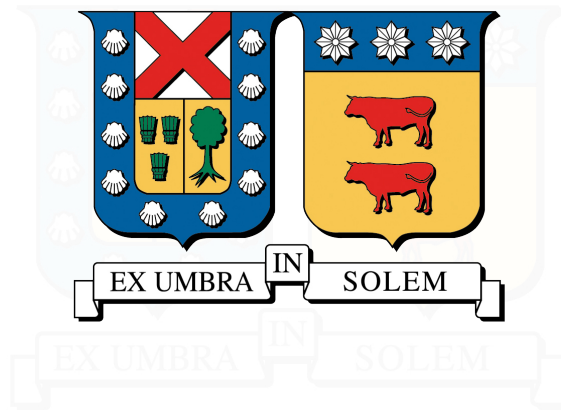


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



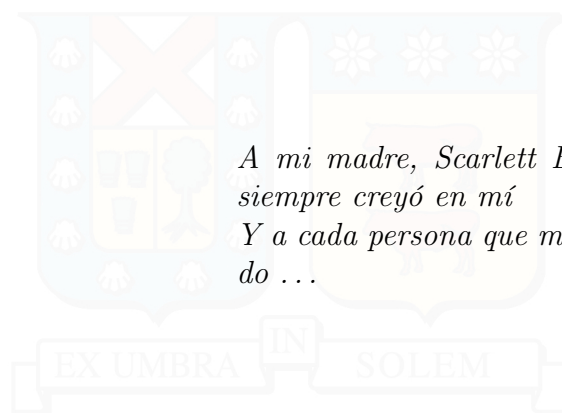
**IGNICIÓN DE UN ESTRATO VEGETAL BAJO UN FLUJO RADIATIVO
TÉRMICO VARIABLE EN EL TIEMPO**

FERNANDO ANDRÉS EBENSPERGER BERRIOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL Y AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : PROF. ANDRÉS FUENTES C.
PROFESOR CORREFERENTE : PROF. PEDRO RESZKA C.
PROF. ANDRÉS FUENTES R.

AGOSTO 2022



*A mi madre, Scarlett Berrios, quien
siempre creyó en mí
Y a cada persona que me haya apoya-
do . . .*

AGRADECIMIENTOS

Llegar a este punto, al día de hoy, es la culminación de un gran viaje, un esfuerzo constante a través de los años, que marca el final de una etapa, que hasta hace un par de años, pareciera nunca iba a llegar, pero con el pasar del tiempo se hizo inminente, y al fin estoy aquí. Estoy convencido que no es un final, sino un nuevo comienzo, una nueva etapa, lo cual siempre es tan intrigante como emocionante.

Tan importante como reconocer mi propio esfuerzo, perseverancia y trabajo para llegar hasta aquí, es reconocer a todas las personas que me han ayudado a lo largo de los años, que alguna vez me tendieron una mano amiga, que estuvieron allí alguna vez que necesite su apoyo. Dicho esto, lo más importante es agradecer a mi Madre, Scarlett Berríos, quién se ha desvivido desde que nací para darme todo lo que este a su alcance, y que me ha escuchado desde siempre, no estaría aquí sin su apoyo incondicional, a mi hermano Andrés, que ha estado en todas mis etapas formativas.

A mis besties de La Serena, Lya, Javi; que han estado conmigo todo este camino, aunque nos logramos ver poco, siempre me apoyan, y se que siempre estarán ahí, las quiero mucho niñas. Por supuesto, también quisiera agradecer a sus familias que me han recibido siempre como uno más en su casa, en especial a la tía Amaya, la tía Vilbett y la Yaya.

A todos mis amigos y amigas de la Universidad, de verdad quiero agradecerles a cada persona, desde quienes conocí en primer año, hasta quienes conocí al final, no espere nunca conocer a tantas personas en este camino, ni hacer tantas buenas amistades, así que simplemente agradecerles por su disposición, su tiempo, su buena energía. Dentro de ello, hay que destacar a todo el equipo FEUTFSM desde el 2016 al 2018, equipo CAAIND 2019, ayudantes GEIL, ayudantes de GIO 2019-2S - 2020-2S, equipos de trabajo durante los años universitarios y un sinnúmero de grupos y equipos que me acogieron y con quienes pasamos muy buenas instancias.

Sin embargo, hay algunas personas que necesito resaltar por su permanencia a través de los años: Cony, Fran, Vicho, Maca, Javi, Carlitos, Cris, Feño, Seba, Kathy, Cata, Mati M, HH, Maxi, Nacho, Mathi R; no puedo irme sin recordarlos, ni mencionarlos, han estado en los momentos altos y bajos de mi paso universitario.

A mis profesores, a lo largo de todo el proceso formativo, desde el primer día de colegio, hasta el último de universidad, he tenido la suerte de contar con muy buenos docentes, en este particular quiero agradecerle a mi profesor guía, Andrés Fuentes, quién creyó en mí para conseguir este hito académico.

Hito en el cual también debo destacar a los profesores Felipe Escudero, Rodrigo Demarco, Juan José Cruz, Gonzalo Olivares.-

A lo largo de esta etapa universitaria, he contado con la suerte de no solo conocer, sino también trabajar con profesores y funcionarios que han aportado a mi proceso formativo formal, así como en el desarrollo de mis habilidades transversales a quienes también quisiera hacer mención, Naty, Manu, Ceci, Claudita, la profesora Paulina, Scarlet, les agradezco su apoyo durante todos estos años.

Al todo el equipo EC2G, en especial a quienes han integrado el equipo IFIT, Francisco, Gabi, Mauro, José, Carlos, Coni; ha sido una experiencia que en verdad no contemplaba cuando entré a la universidad, pero que agradezco enormemente

haber llegado hasta aquí.

Bueno, para no extender indefinidamente esta sección, quisiera agradecer nuevamente a cada personita que me ha ayudado y tendido una mano amiga, de verdad te doy las gracias de corazón.



RESUMEN EJECUTIVO

Gran parte del desarrollo humano de nuevas metodologías y tecnologías ocurre gracias a la investigación. Es posible observar en los registros históricos que en aquellas épocas donde la investigación estuvo más limitada y restringida, el desarrollo fue casi nulo.

Es posible llevar a cabo investigaciones en todas las áreas del saber. Particularmente en este trabajo se ahonda en el área de transferencia de calor, específicamente en ignición.

El presente escrito se focaliza en el aparato experimental “Idealized Firebrand Ignition Time (IFIT)”, diseñado para el estudio del tiempo de ignición de estratos vegetales.

En particular se deja constancia de los procedimientos requeridos para lograr medidas consistentes en los casos trabajados, del mismo se exponen los equipos y configuraciones utilizados para estos particular.

Se presentan además los conceptos físicos necesarios para poder establecer el modelo matemático - físico correspondiente a cada caso estudiado, así como el modelo correspondiente.

Para validar los modelos, se realizan campañas experimentales atingentes, bajo condiciones controladas replicables, las cuales se resumen en el presente mostrando los efectos de cada uno de los casos aplicados.

Cabe destacar que estos modelos corresponden en primera instancia al caso de concentraciones de retardante MAK1 y en segunda instancia al caso de un flujo incidente de calor decreciente.

Finalmente se analiza de forma breve la incertidumbre propia de los modelos y futuros estudios.



Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Problema de Investigación	1
2. Objetivos	3
2.1. Objetivo General	3
2.2. Objetivos Específicos	3
3. Preguntas	5
4. Revisión Bibliográfica	7
5. Fundamentos del Modelo Teórico	9
5.1. Fenómeno de un incendio Forestal	10
5.1.1. Tipos de Incendio	10
5.2. Mecanismos de Transferencia de Calor	11
5.2.1. Propagación de Incendios por Spotting	12
5.3. Mecanismos de Transferencia de Calor	12
5.3.1. Conducción	12
5.3.2. Convección	13
5.3.3. Radiación	14
5.3.4. Naturaleza de la radiación térmica	14
5.3.5. Leyes básicas de la radiación térmica	16
5.3.6. Poder de emisión	16
5.3.7. Ángulo sólido	18
5.3.8. Intensidad de la radiación	19
5.3.9. Flujo de calor radiativo	21
5.3.10. Intensidad de la radiación en el vacío	23
5.3.11. Radiación característica de las partículas	23
5.3.12. Ecuación de transferencia radiativa (RTE)	24
5.4. Biomasa	26
5.4.1. Densidad	26
5.5. Teoría de Ignición de Sólidos	27
5.5.1. Introducción	27
5.5.2. Descripción	27

5.5.3. Ignición piloteada	30
5.5.4. Ignición Espontánea	30
5.5.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin	31
5.5.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick	33
6. Modelamiento	37
6.1. Formulación	37
6.2. Caso Cilíndrico	37
6.2.1. Divergencia del Flujo Radiativo	41
6.2.2. Condiciones de Ignición	47
6.2.3. Resumen de supuestos considerados en el modelo	49
6.2.4. Modelo Numérico	50
6.2.5. Modelo Analítico	50
6.3. Caso Esférico	56
7. Aproximación Experimental	57
7.1. Equipos Experimentales	57
7.1.1. Heater	57
7.1.2. Data Acquisition (DAQ)	58
7.1.3. Variac	58
7.1.4. Celda de Carga	58
7.1.5. Termocuplas	58
7.1.6. Kanthal	59
7.1.7. Radiómetro	59
8. Metodología	61
8.1. Experimental	61
8.1.1. Recomendaciones	63
8.2. Procedimiento Experimental	64
9. Validación	67
10.Resultados	69
10.1. Concentraciones Variables	69
10.2. Flujo Incidente Decreciente	71
11.Análisis de Incertidumbre	75
12.Conclusiones	79
12.1. Perspectivas	79
Bibliografia	81

Índice de Tablas

8.1. Tabla de Voltajes y Flujo	62
8.2. Densidad y masa por concentración	63
10.1. Propiedades y parámetros utilizados	69
10.2. Propiedades y parámetros utilizados	71
11.1. Estadísticos Caso Rampa Variable	76
11.2. Estadísticos Caso Retardante	77



Índice de Figuras

5.1. Tipos de Incendio	11
5.2. Espectro de ondas electromagnética.	16
5.3. Dirección de emisión y ángulos sólidos en una semiesfera unitaria. . .	18
5.4. Ley de Kirchhoff para el comportamiento direccional de la intensidad de un cuerpo negro.	20
5.5. Flujo de calor radiativo incidiendo en una superficie arbitraria. . . .	22
5.6. Interacción de ondas electromagnéticas con una partícula pequeña. . .	24
5.7. Variación de la intensidad al interior de un medio radiativamente par- ticipativo.	26
5.8. Factores involucrados en la ignición de un sólido.	28
5.9. Evolución de la temperatura en la superficie de un sólido expuesto a un flujo de calor externo.	31
6.2. Evolución temporal a distintas rampas (β)	54
6.1. Comparación de modelos de aproximación $q''_0 = 23,07(kW/m^2)$	54
6.3. Comparativa de modelos de temperatura de Ignición	55
8.1. Medición Experimental Radiometro y Modelo desarrollado	62
8.2. Procedimiento Experimental	65
10.1. Densidad real y aparente de las acículas a distinta concentración . . .	70
10.2. Evolución de la temperatura de acuerdo al tiempo de exposición, las eti- quetas en las líneas punteadas representan el flujo incidente en kW/m^2 . (a) $\Phi = 0.0$ (concentración 0 % g/g) y (b) $\Phi = 0.268$ (concentración 40 % g/g).	70
10.3. Modificación en las curvas de tiempo de Ignición y su Inverso	71
10.4. Resultados simulación respecto a β	72
10.5. Tiempos Esperados de Ignición	72
10.6. Las figuras (a) y (b), muestran el comportamiento conjunto de las componentes temporal y radial para distintos flujos, mientras que la figura (c) es el comportamiento de la componente radial para $\dot{q}''_0 =$ $23067W/m^2$	73
10.7. (a) Muestra los resultados experimentales y los teóricos de cada de- crecimiento (b) Muestra la evolución de la temperatura para $q''_0 =$ $23,07KW/m^2$	74



1 | Introducción

Índice

1.1. Contexto	1
1.2. Problema de Investigación	1

1.1. Contexto

El fuego ha sido desde los inicios de la humanidad una energía y herramienta ampliamente utilizada, ya sea como iluminación, fuente de calor, método de cocción y un sinnúmero de actividades domésticas, llegando hasta usos industriales a gran escala, ha permitido y favorecido múltiples revoluciones industriales; sin embargo se ha convertido en una herramienta tan común en su uso, que cada vez es utilizada con menos cuidado, y la inversión en recursos ha sido en pos de poder mantenerlo y utilizarlo, siendo pocas veces considerados los riesgos que conlleva, los mecanismos de control, prevención de su expansión y por consiguiente el estudio de su comportamiento.

Grandes incendios forestales en la última década, como han sucedido en Australia, Chile, Grecia, Portugal, España y Estados Unidos; demuestran la importancia que tiene a nivel global, comprender el funcionamiento del fuego, especialmente en la interfaz urbano-rural, donde han ocurrido la mayor parte de las catástrofes.

Por este mismo motivo, la investigación para la seguridad contra incendios ha crecido notablemente en los últimos años, aún así, a día de hoy no tenemos información suficiente para comprender y controlar estos fenómenos completamente, siendo así necesario continuar con su estudio, permitiendo ampliar los límites actuales, avanzando cada día más hacia la comprensión de los mismos.

1.2. Problema de Investigación

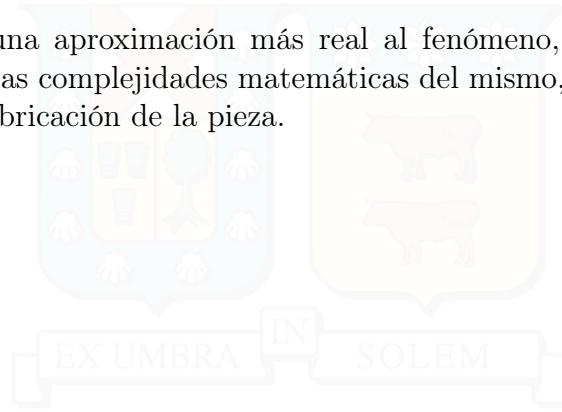
Es de vital importancia en toda línea de investigación, respaldar y transmitir la información recopilada, así como los descubrimientos y aciertos que se han realizado, lo que permite disminuir el tiempo de preparación en cada experimento, facilitando el avance científico en torno a la problemática.

Por este motivo, el presente trabajo busca plasmar las configuraciones actualmente utilizadas en el aparato experimental “Idealized Firebrand Ignition Test (IFIT)”

para que las futuras generaciones posean claridad sobre los equipos que se han utilizado, como se configuraron, y por qué.

Además de ello, dado que hasta la fecha se ha trabajado con un heater cilíndrico, es decir, se ha considerado a la pavesa incandescente como un cilindro, se plantea un modelo matemático, que permite trabajar bajo el supuesto que dicha pavesa se comporta como una esfera.

Dicho modelo, permite una aproximación más real al fenómeno, que hasta la fecha no se ha utilizado por las complejidades matemáticas del mismo, así como por la complejidad física de la fabricación de la pieza.



2 | Objetivos

2.1. Objetivo General

Estudiar el comportamiento del retardo a la ignición en un estrato vegetal seco tratado con retardante. El trabajo contempla también entender el proceso de ignición cuando se aplica un flujo radiativo térmico que decae a medida que aumenta el tiempo de exposición. Los experimentos idealizados a escala de laboratorio y la modelación del problema buscaban obtener datos y resolver la evolución de la temperatura del estrato vegetal en función del tiempo. La integración de un perfil de divergencia radiativa con decaimiento temporal lineal fue llevada a cabo, obteniendo resultados y correlaciones teóricas simples relevantes para ser incorporadas directamente en la evaluación cuantitativa de riesgos de incendios forestales.

2.2. Objetivos Específicos

- Establecer las configuraciones actualmente utilizadas para una cama vegetal en el aparato experimental IFIT.
- Plasmar las recomendaciones de uso de los equipos que componen el IFIT, así como las particularidades de uso de cada uno.
- Presentar los resultados obtenidos para flujo constante y concentración de retardante variable.
- Plantear el modelo matemático que describe el fenómeno de ignición de una cama vegetal con un heater cilíndrico y flujo incidente decreciente.
- Plantear el modelo matemático que describe el fenómeno de ignición de una cama vegetal con un heater esférico y flujo incidente constante.



3 | Preguntas

A lo largo del escrito se busca responder a las siguientes preguntas fundamentales:

- ¿Qué tanto afecta el retardante al tiempo de ignición del estrato vegetal?
- ¿Cómo se modela el comportamiento del estrato vegetal para un flujo radiativo térmico variable?
- ¿Qué tanto afecta la variación temporal del flujo radiativo térmico al tiempo de ignición del estrato vegetal, cuando este decrece en el tiempo?



4 | Revisión Bibliográfica

El fenómeno de la combustión ha sido una incógnita durante gran parte de la existencia del ser humano, en este sentido, se conoce que ha sido un tema de amplio interés científico desde hace al menos 75 años, siendo apreciable en el trabajo de Bamford, Crank y Malan [1], lo que abrió camino al desarrollo de teorías desacopladas de fase sólida y gaseosa, promoviendo el desarrollo de soluciones analíticas que pueden realizarse de forma manual. A lo largo de los años se ha estudiado diversas condiciones para poder lograr comprender el fenómeno, partiendo por el caso de radiación incidente constante, evolucionando al caso de radiación incidente creciente en el tiempo, como son los trabajos de [2],[3],[4],[5],[6],[7].

Las aproximaciones experimentales del fenómeno en estudio en el período 1950's - 1970's se dividió en dos grandes secciones, una de ellas consideraba el uso de paneles radiantes para producir un flujo constante de calor, lo que resultó de utilidad, dado que no se quería replicar el escenario, sino que permitir estudiar y explicar las propiedades térmicas efectivas de un material. La segunda metodología o mejor dicho corriente investigativa, aplicaba pulsos de gran magnitud sobre las muestras en cuestión.

A lo largo de los años y con las mejoras tecnológicas, ha mejorado ampliamente la precisión de los resultados, los equipos disponibles, los rangos de capacidad y por supuesto la posibilidad de aislar de mejor forma las variables en estudio.

Actualmente existen diversos estudios que buscan explicar el comportamiento del fenómeno cuando el flujo incidente radiativo térmico es creciente, y se han realizado avances en otras componentes, como por ejemplo la presencia de retardante [8], sin embargo, el estudio del comportamiento de la ignición para flujos térmicos incidentes radiativos decrecientes no ha sido estudiado.



5 | Fundamentos del Modelo Teórico

Índice

5.1. Fenómeno de un incendio Forestal	10
5.1.1. Tipos de Incendio	10
5.2. Mecanismos de Transferencia de Calor	11
5.2.1. Propagación de Incendios por Spotting	12
5.3. Mecanismos de Transferencia de Calor	12
5.3.1. Conducción	12
5.3.2. Convección	13
5.3.3. Radiación	14
5.3.4. Naturaleza de la radiación térmica	14
5.3.5. Leyes básicas de la radiación térmica	16
5.3.6. Poder de emisión	16
5.3.7. Ángulo sólido	18
5.3.8. Intensidad de la radiación	19
5.3.9. Flujo de calor radiativo	21
5.3.10. Intensidad de la radiación en el vacío	23
5.3.11. Radiación característica de las partículas	23
5.3.12. Ecuación de transferencia radiativa (RTE)	24
5.4. Biomasa	26
5.4.1. Densidad	26
5.5. Teoría de Ignición de Sólidos	27
5.5.1. Introducción	27
5.5.2. Descripción	27
5.5.3. Ignición pilotada	30
5.5.4. Ignición Espontánea	30
5.5.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin	31

5.5.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick	33
---	----

5.1. Fenómeno de un incendio Forestal

Se define por la Corporación Nacional Forestal (CONAF) un incendio forestal como “un fuego que, cualquiera sea su origen y con peligro o daño a las personas, la propiedad o el ambiente, se propaga sin control en terrenos rurales, a través de vegetación leñosa, arbustiva o herbácea, viva o muerta. Es decir, es un fuego injustificado y descontrolado en el cual los combustibles son vegetales y que, en su propagación, puede destruir todo lo que encuentre a su paso.”

Dicha definición, aunque descrita en forma ligeramente distinta, es compartida por diversas instituciones nacionales como internacionales, tal como la Oficina Nacional de Emergencias del Ministerio del Interior (ONEMI) así como la Corporación Nacional de Emergencias de Costa Rica (CNE Costa Rica).

Por su parte, para que pueda ocurrir un incendio, es requisito fundamental que exista combustible suficiente, así como que las condiciones de aire y temperatura propicien la ignición. De acuerdo al ecosistema en cuestión y las condiciones adaptativas de su material vegetal, existen distintos tipos de incendio. A modo general se pueden clasificar como incendios de subsuelo, superficie y copa.

5.1.1. Tipos de Incendio

Incendio de Subsuelo

Tal como lo indica su nombre, ocurren en el subsuelo, el material combustible en este caso se compone principalmente de hojas muertas, raíces y la capa mineral del suelo. Solo se identifican estos sucesos con la aparición y visibilidad del humo, ya que por norma general no aparece llama y tienen un avance lento por la escasez de oxígeno. Ocurren en zonas boreales, tropicales y mediterráneas, predominantemente en turberas y ciénagas, tienden a tener una duración prolongada y en algunos casos son capaces de reavivar otros tipos de incendios que se consideraban controlados o apagados tras varios días o incluso semanas.

Incendio de Superficie

Es un caso menos frecuente y de menor intensidad, dado que se acumula una menor cantidad de material vegetal (combustible), fomentando además una discontinuidad, que evita en parte su propagación. En cuanto a su modalidad, ocurre sobre la superficie, sin alcanzar las ramas ni copas de los árboles, mediante la ignición sucesiva de material combustible.

Incendios de Copas

En general la intensidad de este tipo de incendios es mayor a las anteriores, dado que se propaga por casi la completitud del estrato vegetal, asimismo la severidad de los mismos tiende a ser mayor a los otros casos; de acuerdo a la forma en que se propagan pueden clasificarse como:

- **Incendios de Copa Pasivos:** Ocurren cuando la intensidad de los incendios de superficie, es decir, hojas, ramas y troncos; es suficiente para encender las copas de algunos árboles.
- **Incendios de Copa Activos:** Tienen lugar cuando los incendios de superficie generan suficiente calor para permitir el fuego sostenido en las coronas, en este tipo de incendios, las llamas son desviadas a las coronas de árboles adyacentes. Existen algunos factores tales como la densidad, la distancia entre copas y la velocidad del viento que propician este tipo de incendios.

Cabe resaltar que este tipo de incendios propician la ocurrencia de incendios secundarios, fuera del frente de incendio (*spotting*).

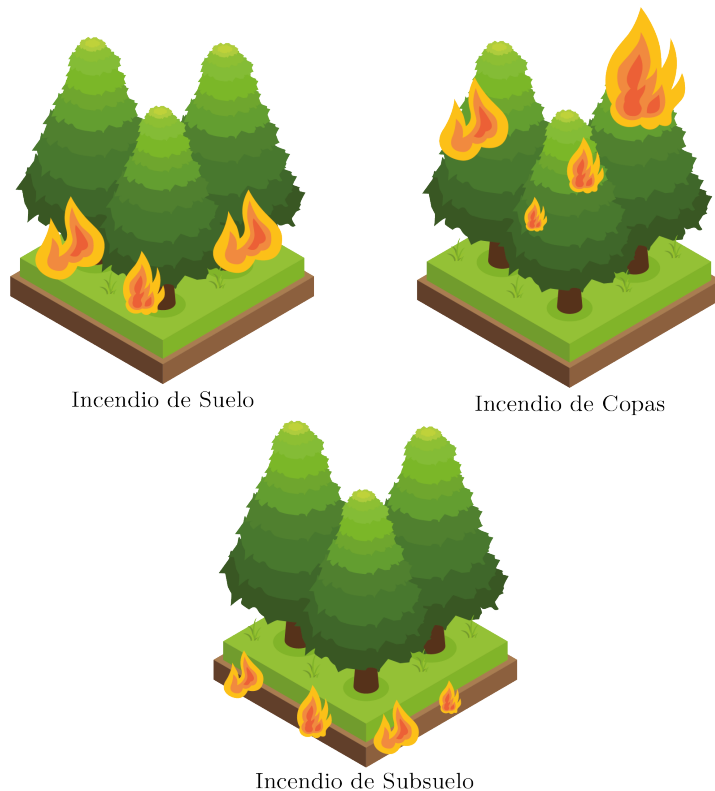


Figura 5.1: Tipos de Incendio

5.2. Mecanismos de Transferencia de Calor

En general, existen cuatro mecanismos de propagación para los incendios:

- Material Combustible presente en el subsuelo (*ground fuel*), que genera incendios de subsuelo.
- Material Combustible presente en la superficie del suelo (*surface fuel*), que propicia los incendios de superficie.
- Material Combustible en las copas de los árboles (*crown fuel*), que propicia los incendios de copa.
- Material Combustible en forma de pavesas (*firebrands*), generalmente favorecidos por los incendios de copas.

5.2.1. Propagación de Incendios por Spotting

Como se mencionó anteriormente, ocurre cuando las pavesas, es decir, partículas incandescentes carbonizadas son desprendidas de, y transportadas por el viento en conjunto a la convección.

Estas partículas tienen la capacidad de viajar grandes distancias, en algunos casos siendo estas de decenas de kilómetros, siendo capaces de generar otros focos de incendio. La secuencia de este mecanismo se compone de tres etapas, generación, transporte e ignición del combustible en la posición de aterrizaje. En este mecanismo, las condiciones climáticas tienen un fuerte impacto, primordialmente las condiciones de vientos, dado que a mayor intensidad, el incendio principal es mayor, las pavesas se transportan a mayor distancia y además favorecen la ignición de otras fuentes combustibles.

La vida útil de las pavesas depende del tamaño inicial de la misma, así como de la velocidad vertical del viento que genera el fuego.

5.3. Mecanismos de Transferencia de Calor

El calor es una forma de energía que se encuentra en transferencia entre dos medios (o más), cabe señalar que en la naturaleza siempre ocurre desde el medio de mayor temperatura al de menor temperatura y termina una vez que ambos alcanzan la misma temperatura, es decir, que alcanzan el equilibrio térmico, dicho de otra manera es requisito para su ocurrencia que exista un gradiente de temperatura. Dicha transferencia puede ocurrir de tres modos:

5.3.1. Conducción

Para este caso, la energía se transfiere de las partículas más energéticas a las menos energéticas, mediante la interacción de las partículas, siendo en medios líquidos y gaseosos mediante la colisión de las mismas, mientras que en sólidos ocurre por la combinación de las vibraciones entre moléculas.

De acuerdo a la geometría, el tipo de material, el espesor del mismo, la diferencia de temperatura entre medios, entre otras condiciones propias de estos; se genera

una tasa de transferencia de calor. Experimentalmente se ha comprobado que en el caso de una placa plana, dicho ratio es directamente proporcional a la diferencia de temperatura e inversamente proporcional al espesor. Esto se expresa fácilmente a través de la *Ley de Fourier* para la conducción de calor:

$$\dot{q}_{cond} = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.1)$$

En dicha expresión k corresponde a la conductividad térmica del material, mientras que A es el área de la sección transversal, x es la dirección a través de la que ocurre la transferencia de calor y $\frac{\partial T}{\partial x}$ es el gradiente de temperatura en la dirección estudiada.

Para el caso de la constante k debe tenerse en cuenta que esta varía de acuerdo a la temperatura, por lo cual su estudio es más complejo, sin embargo en muchos casos, en especial en medios sólidos, dado que el cambio es muy pequeño, se puede asumir constante manteniendo un error poco sustancial.

Existen fenómenos donde la transferencia de calor es bidimensional o tridimensional, por lo cual será necesario expandir la expresión a una versión más compleja que pueda representar el fenómeno, por otro lado, si se utiliza una geometría distinta, podría ser recomendable utilizar otro tipo de coordenadas.

La expresión general para la transferencia de calor en coordenadas rectangulares es:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} \quad (5.2)$$

Dicha formulación resulta muy compleja de resolver cuando no es posible simplificar alguno de los parámetros o utilizar algún supuesto que facilite la resolución; hay que tener presente que los parámetros densidad (ρ), la constante de conductividad (k) y el calor específico (c_p) podrían también variar tanto temporal como espacialmente, por ende la resolución del modelo, aún con la ayuda de la computación resulta muy lento y complejo. En muchos casos, la variación de dichos parámetros es poco significativa, por lo cual se puede asumir un comportamiento constante, sin embargo las simplificaciones de las demás condiciones dependerá mucho de la geometría y análisis realizado.

5.3.2. Convección

Se establece la presencia de este mecanismo cuando la transferencia de energía resulta de un sólido que en contacto con un fluido (líquido o gas) adyacente al mismo que se encuentra en movimiento. En caso que el fluido se encuentre “quieto” la transferencia de energía resulta solo de la conducción entre ambos.

Se conoce como “*convección forzada*” cuando el fenómeno ocurre por efecto de un agente externo como puede ser un ventilador, una bomba, entre otros. Por su parte se conoce como “*convección natural*” al caso donde el movimiento del fluido está dado por las fuerzas de empuje inducidas por las diferencias de densidades o de temperatura.

Se ha logrado establecer que la rapidez de transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura, representado con la *Ley de enfriamiento de Newton*:

$$\dot{q}_{conv} = h \cdot A_s \cdot (T_s - T_\infty) \quad (5.3)$$

donde h corresponde al coeficiente de transferencia de calor por convección en W/m^2K , A_s al área de la superficie donde ocurre la convección, T_s a la temperatura superficial y T_∞ la temperatura del fluido lo suficientemente alejado de la superficie. Cabe destacar que el coeficiente de transferencia de calor (h) no es inherente al fluido, sino que depende de una multitud de variables experimentales como son la configuración geométrica, la velocidad del fluido, la naturaleza de su movimiento y propiedades termo - físicas.

5.3.3. Radiación

Es el único mecanismo de transferencia de calor que no requiere la presencia de un medio, motivo por el cual puede transmitirse a través del vacío; esto es posible dado que se transmite mediante ondas electromagnéticas (mediante fotones), como resultado del cambio en la configuración de átomos y moléculas.

De este modo, todo cuerpo, ya sea sólido, líquido o gaseoso; que se encuentre con una temperatura sobre el cero absoluto, se encuentra emitiendo, absorbiendo y transmitiendo radiación en mayor o menor grado. En el caso de los sólidos opacos (transmisividad despreciable) la radiación se considera un fenómeno superficial, dado que la parte emitida desde el interior no alcanza nunca la superficie; por su parte la radiación incidente en el mismo, se absorbe mediante unos micro - poros.

Usando estas ideas, se formula la *Ley de Steffan-Boltzmann*, para representar la radiación emitida por la superficie de un cuerpo opaco y negro (emisividad = 1):

$$\dot{q}_{rad,cn} = \sigma \cdot A_s \cdot T_s^4 \quad (5.4)$$

donde $\dot{q}_{rad,cn}$ es la tasa de transferencia de calor por radiación de un cuerpo negro, σ es la constante de Steffan-Boltzmann, A_s es el área de la superficie y T_s es la temperatura de la superficie. Está expresión se puede reformular de manera más general como:

$$\dot{q}_{rad} = \epsilon \cdot \sigma \cdot A_s \cdot T_s^4 \quad (5.5)$$

donde ϵ es la emisividad del cuerpo, que puede tomar valores $0 \leq \epsilon \leq 1$, y permite establecer cuanto se parece el cuerpo a un cuerpo negro.

La tasa neta de transferencia de calor entre dos superficies, entiéndase el flujo emitido por una de las superficies y absorbido por la otra depende de las propiedades radiativas de cada una, su orientación geométrica, y la posible participación del medio en que se encuentran.

5.3.4. Naturaleza de la radiación térmica

Desde el punto de vista de la naturaleza de la radiación térmica, se tiene que toda onda electromagnética o fotones se propagan a través de cualquier medio a una

gran velocidad. Como la luz es una parte del espectro de ondas electromagnéticas, su velocidad es conocida como *velocidad de la luz* c , la cual depende del medio a través del cual se encuentra viajando y se puede relacionar a la *velocidad de la luz en el vacío*, c_0 como:

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad (5.6)$$

con $c_0 = 2,998 \times 10^8$ m/s y n índice de refracción (*refractive index*) del medio. Por definición el índice de refracción del vacío es $n \equiv 1$, mientras que para la mayoría de los gases el índice de refracción es cercano a la unidad, por ejemplo, el aire a temperatura ambiente es $n = 1,00029$ sobre el espectro visible, de esta manera, la luz se propaga en los gases a una velocidad cercana a la de la luz. Cada onda electromagnética puede ser identificada por los siguientes parámetros

frecuencia;	ν	medida en ciclos/s = s ⁻¹ = Hz
longitud de onda;	λ	medida en $\mu\text{m} = 10^{-6}$ o nm = 10^{-9}m
período;	η	medida en cm ⁻¹
frecuencia angular;	ω	medida en radianes/s = s ⁻¹

los cuales se encuentran relacionados a través de

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = c\eta. \quad (5.7)$$

Dependiendo de su comportamiento u ocurrencia, las ondas electromagnéticas se pueden agrupar en categorías (ver Figura 5.2). Así, la radiación térmica puede ser definida como las ondas electromagnéticas que son emitidas por un medio debido únicamente a su temperatura. Esto acota el intervalo de interés del rango de longitudes de onda para las transferencias de calor entre $0,1 \mu\text{m}$ (ultravioleta) y $0,1 \mu\text{m}$ (infrarrojo medio)

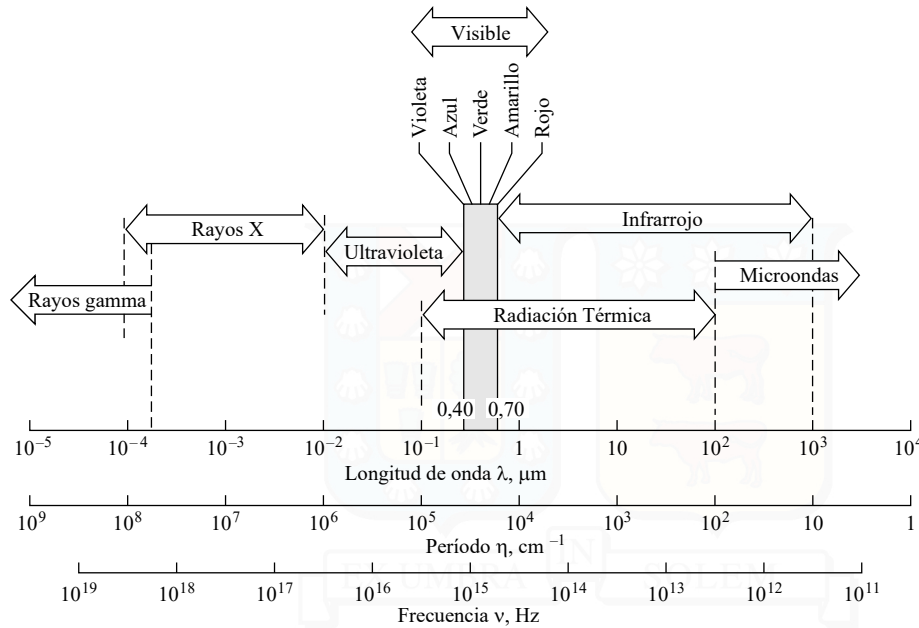


Figura 5.2: Espectro de ondas electromagnética.

5.3.5. Leyes básicas de la radiación térmica

Cuando una onda electromagnética viaja a través de un medio (o vacío) se encuentra con la superficie de otro medio, ya sea sólido o líquido, partícula o burbuja, la onda puede ser reflejada parcial o totalmente, y toda parte *no-reflejada* penetrará dentro del medio con el que se encontró. Ahora bien, mientras atraviesa el medio, la onda puede ser continuamente atenuada. Si esta atenuación es completa, entonces no hay radiación penetrante que emerge, esto se denomina *opaco*, por otro lado, si la onda pasa a través de un medio sin ninguna atenuación se denomina *transparente*, mientras que, un cuerpo con atenuación parcial es llamado *semitransparente*. El que un medio sea transparente, semitransparente u opaco, depende tanto del material como de su espesor (por ejemplo, la distancia que debe viajar la onda electromagnética a través del medio).

5.3.6. Poder de emisión

Todo medio emite continuamente radiación electromagnética de forma aleatoria en todas las direcciones a una tasa que depende de la temperatura local y de las propiedades del material. El flujo de calor radiativo emitido por una superficie es denominado *poder emisor* E y se puede distinguir entre *poder emisor total* (flujo de calor emitido sobre todo el espectro) o *espectral* (flujo de calor emitido para una frecuencia dada por unidad de intervalo de frecuencia)

$$\begin{array}{ll} \text{poder emisor espectral} & E_\nu \equiv \text{energía emitida} / \text{tiempo} / \text{área superficial} / \text{frecuencia} \\ \text{poder emisor total} & E \equiv \text{energía emitida} / \text{tiempo} / \text{área superficial} \end{array}$$

La radiación térmica de una sola frecuencia o longitud de onda también se conoce como *radiación monocromática* ya que en el espectro visible, el ojo humano percibe que las ondas electromagnéticas tienen los colores del arcoíris. Entonces, el poder emisivo total y espectral están relacionados como

$$E(T) = \int_0^\infty E_\nu(T, \nu) d\nu. \quad (5.8)$$

Poder de emisión espectral de *Blackbody*

Asumiendo que una molécula puede emitir fotones solo a distintos niveles de energía, la distribución del poder de emisión espectral de un cuerpo negro o *blackbody*, ahora conocido como *Ley de Planck*, para una superficie negra rodeada por un medio transparente con índice de refracción n

$$E_{b\nu}(T, \nu) = \frac{2\pi h\nu^3 n^2}{c_0^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]}, \quad (5.9)$$

con k constante de Stefan–Boltzmann. Luego, la Ecuación 5.9 puede ser expresada en términos de la longitud de onda y período por medio de la Ecuación 5.7 como

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\nu} d\nu = \int_0^\infty E_{b\lambda} d\lambda = \int_0^\infty E_{b\eta} d\eta, \quad (5.10)$$

o bien,

$$E_{b\nu} d\nu = -E_{b\lambda} d\lambda = E_{b\eta} d\eta. \quad (5.11)$$

Poder de emisión total de *Blackbody*

Desde la Ecuación 5.9 y Ecuación 5.10 es posible obtener el poder emisivo total para un cuerpo negro, considerando las constantes abreviadas $C_1 = 2\pi h c_0^2$, $C_2 = hc_0/k$

$$\begin{aligned} E_b(T) &= \int_0^\infty E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda = C_1 n^2 T^4 \int_0^\infty \frac{d(n\lambda T)}{(n\lambda T)^5 [e^{(C_2/(n\lambda T))} - 1]} \\ &= \left[\frac{C_1}{C_2^4} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} n^2 T^4 \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

para n constante. Así, se puede obtener lo siguiente

$$E_b(T) = n^2 \sigma T^4, \quad \sigma \frac{\pi^4 C_1}{15 C_2^4} = 5,670 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}, \quad (5.13)$$

donde σ es la tradicional forma de la constante de Stefan–Boltzmann.

5.3.7. Ángulo sólido

Cuando la energía radiativa deja un medio y entra a otro, usualmente tiene diferentes fuerzas en direcciones. De manera similar, una onda electromagnética o fotón fluyendo a través de un punto dentro de un medio puede variar su dirección. Ahora, considerando un punto P en una superficie opaca dA irradiando a otro medio, digamos aire, como en la Figura 5.3. Es aparente que la superficie puede irradiar en infinitas direcciones, con cada rayo penetrando a través de una *semiesfera* de radio unitario (ver Figura 5.3). El área superficial total de esta semiesfera es $2\pi 1^2 = 2\pi$ es conocida como el *ángulo sólido total* sobre la superficie. Luego, una dirección arbitraria de emisión desde la superficie es definida por el vector unitario de dirección $\hat{s}$ que puede ser expresado en términos del *ángulo polar* θ (medido desde la normal a la superficie $\hat{n}$) y el *ángulo azimutal* φ (medido entre un eje arbitrario en la superficie y la proyección de $\hat{s}$ en la superficie). Para la semiesfera se tiene que los ángulos están comprendidos como $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

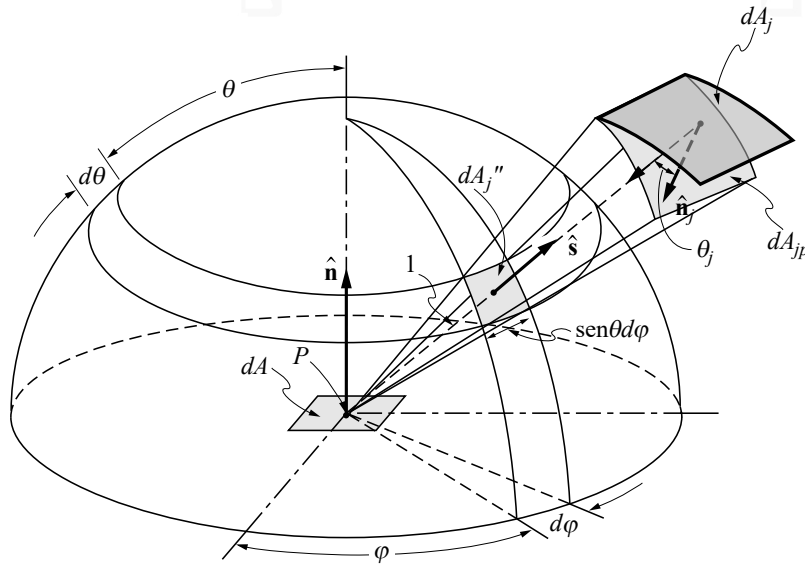


Figura 5.3: Dirección de emisión y ángulos sólidos en una semiesfera unitaria.

El *ángulo sólido* para el cual un diferencial de superficie dA_j es visto desde un punto P , está definido como la proyección de la superficie en un plano normal a la dirección del vector, dividido por el cuadrado de la distancia S entre dA_j y P (ver Figura 5.3). Si la superficie es proyectada en la semiesfera unitaria sobre el punto, el ángulo sólido es igual a la misma área proyectada

$$d\Omega = \frac{dA_{jp}}{S^2} = \frac{\cos \theta_j dA_j}{S^2} = dA_j''. \quad (5.14)$$

Entonces, un ángulo sólido diferencial es un diferencial de área en una esfera unitaria, o bien

$$d\Omega = dA_j'' = (1 \times \sin \theta d\varphi) (1 \times d\theta) = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.15)$$

Integrando sobre todas las posibles direcciones

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi, \quad (5.16)$$

para todo el ángulo sólido sobre la superficie. Ahora, para el ángulo sólido en el cual un área finita A_j es vista desde el punto P , se tiene desde la Ecuación 5.14

$$\Omega = \int_{A_{jp}} \frac{dA_{jp}}{S^2} = \int_A \frac{\cos \theta_j dA_j}{S^2} = \int_{A_j} dA_j'' = A_j'', \quad (5.17)$$

que corresponde a la proyección de A_j en la semiesfera sobre P .

5.3.8. Intensidad de la radiación

De lo visto hasta el momento parece ser que el poder de emisión es suficiente para describir el flujo de calor radiativo saliendo de una superficie, sin embargo, no es adecuado para describir la dependencia del campo radiativo con la dirección, particularmente al interior de un medio que absorbe/emite y donde los fotones pueden no haber sido originados en la superficie. Por lo tanto, de manera similar a como se hizo con el poder de emisión, se define la *intensidad radiativa* I como el flujo de energía radiativa por unidad de ángulo sólido y unidad de área normal a los rayos (opuesto al área superficial). Nuevamente se puede distinguir entre intensidad espectral y total.

intensidad espectral	$I_\lambda \equiv$	flujo de energía radiativa / tiempo / área normal al rayo / ángulo sólido / longitud de onda
intensidad total	$I \equiv$	flujo de energía radiativa / tiempo / área normal al rayo / ángulo sólido

Nuevamente, la intensidad espectral y total se relacionan por

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \int_0^\infty I_\lambda(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \lambda) d\lambda. \quad (5.18)$$

Ahora, $\mathbf{r}$ es un vector posición que se establece fijando la ubicación de un punto en el espacio, $\hat{\mathbf{s}}$ es el vector unitario de dirección previamente definido. Mientras que el poder de emisión depende de la posición y la longitud de onda, la intensidad depende además del vector de dirección $\hat{\mathbf{s}}$. De esta manera, la energía emitida desde dA en la dirección $\hat{\mathbf{s}}$ contenida dentro de un ángulo sólido infinitesimal $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ es

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) dA_p d\Omega = I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) dA \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (5.19)$$

donde dA_p es el área proyectada de dA normal al rayo, por lo que dA es vista desde la dirección $-\hat{\mathbf{s}}$. Entonces, integrando sobre todas las posibles direcciones se obtiene la energía total emitida desde dA , por lo que dividiendo luego por dA

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{2\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega, \quad (5.20)$$

la cual también es válida en una base espectral.

El comportamiento direccional de la intensidad de la radiación dejando un cuerpo negro se puede obtener fácilmente de una variación de la *Ley de Kirchhoff*. Considere una superficie pequeña y negra suspendida en el centro de un volumen esférico isotérmico (ver Fig. 5.4), asumiendo que el volumen tiene una superficie que lo reviste que refleja toda la radiación que llega y al igual que un espejo en todo el lugar, excepto por una pequeña área en el manto dA_s , que también refleja toda la radiación que llega excepto por un pequeño intervalo de longitudes de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$. En este pequeño rango de longitudes, dA_s se comporta como un cuerpo negro. Ahora, toda la radiación dejando dA , viajando a la esfera (excepto por la luz de longitud λ viajando hacia dA_s), será reflejada hacia dA donde se absorbe (ya que dA es negra). Entonces, el flujo de energía neta desde dA a la esfera

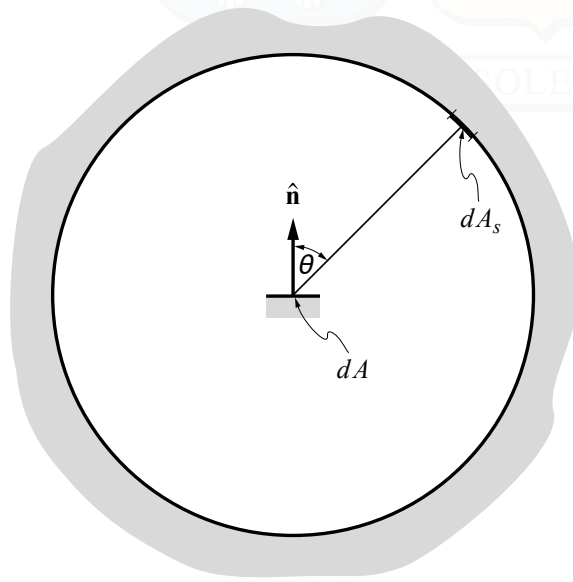


Figura 5.4: Ley de Kirchhoff para el comportamiento direccional de la intensidad de un cuerpo negro.

$$I_{b\lambda}(T, \theta, \varphi, \lambda)(dA \cos \theta)d\Omega_s d\lambda = I_{b\lambda}(T, \theta, \varphi, \lambda)(dA \cos \theta) \left(\frac{dA_s}{R^2} \right) d\lambda, \quad (5.21)$$

donde $d\Omega_s$ es el ángulo sólido con el cual dA_s es visto desde dA . Por otro lado, también por la Ley de Kirchhoff, la esfera no emite ninguna radiación ya que no absorbe nada excepto sobre dA_s a la longitud de onda λ . Toda la energía emitida desde dA_s eventualmente regresará a sí misma excepto por la fracción interceptada por dA . Entonces, el flujo de energía neta desde la esfera a dA es

$$I_{bn\lambda}(T, \lambda)dA_s d\Omega d\lambda = I_{bn\lambda}(T, \lambda)dA_s \left(\frac{dA \cos \theta}{R^2} \right) d\lambda, \quad (5.22)$$

en donde el subíndice n denota emisión en la dirección normal ($\theta_s = 0$, φ_s arbitrarios), y $d\Omega$ es el ángulo sólido con el cual dA es visto desde dA_s . Ahora, por la Segunda Ley

de la Termodinámica, esos dos flujos deben ser iguales para un volumen isotérmico

$$I_{b\lambda}(T, \theta, \varphi, \lambda) = I_{bn\lambda}(T, \lambda). \quad (5.23)$$

Ya que la dirección (θ, φ) con que dA_s está orientada es arbitraria, se concluye que $I_{b\lambda}$ es independiente de la dirección, con lo que

$$I_{b\lambda} = I_{b\lambda}(T, \lambda). \quad (5.24)$$

Por lo que sustituyendo la Ecuación 5.24 en la Ecuación 5.20, se obtiene la siguiente relación entre la intensidad de un cuerpo negro y el poder de emisión

$$E_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = \pi I_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda). \quad (5.25)$$

Lo anterior implica que la intensidad dejando un cuerpo negro o cualquier superficie cuya intensidad de salida es independiente de la dirección (*difusa*), puede ser evaluada desde el poder de emisión de un cuerpo negro o flujo de calor de salida

$$I_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = \frac{E_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda)}{\pi}. \quad (5.26)$$

En la literatura, la intensidad espectral de un cuerpo negro es usualmente conocida como *Función de Planck*. El comportamiento direccional de la emisión de un cuerpo negro es encontrada al comparar la intensidad (flujo de energía por ángulo sólido y por área normal a los rayos) y el flujo direccional emitido (flujo de energía por ángulo sólido y por unidad de área superficial). El flujo direccional de calor también es llamado poder de emisión direccional

$$\begin{aligned} E'_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \theta, \varphi) dA &= I_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) dA_p \\ E'_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \theta, \varphi) &= I_{b\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.27)$$

esto significa que el flujo direccional emitido de un cuerpo negro varía con el coseno del ángulo polar, lo cual también se conoce como *Ley de Lambert* o *Ley del coseno*.

5.3.9. Flujo de calor radiativo

Considerar la superficie de la Figura 5.5. La radiación térmica desde un ángulo sólido infinitesimal alrededor de la dirección $\hat{\mathbf{s}}_i$ incide en la superficie con una intensidad $I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_i)$. Dicha radiación se denomina *lápiz de rayos* ya que el ángulo sólido infinitesimal es usualmente dibujando visto como la punta de un lápiz afilado. Luego, aplicando la definición de intensidad se puede ver que imparte un ratio de flujo de calor infinitesimal por longitud de onda en la superficie en la cantidad de

$$d\Omega_\lambda = I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_i) d\Omega_i dA_p = I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_i) d\Omega_i (dA \cos \theta_i), \quad (5.28)$$

donde la tasa de calor es tomada como positivo en la dirección de la normal de la superficie exterior (entrando al medio), de modo que el flujo entrante que entra en la superficie es negativo ya que $\cos \theta_i < 0$. Luego, integrando sobre todo 2π direcciones

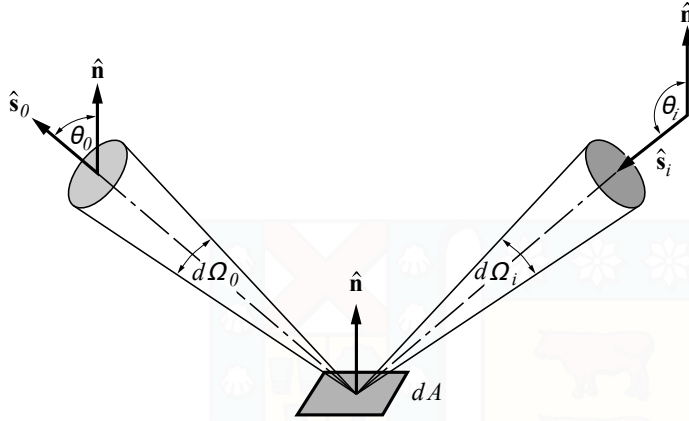


Figura 5.5: Flujo de calor radiativo incidiendo en una superficie arbitraria.

entrantes y dividiendo por el área superficial, se obtiene el total de flujo de calor entrante por unidad de longitud de onda

$$(q_\lambda)_{\text{in}} = \int_{\cos \theta_i < 0} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_i) \cos \theta_i d\Omega_i. \quad (5.29)$$

La pérdida de calor de la superficie a lo largo del lápiz de rayos en la dirección $\hat{\mathbf{s}}_o$, integrado sobre todas las direcciones salientes

$$(q_\lambda)_{\text{out}} = \int_{\cos \theta_o > 0} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_o) \cos \theta_o d\Omega_o. \quad (5.30)$$

Si la superficie es negra ($\epsilon_\lambda = 1$), entonces no hay energía reflejada desde la superficie y $I_\lambda = I_{b\lambda}$ dejando a $(q_\lambda)_{\text{out}} = E_{b\lambda}$. Si la superficie no es negra, la intensidad saliente consiste en las contribuciones tanto de la emisión como de las reflexiones. El flujo de calor saliente es positivo ya que está entrando al medio. El flujo neto de calor desde la superficie puede ser calculado al sumar ambas contribuciones

$$(q_\lambda)_{\text{net}} = (q_\lambda)_{\text{in}} + (q_\lambda)_{\text{out}} = \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}) \cos \theta d\Omega, \quad (5.31)$$

donde un solo vector dirección $\hat{\mathbf{s}}$ es considerado para describir el rango total de ángulos sólidos 4π . Como se puede ver desde la Figura 5.5, $\cos \theta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ya que el flujo de calor neto es evaluado como el flujo en dirección- $\hat{\mathbf{n}}$ positiva

$$(q_\lambda)_{\text{net}} = \mathbf{q}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega. \quad (5.32)$$

Por lo tanto, para obtener el *flujo de calor radiativo total* en la superficie, la Ecuación 5.32 es integrada sobre todo el espectro

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_0^\infty \mathbf{q}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{n}} d\lambda = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega d\lambda. \quad (5.33)$$

5.3.10. Intensidad de la radiación en el vacío

Como se vio en la sección 5.3.6, el concepto de intensidad tiene una ventaja sobre el poder de emisión, esto es, la intensidad emitida no varía con la dirección. Dentro de un medio, la definición de poder de emisión no es aplicable ya que no hay superficie al cual relacionarlo. La intensidad, definida como la energía radiativa transferida por unidad de tiempo, ángulo sólido, variable espectral y área normal al lápiz de rayos, es la variable más adecuada para describir la transferencia radiativa en dentro de un medio.

Considerar la intensidad radiativa penetrando en un ángulo normal a través de un área infinitesimal ficticia dA_1 en la posición s_1 y tiempo t_1 como se presenta en la XX. Basado en la definición de intensidad, se puede ver que la cantidad de energía pasando a través de dA_1 por una duración dt y rango espectral $d\eta$ que llegará un poco después a la superficie infinitesimal dA_2

$$I_\eta(s_1, t_1) dt d\Omega_{1 \rightarrow 2} d\eta dA_1 = I_\eta(s_1, t_1) dt \frac{dA_2}{(s_2 - s_1)^2} d\eta dA_1, \quad (5.34)$$

donde $d\Omega_{1 \rightarrow 2}$ es el ángulo sólido con el cual dA_2 es visto por un observador en dA_1 . Ya que a la radiación le toma un tiempo $t_2 = t_1 + (s_2 - s_1)/c$ para viajar desde s_1 a s_2 , se puede decir que esa energía entrando en dA_2 que viene de dA_1 es

$$I_\eta(s_2, t_2) dt d\Omega_{2 \rightarrow 1} d\eta dA_2 = I_\eta(s_2, t_2) dt \frac{dA_1}{(s_2 - s_1)^2} d\eta dA_2, \quad (5.35)$$

y ya que ambas energías deben ser iguales

$$I_\eta(s_2, t_1 + (s_2 - s_1)/c) = I_\eta(s_1, t_1). \quad (5.36)$$

Sin embargo, ya que la velocidad de la luz es tan grande en comparación que las escalas de tiempo utilizadas en los problemas de ingeniería, casi siempre se puede asumir que la energía llega “instantáneamente” a cualquier parte en el medio,

$$I_\eta(s_2) = I_\eta(s_1), \quad (5.37)$$

o bien,

$$I_\eta(\hat{s}) = \text{constante}. \quad (5.38)$$

Por lo tanto, dentro de un medio que no emite, absorbe ni es disperso (conocido como *medio no participativo*), la intensidad radiativa en cualquier dirección dada es constante a lo largo de la trayectoria. En cambio, en un *medio participativo* que absorbe, emite y/o es disperso, cualquier cambio en la intensidad a lo largo de cualquier trayectoria dada debe ser por uno o más de esos fenómenos.

5.3.11. Radiación característica de las partículas

La interacción entre fotones (o bien ondas electromagnéticas) con pequeñas partículas es un tanto diferente de cuando es con gases, líquidos o sólidos homogéneos.

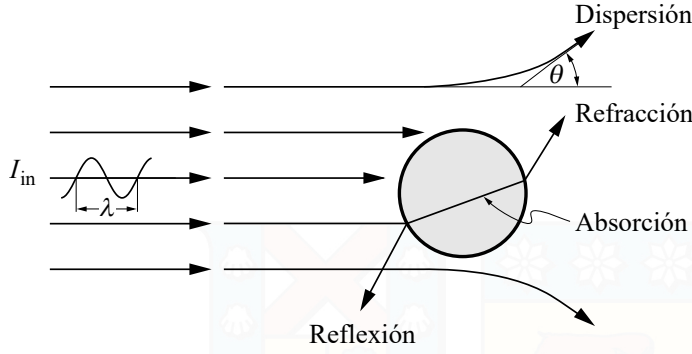


Figura 5.6: Interacción de ondas electromagnéticas con una partícula pequeña.

Mientras que para un medio homogéneo, la radiación que viaja a través de una nube de partículas puede ser transmitida, reflejada o absorbida. Además, la interacción con una partícula puede alterar la dirección en la que el fotón viaja (ver Figura 5.6). Esto puede ocurrir por uno de tres mecanismos: (i) La trayectoria del fotón es alterada sin colisionar nunca con otra partícula por *difracción*. (ii) Un fotón puede cambiar su dirección por reflexión de la partícula. (iii) El fotón puede penetrar dentro de la partícula, cambiando su dirección por *refracción*. Los tres fenómenos en conjunto son conocidos como *dispersión o scattering* de la radiación. La *absorción* toma lugar cuando la onda electromagnética penetra dentro de la partícula. Por tanto, en presencia de scattering, la ecuación para la transmisividad de una capa de material Ecuación 5.39

$$\tau_\eta = e^{-\kappa_\eta s}, \quad (5.39)$$

debe ser extendida a

$$\tau_\eta = e^{-(\kappa_\eta + \sigma_{s\eta})s} = e^{-\beta_\eta s}, \quad (5.40)$$

donde $\sigma_{s\eta}$ es conocida como *coeficiente de dispersión o scattering* y $\beta_\eta = \kappa_\eta + \sigma_{s\eta}$ es el *coeficiente de extinción*. Los rayos dispersados viajan sin atenuación, y la probabilidad de que un rayo desde una dirección sea dispersado (scattering) en otra cierta dirección por en un ángulo θ es descrita por la *scattering phase function o función de fase de dispersión* Φ_η . Además, se puede establecer el *single scattering albedo*, donde albedo es el porcentaje de radiación que cualquier superficie refleja respecto a la radiación que incide sobre ella, definido como

$$\omega_\eta \equiv \frac{\sigma_{s\eta}}{\kappa_\eta + \sigma_{s\eta}} = \frac{\sigma_{s\eta}}{\beta_\eta}, \quad (5.41)$$

por lo que cuando un medio no presenta dispersión en absoluto, tiene $\omega = 0$, mientras que un $\omega = 1$ indica que es puramente dispersión (nonabsorbing media o no absorbente).

5.3.12. Ecuación de transferencia radiativa (RTE)

Para determinar el flujo radiativo en una superficie o cualquier punto dentro del medio, se requiere conocer la intensidad radiativa en ese punto, para todas las

direcciones y todas las longitudes de ondas o períodos. El campo de intensidad dentro de un medio participativo es gobernado por la *ecuación de energía radiativa*, que es el balance de energía radiativa a lo largo de un lápiz de rayos delgado. Esta ecuación establece que a lo largo de una línea de visión en la dirección $\hat{\mathbf{s}}$, la intensidad radiativa espectral cambia de acuerdo con

$$\frac{dI_\eta}{ds} = \kappa_\eta I_{b\eta} - \kappa_\eta I_\eta - \sigma_{s\eta} I_\eta + \frac{\sigma_{s\eta}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\eta(\hat{\mathbf{s}}_i) \Phi(\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{s}}) d\Omega_i. \quad (5.42)$$

Los términos del lado derecho indican como a lo largo de la trayectoria s , la intensidad es aumentada por emisión ($\kappa_\eta I_{b\eta}$), disminuida por absorción ($\kappa_\eta I_\eta$) y dispersión o *scattering* lejos de $\hat{\mathbf{s}}$ ($\sigma_{s\eta} I_\eta$). La radiación dispersa es simplemente cancelada en otras direcciones, entonces el último término en la Ecuación 5.42 es el incremento de la intensidad debido a la radiación desde otras direcciones, pues la función de fase de dispersión $\Phi(\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{s}})$ da la probabilidad de que un rayo proveniente desde $\hat{\mathbf{s}}_i$ es dispersado hacia $\hat{\mathbf{s}}$. Se debe notar que si $\kappa_\eta = \sigma_{s\eta} = 0$ (medio no participativo), la Ecuación 5.42 se reduce a la Ecuación 5.38

$$\frac{dI_\eta}{ds} = 0 \quad \text{ó} \quad I_\eta(\hat{\mathbf{s}}) = \text{constante}. \quad (5.43)$$

Para una mejor diferenciación entre atenuación y aumento de radiación, se introduce la *función fuente* para la intensidad radiativa

$$S_\eta(s, \hat{\mathbf{s}}) = (1 - \omega_\eta) I_{b\eta} + \frac{\omega_\eta}{4\pi} \int_{4\pi} I_\eta(\hat{\mathbf{s}}_i) \Phi(\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{s}}) d\Omega_i, \quad (5.44)$$

donde ω es el single scattering albedo definido en la Ecuación 5.41. Por lo que la ecuación de transferencia radiativa se puede simplificar

$$\frac{dI_\eta}{ds} = \beta_\eta [S_\eta(s, \hat{\mathbf{s}}) - I_\eta]. \quad (5.45)$$

Para el caso especial de un coeficiente de extinción espacial invariable $\beta_\eta = \text{constante}$

$$I_\eta(s) = I_\eta(0) e^{-\beta_\eta s} + \int_0^s S_\eta(s', \hat{\mathbf{s}}) e^{-\beta_\eta(s-s')} \beta_\eta ds'. \quad (5.46)$$

La intensidad local en s consiste en dos partes (ver Figura 5.7). (i) Intensidad entrando al medio en $s = 0$ (digamos un muro delimitador) atenuado por absorción y dispersión-saliente de 0 a s , y (iii) incremento de intensidad a lo largo de la trayectoria en s' (por emisión y/o dispersión-entrante) atenuado a lo largo de la distancia restante entre s' y s . Es importante recordar que si el medio dispersa ($\omega > 0$), la función fuente en la Ecuación 5.46 contiene la intensidad radiativa en cada punto a lo largo de la trayectoria, para todas las posibles direcciones (no solo $\hat{\mathbf{s}}$): la ecuación de transferencia radiativa Ecuación 5.42, es una ecuación integro-diferencial (intensidad aparece tanto como derivada como también dentro de la integral en el lado derecho) en cinco dimensiones (tres espaciales y dos coordenadas direccionales). Esto hace la RTE extremadamente difícil de resolver, por lo que los métodos existentes para resolverla son de suma importancia pero a su vez, también muy complejos de comprender y aplicar.

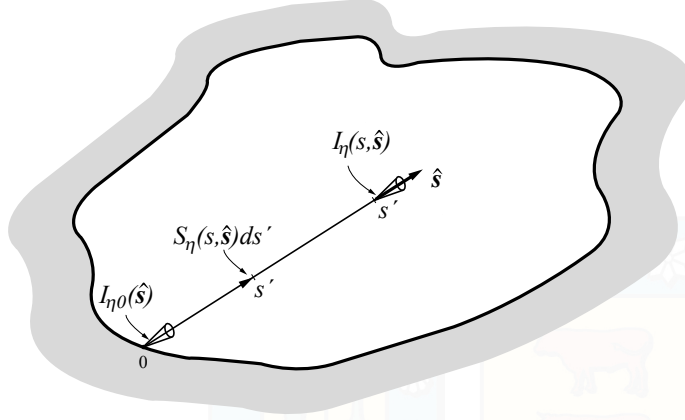


Figura 5.7: Variación de la intensidad al interior de un medio radiativamente participativo.

5.4. Biomasa

Corresponde a la muestra de estrato vegetal que se utilizará para las mediciones, considerando la amplitud de especies vegetales que existen en Chile, debe tenerse en cuenta que no se puede realizar el experimento con todas, por lo cual hay que buscar una especie que sea representativa de la flora chilena, en este caso se determinó que es el Pino Radiata, dado que está presente a lo largo de virtualmente todas las regiones de Chile donde aplica el estudio, es decir, que exista una “Wildland-Urban Interface (WUI)”.

Para asegurar repetibilidad en los experimentos, poder comparar entre mediciones y asegurar que el resultado corresponde con lo esperado, es importante identificar correctamente la especie vegetal, asegurar que se esté trabajando con un α constante, antes de comenzar las series de experimentos, verificar la densidad asociada al caso que se experimenta, asegurar que se hayan respetado los protocolos de aplicación y secado.

5.4.1. Densidad

Para poder establecer la masa a utilizar durante los experimentos, es requisito fundamental conocer la densidad con la cual se está trabajando, idealmente se recomienda el uso de un Densímetro, sin embargo, entendiéndose el costo tanto monetario como de oportunidad para el tiempo que demora en llegar, se pueden utilizar procedimientos manuales, que aunque son ligeramente menos fiables, son rápidos de realizar y con suficientes muestras, será consistente y cercano al valor real, apelando a la “Ley de los Grandes Números”.

El procedimiento de base consiste en tomar una pequeña muestra, masarla, colocarla en una probeta y agregar alcohol etílico hasta cubrirla, este último paso debe realizarse con una pipeta y propipeta, para saber cuanto se agregó; luego se observa el nivel al que llegó (volumen total), se determina el volumen desplazado y con ello se establece la densidad de la observación.

Para el caso de las acículas de pino radiata, masas menores a 0.1 gramos, resultaron provechosas y como mínimo se usaban tres acículas por muestra, dado que la precisión en la masa con menos de ello, se ve altamente afectada. Debe evitarse el pulverizar las acículas, dado que esto cambia su estado de agregación y con ello podría obtenerse un valor errado de densidad.

5.5. Teoría de Ignición de Sólidos

5.5.1. Introducción

En este capítulo se explicarán los conceptos básicos y fundamentales de la teoría que rodea al fenómeno de la ignición. Los conceptos generales y su clasificaciones pueden ser variados, han cambiado con el paso de los años, por lo que es necesario realizar una breve recapitulación de los conceptos fundamentales que ayudan a entender los mecanismos involucrados en todo este proceso. Como se verá en las secciones siguientes, el proceso de ignición involucra muchos conceptos que van más allá de la simple idea de un material incendiándose, pues este proceso involucra múltiples etapas y cambios tanto físicos como químicos, los cuales pueden dirigir el estudio de la ignición en diversos sentidos.

Finalmente, luego de aclarar algunos conceptos, se profundizará en el desarrollo de los modelos clásicos de ignición diferenciando el fenómeno por las condiciones de borde que caracterizan al problema. Concretamente, se presentarán los modelos clásicos para la ignición de sólidos bajo aproximaciones *thermally thin* y *thermally thick*, las cuales a pesar de ser teorías y acercamientos distintos, poseen varios puntos en común que pueden ser explotados en modelos generales más complejos como se verá en los capítulos posteriores.

5.5.2. Descripción

La ignición ocurre cuando un medio (combustible) es calentado hasta alcanzar temperaturas que provoquen una rápida reacción exotérmica de oxidación denominada *combustión*, en donde la energía necesaria para provocar este aumento de temperatura generalmente es obtenido desde una fuente externa. Esta energía requerida depende de diversos factores, como por ejemplo, las propiedades termo-físicas del material, características geométricas, condiciones que limitan el fenómeno y especialmente el tiempo de exposición a la fuente de calor [9].

En cuanto a las sustancias afectas a los procesos de ignición, frecuentemente se asocia a combustibles líquidos pero no está limitada a estos, pues los combustibles sólidos son parte fundamental de la teoría que ayuda a comprender la ignición. Así, cuando un material sólido en condiciones normales de presión y temperatura es expuesto a una fuente externa de energía, la temperatura de la superficie expuesta al flujo de calor comienza a aumentar. Este momento es definido como el inicio del proceso de ignición en $t = 0$, luego, se desencadena una serie de fenómenos físico-químicos en la medida que el flujo en la superficie expuesta comienza a calentar el

medio [9].

En este contexto, los potenciales combustibles que contribuyen a incendios forestales son en su mayoría combustibles sólidos, lo cuales tienen múltiples factores de riesgo que deben ser considerados, entre los cuales se puede mencionar el potencial de *autoignición*, propensión al *smouldering*, propensión a la ignición, rapidez de propagación del fuego sobre la superficie del terreno y el calor liberado una vez que la ignición ha ocurrido. Estos factores son particularmente complejos de describir pues dependen de múltiples parámetros, incluyendo la geometría, orientación y disposición, propiedades químicas del material junto a las condiciones ambientales que contextualizan el escenario. En estas últimas se tiene flujo externo de calor y la concentración de oxígeno sobre la superficie del sólido como los factores más relevantes del estudio de ignición [10].

Gases de pirólisis

Generación

La ignición con presencia de llama (*flaming ignition*) y la combustión en la superficie de un sólido involucran múltiples procesos físico-químicos. Uno de los requisitos esenciales en los materiales sólidos es que primero deben gasificarse antes de que pueda ocurrir la ignición y la presencia de fuego como tal, para lo cual el sólido es calentado utilizando una fuente externa de calor, y este calor es percibido por la superficie expuesta como $\dot{q}''_{inc}$ [10]. Lo cual se presenta en la Figura 5.8.

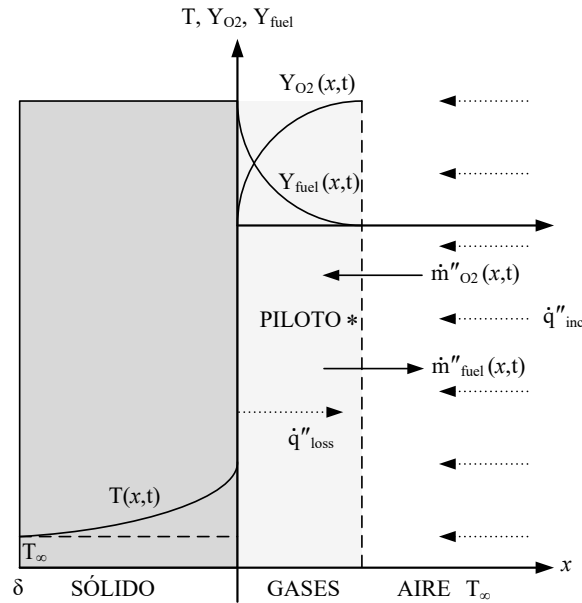


Figura 5.8: Factores involucrados en la ignición de un sólido.

La gasificación de materiales sólidos generalmente implica la descomposición de moléculas complejas en moléculas más simples en un proceso denominado *pirólisis*, el cual es inducido térmicamente. Este punto es de gran relevancia, pues a diferencia de los combustibles líquidos que experimentan cambios físicos (evaporación) pero no

necesariamente químicos, los sólidos generalmente experimentan ambos durante el proceso de pirólisis [9].

Cuando la tasa de gasificación por calentamiento aumenta, comienza a producirse una concentración de gases inflamables cerca de la superficie del sólido. Luego, la rapidez del proceso de pirólisis en la superficie del sólido depende directamente de la temperatura de ésta y puede ser representada en función de una ecuación *exponencial de Arrhenius* como en la Ecuación 5.47 [9]

$$\dot{m}_{fuel}''' = A_s Y_{O_2}^m Y_{fuel}^n \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right). \quad (5.47)$$

En donde Y_{O_2} , Y_{fuel} corresponden a las fracciones en masa de oxígeno y del combustible participantes en la degradación respectivamente. A_s es el factor pre-exponencial, y E_s la energía de activación, siendo ambas propiedades del sólido. Los parámetros m , n y R son constantes de la reacción y T la temperatura. Es importante destacar que la pirólisis es un proceso endotérmico por múltiples reacciones químicas (algunas veces cientos), las cuales pueden ocurrir de manera secuencial, o bien, simultáneamente (en competición) [9].

De lo anterior, cuando la temperatura superficial incrementa, la tasa a la que ocurre la reacción también lo hace y el sólido comienza a experimentar cambios. Así, para una distribución de temperatura dentro del material, la tasa de descomposición es una función dependiente de la dirección x , en donde una gran generación de gases de pirólisis ocurre cerca de la superficie del sólido y una menor producción al interior de él, por lo que el flujo másico total de gases de pirólisis esta dado por

$$\dot{m}_{fuel}'' = \int_{x=0}^{x=\delta_T} A Y_{O_2}^m Y_{fuel}^n \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right) dx, \quad (5.48)$$

donde δ_T es la profundidad hasta la cual es apreciable el efecto del calentamiento. De manera general, se puede considerar que el proceso de pirólisis inicia a una temperatura $T_{py,0}$ hasta la cual el sólido es inerte químicamente (ver Figura 5.9). Es importante mencionar que $T_{py,0}$ no es un parámetro físico como tal, más bien corresponde a una manera simple de indicar el inicio de una alta actividad química [9].

Difusión

Los gases combustibles deben ser liberados desde la superficie del sólido lo suficientemente rápido como para formar una mezcla con el aire del ambiente y que esta sea susceptible a encender, mecanismo que es denominado *difusión*. Luego, ya que los vapores son retirados constantemente desde la superficie caliente por las corrientes convectivas (fenómeno propio calentamiento, o bien, de alguna fuerza externa), deben ser reemplazados constantemente por nuevos vapores para asegurar que la mezcla con aire sea inflamable [9, 10]. En la Figura 5.8 se representa como la fracción en masa de oxígeno Y_{O_2} es menor cerca de la superficie del sólido y mayor al alejarse de ella. Por otro lado, la fracción en masa de los gases reactantes de pirólisis Y_{fuel} posee una mayor concentración cerca de la superficie del sólido y disminuye al alejarse de ella. Naturalmente los gases de pirólisis difundirán hacia las zonas donde

sea menor su concentración, mientras que el oxígeno lo hará hacia donde sea menor, lo cual, eventualmente da lugar a la formación de una mezcla inflamable.

La definición de mezcla inflamable considera el nivel de concentración de combustible de forma que será inflamable sólo si se encuentra entre el *límite inferior de inflamabilidad (LFL)* y el *límite superior de inflamabilidad (UFL)*, así, bajo el LFL la concentración de combustible es muy baja y sobre el UFL es demasiado alta como para provocar la ignición.

5.5.3. Ignición piloteada

En la mayoría de los escenarios encontrados en la naturaleza, en el lugar que ocurre la ignición es común encontrar alguna región de mayor temperatura que permita iniciar la reacción de combustión. Así, en presencia de un piloto, como puede ser una llama, chispa o arco eléctrico [9], es posible asumir que la ignición ocurre en el momento en que la mezcla inflamable alcanza la posición espacial en la que se encuentra el piloto en el LFL.

De lo anterior, se puede decir que una vez que la ignición ocurre, la llama generada se propaga a través de las regiones donde esté presente la mezcla inflamable consumiendo los reactantes, en donde la situación más probable es que esto ocurra cerca de la superficie del sólido. Por otro lado, la tasa de pirólisis al momento en que aparece la llama determinará si ésta podrá continuar existiendo o si la reacción de combustión cesará después que la mezcla inflamable sea consumida, por lo que el calor liberado por la llama incrementará la tasa de pirólisis. Si esto no es suficiente, la llama se extinguirá y continuará el proceso de pirólisis que llevará una vez más la formación de una mezcla inflamable y una eventual ignición. Este fenómeno se manifiesta como una serie de destellos (*flashes* en inglés) que preceden a la ocurrencia de una llama sostenida. La aparición del primer destello se denomina *flash point* y se da a la temperatura T_{flash} y la aparición de la llama sostenida se denomina *fire point* a la temperatura $T_{fp} = T_{ig,pi}$ como se aprecia en la Figura 5.9 [9].

5.5.4. Ignición Espontánea

La ignición espontánea muestra características distintas a la piloteada descrita en la sección 5.5.3. En este caso, una vez que se ha formado la mezcla inflamable se que la temperatura aumente hasta que la reacción de combustión ocurra alcanzando $T_{ig,sp}$, por esto, es común asociar un tiempo de pirólisis y uno de *inducción*. El primero se refiere al tiempo necesario desde el inicio del calentamiento del sólido hasta la producción de una mezcla inflamable, mientras que el último corresponde al tiempo requerido por la mezcla inflamable para alcanzar la temperatura de ignición $T_{ig,sp}$. De esta manera, en un proceso de ignición espontánea no existe un piloto que actúe como punto de inicio para la reacción, por lo que la mezcla inflamable debe absorber suficiente energía para alcanzar la ignición [9].

Dicha cantidad de energía requerida puede ser asociada al número de *Damköhler*, que corresponde al ratio entre el tiempo de residencia y el tiempo requerido por la reacción química, el cual puede ser obtenido como el inverso de la tasa de reacción.

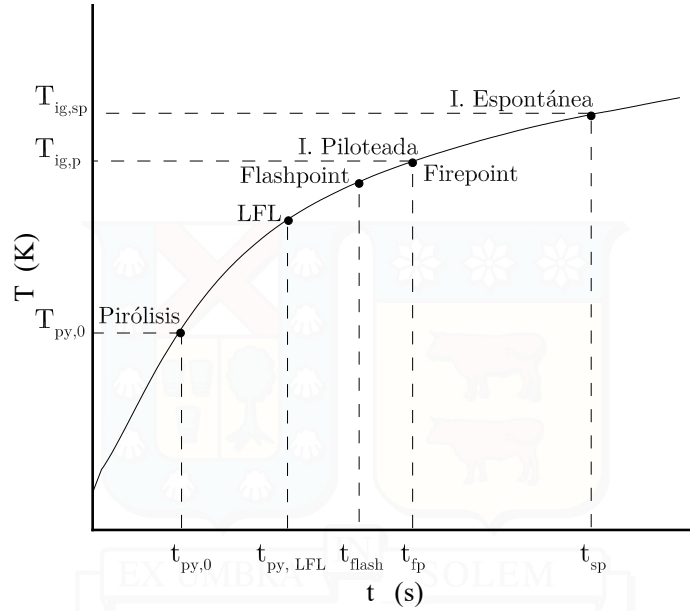


Figura 5.9: Evolución de la temperatura en la superficie de un sólido expuesto a un flujo de calor externo.

Mientras que esta, puede expresarse por medio de una *Ecuación de Arrhenius* similar a la de pirólisis. Con lo anterior, el tiempo de reacción química se ve afectado por la temperatura de manera que mientras mayor sea esta, la tasa de combustión será mayor y el tiempo de reacción química menor. Por otro lado, el tiempo de residencia tiene directa relación con la rapidez de los gases, por lo que a mayor velocidad el tiempo de residencia es menor. De esta manera, si el tiempo requerido por la reacción química es menor al tiempo de residencia de la reacción, esta tiene suficiente tiempo para proceder y la llama puede existir, por lo que existe un número de Damköhler crítico que es necesario alcanzar antes de que la ignición pueda ocurrir [9].

5.5.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin

En esta sección se presentará la teoría básica relativa los tiempos de ignición para problemas simples, cuyo propósito es ilustrar la naturaleza del problema junto con las aproximaciones y simplificaciones clásicas utilizadas para este tipo de problemas.

Criterio para thermally thin

Primero se considera un objeto delgado, es decir, que puede ser aproximado sin considerar gradientes internos de temperatura. Esto es lo que se conoce como *thermally thin*, lo cual requiere que el espesor físico d sea menor que el espesor de penetración térmica δ_T . Para el gradiente de temperatura sea pequeño sobre el dominio d , se requiere que

$$d \ll \delta_T \approx \sqrt{\alpha t} \approx \frac{k(T_s - T_o)}{\dot{q}''}, \quad (5.49)$$

o en términos del *número de Biot*

$$Bi \equiv \frac{dh_c}{k} \ll \frac{h_c(T_s - T_o)}{\dot{q}''}. \quad (5.50)$$

Si $\dot{q}''$ se basa en el calentamiento únicamente por convección $\dot{q}'' = h_c(T_\infty - T_s)$, la Ecuación 5.50 se convierte en

$$Bi \ll \frac{T_s - T_o}{T_\infty - T_s}, \quad (5.51)$$

lo que se traduce en que para un caso thermally thin, en donde d es lo suficientemente pequeño, la diferencia de temperatura interna debe ser mucho menor que la diferencia en la interfase.

Teoría thermally thin

Este acercamiento es directo y se puede aplicar a un material de espesor d aislado por uno de sus lados, cuyas condiciones de borde están dadas por

$$\dot{q}'' = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \bigg|_{x_s=0} \quad (5.52)$$

$$0 = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \bigg|_{x=d} \quad (5.53)$$

Sin embargo, con la aproximación themally thin, la temperatura no posee un gradiente al interior $T(x, t) \approx T(t)$, por lo tanto, considerando un volumen de control alrededor del material, se tiene el siguiente balance de energía

$$\rho c_p d \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}'' = \dot{q}_e'' - h_c(T - T_\infty) + \epsilon(T^4 - T_\infty^4). \quad (5.54)$$

El flujo neto de calor incluye las pérdidas por radiación y las ganancia provenientes desde el ambiente a temperatura T_∞ , además, debido al exponente a la cuarta de la temperatura en el término radiativo, no es posible obtener una solución analítica, por lo que se aproxima el término de la radiación mediante una expansión en series de Taylor en alrededor de T_∞ , utilizando un coeficiente efectivo total h_r

$$h_r \equiv \frac{\epsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)}{(T - T_\infty)} \approx 4\epsilon \sigma T_\infty^3 \quad (5.55)$$

para $T - T_\infty$ pequeño. Por tanto, con $h_t \equiv h_c + h_r$

$$\rho c_p d \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}_e'' - h_t(T - T_\infty). \quad (5.56)$$

Ahora, se define

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\dot{q}_e''/h_t} \quad \tau \equiv \frac{h_t t}{\rho c_p d}$$

Entonces

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 1 - \theta, \quad (5.57)$$

sujeto a la condición inicial $\theta(0) = 0$, por lo que su solución esta dada por

$$\theta = 1 - \exp(-\tau) \quad (5.58)$$

Luego, volviendo a los parámetros y variables originales

$$T - T_{\infty} = \frac{\dot{q}_e''}{h_t} \left[1 - \exp\left(-\frac{h_t t}{\rho c_p d}\right) \right] \quad (5.59)$$

para un sólido aislado de espesor d que es calentado por un flujo incidente de calor radiativo $\dot{q}_e''$. De esta manera, desde la Ecuación 5.59, cuando $t \rightarrow \infty$ se alcanza el estado estacionario, mientras que para $t \rightarrow 0$, el término exponencial $e^{-\tau} \approx 1 - \tau$. Lo anterior permite obtener expresiones sencillas para el tiempo de ignición t_{ig} a la temperatura $T = T_{ig}$. Entonces, para tiempos de ignición cortos $1 - e^{-\tau} \approx \tau$

$$t_{ig} \approx \frac{\rho c_p d (T_{ig} - T_{\infty})}{\dot{q}_e''}. \quad (5.60)$$

Mientras que para tiempo largos de exposición, eventualmente en $t \rightarrow \infty$ la temperatura alcanzará T_{ig} , en cuyo caso se tiene que para cualquier flujo de calor menor al flujo crítico de ignición $\dot{q}_{cri}''$ la ignición no es posible por el modelo de conducción. De esta forma, se puede obtener una expresión para el flujo crítico de ignición

$$\dot{q}_{cri}'' = h_t (T_{ig} - T_{\infty}), \quad (5.61)$$

la cual es obtenida para la forma aproximada mediante la linealización del término radiativo. Sin embargo, se puede obtener una expresión más precisa sin linealizar el término radiativo

$$\dot{q}_{cri}'' = h_c (T_{ig} - T_{\infty}) + \epsilon \sigma (T_{ig}^4 - T_{\infty}^4). \quad (5.62)$$

5.5.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick

En esta sección se presenta una metodología que busca al igual que en la sección 5.5.5, explicar la teoría básica que sirve de base para extrapolar a otros análisis. Esta vez se estudia para la ignición de un sólido como un medio semi-infinito, el cual es un supuesto característico ampliamente usado para este tipo de problemas. Para este caso, se requiere que la ignición ocurra antes de que el espesor térmico de penetración δ_T alcance $x = d$. Entonces, sea

$$d \geq \delta_T \approx \sqrt{D t_{ig}} \quad (5.63)$$

con D como difusividad térmica.

Teoría thermally thick

Para el sólido semi-infinito, considerar un problema de conducción para una temperatura constante en la superficie. Las ecuaciones parciales diferenciales provenientes del balance de energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.64)$$

Las condiciones de borde que caracterizan el problema, junto a la condición inicial se pueden definir como

$$\begin{aligned} x=0, & \quad T = T_s \text{ constante} \\ x \rightarrow \infty, & \quad T = T_\infty \\ t=0, & \quad T = T_\infty \end{aligned}$$

Luego, con el propósito de resolver la ecuación diferencial anterior, se definen las siguientes variables normalizadas

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad \Rightarrow \quad \partial T = (T_s - T_\infty) \partial \theta \quad (5.65)$$

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \quad \Rightarrow \quad \partial t = \frac{-2t}{\eta} \partial \eta \quad (5.66)$$

$$\quad \Rightarrow \quad \partial x = 2\sqrt{Dt} \partial \eta \quad (5.67)$$

Ahora, reescribiendo el problema original en las nuevas variables normalizadas

$$(T_s - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) = D (T_s - T_\infty) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}} \right)^2. \quad (5.68)$$

Entonces, la Ecuación 5.68 se convierte en

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \quad (5.69)$$

que corresponde a una *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden*, sujeta a las condiciones

$$\eta=0, \quad \theta=1 \quad (5.70)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \theta=0 \quad (5.71)$$

Se resuelve la Ecuación 5.69 definiendo el cambio de variable $u = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -2\eta u, \quad (5.72)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden, luego, integrando el problema de variables separables

$$\ln u = -2\eta + c_1, \quad (5.73)$$

por lo que se puede aplicar la función exponencial a ambos lados

$$u = e^{(-\eta^2 + c_1)}. \quad (5.74)$$

Reemplazando el cambio de variables se obtiene

$$\partial\theta = e^{(-\eta^2 + c_1)} \partial\eta \quad (5.75)$$

integrando nuevamente y aplicando la condición de borde 5.70

$$\theta - \theta(0) = e^{c_1} \int_0^\eta e^{(-\eta^2)} \partial\eta, \quad (5.76)$$

y luego

$$\theta = 1 + e^{c_1} \int_0^\eta e^{(-\eta^2)} \partial\eta, \quad (5.77)$$

luego, con la condición de 5.71 se obtiene

$$e^{c_1} = \frac{-1}{\int_0^\infty e^{(-\eta^2)} \partial\eta}. \quad (5.78)$$

La Ecuación 5.78 se puede definir en términos de la *función error de Gauss*

$$\text{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{(-\eta^2)} \partial\eta, \quad (5.79)$$

donde $\text{erf}(\infty) = 1$ y $\text{erf}(0) = 0$, así

$$e^{c_1} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad (5.80)$$

con lo que la solución esta dada como

$$\theta = 1 - \text{erf}(\eta). \quad (5.81)$$

Para una forma más general de las condiciones de borde como en la Ecuación 5.59, se incluyen las pérdidas de calor en la superficie

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_s=0} = \dot{q}'' = \dot{q}_e'' - h_t (T - T_\infty), \quad (5.82)$$

con el término radiativo linealizado, sujeto a la condición inicial $t = 0 \rightarrow T = T_\infty$. Por lo tanto, la solución para la temperatura en la superficie T_s

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_e''}{h_t} [1 - \exp(\gamma^2) \text{erfc}(\gamma)], \quad (5.83)$$

en donde $\gamma = h_t \sqrt{t/k\rho c_p}$ y $\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$ es la *función error complementaria*.

Ahora, análogo como se realizó para la teoría thermally thin, se busca ver el comportamiento para tiempos cortos y tiempos largos de exposición. Realizando una expansión en series

$$\gamma \rightarrow \text{largo} \quad \Rightarrow \quad \text{erfc}(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\gamma^2)}{\gamma}, \quad (5.84)$$

entonces la Ecuación 5.83

$$\frac{T_s - T_\infty}{\dot{q}_e''/h_t} \approx 1 - \frac{\exp(\gamma^2) - \exp(-\gamma^2)}{\sqrt{\pi}\gamma} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma}. \quad (5.85)$$

Entonces, para tiempos largos

$$t_{ig} \approx \frac{k\rho c_p}{\pi} \frac{(\dot{q}_e''/h_t)^2}{[\dot{q}_e'' - h_t(T_{ig} - T_\infty)]^2}, \quad (5.86)$$

y como en el caso thermally thin, cuando $t_{ig} \rightarrow \infty$ el flujo critico de ignición (Ecuación 5.61)

$$\dot{q}_{cri}'' = h_t(T_{ig} - T_\infty).$$

Mientras que para los tiempos cortos,

$$\gamma \rightarrow \text{pequeño} \quad \Rightarrow \quad \text{erf}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma \quad (5.87)$$

$$\exp(\gamma^2) \approx 1 + \gamma^2 \quad (5.88)$$

entonces,

$$\frac{T_s - T_\infty}{\dot{q}_e''/h_t} \approx 1 - (1 + \gamma^2) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}\gamma}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}\gamma} \quad (5.89)$$

Por lo tanto, para tiempos cortos

$$t_{ig} \approx \frac{\pi}{4} k\rho c_p \left(\frac{T_{ig} - T_\infty}{\dot{q}_e''} \right)^2. \quad (5.90)$$

6 | Modelamiento

Índice

6.1. Formulación	37
6.2. Caso Cilíndrico	37
6.2.1. Divergencia del Flujo Radiativo	41
6.2.2. Condiciones de Ignición	47
6.2.3. Resumen de supuestos considerados en el modelo	49
6.2.4. Modelo Numérico	50
6.2.5. Modelo Analítico	50
6.3. Caso Esférico	56

6.1. Formulación

Es importante contextualizar correctamente el problema para realizar la formulación matemática correspondiente, para poder del mismo modo comenzar la resolución de este y aplicar los supuestos que correspondan; en principio la idea es conocer el comportamiento de la masa vegetal cuando la temperatura aumenta, llegando al punto de ignición.

6.2. Caso Cilíndrico

En este caso debe considerarse que el heater es de forma cilíndrica y se encuentra dentro de un basket de forma cilíndrica.

El modelo de energía general se puede describir como:

$$\begin{aligned}
 \alpha_s \rho_s c_{p,s} = & -k_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\
 & - \partial_g \rho_g \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (e_g r u_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (e_g \nu_g) + \frac{\partial}{\partial z} (e_g \omega_g) \right) \\
 & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{r,t}'')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{\phi,t}'')}{\partial \phi} + \frac{\partial (r \dot{q}_{z,t}'')}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Matemáticamente se aprecia que la temperatura es un fenómeno espacial y temporal, por lo cual no es posible obtener un valor directamente, dado que se requiere la posición y tiempo en el cual se quiere encontrar, lo que se conoce como campo escalar. En este particular se trabaja con dos fases, la sólida y la gaseosa, teniendo cada una de ellas una temperatura hasta alcanzar el equilibrio. El avance hacia dicho equilibrio es continuo, lo que permite establecer que efectivamente es un campo escalar.

Para poder resolver la problemática, se asume que efectivamente se encuentran en equilibrio térmico, reduciendo la resolución de dos temperaturas T_s y T_g a una sola temperatura T .

Dicho esto, falta definir las coordenadas sobre las cuales se va a trabajar en algún tiempo determinado, de forma ingenieril este proceso no realiza un aporte especialmente fuerte, por lo cual se aprovecha la teoría clásica para la transferencia de calor en un medio participante, donde la divergencia del flujo radiativo es cero, dado que toda la radiación la absorbe la superficie; lo que lo convierte en un problema de conducción pura.

Lamentablemente estos supuestos no son del todo correcto y aplicables para esta problemática, ya que el espesor de penetración de la radiación no es del todo despreciable, en especial en el proceso de calentamiento, de alta importancia en los medios porosos; esto afecta el caso en estudio, dado que las acículas de pino se encuentran distribuidas de forma aleatoria, teniendo muy pocos puntos de contacto al interior del volumen de control, entonces al existir mayor porosidad, adquiere más importancia la TdC donde no hay dependencia del contacto físico, como son la convección y la radiación; cabe resaltar que tradicionalmente la radiación se desprecia en la mayoría de las configuraciones dado la dificultad física y matemática.

Para poder solventar esta dificultad se establece una temperatura promedio $\bar{T}$, que viene a ser la temperatura para todo el estrato, al considerarlo como un solo elemento, debe tenerse presente que esta temperatura no será exactamente la de la superficie (expuesta al flujo) o al final del estrato (expuesto a las condiciones propias del ambiente que rodea el medio), siendo entonces esta temperatura $\bar{T}$ representativa del rango de temperatura.

Dado que el volumen de control es cilíndrico, se debe considerar una $\bar{T}$ en coordenadas cilíndricas, este volumen será válido desde donde incide el flujo de calor, hasta el punto interior donde la penetración tiene un efecto, en este caso δ en la dirección del calentamiento, el cual no necesariamente será el borde del VC, esto último ocurre dado que en algunas condiciones y comportamiento del material o del medio no permiten que la radiación penetre a todo el material, dadas sus propiedades térmicas o configuración, etc.

Como se mencionó anteriormente el medio es continuo y equivalente, del mismo modo que la fase sólida y gaseosa están en equilibrio; por ello la temperatura puede considerarse homogénea al interior del estrato por el gradiente de temperatura, mientras que la radiación penetra y calienta el medio.

Esto último resulta fundamental, dado que el equilibrio de fases, es válido dado que el gradiente es pequeño al interior del medio, validando el supuesto de la temperatura promedio, del medio *thermally thin*, lo que ocurre dado que el número de

Biot (Bi) es mucho menor que 1.

Debe tenerse en consideración que por definición se considera un medio *thermally thin* si $Bi \ll 1$, lo que se calcula mediante:

$$Bi = \frac{h_{conv}L}{\lambda} \quad (6.2)$$

Lo que quiere decir que si un medio está expuesto al mismo flujo (h_{conv}) y puede conducir más calor a través de el (λ), este será *thermally thin*, es decir, es fácil que la radiación entre al medio, dado que el camino óptico es pequeño ($\ll 1$), con un comportamiento de material “cuasi-transparente”. Contrario a lo que ocurre con un medio *optically thick*, es decir, un medio demasiado “grueso” para que la radiación penetre más allá de la superficie, esto provoca que la radiación se absorba casi por completo en la capa superficial lo que genera un gradiente muy grande al interior del medio (pasando de una temperatura muy alta en la superficie a temperatura ambiente, con pocos milímetros de separación), es decir, que la radiación “no penetre” el medio, lo que se conoce como *thermally thick*, por lo que la temperatura promedio perdería validez, teniendo que resolver el problema solo para la superficie.

Para el VC con el que se trabaja, si se establece que la temperatura va entre los radios r_1 y r_2 , una altura l_z definida entre l_1 y l_2 , y con una circunferencia entre los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , la $\bar{T}$ se describe como:

$$\bar{T} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} T(r, \phi, z, t) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} \quad (6.3)$$

Esto permite definir un operador que transforme los valores puntuales obtenidos a valores promediados con lo cual se simplifica el trabajo, particularmente este operador se define como:

$$\left/ * \frac{1}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz \right. \quad (6.4)$$

Aplicándolo en la eq (6.1) se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} (\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T}{\partial t}) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} = & - \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} k_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} \\ & - \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} \partial_g \rho_g \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (e_g r u_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (e_g \nu_g) \right) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} \\ & - \frac{\frac{\partial}{\partial z} (e_g \omega_g) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} \\ & - \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{r,t}'')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{\phi,t}'')}{\partial \phi} + \frac{\partial (r \dot{q}_{z,t}'')}{\partial z} \right) r dr d\phi dz}{\int_{l_1}^{l_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi dz} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para el caso en estudio, se puede establecer $l_1 = 0$ y $l_2 = l_z$, así como $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = 2\pi$ dado que se trabaja con una circunferencia completa, al tratarse de un cilindro, y los radios pueden definirse como r_1 y $r_2 = r_1 + \delta$.

Si consideramos además la condición de simetría radial se nota que las variaciones en $\partial\phi$ son cero, con lo cual podemos simplificar algunos términos quedando de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_s \rho_s c_{p,k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & - \frac{2\pi \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} k_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) r dr dz}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \\ & - \frac{2\pi \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha_g \rho_g \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (e_g r u_g) + \frac{\partial}{\partial z} (e_g w_g) \right) r dr dz}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \\ & - \frac{2\pi \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r_2}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{r,t}'')}{\partial r} + \frac{\partial (\dot{q}_{z,t}'')}{\partial z} \right) r dr dz}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Esto puede resolverse y reagruparse para cada una de las direcciones correspondientes:

$$\begin{aligned} \alpha_s \rho_s c_{p,k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & - \frac{2\pi l_z}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \alpha_g \rho_g \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (e_g r u_g) \right) \right) r dr \\ & - \frac{\pi (r_2^2 - r_1^2)}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \int_{l_1}^{l_2} \left(k_m \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial}{\partial z} (e_g w_g) + \frac{\partial (\dot{q}_{z,t}'')}{\partial z} \right) dz \\ & - \frac{2\pi l_z}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{q}_{r,t}'')}{\partial r} r dr \end{aligned} \quad (6.7)$$

Luego de ello, considerando que las variaciones en z no son significativas para el modelo de transferencia de calor, lo cual se ha comprobado experimentalmente para el caso de radiación constante que en efecto no son considerables. A partir de lo anterior podemos reescribir la expresión como:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = - \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) r dr - \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_{r,t}'') r dr \quad (6.8)$$

Luego usando las técnicas de integración de intervalos cerrados, y considerando que el radio interior (in) sea $r_1 = r_i$ y que $r_2 = r_i + \delta = r_o$ como el radio exterior (out) que es hasta donde puede penetrar la radiación:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[\left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_o} - \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i} \right] - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[(r \dot{q}_{r,t}'') \Big|_{r_o} - (r \dot{q}_{r,t}'') \Big|_{r_i} \right] \quad (6.9)$$

De esta manera, la problemática adquiere una forma muy particular, quedando sujeta su validez las condiciones de borde que se utilicen para la resolución del modelo y su congruencia física. Particularmente cabe mencionar que el término radiativo conviene dejarlo expresado, dado que a posteriori tendrá un tratamiento matemático particular.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cd}'' &= \dot{q}_{cv}'' \\ \frac{\dot{q}_{cd}''}{A_v} &= \frac{h}{A_h} (\bar{T} - T_\infty) \\ \frac{2}{r_i^2} \left(k_m \frac{\partial T}{\partial r} \frac{1}{l_z} \right) &= \left(\frac{h}{r_i^2} (\bar{T} - T_\infty) \right) \frac{1}{l_z} \quad (\text{Fenómeno Volumétrico}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dicho lo anterior, se ve con claridad que en el borde interno r_i la conducción con la convección se pueden trabajar con un coeficiente combinado h_{comb} para el intercambio entre la superficie en cuestión y el ambiente:

$$\begin{aligned} r = r_i, t = 0 : \quad \frac{h_{comb}}{l_z} &= \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i} \\ r = r_i + \delta, t = 0 : \quad 0 &= \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i + \delta} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Con esto entonces se puede trabajar la ecuación en términos de propiedades promedio.

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{h_{comb}}{l_z} - \frac{2}{r_o^2 - r_i^2} \left(r_o \dot{q}_{r,t}''(r_o) - r_i \dot{q}_{r,t}''(r_i) \right) \quad (6.12)$$

Para seguir resolviendo la ecuación presentada, se requiere realizar un trabajo sobre el término radiativo.

6.2.1. Divergencia del Flujo Radiativo

Para la problemática se ha considerado que el flujo radiativo, en términos espaciales, solo se modifica en torno a la dirección r , y que temporalmente cambia ($\dot{q}_{r,t}''$). Por este motivo se trabaja con la divergencia del mismo, es decir, $\nabla \cdot \dot{q}''$.

Para la teoría clásica, el término radiativo es completamente absorbido por la superficie, siendo entonces la temperatura, la de la superficie, distinto al problema

que aquí se trabaja dado que en este problema se utiliza una temperatura promedio para el volumen de control; en dicha teoría, al no existir un aumento de temperatura al interior del VC por efecto de la penetración de la radiación, se puede utilizar con facilidad el teorema fundamental del calculo, dado que al integrar sobre este, se considera constante en la dirección de la transferencia de calor, resultando el mismo; esto es:

$$\int_{z_1}^{z_2} \ddot{q}_z = \ddot{q}_z(z_1) \quad (6.13)$$

Como se considera totalmente absorbida por la superficie, en una profundidad mayor a la inicial se tiene que el flujo radiativo en esa dirección tendrá un valor de cero.

Ahora, debe tenerse en cuenta que el medio con el cual se trabaja es poroso, por lo cual la conducción ocurre en pocos puntos, y la convección adquiere un papel secundario al no existir un movimiento importante del flujo de aire; siendo entonces la radiación el mecanismo preponderante.

Dicho esto, se entiende que el supuesto clásico resulta poco representativo del caso que se trabaja, sin embargo, también se conoce que el medio se comporta *thermally thin* por lo cual, es posible considerar una profundidad de penetración δ , lo que conlleva a la necesidad de un tratamiento especial para el flujo radiativo, que se comportará distinto al tradicional $\dot{q} = \epsilon \sigma A_s T_s^4$. Es importante mencionar que más adelante se realizará una transformación matemática para que el término en cuestión también depende de la temperatura a la cuarta.

Método de los esféricos armónicos

A grosso modo existen dos formas para trabajar la Aproximación - P_1 valida para un medio con condiciones de borde delimitadas al ser una superficie gris y difusa, esto es:

1. Por medio de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (EDPs-1) simultáneas en radiación incidente y flujo de calor radiativo.
2. Por una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden (EDP-2) para la radiación incidente.

Para la problemática que se trabaja se utiliza el primer método ya que se tiene equilibrio radiativo en un medio gris

De manera general las ecuaciones simultáneas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= k(4\pi I_b(T) - G) \\ \nabla G &= -(3\beta - A_1 \sigma_s) \mathbf{q} \\ r = r_\omega, t = 0 : \quad 2\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 4J_\omega(r_\omega) - G \end{aligned} \quad (6.14)$$

En este caso $\mathbf{q}$ es el flujo radiativo total, $\nabla \cdot \mathbf{q}$ es la divergencia del flujo radiativo total, G es la radiación incidente, $I_b(T)$ es la intensidad de la radiación en el medio, A_1 es un *linear - anisotropic scattering factor*, $J_\omega(r_\omega)$ es el flujo de calor total dejando

la superficie en la locación r_ω , k es el coeficiente de absorción, σ_s es el coeficiente de scattering (dispersión), β el coeficiente de extinción y además se sabe que:

$$\beta = k + \sigma_s \quad (6.15)$$

En estos casos se trabaja bajo el supuesto de no dispersión, por lo tanto $\sigma_s = 0$. Entonces el coeficiente de extinción $\beta = k$. Luego desarrollando las condiciones de borde para coordenadas cilindricas de manera general, se pueden plantear en función de T:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' &= k(4\pi I_b(T) - G) & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_{r,t}'') &= k(4\pi I_b(T) - G) \\ \nabla G &= -(3\beta_1 - A_1 \sigma_s) & \frac{\partial G}{\partial r} &= -3k \dot{q}_{r,t}'' \end{aligned} \quad (6.16)$$

Puede describirse la radiación incidente como $\nabla G = -(3\beta - A_1 \sigma_s) \dot{q}''$

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_{r,t}'') \right) = -3k \dot{q}_{r,t}'' \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_{r,t}'') \right) = 3k^2 \dot{q}_{r,t}'' \quad (6.18)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \dot{q}_{r,t}'' \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \dot{q}_{r,t}'' \right) = 3k^2 \dot{q}_{r,t}'' \quad (6.19)$$

$$-\frac{1}{r^2} \dot{q}_{r,t}'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \dot{q}_{r,t}'' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \dot{q}_{r,t}'' \right) \right) = 3k^2 \dot{q}_{r,t}'' \quad (6.20)$$

$$-\frac{1}{r^2} \dot{q}_{r,t}'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \dot{q}_{r,t}'' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\dot{q}_{r,t}'' \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{q}_{r,t}'' \right) \right) = 3k^2 \dot{q}_{r,t}'' \quad (6.21)$$

$$-\frac{1}{r^2} \dot{q}_{r,t}'' - \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \dot{q}_{r,t}''} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{q}_{r,t}'' \right)} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\dot{q}_{r,t}'' \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{q}_{r,t}'' \right) = 3k^2 \dot{q}_{r,t}'' \quad / \cdot r^2 \quad (6.22)$$

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\dot{q}_{r,t}'') + r \frac{\partial}{\partial r} (\dot{q}_{r,t}'') - \left(3k^2 r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \dot{q}_{r,t}'' = 0 \quad (6.23)$$

La forma que toma esta ecuación diferencial es la de una *Ecuación de Bessel Modificada*.

Ecuación de Bessel

La forma tradicional de una ecuación de Bessel es:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left(\eta^2 + \frac{\nu^2}{r^2} \right) \cdot R = 0 \quad (6.24)$$

La solución general de este tipo de ecuaciones es:

$$R(r) = C_1 I_\nu(\eta r) + C_2 K_\nu(\eta r) \quad (6.25)$$

Para esta situación se define que:

$$\eta = \sqrt{3}K \quad (6.26)$$

$$\nu = 1 \quad (6.27)$$

$$\therefore \ddot{q}_{r,t} = C_1 I_1(\sqrt{3}kr) + C_2 K_1(\sqrt{3}kr) \quad (6.28)$$

Donde C_1 y C_2 se obtienen las condiciones de borde, en consecuencia se determina $\ddot{q}_{r,t}$.

Las condiciones de borde son:

$$r = r_i, t = 0 : \quad G + 2\ddot{q}_{r,t} = 4(\dot{q}_{inc}(t) + \sigma T_\infty^4) \quad (6.29)$$

$$r = r_o, t = 0 : \quad G - 2\ddot{q}_{r,t} = 4\sigma T_\infty^4 \quad (6.30)$$

$$\quad \quad \quad (6.31)$$

Siguiendo la forma general de la solución de una ecuación de Bessel, se tiene que:

$$r = r_i, t = 0 : \quad \ddot{q}_{r,t}(r_i, 0) = C_1 I_1(\sqrt{3}kr_i) + C_2 K_1(\sqrt{3}kr_i) = 2(\dot{q}_{inc}(t) + \sigma T_\infty^4) - \frac{G(r_i)}{2} \quad (6.32)$$

$$r = r_o, t = 0 : \quad \ddot{q}_{r,t}(r_o, 0) = C_1 I_1(\sqrt{3}kr_o) + C_2 K_1(\sqrt{3}kr_o) = -2\sigma T_\infty^4 + \frac{G(r_o)}{2} \quad (6.33)$$

Se sabe también que $G(r) = 4\sigma\bar{T}^4 - \frac{1}{rk} \frac{\partial}{\partial r}(r\ddot{q}_{r,t})$. De esta forma se tiene que:

$$G(r, t) = 4\sigma\bar{T}^4 - \frac{1}{rk} \left(\ddot{q}_{r,t} + r \frac{\partial \ddot{q}_{r,t}}{\partial r} \right) \quad (6.34)$$

$$= 4\sigma\bar{T}^4 - \frac{1}{rk} \left(C_1 I_1(\sqrt{3}kr) + C_2 K_1(\sqrt{3}kr) + rC_1 I_1'(\sqrt{3}kr) + rC_2 K_1'(\sqrt{3}kr) \right) \quad (6.35)$$

$$= 4\sigma\bar{T}^4 - C_1 \left(\frac{I_1(\sqrt{3}kr) + rI_1'(\sqrt{3}kr)}{rk} \right) - C_2 \left(\frac{K_1(\sqrt{3}kr) + rK_1'(\sqrt{3}kr)}{rk} \right) \quad (6.36)$$

Resolver este sistema es bastante complejo dada la matemática inherente al mismo, es por ello que el apoyo en software de calculo matemático, como Wolfram Mathematica resulta fundamental, para poder obtener los correctos coeficientes.

Con esto se obtiene una ecuación de la forma:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} = -b_3 h_{conv}(\bar{T} - T_\infty) + b_1 \ddot{q}_{inc} - b_2(\bar{T}^4 - T_\infty^4) \quad (6.37)$$

Siendo que las constantes en este caso son:

$$C_1 = 4 \cdot (-3 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.38)$$

$$+ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.39)$$

$$- 6 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.40)$$

$$- 6 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.41)$$

$$+ 12 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.42)$$

$$- 12 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.43)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.44)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.45)$$

$$- 4 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.46)$$

$$+ 4 \cdot \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.47)$$

$$- 8 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.48)$$

$$- 8 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.49)$$

$$+ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.50)$$

$$- 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.51)$$

$$+ 6 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.52)$$

$$+ 6 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.53)$$

$$- 12 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.54)$$

$$+ 12 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.55)$$

$$- 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.56)$$

$$- 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.57)$$

$$+ 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.58)$$

$$- 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.59)$$

$$+ 8 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.60)$$

$$+ 8 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.61)$$

$$+ 3 \cdot \sqrt{3} \cdot q_{inc} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.62)$$

$$- 6 \cdot q_{inc} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.63)$$

$$- 12 \cdot q_{inc} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.64)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot q_{inc} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.65)$$

$$+ 4 \cdot \sqrt{3} \cdot q_{inc} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.66)$$

$$- 8 \cdot q_{inc} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) / (-9 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^3 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in}))) \quad (6.67)$$

$$+ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^3 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.68)$$

$$+ 9 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.69)$$

$$+ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.70)$$

$$+ 18 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.71)$$

$$- 36 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.72)$$

$$+ 6 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.73)$$

$$+ 12 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.74)$$

$$- 12 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.75)$$

$$- 24 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.76)$$

$$- 36 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.77)$$

$$+ 24 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.78)$$

$$- 24 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.79)$$

$$- 16 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.80)$$

$$+ 12 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.81)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.82)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^3 \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.83)$$

$$- 16 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^3 \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.84)$$

$$+ 8 \cdot \sqrt{3} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})^2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.85)$$

$$+ 16 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot 2 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.86)$$

Mientras que:

$$C_2 = 4 \cdot (-\sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in})) \quad (6.87)$$

$$+ \sqrt{3} \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.88)$$

$$+ 2 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.89)$$

$$+ 2 \cdot T_\infty^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.90)$$

$$+ \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.91)$$

$$- \sqrt{3} \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.92)$$

$$- 2 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.93)$$

$$- 2 \cdot \bar{T}^4 \cdot \sigma \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.94)$$

$$+ \sqrt{3} \cdot q_{inc} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.95)$$

$$+ 2 \cdot q_{inc} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) / (-3 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in}))) \quad (6.96)$$

$$+ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.97)$$

$$+ 3 \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.98)$$

$$+ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot I(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.99)$$

$$+ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.100)$$

$$- 4 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \quad (6.101)$$

$$+ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(0, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.102)$$

$$+ 4 \cdot I(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot (\delta + r_{in})) \cdot K(1, \sqrt{3} \cdot k \cdot r_{in}) \quad (6.103)$$

La relación encontrada tiene la forma general de una ecuación de Chini, la que normalmente describe de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^n(x) + g(x)y(x) + h(x) \quad (6.104)$$

En este caso cuando $n = 2$ esto es una *Ecuación de Ricatti*, mientras que si $n = 3$ es una *Ecuación de Abel*, lamentablemente para ordenes superiores no existe un procedimiento general para el cálculo, sin embargo, es posible obtener el invariante de Chini.

$$I = n^{-n} f(x)^{-(1+n)} h(x)^{(1-2n)} (f(x)h'(x) - f'h(x) - nf(x)g(x)h(x))^n \quad (6.105)$$

En el caso que $\frac{dI}{dx} = 0$, es posible resolver la problemática de forma directa, sin embargo para este caso no se cumple, por lo cual se hace necesario trabajar con supuestos para poder resolver la problemática.

6.2.2. Condiciones de Ignición

Para establecer las condiciones de ignición, primero se debe definir si será ignición pilotada o ignición espontánea, dadas las diferencias en sus características. Cuando

la mezcla inflamable ya existe, se requiere que aumente su temperatura hasta que la reacción de combustión ocurra, esto es, cuando se alcance la temperatura de ignición $T_{ig,sp}$. En este proceso se diferencian la fase de pirólisis y la de inducción, cada una de ellas con su tiempo respectivo.

La de pirólisis se considera desde que inicia el proceso de aumento de temperatura (calentamiento) hasta que se produce la mezcla inflamable. Como en el proceso estudiado no existe un piloto, se debe esperar que la mezcla aumente su energía lo suficiente para alcanzar la ignición. Dicha energía se puede asociar al número de *Damkohler*, que es el ratio entre el tiempo de residencia (asociado a la rapidez de reacción de los gases) y el tiempo requerido por la reacción química en cuestión (obtenido desde el inverso de la tasa de reacción de la ecuación de Arrhenius). De esta forma, si el tiempo requerido por la reacción química es menor al tiempo de residencia, la reacción tiene suficiente tiempo para continuar, lo que permite a la llama existir. Esto es, que existe un número de Damkohler crítico que debe alcanzarse antes de que la ignición ocurra.

Flujo Crítico

Se denomina de esta manera al mínimo flujo externo de calor, necesario para que este genere suficientes gases de pirólisis sobre la superficie, permitiendo así la ignición. En el caso de la ignición espontánea, el flujo crítico necesario es mayor que en el caso piloteado.

Charring

Se conoce de esta manera a la capa de material carbonizado que puede producirse sobre la superficie durante el proceso de pirólisis. Dicha capa superficial interfiere con la transferencia de calor entre el entorno y el medio o material donde ocurre. Esto se debe tanto a sus propiedades como aislante térmico y la re - radiación producida por la capa, motivo por el cual podría alcanzar temperaturas mayores a T_{py} .

Temperatura y tiempo de Ignición

Tal como se ha mencionado con anterioridad, se considera al sólido inerte durante el proceso de calentamiento, lo que permite establecer una temperatura superficial que caracterice el sólido, conocida como temperatura de ignición T_{ig} , asociada a un tiempo determinado, necesario para que ocurra la ignición t_{ig} .

Se considera alcanzada la condición crítica, cuando el tiempo de ignición t_{ig} es infinitamente largo, por lo que no existen gradientes de temperatura al interior del medio y las pérdidas de calor de la superficie serán iguales al calor recibido desde el exterior, por lo que existe un flujo de calor mínimo (flujo crítico), al cual se debe someter la superficie hasta alcanzar la temperatura de ignición T_{ig} .

Estas son las condiciones críticas para un sólido, aquí se considera la temperatura de la superficie expuesta a la fuente de calor como temperatura de ignición, sin embargo, en el problema abordado en este trabajo se hace uso de la temperatura promediada espacialmente. Por este motivo las condiciones utilizadas conllevan

ciertas particularidades, en especial para la temperatura, dado que si bien el medio eleva su temperatura superficialmente, al mismo tiempo se genera un calentamiento al interior, producto de la penetración de la radiación al interior del medio (mayoritariamente, no de forma exclusiva), existe entonces una energía adicional requerida, en comparación a lo comúnmente considerado, solo para la temperatura superficial; al aumentar la temperatura superficial, existe un gradiente desde el interior, requiriendo energía para poder compensarlo, es decir, para mantener una misma temperatura como sólido.

Debe tenerse presente que se considera el medio como inerte, lo que químicamente implica que no hay reacción en el medio, por ende, tampoco charring; esto no debe confundirse con la capacidad de elevar la temperatura interna y no solo la superficial. De este modo, se debe lograr la temperatura $\bar{T}_{ig}$ en las condiciones descritas.

Finalmente es importante remarcar que $\dot{q}_{inc,cri}''$ no es condición absoluta del material, sino que depende de propiedades termo físicas del material y las condiciones en que esta expuesto.

Criterio de Ignición

Dicho lo anterior, se puede establecer que cuando el flujo radiativo que incide en el medio $\dot{q}_{inc}''$ es igual al mínimo flujo necesario para tener ignición a la temperatura $\bar{T}_{ig}$, esto es, $\dot{q}_{inc,cri}''$, se cumple luego de un tiempo sustancial de exposición t_{ig} o bien, cuando las variaciones de la temperatura en el tiempo son lo suficientemente pequeñas como para decir que el gradiente temporal es cero, lo que se conoce como *condiciones en estado estacionario*; lo que se aprecia en:

$$0 = \frac{h_c}{l_z}(\bar{T}_{ig} - T_\infty) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(r_o \dot{q}_r''(r_o) - r_i \dot{q}_r''(r_i) \right) \quad (6.106)$$

6.2.3. Resumen de supuestos considerados en el modelo

Para validar la solución de una problemática y poder adaptar el modelo a configuraciones geométricas distintas, es importante saber que condiciones se han utilizado para establecer el problema.

- El medio se considera sin humedad.
- Una vez que ha culminado el proceso, se considera el medio sin humedad ($\lambda = 0\%$) y puede considerarse un medio opaco y negro.
- Se aplican las *thermally thin conditions*, lo cual es válido siempre que número de Biot sea menor que 1, como en este caso.
- Los elementos del estrato vegetal permanecen inertes durante el proceso de calentamiento, es decir, hasta antes de que ignición ocurra. Este particular es el que otorga sustento a no incluir las ecuaciones de conservación de masa y momentum, que deberían resolverse simultáneamente junto con la ecuación de energía, por ello el proceso de pirólisis y su efecto en el calentamiento del estrato es despreciado.

- La distancia del medio que se encuentra afecto al proceso de calentamiento, depende del camino libre del medio de radiación δ , el cual se calcula usando la fórmula estándar $\delta = \frac{4}{\alpha_s \omega}$

6.2.4. Modelo Numérico

De acuerdo a la relación obtenida con anterioridad, el balance de energía presenta la temperatura de ignición T_{ig} tanto de manera explícita como implícita, lo que en condiciones de estado estacionario no se puede resolver de forma directa con una expresión analítica, motivo por el cual se utiliza un software para dicho motivo.

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{h_c}{l_z}(\bar{T} - T_\infty) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(r_o \dot{q}_r''(r_o) - r_i \dot{q}_r''(r_i) \right) \quad (6.107)$$

Para fines prácticos, los parámetros utilizados en la resolución numérica se conocen como exactos, ya que es lo más preciso que se puede obtener sin la resolución analítica, dado que no se aproximan.

6.2.5. Modelo Analítico

Como se mencionó anteriormente no se puede realizar una resolución analítica directamente de la ecuación presentada, lo cual se ve claramente al presentarla de la forma:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -b_3 h_c(\bar{T} - T_\infty) - b_1 \dot{q}_{inc}'' - b_2(\bar{T}^4 - T_\infty^4) \quad (6.108)$$

Sin embargo esto puede simplificarse, con el fin de obtener una solución lo más cercana posible a la real, aproximando el último término mediante una serie de potencias, con el procedimiento estándar de Taylor, alrededor de T_∞ , esto es:

$$\bar{T}^4 - T_\infty^4 \approx 4T_\infty^3(\bar{T} - T_\infty) \quad (6.109)$$

Con lo cual podemos expresar la relación anterior como:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -b_3 h_c(\bar{T} - T_\infty) - b_1 \dot{q}_{inc}'' - b_2 4T_\infty^3(\bar{T} - T_\infty) \quad (6.110)$$

Utilizando el factor $h_T = h_c + 4\frac{b_2}{b_3}T_\infty^3$, lo cual permite que la expresión quede como:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -b_3 h_T(\bar{T} - T_\infty) - b_1 \dot{q}_{inc}'' \quad (6.111)$$

De esta manera la resolución es susceptible de realizar de forma “manual”, mediante diversos métodos, lo que dependerá en gran parte de quién desee resolverlo. Dentro de estas posibilidades se encuentra la *transformación de laplace*, así como también se podría aplicar un nuevo cambio de variable, entre otras opciones. En caso de aplicar un cambio de variable, se establecen nuevos parámetros de forma

conveniente, con lo cual se pueden normalizar, obteniendo relaciones adimensionales entre las variables de interés. Sea θ :

$$\theta = \frac{\bar{T} - T_\infty}{\bar{T}_{ig} - T_\infty} \quad (6.112)$$

$$\text{Derivando en } \bar{T} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{T}}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \left(\frac{\bar{T} - T_\infty}{\bar{T}_{ig} - T_\infty} \right) \quad (6.113)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{T}} = \frac{1}{(\bar{T}_{ig} - T_\infty)} \quad (6.114)$$

De modo tal que la ecuación general queda como:

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial \theta (\bar{T}_{ig} - T_\infty)}{\partial t} = -b_3 h_T (\theta (\bar{T}_{ig} - T_\infty)) - b_1 \ddot{q}_{inc} \quad (6.115)$$

Luego si se divide por $(b_1 \ddot{q}_{inc,cri})$, se obtiene una ecuación diferencial de manera compacta en función de variables y parámetros normalizados:

$$\frac{\alpha_s \rho_s c_{p,s} (\bar{T}_{ig} - T_\infty)}{b_1 (\ddot{q}_{inc,cri})} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{b_3 h_T (\bar{T}_{ig} - T_\infty)}{b_1 \ddot{q}_{inc,cri}} \theta - \frac{\ddot{q}_{inc}}{\ddot{q}_{inc,cri}} \quad (6.116)$$

$$\theta = \frac{\bar{T} - T_\infty}{\bar{T}_{ig} - T_\infty} \quad (6.117)$$

$$\tau = \frac{\alpha_s \rho_s c_{p,s} (\bar{T}_{ig} - T_\infty)}{b_1 \ddot{q}_{inc,cri}} \quad (6.118)$$

$$\psi = \frac{b_3 h_T (\bar{T}_{ig} - T_\infty)}{b_1 \ddot{q}_{inc,cri}} \quad (6.119)$$

$$\varphi = \frac{\ddot{q}_{inc}}{\ddot{q}_{inc,cri}} \quad (6.120)$$

$$\text{Obteniéndose lo siguiente:} \quad (6.121)$$

$$\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\psi \theta + \varphi \quad (6.122)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\psi}{\tau} \theta = \frac{\varphi}{\tau} \quad (6.123)$$

Lo anterior toma la forma de una *ecuación diferencia lineal de primer orden* para un caso no homogéneo. Lo cual se describe en forma general como:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \quad (6.124)$$

Siendo μ el factor integrante definido como $\mu(x) = \exp(\int P(x)dx)$, al aplicarlo

en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\mu(x)(y'(x) + P(x)y(x)) = \mu(x)Q(x) \quad (6.125)$$

$$(\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x)) = \mu(x)Q(x) \quad (6.126)$$

$$\implies \frac{\partial \mu}{\partial x} = P(x)\mu(x) \quad (6.127)$$

$$(\mu(x)y'(x) + y(x)\mu(x)') = \mu(x)Q(x) \quad (6.128)$$

$$(\mu y)'(x) = \mu(x)Q(x) \quad / \int \quad (6.129)$$

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + C \quad / \int \frac{1}{\mu(x)} \quad (6.130)$$

$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx \quad (6.131)$$

Se tiene entonces una solución general compuesta por la *solución homogénea* $y_h(x)$ y corresponde a la familia de ecuaciones indexadas por la constante C, mientras que el segundo se conoce como *solución particular* $y_p(x)$.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (6.132)$$

La solución de nuestro caso es:

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t) \quad (6.133)$$

Siendo la solución homogénea de la forma:

$$\theta_h(t) = C \exp\left(-\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \quad (6.134)$$

$$= C \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \quad (6.135)$$

$$\text{Condición Inicial} \implies \bar{T}(0) = T_\infty \quad (6.136)$$

$$\frac{T_\infty - T_\infty}{\bar{T}_{ig} - T_\infty} = C \exp(0) \quad (6.137)$$

$$0 = C \quad (6.138)$$

$$\theta_h(t) = 0 \quad (6.139)$$

Por otro lado, la solución particular es:

$$\theta_p(t) = \exp\left(-\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \int \exp\left(-\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \frac{\varphi}{\tau} dt \quad (6.140)$$

$$= \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \int \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \frac{\varphi}{\tau} dt \quad (6.141)$$

$$= \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \left(\frac{\tau}{\varphi} \exp\left(\frac{\psi}{\tau} t\right) \frac{\varphi}{\tau} + K\right) \quad (6.142)$$

$$= \frac{\varphi}{\psi} + \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) K \quad (6.143)$$

$$\text{Condición Inicial} \implies \theta(0) = 0 \quad (6.144)$$

$$-\frac{\varphi}{\psi} = K \quad (6.145)$$

$$\theta_p(t) = \frac{\varphi}{\psi} - \frac{\varphi}{\psi} \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \quad (6.146)$$

Si combinamos los resultados se tiene:

$$\theta(t) = \frac{\varphi}{\psi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right)\right) \quad (6.147)$$

Regresando a las variables y parámetros originales, se tiene una expresión analítica para la temperatura promedio:

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{b_1}{b_3 h_T} \left[\ddot{q}_{inc,0} - \beta \left(t - \frac{\alpha_s \rho_s c_{p,s}}{b_3 h_T} \right) - \left(\ddot{q}_{inc,0} + \beta \frac{\alpha_s \rho_s c_{p,s}}{b_3 h_T} \right) \exp\left(-\frac{b_3 h_T}{\alpha_s \rho_s c_{p,s}} t\right) \right] \quad (6.148)$$

De lo anterior cabe destacar que usualmente el término exponencial se aproxima mediante una serie de Taylor de orden 2, para poder simplificar el álgebra y obtener así una expresión para el tiempo de ignición t_{ig} . Para ello se realiza el procedimiento en torno al valor cero, cabe destacar que cuando el argumento de la exponencial es positivo, esta aproximación resulta consistente con los resultados y permite obtener valores muy cercanos al real, lamentablemente en este caso el argumento es negativo, motivo por el cual la aproximación resulta bastante pobre en el entorno de soluciones de nuestra problemática, al generar un término negativo.

Dada esta problemática se realiza una modificación a la aproximación de Taylor - Mc Lauren tradicional, modificando el primer término, lo que si bien no entrega un resultado perfecto, si resulta más cercano al caso real.

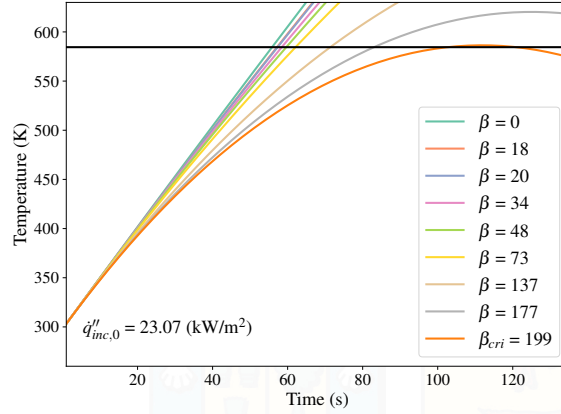


Figura 6.2: Evolución temporal a distintas rampas (β)

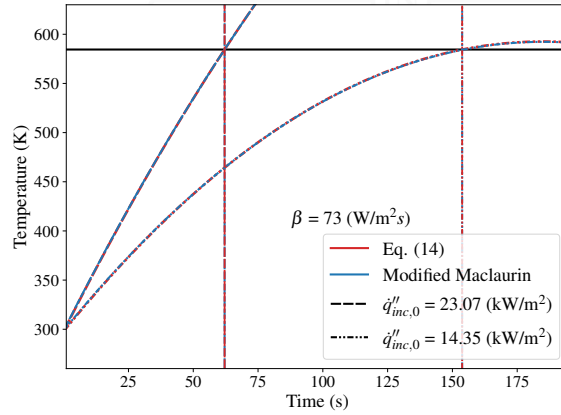


Figura 6.1: Comparación de modelos de aproximación $q''_0 = 23,07(kW/m^2)$

En la figura 6.1 se aprecia el comportamiento de la función de Euler, y la aproximación de Taylor Modificada para ver como se comporta en el rango.

Adicionalmente resulta interesante destacar que si se cuenta con el valor de los parámetros numéricos es posible realizar una aproximación polinomial de orden 4, con el método de los errores mínimos cuadrados, para obtener una aproximación incluso mejor del fenómeno en estudio.

Resulta interesante además simular el comportamiento de la temperatura para diversos β , tomando como flujo inicial aquel que será utilizado experimentalmente, en este caso $q''_0 = 23,07(kW/m^2)$

Para el calculo del tiempo de ignición, es además necesario conocer la Temperatura de Ignición, teóricamente esta se obtiene mediante:

$$\dot{q}''_{cri} = \sigma \left(\bar{T}_{ig}^4 - T_{\infty}^4 \right) \quad (6.149)$$

$$\bar{T}_{ig} = \left(\frac{\dot{q}''_{cri} - \sigma \cdot T_{\infty}^4}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6.150)$$

Teniendo esto presente, se pueden refinar los modelos de aproximación, si contamos con data necesaria para el valor de los parámetros (exceptuando el tiempo), podemos obtener un mejor ajuste con un polinomio de grado 4.

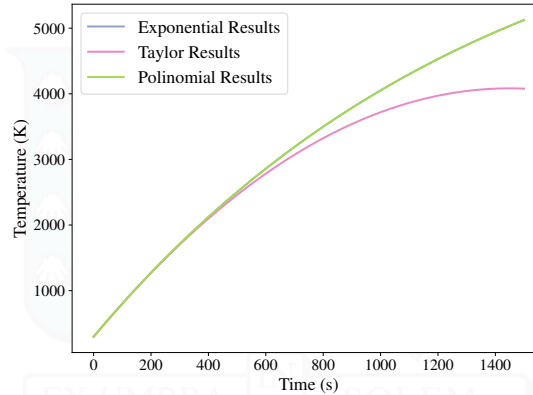


Figura 6.3: Comparativa de modelos de temperatura de Ignición

En la figura 6.3 , se aprecia la comparativa entre los distintos modelos aplicables para el comportamiento de la temperatura, teniendo en consideración la simulación del modelo completo (euler), una aproximación polinomial de grado 4 y una aproximación de Taylor Modificada, la cual funciona relativamente bien para tiempos inferiores pequeños.

6.3. Caso Esférico

Para el caso esférico, cabe destacar que como solo cambia la geometría del heater y no la del volumen de control, en este caso la cama vegetal, no hay cambios en la solución a menos que se presenten cambios en los supuestos. En este último punto, cabe resaltar que la esfera posee simetría esférica respecto al centro, por lo cual cumple con la condición de simetría axial, así como también con las variaciones despreciables respecto a la altura (dado que serían simétricos). Dicho esto, la modificación estará en el flujo de calor emitido, ahora con la implicancia de un ángulo, mientras que el flujo incidente de calor solo se modificará en términos de la configuración para su llegada (constante, dependiente del tiempo, cuadrático, etc).

Dado lo anterior, los cambios en el modelo vendrían dados en el valor del flujo incidente, que deberían verse afectados por el factor de forma, de acuerdo a la relación:

$$\dot{q}_{inc} = FF \cdot \dot{q}_{emi} \quad (6.151)$$

Siendo FF el factor de forma para el caso esfera cilindro. Para términos prácticos, y en consecuencia obtener un mejor valor, se recomienda realizar una calibración con radiómetro para asegurar la respuesta del modelo y minimizar el error.

7 | Aproximación Experimental

Índice

7.1. Equipos Experimentales	57
7.1.1. Heater	57
7.1.2. Data Acquisition (DAQ)	58
7.1.3. Variac	58
7.1.4. Celda de Carga	58
7.1.5. Termocuplas	58
7.1.6. Kanthal	59
7.1.7. Radiómetro	59

7.1. Equipos Experimentales

Dado que uno de los objetivos del presente trabajo es explicar las configuraciones utilizadas, es importante tener en consideración cuales son los equipos que componen funcionalmente el IFIT, en forma abreviada, con ello, se puede a posteriori describir como se configura cada uno.

7.1.1. Heater

Consiste en una pieza metálica de dimensiones específicas para la experiencia que se este realizando, dicho metal posee una baja resistencia eléctrica, motivo por el cual es capaz de colocarse incandescente y liberar la energía que lo atraviesa en forma de calor hacia el medio.

Al momento de utilizarlo, es importante tener en consideración la potencia máxima que este es capaz de soportar, para evitar que se quiebre o sufra alteraciones en sus capacidades.

Del mismo modo, es relevante revisar empíricamente su comportamiento, dado que el utilizado para los experimentos presenta un comportamiento errático para potencias “bajas”.

7.1.2. Data Acquisition (DAQ)

Este es un dispositivo con múltiples conexiones que permite incorporar diversos sensores, captar una señal eléctrica y luego convertirla a la unidad correspondiente, debe tenerse en consideración que para poder leer las señales se debe utilizar el software recomendado por el fabricante, aunque en algunos casos es posible configurarlo con Python u otros lenguajes de programación.

Dependiendo del fabricante y el modelo con el cual se está trabajando, es posible realizar la configuración mediante el software LabView, que presenta una amplia variedad de herramientas para la configuración del mismo.

7.1.3. Variac

Corresponde a un regulador de Potencia, Voltaje y Amperaje; dada su funcionalidad es el encargado de establecer la potencia que actuará sobre el heater y por consiguiente el “flujo de calor aplicado a la cama vegetal”.

Para este aparato, lo más relevante es tener una toma de corriente que sea compatible con el mismo, y tener cuidado de conectarlo bien, no sobrecargarlo y utilizarlo con el cuidado debido, para evitar que el mismo se desgaste de forma innecesaria.

En algunos casos dada la estática ambiente o los cambios en la corriente producto de “apagones repentinos”, la conexión podría fallar, lo que se soluciona al desconectar todos sus cables durante aproximadamente cinco minutos para que se descargue la estática.

7.1.4. Celda de Carga

Aparato encargado de recolectar las mediciones de masa de la muestra vegetal durante el experimento. En este particular, cabe mencionar que se selecciono sobre una balanza, dado que se ve menos afectada por las variaciones de temperaturas, gatilladas por el heater, resultando en una mayor estabilidad.

Para este particular, es importante tener en cuenta que debe conectarse un dispositivo capaz de recepcionar la señal eléctrica y convertirla, dado el nivel de voltaje, se recomienda utilizar una placa de arduino que permita amplificar dicha señal, para que el DAQ pueda leerlo y en consecuencia entregar el valor correspondiente.

7.1.5. Termocuplas

Estos sensores son capaces de medir la temperatura a través de un termopar, conformado por dos metales de distinta resistividad térmica, así al modificarse la temperatura, se modifica la “unión cálida y fría” generando una corriente eléctrica. Dicha señal se envía hasta el DAQ, donde de acuerdo a las características de la termocupla utilizada (entregada por el fabricante) se puede convertir en una medida de temperatura viable para las mismas mediciones.

Debe tenerse presente que la punta de las mismas no debe ser “tapada” dado que es mediante este extremos que el sensor funciona, por lo cual la medición podría estar errada si colocamos algún elemento en el camino de la misma.

7.1.6. Kanthal

Básicamente consiste en una aleación metálica de baja resistencia, capaz de colocarse incandescente con el paso de la electricidad, y de liberar calor al medio, en general se entrega un voltajes bajos, de tal forma que no modifique los resultados, pero si permita que estos sean más estables entre mediciones. En otras palabras, se utiliza para disminuir la variabilidad entre mediciones, pero sin modificar finalmente el comportamiento real del fenómeno.

7.1.7. Radiómetro

Este sensor es utilizado como un elemento de calibración, dado que a pesar de establecer una potencia en el VARIAC, es sabido que existirá una pérdida entre lo que este realmente entrega al Heater, y luego en lo que este mismo es capaz de liberar al ambiente, motivo por el cual se hace importante realizar mediciones preliminares con este mismo para saber que valores de radiación está entregando realmente el heater y con ello poder establecer cual es flujo de calor que actúa liberado al medio, para este caso particular, el flujo de calor que llega a la cama vegetal.



8 | Metodología

Índice

8.1. Experimental	61
8.1.1. Recomendaciones	63
8.2. Procedimiento Experimental	64

En esta sección es importante separar las dos aristas más importantes del trabajo realizado, por un lado se encuentra todo el desarrollo experimental, donde el paso a paso y el establecer protocolos permite asegurar la replicabilidad de los experimentos; por su parte la segunda sección, más bien de carácter teórico, tiene sus propias dificultades en cuanto a las complejidades de plantear un modelo esférico con los supuestos simplificadores correspondientes.

8.1. Experimental

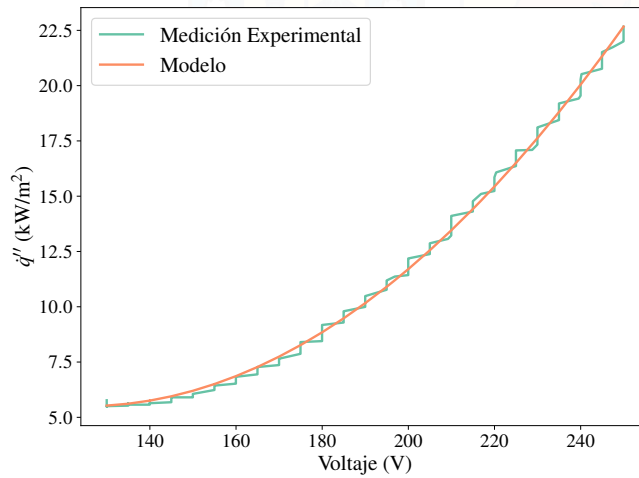
En este apartado se establecen las condiciones que se mantuvieron constantes y aquellas que fueron variables. Para comenzar, hay que tener presente, que los experimentos realizados buscan replicar en forma simplificada lo que ocurre en la interfaz urbano - rural. Para esto se utiliza la ya mencionada cama vegetal, y la acción del heater como representación de la pavesa incandescente.

Particularmente en este caso, se estudia el efecto del retardante sobre la muestra vegetal, motivo por el cual fue necesario establecer puntos en común para luego poder comparar los resultados. En este sentido y recordando los resultados de [8], se sabe que con un $\alpha = 0.09$ la variabilidad entre experimentos es menor, por lo cual se considero como un parámetro común, luego de ello fue necesario establecer la cantidad de retardante con la cual se trabajaría, siendo en todos los casos utilizado el mismo retardante (MAK1). En la tabla 8.1 se aprecian los flujos utilizados y el voltaje al que corresponden en el VARIAC.

Para poder establecer que valor de voltaje se correspondía con cada valor de flujo radiativo, se utilizo un radiómetro, a la distancia de la cama vegetal, para poder así conocer el nivel de radiación correspondiente, con lo cual tras graficar los datos, se aprecia un comportamiento polinómico de segundo orden en el tramo de 147 a 250 volts, con lo cual se construye un modelo correspondiente, que el software asocia a un R^2 de 0.99 por lo cual se considera una aproximación correcta.

Tabla 8.1: Tabla de Voltajes y Flujo

Voltaje [V]	Flujo Radiativo [W/m ² K]
221	15.9595
211	13.9335
187	9.9687
170	7.9270
160	7.0230
155	6.6535
150	6.3390

**Figura 8.1:** Medición Experimental Radiometro y Modelo desarrollado

El modelo obtenido fue el siguiente:

$$0,0011 \cdot Voltaje^2 - 0,2726 \cdot Voltaje + 22,479 \quad (8.1)$$

Cabe resaltar que la medición se realizó a la altura media del heater que previamente se verificó es el punto donde emite mayor radiación, siendo el comportamiento del mismo parecido a una gaussiana en el eje vertical.

Uno de los aspectos más complejos era asegurar que las muestras fueran comparables entre sí, motivo por el cual se dejaban secar las muestras cuando llegaban a una temperatura de 65°C durante un día, luego eran pesadas y se les agregaba una dosis de 0.5 ml/g, para luego dejarlas en un humidificador a 48°C hasta que alcanzara una humedad de 0 %, lo cual en general tardaba de 3 a 5 días, dependiendo de las condiciones ambientales.

Para continuar con el análisis y tras observar una tendencia lineal en las gráficas de $1/t_{ig}$ vs tiempo, se decide realizar una segunda sección experimental para las concentraciones de 5 %, 10 %, 20 %, 40 % y 100 %, utilizando solo tres puntos en cada una, con 3 repeticiones en cada uno, de forma tal de obtener una tendencia lineal simple y poder comparar con los resultados anteriores.

Con esto es posible construir un análisis más profundo de los resultados, y observar que el impacto en cuanto a la adición de retardante puro en la masa vegetal tiene un rendimiento decreciente, es decir, es posible establecer un óptimo para cada caso, lo cual se hace más evidente si tenemos en consideración el precio del mismo.

Como ya se mencionó, es relevante en este particular, mantener las condiciones constantes entre experimentos, por este motivo, asegurar que el α se mantenga constante entre ellas, para ello, es imprescindible conocer la masa que debe utilizarse y el volumen en el cual estará inserto. En este caso, el volumen se encontraba definido por un basket de confección personalizada, que se utilizó en cada repetición de cada experimento, por lo cual el volumen se mantenía constante; este último punto, deja como incógnita la masa, siendo necesario determinar la densidad de cada tipo de muestra, en este caso, en cada nivel de concentración.

La determinación de la densidad se realizó mediante procedimiento estándar, para lo cual se utilizó alcohol etílico, una pipeta, una pro pipeta y un vaso graduado de 10 ml. Para ello se inserta en el vaso una pequeña cantidad de acículas (inferior a 0.3 gramos) y luego se agrega alcohol etílico con la pro pipeta, en cantidades conocidas (medibles con la pro pipeta) hasta cubrir la muestra y se calcula la diferencia entre lo agregado y el volumen que marca el vaso, teniendo el volumen desplazado que se divide en la masa para obtener la densidad. Se obtienen los valores de la siguiente tabla:

Tabla 8.2: Densidad y masa por concentración

Concentración Retardante [%]	Densidad [g/cm ³]	masa [g]
0	0.2575	27.188
5	0.2848	30.412
10	0.3027	32.325
20	0.3398	36.286
40	0.3882	41.449
100	0.551	58.83

8.1.1. Recomendaciones

Particularmente para la realización de las mediciones, existen detalles que deben ser tomados en cuenta para poder replicar la experiencia realizada, no se establecen como condiciones base de las mediciones, dado que dependerá en gran parte de los equipos que se utilicen.

Un primer punto es el uso de la campana, entendiendo que el experimento busca ignición, es fácil comprender que existirá liberación de gases, por lo cual debe existir una campana permitiendo la salida de los mismo. Si bien este aspecto parece obvio y poco relevante, no debe olvidarse que si la campana es de potencia regulable, deben realizarse todas las experiencias con la misma potencia de la campana.

Un segundo punto a tener en cuenta es que el espacio, en lo posible debe mantenerse cerrado, es decir, evitar aperturas constantes de la puerta y que esta se quede

abierta, dado que las corrientes de aire que ingresan por este medio, también podrían afectar la medición, tanto en las condiciones como en el resultado; es posible mitigar este efecto, al colocar una placa removible en la cara frontal del dispositivo IFIT.

Además de ello, deben considerarse los cuidados propios del experimento y revisarlos antes de comenzar una medición por ejemplo que las termocupas se encuentren verticales, dado que al ser muy delgadas, una podría doblarse en diagonal, también es necesario revisar que el basket está limpio antes de llenarlo, que se posiciono bien en la celda de carga y coincide con el heater, para no dañar la placa ni el mismo heater.

8.2. Procedimiento Experimental

Para poder asegurar repetibilidad en las mediciones se trabajo con un procedimiento estándar de medición.

El primer paso consiste en obtener el material experimental, en este caso, acículas de pino radiata, de la misma localidad, para asegurar que sea la misma especie, en este caso *Pino Radiata*, cuyas coordenadas se aprecian en la figura 8.2.

Seguido de ello, las acículas deben ser secadas en un horno secador, por un mínimo de 12 horas, para asegurar que la humedad sea 0 % se recomienda una temperatura de 65°C .

Se masa la cantidad de acículas secas, para ello se recomienda hacer el proceso en forma paulatina (una cantidad que la balanza resista) e idealmente minimizando el tiempo que estas pasan fuera del horno, para asegurar que la humedad es 0 %.

Luego de ello, se colocan las acículas secas sobre una superficie plana, consiguiendo una delgada cama de acículas, las cuales se rocían con retardante, con la concentración deseada en proporción de $0,5 \frac{\text{ml}}{\text{g}}$.

Posteriormente deben colocarse las acículas con retardante en un horno secador, idealmente con la capacidad de medir la humedad, hasta que alcancen un 0 %. Cabe destacar que este proceso difiere en su duración, siendo el promedio de 3 días. Este paso se realiza para tener muestras que solo contengan acículas y retardante, logrando así aislar el efecto del agua.

Finalmente las muestras de acículas con retardante secas se ingresan en el IFIT, para este paso se debe incorporar en el basket una masa tal que se consiga el α deseado, para lo cual es importante conocer la densidad del material experimental (varía de acuerdo al nivel de retardante).

En la figura 8.2, se aprecian las piezas que componen el IFIT y su disposición, resulta importante asegurar que el archivo utilizado para el regulador de potencia (Variac), sea consistente con lo que se quiere medir, que el Kanthal se mantenga prendido durante las mediciones, así mismo, se recomienda vigilar que el DAQ se encuentre aislado de posibles alteraciones, como la estática; y conocer la distancia a la cual se debe imponer el motor lineal para que las mediciones resulten consistentes, para ello el punto de máxima emisión del heater debe estar centrado con la altura media del basket.



Figura 8.2: Procedimiento Experimental



9 | Validación

Primero es importante resaltar que se entiende por validación de resultados experimentales, esto es, la confirmación mediante análisis y evidencia objetiva el cumplimiento de las especificaciones de desempeño del método.

Para ello es necesario primero asegurar que el modelo sigue un comportamiento física y matemáticamente coherente, luego de ello, es necesario que los equipos estén correctamente calibrados para que los datos que entreguen sean coherentes y estén dentro del rango razonable.

En este sentido y como se ha mencionado a lo largo del escrito, se verifica el funcionamiento de los equipo antes de comenzar las mediciones, para el caso del variac con el funcionamiento del mismo, para la celda de carga, termocuplas y el DAQ mediante las medidas que se obtienen de los mismos.

En este sentido la calibración del heater realizada cobra una relevancia fundamental para poder asegurar los resultados y explica también la necesidad de comparar la parte esperimental y teórica (lo que se realiza en el capítulo de Resultados).

Debe tenerse presente que dados los componentes del heater, su eficiencia disminuirá a través del tiempo, por lo cual, se recomienda fuertemente realizar una calibración (con el radiómetro) al comenzar cada campaña experimental, para asegurar las condiciones del mismo. A modo personal y considerando lo aprendido durante las campañas realizadas, se recomienda realizar este proceso cuando existe un plazo de más de dos meses respecto a la última calibración, y en caso de ser posible, cuando exista un cambio estacional importante, por ejemplo entre verano e invierno, dado que entre estas dos estaciones los cambios de temperatura ambiente son sustanciales, lo que afecta su desempeño y durabilidad, debe tenerse en consideración que a lo largo de los años, estos fuertes cambios de temperatura podrían provocar fisuras o directamente que el mismo se quiebre.

Se recomienda también dada la variabilidad encontrada, revisar la densidad promedio de la campaña de medidas, para con ello asegurar que los experimentos se realizan con el α requerido, y que representación matemática también cumple con los rangos esperados.



10 | Resultados

Índice

10.1. Concentraciones Variables	69
10.2. Flujo Incidente Decreciente	71

10.1. Concentraciones Variables

Primeramente se trabaja para un caso cuyo flujo radiativo térmico incidente es constante, en el cual a las muestras del estrato vegetal se les agrega una determinada concentración de retardante.

Las mediciones realizadas se utilizan para validar el modelo matemático y numérico ya existente.

La unión de los experimentos con el modelo matemático, permite la realización de diversos apoyos gráficos, que permiten observar el comportamiento del fenómeno y compararlo.

Para el caso de los retardantes, es relevante primero exponer las propiedades con las cuales se realizó la investigación.

Tabla 10.1: Propiedades y parámetros utilizados

	Parámetro	Valor	Unidad
Aciculas	K_d	0.15	W / m K
	$c_{p,d}$	1.47	kJ/kg K
	α_f	0.09	V/V
	ρ_d	615	kg/m ³
Retardante	P_2O_5	32-34	%
	N_2	10	%
	ρ_r	1.38-1.42	g/cc
General	T_∞	298.15	
	l_z	0.02	m
	r_i	0.02	m
	r_o	0.06	m

En cuanto a la densidad ρ_f obtenida para cada concentración de retardante (Φ), se aprecia una relación lineal, con un $R=0.993$, lo cual provee una estimación confiable para cualquier Φ , de forma análoga, la densidad aparente ρ_a puede obtenerse del ajuste lineal $\rho_a = \rho_d(1 + 1,45\Phi)$ con $R^2 = 0.965$. Los resultados se aprecian en la figura 10.1

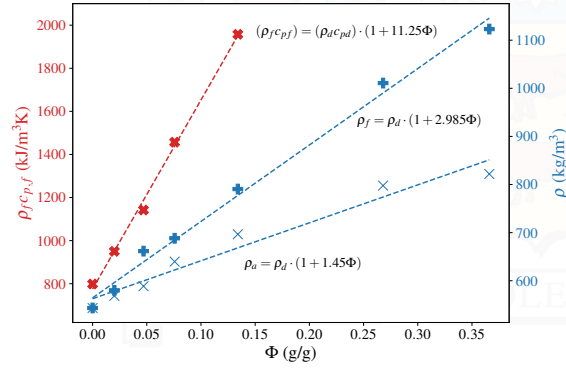


Figura 10.1: Densidad real y aparente de las acículas a distinta concentración

De esta misma campaña se obtiene el comportamiento de la temperatura para diversos flujos radiativos, con distintas concentraciones, apreciándose en la figura 10.2 el caso de concentración 0 % (a) y el caso de concentración 40 % (b)

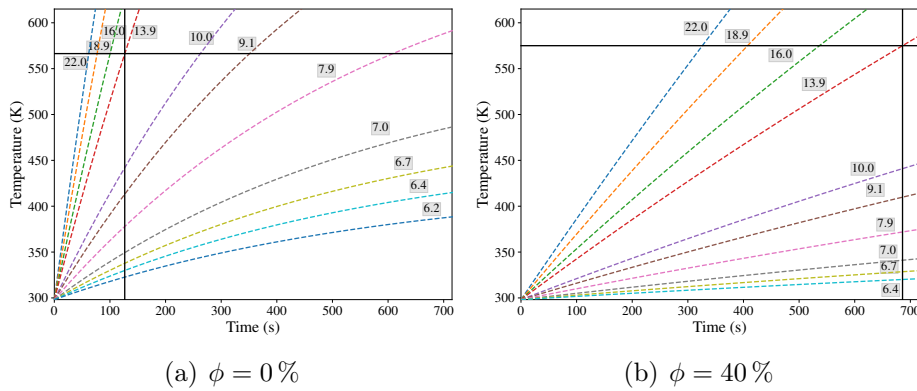


Figura 10.2: Evolución de la temperatura de acuerdo al tiempo de exposición, las etiquetas en las líneas punteadas representan el flujo incidente en kW/m^2 . (a) $\Phi = 0.0$ (concentración 0 % g/g) y (b) $\Phi = 0.268$ (concentración 40 % g/g).

Finalmente se pueden apreciar los resultados para las curvas de tiempos de ignición versus flujo de calor, donde se aprecia que la aplicación del retardante provoca un desplazamiento diagonal ascendente en los resultados, tal como en la figura 10.3.

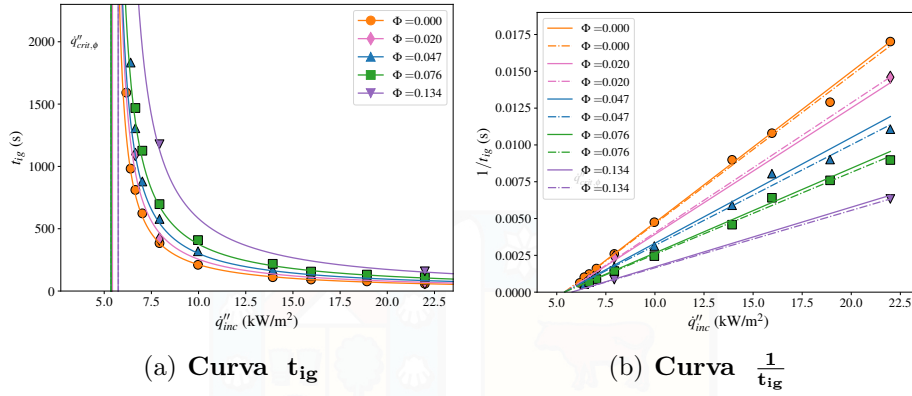


Figura 10.3: Modificación en las curvas de tiempo de Ignición y su Inverso

Considerando los costos que implica la aplicación del retardante, los resultados actuales permitirían generar un modelo de optimización para la compra y aplicación del mismo, lo cual sería altamente positivo en la prevención y como contramedida de los incendios.

10.2. Flujo Incidente Decreciente

Para este caso las muestras se trabajan sin retardante, o equivalentemente con una concentración del 0 %, esto permite establecer el efecto que tiene el decrecimiento por si solo en la muestra vegetal. Por lo demás debe considerarse que el decrecimiento trabajado es solamente lineal, dependiente del tiempo t y de la pendiente β .

En este caso los parámetros utilizados corresponden a:

Tabla 10.2: Propiedades y parámetros utilizados

	Parámetro	Valor	Unidad
Acículas	K_d	0.15	W / m K
	$c_{p,d}$	1.47	kJ/kg K
	α_f	0.09	V/V
	ρ_d	350 - 450	kg/m³
General	T_∞	298.15	
	l_z	0.02	m
	r_i	0.02	m
	r_o	0.06	m

Para efectos de la investigación, es relevante conocer el efecto de estos parámetros en el tiempo de ignición, y consecuentemente en $\frac{1}{t_{ig}}$, utilizando tres flujos de calor iniciales experimentales, se realiza una simulación de los efectos de beta en estos resultados como se observa en la figura 10.4.

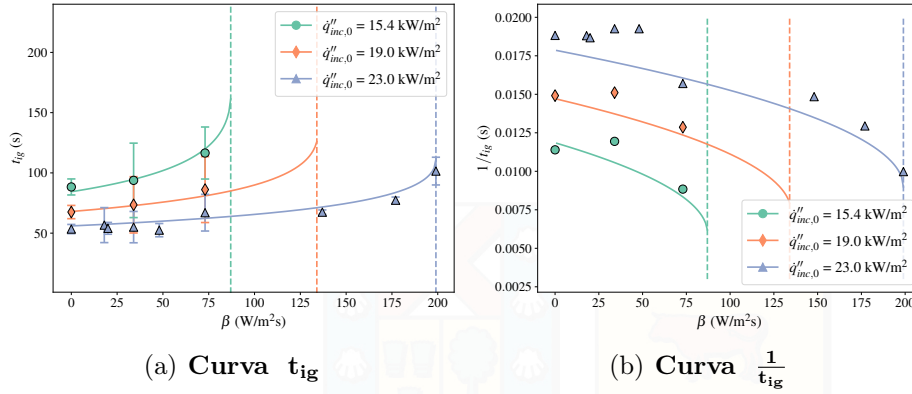


Figura 10.4: Resultados simulación respecto a β

Se aprecia entonces que existe un β_{cri} después del cual no debiera producirse ignición, este resultado resulta bastante relevante, dado que establece una cota máxima para el decrecimiento lineal, mismo resultado que se aprecia para el caso de $\frac{1}{t_{ig}}$.

En ambos casos se aprecia que la curva toma una forma similar a una asíntota, sin embargo, no debe confundirse con una, dado que en realidad no lo es, por cuanto no existe un beta para el cual el tiempo necesario para la ignición sea infinito. Lo anterior tiene un sentido físico, dado que si el flujo de calor es decreciente, en algún punto alcanzaría el $\dot{q}_{cri}$ y luego de esto quedaría por debajo del mismo, por ende no debiese producirse la ignición.

Del mismo modo se pueden simular los tiempos de ignición esperados para distintos decaimientos de curva, en este particular se toma en flujo experimental $\dot{q} = 23070 \frac{W}{m^2}$, cuyos resultados se aprecian en la figura 10.5

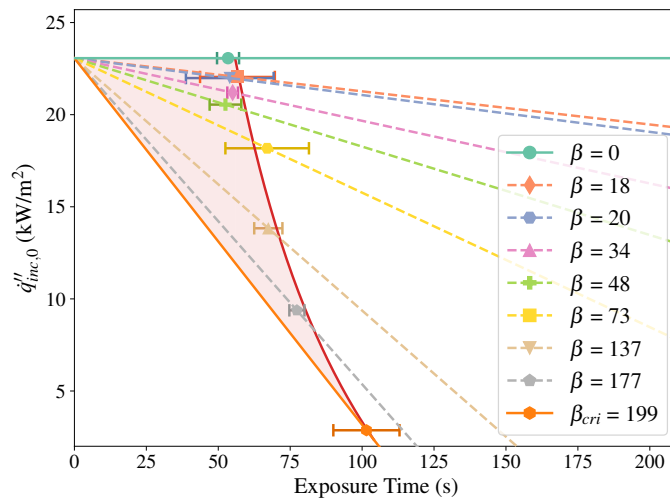


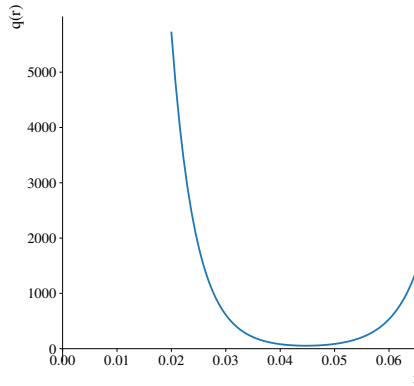
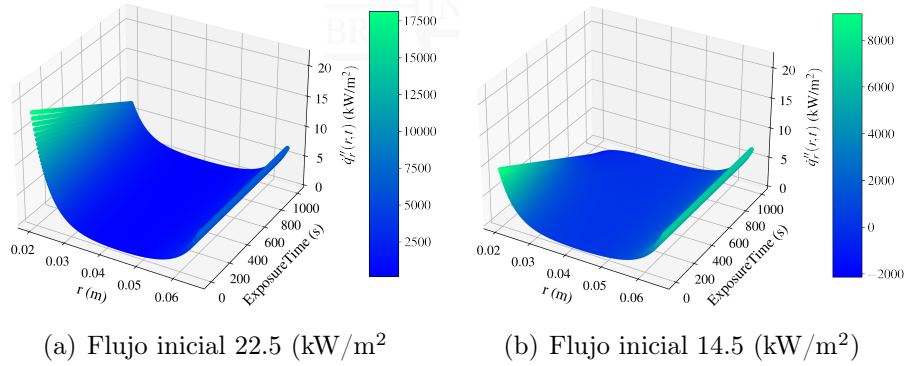
Figura 10.5: Tiempos Esperados de Ignición

De lo anterior se observa que existe un β_{cri} que corresponde a la pendiente máxi-

ma permitida para el flujo inicial, cabe resaltar que la curva decreciente corresponde a la curva de tiempos de ignición esperados para cada β , en cuanto al área verde, correspondería al área de tiempos factibles de ignición, considerando que el t_{ig} esperado corresponde al tiempo necesario para que la muestra alcance teóricamente la energía de activación requerida.

En la figura 10.4 y la figura 10.5, se aprecia además que el rango de error si bien resulta no despreciable, es bastante acotado dados los supuestos que se realizan para poder formular el modelo.

Resulta interesante ver como se comporta el flujo incidente en términos del radio, y como se conjugan la componente radial y temporal en un gráfico tridimensional.



(c) Componente Radial

Figura 10.6: Las figuras (a) y (b), muestran el comportamiento conjunto de las componentes temporal y radial para distintos flujos, mientras que la figura (c) es el comportamiento de la componente radial para $\dot{q}_0'' = 23067 \text{ W/m}^2$.

En el caso tridimensional se nota una proyección del caso radial, con una pendiente generada por la influencia de la componente temporal, en particular debe mencionarse que la pendiente será proporcional al β con el que se trabaje y además

que la superficie generada tendrá una mayor altura inicial mientras mayor sea el flujo incidente inicial, como se aprecia en la diferencia entre las figuras (a) y (b) de la figura 10.6.

Como se ha mencionado a lo largo del escrito, es necesario para comprender bien los resultados tener claridad sobre la sección experimental, en este sentido, resulta importante apreciar el comportamiento del heater para cada decrecimiento, en este sentido podemos apreciar que a medida que la pendiente es más inclinada, el comportamiento teórico y experimental se alejan, lo cual en gran parte se debe al modelo de calibración del VARIAC, dado que más puntos quedan fuera de la interpolación, al mismo tiempo que el comportamiento del equipo se hace más errático, lo que hace más complejo modelarlo.

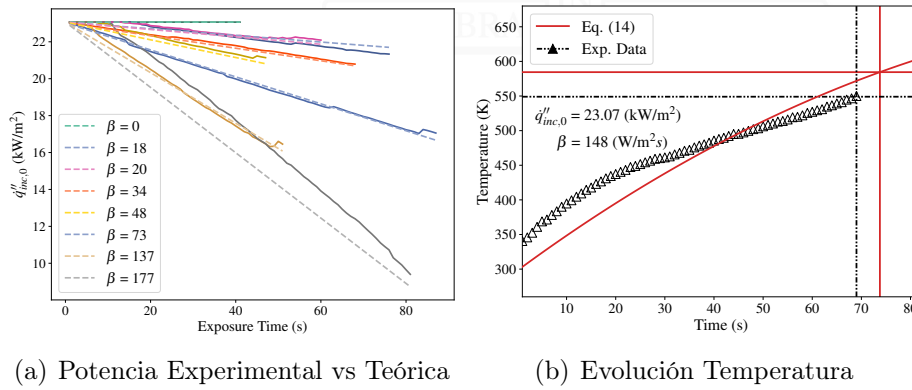


Figura 10.7: (a) Muestra los resultados experimentales y los teóricos de cada decrecimiento (b) Muestra la evolución de la temperatura para $q''_0 = 23,07 \text{ KW}/\text{m}^2$

En la figura 10.7 (a) se observa el comportamiento del VARIAC para distintos decaimientos con línea continúa de color solido, mientras que el comportamiento teórico se observa con una línea segmentada, por otro lado en subfigura (b) se aprecia el comportamiento real de la temperatura en la muestra para un flujo inicial $q''_0 = 23,07 \text{ KW}/\text{m}^2$, el comportamiento real se aprecia mediante triángulos negros, los cuales dan cuenta que la aproximación del modelo no es perfecta, pero es cercana; además de ello, se aprecia la temperatura y tiempo a la que esta muestra hace ignición, mientras que la línea roja sólida muestra como se esperaba que fuese dicha evolución, presentándose el tiempo y temperatura teóricas de ignición, notese que en este caso ambas son más altas que la real, apuntando a que existen ciertas componentes y variables que pueden mejorarse en el modelo para hacerlo cada vez más certero.

11 | Análisis de Incertidumbre

Se entiende como “Análisis de Incertidumbre” a la caracterización de la dispersión de los datos; proporciona una estimación cuantitativa de los valores esperados para un resultado.

En los resultados presentados, puede apreciar un rango de error o variabilidad de los datos para las mediciones realizadas; estadísticamente hablando, al aumentar la cantidad de repeticiones para cada experimento, dicho error y variabilidad debería disminuir.

Para poder llevar a cabo este análisis, primero se necesita definir cual es el mensurado, siendo para los casos analizados el tiempo de ignición.

Como fuentes de incertidumbre, tenemos en primer punto el error aleatorio, al cual todo proceso es susceptible.

Luego de ello se encuentra el error sistemático, que en este caso correspondería a la velocidad de reacción del evaluador para marcar el fin de la medición, lo que depende de la observación directa del proceso, en este sentido, hasta este punto el proceso se considera adecuado, dado que se hace un click en el programa del software “LabView” en cuanto se observa ignición (llama), para poder mejorar este proceso, se incorporaron cámaras Bassler para apreciar con mayor precisión no solo el momento de la ignición sino también la posición. Hasta el momento en que se redacta e presente no se ha podido realizar un merge completo de los sistemas.

Para el caso presentado se puede analizar la incertidumbre empleando un análisis estadístico de las repeticiones, para ello se utilizan los estadísticos de promedio y desviación estándar muestral.

Es posible ampliar el análisis en esta área particular al utilizar dos enfoques conocidos en el área, por un lado las “Simulaciones de Monte Carlo”, que consiste en la replicación de los parámetros de entrada o parámetros extraídos aleatoriamente a partir de una distribución paramétrica. El segundo método corresponde al “Boots-trapping”, que es un procedimiento de remuestreo aplicando los datos de entrada obtenidos empíricamente. Particularmente en este trabajo no se han incorporado, sin embargo, se propone como una mejora para futuros escritos del área.

En las tablas 11.1 y 11.2 se presenta el resumen de los estadísticos correspondientes a cada caso.

Tabla 11.1: Estadísticos Caso Rampa Variable

Rampa	$\bar{t}_{ig}$	Desv Estándar
0	53.4	3.83
18	56.67	14.52
20	54	4.89
34	55	13
48	52.5	5.5
73	67	15.24
137	67.4	1.85
177	77.3	2.62
199	101.5	11.5

Se aprecia en la tabla 11.1 que los tiempos de ignición medios cumplen, en general, con la tendencia esperada (mayor rampa, mayor tiempo), salvo por la rampa $\beta = 48$, donde probablemente se requieren más repeticiones para que la tendencia se complete.

En cuanto al caso de concentraciones de retardante, se aprecia el resultado para cada flujo inicial probado en cada una de las concentraciones, debe tenerse presente que en este caso al ser mediciones de duración mucho mayor, tienden a existir también desviaciones estándar mayores.

Tabla 11.2: Estadísticos Caso Retardante

$\dot{q}_0''$	Concentración	$\bar{t}_{ig}$	Desv Estándar
21.99	0 %	58.75	14.51
18.92	0 %	77.50	10.16
15.96	0 %	92.60	13.60
13.93	0 %	111.22	15.80
9.97	0 %	210.43	11.10
7.93	0 %	384.60	52.23
7.02	0 %	623.22	165.77
6.65	0 %	811.20	178.09
6.4	0 %	982.00	231.86
6.17	0 %	1591.88	552.93
21.99	5 %	68.50	13.66
7.93	5 %	418.00	42.80
6.65	5 %	1095.75	178.86
21.99	10 %	90.33	11.44
18.92	10 %	111.00	22.91
15.96	10 %	124.25	11.09
13.93	10 %	169.40	9.85
9.97	10 %	319.25	40.58
7.93	10 %	578.75	99.18
7.02	10 %	879.25	127.92
6.65	10 %	1306.33	332.82
6.4	10 %	1833.40	666.57
21.99	20 %	111.43	11.30
18.92	20 %	131.67	25.90
15.96	20 %	156.00	25.93
13.93	20 %	218.17	25.60
9.97	20 %	408.67	55.42
7.93	20 %	697.25	39.28
7.02	20 %	1126.00	156.26
6.65	20 %	1468.50	597.75
21.99	40 %	158.00	5.35
7.93	40 %	1177.67	92.06
21.99	80 %	189.60	6.42
7.93	80 %	1413.20	110.48
21.99	100 %	168.00	0.00
7.93	100 %	1377.67	231.54



12 | Conclusiones

Resulta importante llevar a cabo la labor investigativa en este tipo de problemáticas, no solo para comprender los fenómenos que nos rodean, sino también para crear de a poco y conforme tenemos nueva y mejor información, distintas medidas y modelos, correspondientes al fenómeno en estudio.

Para ello resulta primordial conocer el equipamiento con el que se trabaja, la configuración requerida, las limitantes que poseen y por supuesto, la experiencia práctica con las mismas, para poder determinar diversas fuentes de error e ir creando nuevos modelos mejorados que permitan trabajar con lo que se conoce.

A ello debemos sumarle el diseño experimental, dado que si bien puede parecer fácil seguir un procedimiento estandarizado, crearlo conlleva grandes dificultades, una de las más notorias es asegurar la repetibilidad de los experimentos realizados, así como independizar los factores que afectan al proceso.

En cuanto al modelamiento matemático y la simulación numérica, es requisito fundamental comprender el fenómeno de forma física, para poder verificar si el modelo sigue una tendencia que tenga sentido lógico matemático y físico, del mismo modo que se debe conocer como trabajan las herramientas computacionales que se utilizan, para con ello poder realmente llevar a cabo la simulación y visualización esperada.

Para el caso del decaimiento del flujo radiativo, resulta interesante comprender que existe una pendiente máxima teórica para la ignición de un material, es decir, si fuéramos capaces de aislar los factores de la misma, podríamos notar que existe un limitante para este valor; esto abre la posibilidad a buscar alguna manera de disminuir este β_{cri} , de tal forma que las acículas tuvieran menos posibilidad de entrar en ignición, permitiendo a futuro mitigar las situaciones de incendios forestales.

12.1. Perspectivas

Todo trabajo de investigación y desarrollo científico es susceptible de mejora, es más, la idea fundamental en estos es proveer una base sólida sobre la cual se pueda seguir construyendo y aportar al saber humano.

En este sentido, se recomienda para siguientes trabajos en la misma área, incorporar variables que ayuden no solo a disminuir la variabilidad y error del modelo, sino a simular de forma más completa y realista la problemática; algunas de estas pueden ser:

- Velocidad del viento.
- Distribución de probabilidad de la densidad de las acículas.
- Multiplicidad de especies vegetales.
- Variación de masa en el proceso.
- Entre otras.

En forma similar, es posible estudiar otros casos para la variabilidad del flujo radiativo térmico, como puede ser:

- Crecimiento Lineal.
- Crecimiento / Decrecimiento Exponencial.
- Crecimiento / Decrecimiento Logarítmico.
- Crecimiento / Decrecimiento Cuadrático.
- Crecimiento / Decrecimiento Polinómico.
- Entre otras.

Estas son solo algunas de las condiciones que se pueden aplicar para mejorar el modelo y con ello mejorar la comprensión sobre el fenómeno en cuestión, debe tenerse presente, que además es posible aplicar otras metodologías que si bien cambiarían el modelo actual, podrían presentarse como una mejor solución para el problema en cuestión.

Bibliografía

- [1] CH Bamford, J Crank, and DH Malan. The combustion of wood. part i. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 42, pages 166–182. Cambridge University Press, 1946. 4
- [2] DI Lawson and u DL Simms. The ignition of wood by radiation. *British Journal of Applied Physics*, 3(9):288, 1952. 4
- [3] FM Sauer. Ignition of black alpha-cellulose papers by thermal radiation, square wave pulse. Technical report, CALIFORNIA COMPUTER PRODUCTS INC DOWNEY, 1956. 4
- [4] PH Thomas, DL Simms, and CR Theobald. The interpretation of some experimental data on the ignition of wood. *Fire Safety Science*, 411:1–1, 1959. 4
- [5] DL Simms. On the pilot ignition of wood by radiation. *Combustion and Flame*, 7:253–261, 1963. 4
- [6] Stanley Martin. Diffusion-controlled ignition of cellulosic materials by intense radiant energy. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 10, pages 877–896. Elsevier, 1965. 4
- [7] WD Weatherford Jr and DM Sheppard. Basic studies of the mechanism of ignition of cellulosic materials. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 10, pages 897–910. Elsevier, 1965. 4
- [8] J Rivera, N Hernández, JL Consalvi, P Reszka, J Contreras, and A Fuentes. Ignition of wildland fuels by idealized firebrands. *Fire Safety Journal*, 120: 103036, 2021. 4, 8.1
- [9] Morgan J Hurley, Daniel T Gottuk, John R Hall Jr, Kazunori Harada, Erica D Kuligowski, Milosh Puchovsky, John M Watts Jr, CHRISTOPHER J WIECZOREK, et al. *SFPE handbook of fire protection engineering*. Springer, 2015. 5.5.2, 5.5.2, 5.5.2, 5.5.2, 5.5.3, 5.5.4
- [10] Frederick W Mowrer. Fundamentals of the fire hazards of materials. *Handbook of Building Materials for Fire Protection*, 2004. 5.5.2, 5.5.2

- [11] Joseph L Jackson. Spontaneous ignition temperatures. *Industrial & Engineering Chemistry*, 43(12):2869–2870, 1951.
- [12] Diana Gómez de la Rúa and Fernando Díez Martín. La domesticación del fuego durante el pleistoceno inferior y medio: estado de la cuestión. *Veleia*, 26:189–216, 2009.
- [13] James G Quintiere. *Fundamentals of fire phenomena*. John Wiley Chichester, 2006.
- [14] Sebastián Martinuzzi, Susan I Stewart, David P Helmers, Miranda H Mockrin, Roger B Hammer, and Volker C Radeloff. The 2010 wildland-urban interface of the conterminous united states. *Research Map NRS-8. Newtown Square, PA: US Department of Agriculture, Forest Service, Northern Research Station. 124 p.[includes pull-out map].*, 8:1–124, 2015.
- [15] A Carlos Fernandez-Pello. Wildland fire spot ignition by sparks and firebrands. *Fire Safety Journal*, 91:2–10, 2017.
- [16] Stefan H Doerr and Cristina Santín. Global trends in wildfire and its impacts: perceptions versus realities in a changing world. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 371(1696):20150345, 2016.
- [17] John P Woycheese, Patrick J Pagni, and Dorian Liepmann. Brand propagation from large-scale fires. *Journal of Fire Protection Engineering*, 10(2):32–44, 1999.
- [18] Ralph A Anthenien, D Tse Stephen, and A Carlos Fernandez-Pello. On the trajectories of embers initially elevated or lofted by small scale ground fire plumes in high winds. *Fire Safety Journal*, 41(5):349–363, 2006.
- [19] N Sardoy, JL Consalvi, A Kaiss, AC Fernandez-Pello, and B Porterie. Numerical study of ground-level distribution of firebrands generated by line fires. *Combustion and Flame*, 154(3):478–488, 2008.
- [20] Horatio Scott Carslaw and John Conrad Jaeger. Conduction of heat in solids. Technical report, Clarendon Press,, 1959.
- [21] Geoffrey Cox and DD Drysdale. *Combustion fundamentals of fire*. Academic press London, 1995. s 40.
- [22] CL Tien, KY Lee, and AJ Stretton. Radiation heat transfer. *SFPE handbook of fire protection engineering*, 3, 2002.
- [23] Warren M Rohsenow, James P Hartnett, Young I Cho, et al. *Handbook of heat transfer*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1998.
- [24] Y Cengel and A Ghajar. Fundamentals of heat and mass transfer, 2002.
- [25] Michael F Modest. *Radiative heat transfer*. Academic press, 2013.

- [26] EM Sparrow. Discussion:“radiative exchange among non-lambert surfaces”(sarojim), af, and hottel, hc. *ASME J. Heat Transfer*, 88:37–43, 1966.
- [27] RC Birkebak, E Ma Sparrow, ERG Eckert, and JW Ramsey. Effect of surface roughness on the total hemispherical and specular reflectance of metallic surfaces. *ASME J. Heat Transfer*, 1964.
- [28] R Wooldridge. Advanced engineering mathematics. by cr wylie. pp. xiv, 813. 1966.(mcgraw-hill.). *The Mathematical Gazette*, 51(378):358–359, 1967.
- [29] KGT Hollands. Directional selectivity, emittance, and absorptance properties of vee corrugated specular surfaces. *Solar Energy*, 7(3):108–116, 1963.
- [30] EM Sparrow and RD Cess. Radiation heat transfer, hemisphere. *Washington, Augmented edition*, 1978.
- [31] Ephraim M Sparrow. *Absorption and Emission Characteristics of Diffuse Spherical Enclosures: EM Sparrow and VK Jonsson*. National Aeronautics and Space Administration, 1962.
- [32] William Morrow Kays. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- [33] Samuel L Manzello, Alexander Maranghides, and William E Mell. Firebrand generation from burning vegetation1. *International Journal of Wildland Fire*, 16(4):458–462, 2007.
- [34] Samuel L Manzello, John R Shields, Thomas G Cleary, Alexander Maranghides, William E Mell, Jiann C Yang, Yoshihiko Hayashi, Daisaku Nii, and Tsuyoshi Kurita. On the development and characterization of a firebrand generator. *Fire Safety Journal*, 43(4):258–268, 2008.
- [35] Alexander Filkov, Sergey Prohanov, Eric Mueller, Denis Kasymov, Pavel Martynov, Mohamad El Houssami, Jan Thomas, Nicholas Skowronski, Bret Butler, Michael Gallagher, et al. Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest. *Proceedings of the Combustion Institute*, 36(2):3263–3270, 2017.
- [36] P Mindykowski, A Fuentes, JL Consalvi, and B Porterie. Piloted ignition of wildland fuels. *Fire Safety Journal*, 46(1-2):34–40, 2011.
- [37] Virginie Tihay, Albert Simeoni, Paul-Antoine Santoni, Lucile Rossi, Jean-Pierre Garo, and Jean-Pierre Vantelon. Experimental study of laminar flames obtained by the homogenization of three forest fuels. *International journal of thermal sciences*, 48(3):488–501, 2009.
- [38] N Hernández, A Fuentes, JL Consalvi, and JC Elicer-Cortés. Spontaneous ignition of wildland fuel by idealized firebrands. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 95:88–95, 2018.

- [39] David Vernon Widder. *Advanced calculus*. Courier Corporation, 1989.
- [40] Lynn Harold Loomis and Shlomo Sternberg. *Advanced calculus*. World Scientific, 1968.
- [41] James Stewart, Daniel K Clegg, and Saleem Watson. *Multivariable calculus*. Cengage Learning, 2020.
- [42] Tom M Apostol. *Calculus, Volume 1*. John Wiley & Sons, 1991.
- [43] George F Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press, 2016.
- [44] James Stewart, Daniel K Clegg, and Saleem Watson. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning, 2020.
- [45] John Stillwell. *Mathematics and its history*. (revised), 2000.
- [46] Harry M Schey and Mario Iona. Div, grad, curl, and all that. *American Journal of Physics*, 42(1):86–86, 1974.
- [47] Kenneth K Kuo. *Principles of combustion*. Elsevier Science Pub. Co. Inc., New York, NY, 1986.
- [48] Forman A Williams. *Combustion theory*. CRC Press, 2018.
- [49] David W Hahn and M Necati Özisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 2012.
- [50] N Hernández, A Fuentes, P Reszka, and AC Fernández-Pello. Piloted ignition delay times on optically thin pmma cylinders. *Proceedings of the Combustion Institute*, 37(3):3993–4000, 2019.
- [51] John R Howell. Radiative transfer in porous media. *Handbook of Porous Media*. New York: Marcel Dekker, pages 663–698, 2000.
- [52] K Vafai, HA Hadim, and JR Howell. Radiative transfer in porous media, handbook of porous media, 2000.
- [53] Victor Henner, Tatyana Belozerova, and Kyle Forinash. *Mathematical methods in physics: Partial differential equations, fourier series, and special functions*. CRC Press, 2009.
- [54] Victor Henner, Tatyana Belozerova, and Mikhail Khenner. *Ordinary and partial differential equations*. CRC Press, 2013.
- [55] Victor Henner, Tatyana Belozerova, and Alexander Nepomnyashchy. *Partial Differential Equations: Analytical Methods and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2019.

- [56] Michihiko Matsuda. *First order algebraic differential equations: a differential algebraic approach*, volume 804. Springer, 2006.
- [57] Y Katto. Critical heat flux. *International Journal of Multiphase Flow*, 20:53–90, 1994.
- [58] R Byron Bird, Warren E Stewart, and Edwin N Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, 2001.
- [59] M Necati Özisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 1993.
- [60] M Necati Ozisik. *Heat transfer: a basic approach*, volume 1. McGraw-Hill New York, 1985.
- [61] Donald A Nield, Adrian Bejan, et al. *Convection in porous media*, volume 3. Springer, 2006.
- [62] Pedro Reszka, JJ Cruz, J Valdivia, F González, J Rivera, C Carvajal, and A Fuentes. Ignition delay times of live and dead pinus radiata needles. *Fire safety journal*, 112:102948, 2020.
- [63] DL Simms. Damage to cellulosic solids by thermal radiation. *Combustion and Flame*, 6:303–318, 1962.
- [64] Jean-Claude Michel, Hervé Moulinec, and Pierre Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172(1-4):109–143, 1999.
- [65] Bruno A Boley. A method of heat conduction analysis of melting and solidification problems. *Journal of Mathematics and Physics*, 40(1-4):300–313, 1961.
- [66] Harvey P Yagoda and Bruno A Boley. Starting solutions for melting of a slab under plane or axisymmetric hot spots. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 23(2):225–246, 1970.
- [67] Bruno A Boley and Harvey P Yagoda. The starting solution for two-dimensional heat conduction problems with change of phase. *Quarterly of Applied Mathematics*, 27(2):223–246, 1969.
- [68] AM Grishin, AN Golovanov, L Yu Kataeva, and EL Loboda. Formulation and solution of the problem of drying of a layer of combustible forest materials. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 37(1):57–66, 2001.
- [69] John Crank and J Crank. *Free and moving boundary problems*. Oxford University Press, USA, 1984.
- [70] MA Delichatsios, TH Panagiotou, and F Kiley. The use of time to ignition data for characterizing the thermal inertia and the minimum (critical) heat flux for ignition or pyrolysis. *Combust. Flame*, 84(3-4):323–332, 1991.

- [71] Mohammed M Khan, John L De Ris, and Steve D Ogden. Effect of moisture on ignition time of cellulosic materials. *Fire Safety Science*, 9:167–178, 2008.
- [72] Pierrick Mindykowski, M Jørgensen, Staffan Svensson, and Grunde Jomaas. A simple correlation for monitoring the ignition propensity of wet nordic spruce wood. *Fire Safety J.*, 107:186–192, 2019.
- [73] M Larini, F Giroud, B Porterie, and J-C Loraud. A multiphase formulation for fire propagation in heterogeneous combustible media. *Int. J. of Heat Mass Tran.*, 41(6-7):881–897, 1998.
- [74] M.J Spearpoint and J.G Quintiere. Predicting the piloted ignition of wood in the cone calorimeter using an integral model — effect of species, grain orientation and heat flux. *Fire Safety J.*, 36(4):391–415, 2001.
- [75] Roberto Parot, José Ignacio Rivera, Pedro Reszka, José Luis Torero, and Andrés Fuentes. A simplified analytical model for radiation dominated ignition of solid fuels exposed to multiple non-steady heat fluxes. *Combust. Flame*, 237:111866, 2022.
- [76] Albert Simeoni, JC Thomas, Pauline Bartoli, P Borowieck, P Reszka, F Colella, Paul-Antoine Santoni, and José Luis Torero. Flammability studies for wildland and wildland–urban interface fires applied to pine needles and solid polymers. *Fire Safety J.*, 54:203–217, 2012.
- [77] Colomba Di Blasi. Modeling chemical and physical processes of wood and biomass pyrolysis. *Prog. Energ. Combust.*, 34(1):47–90, 2008.
- [78] Pedro Reszka and José L. Torero. Fire behavior of timber and lignocellulose. In M Belgacem and A Pizzi, editors, *Lignocellulosic Fibers and Wood Handbook*, chapter 22, pages 553–581. John Wiley & Sons, Ltd, Hoboken, NJ, 2016.
- [79] Marc Janssens. Piloted ignition of wood: a review. *Fire Mater.*, 15(4):151–167, 1991.
- [80] James K Carson. A versatile effective thermal diffusivity model for porous materials. *Int. J. Thermophys.*, 42(10):1–12, 2021.
- [81] I Krichever. Algebraic-geometrical n-orthogonal curvilinear coordinate systems and solutions to the associativity equations. *arXiv preprint hep-th/9611158*, 1996.
- [82] George B Arfken and Hans J Weber. Mathematical methods for physicists, 1999.
- [83] David J Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005), 1960.
- [84] Ivan Netuka. The change-of-variables theorem for the lebesgue integral. *Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics*, 19:37–42, 2011.

- [85] Jidong Zhao and Dorival Pedroso. Strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates. *International Journal of Solids and Structures*, 45(11-12): 3507–3520, 2008.
- [86] DR Hamann. Generalized-gradient functionals in adaptive curvilinear coordinates. *Physical Review B*, 54(3):1568, 1996.
- [87] Murray R Spiegel. Vector analysis and an introduction to tensor analysis. *PHYSICS E- BOOKS*, 2021.
- [88] José Ignacio Rivera. Acerca de un modelo general de ignición para combustibles sólidos. Master’s thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2021.
- [89] Francisco Valenzuela, JI Rivera, F Ebensperger, C Alvarez, L Escandar, P Reszka, and A Fuentes. Understanding the role of fire retardants on the discontinuous ignition of wildland fuels. UNDER Review, December 2021.
- [90] José Rivera, F Ebensperger, F Valenzuela, P Reszka, F Auat Cheein, and A Fuentes. Ignition of wildland fuels exposed to a time-decreasing incident heat flux. UNDER Review, July 2022.



