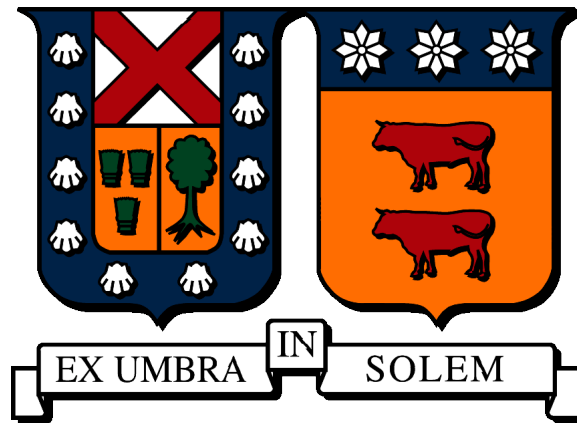


UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO-CHILE



Desigualdad de Carleman discreta y estabilidad de un problema inverso de corrosión discreto

Tesis presentada por:

Ignacio Andrés Allendes Massoud

*Como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemática y al título profesional de Ingeniero Civil Matemático*

Director de Tesis:

Rodrigo Lecaros Lira

Marzo, 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Desigualdad de Carleman discreta y estabilidad de un problema inverso de corrosión discreto

Nombre del candidato(a): Ignacio Andrés Allendes Massoud

Carrera / Grado: Magíster en Ciencias, Mención Matemática

Campus: Valparaíso

Departamento: Departamento de Matemáticas

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Rodrigo Antonio Lecaros Lira, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 02-04-2026

Firma: _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 28-03-2026

Firma: _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

Desigualdad de Carleman discreta y estabilidad de un problema inverso de corrosión discreto.

AUTOR: Ignacio Andrés Allendes Massoud.

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática y al título profesional de Ingeniero Civil Matemático de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes	Institución
Nicolás Carreño	Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.
Miguel Carrasco	Universidad de los Andes, Chile.
Ariel Pérez	Universidad del Bío-Bío, Chile.
Rodrigo Lecaros	Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Santiago, Marzo 2026.

Resumen

En este trabajo se considera el problema inverso de corrosión discretizado mediante diferencias finitas. A diferencia del caso continuo, el operador laplaciano discreto no satisface en general una propiedad de continuación única, lo que impide esperar resultados de unicidad y estabilidad clásicos para un parámetro de malla fijo. En este contexto, se obtiene un resultado de estabilidad logarítmica en el marco discreto, válido de manera asintótica respecto del parámetro de malla h . Para ello, se demuestra una desigualdad de Carleman discreta en dos dimensiones, a partir de la cual se deduce un principio de continuación única cuantificado para funciones discretas, que permite establecer el resultado de estabilidad. Hasta donde sabemos, este constituye el primer resultado de estabilidad para el problema de corrosión discreto, así como de continuación única cuantificada en el marco discreto, que no impone condiciones de borde.

Abstract

In this work, we consider the inverse corrosion problem discretized by finite differences. Unlike the continuous case, the discrete Laplacian operator does not generally satisfy a unique continuation property, which prevents one from expecting classical uniqueness and stability results for a fixed mesh parameter. In this context, we obtain a logarithmic stability result in the discrete setting, valid asymptotically with respect to the mesh parameter h . To this end, we establish a discrete Carleman inequality in two dimensions, from which a quantified unique continuation principle for discrete functions is derived, allowing us to prove the stability result. To the best of our knowledge, this constitutes the first stability result for the discrete corrosion problem, as well as the first quantified unique continuation result in the discrete framework that does not impose boundary conditions.

Índice general

Índice de figuras	7
Tabla de Símbolos	8
1. Introducción	9
1.1. Problema inverso de corrosión	9
1.2. Unicidad y estabilidad en el modelo continuo	11
1.3. Motivación para el análisis discreto	12
1.4. Objetivos y contribuciones de la tesis	15
1.5. Estructura del trabajo	16
2. Marco teórico	17
2.1. Mallas discretas	17
2.2. Funciones y operadores discretos	20
2.3. Normas discretas	22
2.4. Cálculo discreto	23
2.5. Refinamiento de malla y operador de extensión	26
2.6. Función peso	30
2.6.1. Definición y regularidad	30
2.6.2. Relación con operadores discretos	31
2.7. Problema inverso discretizado	33
2.7.1. Problema directo	33
2.7.2. Problema inverso	34

2.7.3. Propiedades conservadas del continuo	35
3. Desigualdad de Carleman discreta en 2D	38
3.1. Resultado principal	40
3.2. Desigualdad para $D_{1,2h} + iD_{2,2h}$	40
3.3. Formulación preliminar del Carleman	44
3.4. Estimaciones de error	51
3.5. Conclusión de la desigualdad	58
4. Estabilidad del problema inverso de corrosión discretizado	62
4.1. Definiciones y normas de borde	63
4.2. Propiedad de continuación única cuantificada discreta	64
4.3. Estabilidad del problema de corrosión	69
4.4. Discusión del resultado	71
5. Conclusiones y discusión	72
A. Resultados auxiliares	74
Bibliografía	84

Índice de figuras

1.1. Esquema del sistema (1.1.1) con frontera accesible γ reducida.	10
1.2. Flujo lógico presentado en [6, 7].	12
1.3. Contra-ejemplo de continuación única discreta	13
2.1. Dominio discreto y dualizaciones	18
2.2. Dominio discreto y frontera	19
2.3. Fronteras tangenciales	20
2.4. Extensión a esquinas y exterior	27
2.5. Extensión nula	27
3.1. Flujo de demostración de la desigualdad de Carleman	39

Lista de símbolos

VARIABLES FÍSICAS

u	Potencial electrostático (solución continua o discreta según el contexto)
q	Coefficiente de corrosión (parámetro continuo o discreto según el contexto)
f	Flujo de corriente (parámetro continuo o discreto según el contexto)

Geometría y Mallas

Ω	Dominio continuo (cuerpo metálico)
\mathcal{W}_h	Malla primal discreta de paso h
$\mathcal{W}_{h,k}^*$	Malla dual en la dirección k
$(\mathcal{W}_h)_k^\circ$	Malla dual interior en la dirección k
$\partial\mathcal{W}_h$	Frontera discreta completa
$(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*$	Frontera dual tangencial
$(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ$	Frontera dual tangencial interior
γ_h	Frontera discreta accesible (observación)
$\Gamma_{0,h}$	Frontera discreta inaccesible (corrosión)

Operadores Discretos

Δ_h	Laplaciano discreto
$D_{k,h}$	Operador de diferencia finita en dirección k
$A_{k,h}$	Operador promedio en dirección k
$D_{\nu,h}$	Derivada normal discreta
$D_{\tau,h}$	Derivada tangencial discreta
$t_{r,h}^k$	Operador traza discreto en dirección k
\mathcal{M}	Operador de medición

Análisis de Carleman

s	Parámetro de Carleman
$\varphi_0, \varphi_1, \varphi$	Funciones de peso para la desigualdad de Carleman

Capítulo 1

Introducción

En el estudio de los problemas inversos, una cuestión fundamental radica en determinar si las propiedades de estabilidad y unicidad obtenidas en el marco continuo se preservan tras la discretización numérica. Si bien en diversos contextos se espera una transferencia natural de estas propiedades, la literatura especializada advierte que esta transición puede presentar patologías críticas [8]. En particular, propiedades finas como la continuación única o la estabilidad del problema inverso suelen verse comprometidas en el marco discreto si no se consideran esquemas adecuados. Este desafío motiva el desarrollo de análisis que aseguren un comportamiento asintótico uniforme respecto al parámetro de discretización, tal como se ha abordado recientemente en el estudio de problemas de tipo Calderón con datos parciales [14].

Esta observación subraya la necesidad de analizar con rigor la adaptación de las herramientas analíticas al entorno discreto. En este sentido, las desigualdades de Carleman —fundamentales para establecer resultados de estabilidad en el continuo— requieren una formulación y un alcance específicos en el marco de las diferencias finitas, donde la estructura del operador discreto altera profundamente la propagación de la información y el control de los errores de aproximación.

1.1. Problema inverso de corrosión

En esta tesis estudiamos un problema inverso de corrosión, el cual consiste en determinar un coeficiente de impedancia definido sobre una parte inaccesible de la frontera a partir de mediciones electrostáticas realizadas en una región accesible. Este tipo de problemas surge naturalmente en aplicaciones donde el acceso directo al material es limitado, lo que motiva

el desarrollo de herramientas analíticas robustas tanto en el marco continuo como en su discretización.

Más precisamente, consideramos el modelo expuesto en Inglese [13]: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio que representa un cuerpo metálico. En la sección accesible de la frontera, $\gamma \subset \partial\Omega$, se impone un flujo de corriente f conocido, mientras que en la frontera inaccesible, $\Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \bar{\gamma}$, actúa un coeficiente de corrosión q desconocido. Bajo estas condiciones, el potencial electrostático u satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = f, & \text{en } \gamma, \\ \partial_\nu u + qu = 0, & \text{en } \Gamma_0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

En la Figura 1.1 se muestra un esquema del problema físico.

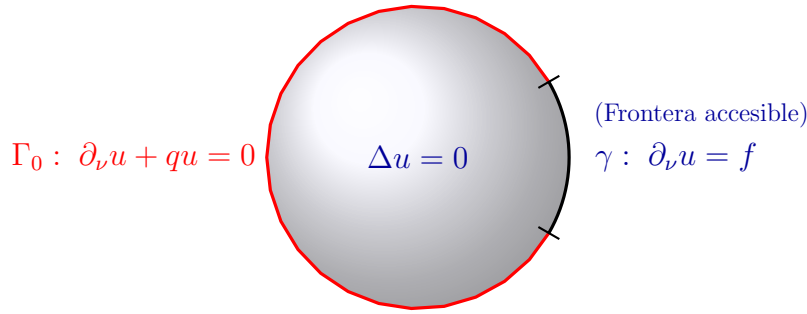


Figura 1.1: Esquema del sistema (1.1.1) con frontera accesible γ reducida.

El problema inverso consiste en determinar q en Γ_0 a partir de las mediciones de u y $\partial_\nu u$ en γ . Más precisamente, sea \mathcal{M} el operador de medición que asocia a cada coeficiente de corrosión q el par de datos de frontera:

$$\mathcal{M}(q) := (u|_\gamma, \partial_\nu u|_\gamma),$$

donde u es la solución del problema directo correspondiente.

Se dice que el problema inverso presenta:

- *Unicidad*: si $\mathcal{M}(q_1) = \mathcal{M}(q_2)$ implica $q_1 = q_2$;
- *Estabilidad*: si pequeñas perturbaciones en los datos de frontera inducen variaciones controladas en el coeficiente q , en un sentido cuantitativo que depende de la topología considerada.

En particular, la estabilidad se expresa mediante estimaciones del tipo:

$$\|q_1 - q_2\| \leq \Psi(\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\|),$$

donde Ψ es una función de módulo de continuidad.

Este trabajo se centra en la noción de estabilidad para la discretización de este problema inverso y no en su resolución computacional. Aún así, es importante destacar los diversos métodos numéricos desarrollados para este problema [9, 4, 3, 5, 15] y un artículo reciente [10] sobre el análisis de un problema de corrosión entre dos materiales.

1.2. Unicidad y estabilidad en el modelo continuo

En [13], Inglese demuestra la unicidad del problema inverso utilizando el siguiente principio de continuación única para el operador laplaciano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \gamma, \\ u = 0, & \text{en } \gamma, \end{cases} \implies u = 0, \text{ en } \Omega, \quad (1.2.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio suave y $\gamma \subset \partial\Omega$ es una sección de la frontera.

Posterior a los trabajos de Inglese [13, 9], se desarrollaron diversos resultados en torno a la estabilidad del problema inverso de corrosión. En particular, Alessandrini [1] considera el caso bidimensional con frontera suave a trozos y obtiene una estabilidad de tipo logarítmico. Posteriormente, Choulli [6] establece una estabilidad logarítmica en el sentido presentado en la sección anterior, también en dos dimensiones, bajo la hipótesis de frontera suave. En la Figura 1.2 se presenta el flujo lógico de [6, 7] respecto a la estabilidad logarítmica. Finalmente, Yamamoto [12] obtiene un resultado de estabilidad de tipo Hölder, asumiendo que la geometría de la frontera corroída es plana o circular y que la corrosión es analítica o constante a trozos.

Cabe destacar que, en los trabajos [1, 12], la presencia de esquinas en la frontera corroída introduce una limitación geométrica natural: las estimaciones de estabilidad son uniformes únicamente en la parte de la frontera inaccesible que se encuentra a una distancia $\delta > 0$ de los vértices.

Mientras que la unicidad puede obtenerse a partir de principios cualitativos de continuación única, la estabilidad requiere estimaciones cuantitativas —típicamente de tipo Carleman—, lo que introduce una dificultad analítica sustancial adicional.

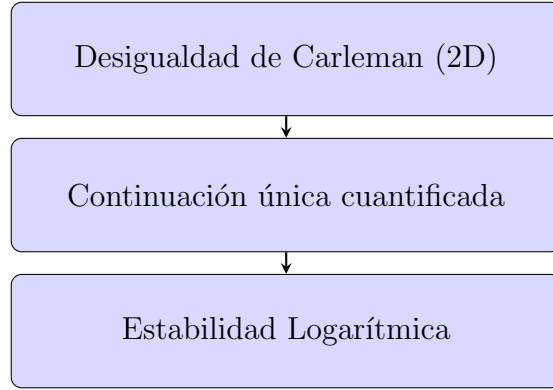


Figura 1.2: Flujo lógico presentado en [6, 7].

Estos resultados, sin embargo, dependen de manera crucial de propiedades analíticas del operador continuo, lo que plantea la cuestión de su validez al considerar discretizaciones del problema.

1.3. Motivación para el análisis discreto

En el estudio de problemas inversos discretizados, argumentos que eran válidos en el marco continuo no necesariamente se pueden aplicar en el marco discreto. En particular, para la discretización del problema inverso de corrosión se tiene el siguiente ejemplo que revela una obstrucción propia del esquema discreto:

Consideremos una malla uniforme

$$\mathcal{W}_h = (0, 1)^2 \cap h\mathbb{Z}^2, \quad h = (N + 1)^{-1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Construimos una familia de funciones discretas $u_d = (u_d(x_{i,j}))_{i,j}$, parametrizada por $d \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma:

En primer lugar, se prescribe

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{para todo } i \geq j,$$

es decir, la función se anula en la región triangular inferior de la malla, incluida la diagonal principal.

A partir de esta región nula, se define la función en la primera diagonal superior, correspondiente a $i = j - 1$, introduciendo una oscilación alternante dada por

$$u_{i,j} = (-1)^i d.$$

Adicionalmente, se fija

$$u_{0,j} = 0 \quad \text{para todo } j > 1,$$

con el fin de eliminar grados de libertad adicionales no esenciales para el mecanismo que se desea exhibir.

Finalmente, los valores de u_d en el resto del dominio, es decir, en los nodos que satisfacen $i < j - 1$ y $i \geq 1$, se determinan de manera inductiva imponiendo la condición de armonicidad discreta

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

Este procedimiento produce, para todo $d \in \mathbb{R}$, una función armónica discreta bien definida en todos los nodos interiores de la malla.

En particular, la Figura 1.3 muestra el caso $N = 3$.

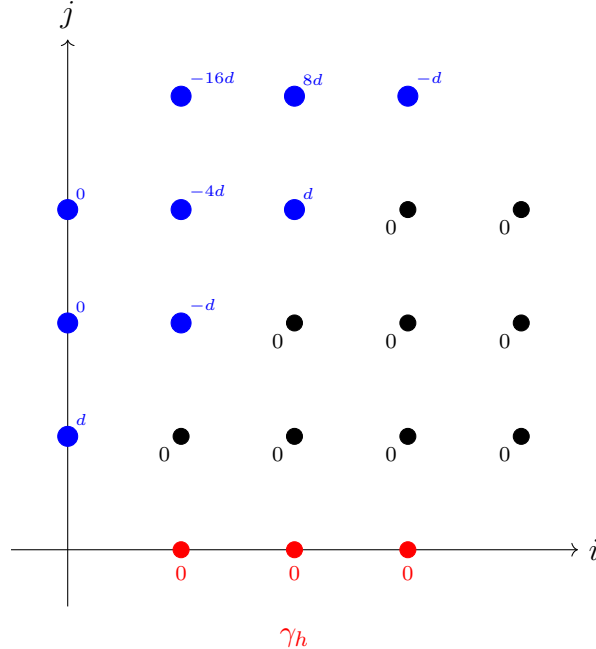


Figura 1.3: Esquema de la malla para el contraejemplo. Los nodos negros satisfacen $u_{i,j} = 0$ para $i \geq j$. Los nodos azules representan la zona donde la solución se bifurca según el parámetro d .

Denotando por

$$\gamma_h := (0, 1) \times \{0\} \cap h\mathbb{Z}^2$$

la frontera discreta de observación, se verifica además que estas funciones satisfacen condiciones de borde discretas homogéneas de tipo Dirichlet y Neumann sobre γ_h , esto es,

$$u_{i,0} = 0, \quad \frac{u_{i,0} - u_{i,1}}{h} = 0, \quad 0 < i < N.$$

La existencia de esta familia no trivial de soluciones armónicas discretas, parametrizada por d , muestra que no puede existir un análogo exacto del principio de continuación única en el marco de diferencias finitas para la frontera γ_h . En particular, los datos nulos sobre la frontera no determinan de manera única la solución en el interior del dominio.

Esta falta de continuación única tiene consecuencias directas en el problema inverso discreto. En efecto, dado un coeficiente de corrosión discreto q y su solución asociada v , consideramos la medición

$$\mathcal{M}(q) := \left(\{v_{i,0}\}_i, \left\{ \frac{v_{i,0} - v_{i,1}}{h} \right\}_i \right).$$

Dado que u_d satisface condiciones de borde homogéneas en γ_h , la medición asociada a v coincide con la de $w_d := v + u_d$. Por la linealidad del laplaciano discreto, w_d también es armónica, aunque corresponde a un coeficiente de corrosión distinto. Esto implica que el problema inverso no verifica unicidad en esta configuración.

Cabe destacar que, en ausencia de unicidad para un parámetro de malla h fijo, tampoco puede esperarse estabilidad en el sentido clásico

$$\|q_1 - q_2\| \leq C\Psi(\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\|),$$

pues esta desigualdad implica la unicidad del problema inverso.

Por esta razón, trabajos recientes sobre problemas inversos discretos [14, 8, 16] se centran en nociones de *estabilidad asintótica* con respecto al parámetro de malla. Más precisamente, se obtienen desigualdades del tipo

$$\|q_1 - q_2\| \leq C(\Psi(\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\|) + \mathcal{E}(h)),$$

donde $\mathcal{E}(h)$ es un término de error asociado a la discretización, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0.$$

Este término cuantifica la pérdida de información introducida por el marco discreto. En particular, la estimación obtenida es consistente con la correspondiente desigualdad continua, sin afirmar una convergencia del problema inverso discreto hacia el continuo.

Esta observación motiva el enfoque adoptado en esta tesis. En lugar de buscar condiciones sobre γ_h que impliquen resultados de continuación única y/o unicidad del problema inverso discreto, se desarrolla un resultado de estabilidad asintótica bajo hipótesis de acotamiento uniforme.

1.4. Objetivos y contribuciones de la tesis

Objetivos

El objetivo principal de esta tesis consiste en estudiar la estabilidad del problema inverso de corrosión discretizado. Este estudio se realiza mediante la adaptación de técnicas del caso continuo expuestas en [6, 7], apoyándose en la literatura de desigualdades de Carleman discretas [2, 14, 8, 16]. De manera específica, se plantean los siguientes objetivos:

- Establecer una desigualdad de Carleman discreta para el operador laplaciano discreto bidimensional y sin condiciones de frontera.
- Deducir un principio de continuación única cuantificado para diferencias finitas, localizado en una sección de la frontera.
- Formular una noción de estabilidad para el problema inverso discretizado.

Contribuciones

Los aportes de este trabajo se pueden apreciar mediante tres ejes principales.

En primer lugar, este trabajo puede entenderse como una adaptación al marco discreto de técnicas y resultados utilizados en [6, 7] para el estudio de la estabilidad del problema inverso de corrosión. Dicha adaptación no es directa, debido a la pérdida de propiedades fundamentales al discretizar, en particular la propiedad de continuación única.

En segundo lugar, los trabajos más cercanos en el marco discreto corresponden a resultados de estabilidad asintótica para el problema de Calderón discretizado [8, 14, 16]. Sin embargo, los resultados de continuación única cuantificada que allí se obtienen se deducen bajo la hipótesis de condiciones de Dirichlet homogéneas en toda la frontera discreta.

En tercer lugar, la desigualdad de Carleman presentada en este trabajo sigue un procedimiento de estimación de tipo adjunto–conmutador aplicado a un operador discreto de primer orden y complejo, análogo a $\partial_x + i\partial_y$, junto con un análisis por casos. En contraste, las desigualdades de Carleman discretas existentes en la literatura [2, 8, 14, 16] se obtienen a partir de la conjugación del operador y la estimación de términos cruzados.

En este contexto, las principales contribuciones de este trabajo son las siguientes:

- Obtención de una desigualdad de Carleman para el operador laplaciano discretizado mediante diferencias finitas en dos dimensiones, sin imponer condiciones de borde sobre la solución y con un control cuantificado bajo la condición de pequeño parámetro s^2h y regularidad en norma discreta fuerte C^2 .
- Deducción de un principio de continuación única cuantificado para esquemas de diferencias finitas, localizado en la frontera y con una dependencia asintótica explícita respecto al tamaño de malla.
- Formulación de una estabilidad logarítmica para el problema inverso de corrosión discretizado bajo hipótesis de regularidad, con validez asintótica respecto al parámetro h .

1.5. Estructura del trabajo

El Capítulo 2 introduce definiciones y resultados preliminares del cálculo discreto y desigualdades de Carleman. Se detalla un procedimiento de extensión de funciones discretas en mallas refinadas y se analizan las propiedades de la función peso utilizada. El Capítulo 3 se dedica íntegramente a la demostración de la desigualdad de Carleman para el operador laplaciano discreto. En el Capítulo 4 se deducen los resultados de continuación única cuantificada y estabilidad logarítmica. Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones y una discusión sobre los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se introducen las bases geométricas y analíticas del trabajo. Se define la discretización del dominio y sus componentes, los operadores de diferencias finitas y las herramientas de cálculo discreto, junto con un procedimiento de extensión de soluciones propio de esta investigación. Finalmente, se presenta la función peso, sus propiedades asintóticas y la formulación del problema inverso discretizado.

Cabe destacar que la mayoría de las definiciones y resultados de este capítulo son estándar en el análisis de diferencias finitas para desigualdades de Carleman discretas. Sin embargo, otros elementos, en particular lo expuesto en la Sección 2.5, son propios de este trabajo y surgen debido a que la desigualdad de Carleman de referencia se basa en una técnica de demostración distinta a la utilizada en [2, 8, 14, 16].

2.1. Mallas discretas

Consideramos como dominio $\Omega := (0, 1)^2$ y el espaciado de malla $h := (N + 1)^{-1}$ con $N \in \mathbb{N}$. Definimos la malla primal de la siguiente forma:

$$\mathcal{W}_h := h\mathbb{Z}^2 \cap (0, 1)^2.$$

La elección de dominio cuadrado con mallado uniforme se debe al uso de diferencias finitas. La extensión de este enfoque a métodos de elementos finitos queda fuera del alcance de este trabajo; sin embargo, destacamos que el uso de operadores de diferencias finitas permanece estándar en desigualdades de Carleman discretas [2, 8, 14, 16].

En lo siguiente se definen distintas nociones geométricas, tales como malla dual, cerradura, frontera, frontera dual, etc. Estas responden a diversas necesidades: su aparición en

integraciones por partes discretas, la definición del dominio de operadores discretos y el dominio de las integrales en la desigualdad de Carleman discreta.

Considerando las direcciones canónicas $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, definimos el operador de traslación discreto $\tau_{\pm k, h}(x) = x \pm \frac{h}{2}e_k$ para $x \in \mathbb{R}^2$. Mediante este operador de traslación podemos definir todos los conjuntos discretos a utilizar.

Dada una dirección e_k , definimos dos dualizaciones de la malla \mathcal{W}_h de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_h)_k^* &:= \tau_{-k, h}(\mathcal{W}_h) \cup \tau_{+k, h}(\mathcal{W}_h), \\ (\mathcal{W}_h)_k^\circ &:= \tau_{-k, h}(\mathcal{W}_h) \cap \tau_{+k, h}(\mathcal{W}_h). \end{aligned}$$

En particular, la dualización $(\mathcal{W}_h)_k^*$ es expansiva, mientras que la otra $(\mathcal{W}_h)_k^\circ$ es contractiva. En términos de notación se utiliza $\mathcal{W}_{h, k}^*$ en vez de $(\mathcal{W}_h)_k^*$ siempre y cuando no lleve a confusiones.

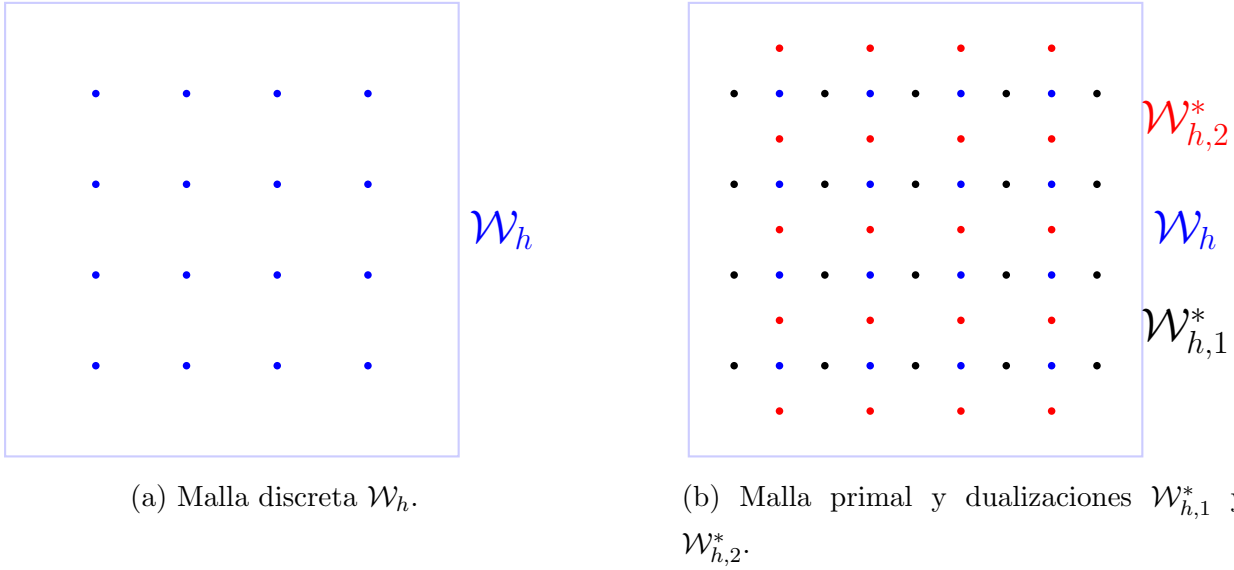


Figura 2.1: Representación del dominio discreto y dualizaciones.

Los procedimientos de dualización $(\cdot)_k^*$ y $(\cdot)_k^\circ$ se consideran aplicables en mallas generales y no solamente para \mathcal{W}_h . Por tanto, podemos definir la doble dualización mediante $(\mathcal{W}_h)_{kj}^{**} = ((\mathcal{W}_h)_k^*)_j^*$ aplicando las traslaciones y uniones correspondientes.

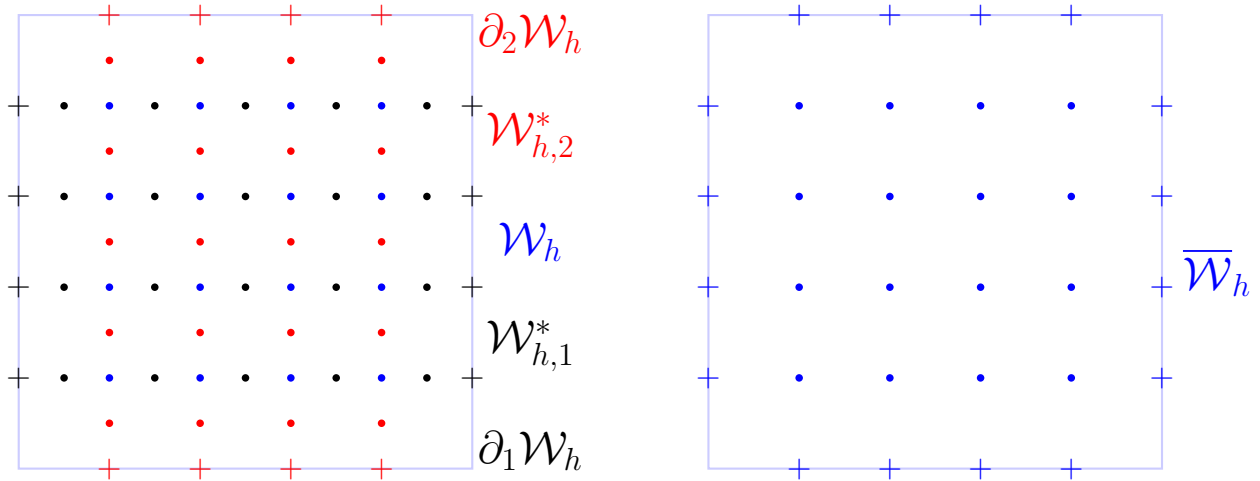
Con esto, podemos definir la cerradura de \mathcal{W}_h mediante

$$\overline{\mathcal{W}_h} := (\mathcal{W}_h)_{11}^{**} \cup (\mathcal{W}_h)_{22}^{**}.$$

Observación 2.1.1. Si bien la cerradura se define usando $(\mathcal{W}_h)_{kk}^{**}$, esto es solamente formal, pues $(\mathcal{W}_h)_{kk}^{**}$ es básicamente la malla primal \mathcal{W}_h en unión a los nodos frontera de la dirección correspondiente.

Siguiendo la observación anterior, definimos los conjuntos frontera en la dirección k y frontera completa de la siguiente forma:

$$\partial_k \mathcal{W}_h := (\mathcal{W}_h)_{kk}^{**} \setminus \mathcal{W}_h, \quad \partial \mathcal{W}_h := \partial_1 \mathcal{W}_h \cup \partial_2 \mathcal{W}_h.$$



(a) Malla discreta, dualizaciones y nodos frontera.

(b) Cerradura de la malla primal.

Figura 2.2: Representación del dominio discreto (continuación).

Junto con la noción de frontera, definimos la frontera dual tangencial

$$(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^* = (\partial_1 \mathcal{W}_h)_2^* \cup (\partial_2 \mathcal{W}_h)_1^*,$$

y la frontera dual tangencial interior

$$(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^\circ = (\partial_1 \mathcal{W}_h)_2^\circ \cup (\partial_2 \mathcal{W}_h)_1^\circ.$$

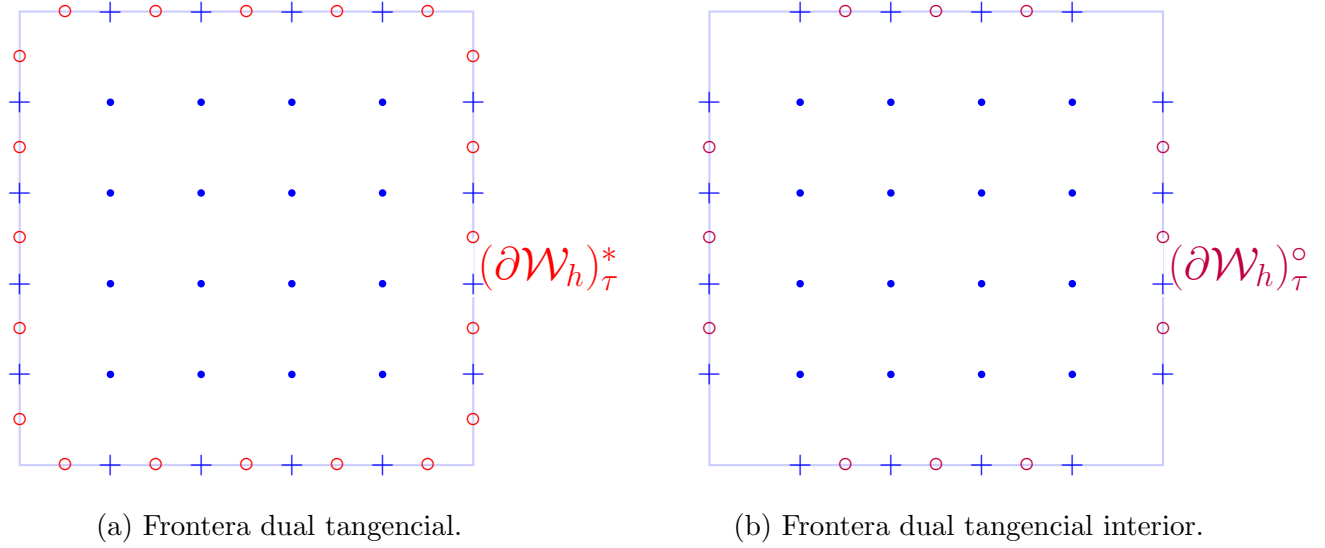


Figura 2.3: Representación del dominio discreto (continuación).

2.2. Funciones y operadores discretos

Sea \mathcal{W} un conjunto discreto entonces denotamos por $C(\mathcal{W}; \mathbb{K})$ al conjunto de funciones definidas en \mathcal{W} a valores en \mathbb{K} , donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Consideramos que el operador traslación $\tau_{\pm k, h}$ puede actuar en funciones f que tengan dominio contenido en \mathbb{R}^2 mediante la fórmula

$$\tau_{\pm k, h}(f)(x) := f\left(x \pm \frac{h}{2}e_k\right),$$

con $x \in D \subseteq \tau_{\pm k, h}(\text{dom}(f))$.

En particular, si $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{K})$ entonces $\tau_{\pm k, h}(u) \in C((\mathcal{W}_h)_k^*; \mathbb{K})$ y si $u \in C((\mathcal{W}_h)_k^*; \mathbb{K})$ entonces $\tau_{\pm k, h}(u) \in C(\mathcal{W}_h; \mathbb{K})$.

Con esta noción del operador traslación se definen las siguientes operaciones discretas:

$$A_{k, h}(u)(x) := \frac{\tau_{+k, h}u + \tau_{-k, h}u}{2}, \quad D_{k, h}(u)(x) := \frac{\tau_{+k, h}u - \tau_{-k, h}u}{h},$$

donde el dominio a considerar corresponde a la intersección del dominio de las traslaciones $\tau_{+k, h}u$ y $\tau_{-k, h}u$, es decir,

$$\text{dom}(A_{k, h}u) = \text{dom}(D_{k, h}u) = \tau_{+k, h}(\text{dom}(u)) \cap \tau_{-k, h}(\text{dom}(u)).$$

Por tanto, si $\text{dom}(u) = \overline{\mathcal{W}}_h$ entonces $\text{dom}(A_{k, h}u) = \text{dom}(D_{k, h}u) = (\overline{\mathcal{W}}_h)_k^\circ = \mathcal{W}_{h, k}^*$.

Respecto al significado de estos operadores, notemos que $D_{k, h}$ corresponde a la diferencia finita central en la dirección k pero con desplazamiento $h/2$ en ambos sentidos. En cambio,

$A_{k,h}$ corresponde a un promedio en la dirección k con desplazamiento $h/2$. Estas definiciones particulares se deben a las repetidas apariciones de estos operadores durante la demostración de la desigualdad de Carleman discreta y son estándar en las referencias [2, 8, 14, 16].

Respecto a otros trabajos en desigualdades de Carleman discretas [2, 8, 14, 16], se deja la dependencia de h explícita pues se trabajará con \mathcal{W}_h y $\mathcal{W}_{h/2}$ usando operadores discretos con distinto múltiplo de h .

Considerando las definiciones previas, se tiene la siguiente identidad para el operador laplaciano discreto en dos dimensiones por diferencias finitas y esquema de 5 puntos:

$$\Delta_h u(x) := \sum_{k=1}^2 \frac{u(x + he_k) - 2u(x) + u(x - he_k)}{h^2} = (D_{1,h}^2 + D_{2,h}^2)(u)(x), \quad x \in \mathcal{W}_h. \quad (2.2.1)$$

Si \mathcal{M}_h corresponde a una malla bidimensional uniforme de espaciado h (por ejemplo $\mathcal{W}_h, \mathcal{W}_{h,1}^*, \mathcal{W}_{h,2}^*$) y f es una función a valores en \mathbb{K} tal que $\mathcal{M}_h \subset \text{dom}(f)$, entonces definimos la integral discreta de f en \mathcal{M}_h mediante

$$\int_{\mathcal{M}_h} f := h^2 \sum_{x \in \mathcal{M}_h} f(x),$$

y si $\partial\mathcal{M}_h$ corresponde a una malla frontera de espaciado h (por ejemplo, $\partial\mathcal{W}_h, (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ, (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*$), entonces la integración discreta en la frontera se define mediante

$$\int_{\partial\mathcal{M}_h} f := h \sum_{x \in \partial\mathcal{M}_h} f(x).$$

Para estimaciones de integrales de borde, definimos el operador traza discreto en la dirección k de la siguiente forma: sí $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$t_{r,h}^k(u)(x) := \begin{cases} \tau_{+k,h}(u), & \text{si } x_k = 0, \\ \tau_{-k,h}(u), & \text{si } x_k = 1. \end{cases}$$

Este operador traslada la evaluación en la frontera hacia el interior en la dirección k . Notar que con esta definición también se consideran las esquinas del dominio. Con el fin de simplificar la notación, definimos el operador $t_{r,h}$ mediante $t_{r,h} = t_{r,h}^k$ siempre que x esté en la frontera en dirección k , es decir, $x \in \partial_k\Omega$.

De forma similar, se define el operador bilineal de traza

$$\text{Tr}_h^k(u, v) := \frac{1}{2} (ut_{r,h}^k(v) + t_{r,h}^k(u)v),$$

cuya aparición esta motivada por la fórmula de integración por partes (Teorema 2.4.1), el cual es específico del marco desarrollado en este trabajo. Al igual que para el operador traza discreto, consideramos la extensión $\text{Tr}_h = \text{Tr}_h^k$ solamente si $x \in \partial_k \Omega$.

En la frontera, considerando a ν_k la k -ésima componente de la normal del dominio $(0, 1)^2$, se define la siguiente derivada normal discreta:

$$D_{\nu,h}(u)(x) := \nu_k t_{r,h}^k D_{k,h}(u)(x), \quad x \in \partial_k \mathcal{W}_h, k = 1, 2. \quad (2.2.2)$$

y la siguiente derivada tangencial discreta:

$$D_{\tau,h}(u)(x) := D_{j,h}(u)(x), \quad x \in (\partial_k \mathcal{W}_h)_j^*, k = 1, 2; j = 1, 2; j \neq k.$$

Estas definiciones de derivadas discretas aparecen de forma natural al realizar integraciones por partes discretas y durante el desarrollo de la desigualdad de Carleman. Su formulación resulta particularmente relevante en la estimación de términos de borde.

2.3. Normas discretas

A partir del contra-ejemplo de unicidad discreta mostrado en la Sección 1.3, se observa la existencia de funciones discretas altamente oscilatorias. En este contexto, la imposición de una hipótesis de acotamiento en norma C^2 discreta permite controlar de manera indirecta estas oscilaciones.

Asimismo, la introducción de las normas discretas que se definen a continuación responde a los requisitos mínimos para formular estimaciones de estabilidad análogas a las del caso continuo [6, 7]. En particular, se necesita una hipótesis de acotamiento sobre la norma C^2 y la definición de la norma L^2 del borde para la cuantificación de continuación única.

Dada una función discreta f cuyo dominio contiene a $\overline{\mathcal{W}_h}$, definimos el análogo discreto de la norma de tipo C mediante

$$\|f\|_{C(\overline{\mathcal{W}_h})} := \max_{x \in \overline{\mathcal{W}_h}} |f(x)|.$$

Sin embargo, para las normas tipo C^1, C^2 consideramos definiciones distintas según el tipo de función discreta. Esta distinción resulta necesaria para mantener un control uniforme de la regularidad discreta tras la extensión de malla, lo cual será esencial en la desigualdad de Carleman.

Sean $f \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{K})$ y \tilde{f} una extensión que también está definida en las esquinas del dominio (por ejemplo $\tilde{f} \in C(\overline{\overline{\mathcal{W}_h}}; \mathbb{K})$) entonces se define el análogo de la norma C^1 mediante:

$$\|f\|_{C^1(\overline{\mathcal{W}}_h)} := \|f\|_{C(\overline{\mathcal{W}}_h)} + \max_{x \in (\overline{\mathcal{W}}_h)_1^\circ} |D_{1,h}f(x)| + \max_{x \in (\overline{\mathcal{W}}_h)_2^\circ} |D_{2,h}f(x)|,$$

$$\|\tilde{f}\|_{C^1(\overline{\mathcal{W}}_h)} := \|\tilde{f}\|_{C(\overline{\mathcal{W}}_h \cup \partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h)} + \max_{x \in \mathcal{W}_{h,1}^* \cup (\partial_2 \mathcal{W}_h)_1^*} |D_{1,h}\tilde{f}(x)| + \max_{x \in \mathcal{W}_{h,2}^* \cup (\partial_1 \mathcal{W}_h)_2^*} |D_{2,h}\tilde{f}(x)|.$$

Notar que la única diferencia es que para la extensión \tilde{f} también se considera el nodo frontera en la cuantificación. De forma similar, definimos un análogo discreto de la norma C^2 mediante

$$\|f\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} := \|f\|_{C^1(\overline{\mathcal{W}}_h)} + \max_{x \in (\mathcal{W}_h)_{12}^{\circ\circ} \cup (\mathcal{W}_h)_{21}^{**}} |D_{1,h}D_{2,h}f(x)|$$

$$+ \max_{x \in \mathcal{W}_h \cup (\partial_1 \mathcal{W}_h)_{22}^{\circ\circ}} |D_{2,h}D_{2,h}f(x)| + \max_{x \in \mathcal{W}_h \cup (\partial_2 \mathcal{W}_h)_{11}^{\circ\circ}} |D_{1,h}D_{1,h}f(x)|.$$

$$\|\tilde{f}\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} := \|\tilde{f}\|_{C^1(\overline{\mathcal{W}}_h)} + \max_{x \in (\mathcal{W}_h)_{12}^{**}} |D_{1,h}D_{2,h}\tilde{f}(x)|$$

$$+ \max_{x \in (\mathcal{W}_h)_{11}^{**}} |D_{2,h}D_{2,h}\tilde{f}(x)| + \max_{x \in (\mathcal{W}_h)_{22}^{**}} |D_{1,h}D_{1,h}\tilde{f}(x)|.$$

Notar que las normas para la extensión \tilde{f} cuantifican el comportamiento de la extensión en las esquinas del dominio. En particular, se mostrará que la extensión de funciones discretas utilizada en este trabajo mantiene acotada estas normas.

Finalmente, se define norma L^2 discreta en una malla frontera $\partial\mathcal{M}_h$ de la siguiente forma:

$$\|f\|_{L^2(\partial\mathcal{M}_h)} := \sqrt{\int_{\partial\mathcal{M}_h} |f|^2}.$$

2.4. Cálculo discreto

En esta sección se recopilan resultados sobre operadores discretos que serán necesarios para el desarrollo de la desigualdad de Carleman discreta. En comparación con la literatura reciente sobre desigualdades de Carleman discretas [14, 8, 16], en este trabajo también se utilizan operadores discretos de mayor paso, como $D_{k,2h}$ y $A_{k,2h}$, los cuales llamaremos operadores con paso $2h$. Esto se debe principalmente al método empleado para la obtención de la desigualdad de Carleman. No obstante, mediante una técnica de refinamiento, la desigualdad final quedará expresada en términos de los operadores estándar presentes en la literatura, por lo que el uso de operadores con paso $2h$ cumple un rol meramente instrumental.

El siguiente resultado recopila identidades algebraicas básicas que permiten manipular la diferencia finita y promedio de productos de funciones de manera análoga al caso continuo. Estas identidades serán utilizadas de forma sistemática en las pruebas posteriores.

Corolario 2.4.1. Sean $u, v \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{K})$ entonces se tienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} D_{k,2h}(uv) &= D_{k,2h}(u)A_{k,2h}(v) + A_{k,2h}(u)D_{k,2h}(v), \text{ en } \mathcal{W}_h, \\ A_{k,2h}(uv) &= A_{k,2h}(u)A_{k,2h}(v) + h^2 D_{k,2h}(u)D_{k,2h}(v), \text{ en } \mathcal{W}_h. \end{aligned}$$

Además, para $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{K})$ se cumple:

$$u = A_{k,2h}^2(u) - h^2 D_{k,2h}^2(u), \text{ en } \mathcal{W}_h.$$

Demostración. Las primeras dos identidades son análogas a las del Lema 2.1 de [14] cambiando h por $2h$, lo cual cambia el factor $h^2/4$ a h^2 en la segunda identidad. Por otra parte, la tercera identidad corresponde a un análogo del Lema 2.3 de [2], bajo el mismo cambio de h a $2h$. \square

La integración por partes es una herramienta fundamental en el marco continuo. En particular, el uso de operadores discretos con paso $2h$ permite obtener identidades de integración por partes discretas sin cambiar de malla. Dichos resultados son análogos a los presentados en [14] para los operadores $D_{k,h}$ y $A_{k,h}$. Sin embargo, no se obtienen como una consecuencia directa del simple reemplazo de h por $2h$.

Teorema 2.4.1 (Integración por partes discreta del operador $D_{k,2h}$). Sean $u, v \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{K})$, entonces

$$\int_{\mathcal{W}_h} D_{k,2h}u \cdot v = - \int_{\mathcal{W}_h} u D_{k,2h}v + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} \text{Tr}_{2h}^k(u, v) \nu_k.$$

Demostración. Aplicando la identidad $D_{k,2h} = A_{k,h}D_{k,h} = D_{k,h}A_{k,h}$ y la integración por partes para $D_k = D_{k,h}$ mediante malla dual (véase [14, Lema 2.2]), se tiene

$$\int_{\mathcal{W}_h} D_{k,2h}u \cdot v = \int_{\mathcal{W}_h} D_{k,h}A_{k,h}(u) \cdot v = - \int_{(\mathcal{W}_h)_k^*} A_{k,h}(u)D_{k,h}(v) + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} vt_r^k(A_{k,h}u) \nu_k.$$

Aplicando nuevamente la integración por partes para $A_k = A_{k,h}$, se obtiene

$$\int_{\mathcal{W}_h} D_{k,2h}u \cdot v = - \int_{\mathcal{W}_h} uA_{k,h}D_{k,h}(v) - \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} ut_r^k(D_{k,h}(v)) + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} vt_r^k(A_{k,h}u) \nu_k.$$

Por otro lado, la identidad

$$t_r^k D_{k,h}v = \nu_k \frac{v - t_{r,2h}^k v}{h}$$

implica

$$-\frac{h}{2} ut_r^k(D_{k,h}(v)) + vt_r^k(A_{k,h}u) \nu_k = -\frac{1}{2} \nu_k u(v - t_{r,2h}^k v) + \frac{1}{2} v(u + t_{r,2h}^k u) \nu_k = \text{Tr}_{2h}^k(u, v) \nu_k.$$

Reemplazando en el desarrollo anterior, se concluye

$$\int_{\mathcal{W}_h} D_{k,2h}u \cdot v = - \int_{\mathcal{W}_h} u D_{k,2h}v + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} \text{Tr}_{2h}^k(u, v) \nu_k.$$

□

Teorema 2.4.2 (Integración por partes discreta del operador $A_{k,2h}$). *Sean $u, v \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{K})$, entonces*

$$\int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v = \int_{\mathcal{W}_h} u A_{k,2h}v + \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} u t_{r,2h}^k v - \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} t_{r,2h}^k(u) v.$$

Demostración. Por definición

$$\int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v = \frac{h^2}{2} \sum_{\mathcal{W}_h} \tau_{+k,2h}(u) v + \frac{h^2}{2} \sum_{\mathcal{W}_h} \tau_{-k,2h}(u) v.$$

Realizando una traslación en los dominios de las sumas,

$$\int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v = \frac{h^2}{2} \sum_{\tau_{+k,2h} \mathcal{W}_h} u \tau_{-k,2h} v + \frac{h^2}{2} \sum_{\tau_{-k,2h} \mathcal{W}_h} u \tau_{+k,2h} v.$$

Mediante una descomposición de $\tau_{\pm k,2h} \mathcal{W}_h$ en la unión disjunta de nodos de frontera y nodos interiores, y posteriormente una incorporación de los nodos interiores restantes mediante un cero conveniente, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v &= \frac{h^2}{2} \sum_{\mathcal{W}_h} u \tau_{-k,2h} v + \frac{h^2}{2} \sum_{\partial_k^+ \mathcal{W}_h} u \tau_{-k,2h} v - \frac{h^2}{2} \sum_{\tau_{+k,2h} \partial_k^- \mathcal{W}_h} u \tau_{-k,2h} v \\ &+ \frac{h^2}{2} \sum_{\mathcal{W}_h} u \tau_{+k,2h} v + \frac{h^2}{2} \sum_{\partial_k^- \mathcal{W}_h} u \tau_{+k,2h} v - \frac{h^2}{2} \sum_{\tau_{-k,2h} \partial_k^+ \mathcal{W}_h} u \tau_{+k,2h} v. \end{aligned}$$

Escribiendo las sumas como integrales discretas,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v &= \int_{\mathcal{W}_h} \frac{1}{2} u \tau_{-k,2h} v + \frac{h}{2} \int_{\partial_k^+ \mathcal{W}_h} u \tau_{-k,2h} v - \frac{h}{2} \int_{\partial_k^- \mathcal{W}_h} \tau_{+k,2h}(u) v \\ &+ \int_{\mathcal{W}_h} \frac{1}{2} u \tau_{+k,2h} v + \frac{h}{2} \int_{\partial_k^- \mathcal{W}_h} u \tau_{+k,2h} v - \frac{h}{2} \int_{\partial_k^+ \mathcal{W}_h} \tau_{-k,2h}(u) v. \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando términos y usando el operador traza t_r se concluye

$$\int_{\mathcal{W}_h} A_{k,2h}u \cdot v = \int_{\mathcal{W}_h} u A_{k,2h}v + \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} u t_{r,2h}^k v - \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} t_{r,2h}^k(u) v.$$

□

2.5. Refinamiento de malla y operador de extensión

Para el desarrollo de la desigualdad de Carleman discreta es necesario analizar el siguiente operador discreto:

$$P_h := D_{1,h} + iD_{2,h}.$$

Este operador no es estándar en la literatura de desigualdades de Carleman discreta [2, 8, 14, 16], pues si $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{R})$ entonces $D_{k,h}u$ tiene como dominio la malla $(\overline{\mathcal{W}}_h)_k^\circ$ y por tanto, $P_h(u)$ estaría definido en $(\overline{\mathcal{W}}_h)_1^\circ \cap (\overline{\mathcal{W}}_h)_2^\circ = \emptyset$ lo cual resulta inconsistente.

Lo anterior nos lleva al objetivo de esta sección: introducir un operador Π que extienda las funciones definidas en $\overline{\mathcal{W}}_h$ tal que al considerar la evaluación $P_h\Pi u$ esté bien definida, preserve propiedades de la función original y permita, bajo estimaciones integrales, volver a la variable original u .

Definimos el siguiente operador de extensión:

$$\Pi : u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{R}) \longrightarrow \Pi(u) \in C\left(\overline{\overline{\mathcal{W}}}_{h/2}; \mathbb{R}\right),$$

mediante la ecuación (2.5.1). En este contexto, la triple cerradura garantiza que $\Pi(u)$ esté bien definida en todos los nodos que intervienen en el desarrollo posterior de la desigualdad de Carleman.

Notamos que por definición, el conjunto $\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h$ corresponde a las esquinas de Ω . También, se recuerda que la operación de frontera ∂ de una malla, es relativa al espaciado de la malla.

$$\Pi(u) := \begin{cases} u, & \text{en } \overline{\mathcal{W}}_h, \\ 0, & \text{en } \overline{\mathcal{W}}_{h/2} \setminus \overline{\mathcal{W}}_h, \\ t_{r,2h}^1 u + t_{r,2h}^2 u - t_{r,2h}^1 t_{r,2h}^2 u, & \text{en } \partial_1\partial_2\mathcal{W}_h, \\ 2t_{r,2h} u - t_{r,4h} u, & \text{en } \partial(\overline{\mathcal{W}}_h) \setminus \partial_1\partial_2\mathcal{W}_h, \\ 0, & \text{en } (\partial(\overline{\mathcal{W}}_{h/2}) \setminus \partial_1\partial_2\mathcal{W}_h) \cup \left(\partial(\overline{\overline{\mathcal{W}}}_{h/2}) \setminus \partial(\overline{\mathcal{W}}_h)\right). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Respecto a la definición de $\Pi(u)$, en la Figura 2.4 se muestran los nodos donde la extensión es no nula. Estos nodos corresponden a los nodos originales, las esquinas del dominio y a los nodos fuera del dominio pero que están alineados con la malla. En el resto de los nodos la función se extiende por cero, los cuales se muestran en la Figura 2.5 y juntos forman el conjunto $\overline{\overline{\mathcal{W}}}_{h/2}$.

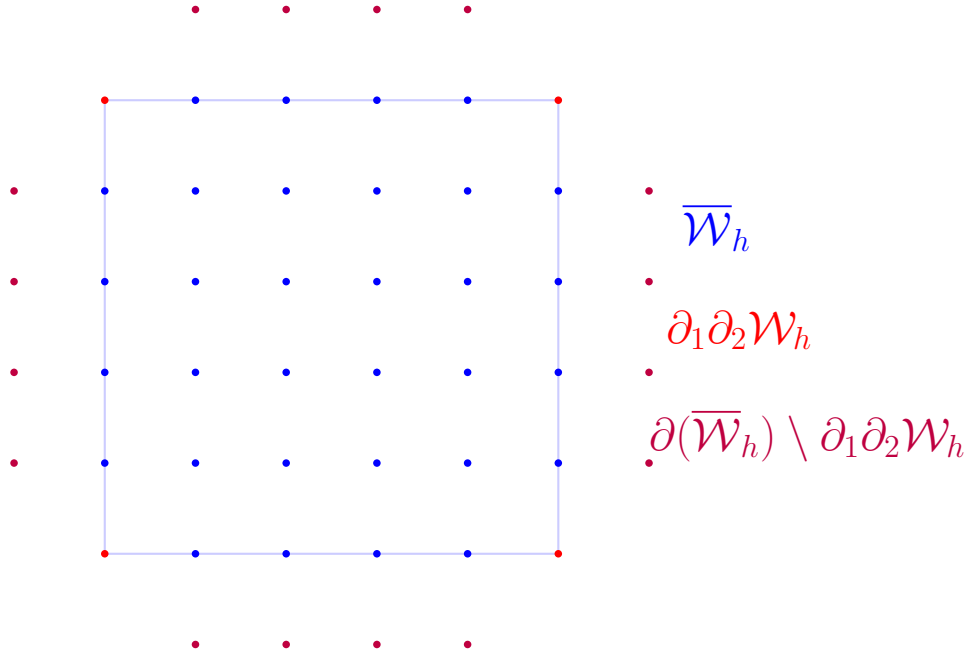


Figura 2.4: Esquema de nodos donde el operador de extensión Π es no nula.

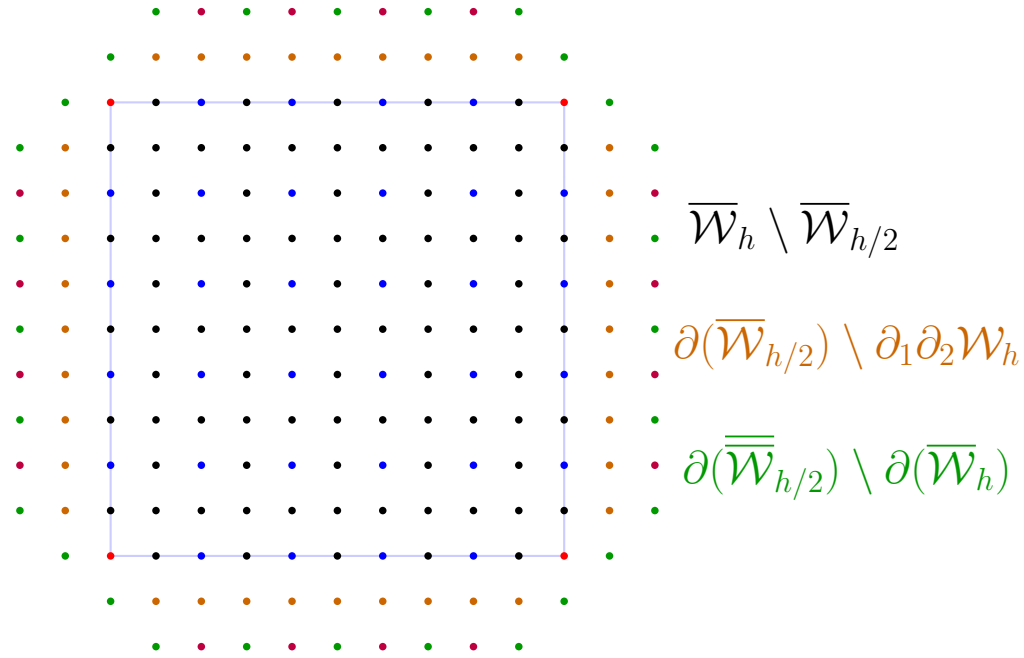


Figura 2.5: Esquema de nodos utilizados en el operador Π , los nuevos nodos descritos (en comparación con la Figura 2.4) son los nodos donde la extensión es nula.

De las definiciones de mallas discretas y las Figuras 2.4 y 2.5, se tiene la siguiente descomposición:

Proposición 2.5.1. *Sí $h = (N + 1)^{-1}$, con $N \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathcal{W}_{h/2} = \mathcal{W}_h \sqcup \mathcal{W}_{h,1}^* \sqcup \mathcal{W}_{h,2}^* \sqcup \mathcal{W}_{h,12}^{**}. \quad (2.5.2)$$

Aquí, \sqcup denota la unión disjunta.

Para el desarrollo de la desigualdad de Carleman discreta es necesario analizar el siguiente operador discreto,

$$P_h := D_{1,h} + iD_{2,h}.$$

El cual, debido a la extensión por cero en el interior de la malla y a la descomposición de malla admite la siguiente caracterización al ser aplicado a $\Pi(u)$:

Proposición 2.5.2. *Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{R})$, entonces*

$$P_h \Pi(u)(x) = \begin{cases} 0, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ 0, & \text{en } \mathcal{W}_{h,12}^{**}, \\ D_{1,h}u, & \text{en } \mathcal{W}_{h,1}^*, \\ iD_{2,h}u, & \text{en } \mathcal{W}_{h,2}^*. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Asimismo, al considerar la composición $P_h \overline{P}_h$, que da lugar al operador laplaciano discreto Δ_h , se obtiene:

$$P_h \overline{P}_h \Pi(u)(x) = \begin{cases} \Delta_h u, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ 0, & \text{en } \mathcal{W}_{h,12}^{**}, \\ 0, & \text{en } \mathcal{W}_{h,1}^*, \\ 0, & \text{en } \mathcal{W}_{h,2}^*. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Por otro lado, en la frontera se satisfacen las siguientes propiedades para la extensión $\Pi(u)$:

Proposición 2.5.3. *Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{R})$, entonces se satisfacen las siguientes identidades en la frontera:*

$$D_{k,h}^2 \Pi(u) = 0 \quad \text{y} \quad A_{k,h} D_{k,h} \Pi(u) = t_{r,h}^k D_{k,h} u \quad \text{en } \partial_k \mathcal{W}_h, \quad (2.5.5)$$

mientras que en las esquinas del dominio se verifican las identidades

$$t_{r,h}^1 D_{1,h} \Pi(u) = t_{r,2h}^2 t_{r,h}^1 D_{1,h} u, \quad \text{en } \partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h, \quad (2.5.6)$$

$$t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u) = t_{r,2h}^1 t_{r,h}^2 D_{2,h} u, \quad \text{en } \partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h. \quad (2.5.7)$$

Estas identidades se verifican directamente a partir de la definición de $\Pi(u)$ en los nodos de la frontera y en las esquinas del dominio.

La siguiente proposición muestra que la norma discreta C^2 de la extensión se mantiene controlada como consecuencia de las identidades de esquina anteriores.

Proposición 2.5.4. *Si $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{K})$ es tal que $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} \leq M$, entonces $\|\Pi(u)\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} \leq 3M$*

Demostración. La única diferencia entre las dos normas es que la correspondiente a $\Pi(u)$ cuantifica sus valores en la esquina extendida. Por ende, es necesario estimar cada término que utilice el valor extendido de $\Pi(u)$. Debido a la simetría, analizaremos solo el caso de la esquina $x = (1, 1)$. Utilizando la definición de $\Pi(u)$ en la esquina y las propiedades (2.5.6) y (2.5.7), se tiene:

$$\begin{aligned}\Pi(u)(x) &= u(x - he_1) + u(x - he_2) - u(x - he_2 - he_1), \\ t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u)(x) &= t_{r,h}^2 D_{2,h} u(x - he_1), \\ t_{r,h}^1 D_{1,h} \Pi(u)(x) &= t_{r,h}^1 D_{1,h} u(x - he_2), \\ t_{r,h}^1 t_{r,h}^2 D_{1,h} D_{2,h} \Pi(u)(x) &= 0.\end{aligned}$$

Para las segundas derivadas puras, se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}D_{2,h} D_{2,h} \Pi(u)(x - he_2) &= \tau_{-1,2h} D_{2,h} D_{2,h} u(x - he_2) - \tau_{-2,h} \tau_{-1,h} D_{1,h} D_{2,h} u(x - he_2), \\ D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)(x - he_1) &= \tau_{-2,2h} D_{1,h} D_{1,h} u(x - he_1) - \tau_{-1,h} \tau_{-2,h} D_{1,h} D_{2,h} u(x - he_1).\end{aligned}$$

Aplicando la definición de la norma y acotando los términos del lado derecho por el máximo de u y sus derivadas en \mathcal{W}_h (usando la desigualdad triangular donde corresponda), se concluye el resultado. \square

Esta estimación garantiza que la extensión no introduce un crecimiento no controlado de la regularidad discreta, lo cual es esencial para mantener el control uniforme de los términos de borde en las estimaciones posteriores.

La siguiente propiedad, formulada como proposición, se usa durante el desarrollo de la desigualdad de Carleman discreta para cambiar el dominio de integración de $\mathcal{W}_{h/2}$ a \mathcal{W}_h .

Proposición 2.5.5. *Sea f una función discreta tal que $\mathcal{W}_{h/2} \subseteq \text{dom}(f)$ y $\text{sop}(f) \subseteq \mathcal{W}_h$, entonces*

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} f = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} f.$$

Demostración. Por definición,

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} f = \frac{h^2}{4} \sum_{x \in \mathcal{W}_{h/2}} f(x).$$

Utilizando $\text{sop}(f) \subseteq \mathcal{W}_h$, se tiene que

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} f = \frac{h^2}{4} \sum_{x \in \mathcal{W}_h} f(x) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} f.$$

□

De manera análoga, al cambiar el dominio de integración de $\partial_k \mathcal{W}_{h/2}$ a $\partial_k \mathcal{W}_h$ aparece un factor $1/2$. Dado que la demostración es completamente similar, se omiten el enunciado y la prueba correspondientes.

Estas propiedades permiten transferir estimaciones obtenidas en la malla refinada $\mathcal{W}_{h/2}$ a la malla original \mathcal{W}_h , lo que será fundamental en la obtención de la desigualdad de Carleman discreta del Capítulo 3.

2.6. Función peso

Sea $\gamma \subset \partial\Omega$ un subconjunto relativamente cerrado con interior no vacío tal que $\Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \gamma \neq \emptyset$. A lo largo de este trabajo, Γ_0 representará la porción de la frontera con corrosión, mientras que γ corresponderá a la parte accesible de la frontera.

2.6.1. Definición y regularidad

Se considera una función peso de la forma

$$\varphi = \varphi_1 + s\varphi_0.$$

donde $s > 0$ es el llamado parámetro de Carleman y $\varphi_0, \varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Esta regularidad es necesaria para la aplicación del teorema de Taylor en análisis discreto posterior.

Siguiendo el análogo continuo desarrollado en [6, 7], introducimos la función φ_0 dada por el Lema 2.6.1, que puede considerarse como un análogo del Lema 2.6 de [7] en el contexto de un dominio cuadrado.

Lema 2.6.1. *Existe $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\Delta\varphi_0 = 0 \text{ en } \Omega, \quad \varphi_0 = 0 \text{ en } \Gamma_0, \quad \partial_\nu\varphi_0 < 0 \text{ en } (\overline{\Gamma_0}) \setminus (\partial_1\partial_2\Omega), \quad \varphi_0 \geq 0 \text{ en } \gamma.$$

Demostración. Consideramos $\chi \in C^\infty([0, 1]^2)$ tal que $\chi = 0$ en Γ_0 , $\chi \geq 0$ en γ , $\chi \not\equiv 0$ en γ , y χ idénticamente constante en una vecindad de cada esquina del dominio.

Se define φ_0 como la solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0 = 0, & \text{en } \Omega, \\ \varphi_0 = \chi, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mediante el cambio de variables $v = \varphi_0 - \chi$, se llega al siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta v = -\Delta\chi, & \text{en } \Omega, \\ v = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Debido a las hipótesis sobre χ en las esquinas del dominio, todas las derivadas de $f := -\Delta\chi$ se anulan en dichos puntos. En consecuencia, se satisfacen las condiciones de compatibilidad consideradas en [11] para todo $k \in \mathbb{N}$, implicando $\varphi_0 \in H^k(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mediante inyecciones de Sobolev en dominios Lipschitz se concluye que $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Finalmente, siguiendo la demostración [7, Lema 2.6], el principio del máximo implica $\varphi_0 > 0$ en Ω y del lema de Hopf se tiene $\partial_\nu\varphi_0 < 0$ en $(\overline{\Gamma}_0) \setminus (\partial_1\partial_2\Omega)$. Esta última restricción se debe a que en las esquinas no se cumple la propiedad de la bola interior. \square

Observación 2.6.1. *Debido a la hipótesis sobre χ en las esquinas, se tiene que $\nabla\varphi_0 = \mathbf{0}$ en las esquinas de Ω .*

En [6] y de forma similar en [7], se define φ_1 como solución del problema

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = \lambda, & \text{en } \Omega, \\ \varphi_1 = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

para algún $\lambda > 0$. Sin embargo, el problema anterior no admite soluciones $C^\infty(\overline{\Omega})$, pues la condición de borde junto con la continuidad de las derivadas en las esquinas contradicen la condición $\Delta\varphi = \lambda$ en estas.

Por esta razón, en este trabajo se considera una función $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ que satisface $\Delta\varphi_1 \geq 2$ en Ω sin imponer condiciones de borde.

2.6.2. Relación con operadores discretos

El análisis de desigualdades de Carleman discretas requiere relacionar la acción de los operadores discretos sobre e^φ con los operadores diferenciales continuos correspondientes,

junto con términos de error controlados. Esta relación se establece mediante desarrollos de Taylor, lo que conduce a términos de error controlados en función de h y del parámetro de Carleman s .

En particular, utilizamos la notación $\mathcal{O}(sh)$ para denotar una función acotada por una constante multiplicada por sh . En el siguiente resultado se recopilan diversas estimaciones asintóticas; las constantes implícitas en los términos $\mathcal{O}(\cdot)$ dependen únicamente de las normas $\|\varphi_0\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ y $\|\varphi_1\|_{C^m(\bar{\Omega})}$, para algún $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Teorema 2.6.1. *Sean $\varphi_0, \varphi_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y definamos $\varphi := \varphi_1 + s\varphi_0$. Bajo los supuestos $h \leq 1$, $s \geq 1$ y $sh \leq \varepsilon_0$, se tienen las siguientes estimaciones:*

Para la traslación y el promedio:

$$\begin{aligned}\tau_{\pm k, h}(D_{k, h}e^\varphi) &= \partial_k \varphi e^\varphi + s\mathcal{O}(sh)e^\varphi, \\ \tau_{\pm k, h}(e^\varphi) &= e^\varphi + \mathcal{O}(sh)e^\varphi, \\ A_{k, 2h}(e^\varphi) &= e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ A_{j, 2h}A_{k, 2h}(e^\varphi) &= e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ A_{j, 2h}(\partial_k(\varphi)) &= \partial_k(\varphi) + s\mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Para las primeras diferencias finitas centradas:

$$\begin{aligned}D_{k, 2h}(e^\varphi) &= \partial_k \varphi e^\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ A_{j, 2h}D_{k, 2h}(e^\varphi) &= \partial_k \varphi e^\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi.\end{aligned}$$

Para las segundas diferencias finitas centradas:

$$\begin{aligned}D_{j, 2h}D_{k, 2h}(e^\varphi) &= \partial_{jk}(e^\varphi) + s^2\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ D_{j, 2h}(\partial_k \varphi) &= \partial_{jk} \varphi + s\mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Observación 2.6.2. *Estas estimaciones asintóticas siguen siendo válidas al cambiar $2h$ por h o por algún múltiplo de este.*

Demostración. Para la primera estimación, mediante la expansión de Taylor con resto de Lagrange, se tiene

$$e^{\varphi(x+he_k)} - e^{\varphi(x)} = \partial_k \varphi(x) e^{\varphi(x)} h + (\partial_{kk} \varphi(\xi) + \partial_k \varphi(\xi)^2) e^{\varphi(\xi)} \frac{h^2}{2},$$

para algún ξ entre x y $x + he_k$. Reescribiendo la expresión anterior, se tiene

$$\tau_{+k,h}D_{k,h}(e^\varphi)(x) = \partial_k\varphi(x)e^{\varphi(x)} + \left((\partial_{kk}\varphi(\xi) + \partial_k\varphi(\xi)^2)e^{\varphi(\xi)-\varphi(x)}\frac{h}{2} \right) e^{\varphi(x)}.$$

Por otro lado, expandiendo $\varphi(\xi) - \varphi(x)$ mediante Taylor, se tiene

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) = \partial_k\varphi(\xi_2)(\xi - x) = \mathcal{O}(sh),$$

para algún ξ_2 entre x y ξ , y la constante de la notación \mathcal{O} depende de la norma C^1 de φ_0 y φ_1 y es uniforme en espacio. Utilizando la identidad de la función exponencial como serie de potencia y eligiendo ε_0 tal que $sh < \varepsilon_0$ implique $\mathcal{O}(sh) < 1$, se tiene

$$e^{\varphi(\xi)-\varphi(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathcal{O}(sh))^k}{k!} = 1 + \mathcal{O}(sh),$$

en notación \mathcal{O} . Con lo anterior se deduce

$$\left((\partial_{kk}\varphi(\xi) + \partial_k\varphi(\xi)^2)e^{\varphi(\xi)-\varphi(x)}\frac{h}{2} \right) = s\mathcal{O}(sh)(1 + \mathcal{O}(sh)) = s\mathcal{O}(sh).$$

Concluyendo la siguiente estimación asintótica:

$$\tau_{+k,h}D_{k,h}(e^\varphi)(x) = \partial_k\varphi(x)e^{\varphi(x)} + s\mathcal{O}(sh)e^{\varphi(x)}.$$

Las demás estimaciones siguen un procedimiento análogo basado en las mismas herramientas y pueden encontrarse en la Sección 2.2 de [2].

□

2.7. Problema inverso discretizado

2.7.1. Problema directo

Sean $\gamma, \Gamma_0 \subset \partial\Omega$ como en la Sección 2.6. Consideramos sus versiones discretas $\gamma_h := \gamma \cap \partial\mathcal{W}_h$ y $\Gamma_{0,h} := \Gamma_0 \cap \partial\mathcal{W}_h$, las cuales representan la frontera accesible e inaccesible.

Consideramos los coeficientes de corrosión $q \in C(\Gamma_{0,h}; \mathbb{R})$ tal que sean no-negativos y exista $\alpha > 0$, $q \geq \alpha > 0$ en algún subconjunto de medida positiva de Γ_0 . El flujo de corriente $f \in C(\gamma_h; \mathbb{R})$, se considera como dato en el problema inverso.

Dados q y f definidos en el párrafo anterior, y utilizando el operador laplaciano discreto (2.2.1) junto con la derivada normal discreta (2.2.2), consideramos el siguiente sistema, el

cual modela el problema directo discreto:

$$\begin{cases} \Delta_h u = 0, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ D_{\nu,h} u = f, & \text{en } \gamma_h, \\ D_{\nu,h} u + qu = 0, & \text{en } \Gamma_{0,h}. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Este sistema constituye un análogo completamente discreto del modelo continuo de corrosión (1.1.1) presentado en la Sección 1.1.

La existencia y unicidad de la solución del problema directo discreto pueden establecerse mediante un desarrollo detallado del marco funcional discreto asociado, incluyendo resultados de traza y coercividad de la forma bilineal. Si bien este análisis es relevante, su inclusión desviaría el foco principal de este trabajo, centrado en el estudio del problema inverso y en la obtención de estimaciones de tipo Carleman. Por esta razón, se introduce la siguiente hipótesis:

Hipótesis (Existencia y unicidad). *Para todo coeficiente de corrosión q y todo flujo de corriente f considerados, se supone que el sistema (2.7.1) admite una única solución u .*

2.7.2. Problema inverso

Mediante la hipótesis de existencia y unicidad, fijando un flujo de corriente f , se tiene que el mapeo

$$q \mapsto \mathcal{M}(q) := (u|_{\gamma_h}, D_{\nu,h} u|_{\gamma_h}),$$

donde u es solución de (2.7.1), está bien definido.

El problema inverso asociado consiste en recuperar el coeficiente de corrosión $q \in C(\Gamma_{0,h}; \mathbb{R})$ a partir de la medición $\mathcal{M}(q)$.

En particular, como se menciona en la Sección 1.3, en el caso discreto, la unicidad depende de la geometría de γ_h y se mostró un caso donde no hay unicidad. Por esta razón, estamos interesados en mostrar una noción de estabilidad compatible con la falta de unicidad, es decir, mostrar una estimación del estilo

$$\|q_1 - q_2\|_X \leq C(\Psi(\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\|_Y) + \mathcal{E}(h)),$$

donde $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ corresponden a normas discretas en espacios adecuados.

2.7.3. Propiedades conservadas del continuo

Este sistema mantiene algunas propiedades análogas a las del marco continuo; en particular, satisface un principio del máximo discreto y un resultado de positividad.

Teorema 2.7.1 (Principio del máximo discreto). *Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{R})$ tal que $\Delta_h u = 0$ en \mathcal{W}_h . Entonces*

$$\min_{y \in \partial \mathcal{W}_h} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial \mathcal{W}_h} u(y), \quad \forall x \in \overline{\mathcal{W}}_h.$$

Demostración. Probamos primero la desigualdad superior. Si el máximo de u se alcanza en la frontera $\partial \mathcal{W}_h$, la afirmación es inmediata. Supongamos entonces que el máximo se alcanza en un punto interior $x \in \mathcal{W}_h$.

Por la definición de máximo discreto, se tiene

$$u(x) - u(x \pm h e_k) \geq 0, \quad k = 1, 2.$$

Sumando estas desigualdades y utilizando la definición del operador laplaciano discreto, se obtiene

$$\Delta_h u(x) \leq 0.$$

Como por hipótesis $\Delta_h u(x) = 0$, se concluye que

$$u(x) = u(x \pm h e_k), \quad k = 1, 2.$$

En consecuencia, u toma el mismo valor en x y en todos sus nodos vecinos. Repitiendo este argumento de manera iterativa sobre la malla conexa \mathcal{W}_h , se deduce que u es constante en \mathcal{W}_h . En particular, el valor máximo de u en $\overline{\mathcal{W}}_h$ coincide con su valor en la frontera.

La desigualdad inferior se demuestra de forma completamente análoga considerando el mínimo. □

Corolario 2.7.1 (Positividad del sistema discreto). *Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{R})$ una solución del problema*

$$\begin{cases} \Delta_h u = 0, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ D_{\nu, h} u = f, & \text{en } \gamma_h, \\ D_{\nu, h} u + q u = 0, & \text{en } \Gamma_{0, h}, \end{cases}$$

donde $f \in C(\gamma_h; \mathbb{R})$ y $q \in C(\Gamma_{0, h}; \mathbb{R})$ satisfacen $f \geq 0$, $q \geq 0$, con $f \not\equiv 0$. Entonces,

$$u > 0 \quad \text{en } \overline{\mathcal{W}}_h.$$

Demostración. Por el principio del máximo discreto, u alcanza su mínimo en algún punto $x \in \partial\mathcal{W}_h$. En particular,

$$D_{\nu,h}u(x) \leq 0.$$

Supongamos primero que $D_{\nu,h}u(x) = 0$. Entonces u coincide en x con su nodo vecino interior $y \in \mathcal{W}_h$. Como x es un punto de mínimo, y también lo es. Usando la ecuación $\Delta_h u = 0$ en y , se concluye que u coincide con todos sus nodos vecinos. Repitiendo este razonamiento de forma iterativa, se deduce que u es constante en $\overline{\mathcal{W}_h}$.

Esto contradice las condiciones de borde, pues implicaría $D_{\nu,h}u \equiv 0$ en $\partial\mathcal{W}_h$, mientras que por hipótesis $f \not\equiv 0$. Por lo tanto,

$$D_{\nu,h}u(x) < 0.$$

Si $x \in \gamma_h$, entonces $D_{\nu,h}u(x) = f(x) \geq 0$, lo cual contradice la desigualdad anterior. Por consiguiente, el punto de mínimo debe pertenecer a $\Gamma_{0,h}$.

En ese caso, usando la condición de Robin discreta,

$$D_{\nu,h}u(x) + q(x)u(x) = 0,$$

y como $D_{\nu,h}u(x) < 0$, se tiene que $q(x) > 0$. Utilizando esto se deduce $u(x) > 0$.

Finalmente, dado que $u(x)$ es el mínimo de u en $\overline{\mathcal{W}_h}$, se concluye que

$$u > 0 \quad \text{en } \overline{\mathcal{W}_h}.$$

□

Cabe destacar que estas propiedades —el principio del máximo discreto y la positividad— constituyen resultados de tipo cualitativo que reflejan la naturaleza elíptica del operador discreto y garantizan un comportamiento controlado de las soluciones. Sin embargo, estas propiedades no implican, por sí solas, unicidad ni estabilidad del problema inverso asociado. En particular, como se mostró en la sección 1.3, el esquema discreto puede admitir múltiples soluciones o coeficientes compatibles con los mismos datos de Cauchy, lo que pone de manifiesto una obstrucción estructural propia del marco discreto. Esta coexistencia de propiedades locales bien comportadas con la pérdida de continuación única motiva la necesidad de herramientas más finas, capaces de capturar información cuantitativa del problema conforme la malla se refina.

Con este marco teórico establecido, las herramientas desarrolladas se combinan para obtener una desigualdad de Carleman discreta (Teorema 3.1.1) adaptada a este modelo.

Dicha desigualdad, inspirada en el marco continuo desarrollado por Choulli [6, 7], constituye el primer paso fundamental en la demostración de estabilidad. En este contexto, en el capítulo siguiente se ponen de manifiesto las primeras diferencias estructurales entre los resultados del marco continuo y sus análogos discretos.

Capítulo 3

Desigualdad de Carleman discreta en 2D

El objetivo de este capítulo es establecer una desigualdad de Carleman para el operador laplaciano discreto en dos dimensiones definido en (2.2.1). Como se discutió en el Capítulo 1, este tipo de desigualdades constituye una herramienta fundamental para deducir un principio de continuación única cuantificado asintótico y, en consecuencia, obtener resultados sobre la estabilidad del problema inverso de corrosión en el marco discreto.

La desigualdad obtenida puede entenderse como una versión discreta de la Proposición 2.3 de [7], correspondiente al caso continuo, la cual se presenta a continuación:

Teorema 3.0.1 (Desigualdad de Carleman del marco continuo). *Para cualquier función real $u \in C^2(\bar{\Omega})$, se satisface la estimación:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta\varphi)|u|^2 e^{\varphi} dx + \int_{\Omega} (\Delta\varphi - 1)|\nabla u|^2 e^{\varphi} dx \\ & \leq \int_{\Omega} |\Delta u|^2 e^{\varphi} dx + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu}\varphi(|u|^2 + |\nabla u|^2) e^{\varphi} d\sigma \\ & \quad + 2 \int_{\partial\Omega} (\partial_{\nu}u\Delta u - (\partial_{12}^2 u)J\nabla u \cdot \nu) e^{\varphi} d\sigma, \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

donde $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

En el marco continuo, mediante una hipótesis de acotamiento en norma C^2 , es posible estimar los términos de borde de (3.0.1) que no dependen de la derivada normal $\partial_{\nu}\varphi$. Siguiendo esta línea, en este trabajo se busca demostrar la desigualdad bajo el supuesto

de que la función u posee una regularidad discreta acotada; específicamente, se asume que $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$ para una constante $M > 0$ fija.

Esta elección permite demostrar una versión de la desigualdad de Carleman donde dichos términos de frontera ya aparecen estimados por M , lo cual resulta suficiente para los fines de cuantificación de la continuación única discreta. Además, este enfoque simplifica el tratamiento de los términos de error adicionales que la discretización introduce sobre la función peso cuyo control exige imponer una relación crítica entre el parámetro de Carleman s y el espaciado de la malla h .

La demostración se basa en la identidad para el operador laplaciano $\Delta = (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y)$. Dado el marco teórico introducido, contamos con la descomposición discreta $\Delta_h \Pi(u) = (D_{1,h} + iD_{2,h})(D_{1,h} - iD_{2,h})\Pi(u)$, válida en $\mathcal{W}_{h/2}$. Utilizando esta estructura, la obtención de la desigualdad de Carleman se divide en tres etapas: en primer lugar, se establece una desigualdad para el operador de primer orden en la malla \mathcal{W}_h (Lema 3.2.1); a continuación, mediante refinamiento, se aplica a los casos de $\Pi(u)$ y $(D_{1,h} - iD_{2,h})\Pi(u)$ en $\mathcal{W}_{h/2}$ (Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 respectivamente); finalmente, se estiman y absorben los términos de error, lo que permite concluir la desigualdad principal presentada en la sección siguiente. En la figura 3.1 se presenta el flujo de la demostración expuesto en este párrafo.

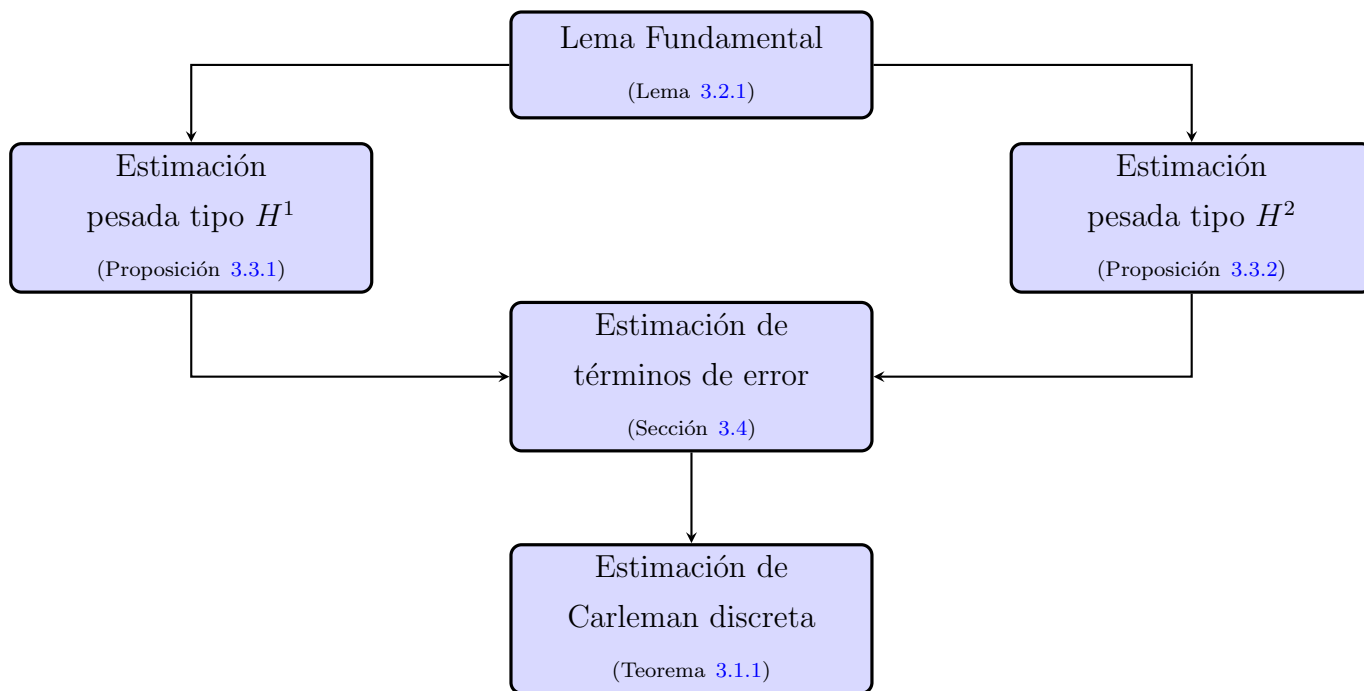


Figura 3.1: Flujo de demostración de la desigualdad de Carleman

3.1. Resultado principal

Realizando la metodología expuesta en el párrafo anterior, se obtiene el siguiente teorema, el cual constituye el resultado central de este capítulo:

Teorema 3.1.1 (Desigualdad de Carleman discreta). *Existen constantes $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tales que para todo $h \leq 1$ y $s \geq 1$ que satisfagan $sh^{1/2} < \varepsilon$, se tiene que para cualquier función discreta $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{R})$ que verifique $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} \leq M$, se satisface:*

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - Cs^4h^2)|u|^2e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - Cs^4h^2)|D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq (1 + Cs^2h^2) \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi (|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2) e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}u|^2 e^\varphi \\
& \quad + CM \left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} (|u| + |D_{\nu,h}u|) e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau} |D_{\tau,h}u| e^\varphi \right).
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

El lado izquierdo de la desigualdad corresponde a una energía discreta ponderada de u y sus primeras diferencias finitas, ajustadas por términos de error asintóticos. El lado derecho se descompone en tres componentes principales: una norma L^2 discreta ponderada del operador laplaciano discreto $\Delta_h u$, una serie de términos de borde ponderados por la derivada normal $\partial_\nu \varphi$ —lo cual permite localizar las estimaciones en los nodos discretos de la región de observación γ — y, finalmente, un término de estabilidad condicional proporcional a la cota a priori M que controla los errores de truncamiento en la frontera.

3.2. Desigualdad para $D_{1,2h} + iD_{2,2h}$

Considerando $a_1 = 1$ y $a_2 = i$, definimos el operador discreto de primer orden

$$P_{2h} = D_{1,2h} + iD_{2,2h}, \tag{3.2.1}$$

así como la siguiente función auxiliar en la frontera,

$$Q(x) := \sum_k a_k \nu_k(x). \tag{3.2.2}$$

Con estas definiciones, se obtiene una desigualdad para P_{2h} , la cual se formula en el siguiente teorema. Aquí, φ denota la función de peso considerada en la Sección 2.6.

Lema 3.2.1. Dado $h \leq 1, s \geq 1$ y $sh < \varepsilon_0$, para todo $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{C})$ se tiene:

$$\mathbf{E}(u; \mathcal{W}_h) + \mathbf{e}(u; \mathcal{W}_h) + \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi |u|^2 e^\varphi \leq \int_{\mathcal{W}_h} |P_{2h}u|^2 e^\varphi + B(u, \mathcal{W}_h) \quad (3.2.3)$$

Con término de borde dado por:

$$\begin{aligned} B(u, \mathcal{W}_h) := & \operatorname{Re} \sum_k \int_{\partial\mathcal{W}_h} (\operatorname{Tr}_{2h}^j(u A_{k,2h} e^\varphi, a_k D_{k,2h} \bar{u}) + \operatorname{Tr}_{2h}^j(u D_{k,2h} e^\varphi, a_k A_{k,2h} \bar{u})) \bar{Q} \\ & - \operatorname{Re} \int_{\partial\mathcal{W}_h} \operatorname{Tr}_{2h}^k(u, Q \overline{P_{2h}u} e^\varphi) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

y términos de error dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u; \mathcal{W}_h) = & \operatorname{Re} \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h} u D_{k,2h} \bar{u} \sigma_{k,j,2h} + A_{j,2h} u D_{k,2h} \bar{u} \xi_{k,j,2h} \\ & + D_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \xi_{j,k,2h} + A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \eta_{k,j,2h}), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(u; \mathcal{W}_h) := & \sum_k \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 (A_{k,2h} (\partial_{kk} \varphi e^\varphi) - \partial_{kk} \varphi e^\varphi) - \sum_k \int_{\mathcal{W}_h} h^2 |D_{k,2h} u|^2 \partial_{kk} \varphi e^\varphi \\ & + \frac{h}{2} \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 t_{r,2h} (\partial_{kk} \varphi e^\varphi) - \frac{h}{2} \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} t_{r,2h} (|u|^2) \partial_{kk} \varphi e^\varphi \\ & + 2 \int_{\mathcal{W}_h} \operatorname{Im}(A_{2,2h} u A_{1,2h} \bar{u}) \partial_{12} \varphi e^\varphi, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

donde σ, ξ, η se definen en (3.2.7).

Demostración. Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{C}), v \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{C})$, aplicando la fórmula de integración por partes discretas (Teorema 2.4.1) y propiedades de operadores discretos (Corolario 2.4.1) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}_h} P_{2h} u v e^\varphi &= \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{W}_h} a_k D_{k,2h} u \bar{v} e^\varphi, \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(- \int_{\mathcal{W}_h} a_k u D_{k,2h} (\bar{v} e^\varphi) + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} a_k \operatorname{Tr}_{2h}^k(u, \bar{v} e^\varphi) \nu_k \right), \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(- \int_{\mathcal{W}_h} a_k u (D_{k,2h} \bar{v} A_{k,2h} (e^\varphi) + A_{k,2h} \bar{v} D_{k,2h} (e^\varphi)) + \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} a_k \operatorname{Tr}_{2h}^k(u, \bar{v} e^\varphi) \nu_k \right). \end{aligned}$$

Reemplazando v por $P_{2h}u$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}_h} |P_{2h}u|^2 e^\varphi &= \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} (a_k \nu_k) \operatorname{Tr}_{2h}^k(u, \overline{P_{2h}u} e^\varphi) \\ &+ \underbrace{\sum_{k,j} -a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} u (D_{k,2h} D_{j,2h} \bar{u} A_{k,2h} e^\varphi + A_{k,2h} D_{j,2h} \bar{u} D_{k,2h} e^\varphi)}_{=: X_1}. \end{aligned}$$

Luego, desarrollamos el término X_1 mediante una integración por partes respecto al índice j , obteniendo la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{k,j} -a_k \bar{a}_j \int_{\partial_j \mathcal{W}_h} (\mathrm{Tr}_{2h}^j(uA_{k,2h}e^\varphi, D_{k,2h}\bar{u}) + \mathrm{Tr}_{2h}^j(uD_{k,2h}e^\varphi, A_{k,2h}\bar{u})) \nu_j \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}(uA_{k,2h}e^\varphi)D_{k,2h}\bar{u} + D_{j,2h}(uD_{k,2h}e^\varphi)A_{k,2h}\bar{u}), \end{aligned}$$

de la cual podemos expandir el integrando de la última línea, obteniendo así

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{k,j} -a_k \bar{a}_j \int_{\partial_j \mathcal{W}_h} (\mathrm{Tr}_{2h}^j(uA_{k,2h}e^\varphi, D_{k,2h}\bar{u}) + \mathrm{Tr}_{2h}^j(uD_{k,2h}e^\varphi, A_{k,2h}\bar{u})) \nu_j \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uA_{j,2h}A_{k,2h}e^\varphi D_{k,2h}\bar{u} + A_{j,2h}uA_{k,2h}D_{j,2h}e^\varphi D_{k,2h}\bar{u}) \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uA_{j,2h}D_{k,2h}e^\varphi A_{k,2h}\bar{u} + A_{j,2h}uD_{j,2h}D_{k,2h}e^\varphi A_{k,2h}\bar{u}). \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar la notación, se definen las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \sigma_{k,j,2h} &:= A_{j,2h}A_{k,2h}e^\varphi - e^\varphi = \mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ \xi_{k,j,2h} &:= A_{k,2h}D_{j,2h}e^\varphi - \partial_j \varphi e^\varphi = s\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi, \\ \eta_{k,j,2h} &:= D_{j,2h}D_{k,2h}e^\varphi - \partial_{jk} \varphi e^\varphi - \partial_j \varphi \partial_k \varphi e^\varphi = s^2\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

donde los términos asintóticos \mathcal{O} se deducen del Teorema 2.6.1. Con estas definiciones, podemos escribir el término X_1 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{k,j} -a_k \bar{a}_j \int_{\partial_j \mathcal{W}_h} (\mathrm{Tr}_{2h}^j(uA_{k,2h}e^\varphi, D_{k,2h}\bar{u}) + \mathrm{Tr}_{2h}^j(uD_{k,2h}e^\varphi, A_{k,2h}\bar{u})) \nu_j \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uD_{k,2h}\bar{u}e^\varphi + A_{j,2h}uD_{k,2h}\bar{u}\partial_j \varphi e^\varphi) \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uA_{k,2h}\bar{u}\partial_k \varphi e^\varphi + A_{j,2h}uA_{k,2h}\bar{u}\partial_k \varphi \partial_j \varphi e^\varphi) \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} A_{j,2h}uA_{k,2h}\bar{u}\partial_{jk} \varphi e^\varphi \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uD_{k,2h}\bar{u}\sigma_{k,j,2h} + A_{j,2h}uD_{k,2h}\bar{u}\xi_{k,j,2h}) \\ &\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h}uA_{k,2h}\bar{u}\xi_{j,k,2h} + A_{j,2h}uA_{k,2h}\bar{u}\eta_{k,j,2h}). \end{aligned}$$

Notamos que los términos de la segunda y tercera línea se completan en un cuadrado, con

esto se obtiene

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sum_{k,j} -a_k \bar{a}_j \int_{\partial_j \mathcal{W}_h} (\text{Tr}_{2h}^j(u A_{k,2h} e^\varphi, D_{k,2h} \bar{u}) + \text{Tr}_{2h}^j(u D_{k,2h} e^\varphi, A_{k,2h} \bar{u})) \nu_j \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_h} \left| \sum_j (\bar{a}_j D_{j,2h} u + \bar{a}_j \partial_j \varphi A_{j,2h} u) \right|^2 e^\varphi \\
&\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \partial_{jk} \varphi e^\varphi \\
&\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h} u D_{k,2h} \bar{u} \sigma_{k,j,2h} + A_{j,2h} u D_{k,2h} \bar{u} \xi_{k,j,2h}) \\
&\quad + \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} (D_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \xi_{j,k,2h} + A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \eta_{k,j,2h}).
\end{aligned}$$

Las ultimas dos líneas corresponden al término de error $\mathbf{E}(u; \mathcal{W}_h)$, el cual se define en (3.2.5). Volviendo a la estimación general y despreciando el término cuadrático no negativo de X_1 , se deduce la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(u; \mathcal{W}_h) + \text{Re} \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \partial_{jk} \varphi e^\varphi \\
\leq \int_{\mathcal{W}_h} |P_{2h} u|^2 e^\varphi + \text{Re} \sum_{k,j} a_k \bar{a}_j \int_{\partial_j \mathcal{W}_h} (\text{Tr}_{2h}^j(u A_{k,2h} e^\varphi, D_{k,2h} \bar{u}) + \text{Tr}_{2h}^j(u D_{k,2h} e^\varphi, A_{k,2h} \bar{u})) \nu_j \\
- \text{Re} \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} (a_k \nu_k) \text{Tr}_{2h}^k(u, \overline{P_{2h} u} e^\varphi).
\end{aligned}$$

Desarrollando el segundo término de la primera línea en la desigualdad anterior, se tiene

$$\text{Re} \sum_{k,j=1}^2 a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \partial_{jk} \varphi e^\varphi = \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{W}_h} |A_{k,2h} u|^2 \partial_{kk} \varphi e^\varphi + 2 \int_{\mathcal{W}_h} \text{Im}(A_{2,2h} u A_{1,2h} \bar{u}) \partial_{12} \varphi e^\varphi,$$

aplicando las identidades discretas del Corolario 2.4.1 y, posteriormente, la fórmula de integración por partes para el promedio (Teorema 2.4.2), se deduce

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_h} |A_{k,2h} u|^2 \partial_{kk} \varphi e^\varphi &= \int_{\mathcal{W}_h} (A_{k,2h} (|u|^2) - h^2 |D_{k,2h} u|^2) \partial_{kk} \varphi e^\varphi \\
&= \int_{\mathcal{W}_h} (|u|^2 A_{k,2h} (\partial_{kk} \varphi e^\varphi) - h^2 |D_{k,2h} u|^2 \partial_{kk} \varphi e^\varphi) \\
&\quad + \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 t_{r,2h} (\partial_{kk} \varphi e^\varphi) - \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} t_{r,2h} (|u|^2) \partial_{kk} \varphi e^\varphi,
\end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente estimación:

$$\text{Re} \sum_{k,j=1}^2 a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{W}_h} A_{j,2h} u A_{k,2h} \bar{u} \partial_{jk} \varphi e^\varphi = \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 \Delta \varphi e^\varphi + \mathbf{e}(u; \mathcal{W}_h),$$

donde $\mathbf{e}(u; \mathcal{W}_h)$ es definido en (3.2.6). Finalmente, utilizando la estimación anterior en la desigualdad general, se concluye

$$\mathbf{E}(u; \mathcal{W}_h) + \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi |u|^2 e^\varphi + \mathbf{e}(u; \mathcal{W}_h) \leq \int_{\mathcal{W}_h} |P_{2h}u|^2 e^\varphi + B(u, \mathcal{W}_h), \quad (3.2.8)$$

con $B(u, \mathcal{W}_h)$ definido en (3.2.4). \square

3.3. Formulación preliminar del Carleman

Primera desigualdad

Proposición 3.3.1. *Dado $h \leq 1, s \geq 1$ y $sh < \varepsilon_0$, para todo $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{C})$, se tiene*

$$\begin{aligned} & 4\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi |u|^2 e^\varphi \\ & \leq \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |u|^2 e^\varphi + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi \\ & \quad + \mathcal{O}(sh) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Demostración. Aplicamos el Lema 3.2.1 a la función discreta $\Pi(u)$ en la malla $\mathcal{W}_{h/2}$, obteniendo

$$\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \Delta\varphi |\Pi(u)|^2 e^\varphi \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |P_h \Pi(u)|^2 e^\varphi + B(\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}).$$

Usando la propiedad de extensión (2.5.3) y el cambio de integral de la Proposición 2.5.5 se tiene

$$\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi |u|^2 e^\varphi \leq \frac{1}{4} \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + B(\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}).$$

Ahora estimamos los términos de borde. Al desarrollar la parte real, se tiene

$$\begin{aligned} B(\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}) &= - \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(\Pi(u), (D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)e^\varphi) \\ & \quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} (\text{Tr}_h(\Pi(u)A_{1,h}e^\varphi, D_{1,h}\Pi(u)) + \text{Tr}_h(\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi, A_{1,h}\Pi(u)))\nu_1 \\ & \quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} (\text{Tr}_h(\Pi(u)A_{2,h}e^\varphi, D_{2,h}\Pi(u)) + \text{Tr}_h(\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi, A_{2,h}\Pi(u)))\nu_2. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $t_{r,h}\Pi(u) \equiv 0$ en la frontera, consecuencia de las propiedades de la extensión $\Pi(u)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2B(\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}) &= \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \Pi(u)t_{r,h}D_{1,h}\Pi(u)\nu_1(A_{1,h}e^\varphi - t_{r,h}e^\varphi) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \Pi(u)t_{r,h}D_{2,h}\Pi(u)\nu_2(A_{2,h}e^\varphi - t_{r,h}e^\varphi) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \Pi(u)t_{r,h}A_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi\nu_1 + \Pi(u)t_{r,h}A_{2,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi\nu_2. \end{aligned}$$

Mediante las identidades $(A - t_{r,h})e^\varphi = (\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^3))e^\varphi$, $t_{r,h}^k A_{k,h}\Pi(u) = \Pi(u) - \frac{h}{2}D_{\nu,h}\Pi(u)$ y $D_{k,h}e^\varphi = \partial_k\varphi e^\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi$, podemos estimar las integrales anteriores, obteniendo

$$\begin{aligned} 2B(\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}) &\leq (\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^3)) \int_{\partial\mathcal{M}(h)} (|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \partial_n\varphi|\Pi(u)|^2e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^3) \int_{\partial\mathcal{W}_h} (|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi \\ &\quad + s\mathcal{O}((sh)^2) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|^2e^\varphi. \end{aligned}$$

Por tanto, juntando las anteriores estimaciones, se tiene la siguiente desigualdad, válida para $s \geq 1$, $h < 1$ y $sh < \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} &4\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi|u|^2e^\varphi \\ &\leq \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi|u|^2e^\varphi + (\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^3) + s\mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|^2e^\varphi \\ &\quad + (\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^3)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2e^\varphi. \end{aligned}$$

Absorbiendo $\mathcal{O}((sh)^3)$ por $\mathcal{O}(sh)$ se concluye. □

Segunda desigualdad

Proposición 3.3.2. *Dado $h \leq 1, s \geq 1$ y $sh < \varepsilon_0$, para todo $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{C})$ tal que $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$, se tiene*

$$\begin{aligned}
& 4\mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} \Delta\varphi |D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 \partial_n \varphi e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 \partial_n \varphi e^\varphi \\
& \quad + (s\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \quad (3.3.2) \\
& \quad + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi \\
& \quad + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}((sh)^2)) M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u| e^\varphi + |Z_1|.
\end{aligned}$$

donde Z_1 se define en (3.3.5).

Demostración. Aplicamos el Lema 3.2.1 a la función discreta $\overline{P}_h\Pi(u)$ en la malla $\mathcal{W}_{h/2}$, obteniendo

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \mathbf{e}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \Delta\varphi |\overline{P}_h\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |P_h \overline{P}_h \Pi(u)|^2 e^\varphi + B(\overline{P}_h\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2}).
\end{aligned}$$

Utilizando (2.5.4) y un cambio de integral (ver proposición 2.5.5) se deduce

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |P_h \overline{P}_h \Pi(u)|^2 e^\varphi = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi. \quad (3.3.3)$$

De forma similar, debido a la propiedad (2.5.3), se tiene

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} \Delta\varphi |\overline{P}_h\Pi(u)|^2 e^\varphi = \frac{1}{4} \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} \Delta\varphi |D_{k,h}u|^2 e^\varphi. \quad (3.3.4)$$

Estimamos el término de borde $B(\overline{P}_h\Pi(u), \mathcal{W}_{h/2})$ por partes, para esto se definen los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -\operatorname{Re} \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h(\overline{P}_h\Pi(u), Q\overline{P}_h\overline{P}_h\Pi(u)e^\varphi), \\
Y_2 &= \sum_k \operatorname{Re} \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h(\overline{Q}P_h\Pi(u)A_{k,h}e^\varphi, a_k D_{k,h}P_h\Pi(u)),
\end{aligned}$$

$$Y_3 = \sum_k \operatorname{Re} \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h(\overline{QP_h\Pi(u)} D_{k,h} e^\varphi, a_k A_{k,h} P_h \Pi(u)).$$

Desarrollando la parte real en el término Y_1 , se tiene

$$Y_1 = -\frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{W}_h} D_{\nu,h} \Pi(u) D_{\tau\tau,h} \Pi(u) t_{r,h} e^\varphi.$$

Debido a la desigualdad $\|\Pi(u)\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$ y a la expansión asintótica de $t_{r,h} e^\varphi$, tenemos la siguiente estimación para Y_1 :

$$Y_1 \leq \frac{1}{4} (1 + \mathcal{O}(sh)) M \int_{\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u| e^\varphi.$$

Observación 3.3.1. Debido a la Proposición 2.5.4, $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M/3$ implica $\|\Pi(u)\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$.

Desarrollando la parte real del término Y_2 , se tiene

$$\begin{aligned} Y_2 &= \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)A_{1,h}e^\varphi, D_{11,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)A_{1,h}e^\varphi, D_{12,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)A_{2,h}e^\varphi, -D_{22,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)A_{2,h}e^\varphi, D_{12,h}\Pi(u)). \end{aligned}$$

Por propiedades de la extensión, ciertas trazas son nulas, obteniendo así

$$\begin{aligned} Y_2 &= \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} -\frac{1}{2} t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 D_{11,h} \Pi(u) t_{r,h} A_{1,h} e^\varphi \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \frac{1}{2} (D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 + D_{2,h} \Pi(u) \nu_1) t_{r,h} D_{12,h} \Pi(u) A_{1,h} e^\varphi \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} -\frac{1}{2} t_{r,h} D_{1,h} \Pi(u) \nu_1 D_{22,h} \Pi(u) t_{r,h} A_{2,h} e^\varphi \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \frac{1}{2} (D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 + D_{2,h} \Pi(u) \nu_1) t_{r,h} D_{12,h} \Pi(u) A_{2,h} e^\varphi. \end{aligned}$$

Agrupando las integrales, podemos escribir la estimación anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_2 &= -\frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{W}_h} D_{\nu,h} u D_{\tau\tau,h} \Pi(u) t_{r,h} A_{\tau,h} e^\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} (D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 + D_{2,h} \Pi(u) \nu_1) t_{r,h} D_{12,h} \Pi(u) (A_{2,h} e^\varphi + A_{1,h} e^\varphi). \end{aligned}$$

Debido a las identidades $t_{r,h}A_{\tau,h}e^\varphi = e^\varphi(1 + \mathcal{O}((sh)))$, $A_{2,h}e^\varphi + A_{1,h}e^\varphi = 2e^\varphi(1 + \mathcal{O}((sh)^2))$ y $\|\Pi(u)\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$, podemos acotar las integrales anteriores, obteniendo

$$Y_2 \leq \frac{1}{4}(1 + \mathcal{O}(sh))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi + \frac{1}{4}2(1 + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi.$$

Desarrollando la parte real del término Y_3 , se tiene

$$\begin{aligned} Y_3 &= \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)D_{1,h}e^\varphi, A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)D_{1,h}e^\varphi, A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)D_{2,h}e^\varphi, -A_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h((D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)D_{2,h}e^\varphi, A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)). \end{aligned}$$

Por propiedades de la extensión, ciertas trazas son nulas, obteniendo así

$$\begin{aligned} Y_3 &= \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \frac{1}{2}t_{r,h}(D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}D_{1,h}e^\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} (D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)t_{r,h}A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \frac{1}{2}t_{r,h}(D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 - D_{2,h}\Pi(u)\nu_2)A_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}D_{2,h}e^\varphi \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{W}_{h/2}} \frac{1}{2}(D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 + D_{2,h}\Pi(u)\nu_1)t_{r,h}A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi. \end{aligned}$$

Aplicando, propiedades de extensión por cero y cambios de malla en el dominio de las integrales, se tiene

$$\begin{aligned} Y_3 &= \frac{1}{4} \int_{\partial_1\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 t_{r,h}D_{1,h}e^\varphi \nu_1 + \frac{1}{4} \int_{(\partial_1\mathcal{W}_h)_2^*} D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi \nu_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\partial_2\mathcal{W}_h^*} D_{1,h}\Pi(u)\nu_2 t_{r,h}A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}D_{2,h}\Pi(u)\nu_2 A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}D_{1,h}e^\varphi \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\partial_2\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 t_{r,h}D_{2,h}e^\varphi \nu_2 + \frac{1}{4} \int_{(\partial_2\mathcal{W}_h)_1^*} D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi \nu_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\partial_1\mathcal{W}_h^*} D_{2,h}\Pi(u)\nu_1 t_{r,h}A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\partial_1\mathcal{W}_h} t_{r,h}D_{1,h}\Pi(u)\nu_1 A_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}D_{2,h}e^\varphi. \end{aligned}$$

Por otro lado, mediante la fórmula de integraciones por partes en la frontera para el operador promedio (ver Lema A.0.1), se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h^*} D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 t_{r,h} A_{1,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi \\ &= \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} A_{1,h} (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 + \frac{h}{2} \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h}^1 (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) \nu_2, \end{aligned}$$

para estimar la segunda integral utilizamos la siguiente expansión asintótica:

$$\begin{aligned} A_{1,h} (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) &= A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) A_{1,h} D_{1,h} e^\varphi + \frac{h^2}{4} D_{11,h} \Pi(u) D_{11,h} e^\varphi \\ &= A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) (\partial_1 \varphi e^\varphi + s \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi) + \frac{h^2}{4} D_{11,h} \Pi(u) (\partial_{11} e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi) \end{aligned}$$

y $t_{r,h} D_{1,h} e^\varphi = \partial_1 \varphi e^\varphi + s \mathcal{O}(sh) e^\varphi$, obteniendo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h^*} D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 t_{r,h} A_{1,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi - \frac{1}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h} D_{1,h} e^\varphi \\ &= \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) (s \mathcal{O}((sh)^2) - s \mathcal{O}(sh)) e^\varphi \\ &+ \frac{h^2}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 D_{11,h} \Pi(u) (\partial_{11} e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi) \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h}^1 (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) \nu_2. \end{aligned}$$

Acotando el lado derecho en la estimación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h^*} D_{1,h} \Pi(u) \nu_2 t_{r,h} A_{1,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi - \frac{1}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2 A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h} D_{1,h} e^\varphi \\ &\leq (s \mathcal{O}((sh)^2) + s \mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \\ &+ (\mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} |t_{r,h} D_{2,h} \Pi(u) \nu_2| |D_{11,h} \Pi(u)| e^\varphi \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h}^1 (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) \nu_2. \end{aligned}$$

Debido a la simetría en los índices 1 y 2 del procedimiento previo, la siguiente estimación también es válida:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_h^*} D_{2,h} \Pi(u) \nu_1 t_{r,h} A_{2,h} D_{1,h} \Pi(u) D_{2,h} e^\varphi - \frac{1}{4} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_h} t_{r,h} D_{1,h} \Pi(u) \nu_1 A_{2,h} D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h} D_{2,h} e^\varphi \\ &\leq (s \mathcal{O}((sh)^2) + s \mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial_1 \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_h^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) \int_{\partial_1 \mathcal{W}_h} |t_{r,h} D_{1,h} \Pi(u) \nu_1| |D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + \frac{h}{2} \sum_{\partial_2 \partial_1 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h}^2 (D_{2,h} \Pi(u) D_{2,h} e^\varphi) \nu_1.
\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar notación se define:

$$\begin{aligned}
Z_1 := & \frac{h}{2} \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h}^1 (D_{1,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi) \nu_2 \\
& + \frac{h}{2} \sum_{\partial_2 \partial_1 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h}^2 (D_{2,h} \Pi(u) D_{2,h} e^\varphi) \nu_1.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Por tanto, con las estimaciones anteriores, se deduce la siguiente desigualdad para el término Y_3 :

$$\begin{aligned}
Y_3 \leq & \frac{1}{4} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u|^2 t_{r,h} D_{1,h} e^\varphi \nu_1 + \frac{1}{4} \int_{(\partial_1 \mathcal{W}_h)_2^*} D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h} A_{1,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} e^\varphi \nu_1 \\
& + \frac{1}{4} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u|^2 t_{r,h} D_{2,h} e^\varphi \nu_2 + \frac{1}{4} \int_{(\partial_2 \mathcal{W}_h)_1^*} D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h} A_{2,h} D_{1,h} \Pi(u) D_{2,h} e^\varphi \nu_2 \\
& + (s\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \\
& + (\mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) \int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u| |D_{\tau\tau,h} \Pi(u)| e^\varphi + Z_1.
\end{aligned}$$

Aplicando las identidades $t_{r,h} A_{\nu,h} D_{\tau,h} \Pi(u) = D_{\tau,h} \Pi(u) - \frac{h}{2} D_{\nu,h} D_{\tau,h} \Pi(u)$ y $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$, se tiene

$$\begin{aligned}
Y_3 \leq & \frac{1}{4} \int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u|^2 \partial_n \varphi e^\varphi + \frac{1}{4} \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 \partial_n \varphi e^\varphi \\
& + (s\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \\
& + (\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) M \int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u| e^\varphi + Z_1.
\end{aligned}$$

Finalmente, se estima el término frontera $B(\overline{P}_h \Pi(u), \mathcal{W}_{h/2})$ utilizando las estimaciones para Y_1 , Y_2 y Y_3 , obteniéndose así

$$\begin{aligned}
|B(\overline{P}_h \Pi(u), \mathcal{W}_{h/2})| \leq & \frac{1}{4} \int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u|^2 \partial_n \varphi e^\varphi + \frac{1}{4} \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 \partial_n \varphi e^\varphi \\
& + (s\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \\
& + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) M \int_{\partial \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u| e^\varphi \\
& + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}((sh)^2)) M \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h} u| e^\varphi + |Z_1|.
\end{aligned}$$

Por ende, se concluye la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
& 4\mathbf{E}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} \Delta\varphi |D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 \partial_n \varphi e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 \partial_n \varphi e^\varphi \\
& \quad + (s\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \right) \\
& \quad + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}((sh)^4)) M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi \\
& \quad + \frac{1}{4} (2 + \mathcal{O}((sh)^2)) M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u| e^\varphi + |Z_1|.
\end{aligned}$$

□

Desigualdad pre-estimaciones de error

Sumando las desigualdades (3.3.1) y (3.3.2) se obtiene la siguiente desigualdad de Carleman preliminar:

$$\begin{aligned}
& 4\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{E}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) \\
& \quad + \int_{\mathcal{W}_h} \Delta\varphi |u|^2 e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1) |D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 \partial_n \varphi e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 \partial_n \varphi e^\varphi \\
& \quad + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2)) M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u| e^\varphi + (2 + \mathcal{O}(sh)) M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi \\
& \quad + (2 + \mathcal{O}((sh)^2)) M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u| e^\varphi + |Z_1|.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Para poder cerrar esta desigualdad es necesario obtener estimaciones de los términos de error. En particular, la siguiente sección se dedica a estimar los términos $\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$, $\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$, $\mathbf{E}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$ y $\mathbf{e}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$.

3.4. Estimaciones de error

En esta sección se estiman los diversos términos de error que aparecen en las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2.

- **Estimación de $\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$:** Como $\Pi(u)$ es real, los términos con $j \neq k$ se anulan, al ser imaginarios puros. De este modo,

$$\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) = \frac{1}{4} \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 \sigma_{k,k,h} + 2A_{k,h}u D_{k,h}u \xi_{k,k,h} + |A_{k,h}u|^2 \eta_{k,k,h}.$$

Usando la expansión asintótica de σ, ξ y η vista en (3.2.7), se tiene

$$|\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| \leq \frac{1}{4} \sum_k \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} s|A_{k,h}u| |D_{k,h}u| e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |A_{k,h}u|^2 e^\varphi.$$

Aplicando la desigualdad $s|A_{k,h}u| |D_{k,h}u| \leq s^2|A_{k,h}u|^2 + |D_{k,h}u|^2$ en la estimación anterior, se deduce

$$|\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| \leq \frac{1}{4} \sum_k \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |A_{k,h}u|^2 e^\varphi.$$

Utilizando la desigualdad del operador promedio $|A_{k,h}(v)|^2 \leq A_{k,h}(|v|^2)$ y la fórmula de integración por partes, se tiene

$$\int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |A_{k,h}u|^2 e^\varphi \leq \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} A_{k,h}(|u|^2) e^\varphi = \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 A_{k,h} e^\varphi + \frac{h}{2} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 t_{r,h}^k e^\varphi,$$

desde el cual, mediante estimaciones asintóticas, obtenemos

$$\int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |A_{k,h}u|^2 e^\varphi \leq (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi + \frac{h}{2} (1 + \mathcal{O}(sh)) \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi.$$

Por tanto, volviendo al término de error, se tiene la siguiente estimación:

$$|\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| \leq \mathcal{O}((sh)^2) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi + s^2 h \mathcal{O}((sh)^2) (1 + \mathcal{O}(sh)) \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi.$$

Finalmente, debido a la notación \mathcal{O} , la estimación anterior puede escribirse como

$$|\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| \leq \mathcal{O}((sh)^2) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi + s \mathcal{O}((sh)^3) \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi.$$

- **Estimación de $\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$:** Debido a que $\Pi(u)$ es real, se tiene

$$\text{Im}(A_{2,h}\Pi(u) A_{1,h}\Pi(u)) = 0.$$

Por otro lado, debido a la extensión por ceros, se cumple que $t_{r,h}\Pi(u) = 0$ en $\partial\mathcal{W}_{h/2}$. En consecuencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) &= \sum_k \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 (A_{k,h}(\partial_{kk}\varphi e^\varphi) - \partial_{kk}\varphi e^\varphi) - \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} h^2 |D_{k,2h}u|^2 \partial_{kk}\varphi e^\varphi \\ &\quad + \frac{h}{4} \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 t_{r,h}(\partial_{kk}\varphi e^\varphi). \end{aligned}$$

Aplicando la expansión asintótica $(A_{k,h}(\partial_{kk}\varphi e^\varphi) - \partial_{kk}\varphi e^\varphi) = s\mathcal{O}((sh)^2)e^\varphi$ y acotando

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| &\leq s\mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi + h\mathcal{O}(sh) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,2h}u|^2 e^\varphi \\ &\quad + \mathcal{O}(sh) \sum_k \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi. \end{aligned}$$

■ **Estimación de $\mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$:** Por definición,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) &= \operatorname{Re} \sum_{k,j,i,\ell} a_k \overline{a_j} a_i \overline{a_\ell} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (D_{j,h}D_{i,h}\Pi(u)D_{k,h}D_{\ell,h}\Pi(u)\sigma_{k,j,h} \\ &\quad + A_{j,h}D_{i,h}\Pi(u)D_{k,h}D_{\ell,h}\Pi(u)\xi_{k,j,h} + D_{j,h}D_{i,h}\Pi(u)A_{k,h}D_{\ell,h}\Pi(u)\xi_{j,k,h} \\ &\quad + A_{j,h}D_{i,h}\Pi(u)A_{k,h}D_{\ell,h}\Pi(u)\eta_{k,j,h}) \end{aligned}$$

Aplicando desigualdad de Young y la expansión asintótica de σ, ξ y η (3.2.7):

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| \\ &\leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \left[\mathcal{O}((sh)^2) |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) (s^2 \sum_{k,j} |A_{k,h}D_{j,h}\Pi(u)|^2 + |H(\Pi(u))|^2) e^\varphi \right. \\ &\quad \left. + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \sum_{k,j} |A_{k,h}D_{j,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \right] \end{aligned}$$

donde $H(\Pi(u))$ es el análogo discreto de la matriz Hessiana, es decir,

$$|H(\Pi(u))| = \sum_{k,j=1}^2 |D_{k,h}D_{j,h}\Pi(u)|^2.$$

Juntando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| &\leq \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\ &\quad + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \sum_{k,j} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{k,h}D_{j,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad del promedio $|A_{k,h}(v)|^2 \leq A_{k,h}(|v|^2)$, la fórmula de integración por partes del promedio junto con el hecho de que una integral de borde resultante es negativa y la otra se anula, se tiene:

$$\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{k,h}D_{k,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \leq (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{k,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \quad (3.4.1)$$

Mientras que para $k \neq j$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{k,h}D_{j,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi &\leq (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{j,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\ &\quad + \left(\frac{h}{2} + h\mathcal{O}(sh)\right) \int_{\partial_k \mathcal{W}_{h/2}} |D_{j,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \end{aligned}$$

Juntando las estimaciones anteriores y, cuando es posible, cambiando el dominio de las integrales de $h/2$ a h se tiene:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| &\leq \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\ &\quad + s\mathcal{O}((sh)^3) \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \end{aligned}$$

- **Estimación de $\mathbf{e}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})$:** Debido a que la norma dentro de los integrando es la norma compleja, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 \sum_j (A_{j,2h}(\partial_{jj}\varphi e^\varphi) - \partial_{jj}\varphi e^\varphi) \\ &\quad - \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 \int_{\mathcal{W}_h} h^2 (|D_{k,h}D_{k,h}u|^2 + |D_{k,h}D_{j,h}u|^2) \partial_{kk}\varphi e^\varphi \\ &\quad + \frac{h}{4} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 \int_{(\partial_k \mathcal{W}_h)_j^*} |D_\tau u|^2 t_{r,h}(\partial_{kk}\varphi e^\varphi) \\ &\quad - \frac{h}{4} \sum_{k=1}^2 \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 \partial_{kk}\varphi e^\varphi \\ &\quad + 2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \text{Im}(A_{2,h}\overline{P}_h\Pi(u)A_{1,h}P_h\Pi(u)) \partial_{12}\varphi e^\varphi. \end{aligned}$$

Acotando integrales mediante estimaciones asintóticas, excepto la última integral, se tiene:

$$\begin{aligned}
|e(\overline{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| &\leq s\mathcal{O}((sh)^2) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + h\mathcal{O}(sh) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
&+ \mathcal{O}(sh) \left(\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi \right) \\
&+ 2 \left| \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Im}(A_{2,h}\overline{P}_h\Pi(u)A_{1,h}P_h\Pi(u))\partial_{12}\varphi e^\varphi \right|.
\end{aligned}$$

Ahora estimamos la última integral, debido a la parte imaginaria se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Im}(A_{2,h}\overline{P}_h\Pi(u)A_{1,h}P_h\Pi(u))\partial_{12}\varphi e^\varphi &= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)\partial_{12}\varphi e^\varphi \\
&- \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)\partial_{12}\varphi e^\varphi.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes para el operador promedio discreto, junto con identidades del Cálculo discreto y la anulación de las integrales de borde debida a la extensión nula, se deduce:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)A_{1,h}D_{2,h}\Pi(u)\partial_{12}\varphi e^\varphi \\
&= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)A_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)A_{1,h}A_{2,h}(\partial_{12}\varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^2}{4} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_{2,h}\Pi(u)A_{2,h}D_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}(\partial_{12}\varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^2}{4} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{2,h}D_{2,h}\Pi(u)A_{1,h}D_{2,h}(\partial_{12}\varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h}{2} \int_{\partial_1\mathcal{W}_{h/2}} D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}^1(A_{2,h}D_{1,h}\Pi(u)\partial_{12}\varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h}{2} \int_{\partial_2\mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}^2(D_{2,h}\Pi(u)A_{1,h}(\partial_{12}\varphi e^\varphi)).
\end{aligned}$$

Para balancear términos, integramos por partes el operador promedio en $D_{2,h}\Pi(u)A_{2,h}D_{1,h}D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}(\partial_{12}\varphi e^\varphi)$ donde una integral de borde resultante se anula

por extensión por cero, obteniendo:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{2,h} D_{1,h} \Pi(u) A_{1,h} D_{2,h} \Pi(u) \partial_{12} \varphi e^\varphi \\
&= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) A_{2,h} D_{2,h} \Pi(u) A_{1,h} A_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^2}{4} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{2,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) A_{2,h} D_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^2}{4} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) D_{2,h} D_{2,h} \Pi(u) A_{1,h} D_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^4}{16} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) D_{2,h} D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} D_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h^3}{8} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h}^2 (D_{2,h} \Pi(u) D_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi)) \\
&+ \frac{h}{2} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} D_{2,h} \Pi(u) t_{r,h}^1 (A_{2,h} D_{1,h} \Pi(u) \partial_{12} \varphi e^\varphi) \\
&+ \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u) t_{r,h}^2 (D_{2,h} \Pi(u) A_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi)).
\end{aligned}$$

Utilizando las siguientes expansiones asintóticas

$$\begin{aligned}
A_{1,h} A_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_{12} \varphi e^\varphi + s \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi, \\
A_{2,h} D_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_1 (\partial_{12} \varphi e^\varphi) + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi, \\
A_{1,h} D_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_2 (\partial_{12} \varphi e^\varphi) + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi, \\
D_{1,h} D_{2,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_{12} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) + s^3 \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi, \\
t_{r,h}^1 (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_{12} \varphi e^\varphi + s \mathcal{O}((sh)) e^\varphi, \\
t_{r,h}^2 A_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_{12} \varphi e^\varphi + s \mathcal{O}((sh)) e^\varphi, \\
t_{r,h}^2 D_{1,h} (\partial_{12} \varphi e^\varphi) &= \partial_1 (\partial_{12} \varphi e^\varphi) + s^2 \mathcal{O}(sh) e^\varphi.
\end{aligned}$$

Se obtiene la siguiente estimación de la integral con parte imaginaria

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Im}(A_{2,h} \bar{P}_h \Pi(u) A_{1,h} P_h \Pi(u)) \partial_{12} \varphi e^\varphi \right| \\
& \leq s \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| |A_{2,h} D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{2,h} D_{2,h} \Pi(u)| |D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| |D_{2,h} D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + h \mathcal{O}((sh)^3) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| |D_{2,h} D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + h \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |D_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| |t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + \mathcal{O}(sh) \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} |D_{2,h} \Pi(u)| |A_{2,h} t_{r,h}^1 D_{1,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + \mathcal{O}(sh) \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |A_{1,h} D_{1,h} \Pi(u)| |t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi.
\end{aligned}$$

Para las integrales de borde utilizamos $\|\Pi(u)\|_{C^2(\bar{\mathcal{W}}_h)} \leq M$, la primera y cuarta integral se estima con desigualdad de Young, mientras que para la segunda y tercera se aplica Young quitando un factor s a la segunda diferencia finita, obteniendo:

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Im}(A_{2,h} \bar{P}_h \Pi(u) A_{1,h} P_h \Pi(u)) \partial_{12} \varphi e^\varphi \right| \\
& \leq s \mathcal{O}((sh)^2) \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_{k,h} D_{k,h} \Pi(u)|^2 e^\varphi \\
& + h \mathcal{O}((sh)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
& + h \mathcal{O}((sh)^3) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
& + M h \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + M \mathcal{O}(sh) \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} |D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi \\
& + M \mathcal{O}(sh) \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |t_{r,h}^2 D_{2,h} \Pi(u)| e^\varphi.
\end{aligned}$$

Para estimar las integrales con $A_{k,h}D_{k,h}\Pi(u)$, podemos utilizar (3.4.1), obteniendo:

$$\begin{aligned}
2 \left| \int_{\mathcal{W}_{h/2}} \operatorname{Im}(A_{2,h}\bar{P}_h\Pi(u)A_{1,h}P_h\Pi(u))\partial_{12}\varphi e^\varphi \right| &\leq s\mathcal{O}((sh)^2) \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{k,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
&+ h\mathcal{O}((sh)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
&+ M\mathcal{O}(sh) \int_{\partial_1\mathcal{W}_{h/2}} |D_{2,h}\Pi(u)| e^\varphi \\
&+ M\mathcal{O}(sh) \int_{\partial_2\mathcal{W}_{h/2}} |t_{\tau,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)| e^\varphi.
\end{aligned}$$

Por ende, se concluye la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
|e(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2})| &\leq s\mathcal{O}((sh)^2) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + h\mathcal{O}(sh) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
&+ \mathcal{O}(sh) \left(\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi \right) \\
&+ M\mathcal{O}(sh) \left(\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi \right).
\end{aligned}$$

3.5. Conclusión de la desigualdad

En esta sección se realiza la demostración de la desigualdad de Carleman Teorema 3.1.1.

Demostración Teorema 3.1.1. Definimos el siguiente término:

$$I_1 := 4\mathbf{E}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{E}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}) + 4\mathbf{e}(\bar{P}_h\Pi(u); \mathcal{W}_{h/2}).$$

Debido a las estimaciones de la sección anterior, se tiene la siguiente estimación inferior para el término I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &\geq - (s^2\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi \\
&- (\mathcal{O}((sh)^2) + h\mathcal{O}(sh) + s^2\mathcal{O}((sh)^2) + s\mathcal{O}((sh)^3) + s\mathcal{O}(sh)^2) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
&- (\mathcal{O}((sh)^2) + h\mathcal{O}(sh)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\
&- (s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}(sh)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|^2 e^\varphi \\
&- (s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}(sh)) \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
&- \mathcal{O}(sh) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi.
\end{aligned}$$

En particular, estas estimaciones inferiores se entienden como estrictamente negativas. Volviendo a la desigualdad (3.3.6) y considerando la jerarquía entre los \mathcal{O} , se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|u|^2 e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - s\mathcal{O}((sh)^3) - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |u|^2 e^\varphi \\
& \quad + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
& \quad + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u| e^\varphi + (2 + \mathcal{O}(sh))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi \\
& \quad + \frac{1}{4}(2 + s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)| e^\varphi + |Z_1|.
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Acotando el término Z_1 con el resultado auxiliar Lema A.0.4, se deduce

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|u|^2 e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - s\mathcal{O}((sh)^3) - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|D_{k,h}u|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |u|^2 e^\varphi \\
& \quad + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n \varphi |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
& \quad + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u| e^\varphi + (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi \\
& \quad + (2 + s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)| e^\varphi.
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Utilizando la estimación auxiliar del Hessiano expuesto en el Lema A.0.3, se elige ε_H tal que, se tenga la siguiente desigualdad para $sh < \varepsilon_H$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi & \leq s^2\mathcal{O}(1) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2 e^\varphi + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi \\
& \quad + \frac{1}{2}M(1 + \mathcal{O}(sh)) \left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|^2 e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \right).
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Aplicamos la estimación anterior en la desigualdad (3.5.2), deduciendo

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|u|^2e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - s\mathcal{O}((sh)^3) - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi|u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi|D_{\nu,h}u|^2e^\varphi \\
& \quad + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}\Pi(u)|^2e^\varphi + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|e^\varphi \\
& \quad + (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi \\
& \quad + (2 + s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi.
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Aplicando el resultado auxiliar Lema A.0.5, podemos quitar la dependencia de la extensión $\Pi(u)$ de las integral de borde con término $D_{\tau,h}\Pi(u)$, obteniéndose la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|u|^2e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - s\mathcal{O}((sh)^3) - s^2\mathcal{O}((sh)^2))|D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi|u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi|D_{\nu,h}u|^2e^\varphi \\
& \quad + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}u|^2e^\varphi + (\mathcal{O}(sh) + s\mathcal{O}((sh)^2))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|e^\varphi \\
& \quad + (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh) + \mathcal{O}((sh)^2) + \mathcal{O}(sh))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi \\
& \quad + (2 + s\mathcal{O}((sh)^3) + \mathcal{O}((sh)^2))M \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u|e^\varphi.
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Finalmente, además de la condición $sh < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_H\}$, se impone $sh^{1/2} < \varepsilon_1$, tal que los términos de error asintóticos de la desigualdad anterior colapsen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - s^2|\mathcal{O}((sh)^2)|)|u|^2e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - s^2|\mathcal{O}((sh)^2)|)|D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq (1 + |\mathcal{O}((sh)^2)|) \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi(|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}u|^2e^\varphi \\
& \quad + \mathcal{O}(1)M \left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} |u|e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}u|e^\varphi \right).
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Donde $\mathcal{O}(1)$ es una constante que solo depende de φ_0 y φ_1 . Debido a las hipótesis $s > 1$ y $h < 1$, la condición $sh^{1/2} < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_H\}$ implican las demás condiciones sobre sh . Finalmente, para obtener la forma final de la desigualdad presentada en el Teorema 3.1.1 existe una

constante universal $C > 0$ que domina las constantes escondidas en los términos asintóticos $s^2\mathcal{O}((sh)^2)$, $\mathcal{O}((sh)^2)$ y la constante $\mathcal{O}(1)$, donde la constante C depende únicamente de las normas de las funciones peso φ_0 y φ_1 . \square

La desigualdad de Carleman establecida en el Teorema 3.1.1 permite controlar la norma de la solución en términos de los datos de frontera, incorporando términos de error propios del esquema discreto. Bajo la restricción natural que vincula el parámetro de Carleman con el tamaño de la malla, este resultado proporciona la herramienta clave para derivar estimaciones de continuación única cuantificadas y, en consecuencia, establecer la estabilidad del problema inverso de corrosión en el marco discreto, lo cual se desarrolla en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Estabilidad del problema inverso de corrosión discretizado

En este capítulo establecemos el resultado principal de esta tesis: la estabilidad del problema inverso de corrosión en el ámbito discreto.

Recordando el sistema definido en el Capítulo 2 ecuación (2.7.1)

$$\begin{cases} \Delta_h u = 0, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ D_{\nu,h} u = f, & \text{en } \gamma_h, \\ D_{\nu,h} u + qu = 0, & \text{en } \Gamma_{0,h}. \end{cases}$$

Buscamos recuperar q a partir de las mediciones discretas $\mathcal{M}(q) = (u|_{\gamma_h}, D_{\nu,h} u|_{\gamma_h})$. Como se discutió en la Introducción, en el caso continuo tenemos las siguientes referencias de estabilidad [1, 6, 12, 7], en las cuales se demuestra que el operador \mathcal{M} admite un módulo de continuidad al menos de tipo logarítmico; excepcionalmente, en [12] se obtiene un módulo de continuidad de tipo Hölder. En particular, en la referencia del continuo más cercana a este trabajo [6, 7] se demuestra, bajo ciertas hipótesis a priori, la siguiente estimación

$$\|q_1 - q_2\| \leq C\Psi(\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\|),$$

con $\Psi(\rho) := |\ln \rho|^{-1/2} + \rho$.

Sin embargo, a diferencia de [6, 7], el dominio en consideración no tiene frontera suave, lo que afecta la construcción de la función peso φ_0 en las esquinas y, consecuentemente, impide obtener estimaciones de estabilidad uniformes en dichos puntos.

Esta pérdida de control en los vértices de la frontera inaccesible es coincidente con los resultados de estabilidad expuestos en [1, 12]. Cabe destacar que este fenómeno no es una consecuencia de la discretización, sino que ya está presente en el marco continuo.

Como se analizó en la Introducción, la discretización rompe la unicidad exacta. Por tanto, nuestro objetivo aquí es demostrar que, a pesar de esta obstrucción, existe una noción de estabilidad condicional en la que el error de reconstrucción queda acotado por una función logarítmica de las observaciones, sumada a un término que se desvanece con el refinamiento de la malla.

4.1. Definiciones y normas de borde

Para escribir los resultados y demostraciones del capítulo, se definen los siguientes conjuntos discretos:

$$\gamma_h^\circ := (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ \cap \gamma; \quad \Gamma_{0,h}^\circ := (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ \cap \Gamma_0. \quad (4.1.1)$$

Los cuales corresponden a dualizaciones interiores de conjuntos frontera.

Para $\delta > 0$ consideramos la frontera corroída a distancia mayor a δ de los vértices de la siguiente forma:

$$\Gamma_0^\delta := \{x \in \Gamma_0 : \text{dist}(x, \partial_1\partial_2\Omega) > \delta\}.$$

A partir de este, se define su versión discreta en la frontera primal y en la frontera dual tangencial interior mediante

$$\Gamma_{0,h}^\delta := \Gamma_0^\delta \cap \partial\mathcal{W}_h \quad \text{y} \quad \Gamma_{0,h}^{\delta,\circ} := \Gamma_0^\delta \cap (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ.$$

Por otro lado, consideramos el resto entre Γ_0 y Γ_0^δ como la frontera singular $\Gamma_0^{\text{sing}} := \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^\delta$. De forma similar a Γ_0^δ , definimos las siguientes versiones discretas para la parte singular del conjunto:

$$\Gamma_{0,h}^{\text{sing}} := \Gamma_0^{\text{sing}} \cap \partial\mathcal{W}_h \quad \text{y} \quad \Gamma_{0,h}^{\text{sing},\circ} := \Gamma_0^{\text{sing}} \cap (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ.$$

En estos tipos de conjuntos frontera se definen las siguientes normas H^1 tangenciales discretas:

$$\|u\|_{H^1(\partial\mathcal{W}_h)} = \|u\|_{L^2(\partial\mathcal{W}_h)} + \|D_{\tau,h}u\|_{L^2((\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ)}, \quad (4.1.2)$$

$$\|u\|_{H^1(\gamma_h)} = \|u\|_{L^2(\gamma_h)} + \|D_{\tau,h}u\|_{L^2(\gamma_h^\circ)}. \quad (4.1.3)$$

Notar que debido al uso de dualización interior —refiriéndonos a la operación $(\cdot)_\tau^\circ$ — estas normas no utilizan información adicional (por ejemplo, las esquinas). Estas normas discretas

de borde permiten controlar simultáneamente el valor de la función y su variación tangencial a lo largo de la frontera. Dicho control es fundamental en la cuantificación de continuación única, donde los términos de borde juegan un rol central.

4.2. Propiedad de continuación única cuantificada discreta

Siguiendo la estrategia de Choulli [7, 6] adaptada al entorno discreto, el primer paso consiste en cuantificar la propagación de información desde la frontera accesible hacia el resto del dominio. Para ello, aplicamos la desigualdad de Carleman discreta (Teorema 3.1.1) obtenida en el capítulo anterior, la cual constituye la herramienta técnica fundamental de esta sección.

El siguiente resultado actúa como un puente que permite controlar la norma de la solución discreta en toda la frontera mediante mediciones locales. Esta cuantificación es clave, pues establece el módulo de continuidad necesario para abordar, posteriormente, la estabilidad del problema inverso de corrosión.

Teorema 4.2.1 (Cuantificación de continuación única discreta). *Existe un umbral $h_0(\gamma) > 0$ tal que, para cada $M > 0, \delta > 0$, es posible hallar una constante $C = C(M, \delta, \Omega, \gamma) > 0$ tal que, para todo $0 < h < h_0$ y toda función $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h)$ que satisfaga $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}}_h)} \leq M$ y $\Delta_h u = 0$ en \mathcal{W}_h , se verifica:*

$$\|u\|_{H^1(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} \leq C \left[\Psi \left(\|u\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\gamma_h)} \right) + h^{1/4} \right].$$

Remark 4.2.1. *La dependencia de la constante C respecto a γ es consecuencia de la construcción de la función peso φ_0 y ya aparece en el marco continuo. El umbral h_0 , que no tiene análogo en el caso continuo, surge en el marco discreto como consecuencia de la relación crítica entre el parámetro de Carleman y el tamaño de la malla; su dependencia respecto a γ se hereda de la elección de la función peso.*

Demostración. Utilizando la desigualdad de Carleman discreta demostrada en la sección anterior (Teorema 3.1.1). Existe un $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tal que para $h \leq 1, s \geq 1, sh^{1/2} < \varepsilon$ se

tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_h} (\Delta\varphi - Cs^4h^2)|u|^2e^\varphi + \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} (\Delta\varphi - 1 - Cs^4h^2)|D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq (1 + Cs^2h^2) \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2e^\varphi + \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi(|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}u|^2e^\varphi. \\
& \quad + CM\left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} (|u| + |D_{\nu,h}u|)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}u|e^\varphi\right).
\end{aligned}$$

Debido a que la función peso satisface $\Delta\varphi = 2$, se puede elegir $\varepsilon > 0$ tal que; además de lo anterior, se tenga

$$\Delta\varphi - Cs^4h^2 > \frac{1}{2}, \Delta\varphi - 1 - Cs^4h^2 > \frac{1}{2}.$$

Por ende, utilizando estas estimaciones y $\Delta_h u = 0$ en \mathcal{W}_h , se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_h} |u|^2e^\varphi + \frac{1}{2} \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h}u|^2e^\varphi \\
& \leq \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi(|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}u|^2e^\varphi. \\
& \quad + CM\left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} (|u| + |D_{\nu,h}u|)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}u|e^\varphi\right).
\end{aligned}$$

La cual implica la siguiente desigualdad para integrales de borde:

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_{\partial\mathcal{W}_h} \partial_n\varphi(|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} \partial_n\varphi|D_{\tau,h}u|^2e^\varphi \\
& \quad + CM\left(\int_{\partial\mathcal{W}_h} (|u| + |D_{\nu,h}u|)e^\varphi + \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}u|e^\varphi\right). \tag{4.2.1}
\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar la notación, se definen las siguientes cantidades integrales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} & := \int_{\gamma_h} (|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2) + \int_{\gamma_h^\circ} |D_{\tau,h}u|^2, \\
\mathcal{J} & := \int_{\Gamma_{0,h}^\delta} (|u|^2 + |D_{\nu,h}u|^2) + \int_{\Gamma_{0,h}^{\delta,\circ}} |D_{\tau,h}u|^2.
\end{aligned}$$

Además de las siguientes cantidades escalares

$$\begin{aligned}
\theta_\delta & := \min_{\Gamma_0^\delta} |\partial_\nu\varphi_0|, \quad c := \max_{\Omega} |\varphi_0|, \quad \tilde{c} := \max_{\Omega} |\varphi_1|, \\
c_0 & := \max_{\partial\Omega} |\partial_\nu\varphi_0|, \quad c_1 := \max_{\partial\Omega} |\partial_\nu\varphi_1|.
\end{aligned}$$

Recordando las propiedades de φ_0 del Lema 2.6.1, procedemos a estimar cada integral en la desigualdad (4.2.1).

Para las integrales localizadas, usamos el siguiente procedimiento: Separamos el dominio y localizamos el signo de $\partial_\nu \varphi_0$. Posteriormente se analizamos el comportamiento de la exponencial con peso. En particular, en la región de corrosión se comporta de forma independiente de s . Finalmente, en la región singular de Γ_0 acotamos usando la hipótesis $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{W}_h} \partial_n \varphi (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) e^\varphi &= \int_{\gamma_h} \partial_n \varphi (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) e^\varphi + \int_{\Gamma_{0,h}^\delta} \partial_n \varphi (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) e^\varphi \\ &\quad + \int_{\Gamma_{0,h}^{\text{sing}}} \partial_n \varphi (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) e^\varphi, \\ &\leq (sc_0 + c_1) e^{sc+\tilde{c}} \int_{\gamma_h} (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) \\ &\quad + (-s\theta_\delta e^{-\tilde{c}} + c_1 e^{\tilde{c}}) \int_{\Gamma_{0,h}} (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2) + 2c_1 e^{\tilde{c}} M^2 h |\Gamma_{0,h}^{\text{sing}}|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^\circ} \partial_n \varphi |D_{\tau,h} u|^2 e^\varphi &= \int_{\gamma_h^\circ} \partial_n \varphi |D_{\tau,h} u|^2 e^\varphi + \int_{\Gamma_{0,h}^{\delta,\circ}} \partial_n \varphi |D_{\tau,h} u|^2 e^\varphi + \int_{\Gamma_{0,h}^{\text{sing},\circ}} \partial_n \varphi |D_{\tau,h} u|^2 e^\varphi, \\ &\leq (sc_0 + c_1) e^{sc+\tilde{c}} \int_{\gamma_h^\circ} |D_{\tau,h} u|^2 + (-s\theta_\delta e^{-\tilde{c}} + c_1 e^{\tilde{c}}) \int_{\Gamma_{0,h}^{\delta,\circ}} |D_{\tau,h} u|^2 \\ &\quad + c_1 e^{\tilde{c}} h |\Gamma_{0,h}^{\text{sing},\circ}|. \end{aligned}$$

Para las integrales no localizadas se sigue un acotamiento similar, con la diferencia que en Γ_0 acotamos directamente con $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{W}_h} (|u| + |D_{\nu,h} u|) e^\varphi &\leq e^{cs+\tilde{c}} \int_{\gamma_h} (|u| + |D_{\nu,h} u|) + 2M e^{\tilde{c}} \int_{\Gamma_{0,h}} 1, \\ &\leq e^{cs+\tilde{c}} \sqrt{\int_{\gamma_h} 1} \left(\sqrt{\int_{\gamma_h} |u|^2} + \sqrt{\int_{\gamma_h} |D_{\nu,h} u|^2} \right) + 2M e^{\tilde{c}} h |\Gamma_{0,h}|, \\ &\leq e^{cs+\tilde{c}} \sqrt{h} |\gamma_h| \sqrt{2} \sqrt{\int_{\gamma_h} (|u|^2 + |D_{\nu,h} u|^2)} + 2M e^{\tilde{c}} h |\Gamma_{0,h}|. \end{aligned}$$

$$\int_{(\partial \mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h} u| e^\varphi \leq e^{cs+\tilde{c}} \sqrt{h} |\gamma_h^\circ| \sqrt{\int_{\gamma_h^\circ} |D_{\tau,h} u|^2} + M e^{\tilde{c}} h |\Gamma_{0,h}^\circ|.$$

Obteniendo

$$0 \leq (-s\theta_\delta e^{-\tilde{c}} + c_1 e^{\tilde{c}}) \mathcal{J} + (sc_0 + c_1) e^{cs+\tilde{c}} \mathcal{I} + CM e^{cs+\tilde{c}} C_\gamma \sqrt{\mathcal{I}} + CM^2 C_{\Gamma_0} e^{\tilde{c}},$$

donde las constantes C_γ y C_{Γ_0} solo dependen de la medida de Lebesgue uno dimensional de los conjuntos. Por tanto, estas constantes se pueden acotar en función del perímetro de Ω .

$$(s\theta_\delta e^{-2\tilde{c}} - c_1)\mathcal{J} \leq (sc_0 + c_1)e^{cs}\mathcal{I} + CM e^{cs}C_\Omega\sqrt{\mathcal{I}} + CM^2C_\Omega,$$

Notemos que

$$\sqrt{\mathcal{I}} \leq \sqrt{2}(\|u\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\gamma_h)}).$$

Por tanto, definiendo

$$\mathcal{B} := \|u\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\gamma_h)}$$

se tiene que $\mathcal{B} \leq 1$ implica $\mathcal{I} \leq \mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B} \leq 1$ implica

$$(s\theta_\delta e^{-2\tilde{c}} - c_1)\mathcal{J} \leq (sc_0 + c_1)e^{cs}\mathcal{B} + \sqrt{2}CM e^{cs}C_\Omega\mathcal{B} + CM^2C_\Omega,$$

considerando $s_0 := \max\{2c_1/(\theta_\delta e^{-2\tilde{c}}), 1\}$, $s > s_0$ y se tiene

$$\frac{s\theta_\delta}{2}e^{-2\tilde{c}}\mathcal{J} \leq (sc_0 + c_1 + \sqrt{2}CMC_\Omega)e^{cs}\mathcal{B} + CM^2C_\Omega.$$

Multiplicando por $(CM^2C_\Omega s)^{-1}$, se tiene

$$\frac{\theta_\delta}{2CM^2C_\Omega}e^{-2\tilde{c}}\mathcal{J} \leq \frac{1}{CM^2C_\Omega}(c_0 + c_1s_0^{-1} + CMC_\Omega s_0^{-1})e^{cs}\mathcal{B} + \frac{1}{s},$$

como $s_0^{-1} \leq 1$, la desigualdad anterior queda

$$\frac{\theta_\delta}{2CM^2C_\Omega}e^{-2\tilde{c}}\mathcal{J} \leq \frac{1}{CM^2C_\Omega}(c_0 + c_1 + CMC_\Omega)e^{cs}\mathcal{B} + \frac{1}{s}.$$

Por tanto, existen constantes $C_0, C_1 > 0$ tales que

$$C_1\mathcal{J} \leq C_0e^{cs}\mathcal{B} + \frac{1}{s}, \quad \forall s > s_0, \forall h < 1 : sh^{1/2} < \varepsilon.$$

Estimamos el lado derecho por conveniencia, nótese las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &< \frac{1}{s - s_0}, \\ C_0e^{cs}\mathcal{B} &= C_0e^{cs_0}e^{c(s-s_0)}\mathcal{B}, \end{aligned}$$

Por tanto, existe $C > 0$ tal que

$$C\mathcal{J} \leq e^{c(s-s_0)}\mathcal{B} + \frac{1}{s - s_0}, \quad \forall s > s_0, \forall h < 1 : sh^{1/2} < \varepsilon,$$

Con el fin de aplicar el Lema A.0.6 con las funciones $u(s) = e^{c(s-s_0)}\mathcal{B}$ y $v(s) = 1/(s - s_0)$ en el intervalo $[s_0, \varepsilon h^{-1/2}]$, se tiene la condición necesaria $s_0 < \varepsilon h^{-1/2}$ para tener un intervalo no vacío. Por tanto, considerando un parámetro de malla máximo $h_0 > 0$ tal que $h_0 <$

$\min\{\varepsilon s_0, 1\}$, se tiene que $h < h_0$ implica $s_0 < \varepsilon h^{-1/2}$, dado lo anterior del Lema A.0.6 se obtiene:

$$C\mathcal{J} \leq 2 \max\{\varepsilon^{-1}h^{1/2}, \sqrt{\mathcal{I}}, \frac{1}{s^* - s_0}\}, \quad \forall h < h_0,$$

donde $s^* > s_0$ es tal que $e^{c(s^* - s_0)}\mathcal{B} = \frac{1}{s^* - s_0}$.

Utilizando

$$\mathcal{B} \leq e^{c(s^* - s_0)}\mathcal{B} = \frac{1}{s^* - s_0},$$

la desigualdad se transforma en

$$C\mathcal{J} \leq 2 \max\{\varepsilon^{-1}h^{1/2}, \frac{1}{s^* - s_0}\}, \quad \forall h < h_0.$$

Aplicando logaritmo en la identidad $e^{c(s^* - s_0)}\mathcal{B} = \frac{1}{s^* - s_0}$ se deduce la siguiente identidad para $s^* - s_0$:

$$\ln(s^* - s_0) + c(s^* - s_0) = -\ln(\mathcal{B}).$$

Debido a que $\ln(x) \leq x$ y $-\ln(\mathcal{B}) = |\ln(\mathcal{B})|$, se tiene

$$(1 + c)(s^* - s_0) \geq |\ln(\mathcal{B})|,$$

$$\frac{1}{s^* - s_0} \leq (1 + c)|\ln(\sqrt{\mathcal{I}})|^{-1}.$$

Por ende, para $\mathcal{B} \leq 1$ se deduce la siguiente estimación:

$$C\mathcal{J} \leq 2\varepsilon^{-1}h^{1/2} + 2(1 + c)|\ln(\mathcal{B})|^{-1},$$

Mientras que para $\mathcal{B} \geq 1$, se tiene

$$\sqrt{\mathcal{J}} \leq MC_{\Gamma_0}^{1/2} \leq MC_{\Gamma_0}^{1/2}\mathcal{B}.$$

Juntando estos casos, se tiene

$$\sqrt{\mathcal{J}} + \mathcal{B} \leq MC_{\Gamma_0}^{1/2}\mathcal{B} + \sqrt{2}C^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}h^{1/4} + C^{-1/2}\sqrt{2(1 + c)}|\ln(\mathcal{B})|^{-1/2} + \mathcal{B}. \quad (4.2.2)$$

Notando que por equivalencia de normas

$$\|u\|_{H^1(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} \leq \sqrt{2}\sqrt{\mathcal{J}} + \mathcal{B}.$$

Entonces, existe una constante $C > 0$, la cual proviene de equivalencia de normas y la mayor constante en la desigualdad (4.2.2), tal que se tiene la siguiente estimación:

$$\|u\|_{H^1(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\Gamma_{0,h}^\delta \cup \gamma_h)} \leq C[\Psi(\|u\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u\|_{L^2(\gamma_h)}) + h^{1/4}].$$

□

Observación 4.2.1. *Debido a que el resultado es válido para fronteras γ generales, la aparición de un término de cuantificación de ruido discreto (en este caso $h^{1/4}$) es totalmente esperable en vista del ejemplo de pérdida de unicidad y continuación única visto en la Introducción.*

Con este resultado de propagación establecido, estamos en condiciones de probar la estabilidad del coeficiente q , lo que se desarrolla en la siguiente sección.

4.3. Estabilidad del problema de corrosión

Para establecer la estabilidad del problema inverso, consideremos dos coeficientes de corrosión $q_1, q_2 \in C(\Gamma_{0,h}; \mathbb{R})$ y dos fuentes $f_1, f_2 \in C(\gamma_h; \mathbb{R})$, denotamos por u_1 y u_2 a las respectivas soluciones del sistema discreto (2.7.1). Entonces, consideramos la siguiente norma para la diferencia de operador de medición:

$$\|\mathcal{M}(q_1) - \mathcal{M}(q_2)\| := \|u_1 - u_2\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u_1 - D_{\nu,h}u_2\|_{L^2(\gamma_h)}.$$

El siguiente teorema establece una estimación de estabilidad que relaciona la diferencia entre dos coeficientes de corrosión con la diferencia de las soluciones medidas en una parte accesible de la frontera. Esta estabilidad está condicionada a que dos coeficientes de corrosión tengan soluciones discretas bajo cierto umbral en norma C^2 discreta. La estabilidad es de tipo logarítmico, lo cual es característico de problemas inversos elípticos, y a medida que el parámetro de malla tiende a cero, la desigualdad tiende al análogo continuo.

Teorema 4.3.1 (Estabilidad condicional del problema inverso). *Sea $h_0(\gamma) > 0$ el umbral de malla definido en el Teorema 4.2.1. Para cada $M > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que para todo par de potenciales $q_1, q_2 \in C(\Gamma_{0,h}; \mathbb{R})$ y sus respectivas soluciones u_1, u_2 que satisfacen la hipótesis de acotamiento $\|u_1\|, \|u_2\|_{C^2(\overline{\omega}_h)} \leq M$, se cumple:*

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq C \left[\Psi \left(\|u_1 - u_2\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h}u_1 - D_{\nu,h}u_2\|_{L^2(\gamma_h)} \right) + h^{1/4} \right],$$

para todo subconjunto $K \subset \{x \in \Gamma_{0,h}^\delta : u_1(x) \neq 0\}$. La constante C depende de M , $\|u_1^{-1}\|_{L^\infty(K)}$, $\|q_2\|_{L^\infty(K)}$, γ, δ y la geometría del dominio.

Observación 4.3.1. *De manera análoga al caso continuo, utilizando la positividad del sistema (Corolario 2.7.1), es posible reemplazar el conjunto K por $\Gamma_{0,h}^\delta$ bajo las hipótesis a priori $f_1, q_1 \geq 0$ y $f_1, q_1 \neq 0$.*

Demostración del Teorema 4.3.1. Considerando $w := u_1 - u_2$. Entonces w satisface

$$\begin{cases} \Delta_h w = 0, & \text{en } \mathcal{W}_h, \\ D_{\nu,h} w = 0, & \text{en } \gamma_h, \\ -D_{\nu,h} w - q_2 w = (q_1 - q_2)u_1, & \text{en } \Gamma_{0,h}. \end{cases}$$

Por tanto, debido a la condición en $\Gamma_{0,h}$ se tiene

$$\begin{aligned} \forall x \in \Gamma_{0,h}, \quad |q_1 - q_2|^2 &= |(q_1 - q_2)u_1|^2 \frac{1}{|u_1|^2} = \frac{1}{|u_1|^2} |D_{\nu,h} w + q_2 w|^2 \\ &\leq \frac{1}{|u_1|^2} 2(1 + |q_2|^2)(|D_{\nu,h} w|^2 + |w|^2). \end{aligned}$$

Por tanto, utilizando normas L^2 discretas y L^∞ discretas, se tiene

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \|u_1^{-1}\|_{L^\infty(K)} (1 + \|q_2\|_{L^\infty(K)}) (\|D_{\nu,h} w\|_{L^2(K)} + \|w\|_{L^2(K)}). \quad (4.3.1)$$

Del Teorema 4.2.1 aplicado a w se tiene la siguiente desigualdad:

$$\|w\|_{H^1(\partial\mathcal{W}_h)} + \|D_{\nu,h} w\|_{L^2(\partial\mathcal{W}_h)} \leq C[\Psi(\|w\|_{H^1(\gamma_h)} + \|D_{\nu,h} w\|_{L^2(\gamma_h)}) + h^{1/4}].$$

Por tanto, volviendo a (4.3.1), se obtiene

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \|u_1^{-1}\|_{L^\infty(K)} (1 + \|q_2\|_{L^\infty(K)}) C[\Psi(\|D_{\nu,h} w\|_{L^2(\gamma_h)} + \|w\|_{H^1(\gamma_h)}) + h^{1/4}],$$

y dado que $\|D_{\nu,h} w\|_{L^2(\gamma_h)} = 0$, la desigualdad anterior se reduce a

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \|u_1^{-1}\|_{L^\infty(K)} (1 + \|q_2\|_{L^\infty(K)}) C[\Psi(\|u_1 - u_2\|_{H^1(\gamma_h)}) + h^{1/4}],$$

se concluye el resultado. \square

Observación 4.3.2 (Hipótesis de continuidad del problema directo discreto). *Los teoremas de estabilidad en problemas inversos suelen aplicar la continuidad del problema continuo para trasladar condiciones de acotamiento sobre u_q hacia acotamiento de q .*

Por tanto, si se asumiera la validez de una estimación de regularidad discreta del tipo

$$\|u_q\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq C(R), \quad \text{para todo } q \in C^{1,\alpha}(\Gamma_{0,h}), \quad \|q\|_{C^{1,\alpha}} \leq R,$$

entonces la estimación de estabilidad del Teorema 4.3.1 seguiría siendo válida sin imponer hipótesis adicionales sobre las soluciones.

Siguiendo las observaciones 4.3.2 y 4.3.1, se puede obtener el siguiente resultado a partir de la estabilidad condicional.

Proposición 4.3.1. *Suponiendo la continuidad expuesta en la Observación 4.3.2. Sea $h_0(\gamma) > 0$ el umbral de malla definido en el Teorema 4.2.1. Consideremos una fuente de corriente $f \in C(\gamma_h; \mathbb{R})$ no negativa y no idénticamente nula. Fijando un coeficiente de corrosión q_1 y considerando el sistema de corrosión discreto (2.7.1) (se considera f fijo), existe una constante $C(R, u_1, \gamma, \delta) > 0$ tal que*

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Gamma_{0,h}^\delta)} \leq C \left[\Psi \left(\|u_1 - u_2\|_{H^1(\gamma_h)} \right) + h^{1/4} \right], \quad \forall \|q_2\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma_{0,h})} \leq R, \forall 0 < h < h_0(\gamma).$$

4.4. Discusión del resultado

El resultado de continuación única cuantificado (Teorema 4.2.1) es de naturaleza distinta a los disponibles en la literatura sobre el problema de Calderón discreto [8, 14, 16]. En particular, el trabajo más reciente [16] (preprint) obtiene y emplea un principio de continuación única cuantificado de tipo tres esferas.

La principal ventaja de nuestro enfoque frente a [14, 16] es la ausencia de restricciones sobre las condiciones de frontera. En contraste, sus principales limitaciones son la hipótesis de acotamiento C^2 discreto y la restricción al caso bidimensional.

La estimación de estabilidad obtenida es uniforme siempre que se excluyan las esquinas de la frontera inaccesible. Esto se debe a que la función peso φ_0 presenta gradiente nulo en dichas esquinas, lo que impide la aplicación del lema de Hopf. Este fenómeno es consistente con lo observado en el marco continuo para dominios con fronteras no globalmente suaves [1, 12].

En el marco discreto, este resultado impone un comportamiento de error asintótico de orden a lo más $h^{1/4}$. Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, esta corresponde a la primera tasa de estabilidad obtenida para el problema inverso de corrosión discretizado en dos dimensiones. Este exponente es consecuencia directa de la restricción $sh^{1/2} < \varepsilon$ impuesta por la desigualdad de Carleman (Teorema 3.1.1), la cual resulta necesaria para absorber términos de error. Cabe destacar que la optimalidad de esta restricción no ha sido establecida en este trabajo, por lo que la posibilidad de mejorar esta tasa con un análisis más fino permanece pendiente.

Finalmente, cabe destacar que en el marco continuo las referencias [6, 7] se apoyan adicionalmente en estimaciones de continuidad en normas fuertes del mapeo $q \mapsto u_q$. Hasta donde sabemos, la validez de este tipo de estimaciones en el contexto discreto no ha sido establecida. La obtención de dichas propiedades podría considerarse una dirección natural de trabajo futuro, pues permitiría reforzar las estimaciones de estabilidad obtenidas en este trabajo.

Capítulo 5

Conclusiones y discusión

Este trabajo se enmarca en el estudio del problema inverso de determinar un coeficiente de tipo Robin para una ecuación armónica discreta, el cual constituye un análogo completamente discreto del problema inverso de corrosión considerado en el marco continuo. Como resultado principal, se establece una noción de estabilidad adaptada al contexto discreto, la cual tiene en cuenta las particularidades estructurales del problema discretizado y, en particular, la pérdida de unicidad que no está presente en el caso continuo, tal como se discutió en la introducción.

El análisis directo del problema discretizado está estrechamente relacionado con su resolución computacional. En este contexto, la pérdida de propiedades fundamentales del problema continuo, como la unicidad, sugiere que las herramientas desarrolladas en el marco continuo no pueden ser trasladadas de manera directa para estudiar la estabilidad. Esto motiva el desarrollo de un enfoque específico para el caso discreto, capaz de capturar los efectos propios de la discretización y de describir con precisión su impacto en la estabilidad del problema inverso.

Para la obtención del resultado de estabilidad fue necesario desarrollar previamente una desigualdad de Carleman discreta, cuya demostración difiere de las construcciones usuales presentes en la literatura sobre Carleman discretas [2, 8, 14, 16]. A partir de esta desigualdad se dedujo un principio de continuación única cuantificado en el marco discreto. En particular, este resultado no impone condiciones adicionales sobre la frontera y constituye un aporte de interés independiente para el análisis discreto en dos dimensiones, ya que puede ser aplicado al estudio de esquemas discretizados de otros problemas inversos elípticos.

El resultado de estabilidad obtenido es válido únicamente cuando la malla es suficientemente fina. El tamaño umbral de la malla depende de manera indirecta de la frontera

de observación a través de la construcción de la función de peso. Es importante notar que, en consonancia con los resultados conocidos en el marco continuo [1, 12], la estabilidad obtenida no es uniforme en las cercanías de las esquinas de la frontera de corrosión, debido a la anulación del gradiente de la función peso en dichos puntos. Este fenómeno, sumado a la pérdida de unicidad originada en la localidad del operador laplaciano discreto, conduce a una estabilidad de carácter asintótico donde el error está acotado por un término de orden a lo más $h^{1/4}$.

La hipótesis de regularidad C^2 discreta requerida en el resultado de estabilidad es heredada del enfoque continuo seguido [6, 7] y constituye una de las principales limitaciones del método. Una posible dirección de mejora consistiría en reemplazar esta hipótesis por un acotamiento en términos de normas integrales de segundas derivadas sobre la frontera. Para ello sería necesario sustituir los acotamientos en norma C^2 utilizados a lo largo del análisis por estimaciones basadas en la desigualdad de Cauchy–Schwarz asociadas a la nueva hipótesis. Alternativamente, podría investigarse la obtención de resultados de regularidad discreta del tipo H^3 , que permitirían satisfacer las hipótesis impuestas. No obstante, estos desarrollos exceden los objetivos de este trabajo..

Una extensión natural y de gran interés de los resultados obtenidos sería su generalización a mallas no uniformes mediante una formulación en elementos finitos. Sin embargo, el desarrollo presentado se apoya en técnicas que no se trasladan de manera directa a mallas triangulares no uniformes. En particular, se requieren integraciones por partes discretas que no dependan fuertemente de la regularidad de las funciones, dificultad que aparece de forma inherente en el contexto de elementos finitos. Esto sugiere la necesidad de introducir formulaciones sobre mallas duales. Cabe destacar que, hasta donde conocemos, la literatura sobre desigualdades de Carleman discretas aún no se ha extendido a este nivel de generalidad.

En conjunto, este trabajo ilustra que la adaptación de técnicas del análisis continuo al marco discreto permite identificar cómo la discretización afecta propiedades fundamentales del problema inverso. Si bien el enfoque se basa en la extensión de métodos conocidos, el análisis permite explicar por qué ciertas propiedades se pierden y bajo qué condiciones de refinamiento de malla es posible recuperar una propagación de la información consistente. Este estudio contribuye así a la comprensión de los efectos numéricos que surgen inherentemente al tratar problemas inversos desde una perspectiva completamente discreta.

Apéndice A

Resultados auxiliares

Lema A.0.1 (Integración por partes en la frontera). *Sea $u \in C(\overline{\mathcal{W}}_h; \mathbb{C}), v \in C(\overline{\mathcal{W}}_{h/2}; \mathbb{C}), k, \ell \in \{1, 2\} : k \neq \ell$, entonces*

$$\int_{(\partial_k \mathcal{W}_h)_\ell^*} A_{\ell,h}(u)v = \int_{\partial_k \mathcal{W}_h} u A_{\ell,h}v + \frac{h}{2} \sum_{\partial_\ell \partial_k \mathcal{W}_h} u t_{\tau,h}^\ell(v).$$

Demostración. Por definición de la integral discreta sobre la frontera dual y del operador promedio $A_{\ell,h}$, se tiene

$$\int_{(\partial_k \mathcal{W}_h)_\ell^*} A_{\ell,h}(u)v = \frac{h}{2} \sum_{(\partial_k \mathcal{W}_h)_\ell^*} (\tau_{+\ell,h}u + \tau_{-\ell,h}u)v.$$

A continuación, se separa la suma anterior y se reescribe cada término mediante un cambio de índice, se obtiene

$$\frac{h}{2} \sum_{(\partial_k \mathcal{W}_h)_\ell^*} (\tau_{+\ell,h}u + \tau_{-\ell,h}u)v = \frac{h}{2} \sum_{\partial_k \mathcal{W}_h \sqcup ((\tau_{+\ell,2h} \partial_k \mathcal{W}_h) \setminus \partial_k \mathcal{W}_h)} u \tau_{-\ell,h}v + \frac{h}{2} \sum_{\partial_k \mathcal{W}_h \sqcup ((\tau_{-\ell,2h} \partial_k \mathcal{W}_h) \setminus \partial_k \mathcal{W}_h)} u \tau_{\ell,h}v.$$

La contribución correspondiente a los nodos interiores de $\partial_k \mathcal{W}_h$ se identifica exactamente con la integral discreta

$$\int_{\partial_k \mathcal{W}_h} u A_{\ell,h}(v).$$

Por otra parte, los nodos extremos, aquellos pertenecientes a $\partial_\ell \partial_k \mathcal{W}_h = ((\tau_{-\ell,2h} \partial_k \mathcal{W}_h) \setminus \partial_k \mathcal{W}_h) \sqcup ((\tau_{+\ell,2h} \partial_k \mathcal{W}_h) \setminus \partial_k \mathcal{W}_h)$, generan un término adicional, que da lugar a

$$\frac{h}{2} \sum_{\partial_\ell \partial_k \mathcal{W}_h} u t_{\tau,h}^\ell(v).$$

Combinando ambas contribuciones se obtiene la identidad deseada, lo que concluye la prueba. \square

Lema A.0.2 (Estimación del operador $t_{r,h}^k A_{k,h}$). *En nodos frontera se cumple:*

$$t_{r,h}^k A_{k,h}(u) = u - \nu_k \frac{h}{2} t_{r,h}^k D_{k,h} u.$$

Demostración. Denotando por $(t_{r,h}^k)^{-1}$ el operador desplazamiento en la dirección contraria de $t_{r,h}^k$, podemos escribir el promedio en la frontera de la siguiente forma

$$A_{k,h} = \frac{1}{2}(t_{r,h}^k)^{-1} + \frac{1}{2}t_{r,h}^k.$$

Usando un cero conveniente y desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} A_{k,h} &= \frac{1}{2}(t_{r,h}^k)^{-1} + \frac{1}{2}t_{r,h}^k + \left(\frac{1}{2}(t_{r,h}^k)^{-1} - \frac{1}{2}(t_{r,h}^k)^{-1}\right) \\ &= (t_{r,h}^k)^{-1} + \frac{h t_{r,h}^k - (t_{r,h}^k)^{-1}}{2h} \\ &= (t_{r,h}^k)^{-1} - \nu_k \frac{h}{2} D_{k,h} \end{aligned}$$

Aplicando la identidad anterior a $t_{r,h}^k u$ en la frontera y usando la conmutación de operadores:

$$t_{r,h}^k A_{k,h}(u) = u - \nu_k \frac{h}{2} t_{r,h}^k D_{k,h} u.$$

□

Lema A.0.3 (Estimación del Hessiano discreto). *Para $sh < \varepsilon_0$, $\|u\|_{C^2(\bar{\mathcal{W}}_h)} \leq M$ se tiene,*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} - \mathcal{O}((sh)^2)\right) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\Pi(u))|^2 e^\varphi \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \frac{1}{2} M(1 + \mathcal{O}(sh)) \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 \left(\int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |D_{\nu,h} u| e^\varphi + \int_{\partial_k \mathcal{W}_{h,j}^*} |D_{j,h} \Pi(u)| e^\varphi \right) \\ &\quad + s^2 \mathcal{O}(1) \left(\frac{1}{4} + \mathcal{O}((sh)^2)\right) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_{k,h} u|^2 e^\varphi. \end{aligned}$$

Demostración. Para simplificar la notación, todos los operadores discretos omiten el parámetro h , es decir, $D_{1,h} = D_1$. Asimismo, la composición de operadores se denota mediante la concatenación de índices, por ejemplo, $D_{112} = D_1 D_1 D_2$. Además, se adoptará la convención $\tilde{u} := \Pi(u)$ para denotar la proyección de u

El primer paso es transformar el integrando $|D_{12}\tilde{u}|^2$ en $D_{11}\tilde{u}D_{22}\tilde{u}$ mediante integraciones por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12}\tilde{u}|^2 e^\varphi &= \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_1 - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}D_1(D_{12}\tilde{u}e^\varphi), \\
&= \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_1 - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}D_{112}\tilde{u}A_1e^\varphi \\
&\quad - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}D_1e^\varphi, \\
&= \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_1 - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi, D_{11}\tilde{u})\nu_2 \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi)D_{11}\tilde{u} - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}D_1e^\varphi, \\
&= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_{22}\tilde{u}D_{11}\tilde{u}A_{12}e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_1 \\
&\quad - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}_h(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi, D_{11}\tilde{u})\nu_2 \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2D_2\tilde{u}D_{11}\tilde{u}A_1D_2e^\varphi - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}D_1e^\varphi.
\end{aligned}$$

Por simetría, podemos usar la identidad anterior más la identidad anterior con índices 1 y 2 intercambiados para obtener:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12}\tilde{u}|^2 e^\varphi &= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_{22}\tilde{u}D_{11}\tilde{u}A_{12}e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_1 + \frac{1}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi)\nu_2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi, D_{11}\tilde{u})\nu_2 - \frac{1}{2} \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}A_2e^\varphi, D_{22}\tilde{u})\nu_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2D_2\tilde{u}D_{11}\tilde{u}A_1D_2e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_1D_1\tilde{u}D_{22}\tilde{u}A_2D_1e^\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}D_1e^\varphi - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_1\tilde{u}A_2D_{12}\tilde{u}D_2e^\varphi.
\end{aligned}$$

Luego, considerando la expansión asintótica de $A_{12}e^\varphi$ ($sh < \varepsilon_0$) y la formula anterior, se

deduce la siguiente identidad para el Hessiano con peso Carleman

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi &= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_{11}\tilde{u}|^2 + 2|D_{12}\tilde{u}|^2 + |D_{22}\tilde{u}|^2) e^\varphi, \\
&= \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_{11}\tilde{u}|^2 + 2D_{11}\tilde{u}D_{22}\tilde{u} + |D_{22}\tilde{u}|^2) e^\varphi \\
&\quad + 2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_{22}\tilde{u}D_{11}\tilde{u} \mathcal{O}((sh)^2) e^\varphi \\
&\quad + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_2 \\
&\quad - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi, D_{11}\tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}A_2e^\varphi, D_{22}\tilde{u}) \nu_1 \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2D_2\tilde{u}D_{11}\tilde{u}A_1D_2e^\varphi + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_1D_1\tilde{u}D_{22}\tilde{u}A_2D_1e^\varphi \\
&\quad - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}D_1e^\varphi - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_1\tilde{u}A_2D_{12}\tilde{u}D_2e^\varphi.
\end{aligned}$$

Acotando de forma usual y con expansión asintótica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi &\leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_{22}\tilde{u}|^2 + |D_{11}\tilde{u}|^2) e^\varphi \\
&\quad + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_2 \\
&\quad - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}A_1e^\varphi, D_{11}\tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}A_2e^\varphi, D_{22}\tilde{u}) \nu_1 \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2D_2\tilde{u}D_{11}\tilde{u}e^\varphi (\partial_2\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)) \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_1D_1\tilde{u}D_{22}\tilde{u}e^\varphi (\partial_1\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)) \\
&\quad - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_2\tilde{u}A_1D_{12}\tilde{u}e^\varphi (\partial_1\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)) \\
&\quad - \int_{\mathcal{W}_{h/2}} D_1\tilde{u}A_2D_{12}\tilde{u}e^\varphi (\partial_2\varphi + s\mathcal{O}((sh)^2)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_{22} \tilde{u}|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_1 \\
& + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_2 - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u} A_1 e^\varphi, D_{11} \tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u} A_2 e^\varphi, D_{22} \tilde{u}) \nu_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_2 D_2 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_1 D_1 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2 + |D_{22} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |A_2 D_2 \tilde{u}|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |A_1 D_1 \tilde{u}|^2 + |D_{22} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2 + |A_1 D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_1 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 + |A_2 D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |D_2 \tilde{u}|^2 + |A_1 D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |D_1 \tilde{u}|^2 + |A_2 D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi.
\end{aligned}$$

Usando $|A(v)|^2 \leq A(|v|^2)$ y el Teorema 2.4.2, se deduce

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_2 D_{12} \tilde{u}|^2 e^\varphi & \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2 (|D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi, \\
& = \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12} \tilde{u}|^2 A_2(e^\varphi) + \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |D_{12} \tilde{u}|^2 t_{r,h} e^\varphi - \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} t_{r,h} |D_{12} \tilde{u}|^2 e^\varphi, \\
& = \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12} \tilde{u}|^2 A_2(e^\varphi) + 0 - \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} t_{r,h} |D_{12} \tilde{u}|^2 e^\varphi, \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12} \tilde{u}|^2 A_2(e^\varphi), \\
& = \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_{12} \tilde{u}|^2 e^\varphi (1 + \mathcal{O}((sh)^2)).
\end{aligned}$$

Volviendo a la estimación del Hessiano

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_{22} \tilde{u}|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_2 \\
& - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u} A_1 e^\varphi, D_{11} \tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u} A_2 e^\varphi, D_{22} \tilde{u}) \nu_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_2 D_2 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_1 D_1 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2 + |D_{22} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |A_2 D_2 \tilde{u}|^2 + |D_{11} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |A_1 D_1 \tilde{u}|^2 + |D_{22} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2 + |D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_1 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 + |D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |D_2 \tilde{u}|^2 + |D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi + \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (s^2 |D_1 \tilde{u}|^2 + |D_{12} \tilde{u}|^2) e^\varphi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi \\
& \leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u}, D_{12} \tilde{u} e^\varphi) \nu_2 \\
& - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2 \tilde{u} A_1 e^\varphi, D_{11} \tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1 \tilde{u} A_2 e^\varphi, D_{22} \tilde{u}) \nu_1 \\
& + \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}((sh)^2) \right) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_2 D_2 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 + |A_1 D_1 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2) e^\varphi \\
& + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|A_2 D_2 \tilde{u}|^2 + |A_1 D_1 \tilde{u}|^2) e^\varphi \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2 \tilde{u} \partial_1 \varphi|^2 + |D_1 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2) e^\varphi \\
& + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2 \tilde{u}|^2 + |D_1 \tilde{u}|^2) e^\varphi.
\end{aligned}$$

usando

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |A_2 D_2 \tilde{u} \partial_2 \varphi|^2 e^\varphi & \leq \mathcal{O}(1) s^2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} A_2 |D_2 \tilde{u}|^2 e^\varphi, \\
& = \mathcal{O}(1) s^2 \left(\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_2 \tilde{u}|^2 A_2 e^\varphi + \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} |D_2 \tilde{u}|^2 t_r e^\varphi - \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} t_r |D_2 \tilde{u}|^2 e^\varphi \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{O}(1)s^2 \left(\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_2\tilde{u}|^2 A_2 e^\varphi + 0 - \frac{h}{2} \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} t_r |D_2\tilde{u}|^2 e^\varphi \right), \\
&\leq \mathcal{O}(1)s^2 \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |D_2\tilde{u}|^2 e^\varphi (1 + \mathcal{O}((sh)^2)).
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(1)$ es una constante que depende de φ_0 y φ_1 , se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi &\leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_2 \\
&\quad - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}A_1 e^\varphi, D_{11}\tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}A_2 e^\varphi, D_{22}\tilde{u}) \nu_1 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}((sh)^2) \right) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi + \frac{\mathcal{O}(1)s^2}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2\tilde{u}|^2 + |D_1\tilde{u}|^2) e^\varphi \\
&\quad + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2\tilde{u}|^2 + |D_1\tilde{u}|^2) e^\varphi \\
&\quad + \frac{\mathcal{O}(1)s^2}{2} \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2\tilde{u}|^2 + |D_1\tilde{u}|^2) e^\varphi + s^2 \mathcal{O}((sh)^2) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2\tilde{u}|^2 + |D_1\tilde{u}|^2) e^\varphi.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} - \mathcal{O}((sh)^2) \right) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi \\
&\leq \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |\Delta_h \tilde{u}|^2 e^\varphi + \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_1 + \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}, D_{12}\tilde{u}e^\varphi) \nu_2 \\
&\quad - \int_{\partial_2 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_2\tilde{u}A_1 e^\varphi, D_{11}\tilde{u}) \nu_2 - \int_{\partial_1 \mathcal{W}_{h/2}} \text{Tr}(D_1\tilde{u}A_2 e^\varphi, D_{22}\tilde{u}) \nu_1 \\
&\quad + \mathcal{O}(1)s^2 (1 + \mathcal{O}((sh)^2)) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} (|D_2\tilde{u}|^2 + |D_1\tilde{u}|^2) e^\varphi.
\end{aligned}$$

Para estimar los términos de borde, se usan propiedades de la extensión por cero \tilde{u} y $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$ para obtener:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} - \mathcal{O}((sh)^2) \right) \int_{\mathcal{W}_{h/2}} |H(\tilde{u})|^2 e^\varphi \\
&\leq \frac{1}{4} \int_{\mathcal{W}_h} |\Delta_h u|^2 e^\varphi + \frac{1}{2} M (1 + \mathcal{O}(sh)) \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 \left(\int_{\partial_k \mathcal{W}_h} |t_r^k D_k u| e^\varphi + \int_{\partial_k \mathcal{W}_{h,j}^*} |D_j \tilde{u}| e^\varphi \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(1)s^2 \left(\frac{1}{4} + \mathcal{O}((sh)^2) \right) \sum_k \int_{\mathcal{W}_{h,k}^*} |D_k u|^2 e^\varphi.
\end{aligned}$$

□

Lema A.0.4. Para $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$, $sh < \varepsilon_0$

$$|Z_1| \leq M(\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi.$$

Demostración. Recordando la definición

$$\begin{aligned} Z_1 &:= \frac{h}{2} \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}^1(D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi)\nu_2 \\ &\quad + \frac{h}{2} \sum_{\partial_2\partial_1\mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}^2(D_{2,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi)\nu_1. \end{aligned}$$

Acotaremos el término $\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h$ del primer sumando, pues los demás son análogos.

Debido a la observación 2.6.1 ($\nabla\varphi_0 = \mathbf{0}$ en las esquinas de Ω), junto con $\|u\|_{C^2(\overline{\mathcal{W}_h})} \leq M$ y expansiones asintóticas ($sh < \varepsilon_0$):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h}{2} t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}^1(D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi)\nu_2 \right|_{(\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h)} \\ & \leq M \frac{h}{2} |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)| (|\partial_1\varphi| + s\mathcal{O}(sh))e^\varphi \Big|_{\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h}, \\ & = M \frac{h}{2} |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)| (|\partial_1\varphi_0| + s\mathcal{O}(sh))e^\varphi \Big|_{\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h}, \\ & = M \frac{h}{2} |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)| (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh))e^\varphi \Big|_{\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h}, \end{aligned}$$

debido a la propiedad de extensión (2.5.6) y (2.5.7) podemos trasladar la derivada discreta de $\Pi(u)$ a una que solo depende de u

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h}{2} t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}^1(D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi)\nu_2 \right|_{(\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h)} \\ & \leq M \frac{h}{2} |t_{r,h}^1 D_{1,h}u| (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh))\tau_{+2,2h}e^\varphi \Big|_{\tau_{-2,2h}\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h}, \\ & = M \frac{h}{2} |t_{r,h}^1 D_{1,h}u| (\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh))(1 + \mathcal{O}(sh))e^\varphi \Big|_{\tau_{-2,2h}\partial_2^+\partial_1^+\mathcal{W}_h}, \\ & \leq M(\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh)) \int_{\partial_1^+\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi. \end{aligned}$$

Por tanto, repitiendo este argumento

$$\left| \frac{h}{2} \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)t_{r,h}^1(D_{1,h}\Pi(u)D_{1,h}e^\varphi)\nu_2 \right| \leq M(\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh)) \int_{\partial_1\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi,$$

y para el otro sumando

$$\left| \frac{h}{2} \sum_{\partial_2\partial_1\mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)t_{r,h}^2(D_{2,h}\Pi(u)D_{2,h}e^\varphi)\nu_1 \right| \leq M(\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh)) \int_{\partial_2\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi.$$

Concluyendo así

$$|Z_1| \leq M(\mathcal{O}(1) + s\mathcal{O}(sh)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi.$$

□

Lema A.0.5. Dado $u \in C(\overline{\mathcal{W}_h}; \mathbb{R})$ y $\Pi(u)$ su extensión presentada en (2.5.1), si $sh < \varepsilon_0$ entonces se tienen las siguientes estimaciones:

$$\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi \leq \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi + (1 + \mathcal{O}(sh)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi, \quad (\text{A.0.1})$$

$$\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \leq \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(sh))M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi. \quad (\text{A.0.2})$$

Demostración. Para demostrar (A.0.1) notar la siguiente descomposición:

$$(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^* = (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ \cup ((\partial\mathcal{W}_h)_\tau^* \setminus (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ)$$

donde el conjunto $((\partial\mathcal{W}_h)_\tau^* \setminus (\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ)$ consiste en 8 nodos a $h/2$ de las esquinas. Por tanto, en lo siguiente se separa la integral discreta, se acotan los términos correspondientes a estos nodos y se elimina la dependencia de $\Pi(u)$ usando la propiedad de extensión (2.5.6) y (2.5.7)

$$\begin{aligned} & \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi \\ &= \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)|t_{r,h}^1 e^\varphi + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} |t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)|t_{r,h}^2 e^\varphi, \\ &= \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)|t_{r,h}^1 e^\varphi + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 |t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)|t_{r,h}^2 e^\varphi, \\ &= \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^2 |t_{r,h}^1 D_{1,h}\Pi(u)|t_{r,h}^2 e^\varphi (1 + \mathcal{O}(sh)) \\ & \quad + h \sum_{\partial_1\partial_2\mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 |t_{r,h}^2 D_{2,h}\Pi(u)|t_{r,h}^1 e^\varphi (1 + \mathcal{O}(sh)). \end{aligned}$$

Notar que los términos de las esquinas corresponden a la derivada normal discreta. Por consiguiente, si $sh < \varepsilon_0$ con ε_0 del Teorema 2.6.1

$$\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi \leq \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^\circ} |D_{\tau,h}\Pi(u)|e^\varphi + (1 + \mathcal{O}(sh)) \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u|e^\varphi.$$

Para demostrar (A.0.2), notar que debido a que φ_0 es localmente constante en las esquinas,

se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \\
&= \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + h \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} t_{r,h}^1 (\partial_n \varphi |D_{1,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi) + t_{r,h}^2 (\partial_n \varphi |D_{2,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi), \\
&= \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + h \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(sh)) t_{r,h}^2 (|t_{r,h}^1 D_{1,h}u|^2) t_{r,h}^2 e^\varphi (1 + \mathcal{O}(sh)) \\
&\quad + h \sum_{\partial_1 \partial_2 \mathcal{W}_h} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(sh)) t_{r,h}^1 (|t_{r,h}^2 D_{2,h}u|^2) t_{r,h}^1 e^\varphi (1 + \mathcal{O}(sh)).
\end{aligned}$$

donde se usó $\partial_n \varphi = \partial_n \varphi_1 + s \partial_n \varphi_0$ en las esquinas y por tanto $t_{r,h}^k \partial_n \varphi = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(sh)$. Notar que el término en el sumando corresponde a la derivada normal y acotando se concluye la ultima desigualdad

$$\int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi \leq \int_{(\partial\mathcal{W}_h)_\tau^*} \partial_n \varphi |D_{\tau,h}\Pi(u)|^2 e^\varphi + (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(sh)) M \int_{\partial\mathcal{W}_h} |D_{\nu,h}u| e^\varphi.$$

□

Lema A.0.6. Sean, $0 < a < b$, y $u, v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde u es estrictamente decreciente y v estrictamente creciente, tales que existe un único $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$, $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$.

Entonces, para todo $x^* \leq \bar{x}$,

$$\min_{x \in [a,b]} (u(x) + v(x)) \leq 2 \max \{u(b), v(a), u(x^*)\}.$$

Demostración. Lema 3.9 de [14]

□

Bibliografía

- [1] G Alessandrini, L Del Piero, and L Rondi. Stable determination of corrosion by a single electrostatic boundary measurement. *Inverse Problems*, 19(4):973, jul 2003.
- [2] Franck Boyer, Florence Hubert, and Jérôme Le Rousseau. Discrete carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(8):5357–5397, 2010.
- [3] S Chaabane, C Elhechmi, and M Jaoua. A stable recovery method for the robin inverse problem. *Mathematics and Computers in Simulation*, 66(4):367–383, 2004. Inverse Obstacle Problems.
- [4] S Chaabane, I Feki, and N Mars. Numerical reconstruction of a piecewise constant robin parameter in the two- or three-dimensional case. *Inverse Problems*, 28(6):065016, may 2012.
- [5] S Chaabane, J Ferchichi, and K Kunisch. Differentiability properties of the l1-tracking functional and application to the robin inverse problem. *Inverse Problems*, 20(4):1083, may 2004.
- [6] Jin Cheng, Mourad Choulli, and Junshan Lin. Stable determination of a boundary coefficient in an elliptic equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(1):107–123, 2008.
- [7] Mourad Choulli. *Applications of Elliptic Carleman Inequalities to Cauchy and Inverse Problems*. Springer, 2016.
- [8] S Ervedoza and F de Gournay. Uniform stability estimates for the discrete calderón problems. *Inverse Problems*, 27(12):125012, nov 2011.
- [9] Dario Fasino and Gabriele Inglese. An inverse robin problem for laplace’s equation: theoretical results and numerical methods. *Inverse Problems*, 15(1):41, feb 1999.

- [10] Bastian Harrach and Houcine Meftahi. Global uniqueness and lipschitz-stability for the inverse robin transmission problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79(2):525–550, 2019.
- [11] Tobias Hell and Alexander Ostermann. Compatibility conditions for dirichlet and neumann problems of poisson’s equation on a rectangle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 420(2):1005–1023, 2014.
- [12] Guanghui Hu and Masahiro Yamamoto. Hölder stability estimate of robin coefficient in corrosion detection with a single boundary measurement. *Inverse Problems*, 31(11):115009, oct 2015.
- [13] Gabriele Inglese. An inverse problem in corrosion detection. *Inverse Problems*, 13(4):977–994, 1997.
- [14] Rodrigo Lecaros, Jaime H. Ortega, Ariel Pérez, and Luz De Teresa. Discrete calderón problem with partial data. *Inverse Problems*, 39(2):025002, 2023.
- [15] Zhiyuan Sun, Yuling Jiao, Bangti Jin, and Xiliang Lu. Numerical identification of a sparse robin coefficient. *Advances in Computational Mathematics*, 41(1):131–148, 2015.
- [16] Xiaomeng Zhao and Ganghua Yuan. Stability estimate for the discrete calderón problem from partial data, 2024. arXiv:2405.06920 [math.AP].