodos interiores, introduciendo un error despreciable a cambio de simplificar el problema y su resolución.
- El problema de homogeneización es descrito usualmente como un problema de gran complejidad por la usualmente numerosa cantidad de problemas que se han de resolver. No obstante, puesto que es tan solo el problema microestructural el que debe resolverse numerables veces, existe un gran potencial para el reciclaje de información que solo puede ser logrado mediante un software especializado o uno propio que pueda ser modificado. Lo único que diferencia a un problema microestructural de otro son las condiciones de contorno, lo cual se relaciona directamente con el vector de fuerzas. La matriz de rigidez del problema final (cuya creación consume la mayor parte del costo computacional), es netamente creada con información geométrica, y es idéntica en todos los problemas microestructurales. Evitar cualquier cálculo relativo a su creación es algo necesario luego de resolver el primer problema. En el problema no-lineal, sin embargo, el tensor constitutivo elástico deja de ser constante, y por ende no siempre es posible reciclar información, lo que hace de este un problema con una complejidad a considerar.
- La regularidad de la discretización no es del todo necesaria. Es necesario que la discretización sea regular tanto en los contornos como en la interfaz entre materiales para la correcta implementación de las condiciones de periodicidad y continuidad que relacionan pares de nodos, pero no es necesaria para el resto del dominio. Mientras la densidad de nodos sea homogénea en todo el dominio, los resultados son tan buenos como para discretizaciones totalmente regulares.

10.1. Posibles líneas de investigación

Este problema sienta las bases para la aplicación de la teoría de la homogeneización a través del método sin malla de puntos finitos, sin embargo, aún queda mucho que explotar respecto a este tema.

Entre las posibles líneas de investigación futuras relacionadas con esta tesis podemos nombrar:

- Extensión del problema a 3D, para abordar problemas cuyo comportamiento no pueda ser descrito mediante elasticidad plana. De esta forma se podrían abordar casos como materiales reforzados con fibras en distintas orientaciones.
- Extensión del problema al caso no-lineal. La complejidad de este caso se debe a la obtención del tensor constitutivo elástico tangente, el cual se obtiene a través de un esquema iterativo. Es aquí donde se puede entender de mejor forma el alcance de la eficiencia del código numérico planteado.
- Extensión a otros tipos de modelo a materiales compuestos tales como plasticidad clásica, daño continuo, daño isotrópico, etc.
- Estudiar y reproducir el comportamiento de materiales compuestos cuasi-periódicos (distribución aleatoria de heterogeneidades), cuya célula debe contener suficientes heterogeneidades para ser representativa de la microestructura.
- Estudiar y reproducir de forma más profunda el contacto entre materiales, para abordar casos tales como deslizamiento y desprendimiento de fibra. Hasta ahora se ha asumido que los materiales están perfectamente unidos.
- Investigar los efectos térmicos y de humedad sobre los materiales heterogéneos, que pueden generar tensiones internas que contribuyan al envejecimiento prematuro del material ante cargas cíclicas. También el efecto de la cantidad de microdefectos en la fabricación que puedan hacer fallar al material antes de lo previsto.
- Estudiar e implementar el tratamiento de las nubes de interpolación y la función de forma para el tratamiento de grietas. Generalmente estos problemas requieren de las denominadas *funciones de forma enriquecidas*. Este problema ya se ha abordado para el *Element Free Galerkin Method* en (Belytschko et al., 1996a; Fleming et al., 1997). Al ser un método libre de malla, su formulación podría ser fácilmente extendida al MPF como fue para el caso del tratamiento de discontinuidad de material.
- Trabajar con el tipo de problemas que dificultan a los métodos con malla, como grandes deformaciones, fronteras en movimiento, propagación de grietas, procesos adaptativos, rompimiento de materiales, etc.

Respecto a algunas posibles mejoras a implementar el código del *método de puntos finitos* están:

- Generación de una estrategia para definir la cantidad óptima de nodos por nube en el MPF, en función de las dimensiones del problema y su discretización.
- Implementación de alguna estrategia para reducir el área de búsqueda de los nodos nube para problemas con alta densidad de nodos.
- Implementación de algunas técnicas mencionadas en el capítulo 3, tales como técnicas adaptativas, estrategias de refinamiento, indicador de error, etc.
- Investigar en profundidad el efecto que tiene sobre la estabilidad del problema la cantidad de nodos contorno en las nubes de aquellos nodos pertenecientes al contorno. Para el caso de materiales compuestos, esto se extiende también a la interfaz entre materiales.

Apéndice A

Perdida de precisión por el factor estabilizador

El factor estabilizador mencionado en el apartado 3.8, es una técnica extendida en la literatura del método de puntos finitos, y uso radica en evitar las inestabilidades que puedan surgir debido a la implementación de las condiciones de Neumann. No obstante en el desarrollo de este trabajo de tesis solo logra obstruir los resultados, hasta que finalmente se entiende que su uso además conlleva una pérdida de precisión en el cumplimiento de estas condiciones, las cuales se reproducirían de forma exacta de no ser por el factor estabilizador.

Para demostrar este punto se trabaja con el siguiente problema de un solo material, el cuál se resuelve con y sin el factor estabilizador. Se trata de un trapecio sometido a una tracción de 10 [N], tal como muestra la figura A.1. En la figura A.2 se presenta la discretización y dimensiones del problema. El material es un acero cuyo modulo de Young es $E = 2,1 \times 10^5 [Mpa]$ y su modulo de Poisson es $\nu = 0,3$.

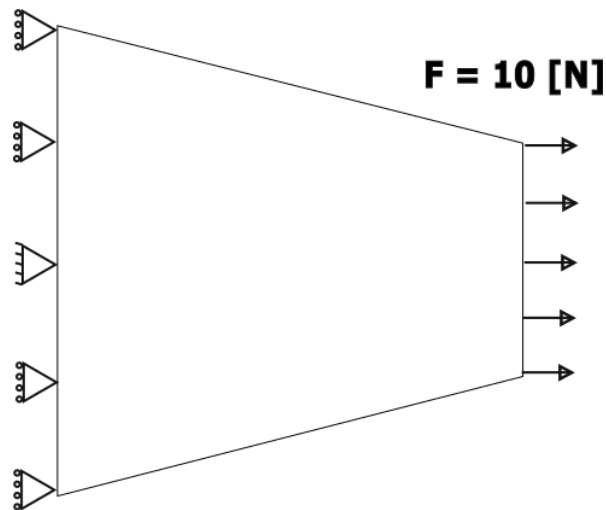


Figura A.1: Condiciones de contorno para el caso de estudio.

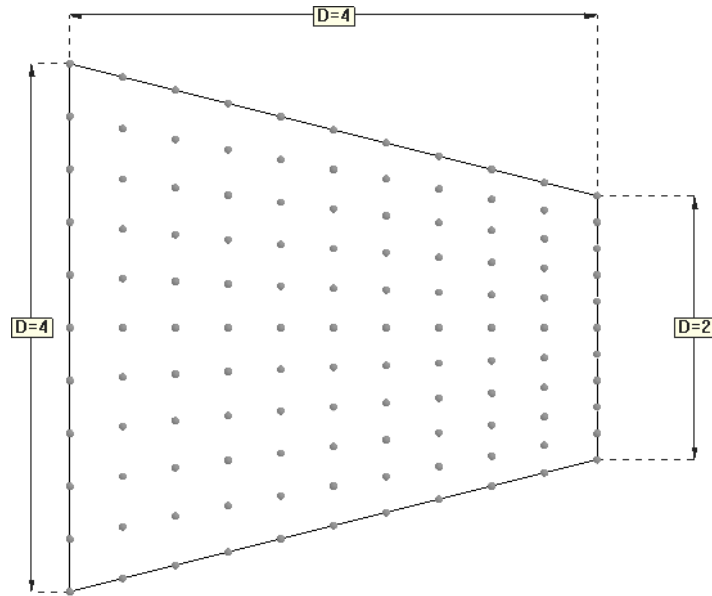


Figura A.2: Geometría y discretización del problema en 121 nodos. Las medidas están en [mm].

En las figuras A.3 y A.4 se presentan los resultados para la tracción en dirección horizontal de los problemas resuelto con y sin el factor estabilizador, mientras que la tabla A.1 resume la información relevante (solo para el contorno lateral derecho). Como se aprecia en las figuras, el rango de valores varía de forma apreciable entre ambos problemas considerando que lo único que varía es la utilización del factor estabilizador. Además, en la tabla se puede apreciar como es que los valores prescritos se reproducen en forma exacta si el problema se resuelve de forma normal, en contraste a lo que sucede si se aplica el factor estabilizador. Este hecho fue constatado al intentar cumplir las condiciones de continuidad entre materiales para un material compuesto. La condición de continuidad de tracciones utilizada en la interfaz entre materiales se deriva de una condición de Neumann, por lo cual, al utilizar el factor estabilizador los resultados no cumplían en absoluto con lo requerido. Al quitar el factor estabilizador de la ecuación, los resultados favorables fueron inmediatos.

En conclusión, este trabajo de tesis establece que no se debe utilizar el factor estabilizador para el problema de materiales compuestos y el problema de homogeneización que incluye condiciones de periodicidad en las células. Tampoco se recomienda su uso para problemas de materiales homogéneos en donde no se observen inestabilidades, como es el caso presentado. No obstante, hay que abstenerse de generalizar, y su utilidad para casos con estabilidad requiere un estudio más a fondo, o quizás la exploración de otras formas de estabilización, puesto que en el caso de células hexagonales, para evitar la inestabilidad de un vértice en particular de la célula, éste debe ser tratado como nodo interior cumpliendo la ecuación de equilibrio y no una condición de contorno, lo cual es de cierta manera, parte de lo que propone el factor estabilizador.

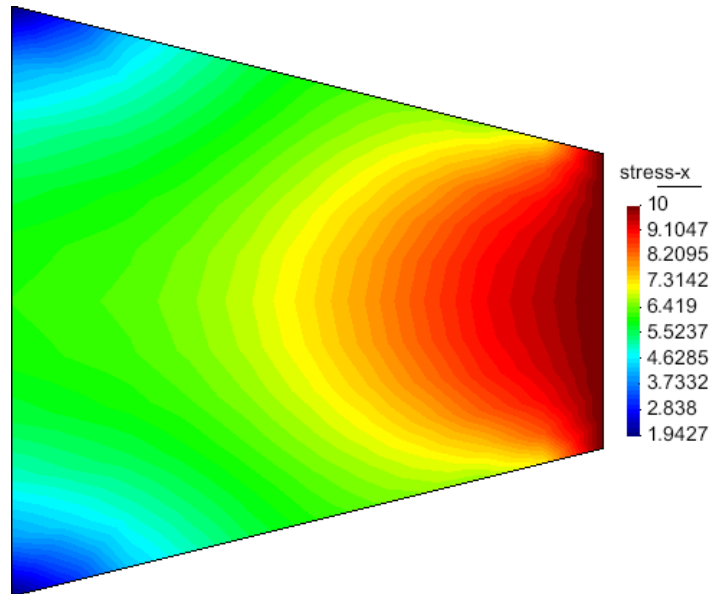


Figura A.3: Tracción en dirección x para el problema resuelto de forma normal, sin factor estabilizador.

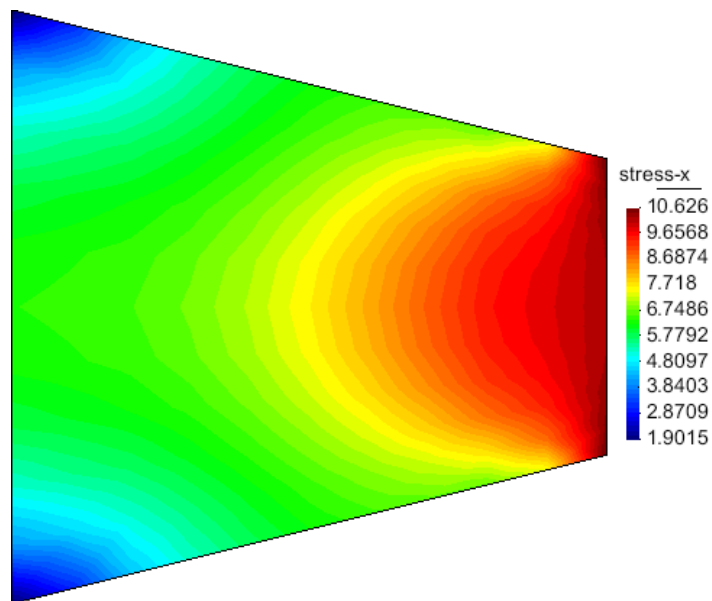


Figura A.4: Tracción en dirección x para el problema resuelto utilizando el factor estabilizador.

Tabla A.1: Comparación de los resultados de la tracción para el contorno derecho de la geometría entre la resolución con y sin factor estabilizador.

Nodo	x [mm]	y [mm]	Fuerza prescrita [N]	Resultado sin FIC [N]	Resultado con FIC [N]
100	4	3	10	10	10.6262
103	4	2.8	10	10	10.4679
106	4	2.6	10	10	10.3591
107	4	2.4	10	10	10.2588
111	4	2.2	10	10	10.2138
112	4	2.0	10	10	10.1998
115	4	1.8	10	10	10.2143
117	4	1.6	10	10	10.2602
119	4	1.4	10	10	10.3600
120	4	1.2	10	10	10.4681
121	4	1.0	10	10	10.6262

Apéndice B

Principales rutinas numéricas código MATLAB

Programa Global

```
1  % PROGRAMA GLOBAL
2  tic
3  % Obtenemos los nombres de las carpetas del problema micro y macro.
4  [micro,macro]=directories();
5  % Se situa en la carpeta de la microescala
6  cd(micro);
7  % Homogeneizacion del tensor de componentes elasticas
8  [DH,CLOUDS,N,KG,KGt, ratio, rcond_AI, etest, NODES, DOM, Dg, boundary]=HOMOGENIZATION.D();
9  % Se situa en la carpeta de la macroescala
10 cd ../macro;
11 % Se resuelve el problema de la macroescala
12 [strain_macro, stress_macro]=MACRO.PROBLEM(DH);
13 % Se situa en la carpeta de la microescala
14 cd ../micro;
15 % Se resuelve cada problema de la microescala
16 display('> Calculando en la Microescala...');
17 parfor i=1:size(strain_macro,1)
18 [res{i}]=MICRO.PROBLEM(strain_macro(i,:),CLOUDS,N,KG,KGt, ratio, rcond_AI, etest, ...
19     NODES, DOM, Dg, boundary);
20 end
21 toc
22 % Transcripcion de resultados a GID del nodo especificado.
23 i=1;
24 [name_res] = postprocess(rcond_AI, ratio, etest, res{i});
```

Homogeneización

```

1  % Homogeneización del tensor constitutivo elastico a traves del mtodo de ...
    perturbaciones. Muchas variables del problema se calculan por primera vez, para ...
    luego ser reutilizadas al resolver la microestructura.
2  function ...
    [DH, CLOUDS, N, KG, KGt, Mratio, Mrcond_AI, Metest, NODES, DOM, Dg, boundary]=HOMOGENIZATION_D()
3  display('> Homogeneizando las constantes elasticas...');
4  % Solo si las matrices estan vacias, se crean.
5  NODES=[];DOM=[];Dg=[];KG=[];boundary=[];
6  for i=1:3
7      e=10^-5; % Deformacion por defecto.
8      strain_h=zeros(1,3);strain_h(i)=e;
9      [problem_data, NODES, boundary] = preprocess_micro(strain_h, NODES, boundary);
10     problem_data(3)=3;problem_data(4)=1;problem_data(2)=18; % vv(kk);
11     % Matrices de informacion, tensores constitutivos elasticos.
12     [DOM, Dg, NODES, nodosin]=subdomains(NODES, DOM, Dg);
13     if i==1 % Evita redundancia de rutinas
14         % Nubes y funciones de forma
15         [CLOUDS, ratio, rcond_AI, etest, N, caso] = Nclouds(problem_data, DOM);
16         if caso==1
17             % Corte en caso de error
18             break
19         end
20         % Implementacion condiciones de continuidad en la interfaz.
21         KGt=interface(DOM, nodosin, Dg, CLOUDS, N, NODES);
22     end
23     % Ensamblaje de la matriz de rigidez KG y el vector de fuerzas b.
24     [KG, b]=assemblageM(Dg, CLOUDS, N, DOM, KG, KGt);
25     % Resolucion del sistema, corresponde a valores nodales, no a la
26     % aproximacion.
27     [uh] = KG\b+0;
28     % Variables de campo y de test.
29     [r, r, stress, r, r, r, Mrcond_AI, Mratio, Metest]=results(uh, Dg, CLOUDS, N, rcond_AI, ...
        ratio, etest);
30     % Tensiones promedio
31     S{i}=averager(NODES, stress, i);
32 end
33 % Tensor constitutivo elastico
34 DH=[S{1} 0;S{2} 0;0 0 S{3}]/e;
35 b=mean([DH(1,2) DH(2,1)]);
36 DH(1,2)=b;DH(2,1)=b;
37
38 end

```

Programa Macro

```

1  % RESUELVE EL PROBLEMA EN LA MACROESCALA
2
3  function [strain, stress]=MACRO_PROBLEM(DH)
4
5  display('> Calculando en la Macro Escala...');
6  % Transcripcion de la informacion desde el pre-proceso (GiD)
7  [problem_data, NODES{1}] = preprocess_macro();
8  % Nubes, funciones de forma, variables de test.
9  [CLOUDS, ratio, rcond_AI, etest, N] = Nclouds(problem_data, NODES);
10 Dg{1}=DH;
11 % Ensamblaje de la matriz de rigidez
12 [KG, b]=assemblageM(Dg, CLOUDS, N, NODES, [], sparse(0));
13 % Resolucion de los valores nodales
14 [uh] = KG\b;
15 % Error de solucion
16 errorKG=abs(KG*uh-b)+0;
17 % Variables de campo y test
18 [disp, strain, stress, vmises, ~, ~, Mrcond_AI, Mratio, Metest]=results(uh, Dg, CLOUDS, ...
    N, rcond_AI, ratio, etest);
19 % Transcripcion de resultados para el post-proceso.
20 res{1}=disp; res{2}=strain; res{3}=stress; res{4}=vmises; res{5}=errorKG; res{6}=NODES{1};
21 [name_res] = postprocess(Mrcond_AI, Mratio, Metest, res);
22
23 end

```

Programa Micro

```

1  % Resolucion de la microescala para las celulas asociadas a cada nodo de la
2  % macroestructura
3  function [res]=MICRO_PROBLEM(strain_h, CLOUDS, N, KG, KGt, ...
    ratio, rcond_AI, etest, NODES, DOM, Dg, boundary)
4
5  % Actualizacion de matrices
6  [~, NODES, ~] = preprocess_micro(strain_h, NODES, boundary);
7  [DOM, Dg, NODES, ~]=subdomains(NODES, DOM, Dg);
8  [KG, b]=assemblageM(Dg, CLOUDS, N, DOM, KG, KGt);
9  % Resolucion del sistema
10 uh = KG\b;
11 % Error de solucion
12 errorKG=abs(KG*uh-b)+0;
13 % Variables de campo y test
14 [disp, strain, stress, vmises, ~, ~, ~, ~]=results(uh, Dg, CLOUDS, N, rcond_AI, ratio, etest);
15 % Formato de resultados
16 res{1}=disp; res{2}=strain; res{3}=stress; res{4}=vmises; res{5}=errorKG; res{6}=NODES;
17
18 end

```

Transcripción de la información del pre-procesamiento para la macroestructura

```

1  function [problem_data,NODES] = preprocess_macro()
2
3  load NODES.txt;
4  load CORNERS_NODES.txt;
5  load PRESC_NODES.txt;
6  load BOUND_NODES.txt;
7  load THETAS_NODES.txt;
8  load PROBLEM_DATA.txt;
9  load MATERIAL_DATA.txt;
10 load BIMAT_DATA.txt;
11
12 %Deteccion de falta de informacion
13 if isempty(PRESC_NODES)==1
14     error('Error: No se han prescrito condiciones de contorno');
15 end
16 if isempty(BOUND_NODES)==1
17     error('Error: No se ha definido el contorno del problema');
18 end
19 if isempty(THETAS_NODES)==1
20     warning('No se han asignado los angulos normales en los nodos esquina');
21 end
22 for ki=1:length(PRESC_NODES)
23     idNode=PRESC_NODES(ki,1);
24     NODES(idNode,5)=PRESC_NODES(ki,2);
25     NODES(idNode,7)=PRESC_NODES(ki,3);
26     NODES(idNode,8)=PRESC_NODES(ki,4);
27 end
28 % Conectividad nodos de contorno
29 BOUND_CONNECT=zeros(size(BOUND_NODES,1),3);
30 for ki=1:length(BOUND_NODES)
31     BOUND_CONNECT(ki,1)=BOUND_NODES(ki,1);
32     BOUND_CONNECT(ki,2)=BOUND_NODES(ki,2);
33     BOUND_CONNECT(ki,3)=BOUND_NODES(BOUND_NODES(:,2)==BOUND_CONNECT(ki,1),1);
34 end
35 NODES(BOUND_CONNECT(:,1),10:11)=BOUND_CONNECT(:,2:3);
36 % Angulos normales
37 thetas=zeros(length(NODES),2);
38 normal=[];
39 BOUND1=BOUND_NODES(:,1);
40 BOUND2=BOUND_NODES(:,2);
41 dx=NODES(BOUND2,2)-NODES(BOUND1,2);
42 dy=NODES(BOUND2,3)-NODES(BOUND1,3);
43 d=sqrt(dx.*dx+dy.*dy);
44 for ki=1:length(BOUND_NODES)
45     P1=BOUND_NODES(ki,1);
46     P2=BOUND_NODES(ki,2);
47     normal_i=cross([dx(ki)/d(ki),dy(ki)/d(ki),0],[0,0,1]);
48     normal=[normal;normal_i];
49     theta_i=atan2(normal_i(2),normal_i(1));
50     thetas(P1,1)=theta_i;
51     thetas(P2,2)=theta_i;

```

```

52 end
53 thetas=angle(exp(1j*thetas(:,1))+exp(1j*thetas(:,2)));
54 NODES(:,9)=thetas;
55 % Nodos con angulos prescritos
56 if isempty(THETAS.NODES)==0
57     for ki=1:size(THETAS.NODES,1)
58         idNode=THETAS.NODES(ki,1);
59         NODES(idNode,9)=THETAS.NODES(ki,2)*pi/180;
60     end
61 end
62 problem_data=PROBLEM_DATA';
63
64 end

```

Transcripción de la información del pre-procesamiento para la microestructura

```

1 %Transcribe informacion desde el preproceso (GiD) a variables en MATLAB.
2 %-Crea la matriz de informacion general para los nodos "NODES"
3 %-Transcribe informacion del problema a problem_data
4 %-"boundary" contiene los valores prescritos de periodicidad en nodos contorno que ...
   varia de
5 %problema a problema.
6
7 %Informacion de cada columna de NODES:
8 %1.- Numero de identificacion del nodo, asignado en GiD
9 %2.- Coordenada x
10 %3.- Coordenada y
11 %4.- Su subdominio
12 %5.- Tipo de nodo, segun su condicion.
13 %6.- Nodo con el cual esta apareado, si es el caso.
14 %7.- Valor prescrito en x.
15 %8.- Valor prescrito en y.
16 %9.- Angulo normal, si es nodo boundary.
17
18 function [problem_data,NODES,boundary] = preprocess_micro(strain_h,NODES,boundary)
19
20 load PROBLEM_DATA.txt;
21 problem_data=PROBLEM_DATA;
22 if isempty(boundary)==1 %Todo este calculo no se repite.
23     load BOUND.NODES.txt;
24     load BIMAT_DATA.txt;
25     load NODES.txt;
26     NODES(BIMAT_DATA(:,1),4)=BIMAT_DATA(:,2);
27     %Para cada nodo de boundary, se buscan sus compaeros mas cercanos para
28     %el calculo del angulo normal
29     BOUND=setdiff(BOUND.NODES(:,0),0);
30     asd=NODES(BOUND,1:3);
31     BOUND.CONECT=zeros(size(asd,1),3);
32     for i=1:size(asd,1)
33         aux=[asd(:,1) sqrt((asd(:,2)-asd(i,2)).^2+(asd(:,3)-asd(i,3)).^2)];
34         aux=sortrows(aux,2);

```

```

35     BOUND_CONECT(i,:) = aux(1:3,1);
36 end
37 %Calculo del angulo normal para nodos interfaz
38 thetas=zeros(length(NODES),2);
39 BOUND1=BOUND_NODES(:,1);
40 BOUND2=BOUND_NODES(:,2);
41 dx=NODES(BOUND2,2)-NODES(BOUND1,2);
42 dy=NODES(BOUND2,3)-NODES(BOUND1,3);
43 d=sqrt(dx.*dx+dy.*dy);
44 for ki=1:length(BOUND_NODES)
45     P1=BOUND_NODES(ki,1);
46     P2=BOUND_NODES(ki,2);
47     normal_i=cross([dx(ki)/d(ki),dy(ki)/d(ki),0],[0,0,1]);
48     theta_i=atan2(normal_i(2),normal_i(1));
49     thetas(P1,1)=theta_i;
50     thetas(P2,2)=theta_i;
51 end
52 thetas=angle(exp(1j*thetas(:,1))+exp(1j*thetas(:,2)));
53 NODES(:,9)=thetas;
54 %Angulos normales para nodos esquina (dede GiD)
55 load THETAS_NODES.txt;
56 if isempty(THETAS_NODES)==0
57     NODES(THETAS_NODES(:,1),9)=THETAS_NODES(:,2)*pi/180;
58 end
59
60 %INFORMACION PERTINENTE A LA PERIODICIDAD
61
62 %Tipo de celula
63 if problem_data(7)==0
64     %Celula cuadrilatera
65     div=1;
66     dir=1;
67 else
68     %Celula hexagonal
69     div=problem_data(9);
70     dir=problem_data(8);
71 end
72 %Valores limite de la celula
73 mx=min(NODES(:,2));
74 my=min(NODES(:,3));
75 Mx=max(NODES(:,2));
76 My=max(NODES(:,3));
77 %Nodos esquina, vertices
78 P(1,:)=NODES(and(NODES(:,2)==mx,NODES(:,3)==my),1:3); %Eq inf izq
79 P(2,:)=NODES(and(NODES(:,2)==Mx,NODES(:,3)==my),1:3); %Eq inf der
80 P(3,:)=NODES(and(NODES(:,2)==mx,NODES(:,3)==My),1:3); %Eq sup izq
81 P(4,:)=NODES(and(NODES(:,2)==Mx,NODES(:,3)==My),1:3); %Eq sup der
82 %Separacion en contorno superior, inferior, derecho e izquierdo.
83 CY1=sortrows(sortrows(NODES(NODES(:,2)==mx,1:4),4),3);
84 CY2=sortrows(sortrows(NODES(NODES(:,2)==Mx,1:4),4),3);
85 CX1=sortrows(sortrows(NODES(NODES(:,3)==my,1:4),4),2);
86 CX2=sortrows(sortrows(NODES(NODES(:,3)==My,1:4),4),2);
87 %Asignacion directa de angulos
88 NODES(CY1(:,1),9)= pi;
89 NODES(CY2(:,1),9)= 0;
90 NODES(CX1(:,1),9)=-pi/2;
91 NODES(CX2(:,1),9)= pi/2;

```

```

92     %Celula hexagonal
93     if dir==1;
94         punto=(Mx-mx)*div;
95         V=CX2;
96         V2=CX1;
97     else
98         punto=(My-my)*div;
99         V=CY1;
100        V2=CY2;
101    end
102    aux=[V(:,1) abs(V(:,dir+1)-punto)];
103    aux=sortrows(aux,2);
104    %Vertices adicionales celula hexagonal
105    P(5,:)=NODES(NODES(:,1)==aux(1,1),1:3);
106    pos=find(V(:,1)==P(5,1));
107    P(6,:)=V2(end-pos+1,1:3);
108    %Vectores de periodicidad y nuevos contornos hexagonales.
109    if dir==1
110        D1=P(2,2:3)-P(1,2:3);
111        D3=P(4,2:3)-P(6,2:3);
112        D4=P(3,2:3)-P(6,2:3);
113        CX1a=CX1(2:end-pos,:);    %No toma nodos esquina
114        CX2a=CX2(pos+1:end-1,:);
115        CX2b=CX2(1:pos,:);    %Si toma nodos esquina
116        CX1b=CX1(end-pos+1:end,:);
117        NODES(P([3 4 5],1),9)=pi/2;
118        NODES(P([1 2 6],1),9)=-pi/2;
119    else
120        D2=P(4,2:3)-P(2,2:3);
121        D5=P(4,2:3)-P(5,2:3);
122        D6=P(2,2:3)-P(5,2:3);
123        CY1a=CY1(2:end-pos,:);    %No toma nodos esquina
124        CY2a=CY2(pos+1:end-1,:);
125        CY2b=CY2(1:pos,:);    %Si toma nodos esquina
126        CY1b=CY1(end-pos+1:end,:);
127        NODES(P([2 4 6],1),9)=0;
128        NODES(P([1 3 5],1),9)=pi;
129    end
130    %Asignacion de condiciones periodicidad
131    %Los contornos con id=7 cargaran con la condicion de fuerzas antiperiodicas de ...
132    %ambos mientras
133    %Los contornos con id=8 cargaran con la condicion de desplazamientos periodicos.
134    if dir==2
135        %Los lados sin division no toman los nodos esquina
136        aux1=[CX1(2:end-1,1); CY1a(:,1);CY1b(:,1)];
137        aux2=[CX2(2:end-1,1); CY2a(:,1);CY2b(:,1)];
138        %Contornos inferior e izquierdo
139        NODES(aux1,5)=7;
140        NODES(aux1,6)=aux2;
141        %Contornos superior y derecho
142        NODES(aux2,5)=8;
143        NODES(aux2,6)=aux1;
144    else
145        aux1=[CY1(2:end-1,1); CX1a(:,1);CX1b(:,1)];
146        aux2=[CY2(2:end-1,1); CX2a(:,1);CX2b(:,1)];
147        %Contornos inferior e izquierdo
148        NODES(aux1,5)=7;

```

```

148     NODES(aux1,6)=aux2;
149     %Contornos superior y derecho
150     NODES(aux2,5)=8;
151     NODES(aux2,6)=aux1;
152 end
153
154 %Condicion de anclaje (opcional)
155 NODES(P(1,1),5)=1; %El desplazamiento prescrito es 0 por defecto.
156 %Se guarda la informacion del contorno en boundary para evitar recalcularla mas ...
    adelante
157 if div==1
158     %Condicion anclaje adicional celda cuadrada
159     if dir==1
160         NODES(P(3,1),5)=1;
161     else
162         NODES(P(2,1),5)=1;
163         D6=D5;
164     end
165 end
166 if dir==1
167     boundary1=CX2(2:end-1,1);boundary1(:,2)=D1(1);boundary1(:,3)=D1(2);
168     boundary2=CX2a(:,1);    boundary2(:,2)=D3(1);boundary2(:,3)=D3(2);
169     boundary3=CX2b(:,1);    boundary3(:,2)=D4(1);boundary3(:,3)=D4(2);
170     boundary=[boundary1;boundary2;boundary3];
171     if div==1
172         boundary=[boundary; P(3,:)];
173     end
174 else
175     boundary1=CX2(2:end-1,1);boundary1(:,2)=D2(1);boundary1(:,3)=D2(2);
176     boundary2=CX2a(:,1);    boundary2(:,2)=D5(1);boundary2(:,3)=D5(2);
177     boundary3=CX2b(:,1);    boundary3(:,2)=D6(1);boundary3(:,3)=D6(2);
178     boundary=[boundary1;boundary2;boundary3];
179     if div==1
180         boundary=[boundary; P(2,:)];
181     end
182 end
183 end
184 %Prescripcion de periodicidad (varia entre problemas)
185 st=[strain_h(1,1) strain_h(1,3)/2;strain_h(1,3)/2 strain_h(1,2)];
186 NODES(boundary(:,1),7:8)=boundary(:,2:3)*st;
187 end

```

Nubes y Funciones de Forma

```

1 function [CLOUDSi,ratioi,rcond.AIi,etesti,Ni, caso] = Nclouds(problem.data,DOM)
2 % 1 ---> Normal      : Ordenamiento minima distancia
3 % 2 ---> Ancladas.Lpp1 : Solo nodos interiores en nubes de contorno
4 % 3 ---> Ancladas.Lpp2 : Solo x nodos de contorno en las nubes contorno
5 % 4 ---> Diferenciadas : Lpp1 para Dirichlet, Lpp2 para Newmann.
6
7 %DOMi es el dominio desde el cual se crea la nube, DOMi2 es un dominio
8 %menor para reducir el area de busqueda de nodos cercanos.
9 caso=0;
10 for i=1:length(DOM)
11     DOMi=DOM{i};
12     n=problem.data(2);
13     cloud.type=problem.data(3);
14     [Nn,-] = size(DOMi) ;
15     CLOUDS = zeros(Nn,n) ;
16     DMIN    = zeros(Nn,2) ;
17     DMAX    = zeros(Nn,3) ;
18     N=CLOUDS;Nx=N;Ny=N;Nxx=N;Nyy=N;Nxy=N;
19     rcond.AI=zeros(Nn,1);etest=zeros(Nn,1);
20     div=max([1 floor(Nn/(50*n))]);
21     rx=(max(DOMi(:,2))-min(DOMi(:,2)))/div;
22     ry=(max(DOMi(:,3))-min(DOMi(:,3)))/div;
23     for ix=1:Nn
24         %%%%%%%%%%%%%%% Nubes %%%%%%%%%%%%%%%
25         x=DOMi(ix,2);
26         y=DOMi(ix,3);
27         if DOMi(ix,5)>0
28             f=2;
29             DOMi2=DOMi(and(and(DOMi(:,2)<x+f*rx, DOMi(:,2)>x-f*rx), ...
30                 and(DOMi(:,3)<y+f*ry, DOMi(:,3)>y-f*ry)) ,:);
31         else
32             DOMi2=DOMi(and(and(DOMi(:,2)<x+rx, DOMi(:,2)>x-rx), and(DOMi(:,3)<y+ry, ...
33                 DOMi(:,3)>y-ry)) ,:);
34         end
35         ntypeI= DOMi(ix,5);
36         ntype = DOMi2(:,5);
37         dx = -(DOMi2(:,2)-x);
38         dy = -(DOMi2(:,3)-y);
39         dDOMi = sqrt(dx.^2+dy.^2);
40
41         %           1           2           3           4           5           6 ...
42         %           7           8
43         DNOD = [ DOMi2(:,1) , dDOMi , abs(dx) , abs(dy) , abs(dx.*dy) , dx ...
44             , dy , ntype ];
45         mINDEX = sortrows(DNOD,2);
46
47         if length(mINDEX)<n
48             display('La cantidad de nodos a elegir es menor a la cantidad de nodos ...
49                 por nube especificada')
50             caso=1;
51             break
52         end
53     end
54 end

```

```

49     %Ordenamiento minima distancia
50     if cloud.type==1 || ntypeI==0
51         CLOUDS(ix,:) = mINDEX(1:n,1);
52     end
53     %Utiliza solo nodos interiores
54     if (cloud.type==2 && ntypeI≠0) || (cloud.type==4 && ntypeI>3)
55         mINDEX=mINDEX(mINDEX(:,8)==0,:); %Solo nodos interiores
56         if length(mINDEX)<n-1
57             display('La cantidad de nodos a elegir es menor a la cantidad de nodos ...
                    por nube especificada')
58             caso=1;
59             break
60         end
61         CLOUDS(ix,:) = [DOMi(ix,1) [mINDEX(1:(n-1),1)]];
62     end
63     %Utiliza los "nn-1" nodos mas cercanos del contorno en la nube, los demas
64     %son nodos interiores
65     if (cloud.type==3 && ntypeI≠0 && ntypeI≠0) || (cloud.type==4 && ntypeI<4 ...
        && ntypeI>0)
66         aux=or(mINDEX(:,8)==0,mINDEX(:,8)==0);
67         int= mINDEX(aux,:); %Identifica nodos interiores
68         con= mINDEX(~aux,:); %Identifica nodos contorno
69         nn=5;
70         if or(length(con)<nn,length(int)<n-nn)
71             display('La cantidad de nodos a elegir es menor a la cantidad de nodos ...
                    por nube especificada')
72             caso=1;
73             break
74         end
75         mINDEX= sortrows([con(1:nn,:);int(1:n-nn,:)],2);
76         CLOUDS(ix,:) = mINDEX(:,1);
77     end
78     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Funciones de Forma %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
79
80     DMIN(ix,1) = min(mINDEX(mINDEX(:,2)>0,2));
81     DMAX(ix,1) = max(mINDEX(2:n,2));
82     dxm      = max(mINDEX(2:n,3));
83     dym      = max(mINDEX(2:n,4));
84     dxa      = mINDEX(1:n,6)/dxm;
85     dya      = mINDEX(1:n,7)/dym;
86     d        = sqrt(dxa.*dxa+dya.*dya);
87     %Matrices P y W para funciones de forma.
88     P=[ones(n,1) dxa dya dxa.^2 dxa.*dya dya.^2];
89     WI=wfunction(d,problem.data(4));
90     % Polinomio base y sus derivadas evaluadas en el nodo estrella
91     p=[1 0 0 0 0 0]';
92     px=[0 -1/dxm 0 0 0 0]';
93     py=[0 0 -1/dym 0 0 0]';
94     pxx=[0 0 0 2/dxm^2 0 0]';
95     pyy=[0 0 0 0 2/dym^2]';
96     pxy=[0 0 0 0 1/(dxm*dym) 0]';
97
98     %Matrices con funciones de forma
99     AI=P'*WI*P;
100    rcond.AI(ix)=rcond(AI);
101    BI=P'*WI;
102    CII=AI\BI;

```

```

103     N(ix,:) = p'*CI1;
104     Nx(ix,:) = px'*CI1;
105     Ny(ix,:) = py'*CI1;
106     Nxx(ix,:) = pxx'*CI1;
107     Nyy(ix,:) = pyy'*CI1;
108     Nxy(ix,:) = pxy'*CI1;
109
110     % Test para las funciones de forma (Test de parcela)
111     NN=N(ix,:);
112     ftesti=DOMi(ix,2)+DOMi(ix,3);
113     XIh=- (mINDEX(1:n,6)-DOMi(ix,2));
114     YIh=- (mINDEX(1:n,7)-DOMi(ix,3));
115     ftetsthi=XIh'*NN'+YIh'*NN';
116     etest(ix)=ftesti-ftetsthi;
117 end
118 rDMIN=DMIN(:,1);
119 rDMAX=DMAX(:,1);
120 Ni{i}(:, :, 1)=N;Ni{i}(:, :, 2)=Nx;Ni{i}(:, :, 3)=Ny; ...
    Ni{i}(:, :, 4)=Nxx;Ni{i}(:, :, 5)=Nxy;Ni{i}(:, :, 6)=Nyy;
121 ratioi{i}=rDMIN./rDMAX;
122 CLOUDSi{i}=CLOUDS;
123 etesti{i}=etest;
124 rcond_AIi{i}=rcond_AI;
125 end
126
127 end

```

Separación por subdominios

```

1  %-Crea el arreglo DOM, que contiene la matriz de nodos para cada n_subdominio
2  %-Crea la matriz de las constantes elasticas correspondiente a cada sub-dom
3  %-Crea matrices de nodos interfaz indicando los subdominios que lo comparten
4  %-Modifica BOUND.CONNECT, agregando los nodos interfaz por si se desean nubes sin ...
    nodos interfaz en ellas para los nodos interfaz.
5  %-Modifica NODES, coloca los angulos normales a la interfaz para los nodos interfaz.
6
7  function [DOM,Dg,NODES,nodosin]=subdomains(NODES,DOM,Dg)
8
9  nodosin=[];
10 if isempty(DOM)==1 %Si no existe crea, actualiza de lo contrario.
11
12     load BIMAT.DATA.txt;
13     load MATERIAL.DATA.txt;
14     load BOUND.NODES.txt;
15     load PROBLEM.DATA.txt;
16     load INTERFAZ.txt;
17     load CORNERS.NODES.txt;
18     ps=PROBLEM.DATA(1);
19
20     %MATERIALES
21     EY=[MATERIAL.DATA(2) MATERIAL.DATA(5)];
22     ni=[MATERIAL.DATA(3) MATERIAL.DATA(6)];

```

```

23     %Identificacion de la cantidad de subdominios
24     n_subd=max(BIMAT_DATA(:,2));
25     n_mat=max(BIMAT_DATA(:,3));
26     %Identificacion nodos interfaz/contorno
27     con_int=intersect (INTERFAZ(:,1), CORNERS_NODES ());
28     for k=1:length(con_int)
29         INTERFAZ (INTERFAZ(:,1)==con_int(k),:)=[];
30     end
31     %Identificando nodos interfaz en la matriz principal
32     NODES (INTERFAZ(:,1),5)=9;
33     %Aade subdominio
34     INTERFAZ(:,end+1)=BIMAT_DATA (INTERFAZ(:,1),2);
35     %Ordena por subdominio y coordenada
36     INTERFAZ=sortrows (sortrows (sortrows (INTERFAZ,4),3),2);
37     %Nodos primer subdominio
38     INTERFAZ1=INTERFAZ (1:2:end-1,:);
39     %Nodos segundo subdominio
40     INTERFAZ2=INTERFAZ (2:2:end,:);
41     %Nodos interfaz + subdominios de pertenencia
42     nodosin=[INTERFAZ1(:,1) INTERFAZ2(:,1) INTERFAZ1(:,4) INTERFAZ2(:,4)];
43     %Establecer conexion en matriz NODES
44     NODES (nodosin(:,1),6)=nodosin(:,2);
45     NODES (nodosin(:,2),6)=nodosin(:,1);
46     %Igualar angulo normal en nodos pares de la interfaz
47     NODES (nodosin(:,1),9)=NODES (nodosin(:,2),9);
48     %Creacion de DOM Y Dg
49     for ki=1:n_subd
50         aux2=BIMAT_DATA(:,2)==ki;
51         aux=BIMAT_DATA (aux2,:);
52         mat=aux (1,3);
53         aux=setdiff (BIMAT_DATA (aux2,1),0);
54         DOM{ki}=NODES (aux,:);
55     if mat==1
56         E=EY (1);v=ni (1);
57     else
58         E=EY (2);v=ni (2);
59     end
60     if ps==1
61         D1=1;
62         D2=v;
63         D3=(1-v)/2;
64         f=E/(1-v^2);
65     else
66         D1=1-v;
67         D2=v;
68         D3=(1-2*v)/2;
69         f=E/((1+v)*(1-2*v));
70     end
71     Dg{ki}=f*[D1 D2 0; D2 D1 0; 0 0 D3];
72     end
73     else
74         %Actualizamos solo la informacion que cambio de celda a celda.
75         for i=1:length(DOM)
76             DOM{i}(:,7:8)=NODES (DOM{i}(:,1),7:8);
77         end
78     end
79     end

```

Implementación de las condiciones de continuidad

```

1  function KGt=interface(DOM,nodosin,Dg,CLOUDS,N,NODES)
2
3  KGt=sparse(0);interfaz=[];
4  aux=nodosin;k=1;
5  while numel(aux)≠0
6      v=aux(1,3:4);
7      aux2=aux(and(aux(:,3)==v(1),aux(:,4)==v(2)),:);
8      if size(aux2,1)>1
9          interfaz{k}=aux2;
10         k=k+1;
11     end
12     aux(and(aux(:,3)==v(1),aux(:,4)==v(2)),:)=[];
13 end
14 for n=1:length(interfaz)
15
16     Nint=length(interfaz{n}); %Cantidad de nodos de interfaz n-esima
17     nodosin=interfaz{n};
18     di=nodosin(1,3:4);
19     i=di(1);j=di(2);
20     vi=[];vj=[];
21     for k=1:Nint
22         vi=[vi; find(CLOUDS{i}(:,1)==nodosin(k,1))]; %buscar la posicion de los nodos ...
23         vj=[vj; find(CLOUDS{j}(:,1)==nodosin(k,2))]; %buscar la posicion de los nodos ...
24         %interfaz dentro de la matriz nube
25     end
26     Ni=[];Nj=[];
27     CLOUDSi=CLOUDS{i}(vi,:);
28     CLOUDSj=CLOUDS{j}(vj,:);
29     Ni(:, :, 1)=N{i}(vi, :, 1); %N interfaz
30     Nj(:, :, 1)=N{j}(vj, :, 1);
31     Ni(:, :, 2)=N{i}(vi, :, 2); %Nx interfaz
32     Nj(:, :, 2)=N{j}(vj, :, 2);
33     Ni(:, :, 3)=N{i}(vi, :, 3); %Ny interfaz
34     Nj(:, :, 3)=N{j}(vj, :, 3);
35     DOMi=DOM{i}(vi,:);
36     DOMj=DOM{j}(vj,:);
37     %La creacion de "interfaz{n}" permite que todo el procedimiento abajo no se
38     %repita "Nint" veces innecesariamente.
39     KGti=assemblage_continuity(Dg{i},DOMi,CLOUDSi,Ni,NODES,1);
40     KGtj=assemblage_continuity(Dg{j},DOMj,CLOUDSj,Nj,NODES,2);
41     KGt=KGt+(KGti-KGtj);
42 end

```

Ensamblaje condiciones de continuidad

```

1  %Ensamblaje condiciones de continuidad
2  function KGt=assemblage_continuity(D,DOM,CLOUDS,N,NODES, caso)
3
4  Nclouds=size(CLOUDS,2);
5  nn=length(NODES);
6  nzmax=nn*Nclouds*4;
7  ixi=ones(nzmax,1);
8  ixj=2*nn*ones(nzmax,1);
9  St=zeros(nzmax,1); % Vector que guarda los terminos de KG
10 No=N(:, :, 1);
11 Nx=N(:, :, 2);
12 Ny=N(:, :, 3);
13 nx= repmat(cos(NODES(DOM(:,1),9)),1,size(Nx,2));
14 ny= repmat(sin(NODES(DOM(:,1),9)),1,size(Nx,2));
15 S1=D(1,1)*Nx.*nx+D(3,3)*Ny.*ny;
16 S2=D(1,2)*Ny.*nx+D(3,3)*Nx.*ny;
17 S3=D(3,3)*Ny.*nx+D(1,2)*Nx.*ny;
18 S4=D(3,3)*Nx.*nx+D(2,2)*Ny.*ny;
19 S1=[S1;No];
20 S2=[S2;zeros(size(No))];
21 S3=[S3;zeros(size(No))];
22 S4=[S4;No];
23 if caso==1
24   nodosi=[DOM(:,1);DOM(:,6)];
25 else
26   nodosi=[DOM(:,6);DOM(:,1)];
27 end
28 nodosj=[CLOUDS;CLOUDS];
29 pi1=repmat(2*nodosi-1,1,Nclouds);
30 pi2=repmat(2*nodosi,1,Nclouds);
31 pj1=2*nodosj-1;
32 pj2=2*nodosj;
33
34 So=[S1;S2;S3;S4];
35 ixil=[pi1;pi1;pi2;pi2];
36 ixj1=[pj1;pj2;pj1;pj2];
37 ixi(1:length(ixil(:)))=ixil(:);
38 ixj(1:length(ixj1(:)))=ixj1(:);
39 St(1:length(So(:)))=So(:);
40
41 KGt=sparse(ixi,ixj,St,2*nn,2*nn,nzmax);
42 end

```

Ensamblaje matriz de rigidez

```

1  %Creacion de la matriz de rigidez KG y el vector de fuerzas b.
2  %La matriz KG se calcula una sola vez, la matriz b varia de problema a
3  %problema.
4  function [KG,b]=assemblageM(Dg,CLOUDS,N,DOM,KG,KGt)
5  % Condiciones de Contorno;
6  %      0 -- INTERIOR
7  %      1 -- Dirichlet X-Y          ux  uy
8  %      2 -- Dirichlet X           ux
9  %      3 -- Dirichlet Y           uy
10 %      4 -- Neumann Traccion X-Y  tx  ty  (Traccion nula => Contorno libre)
11 %      5 -- Neumann Traccion Normal  tn
12 %      6 -- Neumann Traccion CORTANTE  tc
13 %      7 -- Traccion periodica      tp
14 %      8 -- Desplazamiento peridico  up
15
16 for i=1:length(DOM)
17     maxi(i)=DOM{i}(end,1);
18 end
19 nn=max(maxi);
20 b=sparse(0);
21 if isempty(KG)==1
22     a=0; %Calcula desde los nodos interiores con id=0
23     Nclouds=size(CLOUDS{1},2);
24     nzmax=nn*Nclouds*4; % Cantidad de elementos en KG
25     KG=KGt; %Condicion de continuidad aadida
26 else
27     a=1; %Evita recalcular para nodos interiores
28 end
29
30 for ki=1:length(DOM)
31     DOMi=DOM{ki};CLOUDSi=CLOUDS{ki};Ni=N{ki};D=Dg{ki};
32     nodos=[];nubes=[];S1=[];S2=[];S3=[];S4=[];bx=[];by=[];
33     for i=a:8
34         nint=DOMi(:,5)==i;
35         if isempty(DOMi(nint,1))==0
36             sign=1;
37             if i==7
38                 %cond de desplazamiento en lugar de los nodos con id=8
39                 nodos=[nodos;DOMi(nint,6)];
40                 nubes=[nubes;CLOUDSi(nint,:)];
41                 sign=-1; %Para restar la condicion de desplazamiento periodico
42             end
43             nodos=[nodos;DOMi(nint,1)];
44             nubes=[nubes;CLOUDSi(nint,:)];
45             if i==8
46                 %cond de fuerzas en lugar de lods nodos id=7
47                 nodos=[nodos;DOMi(nint,6)];
48                 nubes=[nubes;CLOUDSi(nint,:)];
49             end
50             if a==0
51                 %LLAMA A LAS MATRICES SOLO SI SON NECESARIAS
52                 if (i==1 || i==2 || i==3 || i==7 || i==8)
53                     No=sign*Ni(nint,:,1);

```

```

54         end
55         if (i>1 && i<=8)
56             Nx=Ni (nint, :, 2);
57             Ny=Ni (nint, :, 3);
58             nx=repmat (cos (DOMi (nint, 9)), 1, size (Nx, 2));
59             ny=repmat (sin (DOMi (nint, 9)), 1, size (Nx, 2));
60             if i==6
61                 nx=cos (repmat (DOMi (nint, 9)-pi/2, 1, size (Nx, 2)));
62                 ny=sin (repmat (DOMi (nint, 9)-pi/2, 1, size (Nx, 2)));
63             end
64         end
65         if i==0
66             Nxx=Ni (nint, :, 4);
67             Nxy=Ni (nint, :, 5);
68             Nyy=Ni (nint, :, 6);
69
70             S1=[S1;D (1, 1) *Nxx+D (3, 3) *Nyy];
71             S2=[S2;Nxy*(D (1, 2)+D (3, 3))];
72             S3=S2;
73             S4=[S4;D (2, 2) *Nyy+D (3, 3) *Nxx];
74         end
75         if (i==1 || i==2 || i==7 || i==8)
76             S1=[S1;No];
77             S2=[S2;zeros (size (No))];
78         end
79         if (i==1 || i==3 || i==7 || i==8)
80             S3=[S3;zeros (size (No))];
81             S4=[S4;No];
82         end
83         if (i>=3 && i<=8)
84             S1=[S1;D (1, 1) *Nx.*nx+D (3, 3) *Ny.*ny];
85             S2=[S2;D (1, 2) *Ny.*nx+D (3, 3) *Nx.*ny];
86         end
87         if (i<=0 && i<=1 && i<=3)
88             S3=[S3;(D (3, 3) *Ny.*nx+D (1, 2) *Nx.*ny)];
89             S4=[S4;(D (3, 3) *Nx.*nx+D (2, 2) *Ny.*ny)];
90         end
91     end
92     %Formato coordenada - valor
93     if (i==1 || i==2 || i==4 || i==8 )
94         bx=[bx;2*DOMi (nint, 1)-1 DOMi (nint, 7)];
95     end
96     if (i==1 || i==3 || i==4 || i==8 )
97         by=[by;2*DOMi (nint, 1) DOMi (nint, 8)];
98     end
99     if (i==5 || i==6)
100         bx=[bx;2*DOMi (nint, 1)-1 DOMi (nint, 7) .*nx(:, 1)];
101         by=[by;2*DOMi (nint, 1) DOMi (nint, 7) .*ny(:, 1)];
102     end
103 end
104 if a==0
105     %Coordenadas i, dependiente del nodo estrella.
106     pi1=repmat (2*nodos-1, 1, Nclouds);
107     pi2=repmat (2*nodos, 1, Nclouds);
108     %Coordenada j, dependiente de los nodos nube.
109     pj1=2*nubes-1;
110

```

```

111     pj2=2*nubes;
112
113     So = [S1; S2; S3; S4];    %KG KG KG KG
114     ixi1=[pi1;pi1;pi2;pi2]; %1  1  2  2
115     ixj1=[pj1;pj2;pj1;pj2]; %1  2  1  2
116
117     KG=KG+sparse(ixi1,ixj1,So,2*nn,2*nn,nzmax);
118     end
119     bi=sparse(zeros(2*nn,1));
120     bii=[bx;by];
121     if isempty(bii)==0
122         ixi2=bii(:,1);
123         sb=bii(:,2);
124         bi=sparse(ixi2,ones(length(ixi2),1),sb,2*nn,1,2*nn);
125     end
126     b=b+bi;
127 end
128 end

```

Cálculo de resultados

```

1  %CALCULA LAS VARIABLES DE CAMPO A PARTIR DE LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES.
2  %LOS VALORES DE CADA VARIABLE SERAN UNA SUMA PONDERADA DE LA NUBE DE CADA
3  %NODO.
4
5  function [disp, strain, stress, vmises, dispX, dispY, Mrcond_AI, Mratio, Metest]= ...
        results(uh,Dg,CLOUDS,N,rcond_AI,ratio,etest)
6
7  ng=size(uh,1)/2; %Numero de nodos totales
8  disp=zeros(ng,2);
9  strain=zeros(ng,3);
10 stress=zeros(ng,3);
11 Mrcond_AI=zeros(ng,1);
12 Mratio=zeros(ng,1);
13 Metest=zeros(ng,1);
14 nt=length(CLOUDS);
15 for k=1:nt
16     i=nt+1-k; %orden invertido
17     Ni=N{i};
18     CLOUDSi=CLOUDS{i};
19     D=Dg{i};
20     if iscell(ratio)==1
21         rcond_Ai=rcond_AI{i};
22         ratioi=ratio{i};
23         etesti=etest{i};
24     end
25     Nx=Ni(:, :, 2); Ny=Ni(:, :, 3); NI=Ni(:, :, 1);
26     uh1=uh(1:2:end-1);
27     uh2=uh(2:2:end);
28     uh1I=uh1(CLOUDSi);
29     uh2I=uh2(CLOUDSi);
30     dispX=sum((uh1I.*NI),2);

```

```
31     dispy=sum((uh2I.*NI),2);
32     strainx=sum((uh1I.*Nx),2);
33     strainy=sum((uh2I.*Ny),2);
34     strainxy=sum((uh2I.*Nx),2)+sum((uh1I.*Ny),2);
35     v=CLOUDSi(:,1);
36     disp(v,:)=[dispx dispy];
37     strain(v,:)=[strainx strainy strainxy];
38     stress(v,:)=strain(v,:)*D;
39     if iscell(ratio)==1
40         MrcondAI(v,:)=rcondAIi;
41         Mratio(v,:)=ratioi;
42         Metest(v,:)=etesti;
43     else
44         MrcondAI=rcondAI;
45         Mratio=ratio;
46         Metest=etest;
47     end
48 end
49 %Von Mises solo Tension Plana
50 vmises=sqrt((stress(:,1)).^2+(stress(:,2)).^2+3*(stress(:,3)).^2-stress(:,1).*stress(:,2)));
51
52 end
```

Bibliografía

- Adams D. F. & Doner D. R. (1967). Transverse normal loading of a unidirectional composite. *Journal of composite Materials*, 1(2):152–164.
- Aluru N. R. & Li G. (2001). Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2373–2410.
- Angulo A. (2007). *Una estrategia de refinamiento adaptivo para el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María. Tesis Magister.
- Anthoine A. (1995). Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2):137–163.
- Anthoine A. & Pegon P. (1996). Numerical analysis and modelling of the damage and softening of brick masonry. In *Numerical Analysis and Modelling of Composite Materials*, pages 152–184. Springer.
- Aranda J. (2007). *Desarrollo de un módulo de cálculo para el análisis lineal de geometrías 3D mediante un método sin malla*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile. Trabajo de Titulo.
- Atluri S. & Zhu T. (1998). A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127.
- Attaway S. , Heinstejn M. & Swegle J. (1994). Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear Engineering Design*, 150:199–205.
- Babuska I. & Melenk J. (1995). *The partition of unity finite element method*. Institute for Physics, Science, and Technology, University of Maryland, Maryland. Technique Report.
- Babuska I. & Melenk J. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314.
- Belytschko T. & Black T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5):601–620.
- Belytschko T. , Krongauz Y. , Fleming M. , Organ D. & Liu W. K. S. (1996a). Smoothing and accelerated computations in the element free galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74(1):111–126.
- Belytschko T. , Krongauz Y. , Organ D. , Fleming M. & Krysl P. (1996b). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47.

- Belytschko T. , Lu Y. & Gu L. (1994). Element free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- Belytschko T. , Organ D. & Krongauz Y. (1995a). A coupled finite element - free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17:186–195.
- Belytschko T. , Organ D. & Krongauz Y. (1995b). A coupled finite element-element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17(3):186–195.
- Bensoussan A. , Lions J.-L. & Papanicolaou G. (2011). *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 374. American Mathematical Soc.
- Betten J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *Journal of Rheology (1978-present)*, 25(6):565–581.
- Betten J. (1988). Applications of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4(1):29–46.
- Budiansky B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):223–227.
- Car E. J. (2000). Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos.
- Chamis C. C. (1984). Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. *SAMPE Quarterly*, pages 14–23.
- Chao M. (1997). *Introducción a los métodos numéricos sin malla: Fundamentación y desarrollo de formulaciones de mínimos cuadrados ponderados*. PhD thesis, PhD thesis, España.
- Chen T. & Raju I. (2002). Coupling finite element method and meshless local petrov-galerkin methods for two-dimensional potential problems. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1659.
- Chen Y. , Lee J. & Eskandarian A. (2006). *Meshless methods in solid mechanics*. Springer Science & Business Media.
- Cheng R. & Cheng Y. (2007). Error estimates for the finite point method. *Applied Numerical Mathematics*, In Press.
- Christensen R. M. (2012). *Mechanics of composite materials*. Courier Corporation.
- Cordes L. & Moran B. (1996). Treatment of material discontinuity in the element-free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1):75–89.
- De S. & Bathe K. (2000). The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25:329–345.
- Derek H. (2000). Materiales compuestos. *Editorial Reverté, SA*.
- Devries F. , Dumontet H. , Duvaut G. & Léné F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(2):285–298.
- Duarte C. & Oden J. (1996). An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262.

- Duarte C. A. & Oden J. (1995). *A review of some meshless methods to solve partial differential equations*. Texas Institute for Computational and Applied Mathematics.
- Duvaut G. (1976). Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. *Theoretical and Applied Mechanics. WT Koiter*, pages 119–131.
- Eshelby J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 241, pages 376–396. The Royal Society.
- Fish J. & Belsky V. (1995a). Multi-grid method for periodic heterogeneous media part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1):17–38.
- Fish J. & Belsky V. (1995b). Multigrid method for periodic heterogeneous media part 1: Convergence studies for one-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1):1–16.
- Fish J. & Markolefas S. (1993). Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104(3):363–396.
- Fish J. , Markolefas S. , Guttal R. & Nayak P. (1994a). On adaptive multilevel superposition of finite element meshes for linear elastostatics. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1):135–164.
- Fish J. , Nayak P. & Holmes M. H. (1994b). Microscale reduction error indicators and estimators for a periodic heterogeneous medium. *Computational Mechanics*, 14(4):323–338.
- Fish J. & Wagiman A. (1993). Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium. *Computational Mechanics*, 12(3):164–180.
- Fleming M. , Chu Y. , Moran B. , Belytschko T. , Lu Y. & Gu L. (1997). Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International journal for numerical methods in engineering*, 40(8):1483–1504.
- Fries T.-P. & Matthies H. G. (2003). Classification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Braunschweig*.
- George P. & Borouchaki H. (1998). *Delaunay Triangulation and Meshing*. Hermes, Paris.
- Ghosh S. , Lee K. & Moorthy S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1):27–62.
- Ghosh S. , Lee K. & Moorthy S. (1996). Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132(1):63–116.
- Ghosh S. & Mukhopadhyay S. (1991). A two-dimensional automatic mesh generator for finite element analysis for random composites. *Computers & structures*, 41(2):245–256.

- Ghosh S. & Mukhopadhyay S. N. (1993). A material based finite element analysis of heterogeneous media involving dirichlet tessellations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104(2):211–247.
- GiDv12 (2016). *GID, personal pre and post processor*. CIMNE, Barcelona-España. <http://gid.cimne.upc.es>.
- Gingold R. & Monaghan J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices Royal Astr. Soc.*, 181:375–387.
- Green A. E. & Naghdi P. M. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *International journal of engineering Science*, 3(2):231–241.
- Griffith A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221:163–198.
- Gu Y. (2005a). Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 2:477–515.
- Gu Y. (2005b). Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 2(04):477–515.
- Gu Y. & Liu G. (2002a). A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 28:47–54.
- Gu Y. & Liu G. (2002b). A coupled element free galerkin / boundary element method for stress analysis of two-dimensional solids. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4405–4419.
- Gu Y. & Liu G. (2003). Hybrid boundary point interpolation methods and their coupling with the element free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:905–917.
- Guedes J. & Kikuchi N. (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 83(2):143–198.
- Hashin Z. (1970). *Mechanics of composite materials, chapter Theory of composite materials*. Pergamon: Oxford.
- Hashin Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):143–150.
- Hashin Z. (1970). *Mechanics of composite materials, chapter Theory of composite materials*. Pergamon: Oxford.
- Hashin Z. (1983). Analysis of composite materials—a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):481–505.
- Hashin Z. & Rosen B. W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of applied mechanics*, 31(2):223–232.

- Herakovich C. T. (2012). Mechanics of composites: a historical review. *Mechanics Research Communications*, 41:1–20.
- Hill R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 193, pages 281–297. The Royal Society.
- Hill R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222.
- Hill R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2):79–95.
- Hitchon J. & Phillips D. (1979). The dependence of the strength of carbon fibres on length. *Fibre Science and Technology*, 12(3):217–233.
- Hughes T. J. (2012). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation.
- Idelsohn S. , Sonzogni V. & Cardona A. (2002). Implementación del método sin malla de puntos finitos para transferencia de calor. *Mecánica Computacional*, 21:1433–1443.
- Idelsohn S. R. , Oñate E. , Calvo N. & Pin. F. D. (2003). The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (58):893–912.
- Jansson S. (1992). Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure. *International Journal of Solids and Structures*, 29(17):2181–2200.
- Jensen P. (1972). Finite difference technique for variable grids. *Computers and Structures*, (2):17–29.
- Kansa E. (1990a). Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. i surface approximation and partial derivative estimates. *Computers and Mathematics with Applications*, (19):127–145.
- Kansa E. (1990b). Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, (19):147–161.
- Kenaga D. , Doyle J. F. & Sun C. (1987). Characterization of boron/aluminum composite in the nonlinear range as an orthotropic elastic-plastic material. *J. Compos. Mater.:(United States)*, 21.
- Kevorkian J. , Cole J. & Nayfeh A. H. (1982). Perturbation methods in applied mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc*, 7:414–420.
- Kothnur V. , Mukherjee S. & Mukherjee Y. (1999). Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (36):1129–1147.
- Kouznetsova V. , Brekelmans W. & Baaijens F. (2001). An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27(1):37–48.
- Krongauz Y. & Belytschko T. (1998). Efg approximation with discontinuous derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(7):1215–1233.

- Lancaster P. & Salkauskas K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158.
- Lee K. , Moorthy S. & Ghosh S. (1999). Multiple scale computational model for damage in composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172(1):175–201.
- Lene F. (1986). Damage constitutive relations for composite materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):713–728.
- Lene F. & Duvaut G. (1981). Résultats d'isotropie pour des milieux homogénéisés. *CR Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, 293(7):477–480.
- Lene F. & Leguillon D. (1982). Homogenized constitutive law for a partially cohesive composite material. *International Journal of Solids and Structures*, 18(5):443–458.
- Lévy T. (1987). Fluids in porous media and suspensions. *Homogenization Techniques for Composite Media, Lecture Notes in Physics*, 272:64–69.
- Li G. , Paulino G. & Aluru N. (2003). Coupling of the mesh-free finite cloud method with the boundary element method: a collocation approach. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2355–2375.
- Li S. & Liu W. (2004). *Meshfree particle methods*. Springer, Berlin.
- Li S. & Liu W. K. (2007). *Meshfree particle methods*. Springer Science & Business Media.
- Liszka T. & Orkisz J. (1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures*, 11:83–95.
- Liu G. (2002). *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC press, USA.
- Liu G. & Gu Y. (2001a). A local radial point interpolation method (lrpim) for free vibration analyses of 2-d solids. *Journal of Sound and Vibration*, 246:29–46.
- Liu G. & Gu Y. (2001b). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:937–951.
- Liu G. & Gu Y. (2004). Boundary meshfree methods based on the boundary point interpolation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(5):475–487.
- Liu G. , Wu Y. & Ding H. (2004). Meshfree weak-strong (mws) form method and its application to incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:1025–1047.
- Liu G.-R. (2009). *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. Taylor & Francis.
- Liu W. , Chen Y. , Jun S. , Chen J. , Belytschko T. , Pan C. , Uras R. & Chang C. (1996). Overview and applications of the reproducing kernel particle method. *Archives of Comput. Meth. in Engng.*, 3:3–80.
- Liu W. , Jun S. & Zhang Y. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 20:1081–1106.

- Liu W.-K. , Li S. & Belytschko T. (1997). Moving least-square reproducing kernel methods (i) methodology and convergence. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 143(1):113–154.
- Löhner R. , Sacco C. , Onate E. & Idelsohn S. (2002). A finite point method for compressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8):1765–1779.
- Lu Y. , Belytschko T. & Gu L. (1994). A new implementaion of the element free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:397–414.
- Lucy L. (1977). A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astron. Journal*, 82:1013–1024.
- Maier G. , Nappi A. & Papa E. (1991). Damage models for masonry as a composite material: a numerical and experimental analysis. *Constitutive Laws for Engineering Materials*, pages 427–432.
- Malvern L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Mandel J. (1972). *Plasticité classique et viscoplasticité: course held at the Department of Mechanics of Solids, September-October, 1971*. Not Avail.
- Martin A. (2006). *Análisis y formulación de un estimador del error en el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile. Trabajo de Titulo.
- MATLAB (2007). *MATLAB®- The Language of Technical Computing*. MathWorks, Natick-Massachusetts. <http://www.mathworks.com>.
- Michel J. , Moulinec H. & Suquet P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172(1):109–143.
- Mitchell A. R. & Griffiths D. F. (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley.
- Mitchell M. & Aluru N. (1999). Simulation of electroosmosis using a meshless finite point method. In *Technical Proceedings of the 1999 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 522–525.
- Moës N. , Oden J. T. & Zohdi T. I. (1998). Investigation of the interactions between the numerical and the modeling errors in the homogenized dirichlet projection method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159(1):79–101.
- Mori T. & Tanaka K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5):571–574.
- Nayroles B. , Touzot G. & Villon P. (1992). Generalizing the fem: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318.
- Oñate E. (1996). On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81.
- Oñate E. (2004). Possibilities of finite calculus in computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:255–281.
- Oñate E. & Idelsohn S. (1998). A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21:283–292.

- Oñate E. , Idelsohn S. , Zienkiewics O. , Taylor R. & Sacco C. (1996a). A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346.
- Oñate E. , Idelsohn S. , Zienkiewicz O. & Taylor R. (1996b). A finite point methods in computational mechanics, aplication to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866.
- Oñate E. , Perazzo F. & J.Miquel (2001). A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163.
- Oñate E. , Sacco C. & Idelsohn S. (2000). A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75.
- Obraztsov I. & Vasilev V. (1982). Mechanics of composites. (*Translation of Mekhanika kompozitnykh sred, Moscow, Izdatel'stvo Mir, 1982*) Moscow, Mir Publishers, 1982, 280.
- Oden J. T. , Vemaganti K. & Moës N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1):3–25.
- Oleinik O. A. , Shamaev A. & Yosifian G. (2009). *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, volume 2. Elsevier.
- Oller S. (2003). *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*.
- Oller S. , Botello S. , Miquel J. & Oñate E. (1995a). An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, 12(3):245–262.
- Oller S. , Neamtu L. & Oñate E. (1995b). Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. *MATCOMP*, 95:433–438.
- Oñate E. (1998). Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151(1):233–265.
- Oñate E. , Idelsohn S. , Zienkiewicz O. , Taylor R. & Sacco C. (1996). A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1):315–346.
- Oñate E. , Oller S. , Botello S. & Canet J. M. (1991). *Métodos avanzados de cálculo de estructuras de materiales compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Oñate E. , Perazzo F. & Miquel J. (2003). Advances in the stabilized finite point method for structural mechanics. In *European Conference on Computational Mechanics, CIMNE, München*.
- Ortega E. , Oñate E. & Idelsohn S. (2007). An improved finite point method for tridimensional potential flows. *Computational Mechanics*, 40(6):949–963.
- Ortiz M. & Popov E. (1982a). A physical model for the inelasticity of concrete. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 383, pages 101–125. The Royal Society.

- Ortiz M. & Popov E. P. (1982b). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of materials*, 1(2):139–150.
- Pande G. , Liang J. & Middleton J. (1989). Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers and Geotechnics*, 8(3):243–265.
- Pant M. & Sharma K. (2014). A comparative study of modeling material discontinuity using element free galerkin method. *Procedia Engineering*, 86:758–766.
- Pavlov P. & Jojlov A. (1987). *Física del estado sólido*. Rubiños-1860.
- Perazzo F. , Lohner R. & Perez-Pozo L. (2007). Adaptive methodology for meshless finite point method. *Advances in Engineering Software*, 22:153–168.
- Perazzo F. , Miquel J. & Oñate E. (2004a). El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 20:235–246.
- Perazzo F. , Miquel J. & Oñate E. (2004b). El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 20:235–246.
- Perazzo F. , Oller S. , Miquel J. & Oñate E. (2006). Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168.
- Pérez L. , Chacana F. & Quelm J. (2011). Regularización de la energía de fractura para el análisis de dano isotrópico mediante el método sin malla de puntos finitos. *Mecánica Computacional*, 30:755–772.
- Pérez Pozo L. (2008). *Simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas y el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaiso, Chile. Tesis Doctoral.
- Pérez Pozo L. , Campos A. , Lascano S. , Oller S. & Rodríguez-Ferran A. (2014). A finite points method approach for strain localization using the gradient plasticity formulation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- Pérez Pozo L. , Meneses R. , Spa C. & Durán O. (2012). A meshless finite-point approximation for solving the rlw equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- Pérez Pozo L. , Perazzo F. & Angulo A. (2009). A meshless fpm model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40(11):1148–1154.
- Perez Pozo L. , Perez F. & Duran O. (2014). Correction of meshless fpm interpolation sub-domains using genetic algorithms.
- Perrone N. & Kao R. (1975). A general finite difference method for arbitrary meshes. *Computer and Structures*, 5:45–58.
- Pian T. H. (1964). Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA journal*, 2(7):1333–1336.

- Pietruszczak S. & Niu X. (1992). A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry. *International journal of solids and structures*, 29(5):531–546.
- Qian S. & Weiss J. (1993). Wavelet and the numerical solution of partial differential equations. *Journal Comput. Phys*, 106:155.
- Rao B. & Rahman S. (2001). A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78:647–657.
- Riley M. & Whitney J. (1966). Elastic properties of fiber reinforced composite materials. *Aiaa Journal*, 4(9):1537–1542.
- Sadd M. H. (2009). *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press.
- Sánchez-Hubert & Sánchez-Palencia (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation: application à la mécanique des milieux continus*. Masson.
- Sanchez-Palencia E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4):331–351.
- Sanchez-Palencia E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory.
- Sanchez-Palencia E. & Zaoui A. (1987). Boundary layers and edge effects in composites. In *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272.
- Simo J. C. & Hughes T. J. (2006). *Computational inelasticity*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- Strouboulis T. , Copps K. & Babuska I. (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4081–4193.
- Sukumar N. , Moes N. , Moran B. & Belytschko. T. (2000). Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1549–1570.
- Sulsky D. , Chen Z. & Schreyer H. (1992). The application of a material-spatial numerical method to penetration. *New methods in Transient Analysis, ASME New York*, 246:91–102.
- Sun C. & Chen J. (1991). A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites. *Composites Science and Technology*, 40(2):115–129.
- Sun C. & Vaidya R. (1996). Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2):171–179.
- Suquet P. (1982). *Plasticité et Homogénéisation*. Université Pierre et Marie Curie, Paris. PhD Tesis.
- Suquet P. (1987). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. *Homogenization techniques for composite media*, 272:193–278.
- Swan C. C. (1994). Techniques for stress-and strain-controlled homogenization of inelastic periodic composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 117(3-4):249–267.
- Taylor R. , Idelsohn S. , Zienkiewicz O. & Oñate E. (1995). Moving least square approximations for solution of differential equations. *CIMNE Research Report*, 74.

- Tongsuk P. & Kanok-Nukulchai W. (2004). Further investigation of element-free galerkin method using moving kriging interpolation. *International Journal of Computational Method*, 1:345–365.
- Truesdell C. & Toupin R. (1960). *The classical field theories*. Springer.
- Tsai S. W. (1964). Structural behavior of composite materials. Technical report, DTIC Document.
- Tsai S. W. & Wu E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials*, 5(1):58–80.
- Versteeg H. K. & Malalasekera W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education.
- Vuyst T. D. , Vignjevic R. & Campbell J. (2005). Coupling between meshless and finite element methods. *International Journal of Impact Engineering*, 31:1054–1064.
- Wordelman C. , Aluru N. & Ravaioli U. (2000). A meshless method for the numerical solution of the 2- and 3-d semiconductor poisson equation. *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, 1:121–126.
- Xia Z. , Zhang Y. & Ellyin F. (2003). A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *International Journal of Solids and Structures*, 40(8):1907–1921.
- Yeon J. & Youn S. (2000). Recent development of free mesh method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (47):1419–1443.
- Zalamea F. , Canet J. M. & Oller S. (2002). *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización*. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona. PhD Tesis.
- Zalamea F. , Miquel J. , Oller S. , Oñate E. & Owen R. (2000). A double scale method for simulating of periodic composite materials. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- Zhang J. , Yao Z. & Li H. (2002). A hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:751–763.
- Zhang L. , Rong Y. , Shen H. & Huang T. (2007). Solidification modeling in continuous casting by finite point method. *Journal of Materials Processing Technology*. In press.
- Zhang X. , Liu X. , Song K. & Lu M. (2001). Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:1089–1100.
- Zhu T. , J J. Z. & Atluri S. (1998a). A local boundary integral equation (lbie) method in computational mechanics and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 21:223–235.
- Zhu T. , J J. Z. & Atluri S. (1998b). A meshless local boundary integral equation (lbie) method for solving nonlinear problems. *Computational Mechanics*, 22:174–186.
- Zienkiewicz O. & Taylor R. (2000). *El método de los elementos finitos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
- Zohdi T. I. , Oden J. T. & Rodin G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 138(1):273–298.