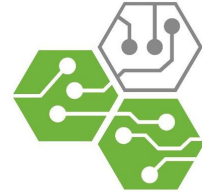




UNIVERSIDAD TÉCNICA  
FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA



# Identificación de sistemas estocásticos de tiempo continuo utilizando funciones base de Kautz a partir de datos muestreados

Tesis de Grado presentada por

**Javier Ignacio Cepeda Bastías**

como requisito parcial para optar al título de

**Ingeniero Civil Electrónico**

y al grado de

**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica**

Director de Tesis

Juan C. Agüero V., Ph.D.

Codirector de Tesis

María Coronel M., Ph.D.

Valparaíso, 2023.



TÍTULO DE LA TESIS:

**Identificación de sistemas estocásticos de tiempo continuo utilizando funciones base de Kautz a partir de datos muestreados.**

AUTOR:

**Javier Ignacio Cepeda Bastías**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

**Director de Tesis**

Juan C. Agüero V., Ph.D.

---

**Codirector de Tesis**

María Coronel M., Ph.D.

---

**Examinador Interno**

---

**Examinador Externo**

---

Valparaíso, 2023.



*Dedicado a mi familia.*



---

---

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por el apoyo incondicional que me han brindado durante mi etapa universitaria. Su presencia constante, palabras de aliento y sacrificios han sido el pilar fundamental que me ha impulsado a seguir adelante en los momentos más difíciles. Les agradezco por confiar en mis capacidades y espero honrar a la familia con cada logro futuro que alcance. Gracias por ser mi fuente de inspiración y por creer en mí incluso cuando yo dudaba.

También quiero darle las gracias a mis amigos, por su disposición a escucharme, animarme y estar presentes cuando más los necesitaba, lo cual es invaluable para mí. Cada palabra de aliento, cada gesto de ánimo, ha sido un recordatorio de que estoy con ustedes en cada paso que doy. Agradezco profundamente cada momento compartido, cada risa compartida y cada desafío superado juntos. Espero seguir compartiendo éxitos y alegrías a su lado en el futuro. Gracias por ser parte de esta etapa tan importante de mi vida y por ser amigos extraordinarios.

Agradezco también a mis profesores María Coronel y Juan Agüero, por su invaluable guía y apoyo durante el proceso de tesis. Su dedicación y conocimientos han sido esenciales para mi desarrollo académico y profesional. Agradezco sinceramente su tiempo y orientación, que han sido fundamentales para el éxito de mi investigación. Gracias por el impacto positivo que han tenido en mi formación, por su compromiso y generosidad.

Finalmente, agradezco el apoyo del Centro Basal “Advanced Center for Electrical and Electronic Engineering” (AC3E) - FB0008 y al proyecto ANID-FONDECYT 1211630.



---

---

# CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>V</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>IX</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>X</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivo y marco de trabajo	5
1.3. Contribución de la Tesis	6
1.4. Publicaciones por el Autor	7
1.5. Organización de la Tesis	8
<b>2. PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción	10
2.2. Sistema de tiempo continuo de interés	10
2.3. Representación en Variables de Estado	11
2.4. Conceptos esenciales del proceso de muestreo	12
2.5. Procesos estocásticos	16
<b>3. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA</b>	<b>20</b>
3.1. Introducción	20
3.2. Estimación clásica de log-verosimilitud utilizando la función de transferencia de tiempo discreto	21
	<b>III</b>

---

3.3. Estimación por medio de la función de verosimilitud de Whittle	25
<b>4. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO MEDIANTE BASES ORTONORMALES Y DATOS MUESTREADOS</b>	<b>29</b>
4.1. Introducción	29
4.2. Modelos típicamente utilizados para identificar sistemas	30
4.3. Aproximación mediante bases de funciones ortonormales	31
4.4. Bases ortonormales de Kautz	32
4.5. Ejemplos numéricos de simulación	37
4.5.1. Identificación de polos y pesos de las bases de Kautz	38
4.5.2. Identificación de los pesos de las bases de Kautz con polos fijos	40
4.5.3. Identificación con un polo arbitrario	43
4.5.4. Identificación con múltiples conjuntos de bases	51
<b>5. RESULTADOS EXPERIMENTALES</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción	57
5.2. Herramienta OOMAO	59
5.3. Consideraciones de implementación	59
5.4. Resultados	60
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>65</b>
6.1. Conclusiones	65
6.2. Trabajo futuro	67
<b>REFERENCIAS</b>	<b>68</b>

---

---

# Índice de figuras

1.1.	Diagrama de bloques del sistema estocástico de tiempo continuo.	6
4.1.	Función de log-verosimilitud de Whittle con los parámetros del polo $\rho_1$ y $\rho_2$ fijos, para (a) $\Delta = 0,5$ [ms] y (b) $\Delta = 4$ [ms]	39
4.2.	Función de log-verosimilitud de Whittle con pesos $\lambda_1$ y $\lambda_2$ fijos, para (a) $\Delta = 0,5$ [ms] y (b) $\Delta = 4$ [ms]	39
4.3.	Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud de Whittle y funciones base para $\Delta = 0,5$ [ms]	41
4.4.	Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud de Whittle y funciones base para $\Delta = 4$ [ms].	42
4.5.	Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud tradicional para $\Delta = 0,5$ [ms].	42
4.6.	Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud tradicional para $\Delta = 4$ [ms].	43
4.7.	Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$ [ms]), $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$ y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real.	46

- 
- 4.8. Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5 % respecto del polo real. 47
- 4.9. Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20 % respecto del polo real. 47
- 4.10. Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real. 48
- 4.11. Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5 % respecto del polo real. 48
- 4.12. Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20 % respecto del polo real. 49
- 4.13. Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6). 51
- 4.14. Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6) comparada con el modelo aproximado usando: 2 funciones base (línea roja), 32 funciones base (línea amarilla), 100 funciones base (línea morada). 53
- 4.15. Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6) comparada con el modelo aproximado usando 2 conjuntos de funciones base y: 2 funciones base (línea roja), 4 funciones base (línea amarilla), 6 funciones base (línea morada) en cada conjunto de funciones base. 54
- 4.16. Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.13). 55
- 4.17. Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.13) comparada con el modelo aproximado usando 3 conjuntos de funciones base y: 2 funciones base (línea roja), 4 funciones base (línea amarilla), 6 funciones base (línea morada) en cada conjunto de funciones base. 56

---

5.1. Diagrama de bloques del lazo cerrado de un sistema de óptica adaptativa	58
5.2. Densidad espectral de potencia de la señal Tip.	60
5.3. Densidad espectral de potencia de la señal Tilt.	61
5.4. Densidad espectral de potencia del modo Tip (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 2 conjuntos de funciones base.	62
5.5. Densidad espectral de potencia del modo Tilt (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 2 conjuntos de funciones base.	63
5.6. Densidad espectral de potencia del modo Tip (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 3 conjuntos de funciones base.	64
5.7. Densidad espectral de potencia del modo Tilt (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 3 conjuntos de funciones base.	64



---

---

# RESUMEN

El modelado de sistemas de tiempo continuo se destaca como un área de gran interés en diversas disciplinas, incluyendo la identificación de sistemas y el control. En algunos escenarios, la estructura del modelo de tiempo continuo de un sistema puede ser definida a priori mediante conocimientos específicos. No obstante, existen aplicaciones en las cuales la estructura del modelo es desconocida, y en tales casos, se recurre a funciones base para obtener una aproximación del sistema.

En esta tesis, se enfrenta el desafío de identificar un sistema estocástico de tiempo continuo. El enfoque propuesto implica la utilización de bases de funciones ortonormales de tiempo continuo, con una preferencia específica por la base de funciones de Kautz para aproximar el sistema real. Es importante destacar que, para el proceso de identificación, solo se cuenta con datos muestreados del sistema.

Para abordar el problema de estimación, se ha adoptado un algoritmo de identificación en el dominio de frecuencia centrado en la función de verosimilitud de Whittle. A través de este algoritmo, se busca determinar los parámetros asociados a las funciones base de Kautz que son responsables de la aproximación del sistema.

Con el objetivo de demostrar la efectividad de esta propuesta, se presentan resultados de simulaciones numéricas. Este algoritmo aprovecha datos muestreados derivados del sistema en tiempo continuo, destacándose por su capacidad para identificar con precisión los parámetros subyacentes relacionados con las funciones base de Kautz. Además, se compara este método con la técnica de máxima verosimilitud tradicional en el dominio de la frecuencia. Finalmente, se ilustran los beneficios de esta propuesta mediante su aplicación a un sistema de óptica adaptativa.

---

---

# ABSTRACT

Continuous-time system modeling stands out as an area of great interest in various disciplines, including system identification and control. In some scenarios, the structure of the continuous-time model of a system can be predefined through specific knowledge. However, there are applications in which the model structure is unknown, and in such cases, basis functions are employed to obtain an approximation of the system.

In this thesis, we tackle the challenge of identifying a continuous-time stochastic system. Our proposed approach involves the use of continuous-time orthonormal basis functions, with a specific preference for the Kautz basis functions to approximate the real system. It is important to note that, for the identification process, we rely exclusively on sampled data of the system.

To address the estimation problem, we have adopted a frequency domain identification algorithm centered on the Whittle likelihood function. Through this algorithm, we aim to determine the parameters associated with the Kautz basis functions, responsible for the system's approximation.

In order to demonstrate the effectiveness of our proposal, we present results from numerical simulations. This algorithm leverages sampled data derived from the continuous-time system, standing out for its ability to accurately identify the underlying parameters related to the Kautz basis functions. Additionally, this method is compared with the traditional maximum likelihood technique in the frequency domain. Finally, we illustrate the benefits of our proposal through its application to an adaptive optics system.

# Capítulo 1

---

## INTRODUCCIÓN

Este capítulo sitúa el trabajo de tesis al exponer las motivaciones y objetivos que lo sustentan. En una primera instancia, se aborda el contexto del problema que presenta la identificación de sistemas estocásticos de tiempo continuo, destacando las complicaciones inherentes a este proceso. Se ilustra este desafío mediante un ejemplo concreto que ejemplifica la presencia de este tipo de sistemas. Luego, se exponen los objetivos y el marco de trabajo que rigen este proyecto de investigación. Como punto de cierre, se detallan las valiosas contribuciones que este trabajo aporta al campo, además de ofrecer una breve descripción de los contenidos específicos de cada capítulo subsiguiente de la tesis.

### 1.1. Motivación

La identificación de sistemas de tiempo continuo ha sido un área de interés constante en diversas ramas de investigación. El principal objetivo de esta disciplina es encontrar un modelo matemático que describa la dinámica de un sistema a partir de mediciones de su respuesta ante ciertos tipos de entradas [1]. Este tema está presente en campos como estadística matemática y análisis de series de tiempo [2], econometría y análisis de series de tiempo [3], [4], aprendizaje de máquina [5], [6], identificación de sistemas [1], [7], óptica adaptativa [8], [9], entre otros.

En la tarea de identificación, existen principalmente dos métodos: identificación indirecta e identificación directa [10]

- El **método indirecto** utiliza las mediciones muestreadas de la salida para identificar una versión discreta del sistema. Este enfoque resulta

ventajoso, ya que emplea técnicas de identificación en tiempo discreto, cuyo estudio está ampliamente desarrollado.

- El **método directo** utiliza los parámetros del modelo del sistema en tiempo continuo para optimizar una función objetivo construida con las señales muestreadas del sistema. Ambos métodos pueden subdividirse en dos enfoques adicionales: dominio temporal y dominio de la frecuencia [11].

Existen varios métodos de identificación de sistemas, cada uno diseñado para abordar diferentes desafíos y contextos específicos. A continuación, se destacan algunos de los enfoques más comunes:

- Mínimos Cuadrados [1]: Este método busca minimizar la diferencia entre las respuestas medidas y las respuestas predichas por el modelo. Se ajusta un modelo a los datos experimentales al minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre las respuestas medidas y las respuestas del modelo.
- Máxima Verosimilitud [1], [12]: La máxima verosimilitud busca encontrar los parámetros del modelo que maximizan la probabilidad de que los datos observados sean generados por el modelo propuesto. Este enfoque es particularmente útil cuando se tiene información sobre la distribución de probabilidad de los errores en las mediciones.
- Expectation Maximization (EM) [13]: El algoritmo EM es útil en casos donde hay variables no observadas o datos incompletos. Se utiliza para estimar los parámetros del modelo iterativamente, alternando entre los pasos de expectativa y maximización.
- Mínimos Cuadrados Recursivos (RLS) [14]: A diferencia de los mínimos cuadrados convencionales, el método RLS actualiza los parámetros del modelo de forma recursiva a medida que se reciben nuevos datos. Es particularmente útil para sistemas que experimentan cambios en el tiempo y requieren una adaptación continua.
- Identificación Bayesiana [12]: Este enfoque utiliza principios de inferencia bayesiana para estimar los parámetros del modelo. Combina información previa con datos observados para obtener distribuciones de probabilidad actualizadas, ofreciendo una forma robusta de abordar la incertidumbre en los parámetros.

Estos métodos constituyen solo una muestra de las diversas técnicas disponibles en la identificación de sistemas. La elección del método adecuado depende de la naturaleza del sistema, la disponibilidad de datos y las características específicas del problema en cuestión. La identificación efectiva de sistemas es esencial para el diseño y la implementación exitosa de estrategias de control en una amplia gama de aplicaciones tecnológicas y científicas.

Es evidente que estos métodos requieren un modelo del sistema real, cuya estructura generalmente se considera conocida (número de polos y ceros), basándose en el conocimiento previo del sistema. Esto permite obtener de manera precisa el modelo de datos muestreados, teniendo en cuenta los ceros de muestreo. Sin embargo, hay situaciones en las que el modelo del sistema es desconocido [15]. En tales casos, se puede obtener un modelo aproximado del sistema mediante el uso de bases de funciones ortonormales de tiempo continuo [16], [17]. Esta idea se ha desarrollado recientemente en [18] y [15] para sistemas determinísticos, utilizando bases de Laguerre y Kautz respectivamente, junto con versiones discretizadas de estas bases.

Adicionalmente, existen investigaciones donde la identificación de sistemas de tiempo continuo se ha llevado a cabo utilizando directamente diversas bases ortonormales de tiempo continuo [19], [20], [21].

Es bien sabido que para sistemas de tiempo continuo cuya entrada es determinística existen múltiples formas de obtener su modelo equivalente de datos muestreados [22], es decir, para un sistema de tiempo continuo de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.1.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.1.2)$$

cuya función de transferencia de tiempo continuo está dada por:

$$G(s) = C(sI - A)B. \quad (1.1.3)$$

Si se asume que la señal de entrada es generada por un retentor de orden cero (ZOH):

$$u(t) = u_k, \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta], \quad (1.1.4)$$

y la salida es muestreada de forma instantánea con periodo de muestreo  $\Delta$ , la función de transferencia de datos muestreados puede ser obtenida usando la Transformada de Laplace inversa de la respuesta a escalón de tiempo continuo por medio de la transformada  $Z$ , y dividido por la transformada  $Z$  de un escalón

unitario de tiempo discreto, es decir:

$$G^d(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=k\Delta} \right\}, \quad (1.1.5)$$

$$G^d(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{e^{s\Delta}}{z - e^{s\Delta}} \frac{G(s)}{s} ds, \quad (1.1.6)$$

donde  $\gamma \in \mathbb{R}$  es tal que todos los polos de  $G(s)/s$  tienen parte real menor que  $\gamma$ . Es más, si el camino de integración de (1.1.6) se cierra por un semi-círculo por la derecha:

$$G^d(z) = (1 - z^{-1}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{G((\log z + 2\pi jl)/\Delta)}{\log z + 2\pi jl}, \quad (1.1.7)$$

$$G^d(e^{j\omega\Delta}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{\text{ZOH}}(j\omega_l) G(j\omega_l), \quad (1.1.8)$$

con  $\omega_l = \omega + (2\pi/\Delta)l$ , y  $H_{\text{ZOH}}(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta a impulso del retentor de orden cero:

$$H_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s}. \quad (1.1.9)$$

Alternativamente, como se verá en el Capítulo 2, es posible obtener el modelo para datos muestreados equivalente a través de la representación en espacio de estados, lo cual puede realizarse para sistemas determinísticos y estocásticos.

Por otro lado, existen detalles en el proceso de muestreo de sistemas de tiempo continuo cuya entrada es estocástica. Para este caso, únicamente las mediciones de la salida en los instantes de muestreo son usadas [23]. Esto difiere del método de muestreo de sistemas determinísticos, en donde el proceso de muestreo se caracteriza por mantener la entrada constante durante los intervalos de muestreo. Esta diferencia dificulta en gran medida la obtención de la función de transferencia para datos muestreados  $G^d(z)$  si es que el sistema es estocástico, puesto que no existe un equivalente a las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.8), lo cual reduce significativamente las formas de abordar este tipo de sistemas, limitándose a un análisis en espacio de estados, y obtener la función de transferencia para datos muestreados a resolviendo ecuaciones de Riccati [23, p. 74].

El objetivo de este estudio es ampliar los resultados obtenidos en [15] para sistemas estocásticos con estructuras desconocidas, utilizando directamente la

base de funciones de Kautz de tiempo continuo. Así, mediante la utilización de esta base, buscamos obtener un modelo aproximado del sistema real a través de la identificación de los pesos asociados a las funciones base, por medio de las propiedades espectrales del sistema.

En [24] y [25], se evidenció que la función de máxima verosimilitud presenta máximos locales al intentar identificar sistemas estocásticos. Este fenómeno se debe al concepto de *aliasing* introducido en [26] para sistemas cuya entrada es una señal estocástica. Este fenómeno complica la optimización de la función de verosimilitud, especialmente cuando la tasa de muestreo es uniforme y lenta. No obstante, en [15] se mostró que al emplear la base de funciones de Kautz, este fenómeno no se manifiesta. Esto se debe a que la función de verosimilitud resulta convexa para sistemas determinísticos de tiempo continuo.

Es crucial destacar que este *aliasing* no se corresponde con el *aliasing* típico que ocurre al muestrear sistemas de tiempo continuo; este término está definido específicamente para la función de verosimilitud y se utiliza en la identificación de sistemas, manifestándose cuando la función de verosimilitud presenta máximos locales.

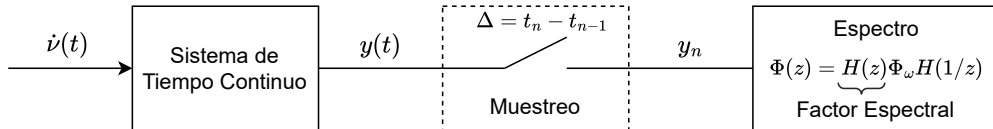
Una aplicación destacada de la identificación de sistemas se encuentra en los trabajos realizados en [8] y [9], donde este enfoque se aborda en el campo de la Óptica Adaptativa. Dado que estos sistemas son propensos a perturbaciones como vibraciones mecánicas, turbulencia atmosférica y efectos de ruido, se requiere un modelado preciso del sistema en general para compensar el impacto de estas perturbaciones.

Este estudio se centrará principalmente en ampliar los resultados obtenidos en [15] para sistemas estocásticos, con el propósito de establecer el impacto que conlleva la selección del periodo de muestreo en la identificación del sistema. Para esto, se identificará por un lado el sistema mediante la base de funciones de Kautz, y por otro lado se identificará el sistema mediante el método de máxima verosimilitud tradicional en el dominio de la frecuencia, en el cual se asume la estructura del modelo como conocida. De esta forma se podrá cuantificar el error de modelado y así definir cuál método tiene mejor desempeño.

## 1.2. Objetivo y marco de trabajo

El propósito principal de este trabajo es introducir una metodología de identificación para sistemas estocásticos de tiempo continuo cuya estructura es desconocida. Esta metodología se basa en el uso de una base de funciones

ortonormales para aproximar la función de transferencia del sistema, teniendo en cuenta que solo se dispone de datos muestreados de la respuesta del sistema.



**Figura 1.1.** Diagrama de bloques del sistema estocástico de tiempo continuo.

La Figura 1.1 ilustra en un diagrama de bloques los elementos necesarios para llevar a cabo el proceso de identificación, en donde se cuenta con un sistema de tiempo continuo excitado por una señal estocástica cuya salida  $y(t)$  se muestrea para obtener los datos discretos  $y_n$ .

Se propone emplear la Transformada Discreta de Fourier (DFT) en la salida  $y_n$  para aprovechar las propiedades espectrales de esta señal. Además, se plantea aproximar la función de transferencia del sistema mediante la base de funciones ortonormales de Kautz. Posteriormente, se utilizará la Densidad Espectral de Potencia (PSD) generada por estas funciones base para ajustar el modelo a la respuesta del sistema.

La base de funciones de Kautz se encarga de aproximar la función de transferencia mediante una combinación lineal de los elementos de esta base, lo cual se verá en detalle en la sección 4.4. Los parámetros que definen esta combinación lineal se ajustarán mediante la función de verosimilitud de Whittle, permitiendo así una identificación en el dominio de la frecuencia.

Es fundamental destacar que la naturaleza estocástica del sistema abordado en esta tesis está determinada por la señal de entrada  $\dot{v}(t)$  (consultar la Figura 1.1). Esta señal corresponde a un ruido blanco gaussiano de tiempo continuo, el cual se detalla en la sección 2.2. Es crucial diferenciar este enfoque de otros casos en los cuales se trabajan con sistemas estocásticos cuyos parámetros, que definen la función de transferencia, presentan cierto grado de incertidumbre [27], [28].

### 1.3. Contribución de la Tesis

Las contribuciones principales de esta tesis se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Desarrollo de metodologías de identificación de los parámetros de un sistema estocástico a partir de datos muestreados de la salida del sistema mediante modelos aproximados. Se presentaron algoritmos de identificación tanto para el caso de un solo sistema como para el caso de múltiples sistemas en conjunto. Además, se aplicó este método de identificación a datos obtenidos de la herramienta OOMAO para un sistema de óptica adaptativa.
- Presentación de una versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle que aprovecha las propiedades espectrales del sistema para llevar a cabo el proceso de identificación y considera condiciones iniciales.
- Extensión de los resultados previos mencionados en [15], demostrando que el fenómeno de *aliasing* no se presenta al identificar sistemas estocásticos mediante el uso de la base de funciones de Kautz. Se evidencia un tipo de quasi-convexidad en la función de log-verosimilitud de Whittle, proporcionando una mayor comprensión del proceso de identificación en sistemas estocásticos mediante la base de funciones de Kautz.

## 1.4. Publicaciones por el Autor

Artículo en Conferencia:

- **J. Cepeda**, M. Coronel and J.C. Agüero, “Identification of Continuous-Time Stochastic System utilizing Orthonormal Basis Functions and Sampled Data”, in IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON), Valdivia, Chile, 2023.

**Abstract:** In this paper, we address the identification problem of a continuous-time stochastic system. We propose approximating the system using orthonormal continuous basis functions, particularly the Kautz basis functions. We assume that only discrete-time measurements are available. The estimation problem is approached through a frequency domain identification algorithm based on the Whittle likelihood function. We illustrate the benefits of our proposal with numerical simulations.

Artículo enviado a conferencia:

- M. Coronel, R. Orellana, A. Cedeño, **J. Cepeda** and J.C. Agüero, “A Novel Identification Method for Continuous-Time Stochastic Systems Utilizing Tsai’s Approximation and Sampled Data”

**Abstract:** In this paper, we address the system identification problem of a continuous-time stochastic system. We propose an approach that involves approximating the continuous-time system through continuous-time basis functions, utilizing sampled data. Furthermore, we assume access only to discrete-time output measurements. The estimation problem is formulated using the Maximum Likelihood approach in the frequency domain, taking into account an approximation of the output power spectrum with basis functions, called Tsai’s approximation. The benefits of our proposal are illustrated via numerical simulations.

## 1.5. Organización de la Tesis

A continuación se presenta la organización de los capítulos que componen el trabajo de tesis:

- **Capítulo 2:** El capítulo 2 presenta el sistema estocástico de tiempo continuo de interés. A su vez, se presentan elementos preliminares para la correcta comprensión del trabajo de tesis, abordando conceptos de representación de sistemas en variables de estado, conceptos asociados al proceso de muestreo y elementos necesarios del área de procesos estocásticos.
- **Capítulo 3:** El capítulo 3 presenta el método tradicional de identificación en el dominio del tiempo y de la frecuencia mediante la función de máxima verosimilitud. Adicionalmente, se expone la función de verosimilitud de Whittle tradicional, junto con el desarrollo de una versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle para datos muestreados, la cual considera las condiciones iniciales y la Densidad Espectral de Potencia del sistema.
- **Capítulo 4:** El capítulo 4 se enfoca en presentar el método de aproximación del modelo del sistema a través de una base de funciones. Se presenta de forma general y luego con la base de funciones de Kautz específicamente. Luego se presenta un teorema donde se aplica la versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle utilizando la base de Kautz. Finalmente, se muestran ejemplos de aplicación del teorema propuesto bajo distintas condiciones.

- 
- **Capítulo 5:** El capítulo 5 presenta los resultados experimentales de aplicar la metodología de identificación a datos provenientes de la herramienta OOMAO, la cual es una herramienta dedicada para sistema de óptica adaptativa.
  - **Capítulo 6:** El capítulo 6 presenta las conclusiones del trabajo y se discuten posibles trabajos futuros.

## Capítulo 2

---

# PRELIMINARES

### 2.1. Introducción

Este capítulo presenta la notación, definiciones y propiedades necesarias que se utilizan a lo largo del desarrollo de esta tesis. En primer lugar, se define el sistema de tiempo continuo de interés junto con su representación en variables de estado. Posteriormente, se definen conceptos y elementos fundamentales en el proceso de muestreo. Finalmente, se presentan definiciones y herramientas asociadas a procesos estocásticos las cuales son necesarias para el desarrollo del trabajo de tesis.

### 2.2. Sistema de tiempo continuo de interés

El sistema de interés sobre el cual se desarrolla este trabajo está dado por un sistema de tiempo continuo de la forma:

$$y(t) = H^c(s, \theta) \dot{v}(t), \quad (2.2.1)$$

donde  $y(t)$  es la salida del sistema continuo,  $\dot{v}(t)$  es ruido blanco Gaussiano de tiempo continuo, de media cero y que satisface  $\mathbb{E} \{ \dot{v}(t) \dot{v}(r) \} = \sigma_c^2 \delta(t - r)$  (Donde  $\delta(\cdot)$  es la función Delta de Dirac).  $H^c(s, \theta)$  denota la función de transferencia de tiempo continuo, la cual lleva el ruido  $\dot{v}(t)$  a la salida. Esta función está dada por:

$$H^c(s, \theta) = K_c \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (2.2.2)$$

donde  $K_c$  es la ganancia del sistema,  $b_0, \dots, b_m$  son los coeficientes del numerador,  $a_1, \dots, a_n$  los coeficientes del denominador,  $\theta = [K_c, b_0, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$

corresponde al vector de parámetros que define la función de transferencia continua,  $m$  y  $n$  son los grados del numerador y denominador respectivamente, y se asume que  $H^c(s, \theta)$  es estrictamente propia, es decir,  $n > m$ . Entiéndase el argumento  $s$  como el operador derivada  $s = \frac{d}{dt}$  o el argumento de la Transformada de Laplace (Es necesario recalcar que este abuso de notación se utilizará de forma transversal en el trabajo).

Por simplicidad, se normaliza la densidad espectral de potencia de  $\dot{\nu}(t)$  [22] fijando  $\sigma_c^2 = 1$ .

### 2.3. Representación en Variables de Estado

Usualmente, las funciones de transferencia se expresan en el espacio de estados para facilitar los cálculos. En términos generales, la formulación del sistema descrito en la ecuación (2.2.1) en el espacio de estados se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = A^c(\theta)x(t) + \kappa^c(\theta)\dot{\nu}(t), \quad (2.3.1)$$

$$y(t) = C^c x(t), \quad (2.3.2)$$

donde  $A^c(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\kappa^c(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C^c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $n$  es el orden de  $H^c(s, \theta)$ , y la matriz de covarianza del ruido es  $Q^c = \kappa^c \kappa^{cT}$ .

Es necesario resaltar que las matrices  $A^c(\theta)$  y  $\kappa^c(\theta)$  están en función del parámetro  $\theta$ , sin embargo, la matriz  $C^c$  no depende de este parámetro. Esto se debe a que, sin pérdida de generalidad, el sistema (2.2.1) puede ser escrito en espacio de estados utilizando su representación canónica observable, dada por:

$$A^c(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad ; \quad \kappa^c(\theta) = K_c \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \\ 0_{(n-(m+1)) \times 1} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.3.3)$$

$$C^c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times n}. \quad (2.3.4)$$

De esta forma, los parámetros que definen la función de transferencia de  $H^c(s, \theta)$  quedan concentrados en las matrices  $A^c(\theta)$  y  $\kappa^c(\theta)$

## 2.4. Conceptos esenciales del proceso de muestreo

Con el fin de obtener una estimación  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  es necesario muestrear el sistema descrito en (2.3.1)-(2.3.2) a través de un muestreo instantáneo y regular, con periodo  $\Delta$ . El modelo muestreado equivalente está dado por [22]:

$$x_{n+1} = A^d x_n + v_n, \quad (2.4.1)$$

$$y_n = C^d x_n, \quad (2.4.2)$$

donde  $A^d = e^{A^c \Delta}$ ,  $C^d = C^c$ , y  $v_n$  corresponde a una secuencia de ruido blanco Gaussiano de tiempo discreto con media cero y matriz de covarianza  $Q^d$  definida por [29]:

$$Q^d = \int_0^\Delta e^{A^c \iota} Q^c e^{A^{cT} \iota} d\iota. \quad (2.4.3)$$

Ahora bien, la integral presentada en (2.4.3) para obtener  $Q^d$  se puede calcular de una forma alternativa y eficiente a través del uso de la exponencial matricial. Siguiendo los resultados del trabajo presentado en [30], se tiene que:

$$Q^d = \int_0^\Delta e^{A^c \iota} Q^c e^{A^{cT} \iota} d\iota = P_{22}^T P_{12}, \quad (2.4.4)$$

donde  $P_{12}$  y  $P_{22}$  se obtienen mediante la matriz exponencial:

$$\exp \left\{ \begin{bmatrix} -A^c & Q^c \\ 0 & A^{cT} \end{bmatrix} \Delta \right\} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.4.5)$$

A su vez, el valor de  $A^d$  se puede obtener de esta misma matriz exponencial en (2.4.5), ya que  $A^d = e^{A^c \Delta} = P_{22}^T$ .

Ahora bien, MATLAB puede calcular directamente la matriz exponencial a través de la función `expm`, sin embargo, es posible calcular una matriz exponencial a través del teorema de Cayley-Hamilton, dado por:

**Lema 2.4.1.** *Considere una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con ecuación característica*

$$\det\{sI - A\} = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (2.4.6)$$

*Entonces, la matriz  $A$  satisface su propia ecuación característica, es decir*

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n = 0. \quad (2.4.7)$$

Por otro lado, si el polinomio característico de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está dado por:

$$\det\{\lambda I - A\} = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad (2.4.8)$$

es decir, con autovalores diferentes entre si,  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Es posible calcular funciones aplicadas a la matriz A mediante:

$$f(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1}, \quad (2.4.9)$$

donde las constantes  $\beta_k$  son tales que satisfacen:

$$f(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i + \dots + \beta_{n-1} \lambda_i^{n-1}, \quad (2.4.10)$$

para cada autovalor  $\lambda_i$  de la matriz A.

En caso de que los autovalores de la matriz A tengan multiplicidad  $n_i$ , es decir:

$$\det\{\lambda I - A\} = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \quad (2.4.11)$$

entonces se pueden encontrar ecuaciones extra para obtener los coeficientes  $\beta_k$ , usando la derivada de la función  $f(\lambda)$ .

$$\left. \frac{d^{(l)} f(\lambda)}{d\lambda^{(l)}} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^{(l)} (\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1})}{d\lambda^{(l)}} \right|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (2.4.12)$$

con  $l = 0, \dots, n_i - 1$ .

Por otro lado, la salida muestreada del sistema (2.4.2) puede ser descrita por un modelo Auto-Regresivo de Media Móvil (ARMA). Este modelo incluye los efectos de las condiciones iniciales en la respuesta del sistema [31]:

$$y_n = F^d(z, \theta) x_0 \delta_K(n) + H^d(z, \theta) \omega_n, \quad (2.4.13)$$

donde  $y_n = y(n\Delta)$  denota la señal de salida muestreada,  $x_0$  es el estado inicial,  $\delta_K(n)$  es la función delta de Kronecker,  $H^d(z, \theta)$  es la función de transferencia de tiempo discreto del ruido. En este escenario,  $z$  puede ser interpretado como el operador de adelanto o el argumento de la transformada  $\mathcal{Z}$ . La secuencia  $\omega_n$  es ruido blanco Gaussiano de tiempo discreto con media cero y varianza  $\sigma_\omega^2$ , y  $F^d(z, \theta)$  está dado por:

$$F^d(z, \theta) = C^d (zI - A^d)^{-1} \frac{z}{\sqrt{N}}, \quad (2.4.14)$$

donde  $N$  es el largo de la secuencia de datos.

Durante el procedimiento de muestreo de señales de tiempo continuo, surge un fenómeno conocido como *folding* o solapamiento. Este fenómeno se manifiesta cuando se emplea una frecuencia de muestreo inferior a la establecida por el criterio de Nyquist [32]. El *folding* resulta en la distorsión de la señal, obstaculizando su precisa reconstrucción a partir de las muestras obtenidas.

Este fenómeno da paso a la caracterización de la relación entre las transformadas de Fourier de tiempo discreto y tiempo continuo, la cual está dada por:

**Definición 2.4.1.** *La transformada de Fourier de tiempo continuo (CTFT) de la señal  $y(t)$  está dada por:*

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.4.15)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.4.16)$$

**Definición 2.4.2.** *La transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) de la secuencia  $y_k$  está dada por:*

$$\mathcal{F}^d\{y_k\} = Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{-j\omega k\Delta}, \quad (2.4.17)$$

$$\mathcal{F}^{d-1}\{Y^d(e^{j\omega\Delta})\} = y_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} Y^d(e^{j\omega\Delta}) e^{j\omega k\Delta} d\omega. \quad (2.4.18)$$

con  $\Delta$  el periodo con el que se muestrea de la señal  $y(t)$ .

**Lema 2.4.2.** *Sea  $y(t)$  una señal de tiempo continuo muestreada con periodo de muestreo  $\Delta$  resultando  $y_k$ . La relación entre la transformada de Fourier de tiempo discreto y la transformada de Fourier de tiempo continuo está dada por:*

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}i\right), \quad \omega \in \left[\frac{-\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta}\right), \quad (2.4.19)$$

con  $Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \mathcal{F}^d\{y_k\}$  la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia  $y_k$ , e  $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$  la transformada de Fourier de tiempo continuo de la señal  $y(t)$ .

*Demostración.* Para llevar a cabo la demostración, es necesario considerar que la siguiente igualdad es cierta:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkx} = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi i), \quad (2.4.20)$$

cuya demostración se puede revisar en el Lema 4.7 de [23].

Siguiendo un desarrollo análogo al presentado en [23, p. 88], considere la señal de tiempo continuo  $y(t)$ , cuya Transformada de Fourier de Tiempo Continuo y su inversa están dadas por:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.4.21)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.4.22)$$

Luego, si se muestrea la función  $y(t)$ :

$$y_k = y(k\Delta), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.4.23)$$

cuya Transformada de Fourier de Tiempo Discreto está dada por:

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{-j\omega k\Delta}. \quad (2.4.24)$$

Aplicando la ecuación (2.4.22) a  $y_k$  en la ecuación (2.4.24):

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k\Delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega') e^{j\omega'\Delta k} d\omega'. \quad (2.4.25)$$

Aplicando el teorema de Fubini-Tonelli [33, p. 188], se cambia el orden de la integral y sumatoria, quedando:

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega') \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega')\Delta k} d\omega'. \quad (2.4.26)$$

Aplicando la ecuación (2.4.20):

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega') 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\omega' - \Delta\omega - 2\pi i) d\omega', \quad (2.4.27)$$

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega') \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega - \frac{2\pi}{\Delta} i) d\omega'. \quad (2.4.28)$$

Por último, recordando que  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)g(x)dx = g(a)$ , se obtiene

$$Y^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}i\right). \quad (2.4.29)$$

Finalizando así la demostración.  $\square$

## 2.5. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico  $x(t)$  es una familia de variables aleatorias  $\{x(t)\}$ , donde el tiempo  $t$  pertenece a un conjunto de índices. (Para tiempo discreto, el conjunto de índices es mayoritariamente  $\mathbb{N}$ , los números naturales, o  $\mathbb{Z}$ , los números enteros.)

A continuación, se definen los momentos de primer y segundo orden:

**Definición 2.5.1.** *Sea  $x(t)$  e  $y(t)$  dos vectores de procesos estocásticos.*

*La media de  $x(t)$  está definida por:*

$$\mu(t) = \mu_x(t) = \mathbb{E}\{x(t)\}, \quad (2.5.1)$$

con  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  el operador esperanza.

*La función de covarianza de  $x(t)$  (función de autocovarianza) es:*

$$r(t, s) = r_x(t, s) = \mathbb{E}\{[x(t) - \mu_x(t)][x(s) - \mu_x(s)]^T\}. \quad (2.5.2)$$

*La función de covarianza cruzada entre  $x(t)$  e  $y(t)$  es:*

$$r_{x,y}(t, s) = \mathbb{E}\{[x(t) - \mu_x(t)][y(s) - \mu_y(s)]^T\}. \quad (2.5.3)$$

Para efectos de este trabajo de tesis, conviene definir ciertos procesos estocásticos estacionarios, ya que corresponde a la naturaleza de las señales estocásticas con las que se trabajarán. Dicho esto, se define lo siguiente:

**Definición 2.5.2.** *El proceso estocástico  $x(t)$  es estrictamente estacionario si su función de distribución de probabilidad es invariante a desplazamientos temporales, es decir:*

$$P(x(t_1 + \tau)) \leq x_1, \dots, P(x(t_n + \tau)) \leq x_n, \quad (2.5.4)$$

*no depende de  $\tau$ .*

**Definición 2.5.3.** *El proceso estocástico  $x(t)$  es débilmente estacionario si su media y función de covarianza son invariantes a desplazamientos temporales, es decir:*

$$\mu(t + \tau) = \mu(t), \quad (2.5.5)$$

$$r(t + \tau, s + \tau) = r(t, s). \quad (2.5.6)$$

**Definición 2.5.4.** *El proceso estocástico  $x(t)$  es estacionario en sentido amplio (WSS) si y solo si:*

$$\mu_x(t) = \mu_x, \quad (2.5.7)$$

$$r_x(t, s) = r_x(t + \tau, t) = r(\tau), \quad (2.5.8)$$

con  $r(\tau) = \mathbb{E} \{ [x(t + \tau) - \mu_x][x(t) - \mu_x]^T \}$ .

Ahora bien, para propósitos de este trabajo, es necesario definir el concepto de Espectro y Densidad Espectral de Potencia (PSD), los cuales están definidos por:

**Definición 2.5.5.** *Sea  $y(t)$  un proceso estocástico de tiempo continuo con media cero y función de covarianza  $r(\tau)$ . El espectro de  $y(t)$  está definido por:*

$$\Phi^c(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (2.5.9)$$

y su Densidad Espectral de Potencia está dada por:

$$\Phi^c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.5.10)$$

Luego, si la señal  $y(t)$  es la salida del sistema definido en (2.2.1), es posible realizar el proceso de factorización espectral [23], para obtener el espectro de  $y(t)$ , el cual está dado por:

$$\Phi^c(s) = H(s)\Phi_{\dot{v}}(s)H^*(-s), \quad (2.5.11)$$

con  $H^*(s)$  el conjugado transpuesto de  $H(s)$ , es decir  $H^*(s) = \bar{H}^T(s)$ . Para este caso particular, definido en (2.2.1), la función  $H(s)$  es escalar, y dado que  $\dot{v}(t)$  es ruido blanco Gaussiano de media cero y con función de covarianza  $\mathbb{E} \{ \dot{v}(t)\dot{v}(r) \} = \sigma_c^2 \delta(t - r)$ , con  $\sigma_c^2 = 1$ , se tiene que

$$\Phi^c(s) = H(s)H(-s). \quad (2.5.12)$$

Análogamente, para un proceso estocástico de tiempo discreto:

**Definición 2.5.6.** Sea  $y_n$  un proceso estocástico de tiempo discreto con media cero y función de covarianza  $r(\tau)$ . El espectro de  $y_n$  está definido por:

$$\Phi^d(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)z^{-k}, \quad (2.5.13)$$

con  $z$  el argumento de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

En caso de que  $y_n$  provenga del muestreo de un sistema continuo, es conveniente hacer notar la influencia del periodo de muestreo en el cálculo del espectro [23]. Para este caso se tiene:

**Definición 2.5.7.** Sea  $y_n$  un proceso estocástico de tiempo discreto con media cero y función de covarianza  $r(\tau)$  como resultado de muestrear un proceso estocástico de tiempo continuo  $y(t)$  con periodo de muestreo  $\Delta$ . El espectro de  $y_n$  está definido por:

$$\Phi^d(z) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(\Delta k)z^{-k}, \quad (2.5.14)$$

y su Densidad Espectral de Potencia está dada por:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(\Delta k)e^{-j\omega\Delta k}. \quad (2.5.15)$$

Es claro que  $\Phi^d(z)$  en (2.5.13) se obtiene reemplazando  $\Delta = 1$  en la ecuación (2.5.14).

Al analizar las definiciones de la Densidad Espectral de Potencia para un sistema continuo y muestreado, en conjunto con las ecuaciones (2.4.15) y (2.4.17), se evidencia que las Densidades Espectrales de Potencia en (2.5.10) y (2.5.15) corresponden, respectivamente, a las transformadas de Fourier de tiempo continuo y discreto de  $r(\tau)$ . De este modo, al aplicar la relación establecida entre la CTFT y la DTFT, según lo expuesto en el **Lema 2.4.2**, se concluye que la relación entre la densidad espectral de potencia continua y discreta (tras el muestreo de  $y(t)$ ) se expresa como:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^c\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}m\right), \quad \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (2.5.16)$$

Por otro lado, ya que para obtener  $\Phi^d(e^{j\omega\Delta})$  a partir de  $\Phi^c(j\omega)$  se requiere calcular una sumatoria infinita, como se muestra en la ecuación (2.5.16), es

posible aproximar  $\Phi^d(e^{j\omega\Delta})$  como una sumatoria finita utilizando la aproximación de Tsai [34], tuncando  $|m| \leq M$ :

**Nota 2.5.1.** *Sea  $\Phi^c(j\omega)$  la densidad espectral de potencia de una señal. Además, considere  $M$  finito. Una aproximación de la densidad espectral de potencia de tiempo discreto está dada por:*

$$\hat{\Phi}^d(e^{j\omega\Delta}) \approx \sum_{m=-M}^M \Phi^c\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}m\right), \quad \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (2.5.17)$$

En la práctica, fijando  $M = 100$  se logra suficiente precisión en la aproximación [35].

# ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

### 3.1. Introducción

El proceso de establecer un modelo dinámico de un sistema a partir de la medición de datos, como su señal de entrada y salida, recibe el nombre de identificación de sistemas. Este proceso requiere distintos elementos necesarios, tales como:

- Medición de entrada y salida del sistema, ya sea en el dominio temporal o de la frecuencia.
- Seleccionar una estructura del modelo, la cual puede ser determinada a partir de conocimiento a priori del sistema o puede ser un modelo que aproxima al sistema real.
- Emplear un método de identificación para estimar los parámetros de las estructuras de modelos candidatos.
- Evaluar el modelo estimado para determinar si es adecuado a través de criterios de desempeño.

Para este estudio, se considera que se cuenta únicamente con mediciones discretas de la salida, teniendo en cuenta que la entrada del sistema continuo es una señal estocástica de media cero y varianza 1.

En este capítulo se presenta el método clásico de identificación de máxima verosimilitud en el dominio de la frecuencia. Adicionalmente, se establece una

forma generalizada de la función de verosimilitud de Whittle, la cual será utilizada en este trabajo para resolver el problema de identificación.

### 3.2. Estimación clásica de log-verosimilitud utilizando la función de transferencia de tiempo discreto

El método de Máxima Verosimilitud (MLE por sus siglas en inglés) es una poderosa herramienta estadística utilizada para estimar los parámetros de un modelo probabilístico [1], [12]. Esta técnica se basa en encontrar los valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud, que a su vez representa la probabilidad de observar los datos dados esos parámetros.

El problema de interés se resume en obtener un estimador  $\hat{\theta}$  para los parámetros verdaderos  $\theta$  utilizando la secuencia de datos  $\{y_1, \dots, y_N\}$ . El método de estimación mediante máxima verosimilitud se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta), \tag{3.2.1}$$

$$L(\theta) = p(y_{1:N}|\theta), \tag{3.2.2}$$

donde:

- $y_{1:N}$  es la secuencia de datos disponibles.
- Los datos provienen del mecanismo de generación de datos  $p(y_{1:N}|\theta)$  parametrizado con el vector de parámetros  $\theta$  a ser estimados.
- $L(\theta) = p(y_{1:N}|\theta)$  es evaluado en los datos disponibles, entonces se transforma en una función de  $\theta$ . No es función de probabilidad.
- Adicionalmente, es conveniente definir la función de log-verosimilitud, dada por  $\ell(\theta) = \log[L(\theta)]$ .

Este método presenta diversas ventajas, entre las cuales destacan:

- Consistencia: Conforme el tamaño de la muestra tiende a infinito, los estimadores de máxima verosimilitud tienden a converger al valor verdadero del parámetro.

- Eficiencia asintótica: Bajo ciertas condiciones, la varianza se va minimizando a medida de que el tamaño de la muestra tiende a infinito. En otras palabras, estos estimadores tienden a mejorar a medida de que el tamaño de la muestra aumenta.
- Propiedades estadísticas bien conocidas.

Por otro lado, algunas de las desventajas de este método se resumen en:

- Se necesita conocer el mecanismo de generación de datos, es decir, la estructura del sistema, la distribución probabilística de las señales, etc.
- Las propiedades del estimador para muestras pequeñas debe ser analizado caso a caso.

Para obtener las ecuaciones en el dominio temporal, se sigue el desarrollo presentado en [31], donde se considera un sistema discreto de la forma:

$$y_n = G(z)u_n + H(z)w_n, \quad (3.2.3)$$

con  $\{u_n\}$  e  $\{y_n\}$  las secuencias correspondientes a la entrada y salida del sistema,  $\{w_n\}$  es una secuencia de ruido Gaussiano con media cero y varianza  $\sigma_w^2$ .  $G(z)$  y  $H(z)$  son las funciones de transferencia de la entrada y del ruido respectivamente, las cuales satisfacen:

- $G(z)$  y  $H(z)$  son funciones de transferencia racionales estables, sin polos dentro del círculo unitario.
- $H^{-1}(z)$  es estable, es decir,  $H(z)$  es de fase mínima, sin ceros dentro del círculo unitario.
- $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$ .

El sistema de la ecuación (3.2.3) puede ser representado alternativamente en espacio de estados mediante:

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Kw_n, \quad (3.2.4)$$

$$y_n = Cx_n + Du_n + w_n. \quad (3.2.5)$$

Las ecuaciones que definen la relación entre ambas representaciones está dada por:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (3.2.6)$$

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}K + 1. \quad (3.2.7)$$

Para incluir el efecto de las condiciones iniciales, es posible re-escribir el sistema descrito en (3.2.4)-(3.2.5) como:

$$y_n = F^d(z)x_0\delta_k(n) + G(z)u_n + H(z)w_n, \quad (3.2.8)$$

con

$$F^d(z) = C(zI - A)^{-1}z. \quad (3.2.9)$$

La función de log-verosimilitud está definida como la función de densidad de probabilidad condicionada de los datos medidos dados los parámetros, es decir:

$$\ell(\theta) = p(y_0, \dots, y_{N-1}|\theta) = p(\mathbf{y}|\theta), \quad (3.2.10)$$

donde  $\mathbf{y} = \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$  son los datos medidos en el dominio del tiempo, y  $\theta$  contiene a los parámetros a ser estimados, que para propósitos de este trabajo corresponden a: los parámetros del sistema  $\lambda$ , la varianza del ruido  $\sigma_w^2$  y las condiciones iniciales  $x_0$ . Es necesario hacer notar que la condición inicial puede ser considerada como un parámetro determinístico a identificar, o puede ser considerado como una variable aleatoria, en donde se necesita estimar su media  $\mu_{x_0}$  y matriz de covarianza  $\Sigma_0$ .

Para el caso en que la condición inicial es un parámetro determinístico a ser identificado, la función de log-verosimilitud en el dominio del tiempo, para el sistema dado en (3.2.8), está dada por:

$$\ell(\theta) = \frac{N}{2} \log 2\pi + \frac{N}{2} \log \sigma_w^2 + \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_n^2, \quad (3.2.11)$$

donde  $\epsilon_n$  se conoce como el error de predicción:

$$\epsilon_n = \frac{y_n - G(z)u_n - F^d(z)x_0\delta_K(n)}{H(z)} \quad (3.2.12)$$

Este método de identificación se explora exhaustivamente en [31] para determinar la equivalencia de este método en el dominio temporal y de la frecuencia,

En el área de estimación de máxima verosimilitud en el dominio de la frecuencia, una de las metodologías propuestas en la literatura es considerar la condición inicial (y final), del sistema de tiempo continuo, como parámetros a ser estimados.

Con el objetivo de obtener el estimador tradicional de máxima verosimilitud en el dominio de la frecuencia [31], [36], es necesario aplicar la Transformada Discreta de Fourier (DFT) a la salida de tiempo discreto,  $y_n$ , en (3.2.5), definida por:

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_k^{-n}, \quad (3.2.13)$$

donde  $z_k = e^{j\omega_k \Delta}$ , con  $\omega_k = 2\pi k / (N\Delta)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ ,  $\omega_k \in [0, \frac{2\pi}{\Delta})$ , e  $Y_k = Y(z_k)$ . Notar que el periodo de muestreo se presenta explícitamente en estas expresiones con el objetivo de facilitar la conexión entre el tiempo discreto y los datos muestreados de tiempo continuo.

Es bien sabido que para señales Gaussianas,  $Y_k$  dada en (3.2.13) es una secuencia Gaussiana independiente, propia, de media cero, real-compleja, con varianza  $\sigma_\omega^2$ ,  $Y_k \sim \mathcal{N}_{r-c}(0, \sigma_\omega^2)$ , ver por ejemplo [31] y sus referencias.

Ahora bien, si se aplica la DFT definida en (3.2.13) al sistema en espacio de estados definido en (3.2.4)-(3.2.5) se obtiene:

$$z_k X_k + z_k \frac{1}{\sqrt{N}} (x_N - x_0) = AX_k + BU_k + KW_k, \quad (3.2.14)$$

$$Y_k = CX_k + DU_k + W_k. \quad (3.2.15)$$

Si se define  $\alpha = x_0 - x_N$ , es posible representar el sistema dado en espacio de estados en (3.2.14)-(3.2.15) en términos de funciones de transferencia, de la forma:

$$Y_k = F_k \alpha + G_k U_k + H_k W_k, \quad (3.2.16)$$

donde

$$F_k = C(z_k I - A)^{-1} \frac{z_k}{\sqrt{N}}, \quad (3.2.17)$$

$$G_k = C(z_k I - A)^{-1} B + D, \quad (3.2.18)$$

$$H_k = C(z_k I - A)^{-1} K + 1. \quad (3.2.19)$$

Dicho esto, la función de log-verosimilitud en el dominio de la frecuencia para el sistema dado en (3.2.16), considerando que  $\alpha$  es un parámetro determinístico a ser estimado, está dada por [31]:

$$\ell(\theta) = -L_0 - N \log \sigma_w^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \left( \log |H_k|^2 + \frac{1}{\sigma_w^2} |E_k|^2 \right), \quad (3.2.20)$$

donde  $L_0$  agrupa constantes no importantes,  $H_k$  está definido en (3.2.19) y  $E_k = (Y_k - G_k U_k - F_k \alpha) / H_k$ .

En [31] se concluye que ambos enfoques, de identificación de máxima verosimilitud en el dominio temporal y de la frecuencia, son equivalentes si se realizan suposiciones consistentes con respecto a los parámetros desconocidos del problema. A su vez, se muestra que bajo ciertos escenarios, la estimación de los parámetros entrega resultados similares si es que se considera como cero el parámetro adicional que incluye las condiciones iniciales del sistema.

De esta forma, la correspondiente función de log-verosimilitud en el dominio de la frecuencia definida en (3.2.20), omitiendo algunas constantes, para el sistema de interés de este trabajo, definido en (2.4.13), está dada por:

$$\ell(\theta) = - \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \log(\sigma_\omega^2 |H_k^d|^2) + \frac{|Y_k - F_k^d \alpha|^2}{\sigma_\omega^2 |H_k^d|^2} \right], \quad (3.2.21)$$

donde  $\alpha$  es la diferencia entre el valor inicial y el valor final de la respuesta transiente, dada por  $\alpha = x_0 - x_N$ . Para mas detalles ver [31] y sus referencias.

Es preciso notar que, en la identificación clásica en el dominio de la frecuencia, se estiman las funciones de transferencia discretas  $H^d$ , y  $F^d$ .

### 3.3. Estimación por medio de la función de verosimilitud de Whittle

La densidad espectral de potencia emerge como una herramienta fundamental en la identificación de sistemas de tiempo continuo a partir de datos muestreados, destacando el uso de la función de verosimilitud de Whittle [37], [38], [39], [26]. Esta función es una aproximación, en el dominio de la frecuencia, de la función de verosimilitud tradicional. Su uso se ha establecido como un método estándar en el análisis espectral paramétrico, reconocido por su eficiencia computacional [40], [41].

De [31] se desprende que, para un vector de datos  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]$  proveniente de (3.2.8) con  $G(z) = 0$ , de media cero y matriz de covarianza  $\Sigma_\theta$ , cuyo estado inicial  $x_0$  es un vector aleatorio, su función de log-verosimilitud (omitiendo algunas constantes) en el dominio del tiempo, está dada por:

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{N} \log \det \Sigma_\theta - \frac{1}{N} \mathbf{y}^T \Sigma_\theta^{-1} \mathbf{y}. \quad (3.3.1)$$

La matriz de covarianza  $\Sigma_\theta \in \mathbb{R}^{N \times N}$  para procesos estacionarios es una matriz de Toeplitz, ya que  $\Sigma_\theta(i, k) = c_\theta(i - k)$ , donde  $c_\theta$  es la función de autocovarianza de  $\mathbf{y}$ . Además, para un  $N$  grande y creciente, la matriz de covarianza es asintóticamente circulante. En este caso, la descomposición de valores propios puede aproximarse como:

$$\Sigma_\theta \approx V D_\theta V^T, \quad (3.3.2)$$

donde el  $k$ -ésimo elemento del autovector (la  $i$ -ésima columna de  $V$ ) está dado por  $(1/\sqrt{N})e^{-2\pi j i k}$ , para  $k = 0, \dots, N-1$ , y  $D_\theta$  es la matriz diagonal de autovalores [42]. Estos autovalores son la transformada de Fourier de  $c_\theta$ , conocido como el espectro de  $\mathbf{y}$  [37, p. 9137]:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_\theta(k) e^{-jk\omega\Delta}. \quad (3.3.3)$$

Ya que el determinante de una matriz se puede obtener por medio de la multiplicación de sus autovalores, el primer término en (3.3.1) se puede aproximar por [43]:

$$\frac{1}{N} \log \det \Sigma_\theta \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \Phi^d(e^{j\omega_k\Delta}). \quad (3.3.4)$$

Por otro lado, el segundo término en (3.3.1) se puede obtener utilizando la diagonalización de  $\Sigma_\theta$  [43]:

$$\frac{1}{N} \mathbf{y}^T \Sigma_\theta^{-1} \mathbf{y} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{I(e^{j\omega_k\Delta})}{\Phi^d(e^{j\omega_k\Delta})}, \quad (3.3.5)$$

donde  $I(e^{j\omega_k\Delta})$  corresponde al periodograma, definido por:

$$I(e^{j\omega_k\Delta}) = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y_k e^{-j\omega_k\Delta} \right|^2. \quad (3.3.6)$$

Luego, la simplificación de la función de log-verosimilitud, conocida como la función de verosimilitud de Whittle, está dada por:

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \Phi^d(e^{j\omega_k\Delta}) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{I(e^{j\omega_k\Delta})}{\Phi^d(e^{j\omega_k\Delta})}, \quad (3.3.7)$$

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \log \Phi^d(e^{j\omega_k\Delta}) + \frac{I(e^{j\omega_k\Delta})}{\Phi^d(e^{j\omega_k\Delta})} \right]. \quad (3.3.8)$$

Por otro lado, siguiendo los resultados de [23, p. 88] y lo mostrado en la sección 2.5, la relación entre la densidad espectral de potencia de tiempo continuo  $\Phi^c(j\omega)$  y la densidad espectral de potencia de tiempo discreto  $\Phi^d(e^{j\omega\Delta})$ , está dado por la fórmula de solapamiento:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^c\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}m\right), \quad \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (3.3.9)$$

Adicionalmente, la densidad espectral de potencia de tiempo discreto puede ser expresada como:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \Delta\sigma_\omega^2 |H^d(e^{j\omega\Delta})|^2, \quad \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (3.3.10)$$

Luego, una versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle para datos muestreados (omitiendo algunas constantes) para el sistema en (2.4.13) está dada por:

$$\ell(\theta) = -\sum_{k=0}^{N-1} \left[ \log \Phi_k^d + \frac{\Delta |Y_k - F_k^d \alpha|^2}{\Phi_k^d} \right], \quad (3.3.11)$$

donde  $\Phi_k^d = \Phi^d(e^{j\omega_k\Delta})$ . De esta forma, el problema de estimación asociado está dado por:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} -\ell(\theta). \quad (3.3.12)$$

Notar que la versión generalizada de la función de log-verosimilitud de Whittle presentada en (3.3.11) es equivalente a la función tradicional de log-verosimilitud en el dominio de la frecuencia presentada en (3.2.21). Es más, si  $\alpha$  se asume como cero, lo que es equivalente a asumir periodicidad en los estados, entonces la función de log-verosimilitud resultante es igual a la función tradicional de log-verosimilitud de Whittle para un sistema de tiempo discreto estocástico [44], [45], [37].

Por otro lado, es preciso notar que la versión generalizada de la función verosimilitud de Whittle dada en (3.3.11) está desarrollada para un largo finito de datos, considerando la diferencia entre la condición inicial y final del estado como un parámetro adicional a estimar. Por el contrario, la función de verosimilitud de Whittle está desarrollada típicamente para un largo grande de datos  $N$ , usando la fórmula de Szegö [44, p. 137].

Por último, es necesario hacer notar que la diferencia principal entre la ecuación (3.3.11) y (3.2.21) radica en que la función generalizada de Whittle utiliza la densidad espectral de potencia  $\Phi^d(e^{j\omega\Delta})$  en lugar de utilizar directamente la función de transferencia  $H^d(z)$ .

# IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO MEDIANTE BASES ORTONORMALES Y DATOS MUESTREADOS

### 4.1. Introducción

Este capítulo se enfoca en presentar el método de identificación del sistema a través de una base de funciones ortonormales y datos muestreados.

En una primera instancia, se describen los modelos típicos utilizados para el proceso de identificación. Luego, se muestra la utilización de bases ortonormales para aproximar el sistema. Este último método se presenta de forma general y luego con la base de funciones de Kautz específicamente.

Luego se presenta un teorema donde se aplica la versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle utilizando la base de Kautz. Finalmente, se muestran ejemplos de aplicación del teorema propuesto bajo distintas condiciones.

## 4.2. Modelos típicamente utilizados para identificar sistemas

El modelado de sistemas dinámicos es una disciplina que se ocupa de representar matemáticamente el comportamiento de sistemas que evolucionan con el tiempo. Este campo tiene aplicaciones en diversas áreas, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y más.

Es posible establecer un modelo matemático de un sistema a partir de las ecuaciones físicas que definen su dinámica. A su vez, existen múltiples estructuras de modelos dinámicos que son típicamente usados en sistemas de control, tales como:

- **Auto-regresivo con entrada exógena (ARX)**

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}e(k), \quad (4.2.1)$$

con  $u(k)$  la entrada de la planta y  $e(k)$  ruido.

- **Auto-regresivo de Media Móvil y entrada exógena (ARMAX)**

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}e(k). \quad (4.2.2)$$

- **Box-Jenkins (BJ)**

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k). \quad (4.2.3)$$

- **Error de salida (OE), Respuesta a Impulso finita (FIR)**, entre otros.

La selección del modelo que se utilizará depende de distintos factores, sin embargo, existen múltiples casos en donde los sistemas son lo suficientemente complejos como para no poder establecer un modelo a partir de un conocimiento físico o conocimiento a priori del mismo. Para estos casos, cuando la estructura del modelo del sistema es desconocida, uno de los métodos que se pueden aplicar para abordar este problema es aproximar el modelo del sistema mediante una base de funciones ortonormales, cuya utilización presenta diversas ventajas por sobre los modelos lineales convencionales [46].

Las bases de funciones de Laguerre y Kautz son comúnmente las más utilizadas para estos propósitos. La primera de ellas conocida por su simplicidad, permite definir las propiedades de las funciones de la base con solo un parámetro  $p$ . Es por esto que su simplicidad da paso a limitaciones, principalmente para sistemas con polos complejos conjugados. En este contexto es donde la base de funciones de Kautz toma fuerza permitiendo aproximar sistemas con polos complejos conjugados.

### 4.3. Aproximación mediante bases de funciones ortonormales

La fundamentación subyacente a la modelación de sistemas dinámicos lineales mediante bases de funciones ortonormales se sustenta en la propiedad de completitud del conjunto de funciones que conforman la base.

Una secuencia de funciones reales de tiempo continuo,  $\mathcal{B}_i(t)$ , donde  $i = 1, 2, \dots$ , se considera un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo  $[0, \infty)$  si satisface las condiciones:

$$\int_0^{\infty} \mathcal{B}_i^2(t) dt = 1, \quad (4.3.1)$$

y

$$\int_0^{\infty} \mathcal{B}_i(t)\mathcal{B}_j(t) dt = 0, \quad i \neq j. \quad (4.3.2)$$

Adicionalmente, un conjunto de funciones ortonormales  $\mathcal{B}_i(t)$  se considera completo [47] si la relación

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathcal{B}_i(t) dt = 0, \quad (4.3.3)$$

es válida para todos los valores de  $i$  siempre que el cuadrado de  $f(t)$  satisfaga

$$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = 0. \quad (4.3.4)$$

Es conocido que si el conjunto de funciones  $\mathcal{B}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , que es ortonormal y completo en el intervalo  $[0, \infty)$ , una función arbitraria  $f(t)$  tiene una

expansión formal mediante este conjunto de funciones, análoga a la expansión en series de Fourier, dada por:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathcal{B}_i(t), \quad (4.3.5)$$

donde los coeficientes  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , están dados por:

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} \mathcal{B}_i(t) f(t) dt. \quad (4.3.6)$$

La expresión proporcionada en (4.3.5), en teoría, involucra un número infinito de coeficientes. No obstante, dado que se asume que el conjunto de funciones  $\mathcal{B}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , es completo, se garantiza que cualquier función  $f(t)$  perteneciente al espacio de Lebesgue  $L^2[0, \infty)$ , es decir,

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt < \infty, \quad (4.3.7)$$

y para cualquier  $\delta > 0$ , existe un entero  $N$  tal que

$$\int_0^{\infty} \left( f(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{B}_i(t) \right)^2 dt < \delta. \quad (4.3.8)$$

Este hecho implica que la función  $f(t)$  puede aproximarse con precisión arbitraria mediante una combinación lineal de funciones  $\mathcal{B}_i(t)$ , dependiendo del número de funciones utilizadas,  $N$ . Dado que, en este trabajo se desconoce la función  $f(t)$  a aproximar, los coeficientes  $\lambda_i$  de la ecuación (4.3.6) son los parámetros a estimar.

#### 4.4. Bases ortonormales de Kautz

En el área de identificación de sistemas es común asumir que se conoce la estructura de la función de transferencia del sistema de tiempo continuo. Sin embargo, en la práctica esta estructura es desconocida. Esto es particularmente cierto en sistemas estocásticos.

Para cubrir este escenario, es posible aproximar la función de transferencia del ruido de tiempo continuo  $H^c(s, \theta)$  definida en (2.2.1) usando bases de

funciones, mediante el resultado presentado en (4.3.8), como se muestra a continuación:

$$\hat{H}^c(s) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s), \quad (4.4.1)$$

donde  $\lambda_i$  son los pesos asociados a las funciones  $\mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{B}}$ , de la base.

Esta base de funciones tiene estructura conocida, la cual está definida por sus polos. Con el objetivo de mejorar la comprensión, estas funciones se utilizan para obtener la densidad espectral de potencia de tiempo continuo y discreto.

En esta sección, se presenta la densidad espectral de potencia de tiempo discreto del modelo aproximado por funciones base, y una forma alternativa de obtenerla mediante el uso de un sistema multivariable. El objetivo es, para un conjunto de funciones base, estimar los correspondientes pesos,  $\lambda_i$ , y/o el polo de las funciones base, por medio del espectro discreto asociado.

Específicamente, se trabajará con la base de funciones de Kautz, las cuales son ampliamente usadas para describir sistemas con polos complejos [16], [48], [49]. Las funciones asociadas a esta base se definen de la siguiente manera [16]:

$$\mathcal{B}_{2i-1}(s) = \frac{\sqrt{2bs}(s^2 - bs + c)^{i-1}}{(s^2 + bs + c)^i}, \quad (4.4.2)$$

$$\mathcal{B}_{2i}(s) = \frac{\sqrt{2bc}(s^2 - bs + c)^{i-1}}{(s^2 + bs + c)^i}, \quad (4.4.3)$$

con  $b = 2\rho_1$  y  $c = \rho_1^2 + \rho_2^2$ , donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son la parte real e imaginaria de los polos complejos  $(-\rho_1 \pm j\rho_2)$ , con  $\rho_1 > 0$ . Se puede suponer que el polo de la función base es conocido. Sin embargo, en la mayoría de los casos, por ejemplo, en sistemas estocásticos, el polo será desconocido. En este último caso, el polo puede estimarse como un parámetro adicional [17].

Usando (4.4.1) y la ecuación (2.5.12), el espectro de tiempo continuo usando la base de funciones está dado por:

$$\Phi^c(s) = \hat{H}^c(s)\hat{H}^c(-s), \quad (4.4.4)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}}} \sum_{q=1}^{N_{\mathcal{B}}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s) \lambda_q \mathcal{B}_q(-s). \quad (4.4.5)$$

Luego, mediante la ecuación (3.3.9), se obtiene la densidad espectral de

potencia de tiempo discreto como:

$$\Phi^d(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{q=1}^{N_B} \lambda_i \lambda_q \chi_{i,q}(e^{j\omega\Delta}), \quad (4.4.6)$$

con:

$$\chi_{i,q}(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_i\left(j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}m\right) \mathcal{B}_q\left(-j\omega - j\frac{2\pi}{\Delta}m\right). \quad (4.4.7)$$

Para estimar los parámetros del sistema de tiempo continuo, se usa el siguiente resultado:

**Teorema 4.4.1.** *Considere el vector de parámetros a ser estimados como  $\theta = \{\boldsymbol{\lambda}, \rho_1, \rho_2\}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_B}]^T$ . Bajo estas suposiciones, la función de verosimilitud de Whittle para el sistema descrito en (2.4.13), con  $H^c(s, \theta)$  en (4.4.1), está dada por:*

$$\ell(\theta) = - \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \log(\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_k^d \boldsymbol{\lambda}) + \frac{\Delta |Y_k - F_k^d \alpha|^2}{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_k^d \boldsymbol{\lambda}} \right], \quad (4.4.8)$$

donde  $\boldsymbol{\Psi}_k^d$  es la densidad espectral de potencia de tiempo discreto de las funciones base, la cual está dada por:

$$\boldsymbol{\Psi}_k^d = C_\chi^c (e^{j\omega_k \Delta} I - e^{A_\chi^c \Delta})^{-1} \Omega^d (e^{-j\omega_k \Delta} I - e^{A_\chi^{cT} \Delta})^{-1} C_\chi^{cT}, \quad (4.4.9)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_k^d = \begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \cdots & \chi_{1,N_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N_B,1} & \cdots & \chi_{N_B,N_B} \end{bmatrix}, \quad (4.4.10)$$

donde  $C_\chi^c$ ,  $A_\chi^c$  son las matrices de tiempo continuo del sistema multivariable:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(s) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{N_B}(s) \end{bmatrix} \dot{\nu}(t), \quad (4.4.11)$$

$\Omega^d$  es la varianza del ruido discreto, y  $F^d(z)$  está dado en (2.4.14) con las siguientes matrices:

■ **Para  $i = 1$ :**

$$A_1^c = A_2^c = \begin{bmatrix} -2\rho_1 & 1 \\ -(\rho_1^2 + \rho_2^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.12)$$

$$C_1^c = C_2^c = [1 \quad 0]. \quad (4.4.13)$$

■ *Para*  $i \geq 2$ :

$$A_{2i-1}^c = A_{2i}^c = \begin{bmatrix} A^{c*} & B^{c*} & 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A^{c*} & B^{c*} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \dots & \ddots & B^{c*} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \dots & \dots & A^{c*} \end{bmatrix}, \quad (4.4.14)$$

$$C_{2i-1}^c = C_{2i}^c = [1 \quad 0 \quad 0_{1 \times 2} \quad \dots \quad 0_{1 \times 2}], \quad (4.4.15)$$

donde

$$A^{c*} = \begin{bmatrix} -2\rho_1 & 1 \\ -(\rho_1^2 + \rho_2^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{c*} = \begin{bmatrix} -4\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4.16)$$

*Demostración.* La densidad espectral de potencia en (4.4.6) se puede re escribir como:

$$\Phi_k^d = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N_B} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \dots & \chi_{1,N_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N_B,1} & \dots & \chi_{N_B,N_B} \end{bmatrix}}_{\Psi_k^d} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N_B} \end{bmatrix}. \quad (4.4.17)$$

Por otro lado, la densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la ecuación (4.4.7) puede ser obtenida mediante el sistema multivariable  $\chi(t)$ .

Sea:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(s) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{N_B}(s) \end{bmatrix} \dot{\nu}(t), \quad (4.4.18)$$

cuya representación en espacio de estados se puede obtener mediante las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2). Su modelo muestreado equivalente por muestreo instantáneo está determinado por las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2).

De esta forma, la representación de entrada-salida del sistema multivariable en tiempo discreto está dada por:

$$\chi_n = C_\chi^c (zI - e^{A_\chi^c})^{-1} \psi_{n+1}, \quad (4.4.19)$$

donde  $\psi_{n+1}$  es una secuencia de ruido Gaussiano de tiempo discreto con media cero y varianza  $\Omega^d$ . Luego, la densidad espectral de potencia de tiempo discreto

de  $\chi$  está dada por [22]:

$$\Psi_k^d = C_\chi^c (e^{j\omega_k \Delta} I - e^{A_\chi^c \Delta})^{-1} \Omega^d (e^{-j\omega_k \Delta} I - e^{A_\chi^{cT} \Delta})^{-1} C_\chi^{cT}, \quad (4.4.20)$$

$$\Psi_k^d = \begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \cdots & \chi_{1,N_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N_B,1} & \cdots & \chi_{N_B,N_B} \end{bmatrix}. \quad (4.4.21)$$

De esta forma, se puede calcular la suma infinita de los  $\chi_{i,q}$  de la ecuación (4.4.7) a través de la representación en espacio de estados en tiempo discreto de las funciones  $\mathcal{B}_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, N_B$  de la base de Kautz.

Finalmente, reemplazando la ecuación (4.4.17), en forma matricial, en la ecuación (3.3.11) se obtiene la función de log-verosimilitud de Whittle cuando utilizamos las funciones base para aproximar la función de transferencia de tiempo continuo del ruido:

$$\ell(\theta) = - \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \log (\lambda^T \Psi_k^d \lambda) + \frac{\Delta |Y_k - F_k^d \alpha|^2}{\lambda^T \Psi_k^d \lambda} \right], \quad (4.4.22)$$

donde  $F^d$  está dada por (2.4.14) con las matrices de representación del espacio de estados de las funciones base.  $\square$

El Teorema 4.4.1 muestra que, dada la base de funciones, se puede calcular la densidad espectral de potencia de tiempo discreto  $\Phi^d(e^{j\omega\Delta})$  en términos de los parámetros de las funciones  $\mathcal{B}_i(t)$  de la base y sus pesos asociados. La ventaja de este método, es que no se requiere calcular la función de transferencia de tiempo discreto  $H^d(z)$  del ruido, y el problema se reduce a calcular de forma eficiente la densidad espectral de potencia de las funciones base  $\Psi_k^d$ , lo cual se puede realizar mediante la ecuación (4.4.9) u obteniendo cada componente de la matriz  $\Psi_k^d$  a través de la ecuación (4.4.7) usando la aproximación de Tsai mostrada en la ecuación (2.5.17).

En particular, para este trabajo se optó por utilizar la aproximación de Tsai, definida en la **Nota 2.5.1**, para obtener la densidad espectral de potencia de tiempo discreto de las funciones base, ya que, al considerar un gran número de funciones base, las matrices  $A_\chi^c$  y  $\Omega^d$  de la ecuación (4.4.20) son de un orden elevado, lo cual induce errores numéricos en MATLAB si se emplea directamente esta ecuación. Esta modificación a la metodología utilizada se detalla a continuación:

**Nota 4.4.1.** Considere el vector de parámetros a ser estimados como  $\theta = \{\boldsymbol{\lambda}, \rho_1, \rho_2\}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_B}]^T$ . Además, considere periodicidad en los estados, es decir  $\alpha = 0$ . Bajo estas suposiciones, la función de verosimilitud de Whittle para el sistema descrito en (2.2.1), con  $H^c(s, \theta)$  en (4.4.1), está dada por:

$$\ell(\theta) = - \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \log(\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_k^d \boldsymbol{\lambda}) + \frac{\Delta |Y_k|^2}{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_k^d \boldsymbol{\lambda}} \right], \quad (4.4.23)$$

donde  $\boldsymbol{\Psi}_k^d$  es la densidad espectral de potencia de tiempo discreto de las funciones base, la cual está dada por:

$$\boldsymbol{\Psi}_k^d = \begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \cdots & \chi_{1,N_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N_B,1} & \cdots & \chi_{N_B,N_B} \end{bmatrix}, \quad (4.4.24)$$

y

$$\chi_{i,q}(e^{j\omega\Delta}) = \sum_{m=-M}^M \mathcal{B}_i \left( j\omega + j\frac{2\pi}{\Delta}m \right) \mathcal{B}_q \left( -j\omega - j\frac{2\pi}{\Delta}m \right), \quad (4.4.25)$$

con  $\mathcal{B}_i(s)$  las funciones base de Kautz.

Para este trabajo de tesis se consideró una selección de  $M = 100$  (ver [34] y [35]). Este método para abordar el problema fue el desarrollado en el documento “A Novel Identification Method for Continuous-Time Stochastic Systems Utilizing Tsai’s Approximation and Sampled Data”.

## 4.5. Ejemplos numéricos de simulación

El presente trabajo desarrolla distintos entornos de simulación. De forma general, se considerará que el modelo de la función de transferencia del ruido de tiempo continuo en (2.2.1) es un modelo de sistema de segundo orden, definido por:

$$H^c(s) = \frac{\gamma}{s^2 + 2\zeta\bar{\omega}s + \bar{\omega}^2}, \quad (4.5.1)$$

donde  $\bar{\omega} > 0$  [rad/s] es la frecuencia natural del sistema,  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ), y  $\gamma = \kappa\bar{\omega}^2$ , con  $\kappa$  la ganancia del sistema. Inicialmente, los valores verdaderos, pero desconocidos para ser estimados de los parámetros son:  $\bar{\omega} = 2\pi 100$ ,  $\zeta = 0,1$ ,  $\gamma = 10000$ ,  $N = 10000$ .

### 4.5.1. Identificación de polos y pesos de las bases de Kautz

En primer lugar, se realizan pruebas sobre el sistema descrito en (4.5.1) identificando alternadamente los pesos asociados a las funciones de la base y el polo complejo conjugado de estas.

Bajo este escenario, es relevante notar que  $F^d$  depende de las matrices  $C^d$  y  $A^d$  (ver (2.4.14)). Estas matrices son constantes y no dependen de los pesos asociados a las funciones base. Es por esto, que la función de log-verosimilitud es más sencilla de optimizar, puesto que se puede obtener una expresión cerrada para estimar  $\alpha$ , y luego optimizar únicamente en términos de los pesos  $\lambda_i$ .

Dicho esto, por simplicidad se analizará la función de log-verosimilitud de Whittle dada en (4.4.8) con  $\alpha = 0$ . Los parámetros de simulación son los previamente indicados, y se utilizarán dos funciones base de Kautz ( $N_B = 2$ ) en (4.4.1).

Para estimar el vector de parámetros,  $\theta = \{\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2\}$  (recordando que  $\alpha = 0$ ), se utiliza el siguiente procedimiento:

---

#### Algoritmo 1 Estimación alternada de los parámetros

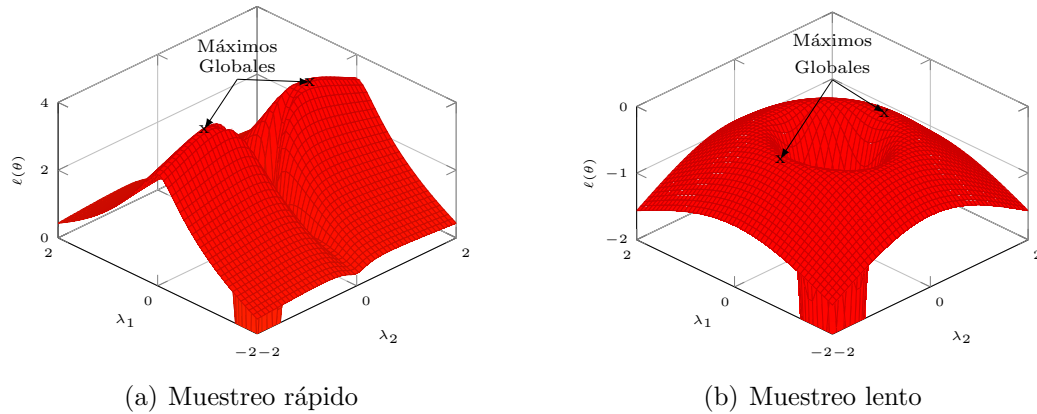
---

- 1: Se escogen arbitrariamente los parámetros iniciales del modelo  $\theta$
  - 2: Se fijan los pesos asociados a las funciones base  $\lambda_i$ , y se resuelve el problema de optimización en (3.3.12) para  $\rho_1, \rho_2$
  - 3: Se fijan los valores de  $\rho_1, \rho_2$  obtenidos en el paso anterior y se resuelve el problema de optimización en (3.3.12) para  $\lambda_1, \lambda_2$
  - 4: Se fijan los valores de  $\lambda_i$  con los nuevos valores obtenidos en el punto anterior y se vuelve al paso numero 2 hasta que  $\|\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}\| < 10^{-5}\|\hat{\theta}_k\|$
- 

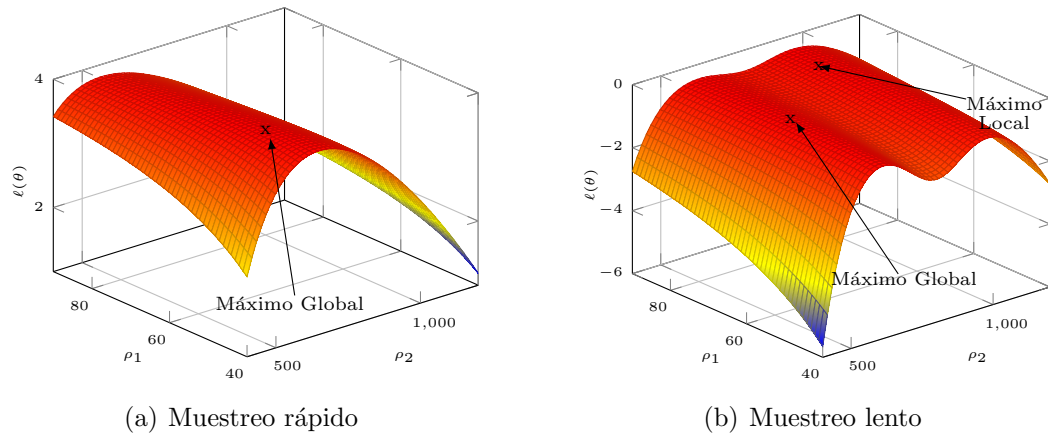
El objetivo de este escenario de simulación es presentar potenciales diferencias en la función de log-verosimilitud de Whittle en el proceso de identificación de los pesos y en el proceso de identificación de los polos. Se consideran dos periodos de muestreo distintos, los cuales son: **muestreo lento:** 4 [ms], **muestreo rápido:** 0.5 [ms].

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestra la función de log-verosimilitud de Whittle para los pasos 3 y 2 respectivamente del algoritmo 1.

**1) Polo fijo:** En la Figura 4.1, se muestra la función de log-verosimilitud de Whittle en función de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para  $\rho_1$  y  $\rho_2$  fijos, obtenido en el paso 3 del algoritmo 1, para dos periodos de muestreo distintos. En estos gráficos se aprecia que la función de log-verosimilitud de Whittle presenta dos máximos globales. La Figura 4.1(a) es el resultado para un periodo de muestreo rápido



**Figura 4.1.** Función de log-verosimilitud de Whittle con los parámetros del polo  $\rho_1$  y  $\rho_2$  fijos, para (a)  $\Delta = 0,5$  [ms] y (b)  $\Delta = 4$  [ms]



**Figura 4.2.** Función de log-verosimilitud de Whittle con pesos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  fijos, para (a)  $\Delta = 0,5$  [ms] y (b)  $\Delta = 4$  [ms]

( $\Delta = 0,5$  [ms]) con unos máximos mucho más acentuados que la Figura 4.1(b), la cual muestra el resultado de un periodo de muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]). Cabe señalar que estos dos máximos globales están ubicados en combinaciones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que dan como resultado la representación del mismo sistema  $\hat{H}^c(s)$  con ganancia positiva o negativa, según el valor de  $\lambda_2$ . Esto sugiere una forma de cuasi-convexidad en el proceso de optimización de la función de verosimilitud de Whittle al trabajar únicamente sobre los parámetros  $\lambda_i$  en sistemas estocásticos, recordando que, para sistemas determinísticos, la función de verosimilitud de Whittle es cuadrática con respecto a los pesos cuando se utilizan bases de funciones ortonormales [15], resultando en una optimización convexa.

**2) Pesos fijos:** La Figura 4.2 presenta la función de log-verosimilitud de Whittle en función de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , manteniendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  constantes. Estos resultados corresponden al paso 2 del algoritmo 1, y se muestran para los dos periodos de muestreo utilizados. En contraste con el escenario anterior, la Figura 4.2(a) exhibe un único máximo global al utilizar un periodo de muestreo rápido, mientras que la Figura 4.2(b) revela tanto un máximo global como un máximo local al emplear un periodo de muestreo lento. Este fenómeno, conocido como *aliasing* [26] en la función de verosimilitud de Whittle, complica la identificación del sistema, ya que se hace necesario recurrir a herramientas de identificación global para determinar de manera más precisa el polo que representa de forma óptima el sistema real. No obstante, es importante señalar que, debido a que la base de funciones de Kautz es un conjunto completo, no es imprescindible identificar el polo de forma exacta, como se demostrará más adelante en este trabajo.

#### 4.5.2. Identificación de los pesos de las bases de Kautz con polos fijos

En esta sección se presentan las condiciones del segundo escenario para desarrollar un ejemplo numérico, utilizando datos muestreados provenientes del sistema descrito en (4.5.1). En este caso, se identificarán únicamente los pesos  $\lambda_i$  de las funciones  $\mathcal{B}_i(s)$  de la base de Kautz, cuyo polo está fijo.

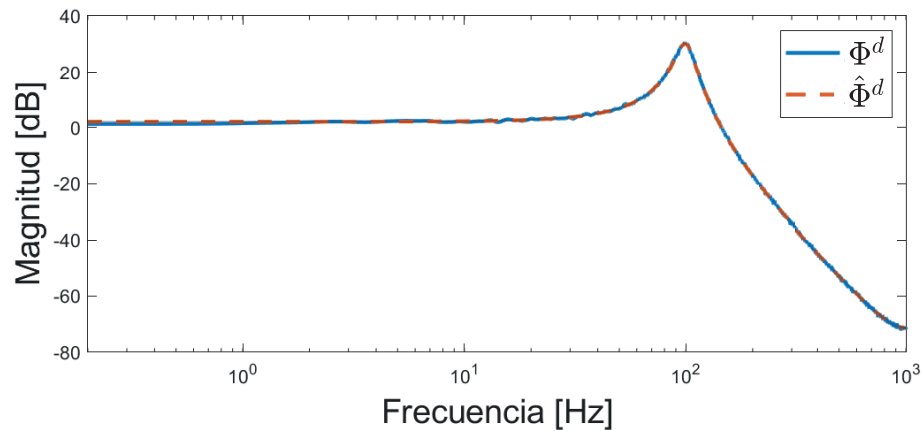
Para la estimación de los parámetros del sistema se resuelve el problema de optimización en (3.3.12) aplicado a la función de log-verosimilitud de Whittle (3.3.11), y aproximando la función de transferencia del sistema de tiempo continuo dada en (4.5.1) mediante dos funciones base ( $N_{\mathcal{B}} = 2$ ), junto con 100 simulaciones de Monte Carlo. Cabe señalar que para este ejemplo se utiliza un método de optimización local, específicamente la función *fminunc* de MATLAB.

Se utiliza el polo identificado en la sección anterior, de esta forma, las bases de Kautz quedan fijas y se procede a optimizar únicamente en términos de los parámetros  $\lambda_i$ . Se simula con muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]) y muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]).

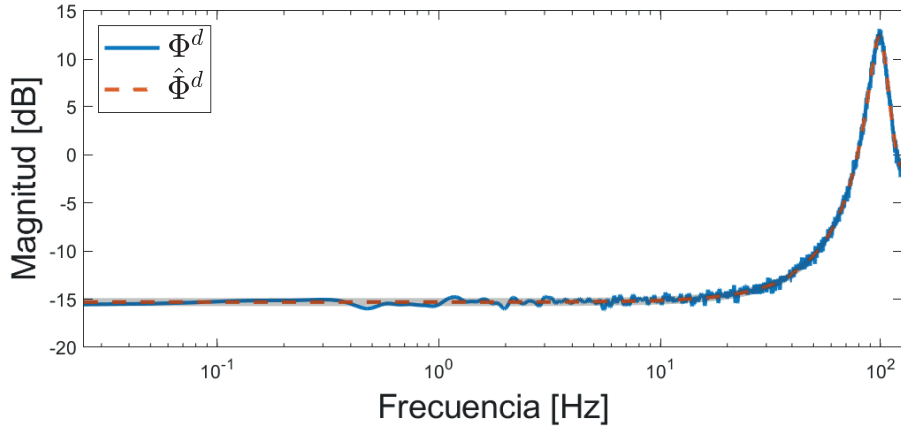
Adicionalmente, se establece un criterio de desempeño basado en la norma 2 al cuadrado de la diferencia entre el sistema real y el modelo aproximado, el cual se denomina **error de modelado**:

$$\epsilon = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \left\| H^c(s) - \hat{H}_j^c(s) \right\|_2^2, \quad (4.5.2)$$

donde  $N_{MC}$  es la cantidad de simulaciones de Monte Carlo,  $H^c(s)$  es la función de transferencia del sistema real dada en (4.5.1), y  $\hat{H}_j^c(s)$  es la  $j$ -ésima función de transferencia del modelo estimado para las realizaciones de Monte Carlo (MC). A su vez, ambos resultados de esta sección son comparados con los resultados de la identificación tradicional (ver ecuación (3.2.21)), estimando directamente los parámetros de la ecuación (4.5.1) asumiendo que la estructura del modelo que define al sistema es conocida.

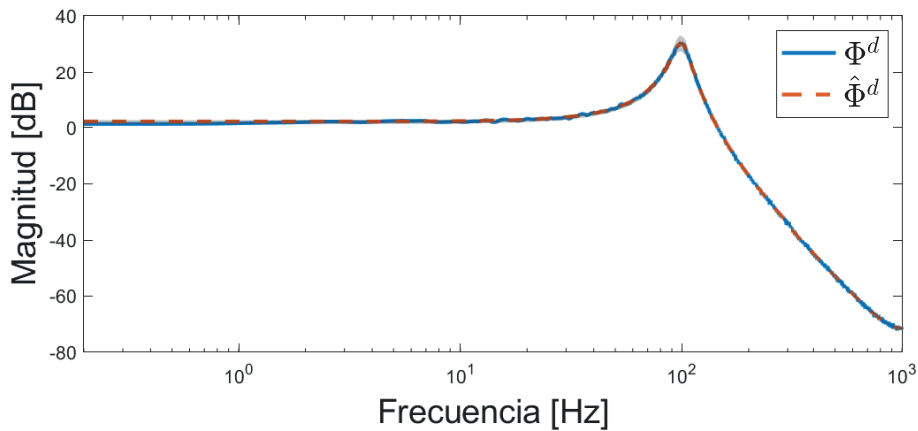


**Figura 4.3.** Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud de Whittle y funciones base para  $\Delta = 0,5$  [ms]

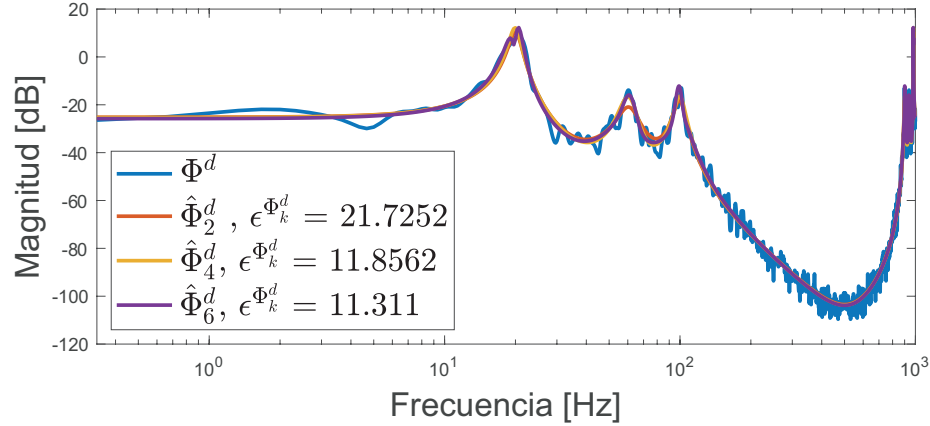


**Figura 4.4.** Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud de Whittle y funciones base para  $\Delta = 4$  [ms].

En las Figuras 4.3 y 4.4, se muestran los resultados de la estimación de las simulaciones Monte Carlo. Se presenta la densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul), junto con el promedio de los modelos estimados (línea roja discontinua), para muestreo rápido y lento respectivamente. Adicionalmente, ambas figuras presentan un área sombreada gris que representa la desviación máxima y mínima de los modelos estimados en las simulaciones de Monte Carlo.



**Figura 4.5.** Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud tradicional para  $\Delta = 0,5$  [ms].



**Figura 4.6.** Densidad espectral de potencia del sistema real (línea azul continua), y del promedio de las simulaciones de MC (línea discontinua roja) usando la función de verosimilitud tradicional para  $\Delta = 4$  [ms].

Por otro lado, las Figuras 4.5 y 4.6 muestran los resultados de la identificación tradicional en el dominio de la frecuencia, asumiendo la estructura del modelo como conocida, la cual corresponde a:

$$\hat{H}^c(s, \theta) = \frac{\hat{\gamma}}{s^2 + 2\hat{\zeta}\hat{\omega}s + \hat{\omega}^2}, \quad (4.5.3)$$

con  $\theta = \{\hat{\gamma}, \hat{\zeta}, \hat{\omega}\}$  los parámetros a identificar.

Comparando las Figuras 4.3 y 4.5 es evidente que la identificación mediante la función de verosimilitud de Whittle es más acertada, ya que la zona gris es más pequeña en la Figura 4.3. Esto se hace aún más notorio al comparar las Figuras 4.4 y 4.6, donde se nota una clara desviación si se utiliza el método tradicional de identificación en frecuencia.

Para demostrar lo analizado cualitativamente, el cuadro 4.1 muestra los errores de modelado (ecuación (4.5.2)) para cada uno de los casos, haciendo evidente que el método presentado en este trabajo de tesis presenta ventajas por sobre el método tradicional.

### 4.5.3. Identificación con un polo arbitrario

Acorde a lo mencionado en la sección 4.3, es posible aproximar cualquier función de transferencia, perteneciente al espacio de Lebesgue  $L^2[0, \infty)$ , mediante un conjunto de bases que sea completo, y, ya que las funciones base

**Cuadro 4.1.** Errores de modelado de los dos métodos y periodos de muestreo.

Muestreo	Bases	Estructura conocida
<b>Rápido</b>	$0,02 \times 10^{-2}$	$0,42 \times 10^{-2}$
<b>Lento</b>	$2,39 \times 10^{-2}$	$173,98 \times 10^{-2}$

de Kautz son un conjunto de funciones base ortonormales y completo, teóricamente se puede utilizar cualquier polo que define a esta base, con el costo de tener que agregar más funciones que aproximan al sistema. Esto da paso a este tercer escenario de identificación

Dado que la función de transferencia con la que se está trabajando en este entorno de simulación es conocida y está definida por la ecuación (4.5.1), si se reemplazan los valores de los parámetros por los descritos en la sección 4.5, se obtiene:

$$H^c(s) = \frac{10000}{s^2 + 40\pi s + (200\pi)^2}, \quad (4.5.4)$$

cuyo par de polos complejos conjugados son  $(-\rho_1 \pm j\rho_2) \approx (-62,8319 \pm j625,169)$ .

A partir de este polo, se generan 3 escenarios de simulación, los cuales son:

1. Identificación de los pesos de las funciones base con  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo sin desviaciones respecto al polo real, asumiendo que el polo se identificó perfectamente con el procedimiento definido en la sección 4.5.1, es decir

$$(-\rho_1 \pm j\rho_2) \approx (-62,8319 \pm j625,169)$$

2. Identificación de los pesos de las funciones base con  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo desviado un 5% del polo real, es decir

$$(-\rho_1 \pm j\rho_2) \approx (-62,8319 \cdot 0,95 \pm j625,169 \cdot 0,95)$$

3. Identificación de los pesos de las funciones base con  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo desviado un 20% del polo real, es decir

$$(-\rho_1 \pm j\rho_2) \approx (-62,8319 \cdot 1,2 \pm j625,169 \cdot 1,2)$$

Para todos los casos descritos, se identificará bajo muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]) y muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]). Esto con el fin de probar que efectivamente se puede identificar un sistema si el polo utilizado no es el polo real del sistema, pero con el costo de tener que aumentar el número de bases. Además, acorde a lo mostrado en la ecuación (4.3.8), se espera que un aumento en la cantidad de funciones base muestre una mejor aproximación del sistema.

El criterio de desempeño para este caso será el valor de la función de -log-verosimilitud de Whittle evaluada en el óptimo encontrado y el valor del error de aproximación del sistema definido en sección anterior. Adicionalmente, se añade un criterio de desempeño que es la norma 2 al cuadrado de la diferencia del promedio entre las densidades espectrales de potencia, es decir:

$$\epsilon^{\Phi_k^d} = \left\| \bar{\Phi}_k^d - \tilde{\Phi}_k^d \right\|_2^2, \quad (4.5.5)$$

con  $\bar{\Phi}_k^d$  el promedio de las densidades espectrales de potencia del sistema real, y  $\tilde{\Phi}_k^d$  el promedio de las densidades espectrales de potencia de los modelos estimados, para las 100 simulaciones de Monte Carlo. Este criterio se introduce puesto que en el ejemplo de aplicación se desconoce la función de transferencia  $H^c(s)$ , por lo que no es posible calcular el error de modelado.

Las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9 exhiben los resultados derivados del proceso de identificación del sistema utilizando una tasa de muestreo de 0,5 [ms] (muestreo rápido) y distintas cantidades de funciones base ( $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$ ). Se observa que a medida que el polo de la base de funciones se desplaza con respecto al polo real del sistema, la estimación experimenta alteraciones, desviándose de manera pronunciada del sistema real, especialmente cuando la cantidad de funciones base es pequeña.

Esta desviación se hace aún más evidente en la Figura 4.9, donde la línea roja, que representa la aproximación del sistema mediante solo 2 funciones base de Kautz, presenta una desviación considerable con respecto a la densidad espectral de potencia real del sistema (línea azul). En contraste, al emplear 8 funciones base (línea verde), la aproximación sigue de manera más precisa la dinámica del sistema real.

Por otro lado, las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 presentan los resultados obtenidos durante el proceso de identificación del sistema utilizando una tasa de muestreo de 4 [ms] (muestreo lento) y variadas cantidades de funciones base ( $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$ ). Similar al escenario previo con muestreo rápido, se aprecia que a medida que el polo de la base de funciones se desplaza en relación al polo real del sistema, la estimación de la densidad espectral de potencia del

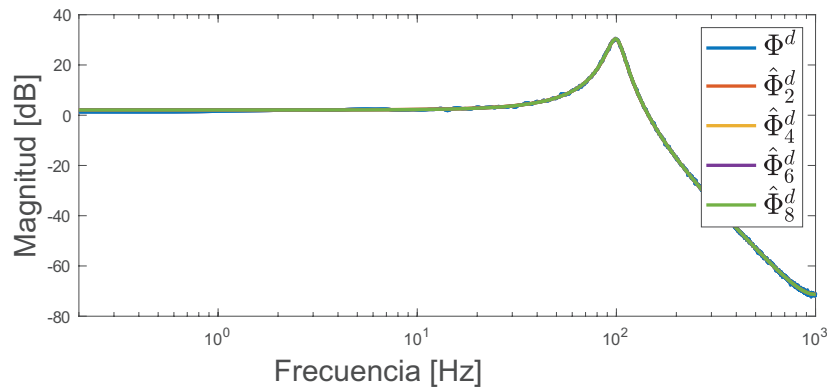
modelo difiere del sistema real, desviándose significativamente, especialmente cuando la cantidad de funciones base es reducida.

Este fenómeno destaca la importancia de la cantidad de funciones base en la precisión de la identificación del sistema, especialmente cuando el polo escogido de la base de funciones difiere del polo real del sistema.

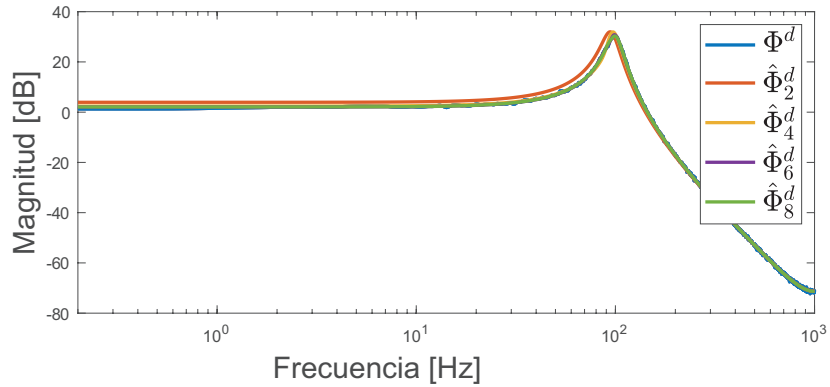
Los cuadros 4.2, 4.3, 4.4 muestran los resultados de los tres criterios de desempeño utilizados en este trabajo de tesis bajo el contexto de muestreo rápido. Estos cuadros evidencian cuantitativamente que al aproximar un sistema mediante una suma finita de funciones base ortonormales se obtiene una mejor precisión al utilizar una mayor cantidad de estas, puesto que los tres criterios obtienen un mejor resultado numérico.

A su vez, se aprecia que, en caso de que el polo de las funciones base no se escoja perfectamente respecto del sistema real, el resultado de la identificación mejora a medida de que la cantidad de funciones base aumenta.

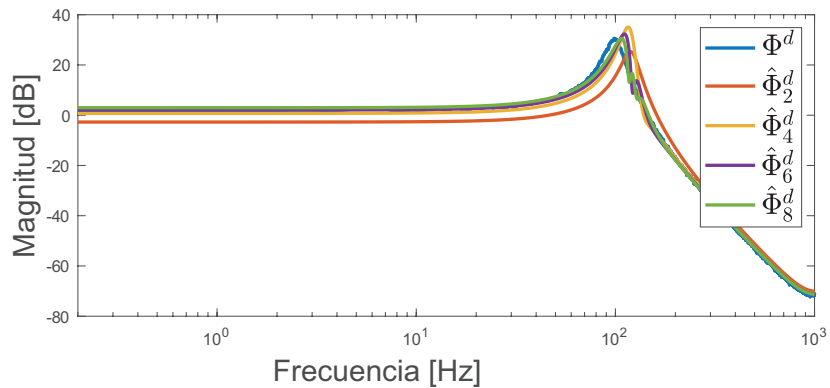
Este análisis se replica para los cuadros 4.5, 4.6, 4.7, los cuales evidencian los resultados cuantitativos para un periodo de muestreo lento, en donde los tres criterios de desempeño mejoran a medida de que se aumenta la cantidad de funciones base. Estos son resultados esperables dado lo mostrado en la ecuación (4.3.8).



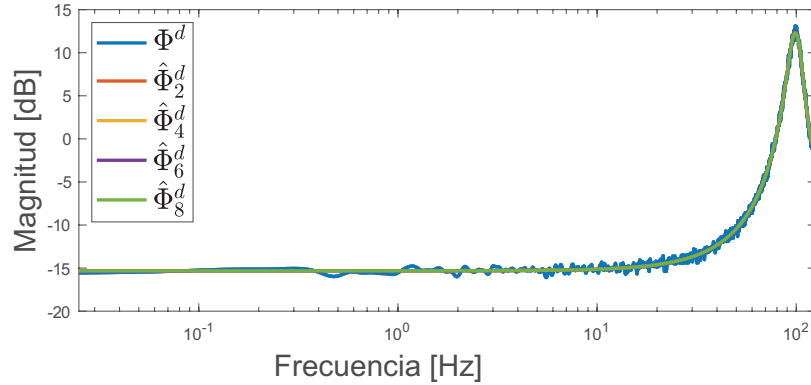
**Figura 4.7.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real.



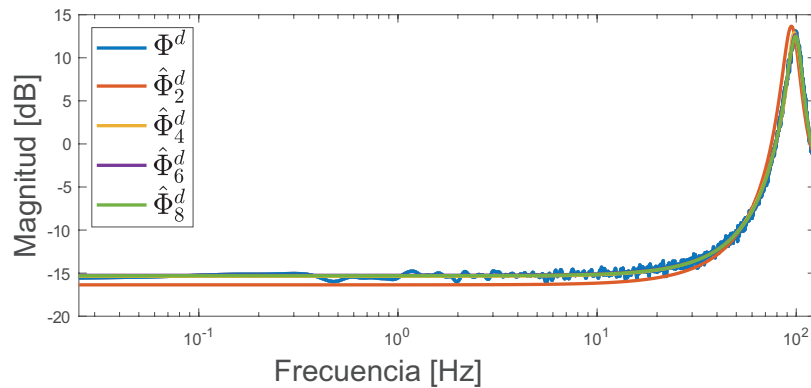
**Figura 4.8.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5 % respecto del polo real.



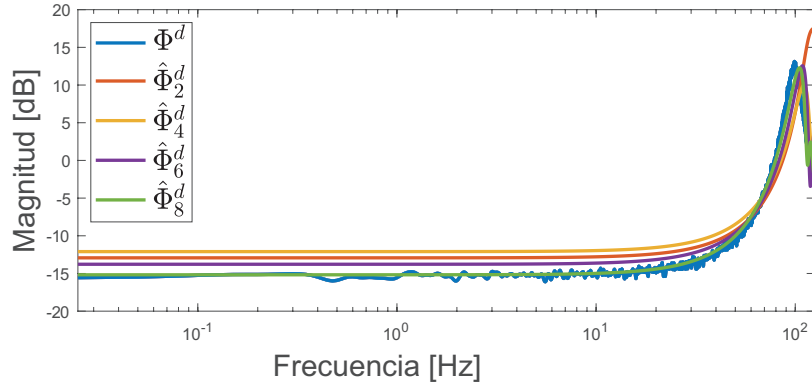
**Figura 4.9.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20 % respecto del polo real.



**Figura 4.10.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real.



**Figura 4.11.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5% respecto del polo real.



**Figura 4.12.** Densidad espectral de potencia del sistema real y del promedio de las estimaciones usando muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20% respecto del polo real.

**Cuadro 4.2.** Criterios de desempeño para muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	0.000282269118531465	99.4524878095977	-3.93525580092251
4	0.000244195128563008	95.0215784893237	-3.93551081525878
6	0.000180700834202563	93.0629562726715	-3.93569168608729
8	0.000119645078700078	86.1411829509697	-3.93591151508905

**Cuadro 4.3.** Criterios de desempeño para muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5% respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	0.135286820341348	14953.4702153231	-3.92762350489760
4	0.011939672072297	2222.40437937183	-3.93498466851760
6	0.012322281537454	177.372718610939	-3.93568087021638
8	0.008478652119359	99.2469520341925	-3.93595124253073

**Cuadro 4.4.** Criterios de desempeño para muestreo rápido ( $\Delta = 0,5$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20 % respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	0.791681923439371	58888.3194023643	-3.79625738128017
4	0.712079921013453	140736.335443485	-3.89955371335922
6	0.243397630106090	43716.5029738328	-3.92236708502587
8	0.085985923944659	15553.3294979881	-3.93086085701494

**Cuadro 4.5.** Criterios de desempeño para muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base sin desviación respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	0.023900527290360	17.2371572651987	0.444731679300145
4	0.022742521423428	17.7776361439007	0.444509340183825
6	0.017353857174587	17.0893735597696	0.444274143118385
8	0.011005209433146	17.0607611772699	0.444047238178566

**Cuadro 4.6.** Criterios de desempeño para muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 5 % respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	0.358814569886975	1176.52307475140	0.463001718193386
4	0.249554844696486	78.5667551405873	0.445294878686815
6	0.068339660086119	21.8791265340425	0.444308217226909
8	0.062148162506617	17.9954618866894	0.444025001155107

**Cuadro 4.7.** Criterios de desempeño para muestreo lento ( $\Delta = 4$  [ms]),  $N_B = \{2, 4, 6, 8\}$  y el polo de las funciones base desviado un 20 % respecto del polo real.

Cant. Bases	$\epsilon$	$\epsilon^{\Phi_k^d}$	$-\ell(\hat{\theta})$
2	1.18649341896064	20067.8987686681	0.624068038774993
4	1.25416061907907	2723.98351296745	0.526166464676132
6	1.12960280400368	2415.49719641386	0.488561312885686
8	1.10797188048905	827.912212237047	0.455814317534785

#### 4.5.4. Identificación con múltiples conjuntos de bases

Todos los ejemplos han sido desarrollados bajo la presencia de una única función de transferencia  $H^c(s, \theta)$ , sin embargo, existen casos en donde la salida del sistema es generada por múltiples funciones de transferencia excitadas por ruido blanco Gaussiano de tiempo continuo.

Dicho esto, los siguientes dos escenarios de simulación están desarrollados bajo el siguiente sistema de generación de datos:

$$y(t) = H_1^c(s, \theta)\dot{v}_1(t) + H_2^c(s, \theta)\dot{v}_2(t), \quad (4.5.6)$$

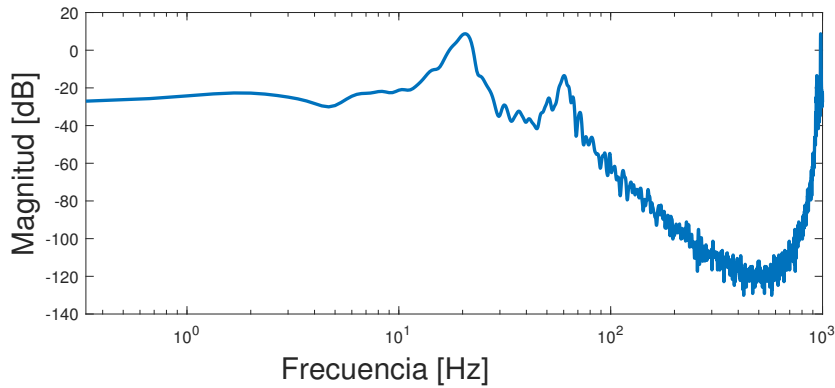
donde  $y(t)$  es la salida del sistema continuo,  $\dot{v}_1(t)$  y  $\dot{v}_2(t)$  son ruido blanco Gaussiano de tiempo continuo, de media cero y que satisface

$$\mathbb{E} \{\dot{v}(t)\dot{v}(r)\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \delta(t-r) & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \delta(t-r) \end{bmatrix}, \quad (4.5.7)$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la función Delta de Dirac y  $\dot{v}(t) = [\dot{v}_1(t) \ \dot{v}_2(t)]^T$ . Por simplicidad, se normaliza la densidad espectral de potencia considerando  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ .

Ahora bien,  $H_1^c(s, \theta)$  y  $H_2^c(s, \theta)$  tienen la misma estructura definida en (4.5.1), la diferencia está dada por el valor de los parámetros, siendo:

- $H_1^c(s, \theta): \{\bar{\omega}_1, \zeta_1, \gamma_1\} = \{2\pi 20, 0,05, 100\}$
- $H_2^c(s, \theta): \{\bar{\omega}_2, \zeta_2, \gamma_2\} = \{2\pi 60, 0,05, 200\}$



**Figura 4.13.** Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6).

El problema de identificación del sistema descrito en (4.5.6) se realizará mediante una única simulación, con un periodo de muestreo  $\Delta = 1$  [ms],  $N = 3000$  datos y se abordará mediante 2 posibles soluciones.

La primera de ellas corresponde a utilizar solo un conjunto de funciones base de Kautz, es decir, utilizar la ecuación (4.4.1) con las funciones base descritas en (4.4.2) y (4.4.3), las cuales poseen un único polo. Se prueba con distinta cantidad de bases ( $N_{\mathcal{B}} = \{2, 50, 100\}$ ) para identificar y aproximar el sistema en (4.5.6).

Por otro lado, se emplea un método alternativo, el cual corresponde a utilizar dos conjuntos de funciones base distintos, los cuales no comparten polos, con el fin de centrar cada conjunto de bases en los picos de  $H_1^c(s, \theta)$  y  $H_2^c(s, \theta)$  (ver Figura 4.13) a través de sus polos.

De esta forma, la aproximación de las funciones de transferencia del ruido de tiempo continuo  $H_1^c(s, \theta)$  y  $H_2^c(s, \theta)$  definidas en (4.5.6) usando dos conjuntos de funciones base de Kautz está dada por:

$$\hat{H}^c(s) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}_1}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s) + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{B}_2}} \lambda_j \mathcal{B}_j(s), \quad (4.5.8)$$

y los conjuntos de funciones base quedan definidos como:

$$\mathcal{B}_{2i-1}^1(s) = \frac{\sqrt{2b_1}s(s^2 - b_1s + c_1)^{i-1}}{(s^2 + b_1s + c_1)^i}, \quad (4.5.9)$$

$$\mathcal{B}_{2i}^1(s) = \frac{\sqrt{2b_1c_1}(s^2 - b_1s + c_1)^{i-1}}{(s^2 + b_1s + c_1)^i}, \quad (4.5.10)$$

$$\mathcal{B}_{2i-1}^2(s) = \frac{\sqrt{2b_2}s(s^2 - b_2s + c_2)^{i-1}}{(s^2 + b_2s + c_2)^i}, \quad (4.5.11)$$

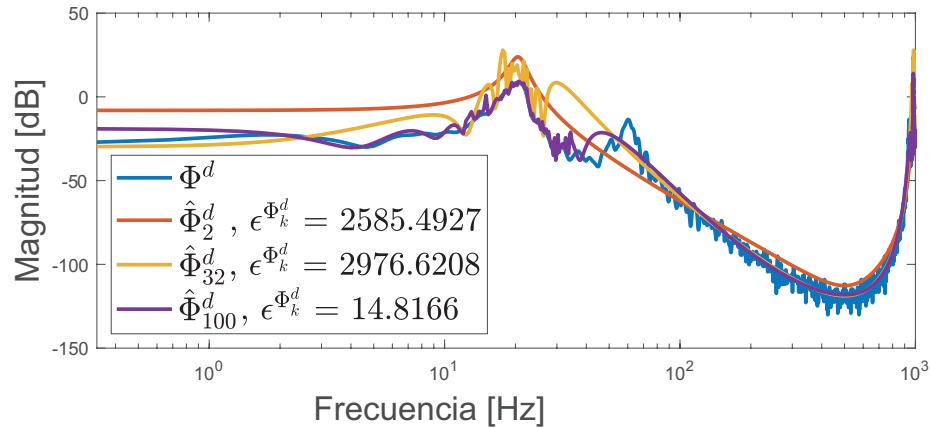
$$\mathcal{B}_{2i}^2(s) = \frac{\sqrt{2b_2c_2}(s^2 - b_2s + c_2)^{i-1}}{(s^2 + b_2s + c_2)^i}. \quad (4.5.12)$$

Así, ambos conjuntos de funciones base poseen polos distintos, dados por  $b_1 = 2\rho_{1,1}$  y  $c_1 = \rho_{1,1}^2 + \rho_{2,1}^2$ , donde  $\rho_{1,1}$  y  $\rho_{2,1}$  son la parte real e imaginaria de los polos complejos  $(-\rho_{1,1} \pm j\rho_{2,1})$ , y por otro lado  $b_2 = 2\rho_{1,2}$  y  $c_2 = \rho_{1,2}^2 + \rho_{2,2}^2$ , donde  $\rho_{1,2}$  y  $\rho_{2,2}$  son la parte real e imaginaria de los polos complejos  $(-\rho_{1,2} \pm j\rho_{2,2})$ . Para este caso, se consideran  $N_{\mathcal{B}_1} = N_{\mathcal{B}_2} = \{2, 4, 6\}$ . Los resultados de este método se compararán con los resultados del método anterior, utilizando solo un conjunto de funciones bases.

Los resultados de simulación para el escenario en el cual se emplea un único conjunto de funciones base se presentan en la Figura 4.14, donde se llevó a cabo

la identificación del sistema utilizando diferentes valores de  $N_{\mathcal{B}} = \{2, 32, 100\}$ . Se evidencia claramente que al utilizar únicamente 2 funciones base (línea roja), la aproximación al sistema resulta insuficiente. No obstante, conforme se incrementa la cantidad de funciones base, la aproximación del modelo del sistema mejora progresivamente.

Es importante señalar que se requiere la utilización de un elevado número de funciones base para lograr un nivel de error en las densidades espectrales de potencia  $\epsilon^{\Phi_k^d}$  que sea tolerable, como se indica en la ecuación (4.5.5). Este hecho sugiere la necesidad de considerar cuidadosamente la elección de  $N_{\mathcal{B}}$  para garantizar una representación precisa y aceptable del sistema en el dominio de la frecuencia.



**Figura 4.14.** Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6) comparada con el modelo aproximado usando: 2 funciones base (línea roja), 32 funciones base (línea amarilla), 100 funciones base (línea morada).

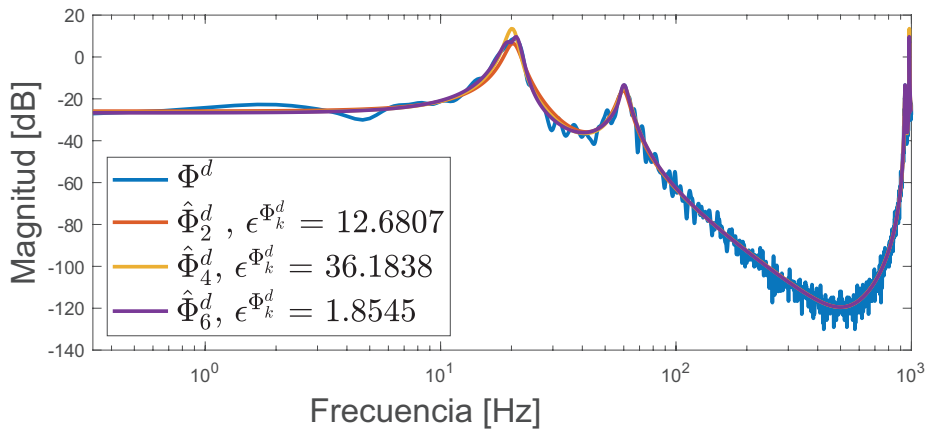
El aumento significativo en la cantidad de funciones base conlleva un gran aumento en el costo computacional del algoritmo de identificación.

Para enfrentar estos problemas, tomando en cuenta el principio de que la densidad espectral de potencia total puede obtenerse como la suma de sus componentes, tal como se describe en [50], se aborda el problema utilizando dos conjuntos de funciones de base para calcular el espectro de potencia estimado. En cada conjunto de funciones de base de Kautz, se consideran  $N_{\mathcal{B}_1} = N_{\mathcal{B}_2} = \{2, 4, 6\}$ . Los resultados de simulación se muestran en la Figura 4.15.

Al comparar las Figuras 4.14 y 4.15, se evidencia claramente que esta última

presenta una aproximación sustancialmente mejor del sistema. Logra aproximar de manera más precisa la densidad espectral de potencia real, lo que se traduce en una mejora significativa en los resultados del algoritmo de identificación. Esta mejora no solo se refleja en una representación más fiel del comportamiento del sistema, sino que también conlleva la ventaja de reducir considerablemente el costo computacional asociado al proceso de identificación, producto de reducir la cantidad de funciones base necesarias para el algoritmo de identificación.

El uso de dos conjuntos de funciones base mejora significativamente la precisión en las densidades espectrales de potencia ( $\epsilon^{\Phi_k^d}$ ) en comparación con el uso de un solo conjunto. Esta optimización en eficiencia y representación del sistema destaca la importancia de elegir adecuadamente la cantidad de funciones base en el algoritmo de identificación propuesto. Esto se puede lograr considerando otro conjunto de funciones base para representar los picos significativos de la densidad espectral de potencia del sistema real.



**Figura 4.15.** Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.6) comparada con el modelo aproximado usando 2 conjuntos de funciones base y: 2 funciones base (línea roja), 4 funciones base (línea amarilla), 6 funciones base (línea morada) en cada conjunto de funciones base.

Adicionalmente, se presenta otro ejemplo donde se simula con 3 fuentes de ruido, para mostrar que los resultados obtenidos no son únicamente aplicables a 2 fuentes de ruido. Para esto, se simula el siguiente sistema de generación de

datos:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 H_i^c(s, \theta) \dot{\nu}_i(t), \quad (4.5.13)$$

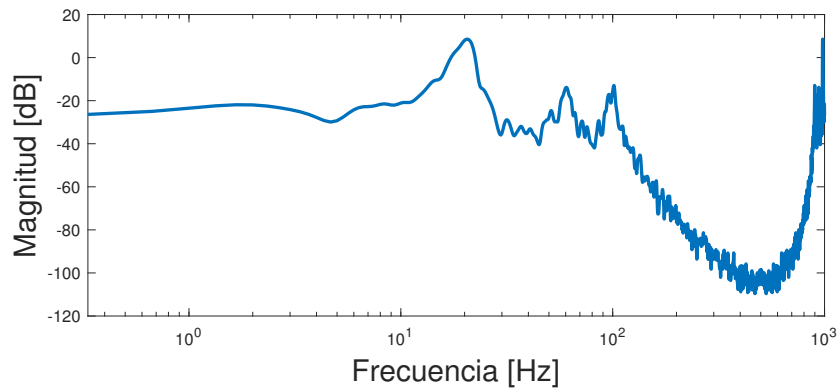
donde  $y(t)$  es la salida del sistema continuo,  $\dot{\nu}_1(t)$ ,  $\dot{\nu}_2(t)$  y  $\dot{\nu}_3(t)$  son ruido blanco Gaussiano de tiempo continuo, de media cero y que satisfacen:

$$\mathbb{E} \{ \dot{\nu}(t) \dot{\nu}(r) \} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \delta(t-r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \delta(t-r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \delta(t-r) \end{bmatrix}, \quad (4.5.14)$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la función Delta de Dirac y  $\dot{\nu}(t) = [\dot{\nu}_1(t) \ \dot{\nu}_2(t) \ \dot{\nu}_3(t)]^T$ . Por simplicidad, se normaliza la densidad espectral de potencia considerando  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ .

Al igual que en el caso anterior,  $H_1^c(s, \theta)$ ,  $H_2^c(s, \theta)$  y  $H_3^c(s, \theta)$  tienen la misma estructura definida en (4.5.1), la diferencia está dada por el valor de los parámetros, siendo:

- $H_1^c(s, \theta): \{\bar{\omega}_1, \zeta_1, \gamma_1\} = \{2\pi 20, 0,05, 100\}$
- $H_2^c(s, \theta): \{\bar{\omega}_2, \zeta_2, \gamma_2\} = \{2\pi 60, 0,05, 200\}$
- $H_3^c(s, \theta): \{\bar{\omega}_3, \zeta_3, \gamma_3\} = \{2\pi 100, 0,05, 500\}$



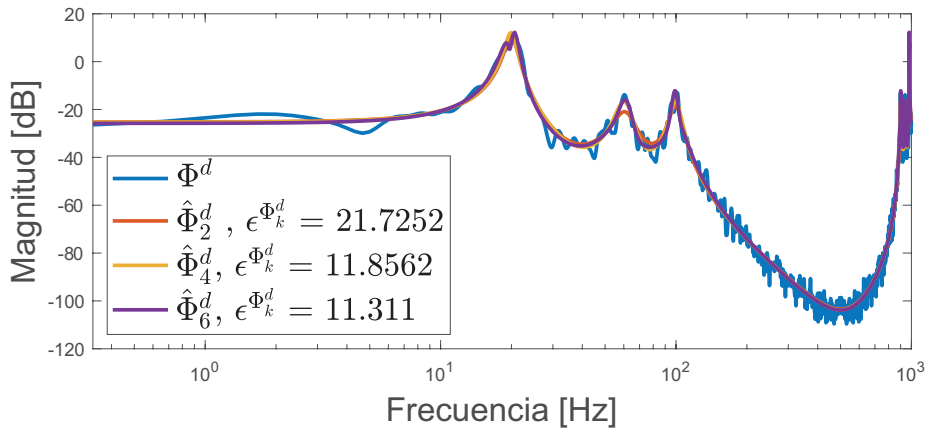
**Figura 4.16.** Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.13).

Para este escenario adicional, se abordará un método de identificación a través de 3 conjuntos de funciones base de Kautz, lo cual se expresa como:

$$\hat{H}^c(s) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}_1}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s) + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{B}_2}} \lambda_j \mathcal{B}_j(s) + \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{B}_3}} \lambda_k \mathcal{B}_k(s). \quad (4.5.15)$$

Estos conjuntos de funciones base poseen distintos polos, centrados en cada uno de los peaks importantes de la figura 4.16, lo cual permite identificar al sistema real sin la necesidad de una gran cantidad de funciones base.

Los resultados para este escenario se muestran en la figura 4.17, donde se aprecia claramente que el sistema identificado se aproxima adecuadamente al sistema real demostrándose gráficamente. Adicionalmente, se muestra cuantitativamente a través del error en las densidades espectrales de potencia ( $\epsilon^{\Phi_k^d}$ ), que una selección de más funciones base conlleva una mejor identificación del sistema.



**Figura 4.17.** Densidad espectral de potencia de tiempo discreto de la salida  $y(t)$  descrita en (4.5.13) comparada con el modelo aproximado usando 3 conjuntos de funciones base y: 2 funciones base (línea roja), 4 funciones base (línea amarilla), 6 funciones base (línea morada) en cada conjunto de funciones base.

## Capítulo 5

---

# RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados de implementar las estrategias de compensación descritas anteriormente, en la plataforma experimental OO-MAO. Primero, se realiza una descripción general de la herramienta OOMAO y sus capacidades. Luego, se describen brevemente las consideraciones necesarias para adaptar las estrategias de identificación descritas anteriormente, para que estas puedan ser implementadas en la plataforma experimental. Finalmente, se reportan los resultados de la estrategia de identificación propuesta, aplicado a un sistema de óptica adaptativa (AO).

### 5.1. Introducción

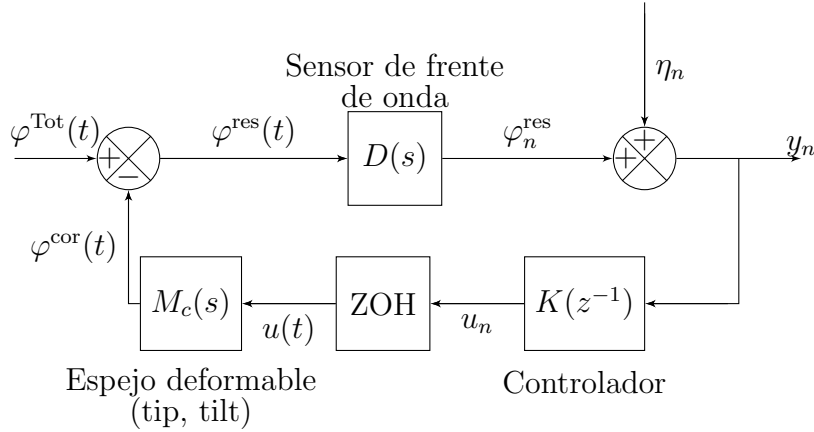
El diagrama de bloques típico para un modelo de óptica adaptativa se muestra en la Figura 5.1.

Este sistema en lazo cerrado está compuesto por el sensor de frente de onda ( $D(s)$ ), el espejo deformable ( $M_c(s)$ ) y el controlador ( $K(z^{-1})$ ) [8]. La señal  $\eta_n$  representa un ruido blanco Gaussiano aditivo con media cero y varianza  $\sigma_\eta^2$ . Las señales de tiempo discreto  $\varphi^{\text{Tot}}$ ,  $\varphi^{\text{cor}}$  y  $\varphi^{\text{res}}$  corresponden a las amplitudes de la fase de perturbación total (turbulencia + vibraciones), la fase de corrección y la fase residual, respectivamente.

Se considera que la perturbación total  $\varphi^{\text{Tot}}$  de la Figura 5.1 está dada por:

$$\varphi^{\text{Tot}}(t) = \varphi^{\text{tur}}(t) + \varphi^{\text{vib}_1}(t) + \varphi^{\text{vib}_2}(t) + \dots + \varphi^{\text{vib}_r}(t), \quad (5.1.1)$$

con  $\varphi^{\text{tur}}(t)$  el efecto de la turbulencia atmosférica y  $\varphi^{\text{vib}_i}(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$  representan distintas fuentes de vibración. Ahora bien, una forma de modelar estas



**Figura 5.1.** Diagrama de bloques del lazo cerrado de un sistema de óptica adaptativa

perturbaciones está dada por:

$$\varphi^{\text{Tot}}(t) = \sum_{l=0}^r \frac{\beta_l}{s^2 + 4\zeta_l\pi\alpha_l s + (2\pi\alpha_l)^2} \dot{\nu}_l(t), \quad (5.1.2)$$

$$\varphi^{\text{Tot}}(t) = \sum_{l=0}^r \frac{\beta_l}{s^2 + 2\zeta_l\omega_l s + \omega_l^2} \dot{\nu}_l(t), \quad (5.1.3)$$

donde  $\beta_l$  es la ganancia,  $\alpha_l$  [Hz] es la frecuencia natural del sistema,  $\zeta_l$  es el coeficiente de amortiguamiento, y  $\dot{\nu}_l(t)$  es un ruido blanco Gaussiano de tiempo continuo con media cero y varianza  $\sigma_l^2 = 1\delta_D(t)$ , con  $\delta_D(t)$  la función delta de Dirac.

En el contexto de los sistemas de AO, las aberraciones del frente de onda pueden expresarse mediante una combinación lineal de elementos de base ortogonales. Los polinomios de Zernike son unas de las funciones más utilizadas para describir los frentes de onda aberrados en óptica [51]. Estos polinomios son completamente ortogonales sobre el disco unitario, lo que los hace particularmente útiles cuando se trata de aberturas circulares. Además, describen las principales aberraciones con las que operan los sistemas ópticos.

El impacto de las vibraciones se centra en los modos Tip y Tilt (y desenfoque), que son los primeros polinomios de Zernike. Dado que estos modos son ortogonales, la identificación puede tratarse como sistemas independientes.

## 5.2. Herramienta OOMAO

OOMAO, que significa “Object-Oriented Matlab Adaptive Optics” [52] es una herramienta poderosa y versátil diseñada para el análisis y diseño de sistemas de óptica adaptativa en entornos de MATLAB. Desarrollada para abordar desafíos específicos en la corrección de aberraciones atmosféricas, OOMAO facilita la simulación y evaluación de sistemas de óptica adaptativa en tiempo real.

OOMAO destaca por su capacidad para modelar y simular la propagación de la luz a través de la atmósfera, teniendo en cuenta las aberraciones introducidas por las variaciones atmosféricas. Puede simular la respuesta de un sistema de óptica adaptativa, lo que permite evaluar su rendimiento bajo condiciones diversas.

Entre las características notables de OOMAO se incluye la capacidad de incorporar diversos tipos de sensores y actuadores, permitiendo a los usuarios explorar diferentes configuraciones y estrategias para optimizar la corrección de aberraciones. Además, OOMAO se integra eficientemente con las herramientas y funciones de MATLAB, facilitando el análisis de datos y la implementación de algoritmos personalizados.

En resumen, OOMAO es una herramienta esencial para investigadores y profesionales que trabajan en el campo de la óptica adaptativa, ofreciendo una plataforma flexible y robusta para la simulación y evaluación de sistemas en tiempo real, lo que contribuye significativamente al avance en el diseño y la optimización de sistemas de corrección de aberraciones ópticas.

## 5.3. Consideraciones de implementación

Para generar un modelo de perturbación en el sistema de Óptica Adaptativa (AO), se empleó la herramienta OOMAO con el objetivo de adquirir la secuencia temporal de los primeros modos, específicamente los modos Tip y Tilt. La información necesaria se derivó de la señal de salida proveniente del sensor de frente de onda.

Para la simulación, primero se definen las características del telescopio [53]: un diámetro de telescopio de 8.4 [m], una resolución de 100 píxeles, un campo de visión de 30 segundos de arco y un tiempo de muestreo de simulación de 1 [ms]. Luego, se definió el sensor de frente de onda como Shack-Hartmann, y una clase de espejo deformable. Finalmente, se establecieron condiciones

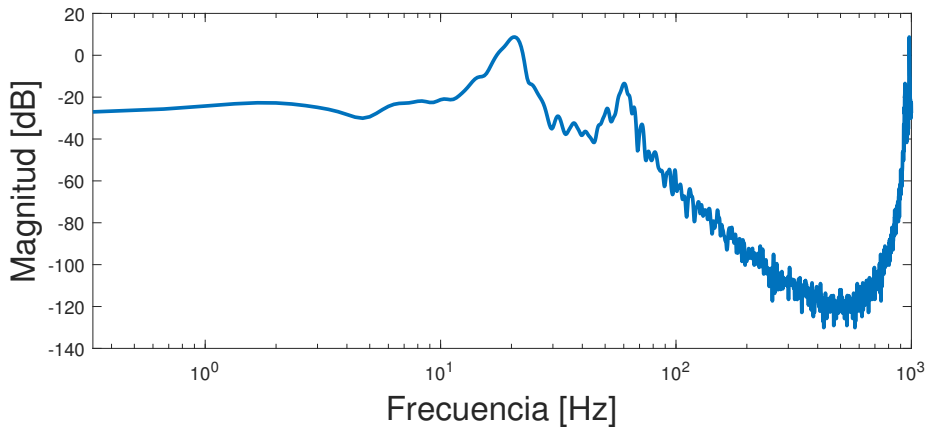
promedio de la atmósfera: las velocidades del viento a 15 [m/s], las direcciones del viento a  $\pi/3$  [rad] y las altitudes de las capas de turbulencia a  $5 \times 10^3$  [m].

En el proceso de análisis, se implementó la descomposición en modos Zernike, una técnica que permitió extraer los modos de Tip y Tilt. Estos modos fueron posteriormente tratados como sistemas de entrada y salida únicos, como se ilustra en la Figura 5.1.

En el contexto de la identificación del sistema, se asume que las señales estaban muestreadas con un periodo de muestreo  $\Delta = 1$  [ms], y se cuenta con un total de  $N = 3000$  muestras. Este enfoque de muestreo y la cantidad específica de datos fueron fundamentales para el análisis y la modelación subsiguiente de los modos Tip y Tilt en el sistema de Óptica Adaptativa.

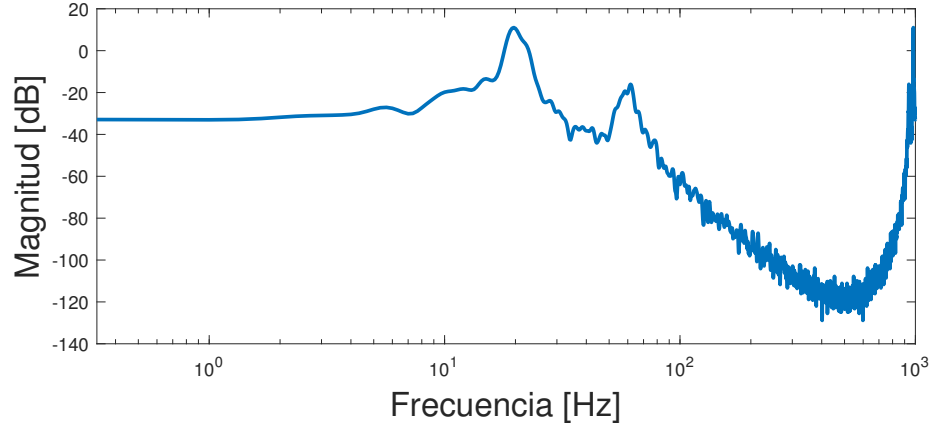
## 5.4. Resultados

La investigación se centra en un comienzo en la obtención de la densidad espectral de potencia de las señales de los modos Tip y Tilt, aspectos cruciales que afectan la calidad de las imágenes en sistemas ópticos. Los resultados obtenidos se presentan de manera detallada en las Figuras 5.2 y 5.3.



**Figura 5.2.** Densidad espectral de potencia de la señal Tip.

Al analizar ambas figuras, se observan claramente dos picos fundamentales en la densidad espectral de potencia. El primero se sitúa en el rango de frecuencias entre 10 [Hz] y 40 [Hz], mientras que el segundo se ubica entre los 40 [Hz] y 100 [Hz]. Este patrón se mantiene consistente para ambas señales de Tip y Tilt.



**Figura 5.3.** Densidad espectral de potencia de la señal Tilt.

Ante esta observación, se plantea abordar el problema utilizando un enfoque similar al implementado en la sección 4.5.4. Se propone emplear dos conjuntos de funciones base como estrategia para aproximar el sistema, como se muestra en la ecuación 5.4.1. Este enfoque se sustenta en la premisa de que la combinación de funciones base específicas puede proporcionar una representación efectiva de las señales Tip y Tilt.

$$\hat{H}^c(s) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}_1}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s) + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{B}_2}} \lambda_j \mathcal{B}_j(s), \quad (5.4.1)$$

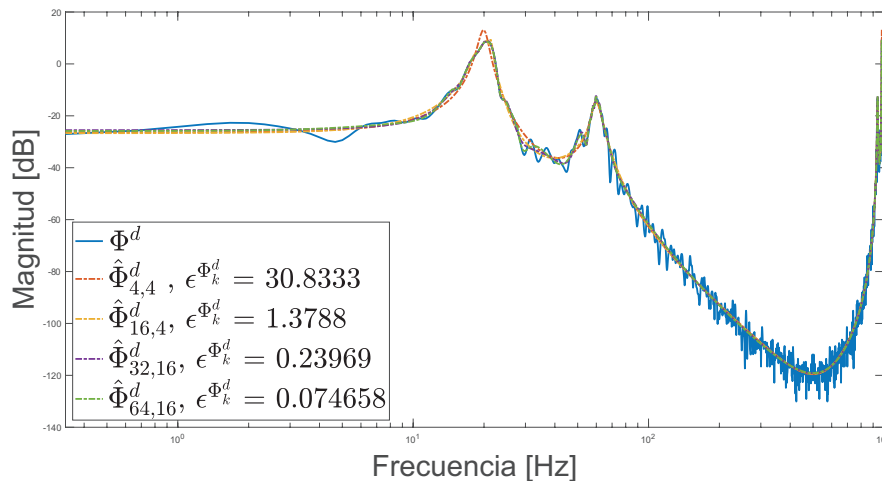
Este análisis detallado de la densidad espectral de potencia y la estrategia de aproximación mediante funciones base establece la base para la siguiente fase de la investigación, en donde se busca obtener un modelo que aproxime el modelo para las señales Tip y Tilt.

Se analiza en una primera instancia la señal asociada al modo Tip. Se consideran las siguientes combinaciones de números de bases para aproximar el sistema:

- $N_{\mathcal{B}_1} = N_{\mathcal{B}_2} = 4$
- $N_{\mathcal{B}_1} = 16, N_{\mathcal{B}_2} = 4$
- $N_{\mathcal{B}_1} = 32, N_{\mathcal{B}_2} = 16$

- $N_{B_1} = 64, N_{B_2} = 16$

En la Figura 5.4, se exhiben los resultados correspondientes a estas configuraciones. Se observa, en términos generales, una aproximación adecuada del sistema a través de los modelos obtenidos. No obstante, se detectan diferencias notables en frecuencias bajas.



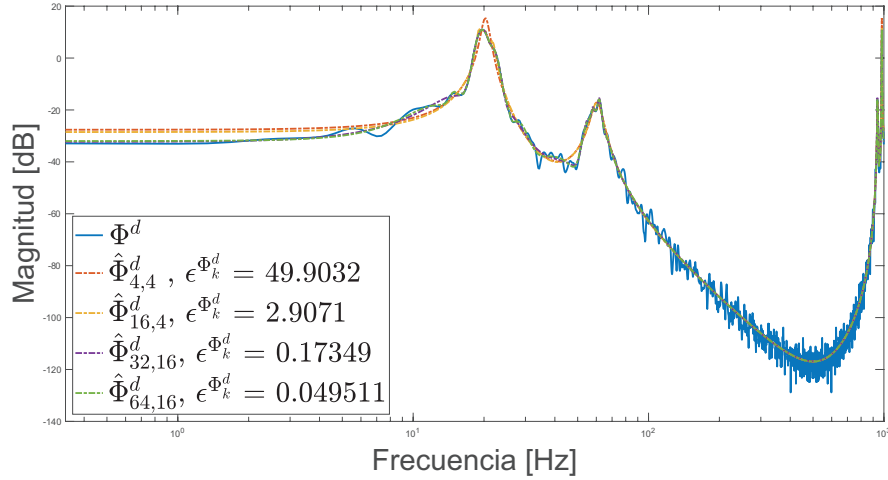
**Figura 5.4.** Densidad espectral de potencia del modo Tip (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 2 conjuntos de funciones base.

Por otro lado, al identificar el modelo subyacente al modo Tilt, se obtienen las gráficas presentadas en la Figura 5.5.

De manera análoga a los resultados obtenidos para el modo Tip, se aprecia que al aproximar el sistema que entrega la salida Tilt se obtiene un buen resultado. El modelo aproximado se ajusta a la densidad espectral de potencia real en gran parte de las frecuencias. Sin embargo, también se manifiestan diferencias notables a baja frecuencia.

Es relevante destacar que, en total, se utilizaron un máximo de 80 funciones base para identificar las señales Tip y Tilt, distribuidas en 64 para el primer conjunto de funciones base y 16 para el segundo conjunto.

Dada la problemática surgida en baja frecuencia para identificar el modelo subyacente a los modos Tip y Tilt, se propone la incorporación de un nuevo conjunto de funciones base, cuyo polo está ubicado en baja frecuencia, como se muestra en la ecuación (5.4.2). Esto se plantea con el objetivo de reducir

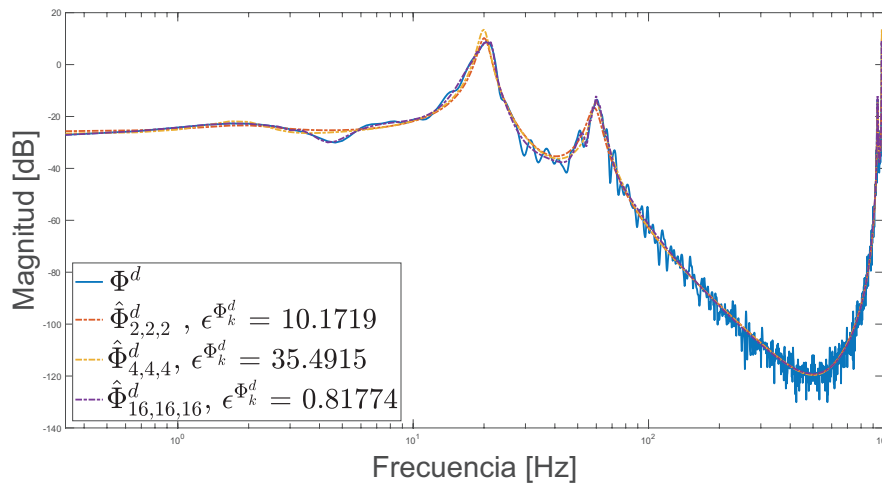


**Figura 5.5.** Densidad espectral de potencia del modo Tilt (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 2 conjuntos de funciones base.

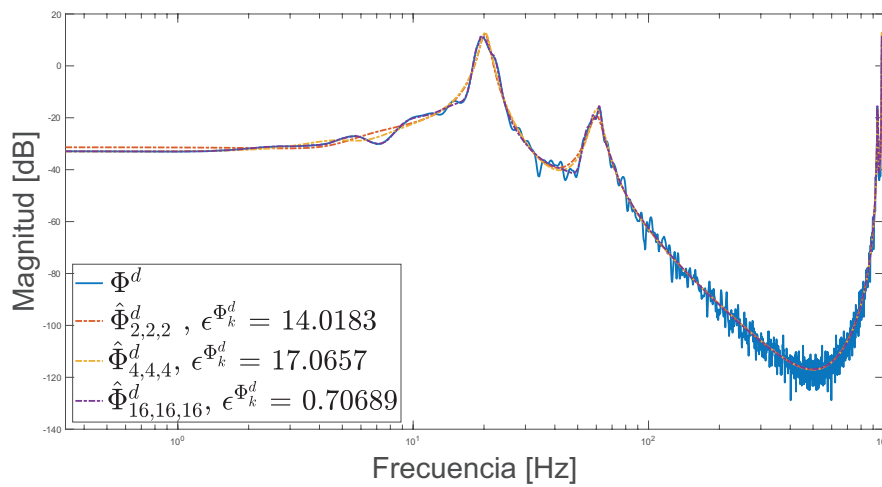
la discrepancia entre las densidades espectrales de potencia de los modos y los modelos aproximados en esa zona, a la par de disminuir la cantidad de funciones base utilizadas.

$$\hat{H}^c(s) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{B}_1}} \lambda_i \mathcal{B}_i(s) + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{B}_2}} \lambda_j \mathcal{B}_j(s) + \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{B}_3}} \lambda_k \mathcal{B}_k(s), \quad (5.4.2)$$

Las Figuras 5.6 y 5.7 presentan los resultados de esta nueva configuración. Cabe destacar que, al emplear 16 funciones en cada uno de los conjuntos de funciones base ( $N_{\mathcal{B}_1} = N_{\mathcal{B}_2} = N_{\mathcal{B}_3} = 16$ ), se logra una mejora significativa en la aproximación a baja frecuencia usando un total de 48 funciones base.



**Figura 5.6.** Densidad espectral de potencia del modo Tip (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 3 conjuntos de funciones base.



**Figura 5.7.** Densidad espectral de potencia del modo Tilt (azul) junto con los 4 modelos obtenidos para aproximar el sistema utilizando 3 conjuntos de funciones base.

# CONCLUSIONES

### 6.1. Conclusiones

En esta tesis, se abordó exhaustivamente el desafío de identificar sistemas de tiempo continuo cuya entrada es una señal estocástica, empleando modelos aproximados y datos muestreados. La estrategia adoptada implicó la aproximación del sistema en tiempo continuo mediante el uso de bases ortonormales, centrándose en la resolución del problema de identificación en el dominio de la frecuencia.

Se introdujo una versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle para aprovechar las propiedades espectrales del sistema, sobre la cual se sustenta el método de identificación. Este método se llevó a cabo a través de la densidad espectral de potencia, utilizando la base de funciones de Kautz como herramienta fundamental para aproximar el sistema y abordar el problema de identificación. La aplicación de la ecuación de *folding* permitió obtener la densidad espectral de potencia, de tiempo discreto, del modelo aproximado con funciones base, facilitando así la identificación del sistema mediante la función de verosimilitud de Whittle propuesta.

Dadas las evidentes dificultades para trabajar con datos muestreados de sistemas de tiempo continuo cuya entrada es estocástica, mencionadas en la sección 1.1, el método propuesto en este trabajo de tesis permite identificar este tipo de sistemas mediante la función de verosimilitud de Whittle, la cual utiliza directamente la densidad espectral de potencia asociada al modelo que aproxima al sistema. Esta ventaja, en conjunto con la utilización de las funciones base, evita resolver ecuaciones de Riccati y factorizaciones espectrales para obtener el espectro asociado. Además, el uso de la aproximación de Tsai (ver Nota 2.5.1) para la densidad espectral de potencia de tiempo discreto, permite reducir el costo computacional ya que no es necesario calcular la integral

asociada a la varianza de tiempo discreto.

Es importante destacar que se presentó el fenómeno de *aliasing* en la función de verosimilitud de Whittle propuesta si se incluye el polo que define las funciones base en los parámetros a identificar, y el periodo de muestreo no es lo suficientemente rápido, lo cual requiere el uso de herramientas de optimización global. No obstante, se demostró que si el polo permanece fijo y solo se identifican los pesos asociados a las funciones de la base, este fenómeno se evita. Además, se mostró la existencia de cierta cuasi-convexidad en la función de log verosimilitud de Whittle, indicando que los picos de las funciones representan el mismo modelo, lo cual simplifica el proceso de identificación al permitir el uso de algoritmos de optimización local con respuesta en un óptimo global.

Adicionalmente, se destacaron las ventajas del método propuesto en comparación con la identificación tradicional en frecuencia, evidenciando mejoras cuantitativas en la aproximación del sistema mediante la reducción del error de modelado. Es crucial resaltar que el método propuesto prescinde de herramientas de optimización global, a diferencia del método tradicional.

En relación al proceso de identificación del polo del sistema y los problemas de *aliasing*, se exploraron los efectos en la identificación del sistema cuando el polo utilizado para las funciones base no coincide con el polo real del sistema. Se demostró que en tal caso, es necesario aumentar la cantidad de funciones base para lograr una aproximación adecuada, aprovechando la propiedad de completitud del conjunto de bases ortonormales de Kautz, que permite una aproximación arbitraria del sistema real mediante combinaciones lineales de elementos de la base.

Se presentó un caso de estudio donde el sistema estaba representado por más de una función de transferencia, evaluando la cantidad de funciones base necesarias para aproximar un sistema con estas características. Se determinó que, dado el elevado número de funciones base requeridas, resulta más conveniente abordar este problema mediante la utilización de dos conjuntos de funciones base. Esta estrategia, que implica ubicar los polos de cada conjunto en las frecuencias de interés de la densidad espectral de potencia del sistema a identificar, demostró ventajas numéricas y de costo computacional significativas en comparación con la utilización de un solo conjunto de funciones base.

Finalmente, se aplicó este último método en la identificación de los modos Tip y Tilt de un sistema de óptica adaptativa, destacando que el proceso de identificación se ajustó de manera precisa al sistema real. Se hizo necesario agregar un tercer conjunto de funciones base para modelar de manera más

precisa la respuesta en baja frecuencia en este caso particular. Estos resultados respaldan la efectividad y versatilidad del enfoque propuesto en la tesis.

## 6.2. Trabajo futuro

Este trabajo abordó el problema de aproximar e identificar sistemas de tiempo continuo excitados por una señal estocástica. Se empleó la base de funciones ortonormales de Kautz y datos muestreados, junto con una versión generalizada de la función de verosimilitud de Whittle. Esto da paso a futuros trabajos, enfocados a:

- Estudiar la propiedad de cuasi-convexidad en la función de log-verosimilitud de Whittle al realizar la optimización de los pesos  $\lambda_i$  asociados a las funciones  $\mathcal{B}_i(s)$  de la base, para determinar matemáticamente si esta propiedad se cumple.
- Desarrollar una metodología eficiente en MATLAB para calcular la densidad espectral de potencia en el espacio de estados, especialmente para sistemas de orden elevado.
- Ampliar la aproximación mediante la inclusión de otras funciones, como las bases ortonormales generalizadas a este tipo de sistemas.
- Extender la técnica de identificación a sistemas con parámetros inciertos, utilizando bases de funciones ortonormales.

---

---

## REFERENCIAS

- [1] L. Ljung. System identification: theory for the user. *PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ*, 28:540, 1999.
- [2] M. Deistler. System identification and time series analysis: Past, present, and future. In *Stochastic Theory and Control: Proceedings of a Workshop held in Lawrence, Kansas*, pages 97–109. Springer, 2002.
- [3] R. G. D. Allen. Statistical confluence analysis by means of complete regression systems, 1935.
- [4] R. F. Engle and C. Granger. Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 251–276, 1987.
- [5] C. Williams and Carl E. Rasmussen. *Gaussian processes for machine learning*, volume 2. MIT press Cambridge, MA, 2006.
- [6] L. Ljung, C. Andersson, K. Tiels, and T. Schön. Deep learning and system identification. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):1175–1181, 2020.
- [7] T. Söderström and P. Stoica. System identification. *Hertfordshire, UK: Prentice Hall International*, 1989.
- [8] M. Coronel, R. Carvajal, P. Escárate, and J. C. Agüero. Disturbance modelling for minimum variance control in adaptive optics systems using wavefront sensor sampled-data. *Sensors*, 21(9):3054, 2021.
- [9] C. Kulcsár, P. Massioni, G. Sivo, and H.-F. Raynaud. Vibration mitigation in adaptive optics control. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447, pages 381–396. SPIE, 2012.

- 
- [10] L. Wang and H. Garnier. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. Springer London, 2008.
- [11] D. Marelli and M. Fu. Exact identification of continuous-time systems from sampled data. In *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP'07*, volume 3, pages III-757. IEEE, 2007.
- [12] S. Särkkä and L. Svensson. *Bayesian filtering and smoothing*, volume 17. Cambridge university press, 2023.
- [13] G. J. McLachlan and T. Krishnan. *The EM algorithm and extensions*. John Wiley & Sons, 2007.
- [14] S. Haykin. *Adaptive filter theory*. Pearson Education India, 2002.
- [15] M. Coronel, R. Carvajal, and J. C. Agüero. Identification of continuous-time systems utilising kautz basis functions from sampled-data. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):536–541, 2020.
- [16] B. Wahlberg and P. M. Mäkilä. On approximation of stable linear dynamical systems using laguerre and kautz functions. *Automatica*, 32(5):693–708, 1996.
- [17] P. Van den Hof, B. Wahlberg, P. Heuberger, B. Ninness, J. Bokor, and T. O. e Silva. Modelling and identification with rational orthogonal basis functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(15):445–455, 2000.
- [18] M. Coronel, R. Carvajal, and J. C. Agüero. Identification of continuous-time deterministic system utilizing orthonormal basis functions and sample data. In *2019 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON)*, pages 1–7. IEEE, 2019.
- [19] H. Akçay and B. Ninness. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems. *Signal processing*, 77(3):261–274, 1999.
- [20] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, and A. Oustaloup. Orthonormal basis functions for modeling continuous-time fractional systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 36(16):1333–1338, 2003.
- [21] J. S. Welsh, C. R. Rojas, H. Hjalmarsson, and B. Wahlberg. Sparse estimation techniques for basis function selection in wideband system identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(16):977–982, 2012.

- [22] G. C. Goodwin, J. C. Agüero, M. E. Garridos, M. E. Salgado, and J. I. Yuz. Sampling and sampled-data models: The interface between the continuous world and digital algorithms. *IEEE control systems magazine*, 33(5):34–53, 2013.
- [23] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [24] F. Chen, J. C. Agüero, M. Gilson, H. Garnier, and T. Liu. Em-based identification of continuous-time arma models from irregularly sampled data. *Automatica*, 77:293–301, 2017.
- [25] K. González, M. Coronel, R. Carvajal, P. Escárate, and J. C. Agüero. Maximum likelihood identification of a continuous-time oscillator utilizing sampled data. *IFAC-PapersOnLine*, 51(15):712–717, 2018.
- [26] H. Kirshner, S. Maggio, and M. Unser. A sampling theory approach for continuous arma identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10):4620–4634, 2011.
- [27] R. Orellana, R. Carvajal, P. Escárate, and J. C. Agüero. On the uncertainty identification for linear dynamic systems using stochastic embedding approach with gaussian mixture models. *Sensors*, 21(11):3837, 2021.
- [28] C. Briat and A. Seuret. Affine characterizations of minimal and mode-dependent dwell-times for uncertain linear switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5):1304–1310, 2012.
- [29] K. J. Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [30] C. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE transactions on automatic control*, 23(3):395–404, 1978.
- [31] J. C. Agüero, J. I. Yuz, G. C. Goodwin, and R. A. Delgado. On the equivalence of time and frequency domain maximum likelihood estimation. *Automatica*, 46(2):260–270, 2010.
- [32] A. Feuer and G. Goodwin. *Sampling in digital signal processing and control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] T. Tao. *Analysis I: Third Edition*. Texts and Readings in Mathematics. Springer Nature Singapore, 2016.

- 
- [34] H. Tsai and K. Chan. Quasi-maximum likelihood estimation for a class of continuous-time long-memory processes. *Journal of Time Series Analysis*, 26(5):691–713, 2005.
- [35] D. B. Percival and A. T. Walden. *Spectral analysis for physical applications*. cambridge university press, 1993.
- [36] R. Pintelon and J. Schoukens. *System identification: a frequency domain approach*. John Wiley & Sons, 2012.
- [37] Y. Pawitan. Whittle likelihood. In S. Kotz, N. Balakrishnan, C. Read, and B. Vidakovic, editors, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, volume 15, pages 9136–9138. Wiley-Interscience, 2 edition, 2004.
- [38] R. Dahlhaus. A likelihood approximation for locally stationary processes. *The Annals of Statistics*, 28(6):1762–1794, 2000.
- [39] A. Contreras-Cristán, E. Gutiérrez-Peña, and S. G. Walker. A note on whittle’s likelihood. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 35(4):857–875, 2006.
- [40] J. Jesus and R. E. Chandler. Inference with the whittle likelihood: A tractable approach using estimating functions. *Journal of Time Series Analysis*, 38(2):204–224, 2017.
- [41] N. Choudhuri, S. Ghosal, and A. Roy. Contiguity of the whittle measure for a gaussian time series. *Biometrika*, 91(1):211–218, 2004.
- [42] D. R. Brillinger. *Time series: data analysis and theory*. SIAM, 2001.
- [43] E. J. Hannan. *Time Series Analysis*. Methuen’s monographs on applied probability and statistics. John Wiley & Sons, Incorporated, 1967.
- [44] E. J. Hannan and M. Deistler. *The statistical theory of linear systems*. SIAM, 2012.
- [45] W. Palma. *Long-memory time series: theory and methods*. John Wiley & Sons, 2007.
- [46] G. L. Serra. *Frontiers in advanced control systems*. BoD–Books on Demand, 2012.
- [47] L. Wang. *Model predictive control system design and implementation using MATLAB®*. Springer Science & Business Media, 2009.

- 
- [48] B. Wahlberg. System identification using kautz models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1276–1282, 1994.
- [49] P. Heuberger, P. Van den Hof, and O. Bosgra. A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):451–465, 1995.
- [50] S. Meimon, C. Petit, T. Fusco, and C. Kulcsar. Tip-tilt disturbance model identification for kalman-based control scheme: application to xao and elt systems. *JOSA A*, 27(11):A122–A132, 2010.
- [51] R. K. Tyson and B. W. Frazier. *Principles of adaptive optics*. CRC press, 2022.
- [52] R. Conan and C. Correia. Object-oriented matlab adaptive optics toolbox. In *Adaptive optics systems IV*, volume 9148, pages 2066–2082. SPIE, 2014.
- [53] M. Coronel, R. Orellana, R. Carvajal, P. Escárate, and J. C. Agüero. An identification method for stochastic continuous-time disturbances in adaptive optics systems. *IFAC-PapersOnLine*, 56(2):4228–4233, 2023.