



UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

VALPARAÍSO - CHILE

Control robusto de alto ancho de banda para plantas de tiempo continuo

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica Mención Control Automático.

EDUARDO ANDRÉS ELGUETA STUARDO

Director de Tesis
Dr. JUAN I. YUZ E.

Revisor
Dr. Francisco J. Vargas P.

Revisor
Dr. Andrés A. Peters R.

18 de agosto de 2023

*Dedicado a mis padres
y hermanos*

AGRADECIMIENTOS

QUIERO agradecer en primer lugar a mis padres, a mi madre Yanett Stuardo y mi padre Eduardo Elgueta. Ellos han sido las personas que desde el día uno se han preocupado de mi bienestar, de mi crecimiento y de mi felicidad. Desde pequeño me mostraron el mundo y no tenían resquemores en explicarme las cosas por más difíciles que fueran, es por ello que me las pasé preguntando todo lo que veía y con mucha paciencia me contestaron cuanto pudieron. Que sea curioso y que sepa muchas cosas de cultura general es gracias a ellos y estoy contento de que así haya sido. Ahora que estoy más grande pasaron de guiarme a acompañarme en las decisiones que he tomado, confiando en el adulto que me he convertido. También le agradezco a mis dos hermanos, Eduardo y Betsabé por estar presentes a su manera, siempre he sentido que cuento con ambos para lo que necesite, y junto con Arashi, hacen mis días más felices. Este ambiente de cariño y compañía no solo es de mi núcleo familiar, sino que de toda mi familia. Mis abuelos, tíos y primos repartidos entre Cordillera, Villa Alemana, Santiago, Azusa y Antofagasta, son pilares en mi vida y doy muchas gracias por haber nacido en esta familia.

Estos últimos años han sido un tanto difíciles, pero los he podido llevar con alegría y optimismo gracias a mi compañera, Francisca Adasme, quien me ha dado todo su apoyo, me ha escuchado y me ha hecho sentir mejor cuando lo necesité. Me ha acompañado tanto en risas como en lágrimas y ahora me siento una persona más completa gracias a ella.

También quiero agradecer a mi profesor, el actual Rector Juan Yuz, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él. Me ha guiado en estos años, mostrando interés y preocupación por mi persona fuera de lo académico y siempre motivándome a llevar adelante esta tarea de escribir la Tesis.

Agradecer a Camila López y German Luis por estos años de amistad, que espero sean muchos más. Me han enseñado muchas cosas de la vida y son un ejemplo de como enfrentarla siendo honestos y directos. También en el escultismo fueron un gran ejemplo y lo siguen siendo hasta el día de hoy, aunque no llevemos una pañoleta al cuello. Ser Scout me marcó de manera muy positiva y son recuerdos que llevaré para siempre conmigo, esas noches de fogata, las largas caminatas y las muchas comidas compartidas fueron inigualables. Con esto también recuerdo con cariño a Mario, Javiera, Andrea, Rodrigo y muchos otros que han quedado en el camino.

Con esta Tesis culmina un largo proceso de formación, casi dos décadas si cuento desde la enseñanza básica. Me siento preparado para afrontar los desafíos del futuro y es gracias a todas las personas que conocí. A todas las personas que nombré y a todas las que me faltaron, muchas gracias.

Eduardo Andrés Elgueta Stuardo

RESUMEN

PARA el diseño de sistemas de control es usual utilizar modelos simplificados de la planta que representen sus características esenciales. Con el objetivo de entender el efecto que tiene la presencia de polos y ceros con incertidumbre en el modelo de la planta es que en esta Tesis se propone un modelo nominal de alta frecuencia. Este modelo nominal permitirá desacoplar el diseño del controlador con el del análisis de estabilidad robusta de la planta verdadera.

En esta Tesis se obtiene una ley de control estabilizante para plantas con incertidumbre en la posición de sus polos que quede determinada por el ancho de banda del lazo cerrado nominal. Se considera el caso en que se utiliza el modelo de tiempo continuo y el caso en que se utiliza el modelo de tiempo discreto equivalente. En ambos casos se obtienen cotas ínfimas para el ancho de banda nominal que aseguran la estabilidad de lazo cerrado verdadero.

En el presente trabajo se propone abordar el control de plantas continuas con incertidumbre, utilizando un modelo nominal basado en su respuesta a alta frecuencia. Para el diseño del controlador se propone utilizar asignación de polos lo que permite parametrizarlo en términos del ancho de banda del lazo cerrado nominal. Además, se utilizarán técnicas de control robusto para asegurar la estabilidad del polinomio de lazo cerrado verdadero que corresponde a una familia de polinomios con incertidumbre. Se trabaja en base a la hipótesis de que al utilizar el modelo nominal y el controlador propuesto, se conseguirá la estabilidad del lazo cerrado al fijar el ancho de banda nominal lo suficientemente rápido.

En la Tesis se obtienen cotas ínfimas para la relación entre el ancho de banda nominal y la cota de los polos con incertidumbre. También se obtienen cotas ínfimas para una variante del controlador en el que se incorporan polos en el origen con el fin de solucionar los problemas que aparecen al considerar ceros inciertos en el modelo de la planta verdadera.

También se analiza el efecto de los polos con incertidumbre en sistemas de tiempo discreto, por lo que primero se plantea el modelo de la planta discreta para sistemas de bajo orden sin polos y se utiliza el modelo nominal de alta frecuencia el cual tiene el beneficio de que su modelo discreto exacto se obtiene de forma directa por medio de los polinomios de Euler-Frobenius. En este modelo nominal discreto aparecen explícitamente los ceros asintóticos de muestreo, los que se consideran al momento del diseño del controlador y para ilustrar su importancia al operar en alta frecuencia es que se considera un segundo modelo nominal el cual no cuenta con los ceros de muestreo asintóticos. Ya con el modelo discreto verdadero y los dos modelos nominales discretos es que se plantea utilizar un controlador bipropio y el diseño del controlador se hace en función del ancho de banda nominal, bajo la misma hipótesis que en el caso de tiempo continuo, en que se asegura la estabilidad del lazo cerrado verdadero si el ancho de banda nominal es lo suficientemente rápido.

Finalmente, se pone a prueba la ley de control propuesta en esta Tesis en dos sistemas físicos: un servomotor y un levitador magnético. El primero corresponde a una planta de segundo orden donde se busca controlar la posición angular a través de un voltaje de actuación. El segundo sistema a controlar es un levitador magnético, donde se controla la posición de un rotor a partir de una corriente de actuación. En el caso del levitador se evidencian algunas limitantes del controlador, las cuales se analizan y se buscan soluciones particulares para mejorar el control. Para ambos sistemas se obtienen datos experimentales que evidencian la estabilidad del lazo cerrado al fijar el ancho de banda lo suficientemente rápido. En estos experimentos se utiliza tanto el controlador continuo como el discreto y se comparan los resultados.

Palabras Claves

Incertidumbre, Value Set, Control Robusto, Ceros de muestreo

ABSTRACT

FOR control system design, simplified models of the plant that represent its essential characteristics are usually considered. To understand the effect of poles and zeros in the plant model, a high frequency nominal model is proposed which does not have such uncertainties. This nominal model will allow to decouple the controller design from the robust stability analysis of the true closed-loop.

In this thesis a stabilizing control law is obtained for plants with uncertainty in the position of its poles, which is determined by the bandwidth of the nominal closed-loop. Both continuous-time and discrete-time equivalent models are considered. In both cases, lower bounds for the nominal bandwidth are obtained to ensure the stability of the true closed-loop.

This work proposes addressing the control of continuous plants with uncertainty using a nominal model based on its high-frequency response. Pole assignment is proposed for controller design, allowing parameterization in terms of the nominal closed-loop bandwidth. Additionally, robust control techniques will be used to ensure the stability of the true closed-loop polynomial, which corresponds to a family of polynomials with uncertainty. The hypothesis is that by using the nominal model and the proposed controller, closed-loop stability will be achieved by sufficiently fast nominal bandwidth setting.

This thesis provides lower bounds for the relationship between the nominal bandwidth and the bound of uncertain poles. Lower bounds are also obtained for a variant of the controller that incorporates origin poles to solve the problems that arise when considering uncertain zeros in the true plant model.

The effect of poles with uncertainty in discrete-time systems is also analyzed. First, the discrete plant model is formulated for low-order systems without poles, and the high-frequency nominal model is used, which benefits from its exact discrete model obtained directly through Euler-Frobenius polynomials. In this discrete nominal model, the asymptotic sampling zeros appear explicitly, and they are considered in the controller design. To illustrate their importance when operating at high frequency, a second nominal model is considered, which does not include the asymptotic sampling zeros. With the true discrete model and the two nominal discrete models, a biproper controller is proposed and the controller design is based on the nominal bandwidth. Under the same hypothesis as in the continuous-time case, the stability of the true closed-loop is ensured if the nominal bandwidth is sufficiently fast.

Finally, the proposed control law in this thesis is tested on two physical systems: a servomotor and a magnetic levitator. The first corresponds to a second-order plant where the aim is to control the angular position through an actuation voltage. The second system to be controlled is a magnetic levitator, where the rotor position is controlled based on an

actuation current. In the case of the levitator, some limitations of the controller are evident, which are analyzed, and specific solutions are sought to improve control. Experimental data is obtained for both systems, demonstrating closed-loop stability by setting the bandwidth sufficiently fast. Both continuous and discrete controllers are used in these experiments, and the results are compared.

Keywords

Pole uncertainties, Value Set, Robust Control, Sampling Zeros

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	II
ABSTRACT	IV
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
ÍNDICE DE TABLAS	1
1. INTRODUCCIÓN	2
1.1. Definición de problema	3
1.2. Estado del Arte	4
1.3. Publicaciones asociadas	6
1.4. Estructura del documento	6
2. CONTROL ROBUSTO	7
2.1. Teorema de estabilidad robusta	8
2.2. Teorema de Kharitonov	9
2.3. Value Set	11
3. SISTEMAS CONTINUOS	16
3.1. Modelo de la planta	16
3.2. Modelo nominal	16
3.3. Diseño del controlador	18
3.4. Estabilidad del lazo verdadero	20
3.5. Estudio de casos de plantas de bajo orden	23
3.5.1. Plantas con polos inciertos	23
3.5.1.1. Metodología general	31
3.5.2. Plantas con polos y ceros inciertos	32
3.6. Funciones de sensibilidad	40
4. SISTEMAS MUESTREADOS	46
4.1. Modelo de tiempo discreto de la planta	46
4.2. Modelo nominal discreto	48
4.3. Diseño del controlador	50

4.4. Plantas con polos inciertos	51
4.4.1. Planta de primer orden	51
4.4.2. Planta de segundo orden	53
4.4.3. Planta de tercer orden	60
5. RESULTADOS EXPERIMENTALES	71
5.1. QUBE-Servo	71
5.1.1. Diseño del controlador en tiempo continuo	74
5.1.2. Implementación en Simulink	74
5.1.3. Resultados experimentales	74
5.1.4. Diseño del controlador en tiempo discreto	77
5.1.5. Resultados experimentales	78
5.2. Levitador magnético	80
5.2.1. Diseño del controlador continuo	82
5.2.2. Implementación en Simulink	83
5.2.3. Resultados experimentales	83
5.2.4. Diseño del controlador en tiempo discreto	86
5.2.5. Resultados experimentales	88
6. CONCLUSIONES	90
6.1. Trabajo a futuro	92
BIBLIOGRAFÍA	93

Índice de figuras

2.1. Value Set para familia de polinomios (9) considerando $\omega = 1$ y $\alpha = 2,42$	12
2.2. Value Set (en negro) y envoltura convexa (en azul) para la familia de polinomios (9) considerando $\omega = 1$ y $\alpha = 2,42$	13
3.1. Disposición de los polos y ceros de la planta dentro de un círculo de radio M en el plano complejo	17
3.2. Diagrama de Bode del sistema (3.3) en azul y de un doble integrador (3.4) en naranja	18
3.3. Diagrama de Bode del modelo verdadero de la planta (3.3) en azul y del modelo nominal (3.7) en naranja	19
3.4. Arquitectura de control de 1 grado de libertad	19
3.5. Polos de lazo cerrado para distintos valores de α	21
3.6. Respuesta escalón de las funciones de sensibilidad complementaria $T(s)$	24
3.7. Value Set para el polinomio (3.41) con $\alpha = 1$	26
3.8. Value Set para el polinomio (3.41) para distintos valores de α	28
3.9. Value Set para el polinomio (3.57) para un $\alpha = 4$ y $\omega = 2$	29
3.10. Value Set para el polinomio (3.57) con $\alpha = 5,5885$	30
3.11. Value Set para el polinomio (3.67) con $\alpha = 12,2644$	31
3.12. Polo dominante del A_{cl} vs β_1	33
3.13. Polo dominante del A_{cl} vs β_1	35
3.14. Value Set para la plata (3.76) con el controlador con integración (3.77) y un $\alpha = 1,1421$	36
3.15. Polo dominante del A_{cl} vs β_1	37
3.16. Polo dominante del A_{cl} vs β_1	39
3.17. Value Set para el polinomio (3.101) con $\alpha = 1,34$	40
3.18. Funciones de sensibilidad para un ancho de banda de lazo cerrado nominal igual a $\alpha = 5$	44
3.19. Funciones de sensibilidad para un ancho de banda de lazo cerrado nominal igual a $\alpha = 50$	45
4.1. Value Set para $\alpha = 1,1$	53
4.2. Magnitud del polo dominante de lazo cerrado nominal para modelo $G_0^1(z)$ en azul y $G_0^2(z)$ en rojo	57
4.3. Mapa de las raíces del polinomio de lazo cerrado nominal utilizando $G_0^1(z)$ en azul y $G_0^2(z)$ en rojo	57

4.4. Value Set para $\alpha = 7$	59
4.5. Value Set para el polinomio de lazo cerrado (4.84) considerando un ancho de banda nominal $\alpha = 2,44$	61
4.6. Magnitud del polo dominante de lazo cerrado para el controlador $C_1(z)$ en azul y para el controlador $C_2(z)$ en rojo. Ambos con un período de muestreo $\Delta = 1/10$	67
4.7. Magnitud del polo dominante de lazo cerrado para el controlador $C_1(z)$ en azul y para el controlador $C_2(z)$ en rojo. Ambos con un período de muestreo $\Delta = 1/20$	67
4.8. Value Set para la planta (4.159) con un ancho de banda nominal $\alpha = 10$.	68
4.9. Value Set para la planta (4.159) con un ancho de banda nominal $\alpha = 5,71$	70
5.1. Servo motor QUBE-Servo	72
5.2. Diagrama electrónico-mecánico del servomotor	72
5.3. Diagrama de bloques del lazo de control del motor en tiempo continuo . .	74
5.4. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 1$	75
5.5. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 7$	75
5.6. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 16,94$	76
5.7. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 70$	76
5.8. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 300$	77
5.9. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 1$ con controladores de tiempo discreto	78
5.10. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 16,94$ con controladores de tiempo discreto	79
5.11. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 35$ con controladores de tiempo discreto	79
5.12. Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 70$ con controlador de tiempo discreto	80
5.13. Levitador magnético	80
5.14. Diagrama eléctrico del levitador	81
5.15. Diagrama de bloques del levitador	84
5.16. Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 50$	84
5.17. Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 100$	85
5.18. Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 150$	86
5.19. Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 300$	86
5.20. Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 50$	88
5.21. Salida y actuación con $\alpha = 100$	88
5.22. Salida y actuación con $\alpha = 150$	89
5.23. Salida y actuación con $\alpha = 300$	89

Índice de tablas

5.1. Parámetros del servomotor entregados por el fabricante	73
6.1. Cota ínfima k para estabilidad robusta del lazo cerrado para plantas de tiempo continuo sin ceros.	91

INTRODUCCIÓN

Por lo general, cuando se analiza un sistema dinámico, se aborda a través de un modelo, lo que lleva consigo la inevitable presencia de errores de modelado. Este modelo se puede obtener a partir de leyes físicas que simplifican el fenómeno que describen, de datos experimentales, utilizando herramientas de inferencia estadísticas o una combinación de ambos enfoques [1]. Además, con el avance de la tecnología el poder de procesamiento ha aumentado y las tasas de muestreo son más rápidas, por lo que es de interés estudiar el comportamiento de los sistemas a alta frecuencia y también diseñar controladores que contemplen estas condiciones.

El modelado de sistemas se suele hacer en baja frecuencia, ya que en la medida que se cuenta con la respuesta a escalón de una planta, es fácil aproximar los datos a un modelo de primer orden con tiempo muerto (FOPDT) [2] con lo que se puede diseñar un típico controlador PID [3]. Incluso se pueden utilizar modelos de segundo orden si es que el sistema presenta un comportamiento oscilatorio amortiguado. En ambos casos se necesita realizar un experimento y obtener la respuesta a escalón del sistema o proceso.

Ahora bien, si se considera operar en alta frecuencia, está la propuesta de utilizar un modelo de alta frecuencia [4], modelo que sintetiza la dinámica del sistema en base al grado relativo y la ganancia de alta frecuencia del modelo de la planta. Al utilizar el modelo de alta frecuencia el error de modelado se encontrará en baja frecuencia por lo que se debe diseñar un controlador que opere en alta frecuencia.

En el presente trabajo se considerará el estudio de casos de control discreto donde se utilizan modelos muestreados de la planta. Dichos modelos muestreados incorporan dinámicas propias del proceso de muestreo que se conocen como ceros de muestreo o Sampling Zeros [5] y ya que se propone utilizar un modelo nominal de alta frecuencia junto con un alto ancho de banda nominal de lazo cerrado, es que estas dinámicas incorporadas se vuelven convenientes de incluir al momento de diseñar el controlador.

Tanto para el caso de tiempo continuo como para el caso de tiempo discreto, se trabajará con un modelo de alta frecuencia, donde los errores de modelado se pueden considerar como incertidumbres en el modelo de la planta, pasando del estudio de una planta al de una familia de polinomios con incertidumbre, cuyo objetivo ahora es la estabilidad robusta. Al trabajar en estabilidad robusta una posibilidad es aplicar el teorema de Kharitonov, el cual asegura la

estabilidad de una familia de polinomios al estudiar solo cuatro polinomios característicos de esta familia. Sin embargo, el teorema requiere independencia en los coeficientes de la familia de polinomios. En los últimos años se ha buscado generalizar el teorema de Kharitonov a polinomios con determinadas dependencias en sus coeficientes [6], [7], [8] pero no existe aun una generalización del teorema para dependencias arbitrarias de dichos coeficientes.

En [9] y [10] se estudia a fondo el control robusto desde un enfoque de polinomios con incertidumbre, entregando herramientas de análisis y de diseño que se utilizarán para dar solución al problema de esta Tesis.

1.1. Definición de problema

Las plantas que se consideran son sistemas lineales e invariantes en el tiempo, cuya función de transferencia tiene la estructura mostrada en (1.1).

$$G_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b \prod_{j=1}^m (s - \beta_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)} \quad (1.1)$$

donde la posición de cada polo $\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}$ y cero $\{\beta_j\} \in \mathbb{R}$ son desconocidos y la ganancia b se le denominará ganancia de alta frecuencia.

El sistema continuo puede aproximarse por su modelo de alta frecuencia el cual queda descrito por dos parámetros: el grado relativo y la ganancia de alta frecuencia.

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} = \frac{b}{s^{m-n}} = \frac{b}{s^r} \quad (1.2)$$

El modelo de alta frecuencia (1.2) será considerado como el modelo nominal de la planta, mientras que el modelo (1.1) original será considerado como el modelo verdadero.

Para el diseño del sistema de control, se plantea un controlador bipropio y una estructura de lazo cerrado de un grado de libertad. El controlador queda de grado $2r-1$ que corresponde al mínimo grado con el que se puede hacer asignación de polos.

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_0 s^{r-1} + p_1 s^{r-2} + \dots + p_{r-1}}{s^{r-1} + l_1 s^{r-2} + \dots + l_{r-1}} \quad (1.3)$$

Se escogen los parámetros del controlador utilizando asignación de polos, donde se resuelve la ecuación Diofantina correspondiente [11], y se obtiene el polinomio de lazo cerrado nominal:

$$\begin{aligned} A_{cl0}(s) &= A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) \\ &= (s + \alpha)^{2r-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde el parámetro de diseño α , corresponde al ancho de banda del lazo cerrado nominal.

Los parámetros $\{p_i, l_i\}$ del controlador (1.3) quedan determinados por α y se pueden calcular a partir de (1.4) obteniendo:

$$\begin{aligned} l_i &= \binom{2r-1}{i} \alpha^i & i &= \{1, \dots, r-1\} \\ p_i &= \binom{2r-1}{r+i} \frac{\alpha^{r+i}}{b_n} & i &= \{0, \dots, r-1\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se aplica el controlador a la planta continua con incertidumbre obteniéndose el polinomio de lazo cerrado "verdadero":

$$\begin{aligned}
 A_{cl}(s) &= A(s)L(s) + B(s)P(s) \\
 &= \left[\prod_{i=1}^m (s - \alpha_i) \right] (s^{r-1} + l_1 s^{r-2} + \dots + l_{r-1}) + \\
 & \quad b_n \left[\prod_{j=1}^n (s - \beta_j) \right] (p_0 s^{r-1} + p_1 s^{r-2} + \dots + p_{r-1})
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

El polinomio (1.6) corresponde a una familia de polinomios con incertidumbre y se busca garantizar su estabilidad para un rango de valores $\{\alpha_i, \beta_j\}$. El problema a resolver consiste en determinar condiciones o un rango de valores para el parámetro de diseño α de forma que el controlador asociado establezca todas las plantas dentro de la familia de polinomios.

La problemática se aborda desde el control robusto, el cual cuenta con herramientas analíticas y gráficas, como, por ejemplo, el Value Set [9] y [10], que corresponde a un mapeo en el plano complejo del polinomio con incertidumbre evaluándolo en las frecuencias no negativas, $s = j\omega$ con $\omega = [0, \infty[$. Esta herramienta se utiliza junto con el Teorema de Exclusión del Cero [9], el cual asegura la estabilidad de una familia de polinomios siempre que el origen del plano complejo esté excluido del mapeo generado por el polinomio.

Una línea de trabajo complementaria es analizar el comportamiento del lazo cerrado cuando el diseño del controlador se hace en tiempo discreto. La ventaja del modelo nominal propuesto (1.2) es que puede obtenerse de manera simple su modelo discreto exacto:

$$G_0(z) = \frac{\Delta^r}{r!} \frac{B_r(z)}{(z-1)^r} \tag{1.7}$$

en que $B_r(z)$ determina los ceros de muestreo [5]:

$$B_r(z) = b_1^r z^{r-1} + b_2^r z^{r-2} + \dots + b_r^r \tag{1.8}$$

$$b_k^r = \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} l^r \binom{r+1}{k-l} \tag{1.9}$$

Los ceros de muestreo son asintóticos para una planta arbitraria, pero como se ve en (1.7) para este caso en particular los ceros aparecen de forma explícita y corresponden a los polinomios de Euler–Frobenius, (ver demostración en [5]). Estos ceros, si no son considerados, pueden afectar la estabilidad del lazo, por lo que es conveniente tenerlos en cuenta al momento de realizar el diseño del controlador en tiempo discreto.

1.2. Estado del Arte

Respecto al diseño de un control estabilizante basado en modelos de alta frecuencia, un primer trabajo se realizó en [4] donde se acotó la ubicación de los polos a una región conocida del plano complejo. En dicho artículo se aplica el Teorema de Ostrowski [12], el cual se muestra como Teorema 1, para establecer una cota mínima sobre el ancho de banda nominal del lazo cerrado. Este enfoque fue el de análisis de polinomios complejos, donde el teorema utilizado entrega información de la máxima distancia entre las raíces de dos

polinomios, lo que permite diseñar el ancho de banda nominal de tal forma que los polos de lazo cerrado verdadero no se distancien de los polos de lazo cerrado nominales más que un valor determinado, y de esta forma todos queden en el semiplano izquierdo del plano complejo. Se encontraron condiciones suficientes para la estabilidad del lazo cerrado para una planta, como se muestra en (1.10), de segundo orden, sin ceros y cuyos polos están acotados en magnitud por una constante M tal que $|\alpha_{1,2}| < M$. Se utilizó un controlador bipropio dado por (1.11) donde el parámetro de diseño α corresponde al ancho de banda de lazo cerrado nominal. El resultado que se obtuvo fue que el controlador estabiliza la planta si se escoge un α mayor que, aproximadamente, 3000 veces la magnitud del polo más rápido de la planta (1.10).

$$G(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (1.10)$$

$$C(s) = \frac{3\alpha^2 s + \alpha^3}{s + 3\alpha} \quad (1.11)$$

Teorema 1 (Teorema de Ostrowski). *Sean dos polinomios dados por (1.12) y (1.13) con $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$. Las n raíces de $f(s)$ vienen dadas por $\theta_1^f, \dots, \theta_n^f$ y las raíces de $G(s)$ son $\theta_1^g, \dots, \theta_n^g$.*

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (s - \theta_i^f) \quad (1.12)$$

$$g(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n = \prod_{i=1}^n (s - \theta_i^g) \quad (1.13)$$

Entonces se pueden ordenar las raíces de cada polinomio de forma que se cumple la siguiente inecuación:

$$\max_i |\theta_i^f - \theta_i^g| \leq (2n - 1) \left\{ \sum_{i=1}^n |a_k - b_k| T^{n-k} \right\}^{1/n}, \quad (1.14)$$

$$T = 2 \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k|^{1/k}, |b_k|^{1/k}) \quad (1.15)$$

Demostración. Ver demostración en [12] □

En el mismo artículo [4], se aplicó el teorema de Ostrowski en el diseño de un controlador discreto y se establecieron condiciones suficientes de estabilidad para una planta discreta de segundo orden, obteniendo nuevamente una cota conservadora, del orden de 9000 veces la relación entre el ancho de banda del lazo nominal con el mayor polo de la planta.

Las demostraciones en [4] son para plantas de hasta segundo orden, mientras que en esta propuesta se plantea abordar el problema como uno de control robusto en el que se podrá establecer una ley de control para sistemas de orden 2 y superiores, considerando de igual forma el diseño en tiempo discreto y obteniendo condiciones para el ancho de banda nominal menos conservadoras.

En el área de control robusto se ha utilizado el teorema de Kharitonov, el cual toma gran relevancia ya que establece condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de una

familia de polinomios con incertidumbre solo al evaluar cuatro polinomios característicos. El desafío que tiene este teorema es que supone independencia en los coeficientes de la familia de polinomios. Diversos investigadores han intentado generalizar este teorema: en [6] trabajan sobre una familia de polinomios cuyos polos se restringen a un área sectorial del plano complejo y mediante división de polinomios logran establecer condiciones la estabilidad de la familia de polinomios. En [7] se trabajan familias de polinomios cuyos coeficientes se relacionan multilínealmente entre sí, testeando estabilidad robusta con ciertos polinomios característicos propios de los valores extremos de los parámetros inciertos.

El teorema de Kharitonov y los trabajos que buscan generalizarlo, fija un número finito de polinomios a estudiar, por lo que se suele proceder a evaluar estabilidad mediante el algoritmo de Routh. En esta área de investigación se busca desarrollar condiciones suficientes sobre un polinomio para lograr la estabilidad robusta, como se ve en [13].

1.3. Publicaciones asociadas

Parte del trabajo presentado en esta Tesis fue publicado en el artículo [14]:

- E. A. Elgueta and J. I. Yuz, “Robust control of continuous-time systems with pole uncertainties,” in 2022 IEEE International Conference on Automation/XXV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA), 2022.

1.4. Estructura del documento

Este documento se divide en 5 Capítulos:

Capítulo 1 Una introducción al problema de estudio. Presentando la hipótesis, el estado del arte y la publicación asociada.

Capítulo 2 Se revisan las herramientas y métodos relevantes de control robusto.

Capítulo 3 Se diseña el controlador y se analiza la estabilidad robusta del lazo cerrado resultante para plantas de tiempo continuo.

Capítulo 4 Se diseña el controlador y se analiza la estabilidad robusta del lazo cerrado resultante para plantas de tiempo discreto.

Capítulo 5 Se implementa la ley de control propuesta en esta Tesis a dos sistemas físicos: un servomotor y un levitador magnético, mostrando los datos experimentales obtenidos.

Capítulo 6 Se presentan las conclusiones, aportes y una descripción o aproximación del trabajo a futuro.

CONTROL ROBUSTO

EL control robusto es una rama de control automático en la que se busca diseñar un controlador que establezca una planta la cual posee incertidumbre en su modelo. El objetivo es diseñar un controlador que mantenga la estabilidad del lazo cerrado incluso cuando la planta verdadera difiera del modelo nominal que se utilizó en el diseño del controlador. Dicha diferencia entre el modelo nominal y el modelo verdadero o de calibración no puede ser arbitrariamente grande, por lo que la incertidumbre tiene a su vez un modelo y debe estar acotado de alguna manera.

A modo de ejemplo; sea una planta como se muestra en (2.1). Dicha planta posee dos polos ubicados en $s = \alpha_1$ y $s = \alpha_2$, y si se considera que ambos polos no están fijos, sino que yacen dentro de una región del espacio de parámetros, entonces la planta es un sistema con incertidumbre.

$$G_c(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_2} \quad (2.1)$$

Las incertidumbres van a ser las componentes de un vector de incertidumbre q el cual debe estar contenido en un conjunto límite Q . Se tienen dos opciones para fijar los parámetros inciertos de la planta anterior: la primera y más natural sería que cada coeficiente del polinomio de segundo grado del denominador sea un parámetro ($q = [a_1, a_2]$), mientras que la segunda opción es que sean la posición de los polos ($q = [\alpha_1, \alpha_2]$). La ventaja de la primera opción es que el denominador de la función de transferencia queda con coeficientes que dependen linealmente de q pero estos no tienen una cota clara que los limite. Habría una cota si la función de transferencia se hubiese obtenido de ecuaciones físicas con parámetros inciertos, como lo son: masa, inercia, inductancia, resistencia, entre otros. Pero debido a que se está trabajando con una función de transferencia genérica, a_1 y a_2 no se pueden atribuir a ninguna constante física cuyo valor esté acotado por lo que no es conveniente fijarlos como componentes de q . Por otro lado, si se escoge la posición de los polos como las componentes de q entonces sí se puede fijar una cota para estos, por ejemplo al limitar que los polos de la planta sean menores en magnitud a una cota arbitraria M . Esta cota puede ser la magnitud del polo más rápido o un valor mayor con el cual acote la magnitud de los polos de la planta.

El conjunto Q queda determinado por los valores que puede tomar el vector de

incertidumbres q . En el capítulo 3 se asumirá que cada componente q_i de q está acotada por: $-M \leq q_i \leq M$. Por lo que el conjunto Q vendrá dado por un subconjunto de \mathbb{R}^n , donde n es la dimensión de q , el cual se denominará caja:

$$Q = \{q : q \in [-M, M] \times \dots \times [-M, M]\} \quad (2.2)$$

Con el objetivo de diseñar un controlador que asegure estabilidad robusta, se necesitan herramientas de control robusto que permitan analizar la estabilidad de polinomios con incertidumbre. A continuación se mostrarán las más usuales, discutiendo cuales se pueden utilizar para resolver la problemática de la Tesis.

2.1. Teorema de estabilidad robusta

El teorema de Nyquist es el resultado más conocido cuando se habla de este tema. Este teorema entrega condiciones suficientes bajo las cuales se asegura la estabilidad de lazo cerrado diseñando en base a un modelo nominal.

Teorema 2 (Teorema de estabilidad Robusta.). *Considere una planta $G_c(s)$ y su modelo nominal $G_0(s)$ el cual es estabilizado con un controlador $C(s)$. Se asume que $G_0(s)C(s)$ y $G_c(s)C(s)$ tienen el mismo número de polos inestables. Entonces una condición suficiente para la estabilidad de lazo cerrado viene dado por:*

$$|T_0(j\omega)||G_\Delta(j\omega)| = \left| \frac{G_0(j\omega)C(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)C(j\omega)} \right| \left| \frac{G_c(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \quad (2.3)$$

donde $T_0(j\omega)$ es la función de sensibilidad complementaria nominal y $G_\Delta(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del error de modelado multiplicativo.

Demostración. Ver [11]. □

Este teorema entrega condiciones suficientes mas no necesarias, ya que por ejemplo, no es concluyente si se utiliza para analizar el problema de estudio de esta tesis. En el Capítulo 3 se analiza la estabilidad de una planta de primer orden con un polo con incertidumbre, en base al siguiente polinomio característico:

$$A_{cl}(s, q) = s + \alpha - \alpha_1 \quad (2.4)$$

La función de sensibilidad complementaria nominal viene dada por (2.5) la cual tiene ganancia unitaria para frecuencia $\omega = 0$.

$$T_0(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (2.5)$$

El error de modelado multiplicativo (2.6) tiene ganancia -1 para $\omega = 0$ por lo que no se puede utilizar el teorema pues $|T_0 G_\Delta|_{\omega=0} = 1$ y por tanto no garantiza estabilidad robusta con el Teorema 2. Debido a esto se buscan otras herramientas de análisis de estabilidad de polinomios.

$$G_\Delta(s, q) = \frac{-\alpha_1}{s - \alpha_1} \quad (2.6)$$

2.2. Teorema de Kharitonov

El teorema de Kharitonov es una herramienta muy importante en control robusto. El teorema permite analizar la estabilidad de una familia de polinomios inciertos que estén acotados por una caja Q al evaluar solo cuatro polinomios característicos de la familia.

El Teorema fue desarrollado por Kharitonov, V.K quien demostró que una familia infinita de polinomios puede ser caracterizada por solo cuatro polinomios característicos. Por lo complejo de la demostración, por varios años no se reconoció el teorema como una herramienta útil en el análisis de estabilidad robusta. Por lo mismo varios investigadores trataron de refutarla, sin embargo, terminaron demostrando el teorema por vías alternativas. Lo anterior se menciona en [9] que a su vez destaca el trabajo de Dasgupta [15] quien expuso la geometría rectangular de un polinomio incierto $p(j\omega, Q)$ y también el trabajo de Minnichelli, Angnost y Desoer [16] quienes aprovecharon la geometría rectangular de la familia de polinomios e incorporaron el Teorema de Exclusión del Cero, que se expone en esta Tesis como el Teorema 14, para finalmente obtener una demostración más sencilla del teorema de Kharitonov.

Antes de enunciar el teorema de Kharitonov se requieren las siguientes definiciones:

Definición 3 (Familia de polinomios inciertos). *Una familia de polinomios inciertos se refiere a un conjunto o colección de polinomios en el que algunos de sus coeficientes o términos son desconocidos o variables, es decir, están sujetos a incertidumbre. En lugar de tener coeficientes fijos, estos coeficientes pueden tomar valores dentro de ciertos rangos.*

Definición 4 (Incertidumbres independientes). *Una familia de polinomios se dice tener incertidumbres independientes si cada coeficiente del polinomio tiene solo un componente q_i de q y este no se repite en otro coeficiente.*

Definición 5 (Familia de polinomios interval). *Una familia de polinomios se dice interval si tiene incertidumbres independientes, cada coeficiente varía continuamente con respecto a q y el conjunto límite Q es una caja.*

Se agrega el argumento q a la familia de polinomios para explicitar que tiene parámetros inciertos. Por tanto, una familia de polinomios interval se puede expresar como:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n q_i s^i \quad (2.7)$$

La familia de polinomios interval puede reescribirse en función de los valores máximos y mínimos de cada componente de q , siendo estos $q_i^{min} \leq q_i \leq q_i^{max}$.

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^{min}, q_i^{max}] s^i \quad (2.8)$$

Definición 6 (Polinomios de Kharitonov). *Los cuatro polinomios de Kharitonov se obtienen al maximizar y minimizar cada coeficiente de una familia de polinomios con incertidumbres independientes, de forma intercalada como se muestra a continuación:*

$$K_1(s) = q_0^{\min} + q_1^{\min} s + q_2^{\max} s^2 + q_3^{\max} s^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$K_2(s) = q_0^{\max} + q_1^{\max} s + q_2^{\min} s^2 + q_3^{\min} s^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$K_3(s) = q_0^{\max} + q_1^{\min} s + q_2^{\min} s^2 + q_3^{\max} s^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$K_4(s) = q_0^{\min} + q_1^{\max} s + q_2^{\max} s^2 + q_3^{\min} s^3 + \dots \quad (2.12)$$

Con las definiciones anteriores se puede enunciar el teorema de Kharitonov

Teorema 7 (Teorema de Kharitonov). *Una familia de polinomios interval \mathcal{P} de grado invariante es robustamente estable si y solo si los cuatro polinomios de Kharitonov son estables.*

Demostración. Ver [8] □

Para terminar el análisis de estabilidad de los cuatro polinomios de Kharitonov, se puede utilizar cualquier test de estabilidad como, por ejemplo, el algoritmo de Routh. El impacto que tiene este teorema es que cualquier polinomio sin importar su grado, puede ser analizado con solo 4 polinomios. Además, los cuatro polinomios de Kharitonov se obtienen fácilmente al evaluar el vector de incertidumbre q en los valores extremos de cada componente, que corresponden a los vértices de la caja Q .

Por ejemplo, se analiza una planta de primer orden cuya posición del polo sea un parámetro incierto $q = [\alpha_1]$, acotado por un valor M propio de la caja $Q = [-M, M]$.

$$G_c(s) = \frac{b}{s - \alpha_1} \quad (2.13)$$

Hay que obtener el polinomio de lazo cerrado, para lo cual se necesita definir un controlador. En el capítulo 3 se mostrará el diseño del controlador para este tipo de planta, por lo que ahora se mostrará el polinomio de lazo cerrado al que se va a llegar donde α es un parámetro de diseño. El polinomio de lazo cerrado se muestra a continuación:

$$A_{cl}(s, q) = s - \alpha_1 + \alpha \quad (2.14)$$

Se tiene que la familia de polinomios es de grado invariante y se cuenta solo con una incertidumbre por lo que es independiente. Por tanto se satisfacen las condiciones del Teorema de Kharitonov y se puede utilizar el teorema. Al ser un polinomio de primer orden, se tiene que dos de los cuatro polinomios se repiten.

$$K_1(s) = s + \alpha - M \quad (2.15)$$

$$K_2(s) = s + \alpha + M \quad (2.16)$$

$$K_3(s) = K_2(s) \quad (2.17)$$

$$K_4(s) = K_1(s) \quad (2.18)$$

Se concluye que para que la familia de polinomios sea estable se necesita que el parámetro de diseño α sea mayor que la cota M . Si se define la cota M como la magnitud del polo más rápido, entonces se obtiene una relación entre α y M . De forma que la razón entre ambos parámetros debe ser al menos 1 para que la familia sea robustamente estable.

Es importante observar que una limitación del Teorema de Kharitonov es que requiere que los coeficientes de la familia de polinomios tengan incertidumbres independientes con

respecto al vector de incertidumbre. Debido a lo anterior, el tipo de problemas que se puede resolver con el Teorema de Kharitonov queda limitado a la estructura que tenga la familia de polinomios a analizar. Y generalmente se utiliza cuando el modelo de la planta proviene de ecuaciones diferenciales lineales.

Para efectos de esta Tesis no sirve el Teorema de Kharitonov para plantas de orden dos o superior, ya que los polinomios de lazo cerrado que se obtendrán para estos casos no cumplen con la condición de incertidumbres independientes en sus coeficientes. Es por esto que en la siguiente sección se muestra la herramienta que se utilizará a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

2.3. Value Set

Una tercera posibilidad para analizar la estabilidad robusta de polinomios es el Value Set, herramienta gráfica en la que se evalúa una familia de polinomios incierta para una frecuencia dada y en todo el rango que pueden tomar sus parámetros con incertidumbres. Luego se puede utilizar en conjunto al Teorema 12 (Teorema del Mapeo) y el Teorema 14 (Teorema Exclusión del Cero) para determinar si la familia es robustamente estable o no. La definición del Value Set se muestra a continuación:

Definición 8 (Value Set). *Dada una familia de polinomios incierta $p(s, q)$, un conjunto límite Q y una frecuencia dada $\omega \geq 0$. El Value Set $p(j\omega, Q)$ corresponde a un subconjunto del plano complejo, el cual se compone de todos los valores de $p(s, q)$ al variar el vector de incertidumbres q sobre Q .*

$$p(j\omega, Q) = \{p(j\omega, q) : q \in Q\} \quad (2.19)$$

Con el fin de esclarecer como se utiliza esta herramienta, se muestra un ejemplo a continuación para una planta de segundo orden.

Ejemplo 9. *Considere el sistema de segundo orden dado por:*

$$G_c(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (2.20)$$

Al igual como se mencionó en la Sección 2.2 del Teorema de Kharitonov, la elección y diseño del controlador se especificará en el Capítulo 3. Por ahora se muestra directamente el polinomio de lazo cerrado (2.21), el que depende de dos parámetros inciertos $q = [\alpha_1, \alpha_2]$ y del parámetro de diseño α :

$$A_{cl}(s, q) = s^3 + s^2(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) + s(3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2) + \alpha^3 + 3\alpha\alpha_1\alpha_2 \quad (2.21)$$

En la Figura 2.1 se grafica el Value Set, al fijar la frecuencia en $\omega = 1$, el parámetro de diseño $\alpha = 2,42$ y variando el vector de incertidumbre q sobre $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Se puede observar como el Value Set es una región no convexa del plano complejo. Sin embargo, pareciera que la región esta contenida por la envoltura convexa conformada por sus vértices, lo cual se corrobora con el Teorema del Mapeo pero antes se necesita de algunas definiciones.

Definición 10 (Estructura multilineal). *Una estructura multilineal se da si cada coeficiente $a_i(q)$ de una familia de polinomios incierta se puede escribir como una función afín en términos de las componentes q_i del vector de incertidumbres q , es decir, al fijar una de sus*

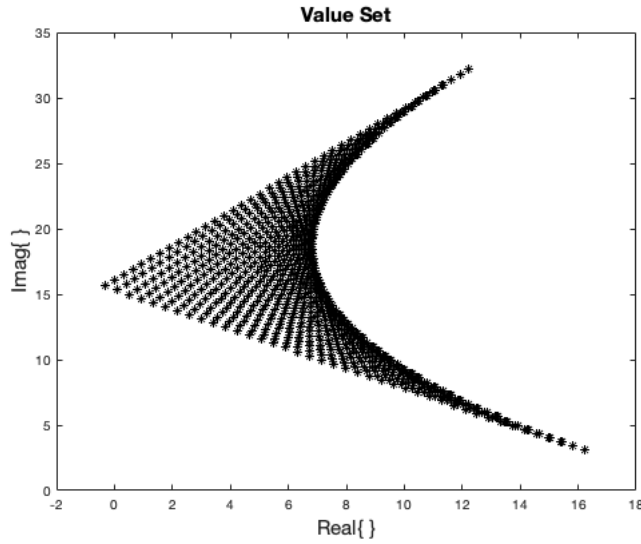


Figura 2.1: Value Set para familia de polinomios (9) considerando $\omega = 1$ y $\alpha = 2,42$

incertidumbre q_i y dejar libre el resto de componentes de q se puede reescribir el coeficiente como se muestra a continuación:

$$a_i(q) = q_1 f_1(q_2, \dots, q_l) + f_2(q_2, \dots, q_l) \quad (2.22)$$

Por ejemplo, en el polinomio (2.21) el tercer coeficiente no es lineal debido al término $\alpha_1 \alpha_2$ pero si se fija α_1 se obtiene:

$$3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1(\alpha_2 - 3\alpha) + 3\alpha_2 - 3\alpha\alpha_2 \quad (2.23)$$

Por tanto, el coeficiente se puede reescribir como una función afín de q_1 . De la misma forma si se fija α_2 en el coeficiente se obtiene:

$$3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1 - 3\alpha) + 3\alpha_1 - 3\alpha\alpha_1 \quad (2.24)$$

Por tanto, el tercer coeficiente del polinomio (2.21) se puede reescribir como una función afín de q_2 . Con lo anterior se puede afirmar que el coeficiente tiene una estructura multilineal con respecto al vector de incertidumbres q .

Definición 11. (*Envoltura convexa*) Dado un conjunto $C \in \mathbb{R}^k$ (no necesariamente es convexo), su envoltura convexa $\text{conv}C$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a C . Si C^+ es la colección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto C , entonces:

$$\text{conv}C = \bigcap C^+ \quad (2.25)$$

Teorema 12 (Teorema del Mapeo). Sea $Q \subset \mathbb{R}^l$ una caja con 2^l puntos extremos $\{q^i\}$ y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ es multilineal. Con

$$f(Q) = \{f(q) : q \in Q\}$$

el rango de f . Entonces se tiene que:

$$\text{conv}f(Q) = \text{conv}\{f(q^i)\}$$

Demostración. Ver [9] □

El teorema del Mapeo muestra que el Value Set está contenido por la envoltura convexa determinada por la imagen de f evaluada en los puntos extremos del conjunto límite, si es que el polinomio tiene coeficientes con estructura multilineal.

Lo anterior ocurre con todos los coeficientes del polinomio $A_{cl}(s, q)$ por lo que se puede aplicar el teorema del Mapeo y por tanto, el Value Set es un subconjunto de la envoltura convexa determinada por el mapeo $A_{cl}(s, q)$ de los vértices de Q . Esto se puede observar en la Figura 2.2 en la que el Value Set (en negro) queda contenido por la envoltura convexa (en azul), para el caso de la familia de polinomios (2.21) del ejemplo 9.

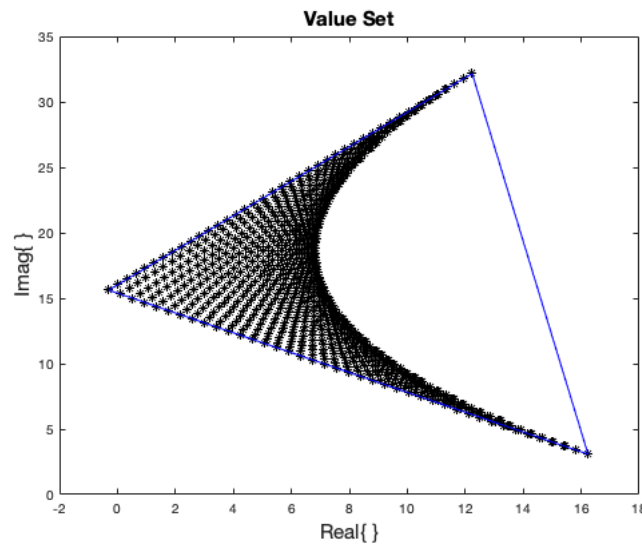


Figura 2.2: Value Set (en negro) y envoltura convexa (en azul) para la familia de polinomios (9) considerando $\omega = 1$ y $\alpha = 2,42$

Finalmente se puede exponer el Teorema de Exclusión del Cero, el que permite analizar la estabilidad robusta de un polinomio al inspeccionar si el Value Set contiene o no el origen del plano complejo.

Definición 13. (Conjunto conexo) Un conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ es conexo si para dos elementos cualquiera $x^0, x^1 \in X$ hay una función continua $\Phi : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\Phi(0) = x^0$ y $\Phi(1) = x^1$.

Teorema 14 (Teorema de Exclusión del Cero). Sea una familia de polinomios de grado invariante, con un conjunto límite Q conexo, con coeficientes que dependen continuamente del vector de incertidumbre $a_i(q)$ y al menos un miembro de la familia estable $p(s, q^0)$. Entonces la familia de polinomios es robustamente estable si y solo si el origen del plano complejo $z = 0$ no está contenido en el Value Set $p(j\omega, Q)$ para toda frecuencia $\omega \geq 0$, es decir, la familia de polinomios es robustamente estable si y solo si

$$0 \notin p(j\omega, Q) \quad (2.26)$$

para toda frecuencia $\omega \geq 0$.

Demostración. Ver [9] □

El Teorema de Exclusión del cero se basa en el movimiento continuo de los polos de lazo cerrado al variar continuamente los coeficientes del polinomio característico. Al evaluar para las frecuencias $\omega \geq 0$ se está evaluando el polinomio en el eje imaginario y si no hay frecuencia en la que el polinomio se haga cero, significa que el polinomio no tiene un polo de la forma $(s + j\omega)$. Como existe al menos un miembro de la familia que tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo del plano complejo y los polos de lazo cerrado varían continuamente al variar q , se tiene que todos los miembros de la familia deben ser estables ya que no hay ningún cruce por el eje imaginario.

Ahora bien, si se trabaja con un problema en el que la familia de polinomios satisface las condiciones del Teorema de Exclusión del Cero entonces lo que se debe hacer para lograr la estabilidad robusta es que el Value Set para toda frecuencia $\omega \geq 0$ no contenga al origen del plano complejo. Como los coeficientes tienen una estructura multilineal se tiene que el Value Set es un subconjunto de la envoltura convexa de los puntos extremos q^i de la caja Q . Por tanto, si la envoltura convexa no contiene al origen tampoco el Value Set y por tanto la familia de polinomios es robustamente estable.

Continuando con el ejemplo 9, los puntos extremos de la caja Q del polinomio característico (2.21) son:

$$q^1 = [-1, -1] \quad (2.27)$$

$$q^2 = [1, 1] \quad (2.28)$$

$$q^3 = [-1, 1] \quad (2.29)$$

$$q^4 = [1, -1] \quad (2.30)$$

En base al Teorema del Mapeo, basta estudiar el polinomio evaluado en los puntos extremos q^i , de forma que se generan ramas en el plano complejo que son funciones de la frecuencia ω y del parámetro de diseño α . Se busca el par $(\omega, \alpha) = (\omega_0, \alpha_{critico})$ que haga que el Value Set contenga al origen en su frontera y de esta forma se obtiene el α ínfimo que hace al polinomio robustamente estable. La envoltura convexa tiene cuatro vértices pero debido a la simetría del modelo de la planta dos de estos vértices se mapean al mismo polinomio, como se ve en (2.33) y (2.34).

$$p(j\omega, q^1) = (j\omega)^3 + (j\omega)^2(3\alpha + 2) + (j\omega)(3\alpha^2 + 6\alpha + 1) + \alpha^3 + 3\alpha \quad (2.31)$$

$$p(j\omega, q^2) = (j\omega)^3 + (j\omega)^2(3\alpha - 2) + (j\omega)(3\alpha^2 - 6\alpha + 1) + \alpha^3 + 3\alpha \quad (2.32)$$

$$p(j\omega, q^3) = (j\omega)^3 + (j\omega)^2(3\alpha) + (j\omega)(3\alpha^2 - 1) + \alpha^3 - 3\alpha \quad (2.33)$$

$$p(j\omega, q^4) = (j\omega)^3 + (j\omega)^2(3\alpha) + (j\omega)(3\alpha^2 - 1) + \alpha^3 - 3\alpha \quad (2.34)$$

El caso de estudio de una plata de tiempo continuo de segundo orden se terminará en el siguiente capítulo, donde se obtendrá que se requiere que el parámetro de diseño α sea mayor

a 2,42 veces la cota M que limita la magnitud de los polos inciertos del modelo verdadero de la planta. Es importante destacar que con esta herramienta gráfica, se puede analizar la estabilidad de un polinomio de orden arbitrario por lo que se utilizará el Value Set a lo largo de esta Tesis para determinar si una familia de polinomios es robustamente estable.

SISTEMAS CONTINUOS

Los procesos físicos son sistemas dinámicos de tiempo continuo que pueden ser modelados matemáticamente con ecuaciones diferenciales, en su representación de variables de estado o en una función de transferencia. En este capítulo se propone diseñar un control robusto de lazo cerrado para una planta arbitraria de grado relativo r , utilizando un modelo nominal de alta frecuencia. Se realizará un estudio de casos para plantas de bajo orden.

3.1. Modelo de la planta

Con el objetivo de analizar un sistema continuo genérico, se trabaja con funciones de transferencia de polos y ceros inciertos. De esta forma se considera un modelo de la planta cuya posición de polos y ceros son desconocidos mas su magnitud está acotada. En (3.1) la planta queda descrita por tres tipos de parámetros: se cuenta con m ceros dados por $\{\beta_j\}$, n polos dados por $\{\alpha_i\}$ y la ganancia b que deja el numerador como un polinomio mónico.

$$G_c(s) = \frac{b \prod_{j=1}^m (s - \beta_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)} \quad (3.1)$$

Para el análisis a desarrollar en esta Tesis, se considera que los parámetros inciertos del modelo de la planta no pueden ser arbitrariamente grandes, es decir, se considera que tanto los polos como los ceros, se encuentran dentro de una región acotada del plano complejo. Específicamente, se hará el supuesto que se encuentran dentro de un círculo de radio M centrado en el origen del plano complejo. Lo anterior se puede ver reflejado en la Figura 3.1 donde los polos (x) y ceros (o) pueden estar en cualquier punto interior del círculo de radio M , cuyo valor puede ser una estimación del polo o cero de mayor magnitud.

3.2. Modelo nominal

Una vez que ya se cuenta con la función de transferencia que describe un sistema continuo genérico, queda decidir un modelo nominal en base al cual se realiza el diseño del controlador. El modelo (3.1) de la planta se considera como el modelo verdadero que describe el comportamiento del sistema, mientras que el modelo nominal es una simplificación que conserva las características fundamentales bajo algún criterio.

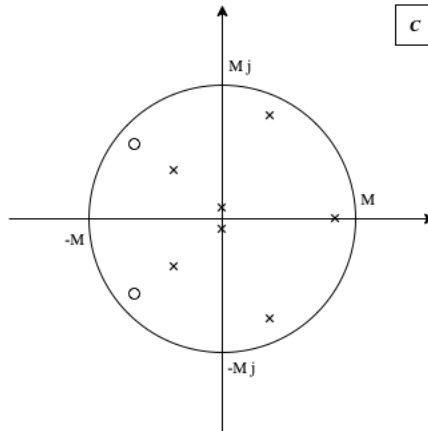


Figura 3.1: Disposición de los polos y ceros de la planta dentro de un círculo de radio M en el plano complejo

En este trabajo se considerará un modelo de alta frecuencia de la planta, el cual consiste en un integrador múltiple que queda descrito por dos parámetros: su ganancia en alta frecuencia b y su grado relativo r . De esta forma, el modelo nominal de la planta queda con la siguiente estructura:

$$G_0(s) = \frac{b}{s^r} \quad (3.2)$$

Primero se tiene que el grado relativo r corresponde a la diferencia entre el número de polos y el número de ceros del modelo de la planta. El grado relativo determinará el orden del integrador y al hacer un diagrama de Bode, determina la pendiente de la asíntota de magnitud en alta frecuencia, siendo la inclinación de $20r[dB]$ por década.

Sea una planta de ejemplo dada por (3.3), esta tiene un grado relativo $r = 2$ por lo que su modelo nominal corresponde a un integrador doble. Para ilustrar la importancia de la ganancia b , en la Figura 3.2 se puede observar el diagrama de Bode del sistema (3.3) en azul y el de un integrador doble (3.4) en naranja, donde la inclinación de $40[dB]$ por década es igual en ambos casos. En la misma figura, se aprecia que se requiere ajustar la ganancia del modelo nominal para que coincida la magnitud con la del modelo verdadero del sistema.

$$G_c(s) = \frac{4(s+3)}{(s-2)(s+1)(s-4)} \quad (3.3)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.4)$$

La ganancia de alta frecuencia se obtiene al escribir el numerador y el denominador de la función de transferencia como polinomios mónicos, siendo la ganancia de alta frecuencia la constante que queda al realizar la factorización. De hecho, la función de transferencia en (3.1) puede reescribirse como (3.5), por tanto, para alta frecuencia el modelo nominal y el modelo verdadero son indistinguibles, lo que se ve reflejado al calcular el límite (3.6) cuando la frecuencia tiende a infinito.

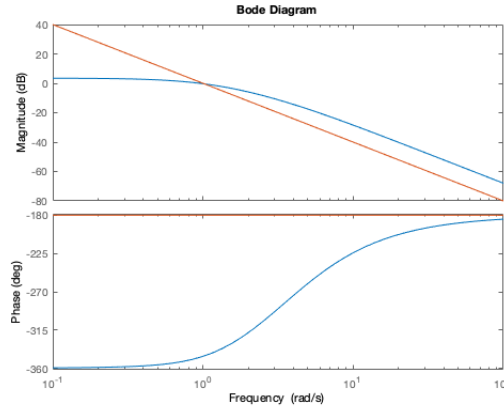


Figura 3.2: Diagrama de Bode del sistema (3.3) en azul y de un doble integrador (3.4) en naranja

$$G_c(s) = \frac{b \prod_{j=1}^m (1 - \frac{b_j}{s})}{s^r \prod_{i=1}^n (1 - \frac{\alpha_i}{s})} \quad (3.5)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| G_c(j\omega) - \frac{b}{(j\omega)^r} \right| = 0 \quad (3.6)$$

En el sistema (3.3) la ganancia de alta frecuencia es $b = 4$. Con este valor se llega a que el modelo nominal es (3.7) y se puede graficar el diagrama de Bode para verificar que el modelo nominal refleja el comportamiento de la planta en alta frecuencia (ver Figura 3.3).

$$G_0(s) = \frac{4}{s^2} \quad (3.7)$$

De esta forma, se aprecia que el modelo nominal escogido aproxima adecuadamente el modelo verdadero del sistema para alta frecuencia. Adicionalmente, este modelo nominal de la planta considera toda una clase de funciones de transferencia cuyo modelo queda descrito por solo dos parámetros la ganancia b y el grado relativo r y no por los parámetros inciertos del modelo de la planta $\{\alpha_j, \beta_i\}$.

3.3. Diseño del controlador

Una vez que se cuenta con un modelo nominal de la planta, existen varias opciones de controladores y métodos de diseño que se pueden elegir: PID, controlador bipropio, retroalimentación de estado, entre otras. En esta Tesis se trabaja con la función de transferencia y se busca estabilizar plantas de orden alto, por tanto se decide utilizar un controlador bipropio y se utiliza la arquitectura estándar de un grado de libertad para control de lazo cerrado como se ve en la Figura 3.4.

El diseño del controlador viene dado por el siguiente Lema.

Lema 15. *Sea un modelo nominal de alta frecuencia dado por (3.8). Se puede utilizar un controlador bipropio dado por (3.9) el cual queda parametrizado en función del ancho de banda de lazo cerrado nominal α y sus coeficientes se calculan de acuerdo a (3.10)-(3.11).*

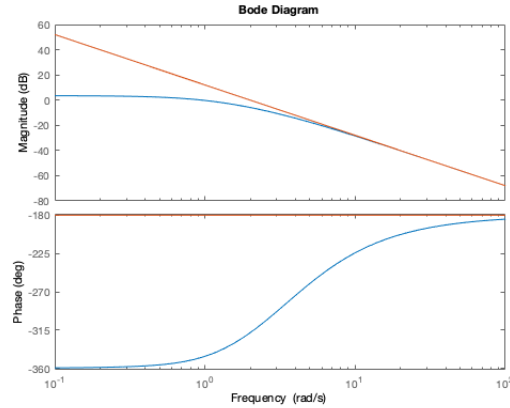


Figura 3.3: Diagrama de Bode del modelo verdadero de la planta (3.3) en azul y del modelo nominal (3.7) en naranja

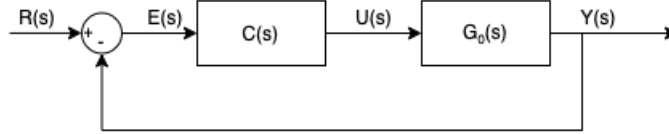


Figura 3.4: Arquitectura de control de 1 grado de libertad

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} = \frac{b}{s^r} \quad (3.8)$$

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_0 s^{r-1} + p_1 s^{r-2} + \dots + p_{r-1}}{s^{r-1} + l_1 s^{r-2} + \dots + l_{r-1}} \quad (3.9)$$

$$l_i = \binom{2r-1}{i} \alpha^i \quad i = \{1, \dots, r-1\} \quad (3.10)$$

$$p_i = \binom{2r-1}{r+i} \frac{\alpha^{r+i}}{b} \quad i = \{0, \dots, r-1\} \quad (3.11)$$

Demostración. El polinomio característico de lazo cerrado nominal que se obtiene al utilizar el controlador (3.9) junto a la planta nominal (3.8) viene dado por:

$$A_{cl0}(s) = A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) \quad (3.12)$$

$$= s^r (s^{r-1} + l_1 s^{r-2} + \dots + l_{r-1}) + b(p_0 s^{r-1} + p_1 s^{r-2} + \dots + p_{r-1}) \quad (3.13)$$

$$= s^{2r-1} + l_1 s^{2r-2} + \dots + l_{r-1} s^r + b p_0 s^{r-1} + b p_1 s^{r-2} + \dots + b p_{r-1} \quad (3.14)$$

Se propone utilizar asignación de polos por lo que el polinomio (3.14) se iguala a $(s + \alpha)^{2r-1}$. Luego se utiliza el Teorema del Binomio el cual permite obtener una expresión analítica para cada término del polinomio.

$$(s + \alpha)^{2r-1} = \sum_{k=0}^{2r-1} \binom{2r-1}{k} s^{2r-1-k} \alpha^k \quad (3.15)$$

Al hacer una igualación de polinomios entre (3.14) y (3.15) se obtiene (3.10) y (3.11), con lo que queda demostrado el lema. \square

Utilizar un controlador bipropio junto a asignación de polos permite que el lazo cerrado nominal tenga una dinámica arbitrariamente diseñada. Se fijaron los $2r - 1$ polos de lazo cerrado en $s = -\alpha$ siendo α el ancho de banda nominal de lazo cerrado y el parámetro de diseño con el cual se analizará la estabilidad del sistema.

3.4. Estabilidad del lazo verdadero

En la sección anterior se consideró un modelo de la planta, un modelo nominal y un controlador parametrizado en términos de la variable de diseño α . En esta sección se analizará la estabilidad del lazo cerrado verdadero, la cual se obtiene al implementar el controlador diseñado para el modelo nominal al modelo verdadero.

La hipótesis que se tiene en esta tesis es que si se escoge un ancho de banda nominal α lo suficientemente rápido, el controlador podrá estabilizar la planta verdadera a pesar de tener incertidumbre en la posición de polos y ceros. Esta idea se estudió en primera instancia con simulaciones en Matlab que mostraron que en la medida que α aumentaba, los polos de lazo cerrado se desplazaban a la izquierda del plano complejo. Para evidenciar lo anterior se retoma la planta de ejemplo (3.16), con modelo nominal (3.17) y un controlador dado por (3.18):

$$G_c(s) = \frac{4(s+3)}{(s-2)(s+1)(s-4)} \quad (3.16)$$

$$G_0(s) = \frac{4}{s^2} \quad (3.17)$$

$$C(s) = \frac{p_0 s + p_1}{s + l_1} \quad (3.18)$$

Al hacer igualación de polinomios del polinomio característico de lazo cerrado nominal con el polinomio de diseño $(s + \alpha)^3$ se obtiene que los parámetros vienen dados por:

$$l_1 = 3\alpha, \quad p_0 = \frac{3\alpha^2}{4}, \quad p_1 = \frac{\alpha^3}{4} \quad (3.19)$$

El polinomio de lazo cerrado verdadero se muestra a continuación:

$$A_{cl}(s) = (s-2)(s+1)(s-4)(s+3\alpha) + \frac{4(s+3)(3\alpha^2 s + \alpha^3)}{4} \quad (3.20)$$

En la Figura 3.5 se grafican los cuatro polos de lazo cerrado de la planta para distintos valores de ancho de banda nominal α , variando desde un $\alpha = 1$ en azul hasta $\alpha = 25$ en rojo. Se observa que para un $\alpha = 1$ el lazo cerrado es inestable ya que hay dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano complejo. Al aumentar el ancho de banda a $\alpha = 10$ se tiene que los polos de lazo cerrado se desplazaron al semiplano izquierdo del

plano complejo por lo que el sistema de lazo cerrado es estable. Al seguir aumentando el valor de α se observa que el lazo cerrado sigue siendo estable y que los polos de lazo cerrado se desplazan más hacia la izquierda, como se ve para el caso $\alpha = 25$.

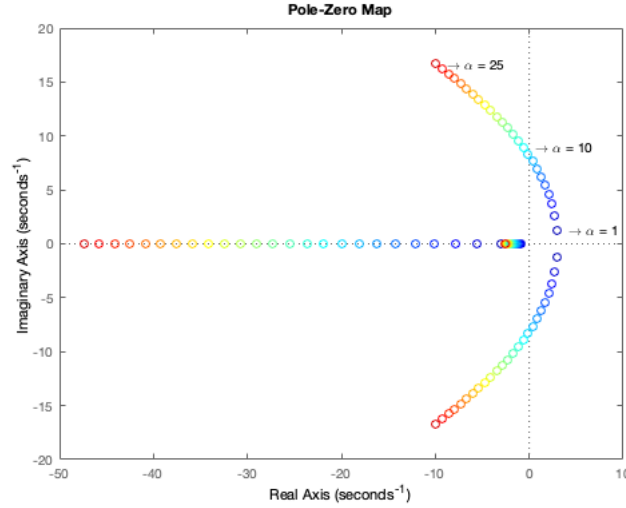


Figura 3.5: Polos de lazo cerrado para distintos valores de α

El objetivo es determinar condiciones sobre el ancho de banda nominal α de forma que se garantice la estabilidad del lazo cerrado verdadero, es decir, que el diseño del controlador en el Lema 15 garantice estabilidad robusta. Observando que al hacer más rápido el ancho de banda nominal se logra que el lazo cerrado verdadero sea estable, entonces se busca generalizar este hecho. Primero se analizará el caso en que la planta solo cuenta con polos inciertos (sin ceros) y se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 16. *Sea una planta continua con la estructura de (3.21) con un modelo nominal de alta frecuencia (3.22) y un controlador bipropio dado por (3.23) y bajo el supuesto de que los polos se encuentran limitados por un círculo de radio M centrado en el origen. Entonces existe un ancho de banda nominal α lo suficientemente grande tal que el lazo cerrado verdadero es estable.*

$$G_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b}{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)} \quad (3.21)$$

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} = \frac{b}{s^n} \quad (3.22)$$

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_0 s^{n-1} + \dots + p_{n-1}}{s^{n-1} + \dots + l_{n-1}} \quad (3.23)$$

Demostración. El polinomio de lazo cerrado viene dado por:

$$\begin{aligned}
A_{cl}(s) &= A(s)L(s) + B(s)P(s), \\
&= \left[\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i) \right] (s^{n-1} + \dots + l_{n-1}) \\
&\quad + b(p_0 s^{n-1} + \dots + p_{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Se reemplazan los coeficientes del controlador de acuerdo al Lema 15 en términos de la variable de diseño α y se escala el polinomio por $1/\alpha^{2m-1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
A_{cl}(s) &= \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{s}{\alpha} - \frac{\alpha_i}{\alpha} \right) \right] \left(\left(\frac{s}{\alpha} \right)^{n-1} + \binom{2n-1}{1} \left(\frac{s}{\alpha} \right)^{m-2} + \dots + \binom{2m-1}{m-1} \right) \\
&\quad + b_n \left(\binom{2m-1}{m} \frac{1}{b_n} \left(\frac{s}{\alpha} \right)^{m-1} + \dots + \binom{2m-1}{2m-1} \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Luego se aplica el cambio de variable $t = s/\alpha$ y se define $\delta_i = \alpha_i/\alpha$, resultando:

$$\begin{aligned}
A_{cl}(s) &= \left[\prod_{i=1}^m (t - \delta_i) \right] \left(t^{m-1} + \binom{2m-1}{1} t^{m-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \binom{2m-1}{m-1} \right) + \left(\binom{2m-1}{m} t^{m-1} + \binom{2m-1}{m+1} t^{m-2} + \dots + \binom{2m-1}{2m-1} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Se observa que al escoger un $\alpha \gg M$, recordando que M es la cota máxima para cada polo de la planta, entonces los coeficientes δ_i tienden a cero $\delta_i \rightarrow 0$, quedando el polinomio aproximadamente:

$$A_{cl}^*(t) = t^m \left(t^{m-1} + \binom{2m-1}{1} t^{m-2} + \dots + \binom{2m-1}{m-1} \right). \tag{3.27}$$

Reordenando los términos se obtiene que el polinomio de lazo cerrado es aproximadamente:

$$\begin{aligned}
A_{cl}^*(t) &= t^{2m-1} + \binom{2m-1}{1} t^{2m-2} + \dots + \binom{2m-1}{m-1} t^m + \binom{2m-1}{m} t^{m-1} + \\
&\quad \dots + \binom{2m-1}{2m-1}, \\
&= (t+1)^{2m-1}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Con lo cual los $2m-1$ polos de lazo cerrado tienden a $s = -\alpha$ y por tanto el sistema será estable. \square

El resultado anterior muestra que a pesar de que el lazo cerrado nominal es estable para $\alpha > 0$, el lazo cerrado es estable solo para valores suficientemente grandes de α . Entonces,

existe un ínfimo α que estabiliza el lazo cerrado y el objetivo entonces es encontrar este valor. Otra acotación importante es que, como se vio en el Teorema 16, el polinomio de lazo cerrado es escalable por el parámetro α . Por lo que, si se define la razón entre el ancho de banda nominal y la cota M como:

$$\kappa = \frac{\alpha}{M} \quad (3.29)$$

Entonces se busca el ínfimo valor para κ que haga estable el lazo cerrado.

3.5. Estudio de casos de plantas de bajo orden

En esta sección se analizan los casos de sistemas de bajo orden, buscando las herramientas que permitan establecer las cotas ínfimas de κ . Se consideran distintos casos: plantas solo con polos inciertos y plantas tanto con polos y ceros inciertos, en que $\kappa = \alpha/M$ es el cociente entre el ancho de banda nominal α y la cota de la magnitud de los polos y ceros de la planta verdadera.

3.5.1. Plantas con polos inciertos

Primer orden

Se analiza el caso de primer orden, que consta solo con un parámetro incierto. Se define el vector de incertidumbre $q = [\alpha_1]$ y el conjunto límite dado por $Q = [-M, M]$. La planta verdadera viene dada por (3.30) y su modelo nominal es un integrador dado por (3.31):

$$G_c(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b}{s - \alpha_1} \quad (3.30)$$

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} = \frac{b}{s} \quad (3.31)$$

El controlador en este caso es la ganancia p_0 y al plantear el polinomio característico nominal se puede dejar el controlador en términos del ancho de banda nominal α , como se muestra a continuación:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = p_0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} A_{cl0}(s) &= s + bp_0 = (s + \alpha) \\ p_0 &= \frac{\alpha}{b} \end{aligned} \quad (3.33)$$

El objetivo es encontrar el menor valor de α con el cual asegurar la estabilidad de la planta ante la presencia del polo incierto α_1 , el cual puede tomar cualquier valor entre $[-M, M]$. Para aquello se plantea el polinomio característico, obteniéndose:

$$A_{cl}(s, q) = s + \alpha - \alpha_1 \quad (3.34)$$

Donde se observa que el lazo cerrado verdadero será estable si el ancho de banda nominal es mayor que el polo incierto, es decir, si $\alpha > \alpha_1$. Como el polinomio es escalable, se llega a que la razón κ buscada en este caso es $\kappa = 1$. Este caso resulta sencillo pero refleja la idea fuerza de que un ancho de banda nominal lo suficientemente rápido estabiliza la planta con incertidumbre en su polo.

Al encontrar que la cota ínfima es $\kappa = 1$, se tiene que el ancho de banda debe ser al menos tan rápido como la cota sobre el polo incierto M . Por ejemplo, si se tiene un sistema de primer orden con $Q = [-3, 3]$ entonces la planta es robustamente estable para $\alpha > 3$. Lo anterior se puede ver en la Figura 3.6 donde se graficó la respuesta escalón de la función de sensibilidad complementaria del lazo cerrado $T(s)$, ver (3.35), para cuatro casos: con $\alpha = \{3, 3,1, 10, 100\}$. En los cuatro gráficos se evaluó el vector de parámetros en $\alpha_1 = \{-3; -2,5; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ para corroborar que el sistema es estable $\forall q \in Q$, donde la curva roja corresponde a $\alpha = -3$ y la azul corresponde a $\alpha = 3$.

$$T(s) = \frac{B(s)P(s)}{A(s)L(s) + B(s)P(s)} = \frac{\alpha}{s + \alpha - \alpha_1} \quad (3.35)$$

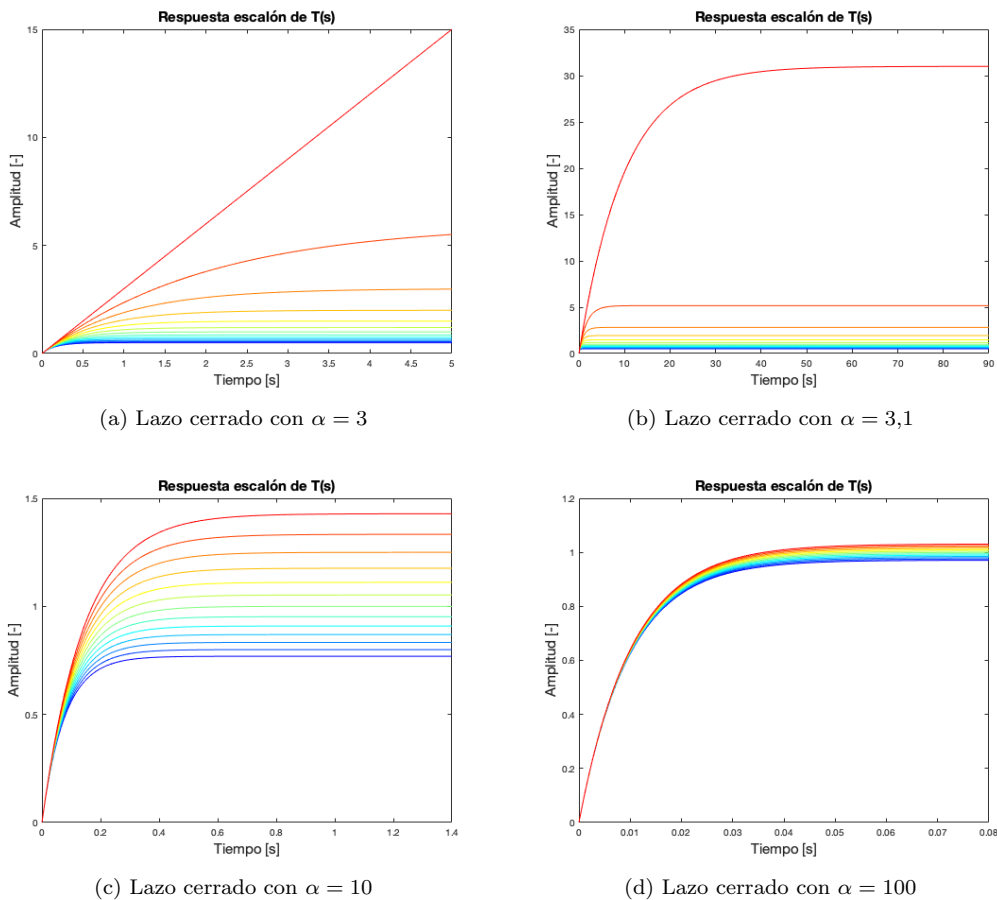


Figura 3.6: Respuesta escalón de las funciones de sensibilidad complementaria $T(s)$

La Figura 3.6a corresponde a la cota límite por lo que la familia de polinomios no es robustamente estable, lo que concuerda con que hay un sistema críticamente estable, correspondiente a $\alpha_1 = 3$. En las Figuras 3.6b, 3.6c y 3.6d todos los sistemas son estables y se puede observar como a medida que α aumenta, las respuestas escalones se estabilizan en

un estado estacionario más cercano a 1. Lo anterior se debe a que la ganancia a continua de $T(s)$ con $\alpha \rightarrow \infty$ tiende a 1.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T(0j) = 1 \quad (3.36)$$

Segundo Orden

Para analizar el caso de segundo orden se comienza planteando el modelo de la planta (3.37), el que tiene un vector de incertidumbre $q = [\alpha_1, \alpha_2]$ con un conjunto límite dado por $Q = [-M, M] \times [-M, M]$. Se resalta el hecho que los coeficientes del denominador del modelo de la planta tienen una dependencia no lineal con respecto al vector de parámetros inciertos q pero si multilineal.

$$G_c(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} = \frac{b}{s^2 - s(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2} \quad (3.37)$$

El modelo nominal viene dado por (3.38), el controlador es (3.39) y sus parámetros quedan definidos en función del ancho de banda nominal de acuerdo al Lema 15, obteniéndose (3.40).

$$G_0(s) = \frac{b}{s^2} \quad (3.38)$$

$$C(s) = \frac{p_0s + p_1}{s + l_1} \quad (3.39)$$

$$l_1 = 3\alpha, \quad p_0 = \frac{3\alpha^2}{b}, \quad p_1 = \frac{\alpha^3}{b} \quad (3.40)$$

Para analizar la estabilidad del sistema se plantea el polinomio característico de lazo cerrado (3.41). Este polinomio tiene coeficientes multilineales con respecto al vector q por lo que se puede utilizar el Teorema del Mapeo (Teorema 12).

$$A_{cl} = s^3 + s^2(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) + s(3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2) + \alpha^3 + 3\alpha\alpha_1\alpha_2 \quad (3.41)$$

El Teorema del Mapeo establece que la envoltura convexa de una familia de polinomios con coeficientes multilineales es igual a la envoltura convexa de los puntos extremos de la familia. Por lo que al graficar el Value Set, que es un mapeo de una familia de polinomios para $\omega \geq 0$ evaluando los posibles $q \in Q$, este queda generado por los puntos extremos que encierran al Value Set de la familia de polinomios. Los puntos extremos son: $q^1 = [-M, -M]$, $q^2 = [M, M]$, $q^3 = [-M, M]$ y $q^4 = [M, -M]$ destacando que, por simetría, en este caso de segundo orden, $A_{cl}(s, q^3) = A_{cl}(s, q^4)$ por lo que solo se trabaja con los primeros tres puntos extremos.

La Figura 3.7 corresponde al Value Set de la familia de polinomios (3.41) para $\alpha = 1$ donde los puntos azules son el mapeo de q^1 , los puntos verdes son del punto q^2 y los puntos rojos son del punto q^3 . Los triángulos negros son la envoltura convexa de los puntos extremos y como ya se dijo, los puntos extremos q^3 y q^4 se mapean a la misma imagen por lo que el Value Set está encerrado por triángulos.

Ahora se puede utilizar el Teorema de Exclusión del Cero (Sección 2.3) pero primero hay que garantizar que se cumplen los supuestos del teorema. La familia de polinomios $A_{cl}(s, q)$ es de grado invariante, el conjunto límite Q es conexo, los coeficientes del polinomio son

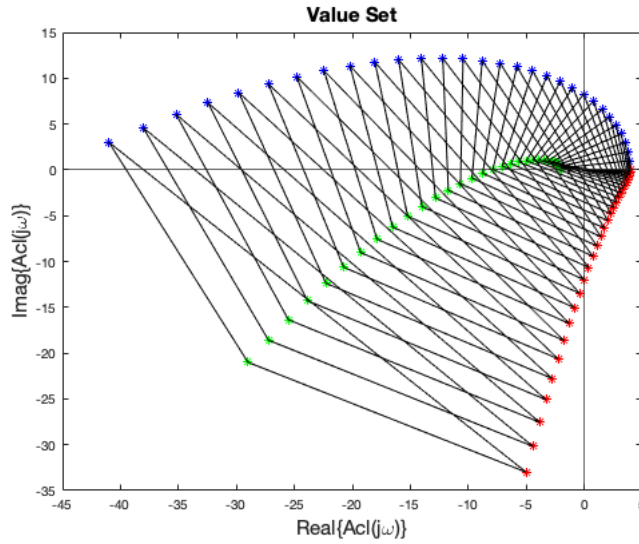


Figura 3.7: Value Set para el polinomio (3.41) con $\alpha = 1$

funciones continuas en q y existe al menos un miembro de la familia estable, siendo este $A_{cl}(s, q^0)$ con $q^0 = [0, 0]$ ya que corresponde al polinomio de lazo cerrado nominal el cual es estable por construcción. Cumpliéndose todos los supuestos del teorema se tiene que la familia de polinomios será robustamente estable si y solo si el Value Set no contiene el origen del plano complejo.

El Value Set de los puntos extremos $A_{cl}(s, q^i)$ forma ramas en el plano complejo que dependen de la frecuencia ω y del parámetro de diseño α . Como la estabilidad robusta depende de si el origen se encuentra dentro del Value Set de la familia de polinomios y este está contenido en la envoltura convexa del mapeo de los puntos extremos, entonces se buscan puntos (α, ω) que provoquen que estas ramas crucen el origen.

Se plantea la familia de polinomios separada en su parte real $P(\omega)$ y su parte imaginaria $Q(\omega)$, ecuaciones (3.45)-(3.47), con el objetivo de encontrar un conjunto (α, ω) con $\alpha > 0$ y $\omega \geq 0$ que anule el polinomio.

$$A_{cl}(j\omega, q) = P(\omega, q) + jQ(\omega, q) \quad (3.42)$$

$$P(\omega, q) = -\omega^2(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) + \alpha^3 + 3\alpha\alpha_1\alpha_2 \quad (3.43)$$

$$Q(\omega, q) = \omega(-\omega^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2) \quad (3.44)$$

Considerando $\omega = 0$ se tiene que $Q(\omega)$ es cero y se busca el α que haga $P(\omega) = 0$. Por el Teorema del Mapeo basta con evaluar en los puntos extremos. No obstante, solo el caso de q^2 entrega un resultado real, como se muestra a continuación:

$$P = \alpha^3 + 3\alpha\alpha_1\alpha_2 = 0 \quad (3.45)$$

$$\alpha = \sqrt{-3\alpha_1\alpha_2} \quad (3.46)$$

$$\alpha = \sqrt{3}M \rightarrow \kappa = \sqrt{3} \quad (3.47)$$

El primer punto solución entonces es $(\alpha, \omega) = (\sqrt{3}M, 0)$. Luego se tiene que considerar el caso en que $\omega > 0$, si se despeja el término ω^2 del paréntesis de (3.44) y se reemplaza en (3.43) se obtiene:

$$-8\alpha^3 + 12\alpha^2(\alpha_1 + \alpha_2) - 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad (3.48)$$

Se evalúa la expresión anterior en q^1 , se utiliza la sustitución $\alpha = \kappa M$ ya que se busca el ínfimo de κ , como se puede ver en (3.49). Al resolver la ecuación se obtienen dos soluciones complejas y una solución real negativa, por ende no son soluciones útiles.

$$\begin{aligned} 0 &= -8\alpha^3 + 12\alpha^2(-2M) - 3\alpha(-2M)^2 + M^2(-2M) \\ 0 &= -8\alpha^3 - 24\alpha^2M - 12\alpha M^2 - 2M^3 \\ 0 &= -8\kappa^3M^3 - 24\kappa^2M^3 - 12^3 - 2M^3 \\ 0 &= -8\kappa^3 - 24\kappa^2 - 12\kappa - 2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

El segundo punto extremo q^2 lleva a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha^3 + 12\alpha^2(2M) - 3\alpha(2M)^2 + M^2(2M) \\ 0 &= -8\kappa^3 + 24\kappa^2 - 12\kappa + 2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Al resolver numéricamente la ecuación cúbica se obtienen dos soluciones complejas y una real positiva, siendo esta última $\kappa = 1 + 2^{1/3} + 2^{2/3} \approx 2,42$ la solución a utilizar.

Finalmente, el tercer punto q^3 anula los términos $(\alpha_1 + \alpha_2)$ de (3.48). Llegando a una solución trivial $\kappa = 0$, valor que no está dentro del conjunto solución, quedando descartado.

$$\begin{aligned} 0 &= -8\alpha^3 + 12\alpha^2(0) - 3\alpha(0) + 0 \\ 0 &= -8\alpha^3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

En síntesis, se ha encontrado dos posibles soluciones $(\alpha, \omega) = \{(\sqrt{3}M, 0), (2,42M, 2,02)\}$. La primera solución hace que la rama verde cruce por el origen, como se ve en la Figura 3.8a, mientras que la segunda solución hace que sea la rama roja la que cruce por el origen, como se ve en la 3.8b. De las dos soluciones se escoge la que tenga un mayor α y si se prueba que para valores mayores de α las ramas suben en el plano complejo, entonces se puede asegurar que la familia de polinomios y, por tanto, el lazo cerrado verdadero son robustamente estables.

Al calcular la derivada parcial de la parte imaginaria $Q(\omega)$ con respecto a α se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \omega(6\alpha - 3(\alpha_1 + \alpha_2)) \quad (3.52)$$

La derivada parcial anterior se evalúa en los puntos extremos q^i y se obtiene que si $\alpha > M$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} > 0$, es decir, todo aumento positivo de α hace que las ramas suban en el plano complejo obteniéndose entonces que el ínfimo de κ es 2,42.

Tercer orden

Con el caso de tercer orden se procede de manera similar que en los casos anteriores. El modelo de la planta viene dado por (3.53) y su modelo nominal de alta frecuencia por

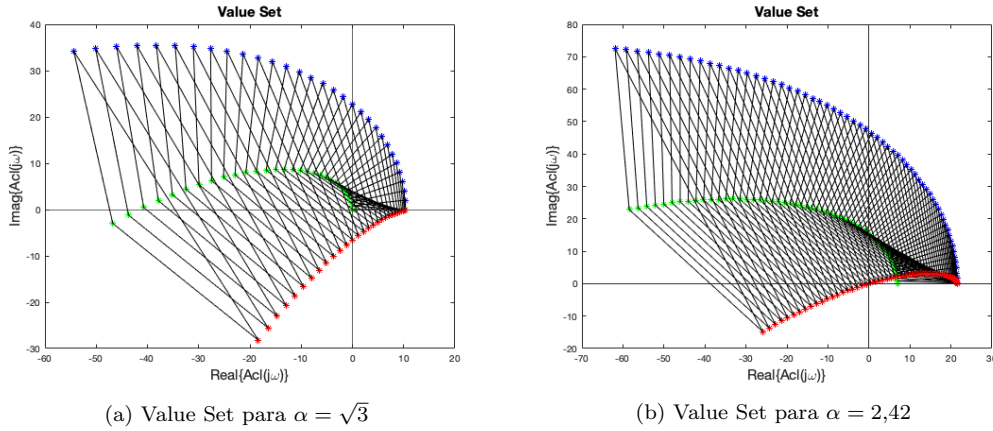


Figura 3.8: Value Set para el polinomio (3.41) para distintos valores de α

(3.54).

$$G_c(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \quad (3.53)$$

$$G_0(s) = \frac{b}{s^3} \quad (3.54)$$

El controlador viene dado por (3.55) y sus parámetros en función del ancho de banda nominal α se muestran en (3.56) de acuerdo con el diseño en el Lema 15.

$$C(s) = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{s^2 + l_1 s + l_2} \quad (3.55)$$

$$l_1 = 5\alpha, \quad l_2 = 10\alpha^2, \quad p_0 = \frac{10\alpha^3}{b}, \quad p_1 = \frac{5\alpha^4}{b}, \quad p_2 = \frac{\alpha^5}{b} \quad (3.56)$$

El polinomio característico de lazo cerrado viene dado por (3.57). Esta familia de polinomios tiene un vector de incertidumbre $q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ y un conjunto límite dado por $Q = [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$.

$$A_{cl}(s, q) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)(s^2 + 5\alpha s + 10\alpha^2) + (10\alpha^3 s^2 + 5\alpha^4 s + \alpha^5) \quad (3.57)$$

Si se expande el polinomio característico se observa que sus coeficientes son multilineales en q por lo que el Teorema del Mapeo es válido. Por tanto, se tiene que el Value Set del polinomio está contenido por la envoltura convexa del Value Set de los puntos extremos. Como el conjunto límite Q es un cubo, se tienen ocho puntos extremos, uno por cada vértice, pero debido a la simetría del modelo en que cada α_i es intercambiable, solo cuatro de estos vértices se deben analizar. Es decir, los puntos extremos a analizar son: $q^1 = [-M, -M, -M]$, $q^2 = [M, -M, -M]$, $q^3 = [M, M, -M]$ y $q^4 = [M, M, M]$.

En la Figura 3.9 se muestra el Value Set evaluado en $\alpha = 4$, $\omega = 2$ y $M = 1$. Los puntos extremos q^1 , q^2 , q^3 y q^4 son las marcas (*) azul, verde, magenta y roja respectivamente,

mientras que las marcas (*) negras son valores intermedios que toma q en Q . Además, se graficó la envoltura convexa de los puntos extremos dada por el cuadrilátero que une los puntos extremos.

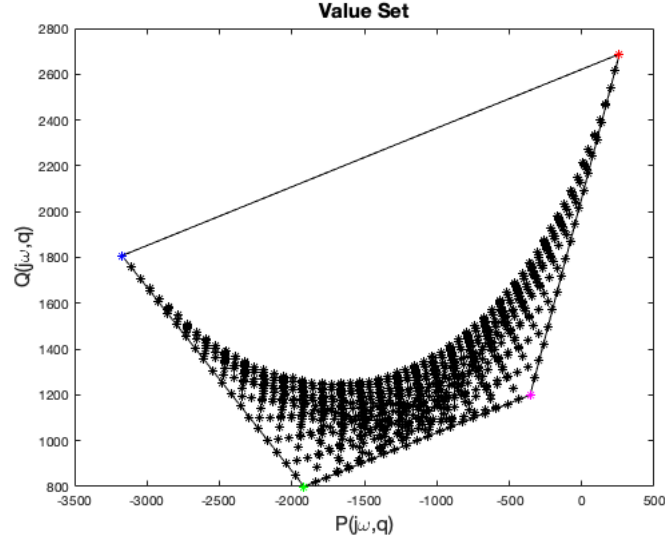


Figura 3.9: Value Set para el polinomio (3.57) para un $\alpha = 4$ y $\omega = 2$

Luego se verifica que se cumplan los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero. La familia de polinomios $A_{cl}(s, q)$ es de grado invariante, el conjunto límite Q es conexo, los coeficientes del polinomio son funciones continuas en q y existe al menos un polinomio estable, dado por $q^0 = [0, 0, 0]$ que corresponde al polinomio de lazo cerrado nominal el cual es estable por construcción. Entonces la familia de polinomios es robustamente estable si y solo si el Value Set no contiene al origen, por lo que se buscan los puntos (α, ω) que hagan que el polinomio se haga cero.

El polinomio característico se separa en su parte real $P(j\omega)$ y su parte imaginaria $Q(j\omega)$, se forma un sistema de ecuaciones al evaluar la parte real y la parte imaginara en los puntos extremos q^i .

$$A_{cl}(j\omega, q) = P(\omega, q) + jQ(\omega, q) \quad (3.58)$$

$$P(\omega, q) = \omega^4(5\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) - \omega^2(10\alpha^3 - 10\alpha^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \quad (3.59)$$

$$5\alpha(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \alpha^5 - 10\alpha^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad (3.60)$$

$$Q(\omega, q) = \omega^5 - \omega^3(10\alpha^2 - 5\alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + \quad (3.61)$$

$$\omega(5\alpha^4 + 10\alpha^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - 5\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \quad (3.62)$$

El sistema consta de dos ecuaciones que dependen de α y ω pero son ecuaciones no lineales que se resuelven numéricamente. De las posibles soluciones que se obtienen, se descartan las soluciones complejas y las negativas, también se excluye la solución $\alpha = 0$. Finalmente la solución con un α mayor es la que entrega la cota ínfima de $\kappa = 5,5885$, esta cota corresponde al caso de evaluar el sistema de ecuaciones en el punto extremo q^4 . A modo de ilustrar esta cota es que se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 17. Sea un sistema de tercer orden dado por En la Figura 3.10 se muestra el Value Set para $\alpha = 5,5885$ suponiendo un conjunto límite de $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Se observa que con este valor de α la curva roja pasa justo por el origen del plano complejo, por lo que se confirma que es la cota ínfima que asegura la estabilidad del lazo cerrado.

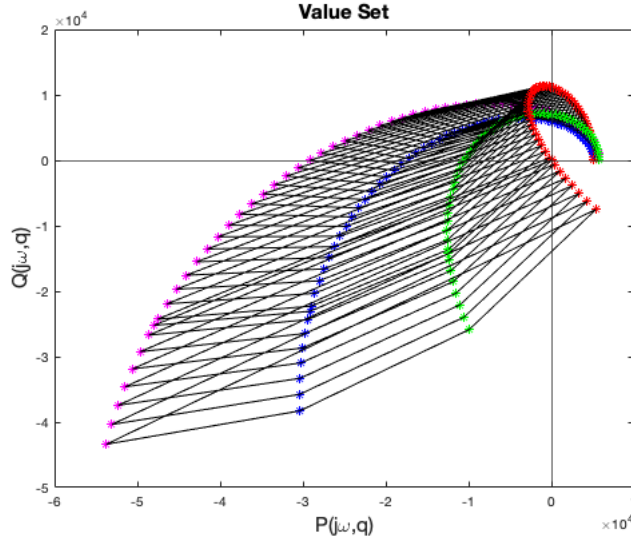


Figura 3.10: Value Set para el polinomio (3.57) con $\alpha = 5,5885$

Planta de cuarto orden

Con una planta de cuarto orden se sigue un procedimiento similar al de los casos anteriores. En este caso, el modelo de la planta es (3.63) y su respectivo modelo nominal es (3.64).

$$G_c(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)(s - \alpha_4)} \quad (3.63)$$

$$G_0(s) = \frac{b}{s^4} \quad (3.64)$$

El controlador viene dado por (3.65) y los parámetros definidos en (3.66) de acuerdo al Lema 15.

$$C(s) = \frac{p_0 s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3}{s^3 + l_1 s^2 + l_2 s + l_3} \quad (3.65)$$

$$l_1 = 7\alpha, l_2 = 21\alpha^2, l_3 = 35\alpha^3, p_0 = \frac{35\alpha^4}{b}, p_1 = \frac{21\alpha^5}{b}, p_2 = \frac{7\alpha^6}{b}, p_3 = \frac{\alpha^7}{b} \quad (3.66)$$

El polinomio de lazo cerrado viene dado por (3.67) y se observa que se cumplen los supuestos del Teorema del Mapeo y mediante el Teorema de Exclusión del Cero se puede buscar el ínfimo de α que estabilice el lazo cerrado.

$$A_{cl} = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)(s - \alpha_4)(s^3 + l_1 s^2 + l_2 s + l_3) + b(p_0 s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3) \quad (3.67)$$

En la Figura 3.11 se grafica el Value Set de los puntos extremos para el caso en que el conjunto límite viene dado por $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. El conjunto límite Q tiene 32 vértices pero por simetría se tiene que solo 5 son los que se utilizan, el resto de vértices son mapeados a alguno de estos 5.

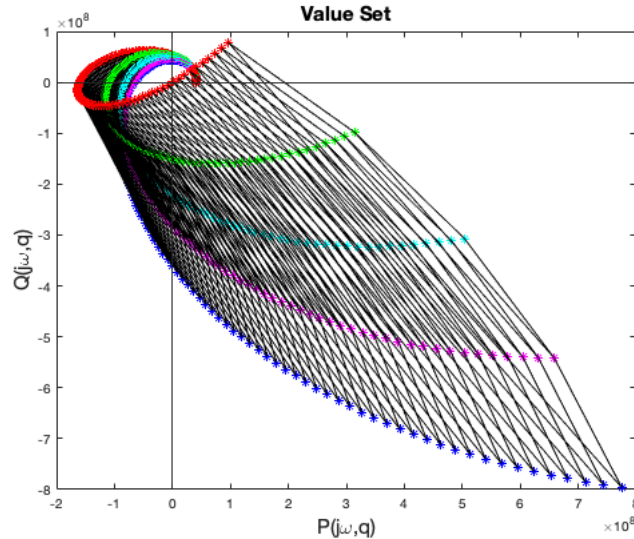


Figura 3.11: Value Set para el polinomio (3.67) con $\alpha = 12,2644$

Para encontrar el ínfimo α se debe plantear el sistema de ecuaciones al igualar la parte real y la parte imaginaria del $A_{cl}(s, q)$ a cero. En este caso se obtiene que la cota ínfima κ es 12,2644.

3.5.1.1. Metodología general

Para plantas de orden superior puede aplicarse la metodología trabajada en las secciones anteriores para plantas de 1^{er} a 4^{to} orden (sin ceros). Esta metodología se resume a continuación:

- Se plantea el modelo nominal.
- Se calcula el controlador en base a la cantidad de polos del modelo de la planta.
- Se utiliza el polinomio de lazo cerrado y se plantea el sistema de ecuaciones de la parte real e imaginaria del $A_{cl}(s, q)$ igualadas a cero.
- Se verifican los supuestos del Teorema del Mapeo y de Exclusión del Cero.
- Se evalúa el sistema de ecuaciones en los puntos extremos y se resuelve el sistemas de ecuaciones.
- De las posibles soluciones se escoge el mayor α que será la cota ínfima κ para el ancho de banda de diseño del lazo cerrado nominal.

3.5.2. Plantas con polos y ceros inciertos

En las secciones anteriores se estudió el problema de una planta de tiempo continuo con polos inciertos. En esta sección se analiza el efecto que tiene sobre una planta genérica la presencia de ceros con incertidumbre. Cabe destacar que el modelo nominal y el controlador dependen del grado relativo de la planta, por lo que se consideran solo casos en que el grado relativo sea al menos uno. Con el fin de ilustrar el efecto que tiene en la planta la incorporación de ceros inciertos, es que el primer caso de estudio corresponde a una planta de segundo orden con un cero incierto.

Planta con un cero y dos polos

El modelo de una planta con dos polos y un cero viene dado por (3.68). El vector de incertidumbre es $q = [\beta_1, \alpha_1, \alpha_2]$ pero el conjunto límite Q no es simple de definir debido a la presencia del cero. Por ejemplo, el cero podría tener el mismo valor que uno de los polos y dependiendo del signo, darse una cancelación inestable, resultando en que el lazo cerrado sea inestable independiente del controlador que se elija. (Debido a lo anterior, no se sabe si la incorporación del cero incierto necesitará agregar un segundo supuesto sobre la magnitud y posición de este en el plano complejo). No obstante, el modelo nominal de alta frecuencia es independiente de estas consideraciones sobre el cero, por lo que se plantea el modelo nominal (3.69) y se continua con el diseño del controlador.

$$G_c(s) = \frac{b(s - \beta_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (3.68)$$

$$G_0(s) = \frac{b}{s} \quad (3.69)$$

El modelo nominal es de primer orden por lo que el controlador queda como una ganancia p_0 y al obtener el polinomio de lazo cerrado nominal (3.71) se puede parametrizar el controlador en función del ancho de banda nominal α .

$$C(s) = p_0 \quad (3.70)$$

$$A_{cl0}(s) = s + bp_0 = s + \alpha \quad (3.71)$$

$$p_0 = \frac{\alpha}{b} \quad (3.72)$$

Para analizar la estabilidad de la planta se obtiene el polinomio de lazo cerrado verdadero (3.73). Este polinomio depende de los tres parámetros con incertidumbre y del parámetro de diseño α pero en este caso, a diferencia de las plantas con solo polos inciertos, no todos los coeficientes del polinomio tienen al menos un término exclusivamente con α . Esto implica que no se podrá manipular el coeficiente de grado cero si el cero β_1 tiene magnitud cero.

$$A_{cl}(s, q) = s^2 + s(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 - \alpha\beta_1 \quad (3.73)$$

Considerando el hecho que el polinomio característico es de segundo orden, para garantizar estabilidad es necesario y suficiente que los coeficientes sean positivos. Debido a esto se originan las siguientes inecuaciones:

$$\alpha > \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3.74)$$

$$\alpha_1\alpha_2 > \alpha\beta_1 \quad (3.75)$$

De la primera inecuación se tiene que α debe ser mayor que la suma de los polos inciertos, y como están limitados por la cota M , es suficiente que $\alpha > 2M$. La segunda inecuación indica que la cota sobre α depende del inverso multiplicativo de β_1 , marcando una cota superior o inferior dependiendo de si es un cero de fase no mínima o de fase mínima. También muestra que el cero de la planta no puede estar en el origen pues, en ese caso, desaparece la variable de diseño en ese coeficiente. Para visualizar el efecto que tiene el cero β_1 se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18. Se considera una planta dada por (3.76), se fija la cota $M = 1$ con lo que $q \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ y un ancho de banda nominal fijo de $\alpha = 3$ por lo que el controlador viene dado por $C(s) = 3$.

$$G(s) = \frac{1(s - \beta_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (3.76)$$

Luego se grafica la parte real del polo dominante del polinomio característico verdadero en función de β_1 . En la Figura 3.12 se consideran los 3 puntos extremos (evaluando $\alpha_i = \pm M$): en azul el caso de los dos polos estables, en verde el caso de un polo estable y el otro inestable y en rojo el caso de los dos polos inestables. De esta figura se puede observar que para $\beta_1 \geq 0$ al menos hay un polinomio de la familia que es inestable, por lo que se concluye que para conseguir la estabilidad robusta el cero β_1 debe ser al menos de fase mínima. En este caso particular se obtiene que la familia de polinomios es robustamente estable si y solo si $\beta_1 < -\frac{1}{3}$. Lo anterior concuerda con la inecuación (3.75) donde al despejar α y considerando el caso del cero estable $\beta_1 < 0$, se llega a que $\alpha > \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1}$.

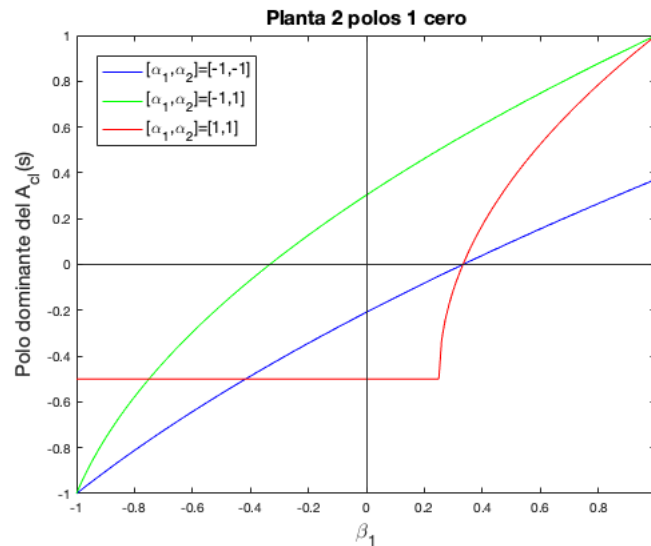


Figura 3.12: Polo dominante del A_{cl} vs β_1

Destacando el caso en que el cero sea de fase mínima, la inecuación (3.75) entrega una cota mínima para α , cota que tiende a infinito en la medida que el cero se acerca al origen. Lo anterior muestra que, para cualquier ancho de banda nominal escogido, se puede tomar un β_1 lo suficientemente cerca del origen que hace que el lazo cerrado verdadero sea inestable.

Para solucionar el problema asociado a la presencia de ceros cercanos al origen es que se propone forzar integración en el controlador, por lo que la nueva estructura de controlador es (3.77). Este cambio hace que al momento de obtener el polinomio característico de lazo cerrado, al multiplicar los polinomios $A(s)$ de (3.76) y $L(s)$ de (3.77) no se obtenga un término independiente de s , por lo que el término constante del polinomio de lazo cerrado verdadero dependerá solo de α y β_1 .

$$C(s) = \frac{p_0 s + p_1}{s} \quad (3.77)$$

Como se aumentó el orden del controlador, el polinomio característico de lazo cerrado nominal también aumenta de grado y se debe recalcular los coeficientes del controlador por igualación de polinomios, como se muestra a continuación:

$$A_{cl0}(s) = s^2 + b(p_0 s + p_1) = (s + \alpha)^2 \quad (3.78)$$

$$p_0 = \frac{2\alpha}{b} \quad p_1 = \frac{\alpha^2}{b} \quad (3.79)$$

Para analizar la estabilidad del lazo cerrado verdadero se plantea el polinomio característico:

$$A_{cl} = s^3 + s^2(2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) + s(\alpha^2 - 2\alpha\beta_1 + \alpha_1\alpha_2) - \alpha^2\beta_1 \quad (3.80)$$

Como primera observación se tiene que el coeficiente de grado cero restringe la posición del cero, ya que el polinomio solo podría ser estable si el cero es de fase mínima. Una segunda observación es que con este nuevo controlador, el coeficiente constante del polinomio (3.80) se mantiene positivo en la medida que el cero β_1 se acerca al origen desde el semiplano izquierdo del plano complejo, eliminando así la dependencia inversamente proporcional entre α y β_1 que se observó en (3.73). Se ilustra este resultado continuando el Ejemplo 18 pero considerando el controlador (3.77).

Ejemplo 19. Se considera la planta (3.76) y la estructura del controlador dada por (3.77), se fija el ancho de banda nominal en $\alpha = 3$ con lo que el controlador resultante es:

$$C(s) = \frac{6s + 9}{s} \quad (3.81)$$

Se procede a graficar el polo dominante de lazo cerrado en función del cero β_1 como se observa en la Figura 3.13. Del gráfico se deduce que el lazo cerrado verdadero es estable si $\beta_1 < 0$ para los tres casos de puntos extremos, en contraste con la Figura 3.12 en que la familia de polinomios es robustamente estable para $\beta_1 < \frac{-1}{3}$. Por tanto, ambos controladores requieren que el cero β_1 sea de fase mínima y al considerar integración en el controlador, se puede obtener una cota para α que garantice estabilidad robusta para la familia de polinomios sin importar que tan cercano al origen se encuentre el cero β_1 .

Ahora queda obtener la cota para el ancho de banda nominal, entonces se separa la parte real e imaginaria del polinomio (3.80) de lazo cerrado verdadero y se igualan a cero de manera análoga a las secciones anteriores y como se muestra a continuación:

$$A_{cl}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.82)$$

$$P(\omega) = -\omega^2(2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) - \alpha^2\beta_1 = 0 \quad (3.83)$$

$$Q(\omega) = \omega(-\omega^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta_1 + \alpha_1\alpha_2) = 0 \quad (3.84)$$

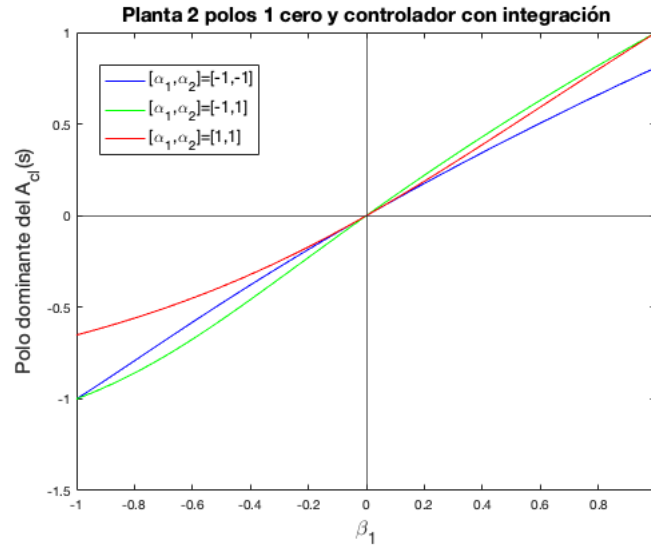


Figura 3.13: Polo dominante del A_{cl} vs β_1

El sistema de ecuaciones anterior se debe evaluar en los puntos extremos dado por los vértices de la caja $Q = [-M, 0] \times [-M, M] \times [-M, M]$. Se descartan los vértices en que $\beta_1 = 0$ ya que por la Figura 3.13 se observa que la familia de polinomios se mantiene estable en la medida que el cero β_1 se acerca al origen.

Al evaluar el sistema de ecuaciones en $\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta_1 = M$ en el sistemas de ecuaciones (3.83)-(3.84) se obtiene la ecuación (3.86) que tiene por solución $\kappa = 1,1421$. Este es el valor de la cota ínfima de la razón entre el ancho de banda nominal α y la cota sobre la magnitud de los ceros y polos del modelo verdadero M .

$$-2\alpha^3 - \alpha^2 M + 2\alpha M^2 + 2M^3 = 0 \quad (3.85)$$

$$-2\kappa^3 - \kappa^2 + 2\kappa + 2 = 0 \quad (3.86)$$

$$\kappa = 1,1421 \quad (3.87)$$

En la Figura 3.14 se grafica el Value Set para la planta (3.76) del Ejemplo 18 pero con el nuevo controlador y considerando un ancho de banda nominal $\alpha = 1,1421$. Ya que la familia de polinomios cumple con los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero, se corrobora que el lazo cerrado verdadero es robustamente estable.

Ahora bien, falta analizar si forzar integración en el controlador es suficiente para casos en que se cuente con más de un cero con incertidumbre, por lo que a continuación se procede a analizar el caso de una planta con tres polos inciertos y 2 ceros inciertos.

Planta dos ceros y tres polos

Con el caso de una planta de tercer orden con dos ceros inciertos se procede de forma similar al caso anterior. El modelo verdadero viene dado por (3.88) y el vector de incertidumbre es $q = [\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ y se mantiene el supuesto que los ceros

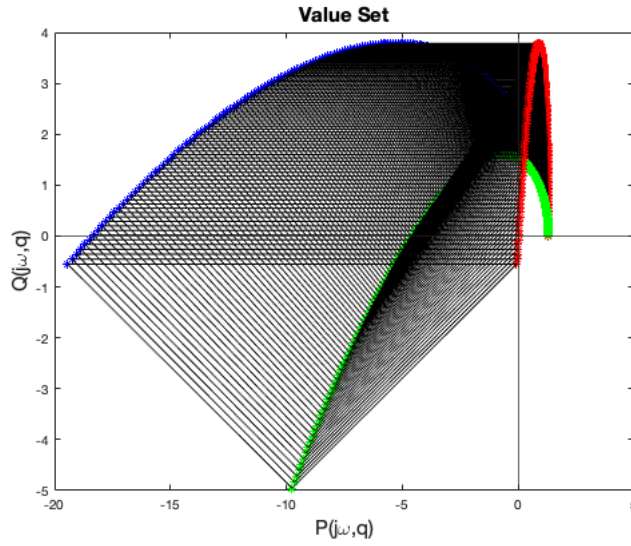


Figura 3.14: Value Set para la plata (3.76) con el controlador con integración (3.77) y un $\alpha = 1,1421$

inciertos son de fase mínima, por lo que el conjunto límite vienen dado por $Q = [-M, 0] \times [-M, 0] \times [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$.

$$G_c(s) = \frac{b(s - \beta_1)(s - \beta_2)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \quad (3.88)$$

El modelo nominal de alta frecuencia viene dado por (3.89) y el controlador obtenido con el Lema 15 es (3.90):

$$G_0(s) = \frac{b}{s} \quad (3.89)$$

$$C(s) = p_0 = \frac{\alpha}{b} \quad (3.90)$$

Para analizar la estabilidad robusta se plantea el polinomio de lazo cerrado verdadero dado por (3.91) y se puede observar en este polinomio que el coeficiente constante tiene el mismo problema que el caso anterior (un cero y dos polos), es decir, hay un término independiente de α y el término $\alpha\beta_1\beta_2$ puede desaparecer en la medida que los ceros β_1 y/o β_2 se acercan al origen del plano complejo.

$$A_{cl} = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3) + bp_0(s - \beta_1)(s - \beta_2) \quad (3.91)$$

$$= s^3 + s^2(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + s(-\alpha(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \quad (3.92)$$

$$+ \alpha\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad (3.93)$$

Lo anterior queda ilustrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 20. Sea una planta dada por (3.94) en que se $b = 3$, $M = 1$ y por ende $q = [\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in [-M, 0[\times [-M, 0[\times [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$. Se fija el ancho de banda nominal en $\alpha = 3$ con lo que el controlador queda $C(s) = 1$.

$$G(s) = \frac{3(s - \beta_1)(s - \beta_2)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \quad (3.94)$$

Se procede a graficar la parte real del polo dominante del polinomio de lazo cerrado en función del valor de los ceros de la planta, donde, por simplicidad, se considera $\beta_1 = \beta_2$. En la Figura 3.15 se muestra el polo dominante para los 4 casos de interés que corresponde a evaluar los polos inciertos en sus valores extremos, $\alpha_i = \pm M$. De esta figura se concluye que el controlador no estabiliza el lazo cerrado para ningún valor de β_1 ya que al menos hay un caso (curva roja correspondiente a $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [M, M, M]$) que tiene el polo dominante siempre en el semiplano derecho del plano complejo.

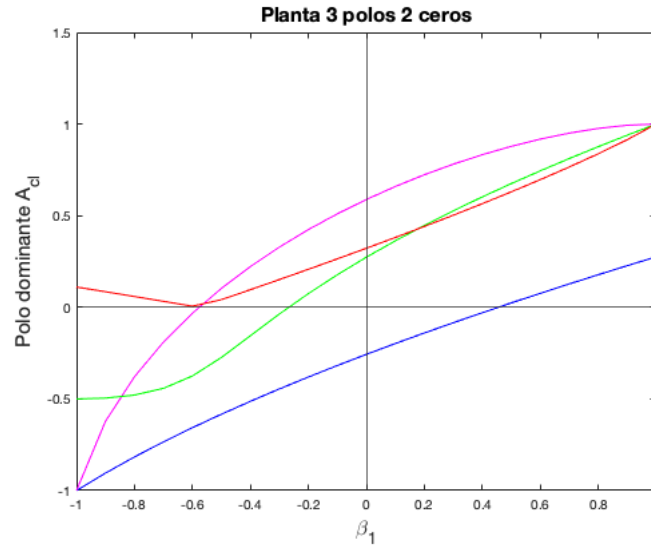


Figura 3.15: Polo dominante del A_{cl} vs β_1

Ahora bien, al igual que en el caso de un cero y dos polos, se considera a continuación la variante de controlador que incorpora integración (3.95) y el polinomio de lazo cerrado nominal se muestra en (3.96) con lo que los parámetros del controlador quedan determinados por (3.97).

$$C(s) = \frac{p_0 s + p_1}{s} \quad (3.95)$$

$$A_{cl0}(s) = s^2 + b(p_0 s + p_1) = (s + \alpha)^2 \quad (3.96)$$

$$p_0 = \frac{2\alpha}{b}, \quad p_1 = \frac{\alpha^2}{b} \quad (3.97)$$

Al utilizar el controlador (3.95) se obtiene un polinomio característico de lazo cerrado dado por (3.98) donde se puede observar que el coeficiente de grado cero solo depende de

α , β_1 y β_2 por lo que se puede manipular dicho coeficiente a través de α . Sin embargo, el coeficiente que presenta dificultades ahora es el que acompaña a la variable s . En dicho coeficiente hay un término independiente de α el cual no se puede manipular ya que el término que si tiene α está multiplicado por β_1 y/o β_2 por lo que si los ceros inciertos son pequeños no se puede asignar arbitrariamente ese coeficiente. Por lo anterior se concluye que no basta con que el controlador tenga integración y se debe buscar un controlador que permita que cada coeficiente del polinomio característico se pueda manipular a través de α .

$$A_{cl}(s) = s^4 + s^3(2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + s^2(\alpha^2 - 2\alpha(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + s(-\alpha^2(\beta_1 + \beta_2) + 2\beta_1\beta_2\alpha - \alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \alpha^2\beta_1\beta_2 \quad (3.98)$$

Analizando el polinomio (3.98) se concluye que si el controlador tiene dos polos en el origen, entonces al momento de formar el polinomio de lazo cerrado cada coeficiente tendrá un término independiente α ó términos que dependen solo de α y los ceros β_1 y β_2 . Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 21. *Se continua con el ejemplo 20 pero se utiliza el controlador dado por (3.99) cuyos parámetros se determinan por (3.100).*

$$C(s) = \frac{p_0s^2 + p_1s + p_2}{s^2} \quad (3.99)$$

$$p_0 = \frac{3\alpha}{b}, \quad p_1 = \frac{3\alpha^2}{b}, \quad p_2 = \frac{\alpha^3}{b} \quad (3.100)$$

El polinomio de lazo cerrado verdadero viene dado por (3.101) donde se observa que cumple con que los coeficientes de grado cero y uno solo tienen términos que dependen de α , β_1 y β_2 . Mientras que los coeficientes de grado dos, tres y cuatro tienen los términos α^3 , $3\alpha^2$ y 3α respectivamente. Por lo que cada coeficiente del polinomio se puede manipular a través del parámetro de diseño α .

$$A_{cl}(s) = s^5 + s^4(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + s^3(3\alpha^2 - 3\alpha(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + s^2(\alpha^3 - 3\alpha^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\alpha\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3) + s(-\alpha^3(\beta_1 + \beta_2) + 3\alpha^2\beta_1\beta_2) + \alpha^3\beta_1\beta_2 \quad (3.101)$$

En la Figura 3.16 se grafica el polo dominante de lazo cerrado en función de la magnitud de los ceros $\beta_1 = \beta_2$. A comparación de la Figura 3.15 se observa que al incluir los dos polos en el origen en el controlador, se obtiene que para un ancho de banda nominal fijo de $\alpha = 3$ el lazo cerrado se mantiene estable si los ceros son de fase mínima.

Del análisis del Ejemplo 21 se obtiene la conjetura de que para lidiar con la presencia de ceros inciertos en la planta, basta con incluir tantos polos en $s = 0$ como cantidad de ceros inciertos.

Ya con la estructura del controlador elegida, se procede a utilizar el Teorema del Mapeo y ya que se satisfacen los supuestos se tiene que el Value Set está limitado por los valores extremos de los polos inciertos. Así que se plantea el polinomio de lazo cerrado separado en su parte real e imaginaria y cada parte se iguala a cero, como se muestra en (3.102)-(3.104). Se forma un sistema de ecuaciones que, al evaluar en los puntos extremos, dará como solución el mínimo α que consiga la estabilidad robusta de la familia de polinomios.

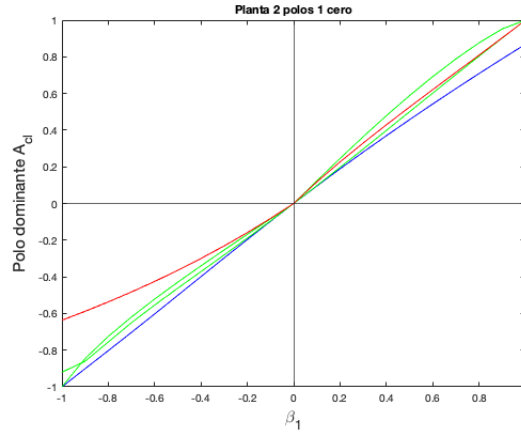


Figura 3.16: Polo dominante del A_{cl} vs β_1

Al evaluar el sistema de ecuaciones en $[\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [-1, -1, 1, 1, 1]$ se procede a resolver numéricamente el sistema, donde se limitan el conjunto solución a $\omega \geq 0$ y $\alpha > 0$ obteniéndose como solución $(\alpha; \omega) = (1,34; 3,97)$.

$$A_{cl}(s) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.102)$$

$$P(\omega) = \omega^4(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) - \omega^2(\alpha^3 - 3\alpha^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\alpha\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \alpha^3\beta_1\beta_2 \quad (3.103)$$

$$Q(\omega) = \omega^5 - \omega^3(3\alpha^2 - 3\alpha(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + \omega(-\alpha^3(\beta_1 + \beta_2) + 3\alpha^2\beta_1\beta_2) \quad (3.104)$$

Finalmente, en la Figura 3.17a se grafica el Value Set del polinomio (3.101) para la planta del Ejemplo 20 considerando el ancho de banda nominal $\alpha = 1,34$ obtenido en el sistema de ecuaciones. Por su parte, en la Figura 3.17b se hace un acercamiento al origen del plano complejo y se muestra que, para el valor escogido del ancho de banda nominal $\alpha = 1,34$, el Value Set no incluye el origen, por tanto se cumplen los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero y entonces se obtiene que la familia de polinomios es robustamente estable.

En base a los casos que incorporan uno o dos ceros inciertos analizados anteriormente, es que se propone una variante de controlador. Este nuevo controlador sigue siendo bipropio pero se fuerza que tenga tantos polos en el origen como cantidad de ceros inciertos que tenga el modelo de la planta verdadera y sus parámetros se pueden obtener con el siguiente Lema:

Lema 22. *Sea un modelo nominal de alta frecuencia dado por (3.105). Se puede utilizar un controlador bipropio dado por (3.106) el cual tiene m polos en el origen debido a que el modelo verdadero de la planta tiene m ceros inciertos. Entonces el controlador queda en función del ancho de banda de lazo cerrado nominal α y sus coeficientes se calculan de acuerdo a (3.107) y (3.108).*

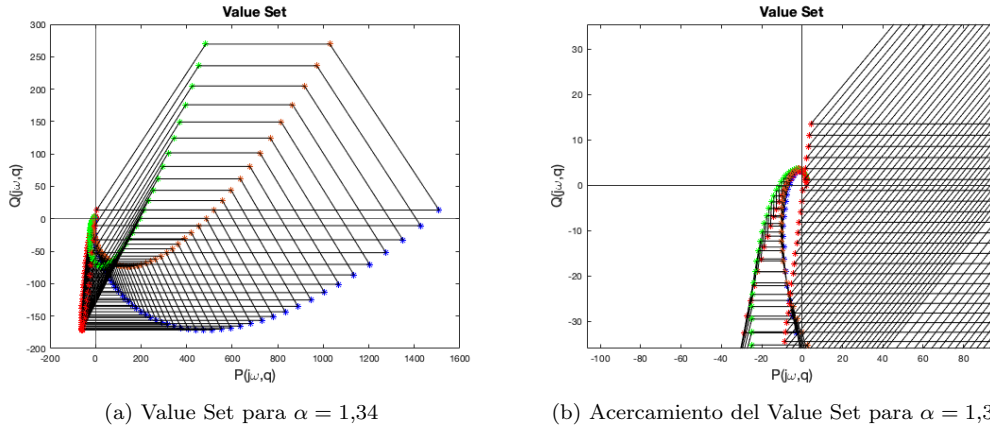


Figura 3.17: Value Set para el polinomio (3.101) con $\alpha = 1,34$

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} = \frac{b}{s^r} \quad (3.105)$$

$$C'(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_0 s^{r-1+m} + \dots + p_{r-1+m}}{s^m (s^{r-1} + \dots + l_{r-1})} \quad (3.106)$$

$$l_i = \binom{2r-1+m}{i} \alpha^i \quad i = \{1, \dots, r-1\} \quad (3.107)$$

$$p_i = \binom{2r-1+m}{r+i} \frac{\alpha^{r+i}}{b} \quad i = \{0, \dots, r-1+m\} \quad (3.108)$$

Demostración. El polinomio de lazo cerrado nominal que se obtiene al utilizar un controlador bipropio (3.106) al modelo nominal (3.105) es:

$$A_{cl0}(s) = A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) \quad (3.109)$$

$$= s^r s^m (s^{r-1} + \dots + l_{r-1}) + b(p_0 s^{r-1+m} + \dots + p_{r-1+m}) \quad (3.110)$$

$$= s^{2r-1+m} + \dots + l_{r-1} s^{r+m} + b p_0 s^{r-1+m} + \dots + b p_{r-1+m} \quad (3.111)$$

Se propone utilizar asignación de polos por lo que el polinomio (3.111) se iguala a $(s + \alpha)^{2r-1+m}$. Luego se utiliza el Teorema del Binomio con el cual se obtiene una expresión analítica para cada término del polinomio.

$$(s + \alpha)^{2r-1+m} = \sum_{k=0}^{2r-1+m} \binom{2r-1+m}{k} s^{2r-1+m-k} \alpha^k \quad (3.112)$$

Se iguala por coeficientes los polinomios (3.111) y (3.112) se obtiene (3.107) y (3.108) con lo que se demuestra el Lema. \square

3.6. Funciones de sensibilidad

En esta sección se analizan las funciones de sensibilidad del lazo de control, con el objetivo de mostrar el desempeño de los lazos de control en el transiente y también de analizar la

respuesta del lazo frente a señales de perturbación.

En base a la arquitectura de control de un grado de libertad, se tiene que el lazo cerrado es estable si y solo si las funciones de sensibilidad son estables. Este tipo de estabilidad se llama BIBO (Bounded Input Bounded Output) ya que para toda entrada acotada se obtiene una salida acotada.

Las funciones de sensibilidad indican cual será la respuesta de las señales internas del lazo de control. En específico se analizan las siguientes señales: referencia $R(s)$, actuación $U(s)$, salida de la planta $Y(s)$, perturbación de entrada $D_i(s)$, perturbación de salida $D_o(s)$ y el ruido de medición $D_m(s)$.

Las funciones de sensibilidad para el lazo nominal vienen dadas por: la sensibilidad complementaria nominal $T_o(s)$, la sensibilidad nominal $S_o(s)$, la sensibilidad de perturbación de entrada nominal $S_{io}(s)$ y la sensibilidad de control nominal $S_{uo}(s)$.

$$T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)} \quad (3.113)$$

$$S_o(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{A_o(s)L(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)} \quad (3.114)$$

$$S_{io} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)L(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)} \quad (3.115)$$

$$S_{uo} = \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{A_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)} \quad (3.116)$$

Se utiliza el modelo nominal y el controlador de las secciones anteriores, obteniéndose:

$$T_o(s) = \frac{b(p_0s^{r-1} + p_1s^{r-2} + \dots + p_{r-1})}{(s + \alpha)^{2r-1}} \quad (3.117)$$

$$S_o(s) = \frac{s^r(s^{r-1} + l_1s^{r-2} + \dots + l_{r-1})}{(s + \alpha)^{2r-1}} \quad (3.118)$$

$$S_{io}(s) = \frac{b(s^{r-1} + l_1s^{r-2} + \dots + l_{r-1})}{(s + \alpha)^{2r-1}} \quad (3.119)$$

$$S_{uo}(s) = \frac{s^r(p_0s^{r-1} + p_1s^{r-2} + \dots + p_{r-1})}{(s + \alpha)^{2r-1}} \quad (3.120)$$

Como es usual utilizar señales de referencias constante, se evalúan las funciones de sensibilidad a frecuencia cero, considerando $s = j\omega$ con $\omega = 0$. En (3.121) se muestra que la sensibilidad complementaria nominal tiene magnitud 1 a frecuencia cero, por lo que el lazo cerrado nominal tiene seguimiento perfecto a referencias constantes. La función de sensibilidad nominal (3.122) tiene magnitud cero con lo que se logra rechazo perfecto a perturbaciones de salida constantes. Esto es consecuencia que el modelo nominal de la planta tiene integradores múltiples. Asimismo se observa que la función de sensibilidad nominal de control es cero mientras que la sensibilidad de perturbación de entrada (3.123) depende de los parámetros del modelo nominal b y r pero se observa una dependencia inversamente proporcional con el ancho de banda nominal, en la medida que α aumenta se obtiene que la magnitud de $S_{io}(s)$ disminuye y en el límite $\alpha \rightarrow \infty$ da $S_{io}(0) \rightarrow 0$

$$T_o(0j) = \frac{bp_{r-1}}{\alpha^{2r-1}} = \frac{b\alpha^{2r-1}}{b\alpha^{2r-1}} = 1 \quad (3.121)$$

$$S_o(0j) = \frac{0}{\alpha^{2r-1}} = 0 \quad (3.122)$$

$$S_{io}(0j) = \frac{bl_{r-1}}{\alpha^{r-1}} = \frac{b(2r-1)!\alpha^{r-1}}{(r-1)!r!\alpha^{2r-1}} = \frac{b(2r-1)!}{(r-1)!r!\alpha^r} \quad (3.123)$$

$$S_{uo}(0j) = \frac{0}{\alpha^{2r-1}} = 0 \quad (3.124)$$

Para obtener las funciones de sensibilidad para el lazo cerrado basta con reemplazar el numerador y denominador $B_o(s)$ y $A_o(s)$ del modelo nominal por los de la planta verdadera $B(s)$ y $A(s)$. Se obtienen las siguientes cuatro funciones de transferencia.

$$T(s) = \frac{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1})}{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1}) + \sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})} \quad (3.125)$$

$$S(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})}{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1}) + \sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})} \quad (3.126)$$

$$S_i(s) = \frac{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})}{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1}) + \sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})} \quad (3.127)$$

$$S_u(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1})}{b \sum_{j=1}^m (s - \beta_j)(p_0 s^{r-1} + \dots + p_{r-1}) + \sum_{i=1}^n (s - \alpha_i)(s^{r-1} + \dots + l_{r-1})} \quad (3.128)$$

Las funciones de sensibilidad del lazo cerrado dependen de los parámetros inciertos pero se puede utilizar el Teorema del Valor Inicial y el Teorema del Valor Final para obtener los valores iniciales y finales de las señales características del lazo cerrado.

- Para la función de sensibilidad complementaria se observa que el valor estacionario depende inversamente del parámetro α lo cual implica que el error de seguimiento tenderá a cero en la medida que $\alpha \rightarrow \infty$. Además, la señal de error comenzará con un valor cero, independiente de α .

$$T(0) = \frac{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j)p_{r-1}}{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j)p_{r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i)l_{r-1}} \quad (3.129)$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^m (-\beta_j)\alpha^{2r-1}}{\sum_{j=1}^m (-\beta_j)\alpha^{2r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \frac{(2r-1)!}{(r-1)!r!} \alpha^{r-1}} \quad (3.130)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T(0) = 1 \quad (3.131)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = 0 \quad (3.132)$$

- Con la función de sensibilidad se obtiene el impacto de la perturbación de salida en la señal de salida. Con las expresiones siguientes se observa que el rechazo perfecto en estado estacionario de perturbaciones se logra con el aumento de α .

$$S(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (-\alpha_i) l_{r-1}}{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j) p_{r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) l_{r-1}} \quad (3.133)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \frac{(2r-1)!}{r!(r-1)!} \alpha^{r-1}}{\sum_{j=1}^m (-\beta_j) \alpha^{2r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \frac{(2r-1)!}{(r-1)!r!} \alpha^{r-1}} \quad (3.134)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S(0) = 0 \quad (3.135)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S(s) = 1 \quad (3.136)$$

La función de sensibilidad de entrada indica que hay un rechazo de la perturbación de entrada $d_i(t)$ en la medida que el ancho de banda nominal tiende a ∞ .

$$S_i(0) = \frac{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j) l_{r-1}}{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j) p_{r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) l_{r-1}} \quad (3.137)$$

$$= \frac{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j) \frac{(2r-1)!}{r!(r-1)!} \alpha^{r-1}}{\sum_{j=1}^m (-\beta_j) \alpha^{2r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \frac{(2r-1)!}{(r-1)!r!} \alpha^{r-1}} \quad (3.138)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_i(0) = 0 \quad (3.139)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S_i(s) = 0 \quad (3.140)$$

La función de sensibilidad de control implica que en la medida que α aumenta, la señal de actuación se estaciona en un valor que depende de los polos y ceros inciertos y que comienza con valores altos debido a la dependencia α^r

$$S_u(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (-\alpha_i) p_{r-1}}{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j) p_{r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) l_{r-1}} \quad (3.141)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \alpha^{2r-1} / b}{\sum_{j=1}^m (-\beta_j) \alpha^{2r-1} + \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) \frac{(2r-1)!}{(r-1)!r!} \alpha^{r-1}} \quad (3.142)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_u(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (-\alpha_i)}{b \sum_{j=1}^m (-\beta_j)} \quad (3.143)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S_u(s) = p_0 = \frac{(2r-1)! \alpha^r}{r!(r-1)!b} \quad (3.144)$$

Para ejemplificar se trabajará con una planta dada por (3.145) cuyo modelo nominal es un integrador doble y el controlador bipropio de primer orden. Se considera que los polos están dentro del conjunto límite $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ por lo que el lazo cerrado será estable para toda la familia de plantas si $\alpha > 2,42$.

$$G_c(s) = \frac{3(s - \beta_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \quad (3.145)$$

Primero se grafican las respuestas escalón de las funciones de sensibilidad para un ancho de banda nominal $\alpha = 5$. Como se escogió un α solo un poco mayor a la cota ínfima, se

obtiene que el lazo es estable pero el efecto de los parámetros inciertos es apreciable. Lo anterior se refleja en las Figuras 3.18a, 3.18b, 3.18c, 3.18d. Donde se observa que todas las funciones de sensibilidad son estables pero no se alcanza el seguimiento perfecto a referencia constante, ni el rechazo de perturbaciones constantes.

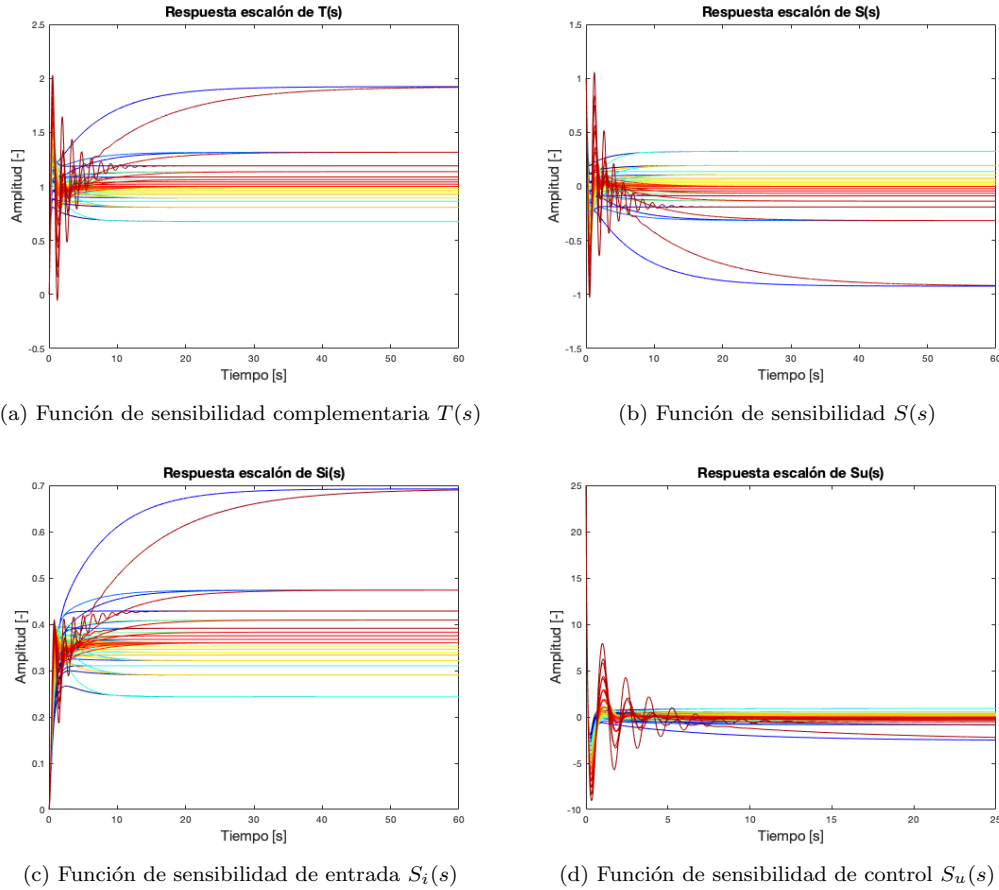


Figura 3.18: Funciones de sensibilidad para un ancho de banda de lazo cerrado nominal igual a $\alpha = 5$

En las Figuras 3.19 se utilizó un ancho de banda nominal $\alpha = 50$ lo que es bastante mayor al ínfimo antes obtenido. Con esto se logra que las funciones de sensibilidad sean mucho más cercanas a las nominales. El efecto de los parámetros con incertidumbre se vuelve despreciable y en estado estacionario se alcanza un mejor seguimiento a referencias constantes y un mejor rechazo a perturbaciones. Además, se observa que el valor inicial de la sensibilidad de control depende de α^r .

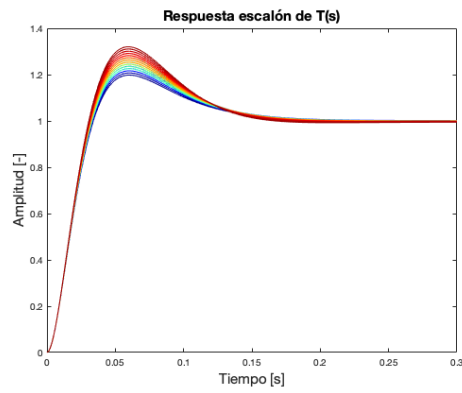
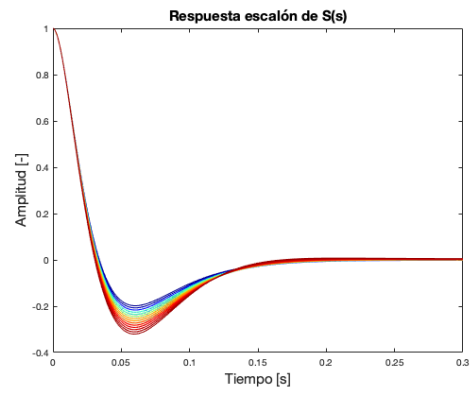
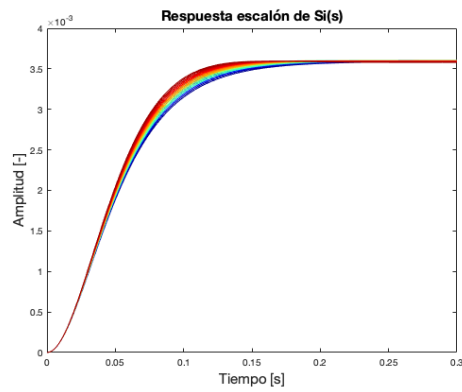
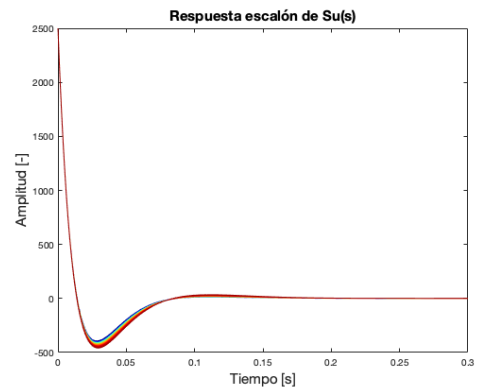
(a) Función de sensibilidad complementaria $T(s)$ (b) Función de sensibilidad $S(s)$ (c) Función de sensibilidad de entrada $S_i(s)$ (d) Función de sensibilidad de control $S_u(s)$

Figura 3.19: Funciones de sensibilidad para un ancho de banda de lazo cerrado nominal igual a $\alpha = 50$

SISTEMAS MUESTREADOS

En este capítulo se considera el problema de diseñar un controlador de alto ancho de banda que establezca una planta con polos inciertos en base a su modelo de tiempo discreto. Se calculan los modelos discretos de la planta con incertidumbre y luego se obtienen expresiones de los modelos nominales, los cuales se mostrará que dependen de los polinomios de Euler-Frobenius. Luego se diseña el controlador y se analiza la estabilidad del lazo cerrado nominal y el verdadero.

4.1. Modelo de tiempo discreto de la planta

Los modelos discretos describen fenómenos que de por sí evolucionan en tiempo discreto o bien son descripciones en tiempo discreto de sistemas continuos que interactúan con dispositivos discretos como lo es un computador o un microcontrolador, entre otros. En esta sección se muestra como obtener una función de transferencia en el dominio de la transformada Zeta $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ proveniente del modelo continuo de un sistema en el dominio de la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$.

Hoy en día los controladores ya no se implementan en forma análoga sino que por medio de computadores, los cuales operan en tiempo discreto. Por tanto, se necesita que la señal proveniente de sistema físico sea muestreada. Luego esta señal es procesada por el controlador que funciona como un filtro digital y finalmente debe pasar por un retentor, un dispositivo que se encarga de transformar la señal discreta en una señal continua. Todo este proceso requiere de convertidores análogos-digitales (o muestreadores) y digitales-análogos (o retentores).

La opción más común es utilizar un retentor de orden zero (ZOH) para que la actuación u_k pase de ser discreta a ser continua $u(t)$. Este retentor consiste en mantener la señal de la muestra por un período Δ y luego actualizarse con la siguiente muestra, es decir,

$$u(t) = u_k \quad k\Delta \leq t < (k+1)\Delta \quad (4.1)$$

El ZOH tiene la ventaja de que al ser el más sencillo requiere menos tiempo de cálculo y corresponde a la mayoría de los convertidores digital-análogo. La función de transferencia que describe al ZOH [17] viene dada por:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-\Delta s}}{\Delta s} \quad (4.2)$$

La función de transferencia del ZOH se expresa en función de la transformada de Laplace por lo que es un sistema de tiempo continuo pero tiene por entrada la actuación de tiempo discreto, lo que genera una incongruencia. Para evitar esta incongruencia matemática, se puede considerar que la señal de entrada u_k es un tren de impulsos de distintas amplitudes. Luego el tren de impulsos es equivalente a un tren de deltas de Dirac en los instantes de muestreo $k\Delta = t$ por lo que no habría problema con la naturaleza de las señales.

Una vez que se define el retentor a utilizar, se puede obtener el modelo discreto exacto de la planta continua. Lo anterior viene dado por el siguiente lema:

Lema 23. (*Modelo discreto exacto utilizando ZOH*) La función de transferencia del modelo discreto exacto al utilizar un ZOH puede ser obtenido mediante la siguiente expresión:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \quad (4.3)$$

$$= (1 - z^{-1}) \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{e^{s\Delta}}{z - e^{s\Delta}} \frac{G(s)}{s} ds \quad (4.4)$$

$$= (1 - z^{-1}) \sum_{l=0}^n \text{Res}_{s=p_l} \left\{ \frac{G(s)}{s} \frac{e^{s\Delta}}{z - e^{s\Delta}} \right\} \quad (4.5)$$

donde Δ es el período de muestreo y $\gamma \in \mathbb{R}$ es tal que todos los polos de $G(s)/s$ tienen parte real menor que γ . Al evaluar la integral compleja (4.4) se obtiene la expresión (4.5), donde los residuos son calculados en $p_0 = 0$ y en los polos del sistema $\{p_l\}_{l=1, \dots, n}$.

Demostración. Ver [5]. □

Se hace la acotación de que el modelo discreto $G(z)$ es exacto, en el sentido que si $G(z)$ es excitado por u_k y $G(s)$ es excitado por la misma señal pero que haya pasado por un ZOH $u(t)$, entonces las salidas de ambos modelos son idénticas en los instantes de muestreo, es decir, se puede garantizar $y(k\Delta) = y_k$.

No hay que olvidar que el problema a considerar en esta Tesis se da con un modelo de la planta que tiene incertidumbre en la posición de sus polos y ceros, por lo que el modelo discreto debe calcularse caso a caso.

Lo que se sabe a priori es que los polos de la planta continua son mapeados como se muestra en (4.6) lo que se obtiene directamente de (4.5).

$$s = \alpha_i \rightarrow z = e^{\alpha_i \Delta} \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \quad (4.6)$$

Lo anterior genera un problema ya que en el modelo discreto, las incertidumbres ya no aparecerán en el modelo verdadero de la planta con una estructura multilineal, ya que cada factor $(s - \alpha_i)$ se mapea a $(z - e^{\alpha_i \Delta})$, y por tanto no se cumplen los requisitos del Teorema del Mapeo. No obstante, el Teorema de Exclusión del Cero sigue siendo válido y es en base a este teorema que se buscará la cota inferior para el ancho de banda nominal α que asegura la estabilidad robusta del lazo cerrado verdadero.

Por otro lado, la relación entre los ceros continuos y su contraparte discreta no es tan directa ya que se pueden distinguir dos tipos de ceros: los ceros propios de la planta y

los ceros de muestreo. Los ceros propios de la planta se calculan caso a caso al obtener el modelo discreto mientras que los ceros de muestreo son ceros que aparecen debido al proceso de muestreo. La ubicación exacta de ambos tipos de ceros dependen del tipo de retentor que se use y del período de muestreo.

Los polos y ceros de la planta discreta dependen del tipo de retentor que se utilice y del período de muestreo.

4.2. Modelo nominal discreto

En esta Tesis se trabaja con control de alto ancho de banda y en el caso discreto, operar en alta frecuencia (cercano a la frecuencia de Nyquist $\omega_N = 2\pi/\Delta$) genera una dificultad ya que aparece la influencia de los ceros de muestreo. En [5] se plantea la importancia de incluir los ceros de muestreo al momento de diseñar el controlador, razón por la cual en este capítulo se proponen dos modelos nominales, ambos en base al modelo nominal de tiempo continuo $G_o(s) = b/s^r$: El primero (4.7) incluye los ceros de muestreo y el segundo (4.8) no los considera. De esta forma se mostrará el efecto que tienen al momento de diseñar el controlador y en la estabilidad del lazo cerrado verdadero.

$$G_0^1(z) = \frac{\Delta^r}{r!} \frac{B_r(z)}{(z-1)^r} \quad (4.7)$$

$$G_0^2(z) = \frac{\Delta^r}{(z-1)^r} \quad (4.8)$$

El primer modelo nominal $G_0^1(z)$ se obtiene a partir del siguiente Lema:

Lema 24. *Sea un período de muestreo Δ y un modelo continuo dado por $G(s) = 1/s^r$, entonces su modelo discreto exacto viene dado por:*

$$G^0(z) = \frac{\Delta^r}{r!} \frac{B_r(z)}{(z-1)^r} \quad (4.9)$$

donde:

$$B_r(z) = b_1^r z^{r-1} + b_2^r z^{r-2} + \dots + b_r^r \quad (4.10)$$

$$b_k^r = \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} l^r \binom{r+1}{k-l} \quad (4.11)$$

Demostración. Ver [5]. □

En el lema anterior se observa que el modelo discreto nominal $G_0^1(z)$ depende de los polinomios $B_r(z)$ de Euler Frobenius. Estos polinomios tienen una serie de propiedades como:

1. Sus coeficientes son calculados recursivamente. $b_1^r = b_r^r = 1, \forall r \geq 1$, y se cumple:

$$b_k^r = k b_k^{r-1} + (r-k+1) b_{k-1}^{r-1} \quad (4.12)$$

para $k = 2, \dots, r-1$.

2. Debido a la simetría en sus coeficientes se cumple que si $B_r(z_0) = 0$, entonces $B_r(z_0^{-1}) = 0$.
3. Sus raíces están siempre sobre el eje real negativo.
4. Cumplen con la propiedad de raíces entrelazadas, es decir, toda raíz de $B_r(z)$ se encuentra entre dos raíces adyacentes de $B_{r+1}(z)$, para $r \geq 2$.
5. Se pueden calcular de forma recursiva, cumpliéndose:

$$B_{r+1}(z) = z(1-z)\frac{dB_r}{dz} + (rz+1)B_r(z) \quad (4.13)$$

para todo $r \geq 1$.

Para obtener los polinomios se observa que el primer polinomio se obtiene a partir de la primera propiedad por lo que corresponde a $B_1(z) = 1$ y en base a este se pueden obtener los siguientes miembros de la familia con la propiedad recursiva. A continuación se muestran los primeros miembros de la familia de polinomios.

$$B_1(z) = 1 \quad (4.14)$$

$$B_2(z) = z + 1 \quad (4.15)$$

$$B_3(z) = z^2 + 4z + 1 \quad (4.16)$$

$$B_4(z) = z^3 + 11z^2 + 11z + 1 \quad (4.17)$$

Teniendo los polinomios de Euler-Frobenius se pueden obtener expresiones para los modelos de tiempo discreto nominales para diferentes grados relativos. En particular se obtuvieron los modelos para $r = \{1, 2, 3, 4\}$ como se muestra en (4.18)-(4.21) respectivamente. Solo con el fin de distinguir las funciones de transferencia es que en este apartado se agregó un superíndice G_0^{1-r} para indicar que son el primer modelo nominal de orden r .

$$G_0^{1-1}(z) = \frac{\Delta B_1(z)}{z-1} = \frac{\Delta}{z-1} \quad (4.18)$$

$$G_0^{1-2}(z) = \frac{\Delta^2 B_2(z)}{2(z-1)^2} = \frac{\Delta^2(z+1)}{2(z-1)^2} \quad (4.19)$$

$$G_0^{1-3}(z) = \frac{\Delta^3 B_3(z)}{3!(z-1)^3} = \frac{\Delta^3(z^2+4z+1)}{6(z-1)^3} \quad (4.20)$$

$$G_0^{1-4}(z) = \frac{\Delta^4 B_4(z)}{4!(z-1)^4} = \frac{\Delta^4(z^3+11z^2+11z+1)}{24(z-1)^4} \quad (4.21)$$

Los ceros de muestreo son ceros que aparecen en el modelo discreto debido al proceso de discretización y que no tienen una contra parte en el modelo continuo. Estos ceros dependen del período de muestreo Δ y van acercándose asintóticamente a posiciones fijas en el plano

de la transformada \mathcal{Z} a medida que $\Delta \rightarrow 0$. Lo más destacable es que las posiciones fijas a las que tienden los ceros de muestreos coinciden con los ceros de los polinomios de Euler Frobenius.

Finalmente, los modelos nominales de tiempo discreto que no consideran los ceros de muestreo se obtienen de utilizar la aproximación de Euler al modelo nominal de alta frecuencia de tiempo continuo $1/s^r$. Esta aproximación consta de reemplazar la variable compleja s por $(z-1)/\Delta$. Con lo que los segundos modelos nominales para un grado relativo $r = \{1, 2, 3, 4\}$ se muestran en (4.22)-(4.25) respectivamente.

$$G_0^{2-1}(z) = \frac{\Delta}{z-1} \quad (4.22)$$

$$G_0^{2-2}(z) = \frac{\Delta^2}{(z-1)^2} \quad (4.23)$$

$$G_0^{2-3}(z) = \frac{\Delta^3}{(z-1)^3} \quad (4.24)$$

$$G_0^{2-4}(z) = \frac{\Delta^4}{(z-1)^4} \quad (4.25)$$

4.3. Diseño del controlador

Para el diseño del control discreto se utiliza la misma arquitectura de control de un grado de libertad de la Figura 3.4. Se diseña el controlador en base a ambos modelos nominales los cuales son de orden r por lo que se necesita de un controlador bipropio de grado $r-1$ para poder utilizar el método de asignación de polos y cumplir con las ecuaciones necesarias para hacer la igualación de polinomios. El controlador tiene entonces la siguiente estructura:

$$C(z) = \frac{p_0 z^{r-1} + \dots + p_{r-1}}{z^{r-1} + \dots + l_{r-1}} \quad (4.26)$$

El polinomio de lazo cerrado nominal para el modelo nominal que considera los ceros de muestreo $G_0^1(z)$ se muestra a continuación:

$$A_{cl0}(z) = (z-1)^r (z^{r-1} + \dots + l_{r-1}) + \frac{\Delta^r}{r!} B_r(z) (p_0 z^{r-1} + \dots + p_{r-1}) \quad (4.27)$$

Mientras que el polinomio característico para el modelo nominal que no considera los ceros de muestreo $G_0^2(z)$ es:

$$A_{cl0}(z) = (z-1)^r (z^{r-1} + \dots + l_{r-1}) + \Delta^r (p_0 z^{r-1} + \dots + p_{r-1}) \quad (4.28)$$

Para la asignación de polos se dejan los $2r-1$ polos de lazo cerrado en $z = 1 - \alpha\Delta$. Esta elección se hace con el fin de variar linealmente el parámetro de diseño α entre 0 y la frecuencia de Nyquist $f_N = \frac{1}{\Delta}$. Cuando $\alpha = 0$ se tiene que el ancho de banda nominal es cero y cuando $\alpha = \frac{1}{\Delta}$ el ancho de banda es lo más rápido posible, siendo un controlador de latido muerto (dead beat) [11].

De forma general, se hace asignación de polos para el lazo cerrado nominal y se fijan los polos en $z = 1 - \alpha\Delta$, de esta forma se tiene una analogía entre el parámetro α en

tiempo continuo y en tiempo discreto. Cuando $\alpha = 0$ se tiene que el lazo cerrado nominal es críticamente estable con polos de lazo cerrado en $z = 1$. En la medida que α aumenta y se acerca a $1/\Delta$ los polos de lazo cerrado tienden a $z = 0$.

4.4. Plantas con polos inciertos

En esta sección se analiza la estabilidad robusta de plantas sin ceros con polos inciertos, utilizando los modelos muestreados considerando un ZOH. En concreto se analizará las plantas de primer, segundo y tercer orden.

4.4.1. Planta de primer orden

El modelo de la planta en tiempo continuo de primer orden está descrito por la ganancia de alta frecuencia b y un polo α_1 acotado por $|\alpha_1| < M$ como se muestra a continuación:

$$G_c(s) = \frac{b}{s - \alpha_1} \quad (4.29)$$

El modelo discreto exacto se obtiene al utilizar (4.5) obteniéndose:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \sum_{l=0}^n \text{Res}_{s=p_l} \left\{ \frac{b}{s(s-\alpha_1)} \frac{e^{s\Delta}}{z - e^{s\Delta}} \right\} \quad (4.30)$$

$$= \frac{b(z-1)}{z} \left(\frac{1}{-\alpha_1(z-1)} + \frac{e^{\alpha_1\Delta}}{\alpha_1(z - e^{\alpha_1\Delta})} \right) \quad (4.31)$$

$$= \frac{b(z-1)}{\alpha_1 z} \frac{z(e^{\alpha_1\Delta})}{(z-1)(z - e^{\alpha_1\Delta})} \quad (4.32)$$

$$= \frac{b(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1(z - e^{\alpha_1\Delta})} \quad (4.33)$$

Se observa que este modelo es válido para $\alpha_1 \neq 0$ pero el parámetro incierto α_1 puede tomar cualquier valor dentro del rango $Q = [-M, M]$ por lo que se evalúa aparte el caso en que $\alpha_1 = 0$. En este caso el modelo de la planta es el modelo nominal y por tanto queda modelado por:

$$G_0(z) = \frac{b\Delta}{z-1} \quad (4.34)$$

Al variar continuamente el parámetro α_1 el modelo discreto de la planta también debe hacerlo. Para verificar que se cumple lo anterior, se calcula el límite del modelo discreto con $\alpha_1 \rightarrow 0$, como se muestra a continuación:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{b(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1(z - e^{\alpha_1\Delta})} = \frac{b\Delta e^{\alpha_1\Delta}}{z - e^{\alpha_1\Delta} - \alpha_1\Delta e^{\alpha_1\Delta}} \Big|_{\alpha_1=0} = \frac{b\Delta}{z-1} \quad (4.35)$$

Luego se procede a diseñar el controlador y como el modelo de la planta es de primer orden, el controlador viene dado por la ganancia p_0 , como se muestra a continuación:

$$C(z) = p_0 \quad (4.36)$$

Debido también a que la planta verdadera tiene grado relativo 1, es que el modelo nominal que considera los ceros de muestreo es igual al modelo nominal que no considera los ceros de muestreo. Es por esto que solo se trabaja con un polinomio de lazo cerrado nominal el cual se muestra a continuación:

$$A_{cl0}(z) = z - 1 + b\Delta p_0 = (z - 1 + \alpha\Delta) \quad (4.37)$$

Al realizar la igualación de coeficientes se obtiene que el controlador queda definido con:

$$p_0 = \frac{\alpha}{b} \quad (4.38)$$

Posteriormente se implementa el controlador a la planta verdadera, con lo que el polinomio de lazo cerrado es:

$$A_{cl}(z) = z - e^{\alpha_1\Delta} + \frac{b(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1} \frac{\alpha}{b} \quad (4.39)$$

Como el polinomio de lazo cerrado es de primer orden, el polo de lazo cerrado se puede obtener directamente y para garantizar estabilidad es necesario y suficiente que este tenga magnitud menor a 1. A continuación se muestra que el polo tiene magnitud menor a 1 si $\alpha > \alpha_1$, destacando que en (4.42) el término $\frac{e^{\alpha_1\Delta} - 1}{\alpha_1}$ es positivo $\forall \alpha_1 \in \mathbb{Q}$ ya que el período de muestreo es al menos 10 veces α_1 .

$$z = e^{\alpha_1\Delta} - \frac{\alpha(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1} \quad (4.40)$$

$$e^{\alpha_1\Delta} - \frac{\alpha(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1} < 1 \quad (4.41)$$

$$e^{\alpha_1\Delta} - 1 < \frac{\alpha(e^{\alpha_1\Delta} - 1)}{\alpha_1} \quad (4.42)$$

$$\alpha_1 < \alpha \quad (4.43)$$

Por tanto se obtiene que el parámetro de diseño α debe ser mayor a α_1 . Lo anterior se puede verificar con el Value Set y para esto se considera el siguiente ejemplo:

Ejemplo 25. Considere una planta de primer orden (4.34) con $b = 2$, $\alpha_1 = 1$, $M = [-1, 1]$ y un período de muestreo $\Delta = (1/10M)$, entonces su función de transferencia viene dada por (4.44). El modelo nominal es (4.45) y el controlador a utilizar es (4.46).

$$G(z) = \frac{0,2103}{z - 1,105} \quad (4.44)$$

$$G_0(z) = \frac{0,2}{z - 1} \quad (4.45)$$

$$C(z) = 0,55 \quad (4.46)$$

En la Figura 4.1a se muestra el Value Set del polinomio de lazo cerrado que se obtiene al utilizar el controlador (4.46) con la planta (4.44) y fijando el ancho de banda nominal en $\alpha = 1,1$. Se evalúa el vector de incertidumbre de -1 a 1 cada $0,001$. En esta figura se

muestra en negro las curvas generadas en los valores límite $\alpha_1 = \{-1, 1\}$ y en azul las curvas generadas con los valores intermedios. En la Figura 4.1b se muestra un acercamiento del origen del plano complejo en que se marcó el origen con una marca (*) roja, y ya que el Value Set no contiene este punto entonces se cumplen los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero, y por tanto, el polinomio de lazo cerrado es robustamente estable.

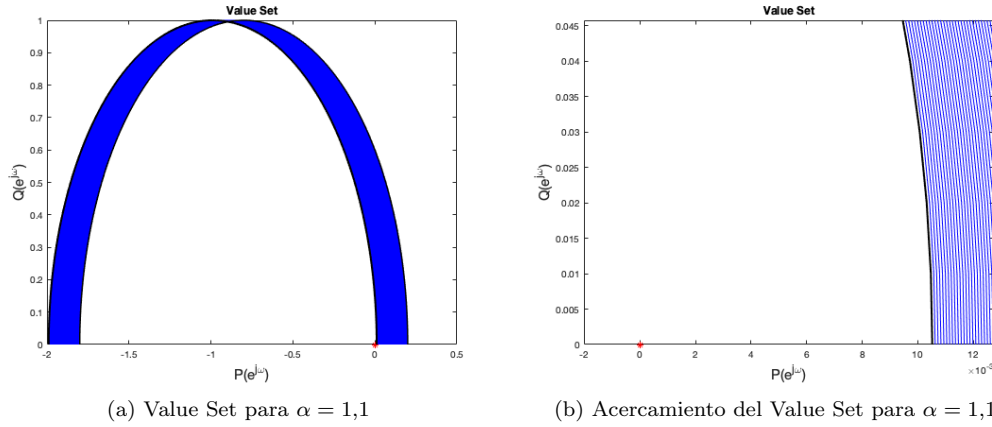


Figura 4.1: Value Set para $\alpha = 1,1$

Observación 26. Cabe destacar que en este caso de primer orden la condición sobre el ancho de banda nominal α es independiente del período de muestreo Δ . Lo que no sucederá en los casos de orden superior y por tanto se debe fijar un criterio para su elección.

4.4.2. Planta de segundo orden

El caso de orden dos tiene una función de transferencia continua dada por (4.47), con un conjunto límite $Q = [-M, M][-M, M]$. Por el análisis del Capítulo 3 se sabe que para garantizar estabilidad robusta es necesario y suficiente que el ancho de banda nominal cumpla que $\alpha > 2,42M$.

$$G_2(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (4.47)$$

Ahora se discretiza el modelo de la planta utilizando el Lema 23 obteniéndose:

$$G_2(z) = \frac{b(\alpha_2(e^{\alpha_1\Delta} - 1) - \alpha_1(e^{\alpha_2\Delta} - 1)) - \alpha_1e^{\alpha_1\Delta}(1 - e^{\alpha_2\Delta}) + \alpha_2e^{\alpha_2\Delta}(1 - e^{\alpha_1\Delta})}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)(z - e^{\alpha_1\Delta})(z - e^{\alpha_2\Delta})} \quad (4.48)$$

El modelo discreto (4.48) no está bien definido con: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Pero al igual que en el caso de primer orden, se tiene que los parámetros inciertos varían continuamente, por lo que el modelo de la planta también debe variar continuamente. Es por esto que se calcula el límite correspondiente a cada caso en que el modelo (4.48) no está bien definido.

1. Primero se estudia el caso en que $\alpha_1 = 0$ en la función de transferencia (4.47) y se calcula el modelo discreto directamente con el Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{2-1}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s^2(s-\alpha_2)} \right\} \right\} \quad (4.49)$$

$$= \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L} \left\{ -\frac{1}{\alpha_2^2 s} - \frac{1}{\alpha_2 s} + \frac{1}{\alpha_2^2(s-\alpha_2)} \right\} \right\} \quad (4.50)$$

$$= \frac{b(z-1)}{z} \left(\frac{-z}{\alpha_2^2(z-1)} - \frac{z\Delta\alpha_2}{\alpha_2^2(z-1)^2} + \frac{z}{\alpha_2^2(z-e^{\alpha_2\Delta})} \right) \quad (4.51)$$

$$= \frac{b(z(e^{\alpha_2\Delta} - 1 - \alpha_2\Delta) + \alpha_2\Delta e^{\alpha_2\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + 1)}{\alpha_2^2(z - e^{\alpha_2\Delta})(z-1)} \quad (4.52)$$

Lo que se busca demostrar es que al calcular el límite de la expresión del modelo discreto de segundo orden (4.48) con $\alpha_1 \rightarrow 0$ se obtiene (4.52), como se muestra a continuación:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} G_2(z) \quad (4.53)$$

$$= \lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{b(z(\alpha_2\Delta e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + 1) - (e^{\alpha_1\Delta} + \alpha_1\Delta e^{\alpha_1\Delta})(1 - e^{\alpha_2\Delta}) - \alpha_2\Delta e^{\alpha_2\Delta} e^{\alpha_1\Delta})}{\alpha_2(z - e^{\alpha_2\Delta})[(2\alpha_1 - \alpha_2)(z - e^{\alpha_1\Delta}) + (\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2)(-\Delta e^{\alpha_1\Delta})]} \quad (4.54)$$

$$= \frac{b(z(e^{\alpha_2\Delta} - 1 - \alpha_2\Delta) + \alpha_2\Delta e^{\alpha_2\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + 1)}{\alpha_2^2(z - e^{\alpha_2\Delta})(z-1)} = G_{2-1}(z) \quad (4.55)$$

Con lo que se demuestra que hay continuidad en el modelo discreto con $\alpha_1 = 0$. El caso en que $\alpha_2 \rightarrow 0$ da el mismo resultado, sólo hay que intercambiar α_1 con α_2 .

2. El segundo caso considera que $\alpha_2 = \alpha_1 \neq 0$ y se obtiene la función de transferencia discreta utilizando el Lema 23, la cual se muestra a continuación:

$$G_{2-2}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s(s-\alpha_1^2)} \right\} \right\} \quad (4.56)$$

$$= \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\alpha_1^2 s} - \frac{1}{\alpha_1^2(s-\alpha_1)} + \frac{1}{\alpha_1(s-\alpha_1)^2} \right\} \right\} \quad (4.57)$$

$$= \frac{b(z(1 - e^{\alpha_1\Delta} + \alpha_1\Delta e^{\alpha_1\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} - 1 - \alpha_1\Delta))}{\alpha_1^2(z - e^{\alpha_1\Delta})^2} \quad (4.58)$$

La continuidad se debe dar con el modelo (4.48) al calcular el límite $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$.

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \frac{b(z(\alpha_2(e^{\alpha_1\Delta} - 1) - \alpha_1(e^{\alpha_2\Delta} - 1)) - \alpha_1 e^{\alpha_1\Delta}(1 - e^{\alpha_2\Delta}) + \alpha_2 e^{\alpha_2\Delta}(1 - e^{\alpha_1\Delta}))}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)(z - e^{\alpha_1\Delta})(z - e^{\alpha_2\Delta})} \quad (4.59)$$

$$= G_{2-2}(z) \quad (4.60)$$

3. El último caso es en el que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ el cual en tiempo continuo corresponde a la planta nominal, por lo que el modelo discreto exacto es (4.19). Se calcula el límite de (4.48) con $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (0, 0)$, como se muestra a continuación:

$$\lim_{(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (0, 0)} G_2(z) = \frac{b\Delta^2(z+1)}{2(z-1)^2} \quad (4.61)$$

Se concluye que el modelo nominal discreto es continuo en la medida que α_1 y α_2 varían continuamente en todo Q .

Ya con el modelo discreto de la planta, se prosigue con los modelos nominales. El modelo nominal que considera los ceros de muestreo es (4.62) y el modelo nominal que no considera los ceros de muestreo es (4.63). Ambos modelos son de orden dos por lo que el controlador propuesto es bipropio de orden uno como se muestra en (4.64).

$$G_0^1(z) = \frac{b\Delta^2(z+1)}{2(z-1)^2} \quad (4.62)$$

$$G_0^2(z) = \frac{b\Delta^2}{(z-1)^2} \quad (4.63)$$

$$C(z) = \frac{p_0z + p_1}{z + l_1} \quad (4.64)$$

Para el primer modelo nominal se calcula el polinomio de lazo cerrado nominal (4.65), el cual se iguala por coeficientes al polinomio $(z-1+\alpha\Delta)^3$. Al hacer la igualación de coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones (4.66)-(4.68).

$$A_{cl0}^1(z) = z^3 + z^2(l_1 - 2 + \frac{b\Delta^2 p_0}{2}) + z(1 - 2l_1 + \frac{b\Delta^2(p_1 + p_0)}{2}) + l_1 + \frac{\Delta^2 p_1 b}{2} \quad (4.65)$$

$$l_1 - 2 + \frac{b\Delta^2 p_0}{2} = 3(-1 + \alpha\Delta) \quad (4.66)$$

$$1 - 2l_1 + \frac{b\Delta^2(p_1 + p_0)}{2} = 3(-1 + \alpha\Delta)^2 \quad (4.67)$$

$$l_1 + \frac{\Delta^2 p_1 b}{2} = (-1 + \alpha\Delta)^3 \quad (4.68)$$

Al despejar el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que los coeficientes del controlador vienen dados por:

$$l_1 = \frac{(\alpha\Delta)^3}{4} - \frac{3(\alpha\Delta)^2}{2} + 3\alpha\Delta - 1 \quad (4.69)$$

$$p_0 = \frac{3\alpha^2}{b} - \frac{\alpha^3\Delta}{2b} \quad (4.70)$$

$$p_1 = \frac{3\alpha^3\Delta}{2b} - \frac{3\alpha^2}{b} \quad (4.71)$$

Por otro lado, si ahora se considera el modelo nominal $G_0^2(z)$ que no incluye los ceros de muestreo, el lazo cerrado nominal viene dado por el polinomio (4.72) y al igualar coeficientes con el polinomio $(z - 1 + \alpha\Delta)^3$ se obtiene el sistema de ecuaciones dado por (4.73)-(4.75).

$$A_{z_{l0}}^2(z) = z^3 + z^2(l_1 - 2) + z(1 - 2l_1 + b\Delta^2 p_0) + l_1 + b\Delta^2 p_1 \quad (4.72)$$

$$l_1 - 2 = 3(-1 + \alpha\Delta) \quad (4.73)$$

$$1 - 2l_1 + b\Delta^2 p_0 = 3(-1 + \alpha\Delta)^2 \quad (4.74)$$

$$l_1 + b\Delta^2 p_1 = (-1 + \alpha\Delta)^3 \quad (4.75)$$

Al despejar el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que los coeficientes del controlador vienen dados por:

$$l_1 = 3\alpha\Delta - 1 \quad (4.76)$$

$$p_0 = \frac{3\alpha^2}{b} \quad (4.77)$$

$$p_1 = \frac{\alpha^3\Delta}{b} - \frac{3\alpha^2}{b} \quad (4.78)$$

Con el fin de ilustrar la importancia que tienen los ceros de muestreo en alta frecuencia es que se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 27. *Sea una planta de segundo orden de tiempo continuo dada por (4.79). Se escoge un período de muestreo $\Delta = 0,1$ por lo que el modelo verdadero de tiempo discreto es (4.80).*

$$G(s) = \frac{3}{(s - 1)^2} \quad (4.79)$$

$$G(z) = \frac{0,016039(z + 1,069)}{(z - 1,105)^2} \quad (4.80)$$

Para cada modelo nominal se diseña un controlador, ambos son controladores bipropios de primer orden (4.64) pero se diferencian en que los parámetros $\{l_1, p_0, p_1\}$ se obtienen de forma distinta. Se utiliza (4.69)-(4.71) cuando el modelo nominal incluye los ceros de muestreo y se utiliza (4.76)-(4.78) cuando el modelo nominal no incluye los ceros de muestreo.

Se procede a graficar en la Figura 4.2 la magnitud del polo dominante de lazo cerrado verdadero en función del parámetro de diseño α , considerando el controlador $C_1(z)$ que se diseña a partir del modelo nominal que incluye los ceros de muestreo asintóticos y el controlador $C_2(z)$ que se diseña en base al modelo nominal que no incluye los ceros de muestreo asintóticos. Se observa que ambos son indistinguibles cuando el ancho de banda nominal α es pequeño y que hay una frecuencia en la cual se vuelven menores a 1 y por tanto se consigue que el lazo cerrado verdadero sea estable. Pero a medida que α crece, el polo dominante del modelo $G_0^2(z)$ aumenta de magnitud y vuelve el lazo cerrado verdadero inestable, mientras que para el caso del modelo G_0^1 el lazo cerrado verdadero se mantiene estable.

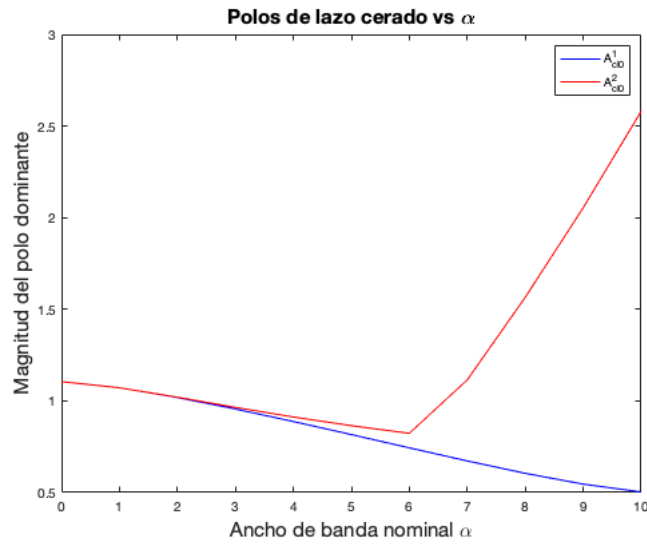


Figura 4.2: Magnitud del polo dominante de lazo cerrado nominal para modelo $G_0^1(z)$ en azul y $G_0^2(z)$ en rojo

Además, en la Figura 4.3 se graficaron las raíces del polinomio de lazo cerrado verdadero para ambos modelos, donde se observa que al no considerar los ceros de muestreo, hay un polo de lazo cerrado que sale del círculo unitario por el eje real negativo en la medida que el ancho de banda nominal se acerca a $\alpha = 1/\Delta$.

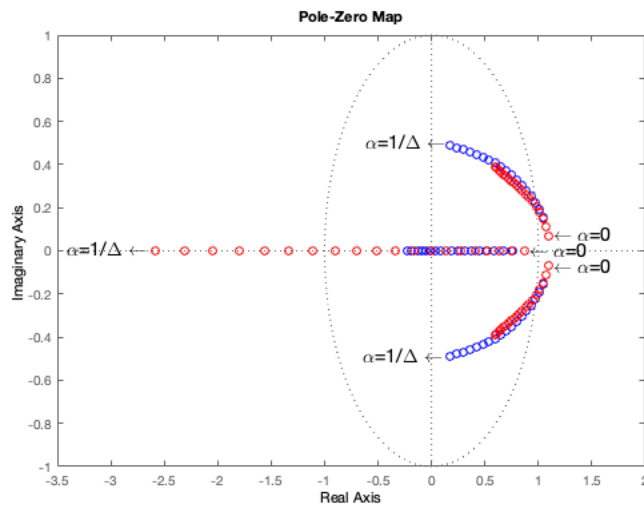


Figura 4.3: Mapa de las raíces del polinomio de lazo cerrado nominal utilizando $G_0^1(z)$ en azul y $G_0^2(z)$ en rojo

Ya que se ilustró la importancia de incluir los ceros de muestreo al diseñar un controlador de alto ancho de banda, es que ahora se analiza la estabilidad del polinomio de lazo cerrado verdadero que resulta de utilizar el controlador $C_1(z)$ que si incluye los ceros de muestreo junto a la planta de segundo orden (4.48). El polinomio de lazo cerrado verdadero se muestra a continuación:

$$A_{cl}(z) = (z - e^{\alpha_1 \Delta})(z - e^{\alpha_2 \Delta})(z + l_1) + \frac{b}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} (X_1 z + X_2)(p_0 z + p_1) \quad (4.81)$$

$$X_1 = \alpha_2 (e^{\alpha_1 \Delta} - 1) - \alpha_1 (e^{\alpha_2 \Delta} - 1) \quad (4.82)$$

$$X_2 = -\alpha_1 e^{\alpha_1 \Delta} (1 - e^{\alpha_2 \Delta}) + \alpha_2 e^{\alpha_2 \Delta} (1 - e^{\alpha_1 \Delta}) \quad (4.83)$$

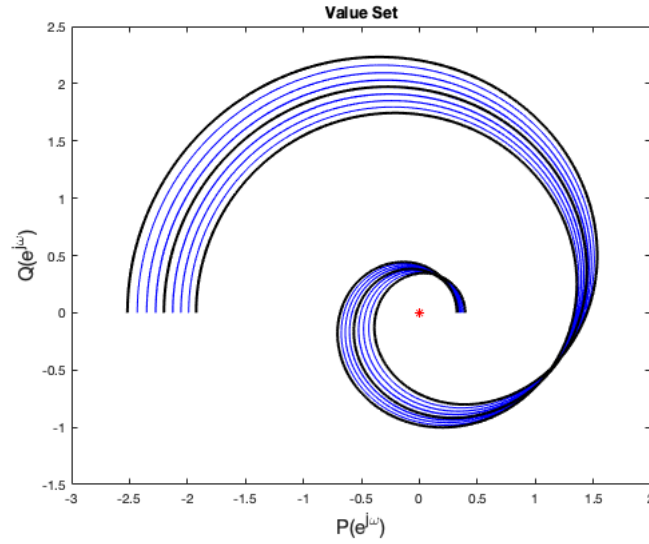
El polinomio (4.81) no tiene una estructura multilineal por lo que no se puede utilizar el Teorema del Mapeo. No obstante, una ventaja de analizar el problema en tiempo discreto es que el Value Set del polinomio ya no se obtiene al evaluar $s = j\omega$ con $\omega \geq 0$ sino que se obtiene al evaluar $z = e^{j\omega\Delta}$ con $0 \leq \omega \leq 1/\Delta$. Por lo que se puede obtener todo el Value Set de forma directa al evaluar un rango de frecuencias finito. Considerando lo anterior, se puede fijar un α y si se cumple que el Value Set no contiene al origen del plano complejo, entonces se tiene que por el Teorema de Exclusión del Cero, la familia de polinomios es robustamente estable.

Se continua con la planta del Ejemplo 27 y se grafica el Value Set para un ancho de banda nominal $\alpha = 7$ con el fin de evaluar si el Value Set esta contenido por la evaluación del polinomio en sus puntos extremos $q^i = \{-1, -1\}, [-1, 1], [1, 1]\}$.

Ejemplo 28. *Sea una planta dada por (4.80) y el controlador que se obtuvo al considerar los ceros de muestreo asintóticos. Se obtiene el polinomio de lazo cerrado verdadero dado por (4.81). En la Figura 4.4 se muestra el Value Set considerando un $\alpha = 7$ y variando los polos inciertos $q = [\alpha_1, \alpha_2]$ en el intervalo $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. En negro se grafican los Value Set obtenidos al evaluar el polinomio en los puntos extremos q^i y en azul los Value Set obtenidos al evaluar el polinomio cuando se varía el vector de incertidumbre q sobre la caja Q . Se observa que el Value Set está contenido por las curvas correspondientes al caso de evaluar el polinomio en los puntos extremos de los valores inciertos, por lo que se están las condiciones para utilizar el Teorema de Exclusión del Cero.*

Se tiene que la familia de polinomios es de grado invariante, el conjunto sobre el que varían los parámetros inciertos es conexo, los coeficientes del polinomio son funciones continuas del vector de parámetros q y al menos un miembro de la familia de polinomios es estable, siendo este miembro el polinomio de lazo cerrado nominal el cual por construcción es estable. Al cumplirse los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero entonces el polinomio de lazo cerrado verdadero es robustamente estable si y solo si el Value Set no contiene el origen del plano complejo, lo cual se verifica en la Figura 4.4 donde el origen se destacó con una marca () roja.*

Con el Ejemplo 28 se mostró que el lazo cerrado es robustamente estable para un $\alpha = 7$ pero lo que se busca es el mínimo valor del ancho de banda de lazo cerrado nominal α para el cual el lazo cerrado verdadero es robustamente estable. Para obtener el mínimo α se sigue un procedimiento análogo al presentado en el Capítulo 3. Primero se plantea el polinomio de lazo cerrado verdadero (4.84) y se reescribe la variable compleja z en términos de la frecuencia ω , es decir, $z = e^{j\omega\Delta} = \cos(\omega\Delta) + j \sin(\omega\Delta)$.

Figura 4.4: Value Set para $\alpha = 7$

$$\begin{aligned}
 A_{cl}(z) &= (z - e^{\alpha_1 \Delta})(z - e^{\alpha_2 \Delta})(z + l_1) + \frac{b}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} (X_1 z + X_2)(p_0 z + p_1) \quad (4.84) \\
 &= (\cos(\omega \Delta) + j \sin(\omega \Delta) - e^{\alpha_1 \Delta})(\cos(\omega \Delta) + j \sin(\omega \Delta) - e^{\alpha_2 \Delta}) \\
 &\quad (\cos(\omega \Delta) + j \sin(\omega \Delta) + l_1) + \frac{b}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} (X_1 (\cos(\omega \Delta) + j \sin(\omega \Delta))) + X_2 \\
 &\quad (p_0 (\cos(\omega \Delta) + j \sin(\omega \Delta))) + p_1 \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

Luego se separa el polinomio en su parte real $P(\omega)$ (4.88) y su parte imaginaria $Q(\omega)$ (4.89), donde se definió la constante $b' = b/(\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2))$ con el fin de simplificar las expresiones. Posteriormente tanto la parte real como la imaginaria se igualan a cero, con lo que se genera un sistema de ecuaciones que depende de $\alpha, \omega, \Delta, \alpha_1, \alpha_2$. El período de muestreo se escogió en términos de la cota M según $\Delta = 1/(10M)$ y el ancho de banda nominal se puede escribir en términos de la misma acota M por lo que queda $\alpha = kM$ donde k es la razón entre el ancho de banda nominal y la cota sobre la máxima magnitud que pueden tomar los polos inciertos. Por su parte, los polos inciertos cumplen que $|\alpha_i| < M$ con $i = \{1, 2\}$. Con las consideraciones anteriores, el sistema de ecuaciones se puede escribir en función de k y ω ya que el resto de parámetros quedan dependiendo de M , parámetro que se simplifica al igualar el polinomio a cero.

$$Acl = (\cos(3\omega\Delta) + j \sin(3\omega\Delta)) + (\cos(2\omega\Delta) + j \sin(2\omega\Delta))(l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + b'p_0X_1) + (\cos(\omega\Delta) + j \sin(\omega\Delta))(b'p_0X_2 - e^{\alpha_2\Delta}(l_1 - e^{\alpha_1\Delta}) - l_1e^{\alpha_1\Delta} + b'p_1X_1) + b'p_1X_2 + l_1e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta} \quad (4.86)$$

$$Acl = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (4.87)$$

$$P(\omega) = \cos(3\omega\Delta) + \cos(2\omega\Delta)(l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + b'p_0X_1) + \cos(\omega\Delta)(b'p_0X_2 - e^{\alpha_2\Delta}(l_1 - e^{\alpha_1\Delta}) - l_1e^{\alpha_1\Delta} + b'p_1X_1) + b'p_1X_2 + l_1e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta} \quad (4.88)$$

$$Q(\omega) = \sin(3\omega\Delta) + \sin(2\omega\Delta)(l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} + b'p_0X_1) + \sin(\omega\Delta)(b'p_0X_2 - e^{\alpha_2\Delta}(l_1 - e^{\alpha_1\Delta}) - l_1e^{\alpha_1\Delta} + b'p_1X_1) \quad (4.89)$$

El sistema de ecuaciones resultante es (4.90)-(4.91) el cual se resuelve numéricamente, donde se obtiene como solución el punto $(\kappa; \omega) = (2,44; 0,22)$.

$$0 = \cos(3\omega\Delta) + \cos(2\omega\Delta) \left(\frac{k^3}{4000} - \frac{3k^2}{200} + \frac{3k}{10} - 1 - 2e^{2/10} + (3k^2 - \frac{k^2}{2})(1 - e^{1/10} + \frac{1}{10}e^{1/10}) \right) + \cos(\omega\Delta) \left((\frac{k^3}{4000} - \frac{3k^2}{200} + \frac{3k}{10} - 1)e^{1/10}(e^{1/10} - 2) + ((\frac{3k^3}{2} - 3k^2)(1 - e^{1/10} + \frac{1}{10}e^{1/10}) + (3k^2 - \frac{k^3}{2}))(e^{2/10} - e^{1/10} - \frac{1}{10}e^{1/10}) \right) + (\frac{k^3}{4000} - \frac{3k^2}{200} + \frac{3k}{10} - 1)e^{2/10} + (\frac{3k^3}{2} - 3k^2)(e^{2/10} - e^{1/10} - \frac{1}{10}e^{1/10}) \quad (4.90)$$

$$0 = \sin(3\omega\Delta) + \sin(2\omega\Delta) \left(\frac{k^3}{4000} - \frac{3k^2}{200} + \frac{3k}{10} - 1 - 2e^{2/10} + (3k^2 - \frac{k^2}{2})(1 - e^{1/10} + \frac{1}{10}e^{1/10}) \right) + \sin(\omega\Delta) \left((\frac{k^3}{4000} - \frac{3k^2}{200} + \frac{3k}{10} - 1)e^{1/10}(e^{1/10} - 2) + ((\frac{3k^3}{2} - 3k^2)(1 - e^{1/10} + \frac{1}{10}e^{1/10}) + (3k^2 - \frac{k^3}{2}))(e^{2/10} - e^{1/10} - \frac{1}{10}e^{1/10}) \right) \quad (4.91)$$

Para finalizar, se tiene que una planta de segundo orden (4.48) cuyos polos están acotados por $Q = [-M, M] \times [-M, M]$ y que se le aplica un controlador (4.64) que se diseña considerando los ceros de muestreo. El lazo cerrado resultante es robustamente estable si y solo si el parámetro de diseño α cumple $\alpha > 2,44M$. Esto queda como resultado de aplicar el Teorema de Exclusión del Cero, lo que se puede corroborar gráficamente con la Figura 4.5 donde se puede ver en el acercamiento 4.5b que el Value Set no encierra el origen del plano complejo, el que se destacó con una marca (*) roja.

4.4.3. Planta de tercer orden

Con un sistema de tercer orden se procede de forma similar al caso anterior de segundo orden. Primero se considera que el sistema muestreado proviene de un modelo continuo dado por (4.92), donde el vector de incertidumbre $q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ varia dentro de la caja $Q = [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$. Por el análisis del Capítulo 4 se sabe que para garantizar estabilidad robusta se necesita que el ancho de banda nominal α cumpla que $\alpha > 5,5885M$.

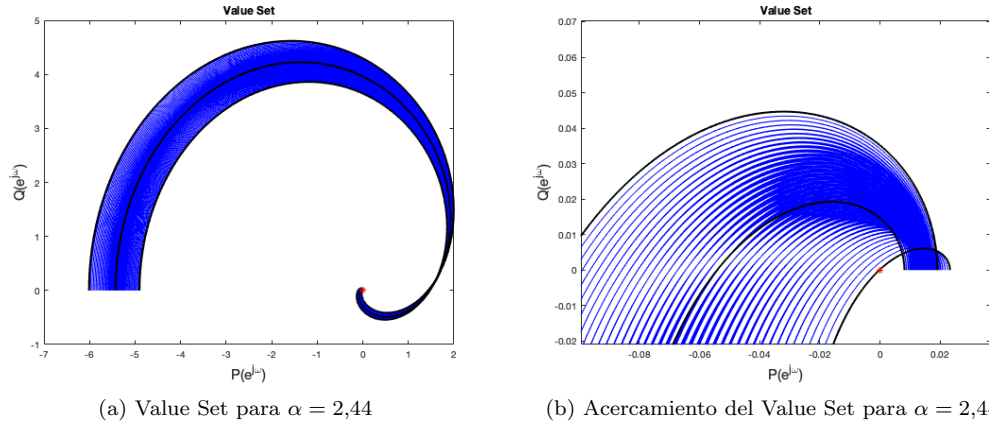


Figura 4.5: Value Set para el polinomio de lazo cerrado (4.84) considerando un ancho de banda nominal $\alpha = 2,44$

$$G_3(s) = \frac{b}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \quad (4.92)$$

El modelo discreto se obtiene a partir del Lema 23 y se muestra a continuación:

$$G(z) = \frac{b(z^2 X_1 + z X_2 + X_3)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)(z - e^{\alpha_1 \Delta})(z - e^{\alpha_2 \Delta})(z - e^{\alpha_3 \Delta})} \quad (4.93)$$

$$X_1 = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)(1 - e^{\alpha_3 \Delta}) + \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_3)(1 - e^{\alpha_2 \Delta}) + \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2)(1 - e^{\alpha_1 \Delta}) \quad (4.94)$$

$$X_2 = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)(1 - e^{\alpha_3 \Delta})(e^{\alpha_1 \Delta} e^{\alpha_2 \Delta}) + \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_1)(1 - e^{\alpha_2 \Delta})(e^{\alpha_1 \Delta} + e^{\alpha_3 \Delta}) + \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 - \alpha_3)(1 - e^{\alpha_1 \Delta})(e^{\alpha_2 \Delta} + e^{\alpha_3 \Delta}) \quad (4.95)$$

$$X_3 = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) e^{\alpha_1 \Delta} e^{\alpha_2 \Delta} (1 - e^{\alpha_3 \Delta}) + \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_3) e^{\alpha_1 \Delta} e^{\alpha_3 \Delta} (1 - e^{\alpha_2 \Delta}) + \alpha_2 \alpha_3 e^{\alpha_2 \Delta} e^{\alpha_3 \Delta} (1 - e^{\alpha_1 \Delta}) \quad (4.96)$$

El modelo discreto exacto no está bien definido para $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_3$. Se necesitará que el modelo discreto de la planta varíe continuamente en la medida que varían los polos inciertos. Es por esto que se plantea cada uno de los casos no definidos y se calcula el límite correspondiente.

1. El primer caso de estudio corresponde a evaluar $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq 0$ en la función

de transferencia (4.92) y se utiliza el Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{3-1}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)} \right\} \right\} \quad (4.97)$$

$$= \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{s(\alpha_2\alpha_3)^2} + \frac{1}{s^2\alpha_2\alpha_3} + \frac{-1}{\alpha_2^2(\alpha_3 - \alpha_2)(s - \alpha_2)} + \frac{1}{\alpha_3^2(\alpha_3 - \alpha_2)(s - \alpha_3)} \right\} \right\} \quad (4.98)$$

$$= \frac{b(X_1z^2 + X_2z + X_3)}{\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2 - \alpha_3)(z - e^{\alpha_2\Delta})(z - e^{\alpha_3\Delta})(z - 1)} \quad (4.99)$$

$$X_1 = \alpha_3^2(e^{\alpha_2\Delta} - 1) - \alpha_2^2(e^{\alpha_3\Delta} - 1) + \alpha_2\alpha_3\Delta(\alpha_2 - \alpha_3) \quad (4.100)$$

$$X_2 = \alpha_2^2(e^{\alpha_3\Delta} - 1)(1 + e^{\alpha_2\Delta}) + \alpha_3^2(1 - e^{\alpha_2\Delta})(1 + e^{\alpha_3\Delta}) + \alpha_2\alpha_3\Delta(\alpha_3 - \alpha_2)(e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) \quad (4.101)$$

$$X_3 = \alpha_2^2e^{\alpha_2\Delta}(1 - e^{\alpha_3\Delta}) - \alpha_3^2e^{\alpha_3\Delta}(1 - e^{\alpha_2\Delta}) + \alpha_2\alpha_3\Delta e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta}(\alpha_2 - \alpha_3) \quad (4.102)$$

Al calcular el límite de la función de transferencia (4.93) con $\alpha_1 \rightarrow 0$ se obtiene $G_{3-1}(z)$ por lo que hay continuidad en la discretización del modelo en $\alpha_1 = 0$. Esto es válido para los casos en $\alpha_2 = 0, \alpha_1 \neq \alpha_3 \neq 0$ y para $\alpha_3 = 0, \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ solo hay que intercambiar las variables según corresponda.

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{b(z^2X_1 + zX_2 + X_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)(z - e^{\alpha_1\Delta})(z - e^{\alpha_2\Delta})(z - e^{\alpha_3\Delta})} \quad (4.103)$$

$$= G_{3-1}(z) \quad (4.104)$$

2. El segundo caso considera $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$ y se obtiene la función de transferencia discreta utilizando el Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{3-2}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-\alpha_2)^2} \right\} \right\} \quad (4.105)$$

$$G_{3-2}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^2s} - \frac{2}{\alpha_2^3(s-\alpha_2)} + \frac{1}{\alpha_2^2(s-\alpha_2)^2} \right\} \right\} \quad (4.106)$$

$$G_{3-2}(z) = \frac{b(X_1z^2 + X_2z + X_3)}{\alpha_2^3(z - e^{\alpha_2\Delta})^2(z - 1)} \quad (4.107)$$

$$X_1 = \alpha_2\Delta(1 + e^{\alpha_2\Delta}) + 2(1 - e^{\alpha_2\Delta}) \quad (4.108)$$

$$X_2 = 2(e^{2\alpha_2\Delta} - 2\alpha_2\Delta e^{\alpha_2\Delta} - 1) \quad (4.109)$$

$$X_3 = e^{\alpha_2\Delta}(2(1 - e^{\alpha_2\Delta}) + \alpha_2\Delta(1 + e^{\alpha_2\Delta})) \quad (4.110)$$

Al calcular el límite de la función de transferencia (4.99) con $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$ se obtiene $G_{3-2}(z)$ por lo que hay continuidad. Ocurre lo mismo con los casos $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ solo hay que intercambiar las variables correspondientes, esto gracias a la simetría de la planta.

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{b(z^2 X_1 + z X_2 + X_3)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)(z - e^{\alpha_1 \Delta})(z - e^{\alpha_2 \Delta})(z - e^{\alpha_3 \Delta})} \quad (4.111)$$

$$= G_3''(z) \quad (4.112)$$

3. El tercer caso considera $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$ con $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ y se obtiene la función de transferencia discreta con Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{3-3}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-\alpha_1)^2(s-\alpha_3)} \right\} \right\} \quad (4.113)$$

$$G_{3-3}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{\alpha_1^2 \alpha_3 s} - \frac{2\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1^2 (\alpha_1 - \alpha_3)(s - \alpha_1)} + \frac{1}{\alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_3)(s - \alpha_1)^2} \right\} \right\} \quad (4.114)$$

$$G_{3-3}(z) = \frac{b(X_1 z^2 + X_2 z + X_3)}{\alpha_1^2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (z - e^{\alpha_1 \Delta})^2 (z - e^{\alpha_3 \Delta})} \quad (4.115)$$

$$X_1 = \alpha_1^2 (e^{\alpha_3 \Delta} - 1) + \alpha_3 (\alpha_3 - 2\alpha_1) (e^{\alpha_1 \Delta} - 1) + \alpha_1 \alpha_3 \Delta e^{\alpha_1 \Delta} (\alpha_1 - \alpha_3) \quad (4.116)$$

$$X_2 = e^{\alpha_1 \Delta} (1 - e^{\alpha_3 \Delta}) (2\alpha_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3^2) + \alpha_3 (2\alpha_1 - \alpha_3) (e^{2\alpha_1 \Delta} - e^{\alpha_3 \Delta}) + \quad (4.117)$$

$$\alpha_1 \alpha_3 \Delta e^{\alpha_1 \Delta} (\alpha_3 - \alpha_1) (1 + e^{\alpha_3 \Delta}) \quad (4.118)$$

$$X_3 = \alpha_1^2 e^{2\alpha_1 \Delta} (e^{\alpha_3 \Delta} - 1) + \alpha_3 e^{\alpha_1 \Delta} e^{\alpha_3 \Delta} (e^{\alpha_1 \Delta} - 1) (\alpha_3 - 2\alpha_1) + \quad (4.119)$$

$$\alpha_1 \alpha_3 \Delta e^{\alpha_1 \Delta} e^{\alpha_3 \Delta} (\alpha_1 - \alpha_3) \quad (4.120)$$

Se calcula el límite del modelo (4.93) con $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ obteniéndose $G_{3-3}(z)$ por lo que hay continuidad. Se obtiene el mismo resultado para el caso $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ y para el caso $\alpha_2 = \alpha_3 \neq \alpha_1$ con $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.

4. El cuarto caso se da con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$ y se procede a obtener la función de transferencia discreta a partir del Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{3-4}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-\alpha_1)^3} \right\} \right\} \quad (4.121)$$

$$G_{3-4}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{\alpha_1^3 s} + \frac{1}{\alpha_1^3 (s - \alpha_1)} - \frac{1}{\alpha_1^2 (s - \alpha_1)^2} + \frac{1}{\alpha_1 (s - \alpha_1)^3} \right\} \right\} \quad (4.122)$$

$$G_{3-4}(z) = \frac{b(X_1 z^2 + X_2 z + X_3)}{2\alpha_1^3 (z - e^{\alpha_1 \Delta})^3} \quad (4.123)$$

$$X_1 = 2(e^{\alpha_1 \Delta} - 1) + \alpha_1 \Delta e^{\alpha_1 \Delta} (\alpha_1 \Delta - 2) \quad (4.124)$$

$$X_2 = e^{\alpha_1 \Delta} (e^{\alpha_1 \Delta} - 1) (\alpha_1 \Delta - 2) (\alpha_1 \Delta + 2) + 2\alpha_1 \Delta e^{\alpha_1 \Delta} (e^{\alpha_1 \Delta} + 1) \quad (4.125)$$

$$X_3 = e^{2\alpha_1 \Delta} (-2(1 - e^{\alpha_1 \Delta}) - \alpha_1 \Delta (2 + \alpha_1 \Delta)) \quad (4.126)$$

Se calcula el límite del modelo (4.115) con $\alpha_3 \rightarrow \alpha_1$ y se obtiene $G_{3-4}(z)$ por lo que hay continuidad en el modelo discreto.

5. El último caso considera $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ con $\alpha_3 \neq 0$ y se obtiene la función de transferencia a partir del Lema 23 como se muestra a continuación:

$$G_{3-5}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3(s-\alpha_3)} \right\} \right\} \quad (4.127)$$

$$G_{3-5}(z) = \frac{b(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{\alpha_3^3 s} - \frac{1}{\alpha_3^2 s^2} - \frac{1}{\alpha_3 s^3} + \frac{1}{\alpha_3^3(s-\alpha_3)} \right\} \right\} \quad (4.128)$$

$$G_{3-5}(z) = \frac{b(X_1 z^2 + X_2 z + X_3)}{2\alpha_3^3(z-1)^2(z-e^{\alpha_3\Delta})} \quad (4.129)$$

$$X_1 = 2(e^{\alpha_3\Delta} - 1) - \alpha_3\Delta(2 + \alpha_3\Delta) \quad (4.130)$$

$$X_2 = (e^{\alpha_3\Delta} - 1)(\alpha_3\Delta + 2)(\alpha_3\Delta - 2) + 2\alpha_3\Delta(1 + e^{\alpha_3\Delta}) \quad (4.131)$$

$$X_3 = 2(e^{\alpha_3\Delta} - 1) + \alpha_3\Delta e^{\alpha_3\Delta}(\alpha_3\Delta - 2) \quad (4.132)$$

Se calcula el límite del modelo (4.99) con $\alpha_2 = 0$ obteniéndose $G_{3-5}(z)$ por lo que hay continuidad en el modelo discreto.

Como se consideraron todos los casos en que el modelo (4.93) no estaba bien definido, se tiene que el modelo discreto varía continuamente en la medida que el vector de incertidumbre q se mueve por la caja $Q = [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$.

Ahora viene definir el modelo nominal y al igual que en el caso discreto de segundo orden, se trabaja con dos modelos nominales: el modelo $G_0^1(z)$ (4.133) que incluye los ceros de muestreo y el modelo $G_0^2(z)$ (4.134) que no incluye los ceros de muestreo. El controlador que se requiere es bipropio de grado dos con una estructura dada por (4.135).

$$G_0^1(z) = \frac{b\Delta^3(z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3} \quad (4.133)$$

$$G_0^2(z) = \frac{b\Delta^3}{(z-1)^3} \quad (4.134)$$

$$C(z) = \frac{p_0 z^2 + p_1 z + p_2}{z^2 + l_1 z + l_2} \quad (4.135)$$

Se obtiene el polinomio de lazo cerrado nominal (4.136) para el modelo $G_0^1(z)$, el cual se iguala por coeficientes al polinomio $(z-1 + \alpha\Delta)^5$ obteniéndose el sistema de ecuaciones dado por (4.137)-(4.141).

$$\begin{aligned} A_{cl0}^1(z) = & z^5 + \left(\frac{bp_0\Delta^3}{6} + l_1 - 3 \right) z^4 + \left(l_2 - 3l_1 + \frac{b\Delta^3(4p_0 + p_1)}{6} + 3 \right) z^3 \\ & + \left(3l_1 - 3l_2 + \frac{b\Delta^3(p_0 + 4p_1 + p_2)}{6} - 1 \right) z^2 + \left(3l_2 - l_1 + \frac{b\Delta^3(p_1 + 4p_2)}{6} \right) z + \\ & \frac{bp_2\Delta^3}{6} - l_2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$\frac{bp_0\Delta^3}{6} + l_1 - 3)z^4 + (l_2 - 3l_1 + \frac{b\Delta^3(4p_0 + p_1)}{6} + 3 = 5(-1 + \alpha\Delta) \quad (4.137)$$

$$l_2 - 3l_1 + \frac{b\Delta^3(4p_0 + p_1)}{6} + 3 = 10(-1 + \alpha\Delta)^2 \quad (4.138)$$

$$3l_1 - 3l_2 + \frac{b\Delta^3(p_0 + 4p_1 + p_2)}{6} - 1 = 10(-1 + \alpha\Delta)^3 \quad (4.139)$$

$$3l_2 - l_1 + \frac{b\Delta^3(p_1 + 4p_2)}{6} = 5(-1 + \alpha\Delta)^4 \quad (4.140)$$

$$\frac{bp_2\Delta^3}{6} - l_2 = (-1 + \alpha\Delta)^5 \quad (4.141)$$

Se despeja el sistema de ecuaciones anterior para obtener los coeficientes del controlador en términos del parámetro de diseño α , como se observa en (4.142)-(4.146).

$$l_1 = -\frac{5\alpha^5\Delta^5}{36} + \frac{5\alpha^4\Delta^4}{6} - \frac{5\alpha^3\Delta^3}{3} + 5\alpha\Delta - 2 \quad (4.142)$$

$$l_2 = -\frac{19\alpha^5\Delta^5}{36} + \frac{10\alpha^4\Delta^4}{3} - \frac{25\alpha^3\Delta^3}{3} + 10\alpha^2\Delta^2 - 5\alpha * \Delta + 1 \quad (4.143)$$

$$p_0 = \frac{5(\alpha^5\Delta^2 - 6\alpha^4\Delta + 12\alpha^3)}{6b} \quad (4.144)$$

$$p_1 = -\frac{8\alpha^5\Delta^2 - 45 * \alpha^4\Delta + 60\alpha^3}{3b} \quad (4.145)$$

$$p_2 = \frac{17\alpha^5\Delta^2 - 60\alpha^4\Delta + 60\alpha^3}{6b} \quad (4.146)$$

Por otro lado, si se considera el modelo nominal $G_0^2(z)$ que no incluye los ceros de muestreo entonces el polinomio de lazo cerrado nominal viene dado por (4.147), donde se obtiene un sistema de ecuaciones dado por (4.148)-(4.152).

$$A_{zI0}^2(z) = z^5 + (l_1 - 3)z^4 + (l_2 - 3l_1 + 3)z^3 + (bp_0\Delta^3 + 3l_1 - 3l_2 - 1)z^2 + (bp_1\Delta^3 - l_1 + 3l_2)z + bp_2\Delta^3 - l_2 \quad (4.147)$$

$$l_1 - 3 = 5(-1 + \alpha\Delta) \quad (4.148)$$

$$l_2 - 3l_1 + 3 = 10(-1 + \alpha\Delta)^2 \quad (4.149)$$

$$bp_0\Delta^3 + 3l_1 - 3l_2 - 1 = 10(-1 + \alpha\Delta)^3 \quad (4.150)$$

$$bp_1\Delta^3 - l_1 + 3l_2 = 5(-1 + \alpha\Delta)^4 \quad (4.151)$$

$$bp_2\Delta^3 - l_2 = (-1 + \alpha\Delta)^5 \quad (4.152)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los parámetros del controlador en función del ancho de banda nominal α .

$$l_1 = 5\alpha\Delta - 2 \quad (4.153)$$

$$l_2 = 10\alpha^2\Delta^2 - 5\alpha\Delta + 1 \quad (4.154)$$

$$p_0 = \frac{10\alpha^3}{b} \quad (4.155)$$

$$p_1 = \frac{5(\Delta\alpha^4 - 4\alpha^3)}{b} \quad (4.156)$$

$$p_2 = \frac{\alpha^5\Delta^2 - 5\alpha^4\Delta + 10\alpha^3}{b} \quad (4.157)$$

Para ilustrar la importancia de incluir los ceros de muestreo en el diseño del controlador es que se realiza el siguiente ejemplo. También se discutirá el efecto que tiene la elección del período de muestreo.

Ejemplo 29. Sea una planta de tercer orden de tiempo continuo dada por (4.158). Se escoge un período de muestreo $\Delta = 0,1$ por lo que el modelo discreto verdadero es (4.159).

$$G(s) = \frac{3}{(s-1)^3} \quad (4.158)$$

$$G(z) = \frac{6,49 \times 10^{-5}(z+3,875)(z+0,278)}{(z-1,051)^3} \quad (4.159)$$

Se grafica el polo dominante de lazo cerrado verdadero para el controlador $C_1(z)$ que se diseña considerando los ceros de muestreo y para el controlador $C_2(z)$ que se diseña sin incluir los ceros de muestreo. En la Figura 4.6 se observa que el lazo cerrado verdadero con $C_1(z)$ es en su mayoría inestable al variar α entre 0 y $1/\Delta$. Mientras que el lazo cerrado verdadero para el controlador $C_2(z)$ es estable entre $\alpha = 7$ y $\alpha = 9$. El objetivo en esta sección es encontrar una cota inferior para α con la que se alcance la estabilidad robusta, esta cota se define en proporción a la cota M que limita la magnitud de los polos de la planta verdadera por lo que se deduce que el período de muestreo no es lo suficientemente pequeño.

Se cambia el período de muestreo a $\Delta = 1/20[s]$ y se vuelve a graficar la magnitud del polo dominante de lazo cerrado verdadero en la Figura 4.7. En esta figura se observa que para el controlador $C_2(z)$ en azul, el lazo cerrado verdadero se mantiene estable aproximadamente desde $\alpha = 6$ en adelante.

Con el Ejemplo 29 se ilustró la importancia de considerar los ceros de muestreo al momento de diseñar un controlador de alto ancho de banda. También se mostró que para una planta de tercer orden un período de muestreo aceptable es $\Delta = 1/(20M)$. Con lo que se procede a obtener la cota inferior teórica para el controlador.

Para obtener la cota inferior para α hay que plantear el polinomio de lazo cerrado verdadero, separar su parte real e imaginaria y ambas partes igualarlas a cero. Luego se grafica el Value Set para verificar que este se encuentre contenido por las curvas generadas por los puntos extremos de la planta $q^i = \{-M, -M\} [-M, M], [M, M]\}$ para luego verificar los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero y usar dicho Teorema para asegurar estabilidad robusta.

El polinomio de lazo cerrado verdadero viene dado por (4.160) donde se define la constante $b' = \frac{b}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}$ para simplificar las expresiones. Los parámetros

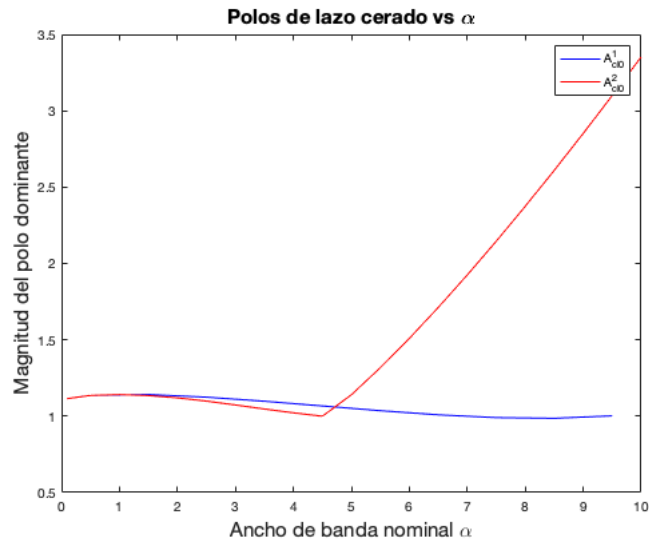


Figura 4.6: Magnitud del polo dominante de lazo cerrado para el controlador $C_1(z)$ en azul y para el controlador $C_2(z)$ en rojo. Ambos con un período de muestreo $\Delta = 1/10$

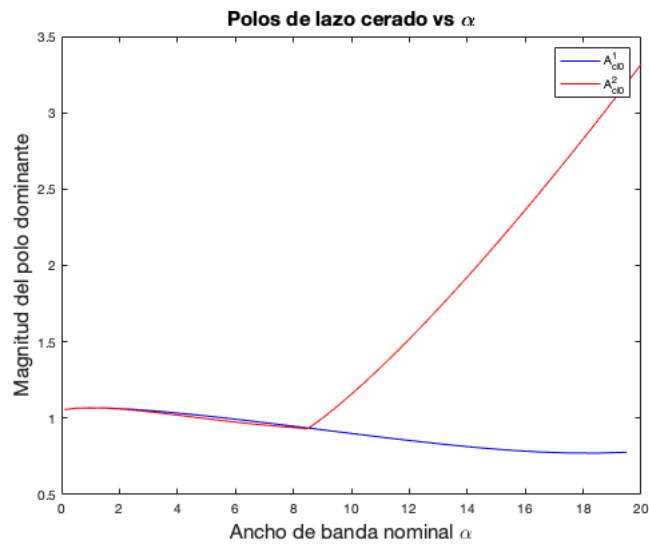


Figura 4.7: Magnitud del polo dominante de lazo cerrado para el controlador $C_1(z)$ en azul y para el controlador $C_2(z)$ en rojo. Ambos con un período de muestreo $\Delta = 1/20$

del controlador $\{l_1, l_2, p_0, p_1, p_2\}$ vienen dador por (4.142)-(4.146) y los polinomios $\{X_1, X_2, X_3\}$ definidos en (4.94)-(4.96).

$$A_{cl}(z) = (z^2 + l_1 z + l_2)(z - e^{\alpha_1 \Delta})(z - e^{\alpha_2 \Delta})(z - e^{\alpha_3 \Delta}) + b'(p_0 z^2 + p_1 z + p_2)(z^2 X_1 + z X_2 + X_3) \quad (4.160)$$

Se aprovecha el hecho que el Value Set para tiempo discreto se obtiene al evaluar la variable compleja z en $z = e^{j\omega\Delta}$ con $0 \leq \omega \leq 1/\Delta$. Se fija un α arbitrario y se grafica el Value Set para la planta del Ejemplo 29 para verificar que el Value Set este contenido en las curvas generadas por los puntos extremos q^i . En la Figura 4.8a se grafica el Value Set con un $\alpha = 10$ y se observa tanto en las Figuras 4.8a y 4.8b que el Value Set está contenido por las curvas negras que corresponden a evaluar el polinomio de lazo cerrado en los puntos extremos q^i .

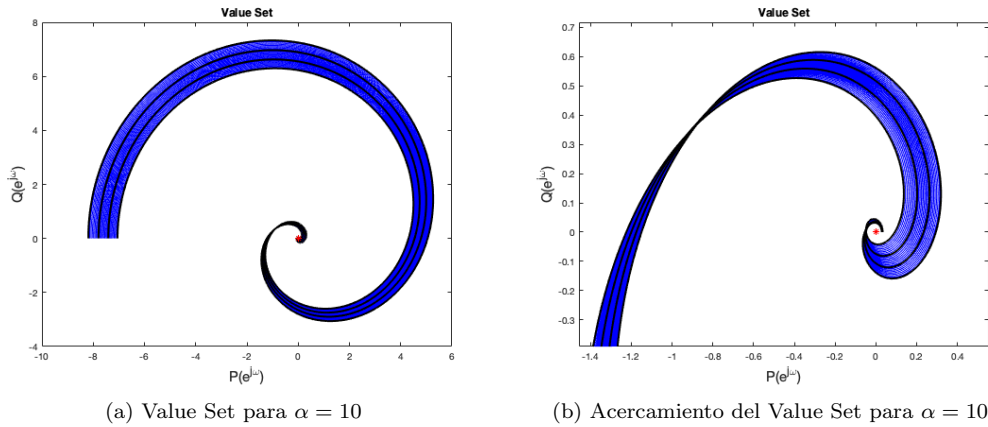


Figura 4.8: Value Set para la planta (4.159) con un ancho de banda nominal $\alpha = 10$

Ahora se verifican los supuestos del Teorema de Exclusión del Cero. Se tiene que la familia de polinomios (4.160) es de grado invariante, el conjunto Q sobre el que varía el vector de parámetros inciertos $q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ es conexo al ser una caja $Q = [-M, M] \times [-M, M] \times [-M, M]$, los coeficientes del polinomio son funciones continuas del vector de incertidumbre q y al menos un miembro de la familia estable, siendo este caso con $q = [0, 0, 0]$ el cual corresponde al modelo nominal $G_0^1(z)$ y el polinomio de lazo cerrado nominal es estable por construcción. Entonces la familia de polinomio es robustamente estable si y solo si el Value Set no contiene al origen del plano complejo.

Para encontrar la cota inferior de α se define en función de la cota M , es decir, $\alpha = kM$ donde k es la razón entre el ancho de banda nominal de lazo cerrado y la cota que limita la magnitud de los polos inciertos de la planta. Luego se utiliza la expresión $z^3 = \cos(n\omega\Delta) + j \sin(\omega\Delta)$ y se separa el polinomio (4.160) en su parte real e imaginaria, como se muestra a continuación:

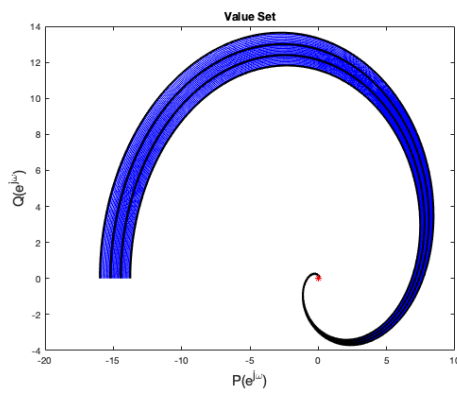
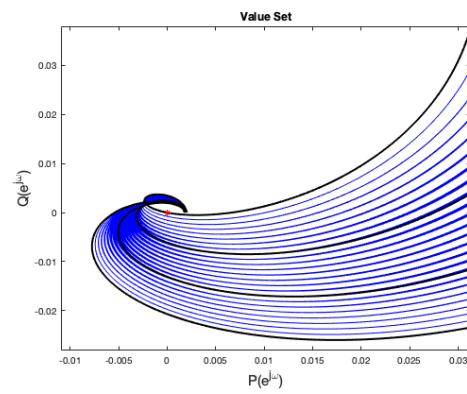
$$\begin{aligned}
Acl(z) = & (\cos(5\omega\Delta) + j \sin(5\omega\Delta)) + (l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} - e^{\alpha_3\Delta} + X_1b'p_0)(\cos(4\omega\Delta) + \\
& j \sin(4\omega\Delta)) + (l_2 + e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta} - l_1(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& X_1b'p_1 + X_2b'p_0)(\cos(3\omega\Delta) + j \sin(3\omega\Delta)) + (l_1(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) - \\
& l_2(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + X_1b'p_2 + X_2b'p_1 + X_3b'p_0 - e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta})(\cos(2\omega\Delta) + \\
& j \sin(2\omega\Delta)) + (l_2(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) + X_2b'p_2 + X_3b'p_1 - \\
& l_1e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta})(\cos(\omega\Delta) + j \sin(\omega\Delta)) + X_3b'p_2 - l_2e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta} \quad (4.161)
\end{aligned}$$

$$A_{cl}(z) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (4.162)$$

$$\begin{aligned}
P(\omega) = & \cos(5\omega\Delta) + \cos(4\omega\Delta)(l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} - e^{\alpha_3\Delta} + X_1b'p_0) + \\
& \cos(3\omega\Delta)(l_2 + e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta} - l_1(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& X_1b'p_1 + X_2b'p_0) + \cos(2\omega\Delta)(l_1(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) - \\
& l_2(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + X_1b'p_2 + X_2b'p_1 + X_3b'p_0 - e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& \cos(\omega\Delta)(l_2(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) + X_2b'p_2 + X_3b'p_1 - l_1e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& X_3b'p_2 - l_2e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta} \quad (4.163)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(\omega) = & \sin(5\omega\Delta) + \sin(4\omega\Delta)(l_1 - e^{\alpha_1\Delta} - e^{\alpha_2\Delta} - e^{\alpha_3\Delta} + X_1b'p_0) + \\
& \sin(3\omega\Delta)(l_2 + e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta} - l_1(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& X_1b'p_1 + X_2b'p_0) + \sin(2\omega\Delta)(l_1(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) - \\
& l_2(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta} + e^{\alpha_3\Delta}) + X_1b'p_2 + X_2b'p_1 + X_3b'p_0 - e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta}) + \\
& \sin(\omega\Delta)(l_2(e^{\alpha_3\Delta}(e^{\alpha_1\Delta} + e^{\alpha_2\Delta}) + e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}) + X_2b'p_2 + X_3b'p_1 - l_1e^{\alpha_1\Delta}e^{\alpha_2\Delta}e^{\alpha_3\Delta}) \quad (4.164)
\end{aligned}$$

Se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones $P(\omega) = 0$ y $Q(\omega) = 0$ al evaluar en los puntos extremos $q^i = \{-M, -M\}, [-M, M], [M, M\}$ y se obtiene como resultado $(\kappa, \omega) = (5,71, 0,3)$, por lo que la cota inferior para el ancho de banda nominal es $\alpha > 5,71M$. Dicha cota se verifica gráficamente con el Value Set del polinomio de la lazo cerrado a ese ancho de banda nominal, el cual se muestra en la Figura 4.9a. Se hace un acercamiento al origen del plano complejo en la Figura 4.9b donde se marca con (*) rojo el origen.

(a) Value Set para $\alpha = 5,71$ (b) Acercamiento del Value Set para $\alpha = 5,71$ Figura 4.9: Value Set para la planta (4.159) con un ancho de banda nominal $\alpha = 5,71$

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Esta tesis se enfoca en el análisis teórico de plantas con incertidumbre y el desarrollo de una ley de control basada en el ancho de banda de lazo cerrado nominal. No obstante, se pone a prueba esta metodología de diseño de un controlador de alto ancho de banda y se aplica en dos sistemas físicos: un servomotor y un levitador magnético. Para cada sistema se compararán los resultados al utilizar el controlador en tiempo continuo variando el ancho de banda nominal α . También se implementará control en tiempo discreto, utilizando un controlador que considera los ceros de muestreo asintóticos y un segundo controlador que no los considera, comparando los resultados en la medida que se aumenta el ancho de banda nominal.

5.1. QUBE-Servo

El primer sistema que se utiliza es un servomotor desarrollado por la compañía Quanser con fines educacionales. Este dispositivo consta de un motor de corriente continua al cual se le incorpora un disco en el eje, como se ve en la Figura 5.1. Lo que se busca controlar en este dispositivo es la posición angular $\theta(t)$ del disco lo que se hará a través de un voltaje de actuación $V_m(t)$.

En la Figura 5.2 se muestra un diagrama del sistema eléctrico-mecánico. El subsistema eléctrico describe el rotor como una componente que produce una velocidad de giro ω_m a partir del voltaje contra-electromotriz $e_b(t)$ y el estator viene representado por la resistencia R_m e inductancia L_m de armadura. En el subsistema mecánico se muestra como el eje del motor se conecta con dos componentes que representan las inercias del eje J_h y la del disco J_d .

En (5.1) se muestra la relación entre el voltaje contra-electromotriz $e_b(t)$ y la velocidad del motor $\omega_m(t)$, mostrando también la constante de proporcionalidad entre ambas k_m . Luego al aplicar la ley de voltajes de Kirchoff (LVK) se obtiene la ecuación (5.25).



Figura 5.1: Servo motor QUBE-Servo

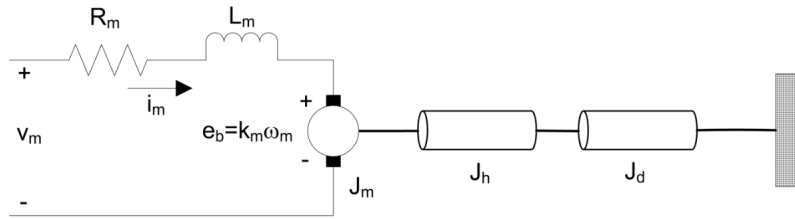


Figura 5.2: Diagrama electrónico-mecánico del servomotor

$$e_b(t) = k_m \omega_m(t) \quad (5.1)$$

$$V_m(t) - R_m i_m(t) - L_m \frac{di_m(t)}{dt} - k_m \omega_m \quad (5.2)$$

El fabricante indica que la inductancia del motor L_m es mucho menor en comparación a la resistencia del motor R_m , por lo que se desprecia y se obtiene la siguiente ecuación para la corriente.

$$i_m(t) = \frac{V_m(t) - k_m \omega_m}{R_m} \quad (5.3)$$

La ecuación que describe la dinámica rotacional del motor es (5.4) donde J_{eq} es el momento de inercia total del eje del motor y el disco, y \mathcal{T}_m es el torque aplicado por el motor DC.

$$J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} = \mathcal{T}_m \quad (5.4)$$

El torque \mathcal{T}_m queda proporcional a la corriente aplicada con lo que se obtiene (5.5) y juntar las ecuaciones (5.3)-(5.5) se obtiene (5.6).

$$\mathcal{T}_m = k_t i_m(t) \quad (5.5)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} + \frac{k_m^2}{J_{eq} R_m} \omega_m = \frac{k_m}{J_{eq} R_m} V_m(t) \quad (5.6)$$

Se aplica la transformada de Laplace y se reordenan los términos para obtener la función de transferencia que relaciona la velocidad del motor ω_m y el voltaje de actuación V_m .

$$G(s) = \frac{\mathcal{W}_m(s)}{\mathcal{V}_m(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (5.7)$$

donde

$$K = \frac{1}{k_m}, \quad \tau = \frac{J_{eq} R_m}{k_m^2} \quad (5.8)$$

El fabricante entrega los valores nominales de las componentes del sistema, las que se muestran en la siguiente tabla:

Parámetro	Descripción	Valores
R_m	Resistencia del motor	8,4 Ω
k_t	Constante de Torque	0,042NM/A
k_m	Constante de la fuerza contra-electromotriz	0,042V/(rad/s)
J_m	Inercia del rotor	4,0 $\times 10^{-6}$ Kg m^2
L_m	Inductancia del rotor	1,16mH
m_h	Masa del eje	0,0106Kg
r_h	Radio del eje	0,0111m
J_h	Inercia del eje	0,6 $\times 10^{-6}$ Kg m^2
m_d	Masa del disco	0,053Kg
r_d	Radio del disco	0,0248m

Tabla 5.1: Parámetros del servomotor entregados por el fabricante

Con lo que se obtiene el modelo propuesto por el fabricante.

$$G(s) = \frac{239,3}{s + 10,05} \quad (5.9)$$

Además, se cuenta con un segundo modelo que se obtuvo por medio de datos experimentales.

$$G(s) = \frac{160,91}{s + 6,993} \quad (5.10)$$

Como la señal a controlar es la posición angular del rotor, esta se obtiene integrando la velocidad por lo que la función de transferencia con la que se trabaja es:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{\mathcal{V}_m(s)} = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad (5.11)$$

De la función de transferencia anterior se obtiene el modelo de alta frecuencia, el cual es un integrador doble con la ganancia $b = 160,91$.

$$G_o(s) = \frac{160,91}{s^2} \quad (5.12)$$

5.1.1. Diseño del controlador en tiempo continuo

Para el diseño del controlador se utilizan los resultados obtenidos de la Sección 3.5.1. Por lo que el controlador viene dado por (5.13) y los coeficientes se pueden obtener con el Lema 15 en la página 18 quedando descritos en función del ancho de banda nominal α como se muestra en 5.14.

$$C(s) = \frac{p_0 s + p_1}{s + l_1} \quad (5.13)$$

$$l_1 = 3\alpha \quad p_0 = \frac{3\alpha^2}{b} \quad p_1 = \frac{\alpha^3}{b} \quad (5.14)$$

De la sección 3.5.1 se sabe que una planta de segundo orden sin ceros inciertos se puede controlar con el controlador propuesto en (5.13) siempre que se escoja un ancho de banda nominal que cumpla $\alpha > 2,42M$ donde M es la cota superior de la magnitud de los polos inciertos. En este caso se escoge $M = 7$ por lo que, en teoría, al fijar el ancho de banda en $\alpha = 16,94$ se estabiliza el lazo cerrado.

5.1.2. Implementación en Simulink

Para implementar el controlador diseñado se utiliza el software Simulink y el diagrama de bloques se muestra en la Figura 5.3.

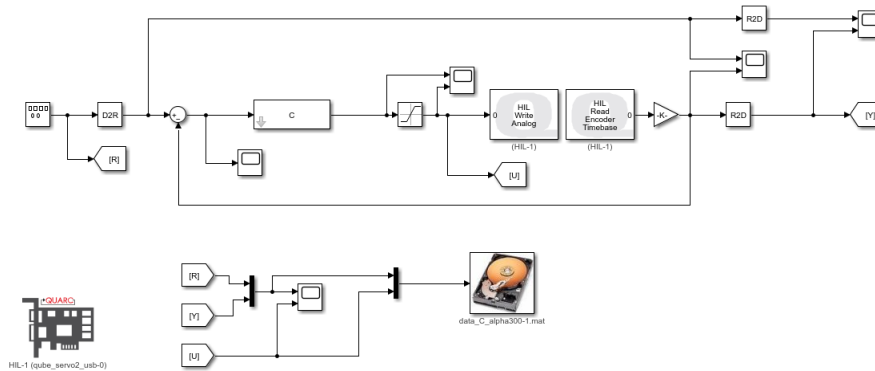
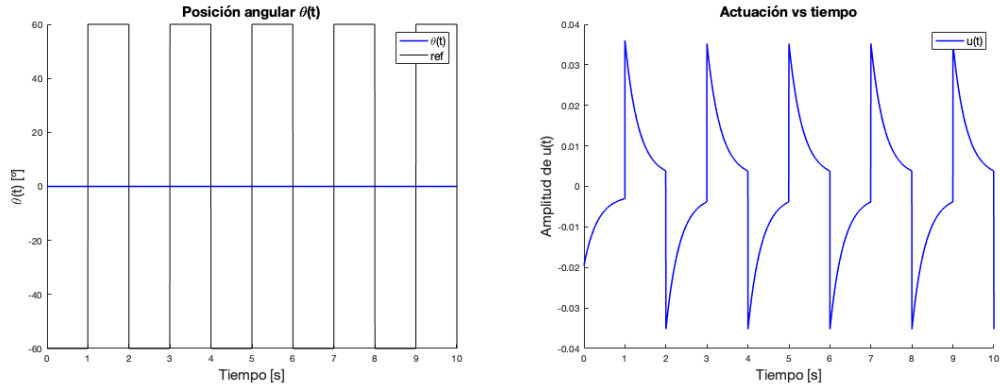


Figura 5.3: Diagrama de bloques del lazo de control del motor en tiempo continuo

5.1.3. Resultados experimentales

Como señal de referencia se utilizó un tren de pulsos de frecuencia $0,5[Hz]$ y amplitud $60[^\circ]$. Se implementó el controlador a la planta para distintos valores de ancho de banda nominal con el fin de ver como afecta la estabilidad del lazo cerrado verdadero. En la Figura 5.4 se muestra la posición angular para un $\alpha = 1$, y ya que la actuación es demasiado baja no se logra controlar la planta.

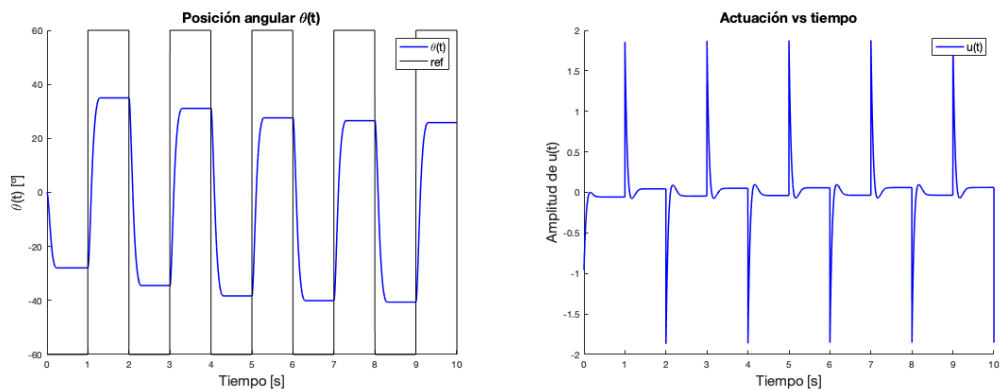
Luego se aumenta la rapidez del ancho de banda nominal a $\alpha = 7$. En la Figura 5.5 se observa que la posición angular ya sigue la señal de referencia pero como el ancho de banda



(a) Posición angular $\theta(t)$ en azul y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C(z)$

Figura 5.4: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 1$



(a) Posición angular $\theta(t)$ en azul y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C(z)$

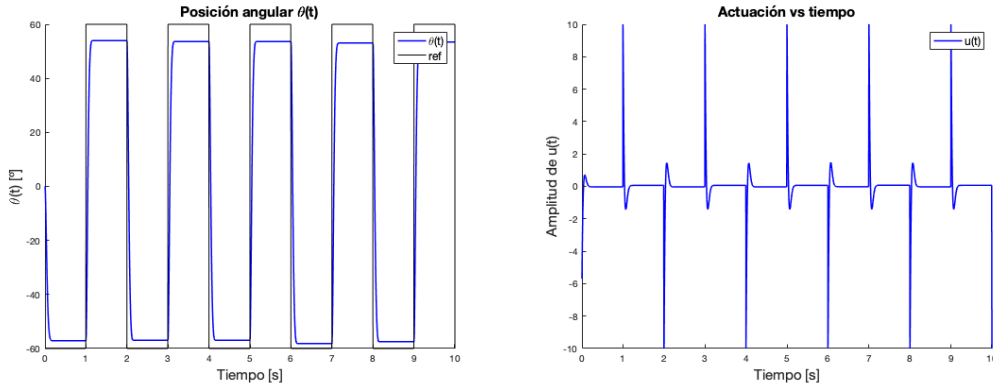
Figura 5.5: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 7$

nominal no es lo suficientemente rápido, se tiene error en estado estacionario apreciable, con un 58,4% de error en estado estacionario.

Al fijar el ancho de banda $\alpha = 16,94$ (cota inferior teórica para estabilidad robusta), se observa en la Figura 5.6 que la posición angular sigue la referencia con un error de estado estacionario del 11,8%.

Como se analizó en la Sección 3.6 se tiene que la función de sensibilidad complementaria $T(s)$ tiende a magnitud 1 en la medida que el ancho de banda nominal aumenta, lo que se puede verificar con la Figura 5.7 donde se alcanza un error en estado estacionario de 0,98%.

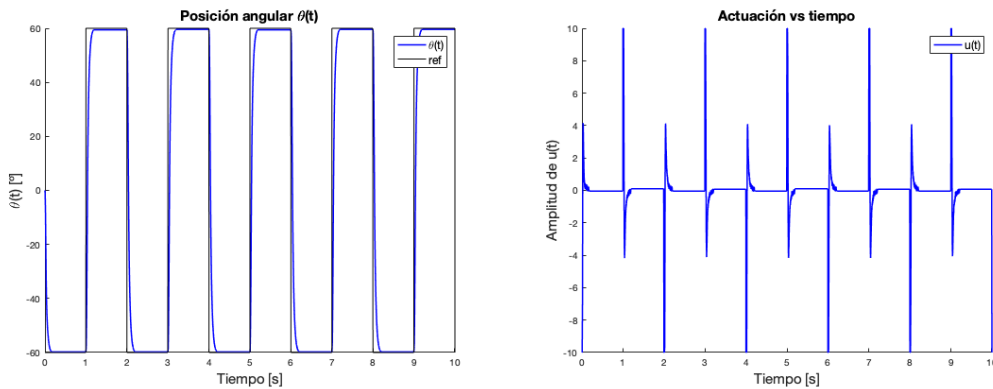
Finalmente, se pone a prueba el controlador fijando el ancho de banda nominal en



(a) Posición angular $\theta(t)$ en azul y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C(z)$

Figura 5.6: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 16,94$

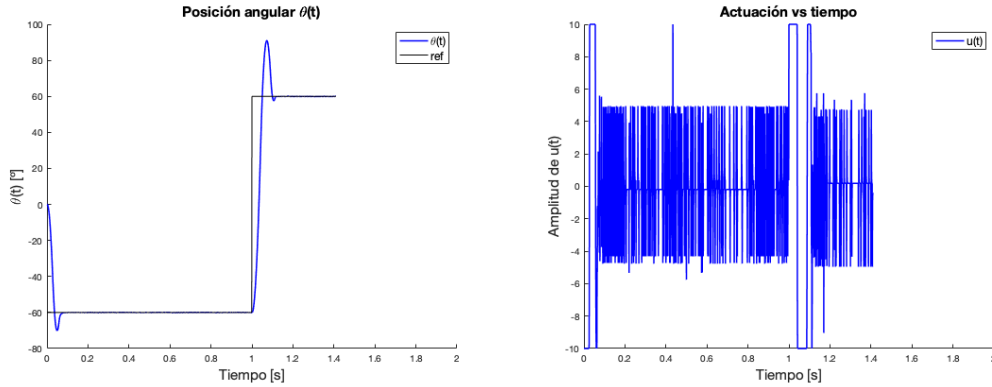


(a) Posición angular $\theta(t)$ en azul y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C(z)$

Figura 5.7: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 70$

$\alpha = 300$ lo que es poco más de 40 veces la cota M que limita los polos del modelo verdadero. En la Figura 5.8a se observa que la posición angular $\theta(t)$ sigue la referencia, con un error en estado estacionario de 0,20%. Cabe destacar que esta prueba se realizó durante solo 1,5[s] ya que como se ve en la Figura 5.8b la actuación tiene un comportamiento alternante lo cual estresa al servomotor.



(a) Posición angular $\theta(t)$ en azul y señal de referencia en negro (b) Voltaje de actuación del controlador $C(z)$

Figura 5.8: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 300$

5.1.4. Diseño del controlador en tiempo discreto

También se plantea utilizar control discreto para los dos modelos discretos nominales: $G_{01}(z)$ que incluye los ceros de muestreo y G_{02} que no incluye los ceros de muestreo, con $b = 160,91$ y un período de muestreo $\Delta = 1/(10 * 7)$. En la Sección 4.4.2 se analizó el caso discreto de una planta de orden dos que se controla con un controlador bipropio de primer orden y se llegó a que la familia de polinomios es robustamente estable si se cumple $\alpha > 2,42M$.

$$G_{01}(z) = \frac{b\Delta^2(z+1)}{2(z-1)^2} \quad (5.15)$$

$$G_{02}(z) = \frac{b\Delta^2}{(z-1)^2} \quad (5.16)$$

Se diseña un controlador para cada modelo nominal, ambos con la estructura mostrada en (5.17). Los controladores se diferencian en la forma en que se obtienen sus parámetros en función del ancho de banda de lazo cerrado nominal α . El controlador $C_1(z)$ para el modelo $G_{01}(z)$ que considera los ceros de muestreo tiene sus parámetros dados por:

$$C_1(z) = \frac{p_0z + p_1}{z + l_1} \quad (5.17)$$

$$l_1 = \frac{(\alpha\Delta)^3}{4} - \frac{3(\alpha\Delta)^2}{2} + 3\alpha\Delta - 1 \quad (5.18)$$

$$p_0 = \frac{3\alpha^2}{b} - \frac{\alpha^3\Delta}{2b} \quad (5.19)$$

$$p_1 = \frac{3\alpha^3\Delta}{2b} - \frac{\alpha^2}{b} \quad (5.20)$$

Mientras que el controlador $C_2(z)$ para el modelo $G_{02}(z)$ que no considera los ceros de muestreo tiene sus parámetros dados por:

$$C_2(z) = \frac{p_0 z + p_1}{z + l_1} \quad (5.21)$$

$$l_1 = 3\alpha\Delta - 1 \quad (5.22)$$

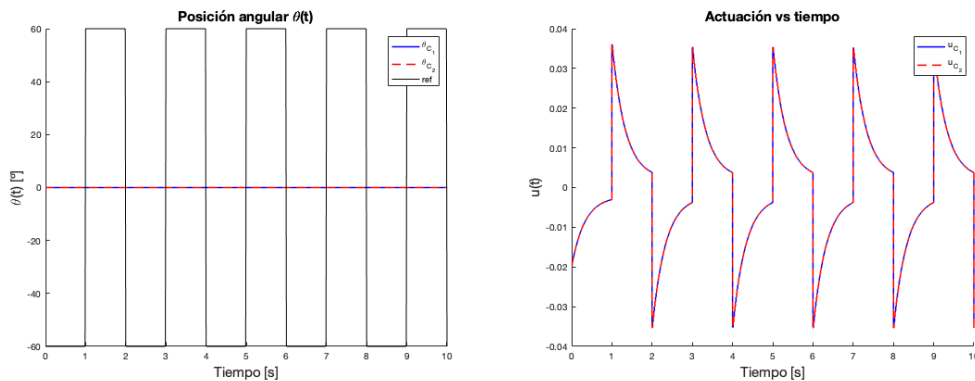
$$p_0 = \frac{3\alpha^2}{b} \quad (5.23)$$

$$p_1 = \frac{\alpha^3\Delta}{2b} - \frac{3\alpha^2}{b} \quad (5.24)$$

5.1.5. Resultados experimentales

La señal de referencia que se utiliza para el sistema corresponde a un tren de pulsos de amplitud 60° y una frecuencia de $1/2[\text{Hz}]$. Al igual que con el controlador continuo, se prueban los dos controladores $C_1(z)$ y $C_2(z)$ para distintos valores de ancho de banda nominal de lazo cerrado α .

En la Figura 5.9 se muestran las señales de referencia, posición angular $\theta(t)$ y el voltaje de actuación $u(t)$ para el controlador $C_1(z)$ en azul y para el controlador $C_2(z)$ en rojo. En este caso se fijó el ancho de banda nominal en $\alpha = 1$ y en la Figura 5.9b se observa que la actuación es demasiado pequeña para ambos controladores por lo que no se logra controlar el servomotor.

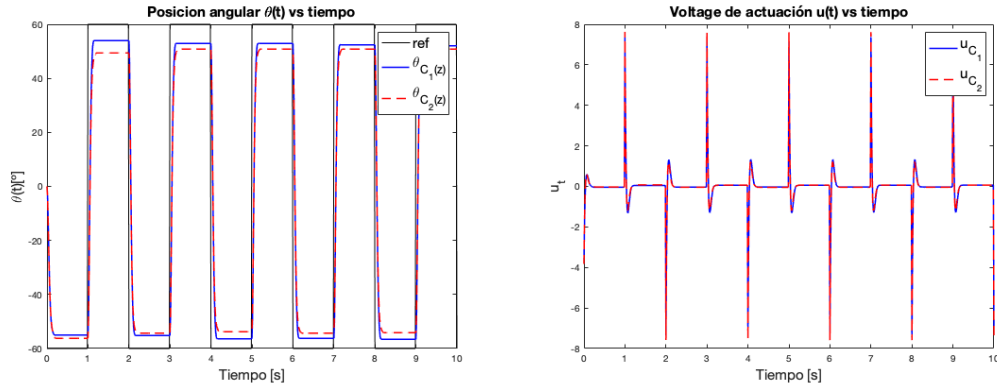


(a) Posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_1(z)$ en azul, posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_2(z)$ en rojo y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C_1(z)$ en azul y voltaje de actuación del controlador $C_2(z)$ en rojo

Figura 5.9: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 1$ con controladores de tiempo discreto

En la Figura 5.10 se muestran los resultados al aumentar el ancho de banda nominal a $\alpha = 16,94$ (cota inferior teórica para estabilidad robusta). Se observa en la Figura 5.10a que la posición angular obtenida con el controlador $C_1(z)$ es ligeramente distinta a la posición angular $\alpha(t)$ obtenida con el controlador $C_2(z)$ pero ambos controladores logran un error de estado estacionario del 13,28 % y 15,333 % respectivamente.

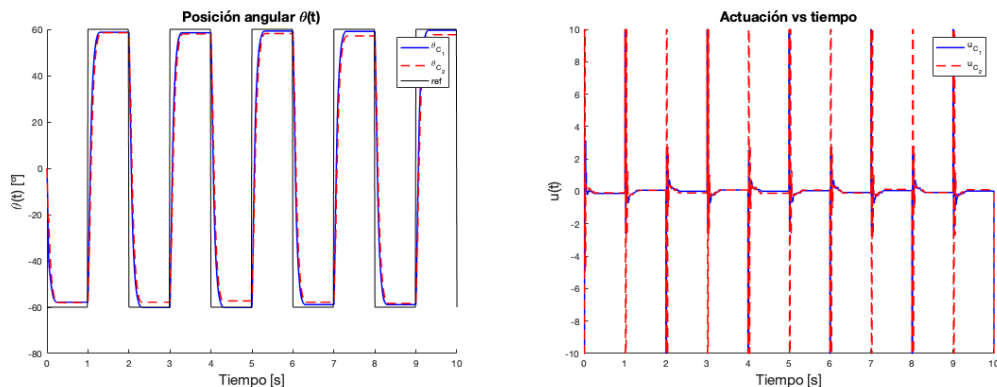


(a) Posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_1(z)$ en azul, posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_2(z)$ en rojo y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C_1(z)$ en azul y voltaje de actuación del controlador $C_2(z)$ en rojo

Figura 5.10: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 16,94$ con controladores de tiempo discreto

En la Figura 5.11 se muestra el experimento con un aumento del ancho de banda nominal a $\alpha = 35$, que es cinco veces la cota M que limita la magnitud de los polos inciertos de la planta. En la Figura 5.11a se destaca que la posición angular $\theta(t)$ para ambos controladores se logra controlar y tienen un error de estado estacionario del 0,68 % y 3,91 % respectivamente. No obstante, al operar en un mayor ancho de banda de lazo cerrado nominal se obtiene que el voltaje de actuación para el controlador $C_2(z)$ presenta saturaciones mientras que el voltaje de actuación para el controlador $C_1(z)$ no está saturado.

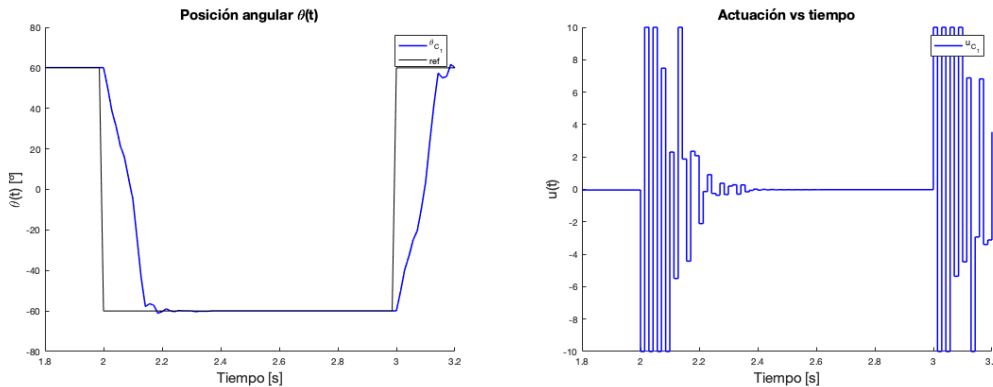


(a) Posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_1(z)$ en azul, posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_2(z)$ en rojo y señal de referencia en negro

(b) Voltaje de actuación del controlador $C_1(z)$ en azul y voltaje de actuación del controlador $C_2(z)$ en rojo

Figura 5.11: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 35$ con controladores de tiempo discreto

Finalmente se realiza una última realización de este experimento con un ancho de banda nominal $\alpha = 70$ que corresponde al máximo posible, lo que se muestra en la Figura 5.12. En este caso solo se utilizó el controlador $C_1(z)$ ya que con el controlador $C_2(z)$ la señal de actuación resultante estaba totalmente saturada. En la Figura 5.12b se muestra la actuación la cual está saturada en parte del transiente pero luego logra controlar la planta.



(a) Posición angular $\theta(t)$ con el controlador $C_1(z)$ en azul y señal de referencia en negro (b) Voltaje de actuación del controlador $C_1(z)$ en azul

Figura 5.12: Ángulo del servomotor y voltaje de actuación para un ancho de banda nominal $\alpha = 70$ con controlador de tiempo discreto

5.2. Levitador magnético

El sistema físico con el que se trabaja es un levitador magnético, dispositivo que cuenta con una pieza de metal llamada rotor, un sistema electromecánico que a través de una señal de corriente se genera un campo magnético variable y un par de imanes permanentes, como se puede ver en la Figura 5.13. El sistema se controla a través de la corriente del electroimán la cual contrarresta los efectos de las fuerzas que ejercen en el rotor: la gravedad y la fuerza magnética de los imanes permanentes. Con el control adecuado se logra dejar suspendido el rotor en una posición determinada.

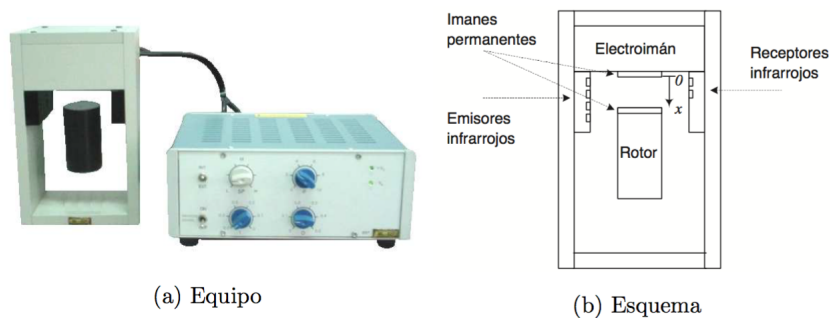


Figura 5.13: Levitador magnético

El levitador se compone de dos subsistemas: uno eléctrico y uno mecánico. En la Figura 5.14 se muestra el diagrama eléctrico donde el voltaje de actuación $u(t)$ se amplifica para obtener el voltaje $v_e(t)$ y el electroimán se modela a través de la resistencia R y la inductancia L . Se aplica la ley de voltajes de Kirchoff (LVK) con lo que se obtiene la ecuación (5.25).

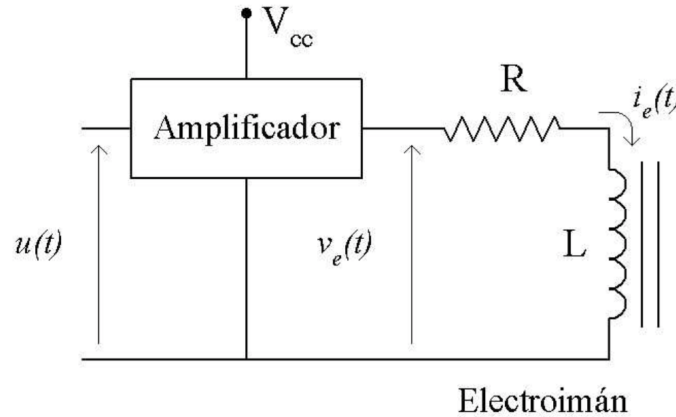


Figura 5.14: Diagrama eléctrico del levitador

$$L \frac{di_e(s)}{dt} = v_e - Ri_e(t) \quad (5.25)$$

Del sistema mecánico se hace un diagrama de cuerpo libre, donde se ven involucradas la fuerza de gravedad mg , la fuerza magnética total es $F(t)$ y la sumatoria total de fuerzas del rotor tiene la expresión $m \frac{dx(t)^2}{dt^2}$, lo que se expresa en la ecuación (5.26). La Fuerza magnética total se compone de la fuerza magnética del electroimán y la fuerza magnética de los imanes permanentes y se rige por la ecuación (5.27).

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - F(t) \quad (5.26)$$

$$F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \quad (5.27)$$

El voltaje de entrada al sistema RL , $v_e(t)$, se obtiene a través de un voltaje de actuación según:

$$v_e(t) = -K_a u(t) + \delta_a \quad (5.28)$$

donde K_a y δ_a son parámetros constantes del actuador.

La corriente del electroimán $i_e(t)$ se mide a través de un sensor de corriente que se rige por la ecuación (5.29) y la posición del rotor se mide con un sensor emisor y receptor de luz infrarroja según la ecuación (5.30).

$$v_{ie}(t) = K_L i_e(t) + \delta_L \quad (5.29)$$

$$v_x(t) = K_m x(t) - \delta_m \quad (5.30)$$

donde K_L , δ_L , K_m y δ_m son parámetros constantes de los sensores de corriente y de posición.

Ya que las ecuaciones que modelan el levitador son no lineales, se linealizan para obtener una función de transferencia que tenga por entrada el voltaje de actuación $u(t)$ y por salida el voltaje de posición del rotor $v_x(t)$. Esta función de transferencia se muestra en (5.31) y el punto de operación es $(u_Q, i_{eQ}, F_Q, x_Q, v_{xQ}) = (0, 0, 150, 3, 2, -6, 8)$. Al utilizar los valores de las constantes entregadas por el fabricante tanto para el levitador como para los sensores se obtiene que el modelo linealizado del levitador es (5.32).

$$G(s) = \frac{\Delta V_x}{\Delta U} = \frac{K_a K_m k_1}{L_m x_Q^2} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{e1} + k_2)}{m x_Q^3}}\right) \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{e1} + k_2)}{m x_Q^3}}\right)} \quad (5.31)$$

$$= \frac{57500}{(s + 100)(s - 25)(s + 25)} \quad (5.32)$$

5.2.1. Diseño del controlador continuo

Del Capítulo 3 se obtuvo como resultado que una planta de tercer orden sin ceros puede ser controlada por un controlador bipropio de orden 2 con la condición que el ancho de banda nominal debe ser mayor a 5,5885 veces la cota M que limita la magnitud de los polos de la planta. Se escoge $M = 100$ que corresponde al polo de mayor magnitud de la planta por lo que la cota inferior teórica para estabilidad robusta es de $\alpha = 558$.

El modelo nominal de alta frecuencia para el levitador viene dado por (5.33) y el controlador tiene la estructura mostrada en (5.34). Los parámetros del controlador quedan en función del ancho de banda nominal α y se obtienen utilizando el Lema 15 de la página 18 como se muestra en (5.35). Cabe destacar que este sistema en particular tiene un polo rápido en $s = -100$ por lo que la cota inferior teórica es grande y se espera el controlador no pueda operar en tan alta frecuencia.

$$G_0(s) = \frac{57500}{s^3} \quad (5.33)$$

$$C_1(s) = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{s^2 + l_1 s + l_2} \quad (5.34)$$

$$l_1 = 5\alpha, \quad l_2 = 10\alpha^2, \quad p_0 = \frac{10\alpha^3}{57500}, \quad p_1 = \frac{5\alpha^4}{57500}, \quad p_2 = \frac{\alpha^5}{57500} \quad (5.35)$$

Ahora bien, a partir de las ecuaciones dinámicas que modelan el levitador magnético, se tiene que el modelo lineal tiene tres polos pero uno de ellos depende de la resistencia R_m y la inductancia L_m del electroimán. Con el fin de bajar la cota inferior teórica para el ancho de banda nominal, es que se considerará que ambos valores se conocen con certeza y que los otros dos polos son polos inciertos. Bajo este supuesto, se puede modificar el modelo de la planta como se muestra a continuación:

$$G(s) = \frac{b}{(s + 100)(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad (5.36)$$

El modelo nominal mantiene la ganancia de alta frecuencia y el grado relativo, pero incluye el polo rápido $s = -100$ como se muestra en (5.37). pero al tener el polo en $s = -100$.

$$G_0(s) = \frac{b}{(s + 100)s^2} \quad (5.37)$$

Se puede elegir cancelar este polo rápido con el numerador del controlador, con lo que se pierde un parámetro para hacer la asignación de polos pero esto no es un problema porque el polo que se cancela con el cero del controlador aparece como raíz del polinomio de lazo cerrado nominal.

$$C_2(s) = \frac{(s + 100)(p_0s + p_1)}{s^2 + l_1s + l_2} \quad (5.38)$$

Este controlador, si bien es una solución ad-hoc para el caso del levitador, se diseña siguiendo el principio propuesto en esta Tesis, es decir, garantizando un ancho de banda nominal del lazo cerrado suficientemente alto para asegurar estabilidad robusta del lazo cerrado verdadero.

Con el controlador (5.38), el polinomio de lazo cerrado nominal viene dado por:

$$A_{clo}(s) = s^2(s + 100)(s^2 + l_1s + l_2) + b(s + 100)(p_0s + p_1) \quad (5.39)$$

$$= (s + 100)(s^4 + l_1s^3 + l_2s^2 + bp_0s + bp_1) \quad (5.40)$$

$$= (s + 100)(s + \alpha)^4 \quad (5.41)$$

Al hacer la asignación de polos y la igualación de coeficientes se obtiene que los parámetros del controlador vienen dados por:

$$l_1 = 4\alpha, \quad l_2 = 6\alpha^2, \quad p_0 = \frac{4\alpha^3}{b}, \quad p_1 = \frac{\alpha^4}{b} \quad (5.42)$$

Con lo que el controlador (5.38) queda:

$$C_2(s) = \frac{(s + 100)(4\alpha^3s + \alpha^4)}{b(s^2 + 4\alpha s + 6\alpha^2)} \quad (5.43)$$

5.2.2. Implementación en Simulink

Para implementar tanto el controlador $C_1(s)$ como el controlador $C_2(s)$ se utiliza el software Simulink y el diagrama de bloques se muestra en la Figura 5.15.

5.2.3. Resultados experimentales

Debido a que el sistema lineal se obtuvo por medio de linealización sobre un punto de equilibrio, es que la señal de referencia es $r(t) = 0$ para que la salida se mantenga en el punto de equilibrio. Se graficará la salida del sistema que corresponde al voltaje de la posición del rotor junto al voltaje en equilibrio $v_{xq} = -6,8[V]$.

Al igual que se hizo en la Sección 5.1.3, se ponen a prueba los dos controladores diseñados a distintos ancho de banda nominales de lazo cerrado. Primero se utiliza un $\alpha = 50$ como se observa en las Figuras 5.16a y 5.16b. En ambas se muestran las señales de salida y de actuación, en color rojo para el controlador $C_1(s)$ y en azul para el controlador $C_2(z)$. Debido

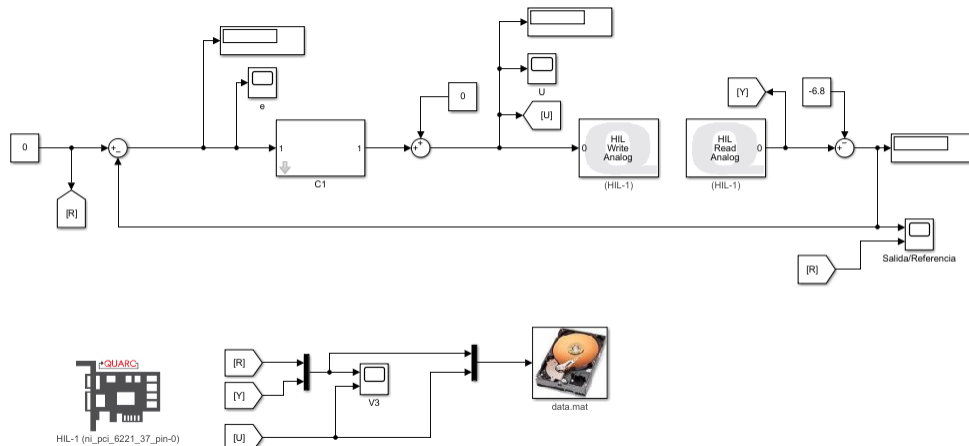
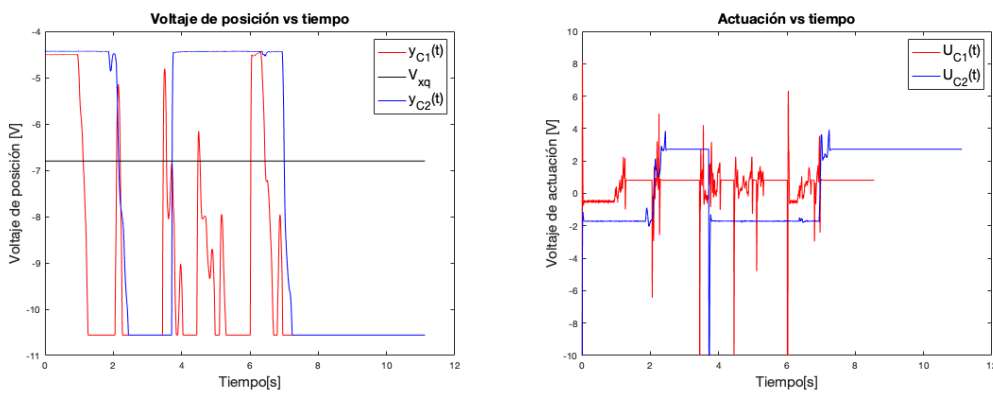


Figura 5.15: Diagrama de bloques del levitador



(a) Voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(s)$ en rojo y para el controlador $C_2(s)$ en azul. Posición del rotor en equilibrio en negro

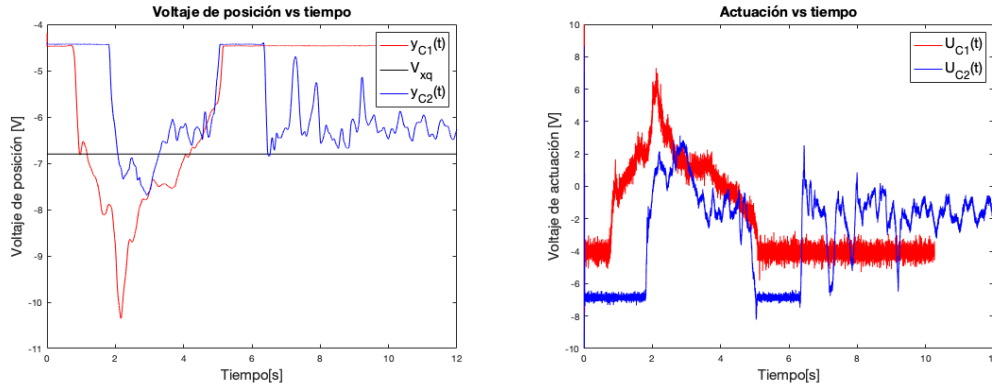
(b) Voltaje de actuación para controlador $C_1(s)$ en rojo y para controlador $C_2(s)$ en azul

Figura 5.16: Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 50$

a que el ancho de banda α es pequeño, los dos controladores no son capaces de controlar la planta.

Luego se aumenta la rapidez del ancho de banda nominal a $\alpha = 100$. En las Figuras 5.17a y se muestra como el controlador $C_1(s)$ no logra estabilizar el levitador pero el controlador $C_2(s)$ si lo estabiliza.

Al seguir aumentando el ancho de banda nominal $\alpha = 150$ se obtienen mejores resultados. En las Figuras 5.18a y 5.18b se muestra que tanto el controlador $C_1(s)$ como el controlador $C_2(s)$ estabilizan el levitador. Para comparar las señales de salida se utiliza el error cuadrático medio (ECM), dado por:



(a) Voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(s)$ en rojo y para el controlador $C_2(s)$ en azul. Posición del rotor en equilibrio en negro
 (b) Voltaje de actuación para controlador $C_1(s)$ en rojo y para controlador $C_2(s)$ en azul

Figura 5.17: Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 100$

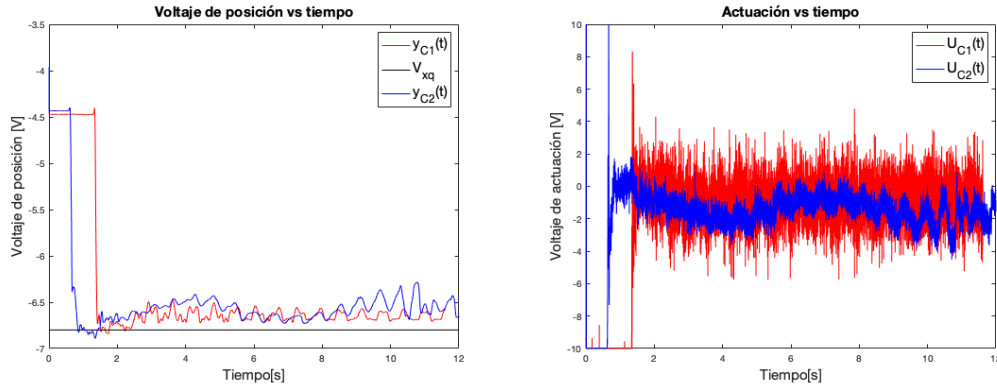
$$ECM = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (v_x(t) - v_{xq})^2 \quad (5.44)$$

De la Figura 5.18a se observa que ambas señales de salida tienen error estacionario pero al comparar el error cuadrático medio, el controlador $C_1(s)$ tiene un ECM 0.66[-] mientras que para el controlador $C_2(s)$ es de 0.37[-], lo que indica que el controlador que incluye el polo rápido controla mejor el levitador. Otra observación es que el controlador $C_2(s)$ controla mejor al levitador con una actuación de menor amplitud, como muestra la Figura 5.18b.

Finalmente se fija el ancho de banda nominal de lazo cerrado en $\alpha = 300$ lo que se grafica en las Figuras 5.19a-5.19b. En la Figura 5.19a se muestra que el levitador está estabilizado y que el error en estado estacionario es menor que en el caso de $\alpha = 150$. También se calcula el error cuadrático medio, siendo 0,80[-] para el controlador $C_1(s)$ y 0,67[-] para el controlador $C_2(s)$ por lo que el controlador $C_2(s)$ proporciona un mejor control.

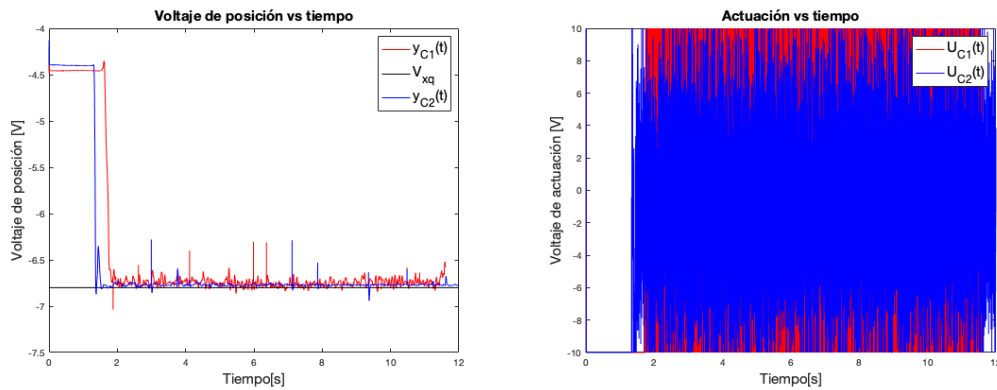
En la Figura 5.19b se muestra el voltaje de actuación para ambos controladores y se destaca que el controlador $C_1(s)$ está saturado mientras que el voltaje de actuación de $C_2(s)$ no lo está.

Al realizar este experimento para varios valores de α se concluye que al fijar el ancho de banda nominal lo suficientemente rápido el controlador $C_1(s)$ logra estabilizar el levitador. El problema que se observó es que con un ancho de banda nominal grande, la actuación aumenta en magnitud hasta el punto de saturarse. Se destaca el hecho que la cota inferior teórica que se calculó para el levitador es de $\alpha = 558$ la cual no fue posible implementar ya que el controlador con un $\alpha = 300$ ya está saturado. Es debido a esto que se utilizó una variante de controlador $C_2(z)$ que incluye el polo rápido del sistema, lo que baja la cota inferior y logra estabilizar el levitador sin saturarse al menos hasta un $\alpha = 300$.



(a) Voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(s)$ en rojo y para el controlador $C_2(s)$ en azul. Posición del rotor en equilibrio en negro
 (b) Voltaje de actuación para controlador $C_1(s)$ en rojo y para controlador $C_2(s)$ en azul

Figura 5.18: Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 150$



(a) Voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(s)$ en rojo y para el controlador $C_2(s)$ en azul. Posición del rotor en equilibrio en negro
 (b) Voltaje de actuación para controlador $C_1(s)$ en rojo y para controlador $C_2(s)$ en azul

Figura 5.19: Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 300$

5.2.4. Diseño del controlador en tiempo discreto

Se aborda el problema de controlar el levitador diseñando un controlador discreto, para lo cual se utilizará el modelo nominal que incluye los ceros de muestreo. El problema es que debido a que la cota sobre los polos del levitador es $M = 100$ se tiene que la cota inferior para el ancho de banda nominal es de $\alpha = 571$ lo cual causa problemas de saturación. Es por esto que se busca una solución particular para este sistema que permita obtener una cota inferior menor.

El modelo $G_{01}(z)$ que incluye los ceros de muestreo y el modelo $G_{02}(z)$ que incluye el polo rápido se muestran en (5.45) y (5.46) respectivamente. Donde la ganancia de alta

frecuencia es $b = 57500$ y el periodo de muestreo $\Delta = 0,001$.

$$G_{01}(z) = \frac{b\Delta^3(z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3} \quad (5.45)$$

$$G_{02}(z) = \frac{b\Delta^3(z^2 + 4z + 1)}{6(z - e^{-100\Delta})(z-1)^2} \quad (5.46)$$

El controlador $C_1(z)$ se diseña en base al modelo nominal $G_{01}(z)$ y tiene la estructura (5.47). Los parámetros de este controlador se obtienen en función del ancho de banda nominal α como se mostró en la Sección 4.4.3 página 65, quedando estos como se muestra en (5.48)-(5.52).

$$C_1(z) = \frac{p_0z^2 + p_1z + p_2}{z^2 + l_1z + l_2} \quad (5.47)$$

$$l_1 = -\frac{5\alpha^5\Delta^5}{36} + \frac{5\alpha^4\Delta^4}{6} - \frac{5\alpha^3\Delta^3}{3} + 5\alpha\Delta - 2 \quad (5.48)$$

$$l_2 = -\frac{19\alpha^5\Delta^5}{36} + \frac{10\alpha^4\Delta^4}{3} - \frac{25\alpha^3\Delta^3}{3} + 10\alpha^2\Delta^2 - 5\alpha * \Delta + 1 \quad (5.49)$$

$$p_0 = \frac{5(\alpha^5\Delta^2 - 6\alpha^4\Delta + 12\alpha^3)}{6b} \quad (5.50)$$

$$p_1 = -\frac{8\alpha^5\Delta^2 - 45 * \alpha^4\Delta + 60\alpha^3}{3b} \quad (5.51)$$

$$p_2 = \frac{17\alpha^5\Delta^2 - 60\alpha^4\Delta + 60\alpha^3}{6b} \quad (5.52)$$

Para el segundo modelo nominal $G_{02}(z)$ se diseña el controlador $C_2(z)$ el cual tiene el polo rápido como cero con el fin de que se cancele con el modelo de la planta.

$$C_2(z) = \frac{(z - e^{-100\Delta})(p_0z + p_1)}{z^2 + l_1z + l_2} \quad (5.53)$$

Con el controlador (5.53), el polinomio de lazo cerrado nominal viene dado por:

$$A_{cl0}(z) = (z - e^{-100\Delta})(z-1)^2(z^2 + l_1z + l_2) + \frac{b\Delta^3}{6}(z^2 + 4z + 1)(z - e^{-100\Delta})(p_0z + p_1) \quad (5.54)$$

El polinomio (5.54) se iguala a $(z - e^{-100\Delta})(z - 1 + \alpha\Delta)^4$ y se hace igualación de coeficientes, resultando en que los coeficientes del controlador se obtienen con las expresiones (5.55)-(5.58).

$$l_1 = \frac{\alpha^4\Delta^4}{6} - \frac{2\alpha^3\Delta^3}{3} + 4\alpha\Delta - 2 \quad (5.55)$$

$$l_2 = \frac{2\alpha^4\Delta^4}{3} - \frac{10\alpha^3\Delta^3}{3} + 6\alpha^2\Delta^2 - 4\alpha\Delta + 1 \quad (5.56)$$

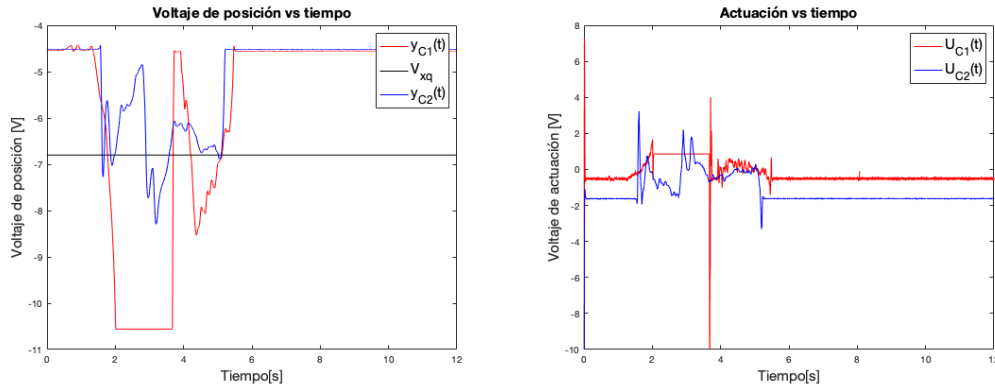
$$p_0 = -\frac{\Delta\alpha^4 - 4\alpha^3}{b} \quad (5.57)$$

$$p_1 = \frac{2(\Delta\alpha^4 - 2\alpha^3)}{b} \quad (5.58)$$

5.2.5. Resultados experimentales

Se prueban los controladores $C_1(z)$ y $C_2(z)$ para varios valores de ancho de banda nominal, en específico se estudia $\alpha = \{50, 100, 150, 300\}$.

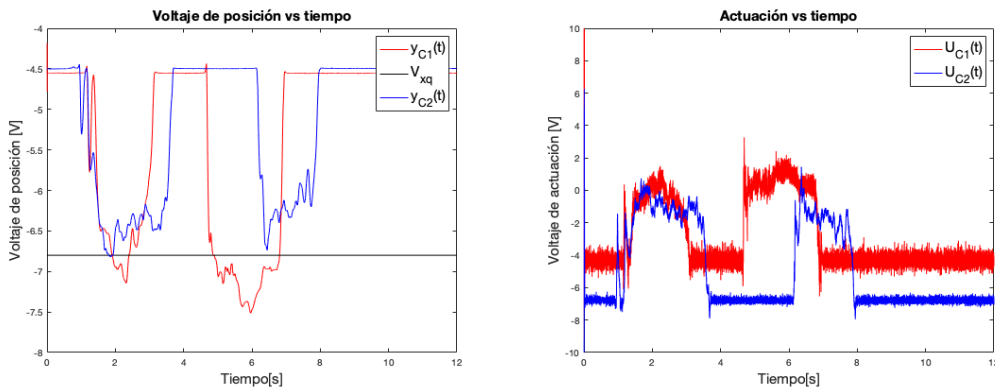
En las Figuras 5.20a y 5.20b se muestran los resultados de aplicar un ancho de banda nominal $\alpha = 50$. En la Figura 5.20a se observa que ambos controladores no logran estabilizar el levitador.



(a) Voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(z)$ en rojo y para el controlador $C_2(z)$ en azul. Posición del rotor en equilibrio en negro
(b) Voltaje de actuación para el controlador $C_1(s)$ en rojo y para el controlador $C_2(s)$ en azul

Figura 5.20: Voltaje de posición del rotor y voltaje de actuación con $\alpha = 50$

Luego se aumenta el ancho de banda nominal a $\alpha = 100$. De las Figuras 5.21a y 5.21b se observa que los controladores no son capaces de estabilizar el levitador. En contraste con el control continuo que si se logró estabilizar para un $\alpha = 100$.

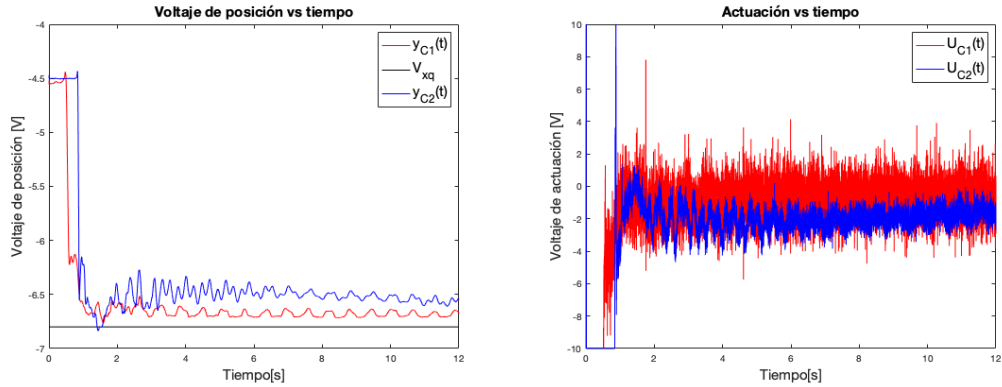


(a) Salida para el controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$
(b) Actuación para controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$

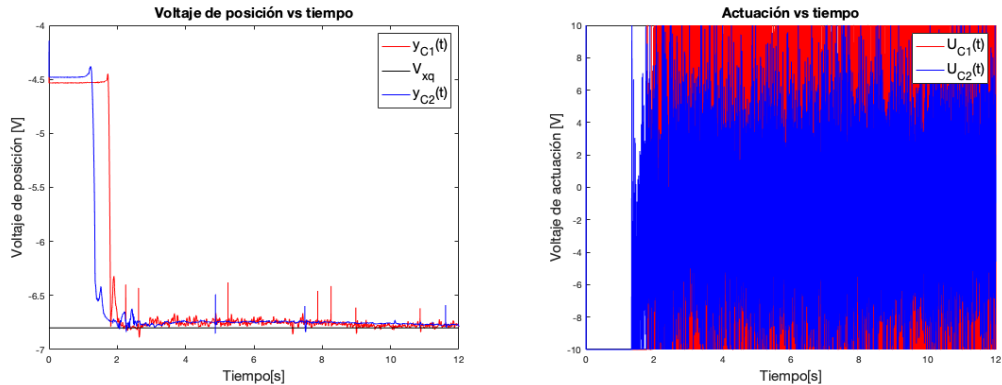
Figura 5.21: Salida y actuación con $\alpha = 100$

Luego se aumenta el ancho de banda nominal a $\alpha = 150$ y con este valor los dos

controladores discretos estabilizan el levitador. En la Figura 5.22a se muestra como el voltaje de posición del rotor para el controlador $C_1(z)$ (en rojo) tiene un menor error estacionario que el del controlador $C_2(z)$ (en azul). No obstante, el controlador $C_1(z)$ entrega una actuación con más amplitud, como se ve en la Figura 5.22b.

(a) Salida para el controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$ (b) Actuación para controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$ Figura 5.22: Salida y actuación con $\alpha = 150$

Finalmente se fija el ancho de banda nominal en $\alpha = 300$. Este caso se observa en las Figuras 5.23a y 5.23b donde se muestra que ambos controladores estabilizan el levitador con un error estacionario pequeño pero la diferencia es que el controlador $C_1(z)$ entrega una señal de actuación saturada mientras que el controlador $C_2(z)$, que se diseñó con la cancelación del polo rápido, opera en una zona no saturada.

(a) Salida para el controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$ (b) Actuación para controlador $C_1(z)$ y $C_2(z)$ Figura 5.23: Salida y actuación con $\alpha = 300$

CONCLUSIONES

EN el presente trabajo de Tesis se estudió el problema de como garantizar la estabilidad de una familia genérica de plantas utilizando un modelo nominal de alta frecuencia, teniendo en cuenta que el modelo verdadero tiene incertidumbre en la posición de polos y ceros.

En primer lugar, se estudió como el modelo nominal escogido aproxima el modelo verdadero de la planta en alta frecuencia. Posteriormente, se ilustró como al utilizar este modelo nominal con un controlador bipropio junto a asignación de polos, se obtiene una metodología de como abordar este tipo de problema.

Para determinar la estabilidad robusta del lazo cerrado resultante, se analizó el comportamiento asintótico del polinomio característico de lazo cerrado cuando la variable de diseño α , que corresponde al ancho de banda nominal de lazo cerrado, tiende a infinito. Llegando a un teorema que muestra que al escoger un α lo suficientemente grande, se logra estabilizar la planta verdadera. Este resultado corrobora la hipótesis planteada en esta Tesis y concuerda con lo observado en los estudios previos en la literatura.

Para determinar cotas ínfimas sobre el ancho de banda nominal que garanticen estabilidad robusta, se analizaron casos de orden bajo con incertidumbre solo en los polos y luego en plantas con polos y ceros inciertos. Es importante destacar la importancia del Value Set como herramienta de análisis, que junto con el Teorema de Exclusión del Cero permitieron asegurar la estabilidad del lazo cerrado verdadero para toda combinación de las incertidumbres dentro de su rango acotado.

En la Tabla 6.1 se pueden observar las cotas ínfimas para el ancho de banda nominal que aseguran estabilidad robusta para el polinomio de lazo cerrado de plantas de tiempo continuo que solo cuentan con polos inciertos. Donde k es la proporción entre el ancho de banda de lazo cerrado nominal α y la cota sobre la magnitud de los polos y ceros inciertos M del modelo verdadero.

También se estudiaron dos casos que incorporan ceros inciertos al modelo verdadero de la planta. En estos casos se ilustró que de incorporar ceros inciertos estos deben ser de fase mínima y que con el controlador propuesto no se puede establecer una cota ínfima para el ancho de banda nominal, pues en la medida que los ceros son más lentos se necesita de un ancho de banda más rápido. Es debido a esto que en la Sección 3.5.2 se propone una

Número de polos	Cota ínfima
1	1
2	2.42
3	5.5885
4	12.67

Tabla 6.1: Cota ínfima k para estabilidad robusta del lazo cerrado para plantas de tiempo continuo sin ceros.

variante de controlador con polos en el origen, con el cual se logran establecer cotas ínfimas para el ancho de banda nominal. Las cotas mínimas para el ancho de banda nominal son: $k = 1,1421$ para el caso de dos polos y un cero inciertos y $k = 1,34$ para el caso de tres polos y dos ceros inciertos.

Se analizó también el problema de plantas con incertidumbre en tiempo discreto, donde primero se obtuvieron expresiones para el modelo discreto de plantas con uno, dos y tres polos inciertos. Para estos casos de estudio se utilizaron dos modelos nominales: uno que incluye los ceros de muestreo y un segundo modelo nominal que no incluye los ceros de muestreo. Se concluyó que al trabajar en alta frecuencia es conveniente incluir la dinámica de los ceros de muestreo en el diseño del controlador ya que de no hacerlo, el lazo cerrado verdadero es inestable cerca de la frecuencia de Nyquist. Por tanto, las cotas ínfimas que se obtuvieron para el controlador que se diseña en base a los ceros de muestreo son: $k = 1$ para el modelo de primer orden, $k = 2,44$ para el modelo de segundo orden y $k = 5,71$ para el modelo de tercer orden.

Finalmente, se implementó la ley de control propuesta en dos sistemas físicos: un servomotor y un levitador magnético. Para el servomotor se utilizó el controlador de tiempo continuo y se obtuvo que el lazo cerrado es estable para la cota inferior teórica del ancho de banda nominal y en la medida que se escoge un α mayor se consigue un error de estado estacionario menor. No obstante, se observó que al aumentar demasiado α , la magnitud de la señal de actuación aumenta y llega a operar en saturación.

En el servomotor también se implementaron dos controladores discretos, uno que incluye y otro que no incluye los ceros de muestreo, donde se observó que entregan resultados similares cuando el ancho de banda nominal de lazo cerrado es bajo pero que al aumentarlo solo el controlador que incluye los ceros de muestreo estabiliza el lazo cerrado.

Para el levitador magnético primero se aplicó la ley de control de tiempo continuo, pero la cota inferior teórica para este sistema resultó muy alta debido al polo rápido que tiene el sistema y resulta en que el controlador opere en saturación. Razón por la cual se utilizó una solución ad-hoc con la que se obtuvieron mejores resultados. Al igual que con el servomotor, a valores mayores de α se obtuvo que el lazo cerrado tiene menor error de estado estacionario pero los controladores se saturan si el ancho de banda nominal es demasiado grande.

Al levitador se le diseñaron dos controladores de tiempo discreto, uno que incluye los ceros de muestreo y un segundo controlador que además incorpora el polo rápido del sistema. Los resultados que se obtuvieron son similares a los controladores diseñados en tiempo continuo, destacando que se necesitó un ancho de banda más grande para estabilizar el levitador. Lo que concuerda con que las cotas inferiores teóricas para plantas de tiempo discreto son ligeramente mayores a las cotas para plantas de tiempo continuo.

6.1. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro se consideran las siguientes ideas y líneas de investigación que complementan esta Tesis o que abordan el problema desde un nuevo ángulo.

- En esta Tesis se encontraron cotas inferiores para plantas de tiempo continuo estudiando casos de hasta orden cuatro pero se planteó una metodología para abordar el problema para plantas de orden superior. Desde esta perspectiva, un trabajo a futuro sería encontrar una expresión que generalice los resultados obtenidos a una cantidad de polos y ceros arbitrarios.
- En el estudio que se hizo de tiempo discreto solo se consideraron plantas con polos inciertos, por lo que queda analizar cual es el efecto de tener ceros inciertos sobre la estabilidad del lazo cerrado.
- Otra línea de investigación sería cambiar el enfoque de función de transferencia por el de espacio de estados. Llevar el modelo de función de transferencia con polos y ceros inciertos a un modelo en variable de estado conlleva que los parámetros inciertos se dispersen entre las matrices de estado A , de entrada B y de salida C . Por lo que primero hay que escoger una forma canónica conveniente, por ejemplo la forma canónica controlable, observable, diagonal, entre otras.

Otra dificultad que surge es que el modelo nominal de alta frecuencia que se propone en esta Tesis lleva, en espacio de estados, a un sistema de orden reducido en comparación al modelo verdadero de la planta. Si por ejemplo se utiliza retroalimentación de estados, el controlador para el modelo nominal y el modelo verdadero tendrán distinto orden y habría que buscar como aplicar el controlador diseñado para el modelo nominal al modelo verdadero.

- Finalmente, al abordar el problema en espacio de estados, aparecen nuevas herramientas o métodos como lo son control MPC, control H_∞ , entre otros. Estas técnicas en general funcionan bien con modelos precisos de los sistemas que se buscan controlar, por lo que como ya se mencionó, es necesario estudiar como el modelo nominal de alta frecuencia, que simplifica el modelo verdadero a un integrador múltiple, afecta en el diseño del controlador y en la estabilidad del lazo cerrado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Ljung, *System Identification. Theory for the User*, 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [2] G. Goodwin, J. Agüero, J. Welsh, J. Yuz, G. Adams, and C. Rojas, “Robust identification of process models from plant data,” *Journal of Process Control*, vol. 18, no. 9, pp. 810–820, 2008.
- [3] K. Åström and T. Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society, 1995.
- [4] C. Sánchez, G. C. Goodwin, J. I. Yuz, M. Serón, and D. Carrasco, “Towards a simple sampled-data control law for stably invertible linear systems,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 4582–4587, 2020, 21st IFAC World Congress. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320307771>
- [5] J. I. Yuz and G. C. Goodwin, *Sampled-data models for linear and nonlinear systems*. London, UK: Springer, 2014.
- [6] Y. Okuyama, “Kharitonov-like rectangle for the sectorial area stability,” in *SICE 2003 Annual Conference (IEEE Cat. No.03TH8734)*, vol. 1, 2003, pp. 1104–1109 Vol.1.
- [7] F. J. KRAUS, B. D. O. ANDERSON, and M. MANSOUR, “Robust stability of polynomials with multilinear parameter dependence,” *International Journal of Control*, vol. 50, no. 5, pp. 1745–1762, 1989. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/00207178908953463>
- [8] V. Kharitonov and S.-I. Niculescu, “On the stability of linear systems with uncertain delay,” in *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*, vol. 3, 2002, pp. 2216–2220 vol.3.
- [9] B. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, ser. Irwin Series in Finance. Prentice Hall PTR, 1994. [Online]. Available: <https://books.google.cl/books?id=vP5QAAAAMAAJ>
- [10] J. Ackermann, P. Blue, T. Bünte, L. Güvenc, D. Kaesbauer, M. Kordt, M. Muhler, and D. Odenthal, *Robust control: the parameter space approach*. Springer, 2002, vol. 2.
- [11] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

- [12] A. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, ser. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1973. [Online]. Available: <https://books.google.cl/books?id=7mXNjgEACAAJ>
- [13] N. Bose, E. Jury, and E. Zeheb, “On robust Hurwitz and Schur polynomials,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 12, pp. 1166–1168, 1988.
- [14] E. A. Elgueta and J. I. Yuz, “Robust control of continuous-time systems with pole uncertainties,” in *2022 IEEE International Conference on Automation/XXV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 2022, pp. 1–6.
- [15] S. Dasgupta, “Kharitonov’s theorem revisited,” *Systems Control Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 381–384, 1988. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167691188900965>
- [16] R. Minnichelli, J. Anagnost, and C. Desoer, “An elementary proof of kharitonov’s stability theorem with extensions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 9, pp. 995–998, 1989.
- [17] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of dynamic systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1990.