



Universidad Técnica Federico Santa María.  
Departamento de Física.

---

# Aspectos Cosmológicos en la Teoría de Lovelock-Cartan Cinco-Dimensional

---

**Francisca Gabriela Ramírez Carrasco**

Tutor: Dr. Alfonso Zerwekh

Co-tutor: Dr. Oscar Castillo-Felisola

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los  
requisitos para el grado de Master en Ciencias, mención Física, de  
la Universidad Técnica Federico Santa María.



---

TÍTULO DE LA TESIS:

ASPECTOS COSMOLÓGICOS EN LA TEORÍA DE  
LOVELOCK-CARTAN CINCO-DIMENSIONAL

AUTOR:

FRANCISCA GABRIELA RAMÍREZ CARRASCO

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los  
requisitos para el grado de Master en Ciencias, mención Física,  
de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EXAMINADORA:

Alfonso Zerwekh Arroyo (UTFSM) .....

Osca Castillo-Felisola (UTFSM) .....

Patricio Gaete Durán (UTFSM) .....

Radouane Gannouji (PUCV) .....

14 de septiembre de 2017

---

A mi hermosa familia.

---

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)





# Resumen

En el presente trabajo se estudia la posibilidad de considerar la expansión acelerada del universo como un efecto geométrico de un espaciotiempo cinco-dimensional, en el cual la torsión es considerada distinta de cero. En virtud de obtener un resultado lo más general posible, se estudia la teoría de Lovelock-Cartan; sin embargo se encuentra que el término que incluye explícitamente a la torsión es un término topológico por lo cual no contribuye a las ecuaciones de movimiento, siendo finalmente una teoría de Lovelock cinco-dimensional la que se estudia. En la reducción dimensional a lo Kaluza-Klein, se considera que la dimensión extra es compacta siendo un círculo, es decir,  $\mathcal{M}_5 \rightarrow \mathcal{M}_4 \times S^1$ ; además se consideran sólo los modos cero de los campos reducidos con el fin de estudiar el sector de baja energía. Como se trabaja en el formalismo de primer orden usando formas diferenciales, los campos heredados de la dimensión extra vienen de la una-forma conexión de Lorentz la cual describe la estructura afín del manifold, y de los uno-forma vielbein los cuales definen la estructura métrica y que son a la vez una base ortonormal para el espacio tangente del manifold. Sobre esta teoría reducida se desea estudiar el cosmos a muy grandes escalas, donde el espacio tri-dimensional se presenta homogéneo e isotrópico, es decir, donde se cumple el principio cosmológico. Para esto, se impone la ecuación de Killing sobre los campos a lo largo de los vectores que generan las isometrías (rotaciones y traslaciones en el espacio). Luego de este ansatz las ecuaciones de campo presentan dos ramas de soluciones, una donde se encuentra un punto de Chern-Simons, y la otra cuyas soluciones modelan universos en expansión, contracción y oscilantes, donde el tamaño de la dimensión extra modulada por el dilatón hace la dinámica contraria del tamaño del espaciotiempo. Estas soluciones son dadas para ciertas regiones del espacio de parámetros.



# Agradecimientos

El primer agradecimiento se lo debo a mi esposo Francisco, quien con mucha paciencia y amor me ha acompañado a lo largo de mis estudios en el magister. Cada vez que mis fuerzas flaqueaban, que llegaba abatida por el cansancio y la pena, él estaba ahí para ayudarme a seguir, para darme ánimos y recuperar la confianza en mí. Gracias por tu amor incondicional, por tu hermosa claridad, tu certidumbre en mí y sobre todo por ser un padre y compañero maravilloso, sin estos ingredientes esenciales no se si este largo camino hubiese sido concluido. Esposo mío, espero que este sea el primero de muchos agradecimientos más en tu nombre, y que nuestros corazones sigan siempre juntos.

Sin duda que la materidad te cambia la vida, y el agradecimiento por la sola existencia de mi pequeño hijo Víctor, no puede quedar fuera de los primeros párrafos. Gracias a su nacimiento (y junto con esto mi renacimiento), he logrado centrar un poco más mi vida y poner el esfuerzo máximo en mis estudios. Aunque ha sido muy difícil lidiar en un mundo de hombres que han olvidado lo esencial de la vida, con mayor ímpetu he logrado conciliar ser madre y seguir mi pasión por la física, gracias chicolito juguetero por ser el motor de mi vida! Te amo desde lo profundo de mis entrañas.

Gran parte de mi amor por la física se lo debo a mis padres, Ximena y Lilo, quienes siempre me han dejado ser libre en mis deseos. Sinceramente les agradezco mucho la formación que me dieron, siempre plantando la curiosidad en mi y los deseos de conocer más. Desde niña me vi rodeada de libros, música, arte, y sobre todo de amor. Sin su confianza absoluta en mis capacidades no hubiese llegado hasta aquí, los amo mucho. Agradezco mucho la familia que me tocó, sin mis hermanos Javiera y Lilo, y mis primos Varinia e Ignacio la infancia no hubiese sido la misma. Gracias a mis tías Carla y Andrea (como me gustaría que aun estuvieras con nosotros...) por los momentos interminables de diversión, baile y cariño. Gracias a mi tío Omar por haber sido como un segundo papá y amigo. Finalmente agradecer a mis abuelos Carlos y Ximena, quienes con su gran cariño e historias me regalaron una infancia maravillosa.

No podría dejar de lado a mi segunda familia, quienes me han acompañado estos largos años de estudio en la física, quiero decir a mis compañeros (y por supuesto amigos), con los cuales he ido creciendo. Lorena González, Juan Cajales, Sebastian Dossow, Santiago Andrade, Carlos Rojas, Francisco Canales, Paola Sanchez, Karina Catalan, Erick Contreras, Miguel Solís, Sebastian Norero, Matias Picuntureo, Matias Navia, Sergio Fernandez; muchas gracias por todos los gratos momentos que hemos pasado juntos, siempre los atesoraré en mi mente. También quisiera agradecer especialmente a Marcela González, Bastian Díaz, Felipe Rojas, Sebastian Ortiz y Bernardo Fierro, por sus consejos y experiencias. Y por supuesto a mis amigas personales con quienes he vivido parte de los momentos más alegres en mis estudios: Lía Guzmán, Belén Ríos, Gala Carreño, Loreto Zamora y Abril Palma.

Por supuesto, quisiera dar un reconocimiento especial a mis compañeros y maestros de esta investigación: Oscar Castillo-Felisola, Cristóbal Corral y Simón del Pino. A ustedes les debo

---

prácticamente mi formación en el Magister, muchas gracias por su entrega desinteresada conmigo, porque siempre estaban disponibles para mí, por todo el conocimiento que me entregaron, por el cariño y la motivación. Muchas gracias en especial a Oscar, quien fue mi Co-Tutor de Tesis, por las largas horas en la corrección de la tesis y por todas las enseñanzas.

Finalmente quiero dar las gracias a los profesores que he tenido la gracia de conocer a lo largo de mi formación. Partiendo por el profesor Alfonso Zerwekh, Tutor de mi Tesis, quien me recibió siendo una alumna tímida e insegura, pero que sin embargo depositó toda su confianza en mí; mis más sinceros agradecimientos por todo! En especial también quiero agradecer al primer profesor que tuve de física en la UTFSM, el profesor Guillermo Arrieta (y amigo personal), quien fue una suerte de guía espiritual en mis primeros años de Licenciatura, muchas gracias por las largas discusiones de física, música, filosofía y literatura, y sobre todo muchas gracias por las entretenidas partidas de ajedrez. Gracias a los profesores Patricio Gaete y Radouane Gannouji, quienes cordialmente aceptaron ser parte de la comisión evaluadora de mi Tesis, y que además son excelentes profesores. Y gracias a los siguientes profesores por sus gratas enseñanzas en la física: Goreazd Cvetic, Jorge Valdés, Viktor Slusarenko, Jingga Tan, Antonio Carcamo, Carlos Contreras, Sergey Kovalenko y Juan Manuel Florez.

# Notación

En esta tesis se utilizará la siguiente notación:

Los índices griegos con gorro  $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \dots$  y sin gorro  $\mu, \nu, \dots$  denotarán índices de difeomorfismo, los cuales corren sobre todo el manifold sin reducir y sobre el manifold reducido, respectivamente.

Los índices latinos mayúsculos  $A, B, C, \dots$  y minúsculos  $a, b, c, \dots$  denotarán índices de Lorentz, los cuales corren sobre todo el espacio tangente al manifold sin reducir y sobre el espacio tangente reducido, respectivamente.

La coordenada y el índice de difeomorfismo de la dimensión extra son denotados por  $\xi$ , mientras que el índice de Lorentz de la dimensión extra es denotado por  $*$ .

Los objetos tales como escalares, tensores, espinores, formas diferenciales, etc. que lleven un gorro ( $\hat{R}$ ), pertenecen al manifold sin reducir, y los sin gorro al manifold reducido.

Además los objetos que lleven encima  $\sim$  denotarán la parte Riemanniana de tal objeto ( $\tilde{R}$ ), es decir, sin torsión.

La métrica Minkowskiana es del tipo  $\hat{\eta}_{AB} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$ .

El tensor de Levi-Civita es tal que  $\hat{\epsilon}_{12\dots D+1} = 1$ ; y al fijar el último índice, es decir, el tensor reducido, este queda como  $\hat{\epsilon}_{a_1 a_2 \dots a_D *} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$ .

Serán utilizadas las unidades naturales, es decir,  $\hbar = 1 = c$ .



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Geometría diferencial</b>	<b>5</b>
2.1. Manifold . . . . .	5
2.1.1. Mapas Diferenciales . . . . .	5
2.1.2. Vectores . . . . .	6
2.1.3. Uno-formas . . . . .	7
2.1.4. Tensores . . . . .	7
2.2. Derivada de Lie . . . . .	8
2.2.1. Flujos . . . . .	8
2.2.2. Derivada de Lie . . . . .	9
2.3. Formas diferenciales . . . . .	9
2.3.1. Integración de formas diferenciales . . . . .	10
2.3.2. Dual de Hodge . . . . .	12
2.4. Geometría (pseudo-)Riemanniana . . . . .	12
2.4.1. Tensor métrico . . . . .	12
2.4.2. Vectores de Killing . . . . .	13
2.4.3. Transporte paralelo, conexión y derivada covariante . . . . .	14
2.4.4. La transformación de la conexión . . . . .	17
2.4.5. Curvatura . . . . .	18
2.4.6. Torsión . . . . .	18
2.5. Comentarios acerca de la geometría diferencial . . . . .	19
<b>3. Teorías Gravitacionales</b>	<b>21</b>
3.1. Nociones básicas . . . . .	21
3.1.1. Principio de Equivalencia de Einstein . . . . .	21
3.1.2. Transformaciones de Lorentz locales . . . . .	22
3.1.3. Transformaciones generales de coordenadas . . . . .	22
3.2. Modelo de Einstein-Hilbert . . . . .	23
3.2.1. Ecuaciones de Einstein . . . . .	23
3.2.2. Tensor de energía-momentum . . . . .	25
3.2.3. Constante cosmológica . . . . .	26
3.2.4. Formalismo de primer orden en términos de las formas diferenciales . . . . .	26
3.2.5. Vielbein . . . . .	27
3.2.6. Conexión de Lorentz . . . . .	28
3.2.7. Ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan . . . . .	29

3.2.8.	Relación entre $\Gamma$ y $\omega$ . . . . .	29
3.2.9.	Identidades de Bianchi . . . . .	30
3.2.10.	Revisita a la acción gravitacional en cuatro dimensiones . . . . .	30
3.2.11.	Logros de la Relatividad General . . . . .	32
3.3.	Teoría de Lovelock y Lovelock-Cartan . . . . .	33
3.3.1.	Teoría de Lovelock . . . . .	33
3.3.2.	Generalización de la acción de Lovelock: Lovelock-Cartan . . . . .	34
3.4.	Un poco de cosmología . . . . .	35
3.4.1.	Principio cosmológico . . . . .	35
3.4.2.	La métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	35
<b>4.</b>	<b>Teoría de Kaluza-Klein</b> . . . . .	<b>39</b>
4.1.	Descomponiendo campos en modos de Kaluza-Klein . . . . .	39
4.1.1.	Compactificación de la métrica en $D + 1$ dimensiones . . . . .	41
4.2.	Reducción de Einstein-Hilbert en $S^1$ . . . . .	44
4.3.	Compactificación de Lovelock en una $S^1$ . . . . .	46
4.3.1.	Derivada de Lie de los campos heredados de la 1-forma conexión . . . . .	47
4.3.2.	Cálculo de la serie de Lovelock reducida . . . . .	49
4.4.	Lovelock-Cartan en cinco dimensiones . . . . .	52
4.4.1.	Ecuaciones de campo de Lovelock-Cartan . . . . .	53
<b>5.</b>	<b>Enfoque Cosmológico</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1.	Ansatz cosmológico sobre los campos reducidos . . . . .	59
5.1.1.	Derivada de Lie a lo largo de los vectores de Killing cosmológicos . . . . .	59
5.1.2.	2-forma curvatura y 2-forma torsión cosmológicas . . . . .	62
5.2.	Ecuaciones de campo de la cosmología de Lovelock-Cartan . . . . .	63
5.2.1.	Solución de la rama $\beta = 0$ . . . . .	65
5.2.2.	3-forma energía-momentum reducida . . . . .	72
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>A.</b>	<b>Vectores de Lie para la Métrica cinco-dimensional</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>85</b>

# Introducción

---

Gracias a los avances tecnológicos de las últimas décadas en el área de la observación astronómica, se han realizado grandes hallazgos que han cambiado radicalmente nuestro esquema físico del universo. Uno de ellos es el descubrimiento de la expansión acelerada del universo, hecho que otorgó el Premio Nobel de Física en el año 2011 a los astrofísicos Saul Perlmutter [1], Brian Schmidt y Adam Riess [2], los cuales comprobaron este fenómeno al observar la luz proveniente de supernovas muy distantes. Otro descubrimiento proviene de la observación de las curvas de rotación en galaxias espirales, donde se extrae que el perfil de velocidades en las estrellas no son las esperadas. La teoría predice que la velocidad de rotación disminuye a medida que aumenta la distancia desde el centro de la galaxia; sin embargo, se observó [3] que a partir de una cierta distancia desde el centro, la velocidad de rotación se mantiene constante. De esta misma forma, lo que predice la teoría solo considerando la materia observable, no concuerda con lo observado respecto a la evolución y forma de las estructuras cósmicas (galaxias y agrupamientos de galaxias, en general la distribución de la radiación de fondo de microndas) [4]. Todas estas observaciones han dado paso a sugerir la existencia de lo que se conoce como el sector oscuro, el cual tiene dos componentes: la energía oscura y la materia oscura, cuyo sufixo hace referencia a que este contenido de energía y materia no emite radiación electromagnética. La energía oscura fue postulada con el fin de explicar la expansión acelerada del universo, ya que es el único candidato que podría generar una presión negativa. En cambio, la materia oscura explica la formación de estructuras cósmicas y las curvas de rotación en las galaxias espirales.

Para explicar estos fenómenos, se tienen tres opciones: una de ellas es modificando el contenido de energía y materia del universo, dejando intacta la teoría de Einstein; la otra es hacer lo contrario, dejar intacto el contenido de materia y energía modificando la teoría Einstein; y la tercera opción es modificar ambas. En esta investigación se optará por la tercera opción, donde se considerarán modelos que extienden la teoría de Einstein a más dimensiones y tomando en cuenta más términos, con el fin que en la teoría reducida aparezca el nuevo contenido de energía y materia oscura. En la práctica, así es como una amplia gama de nuevas teorías gravitacionales han sido exploradas con el fin de obtener los mismos resultados, sin tener que añadir “a mano” el sector oscuro. Por supuesto todas estas nuevas teorías deben ser generalizaciones de la teoría de Einstein, ya que esta logra reunir una serie de cualidades que no pueden ser dejadas de lado, esto es su poder predictivo, su consistencia y elegancia matemática.

De esta forma, el presente trabajo de tesis nace del estudio de teorías gravitacionales que han generalizado todas las propiedades deseadas de la Relatividad General. Tales propiedades que deben ser heredadas desde la Relatividad General son las siguientes. Las ecuaciones de movimiento generadas son siempre hasta segundo orden en la métrica, ya que en caso contrario no es posible determinar unívocamente el campo gravitacional para cada instante desde su espacio de configuraciones con condiciones iniciales establecidas. También se desea conservar la invarianza tanto bajo transformaciones generales de coordenadas, como bajo transformaciones

locales de Lorentz. Y por supuesto en cuatro dimensiones se debe obtener, adicionalmente a la nueva física, los fenómenos ya conocidos. Estas propiedades se satisfacen en la teoría de Lovelock-Cartan [5], teoría gravitacional en la cual nos enfocaremos durante esta investigación.

Cabe destacar que la teoría de Lovelock-Cartan, considera la idea del matemático francés Elie Cartan de considerar las nociones de metricidad y paralelismo como conceptos completamente independientes. De esta forma, esta investigación considera el formalismo de primer orden usando formas diferenciales, en el cual las propiedades metricidad y paralelismo, quedan definidas respectivamente en el marco movible (vielbein) y en la 1-forma conexión de Lorentz. Por su parte, los 1-forma vielbein llevan codificada toda la información referente a la métrica, en cambio la 1-forma conexión permite definir una derivada covariante para la teoría. La ventaja de trabajar con las formas diferenciales es que al usar la 1-forma derivada exterior, sin usar el operador dual de Hodge, las ecuaciones hasta con primeras derivadas quedan aseguradas. Adicionalmente, dado que estos campos son tratados como independientes, a partir de las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan se calculan la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión; de modo que en la teoría de Lovelock-Cartan, los términos en la Acción se construyen a partir de los vielbein, la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión. Vemos que la conexión de Lorentz no puede aparecer explícitamente puesto que ella transforma inhomogeneamente bajo las transformaciones locales de Lorentz.

Es importante mencionar que la teoría de Lovelock-Cartan es a la vez una generalización de la teoría de Lovelock [6], la cual constituye una primera generalización en dimensiones arbitrarias de la teoría de Einstein-Hilbert, en donde todas las propiedades deseadas se mantienen. La diferencia en la teoría de Lovelock, es que ella considera que la torsión es idénticamente igual a cero, de modo que la 1-forma conexión depende de los vielbein. De esta forma, la teoría de Lovelock posee solo términos generados en función de la 2-forma curvatura y los vielbein.

Una vez que la teoría gravitacional queda determinada, lo siguiente es preguntarse en que dimensión se estudiará. Para entender mejor el escenario de las dimensiones extras, es necesario conocer un poco de su historia. Entre los años 1921 y 1926 los físicos Theodor Kaluza y Oskar Klein, publican una extensión de la Relatividad General a cinco dimensiones en la cual logran unificar, si bien de manera no minimal, la Gravitación con el Electromagnetismo [7, 8]. La idea geométrica detrás de este logro, es considerar que en realidad el universo está compuesto de una dimensión temporal y cuatro dimensiones espaciales, donde la dimensión espacial extra está compactada en un círculo reflejando así una simetría de gauge  $U(1)$  requerida por el electromagnetismo. En dicha teoría cinco-dimensional, se tiene un tensor métrico de quince componentes independientes en vez de las diez que se tienen en el espaciotiempo cuatro-dimensional. En dado caso, es intuitivo suponer que diez de estas quince componentes deben pertenecer al espaciotiempo reducido, siendo en las componentes restantes que se introduce el Electromagnetismo: cuatro de ellas para el potencial vectorial  $A^\mu$  y una para el escalar  $\phi$  conocido como dilatón.

A pesar de que el uso de las dimensiones extras ha sido una buena herramienta en el intento de unificar distintas interacciones, no existe evidencia experimental de ella. Para sortear el problema de que las dimensiones extras no han sido vistas, la teoría de Kaluza-Klein propone la condición de que estas deben ser compactas, periódicas y de un radio lo suficientemente pequeño; además deben ser ortogonales a cada punto del espaciotiempo, de modo que los campos pertenecientes al espaciotiempo no dependan de las coordenadas de las dimensiones extras. Considerando estos hechos, la presente investigación se abocará a la exploración de la teoría de Lovelock-Cartan en cinco dimensiones, siendo la dimensión extra compactificada en

---

un círculo.

Cuando se imponen las condiciones mencionadas anteriormente sobre los campos pertenecientes al manifold cinco-dimensional, ya sea sobre la métrica, la 1-forma conexión o sobre algún campo de materia, lo que se obtiene es una descomposición de Fourier de dado campo, siendo así recuperados los campos en cuatro dimensiones, que ahora solo dependen de las coordenadas del espaciotiempo. Sin embargo como la descomposición de Fourier es infinita, lo que se obtiene son infinitos campos cuatro-dimensionales masivos y un campo no masivo correspondiente al modo cero de la serie de Fourier. Afortunadamente al reducir en círculos o manifold isomorfos, la teoría de los modos cero se puede separar del resto de los modos masivos sin perdida de generalidad. De esta forma, como es usual, solo se considerará el sector no masivo de la teoría de Kaluza-Klein, ya que por una parte los cálculos se simplifican y por otra se espera que en los detectores sean los modos no masivos los primeros en ser vistos.

Cabe mencionar que la importancia de la teoría de Kaluza-Klein radica en el hecho que da paso a la exploración de las dimensiones extras como una realidad física, cuya implicancia ha sido que importantes teorías han considerado este escenario dentro de sus posibilidades, como por ejemplo en las teorías de Cuerdas, Supersimetría y Supergravedad, o en los modelos como el propuesto por Arkani-Hammed *et al.* [9, 10], o por Randall y Sundrum [11, 12].

Una vez que la reducción dimensional queda establecida, el siguiente paso sería estudiar las ecuaciones de movimiento. Pero sin una métrica del espaciotiempo cuatro-dimensional establecida, las ecuaciones quedan muy arbitrarias, pues falta fijar un ansatz para los vielbein y la 1-forma conexión que se heredan de la reducción dimensional. En este sentido, el presente trabajo de investigación se enfoca en la Cosmología.

La Cosmología trata del estudio del universo a grandes escalas, es decir, donde las distancias son tan grandes que la estructura local del universo no influye: ya sean galaxias o agujeros negros, a esta escala todo el espacio (note que solo se refiere al espacio y no al espaciotiempo) es practicamente igual. Para llevar esto a la práctica, se introduce el Principio Cosmológico, el cual establece que a escalas cosmológicas el universo es isotrópico y homogéneo. Por isotrópico quiere decir que en cualquier dirección donde se mire, el contenido de energía y materia es el mismo. Y por homogéneo quiere decir que independiente en que punto del universo se esté observando, este también posee el mismo contenido de materia y energía. En términos matemáticos el ansatz cosmológico, para todos los campos que conformen la teoría tratada, implica que existe una isometría: rotaciones y traslaciones a través del espacio que preserven la métrica. Esto es efectuado al exigir que la derivada de Lie de los campos en la dirección de los vectores que generan esta isometría, sea cero.

El propósito de esta tesis, es estudiar una teoría gravitacional en cinco dimensiones, que logre reunir todas las condiciones que se han mencionado anteriormente. De esta forma conseguir una teoría reducida que logre heredar grados de libertad suficientes, de modo que al estudiar la cosmología parte del sector oscuro sea explicado. Con este fin en mente, la estructura de tesis comienza con el Cap. 2 dedicado a la geometría diferencial, primero porque la Relatividad General es un teoría geométrica, y segundo porque es la base matemática que sustentará todo este trabajo. El Cap. 3 muestra los fundamentos de la Relatividad General, se presenta el formalismo de primer orden usando formas diferenciales, luego se muestran los modelos gravitacionales que serán tomados en cuenta en la investigación: Lovelock y Lovelock-Cartan; y finalmente se muestran los principios básicos de la cosmología, y la elección particular de la métrica que respete estos principios. Luego se sigue con el Cap. 4 dedicado a la compactificación a lo Kaluza-Klein, donde se muestra como reducir los campos en cinco dimensiones, y como los

modelos gravitacionales del capítulo anterior se compactifican en un círculo. El Cap. 5, toma la reducción dimensional del modelo de Lovelock-Cartan, para introducir el ansatz cosmológico en los campos reducidos, con el fin de resolver las ecuaciones de movimiento y analizar posibles soluciones.

# Geometría diferencial

Debido al tecnicismo de este capítulo, la cantidad de conceptos y definiciones que aquí se presentan, las siguientes referencias indican los libros utilizados en el estudio de la geometría diferencial [13–16].

Durante el desarrollo de este capítulo, por simplicidad y puesto que no se estudiará aquí la teoría reducida, se utilizará una notación sólo con índices griegos sin gorro, índices latinos minúsculos y objetos matemáticos sin gorro.

## 2.1. Manifold

Lo primero que se debe estudiar para el desarrollo de cualquier teoría física es el espacio en donde se desenvuelve tal teoría. Por esta razón son necesarias algunas definiciones básicas para sentar las bases de la geometría diferencial, la cual fundamenta la teoría de la Relatividad General (teoría básica que se utiliza en el presente trabajo de tesis) y además es una poderosa herramienta para el estudio de dimensiones extras.

**Definición 1.** *Un manifold diferenciable  $m$ -dimensional,  $\mathcal{M}$ , es aquel que cumple con las siguientes condiciones:*

- (i)  $\mathcal{M}$  es un espacio topológico
- (ii)  $\mathcal{M}$  es dotado con una familia de pares  $(U_i, \varphi_i)$
- (iii)  $U_i$  es una familia de conjuntos abiertos que cubren  $\mathcal{M}$  esto es,  $\coprod_i U_i = \mathcal{M}$ . Y  $\varphi_i$  es un mapa homeomorfo desde  $U_i$  a un subconjunto abierto  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^m$
- (iv) Dados  $U_i$  y  $U_j$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces el mapa  $\Psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  desde  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  a  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  es infinitamente diferenciable.

El par  $(U_i, \varphi_i)$  es llamado **carta**, mientras que el conjunto  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  es llamado **atlas**. Desde los puntos (ii) y (iii) se entiende que un manifold es localmente Euclideo. Y desde (iv) se tiene que los puntos de  $\mathcal{M}$  pertenecientes a  $U_i \cap U_j$  tienen asignados dos o más sistemas coordenados, en donde el paso de un sistema a otro debe ser suave.

**Definición 2.** *Un manifold producto  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  es dado por la composición de un manifold  $\mathcal{M}$  ( $m$ -dimensional) con atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  y un manifold  $\mathcal{N}$  ( $n$ -dimensional) con atlas  $\{(V_j, \psi_j)\}$ . El atlas del manifold  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  ( $(m+n)$ -dimensional) es dado por  $\{(U_i \times V_j), (\varphi_i, \psi_j)\}$ , al cual pertenece el punto  $(p, q)$  donde  $p \in \mathcal{M}$  y  $q \in \mathcal{N}$ .*

### 2.1.1. Mapas Diferenciales

Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapa desde el manifold  $\mathcal{M}$  al manifold  $\mathcal{N}$ , de modo que un punto  $p$  en  $\mathcal{M}$  es mapeado a  $\mathcal{N}$  como  $f : p \mapsto f(p)$ . Y sean las cartas  $(U, \varphi) \in \mathcal{M}$  y  $(V, \psi) \in \mathcal{N}$ . Entonces

$f$  toma la siguiente representación coordenada

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Considerando que los mapas  $\varphi$  y  $\psi$  asignan  $M$  y  $N$  valores coordenados  $x^\mu$  ( $1 \leq \mu \leq M$ ) al punto  $p$  y  $y^\nu$  ( $1 \leq \nu \leq N$ ) al punto  $f(p)$ , respectivamente, entonces si  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  es infinitamente diferenciable, se dice que  $f$  es **diferenciable** en el punto  $p$  ( $x = \varphi(p)$ ). Cabe destacar que la diferenciable de  $f$  es independiente del sistema coordenado que se elije.

**Definición 3.** Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un homeomorfismo y  $(\varphi, \psi)$  las funciones coordenadas. Si  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  posee inversa:  $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ , y tanto  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  como  $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$  son infinitamente diferenciables, entonces  $f$  es un difeomorfismo,  $\mathcal{M}$  es difeomórfico a  $\mathcal{N}$  ( $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ) y vice versa.

Se debe notar que ambos manifold deben tener la misma dimensión para que ocurra un difeomorfismo. En este sentido se considera que ellos son equivalentes. Dicho de otra forma, el difeomorfismo de un manifold a otro, es una manera de deformar suavemente un manifold para transformarlo a otro, lo cual puede ser visto como un reordenamiento de los puntos que lo conforman. Además, dependiendo de la cantidad y forma de las estructuras diferenciables que posea un manifold, los difeomorfismos lo clasifican en clases de equivalencia.

### 2.1.2. Vectores

Primero se ha definido un espacio con ciertas propiedades, en el cual se podrán construir objetos de interés; además estos espacios (manifold) poseen una estructura diferenciable que permite definir una función que mapea puntos a otro manifold. Por consiguiente correspondería preguntarse por la posible definición de objetos como vectores. Sin embargo, cómo es posible definir un vector en un espacio curvo?

Para responder a esta pregunta rigurosamente, es necesario un poco de formalismo. Sea un manifold  $M$ -dimensional  $\mathcal{M}$  y una curva  $c$  parametrizada por  $t$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $t = 0$  esto es,  $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ . Sea una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define entonces un **vector tangente** en  $c(0) = p$  como la derivada direccional de una función  $f(c(0))$  a lo largo de la curva  $c(t)$  en  $t = 0$

$$X[f] \equiv \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.1)$$

que en términos de las coordenadas locales esto se lee como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Esto puede ser entendido al definir al operador diferencial  $X = X^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ , donde las componentes son  $X^\mu = dx^\mu(c(t))/dt|_{t=0}$ , que actúa sobre  $f$ . Ahora bien puede existir un conjunto de curvas que satisfagan igualmente estas condiciones, es decir, que en  $t = 0$  ellas coincidan en un mismo punto  $p$  y que las derivadas direccionales evaluadas sobre este mismo punto generadas por el mismo operador diferencial también sean iguales, de modo que este conjunto de curvas están en una clase de equivalencia. Luego *todas las clases de equivalencias de curvas* para el punto  $c(0) = p \in \mathcal{M}$  esto es, todos los vectores tangentes en el punto  $p$ , forman un espacio vectorial llamado **espacio tangente** de  $\mathcal{M}$  en  $p$  denotado por  $T_p\mathcal{M}$ , cuyos vectores base son dados naturalmente por  $e_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ , donde  $1 \leq \mu \leq M$ , llamada base coordenada. Finalmente

si se consideran los espacios tangentes de cada punto perteneciente al manifold y se forma una unión disjunta con ellos, es decir,

$$T\mathcal{M} = \coprod_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$$

se tiene el llamado **fibrado tangente** en el cual habitan todos los vectores que son tangentes a cada punto del manifold.

Cabe destacar que la existencia de los vectores es independiente de la base coordenada elegida, de modo que se puede pasar de una base a otra. Por ejemplo, sea  $p \in U_i \cap U_j$  donde las coordenadas locales son respectivamente  $x = \varphi_i(p)$  y  $y = \psi_j(p)$ , entonces un vector tangente al punto  $p$  es

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^{\nu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \quad (2.3)$$

con  $\partial/\partial x^\mu = (\partial y^\nu/\partial x^\mu)\partial/\partial y^\nu$ . Por lo tanto las componentes se relacionan como

$$X^{\nu} = X^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.4)$$

### 2.1.3. Uno-formas

Así como se ha definido un espacio vectorial tangente  $T_p\mathcal{M}$ , es posible definir un espacio vectorial dual a  $T_p\mathcal{M}$  denotado por  $T_p^*\mathcal{M}$ , llamado el **espacio cotangente** o fibrado cotangente al punto  $p$ . En este espacio es posible definir el elemento  $\omega : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , llamado **vector dual** o **uno-forma**. Un ejemplo concreto de uno-forma es el diferencial  $df = (\partial f/\partial x^\mu)dx^\mu$  de una función  $f$  suave en  $\mathcal{M}$ , cuya acción en un vector tangente  $V \in T_p\mathcal{M}$  es

$$V[f] \equiv \langle df, V \rangle = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

entonces una base para este espacio es dada naturalmente por  $dx^\mu$ , la cual es además una base dual puesto que se cumple

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.6)$$

Del mismo modo que los vectores, las uno-formas tienen libertad coordenada esto es, sea  $p \in U_i \cap U_j$  tal que una uno-forma genérica  $\omega$  se puede escribir como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dy^\nu \quad (2.7)$$

donde  $x = \varphi_i(p)$  y  $y = \psi_j(p)$ , siendo de esta forma

$$\omega'_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (2.8)$$

### 2.1.4. Tensores

Para definir un tensor son necesarias las nociones de espacio tangente y espacio cotangente, pues un tensor mapea elementos de ambos espacios a  $\mathbb{R}$ . Entonces un tensor del tipo  $(q, r)$  es aquel que mapea  $q$  elementos de  $T_p^*\mathcal{M}$  y  $r$  elementos de  $T_p\mathcal{M}$ :

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}. \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta como transforman los vectores y uno-formas, es sencillo deducir que un  $(q, r)$ -tensor se puede escribir en otra base coordenada:

$$T = T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_q}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_r}, \quad (2.10)$$

considerando que  $\partial/\partial x^{\mu_i} = (\partial y^{\alpha_i}/\partial x^{\mu_i})\partial/\partial y^{\alpha_i}$  con  $i = 1, \dots, q$  y  $dx^{\nu_j} = (\partial x^{\nu_j}/\partial y^{\beta_j})dy^{\beta_j}$  con  $j = 1, \dots, r$ , se obtiene la relación entre las componentes del tensor en ambas bases coordenadas

$$T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial y^{\beta_r}}. \quad (2.11)$$

Luego como un tensor es un objeto multilineal, este puede actuar como un operador (las bases) sobre  $q$  uno-formas y  $r$  vectores, arrojando como resultado un número.

## 2.2. Derivada de Lie

La derivada de Lie nos proporciona un camino alternativo y a la vez más general que la derivada usual (la cual requiere de una estructura métrica) que permite el desplazamiento de objetos por un manifold y también compararlos entre ellos, solo teniendo en cuenta nociones básicas de geometría diferencial.

### 2.2.1. Flujos

Sea un campo vectorial  $X$  en  $\mathcal{M}$  y sea  $x(t)$  una curva en  $\mathcal{M}$  cuyo vector tangente es  $X|_{x(t)}$ . Dada una carta  $(U, \psi)$

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)), \quad (2.12)$$

donde  $x^\mu(t)$  es la  $\mu$ -ésima componente de  $\psi(x(t))$  y  $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ .<sup>1</sup> Luego se define una **curva integral** de un campo vectorial  $X$  como aquella que soluciona la Ec. (2.12) con condiciones iniciales  $x^\mu(t=0) = x_0^\mu$ .

Sea  $\sigma^\mu(t, x_0)$  una curva integral de  $X$ , que pasa por el punto  $x_0$  para  $t=0$ , siendo entonces la Ec. (2.12) dada por

$$\frac{d\sigma^\mu(t, x_0)}{dt} = X^\mu(\sigma^\nu(t, x_0)) \quad (2.13)$$

con condiciones iniciales

$$\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu. \quad (2.14)$$

**Definición 4.** Se define un **flujo** como el mapa  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  generado por  $X$ . Además un flujo siempre satisface

$$\sigma^\mu(t, \sigma^\nu(s, x_0)) = \sigma^\mu(t+s, x_0),$$

$\forall t, s \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.** Para algún punto  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\exists$  un mapa diferenciable  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que

- (i)  $\sigma^\mu(0, x) = x^\mu$
- (ii)  $t \mapsto \sigma^\mu(t, x)$  es solución de las Ecs. (2.13) y (2.14)
- (iii)  $\sigma^\mu(t, \sigma^\nu(s, x)) = \sigma^\mu(t+s, x)$ .

Uno se puede imaginar un flujo como una corriente estable, de modo que si una partícula es observada en el punto  $x$  para  $t=0$ , esta será encontrada en  $\sigma^\mu(t, x)$  para un tiempo  $t$  después.

<sup>1</sup>Cabe notar que  $x$  es usada como un punto y como sus coordenadas.

### 2.2.2. Derivada de Lie

Definido el concepto de flujo ahora es posible comparar dos objetos, como por ejemplo vectores que viven en espacios tangentes diferentes sin tener que definir una estructura métrica. Esto es, dado un flujo generado por un campo vectorial el cual especifica como evoluciona un determinado punto  $p$  (recordar que cada punto en la curva integral define un vector tangente) y permite mapear un objeto desde el punto  $p$  al punto  $p'$  en donde habita el otro objeto y luego como se encuentran en un mismo espacio tangente se pueden comparar.

**Definición 5.** Sean  $\sigma^\mu(s, x)$  y  $\tau^\mu(t, y)$  dos flujos generados por los campos vectoriales  $X$  e  $Y$  que viven en el manifold  $\mathcal{M}$  esto es,

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) \quad (2.15)$$

$$\frac{d\tau^\mu(t, y)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, y)), \quad (2.16)$$

y sea el mapa inducido  $(\sigma_{-\epsilon})_* : T_{\sigma_\epsilon(x)}\mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}$ ,<sup>2</sup> el cual toma  $Y$  en el punto  $x$  y lo mapea al punto  $x' = \sigma_\epsilon(x)$ , siendo  $\epsilon$  un parámetro infinitesimal. Entonces se define la **derivada de Lie** del campo vectorial  $Y$  a lo largo del flujo  $\sigma$  generado por el campo vectorial  $X$  como

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{((\sigma_{-\epsilon})_* Y)|_{\sigma_\epsilon(x)} - Y|_x}{\epsilon} \quad (2.17)$$

Sin embargo la derivada de Lie se puede definir de otra forma por medio del bracket de Lie. Este se define como

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]] \quad (2.18)$$

donde  $f$  es una función y por definición  $X[f] = X^\mu \partial f / \partial x^\mu$ . Luego la derivada de Lie del campo  $Y$  en la dirección  $X$  es

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu, \quad (2.19)$$

de aquí en adelante se usará la notación  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$ . Del mismo se puede definir la derivada de Lie de una función, de una uno-forma o de un tensor arbitrario:

$$\mathcal{L}_X f = X^\mu \partial_\mu f \quad (2.20)$$

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \partial_\nu X^\mu) dx^\nu \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T = & (X^\mu \partial_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} - T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\mu \dots \alpha_p} \partial_\mu X^{\alpha_1} - \dots - T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \mu} \partial_\mu X^{\alpha_p} + T_{\mu \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \partial_{\beta_1} X^\mu \\ & + \dots + T_{\beta_1 \dots \mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \partial_{\beta_q} X^\mu) \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.3. Formas diferenciales

El entendimiento de las formas diferenciales, como operan y sus propiedades, es crucial para el desarrollo del formalismo de primer orden que será visto en Sec. 3.2.4, el cual será la forma de trabajo de la presente tesis.

<sup>2</sup>Un mapa suave  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , naturalmente induce un mapa entre los espacios tangentes de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , llamado “push forward” definido como  $f_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$

**Definición 6.** Una **forma diferencial** se define como una  $r$ -forma (de orden  $r$ ) totalmente antisimétrica, la cual corresponde a un  $(0, r)$ -tensor antisimetrizado en sus índices.

Debido a su forma completamente antisimétrica, las formas diferenciales no se pueden “multiplicar” de cualquier forma, así es definido el producto cuña entre ellas como sigue:

**Definición 7.** Se define el **producto cuña**  $\wedge$  de  $r$  uno-formas, como el producto tensorial completamente antisimétrico

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_P \text{sgn}(P) dx^{P(\mu_1)} \otimes dx^{P(\mu_2)} \otimes \dots \otimes dx^{P(\mu_r)}, \quad (2.23)$$

donde la suma corre sobre todas las posibles permutaciones. Además se ve que el producto cuña permite definir una base para el espacio vectorial de las  $r$ -formas; de manera que un elemento  $\mathbf{A}$  de este espacio puede ser expandido como

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r!} A_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.24)$$

la cual constituye una forma diferencial.

También es posible “multiplicar” formas diferenciales de distinto orden, donde el resultado será una forma diferencial cuyo orden resultante es la suma de los órdenes de las formas diferenciales del comienzo.

**Definición 8.** Se define el **producto exterior**  $\wedge$  de una  $q$ -forma  $\mathbf{A}$  con una  $r$ -forma  $\mathbf{B}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} &= (A_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}) \wedge (B_{\nu_1 \dots \nu_r} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r}) \\ &= (A_{\mu_1 \dots \mu_q} B_{\nu_1 \dots \nu_r}) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Finalmente se debe definir un operador que derive correctamente a las formas diferenciales.

**Definición 9.** Se define la **derivada exterior**  $d$  como un operador que actúa sobre una  $r$ -forma diferencial, transformándola en una  $r+1$ -forma. Sea la  $r$ -forma diferencial  $\mathbf{A}$ , entonces su derivada exterior es

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.26)$$

Cabe notar que debido a que la derivada exterior es a su vez una forma diferencial, ella es nilpotente

$$d^2 = 0. \quad (2.27)$$

### 2.3.1. Integración de formas diferenciales

En el desarrollo de los cálculos del presente trabajo será fundamental la integración de formas diferenciales, puesto que se trabajará con ellas siendo éstas los bloques fundamentales de la teoría.

#### Orientación

Como es común en relatividad general, la realización de cambios de sistemas coordenados dentro de un manifold es fundamental, por lo cual es necesario imponer condiciones entre las distintas bases coordenadas que permita una integración bien definida de objetos vinculados

al manifold. Sea entonces un manifold  $\mathcal{M}$  ( $m$ -dimensional) conectado diferenciable, donde el espacio tangente para todo punto  $p$  perteneciente al manifold es expandido en la base  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x_\mu\}$  con  $x^\mu$  las coordenadas locales en la carta  $U_i$ . Sea otra carta  $U_j$  que también cubre el punto  $p$ , es decir  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , con coordenadas locales  $y^\nu$  y con la base  $\{e'_\nu\} = \{\partial/\partial y^\nu\}$ . Luego el cambio de una base a otra es dado por

$$e'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} e_\mu. \quad (2.28)$$

Finalmente ambas bases definirán la misma orinetación si

$$J = \det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) > 0, \quad (2.29)$$

en caso contrario si  $J < 0$  se dice que tienen orientaciones opuestas.

**Definición 10.** Se define a una manifold  $\mathcal{M}$  como **orientable**, si es que para todas las cartas solapadas existen coordenadas locales tales que la condición (2.29) se cumpla.

En un manifold orientable  $m$ -dimensional siempre es posible definir una  $m$ -forma que juega el rol de **elemento de volumen**, y que por lo tanto hace de medida a la hora de integrar una función sobre el manifold. Definamos este elemento de volumen como

$$\mathbf{v} = v(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \quad (2.30)$$

donde  $v(p)$  es una función que depende del punto  $p$  perteneciente al manifold.

Sea entonces la función  $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$  sobre un manifold orientable. La integración de una  $m$ -forma  $f\mathbf{v}$  dentro de una vecindad coordenada, esto es, dentro de la carta  $(U_i, \varphi_i)$  con coordenada  $x$  es dada por

$$\int_{U_i} f\mathbf{v} \equiv \int_{\varphi_i(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x)) v(\varphi_i^{-1}(x)) dx^1 \cdots dx^m. \quad (2.31)$$

Ahora que se ha definido la integración dentro de una vecindad del manifold, se procede a definir la integración sobre todo el manifold  $\mathcal{M}$ , pero para ello es necesaria la noción de función partición de la unidad.

**Definición 11.** Sea una cubierta abierta  $\{U_i\}$  de  $\mathcal{M}$ , tal que cada punto  $p \in \mathcal{M}$  es cubierto por un número finito de  $U_i$ . Si la familia de funciones diferenciables  $\varepsilon_i(p)$  satisface las condiciones

- (i)  $0 \leq \varepsilon_i(p) \leq 1$ ,
- (ii)  $\varepsilon_i(p) = 0$  si  $p \notin U_i$  y
- (iii)  $\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p) + \cdots = 1 \forall p \in \mathcal{M}$ , la familia  $\{\varepsilon(p)\}$  es llamada una **partición de la unidad** asociada a la cubierta  $\{U_i\}$ .

Vemos que desde la condición (iii) es posible establecer que

$$f(p) = \sum_i f(p) \varepsilon_i(p) = \sum_i f_i(p). \quad (2.32)$$

Luego se puede definir la integral de cada  $f_i(p)$  sobre  $U_i$ , resultando su sumatoria la integral sobre todo el manifold  $\mathcal{M}$

$$\int_{\mathcal{M}} f\mathbf{v} = \sum_i \int_{U_i} f_i\mathbf{v}. \quad (2.33)$$

Por otra parte si el manifold  $\mathcal{M}$  es endosado a una métrica  $g$ , como será visto en la siguiente sección, es posible definir un elemento de volumen que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas:

$$\Omega_{\mathcal{M}} \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (2.34)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica y las coordenadas  $x^\mu$  son de la carta  $(U, \varphi)$ . También se puede definir la integral de la función  $f$  usando este elemento de volumen invariante

$$\int_{\mathcal{M}} f \Omega_{\mathcal{M}} \equiv \int_{\mathcal{M}} f \sqrt{|g|} dx^1 \cdots dx^m. \quad (2.35)$$

Esta integración tiene la ventaja de ser también invariante bajo transformaciones coordenadas.

### 2.3.2. Dual de Hodge

Recordando la Ec. (2.23) la cual define una base para el espacio de las  $r$ -formas, vemos que su dimensión es dada por el número de opciones que se tiene para elegir el orden de la base, donde una de ellas es  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^r$ . De esta forma su dimensión es dada por

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}.$$

Sin embargo, vemos que el espacio vectorial de las  $(m-r)$ -formas también posee la misma dimensión, por lo cual al ser ambos espacios vectoriales de igual dimensión generados a partir de un mismo manifold  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$ , entonces ellos son isomorfos. De esta forma, es posible definir de manera natural un mapa lineal (isomórfico) entre ambos espacio, el cual es llamado el **dual de Hodge** u **operación \* de Hodge**, que actua en la base de la  $r$ -forma

$$* (dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_r \nu_{r+1} \cdots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m}, \quad (2.36)$$

siendo  $\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_r \nu_{r+1} \cdots \nu_m}$  el tensor completamente antisimétrico separadamente en los índices superiores e inferiores.

## 2.4. Geometría (pseudo-)Riemanniana

Como ya se ha visto, un manifold es un espacio topológico que localmente se parece a  $\mathbb{R}^m$ , donde la existencia de sistemas coordenados suaves aseguran la realización de cálculos diferenciables en él. Además es posible adicionar otra estructura si al manifold se le endosa un tensor métrico, el cual es una generalización natural del producto interno entre dos vectores en  $\mathbb{R}^m$  a un manifold arbitrario, o más bien, en el espacio tangente de este manifold. A partir del tensor métrico es posible definir una conexión afín, la cual permite comparar objetos (como los vectores) que habiten en diferentes puntos del manifold, por medio del transporte paralelo.

### 2.4.1. Tensor métrico

El producto interno entre dos vectores  $X, Y \in \mathbb{R}^m$  es definido por  $X \cdot Y = \sum_{i=1}^m X_i Y_i$ . Sin embargo en un espacio curvo, el producto interno se define para cada espacio tangente.

**Definición 12.** *Sea  $\mathcal{M}$  un manifold diferenciable. Se define una **métrica Riemanniana**  $g$  en  $\mathcal{M}$  como un campo tensorial del tipo  $(0,2)$ , el cual satisface los siguientes axiomas para cada punto  $p \in \mathcal{M}$ :*

- (i)  $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$
- (ii)  $g_p(X, X) \geq 0$ , donde la igualdad se cumple solo cuando  $X = 0$  con  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$  y  $g_p = g|_p$ . Es decir,  $g_p$  es una forma bilineal simétrica definida positiva. Si por otra parte  $g_p$  satisface (i) y
- (ii')  $g_p(X, Y) = 0$  para todo  $X \in T_p\mathcal{M}$ , entonces  $Y = 0$ . Se tiene que la métrica es **pseudo-Riemanniana**.

Como  $g_p$  es un mapa  $T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}$ , se puede definir un mapa lineal  $g_p(X, \bullet) : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  por medio de  $Y \mapsto g_p(X, Y)$ . De este modo  $g_p(X, \bullet)$  se puede identificar con una uno-forma  $\omega_X \in T_p^*\mathcal{M}$ ; y similarmente una uno-forma  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$  induce el vector  $X_\omega \in T_p\mathcal{M}$  por medio de  $\langle \omega, X \rangle = g_p(X_\omega, Y)$ . Y esto da origen a un isomorfismo entre  $T_p\mathcal{M}$  y  $T_p^*\mathcal{M}$ .

La forma explícita del tensor métrico es obtenido al recordar que es un  $(0, 2)$ -tensor, y que por lo tanto es expandido en término de las bases  $dx^\mu \otimes dx^\nu$  como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.37)$$

donde usualmente  $(g_{\mu\nu}) = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ <sup>3</sup> es considerada como una matriz, cuya  $(\mu, \nu)$ -ésima entrada es la componente  $g_{\mu\nu}$ . Además  $(g_{\mu\nu})$  tiene inversa denotada por  $(g^{\mu\nu})$ , por lo cual se cumple  $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = g^{\nu\lambda}g_{\lambda\mu} = \delta_\mu^\nu$ . Su determinante  $\det(g_{\mu\nu})$  es denotado por  $g$ , y el determinante inverso  $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$ .

Con esta forma de expresar a la métrica en mente, el isomorfismo referido anteriormente se escribe como

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu, \quad X^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu. \quad (2.38)$$

Al recobrar la definición de la métrica como una distancia infinitesimal al cuadrado, o elemento de línea, esta se puede expresar como<sup>4</sup>

$$ds^2 = g_p(dx^\mu\partial_\mu, dx^\nu\partial_\nu) = g_p(\partial_\mu, \partial_\nu)dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2.39)$$

Como  $(g_{\mu\nu})$  es simétrica al diagonalizarla se obtienen autovalores reales, los cuales pueden ser todos positivos ( $g$  es Riemanniana) o algunos de ellos pueden ser negativos ( $g$  es pseudo-Riemanniana). Si se tienen  $i$  índices positivos y  $j$  índices negativos, entonces el par  $(i, j)$  es llamado el **signo** de la métrica. De aquí se tiene los casos particulares de **métrica Euclideana** con  $(n, 0)$  y de **métrica Minskowskiana** (o Lorentziana) con  $(n - 1, 1)$ .

### 2.4.2. Vectores de Killing

Ahora que se ha definido el tensor métrico, se procede a definir los vectores de Killing, pero antes es necesario mencionar lo que es una isometría, que como su nombre indica es una transformación que mantiene la métrica.

**Definición 13.** Una **isometría** es un mapeo<sup>5</sup>  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que preserva la métrica del manifold  $\mathcal{M}$

$$f^*g_{f(p)} = g_p, \quad (2.40)$$

o en componentes

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(p) = g_{\mu\nu}(p). \quad (2.41)$$

<sup>3</sup>Por lo general  $p$  en  $g_{\mu\nu}$  es omitido.

<sup>4</sup>Sin embargo, en estricto rigor la métrica es un tensor  $g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$ .

<sup>5</sup>Así como se tiene el mapa inducido  $f_*$  llamado "push forward", el mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  también induce otro mapa llamado "pull back" el cual mapea entre los espacio cotangentes, esto es,  $f^* : T_{f(p)}^*\mathcal{N} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$ .

Con esta definición en mente, se procede a definir los campos vectoriales de Killing o vectores de Killing:

**Definición 14.** Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un manifold Riemanniano y  $X$  un campo vectorial perteneciente a  $\mathcal{M}$ . Si un desplazamiento  $\varepsilon X$ , con  $\varepsilon$  un parámetro infinitesimal, genera una **isometría**, el campo vectorial  $X$  es llamado un **campo vectorial de Killing**.

Sea entonces la coordenada  $x^\mu$  del punto  $p \in \mathcal{M}$  que es transformada a  $x^\mu + \varepsilon X^\mu(p)$  bajo un desplazamiento. Si existe una función  $f : x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon X^\mu$ , tal que es una isometría, entonces desde la condición (2.41) se encuentra

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial(x^\alpha + \varepsilon X^\alpha)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\beta + \varepsilon X^\beta)}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x + \varepsilon X) \\
 &= \left( \delta_\mu^\alpha + \varepsilon \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left( \delta_\nu^\beta + \varepsilon \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \right) g_{\alpha\beta}(x + \varepsilon X) \\
 &= \left( \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \varepsilon \delta_\mu^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} + \varepsilon \delta_\nu^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) g_{\alpha\beta}(x + \varepsilon X) \\
 &= g_{\mu\nu}(x + \varepsilon X) + \varepsilon \left( \partial_\mu X^\beta g_{\mu\beta}(x + \varepsilon X) + \partial_\nu X^\alpha g_{\alpha\nu}(x + \varepsilon X) \right) \\
 &= g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon \partial_\nu X^\alpha g_{\mu\alpha} + \varepsilon \partial_\mu X^\alpha g_{\alpha\nu},
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde los términos a segundo orden en el parámetro  $\varepsilon$  son despreciados, y en la última línea se a realizado la expansión a primer orden en  $\varepsilon$ :  $g_{\mu\nu}(x + \varepsilon X) = g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x)$ . De aquí se obtiene la **ecuación de Killing**

$$X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \partial_\nu X^\alpha g_{\mu\alpha}(x) + \partial_\mu X^\alpha g_{\alpha\nu}(x) = 0. \tag{2.43}$$

### 2.4.3. Transporte paralelo, conexión y derivada covariante

Como se ha visto anteriormente, es posible definir la derivada direccional de un vector, pero como se puede notar no es posible definir naturalmente, desde la estructura diferenciable de un manifold, una derivada direccional que actúe sobre un tensor arbitrario. Tampoco se puede usar la derivada de Lie ya que al depender de la derivada del vector que genera el flujo, no es direccional. La pregunta es entonces como transportar tensores a lo largo de una curva en un manifold.

Como ya se ha recalado antes, dos vectores en diferentes puntos no pueden ser comparados entre sí ingenuamente, puesto que ellos viven en espacios tangentes diferentes. En el caso de un manifold tipo  $\mathbb{R}^m$ , la derivada es facilmente definida de la manera habitual por medio de un límite, donde un vector en el punto  $x$  es transportado naturalmente sin cambio, esto es, **transportado paralelamente** al punto  $x + \Delta x$ . Pero en un manifold curvo, no es posible hacer esto sin una estructura adicional que indique explicitamente como mover un vector paralelamente. Para construir esta estructura, sea  $V'|_{x+\Delta x}$  un vector  $V|_x$  que ha sido transportado paralelamente desde  $x$  a  $x + \Delta x$ . Para que esto sea así se deben exigir dos cosas:

$$V'^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x^\mu \tag{2.44}$$

$$(V^\mu + W^\mu)'(x + \Delta x) = V'^\mu(x + \Delta x) + W'^\mu(x + \Delta x). \tag{2.45}$$

Para que esto se cumpla, la forma más general que debe tener un vector transportado paralelamente es

$$V'^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \Delta x^\nu. \tag{2.46}$$

Luego se puede expresar de manera habitual la **derivada covariante** de un vector  $V$  con respecto a  $x^\nu$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)}{\Delta x^\nu} \partial_\mu &= \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\nu} \left( V^\mu(x) + \partial_\lambda V^\mu \Delta x^\lambda - V^\mu(x) + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \Delta x^\nu \right) \partial_\mu \\ &= \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \left( \partial_\lambda V^\mu \delta_\nu^\lambda + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \right) \partial_\mu = \left( \partial_\nu V^\mu + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \right) \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En el caso particular cuando  $\Gamma$  es simétrica en los índices inferiores:  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ , y que además preserve la norma de un vector,  $\Gamma$  es llamada **conexión de Levi-Civita**.

Ahora que se tiene una idea de como es una conexión, se puede definir de manera más formal la conexión afín.

**Definición 15.** Una **conexión afín** denotada por  $\nabla$ , es un mapa  $\nabla : \chi(\mathcal{M}) \times \chi(\mathcal{M}) \rightarrow \chi(\mathcal{M})$ ,<sup>6</sup> esto es,  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ ; la cual satisface las siguientes propiedades:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.48)$$

$$\nabla_{(X+Y)}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (2.49)$$

$$\nabla_{(fX)} Y = f \nabla_X Y \quad (2.50)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y. \quad (2.51)$$

Entonces las funciones  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  llamadas los **coeficientes de la conexión**, son definidas por

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (2.52)$$

Recordemos que  $e_\mu = \partial_\mu$  es la base coordenada del espacio tangente en  $\mathcal{M}$ , los cuales especifican como los vectores base cambian de un punto a otro. Sean  $V = V^\mu e_\mu$  y  $W = W^\nu e_\nu$  elementos de  $T_p \mathcal{M}$ , entonces:

$$\nabla_V W = V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) = V^\mu (\partial_\mu W^\nu + W^\lambda \Gamma^\nu_{\mu\lambda}) e_\nu. \quad (2.53)$$

De manera similar se pueden deducir las derivadas covariantes de otros objetos de interés, como la de una función  $f$

$$\nabla_X f = X[f] = X^\mu \partial_\mu f, \quad (2.54)$$

o de una uno-forma  $\omega$

$$\nabla_X \omega = (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda) dx^\nu. \quad (2.55)$$

Entonces un tensor de rango arbitrario tendrá tantos coeficientes de conexión con signo positivo como índices superiores, y tantos coeficientes de conexión con signo negativo como índices inferiores. Además para el caso particular cuando  $X = \partial_\mu$ , se obtiene para un tensor arbitrario:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T &= (\partial_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \Gamma^{\alpha_1}_{\mu\nu} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\nu \dots \alpha_p} + \dots + \Gamma^{\alpha_p}_{\mu\nu} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \nu} - \Gamma^\nu_{\mu\beta_1} T_{\nu \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \\ &\quad - \dots - \Gamma^\nu_{\mu\beta_q} T_{\beta_1 \dots \nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dado que se ha definido la derivada covariante, a continuación se da una definición formal del transporte paralelo.

<sup>6</sup>El conjunto de todos los campos vectoriales en  $\mathcal{M}$  es denotado por  $\chi(\mathcal{M})$ .

**Definición 16.** Dada una curva en una manifold  $\mathcal{M}$  como  $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ , que por simplicidad su imagen es cubierta por una sola carta  $(U, \varphi)$  con coordenadas  $x = \varphi(p)$ , y dado un campo vectorial

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))\partial_\mu|_{c(t)}, \quad (2.57)$$

entonces si ocurre que  $X$  satisface la condición

$$\nabla_V X = 0 \quad (2.58)$$

donde  $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt)\partial_\mu|_{c(t)}$  es el vector tangente a  $c(t)$ , se dice que  $X$  es **transportado paralelamente a lo largo de**  $c(t)$ .

Desde la definición de la conexión, la Ec. (2.58) se escribe en componentes como

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0. \quad (2.59)$$

En el caso particular que sea el mismo vector tangente a la curva  $c(t)$  el que se transporte paralelamente:

$$\nabla_V V = 0, \quad (2.60)$$

la curva  $c(t)$  es llamada **geodésica**, la cual es la curva más “recta” posible en un manifold Riemanniano. En componentes la Ec. (2.60) se lee:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (2.61)$$

### La covarianza de la métrica y la conexión métrica

Si se desea que el producto interno entre dos vectores sea conservado luego de ser transportado paralelamente, se debe demandar que la métrica sea covariantemente constante y con ello se restringe consecuentemente la forma de la conexión. Sea  $V$  un vector tangente a una curva arbitraria a lo largo de la cual vectores son transportados paralelamente, entonces la derivada covariante de la métrica es

$$\begin{aligned} \nabla_V [g(X, Y)] &= V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] \\ &= V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde por la condición de transporte paralelo  $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$ . Y como esto debe ser cierto para cualquier curva y vectores arbitrarios, se tiene:

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0, \quad (2.63)$$

o

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} = 0. \quad (2.64)$$

Así se dice que la conexión afín  $\nabla$  es una **conexión métrica**. Al hacer permutaciones cíclicas en los índices  $(\lambda\mu\nu)$  de Ec. (2.64) se obtienen las ecuaciones

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} = 0 \quad (2.65)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} = 0. \quad (2.66)$$

Luego al hacer la combinación de las Ecs. (2.64), (2.65) y (2.66), se obtiene

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - 2\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} = 0, \quad (2.67)$$

donde se define el tensor antisimétrico en los índices inferiores

$$T^\kappa{}_{\lambda\mu} \equiv 2\Gamma^\kappa{}_{[\lambda\mu]} = \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} \quad (2.68)$$

como el **tensor de torsión**, y donde por supuesto  $\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} = 1/2(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu})$ . Desde la Ec. (2.67) se puede despejar  $\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)}$  para obtener

$$\Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} = \Omega^\kappa{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu), \quad (2.69)$$

donde  $\Omega^\kappa{}_{\mu\nu}$  es llamado los **símbolos de Christoffel** definidos por

$$\Omega^\kappa{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}). \quad (2.70)$$

Finalmente, los coeficientes de la conexión son dados por la suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\kappa{}_{(\mu\nu)} + \Gamma^\kappa{}_{[\mu\nu]} \\ &= \Omega^\kappa{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T^\kappa{}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

El segundo término de anterior expresión es llamada la **contorsión**:

$$K^\kappa{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T^\kappa{}_{\mu\nu}). \quad (2.72)$$

Cabe especificar el caso particular cuando el tensor de torsión es idénticamente igual a cero, en dado caso la conexión  $\nabla$  es llamada **conexión de Levi-Civita**.

#### 2.4.4. La transformación de la conexión

Para ver como transforman los coeficientes de la conexión, sean las cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  tales que  $U \cap V \neq 0$  y cuyas respectivas coordenadas son  $x = \varphi(p)$  y  $y = \psi(p)$ . Además sean  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  y  $\{f_\alpha\} = \{\partial/\partial y^\alpha\}$  las respectivas bases coordenadas. Entonces la derivada covariante de la base  $\{f_\alpha\}$  en la dirección de ella misma es

$$\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \tilde{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta} f_\gamma, \quad (2.73)$$

donde  $\tilde{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta}$  denota los coeficientes de la conexión con respecto a la coordenada  $y$ . Tomando en cuenta la relación entre las bases coordenadas  $f_\alpha = (\partial x^\mu / \partial y^\alpha) e_\mu$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{f_\alpha} f_\beta &= \nabla_{f_\alpha} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} e_\mu \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\mu + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \nabla_{e_\lambda} e_\mu \\ &= \left( \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} \right) e_\nu. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Finalmente al comparar los coeficientes de la Ec. (2.73) con (2.74), vemos que los coeficientes de la conexión de la coordenada  $y$  transforman bajo un cambio de coordenadas como

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu}. \quad (2.75)$$

Cabe destacar como afecta la existencia del segundo término en la Ec. (2.75), pues es claro que los coeficientes de la conexión no transforman como un tensor, sino que tiene una pieza adicional. De esta forma se dice que **los coeficientes de la conexión transforman inhomogeneamente**.

### 2.4.5. Curvatura

Retomando el concepto de transporte paralelo, si se toma un vector en un punto  $p$  y se traslada paralelamente a otro punto  $p'$  por dos caminos diferentes, claramente habrá una diferencia entre los vectores resultantes en el punto  $p'$ , considerando que se tiene un manifold distinto de  $\mathbb{R}^m$ . Esta diferencia es lo que nos da el concepto de curvatura.

Sean entonces los vectores  $U$ ,  $V$  y  $W$ , se define el tensor de curvatura de Riemman como

$$R(U, V, W) \equiv \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} W, \quad (2.76)$$

el cual satisface

$$R(U, V, W) = -R(V, U, W). \quad (2.77)$$

Para obtener sus componentes, se hace actuar sobre las bases:

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &\equiv \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu e_\lambda) \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} e_\eta) - \nabla_\nu (\Gamma^\eta_{\mu\lambda} e_\eta) \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma^\eta_{\nu\lambda}) e_\eta + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\eta} e_\rho - (\partial_\nu \Gamma^\eta_{\mu\lambda}) e_\eta - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\eta} e_\rho \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Vemos que el tensor es antisimétrico en los índices  $\mu\nu$ :

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu}.$$

Al contraer los índices se pueden construir dos nuevos tensores. Uno es el *tensor de Ricci* definido como

$$R(U, V) \equiv \langle dx^\mu, R(e_\mu, U, V) \rangle, \quad (2.79)$$

que en componentes es

$$R_{\mu\nu} = R(e_\mu, e_\nu) = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.80)$$

El otro tensor se construye al contraer todos los índices, es llamado la *curvatura escalar*

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.81)$$

### 2.4.6. Torsión

De manera intuitiva, se puede definir la torsión al considerar una curva definida en un manifold la cual vaya mapeada al plano tangente en cada punto de la curva, la torsión sería entonces el grado de giro o torcedura del plano tangente a lo largo de la curva. Recordar también

que de manera más abstracta la torsión puede ser entendida como la parte antisimétrica con respecto a los índices inferiores de la conexión.

Sean los vectores  $U$  y  $V$ , se define entonces el tensor torsión como

$$T(U, V) \equiv \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V], \quad (2.82)$$

satisfaciendo

$$T(U, V) = -T(V, U). \quad (2.83)$$

De igual manera que con el tensor de curvatura, sus componentes son

$$\begin{aligned} T^\lambda{}_{\mu\nu} &\equiv \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma^\eta{}_{\mu\nu} e_\eta - \Gamma^\eta{}_{\nu\mu} e_\eta \rangle \\ &= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

## 2.5. Comentarios acerca de la geometría diferencial

Para concluir este capítulo, quisiera señalar porque he dedicado tantas páginas a la geometría diferencial en una investigación cosmológica. Primero se debe decir que la Cosmología es uno de los posibles enfoques que tiene la teoría de la Relatividad General, siendo esta última una teoría geométrica que se hace del espaciotiempo. La teoría de la Relatividad General reinterpreta los conceptos de espacio y tiempo colocándolos en un solo manifold, de modo que el tiempo es un eje coordenado más al igual que los del espacio. Pero no solo eso, sino que también el manifold llamado espaciotiempo es dinámico puesto que se deforma, ya que la fuerza de atracción gravitatoria es reinterpretada como una geometría curva en la cual los objetos masivos curvan al espaciotiempo. Con todas estas nociones físicas que genera la Relatividad General, es imposible concretarla sin el uso de la geometría diferencial como pilar fundamental. Como ha quedado manifiesto a lo largo de este capítulo, la geometría diferencial permite la generalización del cálculo tensorial en espacios Euclídeos a espacio curvos y torsionados (siempre y cuando sean suaves) permitiendo definir transporte paralelo, mapeos, derivadas covariantes, productos internos, integración y toda clase de acciones que se realizan habitualmente en espacios planos.

En el siguiente capítulo, dedicado a los modelos gravitacionales, se utilizarán todas las herramientas aquí mostradas. Partiendo con el principio de equivalencia (el cual sustenta a la teoría de la Relatividad General) cuya formulación matemática es basada en el concepto de fibrado tangente, en el cual es posible fijar un sistema coordenado plano (en cada punto del fibrado) que es **localmente** isomorfo al sistema coordenado curvilíneo correspondiente a cada punto del manifold. Y es este sistema coordenado (en el fibrado tangente) el que es llamado **localmente inercial** en cada punto, permitiendo la concretación matemática del principio de equivalencia.



# Teorías Gravitacionales

---

## 3.1. Nociones básicas

A principios del siglo XX el físico alemán Albert Einstein, propone la unificación del espacio y el tiempo al ponerlos en pie de igualdad en un solo manifold cuadri-dimensional llamado espaciotiempo [17], sobre el cual ocurren los fenómenos físicos. De esta forma, crea la Teoría de la Relatividad Especial, la cual es fundamentada en la invarianza de la velocidad con que viaja la luz, y que esta velocidad es la máxima con la cual puede viajar la información. Sin embargo, esta teoría no es compatible con la interacción gravitacional, ya que en la teoría Newtoniana de la Gravedad, la interacción gravitacional es transmitida de forma instantánea de un cuerpo a otro, violando así la velocidad máxima de transmisión.

Para lograr conciliar la Gravitación con los principios de la Relatividad Especial, Einstein crea la teoría de la Relatividad General [18], como una generalización de sus ideas desde la mecánica relativista a la gravedad, en donde la interacción gravitacional es interpretada como una teoría geométrica del espaciotiempo. En esta teoría, la geometría plana es generalizada a una geometría curva y dinámica para la descripción del espaciotiempo, el cual tiene la propiedad de ser deformado en presencia de materia. Con esto, la teoría de la Relatividad General logra ser una teoría covariante de la Gravitación, pues en ella no existen observadores privilegiados al igual que en la Relatividad Especial.

### 3.1.1. Principio de Equivalencia de Einstein

El Principio de Equivalencia es el postulado que justifica la teoría de la Relatividad General, ya que este permite establecer que la acción de un campo gravitacional sobre un cuerpo masivo, no es distinguible a la de un movimiento acelerado. Esto permite generalizar el Principio de Relatividad el cual establece la imposibilidad de distinguir el reposo de un movimiento uniforme.

En nuestro diario vivir (sobre una región suficientemente pequeña en la superficie de la tierra y en intervalos de tiempo suficientemente cortos) nos encontramos con que basta una geometría plana para describir con suficiente exactitud sistemas físicos, es decir, la Mecánica Relativista es suficiente. Y esto se debe a que en regiones del espaciotiempo suficientemente pequeñas, el manifold cuadri-dimensional en el que los fenómenos se llevan a cabo es localmente plano, siendo la geometría de Minkowski adecuada para su descripción. De esta forma la relatividad especial (donde la curvatura debido a la gravedad es despreciable) es suficiente. A continuación se presenta el **Principio de Equivalencia** [19].

**Definición 17.** *Para cada punto del espaciotiempo en un campo gravitacional arbitrario, es posible escoger un sistema localmente inercial tal que en una región suficientemente pequeña, las leyes de la naturaleza son determinadas por la relatividad especial.*

En términos prácticos, la Relatividad General se formula en una Acción Gravitacional que es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y de Lorentz locales. Por este motivo es necesario conocer como los distintos campos que representan a las partículas, transforman bajo estas transformaciones. A continuación se presentan las transformaciones locales de Lorentz, y luego las transformaciones generales de coordenadas en conexión con las Secs. 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4.

### 3.1.2. Transformaciones de Lorentz locales

Tal como el principio de equivalencia sugiere en un entorno suficientemente pequeño, una métrica plana otorga la descripción adecuada del espaciotiempo. Por esta razón, es necesario establecer las transformaciones que dejan invariante a esta métrica. Además, es necesario ver como los distintos campos transforman bajo estas; porque que los campos presentes en la naturaleza, se definen según como transforman bajo distintas transformaciones, por ejemplo, el potencial vectorial electromagnético es un vector bajo el grupo de Lorentz local, pero es un bosón de gauge para el grupo  $U(1)$ .

Vemos que las transformaciones que dejan invariante a la métrica plana, son el grupo de las transformaciones locales de Lorentz  $SO(1, 3)$ . Un elemento del grupo es representado matricialmente por  $\Lambda^a_b$ , donde cabe recordar que sus índices están definidos sobre el espacio tangente del manifold Riemanniano (localmente plano). Entonces teniendo en cuenta la métrica plana  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , que describe la geometría del espacio tangente, se tiene que bajo una transformación local de Lorentz esta no cambia

$$\eta_{ab} = \eta_{mn}(\Lambda^{-1})^m_a(\Lambda^{-1})^n_b. \quad (3.1)$$

A continuación se definen los siguientes objetos según como transforman bajo el grupo de Lorentz local :

**Escalar.** Por definición un escalar es invariante bajo las transformaciones del grupo de Lorentz local

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x). \quad (3.2)$$

Es importante destacar que las transformaciones de Lorentz locales solo actúan sobre los campos y no sobre sus argumentos.

**Vector.** Un vector transforma linealmente

$$V^a(x) \rightarrow V'^a(x) = \Lambda^a_b V^b(x). \quad (3.3)$$

**Vector Dual.** Como era de esperar, un vector dual transforma linealmente con la matriz inversa  $\Lambda^{-1}$

$$\omega_a(x) \rightarrow \omega'_a(x) = (\Lambda^{-1})^b_a \omega_b(x). \quad (3.4)$$

**Tensor.** Un tensor del tipo  $(q, r)$  transforma con  $q$  matrices  $\Lambda$  y  $r$  matrices inversas  $\Lambda^{-1}$

$$T_{b_1 \dots b_r}^{a_1 \dots a_q}(x) \rightarrow T'^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_r}(x) = \Lambda^{a_1}_{m_1} \dots \Lambda^{a_q}_{m_q} (\Lambda^{-1})^{n_1}_{b_1} \dots (\Lambda^{-1})^{n_r}_{b_r} T^{m_1 \dots m_q}_{n_1 \dots n_r}(x). \quad (3.5)$$

### 3.1.3. Transformaciones generales de coordenadas

Este grupo de transformaciones se refiere a un cambio arbitrario de las coordenadas:  $x \rightarrow x'$ , y fueron introducidas en el Cap. 2, véase Sec. 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4. En las secciones mencionadas, se mostró como vectores, uno-formas y tensores se pueden escribir en distintas bases coordenadas. Cabe recalcar:

**Escalar.** Un escalar  $\phi$  codifica la información de un punto  $p$  en un manifold  $\mathcal{M}$  a una cantidad adimensional (como una función), y desde la Sec. 2.1 se deduce que un punto  $p$  que pertenezca a dos parches  $U_i \cap U_j$  con coordenadas  $x^\mu$  y  $x'^\mu$  respectivamente, genera dos representaciones del punto que *deben* describir una misma función o escalar

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (3.6)$$

**Vector.** Un objeto que tiene un índice arriba  $V^\mu$  transforman como un vector

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x). \quad (3.7)$$

**Uno-forma.** Un objeto con un índice abajo  $\omega_\mu$  transforman como un vector dual o uno-forma

$$\omega'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu(x). \quad (3.8)$$

**Tensor.** Al ser los tensores objetos mixtos, es decir, con índices arriba y abajo se tiene que un tensor genérico  $T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q}$  transforma como

$$T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_q}}{\partial x^{\alpha_q}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial x'^{\nu_r}} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}(x). \quad (3.9)$$

## 3.2. Modelo de Einstein-Hilbert

El modelo de Einstein-Hilbert, actualmente es el más exitoso que explica la interacción gravitacional. Dentro de sus propiedades, se encuentra que las ecuaciones de movimiento son hasta segundas derivadas en la métrica, es invariante bajo difeomorfismo y es invariante bajo transformaciones locales.

La acción de Einstein-Hilbert [20] es dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad (3.10)$$

donde en unidades naturales ( $c=1$ )  $\kappa = 8\pi G$  con  $G$  la constante gravitacional de Newton,  $g = \det g_{\mu\nu}$ , y  $\mathcal{R}$  el escalar de Ricci dado en la Ec. (2.81)

### 3.2.1. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas al variar la acción (3.10) con respecto a la métrica, que es el único campo independiente del cual dependen todas las demás cantidades

$$\begin{aligned} \delta_g S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\delta_g \sqrt{-g} \mathcal{R} + \sqrt{-g} \delta_g \mathcal{R}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Veamos por separado la variación de cada término

$$\begin{aligned} \delta_g \sqrt{-g} &= \delta_g \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta_g \det g_{\mu\nu} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

El segundo término requiere un poco más de trabajo pues se tiene

$$\begin{aligned}\delta_g \mathcal{R} &= \delta_g [g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}] \\ &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (3.13)$$

y desde la definición del tensor de Ricci en (2.79), vemos que la variación de este se complica:

$$\delta_g R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta_g \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \delta_g \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \delta_g \Gamma^\rho_{\lambda\nu}. \quad (3.14)$$

Para evitar este tedioso cálculo, puesto que la conexión  $\Gamma$  depende de la métrica, se presenta a continuación un pequeño truco al calcular la derivada covariante de  $\delta\Gamma$  en los índices  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$\nabla_\lambda (\delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \partial_\lambda \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \quad (3.15)$$

y

$$\nabla_\mu (\delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) = \partial_\mu \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta_g \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \quad (3.16)$$

restando ambas derivadas se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda (\delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\mu (\delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) &= \partial_\lambda \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta_g \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \\ &\quad - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\end{aligned}\quad (3.17)$$

que al comparar con la Ec. (3.14) vemos que son iguales, es decir,

$$\delta_g R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\mu (\delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}). \quad (3.18)$$

Luego la variación del escalar de Ricci queda como

$$\begin{aligned}\delta_g \mathcal{R} &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\mu (\delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda})] \\ &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho [g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}]\end{aligned}\quad (3.19)$$

donde se ha usado la covarianza de la métrica, esto es  $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ . Finalmente se pueden reemplazar (3.12) y (3.19) en (3.11)

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \left[ \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{R} + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda})) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \left[ \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{R} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho (\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda})) \right. \\ &\quad \left. - (\nabla_\rho \sqrt{-g}) (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right] \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \nabla_\rho [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\nu\lambda})]\end{aligned}\quad (3.20)$$

donde se ha utilizado integración por partes y la condición de metricidad. En la última línea, cabe notar que el segundo término es de borde, y recordando que por definición al variar con respecto a un campo esta variación evaluada en los bordes es cero:  $\delta g_{\mu\nu} = 0$ , entonces el término se anula. Luego para que la igualdad de estas ecuaciones se cumpla, se tiene que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0 \quad (3.21)$$

las cuales son llamadas ecuaciones de **Einstein en el vacío**, pues no se ha introducido en la teoría un lagrangiano de materia. También desde aquí se define el **tensor de Einstein** como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}. \quad (3.22)$$

### 3.2.2. Tensor de energía-momentum

Todo lo anterior aplica para el vacío, por lo cual uno se pregunta que ocurre en presencia de materia, es decir, como se ven afectadas las Ecs. de Einstein (3.21). Lo primero es presentar una Acción de materia que sea genérica, esto es, su contenido puede ser bosónico o fermiónico. Sea entonces [16]

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} L_M, \quad (3.23)$$

con  $L_M$  el Lagrangiano de materia. Al querer incluir este término en las Ecs. de Einstein, se debe variar con respecto a la métrica, y tomando en cuenta el desarrollo en (3.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_g S_M &= \int d^4x \left( \delta_g \sqrt{-g} L_M + \sqrt{-g} \delta_g L_M \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( g_{\mu\nu} L_M - 2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde se ha introducido el **tensor de energía-momentum** dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} L_M - 2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.25)$$

el cual describe el contenido de energía y materia de la teoría, que es covariantemente constante, es decir

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (3.26)$$

propiedad que se espera de un objeto que describa el contenido de energía-materia, de la cual sabemos que no se crea ni destruye de manera global. De manera formal, esto viene del teorema de Nöether como se demuestra a continuación. El lagrangiano de materia es invariante frente a traslaciones espaciotemporales, es decir

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (3.27)$$

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu, \quad (3.28)$$

donde  $\epsilon^\mu$  es un parámetro infinitesimal constante. Recordemos entonces el teorema de Nöther el cual establece que siempre que exista una simetría en el Lagrangiano existirá una ley de conservación. Al considerar un Lagrangiano que dependa de algún campo  $\Phi^i$ , el teorema de Nöther establece que

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L^M}{\delta(\partial^\mu \Phi^i)} \partial_\nu \Phi^i - g_{\mu\nu} L_M, \quad (3.29)$$

siendo entonces cumplida la condición (3.26).

Otra propiedad del tensor de energía-momentum es su simetría en los índices, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (3.30)$$

puesto que viene contraído con la métrica (que bien sabemos es simétrica) como se aprecia en (3.24).

### 3.2.3. Constante cosmológica

La constante cosmológica es la densidad de energía característica del espacio vacío [21], la cual debe ser isotrópica. En términos de una acción que represente esta densidad de energía, se necesita que sea invariante bajo Lorentz Local, bajo difeomorfismos, y que al obtener las ecuaciones de campo, se genere un tensor de energía-momentum del vacío que refleje la isotropía. El candidato que cumple estos requisitos es una constante que se agrega a la Acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{R} - 2\Lambda], \quad (3.31)$$

donde  $\Lambda$  es la **constante cosmológica**. Al considerarla, las ecuaciones de movimiento generadas son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.32)$$

Esta constante fue inicialmente introducida por Albert Einstein con el fin de considerar un modelo estático del universo, pues en ese entonces no se sabía que el universo se expande; sin embargo luego retiró la constante debido a que las nuevas observaciones astronómicas sugerían un universo en expansión. Actualmente, la constante cosmológica se ha medido arrojando un valor de  $\Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$  [22]. Sin embargo, su valor experimental no concuerda con el valor predicho por la teoría cuántica de Campos, la cual predice un valor extremadamente alto, teniendo una diferencia de ciento veinte ordenes de magnitud. Este problema ha sido llamado “la peor predicción en la historia de la Física”, implica que no existe una manera natural de predecir un valor tan minúsculo desde la física de partículas. Es decir, las dos grandes teorías que rigen al universo: Relatividad General y el Modelo Estandar, no encuadran en ciertos rangos de energía.

### 3.2.4. Formalismo de primer orden en términos de las formas diferenciales

En los cálculos de las secciones anteriores vemos que, a pesar de la simpleza de la acción de Einstein-Hilbert, la cantidad de índices que aparecen en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento, complican su manipulación al ir considerando más términos o más dimensiones. Ante esto, es de gran ayuda considerar el formalismo de **primer orden** [16, 23, 24], llamado así debido a que las ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales de primer orden.

En la geometría (pseudo-)Riemanniana, considerada en la Relatividad General, todo queda determinado por la métrica, tanto la propiedad de metricidad como el paralelismo, es decir, la conexión queda definida en función del tensor métrico. Sin embargo, es posible reinterpretar la geometría diferencial al considerar que las nociones de metricidad y paralelismo son independientes, existiendo así un campo que representa a cada una; de esta forma al calcular las ecuaciones de campo, estas son de primer orden en las derivadas. Adicionalmente, conviene trabajar con el formalismo de primer orden usando formas diferenciales ya que, debido a sus propiedades, el cálculo se simplifica aun más. Los campos idóneos para esta tarea, se presentan a continuación.

La metricidad es representada por los **vielbein** o **marco tangente** que, tal como se mostró en la Sec. 2.1.2, definen una base ortonormal para el fibrado tangente, además los vielbein depende de las coordenadas, y son a la vez un mapa entre el manifold y su fibrado tangente. Por otra parte, el campo que representa al paralelismo es la llamada **conexión de espín** o de **Lorentz**, la cual permite definir una derivada covariante en el fibrado tangente. Una de las propiedades de estos campos en su versión de forma diferencial, es decir, los 1-forma vielbein y

la 1-forma conexión de Lorentz, es que, por construcción, son invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas debido a que sus índices de difeomorfismo están contraídos.

Por medio de las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan se puede construir, a partir de los 1-forma vielbein y la 1-forma conexión, la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión las cuales definen propiedades geométricas generales. Estas formas diferenciales, junto con el vielbein y la conexión, son los ingredientes básicos para la construcción de acciones gravitacionales que sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz local y bajo difeomorfismos.

Si bien, desde el punto de vista matemático el razonamiento explicado anteriormente no tiene falencias, es el Principio de Equivalencia el que permite una justificación física basado en la observación empírica del uso del formalismo de primer orden (basado en las formas diferenciales) en la Relatividad General.

A continuación, en las siguientes secciones, se dan definiciones formales de estos objetos.

### 3.2.5. Vielbein

Debido al principio de equivalencia, para cada punto  $p$  perteneciente a un manifold  $\mathcal{M}$ , se puede encontrar un set de coordenadas  $\zeta^a$  con  $a = 1, 2, \dots, m$  ( $m = \dim(\mathcal{M})$ ) que sean localmente *inerciales* a cada punto  $p$ . De esta forma, es posible definir la métrica del manifold curvo  $\mathcal{M}$  en función de una métrica plana, es decir,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a{}_{\mu}(x) e^b{}_{\nu}(x), \quad (3.33)$$

donde  $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, +, \dots)$  corresponde a la métrica de Minkowski y donde los vielbein son definidos como

$$e^a{}_{\mu}(x) = \frac{\partial \zeta^a}{\partial x^{\mu}}. \quad (3.34)$$

Cabe notar que, como la métrica plana  $\eta_{ab}$  es constante, toda la información de la métrica  $g_{\mu\nu}$  queda codificada en los vielbein. Por otro lado, debido a la invertibilidad de la matriz  $e^a{}_{\mu}$ , es posible definir los vielbein inversos dados por

$$E_a{}^{\mu}(x) = \eta_{ab} g^{\mu\nu}(x) e^b{}_{\nu}(x), \quad (3.35)$$

tal que se cumple

$$E_a{}^{\mu} e^a{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, \quad (3.36)$$

$$E_a{}^{\mu} e^b{}_{\mu} = \delta^a{}_b. \quad (3.37)$$

Cabe destacar que los vielbein son objetos híbridos puesto que al tener dos tipos de índices, transforman bajo difeomorfismos y Lorentz local:

**Transformaciones generales de coordenadas**, donde transforman como un vector covariante

$$e^a{}_{\mu}(x) \rightarrow e'^a{}_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e^a{}_{\nu}(x)$$

**Transformaciones de Lorentz local**, lo que sería un cambio de coordenadas inerciales en el espacio tangente

$$e^a{}_{\mu}(x) \rightarrow e'^a{}_{\mu}(x) = \Lambda^a{}_b e^b{}_{\mu}(x).$$

Ahora con los vielbein y su inverso definidos, se introducen las 1-forma vielbein

$$\mathbf{e}^a(x) = e^a{}_{\mu}(x) dx^{\mu} \quad (3.38)$$

el cual pertenece al espacio cotangente  $T_p^*(\mathcal{M})$ , y sus 1-forma inversas

$$\mathbf{E}_a(x) = E_a^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.39)$$

las cuales pertenecen, por supuesto, al espacio tangente  $T_p(\mathcal{M})$ .

Se define el determinante de los vielbein como

$$e \equiv \det(e^a_\mu),$$

que a partir de la Eq. (3.33) se relaciona con el determinante de la métrica como

$$e = \sqrt{-g}.$$

Además los vielbein actúan explícitamente tomando objetos que viven en el manifold llevándolos a su espacio tangente o al revés. Por ejemplo, al actuar sobre un vector se obtiene

$$V^a = e^a_\mu(x) V^\mu(x),$$

o

$$V^\mu(x) = E_a^\mu(x) V^a.$$

### 3.2.6. Conexión de Lorentz

Elí Cartan, propuso la diferencia entre las propiedades metricidad y afinidad. Ya que la metricidad hace referencia a medidas de largos, ángulos, volúmenes o áreas, en general medidas de objetos localmente definidos en un manifold. En cambio la afinidad se refiere a las propiedades que permanecen invariantes bajo traslaciones o transformaciones afines, tales como el paralelismo. En este sentido, es necesario definir una conexión que permita la existencia de una derivada covariante sobre el fibrado tangente. Y por supuesto el grupo de simetrías que actúa sobre la estructura diferencial del fibrado tangente, son las transformaciones de Lorentz local; de modo que la conexión es llamada apropiadamente **conexión de Lorentz** o **de espín**  $\omega^a_{b\mu}(x)$ . La 1-forma conexión de Lorentz es dada por

$$\omega^a_b(x) = \omega^a_{b\mu} dx^\mu. \quad (3.40)$$

la cual es, por supuesto, completamente antisimétrica.

En el lenguaje de las formas diferenciales, la derivada covariante es definida en el marco tangente como el operador

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} + [\omega, ] \quad (3.41)$$

donde  $[, ]$  denota que la 1-forma conexión va contraída en cada índice que posea el objeto a derivar. Por ejemplo, sea el vector  $V^a$  que vive en el fibrado, luego su derivada covariante es

$$\mathbf{D}V^a = \mathbf{d}V^a + \omega^a_b V^b.$$

En el caso de un tensor  $F^{ab}$ , se tiene

$$\mathbf{D}F^{ab} = \mathbf{d}F^{ab} + \omega^a_c F^{cb} + \omega^b_c F^{ac}.$$

Similarmente que con la conexión afin en la Ec. (2.75), la conexión de Lorentz transforma inhomogeneamente bajo una transformación local

$$\omega'^a_{b\mu}(x) = \Lambda^a_c(x) \Lambda^d_b(x) \omega^c_d(x) + \Lambda^a_c(x) \partial_\mu \Lambda^b_c(x). \quad (3.42)$$

### 3.2.7. Ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan

Ya con el marco tangente y la conexión de espín definidos, se debe proceder a definir los objetos que nos entreguen información más explícita acerca de las propiedades del manifold en cuestión. Estos son la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión, presentadas a continuación.

#### 2-forma curvatura

Recordando lo aprendido en la Sec. 2.3, gracias a la nilpotencia de la 1-forma derivada exterior, al aplicar la 1-forma derivada covariante (3.41) al cuadrado sobre un vector (por ejemplo), el resultado no es un operador diferencial actuando sobre el vector, sino un operador algebraico

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^2\phi^a &= \mathbf{D}[\mathbf{d}\phi^a + \omega^a_b\phi^b] \\
 &= \mathbf{d}[\mathbf{d}\phi^a + \omega^a_b\phi^b] + \omega^a_b[\mathbf{d}\phi^b + \omega^b_c\phi^c] \\
 &= \mathbf{d}\omega^a_b\phi^b - \omega^a_b\phi^b + \omega^a_b\phi^b + \omega^a_b \wedge \omega^b_c\phi^c \\
 &= [\mathbf{d}\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b]\phi^b,
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

siendo entre los paréntesis de corchete en la última línea lo que se define como la **2-forma curvatura**:

$$\mathbf{R}^a_b \equiv \mathbf{d}\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b. \tag{3.44}$$

Esta ecuación es conocida como la **segunda ecuación estructural de Maurer-Cartan**. Escrita como forma diferencial queda

$$\mathbf{R}^a_b = \frac{1}{2}R^a_{b\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.45}$$

Desde aquí se puede ver como se relaciona con el tensor de Riemann  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ :

$$\mathbf{R}^a_b = \frac{1}{2}e^a_\alpha e^b_\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.46}$$

#### 2-forma torsión

Solo es posible la construcción de un objeto más que sea completamente independiente de la 2-forma curvatura, lo cual es dado por la imposibilidad de construir formas diferenciales solamente en función de los vielbein y sus derivadas exteriores, así como la 2-forma curvatura fue construida en función de la conexión de espín y su derivada exterior.<sup>1</sup> Entonces, a partir de la derivada covariante de  $e^a$ , se obtiene la **2-forma torsión**:

$$\mathbf{T}^a \equiv \mathbf{D}e^a = \mathbf{d}e^a + \omega^a_b \wedge e^b. \tag{3.47}$$

Vemos que la 2-forma curvatura, a diferencia de la 2-forma torsión, no está definida como la derivada covariante de algún objeto.

### 3.2.8. Relación entre $\Gamma$ y $\omega$

Como se ha visto anteriormente, la 2-forma curvatura puede ser definida tanto en el sistema general coordinado, como en el marco tangente, respectivamente véase en las Ecs. (2.78)

<sup>1</sup>Esto es así, debido a la asimetría entre los vielbein y la conexión, pues los vielbein transforman localmente como vectores y no como conexión.

y (3.44). Sin embargo, ambas definiciones corresponden a un mismo objeto geométrico, esto es la curvatura. Con esto en mente, es lógico pensar que las conexiones  $\Gamma$  y  $\omega$  definidas en ambos sistemas (general coordinado y tangente) se transformen una en la otra y vice versa [16], es decir, ellas están íntimamente relacionadas. A continuación se muestra un par de teoremas que muestran como transforman entre ellas.

**Teorema 2.**

$$\begin{aligned}\omega^a{}_b &= e^a{}_\mu \nabla E_a{}^\mu \\ &= e^a{}_\mu dE_b{}^\mu + e^a{}_\mu \Gamma^\mu{}_\nu E_b{}^\nu\end{aligned}\quad (3.48)$$

donde  $\Gamma^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} dx^\alpha$ .

**Teorema 3.**

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha{}_\beta &= E_a{}^\alpha D e^a{}_\beta \\ &= E_a{}^\alpha d e^a{}_\beta + E_a{}^\alpha \omega^a{}_b e^b{}_\beta.\end{aligned}\quad (3.49)$$

### 3.2.9. Identidades de Bianchi

Estas identidades se satisfacen para cualquier par de 1-forma conexión y 1-forma vielbein. Estas son

$$DT^a = R^a{}_b \wedge e^b, \quad (3.50)$$

y

$$DR^{ab} = 0. \quad (3.51)$$

La demostración de la identidad (3.50) es:

$$\begin{aligned}DT^a &= D[de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b] \\ &= \omega^a{}_b \wedge de^b + d\omega^a{}_b \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge de^b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge e^b \\ &= [d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b] \wedge e^b \\ &= R^a{}_b \wedge e^b.\end{aligned}\quad (3.52)$$

Y la demostración para la segunda identidad (3.51)

$$\begin{aligned}DR^{ab} &= D[d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}] \\ &= d\omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} - \omega^a{}_c \wedge d\omega^{cb} + \omega^{ac} \wedge d\omega^{cb} + \omega^b{}_c \wedge d\omega^{ac} + \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} + \omega^b{}_d \wedge \omega^a{}_c \wedge \omega^{cd} \\ &= d\omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} - d\omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} + \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} - \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (3.53)$$

Gracias a estas identidades, es posible notar que no existen otros objetos que se puedan definir en función de los vielbein, la conexión de Lorentz y sus derivadas, que sean independientes de las 2-forma curvatura y torsión.

### 3.2.10. Revisita a la acción gravitacional en cuatro dimensiones

En esta sección se presentará nuevamente la Acción de Einstein-Hilbert, pero está vez usando el formalismo de primer orden y se mostrará como pasar de un formalismo a otro. La acción

de Einstein-Hilbert en formas diferenciales es dada por

$$S_{EH} = \frac{\alpha}{(4-2)!} \int \epsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d. \quad (3.54)$$

Como en el formalismo de primer orden se considera que  $\mathbf{e}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son independientes, se generarán dos ecuaciones de movimiento independientes, las cuales se obtienen de variar la Acción con respecto de ambos campos. Se varía con respecto a  $\mathbf{e}$ , donde cabe recordar que la curvatura no depende de los vielbein solo de la conexión de espín (ver la Ec. (3.44)), dando

$$\frac{\alpha}{2!} \int 2\epsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c \wedge \delta \mathbf{e}^d = 0, \quad (3.55)$$

por lo tanto se tiene que

$$\epsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c = 0. \quad (3.56)$$

Al variar con respecto a la conexión se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \int \epsilon_{abcd} \delta \boldsymbol{\omega} \mathbf{R}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d &= 0 \\ &= \alpha \int \epsilon_{abcd} [\mathbf{d} \delta \boldsymbol{\omega}^{ab} + 2\delta \boldsymbol{\omega}^a_m \wedge \boldsymbol{\omega}^{mb}] \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d \\ &= \alpha \int \mathbf{d} [\epsilon_{abcd} \delta \boldsymbol{\omega}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d] + \frac{2\alpha}{3!} \int \epsilon_{abcd} [\delta \boldsymbol{\omega}^{ab} \wedge \mathbf{d} \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d + \delta \boldsymbol{\omega}^a_m \wedge \boldsymbol{\omega}^{mb}] \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d \\ &= 2\alpha 3 \int \epsilon_{abcd} \delta \boldsymbol{\omega}^{an} \wedge [\delta^b_n \mathbf{d} \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d + \delta^m_n \boldsymbol{\omega}^b_m \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d], \end{aligned} \quad (3.57)$$

de la cual se obtiene la ecuación

$$\epsilon_{abcd} [\delta^b_n \mathbf{d} \mathbf{e}^c + \boldsymbol{\omega}^c_n \wedge \mathbf{e}^b] \wedge \mathbf{e}^d = 0. \quad (3.58)$$

Desde esta ecuación cabe destacar un punto muy importante. Vemos que desde (3.58) es posible obtener algebraicamente la conexión de espín en función de los vielbein, lo cual nos dice que en realidad ellos no son campos independientes como se había supuesto. Esto puede implicar que la torsión definida en (3.47) es idénticamente igual a cero, como se suponía en la teoría original de Einstein-Hilbert, ó que queda completamente indeterminada. Lo cual significa que no es necesario *a priori* imponer la condición libre de torsión, pues ello se deduce desde las ecuaciones diferenciales obtenidas desde las suposiciones más generales posibles.

A continuación se muestra como la Ec. (3.56) es equivalente a las Ecs. de Einstein en el vacío (3.21). Lo primero es tomar el dual de Hodge  $\star$  a la Ec. (3.56) y expandir en sus componentes

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} \star (\mathbf{R}^{ab} \wedge \mathbf{e}^c) &= \star 0 \\ \epsilon_{abcd} \star \left( \frac{R^{ab}_{mn}}{2} \mathbf{e}^m \wedge \mathbf{e}^n \wedge \mathbf{e}^c \right) &= 0 \\ \frac{\epsilon_{abcd}}{2(4-3)!} R^{ab}_{mn} \epsilon^{mnc}_p \mathbf{e}^p &= 0 \\ -\frac{R^{ab}_{mn}}{2} \epsilon_{abcd} \epsilon^{mncp} \mathbf{e}^p &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como esta ecuación se debe cumplir para todo  $\mathbf{e}^p$ , se tiene

$$(-)(-)\frac{1}{2} R^{ab}_{mn} (1! \delta^{mnp}_{abd}) = 0, \quad (3.60)$$

donde  $\delta^{mnp}{}_{abd} = \delta^m{}_a \delta^n{}_b \delta^p{}_d - \delta^m{}_b \delta^n{}_a \delta^p{}_d + \delta^m{}_b \delta^n{}_d \delta^p{}_a - \delta^m{}_d \delta^n{}_b \delta^p{}_a + \delta^m{}_d \delta^n{}_a \delta^p{}_b - \delta^m{}_a \delta^n{}_d \delta^p{}_b$ , de modo que se obtiene

$$\frac{1}{2}(4R^p{}_a - 2\delta^p{}_a \mathcal{R}) = 0, \quad (3.61)$$

donde se ha definido  $R^{ab}{}_{pb} = R^a{}_p$  y  $R^{ab}{}_{ab} = \mathcal{R}$ . Además se puede bajar el índice  $p$  y considerar que  $\delta_{ab} = \eta_{ab}$ , esto es,

$$R_{pa} - \frac{1}{2}\eta_{pa} \mathcal{R} = 0. \quad (3.62)$$

Utilizando las propiedades de los vielbein inversos, se pueden transformar los índices de Lorentz a índices curvos

$$R_{\mu\nu} E_p{}^\mu E_a{}^\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} E_p{}^\mu E_a{}^\nu \mathcal{R} = 0. \quad (3.63)$$

Finalmente, como esto se debe cumplir para cualquier marco tangente, se obtienen de esta forma las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0. \quad (3.64)$$

### 3.2.11. Logros de la Relatividad General

Si bien, a lo largo de estas primeras secciones se ha mostrado el mecanismo y las herramientas que la Relatividad General utiliza, no se podría finalizar la sección sin antes mencionar todos los éxitos que esta teoría ha logrado.

La primera comprobación que tuvo la Relatividad General, fue durante los eclipses solares en los años 1919 y 1922, en donde se observó que efectivamente los rayos de luz provenientes de otras estrellas se deflecan al pasar cerca del Sol; esto lo explica la teoría de la Relatividad General puesto que el campo gravitacional generado por la masa del Sol curva al espaciotiempo en sus proximidades. También relacionado a la observación estelar, se encuentra que la luz tarda más tiempo cuando atraviesa un campo gravitacional en comparación a cuando no lo hay. Esto fue descubierto por Irwin Shapiro en 1964 [25] gracias a los avances en la astronomía radar.

Por otra parte, la Relatividad General logra explicar la precesión de la órbita de Mercurio, pues hace muchos años que se conoce que el perihelio de Mercurio rota alrededor del Sol cada tres millones de años; no existiendo, hasta la invención de la Relatividad General, una teoría capaz de explicar consistentemente este fenómeno. La teoría de Einstein logra predecir la precesión de la órbita de Mercurio con un 0,5 % de precisión.

Producto de la presencia de un campo gravitatorio, los rayos de luz que provienen de tal campos sufren un corrimiento al rojo gravitacional,<sup>2</sup> el cual provoca que la longitud de onda de la luz proveniente de campos gravitatorios aumente, o lo que es equivalente a que la energía del fotón disminuya. Y este fenómeno solo es explicado gracias a la Relatividad General, ya que se deriva desde las ecuaciones de Einstein aplicando la solución de Schwarzschild de la métrica, esto implica que el campo gravitacional debe ser considerable para que el efecto no sea despreciable.

Si bien son muchos más los logros alcanzados por la Relatividad General, quisiera destacar el más reciente ya que implica uno de los logros más grandes del siglo XXI, esto es, la confirmación de las ondas gravitacionales el día 11 de Febrero de 2016 [26, 27] tras la observación de dos agujeros negros en fusión. Las ondas gravitacionales fueron predichas por Albert Einstein en 1916, las cuales consisten en una ondulación del espaciotiempo que se propaga desde la fuente

<sup>2</sup>Este efecto es distinto al efecto Doppler Electromagnético, el cual es debido a la expansión acelerada del universo.

gravitacional a todas las direcciones, esta se propaga en forma de onda a la velocidad de la luz, y como toda onda estas transportan energía que se radía como ocurre de manera similar con la radiación electromagnética. Así fue como la fusión de los agujeros negros produjo una onda gravitacional de una magnitud tan considerable, que pudo ser detectada por los dos detectores de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

Considerando tal cantidad de aciertos, es que la Relatividad General es una de las teorías mejor elaboradas. Sin embargo no concluye una teoría final para la Gravitación, esto debido a dos grandes fenómenos que no son explicados por la Relatividad General: uno de ellos es el valor experimental del perfil de velocidades de las estrellas en las galaxias, ya que este no concuerda con lo predicho por la teoría, y el otro (el cual es abordado por este trabajo de tesis) es debido a la fase de expansión acelerada que acontece al universo. Sobre este último punto, es necesario aclarar que si bien la Relatividad General, por medio de la constante cosmológica, logra incluir una fase de expansión acelerada, esta forma “puesta a mano” realmente no “explica” el porque de la constante cosmológica. Pero a pesar de esto, debido a sus logros y a la forma en la que está estructurada en base a principios naturales, la Relatividad General debe seguir siendo tomada en cuenta como la base principal de una teoría más general que logre integrar los fenómenos anteriormente mencionados.

### 3.3. Teoría de Lovelock y Lovelock-Cartan

#### 3.3.1. Teoría de Lovelock

La teoría de Lovelock [6] surge de la idea de generalizar, a dimensiones arbitrarias, la teoría de Einstein-Hilbert conservando todas la propiedades que ella posee. Debido a lo complejo que se pueden volver los cálculos al considerar dimensiones extras, el formalismo de primer orden usando formas diferenciales aprendido en la Sec. 3.2.4, es útil para generar un desarrollo claro de la teoría. Además, esta metodología nos entrega de manera natural, los ingredientes básicos invariantes bajo difeomorfismos por construcción:  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ . Por otra parte el uso de la derivada exterior  $d$ ,<sup>3</sup> gracias a su nilpotencia  $d^2 = 0$ , nos garantiza que se generen ecuaciones de movimiento con primeras derivadas en los campos. Además, la invarianza local de Lorentz queda satisfecha al construir acciones que sean escalares de Lorentz, las cuales pueden ser construidas con el uso de los dos tensores invariantes de Lorentz:  $\eta_{ab}$  y  $\epsilon_{a_1 \dots a_D}$ , los cuales permiten contraer, subir y bajar índices. Finalmente, considerando que se desea integrar sobre espacios de dimensiones arbitrarias, es decir  $D$ -dimensional, vemos que el problema queda resuelto al construir  $D$ -formas diferenciales invariantes de Lorentz local con los ingredientes básicos:  $e^a$ ,  $R^{ab}$ ,  $T^a$ ,  $\eta_{ab}$  y  $\epsilon_{a_1 \dots a_D}$ . Por supuesto, la 1-forma conexión  $\omega^{ab}$  no puede aparecer explícitamente en la acción, porque esta transforma inhomogeneamente bajo las transformaciones de Lorentz locales, véase la Ec. (3.42).

Sin embargo, la teoría original de Lovelock se considera libre de torsión, es decir, la 1-forma conexión se considera un campo auxiliar que depende del 1-forma vielbein, de modo que la  $D$ -forma solo se construye con combinaciones de los ingredientes anteriormente mencionados a excepción de la 2-forma torsión. Entonces la extensión **natural** de la teoría de Einstein-Hilbert, es dada por el siguiente teorema:

**Teorema 4.** *La acción más general para la gravedad que no involucra torsión y da a lo más*

<sup>3</sup>Donde se excluye el uso del operador de Hodge  $\star$ .

ecuaciones de campo de segundo orden en la métrica, es de la forma

$$S_L(D) = \int_{\mathcal{M}} \sum_{p=0}^{[D/2]} a_p \mathcal{L}_p^L, \quad (3.65)$$

donde los  $a_p$  son constantes arbitrarias y  $\mathcal{L}_p$  es dado por

$$\mathcal{L}_p^L = \epsilon_{a_1 \dots a_D} \mathbf{R}^{ab} \wedge \dots \wedge \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge \mathbf{e}^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{a_D}. \quad (3.66)$$

A modo de ejemplo, la acción de Lovelock en 4 dimensiones es

$$S_L(4) = \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{abcd} [a_0 \mathbf{e}^a \mathbf{e}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + a_1 \mathbf{R}^{ab} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + a_2 \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd}], \quad (3.67)$$

donde se han omitido los productores cuña  $\wedge$  por simplicidad. Vemos que no solo el equivalente al término de Einstein-Hilbert está presente, pues se tiene también en el primer término el equivalente a la constante cosmológica, y en el tercer término el Gauss-Bonnet, el cual es un invariante topológico conocido como el invariante de Euler cuatro-dimensional.

### 3.3.2. Generalización de la acción de Lovelock: Lovelock-Cartan

La teoría de Lovelock-Cartan [5] es una generalización de la teoría de Lovelock, donde la 2-forma torsión es considerada distinta de cero, es decir la 1-forma conexión tiene una pieza adicional que no depende de los vielbein; y como la 2-forma curvatura depende de la 1-forma conexión, será diferente a la que aparece en la teoría de Lovelock. Además, en esta teoría se incluyen términos explícitos en la 2-forma torsión.

Considerando que para construir la acción se necesita una  $D$ -forma diferencial donde todos los índices de Lorentz estén contraídos y tomando en cuenta que la 2-forma torsión posee solo un índice,<sup>4</sup> vemos que los únicos términos (adicionales a los de Lovelock) que se pueden construir son los siguientes

$$\mathcal{R}_n = \mathbf{R}_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{R}_{a_1}^{a_n} \quad (3.68)$$

$$\mathcal{V}_n = \mathbf{e}_{a_1} \wedge \mathbf{R}_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{R}_b^{a_n} \wedge \mathbf{e}^b \quad (3.69)$$

$$\mathcal{T}_n = \mathbf{T}_{a_1} \wedge \mathbf{R}_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{R}_b^{a_n} \wedge \mathbf{T}^b \quad (3.70)$$

$$\mathcal{K}_n = \mathbf{T}_{a_1} \wedge \mathbf{R}_{a_2}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{R}_b^{a_n} \wedge \mathbf{e}^b. \quad (3.71)$$

Vemos que también aparecen nuevos términos en función la 2-forma curvatura y los vielbein que no están en la serie (3.66). Luego, cualquier combinación lineal de estos términos es invariante, y se puede construir la siguiente serie lagrangiana en  $D$  dimensiones

$$\mathcal{L}_{LC}(D) = \sum_{p=0}^{[D/2]} a_p \mathcal{L}_p^L + \sum \beta_n \mathcal{L}_n^{LC}, \quad (3.72)$$

donde

$$\mathcal{L}_n^{LC} = \mathcal{R}_{m_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{R}_{m_r} \wedge \mathcal{T}_{n_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{T}_{n_t} \wedge \mathcal{V}_{p_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{V}_{p_v} \wedge \mathcal{K}_{q_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{K}_{q_k}, \quad (3.73)$$

siendo  $\beta_n$  parámetros y cuyos índices  $n = (m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_t, p_1, \dots, p_v, q_1, \dots, q_k)$  son tales que se obtiene una  $D$ -forma.

<sup>4</sup>Al ser una 2-forma (es decir que su dimensión es dos) pero con un solo índice, no es posible construir términos como los de la serie de Lovelock con la 2-forma torsión, ya que la cantidad de índices no coincidiría con la dimensión del término.

## 3.4. Un poco de cosmología

### 3.4.1. Principio cosmológico

La cosmología trata del estudio del universo a muy grandes escalas, de modo que el espacio tri-dimensional puede ser considerado como homogéneo e isotrópico en cuanto a su distribución de materia y energía. Es decir, el universo para cada tiempo  $t$  se debe ver igual en todas las direcciones y en cada punto del espacio. Por **isotrópico** quiere decir que el tensor métrico  $g_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  (que define al espacio) es invariante bajo rotaciones en cada punto del espacio tangente. Y por **homogéneo** quiere decir que  $g_{ij}$  es también invariante bajo traslaciones espaciales [28].

A partir de estos enunciados, se puede deducir que el tensor métrico Lorentziano cuatro-dimensional separa la parte espacial de la temporal:  $\mathcal{M}^{(4)} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}^{(3)}$ . Esto significa que el elemento de línea se puede descomponer como sigue

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.74)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ .

### 3.4.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Se requiere encontrar la parte espacial de la métrica cuatro-dimensional,  $g_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , cuyas isometrías son las dadas por las del principio cosmológico. Una forma de obtenerla, sería calcular la ecuación de Killing (2.43) en las direcciones de los vectores de Killing que generan las isometrías, los cuales son los tres generadores del grupo de Lorentz local  $SO(3)$

$$\mathcal{J}^i = \epsilon^{ijk} x_j \partial_k, \quad (3.75)$$

y los tres generadores del grupo de las traslaciones espaciales

$$\mathcal{P}^i = \sqrt{1 - kr^2} \partial^i, \quad (3.76)$$

donde el factor  $k = -1, 0, 1$  denota si la parte espacial del espaciotiempo es abierta, plana o cerrada, respectivamente. Sin embargo, la métrica tri-dimensional también se puede encontrar utilizando argumentos físicos a partir del principio cosmológico, más un poco de geometría. Lo primero que da cuenta el principio cosmológico es que  $g_{ij} = g_{ij}(t)$ , es decir, la métrica espacial solo puede depender del tiempo, puesto que si dependiera de las coordenadas espaciales se violaría la homogeneidad. De esta forma, el elemento de línea (3.74) se puede escribir de manera conveniente como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \zeta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.77)$$

Cabe notar que el manifold tri-dimensional descrito por esta métrica a lo más puede tener curvatura constante, ya que de otra forma no sería isotrópico y homogéneo. La geometría nos dice que en cualquier dimensión solo existen tres tipos de manifold con curvatura a lo más constante: el manifold Euclideo  $\mathbb{R}^3$  con curvatura cero, la tres-esfera  $S^3$  con curvatura cerrada constante y el tres-hiperbolóide  $H^3$  con curvatura abierta constante.

El caso más simple es  $\mathbb{R}^3$ , donde se tiene que el elemento de línea es

$$ds^2_{(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.78)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker.

Para el caso de la tres-esfera y el tres-hiperbolóide es un poco más complicado llegar al elemento de línea respectivo, por lo cual es necesario hacer un embebimiento [21]. Para esto, se requiere considerar que el manifold tri-dimensional es un submanifold de un manifold cuatro-dimensional  $\mathcal{N}^{(4)}$  en el cual se embeben la tres-esfera y el tres-hiperbolóide (y por supuesto  $\mathbb{R}^3$ ).

El elemento de línea para la tres-esfera embebida en el manifold  $\mathcal{N}^{(4)}$  es dado por

$$ds_{(\mathbb{R} \times S^3)}^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij}dx^i dx^j + du^2), \quad (3.79)$$

con  $u$  la coordenada extra del manifold  $\mathcal{N}^{(4)}$ . Por supuesto se debe cumplir la ecuación de la esfera  $x_k x^k + u^2 = 1$ , desde la cual se puede despejar el diferencial  $du$

$$dx_k x^k + x_k dx^k + 2u du = 0 \quad (3.80)$$

$$2x_k dx^k + 2u du = 0 \quad (3.81)$$

$$u du = -x_k dx^k \quad (3.82)$$

$$du = -\frac{x_k dx^k}{\sqrt{1 - x_k x^k}}, \quad (3.83)$$

donde  $u = \sqrt{1 - x_k x^k}$ . Al reemplazar en el elemento de línea, se obtiene

$$ds_{(\mathbb{R} \times S^3)}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \delta_{ij} dx^i dx^j + \frac{(x_k dx^k)^2}{1 - x_k x^k} \right). \quad (3.84)$$

De manera similar, el elemento de línea del tres-hiperbolóide  $H^3$  embebido en  $\mathcal{N}^{(4)}$  es dado por

$$ds_{(\mathbb{R} \times H^3)}^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij}dx^i dx^j - du^2), \quad (3.85)$$

donde se debe cumplir la ecuación del hiperbolóide  $x_k x^k - u^2 = 1$ . Al despejar el diferencial  $du$  se obtiene

$$du = \frac{x_k dx^k}{\sqrt{1 + x_k x^k}}, \quad (3.86)$$

que al reemplazar en el elemento de línea queda

$$ds_{(\mathbb{R} \times H^3)}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \delta_{ij} dx^i dx^j - \frac{(x_k dx^k)^2}{1 + x_k x^k} \right). \quad (3.87)$$

Luego, estos tres elementos de línea (3.78), (3.84) y (3.87) se pueden resumir como sigue

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t) \left( \delta_{ij} dx^i dx^j + k \frac{(x_i dx^i)^2}{1 - k x_j x^j} \right), \quad (3.88)$$

donde  $k = -1, 0, 1$  para el tres-hiperbolóide, para  $\mathbb{R}^3$  y para la tres-esfera, respectivamente. Para hacer aun más evidente las simetrías de este elemento de línea, conviene pasar a coordenadas esféricas, donde es fácil demostrar que

$$\delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

y

$$x_i dx^i = r dr.$$

Al reemplazar en (3.88), da el famoso ansatz cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right), \quad (3.89)$$

donde  $a(t)$  es interpretado como el factor de escala. Desde aquí es fácil extraer los 1-forma vielbein

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt) \otimes (dt) + \left( a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \otimes \left( a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) + (a(t)r d\theta) \otimes (a(t)r d\theta) \\ &\quad + (a(t)r \sin(\theta) d\varphi) \otimes (a(t)r \sin(\theta) d\varphi) \\ &= -(\mathbf{e}^0) \otimes (\mathbf{e}^0) + (\mathbf{e}^1) \otimes (\mathbf{e}^1) + (\mathbf{e}^2) \otimes (\mathbf{e}^2) + (\mathbf{e}^3) \otimes (\mathbf{e}^3), \end{aligned} \quad (3.90)$$

donde se identifican

$$\mathbf{e}^0 = dt \quad (3.91)$$

$$\mathbf{e}^1 = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{e}^2 = a(t)r d\theta \quad (3.93)$$

$$\mathbf{e}^3 = a(t)r \sin(\theta) d\varphi. \quad (3.94)$$

Los 1-forma vielbein aquí presentados serán utilizados en el Cap. 5, donde el ansatz de FRW será también impuesto sobre los campos heredados desde la reducción dimensional de la 1-forma conexión cinco-dimensional.

Para concluir esta sección, se nombran los logros más importantes que la métrica de FRW ha conseguido. Lo primero que se debe decir, es que la aseveración en sí de la isotropía y homogeneidad del universo a grandes escalas, está respaldada por la evidencia experimental. Uno de los logros más destacados, es el sustento de las ecuaciones para la base del modelo cosmológico estandar del Big Bang, siendo consistente con las observaciones hechas por los exploradores espaciales COBE (Cosmic Background Explorer) [29] [30] y WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [31]. Y el otro logro más importante, tratado en esta investigación, es que al considerar la constante cosmológica se logra obtener una presión negativa, la cual es necesaria para explicar la fase de expansión acelerada del universo [1] [2].



# Teoría de Kaluza-Klein

## 4.1. Descomponiendo campos en modos de Kaluza-Klein

La teoría de Kaluza-Klein, consiste en considerar que el espaciotiempo cuatro-dimensional es una restricción de un manifold de dimensión mayor que cuatro; cuyo propósito inicial fue tratar de unificar las interacciones fundamentales en una sola teoría. De manera pictórica, uno se puede imaginar el escenario de las interacciones fundamentales en el espacio cuatro-dimensional, como piezas aisladas de un rompecabezas, pero que si se miran desde dimensiones mayores estas adquieren sentido unificándose en un solo cuadro.

De esta forma, cabe preguntarse como es que los distintos campos encajan en este escenario. Considerese el caso más sencillo, donde se tiene una teoría en  $(D + 1)$  dimensiones, y se desea compactificar (o reducir) una dimensión extra. Por supuesto hay dos clases de objetos en los cuales se puede reducir una dimensión: un círculo o una línea, siendo el más simple de ellos el círculo debido a su simetría. Y este círculo  $S^1$  (la fibra) perpendicular a cada punto del manifold  $D$ -dimensional (la base),<sup>1</sup> posee un radio  $L$  “suficientemente” pequeño como para no ser detectado en los experimentos que se realizan hoy en día, ya que aun no se han detectado las dimensiones extras.

Si se parte de una teoría puramente gravitacional [32], se necesita saber como se descompone su campo fundamental: la métrica en  $(D + 1)$  dimensiones. Se considera que las coordenadas del manifold base son representadas por  $x^\mu$  con  $\mu = 1, \dots, D$ , y la coordenada de la dimensión extra es representada por  $\xi$ , o de manera resumida  $\hat{\mu} = \mu, \xi$ . Tal como Kaluza y Klein sugirieron, las dimensiones extras deben ser compactas teniendo un radio muy pequeño, periódicas y ortogonales a cada punto del espaciotiempo. Esta última condición implica que los campos reducidos no pueden depender de las coordenadas de la dimensión extra, sugiriendo una descomposición de Fourier de los mismos. En el caso de la métrica se tiene

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x, \xi) = \sum_n \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(n)}(x) e^{m\xi/L}. \quad (4.1)$$

Vemos que se obtiene un número infinito de campo  $D$ -dimensionales, estos son los modos de Fourier los cuales son etiquetados por  $n$ . Cabe destacar el caso especial cuando  $n = 0$ , modo que es asociado a un campo sin masa, en cambio para  $n \neq 0$  los modos serán masivos. A continuación esto se muestra para un campo escalar  $\phi$  que vive en  $(D + 1)$  dimensiones y que no posee masa; por supuesto este campo debe cumplir con la ecuación de Klein-Gordon en  $(D + 1)$  dimensiones [33]

$$\square^{(D+1)}\phi = 0, \quad (4.2)$$

donde el operador D’Alambert es definido como  $\square \equiv \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}$ . Para poder resolver esta ecuación, se asume que  $\mathcal{M}^{(D+1)} = \mathcal{M}^{(D)} \times S^1$ , donde el D’Alambertiano se descompone de la siguiente

<sup>1</sup>Cuando se habla de la “fibra” o de la “base”, se está haciendo referencia al vocabulario de las teorías de bundle.

forma

$$\square^{(D+1)} = \square^{(D)} + \partial_\xi^2. \quad (4.3)$$

Utilizando la descomposición del campo escalar en modos de Fourier

$$\phi(x, \xi) = \sum_n \phi_n(x) e^{in\xi/L}, \quad (4.4)$$

e implementándolo en la Ec. (4.2) junto con la descomposición (4.3), se obtiene

$$\begin{aligned} [\square^{(D)} + \partial_\xi^2] \sum_n \phi_n(x) e^{in\xi/L} &= 0 \\ &= \sum_n \left[ (\square^{(D)} \phi_n(x)) e^{in\xi/L} + \phi_n(x) \left(\frac{in}{L}\right)^2 e^{in\xi/L} \right] \\ &= \left[ \square^{(D)} - \left(\frac{n}{L}\right)^2 \right] \phi_n(x), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ . Al comparar con la ecuación de Klein-Gordon masiva en  $D$  dimensiones, vemos que cada modo tiene una masa efectiva  $m_{\text{eff}} = \frac{|n|}{L}$ . De lo cual se puede concluir, que la descomposición de Kaluza-Klein de un campo escalar en  $(D + 1)$  dimensiones, genera una “torre” infinita de campos escalares masivos en  $D$  dimensiones doblemente degenerados, puesto que la Ec. (4.5) no distingue el signo de  $n$ , y genera un campo escalar sin masa correspondiente a  $n = 0$ .

A modo de ejemplo, se mostrará la reducción de un campo escalar pero ahora en  $(D + 2)$  dimensiones, el cual será reducido en una  $S^2$  y en un  $T^2$ , con el fin de mostrar otros escenarios de compactificación.

**Reducción en  $S^2$ .** De la misma forma en que se compactificó en  $S^1$ , se descompone el operador D’Alambertiano, solo que ahora se asume que  $\mathcal{M}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D)} \times S^2$ , siendo entonces

$$\square^{(D+2)} = \square^{(D)} + \nabla^2, \quad (4.6)$$

donde  $\nabla$  es el operador Laplaciano dos-dimensional en coordenadas esféricas, respetando así la simetría de la fibra.

De la misma forma que se descompuso el campo escalar en un círculo, la reducción ahora en la esfera, debe respetar esta simetría considerando sus autofunciones:

$$\phi(x, \xi) = \sum_{l,m} \phi_{l,m}(x) Y^{lm}(\xi), \quad (4.7)$$

donde ahora las coordenadas de las dimensiones extra son representadas por  $\xi^i$  con  $i = 1, 2$ , y  $Y^{lm}$  son los armónicos esféricos que satisfacen la autoecuación

$$\nabla^2 Y^{lm}(\xi) = -\frac{l(l+1)}{L^2} Y^{lm}(\xi). \quad (4.8)$$

Al reemplazar estos ingredientes en la Ec. (4.2) se obtiene

$$\begin{aligned} [\square^{(D)} + \nabla^2] \sum_{l,m} \phi_{lm}(x) Y^{lm}(\xi) &= 0 \\ &= \sum_{l,m} \left[ (\square^{(D)} \phi_{lm}(x)) Y^{lm}(\xi) - \phi_{lm}(x) \frac{l(l+1)}{L^2} Y^{lm}(\xi) \right] \\ &= \left[ \square^{(D)} - \frac{l(l+1)}{L^2} \right] \phi_{lm}(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nuevamente al comparar con la ecuación de Klein-Gordon masiva, se encuentra una torre infinita de modos de Kaluza-Klein con un masa efectiva

$$m_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{L},$$

siendo  $(2l+1)$ -degenerados, y un campo escalar sin masa correspondiente al modo  $l=0$ .

**Reducción**  $T^2$ . Un toro es topológicamente homeomorfo al producto de dos círculos, es decir,  $T^2 \simeq S^1 \times S^1$ . Se asume entonces que  $\mathcal{M}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D)} \times S^1 \times S^1$ , de modo que el D'alambertiano se descompone como

$$\square^{(D+2)} = \square^{(D)} + \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2. \quad (4.10)$$

No es difícil concluir que la respectiva expansión del campo escalar  $(D+2)$ -dimensional es

$$\phi(x, \xi) = \sum_{m,n} \phi_{m,n}(x) e^{i(m\xi_1/L_1 + n\xi_2/L_2)}, \quad (4.11)$$

siendo  $L_1$  y  $L_2$  los respectivos radios de los círculos. Nuevamente se reemplazan estos ingrediente en la ecuación de Klein-Gordon no masiva en  $(D+1)$  dimensiones

$$\begin{aligned} & [\square^{(D)} + \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2] \sum_{m,n} \phi_{m,n}(x) e^{i(m\xi_1/L_1 + n\xi_2/L_2)} = 0 \\ &= \sum_{m,n} \left[ (\square^{(D)} \phi_{m,n}(x)) e^{i(m\xi_1/L_1 + n\xi_2/L_2)} - \phi_{m,n}(x) \left( \frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right) e^{i(m\xi_1/L_1 + n\xi_2/L_2)} \right] \\ &= \left[ \square^{(D)} - \left( \frac{m}{L_1} \right)^2 - \left( \frac{n}{L_2} \right)^2 \right] \phi_{m,n}(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$ . Vemos que la masa efectiva de cada modo masivo de Kaluza-Klein es

$$m_{\text{eff}} = \sqrt{\left( \frac{m}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_2} \right)^2}.$$

Al observar las masas efectivas de los campos reducidos en cada una de las reducciones mostradas anteriormente, vemos que debido a que siempre aparecen en el denominador los radios de las dimensiones extras, estas masas se vuelven realmente grandes. Por esta razón, y porque además es esperable detectar, con las tecnologías de hoy, los modos cero de cada reducción, siendo estos desacoplados de los demás modos de forma que la teoría no se ve afectada si no se considera la torre infinita,<sup>2</sup> esta investigación se centrará en los modos cero de las teorías de Kaluza-Klein.

#### 4.1.1. Compactificación de la métrica en $D+1$ dimensiones

A continuación, se mostrará como reducir una teoría puramente gravitacional desde  $(D+1)$  dimensiones a una de  $D$  dimensiones. La dimensión extra se compactificará en un círculo, es decir  $\mathcal{M}^{(D+1)} \rightarrow \mathcal{M}^{(D)} \times S^1$ . Se considera la métrica  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , la cual describe un manifold (pseudo)-Riemanniano  $(D+1)$ -dimensional; al considerar su estructura desde la teoría efectiva, es decir

<sup>2</sup>Este argumento no es aplicable a todo tipo de reducción dimensional, pero al menos al compactificar en círculos y productos de ellos si se cumple.

en  $D$  dimensiones, se encuentra que debe tener la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} & \hat{g}_{\mu\xi} \\ \hat{g}_{\xi\nu} & \hat{g}_{\xi\xi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} & V_\mu \\ V_\nu & \Xi \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.13}$$

donde la componente  $\Xi$  corresponde a un escalar,  $V_\mu$  corresponde a un vector y  $\hat{g}_{\mu\nu}$  corresponde a un tensor simétrico de rango dos el cual debe contener la métrica del manifold reducido. Tomando especial atención en la forma de esta descomposición, las simetrías subyacentes de la teoría, y que a la vez la elección sea lo más general posible permitiendo que se generen ecuaciones de movimiento que contengan términos conocidos, la elección más adecuada de estos componentes es

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi} A_\mu A_\nu\tag{4.14}$$

$$\hat{g}_{\mu\xi} = e^{2\beta\phi} A_\mu\tag{4.15}$$

$$\hat{g}_{\xi\xi} = e^{2\beta\phi}\tag{4.16}$$

donde las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  juegan el rol de parámetros que podrán fijarse a conveniencia. Cabe destacar que esta elección particular de la métrica es equivalente a otras por medio de una reparametrización, como la que se presentará en la Sec. 4.4.

En cualquier reducción dimensional a lo Kaluza-Klein, las componentes de los campos no pueden depender de las coordenadas de las dimensiones extras. De esta forma, las componentes de la métrica  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  no dependen de  $\xi$ , ni tampoco su variación en cualquier dirección

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x)\tag{4.17}$$

$$\delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x).\tag{4.18}$$

A partir de esta condición, se pueden clasificar los campos  $g_{\mu\nu}(x)$ ,  $A_\mu(x)$  y  $\phi(x)$  al calcular la derivada de Lie de cada componente de la métrica  $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

$$\delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{X}^{\hat{\rho}}\partial_{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\rho}}\hat{X}^{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\rho}}\hat{X}^{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\rho}}.\tag{4.19}$$

Pero la derivada de Lie es a lo largo de unos determinados vectores  $\hat{X}^{\hat{\rho}}$ , por lo cual surge la pregunta: Cuáles vectores son?. Por supuesto, estos deben ser tales que preserven la dependencia coordenada impuesta en (4.17), a los cuales llamaré **vectores de Lie** y que son presentados en detalle en el apéndice A. Estos son

$$\hat{X}^{\hat{\rho}} = \begin{cases} \hat{X}^\rho = X^\rho(x) \\ \hat{X}^\xi = c\xi + \lambda(x), \end{cases}\tag{4.20}$$

donde  $c$  es una constante, y  $X^\rho(x)$  con  $\lambda(x)$  son funciones arbitrarias de las coordenadas del manifold reducido. Entonces a partir de la Ec. (4.19) y teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, se calcula como transforma cada campo.

Para calcular la variación del campo escalar  $\phi$ , vemos por un lado que la variación explícita de la componente  $\hat{g}_{\xi\xi}$  es

$$\delta\hat{g}_{\xi\xi} = 2\beta e^{2\beta\phi}\delta\phi,\tag{4.21}$$

pero por otro lado la variación de  $\hat{g}_{\xi\xi}$  desde la Ec. (4.19) es dada por

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\xi\xi} &= X^\rho\partial_\rho\hat{g}_{\xi\xi} + \hat{X}^\xi\partial_\xi\hat{g}_{\xi\xi} + \partial_\xi X^\rho\hat{g}_{\rho\xi} + \partial_\xi\hat{X}^\xi\hat{g}_{\xi\xi} + \partial_\xi X^\rho\hat{g}_{\xi\rho} + \partial_\xi\hat{X}^\xi\hat{g}_{\xi\xi} \\ &= 2\beta e^{2\beta\phi} X^\rho\partial_\rho\phi + 2ce^{2\beta\phi}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Al comparar ambas variaciones, (4.21) con (4.22), se obtiene

$$\delta\phi = X^\rho\partial_\rho\phi + \frac{c}{\beta}.\quad (4.23)$$

Vemos que  $\phi$  transforma como una escalar bajo difeomorfismos más una pieza adicional que muestra una simetría relacionada a un cambio constante del campo escalar.

Para el campo vectorial  $A_\mu$  se obtiene de manera similar, teniendo en cuenta la variación de  $\phi$ . Ahora se toma la variación explícita de la componente  $\hat{g}_{\mu\xi}$  dada por

$$\delta\hat{g}_{\mu\xi} = 2\beta e^{2\beta\phi} A_\mu \left( X^\rho\partial_\rho\phi + \frac{c}{\beta} \right) + e^{2\beta\phi}\delta A_\mu.\quad (4.24)$$

Y su variación considerando la Ec. (4.19) para esta componente da

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\mu\xi} &= X^\rho\partial_\rho\hat{g}_{\mu\xi} + \hat{X}^\xi\partial_\xi\hat{g}_{\mu\xi} + \partial_\mu X^\rho\hat{g}_{\rho\xi} + \partial_\mu\hat{X}^\xi\hat{g}_{\xi\mu} + \partial_\xi X^\rho\hat{g}_{\mu\rho} + \partial_\xi\hat{X}^\xi\hat{g}_{\mu\xi} \\ &= e^{2\beta\phi} \left( 2\beta X^\rho\partial_\rho\phi A_\mu + X^\rho\partial_\rho A_\mu + \partial_\mu X^\rho A_\rho + \partial_\mu\lambda + cA_\mu \right).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Comparando las variaciones (4.24) y (4.25) se obtiene

$$\delta A_\mu = X^\rho\partial_\rho A_\mu + \partial_\mu X^\rho A_\rho + \partial_\mu\lambda - cA_\mu,\quad (4.26)$$

desde la cual se encuentra que el campo  $A_\mu$  efectivamente transforma como un campo de gauge de 1-spin, más una pieza adicional relacionada a un cambio lineal del potencial vectorial.

Finalmente, para calcular la variación de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , se utiliza la componente  $\hat{g}_{\mu\nu}$  de la métrica cinco-dimensional. Su variación explícita es dada por

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\mu\nu} &= e^{2\alpha\phi} \left( 2\alpha g_{\mu\nu} \left( X^\rho\partial_\rho\phi + \frac{c}{\beta} \right) + \delta g_{\mu\nu} \right) + e^{2\beta\phi} \left( 2\beta A_\mu A_\nu \left( X^\rho\partial_\rho\phi + \frac{c}{\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( X^\rho\partial_\rho A_\mu + \partial_\mu X^\rho A_\rho + \partial_\mu\lambda - cA_\mu \right) A_\nu + A_\mu \left( X^\rho\partial_\rho A_\nu + \partial_\nu X^\rho A_\rho + \partial_\nu\lambda - cA_\nu \right) \right).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Y su variación según (4.19)

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\mu\nu} &= e^{2\alpha\phi} \left( 2\alpha X^\rho\partial_\rho\phi g_{\mu\nu} + X^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu}\partial_\mu X^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu X^\rho g_{\mu\rho} \right) + e^{2\beta\phi} \left( 2\beta X^\rho\partial_\rho\phi A_\mu A_\nu \right. \\ &\quad \left. + X^\rho\partial_\rho A_\mu A_\nu + A_\mu X^\rho\partial_\rho A_\nu + \partial_\mu X^\rho A_\rho A_\nu + \partial_\mu\lambda A_\nu + \partial_\nu X^\rho A_\mu A_\rho + \partial_\nu\lambda A_\mu \right).\end{aligned}\quad (4.28)$$

Al comparar (4.27) y (4.28) se obtiene

$$\delta g_{\mu\nu} = X^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu X^\rho g_{\mu\rho} - \frac{2\alpha c}{\beta} g_{\mu\nu}.\quad (4.29)$$

Desde la cual se aprecia que el campo  $g_{\mu\nu}$  transforma como una métrica, pero que además posee una simetría adicional, relacionada con el del dilatón  $\phi$  y con el cambio lineal del potencial vectorial  $A_\mu$ .

Al observar como cada uno de estos campos transforman, es posible comprender que es lo que ocurre con la simetría luego de que una dimensión espacial es compactificada en un círculo. Se comienza con una teoría que posee una simetría general de coordenadas, la cual involucra  $(D + 1)$  coordenadas, pero al reducir una dimensión se restringe consecuentemente la forma de los vectores que preservan la estructura métrica. Luego de la reducción dimensional, se conserva una simetría general de coordenadas pero en  $D$  dimensiones, además se tiene una simetría de gauge  $U(1)$  heredada de la topología del círculo únicamente relacionada al fotón  $A_\mu$ , y adicionalmente todos los campos reducidos pueden ser escalados, ya sea de forma constante o lineal, para alguna combinación de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c \in \mathbb{R}$ , tal que la estructura métrica  $(D + 1)$ -dimensional sea preservada; este tipo de simetría se conoce como simetría de trombón [32]. En términos físicos, como se verá en la siguiente sección, se comenzó con una teoría gravitacional pura y se terminó con una teoría gravitacional-electromagnética-escalar, donde los campos no son acoplados minimalmente.

## 4.2. Reducción de Einstein-Hilbert en $S^1$

En esta sección, se mostrará el caso más sencillo de reducción dimensional, siendo la teoría de Einstein-Hilbert en cinco dimensiones, con el fin de observar el mecanismo de compactificación de Kaluza-Klein, por supuesto la reducción dimensional será en un círculo. Se utilizará la elección de la métrica mostrada en la Sec. 4.1.1. Como se trabajará con el formalismo de primer orden usando formas diferenciales, desde el elemento de línea que se escribe a partir de las componentes del tensor métrico  $(D + 1)$ -dimensional (4.14), (4.15) y (4.16), se puede encontrar el marco tangente:

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= e^{2\alpha\phi} ds^2 + e^{2\beta\phi} (d\xi + \mathbf{A}_{(1)})^2 \\ &= (e^{\alpha\phi} ds) \otimes (e^{\alpha\phi} ds) + (e^{\beta\phi} (d\xi + \mathbf{A}_{(1)})) \otimes (e^{\beta\phi} (d\xi + \mathbf{A}_{(1)})) \\ &= \hat{e}^a \otimes \hat{e}^a + \hat{e}^* \otimes \hat{e}^*, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con  $\mathbf{A}_{(1)} = A_\mu dx^\mu = A_a e^a$  donde  $A_\mu$  es el potencial vectorial electromagnético. Desde aquí se deduce

$$\hat{e}^A = \begin{cases} \hat{e}^a = e^{\alpha\phi} e^a \\ \hat{e}^* = e^{\beta\phi} (d\xi + \mathbf{A}_{(1)}). \end{cases} \quad (4.31)$$

Por otra parte, la teoría de Einstein-Hilbert considera a la torsión idénticamente igual a cero, de modo que la 1-forma conexión de espín puede ser calculada desde la primera ecuación estructural de Cartan dada en (3.47)

$$\mathbf{T}^a = d\mathbf{e}^a + \boldsymbol{\omega}^a_b \wedge \mathbf{e}^b = 0. \quad (4.32)$$

El expandir en los índices se encuentran dos ecuaciones

$$d\hat{e}^a + \hat{\boldsymbol{\omega}}^a_b \wedge \hat{e}^b + \hat{\boldsymbol{\omega}}^a_* \wedge \hat{e}^* = 0 \quad (4.33)$$

$$d\hat{e}^* + \hat{\boldsymbol{\omega}}^*_a \wedge \hat{e}^a = 0. \quad (4.34)$$

Para encontrar las componentes de la 1-forma conexión, se deben calcular explícitamente las derivadas exteriores que aparecen en estas ecuaciones. Primero se parte con la más sencilla de

ellas (4.34)<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 d\hat{e}^* &= \beta d\phi \wedge \hat{e}^* + e^{\beta\phi} dA \\
 &= -\beta \partial_a \phi \hat{e}^* \wedge e^a + e^{\beta\phi} F_{(2)} \\
 &= -\beta e^{-\alpha\phi} \partial_a \phi \hat{e}^* \wedge \hat{e}^a - \frac{1}{2} e^{(\beta-2\alpha)\phi} F_{ab} \hat{e}^b \wedge \hat{e}^a,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

donde se ha definido el tensor de campo electromagnético  $F_{ab}$  asociado a su 2-forma

$$\begin{aligned}
 F_{(2)} &= dA \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_a A_b - \partial_b A_a) e^a \wedge e^b \\
 &= \frac{F_{ab}}{2} e^a \wedge e^b.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Al comparar (4.35) con (4.34) se obtiene la componente  $\hat{\omega}^*_a$

$$\hat{\omega}^*_a = \beta e^{-\alpha\phi} \partial_a \phi \hat{e}^* + \frac{1}{2} e^{(\beta-2\alpha)\phi} F_{ab} \hat{e}^b. \tag{4.37}$$

Luego se procede a calcular la otra derivada exterior

$$\begin{aligned}
 d\hat{e}^a &= \alpha d\phi \wedge \hat{e}^a + e^{\alpha\phi} de^a \\
 &= \alpha \partial_b e^b \wedge \hat{e}^a - e^{\alpha\phi} \omega^a_b \wedge e^b \\
 &= -\alpha e^{-\alpha\phi} \partial_a \hat{e}^a \wedge \hat{e}^b - \omega^a_b \wedge \hat{e}^b,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde se ha utilizado la ecuación de Cartan para la torsión igual a cero en cuatro dimensiones:

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0, \tag{4.39}$$

para despejar  $de^a$  en función de la conexión de espín del manifold base. Al reemplazar este resultado, junto con la componente  $\hat{\omega}^*_a = -\hat{\omega}^*_a$  dado en la Ec. (4.37), en la Ec. (4.33) se encuentra que

$$\hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha e^{-\alpha\phi} \partial^{[b} \phi \hat{e}^{a]} - \frac{1}{2} e^{(\beta-2\alpha)\phi} F^{ab} \hat{e}^*. \tag{4.40}$$

Por otra parte, el lagrangiano de Einstein-Hilbert cinco-dimensional en formas diferenciales es dado por

$$\mathcal{L}_{EH}^{(5)} = \frac{\epsilon_{A_1 \dots A_5}}{(5-2)!} \hat{R}^{A_1 A_2} \wedge \hat{e}^{A_3} \wedge \hat{e}^{A_4} \wedge \hat{e}^{A_5}, \tag{4.41}$$

de modo que es necesario el cálculo de la dos-forma curvatura dado por la Ec. (3.44). Al expandir en los índices, se obtienen dos ecuaciones independientes:

$$\hat{R}^{ab} = d\hat{\omega}^{ab} + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^{cb} + \hat{\omega}^a_* \wedge \hat{\omega}^{*b} \tag{4.42}$$

$$\hat{R}^{*a} = d\hat{\omega}^{*a} + \hat{\omega}^*_b \wedge \hat{\omega}^{ba}. \tag{4.43}$$

Se encuentra explícitamente que las componentes son

$$\begin{aligned}
 \hat{R}^{ab} &= R^{ab} + \frac{1}{4} e^{2(\beta-2\alpha)\phi} (F^{ab} F_{mn} - F^a_m F^b_n) \hat{e}^m \wedge \hat{e}^n + \alpha e^{-2\alpha\phi} \partial_m \partial^{[a} \phi \hat{e}^{b]} \wedge \hat{e}^m \\
 &\quad + \alpha e^{-\alpha\phi} \partial^m \phi \omega^{[b}_m \wedge \hat{e}^{a]} + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} (\partial^{[a} \phi \partial_m \hat{e}^m \wedge \hat{e}^{b]} - \partial^m \phi \partial_m \hat{e}^a \wedge \hat{e}^b)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

<sup>3</sup>A partir de aquí, por simplicidad, se omitirá la etiqueta (1) en la uno forma  $A$ .

y

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{R}}^{*a} &= \beta e^{-2\alpha\phi} \left( \partial_m \partial^a \phi + (\beta - 2\alpha) \partial_m \phi \partial^a \phi \right) \hat{e}^m \wedge \hat{e}^* + \alpha \beta e^{-2\alpha\phi} \partial_m \phi \partial^m \phi \hat{e}^a \wedge \hat{e}^* \\
 &+ \beta e^{-\alpha\phi} \partial_m \phi \omega^{am} \wedge \hat{e}^* - \frac{1}{2} e^{(\beta-2\alpha)\phi} \left( F^a{}_n \omega^n{}_m - F_{mn} \omega^{na} \right) \wedge \hat{e}^m \\
 &+ \frac{1}{4} e^{2(\beta-2\alpha)\phi} F_{mn} F^{na} \hat{e}^m \wedge \hat{e}^* + \frac{1}{2} \alpha e^{(\beta-3\alpha)\phi} \partial^n \phi F_{mn} \hat{e}^m \wedge \hat{e}^a \\
 &+ \frac{1}{2} e^{(\beta-3\alpha)\phi} \left( (\beta - \alpha) (\partial_n \phi F^a{}_m + \partial^a \phi F_{nm}) + \partial_n F^a{}_m \right) \hat{e}^n \wedge \hat{e}^m.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Con el cálculo de las componentes de la 2-forma curvatura, se procede a la expansión de índices en la Ec. (4.41):

$$\mathcal{L}_{EH}^{(5)} = \frac{2\epsilon_{*abcd}}{3!} \hat{\mathbf{R}}^{*a} \wedge \hat{e}^b \wedge \hat{e}^c \wedge \hat{e}^d + \frac{3\epsilon_{abcd*}}{3!} \hat{\mathbf{R}}^{ab} \wedge \hat{e}^c \wedge \hat{e}^d \wedge \hat{e}^*. \tag{4.46}$$

Al desarrollar este Lagrangiano utilizando las Ecs. (4.44) y (4.45), más las siguientes propiedades

$$\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d = -\epsilon^{abcd} dV_{(4)} \tag{4.47}$$

$$\epsilon_{abcd*} = \epsilon_{abcd} \tag{4.48}$$

$$\epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} = -4! \tag{4.49}$$

$$\epsilon_{mna} \epsilon^{pqa} = 1! (\delta^p{}_m \delta^q{}_n - \delta^p{}_n \delta^q{}_m), \tag{4.50}$$

se obtiene el siguiente Lagrangiano

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{EH}^{(5)} &= e^{(2\alpha+\beta)\phi} \left[ \mathcal{R} - (8\alpha^2 + 2\beta(\beta - 2\alpha) + 8\alpha\beta) \partial_m \phi \partial^m \phi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} e^{2(\beta-\alpha)\phi} F^{mn} F_{mn} \right] dV_{(4)} d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Por supuesto los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser fijados a conveniencia, y como se desea obtener en la teoría reducida al menos el lagrangiano de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones,<sup>4</sup> se escoge  $\beta = -2\alpha$ , obteniéndose

$$\mathcal{L}_{EH}^{(5)} = \left[ \mathcal{R} - 6\alpha^2 \partial_m \phi \partial^m \phi - \frac{1}{4} e^{-6\alpha\phi} F^{mn} F_{mn} \right] dV_4 d\xi \tag{4.52}$$

finalmente vemos que para obtener el término cinético habitual es necesario fijar  $\alpha^2 = 1/12$

$$\mathcal{L}_{EH}^{(5)} = \left[ \mathcal{R} - \frac{1}{2} \partial_m \phi \partial^m \phi - \frac{1}{4} e^{-2\phi/\sqrt{3}} F^{mn} F_{mn} \right] dV_4 d\xi. \tag{4.53}$$

Cabe destacar que a partir de una teoría puramente gravitacional en cinco dimensiones, se a obtenido la teoría de Einstein-Hilbert habitual en cuatro dimensiones, más una teoría escalar y la teoría electromagnética acoplada no minimalmente al campo escalar.

### 4.3. Compactificación de Lovelock en una $S^1$

A continuación, con el fin de entender el mecanismo de las reducciones dimensionales, se estudiará la teoría de Lovelock en  $(D + 1)$  dimensiones compactificando una dimensión en un

<sup>4</sup>Esta fijación especial de los parámetros se conoce como el “frame de Einstein”.

círculo. Se considerará que la 2-forma torsión **no** es idénticamente igual a cero, de modo que el estudio sea lo más general posible. Además se considerarán solo los modos ceros de la torre de Kaluza-Klein. Por simplicidad en la escritura, se omitirán los productos cuña  $\wedge$  entre las formas diferenciales.

Las componentes de la métrica más general posible, como se vió en la Sec. 4.1.1, son:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi} A_\mu A_\nu, \quad (4.54)$$

$$\hat{g}_{\mu\xi} = e^{2\beta\phi} A_\mu, \quad (4.55)$$

$$\hat{g}_{\xi\xi} = e^{2\beta\phi}. \quad (4.56)$$

Con esta elección de la métrica, el elemento de línea queda

$$d\hat{s}^2 = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\phi} (\mathbf{A} + d\xi)^2, \quad (4.57)$$

donde  $\mathbf{A} = A_\mu dx^\mu$ . De aquí se identifican fácilmente los vielbein:

$$\hat{e}^A = \begin{cases} \hat{e}^a = e^{\alpha\phi} e^a \\ \hat{e}^* = e^{\beta\phi} (\mathbf{A} + d\xi). \end{cases} \quad (4.58)$$

Como se considera que la torsión es distinta de cero, la conexión es independiente de los vielbein, entonces se propone el siguiente ansatz

$$\hat{\omega}^{AB} = \begin{cases} \hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \psi^{ab} \hat{e}^* \\ \hat{\omega}^{a*} = \lambda^a + \chi^a \hat{e}^*. \end{cases} \quad (4.59)$$

Antes de proceder con el cálculo de las 2-forma curvatura y 2-forma torsión, se hará un estudio más detallado de las simetrías de los campos reducidos propuestos para el ansatz de la 1-forma conexión de Lorentz. Para esto se estudia la derivada de Lie de estos campos, tal como se vió en la Sec. 4.1.1, imponiendo que la conexión de Lorentz en cinco dimensiones transforme como tal.

### 4.3.1. Derivada de Lie de los campos heredados de la 1-forma conexión

La derivada de Lie para la conexión de Lorentz, requiere un poco más de trabajo que la calculada para la métrica, ya que la conexión de Lorentz tiene parte de sus índices en el espacio tangente, esto es  $(\hat{\omega}^A_B)_{\hat{\sigma}}$ , donde recordemos que  $\hat{\omega}^A_B = (\hat{\omega}^A_B)_{\hat{\sigma}} dx^{\hat{\sigma}}$ . Se necesita pasar de los índices del espacio tangente al manifold, lo cual se hace con la ayuda de los vielbein:

$$(\hat{\omega}^A_B)_{\hat{\sigma}} = (\hat{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} \hat{e}^A_{\hat{\mu}} \hat{E}_B^{\hat{\nu}},$$

donde  $\hat{E}_B^{\hat{\nu}}$  son los vielbein inversos. Para encontrar a los vielbein inversos, se puede utilizar la condición (3.36)

$$\delta_B^A = \hat{e}^A_{\hat{\mu}} \hat{E}_B^{\hat{\mu}} = \hat{e}^A_{\mu} \hat{E}_B^{\mu} + \hat{e}^A_{\xi} \hat{E}_B^{\xi}.$$

Además desde (4.58), se tiene que las componentes de los vielbein son

$$\begin{aligned} \hat{e}^a_{\mu} &= e^{\alpha\phi} e^a_{\mu} \\ \hat{e}^a_{\xi} &= 0 \\ \hat{e}^*_{\mu} &= e^{\beta\phi} A_{\mu} \\ \hat{e}^*_{\xi} &= e^{\beta\phi}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Para el caso  $A = a$  y  $B = a$  se obtiene la ecuación

$$1 = e^{\alpha\phi} e^a{}_\mu \hat{E}_a{}^\mu,$$

desde la cual se extrae

$$\hat{E}_a{}^\mu = e^{-\alpha\phi} E_a{}^\mu. \quad (4.61)$$

Para el caso  $A = a$  y  $B = *$  se obtiene la ecuación

$$e^{\alpha\phi} e^a{}_\mu \hat{E}_*{}^\mu = 0,$$

desde la cual se extrae

$$\hat{E}_*{}^\mu = 0. \quad (4.62)$$

Para el caso  $A = *$  y  $B = a$  se obtiene la ecuación

$$e^{\beta\phi} A_\mu e^{-\alpha\phi} E_a{}^\mu + e^{\beta\phi} \hat{E}_a{}^\xi = 0,$$

desde la cual se extrae

$$\hat{E}_a{}^\xi = -e^{\alpha\phi} A_\mu E_a{}^\mu. \quad (4.63)$$

Y finalmente para el caso  $A = *$  y  $B = *$  se obtiene la ecuación

$$1 = e^{\beta\phi} \hat{E}_*{}^\xi,$$

desde donde se extrae al componente

$$\hat{E}_*{}^\xi = e^{-\beta\phi}. \quad (4.64)$$

Con todas las componentes de los vielbein inversos calculadas, se presenta la derivada de Lie para la conexión de Lorentz, la cual es dada por

$$\delta(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} = \hat{X}^{\hat{\rho}} \partial_{\hat{\rho}}(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} + \partial_{\hat{\sigma}} \hat{X}^{\hat{\rho}}(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\rho}} + \partial_{\hat{\nu}} \hat{X}^{\hat{\rho}}(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\rho}})_{\hat{\sigma}} - \partial_{\hat{\rho}} \hat{X}^{\hat{\mu}}(\hat{\omega}^{\hat{\mu}\hat{\rho}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} + \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\sigma}} \hat{X}^{\hat{\mu}}, \quad (4.65)$$

donde los vectores de Lie  $\hat{X}^{\hat{\rho}}$  son los mismos encontrados para la métrica  $\hat{g}_{\hat{\rho}\hat{\nu}}$  mostrados en las Ecs. (4.20). Al igual como se ha procedido con la métrica, los campos reducidos de la conexión de Lorentz, no dependen de la coordenada de la dimensión extra, ni sus variaciones, esto es

$$(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} = (\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}}(x) \quad (4.66)$$

$$\delta(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}} = \delta(\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}})_{\hat{\sigma}}(x). \quad (4.67)$$

Para comenzar a calcular la derivada de Lie de cada componente, es necesario que estas tengan los índices curvos:

$$(\hat{\omega}^a{}_b)_\sigma = (\omega^a{}_b)_\sigma + e^{\beta\phi} \psi^a{}_b A_\sigma \longrightarrow (\hat{\omega}^\mu{}_\nu)_\sigma = (\omega^\mu{}_\nu)_\sigma + e^{\beta\phi} \psi^\mu{}_\nu A_\sigma \quad (4.68)$$

$$(\hat{\omega}^a{}_b)_\xi = e^{\beta\phi} \psi^a{}_b \longrightarrow (\hat{\omega}^\mu{}_\nu)_\xi = e^{\beta\phi} \psi^\mu{}_\nu \quad (4.69)$$

$$(\hat{\omega}^a{}_*)_\sigma = (\lambda^a)_\sigma + e^{\beta\phi} \chi^a A_\sigma \longrightarrow (\hat{\omega}^\mu{}_\xi)_\sigma = e^{(-\alpha+\beta)\phi} [(\lambda^\mu)_\sigma + e^{\beta\phi} \chi^\mu A_\sigma] \quad (4.70)$$

$$(\hat{\omega}^a{}_*)_\xi = e^{\beta\phi} \chi^a \longrightarrow (\hat{\omega}^\mu{}_\xi)_\xi = e^{(-\alpha+2\beta)\phi} \chi^\mu, \quad (4.71)$$

donde se han utilizados los vielbein y sus inversos. Con todos los ingredientes sobre la mesa, se procede a calcular la derivada de Lie para cada componente de la conexión de espín, y se

compara con la variación explícita, tal como se realizó con la métrica en la Sec. 4.1.1. Se encuentra, para cada campo heredado desde la conexión cinco-dimensional, que sus componentes transforman según

$$\delta\chi^\mu = X^\rho\partial_\rho\chi^\mu - \partial_\rho X^\mu\chi^\rho + \frac{c\alpha}{\beta}\chi^\mu \quad (4.72)$$

$$\delta(\lambda^\mu)_\nu = X^\rho\partial_\rho(\lambda^\mu)_\nu + \partial_\nu X^\rho(\lambda^\mu)_\rho - \partial_\rho X^\mu(\lambda^\rho)_\nu + \frac{c\alpha}{\beta}(\lambda^\mu)_\nu \quad (4.73)$$

$$\delta\psi^\mu{}_\nu = X^\rho\partial_\rho\psi^\mu{}_\nu + \partial_\nu X^\rho\psi^\mu{}_\rho - \partial_\rho X^\mu\psi^\rho{}_\nu \quad (4.74)$$

$$\delta(\omega^\mu{}_\nu)_\sigma = X^\rho\partial_\rho(\omega^\mu{}_\nu)_\sigma + \partial_\nu X^\rho(\omega^\mu{}_\rho)_\sigma + \partial_\sigma X^\rho(\omega^\mu{}_\nu)_\rho - \partial_\rho X^\mu(\omega^\rho{}_\nu)_\sigma + \partial_\nu\partial_\sigma X^\mu. \quad (4.75)$$

Lo primero que se debe decir acerca de estos campos es que, a excepción de la 1-forma conexión cuatro-dimensional, estos poseen un caracter tensorial. Por su parte la conexión de espín del manifold reducido  $(\omega^\mu{}_\nu)_\sigma$ , transforma efectivamente como una conexión. Adicionalmente los campos  $\chi^\mu$  y  $(\lambda^\mu)_\nu$  poseen una simetría aparte relacionada a un cambio lineal de tales campos, similar a la simetría adicional de la métrica en (4.29).

### 4.3.2. Cálculo de la serie de Lovelock reducida

Usando las ecuaciones de estructura de Cartan se tiene

$$\hat{T}^A \equiv \mathbf{D}\hat{e}^A = \mathbf{d}\hat{e}^A + \hat{\omega}_B^A\hat{e}^B, \quad (4.76)$$

$$\hat{R}^{AB} \equiv \mathbf{d}\hat{\omega}^{AB} + \hat{\omega}_C^A\hat{\omega}^{CB}, \quad (4.77)$$

donde se pueden calcular las 2-forma curvatura y 2-forma torsión. Por simplicidad a la hora de hacer los cálculos, la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión se escriben como

$$\hat{R}^{AB} = \begin{cases} \hat{R}^{ab} = M^{ab} + N^{ab}\hat{e}^* \\ \hat{R}^{*b} = K^a + L^a\hat{e}^*, \end{cases} \quad (4.78)$$

$$\hat{T}^A = \begin{cases} \hat{T}^a = T^a + V^a\hat{e}^* \\ \hat{T}^* = W^* + Z\hat{e}^*, \end{cases} \quad (4.79)$$

respectivamente. Si se hacen los cálculos se encuentra que

$$M^{ab} = R^{ab} - \lambda^a\lambda^b + e^{\beta\phi}\psi^{ab}\mathbf{F}, \quad (4.80)$$

$$N^{ab} = \mathbf{D}\psi^{ab} + \beta\psi^{ab}\mathbf{d}\phi + 2\chi^{[a}\lambda^{b]}, \quad (4.81)$$

$$K^a = -\mathbf{D}\lambda^a - e^{\beta\phi}\chi^a\mathbf{F}, \quad (4.82)$$

$$L^a = -\mathbf{D}\chi^a - \beta\chi^a\mathbf{d}\phi + \psi_c^a\lambda^c, \quad (4.83)$$

donde  $\mathbf{d}$  denota la derivada exterior y  $\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A}$ . Y para la 2-forma torsión

$$\mathbf{T}^a = \alpha\mathbf{d}\phi\hat{e}^a + e^{\alpha\phi}\mathbf{d}e^a + \omega_c^a\hat{e}^c, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{V} = -\psi_c^a\hat{e}^c + \lambda^a, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{W}^* = e^{\beta\phi}\mathbf{F} - \lambda_c\hat{e}^c, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{Z} = \chi_c\hat{e}^c + \beta\mathbf{d}\phi. \quad (4.87)$$

Con todos los objetos necesarios definidos, se procede a calcular los terminos de Lovelock. Desde la Ec. (3.65), vemos que el Lagrangiano para la reducci3n dimensional deseada es de la forma

$$\mathcal{L}_L^{(D+1)} = \sum_{p=0}^{[D+1/2]} a_p \mathcal{L}_p = \sum_{p=0}^{[D+1/2]} a_p \epsilon_{A_1 \dots A_{D+1}} \hat{\mathbf{R}}^{A_1 A_2} \dots \hat{\mathbf{R}}^{A_{2p-1} A_{2p}} \hat{\mathbf{e}}^{A_{2p+1}} \dots \hat{\mathbf{e}}^{A_{D+1}}. \quad (4.88)$$

Se ver3 termino a termino hasta poder hacer una generalizaci3n de como quedar3a un t3rmino arbitrario. El t3rmino cero o sin curvatura es dado por

$$\begin{aligned} a_0 \mathcal{L}_0 &= \frac{a_0}{(D+1)!} \epsilon_{A_1 \dots A_{D+1}} \hat{\mathbf{e}}^{A_1} \dots \hat{\mathbf{e}}^{A_{D+1}} \\ &= \frac{a_0 (D+1)}{(D+1)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \hat{\mathbf{e}}^{a_1} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \hat{\mathbf{e}}^* \\ &= \frac{a_0}{D!} e^{(D\alpha+\beta)\phi} \epsilon_{a_1 \dots a_D} e^{a_1} \dots e^{a_D} d\xi. \end{aligned} \quad (4.89)$$

El t3rmino lineal en la curvatura es

$$\begin{aligned} a_1 \mathcal{L}_1 &= \frac{a_1}{(D-1)!} \epsilon_{A_1 \dots A_{D+1}} \hat{\mathbf{R}}^{A_1 A_2} \hat{\mathbf{e}}^{A_3} \dots \hat{\mathbf{e}}^{A_{D+1}} \\ &= \frac{a_1 (D-1)}{(D-1)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 a_2} \hat{\mathbf{e}}^{a_3} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \hat{\mathbf{e}}^* + \frac{a_1 2}{(D-1)!} \epsilon_{*a_1 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{*a_1} \hat{\mathbf{e}}^{a_2} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \\ &= \frac{a_1}{(D-2)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \mathbf{M}^{a_1 a_2} \hat{\mathbf{e}}^{a_3} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \hat{\mathbf{e}}^* + \frac{2a_1}{(D-1)!} \epsilon_{*a_1 \dots a_D} \mathbf{L}^{a_1} \hat{\mathbf{e}}^* \hat{\mathbf{e}}^{a_2} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \\ &= a_1 \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-2)\alpha+\beta)\phi}}{(D-2)!} \mathbf{M}^{a_1 a_2} e^{a_3} \dots e^{a_D} - \frac{2e^{((D-1)\alpha+\beta)\phi}}{(D-1)!} \mathbf{L}^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_D} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.90)$$

El segundo t3rmino que es cuadr3tico en la curvatura es dado por

$$\begin{aligned} a_2 \mathcal{L}_2 &= \frac{a_2}{2!(D-3)!} \epsilon_{A_1 \dots A_{D+1}} \hat{\mathbf{R}}^{A_1 A_2} \hat{\mathbf{R}}^{A_3 A_4} \hat{\mathbf{e}}^{A_5} \dots \hat{\mathbf{e}}^{A_{D+1}} \\ &= \frac{a_2 (D-3)}{2(D-3)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 a_2} \hat{\mathbf{R}}^{a_3 a_4} \hat{\mathbf{e}}^{a_5} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \hat{\mathbf{e}}^* + \frac{4a_2}{2(D-3)!} \epsilon_{*a_1 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{*a_1} \hat{\mathbf{R}}^{a_2 a_3} \hat{\mathbf{e}}^{a_4} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \\ &= \frac{a_2}{2(D-4)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \mathbf{M}^{a_1 a_2} \mathbf{M}^{a_3 a_4} \hat{\mathbf{e}}^{a_5} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} - \frac{2a_2}{(D-3)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left( \mathbf{L}^{a_1} \mathbf{M}^{a_2 a_3} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{K}^{a_1} \mathbf{N}^{a_2 a_3} \right) \hat{\mathbf{e}}^* \hat{\mathbf{e}}^{a_4} \dots \hat{\mathbf{e}}^{a_D} \\ &= a_2 \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-4)\alpha+\beta)\phi}}{2(D-4)!} \mathbf{M}^{a_1 a_2} \mathbf{M}^{a_3 a_4} e^{a_5} \dots e^{a_D} - \frac{2e^{((D-3)\alpha+\beta)\phi}}{(D-3)!} \left( \mathbf{L}^{a_1} \mathbf{M}^{a_2 a_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{K}^{a_1} \mathbf{N}^{a_2 a_3} \right) e^{a_4} \dots e^{a_D} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Y el término de orden tres en la curvatura es

$$\begin{aligned}
 a_3 \mathcal{L}_3 &= \frac{a_3}{3!(D-5)!} \epsilon_{A_1 \dots A_{D+1}} \hat{R}^{A_1 A_2} \hat{R}^{A_3 A_4} \hat{R}^{A_5 A_6} \hat{e}^{A_7} \dots \hat{e}^{A_{D+1}} \\
 &= \frac{(D-5)a_3}{3!(D-5)!} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \hat{R}^{a_1 a_2} \hat{R}^{a_3 a_4} \hat{R}^{a_5 a_6} \hat{e}^{a_7} \dots \hat{e}^{a_D} \hat{e}^* \\
 &\quad + \frac{6a_3}{3!(D-5)!} \epsilon_{*a_1 \dots a_D} \hat{R}^{*a_1} \hat{R}^{a_2 a_3} \hat{R}^{a_4 a_5} \hat{e}^{a_6} \dots \hat{e}^{a_D} \\
 &= a_3 \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-6)\alpha+\beta)\phi}}{6(D-6)!} M^{a_1 a_2} M^{a_3 a_4} M^{a_5 a_6} e^{a_7} \dots e^{a_D} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{((D-5)\alpha+\beta)\phi}}{(D-5)!} (L^{a_1} M^{a_2 a_3} M^{a_4 a_5} + 2K^{a_1} N^{a_2 a_3} M^{a_4 a_5}) e^{a_6} \dots e^{a_D} \right] d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Luego de haber calculado estos cuatro términos, es fácil darse cuenta de que el  $p$ -ésimo término será proporcional al polinomio de formas diferenciales (se omiten los índices por simplicidad):

$$[M + N\hat{e}^*]^{p-1} [K + L\hat{e}^*] = [(M)^{p-1} + (p-1)(M)^{p-2} N\hat{e}^*] [K + L\hat{e}^*], \tag{4.93}$$

puesto que los términos que contengan más de un  $\hat{e}^*$  son cero o donde se tengan más de  $D$  índices reducidos, entonces

$$[M + N\hat{e}^*]^{p-1} [K + L\hat{e}^*] = L\hat{e}^* (M)^{p-1} + (p-1)KN\hat{e}^* (M)^{p-2}. \tag{4.94}$$

Teniendo esto en mente, es posible deducir el  $p$ -ésimo término de Lovelock como sigue:

$$\begin{aligned}
 a_p \mathcal{L}_p &= a_p \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-2p)\alpha+\beta)\phi}}{p!(D-2p)!} M^{a_1 a_2} \dots M^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D} \right. \\
 &\quad - \frac{2pe^{((D-2p+1)\alpha+\beta)\phi}}{p!(D-2p+1)!} \left( L^{a_1} M^{a_2 a_3} \dots M^{a_{2p-2} a_{2p-1}} \right. \\
 &\quad \left. \left. + (p-1)K^{a_1 a_2} N^{a_3} M^{a_4 a_5} \dots M^{a_{2p-2} a_{2p-1}} \right) e^{a_{2p}} \dots e^{a_D} \right] d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

De manera explícita, se presentan los términos  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{aligned}
 a_1 \mathcal{L}_1 &= a_1 \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-2)\alpha+\beta)\phi}}{(D-2)!} \left( R^{a_1 a_2} - \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} + e^{\beta\phi} \psi^{a_1 a_2} \mathbf{F} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2e^{((D-1)\alpha+\beta)\phi}}{(D-1)!} \left( -\mathbf{D}\chi^{a_1} - \beta\chi^{a_1} d\phi + \psi_c^{a_1} \lambda^c \right) e^{a_2} \right] e^{a_3} \dots e^{a_D} d\xi,
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

y

$$\begin{aligned}
 a_2 \mathcal{L}_2 &= a_2 \epsilon_{a_1 \dots a_D} \left[ \frac{e^{((D-4)\alpha+\beta)\phi}}{2(D-4)!} \left( R^{a_1 a_2} R^{a_3 a_4} - 2R^{a_1 a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} + 2e^{\beta\phi} \psi^{a_1 a_2} R^{a_3 a_4} \mathbf{F} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} - 2e^{\beta\phi} \psi^{a_1 a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \mathbf{F} + e^{2\beta\phi} \psi^{a_1 a_2} \psi^{a_3 a_4} \mathbf{F} \mathbf{F} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{2e^{((D-3)\alpha+\beta)\phi}}{(D-3)!} \left( \left( -e^{-\beta\phi} \mathbf{D}(e^{\beta\phi} \chi^{a_1}) + \psi_c^{a_1} \lambda^c \right) R^{a_2 a_3} - e^{-\beta\phi} \mathbf{D}\lambda^{a_1} \mathbf{D}(e^{\beta\phi} \psi^{a_2 a_3}) \right. \\
 &\quad - e^{\beta\phi} \mathbf{D}(\chi^{a_1} \psi^{a_2 a_3}) \mathbf{F} + \mathbf{D}(\chi^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) - 2\chi^{a_1} \psi^{a_2 a_3} \mathbf{D}e^{\beta\phi} \mathbf{F} - 2e^{\beta\phi} \chi^{a_1} \chi^{[a_2} \lambda^{a_3]} \mathbf{F} \\
 &\quad \left. \left. + \left( e^{-\beta\phi} \chi^{a_1} \mathbf{D}e^{\beta\phi} - \psi_c^{a_1} \lambda^c \right) \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} + e^{\beta\phi} \psi_c^{a_1} \lambda^c \psi^{a_2 a_3} \mathbf{F} \right) e^{a_4} \right] e^{a_5} \dots e^{a_D} d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Es muy importante notar como va surgiendo la serie de Lovelock  $D$ -dimensional, lo cual es un buen indicio puesto que luego de reducir la teoría, al menos se esperaría recuperar la teoría en  $D$ -dimensiones. Y es en esta serie  $D$ -dimensional, que se va codificando la información del espaciotiempo reducido, es decir, todo lo referente a su geometría.

#### 4.4. Lovelock-Cartan en cinco dimensiones

Lo novedoso de este trabajo, es tomar la acción de Lovelock-Cartan en cinco dimensiones compactificando en un círculo la dimensión extra, para luego imponer la métrica de FLRW con el fin de estudiar soluciones cosmológicas para este modelo. De esta forma, se presenta la acción de Lovelock-Cartan en cinco dimensiones dada por <sup>5</sup>

$$S_{LC(5)} = \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_0}{5} \hat{e}^A \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \frac{\alpha_1}{3} \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] + \beta \int \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B, \quad (4.98)$$

donde se tiene la serie de Lovelock en cinco dimensiones más un término que viene de la teoría de Lovelock-Cartan. En lo siguiente, se mostrará el cálculo de las ecuaciones diferenciales reducidas a cuatro dimensiones.

Sin embargo, el ansatz de la métrica no será igual al utilizado en la Sec. 4.3, sino el siguiente, el cual solo constituye una reparametrización de los campos

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu, \quad (4.99)$$

$$\hat{g}_{\mu\xi} = \phi A_\mu, \quad (4.100)$$

$$\hat{g}_{\xi\xi} = \phi, \quad (4.101)$$

de modo que los 1-forma vielbein quedan dados por

$$\hat{e}^A = \begin{cases} \hat{e}^a = e^a \\ \hat{e}^* = \sqrt{\phi}(\mathbf{A} + d\xi). \end{cases} \quad (4.102)$$

Por otra parte, el ansatz de la 1-forma conexión será

$$\hat{\omega}^{AB} = \begin{cases} \hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha^{ab} \hat{e}^* \\ \hat{\omega}^{a*} = \beta^a + \gamma^a \hat{e}^*. \end{cases} \quad (4.103)$$

Desde aquí pueden ser calculadas las 2-forma curvatura y 2-forma torsión, como es habitual, a partir de las ecuaciones de estructura de Cartan en cinco dimensiones. Se encuentran las siguientes componentes

$$\hat{\mathbf{R}}^{ab} = \mathbf{R}^{ab} + \sqrt{\phi} \alpha^{ab} \mathbf{F} - \beta^a \wedge \beta^b + \left( \mathbf{D} \alpha^{ab} + \frac{1}{2} \alpha^{ab} d \ln \phi - 2 \beta^{[a} \gamma^{b]} \right) \wedge \hat{e}^* \quad (4.104)$$

$$\hat{\mathbf{R}}^{*a} = - \left( \mathbf{D} \beta^a + \sqrt{\phi} \gamma^a \mathbf{F} \right) + \left( \alpha_b^a \beta^b - \mathbf{D} \gamma^a - \frac{1}{2} \gamma^a d \ln \phi \right) \wedge \hat{e}^* \quad (4.105)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^a = \mathbf{T}^a + \left( \beta^a - \alpha_b^a e^b \right) \wedge \hat{e}^* \quad (4.106)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^* = \sqrt{\phi} \mathbf{F} - \beta_b \wedge e^b + \left( \frac{1}{2} d \ln \phi + \gamma_b e^b \right) \wedge \hat{e}^*, \quad (4.107)$$

<sup>5</sup> Notar que se han utilizado otros coeficientes, esto es,  $\alpha_i$  en vez de  $a_i$ , los cuales reabsorben parte de los factoriales.

donde  $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$ , y tanto  $\mathbf{R}^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}$  como  $\mathbf{T}^a = de^a + \omega^a_c \wedge e^c$  corresponden a las 2-forma curvatura y 2-forma torsión del manifold reducido cuatro-dimensional.

A modo de simplicidad al efectuar los cálculos, se utilizan las definiciones (4.78) y (4.79). Al mirar las componentes de la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión, se encuentra que

$$\mathbf{M}^{ab} = \mathbf{R}^{ab} + \sqrt{\phi}\alpha^{ab}\mathbf{F} - \beta^a \wedge \beta^b \quad (4.108)$$

$$\mathbf{N}^{ab} = \mathbf{D}\alpha^{ab} + \frac{1}{2}\alpha^{ab}d\ln\phi - 2\beta^{[a}\gamma^{b]} \quad (4.109)$$

$$\mathbf{K}^a = -\mathbf{D}\beta^a - \sqrt{\phi}\gamma^a\mathbf{F} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{L}^a = \alpha^a_b\beta^b - \mathbf{D}\gamma^a - \frac{1}{2}\gamma^a d\ln\phi \quad (4.111)$$

$$\mathbf{T}^a = \mathbf{T}^a \quad (4.112)$$

$$\mathbf{V}^a = \beta^a - \alpha^a_b e^b \quad (4.113)$$

$$\mathbf{W} = \sqrt{\phi}\mathbf{F} - \beta_b \wedge e^b \quad (4.114)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2}d\ln\phi + \gamma_b e^b. \quad (4.115)$$

#### 4.4.1. Ecuaciones de campo de Lovelock-Cartan

Considerando la acción de Lovelock-Cartan en cinco dimensiones

$$S_{LC(5)} = \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_0}{5} \hat{e}^A \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \frac{\alpha_1}{3} \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] + \beta \int \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B, \quad (4.116)$$

la cual depende de dos campos fundamentales  $\hat{e}$  y  $\hat{\omega}$ , se obtienen dos ecuaciones, las cuales luego deben ser reducidas.<sup>6</sup>

Se varía con respecto a  $\hat{e}$ . Al variar la serie de Lovelock en la Ec. (4.116) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_{\hat{e}} & \left\{ \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_0}{5} \hat{e}^A \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \frac{\alpha_1}{3} \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] \right\} \\ & = \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{5\alpha_0}{5} \delta \hat{e}^A \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \frac{3\alpha_1}{3} \hat{\mathbf{R}}^{AB} \delta \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \delta \hat{e}^E \right] \\ & = \int \delta \hat{e}^A \epsilon_{ABCDE} \left[ \alpha_0 \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_1 \hat{\mathbf{R}}^{BC} \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{BC} \hat{\mathbf{R}}^{DE} \right]. \end{aligned} \quad (4.117)$$

<sup>6</sup>De la misma forma, primero se puede reducir la acción para luego variar con respecto de los campos heredados de la reducción dimensional.

Variando el término explícito en la torsión se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta_{\hat{e}} \left\{ \beta \int \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B \right\} &= \beta \int \left[ \delta_{\hat{e}} (d\hat{e}_A + \hat{\omega}_{AC} \hat{e}^C) \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B + \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \delta \hat{e}^B \right] \\
 &= \beta \int \left[ (d\delta \hat{e}_A + \hat{\omega}_{AC} \delta \hat{e}^C) \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B + \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \delta \hat{e}^B \right] \\
 &= \beta \int \left[ (\mathbf{D} \delta \hat{e}_A) \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B + \delta \hat{e}^B \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \right] \\
 &= \beta \int \left[ \mathbf{D} (\delta \hat{e}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B) + \delta \hat{e}_A \mathbf{D} \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B + \delta \hat{e}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \mathbf{D} \hat{e}^B + \delta \hat{e}^B \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \right] \\
 &= \beta \int \mathbf{D} (\delta \hat{e}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B) + \beta \int \delta \hat{e}^A \left[ \hat{\mathbf{R}}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^B - \hat{\mathbf{R}}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^B \right] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

donde se ha realizado integración por parte en la cuarta línea, de modo que el término que incluye la derivada total es cero en su integración, pues en los bordes se considera que  $\delta \hat{e} = 0$ , y también se utilizó la segunda identidad de Bianchi (3.51). Vemos que este segundo término no contribuye a las ecuaciones de movimiento, pues constituye un término topológico. De esta forma desde la Ec. (4.117) se obtiene

$$\epsilon_{ABCDE} \left[ \alpha_0 \hat{e}^B \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_1 \hat{\mathbf{R}}^{BC} \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{BC} \hat{\mathbf{R}}^{DE} \right] = 0. \tag{4.119}$$

Variando con respecto a la conexión, para el término de la serie de Lovelock se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta_{\hat{\omega}} \left\{ \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_1}{3} \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + \alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] \right\} \\
 &= \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_1}{3} \delta_{\hat{\omega}} (d\hat{\omega}^{AB} + \hat{\omega}^A_M \hat{\omega}^{MB}) \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + 2\alpha_2 \delta_{\hat{\omega}} (d\hat{\omega}^{AB} + \hat{\omega}^A_M \hat{\omega}^{MB}) \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] \\
 &= \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_1}{3} (d\delta \hat{\omega}^{AB} + 2\delta \hat{\omega}^A_M \hat{\omega}^{MB}) \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + 2\alpha_2 (d\delta \hat{\omega}^{AB} + 2\delta \hat{\omega}^A_M \hat{\omega}^{MB}) \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] \\
 &= \int \epsilon_{ABCDE} \left[ \frac{\alpha_1}{3} \mathbf{D} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + 2\alpha_2 \mathbf{D} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E \right] \\
 &= \int \left[ \frac{\alpha_1}{3} \mathbf{D} (\epsilon_{ABCDD E} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E) + \frac{3\alpha_1}{3} \epsilon_{ABCDE} \delta \hat{\omega}^{AB} \mathbf{D} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E \right. \\
 &\quad \left. + 2\alpha_2 \mathbf{D} (\epsilon_{ABCDE} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E) + 2\alpha_2 \epsilon_{ABCDE} (\delta \hat{\omega}^{AB} \mathbf{D} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E + \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \mathbf{D} \hat{e}^E) \right] \\
 &= \int \frac{\alpha_1}{3} \mathbf{D} (\epsilon_{ABCDD E} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E) + 2 \int \alpha_2 \mathbf{D} (\epsilon_{ABCDE} \delta \hat{\omega}^{AB} \hat{\mathbf{R}}^{CD} \hat{e}^E) \\
 &\quad + \int \epsilon_{ABCDE} \delta \hat{\omega}^{AB} \left[ \alpha_1 \mathbf{D} \hat{e}^C \hat{e}^D \hat{e}^E + 2 \hat{\mathbf{R}}^{CD} \mathbf{D} \hat{e}^E \right] \\
 &= \int \epsilon_{ABCDE} \delta \hat{\omega}^{AB} \left[ \alpha_1 \hat{e}^C \hat{e}^D + 2\alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{CD} \right] \hat{\mathbf{T}}^E,
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

donde nuevamente se utilizó integración por partes y la segunda identidad de Bianchi. Variando el término explícito en la torsión de la Ec. (4.116), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta_{\hat{\omega}} \left\{ \beta \int \hat{\mathbf{T}}_A \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B \right\} &= \beta \int \left[ \delta_{\hat{\omega}} (d\hat{e}_A + \hat{\omega}_{AC} \hat{e}^C) \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^B + \hat{\mathbf{T}}_A (\delta_{\hat{\omega}} \hat{\mathbf{R}}^A_B) \hat{e}^B \right] \\
 &= \beta \int \left[ \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AC} \hat{e}^{[C} \hat{\mathbf{R}}^A]_B \hat{e}^B + \hat{\mathbf{T}}^{[A} \mathbf{D} \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{e}^{B]} \right] \\
 &= \beta \int \left[ \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AC} \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^{[C} \hat{e}^{B]} + \mathbf{D} (\delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{e}^{B]}) + \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{e}^{B]} + \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \mathbf{D} \hat{e}^{B]} \right] \\
 &= \beta \int \mathbf{D} (\delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{e}^{B]}) + \beta \int \left[ \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AC} \hat{\mathbf{R}}^A_B \hat{e}^{[C} \hat{e}^{B]} + \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{R}}^A_C \hat{e}^C \hat{e}^{[B]} + \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{\mathbf{T}}^{B]} \right] \\
 &= \beta \int \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \left[ \hat{\mathbf{R}}^A_C \hat{e}^{[B} \hat{e}^{C]} \hat{e}^C - \hat{\mathbf{R}}^A_C \hat{e}^{[B} \hat{e}^{C]} \hat{e}^C + \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{\mathbf{T}}^{B]} \right] \\
 &= \beta \int \delta_{\hat{\omega}} \hat{\omega}_{AB} \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{\mathbf{T}}^{B]},
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

donde los paréntesis de corchete indican que solo sobrevive la parte antisimétrica, puesto que aquellos índices están contraídos con los índices de la conexión de Lorentz. Sin embargo, vemos que este término es cero de todos modos

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{T}}^{[A} \hat{\mathbf{T}}^{B]} &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{T}}^A \hat{\mathbf{T}}^B - \hat{\mathbf{T}}^B \hat{\mathbf{T}}^A) \\
 &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{T}}^A \hat{\mathbf{T}}^B - \hat{\mathbf{T}}^A \hat{\mathbf{T}}^B) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Por consiguiente, vemos que el término explícito en la torsión en la Ec. (4.116), no contribuye de ninguna forma en las ecuaciones de movimiento, ni al variar los vilebein, ni al variar la conexión de Lorentz. Así, la ecuación diferencial para la conexión se obtiene solo desde (4.120)

$$\epsilon_{ABCDE} \left[ \alpha_1 \hat{e}^C \hat{e}^D + 2\alpha_2 \hat{\mathbf{R}}^{CD} \right] \hat{\mathbf{T}}^E = 0. \tag{4.123}$$

El siguiente paso, es tomar estas ecuaciones diferenciales y expandir los índices según sean del manifold base o de la dimensión extra. Esto será determinado por la cantidad de índices libres y contraídos en cada ecuación.

Desde la Ec. (4.119) se fija el índice de la dimensión extra en el índice libre de esta ecuación:  $A = *$ , donde se obtiene

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_0 e^a e^b e^c e^d + \alpha_1 (\mathbf{M}^{ab} e^c e^d + \mathbf{N}^{ab} e^c e^d e^*) + \alpha_2 (\mathbf{M}^{ab} \mathbf{M}^{cd} + 2\mathbf{M}^{ab} \mathbf{N}^{cd} e^*) \right] = 0, \tag{4.124}$$

esta ecuación puede ser separada en dos direcciones: una dirección donde todos los índices están en el manifold base o en la dirección donde un índice pertenece a la dimensión extra, de lo cual se concluyen dos ecuaciones

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_0 e^a e^b e^c e^d + \alpha_1 \mathbf{M}^{ab} e^c e^d + \alpha_2 \mathbf{M}^{ab} \mathbf{M}^{cd} \right] = 0, \tag{4.125}$$

y

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \mathbf{N}^{ab} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* + 2\alpha_2 \mathbf{M}^{ab} \mathbf{N}^{cd} \mathbf{e}^* \right] = 0. \quad (4.126)$$

Por otra parte, se puede escoger el índice libre  $A = a$  en la Ec. (4.119)

$$\epsilon_{abcd} \left[ 2\alpha_0 \mathbf{e}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* + \alpha_1 \left( \mathbf{M}^{bc} \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* - \mathbf{K}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d - \mathbf{L}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* \right) - 2\alpha_2 \left( \mathbf{K}^b \mathbf{M}^{cd} + \left( \mathbf{K}^b \mathbf{N}^{cd} + \mathbf{L}^b \mathbf{M}^{cd} \right) \mathbf{e}^* \right) \right] = 0, \quad (4.127)$$

donde nuevamente resultan dos ecuaciones independientes debido a sus direcciones

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \mathbf{K}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\alpha_2 \mathbf{K}^b \mathbf{M}^{cd} \right] = 0, \quad (4.128)$$

y

$$\epsilon_{abcd} \left[ 2\alpha_0 \mathbf{e}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + \alpha_1 \left( \mathbf{M}^{bc} \mathbf{e}^d - \mathbf{L}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \right) - 2\alpha_2 \left( \mathbf{K}^b \mathbf{N}^{cd} + \mathbf{L}^b \mathbf{M}^{cd} \right) \right] = 0. \quad (4.129)$$

Luego se repite el procedimiento para la Ec. (4.123), con el índice de la dimensión extra en un índice libre  $A = *$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \left( \mathbf{T}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + \mathbf{V}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* \right) + 2\alpha_2 \left( \mathbf{M}^{bc} \mathbf{T}^d + \mathbf{M}^{bc} \mathbf{V}^d \mathbf{e}^* + \mathbf{N}^{bc} \mathbf{T}^d \mathbf{e}^* \right) \right] = 0, \quad (4.130)$$

la cual se expande en las dos ecuaciones independientes que siguen a continuación

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \mathbf{T}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\alpha_2 \mathbf{T}^b \mathbf{M}^{cd} \right] = 0, \quad (4.131)$$

y

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \mathbf{V}^b \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\alpha_2 \left( \mathbf{V}^b \mathbf{M}^{cd} + \mathbf{N}^{bc} \mathbf{T}^d \right) \right] = 0. \quad (4.132)$$

Finalmente, al fijar el índice libre  $A = a$  de la Ec. (4.123), se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \left( \mathbf{W} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\mathbf{T}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* + \mathbf{Z} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d \mathbf{e}^* \right) \right. \\ \left. + 2\alpha_2 \left( \mathbf{W} \mathbf{M}^{cd} + \left( \mathbf{Z} \mathbf{M}^{cd} + \mathbf{W} \mathbf{N}^{cd} + 2\mathbf{K}^c \mathbf{V}^d + 2\mathbf{L}^c \mathbf{T}^d \right) \mathbf{e}^* + 2\mathbf{K}^c \mathbf{T}^d \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.133)$$

que es separada en

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \mathbf{W} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\alpha_2 \left( \mathbf{W} \mathbf{M}^{cd} + 2\mathbf{K}^c \mathbf{T}^d \right) \right] = 0, \quad (4.134)$$

y

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 \left( \mathbf{Z} \mathbf{e}^c \mathbf{e}^d + 2\mathbf{T}^c \mathbf{e}^d \right) + 2\alpha_2 \left( \mathbf{Z} \mathbf{M}^{cd} + \mathbf{W} \mathbf{N}^{cd} + 2 \left( \mathbf{K}^c \mathbf{V}^d + \mathbf{L}^c \mathbf{T}^d \right) \right) \right] = 0. \quad (4.135)$$

En recuento, se tienen las siguientes ecuaciones de campo:

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_0 e^a e^b e^c e^d + \alpha_1 M^{ab} e^c e^d + \alpha_2 M^{ab} M^{cd} \right] = 0 \quad (4.136)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 N^{ab} e^c e^d + 2\alpha_2 M^{ab} N^{cd} \right] = 0 \quad (4.137)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 K^b e^c e^d + 2\alpha_2 K^b M^{cd} \right] = 0 \quad (4.138)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ 2\alpha_0 e^b e^c e^d + \alpha_1 (M^{bc} e^d - L^b e^c e^d) - 2\alpha_2 (K^b N^{cd} + L^b M^{cd}) \right] = 0 \quad (4.139)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 T^b e^c e^d + 2\alpha_2 T^b M^{cd} \right] = 0 \quad (4.140)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 V^b e^c e^d + 2\alpha_2 (V^b M^{cd} + N^{bc} T^d) \right] = 0 \quad (4.141)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 W e^c e^d + 2\alpha_2 (W M^{cd} + 2K^c T^d) \right] = 0 \quad (4.142)$$

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_1 (Z e^c e^d + 2T^c e^d) + 2\alpha_2 (Z M^{cd} + W N^{cd} + 2(K^c V^d + L^c T^d)) \right] = 0. \quad (4.143)$$

En el Cap. 5 se tomarán estas ecuaciones para imponer sobre sus campos constituyentes el ansatz cosmológico, dado en la Sec. 3.4.1. De esta forma se procederá a su resolución.



# Enfoque Cosmológico

Este capítulo consiste en tomar las Ecs. (4.136)-(4.143) que se obtuvieron de la teoría Lovelock-Cartan en cinco dimensiones reducidas en un círculo, para imponer sobre estas el ansatz cosmológico y resolverlas, encontrando así posibles escenarios de la evolución del universo.

## 5.1. Ansatz cosmológico sobre los campos reducidos

En esta sección se encontrarán las componentes de la 1-forma conexión reducida al imponerle el ansatz cosmológico. Además considerando los vielbein (3.91)-(3.94) despejados a partir de la métrica de FRW, también se encontrarán los demás campos heredados desde la métrica cinco dimensional:  $A_\mu$  y  $\phi$ . Finalmente, se calcularán las componentes de la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión.

### 5.1.1. Derivada de Lie a lo largo de los vectores de Killing cosmológicos

Si bien en la Sec. 3.4.2 ya se han presentado los “vectores de Killing” que generan las isometrías cosmológicas, es importante aclarar que (3.75) y (3.76) son solo la parte espacial de los vectores de Killing que viven en el espaciotiempo. En realidad estos son el conjunto  $\{X_l^\rho\}$  donde  $l = 1, \dots, 6$  es la etiqueta de los seis generadores, y  $\rho = 0, i$  es el índice que va contraído en la ecuación de Killing. De manera explícita se tiene

$$\{X_l^\rho\} = \{\mathcal{J}_1^\rho, \mathcal{J}_2^\rho, \mathcal{J}_3^\rho, \mathcal{P}_1^\rho, \mathcal{P}_2^\rho, \mathcal{P}_3^\rho\}, \quad (5.1)$$

donde explícitamente cada uno de los vectores son

$$\mathcal{J}_1^\rho = (0, 0, -z, y) \quad (5.2)$$

$$\mathcal{J}_2^\rho = (0, z, 0, -x) \quad (5.3)$$

$$\mathcal{J}_3^\rho = (0, -y, x, 0) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{P}_1^\rho = \sqrt{1 - kr^2}(0, 1, 0, 0) \quad (5.5)$$

$$\mathcal{P}_2^\rho = \sqrt{1 - kr^2}(0, 0, 1, 0) \quad (5.6)$$

$$\mathcal{P}_3^\rho = \sqrt{1 - kr^2}(0, 0, 0, 1). \quad (5.7)$$

Sin embargo, es conveniente trabajar en coordenadas esféricas (en favor de la simetría) de modo que los vectores de Killing quedan como

$$\mathcal{J}_1^\rho = (0, 0, \sin \varphi, \cot \theta \cos \varphi) \quad (5.8)$$

$$\mathcal{J}_2^\rho = (0, 0, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi) \quad (5.9)$$

$$\mathcal{J}_3^\rho = (0, 0, 0, 1) \quad (5.10)$$

$$\mathcal{P}_1^\rho = \sqrt{1 - kr^2} \left( 0, \sin \theta \cos \varphi, \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \right) \quad (5.11)$$

$$\mathcal{P}_2^\rho = \sqrt{1 - kr^2} \left( 0, \sin \theta \sin \varphi, \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \right) \quad (5.12)$$

$$\mathcal{P}_3^\rho = \sqrt{1 - kr^2} \left( 0, \cos \theta, -\frac{\sin \theta}{r}, 0 \right), \quad (5.13)$$

donde se tiene la base coordenada  $\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$ .

### Campos heredados desde la métrica

Se necesita saber como el campo escalar  $\phi$  y la 1-forma  $\mathbf{A} = A_\mu dx^\mu$  quedan al imponerles el ansatz cosmológico. Para esto se debe calcular la ecuación de Killing de cada campo, destacando que esta es sutilmente diferente a su derivada de Lie, ya que la ecuación de Killing es la derivada de Lie pero igualada a cero, siendo desde esta condición que se obtiene la forma de cada campo. Por otra parte, no se considerarán las simetrías adicionales que involucran las constantes  $c$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , que aparecen en las Ecs. (4.23) y (4.26), ya que siempre es posible ajustarlas para que estas piezas adicionales desaparezcan de la derivada de Lie.

Las seis ecuaciones de Killing para el campo escalar  $\phi$  son entonces

$$X_l^\rho \partial_\rho \phi = 0. \quad (5.14)$$

Para  $l = 1$  se encuentra

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1^\rho \partial_\rho \phi &= 0 \\ \sin \varphi \partial_\theta \phi + \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \phi &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Del mismo modo para  $l = 2$  se encuentra

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^\rho \partial_\rho \phi &= 0 \\ \cos \varphi \partial_\theta \phi - \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi \phi &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para  $l = 3$  se encuentra

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3^\rho \partial_\rho \phi &= 0 \\ \partial_\varphi \phi &= 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

desde la cual se deduce que  $\phi$  no depende de  $\varphi$ . Al tener esto en cuenta en las dos primeras ecuaciones de Killing, se encuentra también que  $\phi$  no depende de  $\theta$ .

Para  $l = 4$  se tiene, tomando en cuenta lo anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^\rho \partial_\rho \phi &= 0 \\ \sqrt{1 - kr^2} \sin \theta \cos \varphi \partial_r \phi &= 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

desde la cual se deduce que  $\phi$  tampoco depende de  $r$ . Para los otros casos  $l = 5, 6$  se encuentra la misma dependencia, por lo tanto  $\phi$  solo depende del tiempo

$$\phi = \phi(t), \quad (5.19)$$

siendo este campo el que se interpreta como el factor de escala de la dimensión extra.

Para el caso del campo  $A_\mu$  se tienen veinticuatro ecuaciones, seis por cada una de las cuatro componentes. Estas son en su forma genérica

$$X_l^\rho \partial_\rho A_\mu + \partial_\mu X_l^\rho A_\rho = 0. \quad (5.20)$$

Para  $\mu = 0$  (recordar que  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) se obtienen las mismas ecuaciones que para  $\phi$ , de modo que se extrae que la componente cero solo depende del tiempo

$$A_0 = A(t). \quad (5.21)$$

Las ecuaciones para las otras componentes indican que estas deben ser cero, de modo que la 1-forma  $\mathbf{A}$  es entonces

$$\mathbf{A} = A(t)\mathbf{e}^0. \quad (5.22)$$

Desde esta definición vemos que la 2-forma  $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$  es cero

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= d\mathbf{A} \\ &= dA(t) \wedge \mathbf{e}^0 \\ &= \partial_t A(t) \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

por lo cual, sin pérdida de generalidad, el potencial vectorial electromagnético puede ser fijado a **cero**, como se usará en el resto de este capítulo.

### Campos heredados desde la 1-forma conexión

De la misma forma que la sección anterior, se procede a calcular la ecuación de Killing para cada campo que se obtiene de reducir la 1-forma conexión.

Las ecuaciones de Killing para la 1-forma conexión cuatro-dimensional son dadas por

$$X_l^\rho \partial_\rho (\omega^\mu{}_\nu)_\sigma + \partial_\nu X_l^\rho (\omega^\mu{}_\rho)_\sigma + \partial_\sigma X_l^\rho (\omega^\mu{}_\nu)_\rho - \partial_\rho X_l^\mu (\omega^\rho{}_\nu)_\sigma + \partial_\nu \partial_\sigma X_l^\mu = 0. \quad (5.24)$$

La conexión  $(\omega^\mu{}_\nu)_\sigma$  tiene veinticuatro componentes independientes en total son 144 ecuaciones, las cuales fueron calculadas en [34] dadas en formas diferenciales por

$$\omega^{0i} = \omega(t)\mathbf{e}^i \quad (5.25)$$

$$\omega^{12} = -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r}\mathbf{e}^2 - f(t)\mathbf{e}^3 \quad (5.26)$$

$$\omega^{13} = -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r}\mathbf{e}^3 + f(t)\mathbf{e}^2 \quad (5.27)$$

$$\omega^{23} = -\frac{\cot(\theta)}{a(t)r}\mathbf{e}^3 - f(t)\mathbf{e}^1. \quad (5.28)$$

Vemos que dos nuevas funciones del tiempo han sido añadidas, adicional a la función  $a(t)$  que se encontró en la métrica de FRW y al dilatón  $\phi$ , estas son  $\omega(t)$  y  $f(t)$ .

Para el campo  $\alpha^\mu{}_\nu$  se tienen las ecuaciones de Killing

$$X_l^\rho \partial_\rho \alpha^\mu{}_\nu + \partial_\nu X_l^\rho \alpha^\mu{}_\rho - \partial_\rho X_l^\mu \alpha^\rho{}_\nu = 0. \quad (5.29)$$

Como  $\alpha^\mu{}_\nu$  es antisimétrico en los índices, esta posee seis componentes independientes, lo que resulta en treintaiséis ecuaciones. Al resolverlas se encuentra el campo  $\alpha^\mu{}_\nu$  es **cero** en cada una de sus componentes, que en el lenguaje de las formas diferenciales es

$$\alpha^{ab} = 0. \quad (5.30)$$

En el caso del campo  $(\beta^\mu)_\nu$  se tienen dieciséis componentes independientes, que por cada vector de Killing resultan en noventa y seis ecuaciones generadas a partir de

$$X_l^\rho \partial_\rho (\beta^\mu)_\nu + \partial_\nu X_l^\rho (\beta^\mu)_\rho - \partial_\rho X_l^\mu (\beta^\rho)_\nu = 0. \quad (5.31)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se encuentra que

$$\beta^0 = -b(t)e^0 \quad (5.32)$$

$$\beta^i = \beta(t)e^i. \quad (5.33)$$

Las cuales agregan dos nuevos campos en función del tiempo:  $b(t)$  y  $\beta(t)$ .

Finalmente el campo  $\gamma^\mu$  agrega también un nuevo campo dependiente del tiempo. De sus veinticuatro ecuaciones de Killing

$$X_l^\rho \partial_\rho \gamma^\mu - \partial_\rho X_l^\mu \gamma^\rho = 0, \quad (5.34)$$

se obtiene que solo la parte temporal sobrevive

$$\gamma^a = (-\gamma(t), \vec{0}). \quad (5.35)$$

### 5.1.2. 2-forma curvatura y 2-forma torsión cosmológicas

Ya definidas todas las componentes de los campos reducidos, se procede a encontrar las componentes de la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión. A partir de las Ecs. (4.108)-(4.115) se tiene

$$\hat{\mathbf{R}}^{ab} = \mathbf{R}^{ab} - \beta^a \beta^b - 2\beta^{[a} \gamma^{b]} \hat{\mathbf{e}}^* \quad (5.36)$$

$$\hat{\mathbf{R}}^{a*} = -\mathbf{D}\beta^a - \left( \mathbf{D}\gamma^a + \frac{\gamma^a}{2} \mathbf{d} \log \phi \right) \hat{\mathbf{e}}^* \quad (5.37)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^a = \mathbf{T}^a + \beta^a \hat{\mathbf{e}}^* \quad (5.38)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^* = \left( \frac{1}{2} \mathbf{d} \ln \phi + \gamma_a e^a \right) \hat{\mathbf{e}}^*. \quad (5.39)$$

Las 2-formas diferenciales  $\mathbf{R}^{ab}$  y  $\mathbf{T}^a$  corresponden respectivamente a la curvatura y torsión del espaciotiempo, estas son dadas por

$$\mathbf{R}^{ab} = \mathbf{d}\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{T}^a = \mathbf{d}e^e + \omega^a{}_c e^c. \quad (5.41)$$

Al imponer la 1-forma conexión y el 1-forma vielbein cosmológicos, se tiene

$$\mathbf{R}^{ab} = \begin{cases} \mathbf{R}^{0i} = [\dot{\omega}(t) + H(t)\omega(t)]\mathbf{e}^0\mathbf{e}^i + f(t)\omega(t)\epsilon^i{}_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n \\ \mathbf{R}^{ij} = \left[\omega^2(t) + \frac{k}{a^2(t)} - f^2(t)\right]\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j - [\dot{f}(t) + H(t)f(t)]\epsilon^{ij}{}_m\mathbf{e}^0\mathbf{e}^m \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{T}^a = \begin{cases} \mathbf{T}^0 = 0 \\ \mathbf{T}^i = -[\omega(t) - H(t)]\mathbf{e}^0\mathbf{e}^i + f(t)\epsilon^i{}_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n, \end{cases} \quad (5.43)$$

con  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  conocida como la función de Hubble, donde  $\cdot$  sobre los campos denota la derivada con respecto del tiempo.

Por la forma en que están dadas las Ecs. (4.136)-(4.143), conviene dejar explícita cada parte, esto es

$$\mathbf{M}^{ab} = \begin{cases} \mathbf{M}^{0i} = \mathbf{R}^{0i} + b(t)\beta(t)\mathbf{e}^0\mathbf{e}^i \\ \mathbf{M}^{ij} = \mathbf{R}^{ij} + \beta^2(t)\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j, \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{N}^{ab} = \begin{cases} \mathbf{N}^{0i} = -\gamma(t)\beta(t)\mathbf{e}^i \\ \mathbf{N}^{ij} = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{K}^a = \begin{cases} \mathbf{K}^0 = 0 \\ \mathbf{K}^i = -[\dot{\beta}(t) + H(t)\beta(t) + \omega(t)b(t)]\mathbf{e}^0\mathbf{e}^i - 2\beta(t)\epsilon^i{}_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n \end{cases} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{L}^a = \begin{cases} \mathbf{L}^0 = \left[\dot{\gamma}(t) - \frac{\gamma(t)}{2}\partial_t \ln \phi\right]\mathbf{e}^0 \\ \mathbf{L}^i = \omega(t)\gamma(t)\mathbf{e}^i \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{T}^a = \begin{cases} \mathbf{T}^0 = 0 \\ \mathbf{T}^i = \mathbf{T}^i \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{V}^a = \begin{cases} \mathbf{V}^0 = -b(t)\mathbf{e}^0 \\ \mathbf{V}^i = \beta(t)\mathbf{e}^i \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{W} = 0 \quad (5.50)$$

$$\mathbf{Z} = \left[\frac{\partial_t \ln \phi}{2} + \gamma(t)\right]\mathbf{e}^0. \quad (5.51)$$

## 5.2. Ecuaciones de campo de la cosmología de Lovelock-Cartan

Esta sección consiste en tomar las ecuaciones reducidas de la teoría de Lovelock-Cartan, reemplazando los campos bajo el ansatz cosmológico. Veamos entonces cada ecuación.

Desde la Ec. (4.136), cuyos índices están todos contraídos, se obtiene

$$2\epsilon_{0ijk}[2\alpha_0\mathbf{e}^0\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k + \alpha_1(\mathbf{M}^{0i}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k + \mathbf{M}^{ij}\mathbf{e}^0\mathbf{e}^0) + 2\alpha_2\mathbf{M}^{0i}\mathbf{M}^{jk}] = 0. \quad (5.52)$$

Desde la Ec. (4.137) se obtiene

$$2\epsilon_{0ijk}[\alpha_1\mathbf{N}^{0i}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k + 2\alpha_2\mathbf{M}^{0i}\mathbf{N}^{jk}] = 0. \quad (5.53)$$

La Ec. (4.138) tiene un índice libre por lo cual se extraen dos ecuaciones, una para  $a = 0$

$$\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 \mathbf{K}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\alpha_2 \mathbf{K}^i \mathbf{M}^{jk}] = 0, \quad (5.54)$$

y otra para  $a = i$

$$2\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 \mathbf{K}^j \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^k + 2\alpha_2 \mathbf{K}^j \mathbf{M}^{0k}] = 0. \quad (5.55)$$

La Ec. (4.139) también tiene un índice libre, así para  $a = 0$  se tiene

$$\epsilon_{0ijk}[2\alpha_0 \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + \alpha_1 (\mathbf{M}^{ij} \mathbf{e}^k - \mathbf{L}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k) - 2\alpha_2 \mathbf{L}^i \mathbf{M}^{jk}] = 0 \quad (5.56)$$

y para  $a = i$

$$\begin{aligned} -\epsilon_{0ijk}[6\alpha_0 \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + \alpha_1 (2\mathbf{M}^{0j} \mathbf{e}^k - \mathbf{L}^0 \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\mathbf{L}^j \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^k + \mathbf{M}^{jk} \mathbf{e}^0) \\ - 2\alpha_2 (\mathbf{L}^0 \mathbf{M}^{jk} - 2\mathbf{K}^j \mathbf{N}^{0k} - 2\mathbf{L}^j \mathbf{M}^{0k})] = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Desde la Ec. (4.140) se obtiene para  $a = 0$

$$\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 \mathbf{T}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\alpha_2 \mathbf{T}^i \mathbf{M}^{jk}] = 0, \quad (5.58)$$

y para  $a = i$  se obtiene

$$2\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 \mathbf{T}^j \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^k + 2\alpha_2 \mathbf{T}^j \mathbf{M}^{0k}] = 0. \quad (5.59)$$

Desde la Ec. (4.141) se tiene para  $a = 0$

$$\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 \mathbf{V}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\alpha_2 \mathbf{V}^i \mathbf{M}^{jk}] = 0, \quad (5.60)$$

y para  $a = i$

$$-\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 (\mathbf{V}^0 \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\mathbf{V}^j \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^k) + 2\alpha_2 (\mathbf{V}^0 \mathbf{M}^{jk} + 2\mathbf{N}^{0j} \mathbf{T}^k - 2\mathbf{V}^j \mathbf{M}^{0k})] = 0. \quad (5.61)$$

La Ec. (4.142) tiene dos índices libres, pero tanto para  $a = 0$  o  $b = 0$  se obtiene la misma ecuación, esta es

$$4\alpha_2 \epsilon_{0ijk} \mathbf{K}^j \mathbf{T}^k = 0, \quad (5.62)$$

y para  $a = i, b = j$  (que da lo mismo para  $a = j$  y  $b = i$ ) se obtiene

$$0 = 0. \quad (5.63)$$

Finalmente desde la Ec. (4.143) se obtiene para  $a = 0$  y  $b = i$  (o lo que es lo mismo  $a = i$  y  $b = 0$ ) se obtiene

$$\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 (\mathbf{Z} \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k + 2\mathbf{T}^j \mathbf{e}^k) + 2\alpha_2 (\mathbf{Z} \mathbf{M}^{jk} + 2\mathbf{K}^j \mathbf{V}^k + 2\mathbf{L}^j \mathbf{T}^k)] = 0, \quad (5.64)$$

y con  $a = i, b = j$  se obtiene la ecuación

$$2\epsilon_{0ijk}[\alpha_1 (\mathbf{Z} \mathbf{e}^0 \mathbf{e}^k - \mathbf{T}^k \mathbf{e}^0) + 2\alpha_2 (\mathbf{Z} \mathbf{M}^{0k} + \mathbf{L}^0 \mathbf{T}^k - \mathbf{K}^k \mathbf{V}^0)] = 0. \quad (5.65)$$

De estas trece ecuaciones, solo nueve son linealmente independientes y distintas de cero. Al

reemplazar cada uno de los campo desde las Ecs. (5.44)-(5.51), se obtienen

$$\beta \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \right) = 0 \quad (5.66)$$

$$-\beta(\alpha_1 + 2\alpha_2[\dot{\omega} + H\omega + b\beta]) + \frac{b}{2} \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \right) + 2\alpha_2\beta\gamma(\omega - H) = 0 \quad (5.67)$$

$$(\omega - H) \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \right) + 4\alpha_2 f[\dot{f} + Hf] = 0 \quad (5.68)$$

$$(\dot{\beta} + H\beta b\omega) \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \right) - 8\alpha_2 f\beta[\dot{f} + Hf] = 0 \quad (5.69)$$

$$2\alpha_0 + \alpha_1 \left( \dot{\omega} + H\omega b\beta\omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right) \quad (5.70)$$

$$+ 2\alpha_2 \left( [\dot{\omega} + H\omega + b\beta] \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] - 2f\omega[\dot{f} + Hf] \right) = 0$$

$$\alpha_1 \left( \left[ \frac{1}{2} \partial_t \ln \phi + \gamma \right] - 2(\omega - H) \right) + 2\alpha_2 \left( \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \left[ \frac{1}{2} \partial_t \ln \phi + \gamma \right] + 2\gamma\omega(\omega - H) - 2\beta[\dot{\beta} + H\beta + b\omega] \right) = 0 \quad (5.71)$$

$$2\alpha_2 \left( f\omega \left[ \frac{1}{2} \partial_t \ln \phi + \gamma \right] - 2fb\beta \right) - f \left( \alpha_1 - 2\alpha_2 \left[ \frac{\gamma}{2} \partial_t \ln \phi + \dot{\gamma} \right] \right) = 0 \quad (5.72)$$

$$2\alpha_0 + \alpha_1 \left( \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 - \gamma\omega \right) - 4\alpha_2\gamma\omega \left( \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right) = 0 \quad (5.73)$$

$$6\alpha_0 + \alpha_1 \left( 2[\dot{\omega} + H\omega + b\beta]\omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 - \frac{\gamma}{2} \partial_t \ln \phi - \dot{\gamma} - 2\gamma\omega \right) \quad (5.74)$$

$$- 2\alpha_2 \left( \left[ \frac{\gamma}{2} \partial_t \ln \phi + \dot{\gamma} \right] \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] + 2\gamma\omega[\dot{\omega} + H\omega + b\beta] - 2\beta\gamma[\dot{\beta} + H\beta + b\omega] \right) = 0,$$

donde se ha omitido la dependencia temporal de los campos.

### 5.2.1. Solución de la rama $\beta = 0$

De las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, la primera (5.66) es la más sencilla de todas, ya que presenta dos posibilidades o dos ramas de soluciones. Estas son, la rama uno dada por

$$\beta(t) = 0, \quad (5.75)$$

y la rama dos dada por

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] = 0. \quad (5.76)$$

Esta tesis está abocada al estudio de la rama uno puesto que tiene solución. En cambio la rama dos genera un conjunto de ecuaciones donde se tienen más incógnitas que ecuaciones, de modo que esta no puede ser resuelta. Pero cabe mencionar, que dentro de las ecuaciones se encuentra

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}, \quad (5.77)$$

es decir que para una superficie del espacio de parámetros se cumple esta simetría especial donde algunas de las ecuaciones son linealmente dependientes. Adicionalmente, ocurre que si

$\alpha_1 = 2\alpha_2$ , la Ec. (4.119) es la derivada covariante de la Ec. (4.123), siendo esta una curva en el espacio de parámetros contenida en la superficie (5.77), conocida como “**punto de Chern-Simons**” [35, 36].

Cuando  $\beta(t) = 0$ , inmediatamente desde la Ec. (5.67) se deduce que  $b(t) = 0$ , pues en esta rama  $\alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \beta^2 \right] \neq 0$ . Al reemplazar  $\beta, b = 0$  en el resto de las ecuaciones y manipulándolas con un poco de álgebra se obtienen

$$(\omega - H) \left( \alpha_1 + 2\alpha_2 \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right) + 4\alpha_2 f (\dot{f} + Hf) = 0 \quad (5.78)$$

$$2\alpha_0 + \alpha_1 \left( \dot{\omega} + 2\omega + \frac{k}{a^2} - f^2 \right) + 2\alpha_2 [\dot{\omega} + \omega^2] \left[ \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] = 0 \quad (5.79)$$

$$2\alpha_2 f \left( \frac{1}{2} \partial_t \ln \phi + \gamma \right) (\dot{f} + Hf) + (\omega - H)^2 (\alpha_1 - 2\alpha_2 \gamma \omega) = 0 \quad (5.80)$$

$$\omega \left( \frac{1}{2} \partial_t \ln \phi + \gamma \right) + \dot{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \partial_t \ln \phi - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} = 0 \quad (5.81)$$

$$\left( \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right) (\alpha_1 - 2\alpha_2 \gamma \omega) - \alpha_1 \gamma \omega + 2\alpha_0 = 0 \quad (5.82)$$

$$\left( \dot{\omega} + \omega^2 \right) (\alpha_1 - 2\alpha_2 \gamma \omega) - \alpha_1 \gamma \omega + 3\alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} = 0. \quad (5.83)$$

Para resolver este sistema, es conveniente poner atención a las Ecs. (5.79), (5.82) y (5.83). Primero se renombran los siguientes términos

$$\begin{aligned} X &\equiv \dot{\omega} + \omega^2 \\ Y &\equiv \omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \\ Z &\equiv \gamma \omega, \end{aligned}$$

que al reemplazar en las ecuaciones mencionadas quedan respectivamente

$$2\alpha_0 + \alpha_1(X + Y) + 2\alpha_2XY = 0 \quad (5.84)$$

$$2\alpha_0 + Y(\alpha_1 - 2\alpha_2Z) - \alpha_1Z = 0 \quad (5.85)$$

$$3\alpha_0 + X(\alpha_1 - 2\alpha_2Z) - \alpha_1Z - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} = 0. \quad (5.86)$$

Desde la Ec. 5.85 se puede despejar  $Y$  en función de  $Z$

$$Y = \frac{\alpha_1 Z - 2\alpha_0}{\alpha_1 - 2\alpha_2 Z}. \quad (5.87)$$

Y desde la Ec. (5.86) se puede despejar  $X$  en función de  $Z$

$$X = \frac{\alpha_1 Z + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - 3\alpha_0}{\alpha_1 - 2\alpha_2 Z}. \quad (5.88)$$

Luego al reemplazar  $X$  y  $Y$  en la Ec. (5.84), se obtiene una ecuación cuadrática para  $Z$

$$2Z^2 \left[ 4\alpha_2^2(\alpha_0 + \alpha_1) + 2\alpha_1^2\alpha_2 \right] + Z \left[ -2\alpha_0\alpha_1\alpha_2 - \frac{3\alpha_1^2\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1^3}{2} - 10\alpha_0\alpha_2^2 \right] + 5\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1^2 + 12\alpha_0^2\alpha_2 - \frac{\alpha_1^3}{4} = 0, \quad (5.89)$$

cuya solución es

$$Z_{\pm} = \frac{2\alpha_1 \pm \sqrt{6}\sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{4\alpha_2}. \quad (5.90)$$

Al reemplazar este resultado en la Ec. (5.83), se obtiene la siguiente ecuación para  $\omega(t)$

$$\dot{\omega} + \omega^2 + \frac{2\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2} = 0, \quad (5.91)$$

con  $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2$ , lo cual restringe el espacio de parámetros si es que se quieren encontrar soluciones reales, siendo esta última opción considerada en la investigación. Entonces se estudiarán las soluciones en el espacio de parámetro donde se cumpla

$$\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 > 0, \quad (5.92)$$

donde se considerará que  $\alpha_1 > 0$  de modo que pueda ser interpretada como la constante gravitacional de Newton. Para el caso  $\Delta < 0$  véase [37] y [38]. Adicionalmente, se renombra el término

$$\frac{2\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2} \equiv u_{\pm},$$

a modo de simplicidad puesto que recurrentemente aparece en las soluciones. Al resolver la Ec. (5.91) para distintos valores de  $u_{\pm}$ , se encuentra

$$\omega(t) = \begin{cases} -\sqrt{u_{\pm}} \tan[\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)], & u_{\pm} > 0 \\ (t - t_0)^{-1}, & u_{\pm} = 0 \\ \sqrt{u_{\pm}} \tanh[\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)], & u_{\pm} < 0, \end{cases} \quad (5.93)$$

donde  $t_0$  es una constante de integración.

El resto de los campos se encuentran en función de  $\omega$ , estos son

$$\gamma(\omega) = \frac{u_{\pm}}{\omega} \quad (5.94)$$

$$\phi(\omega) = \frac{\phi_0\omega^2}{|\omega^2 + u_{\pm}|} \exp \left[ \frac{\mp\sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2(\omega^2 + u_{\pm})} \right] \quad (5.95)$$

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{|\omega^2 + u_{\pm}|}} \exp \left[ \frac{\pm\sqrt{6\Delta}}{24\alpha_2(\omega^2 + u_{\pm})} \right] \quad (5.96)$$

$$f^2(\omega) = |\omega^2 + u_{\pm}| \frac{k}{a_0^2} \exp \left[ \frac{\mp\sqrt{6\Delta}}{12\alpha_2(\omega^2 + u_{\pm})} \right] + \omega^2 + \frac{3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{6\alpha_2}, \quad (5.97)$$

con  $\phi_0$  y  $a_0$  constantes de integración.

A continuación se presentan las soluciones explícitas en el tiempo para distintos valores de  $u_{\pm}$ .

### Soluciones para $u_{\pm} > 0$

Para el caso  $u_{\pm} > 0$  se necesita establecer el espacio de parámetros  $\alpha_0 - \alpha_2$  donde esto es permitido, como se presenta respectivamente para  $u_+$  y  $u_-$  en la Fig. 5.1.<sup>1</sup>

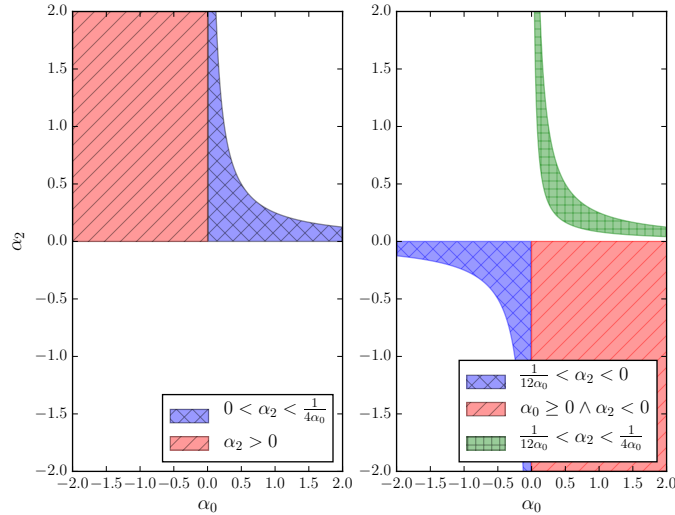


FIGURA 5.1: El gráfico de la izquierda representa la región del espacio de parámetros permitida para  $u_+ > 0$ , y el de la derecha para  $u_- > 0$ .

En este espacio se encuentran las siguientes soluciones

$$\gamma(t) = -\sqrt{u_{\pm}} \cot(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \quad (5.98)$$

$$\phi(t) = \phi_0 \sin^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2 u_{\pm}} \cos^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.99)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{u_{\pm}}} |\cos(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0))| \exp \left[ \frac{\pm \sqrt{6\Delta}}{24\alpha_2 u_{\pm}} \cos^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.100)$$

$$f^2(t) = u_{\pm} \frac{k}{a_0^2} \sec^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{12\alpha_2 u_{\pm}} \cos^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.101)$$

$$+ u_{\pm} \tan^2(\sqrt{u_{\pm}}(t - t_0)) + \frac{3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{6\alpha_2}.$$

De estos campos nos interesa el comportamiento de  $a(t)$  y  $\phi(t)$ , porque estos modulan el tamaño del espaciotiempo y de la dimensión extra, respectivamente. En la Fig. 5.2 se muestra el comportamiento para  $a(t)$  en el cual vemos que el universo es siempre oscilante, partiendo de un tamaño finito se contrae hasta a cero, para luego volver a ser expandido hasta su tamaño inicial y así sucesivamente. Se destaca entre las curvas, la perteneciente a  $u_- > 0$  en la región del espacio de parámetros  $\alpha_2 > 0$ , puesto que en las zonas de máxima expansión del universo, este tiene una pequeña contracción y expansión (sin un colapso) antes de volver a ser contraído

<sup>1</sup>En todos los gráficos el parámetro  $\alpha_1$  se ha normalizado a uno.

hasta su tamaño mínimo. Y en la Fig. 5.3 se muestra el comportamiento del dilatón, el cual indica que el tamaño de la dimensión extra también oscila, pero que al comparar con la Fig. 5.2 va a la inversa de  $a(t)$ .

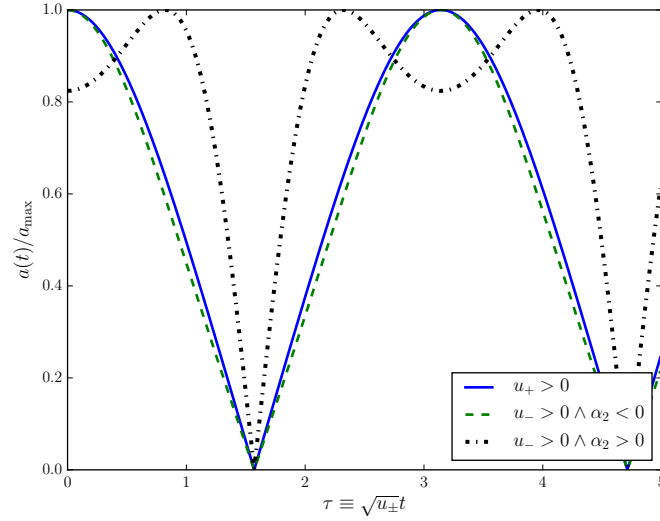


FIGURA 5.2: Gráfico de la evolución temporal de  $a$  para  $u_{\pm} > 0$ , el cual representa el tamaño del universo.

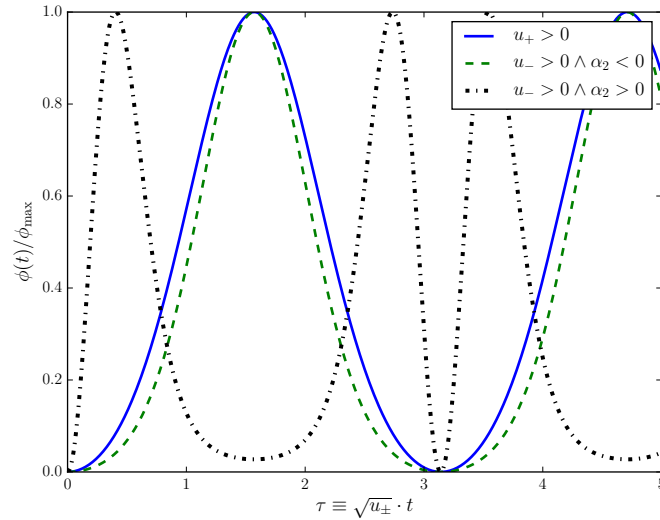


FIGURA 5.3: Gráfico de  $\phi(t)$  para  $u_{\pm} > 0$ , el cual nos da una idea de la evolución del tamaño la dimensión extra.

### Soluciones para $u_- = 0$

Para que  $u_{\pm} = u_- = 0$  se necesita que  $\alpha_2 = \frac{1}{12\alpha_0}$ , entonces en esta región se tienen las siguientes soluciones explícitas en el tiempo

$$\gamma(t) = 0 \quad (5.102)$$

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2} (t - t_0)^2 \right] \quad (5.103)$$

$$a(t) = a_0 |t - t_0| \exp \left[ \frac{\pm \sqrt{6\Delta}}{24\alpha_2} (t - t_0)^2 \right] \quad (5.104)$$

$$f^2(t) = \frac{k}{a_0^2 (t - t_0)^2} \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{12\alpha_2} (t - t_0)^2 \right] \quad (5.105)$$

$$+ (t - t_0)^{-2} + \frac{3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{6\alpha_2}.$$

Los factores de escala  $a(t)$  y  $\phi(t)$  son mostrados respectivamente en las Figs. 5.4 y 5.5. Para este caso, el escenario es diferente del anterior, porque cuando  $u_- = 0$  el universo desarrolla, o una expansión eterna mientras la dimensión extra se contrae hasta cero como se muestra en las curvas punteadas verdes ( $\alpha_2 < 0$ ), o desarrolla una expansión inicial seguida de una contracción hasta su colapso mientras la dimensión extra se expande eternamente como se muestra en las curvas azules de los gráficos ( $\alpha_2 > 0$ ).

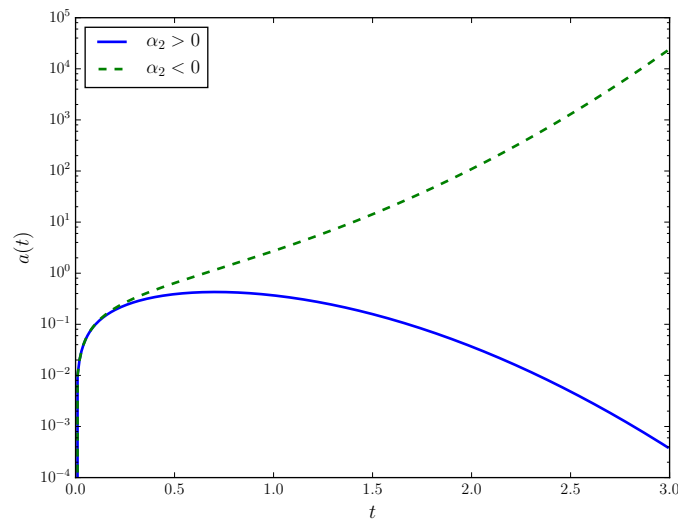
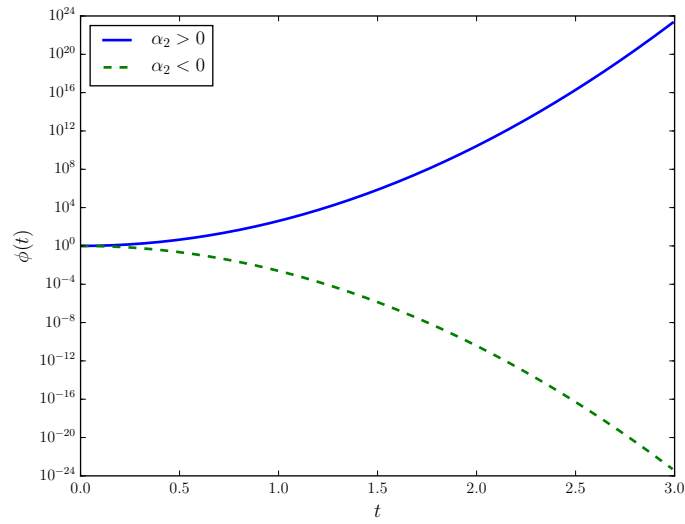
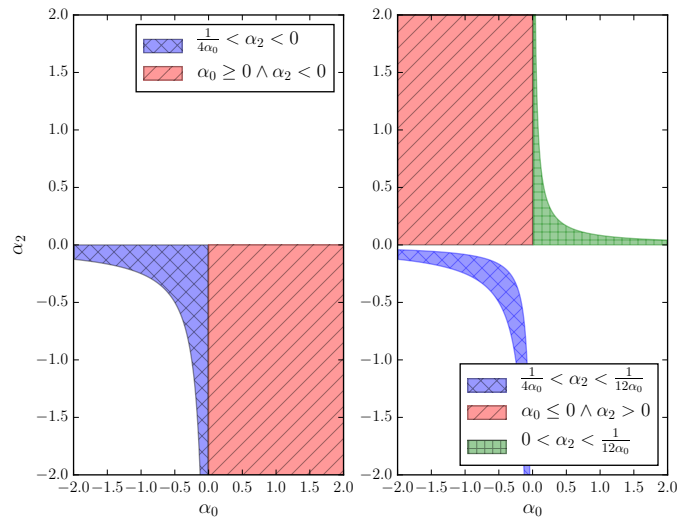


FIGURA 5.4: Comportamiento del factor de escala  $a(t)$  cuando  $u_- = 0$ .

### Soluciones para $u_{\pm} < 0$

Para el caso  $u_{\pm} < 0$  el espacio de parámetros  $\alpha_0 - \alpha_2$  permitido es mostrado en la Fig. 5.6.


 FIGURA 5.5: Comportamiento del tamaño de la dimensión extra  $\phi(t)$  cuando  $u_- = 0$ .

 FIGURA 5.6: El gráfico de la izquierda representa la región del espacio de parámetros permitida para  $u_+ < 0$  y el de la derecha para  $u_- < 0$ .

Las soluciones obtenidas son

$$\gamma(t) = -\sqrt{-u_{\pm}} \coth(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \quad (5.106)$$

$$\phi(t) = \phi_0 \sinh^2(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{4\alpha_2 u_{\pm}} \cosh^2(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.107)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{-u_{\pm}}} \cosh(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \exp \left[ \frac{\pm \sqrt{6\Delta}}{24\alpha_2 u_{\pm}} \cosh^2(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.108)$$

$$f^2(t) = -\frac{ku_{\pm}}{a_0^2} \cosh^{-2}(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \exp \left[ \frac{\mp \sqrt{6\Delta}}{12\alpha_2 u_{\pm}} \cosh^2(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) \right] \quad (5.109)$$

$$- u_{\pm} \tanh^2(\sqrt{-u_{\pm}}(t - t_0)) + \frac{3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta}}{6\alpha_2}.$$

De manera similar al caso  $u_- = 0$ , el universo desarrolla un fase de expansión eterna, como se muestra en la curva punteada negra ( $u_- < 0 \wedge \alpha_2 > 0$ ) donde el universo comienza desde un tamaño muy pequeño, o en la curva continua azul ( $u_+ < 0$ ) donde el universo parte desde un tamaño finito, como se muestra en la Fig. 5.7. Además cuando  $u_- < 0 \wedge \alpha_2 < 0$  el universo desarrolla un contracción hasta su colapso, como se muestra en la línea punteada verde. Al igual que en los casos anteriores, el factor de escala de la dimensión extra realiza la dinámica inversa a  $a(t)$  como se muestra en la Fig. 5.8.

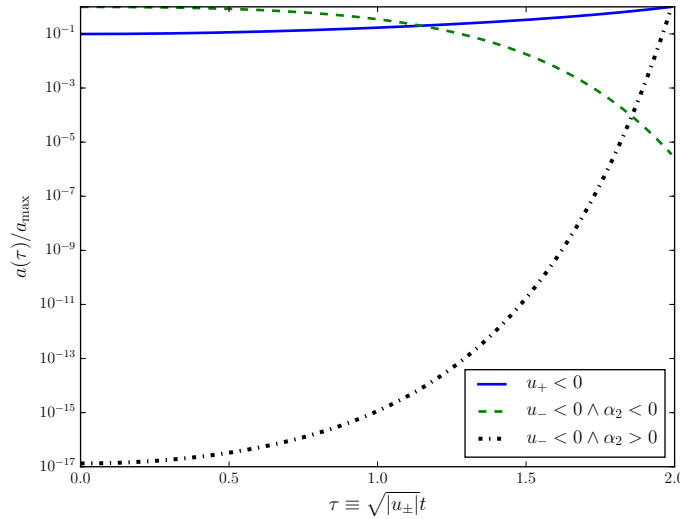
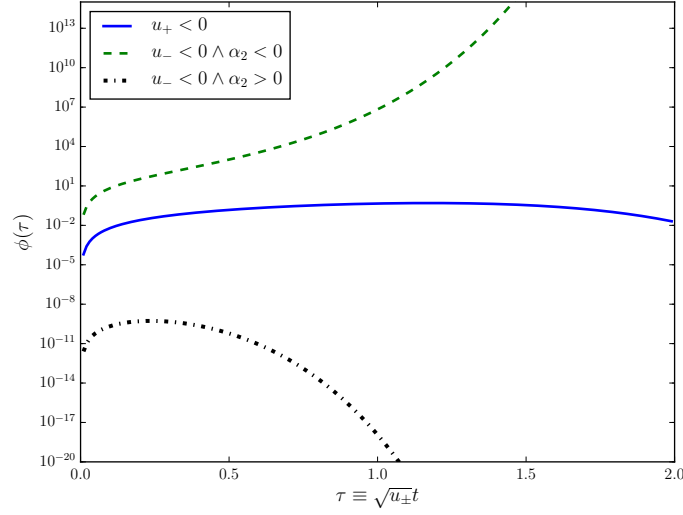


FIGURA 5.7: Comportamiento del factor de escala  $a(t)$  cuando  $u_{\pm} < 0$ .

### 5.2.2. 3-forma energía-momentum reducida

Teniendo en cuenta que dentro de las soluciones encontradas en la rama  $\beta = 0$ , se han hallado escenarios donde el universo desarrolla un fase de expansión acelerada, sería interesante


 FIGURA 5.8: Comportamiento del tamaño de la dimensión extra  $\phi(t)$  cuando  $u_{\pm} < 0$ .

estudiar lo que ocurre con la ecuación de Einstein que se obtiene en este marco, es decir, luego de haber reducido la teoría de Lovelock-Cartan cinco-dimensional en un círculo y aplicar a esto el ansatz cosmológico. Al recordar la Sec. 3.2.10 vemos que, en el lenguaje de las formas diferenciales, necesitamos buscar el término que aparece en la Ec. (3.56) dentro del conjunto de Ecs. (4.136)-(4.143). La única que contiene este término es la Ec. (4.139), que al considerar la cosmología se obtiene

$$\epsilon_{abcd} \left[ \alpha_0 e^b e^c e^d + \frac{\alpha_1}{2} (\mathbf{R}^{bc} - \mathbf{L}^b e^c) e^d - \alpha_2 \mathbf{L}^b \mathbf{R}^{cd} \right] = 0, \quad (5.110)$$

donde  $\mathbf{M}^{ab} = \mathbf{R}^{ab}$ ,  $\mathbf{N}^{ab} = 0$  y  $\mathbf{K}^a = 0$ . Sin embargo la 2-forma curvatura que aparece en esta ecuación no es Riemanniana, pues la 1-forma conexión posee una pieza adicional que no depende de los vielbein. Pero se puede descomponer de la siguiente forma, primero se escribe la 1-forma conexión como la parte dependiente de los vielbein más la **contorsión**

$$\omega^{ab} = \tilde{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}, \quad (5.111)$$

donde  $\tilde{\omega}^{ab}$  denota la 1-forma conexión Riemanniana que satisface la ecuación

$$\tilde{D}e^a = de^a + \tilde{\omega}^a_b e^b = 0, \quad (5.112)$$

y donde  $\kappa^{ab} = -\kappa^{ba}$  denota la contorsión. De esta manera, la 2-forma curvatura puede ser escrita como sigue

$$\mathbf{R}^{ab} = \tilde{\mathbf{R}}^{ab} + \tilde{D}\kappa^{ab} + \kappa^a_m \kappa^{mb}. \quad (5.113)$$

Al reemplazar esto en la Ec. (5.110) y teniendo en cuenta (4.111), se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} \left[ \alpha_0 e^b e^c e^d + \frac{\alpha_1}{2} (\tilde{\mathbf{R}}^{bc} + \tilde{D}\kappa^{bc} + \kappa^b_m \kappa^{mc}) e^d + \frac{\alpha_1}{2} (D\gamma^b + \frac{\gamma^b}{2} \mathbf{d} \ln \phi) e^c e^d \right. \\ \left. + \alpha_2 (D\gamma^b + \frac{\gamma^b}{2} \mathbf{d} \ln \phi) \mathbf{R}^{cd} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.114)$$

De un lado de esta ecuación se desea obtener el dual de Hodge<sup>2</sup> del tensor de Einstein (véase la Sec. 3.2.1) con constante cosmologica, y del otro lado todo lo que sobra perteneciendo al dual de Hodge del tensor de energía-momentum. Para esto se redefinen las siguientes constantes

$$\Lambda = -\frac{6\alpha_0}{\alpha_1}$$

$$\kappa_G = \frac{2}{\alpha_1},$$

de modo que la Ec. (5.114) se puede escribir como

$$-\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\left[\tilde{\mathbf{R}}^{bc} - \frac{\Lambda}{3}e^be^c\right]e^d = \frac{\kappa_G}{2}\epsilon_{abcd}\left[\frac{\alpha_1}{2}\left(\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa}^{bc} + \boldsymbol{\kappa}^b{}_m\boldsymbol{\kappa}^{mc}\right)e^d + \left(\mathbf{D}\gamma^b + \frac{\gamma^b}{2}\mathbf{d}\ln\phi\right)\left(\frac{\alpha_1}{2}e^ce^d + \alpha_2\mathbf{R}^{cd}\right)\right]. \quad (5.115)$$

El lado derecho de esta ecuación, sin la constante  $\kappa_G$ , es un 3-forma cuyo dual de Hodge es el tensor de energía-momentum<sup>3</sup> efectivo que sale de la teoría reducida, esto es

$$\boldsymbol{\tau}_a^{\text{eff}} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\left[\frac{\alpha_1}{2}\left(\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa}^{bc} + \boldsymbol{\kappa}^b{}_m\boldsymbol{\kappa}^{mc}\right)e^d + \left(\mathbf{D}\gamma^b + \frac{\gamma^b}{2}\mathbf{d}\ln\phi\right)\left(\frac{\alpha_1}{2}e^ce^d + \alpha_2\mathbf{R}^{cd}\right)\right] \quad (5.116)$$

Considerando que el contenido de energía y materia del universo se comporta como fluido perfecto, el tensor de energía-momentum tiene la forma  $\tau_a{}^m = \text{diag}(-\rho, \vec{p})$  (donde  $\vec{p} = (p, p, p)$  en virtud del principio cosmológico) y considerando la definición del dual de Hodge, vemos que a través de las siguientes identidades

$$\boldsymbol{\tau}_o^{\text{eff}} = -\frac{1}{3!}\rho\epsilon_{0ijk}e^ie^je^k \quad (5.117)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i^{\text{eff}} = -\frac{1}{2}p\epsilon_{0ijk}e^0e^je^k, \quad (5.118)$$

se pueden extraer las componentes del tensor de energía-momentum. Al comparar la 3-forma energía-momentum (5.116) con la identidad (5.117), se encuentra que la densidad de energía es

$$\rho = -\frac{3}{2}\alpha_1\left[\omega^2 - H^2 - f^2\right] + \frac{3}{2}\omega\gamma\left[\alpha_1 + 2\alpha_2\left(\omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2\right)\right], \quad (5.119)$$

para simplificar un poco esta expresión se puede utilizar la Ec. (5.82), resultando en

$$\rho = \frac{3}{2}\alpha_1\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) + 3\alpha_0. \quad (5.120)$$

Del mismo modo al comparar el tensor de energía-momentum (5.116) con la identidad (5.118) se encuentra que la presión es

$$p = \alpha_1\left[\dot{\omega} - \dot{H} - \frac{3}{2}H^2 + \omega^2 + H\omega - \frac{f^2}{2}\right] - 2\omega\gamma\left[\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2\left(\dot{\omega} + \omega^2 - H\omega\right)\right] + \left[\dot{\gamma} + \frac{\gamma}{2}\partial_t\ln\phi\right]\left[\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2\left(\omega^2 + \frac{k}{a^2} - f^2\right)\right], \quad (5.121)$$

<sup>2</sup>Recordar que el dual de Hodge establece un mapeo lineal uno-a-uno entre ambos espacio, generando así un isomorfismo.

<sup>3</sup>Es decir  $\boldsymbol{\tau}_a = -\frac{1}{3!}\epsilon_{mnpq}\tau_a{}^me^ne^pe^q$ . Donde se ha utilizado la letra  $\boldsymbol{\tau}$  en vez de  $\mathbf{T}$  (que se usó para definir el tensor de energía-momentum en la Sec. 3.2.1) para que no se confunda con la 2-tosión que también posee un índice.

esta expresión requiere un poco más de trabajo, pero usando las Ecs. (5.78), (5.80) y (5.81) se puede simplificar resultando en

$$p = -\alpha_1 \left[ \dot{H} + \frac{3}{2}H^2 + \frac{k}{2a^2} \right] - 3\alpha_0. \quad (5.122)$$

Al observar el tensor de energía-momentum completo:

$$\tau_a^m = -\text{diag} \left( \frac{3\alpha_1}{2} \left[ H^2 + \frac{k}{a^2} \right] + 3\alpha_0, \left[ \alpha_1 \left( \dot{H} + \frac{3H^2}{2} + \frac{k}{2a^2} \right) + 3\alpha_0 \right] (1, 1, 1) \right), \quad (5.123)$$

vemos que este no es definido-positivo. Esto es muy importante porque nos permite interpretar que esta densidad de energía y presión efectivas, que proviene de los grados de libertad generados por la dimensión extra y la 2-forma torsión, son el causal de la fase de expansión acelerada encontrada en las soluciones, sin tener que introducir adicionalmente energía oscura.



# Conclusiones

---

En esta tesis se exploran teorías gravitacionales que sean lo más generales posibles, construidas con las mismas premisas que la teoría de la Relatividad General. En este sentido, la teoría de Lovelock-Cartan cumple todos los requisitos necesarios para ser una correcta generalización del modelo de Einstein-Hilbert a dimensiones arbitrarias, conservando todas las virtudes que esta posee, pero además incluyendo a la torsión como parte fundamental de la teoría, al considerar incluso términos explícitos de esta. Este punto es clave, ya que implica que las nociones de metricidad y paralelismo son independientes, de modo que en vez de tener un campo fundamental, esto es el tensor métrico, se tiene dos campos fundamentales: una conexión adicional al tensor métrico (o su equivalente que son los vielbein). De esta forma, se puede trabajar con el formalismo de primer orden que, en el lenguaje de las formas diferenciales, permiten un desarrollo claro del cálculo. Además, la independencia de la conexión permite que se tengan grados de libertad adicionales que afectan el contenido de energía y materia del universo. Los términos generados en la acción de Lovelock-Cartan, donde cabe destacar que el operador dual de Hodge no es usado, tienen la ventaja de generar ecuaciones de campo hasta de primer orden en las derivadas para cualquier orden en la curvatura y la torsión, lo cual no es así en la mayoría de los modelos gravitacionales.

El estudio de teorías gravitacionales en más que cuatro dimensiones, está bien motivado por el uso fenomenológico que se ha hecho de dimensiones extras como posibles soluciones al problema de jerarquía en el modelo estándar. En particular, se ha considerado la adición de una dimensión espacial al espaciotiempo con topología  $S^1$ , porque es el caso más sencillo de estudiar. Además, este caso puede ser visto como un primer paso que podría ser fácilmente generalizable en trabajos futuros. Bajo esta topología, la reducción dimensional introduce en el modelo siete campos adicionales al vielbein y la conexión de Lorentz. Desde la compactificación de los vielbein, se tienen al dilatón (escalar) y al campo vectorial abeliano de espín 1 (normalmente identificado como el potencial electromagnético). Y desde la conexión de Lorentz, se tienen dos campos de espín 1:  $\alpha^{ab}$  y  $\gamma^a$ , y además se tiene la 1-forma  $\beta^a$  la cual se conforma por un campo de espín 2, uno de espín 1 y uno escalar (espín 0), donde todos estos campos son de carácter tensorial, es decir, que transforman como tensores bajo el grupo de Lorentz local y bajo difeomorfismo.

Con el fin de estudiar el universo a grandes escalas, se ha impuesto el ansatz cosmológico sobre los campos reducidos, el cual respeta las simetrías del universo a grandes escalas: isotropía y homogeneidad. Se encuentra que el dilatón  $\phi$ , el cual es interpretado como el factor de escala de la dimensión extra, es una función que solo depende del tiempo, como es de esperar bajo el principio cosmológico. Por su parte el potencial vectorial electromagnético  $A_a$ , posee solo la componente en la dirección del tiempo distinta de cero que solo depende del tiempo, es decir  $A_a = (A_0(t), \vec{0})$ , lo cual nos dice que a escalas cosmológicas el electromagnetismo es trivial ( $F_{ab} = 0$ ); cabe destacar que esto no es cierto a todas las escalas, por ejemplo a escalas menores se comienza a apreciar la inhomogeneidad propia de la radiación de microwondas de fondo (CMB),

pero a escalas del orden de los 200[Mgpc] (cosmología) esto es despreciable. Desde la conexión de espín, se tiene que la conexión reducida  $\omega^{ab}$  introduce dos nuevas funciones que dependen del tiempo:  $\omega(t)$  y  $f(t)$ , el campo de espín uno  $\alpha^{ab}$  queda reducido a cero bajo este ansatz, mientras  $\gamma^a$  queda similar al potencial vectorial electromagnético:  $\gamma^a = (-\gamma(t), \vec{0})$  y la 1-forma  $\beta^a$  queda dependiendo solo del tiempo en todas sus componentes adicionando dos grados de libertad:  $\beta^0 = -b(t)e^0$  y  $\beta^i = \beta(t)e^i$ .

Al estudiar las ecuaciones de movimiento bajo el ansatz cosmológico, se encuentra que existen dos ramas de soluciones. Una donde se encuentra que, para una superficie en el espacio de parámetros  $\alpha_0 = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}$ , algunas de las ecuaciones son dependientes entre sí de modo que no pueden ser resueltas, pero en el caso en que  $\alpha_1 = 2\alpha_2$  se tiene un punto de Chern-Simons; como es sabido [24] en dimensiones impares existe una combinación única de los parámetros (donde todo queda dependiendo de un solo parámetro) que permite englobar a la acción en una simetría de gauge ampliada, donde la conexión de espín y los vielbein forman juntos una conexión mayor correspondiente al grupo  $(A)dS_5$ . Esta rama, permite toda una nueva línea de estudios correspondiente a teorías gravitacionales de Chern-Simons, donde incluso podría ser estudiada su cuantización [39]. La otra rama de soluciones, cuando  $\beta(t) = 0$ , permite generar un conjunto de ecuaciones consistentes cuyas soluciones son encontradas. Aquí se encuentra que la función  $b(t)$  es también igual a cero, de modo que la 1-forma  $\beta^a$  proveniente de la reducción de la conexión de espín es trivial. Al manipular las ecuaciones, se encuentra el discriminante  $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2$  (cuya igualdad a cero deriva en el punto de Chern-Simons) que restringe el espacio de parámetros si es que se desea encontrar soluciones reales, como se hizo en esta investigación. Entonces para  $\Delta > 0$ , se encuentran las soluciones para los campos  $\omega(t)$ ,  $f(t)$ ,  $\phi(t)$ , y  $a(t)$ , los cuales dependen de los tres posibles valores de  $u_{\pm}$ . Para cada valor de  $u_{\pm}$  (si es mayor, menor o igual a cero) se muestran los gráficos respectivos para cada zona permitida en el espacio de parámetros, donde los valores deseados de  $u_{\pm}$  se cumplen. Por medio de la evolución temporal del factor de escala  $a(t)$ , se encuentran distintos comportamientos: a) universos oscilantes que comienzan desde un tamaño finito, b) universos que se expanden eternamente, c) universos que se contraen eternamente, y d) el caso donde el universo parte con una expansión inicial para llegar a un valor crítico y ser contraído asintóticamente. Entre los distintos escenarios, cabe destacar que no es un comportamiento recurrente el comienzo del universo desde una singularidad; es más, al mirar la publicación [40], la cual regulariza posibles singularidades futuras en modelos cosmológicos, se ha encontrado que en nuestros resultados no hay tales singularidades futuras.

Un aspecto importante que se debe mencionar acerca del dilatón, es que modula una dinámica aproximadamente inversa a la del factor de escala del espaciotiempo, lo cual es compatible con un mecanismo dinámico de reducción dimensional. Con respecto al factor de escala del espaciotiempo,  $a(t)$ , cabe destacar que no es sensible al parámetro  $k = -1, 0, 1$  bajo ningún escenario, lo cual implica que con la evidencia cosmológica de la expansión acelerada del universo no es posible detectar el tipo de curvatura que este posee (plano, abierto o cerrado). El único campo que depende de  $k$  es la parte completamente antisimétrica de la torsión cuatro-dimensional:  $f(t)$ . Por su parte,  $f(t)$  se vuelve imaginaria en ciertos períodos de tiempo (vease la Ec. (5.97)), lo cual restringe aun más el espacio de parámetros con tal de imponer una condición de realidad sobre  $f$ . Esto nos permite establecer un criterio para distinguir entre universos abiertos, planos y cerrados. Sin embargo, la evidencia experimental [41] nos dice que el universo es plano, de modo que es válido restringirse al caso cuando  $k = 0$  y así encontrar

---

la condición de realidad sobre  $f(t)$ , esto es,

$$3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta} \geq 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2 > 0$$

o

$$3\alpha_1 \pm \sqrt{6\Delta} \leq 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2 < 0,$$

siendo estas condiciones añadidas a las ya estudiadas en cada caso. En tal caso,  $k = 0$ , se aprecia que el comportamiento que más se asemeja a nuestro universo, es decir, una singularidad inicial seguida de una expansión acelerada, es el caso cuando  $u_- = 0$  con  $\alpha_2 < 0$  (vease la Fig. 5.4). De esta forma, se puede concluir que la consideración de una dimensión espacial extra y de la torsión, es clave en estos resultados, de forma que se pueda prescindir *a priori* de la energía oscura y tener a la vez una fase de expansión acelerada. Además, este resultado es respaldado por la interpretación que se le da a la Ec. (5.110), cuyo dual de Hodge nos entrega la ecuación de Einstein. De esta forma, al considerar el contenido de materia y energía como un fluido perfecto, la 3-forma de energía-materia (sin duda inducida por los grados de libertad que vienen de la dimensión extra y la torsión) nos entrega una presión y densidad de energías no definidas positivas, tal como se espera de un universo con fase de expansión acelerada.

Una de las principales virtudes de haber considerado la teoría de Lovelock-Cartan como base, es dar la posibilidad que investigaciones futuras sean construcciones correctamente generalizadas de la Relatividad General. De esta forma, próximas investigaciones que resultarían interesantes son, por ejemplo, el estudio en más dimensiones con topologías isomorfas al círculo (donde se podría estudiar como el espectro de campos va apareciendo), considerar otros tipos de ansatz para la métrica cuatro-dimensional (como agujeros negros, o bien donde la condición de isotropía y homogeneidad es relajada), o el estudio de la teoría en el punto de Chern-Simons que deja paso a una gama de posibilidades. Incluso el estudio de la acción de Lovelock-Cartan con el fin de hacer fenomenología, en la cual puedan ser incluidos fermiones en cinco dimensiones, podría ser un área muy nutrida en física.



# Vectores de Lie para la Métrica cinco-dimensional

El presente apéndice es dedicado al cálculo de los vectores de Lie, es decir, aquellos vectores en cuyas direcciones la derivada de Lie preserva la estructura métrica deseada. Recordemos que se desea que los campos reducidos no dependan de las coordenadas de la dimensión extra, ni por ende su variación. Esto queda plasmado en las Ecs. (4.17)

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x) \\ \delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x).\end{aligned}$$

Para encontrar los vectores que manifiesten esta independencia de la coordenada de la dimensión extra, se toma la Ec. (4.19)

$$\delta\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{X}^{\hat{\rho}}\partial_{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\mu}}\hat{X}^{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\rho}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}}\hat{X}^{\hat{\rho}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\rho}}$$

y se expande en los índices  $\hat{\mu} = \mu, \xi$  y  $\hat{\nu} = \nu, \xi$ . De esto se extraen tres ecuaciones independientes, la primera es para  $\hat{\mu} = \mu$  y  $\hat{\nu} = \nu$

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\mu\nu}(x) &= \hat{X}^{\rho}\partial_{\rho}\hat{g}_{\mu\nu} + \hat{X}^{\xi}\partial_{\xi}\hat{g}_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\rho\nu} + \partial_{\mu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\xi\nu} + \partial_{\nu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\mu\rho} + \partial_{\nu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\mu\xi} \\ &= (\hat{X}^{\rho}\partial_{\rho}\hat{g}_{\mu\nu})(x) + (\partial_{\mu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\rho\nu})(x) + \partial_{\mu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\xi\nu}(x) + (\partial_{\nu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\mu\rho})(x) + \partial_{\nu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\mu\xi}(x),\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde el segundo término en la primera línea ha sido cancelado debido a que los campos reducidos no dependen de las coordenadas de la dimensión extra. Como esta variación solo depende de las coordenadas del manifold base, entonces cada término debe hacerlo también, y vemos que en la segunda línea se cumple explícitamente para cada término, a excepción del tercero y cuarto, pues en ellos se tiene  $\partial_{\mu}\hat{X}^{\xi}$ . Es fácil notar que los vectores  $\hat{X}^{\xi}$  deben tener la forma genérica

$$\hat{X}^{\xi} = \lambda(x) + c\theta(\xi),\tag{A.2}$$

con tal de que su derivada con respecto a las coordenadas del manifold base a lo más dependa de estas últimas.

Una segunda ecuación se extrae de la elección  $\hat{\mu} = \mu$  y  $\hat{\nu} = \xi$

$$\begin{aligned}\delta\hat{g}_{\mu\xi}(x) &= \hat{X}^{\rho}\partial_{\rho}\hat{g}_{\mu\xi} + \hat{X}^{\xi}\partial_{\xi}\hat{g}_{\mu\xi} + \partial_{\mu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\rho\xi} + \partial_{\mu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\xi\xi} + \partial_{\xi}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\mu\rho} + \partial_{\xi}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\mu\xi} \\ &= (\hat{X}^{\rho}\partial_{\rho}\hat{g}_{\mu\xi})(x) + (\partial_{\mu}\hat{X}^{\rho}\hat{g}_{\rho\xi})(x) + \partial_{\mu}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\xi\xi}(x) + \partial_{\xi}\hat{X}^{\xi}\hat{g}_{\mu\xi}(x),\end{aligned}\tag{A.3}$$

donde nuevamente en la primera línea se han cancelado el segundo y quinto término, puesto que los campos reducidos no dependen de la coordenada de la dimensión extra. En la segunda línea, el tercer término impone la misma condición que la encontrada en la Ec. (A.1), es decir, la

condición (A.2). Sin embargo, en el último término se tiene  $\partial_\xi \hat{X}^\xi$  que a lo más puede depender de las coordenadas del manifold base, para esto solo se necesita que la función  $\theta(\xi) = \xi$ . Luego la condición (A.2) queda aun más restringida

$$\hat{X}^\xi = \lambda(x) + c\xi. \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, la última ecuación aparece al elegir  $\hat{\mu}, \hat{\nu} = \xi$ , pero como se verá de ella no se extrae alguna restricción adicional

$$\begin{aligned} \delta \hat{g}_{\xi\xi}(x) &= \hat{X}^\rho \partial_\rho \hat{g}_{\xi\xi} + \hat{X}^\xi \partial_\xi \hat{g}_{\xi\xi} + \partial_\xi \hat{X}^\rho \hat{g}_{\rho\xi} + \partial_\xi \hat{X}^\xi \hat{g}_{\xi\xi} + \partial_\xi \hat{X}^\rho \hat{g}_{\xi\rho} + \partial_\xi \hat{X}^\xi \hat{g}_{\xi\xi} \\ &= (\hat{X}^\rho \partial_\rho \hat{g}_{\xi\xi})(x) + 2\partial_\xi \hat{X}^\xi \hat{g}_{\xi\xi}(x), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde en la primera línea el segundo, tercer y quinto término, son cero debido nuevamente a que los campos reducidos no dependen de la coordenada de la dimensión extra.

Como ninguna otra restricción aparece sobre los vectores, vemos que su forma más general es dada por

$$\hat{X}^{\hat{\rho}} = \begin{cases} \hat{X}^\rho = X^\rho(x) \\ \hat{X}^\xi = c\xi + \lambda(x). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Estos serán llamados los vectores de Lie.

# Bibliografía

- [1] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, [arXiv:astro-ph/9812133](#) [astro-ph].
- [2] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, [arXiv:astro-ph/9805201](#) [astro-ph].
- [3] Y. Sofue and V. Rubin, “Rotation curves of spiral galaxies,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **39** (2001) 137–174, [arXiv:astro-ph/0010594](#) [astro-ph].
- [4] A. Del Popolo, “Dark matter, density perturbations, and structure formation,” *Astronomy Reports* **51** no. 3, (2007) 169–196.
- [5] A. Mardones and J. Zanelli, “Lovelock-Cartan theory of gravity,” *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 1545–1558.
- [6] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498–501.
- [7] T. Kaluza, “On the Problem of Unity in Physics,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921** (1921) 966–972.
- [8] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English),” *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906. [Surveys High Energ. Phys.5,241(1986)].
- [9] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263–272, [arXiv:hep-ph/9803315](#) [hep-ph].
- [10] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257–263, [arXiv:hep-ph/9804398](#) [hep-ph].
- [11] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [arXiv:hep-ph/9905221](#) [hep-ph].
- [12] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690–4693, [arXiv:hep-th/9906064](#) [hep-th].
- [13] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [14] S. M. Carroll, *An introduction to general relativity*. Addison Wesley, 2004.

- [15] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [16] R. A. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory*. Clarendon Press, 1996.
- [17] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen Phys.* **17** (1905) 891–921. [Annalen Phys.14,194(2005)].
- [18] A. Einstein, “The Foundation of the General Theory of Relativity,” *Annalen Phys.* **49** (1916) 769–822. [Annalen Phys.14,517(2005)].
- [19] S. Schlamminger, K. Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger, “Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance,” *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 041101, [arXiv:0712.0607](https://arxiv.org/abs/0712.0607) [gr-qc].
- [20] D. Hilbert, “Die Grundlagen der Physik. 1.,” *Gott. Nachr.* **27** (1915) 395–407.
- [21] D. Baumann, “Cosmology, part iii mathematical tripos,” 2015. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf>.
- [22] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [arXiv:1502.01589](https://arxiv.org/abs/1502.01589) [astro-ph.CO].
- [23] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, ch. 7. CRC Press, 2003.
- [24] J. Zanelli, “Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008),” in *Proceedings, 7th Mexican Workshop on Particles and Fields (MWPF 1999): Merida, Mexico, November 10-17, 1999*. 2005. [arXiv:hep-th/0502193](https://arxiv.org/abs/hep-th/0502193) [hep-th].
- [25] I. I. Shapiro, “Fourth Test of General Relativity,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 789–791.
- [26] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no.~6, (2016) 061102, [arXiv:1602.03837](https://arxiv.org/abs/1602.03837) [gr-qc].
- [27] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no.~24, (2016) 241103, [arXiv:1606.04855](https://arxiv.org/abs/1606.04855) [gr-qc].
- [28] Y. Choquet-Bruhat, *Introduction to General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. OUP Oxford, 2014.
- [29] D. J. Schlegel, D. P. Finkbeiner, and M. Davis, “Maps of dust IR emission for use in estimation of reddening and CMBR foregrounds,” *Astrophys. J.* **500** (1998) 525, [arXiv:astro-ph/9710327](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9710327) [astro-ph].
- [30] **COBE** Collaboration, G. F. Smoot *et al.*, “Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps,” *Astrophys. J.* **396** (1992) L1–L5.
- [31] **WMAP** Collaboration, D. N. Spergel *et al.*, “First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters,” *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175–194, [arXiv:astro-ph/0302209](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302209) [astro-ph].
- [32] C. N. Pope, *Kaluza-klein theory*. Centre Emile Borel, Institut Henri Poincaré, 2000. <http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf>.

- 
- [33] O. Castillo-Felisola, “Differential geometry, gravitation and particle physics,” 2014. <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWVpbnxvY2FzdGlsbG9mZWxpc29sYXxneDoxNmQ0NjllZGRmMWMYmJi>.
- [34] A. Toloza and J. Zanelli, “Cosmology with scalar-Euler form coupling,” *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 135003, [arXiv:1301.0821](https://arxiv.org/abs/1301.0821) [gr-qc].
- [35] F. Canfora, A. Giacomini, and S. Willison, “Some exact solutions with torsion in 5-D Einstein-Gauss-Bonnet gravity,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 044021, [arXiv:0706.2891](https://arxiv.org/abs/0706.2891) [gr-qc].
- [36] R. Troncoso and J. Zanelli, “Higher dimensional gravity, propagating torsion and AdS gauge invariance,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 4451–4466, [arXiv:hep-th/9907109](https://arxiv.org/abs/hep-th/9907109) [hep-th].
- [37] F. Canfora, A. Giacomini, and S. A. Pavluchenko, “Dynamical compactification in Einstein-Gauss-Bonnet gravity from geometric frustration,” *Phys. Rev.* **D88** no.~6, (2013) 064044, [arXiv:1308.1896](https://arxiv.org/abs/1308.1896) [gr-qc].
- [38] F. Canfora, A. Giacomini, and S. A. Pavluchenko, “Cosmological dynamics in higher-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet gravity,” *Gen. Rel. Grav.* **46** no.~10, (2014) 1805, [arXiv:1409.2637](https://arxiv.org/abs/1409.2637) [gr-qc].
- [39] J. Zanelli, “Quantization of the gravitational constant in odd dimensions,” *Phys. Rev. D* **51** (Jan, 1995) 490–492. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.490>.
- [40] F. Shojai, A. Shojai, and M. Sanati, “Regularizing future cosmological singularities with varying speed of light,” *Eur. Phys. J.* **C75** no.~12, (2015) 568, [arXiv:1507.02512](https://arxiv.org/abs/1507.02512) [gr-qc].
- [41] **WMAP** Collaboration, D. N. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology,” *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377, [arXiv:astro-ph/0603449](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449) [astro-ph].