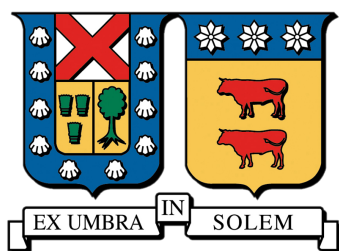


# Producción Exclusiva de pares de mesones pesados

Sebastián René Andrade Lobos

Tesis presentada para el grado de  
Magister en Ciencias, mención Física



**Universidad Técnica Federico Santa María**

Departamento de Física  
Universidad Técnica Federico Santa María  
Valparaíso, Chile  
24 de Diciembre de 2023

# Producción Exclusiva de Pares de Mesones Pesados

Sebastián René Andrade Lobos

## Abstract

Este trabajo explora la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonio pesados a orden principal (LO) de  $\alpha_s$  en el marco de la cromodinámica cuántica (QCD), ofreciendo un análisis exhaustivo de los fundamentos teóricos abordados, abarcando una descripción idónea del modelo de dipolo, los quarks pesados, y el modelo de Condensado de Vidrio de Color (CGC). Sobre esta base, el estudio profundiza en el marco del dipolo de color, explorando la cinemática del proceso y las amplitudes específicas de la producción de pares de mesones. La presentación posterior de los resultados numéricos muestra estimaciones utilizando el enfoque del modelo CGC, evaluando las secciones eficaces mensurables en los próximos colisionadores electrón-protón y protón-ión. En particular, el mecanismo propuesto demuestra secciones eficaces significativamente más grandes en comparación a la producción convencional de pares de quarkonio con misma paridad  $C$ . Esta tesis aporta conocimientos valiosos sobre el ámbito de la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonia pesadas, lo que ofrece implicaciones para experimentos con colisionadores de alta energía.

# Dedicatoria

Dedicado a mi padre, un aficionado a la física.

## Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mi profesor tutor, Marat Siddikov, por su inquebrantable apoyo, orientación e inmensa paciencia durante todo el proceso de finalización de esta tesis. Su dedicación y compromiso han sido invaluable y estoy verdaderamente agradecido por el tiempo y esfuerzo que invirtió en darle forma a este trabajo. De la misma forma, extendo mi más sincero agradecimiento a los profesores del comité evaluador Alfonso Zerwekh, Claudio Dib, Gorazd Cvetic y el profesor Marcelo Loewe, en su rol de evaluador externo, que aceptaron brindar su tiempo y experiencia para evaluar y corregir mi trabajo, lo cual no es una tarea menor.

Mi más profundo agradecimiento a mi familia por su incesante apoyo y su infinita comprensión. Su fe en mí y su voluntad de darme el tiempo necesario para este esfuerzo han sido los pilares de mi perseverancia.

También le agradezco a mis amigos, y todas aquellas personas especiales que me apoyaron durante los tiempos difíciles y que me impulsaron a finalizar este largo proceso. Su aliento y porras han sido invaluable, haciendo que este viaje académico sea más manejable y significativo.

Este logro es un esfuerzo colectivo y tengo la suerte de estar rodeado de personas que me brindaron su apoyo constante. Gracias a todos por ser parte integral de este importante hito en mi trayectoria académica.

## Índice general

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 1..    | <i>Marco Teórico para la producción de Quarkonia Pesados</i>  | 11 |
| 1.1.   | Introducción al Lagrangiano de QCD                            | 11 |
| 1.1.1. | Lagrangiano de QCD y fotoproducción.                          | 13 |
| 1.1.2. | Lagrangiano QCD y campos externos                             | 13 |
| 1.2.   | Cuantización de cono de la luz                                | 14 |
| 1.2.1. | Dipolo de color   | 15 |
| 1.2.2. | Funciones de onda de cono de luz para quarkonia pesada        | 16 |
| 1.2.3. | Rol en QCD perturbativo                                       | 17 |
| 1.2.4. | Factorización   | 17 |
| 1.3.   | Cinemática de Bjorken en la fotoproducción exclusiva          | 18 |
| 1.3.1. | Bjorken y DIS   | 18 |
| 1.3.2. | Cinemática de Bjorken en fotoproducción exclusiva             | 19 |
| 1.4.   | Quarks Pesados  | 20 |
| 1.4.1. | Quarks pesados en el Modelo Estándar                          | 20 |
| 1.4.2. | Fenomenología de quarks pesados                               | 20 |
| 1.5.   | Modelo de CGC   | 23 |
| 1.5.1. | “Ingredientes” de CGC   | 23 |
| 1.5.2. | Amplitud de Dispersión en el Modelo CGC                       | 26 |
| 1.5.3. | Aplicación de CGC en Procesos Exclusivos                      | 27 |
| 2..    | <i>Evaluación de Sección eficaz</i>                           | 29 |
| 2.1.   | Producción Exclusiva de par de mesones                        | 29 |
| 2.1.1. | Cinemática del proceso  | 29 |
| 2.1.2. | Scattering de altas energías en el marco de dipolo de color   | 33 |
| 2.1.3. | Amplitud del proceso en el marco de dipolo de color           | 35 |
| 2.1.4. | Cálculo de la función de onda del fotón                       | 38 |
| 2.1.5. | Componente $\bar{Q}Q$ de la función de onda del fotón         | 39 |
| 2.1.6. | Componente $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$ de la función de onda del fotón | 42 |
| 2.1.7. | Amplitudes de Scattering en la aproximación eikonal           | 48 |
| 2.1.8. | Evaluación de la Amplitud del proceso                         | 51 |
| 3..    | <i>Resultados Numéricos</i>                                   | 55 |
| 3.1.   | Resultados Numéricos  | 55 |
| 4..    | <i>Conclusiones</i>   | 63 |



# INTRODUCCIÓN

La cromodinámica cuántica (QCD) ofrece un marco perturbativo para analizar las interacciones fuertes entre quarks y gluones dentro del modelo estándar. En el régimen de alta energía, procesos exclusivos, como la fotoproducción, implican complejas interacciones entre quarks y fotones. Los cálculos perturbativos de QCD son fundamentales para desentrañar la dinámica subyacente de estas interacciones, arrojando luz sobre las amplitudes de probabilidad que gobiernan las transiciones de fotones a quarks [1]. En el ámbito de la fotoproducción exclusiva, la cuantización del cono de luz emerge como una herramienta metodológica crucial. El marco de cuantización del cono de luz resulta particularmente valioso para desentrañar las complejidades de la producción exclusiva de pares de quarkonios pesados, ofreciendo información sobre la distribución y las interacciones de los quarks y antiquarks dentro de estos estados ligados [2, 3].

En el ámbito de QCD, el estudio de hadrones, partículas compuestas por quarks unidos por la interacción fuerte, es fundamental y de gran importancia [4]. Los hadrones, clasificados en mesones y bariones, se erigen como manifestaciones intrincadas de la interacción fuerte, planteando desafíos teóricos dentro del marco de QCD [5]. Sin embargo, es precisamente esta complejidad la que hace que los hadrones sean indispensables como sondas para desentrañar las complejidades de la interacción fuerte y el comportamiento de los quarks dentro de la QCD.

Una subclase de hadrones, conocida como quarkonio, resulta particularmente esclarecedora en la exploración de QCD. Estos estados ligados consisten en pares de quarks y antiquarks, y debido a sus masas comparativamente grandes, son propicios para tratamientos perturbativos dentro de QCD [6]. Notablemente, los quarkonios pesados, que albergan quarks *charm* ( $c$ ) y *bottom* ( $b$ ), surgen como actores clave en la interacción entre regímenes perturbativos y no perturbativos de QCD [7].

La producción de quarkonia pesada ha sido reconocido como una valiosa herramienta para la investigación de las dinámicas intrincadas de gluones en interacciones de altas energías. La naturaleza inherente del quarkonio pesado en este régimen, gobernado por el límite de masa del quark pesado  $m_Q$  que lleva a una pequeña constante de acoplamiento  $\alpha_s$ , permiten la aplicación de métodos perturbativos en la descripción de las interacciones quark-gluón. El tratamiento perturbativo es particularmente ventajoso en problemas de *dispersión* debido al pequeño tamaño del singlete de color, el cual provee una supresión de *twist* adicional, facilitando así el uso de este enfoque perturbativo [8-10].

En el reino de las interacciones hadrónicas, la producción exclusiva de quarkonio pesado posee una significancia especial. Procesos exclusivos que involucran quarkonio pesado ofrecen una estructura más simple y clara, lo cual permite estudios precisos de estas interacciones hadrónicas. Sin embargo, la gran mayoría de datos experimentales sobre producción exclusiva de quarkonio pesado se han limitado a los canales con un solo quarkonio singular en el estado final. Esta limitación estaba

primariamente motivada por la pequeña *sección eficaz* que se espera en eventos con más de un quarkonio en el estado final. Aún así, procesos que involucran dos mesones en el estado final han atraído un interés sustancial y han sido sujeto de estudio desde los primeros días de QCD [11-15]. Descubrimientos recientes de tetraquarks pesados, potencialmente considerados como estados moleculares de dos quarkonio, han revitalizado el interés en la exploración de este canal [16-26].

La exploración de procesos de alta energía desempeña un papel crucial en desentrañar las complejidades de QCD, especialmente en el contexto de la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonios pesados. Procesos como la dispersión inelástica profunda (DIS) han sido instrumentales para sondear la estructura interna de los hadrones a altas energías, revelando perspicacias cruciales sobre la composición partónica de la materia [27]. Los teoremas de factorización han surgido como herramientas indispensables, permitiendo la separación de procesos perturbativos de corta distancia, de efectos no perturbativos de larga distancia, facilitando así una comprensión sistemática de los fenómenos de alta energía [28].

El tratamiento perturbativo, justificado por la masa de los sabores pesados  $m_q$ , permite un amplio rango cinemático sin restricciones en la virtualidad del fotón entrante  $Q^2$  o la masa invariante del par de quarkonios producido. Notablemente, en ausencia de restricciones cinemáticas, la contribución dominante a la sección eficaz surge de eventos inducidos por los fotones cuasi-reales con un  $Q^2$  pequeño, y relativamente pequeños valores de x-Bjorken ( $x_B$ ). En este contexto, el lenguaje de las amplitudes dipolares de color y el marco del "Condensado de Vidrio de Color" (CGC) han probado ser herramientas apropiadas y eficientes para el análisis de la producción de quarkonio pesado [29-38].

A altas energías, los dipolos de color son estados propios de la interacción, por lo que pueden ser usados como los "bloques de construcción" elementales, considerando en estos las fluctuaciones [39]. A la hora de describir fenomenológicamente las colisiones de hadrón-hadrón y leptón-hadrón, el marco del cono de luz del dipolo de color ha sido exitosamente aplicado para esta [40-47], por lo que será usado para las estimaciones descritas en este manuscrito.

En la cinemática del *Large Hadron Collider* (LHC), estudios previos [48-53] se han enfocado predominantemente en el mecanismo de dos fotones,  $\gamma\gamma \rightarrow M_1 M_2$ , el cual domina la producción de pares de quarkonio con la misma paridad C en colisiones ultra-periféricas. Sin embargo, las investigaciones más allá de la fusión de doble fotón han revelado que la producción exclusiva de doble quarkonio, dentro del marco de factorización de "Distribución de Momento Transversal" (TMD), tiene el potencial para medir la actualmente desconocida "Distribución Generalizada de momento transversales" (GTMDs) de los gluones [54]. Notablemente, en la cinemática de LHC, la sección eficaz de este proceso puede estar influenciada significativamente por los diagramas de *dispersión* de multipartones, introduciendo desafíos asociados con la poco conocida distribución de multigluones y resultando en potenciales ambigüedades en la interpretación teórica de los datos.

Las colisiones electrón-protón ofrecen ventajas distintivas para el estudio de la producción de pares pesados de quarkonio. Comparado a las colisiones hadrón-hadrón, estas colisiones involucran un número reducido de mecanismos de producción, proporcionando un ambiente más limpio para el análisis. Por otra parte, las posibilidades de estudios precisos sobre producción de sobre quarkonio en colisiones electrón-protón se ven incrementadas por las próximas instalaciones de alta lumino-

idad, incluyendo entre estas el *Electron-Ion Collider* (EIC) [55-58], el *Large Hadron electron Collider* (LHeC) [59], el *Future Circular Collider* (FCC-he) [60-62], y el *Circular Electron Positron Collider* (CEPC) [63-65]. Se espera que estas instalaciones avanzadas provean oportunidades sin precedentes para la investigación de la producción exclusiva de pares de quarkonio, particularmente en el régimen cinemático específico a las colisiones electrón-protón. Este manuscrito busca estudiar el proceso de producción exclusivo de pares pesados de quarkonia  $\gamma p \rightarrow M_1 M_2 p$ , dentro de la cinemática de los ya mencionados colisionadores proporcionando el trasfondo teórico para los cálculos relevantes, para luego evaluar los resultados en la cinemática de los colisionadores mencionados anteriormente.

La estructura de esta tesis de magíster es de esta forma: En el Capítulo 1, el marco teórico provee una descripción general y comprensiva del lagrangiano de QCD, la cuantización del cono de la luz y el modelo de dipolo de color, la cinemática de Bjorken, fenomenología de los quarks pesados, y el modelo CGC. El Capítulo 2 profundiza en la producción exclusiva de pares de mesones, abarcando discusiones sobre la cinemática del proceso y la amplitud en la imagen dipolar de color. El Capítulo 3 presenta resultados numéricos, acompañados de figuras y gráficas relevantes derivados de datos experimentales. Finalmente, el Capítulo 4 entrega una conclusión englobando los conceptos previos y los resultados mencionados.



# 1. MARCO TEÓRICO PARA LA PRODUCCIÓN DE QUARKONIA PESADOS

## 1.1. Introducción al Lagrangiano de QCD

El lagrangiano de QCD es el marco matemático fundamental que describe la fuerza nuclear fuerte, la cual gobierna las interacciones de quarks y gluones. Este provee una formulación precisa de la teoría y permite el cálculo de diversos fenómenos que involucran la interacción fuerte. El estudio del lagrangiano de QCD y sus implicaciones ha llevado a avances significativos en nuestro entendimiento de la interacción fuerte y su rol particular en la física de partículas. Este ha sido esencial en el estudio de un amplio rango de fenómenos, incluyendo la espectroscopia de hadrones, los procesos de *dispersión*, y el comportamiento del "plasma de quark-gluón", como se puede apreciar en [31, 66].

El lagrangiano de QCD está formulado dentro del marco de una teoría de *gauge* no-Abeliana donde el campo de *gauge* esta representado por los gluones, y los quarks transforman bajo la representación fundamental del grupo de color de *gauge*  $SU(3)$ . El lagrangiano es invariante bajo transformaciones locales de color, asegurando así la simetría de *gauge* de la teoría [67, 68]. Este consiste de términos que describen la energía cinética, la masa y las interacciones de quarks y gluones:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $N_f$  es el número de sabores de quarks en la teoría, cada uno con su masa  $m_f$ . El campo del quark para el sabor  $f$  y su adjunto de carga opuesta están dados por  $\psi_f$  y  $\bar{\psi}_f$  respectivamente, los cuales son espinores de Dirac. Las matrices de Dirac se representan como  $\gamma^\mu$ . La derivada covariante  $D_\mu$  puede escribirse como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a G_\mu^a, \quad (1.2)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte,  $T^a$  son los generadores del grupo de color  $SU(3)$ , y  $G_\mu^a$  son los campos de gluones. El segundo término de (1.1) incluye el tensor de fuerza del campo de gluones  $G_{\mu\nu}^a$ , el cual esta definido como:

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_\nu^a - \partial^\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \quad (1.3)$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del grupo de color  $SU(3)$ . Cabe mencionar también que para construir estos términos cinemáticos *gauge* invariantes para el campo de gluones, se debe considerar también:

$$G^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu + ig_s [G^\mu, G^\nu] \equiv \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde  $\lambda^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) son las matrices que denotan los generadores de la representación fundamental del álgebra  $SU(3)_{Color}$  [69]. Vale la pena descomponer la ecuación (1.1) en sus diferentes términos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{QCD} = & \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) \psi_f^\alpha - \frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + \\
 & + g_s G_a^\mu \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f^\alpha \gamma_\mu \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} \psi_f^\beta - \\
 & - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

La primera línea de (1.5) contiene los términos cinemáticos de los distintos campos, lo cual nos entrega los propagadores correspondientes del proceso. Es importante notar que el término de masa introduce un quiebre en la simetría quiral, lo cual tiene consecuencias para la dinámica del sistema de quarkonios. La segunda línea de la expresión nos muestra la interacción de color entre quarks y gluones, mediada por la interacción fuerte [70]. Esta interacción entre los quarks pesados y el campo de gluones, tal como está descrito en este lagrangiano, juegan un rol crucial en la formación, las propiedades y el decaimiento de los estados de quarkonio [12, 31]. Como se puede ver involucra las matrices de  $SU(3)_{Color}$   $\lambda^a$ . Por último, y debido al carácter no-Abeliano de  $SU(3)_{Color}$ , la tercera línea que involucra los términos  $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$  genera las interacciones entre los gluones de orden cúbico y cuártico. La magnitud de esta interacción está dada por la constante  $g_s$ . Esta *auto-interacción* entre los campos de gluones son responsables de dos fenómenos importantes en QCD, como lo son el *confinamiento* y la *libertad asintótica* [67, 71]. El confinamiento se refiere al hecho que los quarks y gluones están siempre confinados como un compuesto de partículas, como lo son los mesones y baryones, y no pueden ser observados como partículas libres aisladas. Esto debido a que la interacción fuerte se vuelve, valga la redundancia, más fuerte a medida que la distancia entre quarks aumenta, resultando en la formación de estados ligados de color neutro. Por otra parte, la libertad asintótica describe la propiedad de QCD donde la interacción fuerte se vuelve más débil a altas energías o a cortas distancias. Esto implica que la interacción entre quarks y gluones se vuelve cada vez más débil a mientras más cerca están entre ellos. Esto permite a su vez la posibilidad de realizar cálculos perturbativos del sistema. La libertad asintótica ha sido experimentalmente verificada [31] y juega un rol crucial a la hora de entender la producción de pares de quarkonio pesados mediante fotoproducción. A pesar de la cantidad de información que podemos extraer de este lagrangiano, su forma es relativamente simple. Esto debido a las propiedades de la simetría de color. Toda interacción están dadas por una única constante de acoplamiento  $g_s$ . Como detalle complementario, para poder cuantizar de manera adecuada este lagrangiano es necesario añadir términos adicionales. Estos son conocidos como los términos de "Gauge-fixing" [72] y de Faddeev-Popov [73], los cuales no serán explorados en este manuscrito.

Las predicciones teóricas basadas en el lagrangiano de QCD pueden ser comparadas a las mediciones experimentales para probar la validez de la teoría y así extraer información sobre las interacciones fuertes. Los observables experimentales, tales como la sección eficaz, la distribución angular, y las asimetrías de polarización pueden

ser medidas y comparadas con las predicciones teóricas, permitiendo así determinar las propiedades de este proceso de producción. La comparación entre teoría y experimento provee una percepción más profunda sobre las dinámicas internas de la producción de quarkonio, ayudando así a determinar los parámetros y validez de los cálculos teóricos [74]. Las discrepancias entre teoría y el experimento pueden indicar la necesidad de refinar los modelos teóricos, o la exploración de efectos adicionales.

### 1.1.1. Lagrangiano de QCD y fotoproducción.

Teniendo en cuenta el marco del lagrangiano, podemos proceder a conectar este concepto con el proceso de producción estudiado en este manuscrito. Primero que todo es necesario explicar de manera cualitativa el proceso de fotoproducción. La fotoproducción es un proceso en el cual un fotón de alta energía interactúa con una partícula objetivo, llevando a la producción de una nuevas partículas. El fotón puede ser tanto real como virtual, y su energía determinará la disponible para la producción de estas nuevas partículas. En el contexto de quarkonio pesado, este proceso provee el mecanismo para crear estados de pares de este quarkonio. El proceso involucra un intercambio del fotón con el objetivo, el cual puede ser un protón, un núcleo u otro hadrón. Esta interacción resulta en la creación de un par de quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ), que a su vez forma un estado de quarkonio. La probabilidad de producir un estado de quarkonio específico dependerá de su masa, números cuánticos y la cinemática de la colisión. Los modelos teóricos, basados en los principios de QCD, son usados para describir y comprender la fotoproducción de quarkonio. Estos modelos incorporan cálculos perturbativos, teorías de campos efectivos, y técnicas de factorización para calcular su sección eficaz y así poder hacer predicciones para estos procesos [31, 75]. Los estudios experimentales sobre fotoproducción se han realizado en variadas instalaciones de aceleradores de partículas, tal como el LHC y el colisionador electrón-positrón. Estos experimentos proveen datos valiosos de los tasas de producción, distribución de momento y propiedades de polarización de los pares quarkonio [76, 77].

Una de las cantidades relevantes a calcular es la ya mencionada sección eficaz para la fotoproducción de los pares pesados de quarkonio. Como se mencionó anteriormente, métodos teóricos tales como QCD perturbativo (pQCD) y teorías de campos efectivos (EFTs) son utilizados para esta evaluación [31]. Los cálculos perturbativos involucran la expansión de las amplitudes de *dispersión* sobre la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  y realizando los cálculos adecuados para un orden dado de perturbación. Correcciones de mayor orden pueden incluirse para afinar la precisión de las predicciones. Las teorías de campo efectivo, tal como QCD no-relativista (NRQCD), son usadas para describir las dinámicas de los sistemas de quarkonio pesado y proveen un marco sistemático para calcular las tasas de producción [78].

### 1.1.2. Lagrangiano QCD y campos externos

Cuando los campos externos, tal como el del fotón en la fotoproducción, son considerados en el contexto del lagrangiano de QCD, términos adicionales se introducen para tomar en cuenta las interacciones entre quarks y gluones con los campos externos. Estas modificaciones típicamente introducen un termino covariante derivativo, que se acopla los quarks y gluones con el campo electromagnético externo. El tensor

de campo EM  $F_{\mu\nu}$  es usado para describir el campo fotónico. El lagrangiano de QCD con términos adicionales puede expresarse como:

$$\mathcal{L}_{QCD,ext} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu (D_\mu - e_f A_\mu) - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{ghost}, \quad (1.6)$$

donde  $e_f$  es la carga eléctrica del quark,  $A_\mu$  es el 4-potencial electromagnético, y la derivada covariante  $D_\mu$  incluye la interacción con el campo electromagnético. El término  $\mathcal{L}_{ghost}$  representa los campos fantasmas mencionado anteriormente, que se introducen para mantener la invariancia de la teoría gauge.

Las modificaciones al lagrangiano afectan el cálculo de la sección eficaz en la foto-producción, dado que introduce vértices adicionales a los diagramas de Feynman, involucrando interacciones fotón-quark, fotón-gluón y los correspondientes términos de interferencia. Estas contribuciones adicionales influyen las amplitudes de probabilidad de varios procesos.

La interacción entre el quark y el fotón viene dada por el vértice  $-e_f \gamma^\mu$ . En presencia de un campo electromagnético externo ( $A_\mu$ ) este término se modifica para incluir la interacción con el campo del fotón. En presencia de este campo externo, el quark emite o absorbe un fotón, contribuyendo así a la amplitud total de los procesos que involucran campos electromagnéticos.

Si bien los fotones no interactúan directamente con los gluones porque no tienen color, aún pueden ocurrir interacciones cuando el fotón fluctúa temporalmente hacia un par quark-antiquark que, a su vez, interactúa con los gluones. Esta contribución viene dada por el vértice  $ie_f g_s t^a (k_\mu g_{\nu\rho} - k_\nu g_{\mu\rho})$ , donde  $ie_f g_s$  es la constante de acoplamiento de la interacción electromagnética,  $k_\mu$  es el 4-momento del fotón, y  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico.

## 1.2. Cuantización de cono de la luz

En el contexto de la teoría cuántica de campos relativista, las coordenadas de cono de la luz proveen una forma de parametrización del espacio tiempo que es particularmente útil a la hora de tratar con procesos de altas energías. Las coordenadas de cono de la luz se definen en términos de vectores tipo luz, y una de sus notaciones comunes es la de  $(x^+, x^-, \mathbf{x}_\perp)$ ,

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 \pm x^3), \quad \mathbf{x}_\perp = (x^1, x^2) \quad (1.7)$$

donde  $x^\pm$  son las coordenadas de tiempo de cono de luz, y  $\mathbf{x}_\perp$  son las coordenadas espaciales transversales. Estas coordenadas emergen de manera natural cuando un gauge de cono de luz es elegido, como lo es el caso de  $A^+ = 0$  para el campo de gauge [79].

Las ventajas de utilizar estas coordenadas en cálculos de QCD se derivan del hecho de que permiten una separación conveniente de los grados de libertad longitudinales y transversales. En estas coordenadas, la dinámica de la teoría se vuelve más simple y se alivian variadas complicaciones presentes en otros sistemas de coordenadas. Como se mencionó, las dos grandes ventajas de utilizar estas coordenadas son la

simplificación en los cálculos y la separación de grados de libertad. Las coordenadas de cono de luz simplifican los cálculos debido a que las dinámicas de la teoría están dominadas por un pequeño número de grados de libertad relevante.

En el contexto de QCD y procesos de alta energía (grandes componentes  $x^+$  y  $x^-$ ), las coordenadas transversales del campo de gluones puede despreciarse a la hora de trabajar en el espacio de Fourier, llevando así a la reducción de la complejidad de las evaluaciones [80].

La separación de grados de libertad longitudinal y transversal es una ventaja clave. Las coordenadas de cono de luz hacen fácil distinguir entre las interacciones que ocurren a lo largo de la dirección del movimiento de la partícula (longitudinal) y aquellas que ocurren en las direcciones transversales. Esta separación es particularmente valiosa a la hora de lidiar con procesos de altas energías, donde el momento longitudinal domina la física del sistema [81].

En el esfuerzo por cuantizar los campos de QCD en el marco de cono de luz, un paso fundamental es expresar los campos en coordenadas de cono de luz ( $x^+$ ,  $x^-$ ,  $\mathbf{x}_\perp$ ). Para lograr esto, la cuantización canónica es aplicada, donde los campos de QCD son “elevados” a *operadores*, y se imponen conmutaciones canónicas a igual tiempo ( $x^+$ ). Este proceso produce operadores de creación y aniquilación de campos de quarks y gluones, lo que facilita la construcción de estados espaciales de Fock. El *gauge* de cono de luz, caracterizado por  $A^+ = 0$ , juega un rol crucial en el proceso de cuantización canónica [82]. En el contexto del gauge de cono de luz, ciertas restricciones emergen. La condición del gauge de Lorenz,  $D_\mu A^\mu = 0$ , lleva a la expresión:

$$\partial_+ A^- + \nabla_\perp \cdot A_\perp = 0 \quad (1.8)$$

Esta restricción es fundamental para definir los estados físicos de la teoría, proporcionando los medios para eliminar estados que no satisfacen esta condición de gauge [3].

Una consecuencia del gauge de cono de luz es la ausencia de polarización longitudinal del gluón en el espacio de Hilbert. La elección de gauge  $A^+ = 0$  implica que no existen excitaciones en el campo de gauge en la dirección  $A^+$ , racionalizando la teoría reduciendo el número de grados de libertad y la complejidad de los cálculos [83]. Esta reducción en complejidad es crucial para un análisis más manejable de los procesos de QCD dentro del marco de cono de luz.

### 1.2.1. Dipolo de color

En el paisaje intrincado de QCD, los dipolos de color emergen como entidades fundamentales que caracterizan la estructura de color de los pares quark-antiquark. Cuando un quark y un antiquark se acoplan, forman un estado de color neutro, similar al caso del dipolo eléctrico en electromagnetismo. Esta conceptualización simplifica el tratamiento de los procesos de alta energía de QCD, proporcionando un marco conveniente para entender las interacciones a nivel cuántico [84].

En el contexto de la fotoproducción exclusiva, los dipolos de color son fundamentales para comprender la intrincada interacción entre los pares de quarkonio y los fotones. El modelo de dipolo de color ofrece un marco valioso, donde un fotón puede fluctuar en un par  $Q\bar{Q}$  formando un dipolo de color. La interacción posterior de estos dipolos de color con el objetivo nuclear (por ejemplo un protón) implica

la función de onda, que describe la distribución o amplitud de probabilidad de los quarks en el estado final del quarkonio, o bien en el estado inicial del fotón [85]. Esta amplitud de probabilidad guía la interacción con un objeto físico, como el objetivo nuclear u otro dipolo de color, contribuyendo a la intrincada dinámica de la fotoproducción exclusiva. Además, la interacción de los dipolos de color con el objetivo nuclear permite la formación de quarkonio en su estado final, un proceso conocido como *hadronización*, la cual se refiere a la transformación de pares  $Q\bar{Q}$  en hadrones de color neutro, que son partículas observables en el estado final.

El teorema de factorización dipolar, crucial en este contexto, separa las complejidades del proceso de *dispersión dura* de los aspectos no-perturbativos asociados con las funciones de onda de las quarkonias. Esta separación permite una comprensión más clara de las distintas contribuciones al proceso de fotoproducción exclusiva, mejorando el marco teórico para los cálculos [86].

### 1.2.2. Funciones de onda de cono de luz para quarkonia pesada

Dentro del intrincado reino del quarkonio pesado, el entender la estructura interna de estos estados ligados está facilitado por el concepto de las funciones de onda de cono de luz. Estas funciones sirven como herramientas invaluable, ofreciendo una representación única de los estados de quarkonio, tal como *charmonio* ( $c\bar{c}$ ) o *bottomonio* ( $b\bar{b}$ ) construyendo las amplitudes de probabilidad para localizar el par quark antiquark en diversas posiciones transversales dentro del estado ligado [3]. Las formulaciones matemáticas de estas funciones de onda provienen de las soluciones no-perturbativas de las ecuaciones de estados ligados de QCD:

$$H_{QCD} |\Psi\rangle = M |\Psi\rangle \quad (1.9)$$

donde  $|\Psi\rangle$  es el vector de estado que representa el sistema del quarkonio y  $M$  es la masa del estado ligado. Es importante mencionar que la forma específica de  $H_{QCD}$  dependerá de la representación escogida y el esquema de aproximación. Estas ecuaciones encapsulan la compleja dinámica que gobiernan las interacciones con el quarkonio pesado. Las funciones de onda resultantes proveen una comprensión matizada de las distribuciones espacial y de momento de los estados ligados, ofreciendo así un vistazo a la estructura interna del quarkonio durante el proceso de interacciones [85].

Al profundizar en el ámbito de la fotoproducción exclusiva, las funciones de onda del cono de luz se vuelven fundamentales para los cálculos teóricos dentro del marco del dipolo de color. En este contexto, las funciones de onda del cono de luz entran en juego a través de su superposición con el operador del dipolo de color. Esta superposición incorpora información sobre las amplitudes de probabilidad asociadas a las diferentes configuraciones de quarks y antiquark dentro del estado de quarkonio. En esencia, esta cuantifica cómo la estructura interna del quarkonio influye en la sección eficaz para el proceso exclusivo de fotoproducción.

La utilización integral del marco dipolo de color, con la debida consideración de la información codificada en las funciones de onda del cono de luz, facilita un enfoque sistemático y fundamentado teóricamente para comprender la fotoproducción exclusiva de quarkonio pesado. Este enfoque cierra la brecha entre los regímenes perturbativos y no perturbativos, ofreciendo una perspectiva completa y matizada sobre la interacción entre la dinámica de los procesos de altas energías que involucran quarkonios pesados.

### 1.2.3. Rol en QCD perturbativo

En el contexto de la fotoproducción exclusiva, QCD perturbativo (pQCD) juega un rol crucial a la hora de calcular las amplitudes de *dispersión dura*. Esta trata con los procesos de altas energías donde la constante de acoplamiento fuerte es pequeña ( $\alpha_s \ll 1$ ), permitiendo así la aplicación de teorías perturbativas. Esto es particularmente relevante en el proceso estudiado en este manuscrito, donde la escala de energía es lo suficientemente alta para justificar estos métodos perturbativos. Las amplitudes de *dispersión dura*, las cuales describen los subprocesos involucrados en la interacción de quarks y gluones a corta distancia, se calculan perturbativamente. La amplitudes se expresan como una serie de expansiones en la constante  $\alpha_s$ , con términos de ordenes mayores que incrementan la precisión de la medición. Los cálculos de pQCD son adecuados para procesos donde la transferencia de momento es grande, permitiendo la separación entre regímenes perturbativos y no-perturbativos [87].

### 1.2.4. Factorización

Los teoremas de factorización son poderosas herramientas que permiten lograr la separación ya mencionada entre los aspectos no-perturbativos, representados por la función de onda de quarkonio, y la contribución perturbativa expresada por las amplitudes de *dispersión*. El proceso de factorización permite un tratamiento sistemático para ambas contribuciones, simplificando las evaluaciones y aumentando las cualidades predictivas de QCD. La forma general de estos teoremas pueden ser escritos como:

$$\sigma = \sum_i P_i \otimes h_i \otimes C_i \quad (1.10)$$

donde  $\sigma$  es la sección eficaz total del proceso,  $P_i$  representa las funciones de distribución de partones (PDFs) que caracteriza, como su nombre lo dice, la distribución de los partones en el hadrón;  $h_i$  denota las amplitudes de distribución, encapsulando la información no-perturbativa sobre la estructura interna de los hadrones [12]; y  $C_i$  representa los coeficientes calculables de *dispersión dura* [88]. Esta separación permite el cálculo de secciones eficaces de diversos procesos, incluyendo el aquí estudiado, combinando los PDFs conocidos y las funciones de onda con los coeficientes perturbativos calculables.

Los teoremas de factorización son fundamentales en el ámbito de QCD, ya que proporcionan un marco sistemático y riguroso para destrabar los aspectos perturbativos y no-perturbativos inherentes a la producción de quarkonio pesado. Estos teoremas son fundamentales para perfeccionar las predicciones teóricas y fomentar una comprensión integral de la dinámica del quarkonio.

Una de las principales aplicaciones de los teoremas de factorización radica en procesos exclusivos que involucran quarkonio pesado, como la fotoproducción o la hadroproducción. En estos procesos, el enfoque de factorización permite separar las contribuciones de corta distancia, gobernadas por QCD perturbativa, de las complejidades de los efectos de larga distancia asociados con la naturaleza no perturbativa de la formación de quarkonio [89, 90].

Los avances recientes en las técnicas de factorización implican la extensión del formalismo a órdenes superiores en la teoría de la perturbación. Esta extensión, incluidos los teoremas de factorización del *orden siguiente al principal* (NLO) y del

*orden siguiente al siguiente al principal* (NNLO), es crucial para una comprensión más completa de la producción de quarkonio pesado. Estos desarrollos refinan la precisión de las predicciones, reduciendo la sensibilidad a las elecciones de escalas de factorización y renormalización [91, 92].

La versatilidad de los teoremas de factorización se extiende más allá de los procesos exclusivos para abarcar un amplio espectro de observables, incluida la producción de *jets* y las distribuciones de impulso transversal. Esta versatilidad establece los teoremas de factorización como un marco sólido e indispensable, que amplifica el poder predictivo de la QCD y permite una exploración matizada de las complejidades de la fenomenología de quarkonio pesado.

### 1.3. Cinemática de Bjorken en la fotoproducción exclusiva

La cinemática de Bjorken, introducida por James D. Bjorken en los 60s, sirve como marco vital para comprender los procesos de *dispersión* de alta energía, particularmente en el contexto de “*dispersión inelástica profunda*” (DIS) [30]. Fue introducido como una forma de entender el comportamiento de partículas a altos niveles de transferencia de momento. En estos procesos, el leptón de alta energía interactúa con el hadrón objetivo, y la *dispersión* ocurre a un nivel profundo dentro del hadrón. Las variables clave en esta cinemática son las “variables de escala de Bjorken”  $x_B$  y la transferencia de momento  $Q^2$ . En este contexto,  $x_B$  representa la fracción de energía del leptón incidente llevado por el partón “golpeado” dentro del hadrón, mientras que  $Q^2$  es el cuadrado de la transferencia del 4-momento entre el leptón y el hadrón. Matemáticamente, la escala de Bjorken es expresada como:

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (1.11)$$

donde  $P$  es el 4-momento del hadrón objetivo, y  $q$  es el 4-momento transferido [93].

El trabajo de Bjorken llevó a la formulación de reglas de escala, demostrando que ciertas variables cinemáticas exhiben un comportamiento de escala en el límite de grandes  $Q^2$  y  $x_B$ . Este comportamiento es fundamental para el modelo partónico y QCD, proporcionando un vistazo a la estructura interna de los hadrones [94]. La comprensión de la cinemática de Bjorken contribuyó significativamente a la evolución de la QCD como teoría de la interacción fuerte. QCD amplió los conocimientos de Bjorken incorporando la dinámica de quarks y gluones, explicando las violaciones de escala observadas y proporcionando un marco integral para los procesos de *dispersión* de alta energía [95].

#### 1.3.1. Bjorken y DIS

Los procesos de DIS, donde un leptón de altas energías interactúa con un nucleón, encuentra su base teórica en la cinemática de Bjorken. En este contexto, la variable  $x_B$  definida en (1.11) es un parámetro crucial. Estos procesos están usualmente caracterizados por las “funciones de estructura”, las cuales incluyen la función longitudinal  $F_L$ , y las funciones de estructura dependientes de variables de escala,  $F_1$  y  $F_2$  [93]. Estas funciones de estructura toman un rol central a la hora de entender la dinámica de DIS. La relación entre  $F_1$  y  $F_2$  en términos de las variables de Bjorken está dada por:

$$F_1(x_B, Q^2) = F_2(x_B, Q^2) \frac{1 + R(x_B, Q^2)}{2x_B}, \quad (1.12)$$

donde  $R(x_B, Q^2)$  representa la relación entre las secciones eficaces para fotones con polarización longitudinal y transversal. La cinemática de Bjorken es crucial en el análisis de DIS debido a sus implicaciones en el comportamiento de escalas. Las escalas de ciertas combinaciones de funciones de estructura con respecto a  $x_B$  son una característica clave que proporciona información sobre la estructura partónica de los nucleones [96]. Además, la variable de escala  $x_B$  está estrechamente vinculada a las funciones de distribución de partones (PDFs), que representan la probabilidad de encontrar al quark con una fracción específica de momento del nucleón. Experimentos de DIS de alto  $Q^2$  permiten la extracción de estos PDFs, contribuyendo con información valiosa sobre el contenido de quarks de los nucleones.

### 1.3.2. Cinemática de Bjorken en fotoproducción exclusiva

En la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonio, donde la interacción involucra un fotón de alta energía y un hadrón objetivo, la aplicación de la cinemática de Bjorken sufre ajustes con respecto a su uso tradicional en el *dispersión* de leptón-nucleón. A diferencia de DIS, donde es un leptón el involucrado, la fotoproducción introduce variaciones en las variables cinemáticas y en la naturaleza del evento de *dispersión*. La variable de Bjorken  $x_B$  mantiene su significancia pero asume una interpretación distintiva en el contexto de este proceso exclusivo. Para este caso,  $x_B$  puede significar la fracción de la energía del fotón transferida al sistema objetivo, lo que ofrece información sobre la composición partónica de este [30].

Una modificación importante surge al considerar valores finitos y/o positivos de transferencia de momento  $Q^2$ , una desviación de los típicos valores negativos en DIS. Es importante notar que los procesos de fotoproducción exclusiva contienen aspectos no-perturbativos de QCD. Si bien la cinemática de Bjorken proporciona una base para comprender los aspectos partónicos, se pueden aplicar herramientas teóricas adicionales como la QCD no relativista (NRQCD) para abordar la naturaleza del estado ligado del quarkonio pesado.

La escala de Bjorken introduce restricciones en el comportamiento de las secciones eficaces en relación a la transferencia de energía y momento, afectando así al resultado final de manera significativa. Este comportamiento es prominente a altas energías y grandes transferencias de momento. De esta forma, la sección eficaz como función de la variable  $x_B$  puede expresarse en términos de los PDFs en la forma general:

$$\sigma \propto F_2(x_B, Q^2) \frac{1 + R(x_B, Q^2)}{2x_B} \quad (1.13)$$

Las restricciones cinemáticas impuestas por la escala de Bjorken sirven como criterios fundamentales que los cálculos teóricos deben satisfacer para alinearse con las observaciones en los experimentos. Estas guían la interpretación de los datos experimentales en términos de contribuciones partónicas, asegurando la coherencia de las predicciones teóricas con las mediciones experimentales.

## 1.4. Quarks Pesados

Hasta este punto hemos mencionado a los quarks como elementos en las interacciones, pero es necesario ahondar de manera más profunda para comprender los procesos de producción trabajados en este manuscrito.

En el reino de la física de partículas, los quarks pesados, *charm* ( $c$ ) y *bottom* ( $b$ ), se distinguen por su masa considerablemente grande en comparación a otros sabores de quark. Si bien el quark *top* ( $t$ ) es el más pesado, a menudo se trata por separado debido a sus características únicas y su corta vida útil [68]. Estos quarks pesados son los constituyentes fundamentales de ciertos hadrones, particularmente los mesones que incorporan sabores *charm* o *bottom*. La presencia de quarks pesados influye significativamente la dinámica de estas partículas, impactando aspectos tales como la vida útil y su decaimiento [97].

El estudio de quarks pesados contribuye de manera significativa a la física de sabores, ofreciendo información sobre los procesos que involucran interacción de cambio de sabores. Además, el comportamiento y las propiedades de los quarks pesados sirven como campo de pruebas rigurosos para el modelo estándar. Cualquier desviación observada o fenómeno inesperado en sus interacciones podría indicar potencialmente la presencia de física más allá del modelo actualmente aceptado.

### 1.4.1. Quarks pesados en el Modelo Estándar

En el contexto del Modelo Estándar (SM) de física de partículas, el estudio de los fenómenos físicos de quarks pesados está profundamente arraigado en los principios de QCD y las interacciones electro-débiles. QCD introduce el concepto de carga de color, análogo a la carga eléctrica en QED. Esta exhibe, como se mencionó en la sección 1.1, una propiedad fascinante llamada *libertad asintótica*, donde los quarks y gluones interactúan débilmente a altas energías. Sin embargo, a bajas energías, estos están confinados dentro del hadrón debido al confinamiento de color, el cual previene el aislamiento de quarks individuales. El estudio de quarks pesados dentro del marco de QCD presenta ciertos desafíos y oportunidades. La teoría efectiva de los quarks pesados (HQET por sus siglas en inglés) emerge como una herramienta valiosa, simplificando la descripción de quarks pesados de QCD mediante la separación de sus escalas de masas pesadas con las dinámicas ligeras de QCD [98].

Finalmente, los quarks pesados tienen un rol notable en estudios de dinámicas de la interacción fuerte, ya que cada interacción adicional con el campo de gluones y cada producción de quarks pesados adicionales está suprimida por la masa del quark. Los quarks pesados dan lugar a estados ligados entre quarks y anti-quarks, conocidos como quarkonio, que tienen gran importancia en las predicciones teóricas e investigaciones experimentales [6].

### 1.4.2. Fenomenología de quarks pesados

La producción de quarkonio pesado, que abarca estados como  $J/\Psi$  y  $Y$ , es un proceso complejo influenciado por aspectos perturbativos y no perturbativos de QCD, siendo varios los mecanismos que contribuyen a la creación de quarkonios pesados en colisiones de alta energía.

### *Producción de Singlete de color*

El modelo de singlete de color es una piedra angular en la comprensión de la producción de quarkonia pesada, particularmente en procesos exclusivos. En este modelo, se postula la creación directa de un estado de color neutro (singlete). Esto significa que el quark pesado y el antiquark se combinan de una manera que garantiza que la carga de color general sea neutra, lo que da como resultado la formación de un estado de quarkonia [99].

Las implicaciones fenomenológicas del Modelo singlete de color son sustanciales, especialmente en el contexto de la fotoproducción exclusiva. Los procesos exclusivos, donde se miden estados finales específicos con alta precisión, ofrecen una oportunidad única para probar las predicciones del modelo de singlete de color. Las desviaciones de las expectativas del modelo pueden proporcionar información sobre los efectos QCD no perturbativos, como las correcciones de orden superior y la interacción de los mecanismos de color neutro y de octeto de color.

Además, el modelo de singlete de color tiene aplicaciones prácticas más allá de las consideraciones teóricas. Sirve como elemento fundamental en la interpretación de datos experimentales que involucran quarkonios pesados, guiando el análisis de procesos exclusivos en experimentos con colisionadores de alta energía. Al comprender la naturaleza neutral del color de la producción de quarkonio, los investigadores pueden desentrañar la intrincada dinámica de la unión quark-antiquark y obtener una comprensión más profunda de los aspectos no perturbativos de la QCD.

En los últimos años, el modelo color singlete ha sido objeto de refinamientos y ampliaciones, incorporando correcciones QCD de orden superior y abordando sutilezas relacionadas con la estructura de color de los estados de quarkonio. Estos avances contribuyen a una comprensión más completa de la producción de quarkonio pesado y mejoran la concordancia entre la teoría y la experimentación.

### *Producción de Octeto de color*

El Modelo de octeto de color es un marco teórico que desempeña un papel significativo en la comprensión de la producción de quarkonio pesado, especialmente en procesos no exclusivos. A diferencia del modelo de singlete, el modelo de octeto implica la creación de un estado intermedio de octeto de color antes de la formación del estado final de quarkonio. Este modelo aborda las interacciones más complejas involucradas en procesos no exclusivos, donde los quarkonios producidos pueden tener partículas asociadas adicionales, como gluones.

En el cálculo de la sección eficaz de  $J/\Psi$  dentro del modelo de octeto de color, Braaten y Chen [100] proporcionaron una contribución crucial a la comprensión de los mecanismos de octeto de color. Las implicaciones fenomenológicas del Modelo de octeto de color son particularmente relevantes para entender la polarización del quarkonio y la dinámica intrincada de la producción de quarkonio en un rango más amplio de procesos de colisión. Proporciona un marco para interpretar observaciones experimentales en escenarios donde hay partículas adicionales, permitiendo a los investigadores estudiar la interacción entre mecanismos de color neutro y de octeto de color.

Una de las aplicaciones clave del modelo de octeto de color es el estudio de la producción de quarkonio en colisionadores de hadrones, donde quarks y gluones dentro de hadrones colisionan a altas energías. El modelo ayuda a explicar observaciones

de quarkonios con partículas adicionales, arrojando luz sobre los aspectos no perturbativos de la Cromodinámica Cuántica (QCD) y proporcionando ideas sobre la dinámica de formación de quarkonio.

En los últimos años, los avances en el Modelo de Octeto de Color han incluido refinamientos para incorporar correcciones de QCD de orden superior y mejoras en el tratamiento de efectos no perturbativos. Estos desarrollos contribuyen a una comprensión más completa del papel de los estados de octeto de color en la producción de quarkonio pesado, mejorando la concordancia entre las predicciones teóricas y las medidas experimentales.

### *Cálculos de QCD perturbativo (pQCD)*

Los cálculos de QCD perturbativo (pQCD) constituyen un aspecto crucial para comprender la producción de quarkonio pesado al proporcionar predicciones cuantitativas para secciones eficaces y cinemáticas. En este marco, se aplican los principios de la teoría cuántica de campos para describir las interacciones a corta distancia de quarks y gluones, que son susceptibles a expansiones perturbativas.

Una aplicación clave de la pQCD en la física de quarkonia pesada es el cálculo de secciones eficaces para procesos que involucran quarkonios. La producción de quarkonios pesados, como  $J/\Psi$  y  $Y$ , en colisiones de alta energía está inherentemente gobernada por interacciones a corta distancia, lo que convierte a la pQCD en una herramienta esencial para hacer predicciones e interpretar resultados experimentales [101].

Además, los cálculos de la pQCD facilitan la extracción de parámetros fundamentales relacionados con la producción de quarkonio pesado. Estos parámetros, a menudo integrados en funciones de distribución de partones (PDF) y funciones de fragmentación, son esenciales para vincular las predicciones teóricas con observables experimentales. Comprender las complejidades de los cálculos de la pQCD es vital para obtener predicciones teóricas precisas que puedan compararse con mediciones de precisión de experimentos.

Los avances recientes en los cálculos de la pQCD involucran esfuerzos para ir más allá de las aproximaciones de orden principal, incorporando correcciones de orden siguiente (NLO) y de orden siguiente al siguiente (NNLO). Estas correcciones de orden superior mejoran la precisión de las predicciones teóricas y reducen la dependencia de las elecciones de escala de factorización y renormalización. La inclusión de términos de orden superior en los cálculos de la pQCD es crucial para lograr una comprensión más completa y confiable de la producción de quarkonio pesado.

### *QCD No-Relativista (NRQCD)*

QCD no-relativista sirve como una teoría de campo poderosa y eficaz que proporciona un marco integral para desentrañar la intrincada dinámica de la producción de quarkonio pesado. En esencia, NRQCD explota la naturaleza no relativista de los quarks pesados dentro de los quarkonios, lo que permite una expansión sistemática basada en la velocidad de los quarks pesados. Este enfoque sistemático facilita una separación clara entre las interacciones de corta distancia, que pueden calcularse de forma perturbativa, y los efectos de larga distancia que resumen los aspectos no perturbativos de la formación de quarkonia [99, 102, 103].

La eficacia de NRQCD radica en su capacidad de incorporar sistemáticamente correcciones relativistas mediante una expansión de las potencias de la velocidad de los quarks pesados. Este enfoque matizado permite una descripción más precisa de los estados de quarkonio, especialmente en escenarios donde los efectos relativistas se vuelven significativos. NRQCD ha demostrado ser particularmente hábil en la descripción de varios aspectos de la física del quarkonio, incluida la producción, las desintegraciones y los fenómenos de polarización.

NRQCD encuentra una amplia aplicación en el estudio de la producción de quarkonio en colisiones de alta energía. Su exitosa integración en el formalismo de los teoremas de factorización, como se analizó anteriormente, mejora la precisión de las predicciones teóricas al proporcionar una base sólida para la separación de la física de corta y larga distancia.

Los avances recientes en NRQCD implican un refinamiento continuo del tratamiento de correcciones de orden superior y la incorporación de efectos no perturbativos adicionales. Estos desarrollos no sólo contribuyen a la precisión teórica de las predicciones del NRQCD sino que también amplían su aplicabilidad a una gama más amplia de procesos y escalas de energía [104, 105].

## 1.5. Modelo de CGC

En el ámbito de física de altas energías, el estudio de la fotoproducción exclusiva de quarkonio sirve como puerta de entrada para desentrañar las complejidades de las interacciones fuertes, particularmente en el contexto de los quarkonios pesados. Para profundizar en este intrincado dominio, se vuelve indispensable un marco teórico como lo es el del “*Color Glass Condensate*”. La motivación para adoptar un modelo como es el de CGC surge de la insuficiencia de los marcos convencionales para describir regímenes de altas energías y pequeños  $x_B$  de QCD. A medida que las energías aumentan y las fracciones de momento se vuelven pequeñas, el enfoque de PDFs se vuelve insuficiente. El modelo CGC procedente del trabajo fundamental de Larry McLerran y Raju Venugopalan [33], se basa en ideas anteriores relacionadas con la saturación de partones y la evolución de la densidad de gluones, proporcionando un marco integral para comprender QCD a altas energías. En esencia, el modelo CGC postula que a altas energías y pequeñas  $x_B$ , la densidad de gluones dentro de un hadrón o núcleo se vuelve tan grande que forma un “*condensado de vidrio de color*”. Este condensado representa un denso conjunto de gluones con fuertes campos de color, lo que introduce una perspectiva novedosa sobre el comportamiento de QCD en condiciones extremas [106].

### 1.5.1. “Ingredientes” de CGC

Los componentes clave del modelo CGC, que permiten una buena descripción de esto son la física de saturación, que describe el fenómeno en el que las densidades de gluones alcanzan un máximo, evitando un mayor aumento en valores de  $x_B$  pequeños [107]; las líneas de Wilson y las densidades de carga de color [108], y las ecuaciones de Balitsky-Kovchegov (BK) [109] y Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, y Leonidov, Kovner (JIMWLK) [110], las cuales gobiernan la evolución de las distribuciones de gluones en el límite de alta energía dentro del marco de CGC.

### *Física de Saturación para CGC*

En el ámbito de QCD, la física de la saturación es un fenómeno fascinante que se desarrolla con valores pequeños de  $x_B$  y altas energías. En el centro de este concepto está la idea de saturación de gluones, un estado en el que la densidad de gluones dentro de un hadrón alcanza su máximo, frenando una mayor expansión. Este fenómeno está estrechamente ligado a la evolución no lineal de QCD, donde un delicado equilibrio entre los procesos de emisión y absorción de gluones conduce al establecimiento de una escala de saturación, denominada  $Q_s(y)$  [106] la cual caracteriza la escala de energía en la que se saturan las densidades de gluones y las interacciones entre gluones se vuelven prominentes [111]. Esta escala depende de la diferencia de rapidez entre el proyectil y el objetivo  $y$  [112]:

$$y \equiv \ln \frac{q^+}{q_0^+}, \quad (1.14)$$

Por debajo de esta escala, la densidad de gluones no está saturada, lo que permite la evolución de QCD convencional. Sin embargo, más allá de la escala de saturación, los efectos de saturación ocupan un lugar central, imponiendo limitaciones al crecimiento de la densidad de gluones. Esta interacción matizada de dinámicas caracteriza la esencia de la física de la saturación [107].

En el contexto del modelo CGC, la física de saturación asume un papel central. El marco CGC proporciona una lente teórica a través de la cual se pueden entender los campos de color dentro de un hadrón. Al incorporar la intrincada dinámica de la saturación, el modelo CGC se convierte en una poderosa herramienta para explorar y predecir procesos que se desarrollan en este medio gluónico de alta densidad [113].

Las implicaciones de la física de la saturación son de gran alcance e influyen en los observables en los procesos de dispersión de alta energía. Fenomenológicamente, la saturación afecta cantidades fundamentales como la sección eficaz total, las funciones de estructura y la distribución de las partículas producidas en colisiones a energías elevadas. Por lo tanto, una comprensión integral de la física de saturación dentro del modelo CGC no solo enriquece nuestro marco teórico sino que también proporciona información valiosa sobre el panorama experimental de los procesos QCD de alta energía [106].

### *Lineas de Wilson y las Densidades de Carga de Color*

Las líneas de Wilson son exponenciales ordenadas por trayectorias de los campos de gluones a lo largo de una determinada trayectoria. En el marco CGC, estas codifican información sobre la descripción de la distribución espacial de las cargas de color dentro de un hadrón, y sobre su evolución. Esta distribución se vuelve más densa a pequeños  $x_B$ , lo que lleva a los efectos de saturación observados en el marco CGC [33].

En el límite de alta energía, el uso de líneas de Wilson se vuelve esencial para describir las interacciones entre partones en el hadrón [114].

La naturaleza no-Abeliana de QCD conduce al desarrollo de múltiples líneas de Wilson, cada una asociada con una carga de color diferente.

Las funciones de correlación de estas líneas de Wilson capturan información esencial sobre la dinámica de las cargas de color dentro del hadrón [84].

Por otro lado, la densidad de carga de color  $\rho^a(x)$  es una cantidad fundamental dentro del modelo CGC y está relacionado con el valor esperado del producto de las líneas Wilson  $V$ . Por simplicidad, consideremos una carga de color en representación fundamental. La línea de Wilson a lo largo de un camino tipo luz  $C$  puede escribirse como:

$$V(C) = \mathcal{P} \exp \left( ig \int_C dx^\mu A_\mu^a(x) t^a \right), \quad (1.15)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento de QCD,  $A_\mu^a(x)$  es el campo del gluón,  $t^a$  son las matrices de color en la representación fundamental, y  $\mathcal{P}$  denota orden de camino [106]. La densidad de carga de color  $\rho^a(x)$  se relaciona a los valores esperados como:

$$\langle \rho^a(x) \rangle = -ig \langle U^\dagger(x) t^a U(x) \rangle, \quad (1.16)$$

donde los brackets denotan el promedio sobre el vacío de QCD. El campo del gluón  $A_\mu^a(x)$  puede expresarse en términos de la densidad de carga de color usando la restricción de la ley de Gauss:

$$D_\mu^{ab} F^{b\mu}(x) = \rho^a(x), \quad (1.17)$$

donde  $D_\mu^{ab}$  es la derivada covariante, y  $F^{b\mu}(x)$  es el tensor fuerza del campo del gluón.

Los valores esperados que involucran líneas de Wilson y densidades de carga de color se vuelven más complicados cuando se consideran funciones de correlación de puntos más altos y representaciones más altas de cargas de color. La evolución de estas cantidades con energía a menudo se describe mediante las ecuaciones de Balitsky-Kovchegov (BK) o JIMWLK, que gobiernan la dinámica de los correlacionadores de líneas de Wilson.

### *Ecuaciones de BK y JIMWLK*

La ecuación de Balitsky-Kovchegov (BK) es una ecuación de evolución no lineal que describe la evolución de la amplitud de dispersión de un dipolo en un objetivo denso, como un hadrón en el límite de alta energía. La ecuación de BK incorpora los efectos de la saturación de gluones y es una herramienta clave para comprender el comportamiento de pequeños  $x_B$  de las distribuciones de partones. La ecuación de BK está directamente relacionada con la evolución de los correladores de líneas de Wilson, que representan la densidad de carga de color en un hadrón. El correlador de la línea de Wilson, denotado como  $S(y, x_Q, x_{\bar{Q}}) = \langle \text{Tr} V(x_Q) V^\dagger(x_{\bar{Q}}) \rangle$  caracteriza cómo se distribuyen las cargas de color en diferentes coordenadas transversales  $x_Q, x_{\bar{Q}}$ . En su forma no integrada, esta ecuación viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial y} S(y, x_Q, x_{\bar{Q}}) = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2z \frac{(x_Q - x_{\bar{Q}})^2}{(x_Q - z)^2 (x_{\bar{Q}} - z)^2} [S(y, x_Q, z) S(y, z, x_{\bar{Q}}) - S(y, x_Q, x_{\bar{Q}})], \quad (1.18)$$

donde  $\bar{\alpha}_s = \alpha_s N_c / \pi$ ,  $N_c$  es el número de colores (en este caso se requiere  $N_c \gg 1$ )  $y$  es la variable de rapidez ya mencionada,  $S(y, x_Q, x_{\bar{Q}})$  es el correlador de la línea de

Wilson que representa la distribución de carga de color, y  $x_Q, x_{\bar{Q}}$  son las coordenadas transversales de quarks-antiquark [110, 112].

La ecuación (1.18) representa la evolución del dipolo original  $(x_Q, x_{\bar{Q}})$  a  $N_c \gg 1$  separándose en dos nuevos dipolos  $(x_Q, z)$  y  $(z, x_{\bar{Q}})$ , donde la variable  $z$  representa la coordenada transversal del gluón emitido al momento de interactuar con el objetivo [112].

Para el caso de las ecuaciones de Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner (JIMWLK), estas representan un set completo de ecuaciones de evolución de los correladores generalizados [115]. Estas tienen la forma de *Ecuaciones de Renormalización de Grupo* (RGE) [116] en su forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial \ln 1/x} \bar{\mathcal{Z}}[J] = \alpha_s \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{J}_u \mathbf{J}_v \bar{\chi}_{uv} \left[ \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}} \right] + \mathbf{J}_u \bar{\sigma}_u \left[ \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}} \right] \right\} \bar{\mathcal{Z}}[J] \quad (1.19)$$

donde  $\bar{\mathcal{Z}}[J]$  es un funcional,  $\mathbf{J} = (J^\dagger, J)$ , las componentes del elemento  $\bar{\chi}$  corresponden a los diagramas de intercambio de gluones y las de  $\bar{\sigma}$  son las correcciones de auto energía. Una interpretación que se le puede dar a estas ecuaciones, es verlas como una evolución en la que los correladores de los operadores  $U$  cambian a través de un conjunto infinito de RGEs acopladas. Como se habla de correladores  $U$  promediados, esto implica un cambio en este procedimiento de promediado a medida que corre  $x$ . A su vez, esto no es más que un cambio de las configuraciones dominantes que contribuyen a este promedio y, por tanto, un cambio en la función de onda objetivo [115]. Cabe mencionar que, para el caso particular, la ecuación (1.19) contiene la ecuación de BK.

### 1.5.2. Amplitud de Dispersión en el Modelo CGC

La amplitud de dispersión hacia adelante  $N(x, r, b)$  está estrechamente relacionado con la densidad de gluones en el modelo CGC. Físicamente, un valor grande de  $N(x, r, b)$  implica una mayor probabilidad de encontrar cargas de color dentro del hadrón en una posición transversal específica. Esto, a su vez, corresponde a una mayor densidad de gluones. La evolución de  $N(x, r, b)$  con energía creciente o  $x_B$  decreciente se rige por la ecuación de Balitsky-Kovchegov (BK) y captura los efectos de saturación, evitando el crecimiento ilimitado de la densidad de gluones en  $x_B$  pequeños [113, 116]. El parámetro de impacto  $b$ , que representa la separación transversal entre quark y antiquark en la dispersión de dipolo juega un papel crucial en la caracterización de la distribución espacial de las cargas de color dentro del hadrón [84].

Una relación más clara y generalizada entre  $N(x, r, b)$  y la densidad de gluones  $xg(x, \mu^2)$  (donde  $\mu^2$  es alguna escala) puede apreciarse al analizar la sección eficaz diferencial dependiente del parámetro de impacto  $b$  del modelo fenomenológico “bSat” [117, 118]:

$$\frac{d\sigma_{Q\bar{Q}}}{d^2b} \equiv 2 [1 - \text{Re}S(x, r, b)] \equiv 2N(x, r, b) \quad (1.20)$$

$$\frac{d\sigma_{Q\bar{Q}}}{d^2b} = 2 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\pi^2}{2N_c} r^2 \alpha_s(\mu^2) xg(x, \mu^2) T(b) \right) \right] \quad (1.21)$$

$$T(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(b, z) \quad (1.22)$$

donde  $T(b)$  es la función de *grosor*. Para pequeñas densidades de gluones existe una proporcionalidad lineal, pero para densidades mucho mayores, existe saturación y  $N \rightarrow 1$ .

A modo de resumen, podemos decir que la escala de saturación  $Q_s$  establece la escala de energía en la que los efectos de saturación de gluones se vuelven significativos. A medida que aumenta la energía, crece la densidad de gluones y, en la escala de saturación,  $N(x, r, b)$  se acerca su máximo valor, señalando el inicio de la física de saturación. Más allá de esta escala, la amplitud se satura, impidiendo un mayor aumento de la densidad de gluones. Este fenómeno de saturación es una característica clave del modelo CGC y tiene implicaciones para los procesos que involucran la producción pesada de quarkonio a altas energías [106, 116].

### 1.5.3. Aplicación de CGC en Procesos Exclusivos

El modelo Color Glass Condensate (CGC) es particularmente relevante para la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonios pesados debido a sus características únicas en el régimen de alta energía. En procesos que involucran cargas de color densas, como la fotoproducción de pares de quarkonios pesados, el modelo CGC se vuelve crucial debido a su capacidad para describir el medio gluónico de alta densidad dentro de los hadrones en valores pequeños de  $x_B$ . En este régimen, los efectos de saturación de gluones se vuelven prominentes, impidiendo un aumento ilimitado en la densidad de gluones [106].

El comportamiento de pequeños  $x_B$  de las distribuciones de partones, especialmente los gluones, es un aspecto clave del modelo CGC y es esencial para comprender procesos exclusivos a altas energías. En el caso de pares de quarkonios pesados, donde la escala de energía es alta y la cinemática implica pequeñas fracciones de momento, el modelo CGC proporciona información sobre el aumento de la densidad de gluones [106, 113].

El uso de líneas de Wilson en el modelo CGC para representar la distribución de carga de color dentro de un hadrón es crucial para procesos exclusivos. En la fotoproducción de pares de quarkonio pesados, la densidad de carga de color juega un papel importante en la determinación de las amplitudes de dispersión. La descripción detallada del modelo CGC de la distribución de carga de color permite una comprensión integral de la dinámica involucrada en procesos exclusivos [108].

Además, el modelo CGC hace predicciones específicas para la amplitud de dispersión directa  $N(x, r, b)$ , donde  $x$  es la fracción de momento longitudinal,  $r$  es el tamaño del dipolo y  $b$  es el parámetro de impacto. Esta amplitud es un factor clave en los procesos exclusivos, y los conocimientos del modelo CGC sobre su evolución y comportamiento proporcionan predicciones valiosas para la producción de quarkonios pesados [113, 116].

En resumen, la incorporación del modelo CGC de los efectos de saturación de gluones, su tratamiento del comportamiento de pequeños  $x_B$  y su uso de líneas de Wilson para representar la densidad de carga de color lo convierten en un marco poderoso para comprender procesos exclusivos de fotoproducción que involucran pares de quarkonios pesados. Las predicciones del modelo para la amplitud de dispersión directa contribuyen aún más a su importancia en este contexto.



## 2. EVALUACIÓN DE SECCIÓN EFICAZ

### 2.1. Producción Exclusiva de par de mesones

#### 2.1.1. Cinemática del proceso

Para establecer adecuadamente el estudio de este proceso exclusivo, es esencial comprender la cinemática del proceso en cuestión. En este contexto, se optó por utilizar una descomposición de momento basada en el marco de cono de la luz, una elección que guarda similitudes con investigaciones previas que abordaron la producción de pares de piones [119-123] y la producción de un solo mesón [86, 124-139]. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que, a diferencia del pión, el quarkonio posee una masa significativamente mayor, lo que impide tratarla simplemente como una corrección de "twist" de orden superior. Además, en el caso de la fotoproducción, esta masa puede emerger como una de las escalas clave en el problema abordado. A continuación y desde ahora en adelante se utilizará la siguiente notación:  $q$  para el momento del fotón,  $P$  para el momento del protón antes de la colisión y  $P'$  para el momento posterior a esta. De manera similar,  $p_1, p_2$  para el 4-momento del quarkonio pesado producida. Para trabajar de manera generalizada, se asume que el fotón tiene una virtualidad distinta de cero  $-q^2 = Q^2$ , para luego evaluar para la fotoproducción como  $Q^2 = 0$ . Otra variable a tomar en cuenta es la transferencia de momento para el protón  $\Delta = P' - P$ , y  $t \equiv \Delta^2$  para su cuadrado. Teniendo identificadas estas variables, podemos escribir la expansión de momento de cono de luz en el marco de laboratorio como:

$$q = \left( q^+, \frac{Q^2}{2q^+}, \mathbf{0}_\perp \right), \quad q^+ = E_\gamma + \sqrt{E_\gamma^2 + Q^2} \approx 2E_\gamma \quad (2.1)$$

$$P = \left( \frac{m_N^2}{2P^-}, P^-, \mathbf{0}_\perp \right), \quad P^- = E_p + \sqrt{E_p^2 - m_N^2} \approx 2E_p \quad (2.2)$$

$$p_a = \left( M_a^\perp e^{y_a}, \frac{M_a^\perp e^{-y_a}}{2}, \mathbf{p}_a^\perp \right), \quad a = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$M_a^\perp \equiv \sqrt{M_a^2 + (\mathbf{p}_a^\perp)^2}, \quad (2.4)$$

donde  $y_a$  es la rapidez del quarkonio  $a$ ,  $\mathbf{p}_a^\perp$  es su momento transversal, y  $M_a$  es su masa. Utilizando la propiedad de conservación del 4-momento, podemos obtener la siguiente expresión para la transferencia de momento del protón:

$$\begin{aligned} \Delta = P' - P &= q - p_1 - p_2 = \\ &= \left( q^+ - M_1^\perp e^{y_1} - M_2^\perp e^{y_2}, \frac{Q^2}{2q^+} - \frac{M_1^\perp e^{-y_1} + M_2^\perp e^{-y_2}}{2}, -\mathbf{p}_1^\perp - \mathbf{p}_2^\perp \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

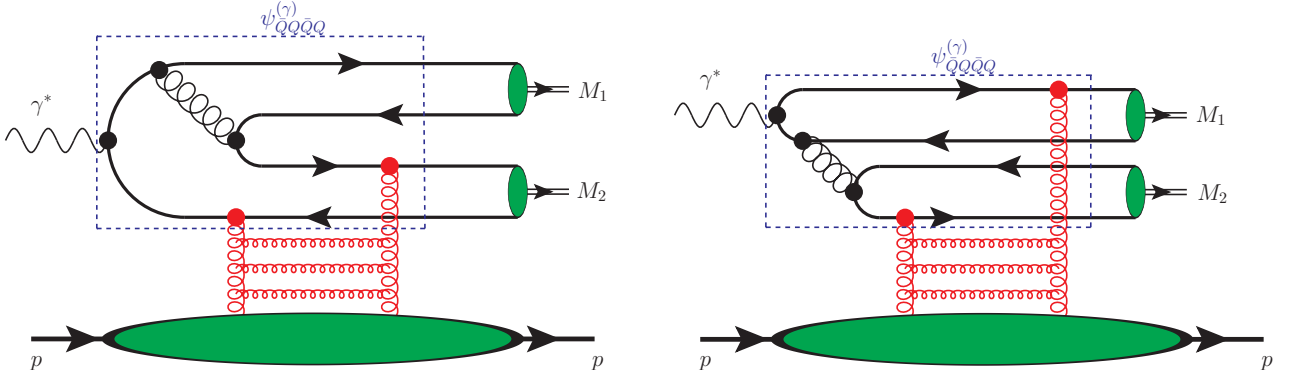


Fig. 2.1: Diagramas tipo A (izquierda) y tipo B (derecha) que contribuyen en el  $LO$  de  $\alpha_s(m_Q)$  en la fotoproducción exclusiva de pares de quarkonio. La interacción eikonal se muestra como un intercambio de gluones de canal  $t$  representado por las líneas rojas. El rectángulo de línea punteada muestra en ambos casos la parte del diagrama en el cual, en ausencia de interacción eikonal, contribuye a la componente  $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$  de la función de onda del fotón  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$ .

y de esta forma la variable  $t \equiv \Delta^2$  :

$$\begin{aligned} t = \Delta^2 &= \\ &= (q^+ - M_1^\perp e^{y_1} - M_2^\perp e^{y_2}) \left( \frac{Q^2}{q^+} - M_1^\perp e^{-y_1} - M_2^\perp e^{-y_2} \right) - (\mathbf{p}_1^\perp + \mathbf{p}_2^\perp)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El 4-momento del protón posterior a la colisión está dado entonces por:

$$\begin{aligned} P' = P + \Delta &= \\ &= \left( q^+ + \frac{m_N^2}{2P^-} - M_1^\perp e^{y_1} - M_2^\perp e^{y_2}, P^- + \frac{Q^2}{2q^+} - \frac{M_1^\perp e^{-y_1} + M_2^\perp e^{-y_2}}{2}, -\mathbf{p}_1^\perp - \mathbf{p}_2^\perp \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Una de las condiciones que permiten simplificar el problema es la de *onshellness*, es decir, que satisface la ecuación de energía-momento  $(P + \Delta)^2 = m_N^2$ , la cual nos permite obtener una restricción adicional:

$$q \cdot P \equiv q^+ P^- = P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}) - \frac{m_N^2 + t}{2} + \frac{m_N^2}{4P^-} \left( M_1^\perp e^{-y_1} + M_2^\perp e^{-y_2} - \frac{Q^2}{q^+} \right). \quad (2.8)$$

Resolviendo ahora la ecuación (2.8) con respecto a  $q \cdot P$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} q \cdot P &= \frac{1}{2} \left( P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}) - \frac{m_N^2 + t}{2} + \frac{m_N^2}{4P^-} (M_1^\perp e^{-y_1} + M_2^\perp e^{-y_2}) \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}) - \frac{m_N^2 + t}{2} + \frac{m_N^2}{4P^-} (M_1^\perp e^{-y_1} + M_2^\perp e^{-y_2}) \right)^2 + Q^2 m_N^2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Lo cual nos permite expresar la energía del fotón  $E_\gamma \approx q^+/2$  en términos de las variables definidas anteriormente  $(y_a, \mathbf{p}_a^\perp)$  del quarkonio producido. En la cinemática de los experimentos que se consideran en este escrito, los valores típicos de energía son  $q^+, P^- \gg \{Q, M_a, m_N, t\}$ , y es por esta razón que la ecuación (2.9) puede ser aproximada a:

$$q \cdot P \equiv q^+ P^- \approx P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}), \quad \text{o bien} \quad (2.10)$$

$$q^+ \approx M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2} \quad (2.11)$$

Al comparar las ecuaciones (2.3) y (2.8) podemos observar que, a altas energías, el momento de los quarkonios producidos comparten la componente  $q^+$  del momento del fotón, mientras que la transferencia de momento al protón (2.7) posee una componente+ pequeña y despreciable, de acuerdo con lo esperado en el marco de la aproximación eikonal. Las expresiones (2.9 y 2.10) nos permiten, valga la redundancia, expresar la variable de Bjorken  $x_B$  en su definición convencional  $x_B = Q^2/2(p \cdot q) \approx Q^2/(Q^2 + W^2)$ , donde  $W^2$  representa la energía invariante de la colisión  $\gamma p$ . En el contexto de investigaciones fenomenológicas relacionadas con la fotoproducción de pares de quarkonio pesados [117, 118, 140, 141], suele considerarse como supuesto fundamental que, para quarks pesados, tanto las densidades de gluones como las amplitudes de dipolo deben estar intrínsecamente ligadas a lo que se denomina la variable de "rescaling":

$$x = x_B \left( 1 + \frac{(4m_Q)^2}{Q^2} \right) = \frac{Q^2 + (4m_Q)^2}{2(p \cdot q)}, \quad (2.12)$$

la cual fue introducida para abordar de mejor manera la descripción de la producción de quarkonia pesada "near-threshold".

Es comúnmente aceptado que el marco del dipolo de color se emplea preferentemente fuera de la región de cinemática *near-threshold*. No obstante, la sustitución de la variable  $x$  en lugar de  $x_B$  para quarks pesados ha demostrado una mejora notable en la capacidad del enfoque dipolar para predecir con precisión los resultados observados en experimentos. Cabe señalar que en el límite de Bjorken, la variable  $x$  y  $x_B$  coinciden, lo que resalta aún más la utilidad de este enfoque en la comprensión de los fenómenos estudiados. Para el régimen de fotoproducción, es decir, pequeños  $Q^2 \approx 0$  la variable  $x_B$  se desvanece, mientras que  $x$  se mantiene finito. Esta está dada por la expresión aproximada:

$$\begin{aligned} x = \frac{Q^2 + (4m_Q)^2}{2(p \cdot q)} \Big|_{Q \approx 0} &\approx \frac{8m_Q^2}{P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2})} + \mathcal{O} \left( \frac{Q^2}{m_Q^2} \right) \\ &\approx \frac{4m_Q^2}{E_p (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2})}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En este estudio, se centra el interés en la producción simultánea de ambos quarkonios en condiciones de alta energía a través de colisiones de fotones y protones, con una atención particular en las regiones de rapidez central en el marco de laboratorio. En esta cinemática la variable  $x$  es muy pequeña, lo cual sugiere que la amplitud de este proceso debe ser estudiada en marcos con saturación incorporada, como lo es el del "CGC".

En la aproximación de fotoproducción, la energía invariante  $W^2$ , mencionada anteriormente, puede escribirse como:

$$W^2 \equiv s_{\gamma p} = (q + P)^2 = -Q^2 + m_N^2 + 2q \cdot P \approx -m_N^2 + P^- (M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}), \quad (2.14)$$

mientras que la masa invariante de las quarkonia pesados producidos esta dada por:

$$M_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2(M_1^\perp M_2^\perp \cosh(y_1 - y_2) - \mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{p}_2^\perp). \quad (2.15)$$

En colisiones electrón-protón, la sección eficaz para la producción de pares de mesones pesados está mayormente influenciada por la interacción de un fotón único entre las componentes leptónicas y hadrónicas involucradas en el proceso, por ello esta puede ser representada como:

$$\frac{d\sigma_{ep \rightarrow eM_1M_2p}}{dQ^2 dy_1 d^2\mathbf{p}_1^\perp dy_2 d^2\mathbf{p}_2^\perp} = \frac{\alpha_{em}}{\pi Q^2} \left[ (1-y) \frac{d\sigma_L}{dy_1 d^2\mathbf{p}_1^\perp dy_2 d^2\mathbf{p}_2^\perp} + \left(1-y + \frac{y^2}{2}\right) \frac{d\sigma_T}{dy_1 d^2\mathbf{p}_1^\perp dy_2 d^2\mathbf{p}_2^\perp} \right], \quad (2.16)$$

en donde usamos la notación estándar de la " *Dispersión Inelástica Profunda*" (DIS)  $y$  para la fracción de energía del electrón que pasa al fotón, también llamada *elasticidad*. Los subíndices  $L, T$  en (2.16) representan las contribuciones de fotones polarizados longitudinal y transversalmente respectivamente. La estructura de esta ecuación sugiere que la contribución dominante de la sección eficaz proviene de la región de pequeños  $Q^2$ . En este régimen cinemático la contribución de  $d\sigma_L$  esta suprimida en comparación al termino  $d\sigma_T$ . Los datos experimentales de ZEUS [142] y H1 [143] corroboran esta suposición. En estos experimentos se encontró que para la producción de un único quarkonio en la región de  $Q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$ , la sección eficaz longitudinal  $d\sigma_L$  representa menos de un 10% de la sección transversal  $d\sigma_T$ . Es por esto que desde este punto se ignorará completamente la sección eficaz longitudinal. La sección relevante  $d\sigma_T$  esta dada por:

$$\frac{d\sigma_T}{dy_1 d^2|\mathbf{p}_1^\perp|^2 dy_2 d^2|\mathbf{p}_2^\perp|^2 d\phi} \approx \frac{1}{256\pi^4} |\mathcal{A}_{\gamma Tp \rightarrow M_1M_2p}|^2 \delta\left(\frac{M_1^\perp e^{y_1} + M_2^\perp e^{y_2}}{q^+} - 1\right) \quad (2.17)$$

donde  $\mathcal{A}_{\gamma Tp \rightarrow M_1M_2p}$  es la amplitud de procesos exclusivos, inducido por un fotón con polarización transversal, y  $\phi$  es el angulo entre los vectores  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  en el plano transversal. La función  $\delta$  en (2.17) refleja la conservación de componente- $+$  del momento, como se mencionó en la ecuación (2.8). De manera similar, para *hadroproducción* exclusiva  $pA \rightarrow pAM_1M_2$  en cinemática ultraperiferal, podemos obtener la sección eficaz usando la aproximación de fotón equivalente (Weizsäcker-Williams),

$$\frac{d\sigma(p + A \rightarrow p + A + M_1 + M_2)}{dy_1 d^2\mathbf{p}_1^\perp dy_2 d^2\mathbf{p}_2^\perp} = \int dn_\gamma(\omega \equiv E_\gamma, \mathbf{q}_\perp) \frac{d\sigma_T(\gamma + p \rightarrow \gamma + p + M_1 + M_2)}{dy_1 d^2\mathbf{p}_1^* dy_2 d^2\mathbf{p}_2^*} \quad (2.18)$$

donde  $dn_\gamma(\omega \equiv E_\gamma, \mathbf{q}_\perp)$  es la densidad de espectro del flujo de fotones creados por el núcleo,  $\mathbf{q}_\perp$  es el momento transversal del fotón con respecto al núcleo, y

la energía del fotón  $E_\gamma$  puede relacionarse a la cinemática del quarkonio producido usando las ecuaciones. (2.9, 2.10). La forma explícita de la expresión  $dn_\gamma(\omega \equiv E_\gamma, \mathbf{q}_\perp)$  puede encontrarse en [144]. Los momentos  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i^\perp - \mathbf{q}_\perp$  son las partes transversales del momento del quarkonio con respecto al fotón producido. Debido a factores de forma nucleares, los valores típicos de momento  $\mathbf{q}_\perp$  son gobernados por el radio nuclear  $R_A$  por lo que son bastante pequeños,  $\langle \mathbf{q}_\perp^2 \rangle \sim \langle Q^2 \rangle \sim \langle R_A^2 \rangle^{-1} \lesssim (0,2 \text{ GeV}/A^{1/3})^2$ . Por esta razón, para iones muy pesados ( $A \gg 1$ ) se espera que la dependencia de  $p_T$  en la sección eficaz al lado izquierdo de la ecuación (2.18) repite la dependencia de  $p_T$  de la sección eficaz en la integral del lado derecho. Para el caso particular y de alta relevancia experimental de la sección eficaz integrada en  $\mathbf{p}^\perp$ , la expresión (2.18) se simplifica y puede escribirse como:

$$\frac{d\sigma(p + A \rightarrow p + A + M_1 + M_2)}{dy_1 dy_2} = \int dE_\gamma \frac{dN_\gamma(\omega \equiv E_\gamma)}{dE_\gamma} \frac{d\sigma_T(\gamma + p \rightarrow \gamma + p + M_1 + M_2)}{dy_1 dy_2}, \quad (2.19)$$

donde

$$N_\gamma(\omega) \equiv \int d^2 \mathbf{q}_\perp \frac{dn_\gamma(\omega, \mathbf{q}_\perp)}{d\omega d^2 \mathbf{q}_\perp}. \quad (2.20)$$

En las secciones que vienen, se revisarán las reglas para calcular amplitudes *duras*, para luego evaluar la amplitud  $\mathcal{A}_{\gamma TP \rightarrow M_1 M_2 p}$  usada en (2.17), la cual determina la sección eficaz de los procesos de fotoproducción.

### 2.1.2. Scattering de altas energías en el marco de dipolo de color

Las reglas generales para el cálculo de distintas amplitudes *duras* en términos de la amplitud del dipolo de color singlete fueron estudiadas en [32, 34-38] y pueden describirse brevemente siguiendo el enfoque de Iancu-Mueller [107], el cual está basado en el marco eikonal de altas energías, y por ende las coordenadas transversales de los partones y sus helicidades se mantienen en esencia inertes durante la propagación en el campo gluónico del objetivo.

La escala *dura*, que controla la interacción de los quarks pesados con el campo de gluones es su masa  $m_Q$ , por lo que en el límite de masa más pesada es posible darle un tratamiento perturbativo a esta interacción. Formalmente se debe desarrollar una expansión sobre  $\alpha_s(m_Q) \ll 1$ . En el caso de los pequeños dipolos de singlete de color la interacción esta adicionalmente suprimida por el tamaño del dipolo,  $r \sim 1/m_Q$  para que la interacción con los gluones perturbativos sea suprimido por lo menos como  $\sim \alpha_s(m_Q)/m_Q$ . Sin embargo, la interacción de los gluones consigo mismos, al igual que con quarks livianos, se mantiene fuertemente no-perturbativa en el régimen más saturado, por lo que se espera que la dinámica de la amplitud del dipolo deberían satisfacer la ecuación no lineal de Balitsky-Kovchegov [40, 109]. Como se menciono previamente, a muy altas energías es posible usar la aproximación eikonal. La coordenadas transversales de los partones de alta energía producidos por el proyectil se mantienen en esencia "congelados" durante la propagación en el dipolo del campo gluónico del objetivo. De manera similar, es posible despreciar completamente el cambio de las helicidades de los quarks debido a interacciones eikonales. En el marco de Iancu-Mueller, la interacción del dipolo con el objetivo esta descrito por los elementos de la matriz  $S$  [43]

$$S(y, \mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_{\bar{Q}}) = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr} (V^\dagger(\mathbf{x}_Q)V(\mathbf{x}_{\bar{Q}})) \rangle \quad (2.21)$$

donde  $y = \ln(1/x)$  es la rapidez del dipolo, y  $V(\mathbf{x}_Q), V(\mathbf{x}_{\bar{Q}})$ , son las líneas de Wilson que describen la dispersión del quark y antiquark con el campo de color del hadrón, con coordenadas transversales  $\mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_{\bar{Q}}$  de los partones. Las líneas de Wilson mencionadas pueden expresarse como:

$$V(\mathbf{x}_\perp) = P \exp \left( ig \int dx^- A_a^+(x^-, \mathbf{x}_\perp) t^a \right), \quad (2.22)$$

donde  $A_\mu^a$  es el campo gluónico en el hadrón. La amplitud de dipolo dependiente del parámetro de impacto  $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$  se relaciona con  $S(y, \mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_{\bar{Q}})$  de la forma:

$$N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) = 1 - S(y, \mathbf{x}_Q, \mathbf{x}_{\bar{Q}}), \quad (2.23)$$

donde  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{\bar{Q}}$  es el tamaño transversal del dipolo,  $\mathbf{b} \equiv z \mathbf{x}_Q + (1-z)\mathbf{x}_{\bar{Q}}$  es la posición transversal del centro de masa del dipolo, y  $z$  es la fracción de momento del dipolo llevado por el quark  $Q$ . Como la interacción del quark pesado con los gluones es débil, es posible realizar una expansión en (2.22) y reescribirlo sobre el "orden principal (LO)" de  $\alpha_s(m_Q)$  como:

$$N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) \approx \frac{1}{2} [\gamma_a(\mathbf{x}_Q) - \gamma_a(\mathbf{x}_{\bar{Q}})]^2. \quad (2.24)$$

En esta aproximación, podemos ver que la interacción efectiva de quark o antiquark con el campo gluónico del protón puede ser descrito por el factor  $\pm i t^a \gamma_a(\mathbf{x}_\perp)$ , donde  $\mathbf{x}_\perp$  es la coordenada transversal del quark,  $\gamma_a$  esta dado por:

$$\gamma_a(\mathbf{x}) = g \int dx^- A_a^+(x^-, \mathbf{x}), \quad (2.25)$$

y  $t_a$  son los generadores del grupo de color de QCD perturbativo (pQCD) en la representación fundamental. Desde este punto, estas interacciones serán referidas como "intercambio de pomeron de canal-t", asumiendo implícitamente que esto puede incluir cascadas de partículas. La sección eficaz del dipolo (2.24) puede reescribirse como:

$$\gamma_a(\mathbf{x}_1) \gamma_a(\mathbf{x}_2) = -N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) + \frac{\rho(\mathbf{x}_1) + \rho(\mathbf{x}_2)}{2}, \quad (2.26)$$

donde se define que  $\rho(\mathbf{x}_a) \equiv |\gamma_a(\mathbf{x})|^2$ , y  $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}$  son la distancia y centro de masa del par quark-antiquark ubicados en los puntos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ . Para varios tipos de procesos, la contribución  $\sim \rho(\mathbf{x}_i)$  se cancela, por lo que la amplitud puede ser representada como una combinación lineal de las amplitudes de dipolo  $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ . La amplitud de los procesos considerados en esta tesis pueden ser representadas como una combinación bilinear de términos con estructura  $\sim [\gamma(\mathbf{x}_i) - \gamma(\mathbf{x}_j)]$ . Para el caso particular de este trabajo, (2.26) permite obtener algunas identidades entre las expresiones bilineares.

$$[\gamma_a(\mathbf{x}_1) - \gamma(\mathbf{x}_2)] [\gamma_a(\mathbf{x}_3) - \gamma_a(\mathbf{x}_4)] = N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) + N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{14}) - N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) - N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24}), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
 [\gamma_a(\mathbf{x}_1) - \gamma_a(\mathbf{x}_2)] [\gamma_a(\mathbf{x}_3) + \gamma_a(\mathbf{x}_4) - 2\gamma_a(\mathbf{x}_5)] &= N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) + N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24}) \\
 &\quad - N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) - N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{14}) \\
 &\quad + 2 [N(x, \mathbf{r}_{15}, \mathbf{b}_{15}) - N(x, \mathbf{r}_{25}, \mathbf{b}_{25})],
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$[\gamma_a(\mathbf{x}_1) + \gamma_a(\mathbf{x}_2) - 2\gamma_a(\mathbf{x}_3)]^2 = 2N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) + 2N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) - N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}), \tag{2.29}$$

donde  $\mathbf{r}_{ij}$  y  $\mathbf{b}_{ij}$  son la distancia relativa y el centro de masa del par de quark-antiquark ubicado en los puntos  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ . Para la sección eficaz dependiente del parámetro de impacto  $\mathbf{b}$ , las expresiones (2.24-2.28) pueden reescribirse como:

$$N(x, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^2b |\gamma_a(x, \mathbf{b} - z\mathbf{r}) - \gamma_a(x, \mathbf{b} + \bar{z}\mathbf{r})|^2. \tag{2.30}$$

$$\int d^2b \gamma_a(x, \mathbf{b}) \gamma_a(x, \mathbf{b} + \mathbf{r}) = -N(x, \mathbf{r}) + \underbrace{\int d^2b |\gamma_a(x, \mathbf{b})|^2}_{=\text{const}}. \tag{2.31}$$

El valor de la constante en la ecuación (2.31) está relacionado al comportamiento infrarrojo de la teoría y para los observables considerados, como veremos a lo largo de este trabajo, se cancela exactamente.

### 2.1.3. Amplitud del proceso en el marco de dipolo de color

Dado que el tiempo de formación de quarkonio pesado excede significativamente las dimensiones del protón, su formación se lleva a cabo en una región lejana a la de interacción. Como consecuencia, las amplitudes de los procesos de producción de quarkonio pueden ser concebidas como la convolución de las funciones de onda de los quarkonios con amplitudes asociadas a quarks pesados, lo que caracteriza la creación de pares de quarks pesados de pequeña masa invariante, prácticamente *onshell*, en el campo gluónico del *target*. De ahora en adelante, haremos referencia a estos quarks casi *onshell* como "quarks producidos", o "quarks de estado final". Para la producción exclusiva, la sección eficaz disminuye de manera sustancial en función del momento transversal ( $p_T$ ) del quarkonio producido, lo que lleva a la expectativa de que los quarkonios sean generados en su mayoría con momentos transversales de pequeña magnitud. En esta región cinemática es posible despreciar completamente la contribución del octeto de color, tal como fue discutido en los estudios de [145, 146]. Este supuesto nos entrega una descripción adecuada de la producción exclusiva de un quarkonio *singular* [117, 118, 141].

En el orden principal ( $LO$ ) sobre la constante  $\alpha_s(m_Q)$ , existe una cantidad considerable de diagramas de Feynman que contribuyen a la fotoproducción exclusiva de pares de mesones. Es conveniente identificarlos como una de las dos clases principales de diagramas representados en la Figura 2.1. Estos son definidos dependiendo el lugar donde se forman los quarkonios. Para el caso de diagramas donde quarkonios se forman desde líneas de quarks pesados distintas (mostrado al lado izquierdo de

la figura) los llamaremos de “tipo  $A$ ”. Para el caso opuesto (lado derecho), donde quarkonia se forman desde las mismas líneas de quarks pesados, serán referidos como diagramas de “tipo  $B$ ”. En ambos casos se asume que una sumatoria sobre todos los posibles gluones de canal  $t$  adjuntos a los partones en la parte superior de cada diagrama. Además se considera la inclusión de diagramas con líneas de quarks pesados invertidas, es decir, se considera la (“conjugación de cargas”). Como detalle adicional, en el diagrama tipo  $B$ , los gluones de canal  $t$  deben estar conectados a loops de quarks distintos para poder garantizar un *singlete de color*  $\bar{Q}Q$  en el estado final.

En el espacio de configuración, la interacción eikonal con el objetivo no afecta los parámetros de impacto de los partones. Como se mostró en la sección 2.1.2, la interacción puede reducirse a una multiplicación de factores dependientes del objetivo. Esto nos permite expresar la amplitud de todo el proceso como una convolución de la función de onda del componente de Fock de cuatro quarks  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$  del fotón con amplitudes de dipolo y funciones de onda de los quarkonios producidos. La amplitud del proceso  $\gamma^*p \rightarrow M_1M_2p$  puede representarse como:

$$\mathcal{A}(y_1, \mathbf{p}_1^\perp, y_2, \mathbf{p}_2^\perp) = \mathcal{A}_A(y_1, \mathbf{p}_1^\perp, y_2, \mathbf{p}_2^\perp) + \mathcal{A}_B(y_1, \mathbf{p}_1^\perp, y_2, \mathbf{p}_2^\perp), \quad (2.32)$$

donde  $\mathcal{A}_A$  y  $\mathcal{A}_B$  representan las contribuciones de los diagramas de tipo  $A$  y tipo  $B$  respectivamente. De manera explícita estas amplitudes se escriben de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_A(y_1, \mathbf{p}_1^\perp, y_2, \mathbf{p}_2^\perp) &= \prod_{i=1}^4 \left( \int d\alpha_i d^2 \mathbf{x}_i \right) \delta \left( \sum_k \alpha_k - 1 \right) \tilde{\sum}_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n) \times \\ &\times \left[ \Psi_{M_1}^\dagger(\alpha_{14}, \mathbf{r}_{14}) \Psi_{M_2}^\dagger(\alpha_{23}, \mathbf{r}_{23}) e^{i(\mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{b}_{14} + \mathbf{p}_2^\perp \cdot \mathbf{b}_{23})} \delta(y_1 - \mathcal{Y}_{14}) \delta(y_2 - \mathcal{Y}_{23}) \right. \\ &+ \left. \Psi_{M_1}^\dagger(\alpha_{23}, \mathbf{r}_{23}) \Psi_{M_2}^\dagger(\alpha_{14}, \mathbf{r}_{14}) e^{i(\mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{b}_{23} + \mathbf{p}_2^\perp \cdot \mathbf{b}_{14})} \delta(y_1 - \mathcal{Y}_{23}) \delta(y_2 - \mathcal{Y}_{14}) \right] \\ &\times \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q). \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B(y_1, \mathbf{p}_1^\perp, y_2, \mathbf{p}_2^\perp) &= \prod_{i=1}^4 \left( \int d\alpha_i d^2 \mathbf{x}_i \right) \delta \left( \sum_k \alpha_k - 1 \right) \tilde{\sum}_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n) \times \\ &\times \left[ \Psi_{M_1}^\dagger(\alpha_{12}, \mathbf{r}_{12}) \Psi_{M_2}^\dagger(\alpha_{34}, \mathbf{r}_{34}) e^{i(\mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{b}_{12} + \mathbf{p}_2^\perp \cdot \mathbf{b}_{34})} \delta(y_1 - \mathcal{Y}_{12}) \delta(y_2 - \mathcal{Y}_{34}) \right. \\ &+ \left. \Psi_{M_1}^\dagger(\alpha_{34}, \mathbf{r}_{34}) \Psi_{M_2}^\dagger(\alpha_{12}, \mathbf{r}_{12}) e^{i(\mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{b}_{34} + \mathbf{p}_2^\perp \cdot \mathbf{b}_{12})} \delta(y_1 - \mathcal{Y}_{34}) \delta(y_2 - \mathcal{Y}_{12}) \right] \\ &\times \psi_{\gamma^* \rightarrow \bar{Q}Q\bar{Q}Q}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q), \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde se introducen nuevas notaciones para caracterizar el par de partones pesados  $i$  y  $j$ . La distancia relativa entre ellos  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ , la fracción del cono de luz llevada por el quark  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ , y la coordenada transversal de su centro de masa  $\mathbf{b}_{ij} = (\alpha_i \mathbf{x}_i + \alpha_j \mathbf{x}_j) / (\alpha_i + \alpha_j)$ . La notación  $\tilde{\sum}_{\ell n}$  en la primera línea de (2.33 y 2.34) implica, como se menciono anteriormente, una suma sobre todos los posible gluones de canal  $t$  adjuntos a los partones en la parte superior de cada diagrama.

Para los tipo  $A$  la variable  $\ell, n$  puede tomar seis valores independientes, los cuales corresponden a las conexiones con los quarks finales, o un gluón virtual. Para diagramas de tipo  $B$ , ambos quarks producidos deben estar en el estado singlete de color, lo cual nos entrega la restricción adicional que  $\ell, n$  deberá estar conectado a loops de quark distintos, ya sea en el par quark-antiquark superior o inferior. Los factores  $\sigma_\ell, \sigma_n$  también en la primera línea de (2.33) y (2.34) tienen valor  $+1$  si el gluón de canal  $t$  está conectado a una línea de quark o gluón, y  $-1$  en otro caso. Los factores de color  $c_{\ell n}$  dependen de la topología del diagrama considerado. Para diagramas tipo  $A$ , si ambos gluones de canal  $t$  están conectados a la misma línea de quark, o líneas de quark y antiquark de colores opuestos (es decir, líneas de quark-antiquark originadas de un fotón sin color o que lleva a la formación de un quarkonio sin color), el factor de color tiene la forma:

$$c_{\ell n} = \mathcal{C}_1 \equiv \frac{1}{N_c^2 - 1} \text{tr}_c(t_a t_a t_b t_b) = (N_c^2 - 1) / 4N_c \quad (2.35)$$

Si los vértices de los gluones de canal  $t$  están separados por vértices de cambio de color de un gluón virtual, el factor de color está dado por:

$$c_{\ell n} = \mathcal{C}_2 \equiv \frac{1}{N_c^2 - 1} \text{tr}_c(t_a t_b t_a t_b) = -1/4N_c. \quad (2.36)$$

Para diagramas con un vértice de tres gluones, cuando uno de los gluones de canal  $t$  está adjunto a un gluón virtual, el factor de color es:

$$c_{\ell n} = \pm \mathcal{C}_3 = \pm N_c / 4, \quad (2.37)$$

donde el signo es positivo para el diagrama con gluones de canal  $t$  adjuntos al par quark-antiquark superior (partones 1,2), y negativo de otra forma. Finalmente, para el diagrama donde ambos gluones de canal  $t$  están adjuntos a un gluón virtual intermediario, el factor de color correspondiente es:

$$c_{\ell n} = \mathcal{C}_4 \equiv N_c / 2 \quad (2.38)$$

Para diagramas de tipo  $B$ , el factor de color para todas las posibles conexiones de gluones de canal  $t$  es:

$$c_{\ell n} = \frac{1}{N_c^2 - 1} [\text{tr}_c(t_a t_c)]^2 = \frac{1}{4} \quad (2.39)$$

Las funciones  $\gamma(\dots)$  caracterizan la interacción del partón con el objetivo, y pueden relacionarse a la amplitud de dipolo mostrada en (2.1.2). Las variables  $\mathbf{b}_\ell, \mathbf{b}_n$  en el argumento de las funciones  $\gamma(\dots)$  representan las coordenada transversa del partón que interactúa con el gluón de canal  $t$ . Para los quarks finales esta variable corresponde a la coordenada transversal de estos partones. Para partones intermedios esta variable es la posición del centro de masa de todos los quarks finales producidos en etapas posteriores del proceso,

$$\mathbf{b}_{j_1 \dots j_n} = \frac{\sum_{j=j_1 \dots j_n} \alpha_j \mathbf{x}_j}{\sum_{j=j_1 \dots j_n} \alpha_j} \quad (2.40)$$

donde la suma está hecha sobre todos los quarks finales  $j_1, \dots, j_n$ , que provienen de un partón dado. La notación  $\Psi_{M_1}, \Psi_{M_2}$  es usada para la función de onda para el estado final de quarkonio  $M_1$  y  $M_2$ , y  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\{\alpha_i, \mathbf{x}_i\}; q)$  es la función de onda de cono

de luz del 4-quark del fotón virtual  $\gamma^*$ , la cual sera evaluada en la sub-sección (2.1.4). El producto  $\sum_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n)$  puede expresarse como una combinación lineal de amplitudes de dipolo de singlete de color  $N(x, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{b}_{ij})$ , la cual será calculada en la sub-sección (2.1.7).

#### 2.1.4. Cálculo de la función de onda del fotón

Para la evaluación de la función de onda del fotón se seguirán las reglas generales de la teoría de perturbación de cono de luz formuladas en [12, 82]. Cabe mencionar que el resultado para la componente  $\bar{Q}Q$  es bien conocido por los estudios de [147, 148], por lo que a continuación se reproducirán para introducir las notaciones trabajadas. Posteriormente en (2.1.6), se escribirá componente  $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$  de la función de onda, expresada en términos de la componente  $\bar{Q}Q$ . En los siguientes cálculos habrá un enfoque centrado en los fotones *onshell* polarizados transversalmente, los cuales entregan la contribución dominante. El momento del fotón, introducido en (2.1), se simplifica en este caso y solo tiene componente de cono de luz en la dirección  $x^+$ , quedando de la forma:

$$q \approx (q^+, 0, \mathbf{0}_\perp). \quad (2.41)$$

y el vector del fotón polarizado transversalmente esta dado por:

$$\varepsilon_T^\mu(q) \equiv \left( 0, \frac{\mathbf{q}_\perp \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma}{q^+}, \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma \right) \approx (0, 0, \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma), \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad \gamma = \pm 1. \quad (2.43)$$

donde en (2.42) se consideró que  $\mathbf{q}_\perp = 0$ .

Antes de la interacción con el objetivo, el fotón puede fluctuar en pares virtuales de quark-antiquark, así como también en gluones. De ahora en adelante se usará la notación  $\alpha_i = k_i/q^+$  para la fracción de momento de cono de luz del fotón, llevado por cada partón, como también  $\mathbf{k}_{i\perp}$  para la componente transversal del momento del partón. Debido a la conservación de 4-momento, se espera que  $\alpha_i$  y  $\mathbf{k}_{i\perp}$  satisfagan la siguiente identidad:

$$\sum_i \alpha_i = 1, \quad \sum_i \mathbf{k}_{i\perp} = 0, \quad (2.44)$$

donde la se realiza la suma sobre todos los partones. Se puede observar que el vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$  satisface también la identidad:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma^* \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{-\gamma}, \quad (2.45)$$

y el producto escalar con cualquier 2-vector  $\mathbf{a}$  nos entrega:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma \cdot \mathbf{a} = \frac{a_x + i\gamma a_y}{\sqrt{2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}} e^{i\gamma \arg(a)}, \quad \arg(a) = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right). \quad (2.46)$$

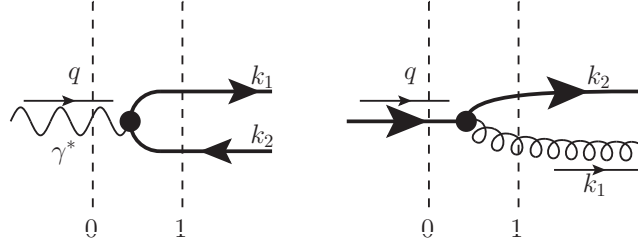


Fig. 2.2: Plot izquierdo: Contribuciones  $LO$  para la componente  $\bar{Q}Q$  de la función de onda del fotón  $\psi_{\gamma \rightarrow \bar{Q}Q}$ . Plot derecho: La función de onda del gluón emitido, definida en [149]. El momento  $k_i$  representado en el lado derecho son conjugados de Fourier de las coordenadas  $x_i$ .

### 2.1.5. Componente $\bar{Q}Q$ de la función de onda del fotón

Para recordar los pasos a seguir para la derivación del componente  $\bar{Q}Q$  de la función de onda [147, 148] en la representación mixta  $(\alpha, \mathbf{r})$  se analizan las contribuciones de los diagramas en la Figura 2.2. En  $LO$ , el sub-proceso  $\gamma \rightarrow \bar{Q}Q$  recibe contribuciones solo del diagrama al lado izquierdo de la figura 2.2. Podremos apreciar más adelante que tanto el sub-proceso  $\gamma \rightarrow \bar{Q}Q$ , como  $g \rightarrow \bar{Q}Q$  constituyen la función de onda de 4-quarks. Es por esto que en esta sub-sección se asumirá que el momento del fotón  $q$  *podría* tener una componente transversal no nula  $\mathbf{q}_\perp$  y usaremos la notación  $z = k_1^+/q^+$  para la fracción de momento de cono de la luz llevado por el quark. En el espacio de momento, el cálculo es directo usando las reglas presentadas en [12, 82, 149] y obtenemos:

$$\psi_{h,\bar{h}}^\lambda(z, k_1, \mathbf{q}) = -e_q \delta_{c\bar{c}} \frac{\bar{u}_h(k_1) \hat{\varepsilon}_\lambda(q) v_{\bar{h}}(q - k_1)}{\Delta_{01}^- \sqrt{k_1^+} \sqrt{q^+ - k_1^+}} \quad (2.47)$$

$$\Delta_{01}^- = -\frac{1}{2p^+} \frac{\mathbf{n}^2 + m_q^2}{z(1-z)}, \quad (2.48)$$

donde  $\lambda$  es la helicidad del fotón *entrante*,  $h, \bar{h}$  son las helicidades del quark y antiquark producidos,  $c, \bar{c}$  son los índices de color de  $Q$  y  $\bar{Q}$  respectivamente, y  $e_q$  es la carga eléctrica correspondiente al sabor pesado dado. El momento  $\mathbf{n}$  se define como:

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}_1 - z\mathbf{q}_\perp = (1-z)\mathbf{k}_1 - z\mathbf{k}_2, \quad (2.49)$$

el cual representa físicamente la parte transversal del momento relativo interno del par  $Q\bar{Q}$ . El numerador de (2.47) puede ser escrito de manera explícita usando las reglas [147, 148] descritas en la Tabla (2.1)

quedando así el numerador de la ecuación (2.47) como:

$$\bar{u}_h(k) \hat{\varepsilon}_\lambda(p) v_{\bar{h}}(p - k) = \frac{2}{\sqrt{z(1-z)}} \left[ (z\delta_{\lambda,h} - (1-z)\delta_{\lambda,-h}) \delta_{h,-\bar{h}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} m_q \text{sign}(h) \delta_{\lambda,h} \delta_{h,\bar{h}} \right]. \quad (2.50)$$

En el espacio de configuración, la función de onda puede obtenerse llevando a cabo una transformada de *Fourier* sobre el momento transversal,

| Elemento de la matriz  | Helicidad ( $\lambda \rightarrow \lambda'$ )                                    |   |
|--|---|---|
|  | $\uparrow \rightarrow \uparrow$   | $\uparrow \rightarrow \downarrow$   |
| $\bar{v}_{\lambda'} \dots u_{\lambda}$                                   | $\downarrow \rightarrow \downarrow$   | $\downarrow \rightarrow \uparrow$   |
| $\frac{\bar{v}(p)}{\sqrt{p^+}} \gamma^+ \frac{u(q)}{\sqrt{q^+}}$         | 0   | 2   |
| $\frac{\bar{v}(p)}{\sqrt{p^+}} \gamma_{\perp}^i \frac{u(q)}{\sqrt{q^+}}$ | $\mp m \left( \frac{p^+ + q^+}{p^+ q^+} \right) (\delta^{i1} \pm i\delta^{i2})$ | $\frac{p_{\perp}^i \mp i\epsilon^{ij} p_{\perp}^j}{p^+} + \frac{q_{\perp}^i \pm i\epsilon^{ij} q_{\perp}^j}{q^+}$ |

Tab. 2.1: Elementos (relevantes) de la matriz de Dirac para espinores de helicidad [12].

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) \psi_{h\bar{h}}^{\lambda}(z, k_1, \mathbf{q}) \\
 & = e^{i\mathbf{q} \cdot (z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2)} e_q \delta_{c\bar{c}} \Psi_{h\bar{h}}^{\lambda}(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, m_q),
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

donde la integral sobre  $k_2$  se realiza usando las propiedades de la función  $\delta$ , y previo a la integración sobre  $\mathbf{k}_1$ , la variable se cambia como  $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{n} + z\mathbf{q}$ . Explícitamente, la integral sobre  $d^2\mathbf{n}$  nos da:

$$\Psi_{h\bar{h}}^{\lambda}(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, a) = -\frac{2}{(2\pi)} \left[ (z\delta_{\lambda,h} - (1-z)\delta_{\lambda,-h}) \delta_{h,-\bar{h}} i\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda} \cdot \nabla - \frac{m_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(h) \delta_{\lambda,h} \delta_{h,\bar{h}} \right] K_0(a\mathbf{r}). \tag{2.52}$$

La estructura de la ecuación (2.51) sugiere que en la representación mixta, la variable  $z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2$  hace el rol del centro de masa del dipolo, mientras que  $\mathbf{r}_{12}$  es su separación, como se mostró en los estudios de [150].

Para el fotón *offshell* entrante con virtualidad  $-q^2 = Q^2$ , la integración da un resultado similar a (2.52),

$$e^{i\mathbf{q} \cdot (z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2)} e_q \delta_{c\bar{c}} \Psi_{h\bar{h}}^{\lambda} \left( z, \mathbf{r}_{12}, m_q, \sqrt{m_q^2 - Q^2 z(1-z)} \right) \tag{2.53}$$

en la segunda línea de (2.51). El resultado extendido para la producción de un par  $Q\bar{Q}$  por un gluón es directo y requiere un reemplazo simple de  $e_q \delta_{c\bar{c}} \rightarrow g (t_a)_{c\bar{c}}$ .

Es relevante también darle un enfoque a las tres componentes de la función de onda del fotón, que manifiesta los tres estados de polarización. Para el caso de la polarización longitudinal tenemos  $\Psi_{h\bar{h}}^0$  y para el caso transversal son  $\Psi_{h\bar{h}}^{+1}$ ,  $\Psi_{h\bar{h}}^{-1}$ . Usando los resultados de [147] podemos escribir estas componentes como:

$$\Psi_{h\bar{h}}^0(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, a) = -2z(1-z) \delta_{h,-\bar{h}} Q \frac{K_0(a\mathbf{r})}{2\pi}, \tag{2.54}$$

$$\Psi_{h\bar{h}}^{+1}(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, a) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)} \left[ i \exp^{i\theta} a (z\delta_{h_+} \delta_{\bar{h}_-} - (1-z)\delta_{h_-} \delta_{\bar{h}_+}) K_1(a\mathbf{r}) + m_q \delta_{h_+} \delta_{\bar{h}_+} K_0(a\mathbf{r}) \right], \tag{2.55}$$

$$\Psi_{h\bar{h}}^{-1}(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, a) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)} \left[ i \exp^{-i\theta} a ((1-z)\delta_{h_+} \delta_{\bar{h}_-} - z\delta_{h_-} \delta_{\bar{h}_+}) K_1(a\mathbf{r}) + m_q \delta_{h_-} \delta_{\bar{h}_-} K_0(a\mathbf{r}) \right] \tag{2.56}$$

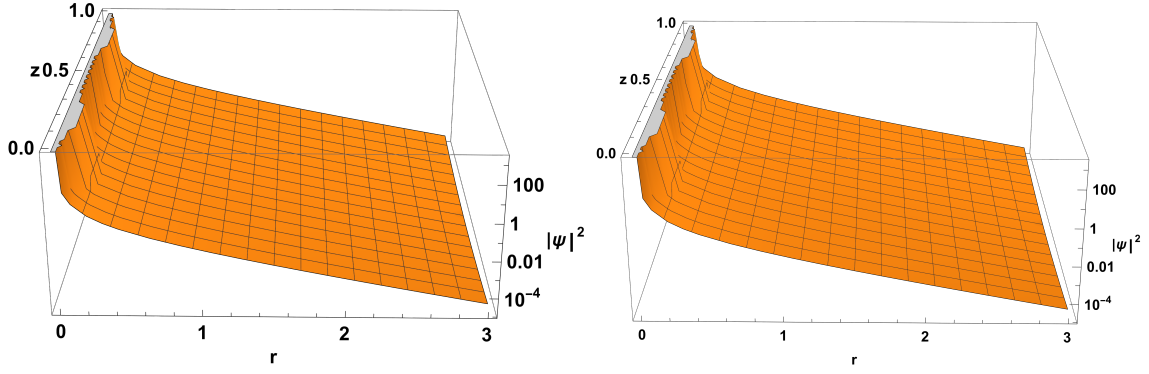


Fig. 2.3: Plot izquierdo: Este gráfico ilustra el comportamiento de la densidad de probabilidad para el caso de  $\lambda = +1$ . Plot Derecho: Representa el caso de  $\lambda = -1$  Como se puede apreciar para ambos casos el comportamiento es similar, manteniendo la misma forma de la curva, ilustrando de manera clara cómo esta densidad de probabilidad de producción es mayor cerca del origen, es decir, para  $r \ll 1$ . Se consideró como valores  $Q = 1$  y  $mQ = 1,3$  a la hora de construir los gráficos.

En particular, nuestra atención se dirige hacia las polarizaciones  $\lambda = +1, -1$  del fotón, ya que el estado de polarización  $\lambda = 0$  se considera irrelevante para el alcance de la investigación actual. Esto dado que la sección eficaz del proceso cae rápidamente como función de  $Q^2$ , y es por esto que la contribución dominante proviene de fotones “cuasi-reales” con  $Q = 0$ , pero los fotones de este tipo solo tienen dos polarizaciones, las transversales mencionadas anteriormente.

En la Figura 2.3, se puede observar que para ambos plots el comportamiento de la densidad de probabilidad de producción de pares de quark-antiquark disminuye con rapidez a medida que se aleja del origen, siendo la zona de  $r \ll 1$  la de mayor producción. Se puede apreciar también que aparece un pico en  $z = \frac{1}{2}$  demostrando que el par quark-antiquark tiene una mayor probabilidad de ser producido con momentos transversales iguales.

Finalmente, es relevante considerar la función de onda del sub-proceso de emisión de gluón  $q \rightarrow gq$ , como fue estudiado en [149]. Este elemento es de utilidad en el análisis de distintas amplitudes. En  $LO$  recibe contribuciones del diagrama derecho en la figura 2.2. El cálculo de este elemento es similar al de (2.47-2.52). En el espacio de momento se obtiene:

$$\tilde{\psi}_{c_f h_f, c_i h_i}^\lambda(z, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}) = -gt_{c_f c_i}^a \frac{\bar{u}_{h_f}(q - k_1) \hat{\varepsilon}_\lambda(k_1) u_{h_i}(q)}{\Delta_{02}^- \sqrt{q^+} \sqrt{q^+ - k_1^+}}, \quad (2.57)$$

$$\Delta_{02}^- = -\frac{1}{2p^+} \frac{\mathbf{n}^2 + z^2 m_q^2}{z(1-z)}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}_1 - z\mathbf{q} \quad (2.58)$$

donde  $\lambda$  es la helicidad del gluón saliente;  $(h_i, c_i)$  y  $(h_f, c_f)$  son las helicidades y colores de índices del quark incidente (antes de la emisión del gluón) y el final (después de la emisión); y, de manera similar a los casos previos, se introduce el momento  $\mathbf{n} = \mathbf{k}_1 - z\mathbf{q} = (1-z)\mathbf{k}_1 - z\mathbf{k}_2$  que corresponde al movimiento relativo del quark y el gluón luego de la emisión de este. Usando las reglas mostradas en la Tabla 2.1, el numerados de esta expresión puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{h_f}(q - k_1) \hat{\varepsilon}_\lambda(k_1) u_{h_i}(q) = & \frac{2}{z\sqrt{1-z}} [(\delta_{\lambda, h_i} + (1-z)\delta_{\lambda, -h_i}) \delta_{h_i, h_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda - \\ & - \frac{m_q}{\sqrt{2}} z^2 \text{sign}(h_i) \delta_{\lambda, -h_i} \delta_{h_i, -h_f}], \end{aligned} \quad (2.59)$$

En el espacio de configuración, la función de onda esta dada por:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) \psi_{c_f h_f, c_i h_i}^\lambda(z, k_1, \mathbf{q}) \\ & = e^{i\mathbf{q} \cdot (z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2)} t_{c_f c_i}^a \Phi_{h_f, h_i}^\lambda(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, z m_q), \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde la integral sobre  $k_2$  se realizó usando las propiedades de la función de onda, y durante la integración sobre  $k_1$  se realizó el cambio de variable  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{n} + z\mathbf{q}$  quedando así como:

$$\begin{aligned} \Phi_{h_f, h_i}^\lambda(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, a) = & -\frac{2}{(2\pi)} [(\delta_{\lambda, h_i} + (1-z)\delta_{\lambda, -h_i}) \delta_{h_i, h_f} i\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \nabla + \\ & + \frac{m_q}{\sqrt{2}} z^2 \text{sign}(h_i) \delta_{\lambda, -h_i} \delta_{h_i, -h_f}] K_0(a\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Para el caso de un quark *offshell* con virtualidad  $q^2 = Q^2$ , integración directa muestra que la segunda linea de (2.60) tiene la forma:

$$e^{i\mathbf{q} \cdot (z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2)} \Phi_{h_f, h_i}^\lambda\left(z, \mathbf{r}_{12}, m_q, \sqrt{m_q^2 z - Q^2 z(1-z)}\right) \quad (2.62)$$

De manera similar al caso anterior, la estructura de la ecuación (2.61) sugiere que en la representación mixta la variable  $z\mathbf{r}_1 + \bar{z}\mathbf{r}_2$  juega el rol del centro de masa del dipolo, mientras que  $\mathbf{r}_{12}$  es su separación [150]. Este resultado será de utilidad para comprender de mejor manera la estructura de la función de onda  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$  a continuación.

### 2.1.6. Componente $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$ de la función de onda del fotón

Como se mencionó en la sección (2.1.2), en la aproximación eikonal, la amplitud del sub-proceso  $\gamma^* \rightarrow \bar{Q}Q\bar{Q}Q$  en espacio de configuración puede representarse como una convolución de la función de onda  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$  con combinación lineal de las amplitudes de dipolo (2.28). En  $LO$  sobre  $\alpha_s$  la amplitud del proceso esta dado por los diagramas mostrados en la Figura (2.4). Estos diagramas deben ser suplementados por todas las posibles permutaciones de de los quarks del estado final. Esto quiere decir que, para la producción de distintos sabores pesados (por ejemplo  $\bar{c}c\bar{b}b$ ), ambos diagramas deben considerar las contribuciones de los pares permutados de momento  $(k_1, k_2) \leftrightarrow (k_3, k_4)$ . Para los pares de quarkonia de mismo sabor (por ejemplo  $\bar{c}c\bar{c}c$ ) se debe tener en cuenta la contribución de las permutaciones independientes de quarks y antiquarks,  $k_1 \leftrightarrow k_3$  y  $k_2 \leftrightarrow k_4$ . El cálculo de los procesos correspondientes siguen las reglas generales del cono de luz formuladas en [12, 82]. De acuerdo a las reglas de cono de luz [147, 148], al evaluar los diagramas en la Figura (2.4) cada propagador de partón virtual tiene una parte *no-instantánea* y una *instantánea*, por lo que es conveniente analizar por separado las contribuciones asociadas.

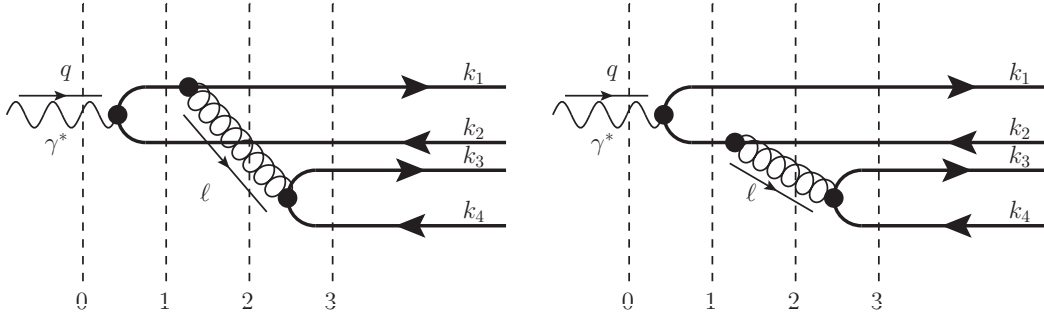


Fig. 2.4: Contribución en  $LO$  de la función de onda  $\psi_{Q\bar{Q}\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$ . El momento  $k_i$  mostrado en el diagrama derecho son los conjugados de Fourier de las coordenadas  $x_i$ . Se da a entender que en ambos diagramas deben ser suplementados por todas las posibles permutaciones de quarks del estado final.

### a.- Contribución no-instantánea

Como se mencionó, en el  $LO$  de  $\alpha_s$ , la amplitud del proceso viene dado por los diagramas en la Figura (2.4) y depende del momento de 4 quarks en el estado final. A continuación se considerarán las notaciones mostradas en la sub-sección 2.1.4, además de la notación estándar  $\alpha_i = k_i/q^+$  para las fracciones de momento del fotón llevados por cada uno de los fermiones, así como también  $\mathbf{k}_{i\perp}$  para las componentes transversales del momento. También es conveniente usar la notación  $\ell = k_3 + k_4$  para el momento del gluón virtual conectando las diferentes líneas de quark. Esto nos entrega las relaciones:

$$z = \ell^+/q^+ = \alpha_3 + \alpha_4, \quad (2.63)$$

donde la suma sobre todos los  $\alpha_i$  es 1, y la suma de todos los momentos  $\mathbf{k}_{i\perp}$  es 0. Para mantener generalidad, se asumirá que los pares quark-antiquark tienen sabores distintos, y se usará la notación  $m_1$  para la masa de la línea de quark conectada al fotón, y  $m_2$  para la masa del par quark-antiquark producido del gluón virtual.

Aplicando las reglas de [147, 148], es posible obtener la amplitud correspondiente al proceso:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{c_1c_2,c_3c_2}^{a_1a_2,a_3a_4} = & -\frac{e_q g^2 (t_a)_{c_1c_2} \otimes (t_a)_{c_3c_4}}{16 \pi^2} \left( \frac{\bar{u}_{a_1}(k_1) \hat{\varepsilon}_\lambda^*(\ell) u_b(k_1 + \ell) \bar{u}_b(q - k_2) \hat{\varepsilon}_\gamma(q) v_{a_2}(k_2)}{D_{11} D_{12} D_{13} \sqrt{k_1^+} \sqrt{k_1^+ + \ell^+} \sqrt{q^+ - k_2^+} \sqrt{k_2^+}} + \right. \\ & \left. - \frac{\bar{u}_{a_1}(k_1) \hat{\varepsilon}_\gamma(q) v_b(q - k_1) \bar{v}_b(k_2 + \ell) \hat{\varepsilon}_\lambda^*(\ell) v_{a_2}(k_2)}{D_{21} D_{22} D_{23} \sqrt{k_1^+} \sqrt{q^+ - k_1^+} \sqrt{k_2^+ + \ell^+} \sqrt{k_2^+}} \right) \frac{\bar{u}_{a_3}(k_3) \hat{\varepsilon}_\lambda(\ell) v_{a_4}(k_4)}{(k_3^+ + k_4^+) \sqrt{k_3^+ k_4^+}}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde  $t_a$  son las matrices de Gell-Mann,  $a_i$  y  $c_i$  son las helicidades e índices de color de los quarks finales, y  $D_{ij}$  son los denominadores convencionales de cono de la luz, considerando que el primer subíndice  $i = 1, 2$  hace referencia al primer y segundo diagrama de la Figura 2.4 respectivamente, y el segundo subíndice  $j = 1, 2, 3$  enumera los cortes verticales en líneas punteadas. De manera explícita, estos denominadores están dados por:

$$D_{11} = -\frac{1}{2q^+} \left( \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_2} + \frac{(\mathbf{k}_{1\perp} + \ell)^2 + m_1^2}{\alpha_1 + z} \right) = -\frac{1}{2q^+} \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_2 \bar{\alpha}_2}, \quad (2.65)$$

$$D_{21} = -\frac{1}{2q^+} \left( \frac{\mathbf{k}_{1\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_1} + \frac{(\mathbf{k}_{2\perp} + \boldsymbol{\ell})^2 + m_1^2}{\alpha_2 + z} \right) = -\frac{1}{2q^+} \frac{\mathbf{k}_{1\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_1 \bar{\alpha}_1}, \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} D_{12} = D_{22} \equiv D_2 &= -\frac{1}{2q^+} \left( \frac{\mathbf{k}_{1\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_1} + \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2}{\alpha_2} + \frac{\boldsymbol{\ell}_\perp^2}{z} \right) = \quad (2.67) \\ &= -\frac{1}{2q^+} \frac{\alpha_2 \bar{\alpha}_2 \left( \mathbf{k}_{1\perp} + \mathbf{k}_{2\perp} \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_2} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_2} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2) (1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)} = \\ &= -\frac{1}{2q^+} \frac{\alpha_1 \bar{\alpha}_1 \left( \mathbf{k}_{2\perp} + \mathbf{k}_{1\perp} \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_1} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_1} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{k}_{1\perp}^2 + m_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2) (1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{13} = D_{23} = D_3 &= -\frac{1}{2q^+} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{k}_{i\perp}^2 + m_1^2}{2\alpha_i} + \sum_{i=3}^4 \frac{\mathbf{k}_{i\perp}^2 + m_2^2}{2\alpha_i} \right) = \quad (2.68) \\ &= D_{12} - \frac{(\mathbf{k}_{3\perp} \alpha_4 - \mathbf{k}_{4\perp} \alpha_3)^2 + m_2^2 (\alpha_3 + \alpha_4)^2}{2q^+ \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_3 + \alpha_4)} = D_{12} - \left( \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_4} \right) \frac{\mathbf{q}_{34}^2 + m_2^2}{2q^+}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_{34} = \frac{\mathbf{k}_{3\perp} \alpha_4 - \mathbf{k}_{4\perp} \alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_4}. \quad (2.69)$$

Para simplificar la estructura de las expresiones (2.65-2.68), se introduce la notación  $\bar{\alpha}_i \equiv 1 - \alpha_i$ ,  $i = 1..,4$ . El elemento  $\mathbf{q}_{34}$ , definido en (2.69), representa el momento del movimiento relativo de los quarks 3 y 4. La expresión en el numerador de (2.64) pueden reescribirse usando el álgebra de cono de la luz, dando así la amplitud:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{c_1 c_2, c_3 c_4}^{a_1 a_2, a_3 a_4} &= \frac{1}{2\pi^2 (q^+)^2} \frac{e_q g^2 (t_a)_{c_1 c_2} \otimes (t_a)_{c_3 c_4}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) D_2(\alpha_1, \mathbf{k}_1; \alpha_2, \mathbf{k}_2)} \times \quad (2.70) \\ &\times \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \left[ (\alpha_2 \delta_{\gamma, a_2} - \bar{\alpha}_2 \delta_{\gamma, -a_2}) \delta_{b, -a_2} \mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma + \frac{m_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_2) \delta_{\gamma, a_2} \delta_{b, a_2} \right] \times \right. \\ &\times \left[ (\bar{\alpha}_2 \delta_{\lambda, a_1} + \alpha_1 \delta_{\lambda, -a_1}) \delta_{a_1, b} \mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^* + \frac{m_q (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2}{\sqrt{2} (1 - \alpha_2)} \text{sign}(-a_1) \delta_{\lambda, -a_1} \delta_{a_1, -b} \right] \\ &- \frac{1}{\mathbf{k}_{1\perp}^2 + m_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left[ (\alpha_1 \delta_{\gamma, a_1} - \bar{\alpha}_1 \delta_{\gamma, -a_1}) \delta_{b, -a_1} \mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma + \frac{m_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_1) \delta_{\gamma, a_1} \delta_{a_1, b} \right] \times \\ &\times \left. \left[ (\bar{\alpha}_1 \delta_{\lambda, a_2} + \alpha_2 \delta_{\lambda, -a_2}) \delta_{a_2, b} \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^* + \frac{m_q (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2}{\sqrt{2} (1 - \alpha_1)} \text{sign}(-a_2) \delta_{\lambda, -a_2} \delta_{a_2, -b} \right] \right\} \times \\ &\times \frac{\frac{2(\alpha_3 + \alpha_4)}{\alpha_3 \alpha_4} \left[ \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_4} \delta_{\lambda, -a_3} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \delta_{\lambda, a_3} \right) \delta_{a_3, -a_4} \mathbf{q}_{34} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{-\lambda} + \frac{m_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_3) \delta_{\lambda, a_3} \delta_{a_3, a_4} \right]}{D_2(\alpha_1, \mathbf{k}_1; \alpha_2, \mathbf{k}_2) - \frac{\mathbf{q}_{34}^2 + m_2^2}{2q^+} \left( \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_4} \right)} \end{aligned}$$

donde el momento  $\mathbf{q}_i$  se define como:

$$\mathbf{q}_1 = - \left( \mathbf{k}_1 + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \mathbf{k}_2 \right), \quad \mathbf{q}_2 = - \left( \mathbf{k}_2 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{k}_1 \right). \quad (2.71)$$

Por la forma de (2.70) es posible observar que las contribuciones de los diagramas de la Figura 2.4 tienen estructuras similares. La amplitud es *anti-simétrica* con respecto a las permutaciones de momento y helicidad de los quarks 1 y 2,  $(\alpha_1, \mathbf{k}_1, a_1) \leftrightarrow (\alpha_2, \mathbf{k}_2, a_2)$ , y *simétrica* con respecto al momento y helicidad de los quarks 3 y 4,  $(\alpha_3, \mathbf{k}_3, a_3) \leftrightarrow (\alpha_4, \mathbf{k}_4, a_4)$ . Estas simetrías reflejan que la amplitud (2.70) fue calculada como una suma de los diagramas derecho e izquierdo de la Figura 2.4. Estas simetrías son de utilidad a la hora de simplificar evaluaciones.

Para el cálculo en el marco de dipolo de color es necesario reescribir la amplitud en espacio de configuración, aplicando transformada de Fourier sobre las componentes transversales:

$$\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\{\alpha_i, \mathbf{x}_i\}) = \int \left( \prod_{i=1}^4 \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_i} \right) (2\pi)^2 \delta^2 \left( \sum \mathbf{k}_i \right) \mathcal{A}_{c_1 c_2, c_3 c_4}^{a_1 a_2, a_3 a_4}(\{\alpha_i, \mathbf{k}_i\}) \quad (2.72)$$

Por conservación de momento (2.44), la función de onda  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$  debe mantenerse bajo el cambio de variable

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_i = \text{const}, \quad (2.73)$$

es decir, debe depender solo de las distancias relativas  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  entre los quarks. Realizando el cálculo, la expresión (2.72) puede simplificarse a:

$$\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\{\alpha_i, \mathbf{x}_i\}) = A(\{\alpha_i, \mathbf{x}_i\}) + B(\{\alpha_i, \mathbf{x}_i\}). \quad (2.74)$$

donde

$$A(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) = -\frac{2e_q \alpha_s(m_Q)}{\pi^3 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2} \frac{(t_a)_{c_1 c_2} \otimes (t_a)_{c_3 c_4}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \int \frac{q_1 dq_1 k_2 dk_2}{\frac{\bar{\alpha}_2 q_1^2}{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_2^2}{\alpha_2 \bar{\alpha}_2}} \times \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{k_2^2 + m_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} [(\alpha_2 \delta_{\gamma, a_2} - \bar{\alpha}_2 \delta_{\gamma, -a_2}) (\bar{\alpha}_2 \delta_{\lambda, a_1} + \alpha_1 \delta_{\lambda, -a_1}) \delta_{a_1, -a_2} \times \\ & \times (\mathbf{n}_{2,134} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma) (\mathbf{n}_{1,34} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^*) k_2 J_1(k_2 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_{134}|) q_1 J_1(q_1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_{34}|) + \\ & + \frac{m_q^2}{2} \delta_{\lambda, -a_1} \delta_{\gamma, a_2} \delta_{a_1, -a_2} J_0(k_2 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_{134}|) J_0(q_1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_{34}|) \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2}{1 - \alpha_2} \\ & - \frac{im_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_2) \delta_{\gamma, a_2} \delta_{a_1, a_2} (\bar{\alpha}_2 \delta_{\lambda, a_1} + \alpha_1 \delta_{\lambda, -a_1}) \times \\ & \times \mathbf{n}_{1,34} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^* q_1 J_1(q_1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_{34}|) J_0(k_2 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_{134}|) \\ & - \frac{im_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_1) \delta_{\lambda, -a_1} (\alpha_2 \delta_{\gamma, a_2} - \bar{\alpha}_2 \delta_{\gamma, -a_2}) \delta_{a_1, a_2} \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2}{1 - \alpha_2} \times \\ & \times (\mathbf{n}_{2,134} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma) k_2 J_1(k_2 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_{134}|) J_0(q_1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_{34}|) \times \\ & \times \Psi_{a_3, a_4}^{-\lambda} \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_4}, \mathbf{r}_{34}, m_2, \sqrt{m_2^2 + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left[ \frac{\bar{\alpha}_2 q_1^2}{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_2^2}{\alpha_2 \bar{\alpha}_2} \right]} \right) \end{aligned}$$

$$B(\alpha_1, \mathbf{x}_1, \alpha_2, \mathbf{x}_2, \alpha_3, \mathbf{x}_3, \alpha_4, \mathbf{x}_4) = -A(\alpha_2, \mathbf{x}_2, \alpha_1, \mathbf{x}_1, \alpha_4, \mathbf{x}_4, \alpha_3, \mathbf{x}_3). \quad (2.76)$$

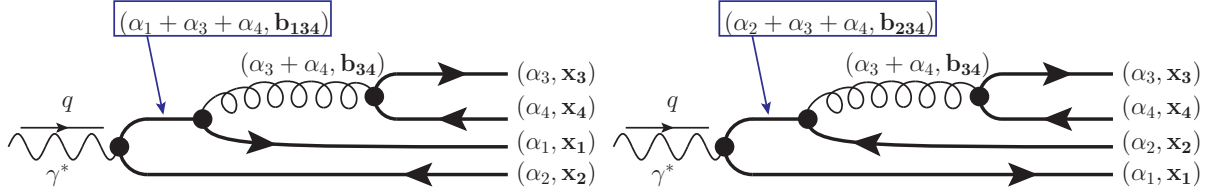


Fig. 2.5: Representación gráfica de la función de onda  $\psi_{\gamma \rightarrow \bar{Q}Q\bar{Q}Q}(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\})$  y su dependencia del momento transversal. Los elementos  $\mathbf{b}_{ij}$  y  $\mathbf{b}_{ijk}$  representan la posición del centro de masa de los partones  $ij$  o  $ijk$ .

La variable  $\mathbf{b}_{j_1 \dots j_n}$ , definida anteriormente en (2.40), corresponde a la posición del centro de masa de  $n$  partones  $j_1, \dots, j_n$ . Las variables  $\mathbf{n}_{i, j_1 \dots j_n} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}_{j_1 \dots j_n}) / |\mathbf{x}_i - \mathbf{b}_{j_1 \dots j_n}|$  son vectores unitarios que apuntan desde el quark  $i$  hacia el centro de masa del sistema de quarks  $j_1 \dots j_n$ .

Por la estructura de de la función de onda (2.75), esta no puede ser representada como convolución de funciones de onda elementales. Asimismo, no es posible resolver de forma analítica las integrales restantes de  $q_1$  y  $k_2$ . En principio esto ocurre ya que en el lenguaje tradicional de los diagramas de Feynman, los partones intermediarios son *offshell*, y la integración sobre  $q_1, k_2$  pueden reescribirse mediante integrales sobre las virtualidades de las partículas intermedias. Sin embargo, la estructura de la dependencia de coordenadas de la función  $\psi_{\gamma \rightarrow \bar{Q}Q\bar{Q}Q}(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\})$  puede aún ser comprendida usando las reglas sugeridas en la sección 2.1.5. En efecto, en el marco eikonal las coordenadas de todos los partones están *inertes*. La estructura de los diagramas *LO* 1 y 2 en la Figura 2.4 y la evaluación de las coordenadas del centro de masa de dos partones  $\mathbf{b}_{ij} = (\alpha_i \mathbf{r}_i + \alpha_j \mathbf{r}_j) / (\alpha_i + \alpha_j)$  permite reconstruir la coordenada transversal de todos los partones intermediarios, como se puede ver en la Figura 2.5. El significado físico de las variables  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{b}_{34}$  y  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{b}_{34}$  son la distancia relativa entre el quark o antiquark en "recoil" el gluón emitido. De manera similar, es posible interpretar las variables  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{b}_{234}$  y  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{b}_{134}$  como el tamaño del par  $\bar{Q}Q$  producido justo después de "desprenderse" del fotón incidente. Estas reglas permiten la construcción de la amplitud de producción de  $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$  pesados en el campo gluónico del objetivo.

La función de onda  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\})$  posee algunas singularidades que requieren atención para garantizar que la amplitud del proceso físico este libre de divergencias y sea finita. Para la producción de par de mesones (como se verá más adelante), la elección de las funciones de onda de los quarkonios (3.1-3.4), es suficiente para garantizar la finitud de las amplitudes (2.33-2.34) ya que estas se "desvanecen" rápidamente cerca de los puntos relevantes.

### b.- Contribución instantánea

De acuerdo a las reglas de la teoría de perturbación del cono de luz [12, 82], los cálculos de secciones anteriores deben estar acompañados por la contribución instantánea de los partones virtuales. Los propagadores de los quarks y gluones instantáneos *offshell* con momento  $k$  están dados por:

$$S_{(\text{inst})}(k) = \frac{\gamma^+}{2k^+} \equiv \frac{(n \cdot \gamma)}{2(k \cdot n)}, \quad \Pi_{(\text{inst})}^{\mu\nu} = \frac{n_\mu n_\nu}{(k^+)^2} \quad (2.77)$$

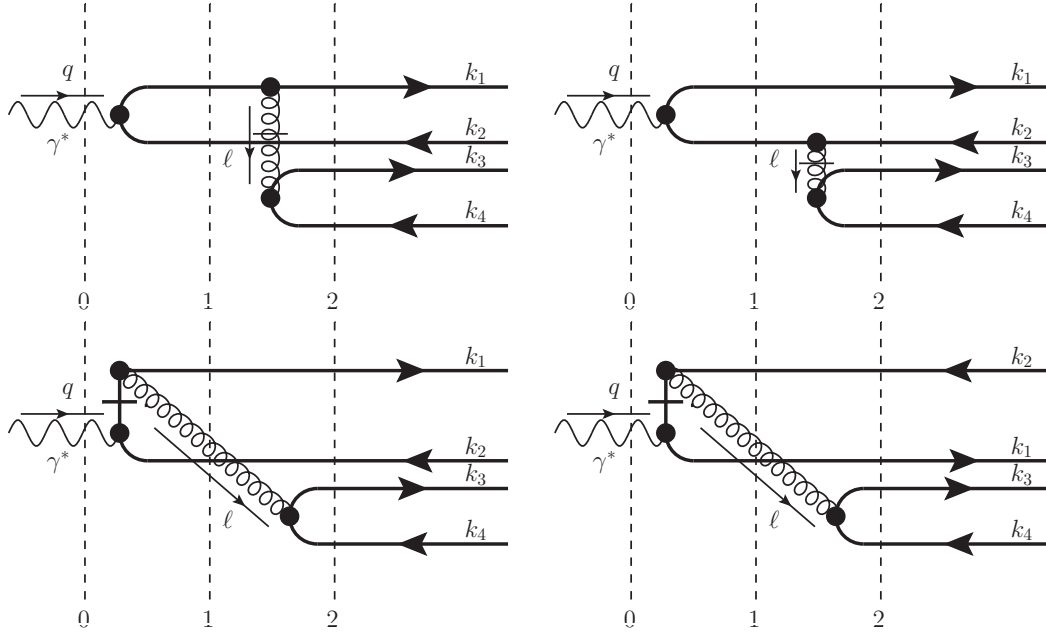


Fig. 2.6: Contribuciones instantáneas a la función de onda  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$ . Las filas superior e inferior corresponden a los gluones y quarks instantáneos respectivamente. Las líneas verticales denotan los denominadores de cono de la luz. el momento  $k_i$  que se muestra al lado derecho son los conjugados de Fourier de las coordenadas  $x_i$ . Para efectos prácticos, llamaremos a los diagramas en la primera fila como  $A_g$  y  $B_g$ , y los de la segunda fila como  $A_q$  y  $B_q$ .

donde  $n^\mu$  es el vector de cono de luz en la dirección  $x^-$ . Repitiendo los cálculos de la sección anterior, estos denominadores pueden calcularse de manera sencilla y directa. Ya que  $\gamma_+ \gamma_+ = 0$ , no existen diagramas con dos propagadores instantáneos conectados al mismo vértice. Los numeradores de las amplitudes con propagadores instantáneos poseen una estructura simple en vista de las identidades [12, 82, 149]:

$$\bar{u}_{h_f}(p_1) \gamma_+ u_{h_i}(p_2) = 2\sqrt{p_1^+ p_2^+} \delta_{h_f, h_i} \quad (2.78)$$

$$\bar{u}_h(p_1) \gamma_+ v_{\bar{h}}(p_2) = 2\sqrt{p_1^+ p_2^+} \delta_{h, -\bar{h}}. \quad (2.79)$$

El resultado final de este calculo tiene la forma:

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) &= A_g(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) + B_g(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) + \\ &+ A_q(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) + B_q(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}), \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde los indices  $q$  (para quark) y  $g$  (para gluón) al lado derecho denotan el propagador del partón asociado. De esta forma es posible escribirlas como:

$$\begin{aligned}
 A_g(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) &= -\frac{e_q \alpha_s(m_Q) (t_a)_{c_1 c_2} \otimes (t_a)_{c_3 c_4}}{\pi^4 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^3} \int q_1 dq_1 k_2 dk_2 J_0(q_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{b}_{34}|) \times \\
 &\quad (2.81) \\
 &\quad \times \frac{1}{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m_1^2} [(\alpha_2 \delta_{\gamma, a_1} - \bar{\alpha}_2 \delta_{a_1, -\gamma}) \delta_{a_1, -a_2} i \mathbf{n}_{2,134} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma k_2 J_1(k_2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{b}_{134}|) \\
 &\quad + \frac{m_q}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_1) \delta_{\gamma, a_1} \delta_{a_1, a_2} J_0(k_2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{b}_{134}|)] \alpha_3 \alpha_4 \delta_{a_3, -a_4} K_0(a_{34} \mathbf{r}_{34}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_q(\{\alpha_i, \mathbf{r}_i\}) &= -\frac{e_q \alpha_s(m_q) (t_a)_{c_1 c_2} \otimes (t_a)_{c_3 c_4}}{2\pi^4 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 \bar{\alpha}_2} \delta_{a_1, -a_2} \delta_{\gamma, -a_1} \int q_1 dq_1 k_2 dk_2 \frac{J_0(q_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{b}_{34}|) J_0(k_2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{b}_{134}|)}{D_2(\alpha_1, \mathbf{k}_1; \alpha_2, \mathbf{k}_2)} \\
 &\quad (2.82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \times \left[ -(\alpha_3 \delta_{-\gamma, a_3} - \alpha_4 \delta_{\gamma, a_3}) \delta_{a_3, -a_4} i \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma \cdot \mathbf{n}_{34} a_{34} K_1(a_{34} \mathbf{r}_{34}) - \frac{m_q(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sqrt{2}} \text{sign}(a_3) \delta_{\gamma, -a_3} \delta_{a_3, -a_4} \right] \\
 &\quad a_{34}(q_1, k_2) \equiv \sqrt{m_2^2 + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left[ \frac{\bar{\alpha}_2 q_1^2}{\alpha_1 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{m_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_2^2}{\alpha_2 \bar{\alpha}_2} \right]} \\
 &\quad (2.83)
 \end{aligned}$$

Las funciones  $B_q$  y  $B_g$  pueden obtenerse de manera directa con los resultados de  $A_q$  y  $A_g$  de la forma:

$$B_i(\alpha_1, \mathbf{x}_1, \alpha_2, \mathbf{x}_2, \alpha_3, \mathbf{x}_3, \alpha_4, \mathbf{x}_4) = -A_i(\alpha_2, \mathbf{x}_2, \alpha_1, \mathbf{x}_1, \alpha_4, \mathbf{x}_4, \alpha_3, \mathbf{x}_3), \quad i = q, g. \quad (2.84)$$

### 2.1.7. Amplitudes de Scattering en la aproximación eikonal

De acuerdo a lo mostrado en la sub-sección 2.1.2, en el espacio de configuración las interacciones del objetivo con los quarks pesados puede reducirse a la multiplicación de un factor  $\pm\gamma(\mathbf{x}_\perp)$ . Para calcular la amplitud de *dispersión* es necesario el uso de del marco de la evolución del cono de luz, como se puede apreciar en la Figura 2.4, asumiendo de manera implícita en las líneas verticales separan las distintas etapas sucesivas del proceso de *dispersión*.

El proceso inicia asumiendo una interacción de un gluón singular con partones de alta energía. El fotón incoloro crea un par quark-antiquark con coordenadas transversales  $(\mathbf{b}_{134}, \mathbf{x}_2)$  o  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_{234})$  respectivamente, como se mostró en la Figura 2.7. La interacción eikonal puede ocurrir en cualquier etapa del proceso, por lo que la amplitud de Born de tal proceso incluye la suma de las contribuciones por la interacción en todas las etapas,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3, \quad (2.85)$$

donde las contribuciones  $\mathcal{A}_{1,2,3}$  están dadas por:

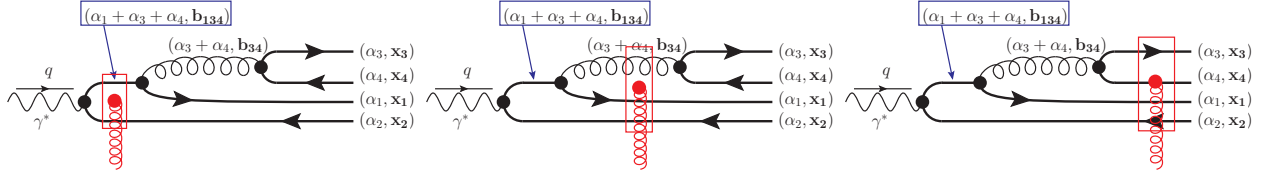


Fig. 2.7: Ilustración de los diagramas que contribuyen al subproceso  $\gamma \rightarrow \bar{Q}Q\bar{Q}Q$ , mediante el intercambio de un único gluón en el canal  $t$ . El rectángulo rojo con un gluón conectado representa el acoplamiento de un dipolo, en otras palabras, la suma de los acoplamientos de todos los partones que pasan por ese rectángulo,  $\sim \sum(\pm)\gamma(\mathbf{x}_i)t_a$ . El centro de masa  $\mathbf{b}_{i_1\dots i_n}$  del sistema de partones  $i_1\dots i_n$  fue definido previamente en (2.40). En estas gráficas esta implícita la inclusión de diagramas cuyas líneas de quarks están invertidas, es decir, que representan la conjugación de cargas.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q) \times & (2.86) \\ &\times \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{b}_{134}) - \gamma_c(\mathbf{x}_2)] \left( \frac{if_{acd} + d_{acd}}{2} \right) (t_d)_{c_1c_2} (t_a)_{c_3c_4} \\ &- (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q) \times & (2.87) \\ &\times \left\{ \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{x}_1) + \gamma_c(\mathbf{x}_2) - 2\gamma_c(\mathbf{x}_{34})] \left( \frac{if_{acd}}{2} \right) (t_d)_{c_1c_2} (t_a)_{c_3c_4} + \right. \\ &+ \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{x}_1) - \gamma_c(\mathbf{x}_2)] \left( \frac{d_{acd}}{2} \right) (t_d)_{c_1c_2} (t_a)_{c_3c_4} + \\ &+ \left. \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{x}_1) - \gamma_c(\mathbf{x}_2)] \delta_{c_1c_2} (t_c)_{c_3c_4} \right\} \\ &- (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q) \times & (2.88) \\ &\times \left\{ \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{x}_1) + \gamma_c(\mathbf{x}_2) - \gamma_c(\mathbf{x}_3) - \gamma_c(\mathbf{x}_4)] \left( \frac{if_{acd}}{2} \right) (t_d)_{c_1c_2} (t_a)_{c_3c_4} + \right. \\ &+ \left. \sum_{acd} [\gamma_c(\mathbf{x}_1) - \gamma_c(\mathbf{x}_2) + \gamma_c(\mathbf{x}_3) - \gamma_c(\mathbf{x}_4)] \left( \frac{d_{acd}}{2} \right) (t_d)_{c_1c_2} (t_a)_{c_3c_4} \right\} \\ &- (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4), \end{aligned}$$

Es posible observar que todos los factores  $\gamma_c(\mathbf{x}_i)$ , aparecen como una combinación de  $\gamma_c(\mathbf{x}_i) - \gamma_c(\mathbf{x}_j)$ , lo cual garantiza que en la masa límite de los quark pesados, cuando las distancias entre los quarks son pequeñas, las amplitudes se suprime al menos como  $\sim 1/m_Q$ . El acoplamiento de tres gluones  $\sim \gamma(\mathbf{x}_{34})$  aparece siempre como la combinación  $[\gamma_c(\mathbf{x}_1) + \gamma_c(\mathbf{x}_2) - 2\gamma_c(\mathbf{x}_{34})]$ , en acuerdo con los estudios de [37].

Para el caso del intercambio de dos gluones, puede repetirse los mismos cálculos, tomando en cuenta los diagramas mostrados en la Figura 2.8. El resultado final queda como:

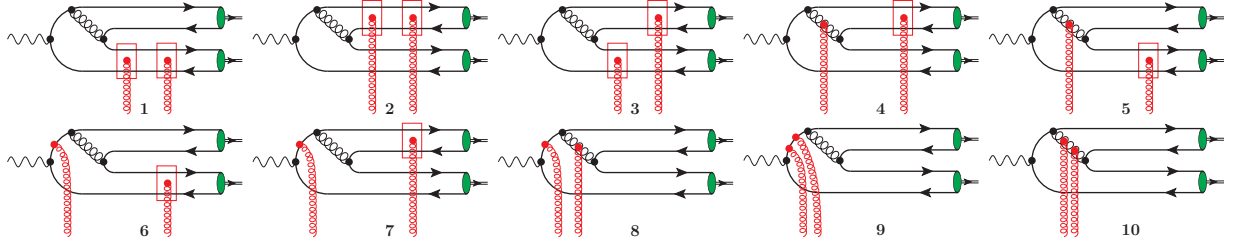


Fig. 2.8: La ilustración muestra los diagramas que contribuyen a la producción de par de mesones. Para efectos prácticos, el pomeron es aproximado a un par de gluones de canal  $t$ , y se omitieron todos los posibles intercambios entre ellos. El rectángulo rojo con un gluón en el centro representa una suma de los acoplamientos de un quark y antiquark que pasa por el rectángulo,  $\sim (\gamma(\mathbf{x}_Q) - \gamma(\mathbf{x}_{\bar{Q}})) t_a$ . En este caso están incluidos de manera implícita los diagramas que se obtienen al invertir las líneas de quarks pesados, es decir, al conjugar las cargas.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} = & \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q) \times & (2.89) \\
 & \times \{ \mathcal{C}_1 [(\gamma(\mathbf{x}_1) - \gamma(\mathbf{x}_4))^2 + (\gamma(\mathbf{x}_3) - \gamma(\mathbf{x}_2))^2] + \\
 & + 2\mathcal{C}_2 (\gamma(\mathbf{x}_1) - \gamma(\mathbf{x}_4)) (\gamma(\mathbf{x}_3) - \gamma(\mathbf{x}_2)) - \\
 & + \mathcal{C}_3 (\gamma(\mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2) - 2\gamma(\mathbf{x}_{34})) (\gamma(\mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2) - \gamma(\mathbf{x}_3) - \gamma(\mathbf{x}_4)) \\
 & + \mathcal{C}_1 (\gamma(\mathbf{b}_{134}) - \gamma(\mathbf{x}_2)) (\gamma(\mathbf{x}_3) - \gamma(\mathbf{x}_2)) + \\
 & + \mathcal{C}_2 (\gamma(\mathbf{b}_{134}) - \gamma(\mathbf{x}_2)) (\gamma(\mathbf{x}_1) - \gamma(\mathbf{x}_4)) + \\
 & - \mathcal{C}_3 (\gamma(\mathbf{b}_{134}) - \gamma(\mathbf{x}_2)) (\gamma(\mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2) - 2\gamma(\mathbf{x}_{34})) + \\
 & + \mathcal{C}_1 (\gamma(\mathbf{b}_{134}) - \gamma(\mathbf{x}_2))^2 + \mathcal{C}_4 (\gamma(\mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2) - 2\gamma(\mathbf{x}_{34}))^2 \}
 \end{aligned}$$

donde los factores de color  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  fueron definidos en (2.35–2.37). Usando las ecuaciones (2.24),(2.28), es posible reescribir la amplitud (2.89) como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} = & \psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}(\alpha_1, \mathbf{x}_1; \alpha_2, \mathbf{x}_2; \alpha_3, \mathbf{x}_3; \alpha_4, \mathbf{x}_4; q) \times & (2.90) \\
 & \{ -2\mathcal{C}_1 [N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{14}) + N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23})] + \\
 & + 2\mathcal{C}_2 [N(x, \mathbf{r}_{34}, \mathbf{b}_{34}) + N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) - N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) - N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24})] \\
 & + \mathcal{C}_3 [-2N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) + N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) + N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{14}) + N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) + N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24}) \\
 & + 2N(x, \mathbf{r}_{1,34}, \mathbf{b}_{134}) + 2N(x, \mathbf{r}_{2,34}, \mathbf{b}_{234}) - 2N(x, \mathbf{r}_{3,34}, \mathbf{b}_{334}) - 2N(x, \mathbf{r}_{4,34}, \mathbf{b}_{344})] \\
 & + \mathcal{C}_1 [N(x, \mathbf{r}_{2,134}, \mathbf{b}_{1234}) + N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) - N(x, \mathbf{r}_{3,134}, \mathbf{b}_{1334})] \\
 & + \mathcal{C}_2 [N(x, \mathbf{r}_{4,134}, \mathbf{b}_{1344}) + N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) - N(x, \mathbf{r}_{1,134}, \mathbf{b}_{1,134}) - N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24})] \\
 & - \mathcal{C}_3 [-N(x, \mathbf{r}_{1,134}, \mathbf{b}_{1134}) - N(x, \mathbf{r}_{2,134}, \mathbf{b}_{1234}) + N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) \\
 & + 2N(x, \mathbf{r}_{34,134}, \mathbf{b}_{34,134}) - 2N(x, \mathbf{r}_{2,34}, \mathbf{b}_{234})] + \mathcal{C}_1 N(x, \mathbf{r}_{2,134}, \mathbf{b}_{1234}) \\
 & + \mathcal{C}_4 [2N(x, \mathbf{r}_{1,34}, \mathbf{b}_{134}) + 2N(x, \mathbf{r}_{2,34}, \mathbf{b}_{234}) - N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12})] \}
 \end{aligned}$$

donde se define que:

$$\mathbf{r}_{1,34} = \mathbf{r}_1 - \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \quad (2.91)$$

$$\mathbf{r}_{2,34} = \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{23} + \alpha_4 \mathbf{r}_{24}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{r}_{3,34} = \frac{\alpha_4 \mathbf{r}_{34}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{r}_{4,34} = -\frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{34}}{\alpha_3 + \alpha_4} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \mathbf{r}_{3,34}, \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{34,134} &= \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{\alpha_3 + \alpha_4} - \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4} = \\ &= -\frac{\alpha_1 (\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14})}{(\alpha_3 + \alpha_4) (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,134} &= \mathbf{r}_1 - \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} = \frac{(1 - \alpha_2 - \alpha_3) \mathbf{r}_1 - \alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14}}{1 - \alpha_2}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2,134} &= \mathbf{r}_2 - \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} = \frac{(1 - \alpha_2) \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1 - \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{21} + \alpha_3 \mathbf{r}_{23} + \alpha_4 \mathbf{r}_{24}}{1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{3,134} &= \mathbf{r}_3 - \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} = \frac{(1 - \alpha_2 - \alpha_3) \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1 - \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{31} + \alpha_4 \mathbf{r}_{34}}{1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{4,134} &= \mathbf{r}_4 - \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4}{1 - \alpha_2} = \frac{(1 - \alpha_2 - \alpha_4) \mathbf{r}_4 - \alpha_1 \mathbf{r}_1 - \alpha_3 \mathbf{r}_3}{1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{41} + \alpha_3 \mathbf{r}_{43}}{1 - \alpha_2} = -\frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{14} + \alpha_3 \mathbf{r}_{34}}{1 - \alpha_2}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

Si se introduce la variable  $\mathbf{R} = \sum \alpha_i \mathbf{r}_i$  es posible reescribir las expresiones previas como

$$r_{1,134} = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{R} - \alpha_2 \mathbf{r}_2}{1 - \alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}}{1 - \alpha_2}, \quad (2.100)$$

$$r_{2,134} = \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{R} - \alpha_2 \mathbf{r}_2}{1 - \alpha_2} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}}{1 - \alpha_2}, \quad (2.101)$$

$$r_{3,134} = \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{R} - \alpha_2 \mathbf{r}_2}{1 - \alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \mathbf{r}_3 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}}{1 - \alpha_2}, \quad (2.102)$$

$$r_{4,134} = \mathbf{r}_4 - \frac{\mathbf{R} - \alpha_2 \mathbf{r}_2}{1 - \alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \mathbf{r}_4 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}}{1 - \alpha_2}. \quad (2.103)$$

### 2.1.8. Evaluación de la Amplitud del proceso

Teniendo las herramientas establecidas en las secciones anteriores, es posible retomar el cálculo de la amplitud iniciado en la sub-sección 2.1.3. Usando los factores

de color  $\mathcal{C}_1 = (N_c^2 - 1) / 4N_c = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$ ,  $\mathcal{C}_2 = -1/4N_c$ ,  $\mathcal{C}_3 = N_c/4$ ,  $\mathcal{C}_4 \equiv N_c/2 = 2\mathcal{C}_3$ , e identificando los coeficientes frente a  $\psi_{\bar{Q}Q\bar{Q}Q}^{(\gamma)}$  en (2.33) con  $\sum_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n)$  en (2.33) es posible obtener, para la contribución de tipo  $A$ , el resultado final como:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n) = & \left\{ \frac{2 - N_c^2}{4N_c} N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{14}) - \frac{1}{2N_c} N(x, \mathbf{r}_{34}, \mathbf{b}_{34}) - \frac{3 + 5N_c^2}{4N_c} N(x, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{b}_{12}) \right. \\ & + \frac{1}{4N_c} \left[ N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) - N\left(x, \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{14} + \alpha_3 \mathbf{r}_{34}}{1 - \alpha_2}, \mathbf{b}_{1344}\right) \right] \\ & + \frac{N_c^2 + 2}{4N_c} N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13}) + \frac{3N_c^2 - 2}{4N_c} N\left(x, \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{21} + \alpha_3 \mathbf{r}_{23} + \alpha_4 \mathbf{r}_{24}}{1 - \alpha_2}, \mathbf{b}_{1234}\right) \\ & + \frac{3N_c}{2} N\left(x, \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \mathbf{b}_{134}\right) + 2N_c N\left(x, \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{23} + \alpha_4 \mathbf{r}_{24}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \mathbf{b}_{234}\right) \\ & + \frac{N_c^2 + 1}{4N_c} \left[ N\left(x, \frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14}}{1 - \alpha_2}, \mathbf{b}_{1134}\right) + N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24}) \right] \\ & - \frac{N_c}{2} \left[ N\left(x, \frac{\alpha_4 \mathbf{r}_{34}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \mathbf{b}_{334}\right) + N\left(x, -\frac{\alpha_3 \mathbf{r}_{34}}{\alpha_3 + \alpha_4}, \mathbf{b}_{344}\right) \right] \\ & - \frac{N_c}{2} N\left(x, -\frac{\alpha_1 (\alpha_3 \mathbf{r}_{13} + \alpha_4 \mathbf{r}_{14})}{(\alpha_3 + \alpha_4) (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)}, \mathbf{b}_{34,134}\right) \\ & \left. - \frac{N_c^2 - 1}{4N_c} N\left(x, \frac{\alpha_1 \mathbf{r}_{31} + \alpha_4 \mathbf{r}_{34}}{1 - \alpha_2}, \mathbf{b}_{1334}\right) \right\}, \quad (2.104) \end{aligned}$$

El cálculo de la amplitud (2.34) sigue el mismo procedimiento pero de manera más sencilla debido a que la producción de dos  $\bar{Q}Q$  incoloros requieren en esta topología que los gluones de canal  $t$  deben estar adjuntos a distintos *loops* de quarks, reduciendo de manera significativa el número de posibles diagramas. Luego de realizar ciertas simplificaciones algebraicas, es posible obtener, para las contribuciones de tipo  $B$ , el resultado final:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell n} \sigma_\ell \sigma_n c_{\ell n} \gamma(\mathbf{b}_\ell) \gamma(\mathbf{b}_n) = & \frac{1}{4} [N(x, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{b}_{23}) - N(x, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{b}_{24}) + \\ & + N(x, \mathbf{r}_{3,234}, \mathbf{b}_{2334}) - N(x, \mathbf{r}_{4,234}, \mathbf{b}_{2344}) + \quad (2.105) \\ & + 2N(x, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{b}_{24}) - 2N(x, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{b}_{13})] \end{aligned}$$

Las variables  $\mathcal{Y}_{ij}$  en (2.33), (2.34) representan la rapidez en marco de laboratorio del par quark-antiquark hecho de los partones  $i, j$ . De manera explicita, está dada por

$$\mathcal{Y}_{ij} = \ln \left( \frac{(\alpha_i + \alpha_j) q^+}{M_\perp} \right), \quad (2.106)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  son las fracciones de cono de luz de los quarks pesados que forman un quarkonio.

Las amplitudes de dipolo (2.104), (2.105) toman en cuenta la suma de diferentes "escaleras de pomerones" (*pomeron ladders*) [40, 43], y es por esta razón que corresponde al intercambio de números cuánticos en el canal  $t$ . Esto impone ciertas restricciones de posibles números cuánticos de quarkonios pesados producidos mediante subprocesos  $\gamma + IP \rightarrow M_1 M_2$ . Como la paridad  $C$  del fotón es negativa, el

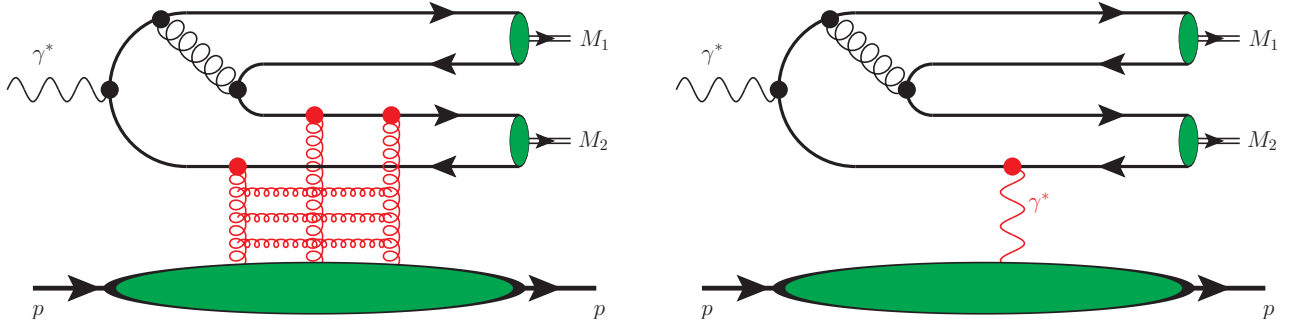


Fig. 2.9: Ejemplos de contribuciones de mayor orden, las cuales se vuelven relevantes para la producción exclusiva de quarkonio con la misma paridad  $C$ . El diagrama izquierdo corresponde al intercambio de odderón en el canal  $t$ . El diagrama derecho corresponde al intercambio de un fotón en el canal  $t$ . Para ambos casos se considera la suma sobre todos los gluones y fotón de de canal  $t$  adjuntos a las líneas partónicas. Comparando con los diagramas de la Figura 2.1, la contribución de los diagramas en esta figura se ven suprimidos, y por ende no son considerados en este trabajo.

quarkonio neutro  $M_1, M_2$  deben tener paridades  $C$  opuestas. Esto excluye explícitamente la producción de quarkonio con los mismos números cuánticos ( $M_1 = M_2$ ). Para el caso de quarkonio cargado, como por ejemplo  $B_c^+ B_c^-$ , se asume de manera implícita que estos deben haber sido producidos con valores impares de momento angular  $L$ . Finalmente, es necesario mencionar que a mayores ordenes la interacción con el objetivo debe ser suplementado por el intercambio de las *escaleras de odderón* en el canal  $t$  [151] potencialmente añadiendo contribuciones de intercambio de odderones, como se puede apreciar en el lado izquierdo de la Figura 2.9. Estas interacciones están suprimidas a altas energías, debido a que el odderón tiene un intercepto más pequeño que el pomerón. Además, formalmente esta contribución está también suprimida por  $\mathcal{O}(\alpha_s(m_Q))$ . Otro posible medio para producir pares de quarkonio de paridad  $C$  par, es vía intercambio de un fotón de paridad impar como se muestra al lado derecho de la Figura 2.9. Formalmente, estas contribuciones esta suprimidas por  $\sim \alpha_{em}/\alpha_s^2(m_Q)$ , el cual es un parámetro pequeño para quarks *charm* y *bottom*, pero podrían verse realzadas en el limite de una masa de quark infinitamente pesada  $m_Q \rightarrow \infty$  debido a la supresión de  $\alpha_s(m_Q)$  en el denominador. De acuerdo a los análisis fenomenológicos [48-52], la sección eficaz de estos mecanismos eses numéricamente mucho más pequeña que el del estudiado en este manuscrito. Es por esto que no serán consideradas las contribuciones de odderones de canal  $t$  y fotones.



### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1. Resultados Numéricos

El marco desarrollado en las secciones previas es válido para quarkonio pesado de sabores *bottom* y *charm*. A continuación el foco se centrará en el sector de los *charm*, presentando los resultados para la producción de mesón  $J/\psi + \eta_c$ , cuya sección eficaz es más grande y por lo tanto más sencilla de analizar experimentalmente. Según los valores estimados para *bottomonio*, la sección eficaz es al menos un orden de magnitud más pequeño en comparación debido a su masa de quark más pesada. Para la función de onda de los mesones  $J/\psi$ , se usará el ansatz sugerido en [147]

$$\Psi_{J/\psi}(z, \mathbf{r}, M = 0) = \frac{\delta_{h, -\bar{h}}}{\sqrt{2}} z(1-z) \varphi(z, \mathbf{r}), \quad (3.1)$$

$$\Psi_{J/\psi}(z, \mathbf{r}, M = \pm 1) = \frac{1}{M_V} \left[ iM e^{iM\theta} (\bar{z} \delta_{h, -M} \delta_{\bar{h}, M} - z \delta_{h, M} \delta_{\bar{h}, -M}) \partial_r + m_Q \delta_{h, M} \delta_{\bar{h}, M} \right] \varphi(z, \mathbf{r}) \quad (3.2)$$

$$\varphi(z, \mathbf{r}) = \frac{\sqrt{2}\pi f_V}{\sqrt{N_c \hat{e}_V}} f(z) e^{-\omega^2 r^2/2}, \quad f(z) = \sqrt{z(1-z)} e^{-M_V^2 (z-1/2)^2/2\omega^2} \quad (3.3)$$

donde  $M$  es la helicidad de  $J/\psi$ ,  $\mathbf{r}$  es la distancia entre el quark y antiquark,  $h, \bar{h}$  son las helicidades de los quark y antiquark respectivamente, y  $f_V, e_V, \omega$  son constantes numéricas. Este resultado puede extenderse de manera trivial para el caso de los mesones  $\eta_c$ , los cuales difieren de los  $J/\psi$  solo por la orientación de los spins de los quarks. Tomando en cuenta la estructura de los coeficientes de Clebsch-Gordan para el producto  $1/2 \times 1/2$ , es posible escribir la función de onda para  $\eta_c$ , modificando la componente  $M = 0$  de la función de onda de  $J/\psi$ , quedando de la forma:

$$\Psi_{\eta_c}(z, \mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{h, \bar{h}}}{\sqrt{2}} z(1-z) \varphi(z, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} = \delta_{a, -b} \text{sign}(a). \quad (3.4)$$

De forma alternativa, la función de onda de quarkonio puede construirse usando modelos de potencial, o la prescripción de Brodsky-Huang-Lepage-Terentyev (BHLT) [153-155] la cual permite convertir la función de onda en el marco de reposo  $\psi_{\text{RF}}$  a la función de onda del cono de luz  $\Psi_{\text{LC}}$ . Es sabido que en la región de pequeños  $r$ , la cual es relevante para los estimados, la función de onda para la quarkonia pesada de onda- $S$  en distintos sistemas están bastante cerca las unas de las otras [156-159], y es por esta razón que se usarán los ansatz de (3.1-3.4), en vista de su simplicidad. Para los cálculos numéricos es necesaria una parametrización de la amplitud de dipolo. Usaremos la parametrización de la sección eficaz de dipolo dependiente del parámetro de impacto ( $b$ ) “bCGC” [118, 160],

$$N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) = \begin{cases} N_0 \left( \frac{r Q_s(x)}{2} \right)^{2\gamma_{\text{eff}}(r)}, & r \leq \frac{2}{Q_s(x)} \\ 1 - \exp(-\mathcal{A} \ln(\mathcal{B} r Q_s)), & r > \frac{2}{Q_s(x)} \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{N_0^2 \gamma_s^2}{(1 - N_0)^2 \ln(1 - N_0)}, \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2} (1 - N_0)^{-\frac{1-N_0}{N_0 \gamma_s}}, \quad (3.6)$$

$$Q_s(x, \mathbf{b}) = \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\lambda/2} T_G(b), \quad \gamma_{\text{eff}}(r) = \gamma_s + \frac{1}{\kappa \lambda Y} \ln \left( \frac{2}{r Q_s(x)} \right), \quad (3.7)$$

$$\gamma_s = 0,66, \quad \lambda = 0,206, \quad x_0 = 1,05 \times 10^{-3}, \quad \kappa = 9,9 \quad (3.8)$$

$$T_G(b) = \exp \left( -\frac{b^2}{2\gamma_s B_{\text{CGC}}} \right).$$

donde  $Y$  es la rapidez. El modelo fue construido interpolando entre dos comportamientos límites controlados, siendo uno de estos la solución de la ecuación BFKL en la vecindad de saturación pequeños dipolos  $r \ll 1/Q_s$  [161], y la otra la solución de Levin-Tuchin [162] de la ecuación de BK en la región de saturación de grandes dipolos  $r \gg 1/Q_s$ . Dado que el enfoque de dipolo y una parametrización CGC particular (3.5), son aplicables en la cinemática de la variable pequeña  $x \lesssim 10^{-2} \ll 1$ , en lo que sigue consideraremos solo la cinemática de mayor energía que se trabaja en el EIC, con  $\sqrt{s_{\text{ep}}} \approx 141$  GeV. Para pequeñas energías las contribuciones de intercambios mediados por pomeron están suprimidas, y las correcciones considerables de otros mecanismos podrían volverse importantes.

Como se mencionó anteriormente, para el caso de producción de charmonio del mismo sabor existen dos posibles mecanismos mostrados en los lados izquierdo y derecho de la Figura 2.1, los cuales llamamos contribuciones tipo  $A$  y tipo  $B$ . Del lado izquierdo de la Figura 3.1 es posible apreciar que la contribución dominante viene dada por los diagramas de tipo  $A$ . Este realce podría darse por los factores de color más grandes en el límite de  $N_c$  grande. La interferencia de las contribuciones de tipo  $A$  y  $B$  representan aproximadamente una corrección del 10 %, y además posee un nodo cuya posición depende de la cinemática del quarkonio producido.

Como era de esperarse, la sección eficaz esta suprimida como función de  $p_T$ . Para este caso se considera que:

$$|\mathbf{p}_{J/\psi}^\perp| = |\mathbf{p}_\eta^\perp| = p_T \quad (3.9)$$

En el gráfico del lado derecho de la Figura 3.1 se presenta una dependencia en el ángulo azimutal  $\phi$  entre los momentos transversales de los mesones  $J/\psi$  y  $\eta_c$ . Como se asume en 3.9, el momento transversal  $\mathbf{p}_{J/\psi}^\perp, \mathbf{p}_\eta^\perp$  de ambas quarkonia tienen igual valor absoluto. Para realizar una comparación significativa que difiere en ordenes de magnitud, se graficó el ratio normalizado:

$$R(\phi) = \frac{d\sigma(\dots, \phi) / dy_1 dp_1^2 dy_2 dp_2^2 d\phi}{d\sigma(\dots, \phi = \pi) / dy_1 dp_1^2 dy_2 dp_2^2 d\phi}, \quad R(\phi = \pi) \equiv 1 \quad (3.10)$$

Se puede ver que el ratio tiene un pico pronunciado en la región ( $\phi = \pi$ ), lo cual ocurre ya que en esta cinemática la transferencia de momento al objetivo  $|t| = |\Delta^2|$

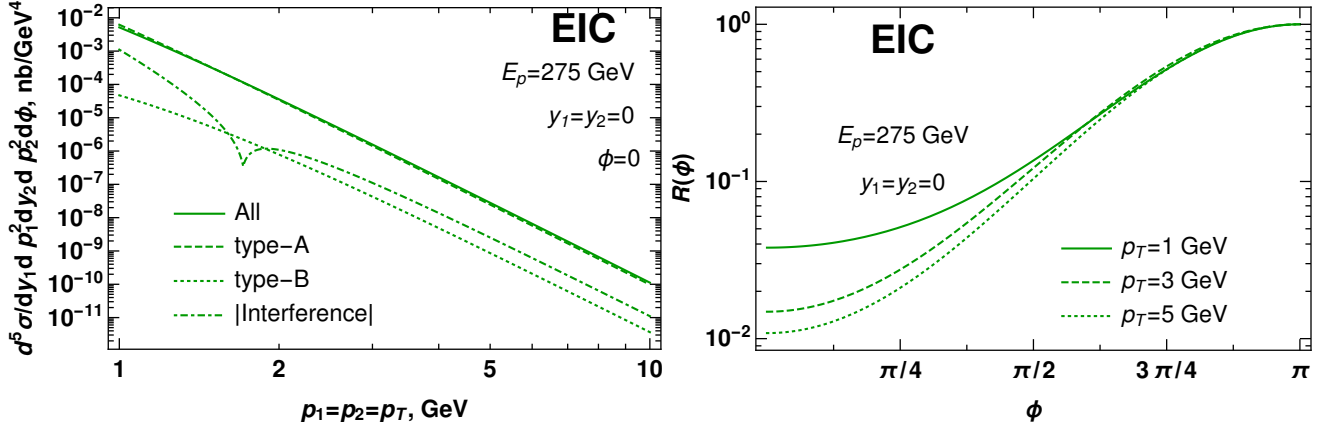


Fig. 3.1: Plot izquierdo: Diferentes contribuciones a la producción de pares de charmonio en la cinemática del EIC: diagramas de tipo  $A$ ,  $B$  y su interferencia. Plot derecho: La dependencia del ratio normalizado  $R(\phi)$  definido en (3.10), del ángulo  $\phi$ . Para ser más precisos, se considera el caso cuando ambos quarkonios son producidas a rapideces centrales ( $y_1 = y_2 = 0$ ) en el marco de laboratorio. Para otras rapideces la dependencia de  $\phi$  tiene una forma similar.

es mínima. Por otro lado, para el ángulo  $\phi \approx 0$  que maximiza la variable  $|t| = |\Delta^2|$ , el ratio tiene una caída pronunciada. Para  $p_1 \neq p_2$  la dependencia en  $\phi$  es similar cualitativamente, aunque los máximos y mínimos son menos pronunciados.

En el lado izquierdo de la Figura 3.2, se analiza la dependencia en  $p_T$ , para el caso cuando uno de los quarkonios tiene un momento trasversal pequeño  $p_i \sim 1$  GeV. Como se esperaba, en este caso la sección eficaz tiene una supresión significativamente más leve en comparación con el caso en que ambos quarkonios comparten el mismo momento trasversal. Este resultado indica que el par de quarkonios son predominantemente producidos con pequeño momento trasversal  $p_1^\perp \sim p_2^\perp \lesssim 1$  GeV y direcciones opuestas en el plano trasversal  $\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 \approx \pi$ . En el lado derecho de la Figura 3.2, se muestra que la dependencia en  $p_T$  de la sección eficaz en la cinemática del LHeC. Mientras el valor absoluto de incrementa en este caso, se observa que cualitativamente la dependencia en  $p_T$  y el ángulo  $\phi$  se mantiene igual.

En la figura 3.3 se analiza la dependencia de la sección eficaz en las rapideces de los quarkonios. En el lado izquierdo de la figura se considera el caso especial cuando ambos quarkonios son producidas con el mismo momento trasversal  $p_1^\perp \sim p_2^\perp \sim 1$  GeV y las mismas rapideces  $y_1 = y_2$  en el marco de laboratorio. Las variables  $y_{1,2}$  en este caso pueden relacionarse a la energía invariante de fotón-protón  $W_{\gamma p} \sim \sqrt{s_{\gamma p}}$ , y como se esperaba, la sección eficaz crece como función de la energía. En el lado derecho de la Figura 3.3 se analiza la dependencia de la sección eficaz en la diferencia de rapidez  $\Delta y$  entre dos mesones pesados. Para mayor claridad se considera que ambos quarkonios tienen rapideces opuestas en el marco de laboratorio,  $y_1 = -y_2 = \Delta y/2$ . Se observa que en este caso la sección eficaz se suprime como función de  $\Delta y$ , lo cual ilustra el hecho que los quarkonios son predominantemente producidos con las mismas rapideces

Finalmente, en las Figuras 3.4, 3.5, 3.6 se muestran los resultados para la sección eficaz  $d\sigma_{\gamma p \rightarrow M_1 M_2 p} / dy_1 dy_2$ , la cual es integrada sobre el momento trasversal  $\mathbf{p}_i^\perp$  de ambos quarkonios. Este observable puede ser el más prometedor para estudios experimentales, ya que puede ser fácilmente medido. Las predicciones se hacen en la

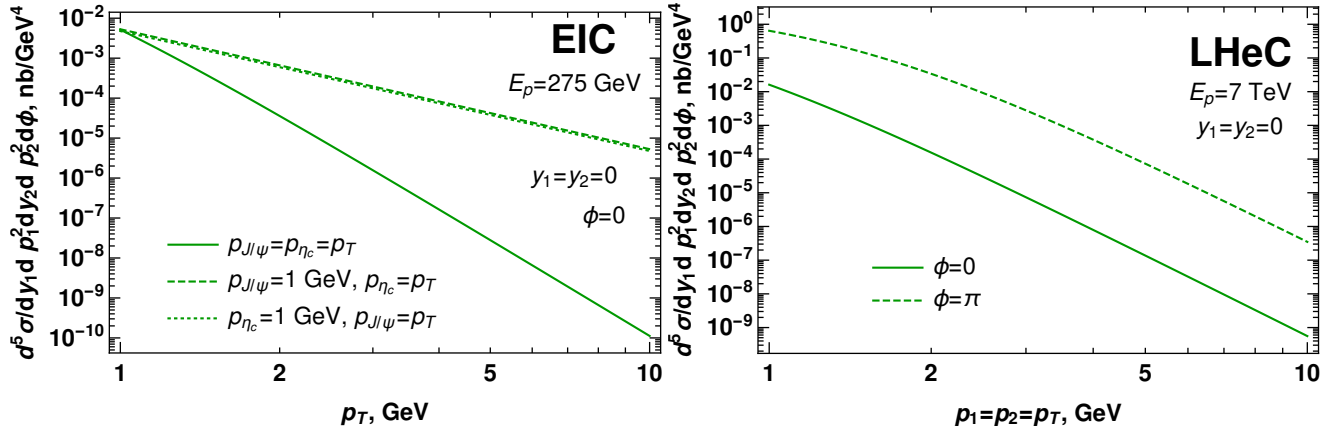


Fig. 3.2: Plot Izquierdo: La dependencia en  $p_T$  de la sección eficaz de la fotoproducción de par de charmonio. Comparación del caso cuando ambos quarkonios tienen momento transversal grande (línea recta), con los casos cuando uno de los quarkonios producidos tiene momento pequeño (línea discontinua). Dentro de los errores del cálculo numérico, no existe diferencia si el momento transversal “suave”  $p_T \approx 1$  GeV es asignado a mesones  $J/\psi$  o  $\eta_c$ . Plot derecho: La dependencia en  $p_T$  de la sección eficaz en la cinemática del LHeC. Para mayor claridad se considera el caso cuando ambos quarkonios son producidos a rapidez central ( $y_1 = y_2 = 0$ ) en marco de laboratorio.

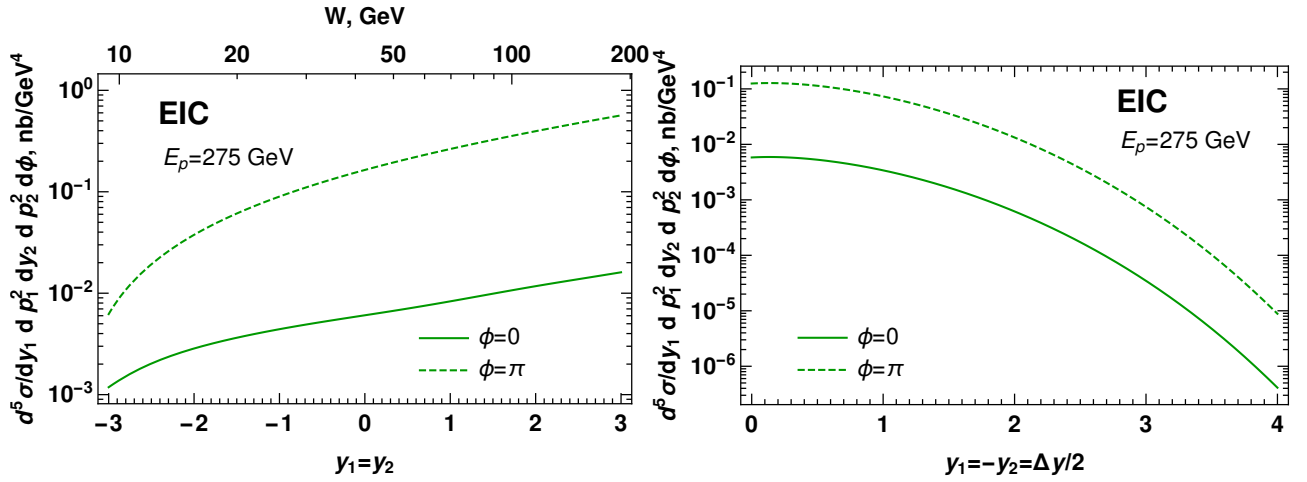


Fig. 3.3: Plot izquierdo: La dependencia en la rapidez de la sección eficaz de fotoproducción en la cinemática de EIC, asumiendo que los quarkonios producidos tienen la misma rapidez,  $y_1 = y_2$ . La escala horizontal superior ilustra el valor correspondiente de energía invariante  $W \equiv \sqrt{s_{\gamma p}}$  definida en (2.14). Plot derecho: La dependencia en la diferencia de rapidez entre los quarkonios producidos  $y_1 = -y_2 = \Delta y / 2$ . Se asume que ambos quarkonios son producidos a rapididades centrales,  $y_1 = y_2 = 0$ , con momento transversal  $p_1 = p_2 = 1$  GeV en el marco de laboratorio.

cinemática de colisiones  $pA$  ultraperiféricas en el LHC, así como también en futuros colisionadores de electrón-hadrón. En gran medida, la dependencia de  $y_1, y_2$  repite una dependencia similar de las secciones eficaces no integradas en  $p_T$ . Esto ocurre ya que la sección eficaz integrada en  $p_T$  recibe sus contribuciones dominantes de la región de pequeños  $p_T \ll m_Q$ , mientras que la dependencia en la rapidez es leve. En las Figuras 3.4, 3.5 también se muestran las secciones eficaces de los procesos “maestros”  $ep \rightarrow eM_1M_2p$  y  $Ap \rightarrow AM_1M_2p$ . Las expresiones para estas secciones eficaces difieren de  $\gamma p \rightarrow M_1M_2p$  por una convolución con factores cinemáticos conocidos, que corresponden a flujos de fotones equivalentes generados por el electrón o núcleos pesados. Estas secciones eficaces tienen un comportamiento completamente diferente en la rapidez  $y_1 = y_2$  de ambos quarkonios, lo cual puede ser entendido de (2.8-2.16). En efecto, los mesones con altas rapididades en el marco de laboratorio pueden ser producidas por fotones de alta energía  $E_\gamma$ , pero el flujo de fotones equivalentes creado por un electrón o ion cargado se suprime y desaparece cuando la elasticidad  $y = E_\gamma/E_e$  se acerca a la unidad.

Finalmente, la Figura 3.6 ilustra como la sección eficaz se comporta como función de  $y_1, y_2$  en general, cuando  $|y_1| \neq |y_2|$ . Se puede ver que la sección eficaz tiene una cresta típica cerca de  $y_1 \approx y_2$ , es decir, cuando los quarkonios se producen aproximadamente con la misma rapidez.

Es de carácter relevante mencionar que estudios previos [48-53] sobre la producción exclusiva se centraban en la producción de pares de quarkonios con los mismos números cuánticos (como el caso de  $J/\psi J/\psi$ ), lo cual significa que este proceso se produce predominantemente mediante el intercambio de *dos* fotones a nivel de amplitud, como por ejemplo el caso de producción mediante fusión fotón-fotón  $\gamma\gamma \rightarrow M_1M_2$  [48-52] o mediante *scattering* de doble fotón [53]. Debido al fotón virtual adicional en la amplitud, la sección eficaz de ese tipo de procesos están paramétricamente suprimidas por  $\sim \alpha_{\text{em}}^2$  comparado a la sección eficaz de quarkonios con paridad  $C$  opuestas, y por ende son numéricamente mucho más pequeñas. La mayoría de los estudios mencionados previamente presentan sus predicciones para la sección eficaz de los subprocesos  $\gamma\gamma \rightarrow J/\psi J/\psi$ , lo cual impide una comparación directa con los resultados de este trabajo, en vista del mecanismo subyacente distinto. Una comparación significativa puede hacerse para la sección eficaz del proceso exclusivo  $pp \rightarrow pp M_1M_2$  en la cinemática ultraperiférica, la cual fue analizada en [49]. En la Figura 3.7 directamente se compara los resultados presentados en [49] con la sección eficaz evaluada en el marco de la sección 2.1.1. Como se espera, la sección eficaz del mecanismo es más grande que la del proceso de producción mediado por la fusión  $\gamma\gamma$ , aunque este aumento es ligeramente más leve que  $\sim 1/\alpha_{\text{em}}^2$ , como se podría esperar.

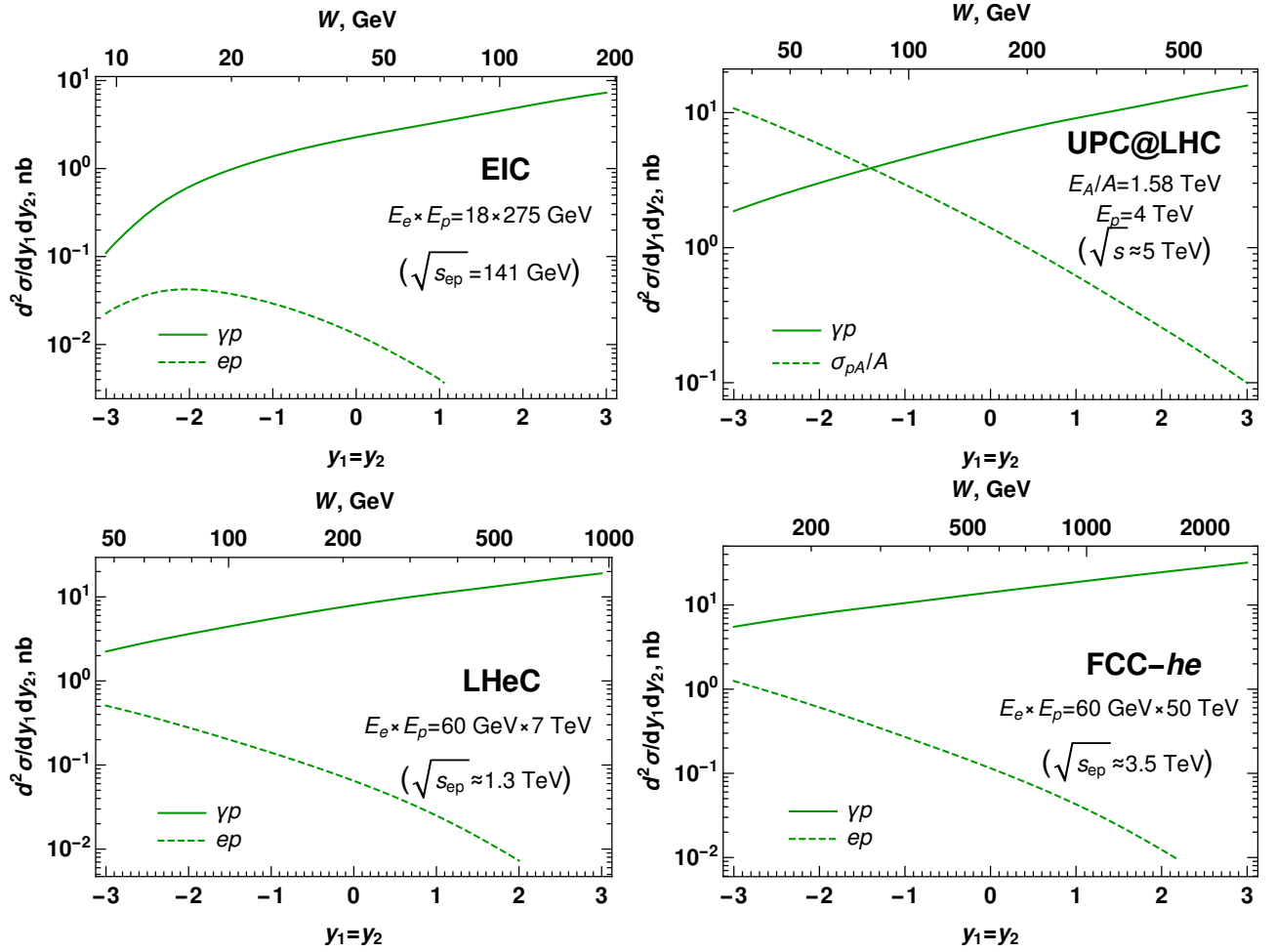


Fig. 3.4: La dependencia en la rapidez de la sección eficaz integrada en  $p_T$  en la cinemática de colisiones ultraperiféricas en el LHC y en la cinemática de los futuros colisionadores de  $ep$ . El signo positivo de la rapidez es escogido en la dirección del electrón o el fotón cuasi-real emitido. Para colisiones ultraperiféricas (UPC) la dirección positiva de la rapidez es la del ion pesado de plomo, y las secciones eficaces están dadas para cada nucleón. Las líneas curva corresponden a la sección eficaz del subproceso  $\gamma p \rightarrow M_1 M_2 p$ , mientras que las líneas discontinuas corresponden a la sección eficaz de los procesos físicamente observables  $ep$  o  $Ap$ . Se asume que las rapididades de ambos quarkonios son iguales en el marco de laboratorio,  $y_1 = y_2 = y$ . La escala superior horizontal ilustra el calor correspondiente de la energía invariante  $W \equiv \sqrt{s_{\gamma p}}$ , como se definió en (2.14).

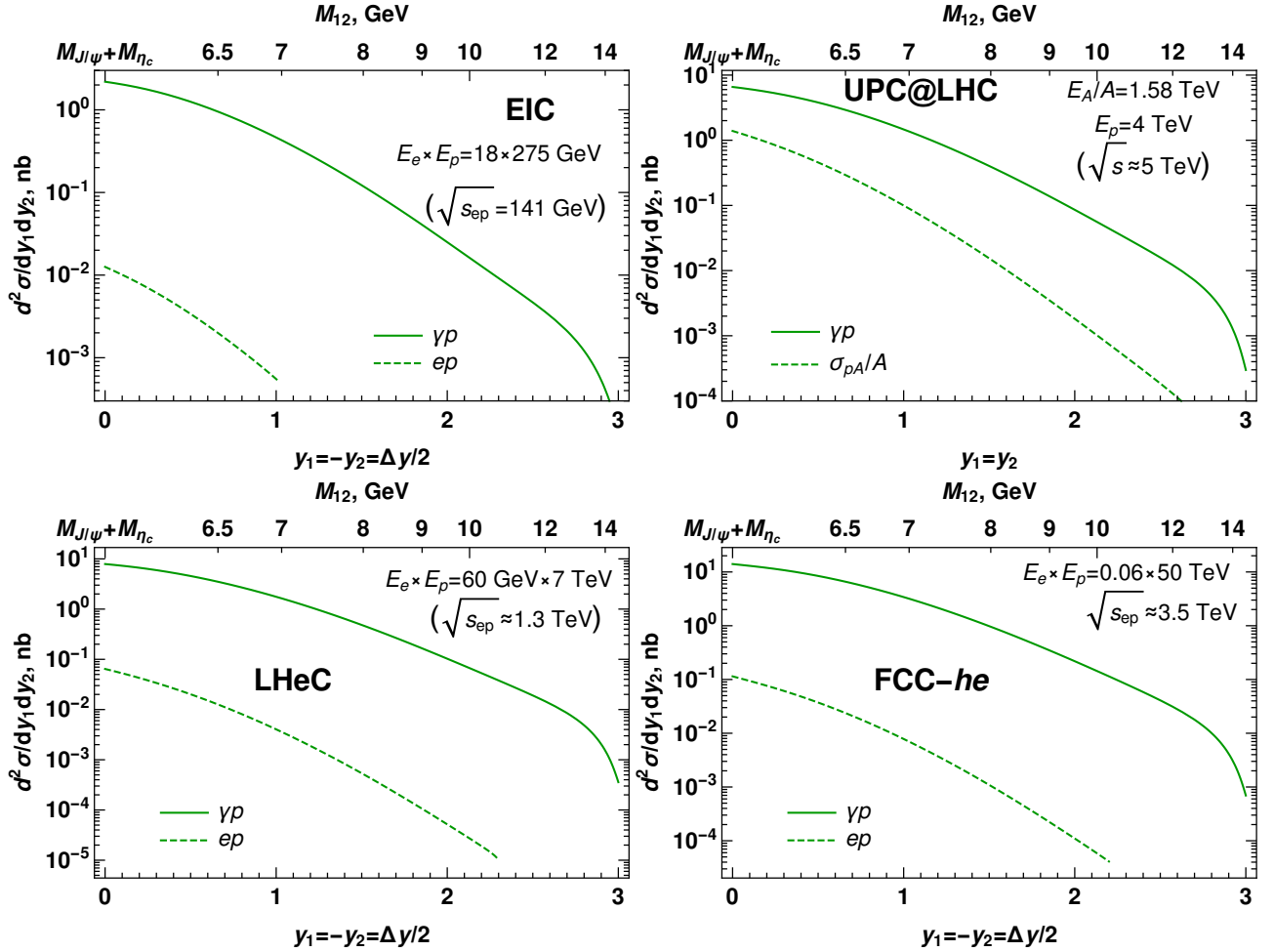


Fig. 3.5: La dependencia en la diferencia de rapididades para la sección eficaz integrada en  $p_T$  en la cinemática de colisiones ultraperiféricas del LHC y futuros colisionadores electrón-protón. El signo positivo de la rapididad se escoge en la dirección del electrón o fotón cuasi-real emitido. Para las colisiones UPC la dirección positiva de la rapididad es la del ion pesado de plomo, y las secciones eficaces están dadas para cada nucleón. Se asume que en el marco de laboratorio los quarkonios tienen rapididades opuestas  $y_1 = -y_2 = \Delta y/2$ . La escala superior horizontal ilustra el valor correspondiente de masa invariante  $M_{12} \equiv \sqrt{(p_{J/\psi} + p_{\eta_c})^2}$ , como se definió en (2.15). Las curvas discontinuas corresponden a la sección eficaz del proceso completo, ya sea electrón-protón o ion pesado-protón.

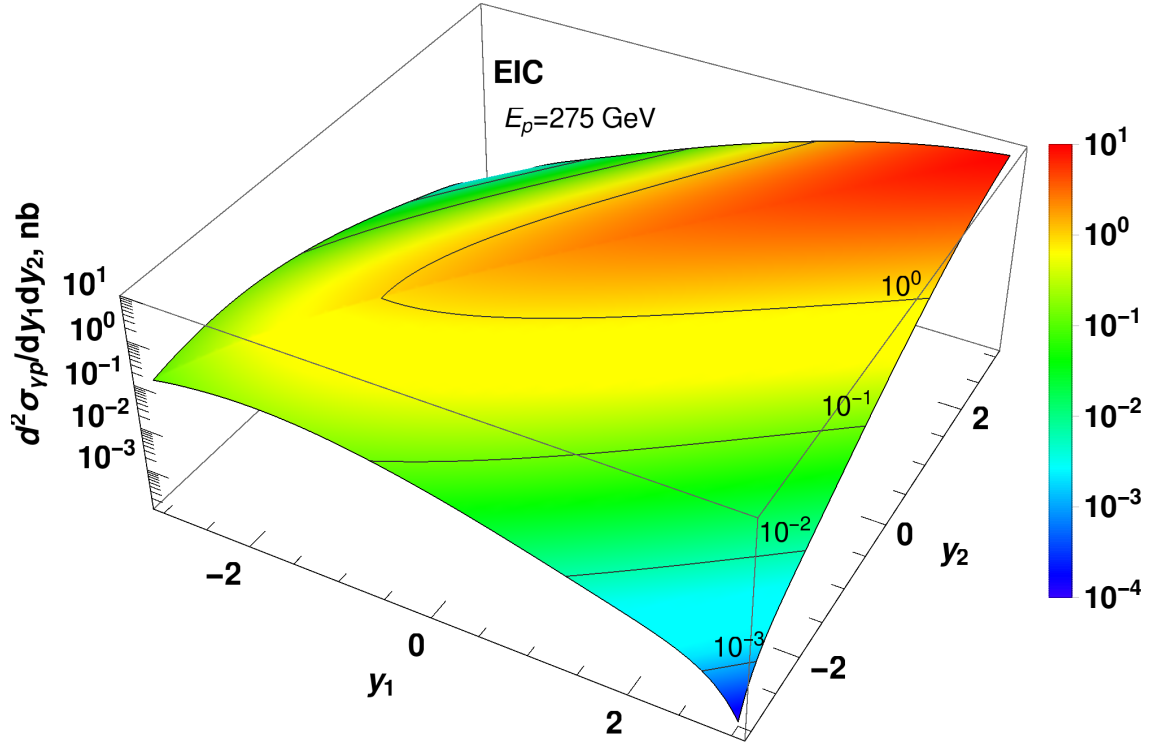


Fig. 3.6: La dependencia en las rapididades  $y_1$ ,  $y_2$ , de los quarkonios producidos, para la sección eficaz del proceso integrado en  $p_T$  de fotoproducción  $d\sigma_{\gamma p}/dy_1 dy_2$ . El plot ilustra el hecho que los partones son producidos con rapididades aproximadamente iguales,  $y_1 \approx y_2$ . Se considera el protón con una energía típica de la cinemática de EIC  $E_p \sim 275$  GeV en el marco de laboratorio. Para otras energías de protón la dependencia tiene cualitativamente una forma similar.

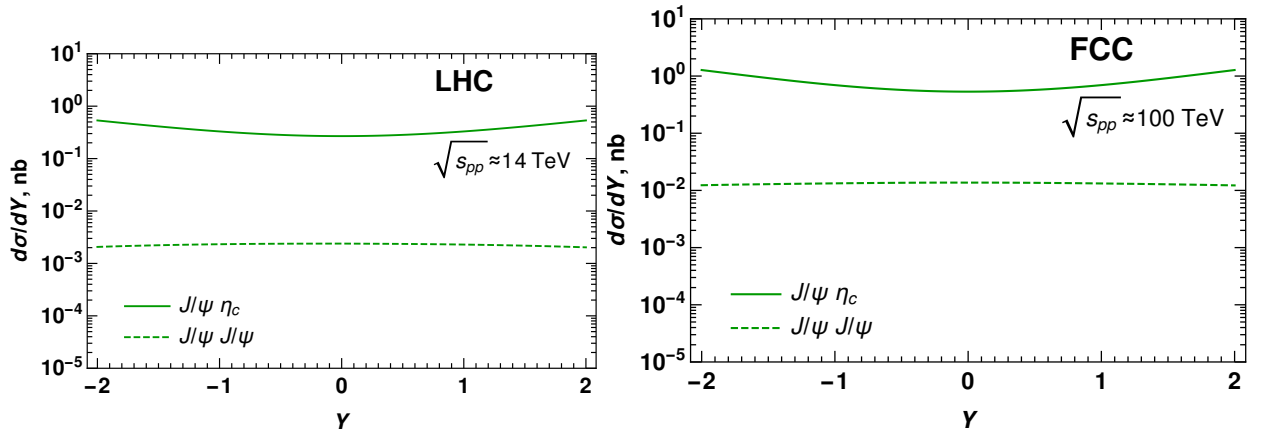


Fig. 3.7: Las secciones eficaces de diferentes mecanismos de producción de quarkonio en el proceso exclusivo  $pp \rightarrow pp M_1 M_2$ . El mecanismo estudiado en este manuscrito lleva a la producción de quarkonios con paridad  $C$  opuestas, es decir, pares de  $J/\psi \eta_c$ . Las expectativas teóricas para la producción de  $J/\psi J/\psi$  mediante fusión de fotón-fotón fueron extraídas de [49]. Las gráficas izquierda y derecha difieren únicamente por el valor de la energía de colisión  $\sqrt{s_{pp}}$ . Siguiendo los estudios de [49], se considera que ambos quarkonios son producidos con la misma rapididad  $Y = y_1 = y_2$  en el marco de laboratorio. La sección eficaz es integrada sobre todas las otras variables cinemáticas.

## 4. CONCLUSIONES

En este manuscrito, se ha llevado a cabo un análisis detallado del proceso de fotoproducción exclusiva de pares de charmonio, revelando un fenómeno de gran interés tanto intrínseco como por su potencial para poner a prueba los mecanismos de producción de quarkonio en cinemática de pequeños  $x$ . Además, ofrece una valiosa perspectiva sobre la producción exótica de hadrones. El estudio se centró en las contribuciones a orden principal ( $LO$ ), revelando que los pares de quarkonio en este proceso se producen con paridades  $C$  opuestas, momentos transversales  $p_T$  relativamente bajos y una pequeña separación en las rapideces. Este hallazgo se explica por la mínima transferencia de momento al protón en “retroceso” en la región cinemática seleccionada.

Como era de esperar, la sección eficaz disminuye rápidamente con  $p_T$  y aumenta con la energía invariante del fotón-protón, de manera análoga a la producción por un fotón singular. Sin embargo, se observa una disminución de la sección eficaz en función de la diferencia de rapideces entre las quarkonia. La estimación numérica de la sección eficaz en colisiones ultraperiféricas  $pA$  en la cinemática de LHC y en futuros colisionadores electrón-protón indica que es lo suficientemente grande como para llevar a cabo estudios experimentales. Es importante destacar que estas evaluaciones se realizaron prácticamente sin la introducción de parámetros adicionales, basándose únicamente en la elección de la parametrización para la sección eficaz del dipolo (3.5) y las funciones de onda de quarkonio. Este estudio sugiere que el proceso investigado aquí debería ser considerado para su inclusión en el programa del futuro colisionador EIC, así como en investigaciones actuales en el LHC en cinemática ultraperiférica.

Por último, cabe señalar que es relativamente sencillo ampliar el marco desarrollado en este manuscrito al caso de la producción de tetraquarks pesados. Este avance requeriría simplemente el reemplazo del producto de las funciones de onda de los quarkonios de estado final en (2.33), (2.34) con funciones de onda correspondientes a estados de tetraquarks. Este enfoque promete abrir nuevas vías de investigación en el emocionante campo de la física de partículas.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. Sterman, *An introduction to quantum field theory*. Cambridge university press, 1993.
- [2] J. C. Collins, *Renormalization: an introduction to renormalization, the renormalization group and the operator-product expansion*. Cambridge university press, 1984.
- [3] S. J. Brodsky, G. F. de Teramond, H. G. Dosch y J. Erlich, “Light-front holographic QCD and emerging confinement,” *Physics Reports*, vol. 584, págs. 1-105, 2015.
- [4] J. Beringer y col., “Particle data group,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, n.º 010001, 2012.
- [5] F. E. Close, “Introduction to quarks and partons,” 1979.
- [6] N. Brambilla y col., “QCD and strongly coupled gauge theories: challenges and perspectives,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, n.º 10, pág. 2981, 2014.
- [7] E. Eichten, S. Godfrey, H. Mahlke y J. L. Rosner, “Quarkonia and their transitions,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 80, n.º 3, pág. 1161, 2008.
- [8] S. Andrade, M. Siddikov e I. Schmidt, “Exclusive photoproduction of heavy quarkonia pairs,” *Physical Review D*, vol. 105, n.º 7, pág. 076 022, 2022.
- [9] J. G. Körner y G. Thompson, “The Heavy mass limit in field theory and the heavy quark effective theory,” *Physics Letters B*, vol. 264, n.º 1-2, págs. 185-192, 1991.
- [10] M. Neubert, “Heavy-quark symmetry,” *Physics Reports*, vol. 245, n.º 5-6, págs. 259-395, 1994.
- [11] S. J. Brodsky, G. Köpp y P. M. Zerwas, “Hadron production near threshold in photon-photon collisions,” *Physical Review Letters*, vol. 58, n.º 5, pág. 443, 1987.
- [12] G. P. Lepage y S. J. Brodsky, “Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics,” *Physical Review D*, vol. 22, n.º 9, pág. 2157, 1980.
- [13] C. Berger y W. Wagner, “Photon photon reactions,” *Physics Reports*, vol. 146, n.º 1-2, págs. 1-134, 1987.
- [14] M. Baek, S. Choi y H. Song, “Exclusive heavy-meson pair production at large recoil,” *Physical Review D*, vol. 50, n.º 7, pág. 4363, 1994.
- [15] J. Bartels, K Golec-Biernat y K. Peters, “An estimate of higher twist at small and low based upon a Saturation Model,” *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, vol. 17, n.º 1, págs. 121-128, 2000.

- [16] R. Aaij y col., “arXiv: Observation of an exotic narrow doubly charmed tetraquark,” LHCb-PAPER-2021-031-003, inf. téc., 2021.
- [17] Y. Bai, S. Lu y J. Osborne, “Beauty-full tetraquarks,” *Physics Letters B*, vol. 798, pág. 134930, 2019.
- [18] W. Heupel, G. Eichmann y C. S. Fischer, “Tetraquark bound states in a Bethe–Salpeter approach,” *Physics Letters B*, vol. 718, n.º 2, págs. 545-549, 2012.
- [19] R. J. Lloyd y J. P. Vary, “All-charm tetraquarks,” *Physical Review D*, vol. 70, n.º 1, pág. 014009, 2004.
- [20] J. Vijande, A. Valcarce y J.-M. Richard, “Stability of multiquarks in an improved flip-flop model of confinement,” *Few-Body Systems*, vol. 54, n.º 7-10, págs. 1015-1018, 2013.
- [21] X. Chen, “Fully-heavy tetraquarks:  $bb\bar{c}\bar{c}$  and  $bc\bar{b}\bar{c}$ ,” *arXiv preprint arXiv:1908.08811*, 2019.
- [22] A. Esposito y A. D. Polosa, “A  $bb\bar{b}\bar{b}$  di-bottomonium at the LHC,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, págs. 1-7, 2018.
- [23] R. Cardinale, “SISSA: LHCb spectroscopy results,” *PoS*, pág. 191, 2018.
- [24] R. Aaij y col., “Search for beautiful tetraquarks in the  $\Upsilon(1S)$   $\mu^+\mu^-$  invariant-mass spectrum,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, n.º 10, págs. 1-22, 2018.
- [25] L. Capriotti y col., “Spectroscopy of heavy hadrons at LHCb,” en *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, vol. 1137, 2019, pág. 012004.
- [26] L. Collaboration y col., “Observation of structure in the  $J/\psi$ -pair mass spectrum,” *Science Bulletin*, vol. 65, n.º 23, págs. 1983-1993, 2020.
- [27] R. Field y R. P. Feynman, “Quark elastic scattering as a source of high-transverse-momentum mesons,” *Physical Review D*, vol. 15, n.º 9, pág. 2590, 1977.
- [28] E. L. Berger y D. Jones, “Inelastic photoproduction of  $J/\psi$  and  $\Upsilon$  by gluons,” *Physical Review D*, vol. 23, n.º 7, pág. 1521, 1981.
- [29] G. Sterman, “Summation of large corrections to short-distance hadronic cross sections,” *Nuclear Physics B*, vol. 281, n.º 1-2, págs. 310-364, 1987.
- [30] J. D. Bjorken, “Applications of the chiral  $U(6) \otimes U(6)$  algebra of current densities,” *Physical Review*, vol. 148, n.º 4, pág. 1467, 1966.
- [31] N. Brambilla y col., “Heavy quarkonium: progress, puzzles, and opportunities,” *The European Physical Journal C*, vol. 71, págs. 1-178, 2011.
- [32] L. V. Gribov, E. M. Levin y M. G. Ryskin, “Semihard processes in QCD,” *Physics Reports*, vol. 100, n.º 1-2, págs. 1-150, 1983.
- [33] L. McLerran y R. Venugopalan, “Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei,” *Physical Review D*, vol. 49, n.º 5, pág. 2233, 1994.

- [34] L. McLerran y R. Venugopalan, “Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum,” *Physical Review D*, vol. 49, n.º 7, pág. 3352, 1994; L. McLerran y R. Venugopalan, “Green’s function in the color field of a large nucleus,” *Physical Review D*, vol. 50, n.º 3, pág. 2225, 1994; L. McLerran y R. Venugopalan, “Fock space distributions, structure functions, higher twists, and small x,” *Physical Review D*, vol. 59, n.º 9, pág. 094002, 1999.
- [35] A. H. Mueller y J. Qiu, “Gluon recombination and shadowing at small values of x,” *Nuclear Physics B*, vol. 268, n.º 2, págs. 427-452, 1986.
- [36] K Golec-Biernat y M Wüsthoff, “Saturation in diffractive deep inelastic scattering,” *Physical Review D*, vol. 60, n.º 11, pág. 114023, 1999.
- [37] B. Kopeliovich y A. Tarasov, “Gluon shadowing in heavy flavor production off nuclei,” *Nuclear Physics A*, vol. 710, n.º 1-2, págs. 180-217, 2002.
- [38] B. Kopeliovich, A. Tarasov y J. Hüfner, “Coherence phenomena in charmonium production off nuclei at the energies of RHIC and LHC,” *Nuclear Physics A*, vol. 696, n.º 3-4, págs. 669-714, 2001.
- [39] N. N. Nikolaev y B. Zakharov, “The Pomeron in diffractive deep inelastic scattering,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 78, n.º 5, págs. 598-618, 1994.
- [40] Y. V. Kovchegov, “Small-x F<sub>2</sub> structure function of a nucleus including multiple Pomeron exchanges,” *Physical Review D*, vol. 60, n.º 3, pág. 034008, 1999.
- [41] Y. V. Kovchegov y H. Weigert, “Triumvirate of running couplings in small-x evolution,” *Nuclear Physics A*, vol. 784, n.º 1-4, págs. 188-226, 2007.
- [42] I. Balitsky y G. A. Chirilli, “Next-to-leading order evolution of color dipoles,” *Physical Review D*, vol. 77, n.º 1, pág. 014019, 2008.
- [43] Y. V. Kovchegov y E. Levin, *Quantum chromodynamics at high energy*. Cambridge University Press, 2013.
- [44] I. Balitsky, “Effective field theory for the small-x evolution,” *Physics Letters B*, vol. 518, n.º 3-4, págs. 235-242, 2001.
- [45] F. Cougoulic e Y. V. Kovchegov, “Helicity-dependent generalization of the JIMWLK evolution,” *Physical Review D*, vol. 100, n.º 11, pág. 114020, 2019.
- [46] C. A. Aidala y col., “Probing nucleons and nuclei in high energy collisions,” *arXiv preprint arXiv:2002.12333*, 2020.
- [47] Y.-Q. Ma y R. Venugopalan, “Comprehensive description of J/ψ production in proton-proton collisions at collider energies,” *Physical review letters*, vol. 113, n.º 19, pág. 192301, 2014.
- [48] V. Goncalves, B. Moreira y F. S. Navarra, “Double vector meson production in  $\gamma\gamma$  interactions at hadronic colliders,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, n.º 3, pág. 103, 2016.
- [49] V. Goncalves y R. P. da Silva, “Exclusive and diffractive quarkonium-pair production at the LHC and FCC,” *Physical Review D*, vol. 101, n.º 3, pág. 034025, 2020.

- [50] V. Goncalves y M. Machado, “Dipole model for double meson production in two-photon interactions at high energies,” *The European Physical Journal C*, vol. 49, págs. 675-684, 2007.
- [51] S. Baranov, A. Cisek, M. Khusek-Gawenda, W. Schäfer y A. Szczurek, “The  $\gamma\gamma \rightarrow J/\psi J/\psi$  reaction and the  $J/\psi J/\psi$  pair production in exclusive ultraperipheral ultrarelativistic heavy ion collisions,” *The European Physical Journal C*, vol. 73, n.º 2, pág. 2335, 2013.
- [52] H. Yang, Z.-Q. Chen y C.-F. Qiao, “NLO QCD corrections to exclusive quarkonium-pair production in photon–photon collision,” *The European Physical Journal C*, vol. 80, págs. 1-7, 2020.
- [53] V. Goncalves, B. Moreira y F. S. Navarra, “Double vector meson production in photon–hadron interactions at hadronic colliders,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, n.º 7, pág. 388, 2016.
- [54] S. Bhattacharya, A. Metz, V. K. Ojha, J.-Y. Tsai y J. Zhou, “Exclusive double quarkonium production and generalized TMDs of gluons,” *Physics Letters B*, vol. 833, pág. 137 383, 2022.
- [55] A Accardi y col., “Electron-Ion Collider: The next QCD frontier: Understanding the glue that binds us all,” *The European Physical Journal A*, vol. 52, págs. 1-100, 2016.
- [56] United States Department of Energy. “U.S. Department of Energy Selects Brookhaven National Laboratory to Host Major New Nuclear Physics Facility,” United States Department of Energy. (9 de ene. de 2020), dirección: <https://www.energy.gov/articles/us-department-energy-selects-brookhaven-national-laboratory-host-major-new-nuclear-physics>.
- [57] Brookhaven National Laboratory. “Department of Energy Selects Site for Electron-Ion Collider,” Brookhaven National Laboratory. (10 de ene. de 2020), dirección: <https://www.bnl.gov/newsroom/news.php?a=116998>.
- [58] R. A. Khalek y col., “Science requirements and detector concepts for the electron-ion collider: EIC yellow report,” *Nuclear Physics A*, vol. 1026, pág. 122 447, 2022.
- [59] O Cakir y col., “A large hadron electron collider at CERN,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 39, n.º 7, págs. 075 001-075 001, 2012.
- [60] M. L. Mangano y col., “Physics at a 100 TeV pp collider: Standard Model processes,” *arXiv preprint arXiv:1607.01831*, 2016.
- [61] P Agostini y col., “The large hadron–electron collider at the HL-LHC,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 48, n.º 11, pág. 110 501, 2021.
- [62] A. M. A. S. S. A. I. F. J. A. A. A. Abada A. y col., “FCC physics opportunities,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, n.º 6, pág. 474, 2019.
- [63] Z Citron y col., “Future physics opportunities for high-density QCD at the LHC with heavy-ion and proton beams,” *arXiv preprint arXiv:1812.06772*, 2018.

- [64] C. S. Group y col., “CEPC conceptual design report: Volume 1-accelerator,” *arXiv preprint arXiv:1809.00285*, 2018.
- [65] C. S. Group y col., “CEPC Conceptual Design Report: Volume 2-Physics & Detector,” *arXiv preprint arXiv:1811.10545*, 2018.
- [66] J. F. Donoghue, E. Golowich y B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [67] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [68] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.
- [69] A. Pich, “Quantum chromodynamics,” *arXiv preprint hep-ph/9505231*, 1995.
- [70] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*. Cambridge university press, 1995, vol. 2.
- [71] F. Halzen y A. D. Martin, *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [72] R. Feynman, “Quantum theory of gravitation,” 1963.
- [73] L. D. Faddeev y V. N. Popov, “Feynman diagrams for the Yang-Mills field,” *Physics Letters B*, vol. 25, n.º 1, págs. 29-30, 1967.
- [74] Z.-B. Kang, Y.-Q. Ma y R. Venugopalan, “Quarkonium production in high energy proton-nucleus collisions: CGC meets NRQCD,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2014, n.º 1, págs. 1-33, 2014.
- [75] R Aaij y col., “Study of  $J/\psi$  production and cold nuclear matter effects in  $p$  Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 5\text{TeV}$ ,” *arXiv preprint arXiv:1308.6729*, 2013.
- [76] A. Adare y col., “ $J/\Psi$  Production versus Transverse Momentum and Rapidity in  $p + p$  Collisions at  $s = 200\text{ GeV}$ ,” *Physical review letters*, vol. 98, n.º 23, pág. 232 002, 2007.
- [77] V. Khachatryan y col., “Measurement of Prompt  $\psi(2S)$  to  $J/\psi$  Yield Ratios in Pb-Pb and p-p Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2,76\text{TeV}$ ,” *Physical review letters*, vol. 113, n.º 26, pág. 262 301, 2014.
- [78] M. Klasen, “Theory of hard photoproduction,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, n.º 4, pág. 1221, 2002.
- [79] S. J. Brodsky y G. F. de Teramond, “Light-front dynamics and AdS/QCD correspondence: the pion form factor in the space-and time-like regions,” *Physical Review D*, vol. 77, n.º 5, pág. 056 007, 2008.
- [80] S. J. Brodsky y P. Huet, “Aspects of  $SU(N_c)$  gauge theories in the limit of small number of colors,” *Phys. Lett. B*, vol. 417, n.º arXiv: hep-ph/9707543, págs. 145-153, 1998.
- [81] P. A. Dirac, “Forms of relativistic dynamics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, n.º 3, pág. 392, 1949.
- [82] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli y S. S. Pinsky, “Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone,” *Physics Reports*, vol. 301, n.º 4-6, págs. 299-486, 1998.
- [83] G. Leibbrandt, “Introduction to noncovariant gauges,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 59, n.º 4, pág. 1067, 1987.

- [84] A. H. Mueller, “Soft gluons in the infinite-momentum wave function and the BFKL pomeron,” *Nuclear Physics B*, vol. 415, n.º 2, págs. 373-385, 1994.
- [85] M. McDermott, L. Frankfurt, V. Guzey y M. Strikman, “Unitarity and the QCD-improved dipole picture,” *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, vol. 16, n.º 4, págs. 641-656, 2000.
- [86] J. C. Collins, L. Frankfurt y M. Strikman, “Factorization for hard exclusive electroproduction of mesons in QCD,” *Physical Review D*, vol. 56, n.º 5, pág. 2982, 1997.
- [87] J. C. Collins y D. E. Soper, “Parton distribution and decay functions,” *Nuclear physics B*, vol. 194, n.º 3, págs. 445-492, 1982.
- [88] J. C. Collins, “Sudakov form factors,” *arXiv preprint hep-ph/0312336*, 2003.
- [89] C. W. Bauer, A. Hornig y F. J. Tackmann, “Factorization for generic jet production,” *Physical Review D*, vol. 79, n.º 11, pág. 114013, 2009.
- [90] J. C. Collins, D. E. Soper y G. Sterman, “Factorization of hard processes in QCD,” en *Perturbative QCD*, World Scientific, 1989, págs. 1-91.
- [91] X. Guo, “Jet broadening in deeply inelastic scattering,” *Physical Review D*, vol. 58, n.º 11, pág. 114033, 1998.
- [92] M. G. Echevarria, A. Idilbi e I. Scimemi, “Factorization theorem for Drell-Yan at low  $q_T$  and transverse-momentum distributions on-the-light-cone,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, n.º 7, págs. 1-46, 2012.
- [93] R. P. Feynman, *Photon-hadron interactions*. CRC Press, 2018.
- [94] J. D. Bjorken y E. A. Paschos, “Inelastic electron-proton and  $\gamma$ -proton scattering and the structure of the nucleon,” *Physical Review*, vol. 185, n.º 5, pág. 1975, 1969.
- [95] H. Georgi y H. D. Politzer, “Electroproduction scaling in an asymptotically free theory of strong interactions,” *Physical Review D*, vol. 9, n.º 2, pág. 416, 1974.
- [96] J Bohacik, A Nogova, P Lichard y J Pisut, “Quark-parton model and deep inelastic ep scattering,”
- [97] A. J. Buras, “Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays,” *arXiv preprint hep-ph/9806471*, 1998.
- [98] A. V. Smilga, *Lectures on quantum chromodynamics*. World Scientific, 2001.
- [99] G. T. Bodwin, E. Braaten y G. P. Lepage, “Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium,” *Physical Review D*, vol. 51, n.º 3, pág. 1125, 1995.
- [100] Y.-J. Zhang, Y.-Q. Ma, K. Wang y K.-T. Chao, “QCD radiative correction to color-octet  $J/\psi$  inclusive production at B Factories,” *Physical Review D*, vol. 81, n.º 3, pág. 034015, 2010.
- [101] W.-F. Wang, Y.-Y. Fan y Z.-J. Xiao, “Semileptonic decays  $Bc \rightarrow (\eta c, J/\Psi)l\nu$  in the perturbative QCD approach,” *Chinese Physics C*, vol. 37, n.º 9, pág. 093102, 2013.
- [102] N. Brambilla y col., “Heavy quarkonium physics,” *arXiv preprint hep-ph/0412158*, 2004.

- [103] A. Petrelli, M. Cacciari, M. Greco, F. Maltoni y M. L. Mangano, “NLO production and decay of quarkonium,” *Nuclear Physics B*, vol. 514, n.º 1-2, págs. 245-309, 1998.
- [104] M. Butenschoen y B. A. Kniehl, “World data of  $J/\psi$  production consolidate nonrelativistic QCD factorization at next-to-leading order,” *Physical Review D*, vol. 84, n.º 5, pág. 051 501, 2011.
- [105] Y.-Q. Ma y K.-T. Chao, “New factorization theory for heavy quarkonium production and decay,” *Physical Review D*, vol. 100, n.º 9, pág. 094 007, 2019.
- [106] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian y R. Venugopalan, “The color glass condensate,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 60, págs. 463-489, 2010.
- [107] E Iancu y A. Mueller, “From color glass to color dipoles in high-energy onium–onium scattering,” *Nuclear Physics A*, vol. 730, n.º 3-4, págs. 460-493, 2004.
- [108] D. Banerjee, J. K. Nayak y R. Venugopalan, “Two introductory lectures on high-energy QCD and heavy-ion collisions,” en *The Physics of the Quark-Gluon Plasma: Introductory Lectures*, Springer, 2009, págs. 105-137.
- [109] I. Balitsky, “Operator expansion for high-energy scattering,” *Nuclear Physics B*, vol. 463, n.º 1, págs. 99-157, 1996.
- [110] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov y H. Weigert, “The BFKL equation from the Wilson renormalization group,” *Nuclear Physics B*, vol. 504, n.º 1-2, págs. 415-431, 1997.
- [111] T Lappi, “Small  $x$  physics and RHIC data,” *International Journal of Modern Physics E*, vol. 20, n.º 01, págs. 1-43, 2011.
- [112] B. Ducloué, E Iancu, A. Mueller, G Soyez y D. Triantafyllopoulos, “Non-linear evolution in QCD at high-energy beyond leading order,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2019, n.º 4, págs. 1-79, 2019.
- [113] E Iancu y D. Triantafyllopoulos, “Non-linear QCD evolution with improved triple-pomeron vertices,” *Physics Letters B*, vol. 610, n.º 3-4, págs. 253-261, 2005.
- [114] A. Kovner y U. A. Wiedemann, “Gluon radiation and parton energy loss,” en *Quark-Gluon Plasma 3*, World Scientific, 2004, págs. 192-248.
- [115] H. Weigert, “Unitarity at small Bjorken  $x$ ,” *Nuclear Physics A*, vol. 703, n.º 3-4, págs. 823-860, 2002.
- [116] E. Iancu, A. Leonidov y L. McLerran, “The renormalization group equation for the color glass condensate,” *Physics Letters B*, vol. 510, n.º 1-4, págs. 133-144, 2001.
- [117] H. Kowalski y D. Teaney, “Impact parameter dipole saturation model,” *Physical Review D*, vol. 68, n.º 11, pág. 114 005, 2003.
- [118] H Kowalski, L Motyka y G Watt, “Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture,” *Physical Review D*, vol. 74, n.º 7, pág. 074 016, 2006.

- [119] B Lehmann-Dronke, P. Pobylitsa, M. V. Polyakov, A Schäfer y K Goeke, “Hard diffractive electroproduction of two pions,” *Physics Letters B*, vol. 475, n.º 1-2, págs. 147-156, 2000.
- [120] B Lehmann-Dronke, A Schäfer, M. V. Polyakov y K Goeke, “Angular distributions in hard exclusive production of pion pairs,” *Physical Review D*, vol. 63, n.º 11, pág. 114001, 2001.
- [121] B. Clerbaux y M. V. Polyakov, “Partonic structure of  $\pi$  and  $\rho$  mesons from data on hard exclusive production of two pions off nucleon,” *Nuclear Physics A*, vol. 679, n.º 2, págs. 185-195, 2000.
- [122] M Diehl, T. Gousset, B Pire y col., “Polarisation in deeply virtual meson production,” en *Workshop on Exclusive and Semiexclusive Processes at High Momentum Transfer*, World Scientific, 1999, págs. 184-191.
- [123] Z. Collaboration y col., “Exclusive Electroproduction of  $\rho^0$  and  $J/\psi$  Mesons at HERA,” *arXiv preprint hep-ex/9808020*, 1998.
- [124] X. Ji y J. Osborne, “One-loop corrections and all order factorization in deeply virtual Compton scattering,” *Physical Review D*, vol. 58, n.º 9, pág. 094018, 1998.
- [125] J. C. Collins y A. Freund, “Proof of factorization for deeply virtual Compton scattering in QCD,” *Physical Review D*, vol. 59, n.º 7, pág. 074009, 1999.
- [126] D. Müller, D Robaschik, B Geyer, F.-M. Dittes y J Hořejši, “Wave Functions, Evolution Equations and Evolution Kernels from Light-Ray Operators of QCD,” *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, vol. 42, n.º 2, págs. 101-141, 1994.
- [127] X. Ji, “Deeply virtual Compton scattering,” *Physical Review D*, vol. 55, n.º 11, pág. 7114, 1997.
- [128] X. Ji, “Off-forward parton distributions,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 24, n.º 7, pág. 1181, 1998.
- [129] A. Radyushkin, “Scaling limit of deeply virtual Compton scattering,” *Physics Letters B*, vol. 380, n.º 3-4, págs. 417-425, 1996.
- [130] A. Radyushkin, “Nonforward parton distributions,” *Physical Review D*, vol. 56, n.º 9, pág. 5524, 1997.
- [131] A. Radyushkin, “Generalized parton distributions,” en *At The Frontier of Particle Physics: Handbook of QCD (In 3 Volumes)*, World Scientific, 2001, págs. 1037-1099.
- [132] S. J. Brodsky, L Frankfurt, J. Gunion, A. H. Mueller y M Strikman, “Diffractive lepton production of vector mesons in QCD,” *Physical Review D*, vol. 50, n.º 5, pág. 3134, 1994.
- [133] K Goeke, M. V. Polyakov y M Vanderhaeghen, “Hard exclusive reactions and the structure of hadrons,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 47, n.º 2, págs. 401-515, 2001.
- [134] M. Diehl, T. Feldmann, R Jakob y P Kroll, “The overlap representation of skewed quark and gluon distributions,” *Nuclear Physics B*, vol. 596, n.º 1-2, págs. 33-65, 2001.

- [135] A. V. Belitsky, D. Mueller y A Kirchner, “Theory of deeply virtual Compton scattering on the nucleon,” *Nuclear Physics B*, vol. 629, n.º 1-3, págs. 323-392, 2002.
- [136] M. Diehl, “Generalized parton distributions,” *Physics Reports*, vol. 388, n.º 2-4, págs. 41-277, 2003.
- [137] A. V. Belitsky y A. Radyushkin, “Unraveling hadron structure with generalized parton distributions,” *Physics reports*, vol. 418, n.º 1-6, págs. 1-387, 2005.
- [138] V. Kubarovsky, C. Collaboration y col., “Deeply virtual exclusive reactions with CLAS,” *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, vol. 219, págs. 118-125, 2011.
- [139] R. Dupré, M. Guidal, S. Niccolai y M. Vanderhaeghen, “Analysis of deeply virtual compton scattering data at jefferson lab and proton tomography,” *The European Physical Journal A*, vol. 53, págs. 1-24, 2017.
- [140] W.-K. Tung, S. Kretzer y C. Schmidt, “Open heavy flavour production: conceptual framework and implementation issues,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 28, n.º 5, págs. 983-996, 2002.
- [141] A. H. Rezaeian, M. Siddikov, M. Van de Klundert y R. Venugopalan, “Analysis of combined HERA data in the Impact-Parameter dependent Saturation model,” *Physical Review D*, vol. 87, n.º 3, pág. 034002, 2013.
- [142] Z. Collaboration y col., “Exclusive electroproduction of J/psi mesons at HERA,” *arXiv preprint hep-ex/0404008*, 2004.
- [143] H. Collaboration, “Elastic J/ψ production at HERA,” *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, vol. 46, págs. 585-603, 2006.
- [144] V. Budnev, I. Ginzburg, G. Meledin y V. Serbo, “The two-photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation,” *Physics Reports*, vol. 15, n.º 4, págs. 181-282, 1975.
- [145] P. Cho y A. K. Leibovich, “Color-octet quarkonia production. II,” *Physical Review D*, vol. 53, n.º 11, pág. 6203, 1996.
- [146] P. Cho y A. K. Leibovich, “Color-octet quarkonia production,” *Physical Review D*, vol. 53, n.º 1, pág. 150, 1996.
- [147] H. G. Dosch, T Gousset, G Kulzinger y H. Pirner, “Vector meson leptoproduction and nonperturbative gluon fluctuations in QCD,” *Physical Review D*, vol. 55, n.º 5, pág. 2602, 1997.
- [148] J. D. Bjorken, J. B. Kogut y D. E. Soper, “Quantum electrodynamics at infinite momentum: scattering from an external field,” *Physical Review D*, vol. 3, n.º 6, pág. 1382, 1971.
- [149] T. Lappi y R. Paatelainen, “The one loop gluon emission light cone wave function,” *Annals of Physics*, vol. 379, págs. 34-66, 2017.
- [150] J. Bartels, K. Golec-Biernat y K. Peters, “On the dipole picture in the non-forward direction,” *arXiv preprint hep-ph/0301192*, 2003.
- [151] Y. Hatta, E Iancu, K Itakura y L McLerran, “Odderon in the color glass condensate,” *Nuclear Physics A*, vol. 760, n.º 1-2, págs. 172-207, 2005.

- [152] J Nemchik, N. N. Nikolaev y B. Zakharov, “Scanning the BFKL pomeron in elastic production of vector mesons at HERA,” *Physics Letters B*, vol. 341, n.º 2, págs. 228-237, 1994; J Nemchik, N. N. Nikolaev, E Predazzi y B. Zakharov, “Color dipole phenomenology of diffractive electroproduction of light vector mesons at HERA,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 75, págs. 71-87, 1997; J. R. Forshaw, R Sandapen y G. Shaw, “Color dipoles and  $\rho$ ,  $\varphi$  electroproduction,” *Physical Review D*, vol. 69, n.º 9, pág. 094 013, 2004.
- [153] S. J. Brodsky, T. Huang y G. P. Lepage, “Proceedings of the Banff Summer Institute on Particles and Fields, held at the Banff Center in Banff, Alberta, Canada, August 16-27 1981.,” en *Particles and Fields 2*, A. Capri y A. Kamal, eds., New York: Plenum Publishing Corporation, 1983, pág. 706. DOI: 10.1007/978-1-4613-3593-1.
- [154] S. J. Brodsky, J. R. Hiller, D. S. Hwang y V. A. Karmanov, “The Covariant structure of light-front wave functions and the behavior of hadronic form factors,” *Physical Review D*, vol. 69, n.º 7, pág. 076 001, 2004.
- [155] M. V. Terentév, “On the Structure of Wave Functions of Mesons as Bound States of Relativistic Quarks,” *Soviet Journal of Nuclear Physics*, vol. 24, 1976.
- [156] A. Stadler, S. Leitaó, M. Peña y E. P. Biernat, “Heavy and heavy-light mesons in the Covariant Spectator Theory,” *Few-Body Systems*, vol. 59, págs. 1-8, 2018.
- [157] D Daniel, R. Gupta y D. Richards, “Calculation of the pion’s quark distribution amplitude in lattice QCD with dynamical fermions,” *Physical Review D*, vol. 43, n.º 11, pág. 3715, 1991.
- [158] T. Kawanai y S. Sasaki, “Interquark potential with finite quark mass from lattice QCD,” *Physical review letters*, vol. 107, n.º 9, pág. 091 601, 2011.
- [159] T. Kawanai y S. Sasaki, “Heavy quarkonium potential from Bethe-Salpeter wave function on the lattice,” *Physical Review D*, vol. 89, n.º 5, pág. 054 507, 2014.
- [160] A. H. Rezaeian e I. Schmidt, “Impact-parameter dependent Color Glass Condensate dipole model and new combined HERA data,” *Physical Review D*, vol. 88, n.º 7, pág. 074 016, 2013.
- [161] E. Iancu, K Itakura y S Munier, “Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small-x,” *Physics Letters B*, vol. 590, n.º 3-4, págs. 199-208, 2004.
- [162] E Levin y K Tuchin, “Solution to the evolution equation for high parton density QCD,” *Nuclear Physics B*, vol. 573, n.º 3, págs. 833-852, 2000.