

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Física

Cálculo de propiedades de transporte electrónico para puntos cuánticos dispuestos como interferómetro conectados a cadenas de Kitaev

Tesis para optar al grado de Magister en ciencias, mención Física

Alumno:
Ignacio Andrés Román Pérez

Tutores:
Prof. Luis Rosales
Prof. Pedro Orellana

Abril 2026

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título **X** Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Cálculo de propiedades de transporte electrónico para puntos cuánticos dispuestos como interferómetro conectados a cadenas de Kitaev

Nombre del candidato(a): Ignacio Andrés Román Pérez

Carrera / Grado: Magíster en ciencias mención Física

Campus: San Joaquín **Departamento:** Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, **Luis Rosales Ahumada**, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

X El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por **(marcar una opción)**:

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

_____

_____

_____

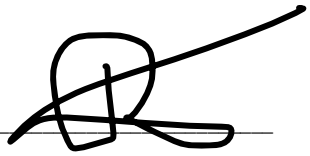
4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:



Fecha: 13 – 05 – 2026 **Firma:** _____ ___

Estudiante o Candidato(a):



Fecha: 13 de Mayo de 2026 **Firma:** _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi familia y amigos. Gracias a ellos, a su amor y su apoyo, he podido enfocarme en sacar adelante mi carrera y culminar el grado de magíster.

En particular, quiero agradecer a mis padres, Viviana Pérez y Rodrigo Román, ellos me han brindado todo el apoyo emocional y económico que he necesitado a lo largo de mis 24 años. Si hoy soy quien soy, y si he logrado desarrollar una genuina pasión por lo que hago, es gracias a los valores y enseñanzas que ellos me han transmitido.

También me gustaría agradecerle especialmente a mi pareja, Valentina Hidalgo, y a mis amigos, Andre Arriagada, Felipe González, Kirsi Pohl y Laura Trincado, quienes también han sido un apoyo emocional importante durante todo el proceso y me han ayudado con aspectos relevantes a mi trabajo. Pero, por sobre todo, les agradezco por acompañarme durante estos años; sin su presencia cotidiana, este camino habría sido considerablemente más difícil y agotador. Sin duda, han sido clave para mantener mi bienestar personal durante este período.

Agradezco a mis profesores tutores Luis Rosales y Pedro Orellana por la guía y apoyo brindados para que este trabajo pudiera llevarse a cabo. Ellos fueron quienes despertaron mi interés por esta línea de investigación, y si ha sido fructífero es en gran medida gracias a su orientación.

Agradezco también el apoyo financiero recibido por el proyecto FONDECYT del profesor Luis Rosales, y el apoyo otorgado por el programa de iniciación a la investigación científica (PIIC), de la Universidad Técnica Federico Santa María. Además, agradezco al Dr. Juan Pablo Ramos por su hospitalidad durante mi estadía en Antofagasta.

Son muchas las personas a las que quisiera agradecer individualmente, pero hacerlo en detalle extendería demasiado este texto. Aun así quiero mencionar a mis hermanos *Gigio*, *Rodri*, *Ale* y *Seba*; mis sobrinos Benjamín, Vicente, Nicolás, Matías, Antonia, Sofía y León; mis primos Nicolás y Juanpablo; a mis tíos y tías; y a mis amigos Sebastián Cespedes, Matías Durán, Cristian Pinto, Matías Ferreira, Paulo Ferreira y Juan Eduardo Rutllant.

Resumen

Este trabajo de tesis se enmarca en el cálculo de propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico de un sistema basado en puntos cuánticos dispuestos como un interferómetro tipo Aharonov-Bohm [1] acoplados a cadenas de Kitaev [2], las cuales pueden albergar estados ligados de Majorana en los extremos. Estos estados son excitaciones de cuasipartículas con potencial para aplicaciones en computación cuántica, por lo tanto, es importante detectar y caracterizar la presencia de estos. Analizar estas propiedades revela información sobre la topología del sistema, la robustez de los estados Majorana frente a perturbaciones y la viabilidad de manipularlos para operaciones lógicas. Las propiedades de transporte se obtienen mediante el uso del método de funciones de Green, considerando dos contactos metálicos entre los cuales se encuentra el sistema de estudio.

Se observan cambios en la curva del factor Fano al aumentar el número de modos de Majorana acoplados al sistema y se obtiene que el factor de Fano es robusto a fenómenos de interferencia destructiva cuando hay modos de Majorana acoplados al interferómetro. Además se observa que el sistema logra tener una alta eficiencia termoelécrica a través del coeficiente de Seebeck y la figura de mérito; adicionalmente se logra observar que el sistema viola la ley de Wiedmann-Franz. La presencia de estas características ayudarían a caracterizar la presencia de modos de Majorana en el sistema.

Abstract

This thesis work focuses on calculating the electronic and thermoelectric transport properties of a system based on quantum dots arranged as an Aharonov-Bohm interferometer [1] coupled to Kitaev chains [2], which can host Majorana bound states at the edges. These states are quasiparticle excitations with potential applications in quantum computing, so it is important to detect and characterize their presence. Analyzing these properties reveals information about the topology of the system, the robustness of Majorana states against perturbations, and the feasibility of manipulating them for logical operations. The transport properties are obtained using the Green's function method, considering two metallic contacts between which the system under study is located.

Changes in the Fano factor curve are observed as the number of Majorana modes coupled to the system increases, and it is found that the Fano factor is robust to destructive interference phenomena when Majorana modes are coupled to the interferometer. Furthermore, it is observed that the system achieves high thermoelectric efficiency as indicated by the Seebeck coefficient and the figure of merit; additionally, it is observed that the system violates the Wiedmann-Franz law. The presence of these characteristics would help characterize the presence of Majorana modes in the system.

Índice general

1. Introducción **9**

2. Marco teórico **13**
2.1. Interferometría cuántica y efecto Aharonov-Bohm 13
2.2. Modos de Majorana 14
2.3. Modelo de Kitaev 14
2.4. Puntos cuánticos 16

3. Formalismo **17**
3.1. Funciones de Green 17
3.2. Transporte electrónico y termoeléctrico 18

4. Modelo teórico del sistema **23**
4.1. Sistema 23
4.2. Supuestos físicos 25
4.3. Implementación numérica 25

5. Resultados **27**
5.1. Transporte electrónico 29
5.2. Trasporte termoeléctrico 42

6. Conclusión **55**

Apéndice A. Funciones usadas para obtener la Función de Green **59**

Apéndice B. Figuras **61**

Capítulo 1

Introducción

La computación cuántica ha surgido como una de las direcciones más prometedoras para abordar problemas que resultan intratables para los computadores clásicos, tales como la simulación de sistemas cuánticos fuertemente correlacionados, la optimización de grandes estructuras combinatorias y el procesamiento eficiente de grandes volúmenes de datos. Mediante el uso de fenómenos intrínsecamente cuánticos, como la superposición y el entrelazamiento, ciertos algoritmos presentan ventajas exponenciales frente a sus contrapartes clásicas. No obstante, el desarrollo de arquitecturas cuánticas escalables enfrenta un obstáculo central: la decoherencia, que limita severamente los tiempos de operación y dificulta la preservación de la información cuántica. Una propuesta destacada para mitigar este problema es la computación cuántica topológica [3–7], cuyo objetivo es codificar información en grados de libertad protegidos por la topología del sistema. En este contexto, los superconductores topológicos han adquirido un papel fundamental debido a la emergencia de cuasipartículas exóticas conocidas como fermiones de Majorana, cuyas propiedades no abelianas permiten implementar operaciones lógicamente robustas frente a perturbaciones locales [8]. El interés por los fermiones de Majorana tiene sus raíces en la física de altas energías. En 1928, Dirac formuló una ecuación relativista para partículas de espín $1/2$ que predecía la existencia de antipartículas asociadas a sus soluciones de energía negativa [9]. Años más tarde, Ettore Majorana extendió este marco teórico y encontró soluciones en las cuales una partícula es idéntica a su propia antipartícula [8]. Aunque no se ha confirmado experimentalmente la existencia de partículas fundamentales de este tipo, en física de la materia condensada emergen como cuasipartículas colectivas en ciertas fases superconductoras [2, 10].

Los Estados Ligados de Majorana (ELM), que aparecen localizados en los bordes de superconductores topológicos unidimensionales, poseen estadística no abeliana y son candidatos naturales para implementar qubits topológicamente protegidos [3, 6, 7, 11].

Un modelo interesante en el que emergen estos estados es la cadena de Kitaev [2], constituida por fermiones sin espín con emparejamiento de tipo p. En realizaciones experimentales, un sistema equivalente corresponde a un nanocable semiconductor con acoplamiento espín–órbita y superconductividad inducida por proximidad, sometido a un campo magnético externo para ingresar en la fase topológica [10, 12–14]. En esta clase de sistemas, los ELM se localizan en los extremos de la estructura y pueden acoplarse entre sí mediante una energía ε_M que decae exponencialmente con la longitud del cable, $\varepsilon_M \propto \exp(-L/\xi)$, donde ξ es el largo de coherencia superconductora. Una estrategia ampliamente utilizada para estudiar y manipular ELM consiste en acoplarlos a puntos cuánticos (QDs). Estos actúan como sondas espectroscópicas controlables que permiten ajustar energías, acoplamientos y ocupaciones electrónicas, facilitando la detección de señales características de Majorana en medidas de transporte [13, 15, 16]. La capacidad de

controlar parámetros externos convierte a los QDs en herramientas eficaces para analizar los efectos inducidos por modos de Majorana en observables de transporte, particularmente en configuraciones interferométricas y en experimentos sensibles a la ruptura de simetrías fundamentales [17–21].

Mourik y colaboradores fueron los primeros en reportar observaciones de ELM, a través de anomalías en mediciones de conductancia a cero potencial de *bias* [13]. Sin embargo, estas anomalías no siempre entregan evidencia concluyente de presencia de ELM, lo que muestra la necesidad de usar otras formas de caracterizarlos, como son la búsqueda de estados ligados en el continuo de estos sistemas [22–28]. El estudio del transporte electrónico en sistemas mesoscópicos no se limita únicamente a la caracterización de la conductancia promedio. Si bien la transmisión electrónica proporciona información sobre la estructura espectral del sistema, existen propiedades de orden superior, como el *shot noise* (ruido estadístico), que contienen información adicional sobre la naturaleza microscópica de los portadores de carga y los mecanismos de transporte involucrados.

En particular, el shot noise está asociado a las fluctuaciones cuánticas de la corriente y resulta especialmente sensible a la estadística de las excitaciones, las correlaciones entre partículas y los procesos de dispersión. En sistemas convencionales, el shot noise permite distinguir entre transporte balístico, difusivo o dominado por túnel [29–31]. Sin embargo, en sistemas híbridos que involucran superconductividad, el shot noise adquiere un rol aún más relevante debido a la presencia de procesos de reflexión de Andreev, en los cuales electrones y huecos se encuentran acoplados [32].

En el contexto de superconductores topológicos, y particularmente en sistemas que albergan modos de Majorana, el análisis del shot noise proporciona una herramienta poderosa para su caracterización. A diferencia de la conductancia, que puede presentar ambigüedades experimentales, el shot noise permite acceder a propiedades como la carga efectiva transportada y las correlaciones cuánticas inducidas por los modos de Majorana [21, 32–34].

En este sentido, el factor de Fano, definido como la razón entre el shot noise y la corriente promedio, emerge como un observable clave, ya que permite identificar desviaciones respecto del comportamiento de electrones no correlacionados. En presencia de reflexiones de Andreev y excitaciones tipo Majorana, el factor de Fano puede tomar valores no triviales, reflejando la naturaleza híbrida electrón–hueco del transporte [21,34].

Por lo tanto, el estudio conjunto de la corriente, el shot noise y el factor de Fano proporciona una caracterización más completa del sistema, permitiendo distinguir de manera más robusta la presencia de ELM y su influencia en el transporte cuántico.

Como un método alternativo para identificar ELM se emplea la medición de propiedades termoeléctricas. Estas propiedades pueden revelar características de los ELM a través de conductancia térmica [35,36], el coeficiente de *Seebeck* o poder termoeléctrico [37–39], o el rompimiento de la ley de Wiedemann-Franz (WF) [40–42].

En este marco, el estudio del transporte electrónico y termoeléctrico adquiere una relevancia central. Estas propiedades no solo proporcionan información detallada sobre la estructura espectral del sistema, sino que también permiten identificar posibles desviaciones respecto de comportamientos convencionales, como la ley de WF, cuya violación ha sido propuesta como un indicador robusto de física topológica.

Esta tesis se enmarca en dicho contexto y tiene como objetivo analizar en detalle las propiedades de transporte en un sistema compuesto por contactos metálicos normales, dos puntos cuánticos dispuestos en configuración interferométrica tipo Aharonov–Bohm, y dos cadenas de Kitaev acopladas a cada punto cuántico. A través del cálculo sistemático de propiedades electrónicas y termoeléctricas, se busca comprender cómo la presencia de modos de Majorana y la ruptura de simetría inducida por el flujo magnético modifican el

comportamiento del sistema, aportando herramientas que contribuyan a la identificación y caracterización de estados topológicos en plataformas superconductoras.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos fundamentales necesarios para el análisis del sistema estudiado en esta tesis. En particular, se revisan los principios de la interferometría cuántica y el efecto Aharonov–Bohm, las propiedades esenciales de los estados ligados de Majorana y del modelo de Kitaev, así como las características básicas de los puntos cuánticos y del transporte termoeléctrico en sistemas mesoscópicos. El objetivo es establecer el marco conceptual que permita interpretar los resultados de transporte electrónico y termoeléctrico obtenidos en capítulos posteriores.

2.1. Interferometría cuántica y efecto Aharonov-Bohm

La interferometría cuántica es una herramienta esencial para estudiar la coherencia electrónica en sistemas mesoscópicos, donde el transporte está dominado por la naturaleza ondulatoria de los electrones. En este régimen, la fase cuántica de la función de onda se conserva a lo largo de longitudes comparables o mayores que la longitud de coherencia, haciendo que la corriente eléctrica dependa no solo de las energías disponibles, sino también de las trayectorias que pueden seguir las excitaciones. El resultado es la aparición de patrones de interferencia sensibles a variaciones externas muy pequeñas, como potenciales electrostáticos o flujos magnéticos.

Una de las manifestaciones más notables de la coherencia cuántica es el efecto Aharonov–Bohm (AB). Este fenómeno establece que incluso en regiones donde el campo magnético es estrictamente nulo, la presencia del potencial magnético vector en el interior de un lazo interferométrico modifica la fase de la función de onda electrónica. En un anillo o interferómetro tipo AB, un electrón que atraviesa dos caminos distintos adquiere una diferencia de fase dada por:

$$\varphi = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \tag{2.1}$$

Donde Φ es el flujo magnético y $\Phi_0 = h/e$ es el cuanto de flujo magnético [1, 43]. Esta fase induce oscilaciones periódicas en el perfil de la transmisión del sistema, con período Φ_0.

En sistemas nanoscópicos, la interferencia entre trayectorias es especialmente relevante porque el flujo magnético ofrece un mecanismo de control externo extremadamente preciso sobre la fase adquirida por las excitaciones. Esto convierte al interferómetro AB en una plataforma ideal para explorar la física de estados ligados, resonancias discretas y en general cualquier fenómeno cuya respuesta dependa crucialmente de la fase cuántica.

Cuando los brazos del interferómetro albergan *puntos cuánticos* —estructuras con niveles energéticos discretos y fuerte confinamiento electrónico— la interferencia ad-

quiere un carácter más rico. El flujo magnético puede realzar o suprimir resonancias, revelando simetrías no evidentes en una descripción local del sistema, como la simetría electrón–hueco o la simetría bajo inversión de flujo. En particular, la combinación de puntos cuánticos y superconductividad ha permitido estudiar fases anómalas en el transporte, procesos de Andreev no locales y las contribuciones de excitaciones topológicas. En estos casos, la interferometría AB actúa como una sonda directa de la coherencia y de la estructura de fases del sistema, jugando un rol central en la identificación experimental de fenómenos cuánticos emergentes [43, 44].

2.2. Modos de Majorana

Los modos o estados ligados de Majorana emergen en ciertas fases superconductoras topológicas como excitaciones de energía cero localizadas en los bordes o defectos del sistema. Al igual que los fermiones convencionales, describimos los modos de Majorana con operadores en segunda cuantización, pero lo que los diferencia con estos es que los modos de Majorana se describen con operadores **hermíticos**, es decir, $\gamma = \gamma^\dagger$. Además estos modos satisfacen un álgebra tal que $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{i,j}$, lo que implica que cada excitación es idéntica a su antipartícula [2, 8].

Uno de los aspectos más notables de los modos de Majorana es su **estadística no abeliana**. Al intercambiar (trenzar) dos de estos modos, el estado cuántico global del sistema se transforma mediante una operación unitaria que depende del orden de los intercambios, lo que constituye la base de la computación cuántica topológica [3, 6, 7, 11]. Aunque el trenzado no se aborda explícitamente en esta tesis, las propiedades de transporte estudiadas en la presente están directamente relacionadas con la naturaleza partícula–antipartícula de los modos de Majorana y con la mezcla coherente de electrones y huecos que inducen.

2.3. Modelo de Kitaev

El modelo de Kitaev describe una cadena unidimensional de fermiones sin espín con superconductividad efectiva de tipo p. En realizaciones experimentales, el modelo de Kitaev puede implementarse de manera efectiva en nanocables semiconductores con acoplamiento espín–órbita, superconductividad inducida por proximidad y un campo magnético externo. Estas plataformas han sido ampliamente estudiadas como candidatas para la observación de modos de Majorana mediante experimentos de transporte [11,15].

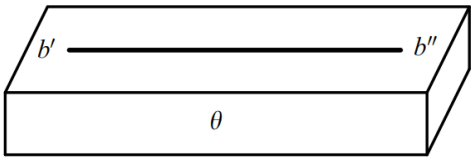


Figura 2.1: Figura extraída de [2]. Nanocable próximo a un superconductor tridimensional.

El Hamiltoniano del modelo presenta dos fases bien diferenciadas: una fase trivial y una fase topológica, dependiendo de la relación entre el potencial químico μ, la integral de transferencia t, y la magnitud del gap superconductor Δ [2]. El Hamiltoniano del modelo es el siguiente:

$$H = \sum_j \left[\mu c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}\left(t c_j^\dagger c_{j+1} - \Delta \mathrm{e}^{i\phi} c_j c_{j+1} \right) + H.c. \right], \tag{2.2}$$

donde μ es el potencial químico de cada sitio, $c_j^\dagger(c_j)$ es el operador de creación (aniquilación) fermiónico en el sitio j, t es el *hopping* entre sitios vecinos del nanocable y Δ y ϕ son el gap y la fase superconductora respectivamente.

Para revelar la estructura topológica del modelo, Kitaev introdujo una transformación a la base de operadores de Majorana, definidos como

$$\begin{aligned} \gamma_{2j+1} &= \mathrm{e}^{i\phi/2} c_j + \mathrm{e}^{-i\phi/2} c_j^\dagger \\ \gamma_{2j} &= -i\mathrm{e}^{i\phi/2} c_j + i\mathrm{e}^{i\phi/2} c_j^\dagger, \end{aligned}$$

los cuales satisfacen $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{i,j}$. Podemos interpretar que cada operador fermiónico c_j se puede expresar como una combinación de los operadores γ_{2j-1}, (correspondiente a la primera mitad del sitio) y γ_{2j} (correspondiente a la segunda mitad del sitio) (figura 2.2).

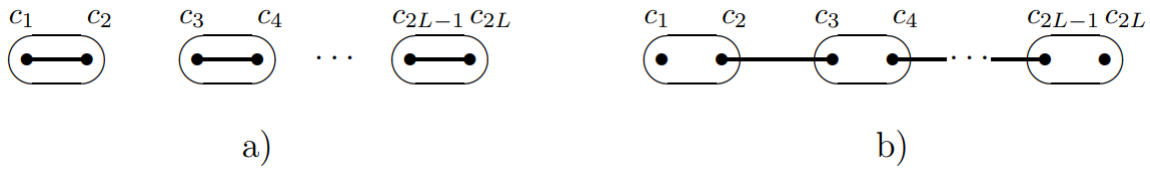


Figura 2.2: Figura extraída de [2]. Sitios fermiónicos dispuestos como dímeros, detalla los dos tipos de casos presentes en el sistema.

El Hamiltoniano se puede reescribir en términos de los operadores antes mencionados. Además, se observa que los parámetros μ, t y Δ controlan la manera en que las Majoranas se emparejan entre sí: ya sea acoplándose con el Majorana correspondiente al mismo sitio fermiónico, o bien acoplándose al operador correspondiente al sitio vecino (figura 2.2).

$$H = -\frac{i}{2} \sum \left[\mu \gamma_{2j} \gamma_{2j-1} + \frac{1}{2}(t - \Delta)\gamma_{2j-1}\gamma_{2j+2} - \frac{1}{2}(t + \Delta)\gamma_{2j}\gamma_{2j+1} \right] \tag{2.3}$$

A partir de este análisis, Kitaev expuso que el sistema presenta dos fases cualitativamente distintas. Para $|\mu| > 2t$, los Majoranas se emparejan localmente, dando lugar a una fase trivial sin estados de borde. En contraste, para $|\mu| < 2t$ y $\Delta \neq 0$, el emparejamiento dominante ocurre entre Majoranas de sitios vecinos, dejando dos modos de Majorana no apareados localizados en los extremos de la cadena. Esta fase corresponde a una fase topológica, caracterizada por un invariante topológico no trivial y por la presencia de estados de energía cero robustos frente a perturbaciones locales mientras el gap del bulto permanezca abierto [2, 4].

Desde un punto de vista físico, la robustez de estos estados de borde se entiende por la presencia de un gap en el espectro: mientras el sistema permanezca en la fase topológica y el gap no se cierre, perturbaciones locales no pueden eliminar los modos de Majorana. En cadenas de longitud finita, sin embargo, los modos localizados en los extremos pueden solaparse, dando lugar a una pequeña energía de hibridación t_M que decae exponencialmente con la longitud de la cadena.

En el régimen relevante para esta tesis, donde los puntos cuánticos se acoplan únicamente a los extremos de cadenas suficientemente largas, resulta natural describir cada

cadena mediante un **Hamiltoniano efectivo** que involucra solo los modos de Majorana presentes en los bordes de la cadena [2]. Este Hamiltoniano efectivo corresponde a,

$$H_K = it_M \gamma_1 \gamma_2, \tag{2.4}$$

este captura la física esencial de la fase topológica y justifica su uso en el modelamiento del sistema estudiado en esta tesis. En particular, el acoplamiento de un modo de Majorana a un punto cuántico induce una mezcla coherente entre electrones y huecos, la cual tiene consecuencias directas sobre la transmisión electrónica, la ruptura de la simetría electrón–hueco y las propiedades termoeléctricas analizadas en los capítulos posteriores [45, 46]. El acoplamiento de un punto cuántico a un modo de Majorana se describe mediante un término que no conserva el número de partículas, reflejando la naturaleza superconductora del sistema. De manera genérica, este acoplamiento puede escribirse como

$$H_t = \lambda(d - d^\dagger)\gamma, \tag{2.5}$$

donde $d^\dagger$ (d) es el operador de creación (aniquilación) en el punto cuántico y λ la amplitud de acoplamiento. Este término induce una mezcla coherente entre electrones y huecos en el punto cuántico, dando lugar a procesos de Andreev que modifican sustancialmente las propiedades de transporte del sistema [45, 46].

2.4. Puntos cuánticos

Los puntos cuánticos son sistemas de confinamiento electrónico que presentan un espectro de energía discreto, análogo al de un átomo artificial. En el contexto del transporte mesoscópico, un punto cuántico puede describirse de manera efectiva mediante uno o pocos niveles discretos acoplados a contactos metálicos, lo que permite un control preciso de sus propiedades mediante voltajes de compuerta externos [43].

En el régimen no interactuante o de interacción débil, el Hamiltoniano de un punto cuántico se reduce a un término de nivel discreto cuya energía ε_d puede sintonizarse respecto del nivel de Fermi de los contactos. El transporte electrónico a través del punto cuántico se produce entonces mediante resonancias tipo Breit–Wigner, cuya posición y anchura están determinadas por la energía de sitio del punto cuántico ε_d y por los acoplamientos a los electrodos. Este marco constituye la base de la descripción de dispositivos mesoscópicos coherentes y ha sido ampliamente validado tanto teórica como experimentalmente [43].

Cuando un punto cuántico se acopla a un superconductor, y en particular a un modo de Majorana, se produce una mezcla coherente entre estados electrónicos y de huecos. Esta mezcla tiene consecuencias directas sobre la simetría electrón–hueco del sistema. En configuraciones simétricas, la transmisión es una función par de la energía respecto al nivel de Fermi, lo que suprime la respuesta termoeléctrica. La ruptura controlada de esta simetría, por ejemplo mediante un flujo Aharonov–Bohm, es un ingrediente clave para obtener un coeficiente de Seebeck finito [15].

Los puntos cuánticos actúan además como sondas espectroscópicas altamente controlables, permitiendo ajustar energías y acoplamientos externos, lo que los convierte en herramientas idóneas para la detección indirecta de modos de Majorana a través de observables de transporte.

Capítulo 3

Formalismo

En este capítulo se presenta el formalismo teórico utilizado para calcular las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico del sistema descrito en el capítulo anterior. El análisis se basa en el formalismo de funciones de Green fuera del equilibrio, el cual permite describir de manera sistemática el transporte coherente en sistemas mesoscópicos acoplados a reservorios electrónicos. En particular, se emplea el método de ecuación de movimiento (EOM) para obtener las funciones de Green retardadas asociadas a los puntos cuánticos acoplados a modos de Majorana.

3.1. Funciones de Green

El formalismo de funciones de Green proporciona una herramienta poderosa para estudiar sistemas fuera del equilibrio y calcular magnitudes observables como corrientes, densidad de estados y coeficientes de transporte. La función de Green retardada se define como [47–49]:

$$G^r_{AB} = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t)\langle\{A(t), B^\dagger(0)\}\rangle, \tag{3.1}$$

donde A y B son operadores fermiónicos del sistema, $\Theta(t)$ es la función escalón de Heavyside y $\{\cdot\,,\cdot\}$ es el anticonmutador.

Este trabajo está centrado en las funciones de Green asociadas a los operadores de los puntos cuánticos, ya que estos constituyen el canal efectivo a través del cual se produce el transporte entre los contactos metálicos.

Para obtener las funciones de Green del sistema se emplea el metodo de EOM, el cual consiste en derivar la función de Green respecto del tiempo y utilizar la ecuación de Heisenberg para generar un sistema de ecuaciones acopladas. En el espacio de Fourier, la ecuación general toma la forma [47–49]:

$$(\varepsilon + i\eta)\langle\langle A; B^\dagger\rangle\rangle_\varepsilon = \langle\{A, B^\dagger\}\rangle + \langle\langle [A, H]; B^\dagger\rangle\rangle_\varepsilon, \tag{3.2}$$

donde se denota $\langle\langle \cdot\,;\cdot\rangle\rangle_\varepsilon$ como la función de Green en el espacio de frecuencias.

Dado que se trabaja en el régimen no interactuante, el sistema de ecuaciones que se obtiene puede cerrarse de manera exacta, obteniéndose expresiones analíticas para las funciones de Green retardadas. Para describir ambos puntos cuánticos, se organizan las funciones de Green retardadas como [48, 49],

$$\mathbf{G^r} = \begin{pmatrix} \langle\langle d_1; d_1^\dagger\rangle\rangle & \langle\langle d_1; d_2^\dagger\rangle\rangle \\ \langle\langle d_2; d_1^\dagger\rangle\rangle & \langle\langle d_2; d_2^\dagger\rangle\rangle \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Tener la función de Green del sistema nos es útil debido a que podemos calcular las distintas propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico utilizando esta como herramienta.

3.2. Transporte electrónico y termoeléctrico

El presente trabajo se enfoca en describir las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico del sistema. Las propiedades de transporte electrónico estudiadas se conforman por la corriente, el shot noise (ruido estadístico), el factor de Fano y la densidad de estados. Desde un punto de vista microscópico, estas magnitudes pueden expresarse en términos de las probabilidades de transmisión de los portadores de carga a través del sistema. En este contexto, la corriente eléctrica puede escribirse como una integral de la transmisión, donde intervienen tanto los procesos de transmisión directa como aquellos asociados a reflexiones de Andreev en interfaces superconductoras (en este caso, las cadenas de Kitaev) [21, 30, 33, 34].

$$I = \frac{2e}{h}\int [\mathcal{T}_D(\varepsilon) + \mathcal{T}_{CAR}(\varepsilon)][f_L(\varepsilon) - f_R(\varepsilon)]d\varepsilon + \frac{2e}{h}\int \mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon)[f_L(\varepsilon) - f_L^*(\varepsilon)]d\varepsilon \quad (3.4)$$

Donde $f(\varepsilon) = 1/[\exp(\frac{\varepsilon}{kT}) + 1]$ corresponde a la distribución de Fermi-Dirac y $f_L^*(\varepsilon) = 1 - f_L(-\varepsilon)$ corresponde a la distribución de los huecos. Debido a las propiedades de la distribución de Fermi-Dirac, si se considera que el contacto izquierdo está a una energía de eV y el contacto derecho se encuentra a potencial 0, se puede aproximar la corriente en un régimen a temperatura 0 a,

$$I(eV) = \frac{2e}{h}\int_0^{eV} [\mathcal{T}_D(\varepsilon) + \mathcal{T}_{CAR}(\varepsilon)]d\varepsilon \quad + \quad \frac{2e}{h}\int_{-eV}^{eV} \mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon)d\varepsilon \quad (3.5)$$

El término $\mathcal{T}_D(\varepsilon)$ corresponde a la transmisión electrónica del sistema, o también *Transmisión Directa*. Esta se define como [43],

$$\mathcal{T}_D(\varepsilon) = \mathrm{Tr}[\Gamma_L(\varepsilon)G^r(\varepsilon)\Gamma_R(\varepsilon)G^a(\varepsilon)] \quad (3.6)$$

donde $G^a(\varepsilon) = [G^r]^\dagger$ corresponde a la función de Green avanzada del sistema y $\Gamma_\alpha = i[\Sigma - \Sigma^\dagger]$ corresponde a la matriz de acoplamiento entre los puntos cuánticos con el contacto $\alpha \in [L, R]$, en el que se define la autoenergía como $\Sigma_{\alpha,ij} = \sum_k \frac{t^*_{\alpha i} t_{\alpha j}}{\varepsilon - \varepsilon_{\alpha k} + i\eta}$.

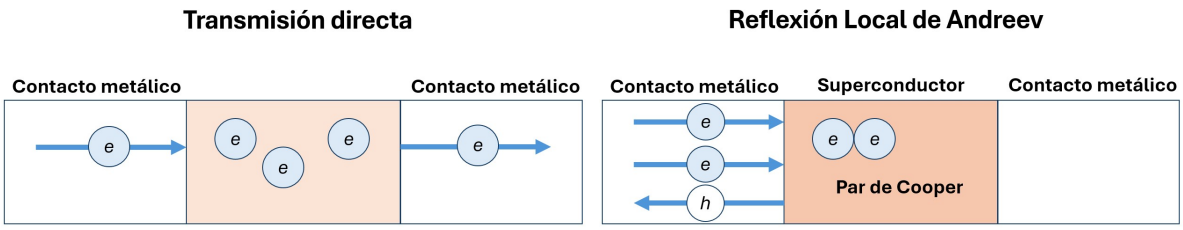
De manera análoga, se presentan los procesos de *reflexión local de Andreev* (LAR) y *reflexión cruzada de Andreev* (CAR) [21, 32]. En sistemas superconductores, la reflexión de Andreev ocurre cuando al reflejar un hueco desde un contacto metálico, se le inyecta un electrón adicional al sistema que, al combinarse con el electrón incidente original, da lugar a la formación de un **par de Cooper** en el condensado [47]. La distinción entre ambos mecanismos es espacial: en la LAR, el hueco se refleja a través del mismo contacto de incidencia, mientras que en la CAR, la reflexión ocurre en el contacto opuesto. Estos fenómenos, junto con la transmisión directa, se ilustran esquemáticamente en la Fig. 3.1.

Formalmente, estas reflexiones de Andreev se definen a través de un formalismo muy similar al de la transmisión directa. La principal diferencia es que, debido a que estas transmisiones generan pares de Cooper y se llevan a cabo solamente en presencia de superconductores, en lugar de usar la función de Green normal del sistema se utiliza la función de Green anómala (5.4). La LAR y la CAR se definen como:

$$\mathcal{T}_{LAR} = \mathrm{Tr}[\Gamma_L F^r \Gamma_L^h F^a] \quad (3.7)$$

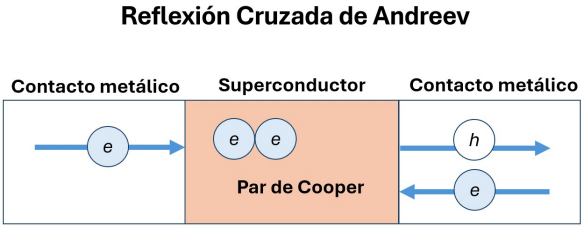
$$\mathcal{T}_{CAR} = \mathrm{Tr}[\Gamma_L F^r \Gamma_R^h F^a] \quad (3.8)$$

Donde Γ_α^h corresponde al acoplamiento que tienen los huecos con los contactos metálicos. Cuando los puntos cuánticos no se acoplan de ninguna manera a los modos de



(a) Esquema que muestra el proceso de la transmisión directa.

(b) Esquema que muestra el proceso de transmisión de reflexión local de Andreev.



(c) Esquema que muestra el proceso de transmisión de reflexión cruzada de Andreev.

Figura 3.1: Representación esquemática de los tres procesos de transmisión existentes debido a la presencia de superconductividad en el sistema.

Majorana (es decir, cuando el parámetro $V_{\alpha,i} = 0$), la función de Green de los Majorana no aparece en el sistema de ecuaciones, por lo que se interpreta que el interferómetro y las cadenas de Kitaev son sistemas independientes no interactuantes. Por lo tanto, el sistema no presenta superconductividad y, por ello, no se pueden generar pares de Cooper ni existen estos procesos exóticos.

El shot noise consiste en fluctuaciones aleatorias de la corriente eléctrica. Es originado por el movimiento de los portadores de carga a través del sistema. En conductores normales donde los portadores de carga son electrones, se puede describir como [30]

$$S(eV) = \int \mathcal{T}_D(\varepsilon)(1 - \mathcal{T}_D(\varepsilon))\mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon_-)d\varepsilon \tag{3.9}$$

donde $\mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon') = f(\varepsilon)[1 - f(\varepsilon')] + [1 - f(\varepsilon)]f(\varepsilon')$ y $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm eV$

Debido a que el sistema está en presencia de superconductividad, esta expresión no es suficiente para definir el shot noise, ya que se exponen reflexiones de Andreev que entregan más mecanismos de transmisión [32]. En presencia de superconductores, el shot noise se puede describir como [21],

$$\begin{aligned} S(eV) = \frac{4e^2}{h} \int \{&[\mathcal{T}_D(\varepsilon) + T_{CAR}(\varepsilon)][1 - \mathcal{T}_D(\varepsilon) - T_{CAR}(\varepsilon)]\mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon_-) \\ &+ 2\mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon)[1 - \mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon) - \mathcal{T}_D(\varepsilon) - T_{CAR}(\varepsilon)]\mathcal{F}(\varepsilon_+, \varepsilon_-)\}d\varepsilon \end{aligned} \tag{3.10}$$

Esta expresión se puede reducir utilizando las propiedades de la distribución de Fermi-

Dirac,

$$\begin{aligned} S(eV) =& \frac{4e^2}{h}\int_0^{eV}[\mathcal{T}_D(\varepsilon)+T_{CAR}(\varepsilon)][1-\mathcal{T}_D(\varepsilon)-T_{CAR}(\varepsilon)]\mathcal{F}(\varepsilon,\varepsilon_-)d\varepsilon \\ &+\frac{8e^2}{h}\int_{-eV}^{eV}\mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon)[1-\mathcal{T}_{LAR}(\varepsilon)-\mathcal{T}_D(\varepsilon)-T_{CAR}(\varepsilon)]\mathcal{F}(\varepsilon_+,\varepsilon_-)d\varepsilon \end{aligned} \tag{3.11}$$

A diferencia de la corriente promedio, que describe el flujo medio de carga a través del sistema, el shot noise caracteriza las fluctuaciones temporales de la corriente alrededor de su valor medio. Estas fluctuaciones no son simplemente ruido térmico, sino que tienen un origen fundamentalmente cuántico y discreto; están directamente relacionadas con el hecho de que la carga eléctrica se transporta en unidades finitas [21, 30, 33, 34].

En un sistema mesoscópico, el transporte electrónico es un proceso intrínsecamente probabilístico. Cada electrón incidente sobre la región de dispersión tiene una cierta probabilidad $\mathcal{T}(\varepsilon)$ de ser transmitido, y una probabilidad $1-\mathcal{T}(\varepsilon)$ de ser reflejado. Como consecuencia, incluso en condiciones estacionarias, la corriente no es constante en el tiempo, sino que presenta fluctuaciones asociadas a la naturaleza aleatoria de estos eventos de transmisión y reflexión [30].

Desde este punto de vista, el shot noise puede entenderse como una manifestación directa de la estadística de conteo de electrones, puesto que mide qué tan regular es el flujo de partículas. Si los electrones atravesaran el sistema de manera completamente independiente y sin correlaciones, el proceso sería análogo a un proceso de Poisson, donde los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente en el tiempo. Sin embargo, en sistemas cuánticos, la interferencia, las correlaciones y la indistinguibilidad de las partículas modifican este comportamiento. Por esto mismo, el shot noise es sensible a características como la estadística de los portadores de carga, las correlaciones cuánticas entre estos y la presencia de procesos no convencionales, como las reflexiones de Andreev. En sistemas híbridos normal-superconductor, estos efectos se vuelven especialmente relevantes, ya que el transporte puede involucrar la transferencia de pares de carga y la mezcla coherente entre estados electrónicos y de hueco. Por esta razón, el shot noise no solo cuantifica fluctuaciones, sino que también proporciona información directa sobre la naturaleza microscópica de los portadores de carga [21, 30, 33, 34].

El factor de Fano se define como la razón entre el shot noise y la corriente que pasa a través del sistema [30],

$$F = \frac{S}{2eI} \tag{3.12}$$

Corresponde a un parámetro adimensional que permite relacionar el ruido en términos de la carga efectiva transmitida y el grado de correlación entre los procesos de transporte.

Desde un punto de vista físico, el factor de Fano compara el ruido del sistema con el ruido que tendría un proceso puramente Poissoniano. En este sentido, se puede categorizar el factor de Fano. Por lo tanto, se considera un proceso Poissoniano cuando $F = 1$, donde los electrones se transmiten de manera independiente, sin correlaciones entre ellos. Por otro lado, se consideran procesos no Poissonianos cuando $F \neq 1$. Estos procesos indican correlaciones e interferencias que suprimen las fluctuaciones [30, 34].

Otra cantidad de interés es la densidad de estados del sistema, la cual consiste en la cantidad de estados disponibles en un rango de energías del sistema $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$. Se puede definir la densidad de estados del sistema como [48, 49],

$$DOS = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}(\mathbf{G}^{\mathbf{r}})) \tag{3.13}$$

Estas magnitudes permiten analizar la estructura espectral del sistema y relacionarla con la aparición de resonancias, efectos de interferencia cuántica y modos de Majorana,

así como también caracterizar los mecanismos de transporte electrónico mediante la corriente, sus fluctuaciones y la estadística de las cuasipartículas involucradas.

Por otro lado, para describir las propiedades de transporte termoeléctrico, se considera el formalismo de Landauer-Büttiker, el que describe las propiedades de transporte de un sistema mesoscópico a través de la probabilidad de transmisión entre reservorios en equilibrio local. Bajo el supuesto de que el sistema se encuentra en el régimen de respuesta lineal y además considerando que los contactos se encuentran a una diferencia de potencial ΔV y de temperatura ΔT bajos; la corriente eléctrica (por electrones) I y la corriente térmica J_Q se pueden escribir como una combinación lineal de ΔV y ΔT [43, 50, 51], tal como se describe en la ecuación (3.14),

$$\begin{pmatrix} I \\ J_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^2 L_0 & eL_1 \\ eL_1 & -L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta T/T \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Donde los coeficientes de transporte L_n están definidos en términos de la función de transmisión del sistema $T(\varepsilon)$,

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{h} \int d\varepsilon (\varepsilon - \mu)^n \mathcal{T}(\varepsilon) \left(-\frac{df}{d\varepsilon} \right), \tag{3.15}$$

con $f(\varepsilon)$ la distribución de Fermi-Dirac y μ el potencial químico [43, 52].

Estas expresiones muestran que, en el régimen lineal, tanto la corriente eléctrica como la corriente térmica están completamente determinadas por la función de transmisión electrónica. Dicha función cuantifica la probabilidad de que una excitación con energía ε atraviese el sistema desde un contacto al otro, e incorpora de manera efectiva toda la información microscópica relevante del dispositivo, incluyendo la estructura espectral, los acoplamientos a los reservorios, la interferencia cuántica entre distintos caminos de transporte y la presencia de excitaciones no convencionales [43, 50, 51].

Para evaluar los coeficientes de transporte, en esta tesis se utiliza la **expansión de Sommerfeld**, válida en el régimen de bajas temperaturas. Bajo esta aproximación, los coeficientes $\mathcal{L}_n$ pueden expandirse como series en potencias de la temperatura. En particular, se obtiene como [20, 43, 53],

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{h}(\mathcal{T}^{(0)} + \frac{\pi^2}{6}\mathcal{T}^{(2)}\xi^2 + \frac{7\pi^4}{360}\mathcal{T}^{(4)}\xi^4 + \mathcal{O}(\xi^6)), \tag{3.16}$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{h}(\frac{\pi^2}{3}\mathcal{T}^{(1)}\xi^2 + \frac{7\pi^4}{90}\mathcal{T}^{(3)}\xi^4 + \mathcal{O}(\xi^6)), \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{h}(\frac{\pi^2}{3}\mathcal{T}^{(0)}\xi^2 + \frac{7\pi^2}{30}\mathcal{T}^{(2)}\xi^4 + \mathcal{O}(\xi^6)), \tag{3.18}$$

donde $\mathcal{T}^{(n)}(\mu) = (d^n\mathcal{T}/d\varepsilon^n)(\mu)$ es la n-sima derivada de la transmisión con respecto a la energía evaluada en el potencial químico μ, y $\xi = k_B T$ es la multiplicación de la temperatura con la constante de Boltzmann. A partir de estos coeficientes se definen las **Propiedades termoeléctricas**, las cuales corresponden a la conductancia eléctrica, la conductancia térmica, el coeficiente de Seebeck, la figura de mérito y el número de Lorenz.

La conductancia eléctrica $\mathcal{G}$ está definida como la razón de la corriente de carga con la diferencia de potencial cuando la diferencia de temperatura es cero. Similarmente la conductancia térmica por electrones κ_e está definida como la razón de la corriente de

calor con el gradiente de temperatura cuando la corriente de carga se anula.

$$\mathcal{G} = e^2 \mathcal{L}_0 \tag{3.19}$$

$$\kappa_e = \frac{1}{T}\left(\mathcal{L}_2 - \frac{\mathcal{L}_1^2}{\mathcal{L}_0}\right) \tag{3.20}$$

El coeficiente de Seebeck S, también conocido como de poder termoeléctrico, describe la relación entre la diferencia de temperatura y la diferencia de potencial inducida resultante cuando la corriente de carga se anula. Este coeficiente es particularmente sensible a los cambios abruptos en la transmisión.

$$S = -\frac{1}{eT}\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} \tag{3.21}$$

La eficiencia termoeléctrica del sistema se cuantifica mediante la figura de mérito adimensional:

$$ZT = \frac{GS^2T}{\kappa_f + \kappa_e} \tag{3.22}$$

Donde κ_f corresponde a la conductividad térmica por fonones, la cual para este trabajo se considerará como cero, debido a que al estar a tan bajas temperaturas $(1K)$ la presencia de fonones en el sistema es despreciable.

Un valor elevado de ZT indica una conversión eficiente entre calor y electricidad. En sistemas mesoscópicos, valores grandes de ZT pueden alcanzarse mediante una ingeniería cuidadosa de la función de transmisión, de modo que, la conductancia eléctrica sea grande, el coeficiente de Seebeck sea finito y la conductancia térmica por electrones sea lo más baja posible. Esto conduce a que una forma de mejorar el valor de ZT consista en superar las condiciones impuestas por la ley de **Wiedemann-Franz**, la cual dice que, para metales normales, la razón entre la conductancia térmica por electrones con la conductancia eléctrica amplificada por la temperatura $L = \frac{k}{GT}$, toma un valor constante $L_0 = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$. Esta ley refleja el hecho de que carga y calor son transportados por las mismas cuasipartículas. La violación de esta ley indica una separación entre los mecanismos de transporte eléctrico y térmico, lo cual es característico de sistemas con fuerte interferencia cuántica, correlaciones no triviales, o excitaciones no convencionales, como los modos de Majorana.

En esta tesis se muestra que la combinación de interferencia Aharonov–Bohm y superconductividad topológica puede conducir a desviaciones significativas del valor universal de L_0.

Las propiedades termoeléctricas constituyen una herramienta poderosa para acceder a información sobre la estructura espectral, las simetrías y los mecanismos de transporte del sistema. En particular, la sensibilidad del coeficiente de Seebeck y del número de Lorenz a la ruptura de simetrías hace de estas magnitudes observables ideales para la caracterización de modos de Majorana en dispositivos interferométricos.

Capítulo 4

Modelo teórico del sistema

En este capítulo se describe el modelo teórico utilizado para analizar las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico del sistema. Se presenta la geometría del dispositivo, el Hamiltoniano que lo describe y las principales simetrías relevantes para el análisis posterior. El sistema modela un interferómetro cuántico tipo Aharonov–Bohm que incorpora puntos cuánticos y cadenas de Kitaev en su fase topológica.

4.1. Sistema

El sistema estudiado consiste en dos puntos cuánticos conectados en paralelo entre dos contactos normales, formando un interferómetro tipo Aharonov–Bohm. Cada punto cuántico se encuentra acoplado a un extremo de una cadena de Kitaev en fase topológica. El flujo magnético Φ atraviesa el interferómetro y se incorpora mediante una fase $\varphi = \frac{\pi\Phi}{2\Phi_0}$ en los acoplamientos del punto cuántico con los contactos, este valor de φ es el valor descrito en la ecuación 2.1 dividido entre los cuatro acoplamientos del interferómetro. El sistema esta representado esquemáticamente en la figura 4.1.

Los contactos metálicos se consideran como reservorios electrónicos no interactuantes en equilibrio térmico, caracterizados por un potencial químico y una temperatura bien definidos. Los puntos cuánticos actúan como niveles discretos cuya energía puede ajustarse mediante voltajes de compuerta, mientras que las cadenas de Kitaev proporcionan los grados de libertad topológicos que interactúan con los electrones convencionales a través de procesos de túnel.

El Hamiltoniano total se escribe como la suma de los hamiltonianos de los subsistemas y sus acoplamientos: $H = H_{\text{Contactos}} + H_{\text{QD}} + H_{\text{Kitaev}} + H_{\text{Acoplamientos}}$, donde cada término se describe a continuación.

Los contactos izquierdo (L) y derecho (R) se modelan como gases de electrones no interactuantes:

$$H_{\text{Contactos}} = \sum_{\alpha,k} \varepsilon_{\alpha,k}\, c^{\dagger}_{\alpha,k}\, c_{\alpha,k} \tag{4.1}$$

Donde $c^{\dagger}_{\alpha,k}(c_{\alpha,k})$ crea (aniquila) un electrón con momento k y energía $\varepsilon_{\alpha,k}$ en el contacto α.

Cada punto cuántico se describe mediante un único nivel electrónico efectivo:

$$H_{\text{QD}} = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} d^{\dagger}_{\beta} d_{\beta} \tag{4.2}$$

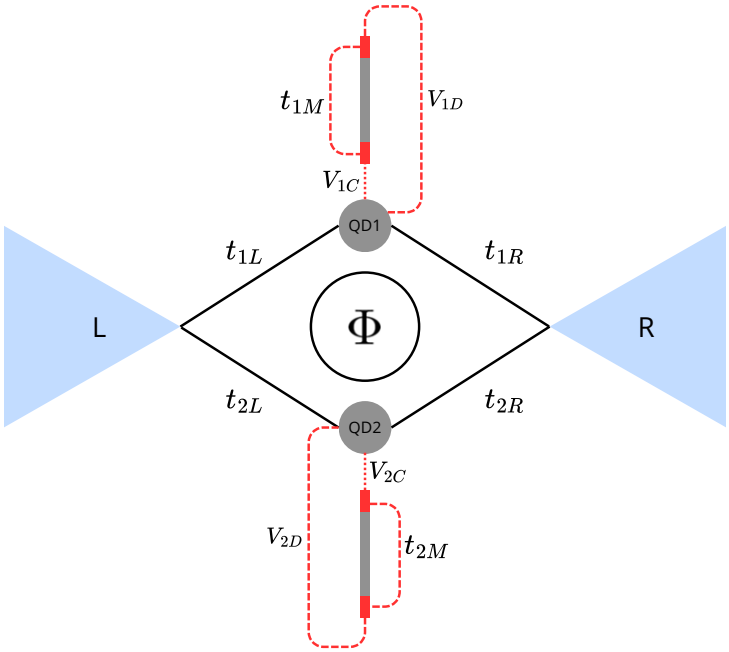


Figura 4.1: Representación esquemática del sistema bajo estudio. Las cadenas de Kitaev se acoplan a cada punto cuántico y albergan estados de Majorana.

Donde $d^\dagger_\beta(d_\beta)$ crea (aniquila) un electrón en el punto cuántico β con energía de sitio ε_β. En este trabajo se desprecia la interacción Coulomb intra–punto, asumiendo el régimen no interactuante o de ocupación simple.

Cada cadena de Kitaev se modela mediante el Hamiltoniano estándar de un superconductor topológico unidimensional. En el régimen de interés, solo se consideran los modos de Majorana localizados en los extremos de la cadena. El Hamiltoniano efectivo de cada cadena se escribe como:

$$H_{\text{Kitaev}} = \sum_\beta i t_\beta \gamma_{\beta,c}\gamma_{\beta,d} \tag{4.3}$$

Donde $\gamma_{\beta,c}$ y $\gamma_{\beta,d}$ son operadores de Majorana de la cadena que interactúa con el punto cuántico β, que satisfacen $\{\gamma_{\beta,\alpha}, \gamma_{\beta',\alpha'}\} = 2\delta_{\beta,\beta'}\delta_{\alpha,\alpha'}$. La energía de acoplamiento t_β describe el solapamiento entre los modos de Majorana y decae exponencialmente con la longitud de la cadena.

El Acoplamiento de los sistemas se puede separar como la suma del acoplamiento entre los puntos cuánticos con las cadenas Kitaev y el acoplamiento de los puntos cuánticos con los contactos metálicos.

$$H_{\text{Acoplamiento}} = H_{\text{QD-M}} + H_T \tag{4.4}$$

El acoplamiento entre los puntos cuánticos y los contactos metálicos se describe mediante términos de túnel que incorporan explícitamente la fase Aharonov–Bohm:

$$H_T = \sum_{\alpha,\beta,k} \left(t_{\beta\alpha} c^\dagger_{\alpha k} d_\beta \; + \; t^*_{\beta\alpha} d^\dagger_\beta c_{\alpha k} \right), \tag{4.5}$$

donde:

$$t_{\beta\alpha} = t\, \mathrm{e}^{i\phi_{\beta\alpha}}, \tag{4.6}$$

donde las fases $\phi_{\beta\alpha}$ satisfacen:

$$\sum_{\text{loop}} \phi_{\beta\alpha} = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \tag{4.7}$$

El acoplamiento entre cada punto cuántico y su respectivo modo de Majorana se modela como:

$$H_{\text{QD-M}} = \sum_{\alpha\beta} \left(V_{\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}d_\beta \; + \; V^*_{\beta\alpha}d^\dagger_\beta\gamma_{\beta\alpha} \right), \tag{4.8}$$

donde $V_{\beta\alpha}$ es la amplitud de acoplamiento punto cuántico–Majorana.

La fase asociada al flujo Aharonov–Bohm se introduce mediante una elección de gauge conveniente, distribuyendo las fases de manera simétrica en los acoplamientos túnel. Esta elección no afecta las magnitudes físicas observables, pero simplifica el tratamiento analítico y permite identificar claramente los efectos de interferencia cuántica.

El flujo magnético se considera un parámetro externo controlable y su efecto se manifiesta exclusivamente a través de las fases relativas entre los distintos caminos de transporte.

4.2. Supuestos físicos

En este trabajo se considera el régimen de transporte coherente y de respuesta lineal, a bajas temperaturas. Se asume que:

- Los contactos metálicos están en equilibrio local.
- Los efectos de interacción Coulomb se pueden despreciar.

Estas aproximaciones permiten capturar los mecanismos físicos esenciales asociados a la interferencia cuántica y a los modos de Majorana, manteniendo un tratamiento analítico y numérico controlado.

4.3. Implementación numérica

En esta sección se describen los procedimientos numéricos utilizados para evaluar las funciones de Green, la transmisión electrónica y las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico del sistema estudiado. Se especifican los parámetros físicos relevantes, las aproximaciones empleadas y las convenciones adoptadas para garantizar la reproducibilidad de los resultados.

Las funciones de Green retardadas de los puntos cuánticos se obtuvieron resolviendo las expresiones analíticas derivadas mediante el método de ecuación de movimiento. Al obtenerlas, se escriben de forma matricial (Ecuación 3.3). Para evitar divergencias numéricas y garantizar la convergencia, se introdujo un pequeño parámetro de ensanchamiento $\eta \ll \Gamma$, donde Γ es la escala característica de acoplamiento a los contactos.

Los contactos metálicos normales se modelaron bajo la aproximación de banda ancha, en la que la densidad de estados de los electrodos se considera constante en el rango energético relevante. Bajo esta aproximación, las autoenergías asociadas a los contactos se reducen a términos puramente imaginarios,

$$\Sigma^r_\alpha = -i\Gamma_\alpha/2, \tag{4.9}$$

donde Γ_α caracteriza la intensidad del acoplamiento entre el contacto α y los puntos cuánticos. Esta aproximación simplifica el cálculo y captura adecuadamente la física del transporte coherente en el régimen mesoscópico [43].

Con el fin de presentar los resultados de forma general, todas las energías se expresaron en unidades del acoplamiento característico Γ. En particular:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\Gamma, \qquad \bar{\varepsilon}_\beta = \varepsilon_\beta/\Gamma, \qquad \bar{V}_{\beta,\alpha} = V_{\beta,\alpha}/\Gamma, \qquad \bar{t}_\beta = t_\beta/\Gamma. \tag{4.10}$$

Hay que considerar que para el cálculo de corriente, shot noise y factor de Fano, se estimó una aproximación a temperatura $T = 0$ y una diferencia de potencial entre contactos de ΔV pequeña. Mientras que para el cálculo de propiedades termoeléctricas se contempló una temperatura finita $T = 1K$.

La temperatura se midió en unidades de Γ/k_B, asegurando que la temperatura fuera lo suficientemente baja tanto para que la expansión de Sommerfeld converja como para que el sistema se encuentre en el rango de temperaturas para que exista superconductividad [54].

Los coeficientes de transporte se evaluaron utilizando la expansión de Sommerfeld descrita en (3.16,3.17,3.18). En la práctica, se implementó calculando numéricamente la función de transmisión y su derivada respecto a la energía en el nivel de Fermi. La derivada se obtuvo mediante diferencias finitas centradas. La consistencia de los cálculos fue verificada mediante:

- la recuperación del límite de transporte normal al anular el acoplamiento a Majoranas,
- la periodicidad correcta de la transmisión con el flujo Aharonov–Bohm,
- la recuperación de la ley de Wiedemann–Franz en el régimen simétrico.

La implementación numérica descrita en esta sección permite evaluar de manera controlada el impacto de la interferencia cuántica y de los modos de Majorana sobre las propiedades termoeléctricas del sistema.

Capítulo 5

Resultados

En esta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos para las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico del sistema estudiado. Los resultados se presentan en el régimen de respuesta lineal, a temperatura 0 para las propiedades de transporte electrónico y a temperaturas bajas para las cantidades termoeléctricas. Así los efectos de coherencia cuántica y de hibridación con los modos de Majorana dominan el comportamiento del sistema.

Para obtener la función de Green del sistema, se utilizó el método de ecuación de movimiento (EOM). Para ello se considera el Hamiltoniano:

$$H = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} d_{\beta}^{\dagger} d_{\beta} + \sum_{\alpha,k} \varepsilon_{\alpha,k} c_{\alpha,k}^{\dagger} c_{\alpha,k} + \sum_{\beta} i t_{\beta} \gamma_{\beta C} \gamma_{\beta D} + \sum_{\alpha,\beta,k} \left(t_{\beta\alpha} c_{\alpha k}^{\dagger} d_{\beta} + t_{\beta\alpha}^{*} d_{\beta}^{\dagger} c_{\alpha k} \right) + \sum_{\alpha\beta} \left(V_{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} d_{\beta} + V_{\beta\alpha}^{*} d_{\beta}^{\dagger} \gamma_{\beta\alpha} \right)$$

Para obtener la función de Green retardada del sistema se organiza de la forma decrita en 3.3, donde cada elemento de la **función de Green matricial** ($\langle\langle d_i; d_j^{\dagger} \rangle\rangle$) corresponde a la función de Green que correlaciona el sitio i con el sitio j en el espacio de Fourier. Para obtener el valor de estas funciones de Green en el espacio de Fourier en función de los parámetros del sistema, es necesario definirlas en el espacio temporal:

$$G_{i,j}^{r}(t) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle \{ d_i(t), d_j^{\dagger}(0) \} \rangle \tag{5.1}$$

Posteriormente, se puede derivar esta expresión con respecto al tiempo. Al hacerlo, se utiliza la ecuación de Heisenberg, la cual permite describir la derivada de un operador como el conmutador de este con el Hamiltoniano del sistema. Al derivar la función de Green queda la expresión,

$$i\hbar \frac{d}{dt} G_{i,j}^{r}(t) = \delta(t) - \frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle \{ [d_i, H], d_j^{\dagger}(0) \} \rangle \tag{5.2}$$

Para reducir esta expresión, se utiliza la *regla ABC para anticonmutadores*, la cual permite reescribir el conmutador de cantidades de la forma $[A, BC]$ como la resta de anticonmutadores,

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}. \tag{5.3}$$

Al hacer esto se establece que la derivada de la función de Green que correlaciona el punto cuántico i con el punto cuántico j depende de las funciones de Green que correlacionan el punto cuántico i, los contactos metálicos y los modos de Majorana con el punto cuántico j.

Al repetir este proceso de manera recurrente para el resto de funciones de Green, se obtiene un **sistema de ecuaciones diferenciales lineales**, el cual describe las funciones de Green del sistema que correlacionan los distintos operadores de este con el punto cuántico j. Para resolver el sistema antes mencionado, se emplea la **transformada de Fourier**, generando que el sistema de ecuaciones diferenciales se reduzca a un sistema de ecuaciones algebraicas, el cual es posible de resolver de manera exacta dado que el sistema estudiado desprecia interacciones. El sistema de ecuaciones obtenido es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_i + i\eta)G_{i,j} &= \delta_{i,j} + \sum_{\alpha,k} t^*_{\alpha,i} G_{\alpha,k,j} + \sum_{\alpha} V^*_{i,\alpha} M_{i,\alpha,j} \\
(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha,k} + i\eta)G_{\alpha,k,j} &= \sum_i t_{\alpha,i} G_{i,j} \\
(\varepsilon + i\eta)M_{i,L,j} &= 2it_i M_{i,R,j} + 2V_{i,L} G_{i,j} - 2V^*_{i,L} F_{i,j} \\
(\varepsilon + i\eta)M_{i,R,j} &= -2it_i M_{i,L,j} + 2V_{i,R} G_{i,j} - 2V^*_{i,R} F_{i,j} \\
(\varepsilon + \varepsilon_i + i\eta)F_{i,j} &= -\sum_{\alpha,k} t_{\alpha,i} F_{\alpha,k,j} - \sum_{\alpha} V_{i,\alpha} M_{i,\alpha,j} \\
(\varepsilon + \varepsilon_{\alpha,k} + i\eta)F_{\alpha,k,j} &= -\sum_{\beta} t^*_{i,\alpha} F_{i,j}
\end{aligned}$$

Donde $F_{i,j}$ corresponde a la función de Green **anómala**. Esta función de Green anómala solo aparece en la ecuación de movimiento cuando se estudian sistemas que presentan superconductividad, debido a que está relacionada con la aparición de Cooper en el sistema. Esta función de Green anómala se define como,

$$F_{i,j} = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t)\langle\{d^\dagger_i(t), d^\dagger_j(0)\}\rangle, \tag{5.4}$$

Por otro lado, $M_{i,\alpha,j}$ es la función de Green que correlaciona los modos de Majoranas con el sitio j:

$$M_{i,\alpha,j} = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t)\langle\{\gamma_{i,\alpha}(t), d^\dagger(0)\}\rangle.$$

Se puede apreciar que la aparición de la función de Green anómala se debe en su totalidad a la presencia de modos de Majorana, lo cual rectifica el hecho de que estas funciones solamente aparecen en sistemas en los que hay superconductividad presente. En este caso se advierte que la función de Green que correlaciona a los modos de Majorana con el punto cuántico j indica que estos modos se acoplan con el mismo módulo de intensidad, tanto con electrones como con huecos. Las únicas diferencias entre los acoplamientos *Majorana-electrón* con la de *Majorana-hueco* radican en el signo con el que se acoplan y una fase compleja, ya que los Majoranas interactúan con los electrones con un acoplamiento de $2V_{i,\alpha}$, mientras que con los huecos interactúan con el valor de $-2V_{i,\alpha}$. Lo anterior se produce por la estadística no abeliana de los Majoranas, ya que la regla de anticonmutación que siguen es diferente a la de los electrones. Esto se evidencia al hacer el conmutador del modo de Majorana con el Hamiltoniano que acopla los Majoranas con los puntos cuánticos (ecuación 5.5).

$$[\gamma_{i,\alpha}, H_{M-QD}] = 2V_{i,\alpha} d_i - 2V^*_{i,\alpha} d^\dagger_i \tag{5.5}$$

Si el sistema descrito no presentase superconductividad a través de los modos de Majorana, y en su lugar el interferómetro se acoplase a estados triviales (electrónicos), se vería reflejado en la ecuación 5.5, puesto que estos estados siguen una regla de anticonmutación trivial, por lo que al hacer el conmutador con el hamiltoniano no aparecería el término que acopla al hueco $-2V^*_{i,\alpha} d^\dagger_i$.

Al resolver el sistema de ecuaciones, resultan las siguientes funciones de Green

$$
\begin{aligned}
G_{11}^{-1} &= \varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{2}{\varepsilon_{m1}}\left(|V_{L1}|^2 - 4\frac{t_1}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L1}^* V_{R1}) + |V_{R1}|^2\right) \\
&\quad - 4\frac{f_{11}}{\varepsilon_{m1}^2}\left(|V_{L1}|^4 + 2\mathrm{Re}(V_{L1}^{*2}V_{R1}^2) + |V_{R1}|^4\right) - \Sigma_1 - \Sigma_{11} + i\eta, \\
G_{22}^{-1} &= \varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{2}{\varepsilon_{m2}}\left(|V_{L2}|^2 - 4\frac{t_2}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L2}^* V_{R2}) + |V_{R2}|^2\right) \\
&\quad - 4\frac{f_{22}}{\varepsilon_{m2}^2}\left(|V_{L2}|^4 + 2\mathrm{Re}(V_{L2}^{*2}V_{R2}^2) + |V_{R2}|^4\right) - \Sigma_2 - \Sigma_{22} + i\eta, \\
G_{21} &= g_{21}\left(\Sigma_{21} + \frac{4f_{21}\Sigma_{12}f_{11}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^2 + V_{R1}^2)(V_{L2}^{*2} + V_{R2}^{*2})\right) G_{11}, \\
G_{12} &= g_{12}\left(\Sigma_{12} + \frac{4f_{22}\Sigma_{21}f_{12}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^{*2} + V_{R1}^{*2})(V_{L2}^2 + V_{R2}^2)\right) G_{22}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Donde ε es la energía del sistema, ε_i son las energías de sitio de los puntos cuánticos, t_i es la energía que modela el largo de la cadena de Kitaev, $V_{\alpha,i}$ es el acoplamiento Majorana-QD y η es una energía infinitesimal que se utiliza para evadir los polos de las funciones.

5.1. Transporte electrónico

En primer lugar se analiza la **transmisión electrónica** $\mathcal{T}_D(\varepsilon)$ y la **densidad de estados** (DOS) de los puntos cuánticos, ya que estas magnitudes contienen información directa sobre la estructura espectral del sistema y sus acoplamientos efectivos. La transmisión se calcula con la fórmula descrita en la ecuación (3.6) y la densidad de estados se obtiene con la ecuación 3.13. Se observa que tanto la transmisión como la DOS quedan completamente descritas a través de la función de Green del sistema. Para obtener ambas cantidades se utilizaron métodos numéricos, y se escribieron las funciones de Green obtenidas como funciones en Python. Además, utilizando las librerías de NumPy y Matplotlib se obtuvieron de manera gráfica tanto la transmisión como la DOS.

En ausencia de acoplamiento a las cadenas de Kitaev, la transmisión exhibe resonancias tipo Breit–Wigner asociadas a los niveles discretos de los puntos cuánticos, moduladas por la interferencia entre los dos brazos del interferómetro (figura 5.1). La introducción de un flujo magnético a través del interferómetro modifica la fase relativa entre los caminos electrónicos y da lugar a oscilaciones características en la transmisión (figura 5.2). Estas oscilaciones presentan una periodicidad determinada por el cuanto de flujo Φ_0 y respetan la simetría bajo inversión de flujo $\Phi \to -\Phi$ (Figura 5.3).

Se observa que a medida que se aumenta el flujo magnético, la transmisión total disminuye, hasta llegar al caso donde el flujo magnético toma valores de $\Phi = (n+1/2)\times\Phi_0$, con $n \in \mathbb{Z}$. Para este caso, la transmisión se anula, puesto que el sistema entra en una fase en la cual se tiene **reflexión total**. Si se continúa aumentando el flujo magnético, la transmisión empieza a recuperar su valor, hasta que retorna a su valor inicial cuando $\Phi = \Phi_0$ (Figura 5.3).

Al introducir el acoplamiento a los modos de Majorana, la estructura de la transmisión se modifica sustancialmente: aparecen características robustas cercanas a la energía de Fermi, asociadas a la hibridación entre los niveles de los puntos cuánticos y los estados ligados de Majorana. La densidad de estados muestra la emergencia de picos cercanos a energía cero, cuya intensidad y anchura dependen del acoplamiento punto cuánti-

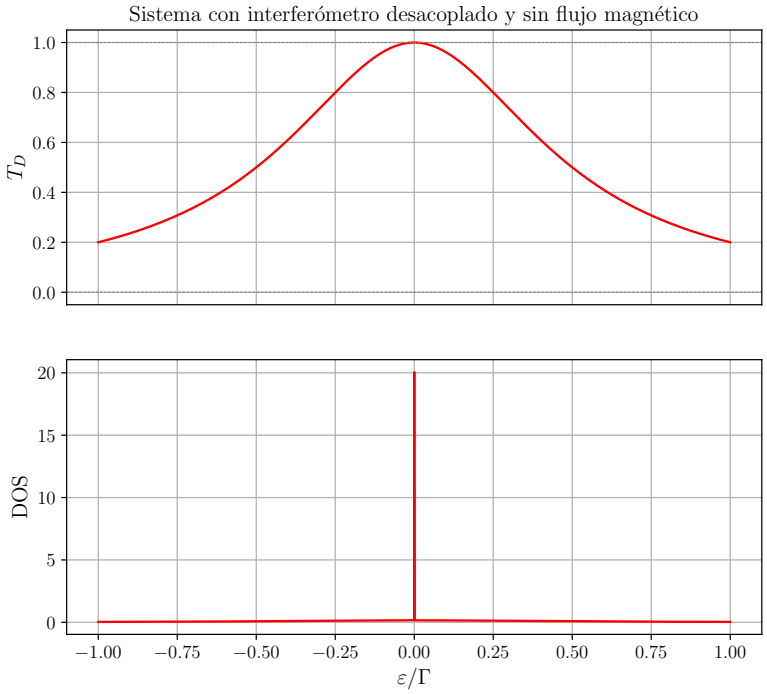


Figura 5.1: Transmisión y DOS del interferómetro desacoplado de los modos de Majorana.

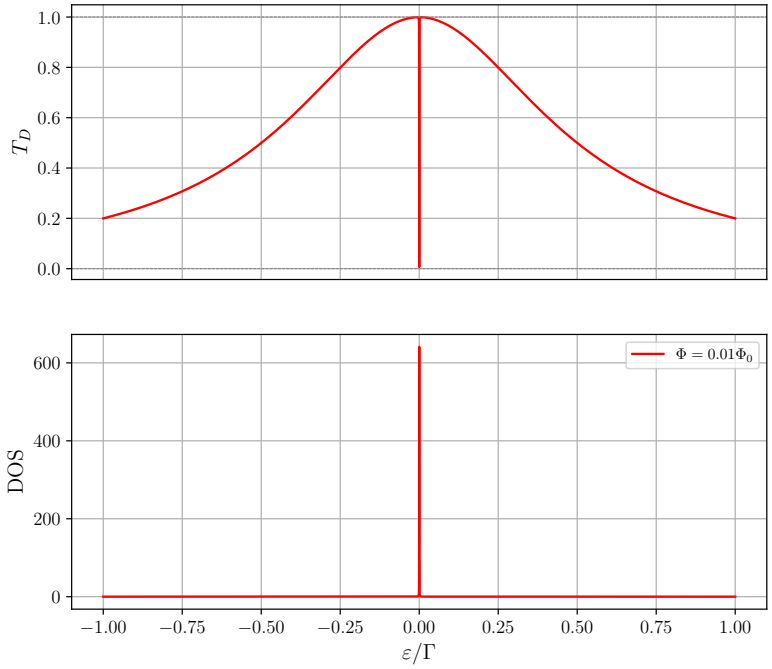
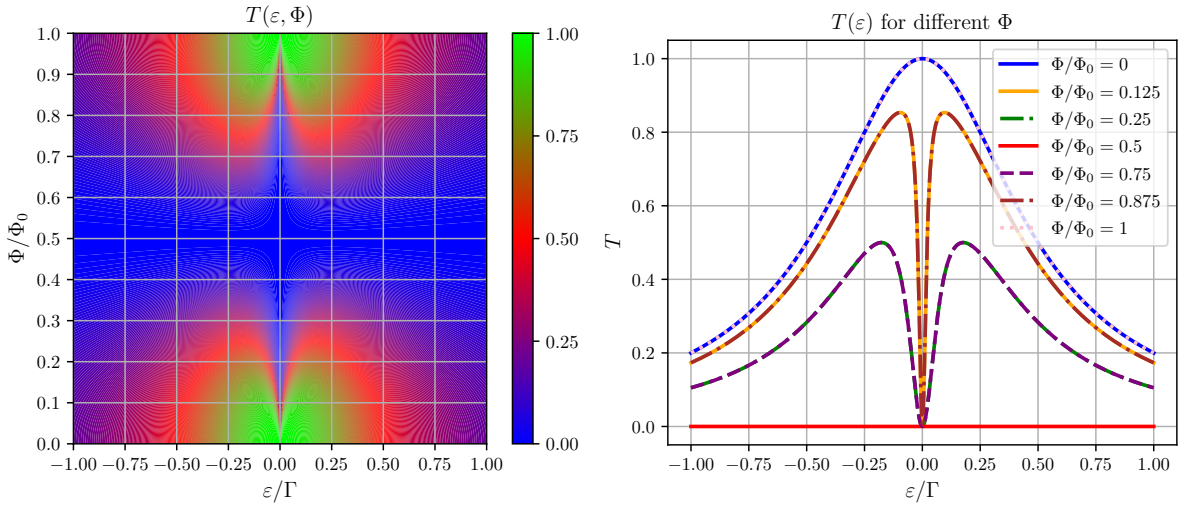


Figura 5.2: Transmisión y DOS del interferómetro desacoplado de los modos de Majorana rompiendo la simetría del interferómetro con un flujo magnético $\Phi = 0{,}01 \times \Phi_0$.



(a) (b)

Figura 5.3: Se muestra cómo depende la transmisión del sistema desacoplado de los modos de Majorana en función de la energía cuando se varía el flujo magnético. (a) Gráfico de contorno de la transmisión en función de la energía y el flujo magnético. (b) Gráfico que muestra la transmisión en función de la energía para varios valores de flujo magnético. En ambas figuras se muestra la periodicidad de la transmisión con período correspondiente al cuanto de flujo magnético Φ_0.

co–Majorana y del solapamiento entre los modos de Majorana en cada cadena (figura 5.4).

Cuando los puntos cuánticos se acoplan a las cadenas de Kitaev, la dependencia con el flujo se vuelve más rica. La interferencia entre procesos de túnel convencionales y procesos mediados por estados de Majorana da lugar a patrones asimétricos en la transmisión. Esta sensibilidad al flujo magnético indica una ruptura efectiva de la simetría temporal inducida por la interferencia cuántica en presencia de superconductividad topológica (Figura 5.4).

Un rasgo distintivo del sistema es el comportamiento de la simetría electrón–hueco. En ausencia de flujo magnético, o para acoplamientos con los modos de Majorana simétricos, la transmisión presenta una simetría alrededor de la energía de Fermi, reflejando la naturaleza partícula–antipartícula de los modos de Majorana.

Sin embargo, al introducir un flujo Aharonov–Bohm distinto de cero, esta simetría se rompe de manera controlada. Cuando los acoplamientos a los modos de Majorana se presentan de manera simétrica, la transmisión también lo es, pero cuando el acoplamiento de los puntos cuánticos a los modos de Majorana no es igual, la transmisión se vuelve asimétrica respecto a la energía, lo que tiene consecuencias directas sobre las propiedades termoeléctricas del sistema. Esta ruptura de simetría electrón–hueco es un ingrediente clave para la aparición de una respuesta termoeléctrica finita y eficiente, y constituye una firma indirecta de la presencia de excitaciones topológicas acopladas al interferómetro.

La simetría rota explica que los electrones y los huecos se están transmitiendo de manera distinta a través del sistema cuando se tienen asimetrías en los acoplamientos entre los modos de Majorana y los puntos cuánticos, y el flujo magnético es finito y distinto de múltiplos enteros de Φ_0. Esto se debe a que, como hay presencia de superconductores en el sistema, ocurren **procesos de Andreev** [21,32]. Los procesos de Andreev indican que existen dos *nuevos* mecanismos en los que puede existir transmisión. Estos son la **Reflexión local de Andreev** (LAR) (Figura 3.1b) y la **Reflexión cruzada de Andreev**

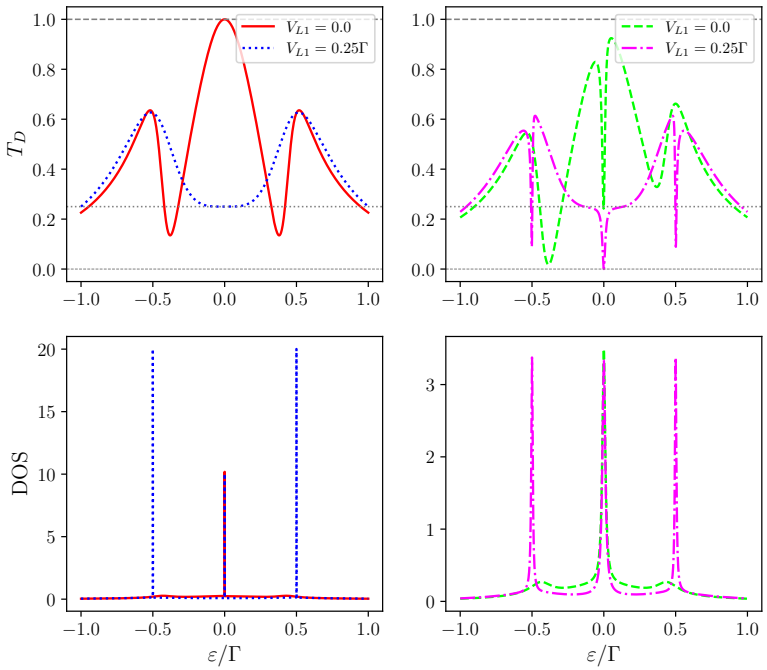


Figura 5.4: Transmisión y DOS del interferómetro acoplado a los modos de Majorana en el límite de cable largo. Los gráficos a la izquierda representan la transmisión y DOS para el sistema en ausencia de flujo magnético; la curva roja es el sistema acoplado a solo un modo de Majorana. Por otro lado, la curva azul acopla ambos modos a la misma energía $V = 0{,}25\Gamma$; Los gráficos a la derecha son el mismo sistema pero en presencia de un flujo magnético $\Phi = 0{,}1 \times \Phi_0$.

(CAR) (Figura 3.1c). Cuando los puntos cuánticos no se acoplan de ninguna manera a los modos de Majorana (es decir, cuando el parámetro $V_{\alpha,i} = 0$), la función de Green de los Majorana no aparece en el sistema de ecuaciones, por lo que se interpreta que el interferómetro y las cadenas de Kitaev son sistemas independientes no interactuantes. Por lo tanto, el sistema no presenta superconductividad y, por ello, no se pueden generar pares de Cooper ni existen estos procesos exóticos.

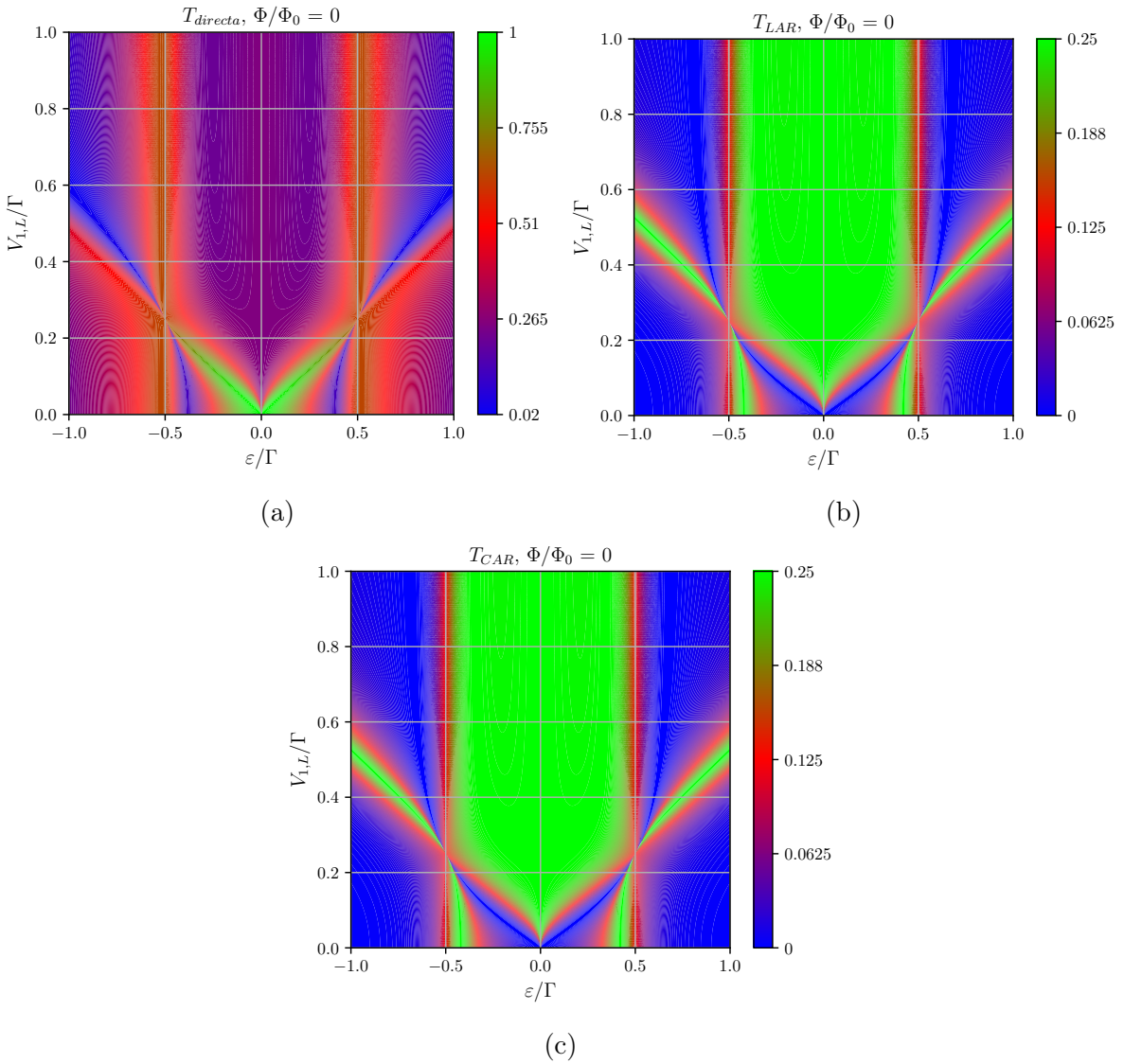


Figura 5.5: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que preseneta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0 \times \Phi_0$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

Se puede apreciar en la figura 5.5 que, cuando el flujo es nulo, la simetría en torno a $\varepsilon = 0$ se mantiene sin importar el valor de los acoplamientos Majorana-Dot. Sin embargo, **se rompe esta simetría** al mantener un flujo magnético finito distinto de múltiplos enteros de Φ_0. Como se muestra en la figura 5.6, se rompe la simetría de la transmisión directa debido a que se está considerando que los electrones y huecos tienen distintos mecanismos de transmisión. Es por esto que la asimetría en torno a $\varepsilon = 0$ que se ve en la figura 5.6a se *cancela* con la asimetría que se ve en la figura 5.6b.

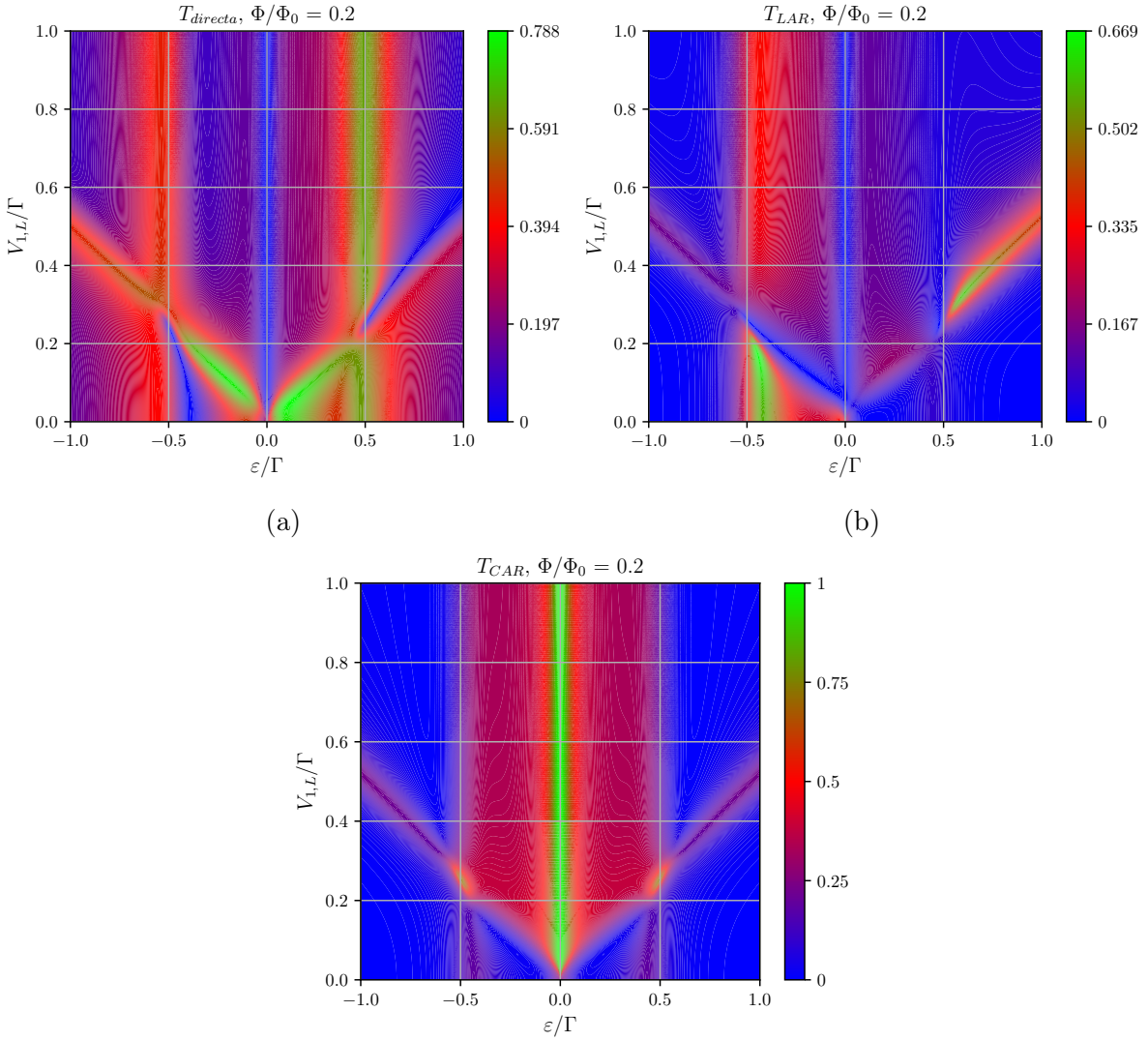


Figura 5.6: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que preseneta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0{,}2 \times \Phi_0$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

Cuando el flujo magnético toma el valor de $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, el sistema se encuentra en la fase de **reflexión total**. Como se obsevó anteriormente, los electrones **no** se transmiten de contacto izquierdo a contacto derecho. Pero, cuando los Majoranas se acoplan, introducen una contribución residual a la transmisión como se ve en la figura 5.7a. Esta contribución está limitada por la naturaleza de mitad de fermión de los Majorana [45, 46], resultando en un máximo $T_{MAX} = 0{,}25$ para la transmisión directa. La presencia de modos de Majorana rompe la interferencia destructiva perfecta del interferómetro, permitiendo un canal de transmisión residual independiente del flujo magnético.

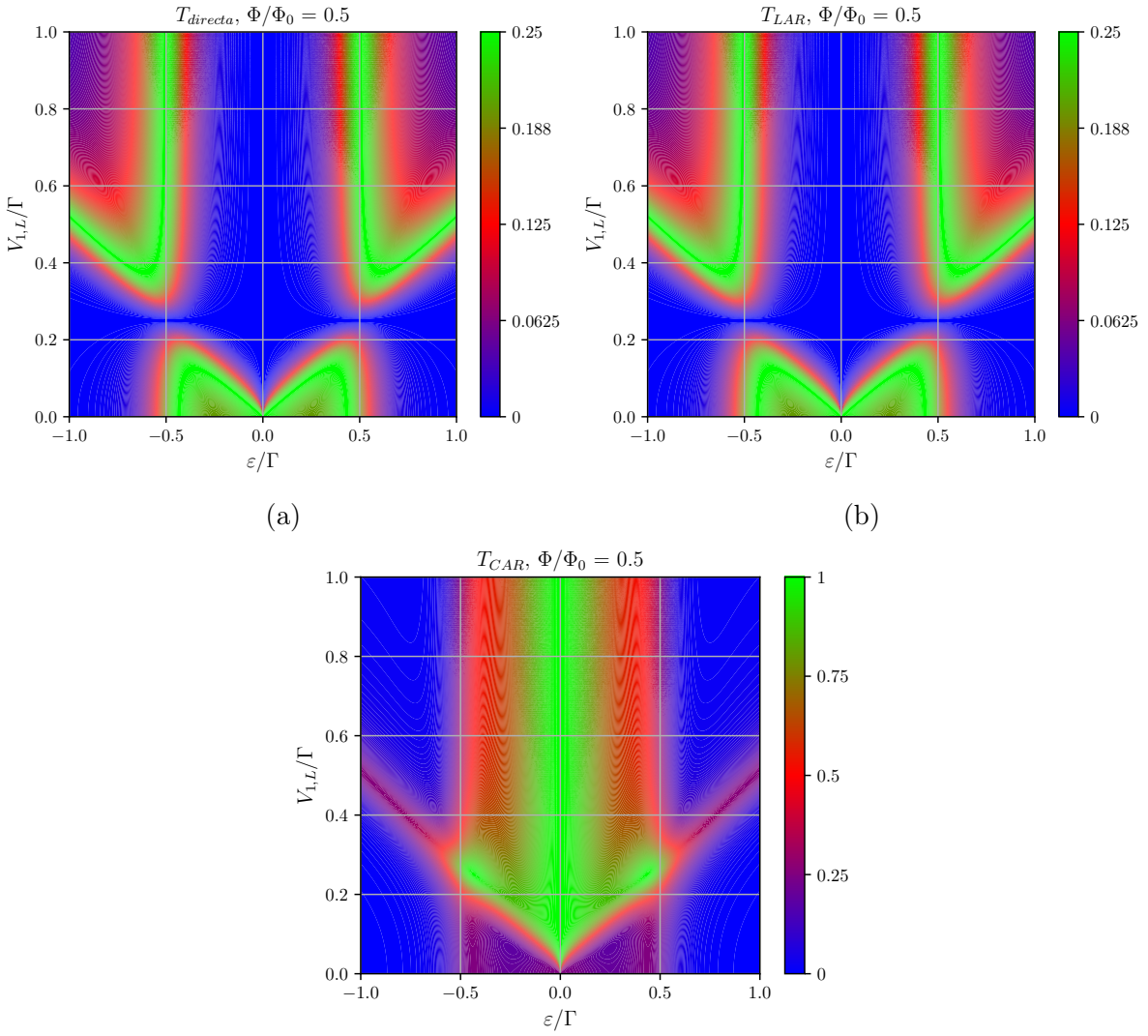


Figura 5.7: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que preseneta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

Se puede apreciar en las figuras 5.7b y 5.7c que los procesos de Andreev también contribuyen a la transmisión cuando el flujo es $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$. La LAR es exactamente igual que la transmisión directa por los mismos argumentos antes mencionados; pero es importante destacar que la contribución de la CAR es significativa, teniendo un máximo de $T_{MAX} = 1$. Esto se produce porque, para este valor de flujo magnético, lo que domina

es la reflexión. Por ende, la mayoría de electrones y huecos del contacto izquierdo no llegan al contacto derecho. En cambio, a través del mecanismo de la CAR mostrado en la figura 3.1c, se reflejan huecos en el mismo contacto derecho, los cuales son los que se miden en la figura 5.7c.

A partir de los tres procesos de transmisión, se calculan la corriente y el shot noise del sistema de la manera descrita en 3.5 y 3.11. En la figura 5.8 se dispone del gráfico para el sistema que corresponde al interferómetro desacoplado a las cadenas de Kitaev para distintos valores del flujo magnético. Se puede apreciar que, a medida que se aumenta el flujo, el perfil de la corriente se suprime progresivamente. Esto se produce porque a medida que se aumenta el flujo magnético, la transmisión disminuye, hasta que para el valor crítico de $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ se anula, y la corriente, al ser la integral de esta, lo refleja al disminuir de igual manera, hasta el punto de que también se anula para $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$. De manera diferente, se aprecia que el shot noise no cambia de manera trivial. Esto se genera debido a que el argumento $T(1-T)$ se maximiza cuando $T = 0{,}5$ y toma el valor de 0,25, pero como aún es proporcional a la transmisión, el shot noise también se anula para $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$.

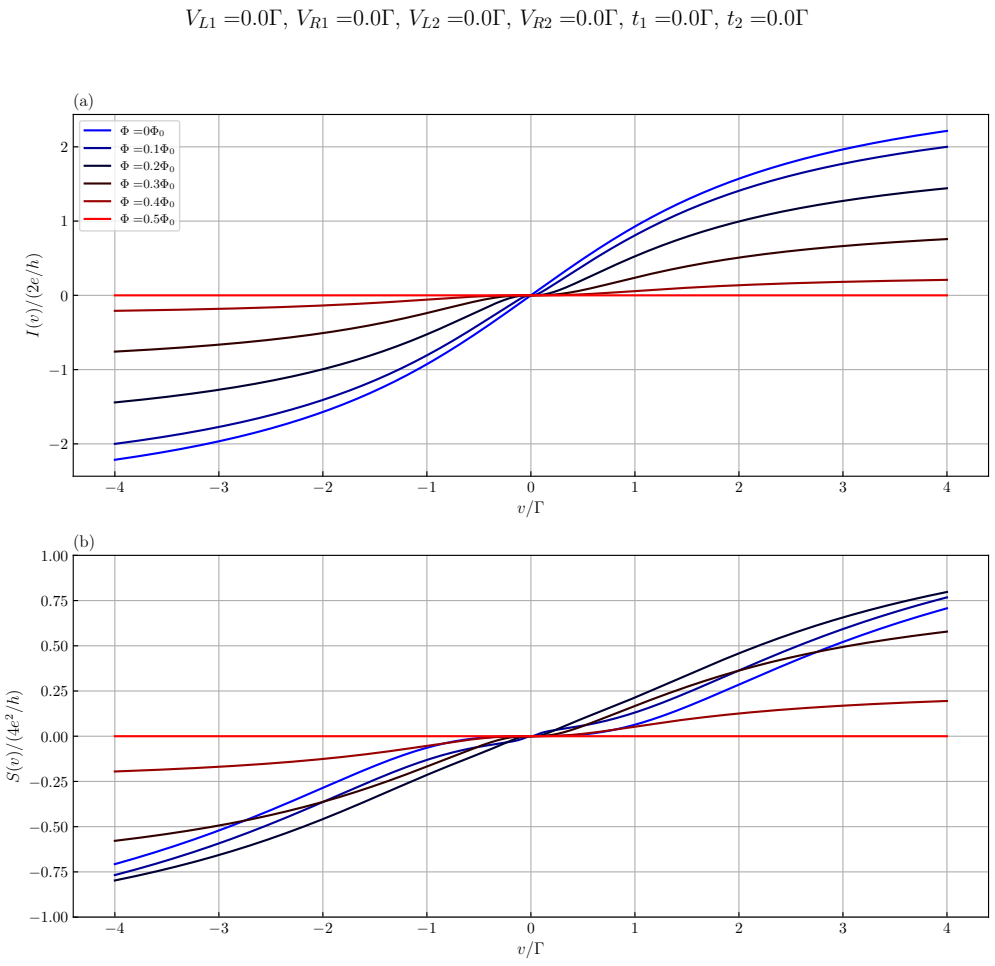


Figura 5.8: (a) Corriente y (b) shot noise del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para un sistema desacoplado a los modos de Majorana.

En el momento en el que se acopla un Majorana al sistema (5.9), se puede notar que los únicos cambios realmente notorios que se aprecian en la corriente es que a medida que se coloca un flujo magnético distinto a cero, la corriente se asimetriza en torno

a $v = 0$, debido a que la transmisión es asimétrica. Otro cambio notable a destacar es que para flujo $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ la corriente es no nula producto de la presencia de modos de Majorana. Por otro lado, el shot noise también presenta los dos cambios recién mencionados, no obstante también se puede apreciar que el shot noise posee cambios de pendiente no triviales en torno a la autoenergía del modo de Majorana.

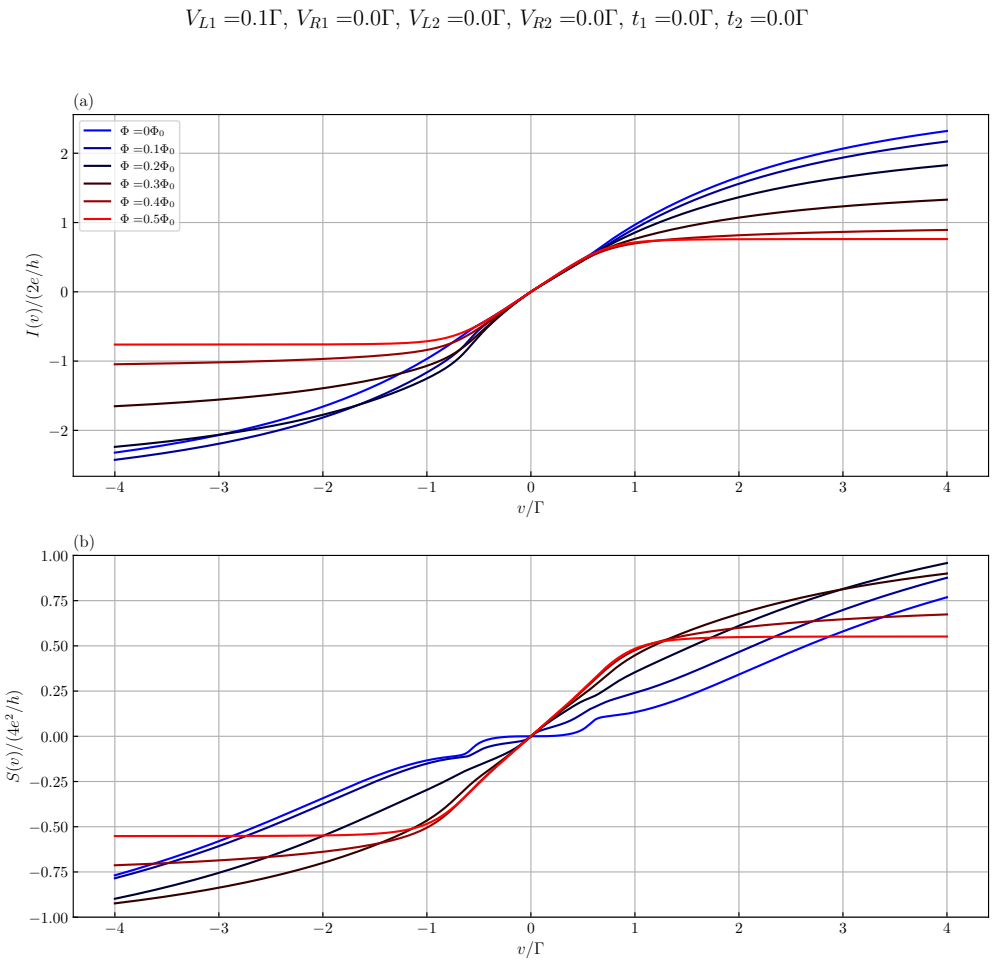


Figura 5.9: (a) Corriente y (b) shot noise del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para un sistema acoplado a un modo de Majorana con valor del acoplamiento $V = 0{,}1\Gamma$.

Al acoplar de manera simétrica el segundo modo de Majorana (5.10), se puede apreciar que tanto la corriente como el shot noise se simetrizan en torno a cero. También se evidencia que ambas cantidades siguen presentando valores distintos de cero cuando se está con flujo $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, y que el shot noise sigue manteniendo estos cambios de pendiente en torno al valor de la autoenergía.

En la figura 5.11 se muestra a la vez la transmisión, la corriente, el shot noise y el factor de Fano, con el fin de comparar este último con el resto de propiedades de transporte. Se observa que para un flujo $\Phi = 0$, el factor de Fano es menor a 1 para toda energía, pero en el momento en el que se rompe la simetría del interferómetro con un flujo magnético distinto a cero, el factor de Fano es $F = 1$ en torno a energía cero. Esto es debido a que la transmisión del sistema presenta una antirresonancia, la cual cae a $T = 0$, hasta el punto que para $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ la transmisión se anula para todo valor de energías. Producto de que tanto la corriente como el shot noise caen a cero en un orden proporcional a T, el límite de la razón entre ellas tiende a la unidad. En la figura

V_{L1} =0.1Γ, V_{R1} =0.0Γ, V_{L2} =0.1Γ, V_{R2} =0.0Γ, t_1 =0.0Γ, t_2 =0.0Γ

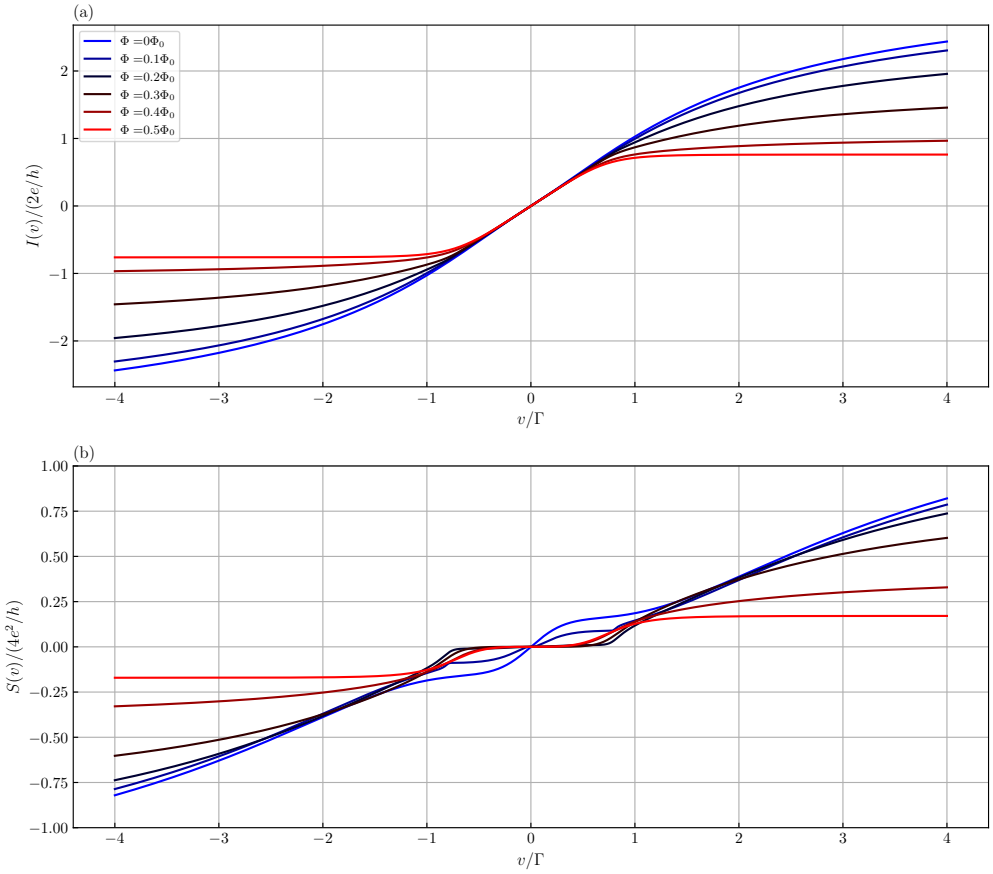


Figura 5.10: (a) Corriente y (b) shot noise del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para un sistema acoplado a dos modos de Majorana con valor del acoplamiento $V = 0{,}1\Gamma$.

se presenta un cuadro en cada panel que grafica las mismas funciones pero en un rango de energías más pequeño, donde se puede apreciar de mejor manera cómo se comportan las propiedades de transporte electrónico en torno a $v \sim 0$.

$$V_{L1} = 0.0\Gamma,\ V_{R1} = 0.0\Gamma,\ V_{L2} = 0.0\Gamma,\ V_{R2} = 0.0\Gamma,\ t_1 = 0.0\Gamma,\ t_2 = 0.0\Gamma$$

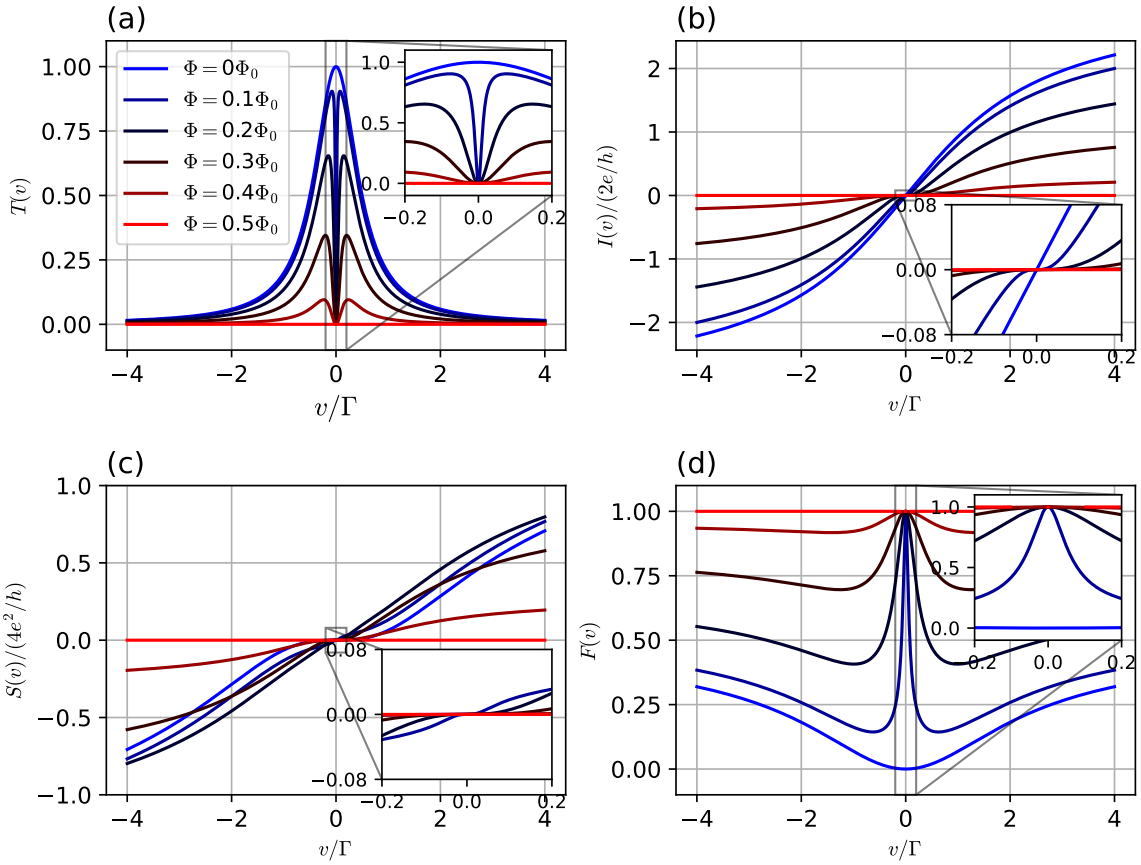


Figura 5.11: (a) Transmisión (directa), (b) corriente, (c) shot noise y (d) factor de Fano del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para el sistema desacoplado a los modos de Majorana. Se puede apreciar que cada panel tiene a su vez un cuadro que presenta un acercamiento alrededor de $v = 0$.

Al acoplar un modo de Majorana (5.12, se aprecia cómo todas las cantidades se asimetrizan en torno a 0 al estar en presencia de un flujo magnético distinto de 0. Se puede observar que al estar en el caso de $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, la transmisión alcanza el valor de $T = 0{,}25$ en torno a energías bajas, y que el factor de Fano exhibe un valor mínimo de $F = 0{,}5$.

Al acoplar un segundo modo de Majorana y recobrar la simetría (5.13, se desprende que ahora el valor de $T(\varepsilon = 0) = 0{,}25$ se da cuando el flujo es nulo, y al estar en presencia de un flujo finito (al igual que en el caso del sistema desacoplado a las cadenas de Kitaev) se obtiene que la transmisión del sistema se anula. Lo anterior tiene consecuencias en el factor de Fano, donde se refleja que este toma el valor de $F(v = 0) = 0{,}5$ en ausencia de flujo magnético, mientras que al estar en presencia del mismo, el factor de Fano se anula.

Si se compara la figura 5.11 con las figuras 5.12 y 5.13, se evidencia inmediatamente una diferencia sustancial: cuando el flujo corresponde a $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, el factor de Fano del sistema al estar desacoplado de cadenas de Kitaev corresponde a $F = 1$ para todo

$$V_{L1} = 0.1\Gamma,\ V_{R1} = 0.0\Gamma,\ V_{L2} = 0.0\Gamma,\ V_{R2} = 0.0\Gamma,\ t_1 = 0.0\Gamma,\ t_2 = 0.0\Gamma$$

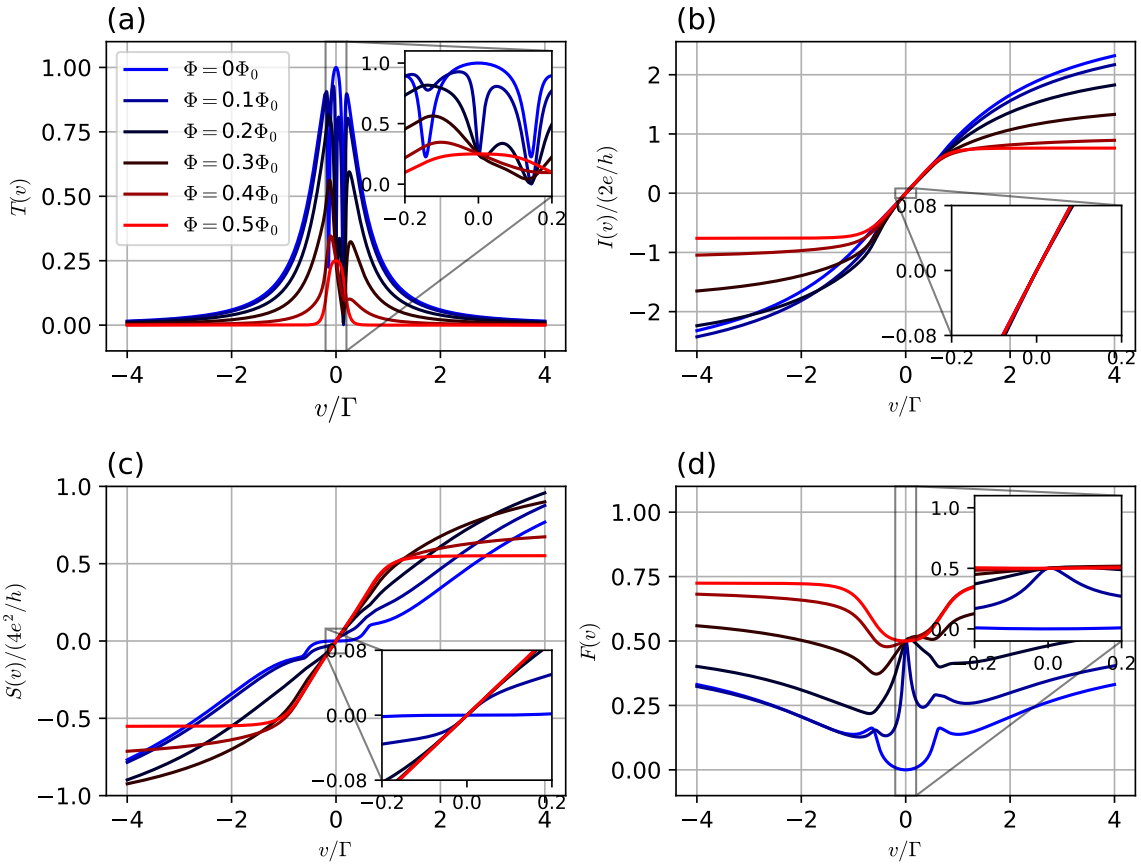


Figura 5.12: (a) Transmisión (directa), (b) corriente, (c) shot noise y (d) factor de Fano del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para un sistema acoplado a un modo de Majorana con valor del acoplamiento $V = 0{,}1\Gamma$. Se puede apreciar que cada panel tiene a su vez un cuadro que presenta un acercamiento alrededor de $v = 0$.

$$V_{L1} = 0.1\Gamma,\ V_{R1} = 0.0\Gamma,\ V_{L2} = 0.1\Gamma,\ V_{R2} = 0.0\Gamma,\ t_1 = 0.0\Gamma,\ t_2 = 0.0\Gamma$$

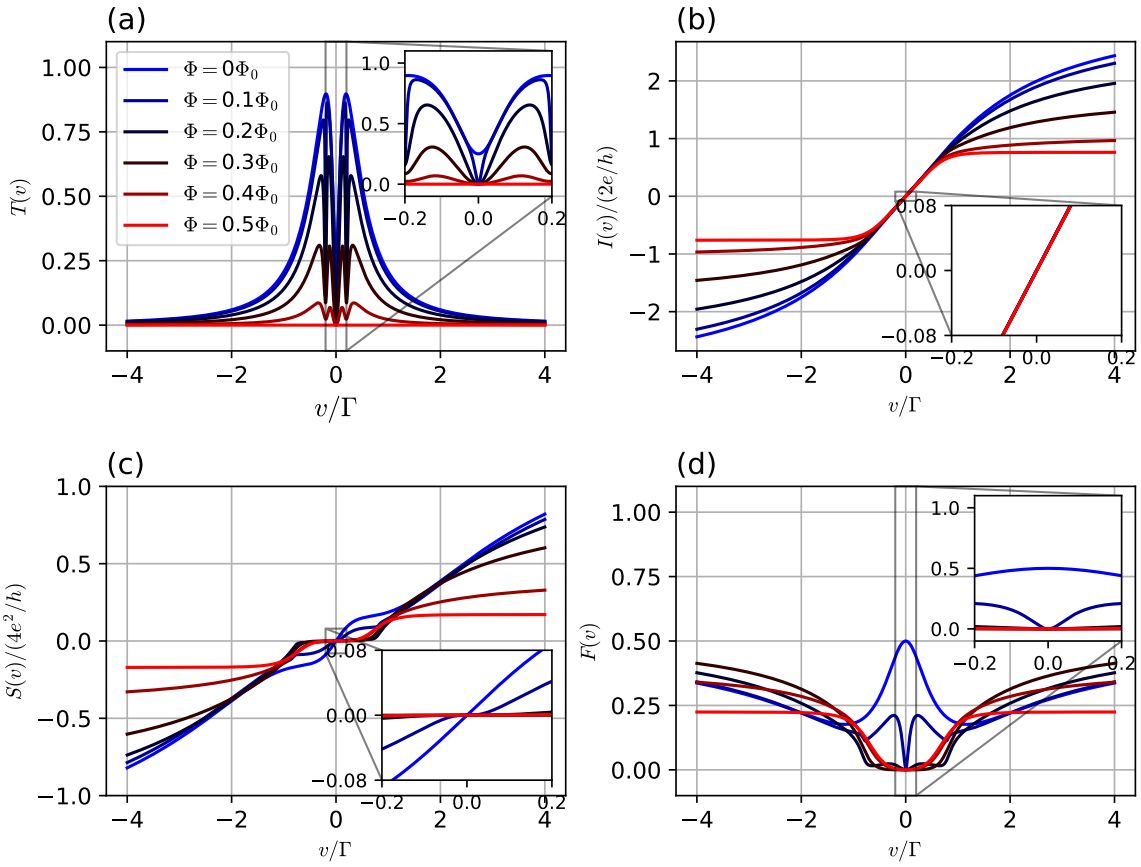


Figura 5.13: (a) Transmisión (directa), (b) corriente, (c) shot noise y (d) factor de Fano del sistema en función de la diferencia de potencial para distintos valores del flujo magnético Φ para un sistema acoplado a dos modos de Majorana con valor del acoplamiento $V = 0{,}1\Gamma$. Se puede apreciar que cada panel tiene a su vez un cuadro que presenta un acercamiento alrededor de $v = 0$.

valor de energías. En cambio, cuando el sistema alberga modos de Majorana, el factor de Fano parece dar cuenta de esto debido a que su estructura presenta cambios importantes. Esto se puede ver reflejado de mejor manera en la figura 5.14, la cual expone tanto la transmisión como el factor de Fano para el sistema considerando distintas configuraciones a flujo $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, es decir, con el sistema albergando distinta cantidad de modos de Majorana. Se puede constatar que para todas aquellas que alberguen uno o más modos de Majorana, la estructura del factor de Fano varía con respecto a la energía, siendo una estructura más o menos compleja según el caso. Bajo estas consideraciones, se puede concluir que el factor de Fano es una herramienta que ayuda a distinguir y caracterizar modos de Majorana, debido que al estar en presencia de estos, el factor de Fano parece robusto a la interferencia destructiva causada por el flujo magnético que atraviesa el interferómetro, mientras que cuando no hay ninguno presente, el factor de Fano corresponde a una constante $F(v) = 1$.

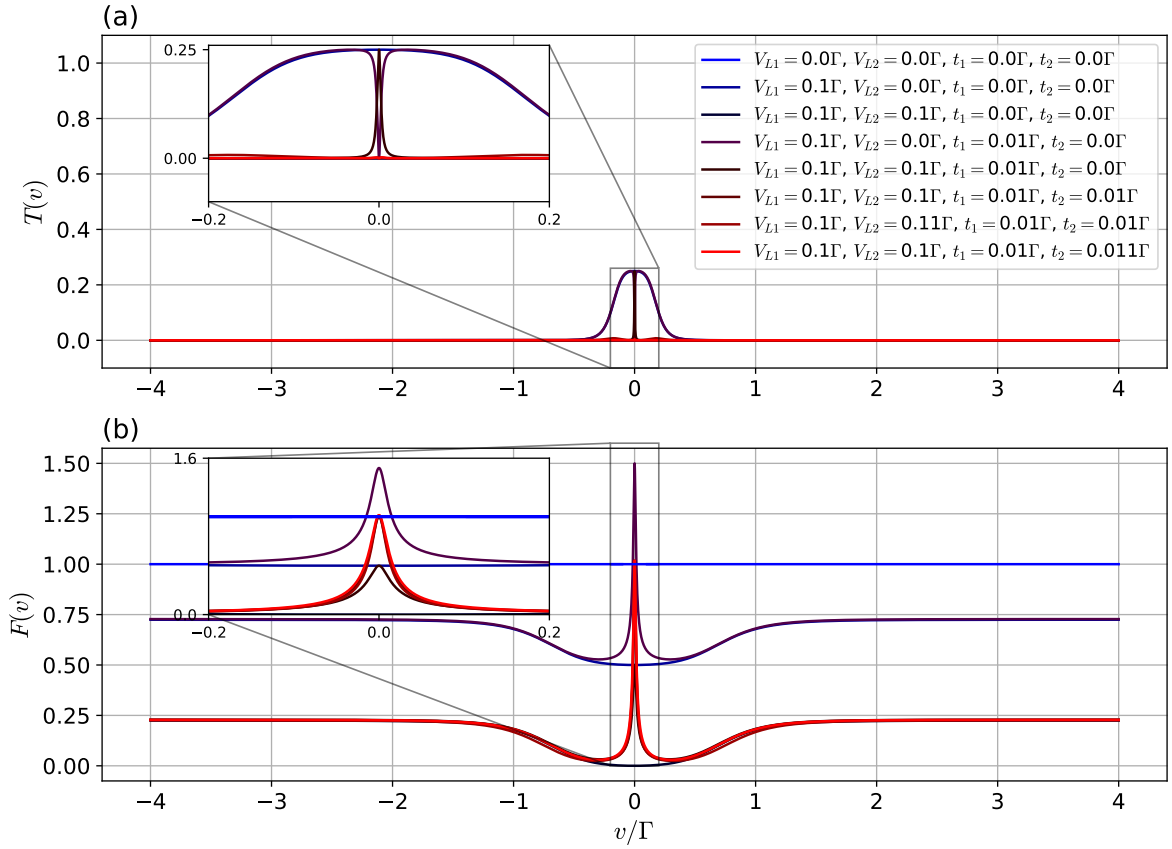


Figura 5.14: (a) Transmisión y (b) factor de Fano en función de v/Γ para un flujo magnético $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$. Se comparan distintas configuraciones de acoplamiento entre los modos de Majorana y el punto cuántico (QD-M), así como el solapamiento entre Majoranas (M-M). Los recuadros interiores (insets) muestran un acercamiento de la región en torno a $v = 0$.

5.2. Trasporte termoeléctrico

En esta sección se considerará que el sistema está a una temperatura distinta de 0. En particular se estimará $T = 1K$. Esto se realiza con el objetivo de poder utilizar el

formalismo de Landauer-Büttiker descrito en 3.14.

Para ejecutar el análisis de las distintas propiedades termoeléctricas, primero se realizará nuevamente un análisis de la transmisión electrónica (directa) del sistema, puesto que el resto de propiedades se calculan a través de la expansión de Sommerfeld (3.16, 3.17, 3.18). Por ello, para el análisis de las distintas propiedades termoeléctricas del sistema, será fundamental el previo análisis de la transmisión del sistema.

La figura 5.15 muestra como se comporta la transmisión del sistema en torno a la energía de Fermi, en específico para el rango de $\mu \in [-0{,}035, 0{,}035]$, así como también para distintas configuraciones del sistema y distintos valores del flujo magnético. De estos gráficos se puede observar algo de gran relevancia: cuando el flujo corresponde a $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ (curvas rojas), la transmisión parece anularse completamente para los sistemas representados en los paneles (a), (c), (f), (g) y (h); más adelante se argumentará por qué esta afirmación no es del todo cierta; de hecho, la transmisión se anula completamente cuando el sistema se acopla de manera simétrica a los modos de Majorana, es decir, en los sistemas representados por los paneles (a), (c) y (f).

Con la transmisión, se puede utilizar la expansión de Sommerfeld para calcular los coeficientes de transporte descritos por 3.16, 3.17 y 3.18. Al hacer esto, se pueden calcular las distintas propiedades de transporte termoeléctrico. La propiedad más simple de calcular es la conductancia eléctrica 3.19, debido a que es proporcional a $\mathcal{L}_0$.

La figura 5.16 muestra distintos gráficos de la conductancia eléctrica en función del potencial químico $\mathcal{G}(\mu)/\mathcal{G}_0$, con $\mathcal{G}_0 = \frac{e^2}{h}$; similar a como se hizo para la figura 5.15. Se advierte que, a simple vista, la conductancia eléctrica no difiere mucho de la transmisión del sistema. Esto se debe a que, para temperaturas lo suficientemente bajas, el término dominante en 3.16 corresponde a la transmisión del sistema $\mathcal{T}^{(0)}$, mientras que los términos de la segunda y cuarta derivada de la transmisión actúan como correcciones debidas a la presencia de temperatura.

Una vez caracterizado cómo se comporta la conductancia eléctrica del sistema, resulta interesante analizar el comportamiento de la conductancia térmica por electrones. Esta última se puede observar en la figura 5.17, donde se exhiben distintos gráficos de la conductancia térmica por electrones en función del potencial químico κ_e/κ_0, donde $\kappa_0 = \frac{\pi^2}{3h} k_b^2 T$. La figura se muestra para distintas configuraciones del sistema y para distintos valores del flujo magnético, similar a lo hecho en la figura 5.15. Lo primero a destacar en esta figura es que, para los casos en los que el interferómetro se acopla de manera simétrica a los modos de Majorana (casos representados en los paneles (a), (c) y (f)), el sistema no presenta conductancia térmica por electrones cuando el flujo magnético corresponde a $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$. Esto se debe a que la transmisión (y por consecuencia también sus derivadas), para estos casos se anula, haciendo que la razón $\mathcal{L}_1^2/\mathcal{L}_0$ se indetermine. Por otro lado, en la figura se evidencia que, aunque la conductancia térmica es parecida a la transmisión o a la conductancia eléctrica, no son exactamente iguales. Se observa que la conductancia térmica presenta diferencias claras con respecto a las propiedades anteriores en torno a $\mu = 0$. Se aprecia un máximo local en la conductancia térmica en energías donde la transmisión presenta mínimos, lo cual se verifica de mejor manera en los paneles (d), (f), (g) y (h).

Por otro lado, se puede calcular el coeficiente de Seebeck, el cual se observa en la figura 5.18, donde se grafica en función del potencial químico $S(\mu)/S_0$, con $S_0 = k_b/e$. Debido a que el coeficiente de Seebeck se calcula como la razón entre $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_0$, se puede notar en la figura 5.18 que ocurre lo mismo que para la conductancia térmica, es decir, la curva roja no aparece para los paneles (a), (c) y (f). En los paneles (g) y (h) se aprecia que el sistema presenta un coeficiente de Seebeck no trivial, incluso cuando el sistema parecía no tener transmisión como se visualizó en la figura 5.15. Adicionalmente,

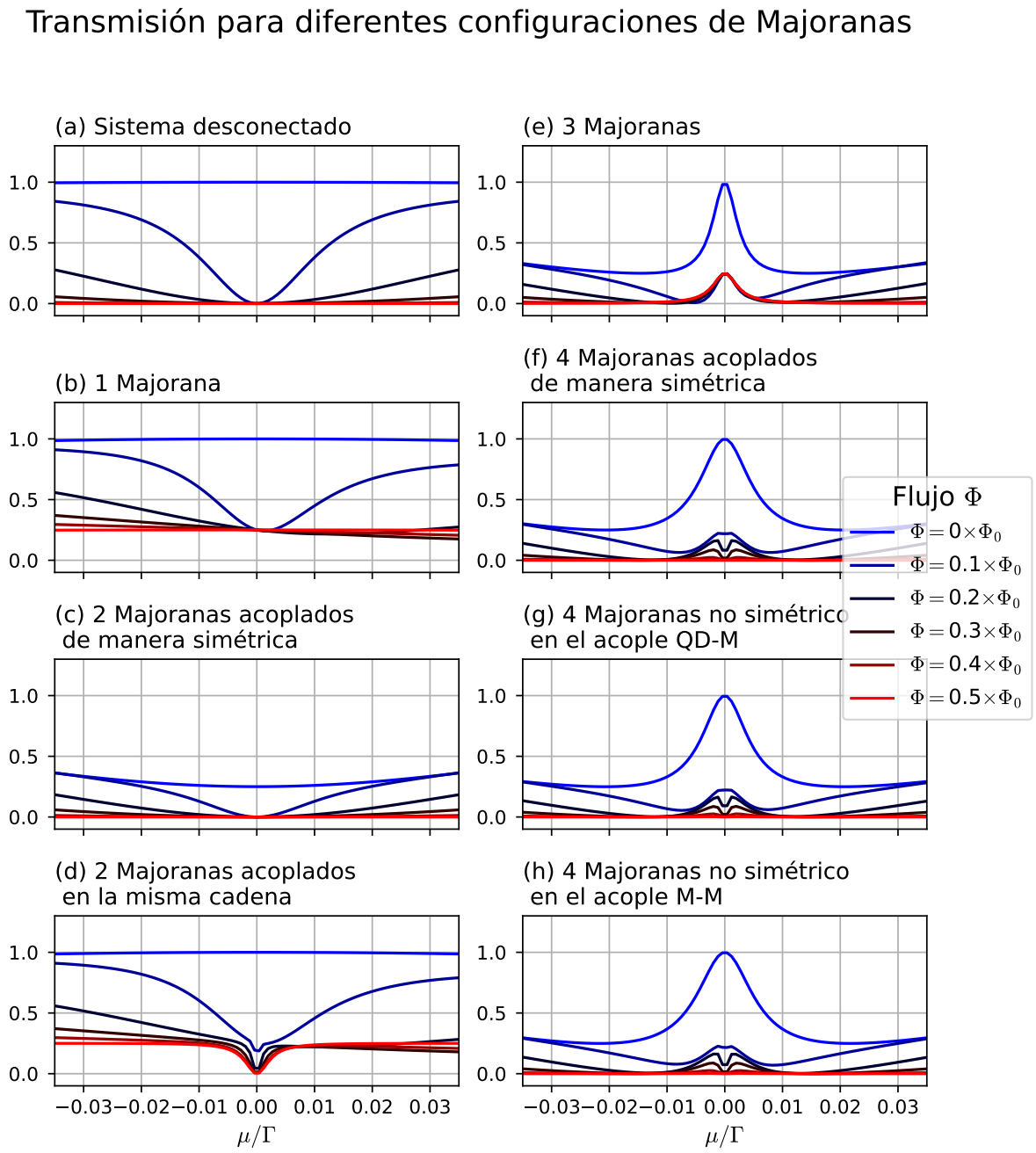


Figura 5.15: Transmisión del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$

.

Conductancia eléctrica para diferentes configuraciones de Majoranas

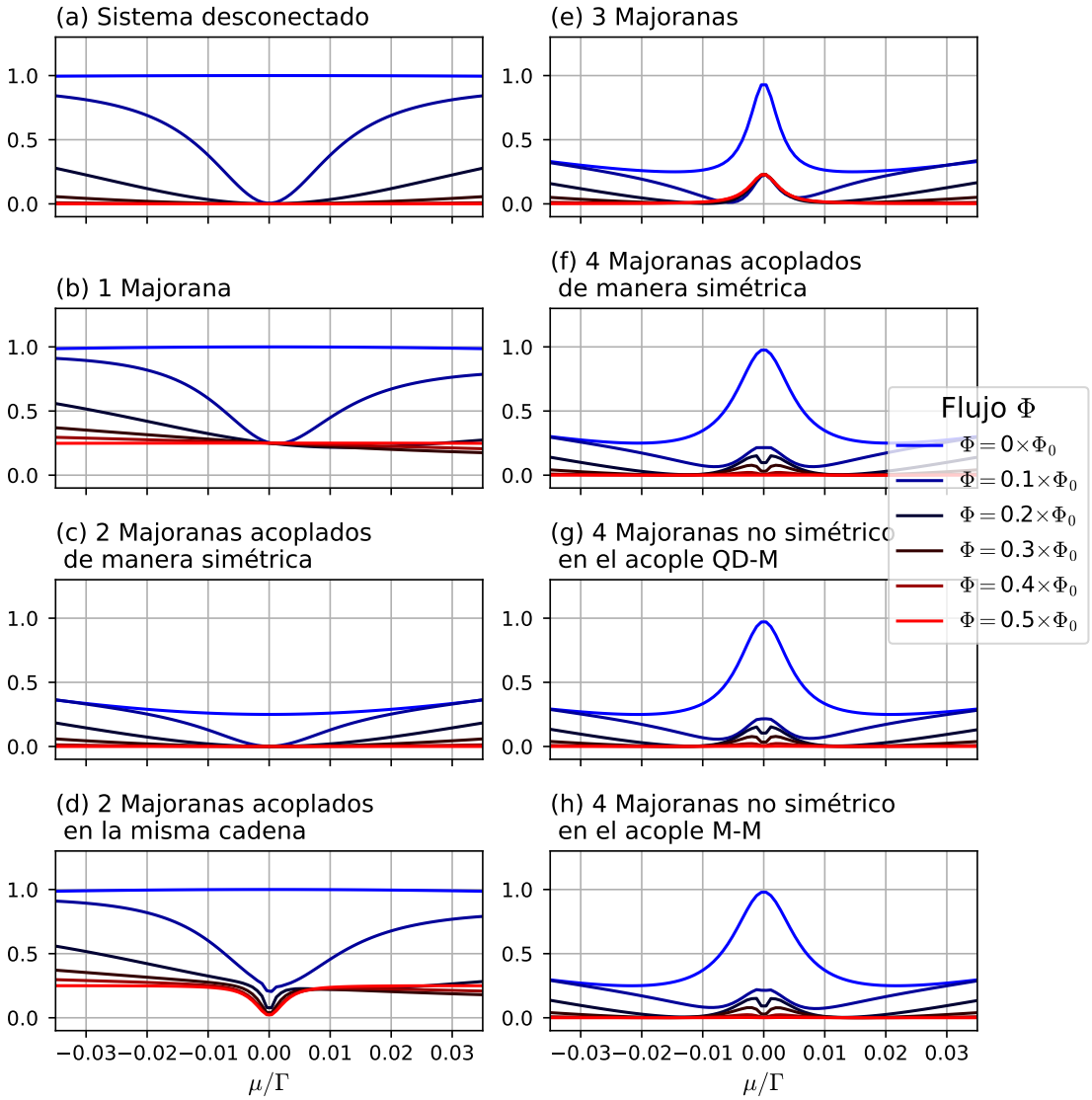


Figura 5.16: Conductancia eléctrica del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$.

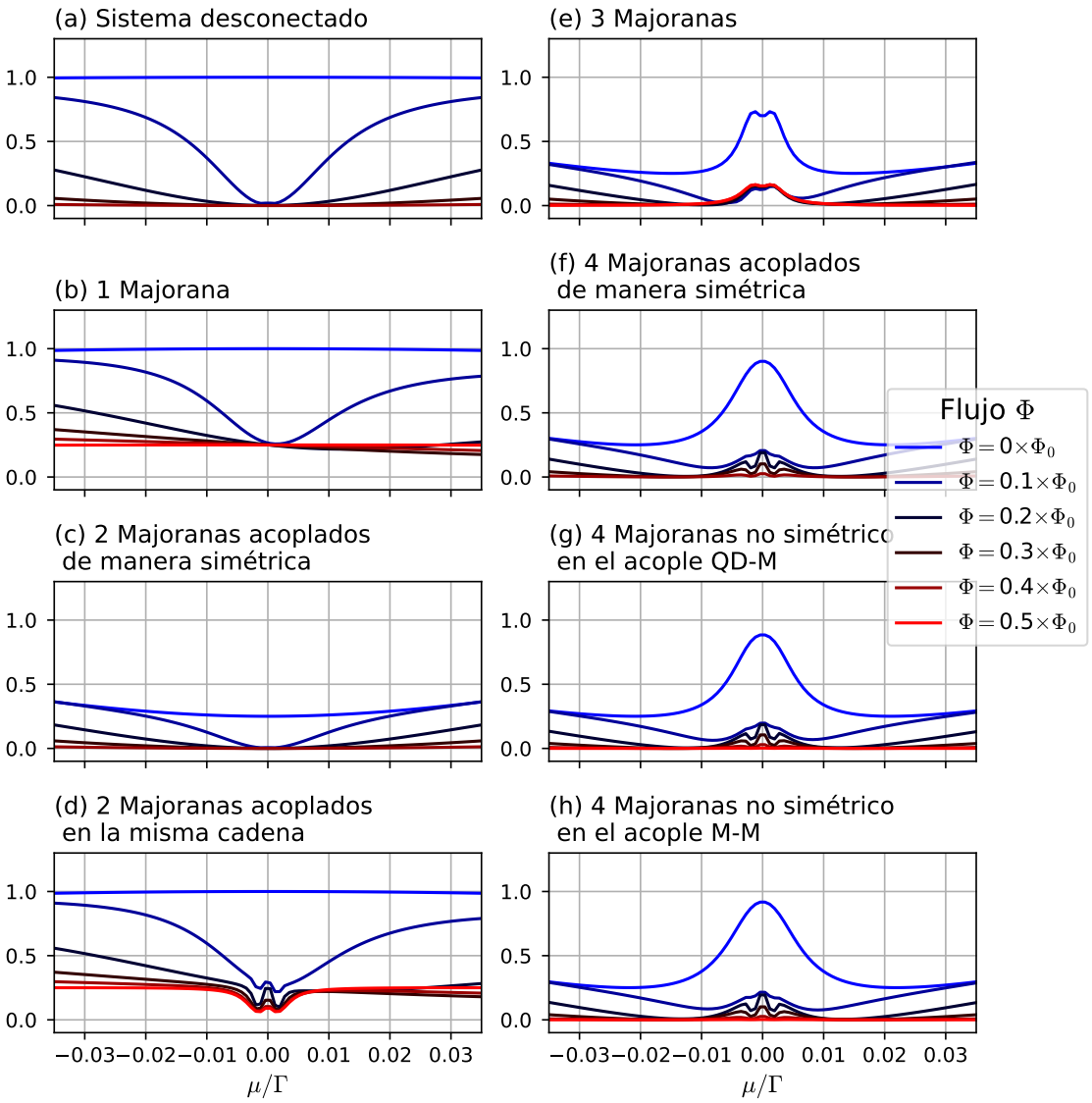


Figura 5.17: Conductancia térmica del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$.

se observa que el sistema muestra valores del coeficiente de Seebeck notables únicamente cuando se rompe la simetría del interferómetro por el flujo Aharonov-Bohm. En estas condiciones, el sistema desarrolla una respuesta termoeléctrica finita, la cual se controla mediante parámetros externos a este, como es el flujo magnético.

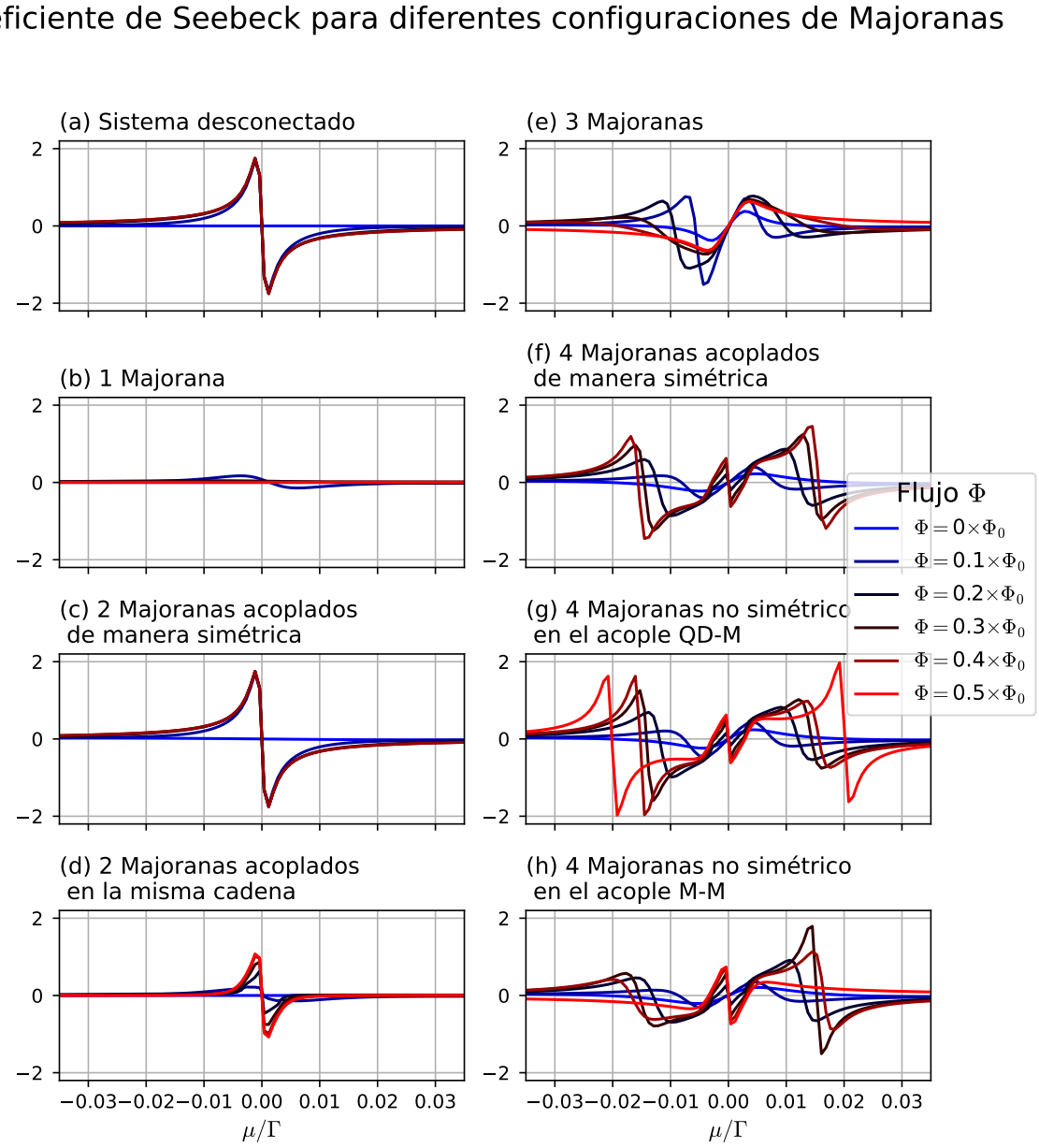


Figura 5.18: Coeficiente de Seebeck del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$.

Adicionalmente, se calculó la figura de mérito ZT. Esta se observa en la figura 5.19, donde se graficó en función del potencial químico $ZT(\mu)$ para distintas configuraciones del sistema y para distintos valores de flujo magnético. Se puede advertir nuevamente que la curva roja no aparece en los paneles (a), (c) y (f) debido a los mismos motivos mencionados anteriormente. Al observar la figura de mérito y compararlo con el coeficiente de Seebeck, se evidencia que coincide con lo esperado: el sistema presenta alta

eficiencia termoeléctrica cuando se maximiza el valor del coeficiente de Seebeck.

Por último, se analizará qué ocurre con la ley de Wiedmann-Franz en el sistema. La ley de Wiedmann-Franz indica que la razón entre la conductividad térmica y la conductancia eléctrica es proporcional a la temperatura, de la forma $LT = \kappa/\mathcal{G}$. En la figura 5.20 se muestra el comportamiento del número de Lorenz (en unidades de L_0) para distintas configuraciones del sistema y para distintos valores de flujo magnético. Se aprecia nuevamente que la curva roja no aparece en los paneles (a), (c) y (f) debido a los mismos motivos mencionados anteriormente. Es relevante destacar que el sistema expone desviaciones significativas respecto al valor universal L_0 a medida que la simetría del interferómetro se rompe; por el contrario, cuando el flujo magnético es nulo, se cumple la ley de Wiedmann-Franz. La línea negra segmentada que se exhibe en todos los paneles corresponde al valor máximo que alcanza el número de Lorenz $L_{max} = 4{,}19L_0$. Dado que el número de Lorenz se calcula como la razón entre conductancias y comparando los puntos en los que las desviaciones de L_0 alcanzan el valor máximo con las conductancias térmicas y eléctricas, se puede añadir que la violación de la ley de Wiedmann-Franz ocurre debido a las diferencias que hay entre la conductancia térmica con la conductancia eléctrica, esto se puede apreciar de mejor manera en la figura 5.21. donde se advierte que el motivo de la violación de la ley corresponde a que la conductancia térmica presenta máximos donde la conductancia eléctrica presenta mínimos.

Se evidencian dos eventos importantes en los gráficos del coeficiente de Seebeck 5.18, de la figura de mérito 5.19 y la razón entre conductancias 5.20. El primero es que el sistema puede presentar una respuesta termoeléctrica no trivial cuando el flujo corresponde a $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$ (curva roja). Este hecho resulta interesante ya que se conoce que, al estar en ausencia de modos de Majorana, el sistema entra en la fase de reflexión total, por lo que se concluye que si existe una respuesta en el transporte termoeléctrico para este valor del flujo magnético, debe ser producto de algo externo al interferómetro (en este caso, los modos de Majorana). El segundo evento que se advierte es que el transporte termoeléctrico no trivial del sistema parece tener como requisito obligatorio la presencia de un flujo magnético no nulo, lo cual se puede deducir al observar la curva azul en cada uno de los gráficos, y notar que la eficiencia del sistema es baja, el coeficiente de Seebeck es bajo al compararlo con otras curvas y no se viola la ley de Wiedmann-Franz, por lo que da la impresión que para obtener una respuesta termoeléctrica finita en el sistema es imprecindible que se rompa la simetría del interferómetro (en este caso, a través de la presencia de un flujo magnético).

Con tal de comprobar con lo propuesto anteriormente, se realizaron mapas de contorno tanto para el coeficiente de Seebeck, la figura de mérito y para el número de Lorenz en función de una de las energías de acoplamiento QD-M y la energía del sistema, considerando que el otro QD se acopla con una energía de $V_2 = 0{,}25\Gamma$, y que las energías de acople M-M fuesen no simétricas, siendo estas $t_1 = 0{,}1\Gamma$ y $t_2 = 0{,}06\Gamma$. Se realizaron dos mapas de contorno para cada una de estas propiedades: uno considerando un valor de $\Phi = 0 \times \Phi_0$ y otro considerando un valor del flujo de $\Phi = \frac{1}{3} \times \Phi_0$. Se puede advertir que en ausencia de campo magnético (Figuras 5.22a, 5.22b y 5.22c) el sistema presenta un número de Lorenz que coincide con la ley de Wiedemann-Franz, mientras que el coeficiente de Seebeck y el ZT obtienen valores muy bajos ($0{,}1S_0$ y 10^{-5} respectivamente), reflejando una mala eficiencia termoeléctrica. En el caso contrario, es decir, cuando se está en presencia de un campo magnético finito (Figuras 5.23a, 5.23b y 5.23c) se obtiene que el sistema presenta una alta eficiencia termoeléctrica, a través de valores considerables del coeficiente de Seebeck y un valor máximo de ZT de aproximadamente 0.74. Adicionalmente, el gráfico del número de Lorenz indica que al romper la simetría del interferómetro, el sistema vuelve a violar la ley de Wiedemann-Franz.

Figura de mérito para diferentes configuraciones de Majoranas

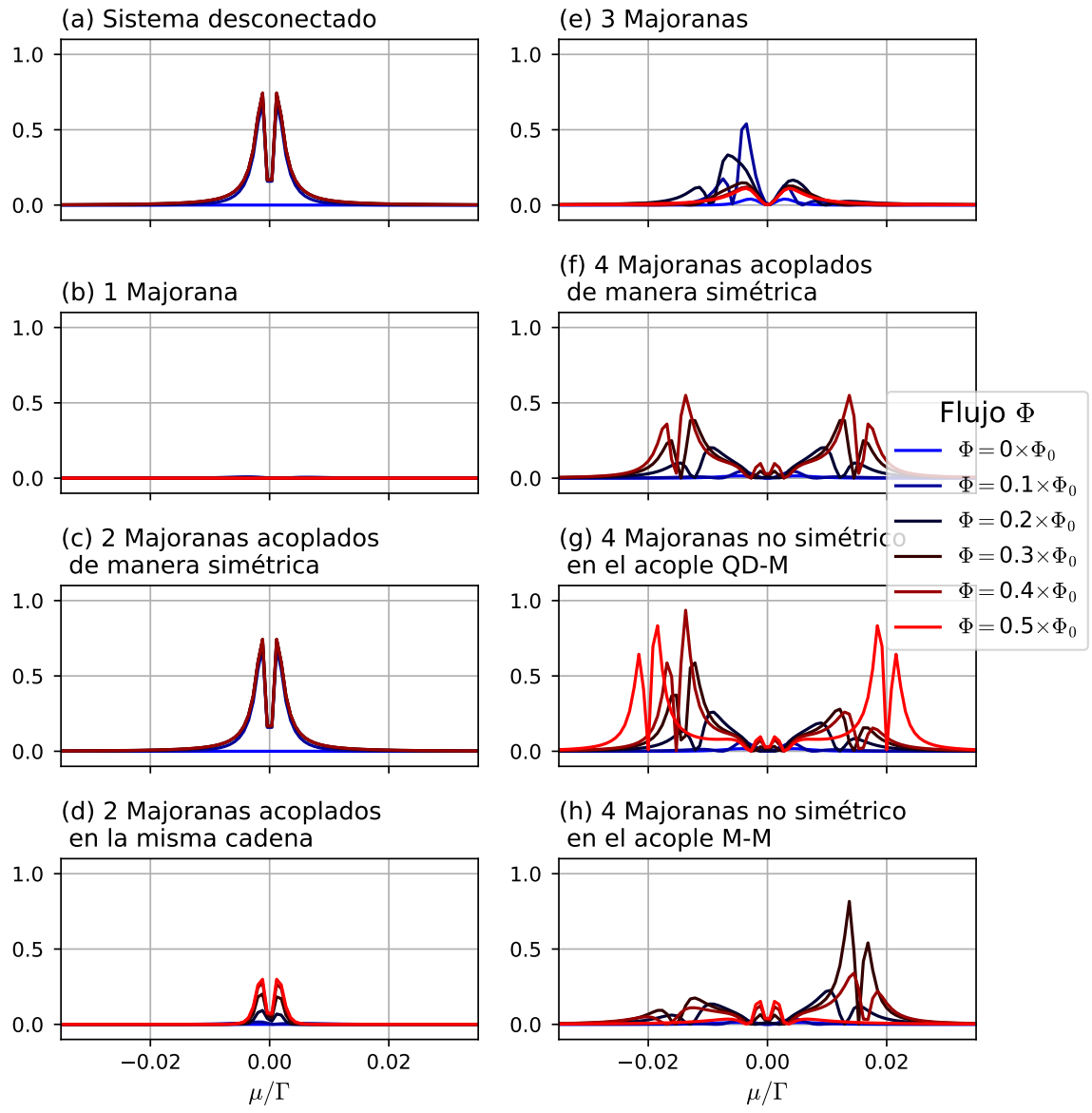


Figura 5.19: Figura de mérito del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$.

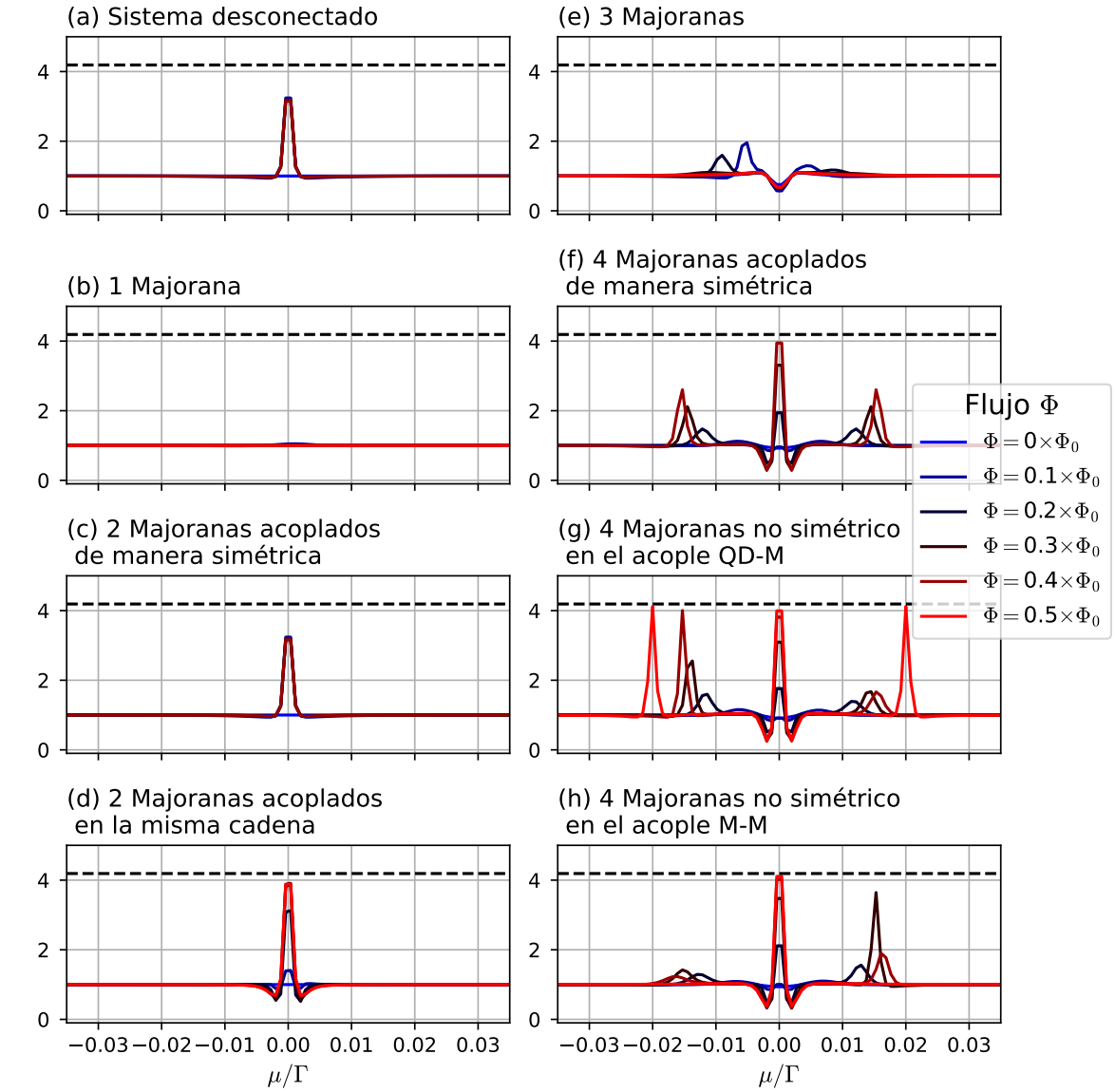


Figura 5.20: Número de Lorenz del sistema vs. potencial químico μ para distintos valores de flujo Φ. (a) Sistema desacoplado. Paneles (b-h) muestran el acoplamiento a distintos modos de Majorana (MBS): (b) un MBS, (c) dos MBS en cadenas distintas, (d) dos MBS en la misma cadena. (e) Tres MBS y (f) cuatro MBS en configuración simétrica. Los paneles (g) y (h) presentan asimetrías en los acoplamientos QD-M ($V_2 = 0{,}11\Gamma$) y M-M ($t_2 = 0{,}011\Gamma$), respectivamente. Salvo indicación contraria, $V = 0{,}1\Gamma$ y $t = 0{,}01\Gamma$.

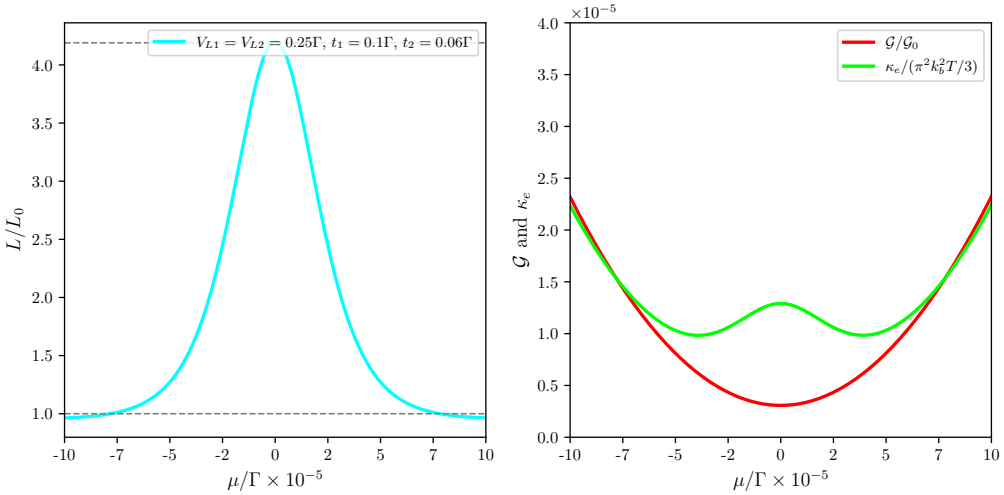


Figura 5.21: Número de Lorenz (izquierda) y una comparación entre la conductancia eléctrica y térmica (derecha) en torno a la energía de Fermi.

En conjunto, los resultados muestran que la combinación de interferometría Aharonov–Bohm, puntos cuánticos y cadenas de Kitaev da lugar a un comportamiento de transporte altamente no trivial. La ruptura controlada de simetrías mediante el flujo magnético permite acceder a regímenes de alta eficiencia termoeléctrica y revela firmas claras de la presencia de modos de Majorana. Estos hallazgos refuerzan el potencial del transporte termoeléctrico como una herramienta complementaria para la detección y caracterización de estados topológicos en sistemas superconductores.

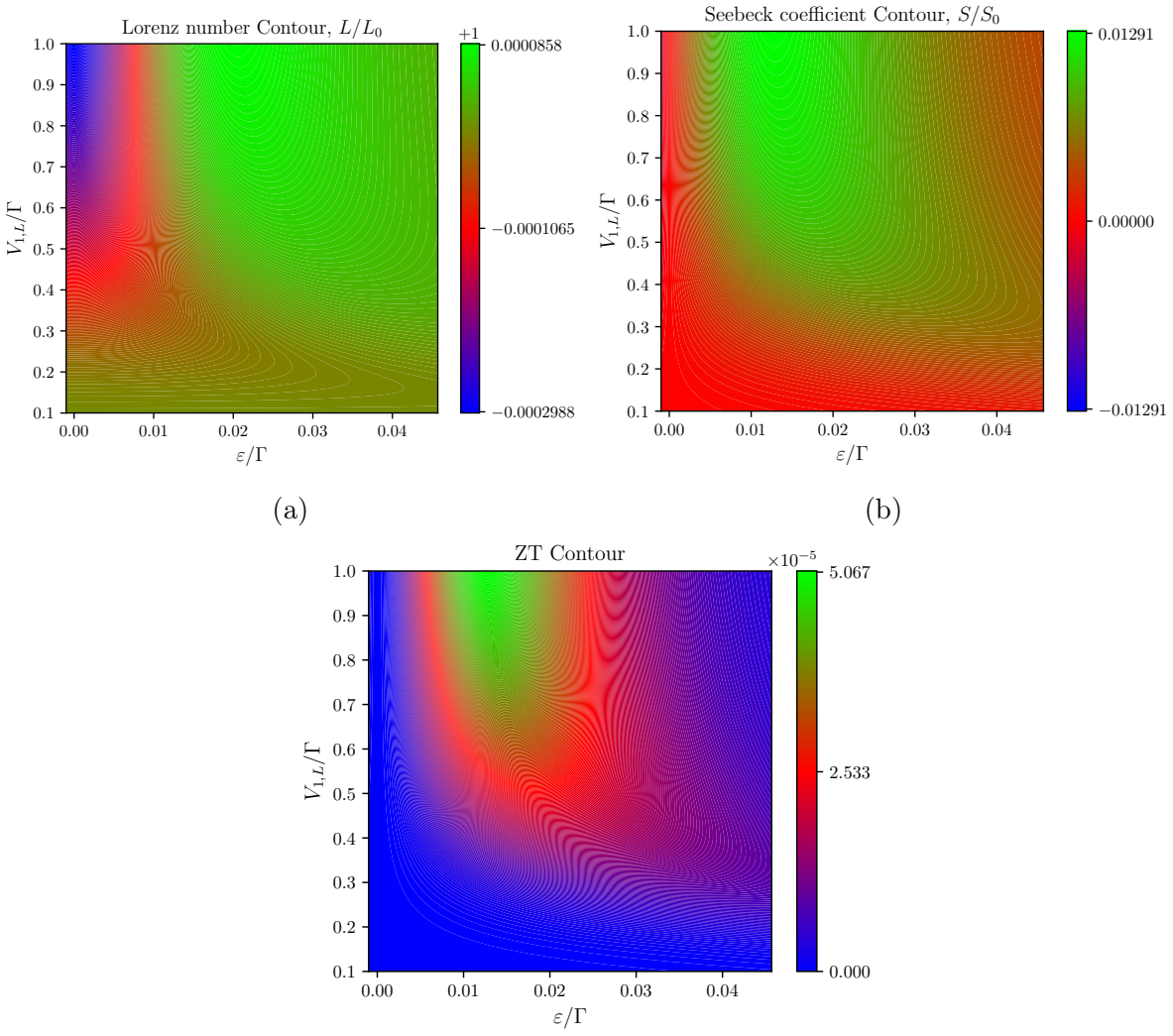


Figura 5.22: Gráficos de contorno para (a) el número de Lorenz, (b) el coeficiente de Seebeck y (c) la figura de mérito en función de la energía y el acoplamiento QD-M. Se consideran valores de $V_{L,2} = 0{,}25\Gamma$, $t_1 = 0{,}1\Gamma$, $t_2 = 0{,}06\Gamma$ y $\Phi = 0 \times \Phi_0$. Se advierte que para todo valor de energías e independiente del valor de $V_{L,1}$, el sistema no presenta una respuesta termoeléctrica interesante, con valores del coeficiente de Seebeck y ZT bajos, y sin violar la ley de Wiedmann-Fanz.

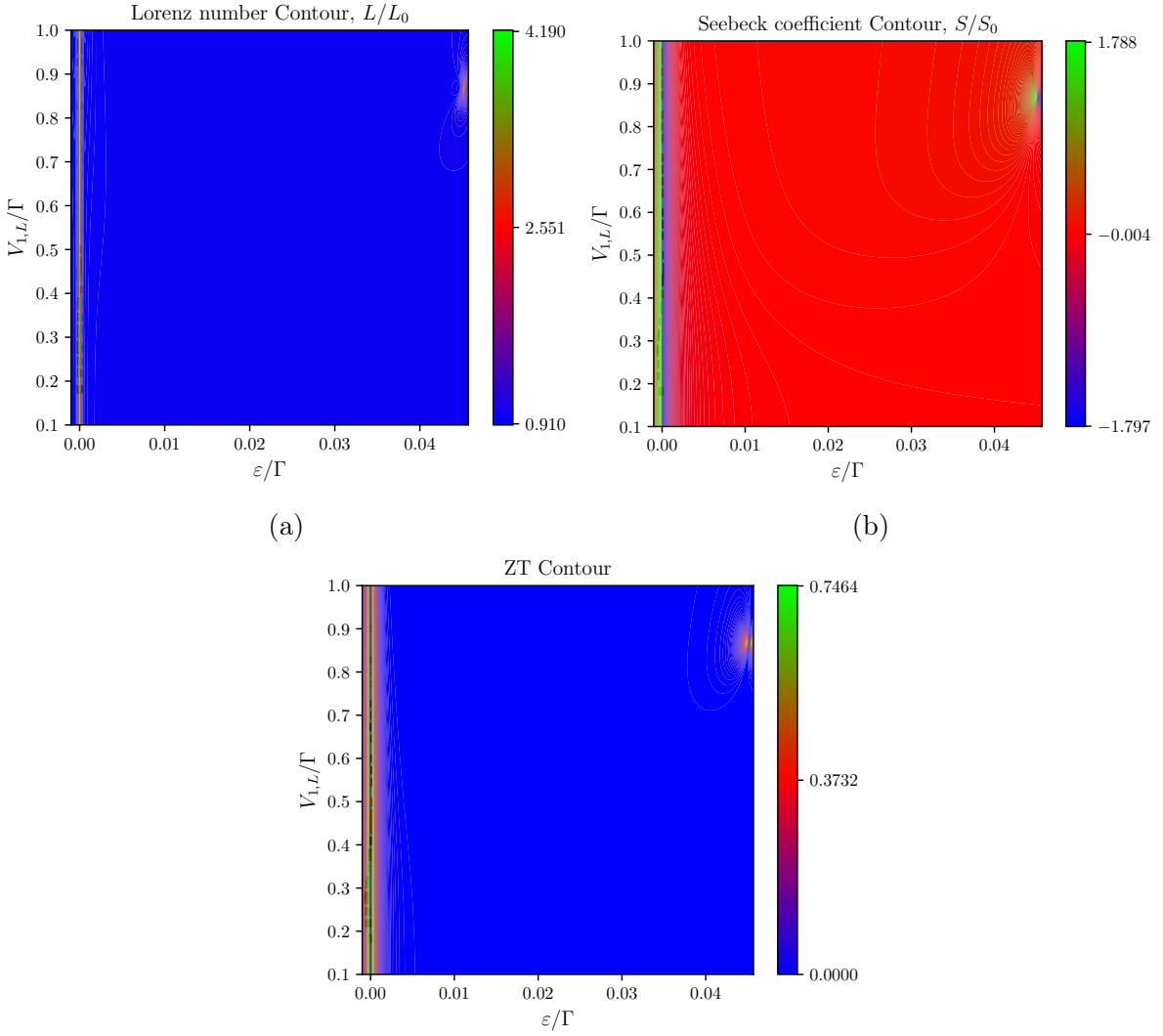


Figura 5.23: Gráficos de contorno para (a) el número de Lorenz, (b) el coeficiente de Seebeck y (c) la figura de mérito en función de la energía y el acoplamiento QD-M. Se consideran valores de $V_{L,2} = 0{,}25\Gamma$, $t_1 = 0{,}1\Gamma$, $t_2 = 0{,}06\Gamma$ y $\Phi = \frac{1}{3} \times \Phi_0$. Para las tres propiedades se evidencia que el sistema presenta una respuesta termoeléctrica no trivial, exponiendo una alta eficiencia que se ve reflejada en valores altos del coeficiente de Seebeck y de la figura de mérito alrededor de $\varepsilon \sim 0$ y, además, violando la ley de Wiedmann-Franz en estas mismas energías.

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo de tesis, se estudiaron las propiedades de transporte electrónico y termoeléctrico de un sistema mesoscópico compuesto por dos puntos cuánticos conectados en paralelo entre contactos metálicos normales, formando un interferómetro tipo Aharonov–Bohm, y acoplados localmente a cadenas de Kitaev que albergan estados ligados de Majorana. El objetivo principal fue analizar cómo la interferencia cuántica y la superconductividad topológica influyen en las respuestas de transporte y en la eficiencia termoeléctrica del sistema, así como evaluar el potencial de estas propiedades como herramientas para la caracterización de modos de Majorana.

A partir del Hamiltoniano escrito en segunda cuantización, se utilizó el formalismo de funciones de Green fuera del equilibrio y el método de ecuación de movimiento para obtener expresiones analíticas de las funciones de Green de los puntos cuánticos. Estas permitieron obtener la transmisión electrónica y las distintas contribuciones al transporte, incluyendo procesos de transmisión directa y reflexiones de Andreev. A partir de estas cantidades se calcularon la corriente, el shot noise y el factor de Fano, así como las propiedades termoeléctricas del sistema en el régimen de respuesta lineal. La implementación numérica se llevó a cabo bajo la aproximación de banda ancha, y para el cálculo de propiedades termoeléctricas, en el régimen de baja temperatura, empleando la expansión de Sommerfeld para evaluar los coeficientes de transporte de manera controlada. Mientras que para el cálculo de propiedades de transporte electrónico se consideró el sistema a temperatura cero.

Los resultados muestran que la presencia de modos de Majorana modifica de forma sustancial la estructura espectral y la transmisión electrónica del sistema, introduciendo procesos coherentes de mezcla electrón–hueco que no están presentes en dispositivos convencionales. En combinación con el flujo magnético de Aharonov–Bohm, estos procesos permiten romper la simetría temporal y la simetría electrón–hueco, dando lugar a respuestas termoeléctricas finitas y altamente sensibles a los parámetros del sistema.

Adicionalmente, el estudio de la corriente y del shot noise permitió acceder a información más detallada sobre los mecanismos de transporte en el sistema. En particular, el análisis del factor de Fano evidenció desviaciones respecto del comportamiento esperado para sistemas en ausencia de modos de Majorana, lo que refleja la presencia de procesos de reflexión de Andreev y la naturaleza híbrida electrón–hueco inducida por los modos de Majorana. Estos resultados muestran que el shot noise constituye una herramienta complementaria y altamente sensible para la caracterización de excitaciones topológicas, permitiendo distinguir de manera más robusta entre estados de Majorana y otras posibles contribuciones espectrales. Los resultados muestran que la presencia de modos de Majorana introduce modificaciones profundas en los mecanismos de transporte. En particular, se observa que, en ausencia de acoplamiento a Majoranas, tanto la corriente

como el shot noise se anulan cuando el flujo magnético corresponde a $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, como consecuencia de interferencia destructiva en el interferómetro. Sin embargo, al acoplar modos de Majorana, esta cancelación deja de ocurrir: tanto la corriente como el ruido permanecen finitos para todo valor del flujo magnético, lo que indica que los canales de transporte mediados por los estados de Majorana no pueden ser completamente suprimidos por interferencia. Este resultado pone de manifiesto el carácter robusto de estos modos y su contribución al transporte.

En este contexto, el análisis del shot noise permitió acceder a información más detallada sobre la naturaleza estadística del transporte. Mientras la corriente promedio describe el flujo neto de carga, el ruido refleja las fluctuaciones asociadas a la naturaleza probabilística de los procesos de transmisión, siendo particularmente sensible a la presencia de correlaciones y a la mezcla electrón–hueco inducida por superconductividad.

Una de las principales conclusiones de este trabajo es el rol del factor de Fano como herramienta de diagnóstico. En ausencia de modos de Majorana, se encontró que para el valor de flujo magnético $\Phi = 0{,}5 \times \Phi_0$, el factor de Fano toma el valor de $F = 1$ para todo el rango de energías considerado. Este comportamiento es consistente con un proceso de transporte efectivamente no correlacionado, donde las fluctuaciones siguen una estadística de tipo Poissoniano.

En contraste, en presencia de modos de Majorana, el factor de Fano presenta una dependencia no trivial con la energía, cuya forma funcional depende además del número de modos acoplados al sistema. En ningún caso se observa un valor constante $F = 1$ en todo el espectro energético. Esta desviación respecto del comportamiento Poissoniano refleja la aparición de correlaciones cuánticas y procesos de transporte no convencionales, asociados a la naturaleza híbrida electrón–hueco de los estados de Majorana.

Estos resultados indican que valores constantes del factor de Fano, particularmente $F = 1$, pueden interpretarse como característicos de transporte convencional bajo condiciones de interferencia específicas, mientras que una dependencia energética no trivial del factor de Fano constituye un indicador robusto de la presencia de excitaciones no triviales. En este sentido, el factor de Fano emerge como una herramienta especialmente útil para distinguir entre sistemas con y sin modos de Majorana, complementando la información obtenida a partir de la conductancia y otras magnitudes de transporte.

Por otra parte, se encontró que el sistema puede alcanzar una alta eficiencia termoeléctrica en regímenes donde la interferencia cuántica suprime selectivamente el transporte de calor sin afectar de manera significativa el transporte de carga. Este comportamiento se refleja en valores elevados de la figura de mérito termoeléctrica ZT, destacando el papel de la interferencia Aharonov–Bohm como un mecanismo de control efectivo de la función de transmisión.

Asimismo, se observó una violación de la ley de Wiedemann–Franz en presencia de flujo magnético y acoplamiento a modos de Majorana. Esta violación evidencia la separación entre los mecanismos responsables del transporte eléctrico y térmico, reflejando el carácter no convencional del transporte en superconductores topológicos. En este contexto, el número de Lorenz emerge como una magnitud particularmente útil para distinguir entre regímenes topológicos y no topológicos.

En conjunto, los resultados presentados en esta tesis demuestran que el análisis combinado de las propiedades de transporte electrónico, fluctuaciones cuánticas y propiedades termoeléctricas proporciona un marco integral para la caracterización de sistemas híbridos que albergan modos de Majorana. En particular, el estudio del shot noise, el factor de Fano, la figura de mérito, el coeficiente de Seebeck y el número de Lorenz aporta información complementaria y altamente sensible, permitiendo identificar características del transporte que no son accesibles únicamente a través de la conductancia, reforzando su

valor como observables útiles para determinar si el sistema presenta modos de Majorana.

Como proyecciones futuras, sería interesante extender este estudio incorporando interacciones electrón–electrón en los puntos cuánticos y estudiar trenzado al considerar un flujo magnético dependiente del tiempo. Asimismo, la generalización del modelo a geometrías más complejas o a sistemas multiterminales podría abrir nuevas posibilidades para el control del transporte termoeléctrico y la manipulación de modos de Majorana con miras a aplicaciones en computación cuántica topológica.

Apéndice A

Funciones usadas para obtener la Función de Green

En esta sección se encuentran funciones que fueron utilizadas durante el cálculo de ecuación de movimiento para obtener la función de Green del sistema. No todas las funciones tienen necesariamente un significado físico, ya que algunas se utilizaron solamente para simplificar las expresiones que resultaban. Se procuró que los *nombres* asignados fueran coherentes con las dimensiones físicas, es decir, las cantidades denotadas con $g_{i,j}$ y $f_{i,j}$ son funciones de Green, por ende tienen dimensiones de $1/\varepsilon$ y las cantidades denotadas con ε_m y Σ son energías:

$$\varepsilon_{m1(2)} = \varepsilon - \frac{4t_{1(2)}^2}{\varepsilon + i\eta} + i\eta,$$

$$\Sigma_{ij} = -i\frac{\Gamma_{ij}}{2} = \sum_{\alpha\in\{L,R\}}\sum_{k}\frac{t_{\alpha i}^* t_{\alpha j}}{\varepsilon - \varepsilon_{\alpha k} + i\eta},$$

$$f_{21} = \left(\varepsilon + \varepsilon_2 - \frac{2}{\varepsilon_{m2}}\left(|V_{L2}|^2 + \frac{4t_2}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L2}^* V_{R2}) + |V_{R2}|^2\right) - \Sigma_{22} + i\eta\right)^{-1},$$

$$f_{11} = \left(\varepsilon + \varepsilon_1 - \Sigma_{21} f_{21}\Sigma_{12} - \frac{2}{\varepsilon_{m1}}\left(|V_{L1}|^2 + \frac{4t_1}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L1}^* V_{R1}) + |V_{R1}|^2\right) - \Sigma_{11} + i\eta\right)^{-1},$$

$$g_{21}^{-1} = \varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{2}{\varepsilon_{m2}}\left(|V_{L2}|^2 - \frac{4t_2}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L2}^* V_{R2}) + |V_{R2}|^2\right) - \frac{4f_{21}}{\varepsilon_{m2}^2}(f_{11}\Sigma_{21}f_{21}\Sigma_{12} + 1)(|V_{L2}|^4 + 2\mathrm{Re}(V_{L2}^{*2}V_{R2}^2) + |V_{R2}|^4) - \Sigma_{22} + i\eta,$$

$$\Sigma_1 = \left(\Sigma_{12} + \frac{4f_{11}\Sigma_{21}f_{21}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^{*2} + V_{R1}^{*2})(V_{L2}^2 + V_{R2}^2)\right) g_{21}\left(\Sigma_{21} + \frac{4f_{21}\Sigma_{12}f_{11}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^2 + V_{R1}^2)(V_{L2}^{*2} + V_{R2}^{*2})\right),$$

$$f_{12} = \left(\varepsilon + \varepsilon_1 - \frac{2}{\varepsilon_{m1}}\left(|V_{L1}|^2 + \frac{4t_1}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L1}^* V_{R1}) + |V_{R1}|^2\right) - \Sigma_{11} + i\eta\right)^{-1},$$

$$f_{22} = \left(\varepsilon + \varepsilon_2 - \Sigma_{12} f_{12}\Sigma_{21} - \frac{2}{\varepsilon_{m2}}\left(|V_{L2}|^2 + \frac{4t_2}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L2}^* V_{R2}) + |V_{R2}|^2\right) - \Sigma_{22} + i\eta\right)^{-1},$$

$$g_{12}^{-1} = \varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{2}{\varepsilon_{m1}}\left(|V_{L1}|^2 - \frac{4t_1}{\varepsilon + i\eta}\mathrm{Im}(V_{L1}^* V_{R1}) + |V_{R1}|^2\right) - \frac{4f_{12}}{\varepsilon_{m1}^2}(f_{22}\Sigma_{12}f_{12}\Sigma_{21} + 1)(|V_{L1}|^4 + 2\mathrm{Re}(V_{L1}^{*2}V_{R1}^2) + |V_{R1}|^4) - \Sigma_{11} + i\eta,$$

$$\Sigma_2 = \left(\Sigma_{21} + \frac{4f_{22}\Sigma_{12}f_{12}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^2 + V_{R1}^2)(V_{L2}^{*2} + V_{R2}^{*2})\right) g_{12}\left(\Sigma_{12} + \frac{4f_{12}\Sigma_{21}f_{22}}{\varepsilon_{m1}\varepsilon_{m2}}(V_{L1}^{*2} + V_{R1}^{*2})(V_{L2}^2 + V_{R2}^2)\right).$$

Apéndice B

Figuras

En esta sección se pueden encontrar distintos gráficos que no se exponen en la sección de Resultados:

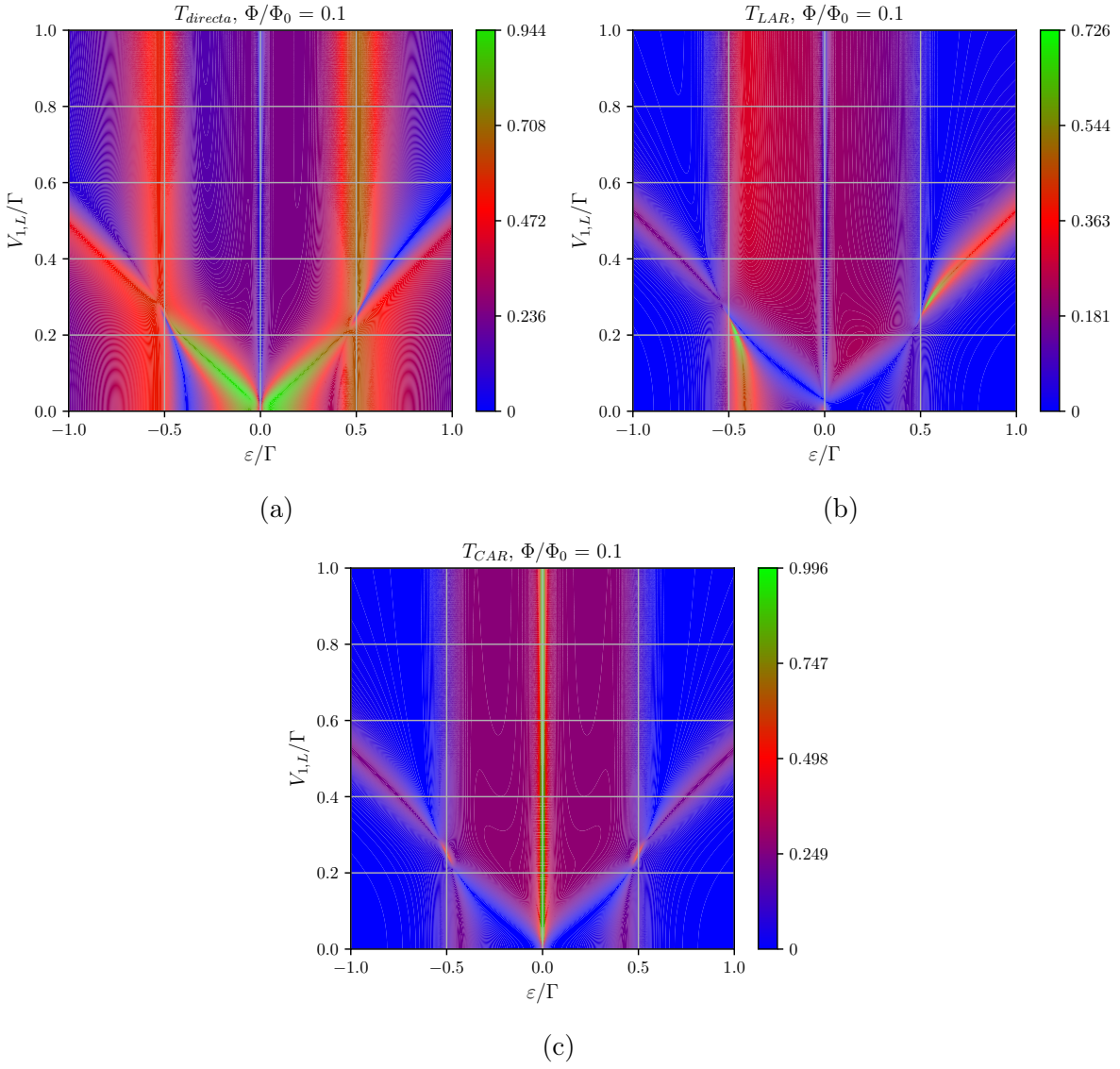


Figura B.1: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0{,}1$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

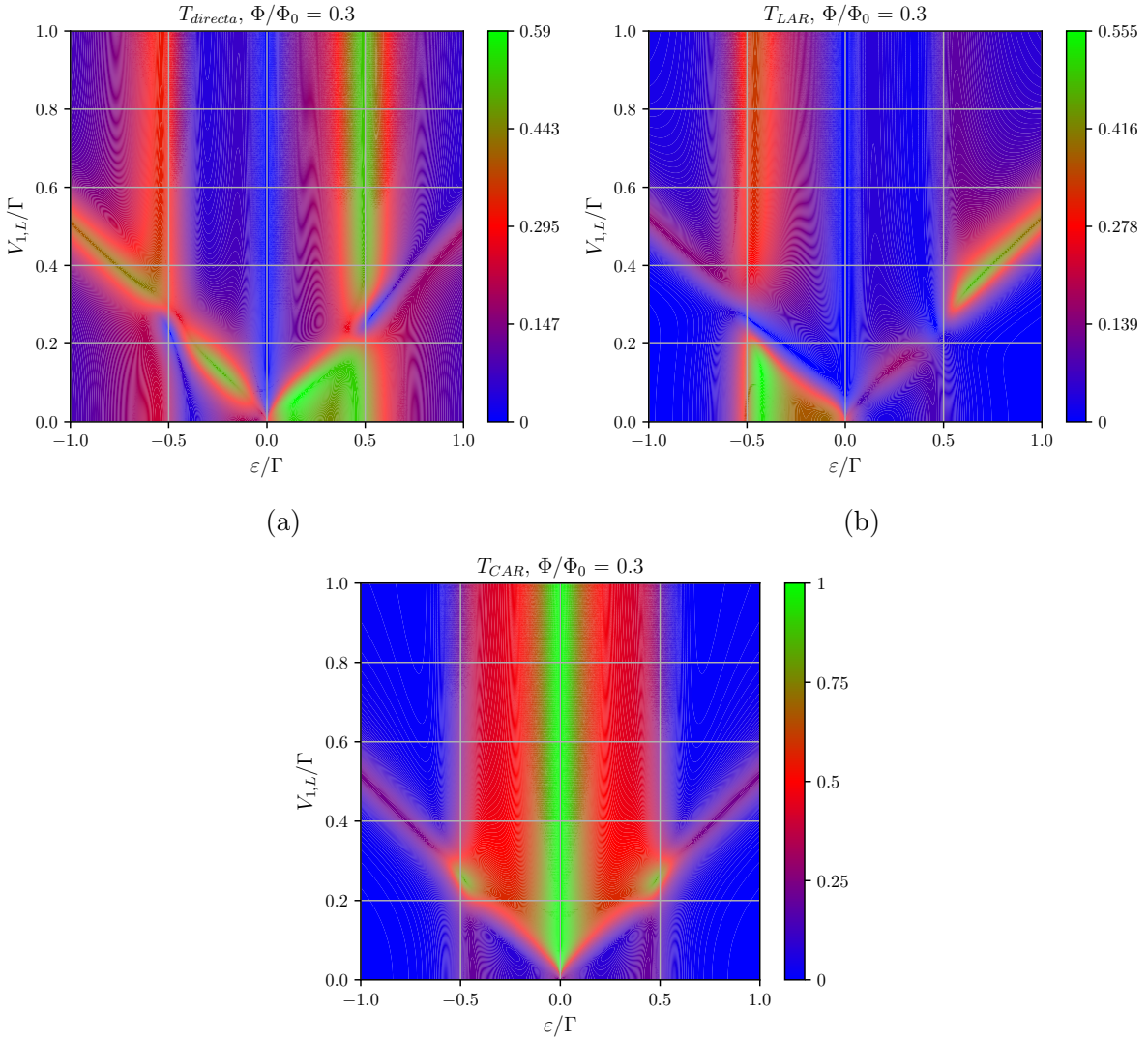


Figura B.2: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0{,}3$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

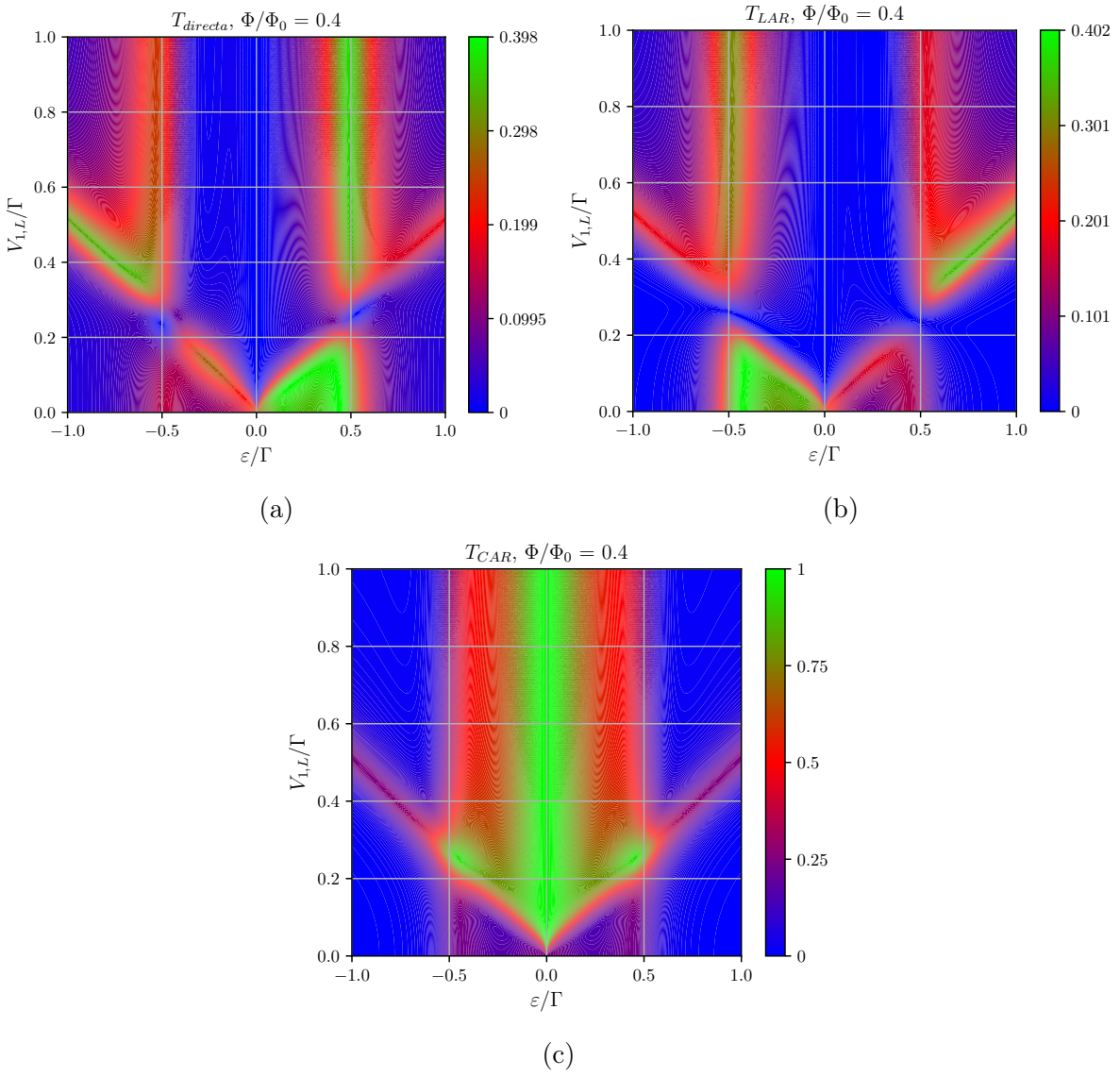


Figura B.3: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento Majorana-Dot1 V_{L1} para $\Phi = 0{,}4$ y el acoplamiento del otro QD $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$ en el límite de cable largo.

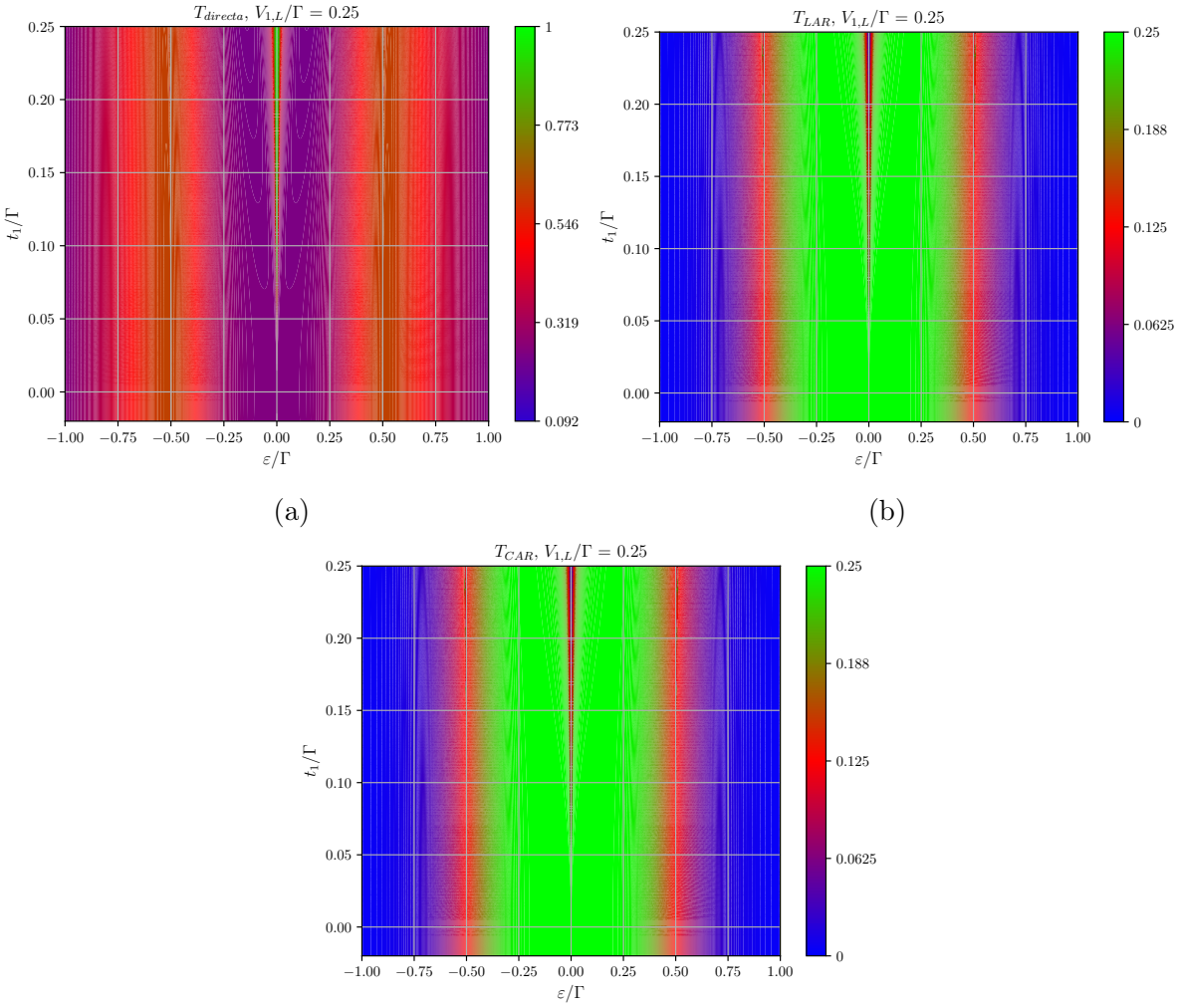


Figura B.4: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento entre Majoranas t_1 para $\Phi = 0$ y los acoplamientos de QD-Majorana $V_{Li} = 0{,}25\Gamma$.

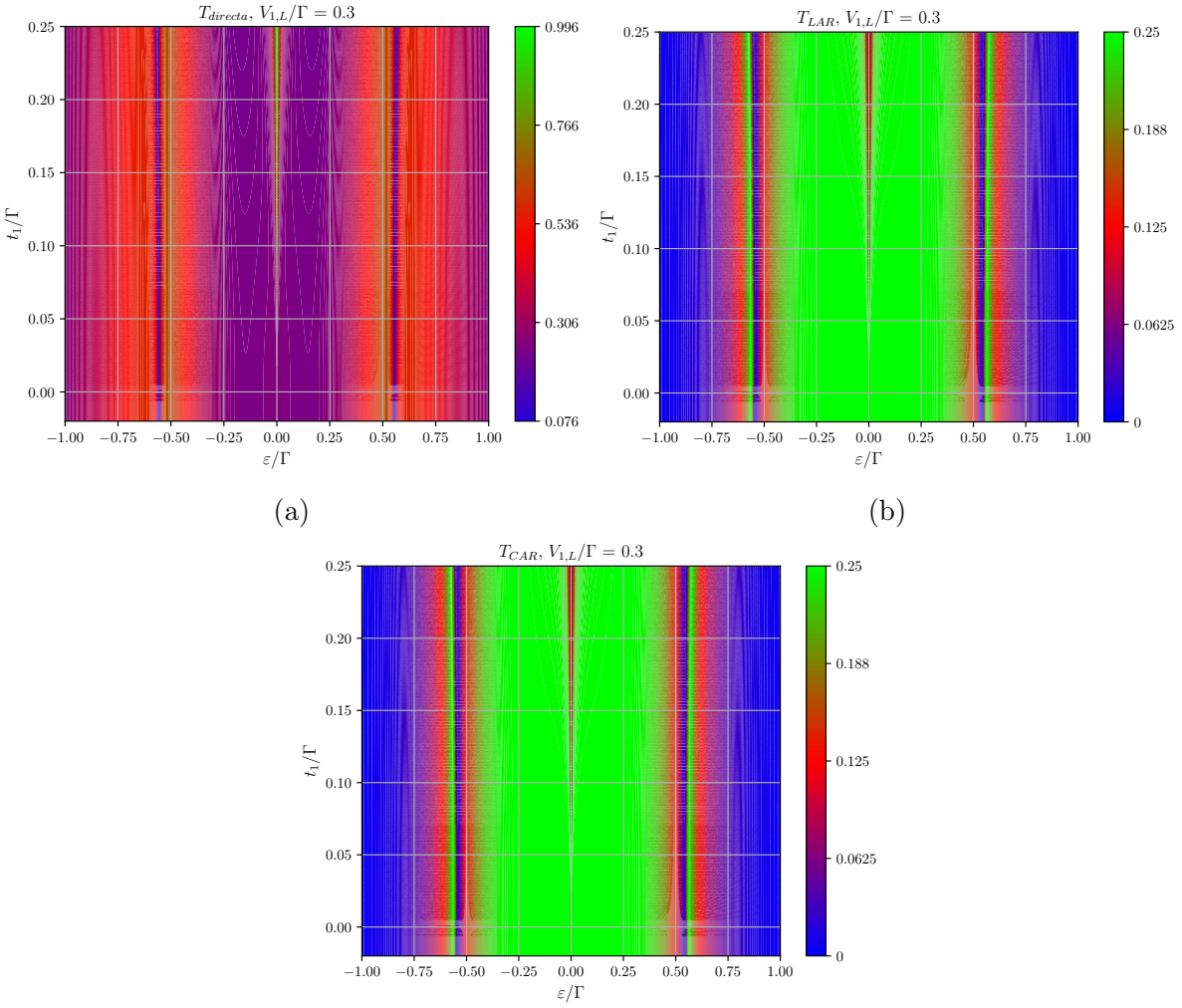


Figura B.5: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento entre Majoranas t_1 para $\Phi = 0$ y los acoplamientos de QD-Majorana $V_{L1} = 0{,}30\Gamma$ y $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$.

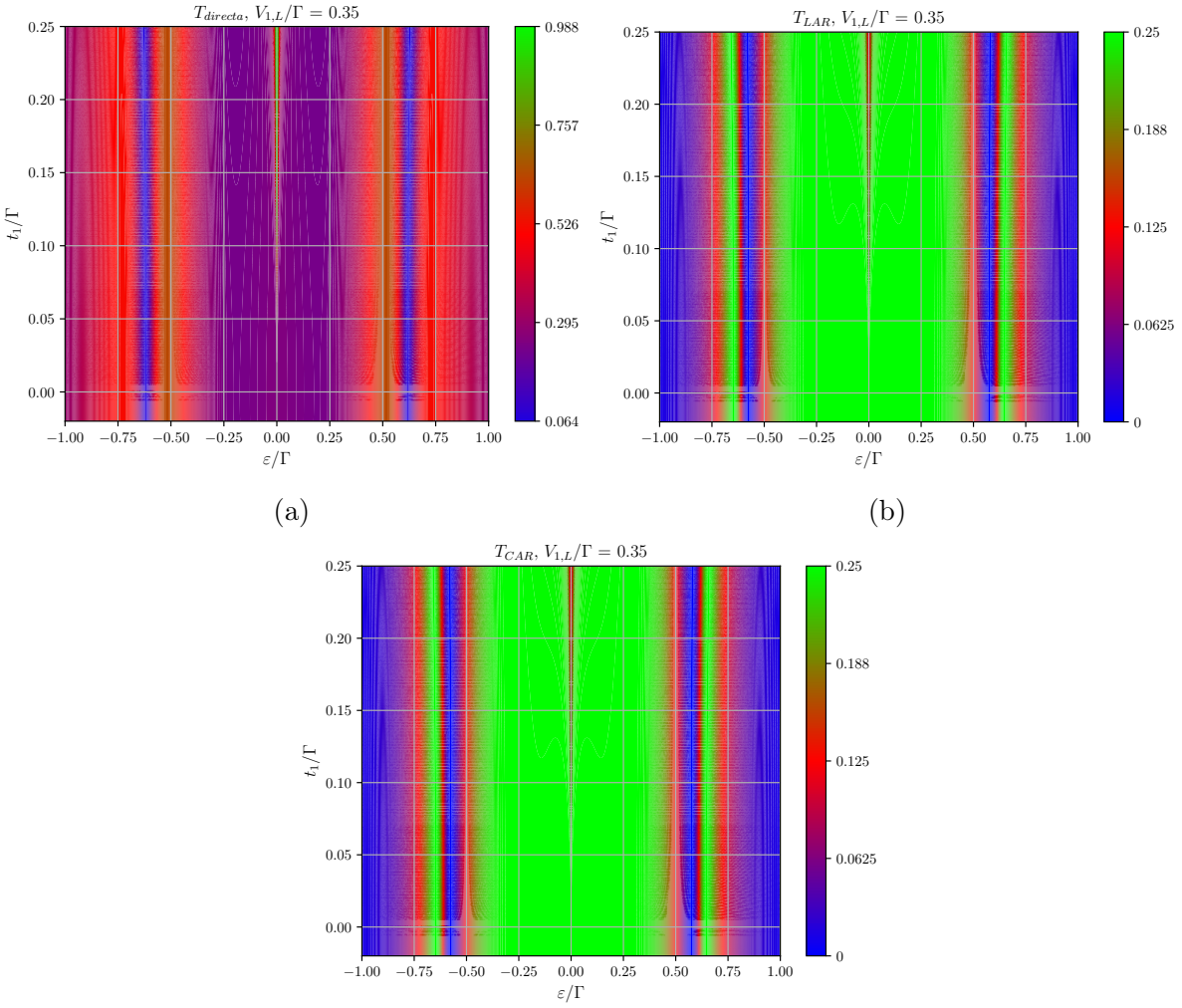


Figura B.6: Esta figura muestra gráficos de contorno de los tres procesos de transmisión que presenta el sistema. (a) muestra la transmisión directa, (b) muestra la transmisión LAR, (c) muestra la transmisión CAR. En los tres casos se muestran las transmisiones dependiendo de la energía del sistema ε y del acoplamiento entre Majoranas t_1 para $\Phi = 0$ y los acoplamientos de QD-Majorana $V_{L1} = 0{,}35\Gamma$ y $V_{L2} = 0{,}25\Gamma$.

Bibliografía

[1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959.

[2] A Yu Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantumwires. *Physics-uspekhi*, 44(10S):131, 2001.

[3] Jason Alicea, Yuval Oreg, Gil Refael, Felix Von Oppen, and Matthew PA Fisher. Non-abelian statistics and topological quantum information processing in 1d wire networks. *Nature Physics*, 7(5):412–417, 2011.

[4] Jason Alicea. New directions in the pursuit of majorana fermions in solid state systems. *Reports on progress in physics*, 75(7):076501, 2012.

[5] Jason Alicea. Exponential boost for quantum information. *Nature*, 531(7593):177–178, 2016.

[6] Karsten Flensberg. Non-abelian operations on majorana fermions via single-charge control. *Phys. Rev. Lett.*, 106:090503, Mar 2011.

[7] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1083–1159, Sep 2008.

[8] Ettore Majorana. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 14(4):171–184, 1937.

[9] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.

[10] Yuval Oreg, Gil Refael, and Felix von Oppen. Helical liquids and majorana bound states in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 105:177002, Oct 2010.

[11] Pasquale Marra. Majorana nanowires for topological quantum computation. *Journal of Applied Physics*, 132(23), 2022.

[12] Roman M. Lutchyn, Jay D. Sau, and S. Das Sarma. Majorana fermions and a topological phase transition in semiconductor-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 105:077001, Aug 2010.

[13] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven. Signatures of majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices. *Science*, 336(6084):1003–1007, 2012.

[14] Stevan Nadj-Perge, Ilya K. Drozdov, Jian Li, Hua Chen, Sangjun Jeon, Jungpil Seo, Allan H. MacDonald, B. Andrei Bernevig, and Ali Yazdani. Observation of majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor. *Science*, 346(6209):602–607, 2014.

[15] Dong E. Liu and Harold U. Baranger. Detecting a majorana-fermion zero mode using a quantum dot. *Phys. Rev. B*, 84:201308, Nov 2011.

[16] Andreas T. G. Janssønn, Haakon T. Simensen, Akashdeep Kamra, Arne Brataas, and Sol H. Jacobsen. Macroscale nonlocal transfer of superconducting signatures to a ferromagnet in a cavity. *Phys. Rev. B*, 102:180506, Nov 2020.

[17] M. L. Ladrón de Guevara, F. Claro, and Pedro A. Orellana. Ghost fano resonance in a double quantum dot molecule attached to leads. *Phys. Rev. B*, 67:195335, May 2003.

[18] M. L. Ladrón de Guevara and P. A. Orellana. Electronic transport through a parallel-coupled triple quantum dot molecule: Fano resonances and bound states in the continuum. *Phys. Rev. B*, 73:205303, May 2006.

[19] A.P. Garrido, D. Zambrano, J.P. Ramos-Andrade, and P.A. Orellana. Bound states in the continuum and majorana zero modes in a double quantum dot interferometer: Ghost-fano majorana effect. *European Physical Journal Plus*, 138(7), 2023. Cited by: 4.

[20] A.P. Garrido, D. Zambrano, J.P. Ramos-Andrade, and P.A. Orellana. Thermoelectric transport through a majorana zero modes interferometer. *European Physical Journal Plus*, 140(9), 2025. Cited by: 0.

[21] Wei-Ke Zou, Qing Wang, and Hong-Kang Zhao. Shot noise in majorana bound state modulated double-quantum-dot interferometer connected to normal and superconductive terminals. *The European Physical Journal B*, 97(8):127, 2024.

[22] MT Deng, CL Yu, GY Huang, Marcus Larsson, Philippe Caroff, and HQ Xu. Anomalous zero-bias conductance peak in a nb–insb nanowire–nb hybrid device. *Nano letters*, 12(12):6414–6419, 2012.

[23] Anindya Das, Yuval Ronen, Yonatan Most, Yuval Oreg, Moty Heiblum, and Hadas Shtrikman. Zero-bias peaks and splitting in an al–inas nanowire topological superconductor as a signature of majorana fermions. *Nature Physics*, 8(12):887–895, 2012.

[24] Eduardo JH Lee, Xiaocheng Jiang, Ramón Aguado, Georgios Katsaros, Charles M Lieber, and Silvano De Franceschi. Zero-bias anomaly in a nanowire quantum dot coupled to superconductors. *Physical review letters*, 109(18):186802, 2012.

[25] ADK Finck, DJ Van Harlingen, PK Mohseni, K Jung, and X Li. Anomalous modulation of a zero-bias peak in a hybrid nanowire-superconductor device. *Physical review letters*, 110(12):126406, 2013.

[26] HOH Churchill, V Fatemi, Kasper Grove-Rasmussen, MT Deng, Philippe Caroff, HQ Xu, and Charles M Marcus. Superconductor-nanowire devices from tunneling to the multichannel regime: Zero-bias oscillations and magnetoconductance crossover. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 87(24):241401, 2013.

[27] D Zambrano, JP Ramos-Andrade, and PA Orellana. Bound states in the continuum poisoned by majorana fermions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 30(37):375301, 2018.

[28] Juan Pablo Ramos-Andrade, David Zambrano, and Pedro A Orellana. Fano-majorana effect and bound states in the continuum on a crossbar-shaped quantum dot hybrid structure. *Annalen der Physik*, 531(6):1800498, 2019.

[29] Markus Büttiker. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. *Physical Review B*, 46(19):12485, 1992.

[30] Ya M Blanter and Markus Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics reports*, 336(1-2):1–166, 2000.

[31] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker. Shot noise in mesoscopic systems. *Phys. Rev. B*, 49:16070, 1994.

[32] Wei Wang, Zhen-Gang Zhu, and Gang Su. Odd–even parity dependent transport in an annular kitaev chain. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 38(11):115302, 2026.

[33] CJ Bolech and Eugene Demler. Observing majorana bound states in p-wave superconductors using noise measurements<? format?>in tunneling experiments. *Physical review letters*, 98(23):237002, 2007.

[34] Qiao Chen, Ke-Qiu Chen, and Hong-Kang Zhao. Shot noise in a quantum dot system coupled with majorana bound states. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 26(31):315011, jul 2014.

[35] Alexander G. Bauer, Benedikt Scharf, Laurens W. Molenkamp, Ewelina M. Hankiewicz, and Björn Sothmann. Quantized phase-coherent heat transport of counter-propagating majorana modes. *Phys. Rev. B*, 104:L201410, Nov 2021.

[36] Liang Fu and C. L. Kane. Superconducting proximity effect and majorana fermions at the surface of a topological insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 100:096407, Mar 2008.

[37] Pavel E. Dolgirev, Mikhail S. Kalenkov, and Andrei D. Zaikin. Topology-controlled thermopower oscillations in multiterminal andreev interferometers. *physica status solidi (RRL) – Rapid Research Letters*, 13(1):1800252, 2019.

[38] Chang-Yu Hou, Kirill Shtengel, and Gil Refael. Thermopower and mott formula for a majorana edge state. *Phys. Rev. B*, 88:075304, Aug 2013.

[39] Eran Sela, Yuval Oreg, Stephan Plugge, Nikolaus Hartman, Silvia Lüscher, and Joshua Folk. Detecting the universal fractional entropy of majorana zero modes. *Phys. Rev. Lett.*, 123:147702, Oct 2019.

[40] Domenico Giuliano, Andrea Nava, Reinhold Egger, Pasquale Sodano, and Francesco Buccheri. Multiparticle scattering and breakdown of the wiedemann-franz law at a junction of n interacting quantum wires. *Phys. Rev. B*, 105:035419, Jan 2022.

[41] Francesco Buccheri, Andrea Nava, Reinhold Egger, Pasquale Sodano, and Domenico Giuliano. Violation of the wiedemann-franz law in the topological kondo model. *Phys. Rev. B*, 105:L081403, Feb 2022.

[42] Colin Benjamin and Ritesh Das. Probing majorana bound states via thermoelectric transport. *Europhysics Letters*, 146(1):16006, apr 2024.

[43] Supriyo Datta. *Electronic transport in mesoscopic systems*. Cambridge university press, 1997.

[44] AW Holleitner, CR Decker, H Qin, K Eberl, and RH Blick. Coherent coupling of two quantum dots embedded in an aharonov-bohm interferometer. *Physical review letters*, 87(25):256802, 2001.

[45] Dong E Liu and Harold U Baranger. Detecting a majorana-fermion zero mode using a quantum dot. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 84(20):201308, 2011.

[46] E Vernek, PH Penteado, AC Seridonio, and José Carlos Egues. Subtle leakage of a majorana mode into a quantum dot. *Physical Review B*, 89(16):165314, 2014.

[47] Piers Coleman. *Introduction to many-body physics*. Cambridge University Press, 2015.

[48] Hartmut Haug and Antti-Pekka Jauho. *Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors*. Springer, 2008.

[49] Massimiliano Di Ventra. *Electrical transport in nanoscale systems*. Cambridge University Press, 2008.

[50] Rolf Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM Journal of research and development*, 1(3):223–231, 1957.

[51] M Buttiker. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys. Rev. Lett*, 57(14):1761–1764, 1986.

[52] H van Houten, L W Molenkamp, C W J Beenakker, and C T Foxon. Thermoelectric properties of quantum point contacts. *Semiconductor Science and Technology*, 7(3B):B215, mar 1992.

[53] G. Gómez-Silva, O. Ávalos Ovando, M. L. Ladrón de Guevara, and P. A. Orellana. Enhancement of thermoelectric efficiency and violation of the wiedemann-franz law due to fano effect. *Journal of Applied Physics*, 111(5):053704, 03 2012.

[54] Jun Nagamatsu, Norimasa Nakagawa, Takahiro Muranaka, Yuji Zenitani, and Jun Akimitsu. Superconductivity at 39 k in magnesium diboride. *nature*, 410(6824):63–64, 2001.