

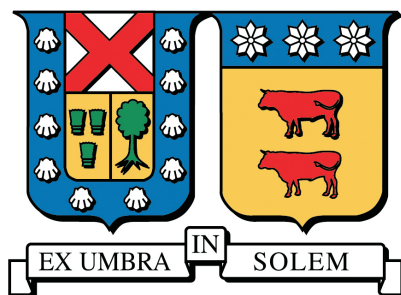
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**TÉCNICAS DE REDUCCIÓN Y PARAMETRIZACIÓN
DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS.**

VICTOR ALEJANDRO ARAYA NIETO

**Ingeniero Civil
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil**

Noviembre de 2017



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

TÉCNICAS DE REDUCCIÓN Y PARAMETRIZACIÓN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS.

Memoria de Título y Tesis de Grado presentada por:
VICTOR ALEJANDRO ARAYA NIETO

Como requisito parcial para optar al título de:

Ingeniero Civil

y al grado de:

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Profesor Guía

Dr. Héctor Jensen Velasco

Noviembre de 2017

TÍTULO DE LA TESIS:

TÉCNICAS DE REDUCCIÓN Y PARAMETRIZACIÓN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS.

AUTOR:

VICTOR ALEJANDRO ARAYA NIETO

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Hector Jensen Velasco

Dr. Fernando Labbé Zepeda

Dr. Marcos Valdebenito Castillo

Valparaíso, Chile, Noviembre de 2017.

Dedicado a mis padres

Agradecimientos

Agradezco a Dios por sobre todas las cosas, pues todos los talentos y oportunidades son por su mano.

A mi familia, por su apoyo en el largo proceso de la universidad.

A mis amigos de la universidad Pablo, Christian, Gonzalo, Gabriel, Matias, Carlos, Javier, Mauricio, Mattias, Paola, Herman y Karolay, por las travesías y los momentos que siempre quedarán en el recuerdo.

A los memoristas que se convirtieron en amigos Danko, Ivan, Carlos y Alvaro.

A Danilo Kusanovic, cuya trabajo ha sido la base para los desarrollos de esta tesis.

Al Estado por las becas que financiaron los estudios de la carrera.

A la universidad y postgrado por las becas que financiaron el Magíster.

Finalmente, agradezco la ayuda otorgada por CONICYT a través de la *Beca para estudios de Magister en Chile*.

Resumen

En esta tesis se presenta el desarrollo de técnicas de reducción de modelos y su parametrización para resolver de manera eficiente problemas de simulación complejos basado en re-análisis para modelos de alta dimensionalidad. La modelación de estos sistemas requiere de un alto costo computacional para distintos tipos de aplicaciones, tales como, análisis de incertidumbre, actualización de modelos de elementos finitos, sensibilidad de la confiabilidad, entre otros. Es por esto, que el desarrollo y aplicación de herramientas para optimizar estos cálculos es fundamental.

En investigaciones anteriores se ha avanzado en el desarrollo de técnicas de síntesis modal con el fin de resolver eficientemente los problemas antes mencionados. Estas técnicas están basadas en subestructuración del modelo con reducción de los modos internos a las subestructuras (*fixed - interface modes*). En este trabajo se aborda con mayor profundidad la síntesis modal, considerando adicionalmente la reducción de grados de libertad de borde utilizando modos característicos (*characteristic normal modes*). Se propone una técnica de interpolación de los modos característicos enfocada a la parametrización del modelo reducido, con lo cual se busca disminuir los tiempos de cálculo sin perder la calidad de los resultados obtenidos.

Adicionalmente, se incorpora el efecto de los modos internos residuales (*residual fixed-interface normal modes*) como una corrección a las reducciones antes mencionadas. La consideración de los modos residuales, en conjunto con la interpolación de interfaz, generan una metodología bastante eficiente para la resolución de los problemas de simulación basados en re-análisis.

El desempeño de estas técnicas es evaluado en varios ejemplos de aplicación, los cuales corresponden a modelos de elementos finitos lineales y con no linealidades localizadas, sometidos a acciones ambientales modeladas como procesos estocásticos. Estos modelos corresponden a problemas de alta dimensionalidad debido a la gran cantidad de grados de libertad y parámetros involucrados. Por otro lado, se consideran la incertidumbre en las propiedades de los modelos mediante la utilización de campos aleatorios, los cuales entregan una estrategia de modelación realista del comportamiento de las incertidumbre en los sistemas estructurales.

Palabras Clave: *Técnicas de Reducción, Parametrización, Interpolación de Interfaz, Modelos de Elementos Finitos, Simulaciones Basadas en Re-análisis, Campos Aleatorios.*

Abstract

This thesis presents the development of an effective model reduction and parameterization technique to solve simulation problems based on analysis of high dimensional models, which involve a high computational cost. Some examples of these types of analysis include: uncertainty analysis, finite element models updating, reliability-based design, among others. The development of application and tools to improve the efficiency of this process is fundamental.

In previous research, progress has been made based on modal synthesis techniques in order to efficiently solve the aforementioned problems. These techniques are based on the substructuring of the model with the reduction of the internal modes, also called fixed - interface normal modes. In this work, the interface reduction based on the characteristic normal modes is considered in a deeper way. An interpolation scheme for approximating the interface mode is proposed in order to improve the parameterization efficiency. With this technique the computational cost is reduced without losing the quality of the results.

Additionally, the effect of the residual normal modes is incorporated as a correction to the aforementioned reductions. The residual effects in addition with the interpolation scheme conform an efficient methodology for the resolution of re-analysis based problems.

The performance of these techniques is evaluated in several application examples, which correspond to linear and localized non-linear finite element models, under environmental actions modeled as stochastic processes. These models correspond to problems of high dimensionality due to the large number of degrees of freedom and parameters involved. On the other hand, the uncertainty in the properties of the models is considered through the use of random fields, which provide a realistic modeling strategy of the behavior of the uncertainty in the structural systems.

keywords: *Reduction Techniques, Parametrization, Interpolation Schemes, Finite Element Models, re-analysis based problems, Random Fields.*

Glosario

1. **Método de elementos finitos:** Método numérico general utilizado para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales asociadas a diversos problemas de ingeniería y física.
2. **Modelo de elementos finitos:** Modelo computacional que permite analizar el comportamiento de un sistema determinado.
3. **Métodos de simulación:** Métodos que proporcionan soluciones aproximadas de una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreo de números pseudoaleatorios en una computadora.
4. **Probabilidad de primera excursión:** Probabilidad de que cierta cantidad estocástica sobrepase un valor umbral dado dentro de un intervalo de tiempo determinado.
5. **Probabilidad de falla:** Probabilidad de que ciertas respuestas de interés superen un valor umbral predefinido. El concepto de falla no implica necesariamente el colapso del sistema analizado, sólo que un umbral determinado se excede.
6. **Confiabilidad estructural:** Probabilidad de que dentro de un período de referencia se satisfagan las condiciones de desempeño preestablecidas.
7. **Propagación de incertidumbre:** Efecto de la incertidumbre en propiedades de un sistema sobre la respuesta de éste al estar sometido a una excitación.
8. **Post-procesamiento:** Acción de reutilizar la información obtenida mediante un análisis de confiabilidad.
9. **Costo computacional:** Tiempo necesario para realizar un determinado proceso en un computador.
10. **Campo Aleatorio:** Distribución espacial aleatorio de las propiedades de un sistema.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estructura del trabajo de tesis	3
1.2. Objetivos Generales	3
1.3. Objetivos Específicos	4
1.4. Formulación del problema	5
2. Síntesis Modal	7
2.1. Subestructuración	8
2.2. Modelo reducido basado en modos dominantes	12
2.3. Reducción de Interfaz	14
2.4. Contribución de los modos residuales	16
2.4.1. Corrección Estática	16
2.4.2. Matriz de transformación mejorada	17
2.4.3. Matrices Reducidas	19
3. Parametrización Estructural	21
3.1. Modos Dominantes	22
3.2. Modos de Interfaz	23
3.3. Contribución de Modos Residuales	23
4. Interpolación de Interfaz	29
4.1. Metamodelo para Modos de Interfaz	30
4.2. Puntos de Soporte	31
4.3. Aproximación de los Modos de Interfaz	32
4.4. Determinación de los Coeficientes de Interpolación	34
4.5. Aproximación de Segundo Orden	35
4.6. Puntos de Soporte	37
4.6.1. Puntos de Soporte Fijos	37

4.6.2. Puntos de Soporte Adaptivos	38
5. Confiabilidad y Propagación de Incertidumbre	41
5.1. Evaluación de la Confiabilidad	42
5.1.1. Estimación de la Confiabilidad	43
5.1.2. Solicitación Sísmica	45
5.2. Propagación de Incertidumbre	46
6. Ejemplo de Aplicación 1	53
6.1. Descripción del Modelo	54
6.2. Formulación del Problema	55
6.3. Modelo Reducido Nominal	57
6.4. Parametrización	59
6.5. Interpolación de Interfaz	62
6.6. Resultados Confiabilidad	65
7. Ejemplo de Aplicación 2	71
7.1. Respuesta en el dominio de la frecuencias	72
7.2. Comparación frecuencias	73
7.3. Resultados Respuesta	74
7.4. Comparación de Tiempos	75
8. Ejemplo de Aplicación 3	77
8.1. Descripción del Modelo	78
8.2. Formulación del Problema	82
8.3. Modelo Reducido Nominal	84
8.4. Parametrización	87
8.5. Interpolación de Interfaz	90
8.6. Resultados Confiabilidad	93
9. Ejemplo de Aplicación 4	99
9.1. Descripción de las Subestructuras	100
9.2. Formulación del Problema	101
9.3. Modelo Reducido Nominal	103

9.4. Comparación de Subestructuraciones	105
10.Ejemplo de Aplicación 5	107
10.1. Descripción del Modelo	108
10.2. Formulación del Problema	115
10.3. Modelo Reducido Nominal	118
10.4. Parametrización	121
10.5. Interpolación de Interfaz	124
10.6. Resultados Confiabilidad	127
11.Conclusiones	129
A. Modal Assurance Criterion	131
A.1. Cálculo del MAC	131
B. Definición Interfaces	133

Índice de figuras

2.1. Marco con disipador	8
2.2. Subestructuración	9
2.3. Esquema grados de libertad	9
2.4. <i>fixed-interface normal mode</i>	12
2.5. <i>interface constraint mode</i>	12
2.6. Υ_{cc1}	15
2.7. Υ_{cc2}	15
2.8. Esquema Generación Modelo Reducido Nominal	20
3.1. Esquema de Parametrización	27
4.1. Interfaz subestructuras 5 a 7	30
4.2. Puntos de soporte $\theta^p, p = 1, \dots, 4$	31
4.3. Modos de soporte $\Upsilon_I(\theta^p), p = 1, \dots, 4$	31
4.4. Coordenadas relativas	32
4.5. Aproximación Lineal θ	32
4.6. Aproximación Lineal Υ_I	33
4.7. Punto mas cercano θ^l	34
4.8. Puntos de soporte	34
4.9. Puntos de soporte θ^p y $\theta^{(-p)}$	35
4.10. Funciones interpolación cuadrática	36
4.11. Aproximación cuadrática	36
4.12. Muestreo puntos de soporte	37
4.13. Muestreo	38
4.14. Soporte	38
4.15. Incorporación Interpolación en Parametrización	39
4.16. Esquema Interpolación	40

5.1. Dominio de Falla	43
5.2. Simulación <i>Subset</i>	44
5.3. Esquema <i>Point Source</i>	45
5.4. Aceleración Basal	46
5.5. Campo Aleatorio	47
5.6. Función de Correlación	48
5.7. Muestras Campo Aleatorio	49
5.8. Histograma Frecuencias	50
5.9. Respuesta Dominio de la Frecuencia	50
6.1. Esquema marco 8 pisos	54
6.2. Esquema Subestructuras marco 8 pisos	54
6.3. Esquema Campo Aleatorio	56
6.4. Correlación campo aleatorio	56
6.5. Errores Frecuencias	57
6.6. MAC modelo $m-1$ nominal	57
6.7. Errores Frecuencias θ^{k1}	59
6.8. Errores Frecuencias θ^{k2}	59
6.9. MAC parametrización modelo $m-1$ en θ^{k1}	60
6.10. MAC parametrización modelo $m-1$ en θ^{k2}	60
6.11. Errores Frecuencias θ^{k1}	62
6.12. Errores Frecuencias θ^{k2}	62
6.13. MAC interpolación modelo $m-1$ en θ^{k1}	63
6.14. MAC interpolación modelo $m-1$ en θ^{k2}	63
6.15. P_{falla} vs Nivel umbral	65
6.16. P_{falla} vs Nivel umbral	66
6.17. Probabilidad de Falla DI_IB	66
6.18. Probabilidad de Falla DIR_IB	66
6.19. P_{falla} vs Nivel umbral	67
6.20. P_{falla} vs Nivel umbral	68
6.21. P_{falla} vs Nivel umbral DI_IB	68
6.22. P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB	68

7.1. Histograma frecuencias modelo $m-1$	73
7.2. Respuesta dominio frecuencia piso 8	74
7.3. Respuesta dominio frecuencia piso 1	74
8.1. Modelo edificio Alcazar	78
8.2. Edificio Alcazar	78
8.3. Planta piso 1	79
8.4. Planta piso 2	79
8.5. Planta piso 3 a 16	80
8.6. Esquema Subestructuras edificio alcazar	81
8.7. Esquema Campo Aleatorio	83
8.8. Correlación campo aleatorio	83
8.9. Errores Frecuencias	84
8.10. MAC modelo $a-1$ nominal	85
8.11. Errores Frecuencias θ^{k1}	87
8.12. Errores Frecuencias θ^{k2}	87
8.13. MAC parametrización modelo $a-1$ en θ^{k1}	88
8.14. MAC parametrización modelo $a-1$ en θ^{k2}	88
8.15. Efecto interpolación θ^{k1}	90
8.16. Efecto Optimización θ^{k2}	90
8.17. MAC interpolación modelo $a-1$ en θ^{k1}	91
8.18. MAC interpolación modelo $a-1$ en θ^{k2}	91
8.19. Aceleración Basal	93
8.20. P_{falla} vs Nivel umbral	94
8.21. P_{falla} vs Nivel umbral	94
8.22. P_{falla} vs Nivel umbral	94
8.23. P_{falla} vs Nivel umbral	95
8.24. P_{falla} vs Nivel umbral	96
8.25. P_{falla} vs Nivel umbral DLIB	96
8.26. P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB	96
9.1. Esquema subestructuras Alcazar	100
9.2. Esquema Campo Aleatorio	102

9.3. Correlación campo aleatorio	102
9.4. Errores Frecuencias	103
9.5. MAC modelo a -2 nominal	103
9.6. Matriz de Masa D	105
9.7. Matriz de Rigidez D	105
9.8. Matriz de Masa D	105
9.9. Matriz de Rigidez D	105
10.1. Modelo edificio Titanium	108
10.2. Edificio Titanium	108
10.3. Planta típica pisos 1 a 15	109
10.4. Planta típica pisos 16 a 52	110
10.5. Ubicación disipadores en planta	112
10.6. Disipadores Transversales	112
10.7. Disipadores Longitudinales	113
10.8. Esquema Subestructuras edificio Titanium	114
10.9. Esquema Campo Aleatorio	116
10.10 Correlación campo aleatorio	116
10.11 Respuesta típica disipador	117
10.12 Errores Frecuencias	118
10.13 MAC modelo t -1 nominal	118
10.14 Errores Frecuencias θ^{k1}	121
10.15 Errores Frecuencias θ^{k2}	121
10.16 MAC parametrización modelo T -1 en θ^{k1}	122
10.17 MAC parametrización modelo T -1 en θ^{k2}	122
10.18 Efecto interpolación θ^{k1}	124
10.19 Efecto Optimización θ^{k2}	124
10.20 MAC interpolación modelo t -1 en θ^{k1}	125
10.21 MAC interpolación modelo t -1 en θ^{k2}	125
10.22 P_{falla} vs Nivel umbral	127
10.23 P_{falla} vs Nivel umbral DLIB	127
10.24 P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB	127

B.1. Mapa de interfaces $t-1$	133
B.2. Mapa de interfaces	134
B.3. Mapa de interfaces	134
B.4. Mapa de interfaces	135

Índice de cuadros

6.1. Casos Modelos Reducidos	55
6.2. Comparación errores	57
6.3. Tiempos Ensable	58
6.4. Tiempos Modelos	58
6.5. Comparación errores θ^{k1}	59
6.6. Comparación errores θ^{k2}	59
6.7. Tiempos Parametrización	61
6.8. Comparación errores θ^{k1}	62
6.9. Comparación errores θ^{k2}	62
6.10. Tiempos construcción Base	64
6.11. Tiempos Ensamble	64
6.12. Probabilidades de Falla θ fijo	65
6.13. Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$	66
6.14. Probabilidades de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$	66
6.15. Probabilidades de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$	66
6.16. Probabilidad de Falla distintos factores β	67
6.17. Probabilidades de Falla $\beta = 1$	68
6.18. Probabilidades de Falla $\beta = 1$	68
6.19. Probabilidades de Falla $\beta = 1$	68
6.20. Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)	69
7.1. Tiempos Respuesta dominio de la frecuencia	75
8.1. Coordenadas de los ejes en las vistas en planta	80
8.2. Material elementos	81
8.3. Casos Modelos Reducidos	82
8.4. Comparación errores	84
8.5. Tiempos Ensable	85

8.6. Tiempos Modelos	86
8.7. Comparación errores θ^{k1}	87
8.8. Comparación errores θ^{k2}	87
8.9. Tiempos Parametrizacion	89
8.10. Comparación errores θ^{k1}	90
8.11. Comparación errores θ^{k2}	90
8.12. Tiempos construcción Base	92
8.13. Tiempos Ensamble	92
8.14. Probabilidades de Falla θ fijo	93
8.15. Probabilidad de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$	94
8.16. Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$	94
8.17. Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$	94
8.18. Probabilidad de Falla distintos factores β	95
8.19. Probabilidad de Falla $\beta = 5$	96
8.20. Probabilidades de Falla $\beta = 5$	96
8.21. Probabilidades de Falla $\beta = 5$	96
8.22. Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)	97
9.1. Casos Modelos Reducidos	100
9.2. Comparación errores	103
9.3. Tiempos Ensamble	104
9.4. Tiempos Modelos	104
10.1. Material elementos	111
10.2. Espesores Muros	111
10.3. Ubicación disipadores en altura	113
10.4. Caso Modelo Reducido	114
10.5. Parámetros disipador	117
10.6. Comparación errores	118
10.7. Tiempos Ensable	119
10.8. Tiempos Modelos	119
10.9. Comparación errores θ^{k1}	121
10.10. Comparación errores θ^{k2}	121

10.11	Tiempos Parametrizacion	123
10.12	Comparación errores θ^{k1}	124
10.13	Comparación errores θ^{k2}	124
10.14	Tiempos construcción Base	126
10.15	Tiempos Ensamble	126
10.16	Probabilidades de Falla $\beta = 1$	127
10.17	Probabilidades de Falla $\beta = 1$	127
10.18	Probabilidades de Falla $\beta = 1$	127
10.19	Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)	128

Introducción

La solución de muchos problemas complejos de simulación que involucran modelos de elementos finitos requiere de un alto número de análisis. Este tipo de problemas incluye una serie de problemas de importancia práctica tales como identificación bayesiana, análisis de confiabilidad, optimización estructural, entre otras [1–6]. Estos problemas tienen un amplio espectro de aplicación en áreas tales como ingeniería sísmica, ingeniería nuclear, ciencia de materiales, ingeniería de costas afuera, entre otros. Los costos computacionales correspondientes, cuando modelos de elementos finitos de alta dimensionalidad están involucrados, pueden ser prohibitivos desde el punto de vista práctico.

Con el fin de resolver este tipo de problemas se han desarrollado técnicas de reducción de modelos de elementos finitos. En particular, se tienen como base para este trabajo las técnicas de síntesis modal [7, 8], las cuales han sido abordadas en trabajos anteriores [1, 9]. Esta técnica involucra dividir la estructura en un número de subestructuras seleccionadas de manera apropiada, lo cual es conveniente para el análisis y diseño de sistemas complejos cuyas componentes usualmente se trabajan en forma independiente. Posterior a la subestructuración, para cada subestructura se genera un modelo reducido, los cuales son ensamblados para obtener un modelo reducido global de la estructura. Lo anterior, se logra mediante los llamados *fixed-interface normal modes* e *interface modes*.

La técnica estándar para definir los modelos reducidos se basa, en general, en la consideración de solo algunos *fixed-interface normal modes* y la totalidad de los *interface constraint modes*. A pesar que una importante reducción se puede realizar individualmente en cada subestructura, dicha reducción no afecta a la interfaz. Esto podría ser un problema por ejemplo para mallas de elementos finitos muy finas en las zonas de interfaz, o cuando se tienen muchas subestructuras. En esos casos la dimensión del modelo reducido puede estar dominada por el número de grados de libertad de interfaz. Para reducir dicho número de grados de libertad, una serie de aproximaciones están sugeridas en la literatura [10–14].

En particular, un método basado en modos característicos (*characteristic constraint modes*) es bastante atractivo conceptual y computacionalmente [14]. Los *characteristic constraint modes* son generados en términos de los *interface constraint modes* y de los vectores propios obtenidos de un

análisis de valores y vectores propios de una partición de la matriz de masa y rigidez asociadas a la interfaz en el modelo reducido que considera todos los grados de libertad de interfaz. La base de vectores propios resultantes pueden ser truncada, obteniendo un modelo mucho mas reducido. Dichos modos tienen gran significación en el movimiento de la interfaz y en la transferencia de vibración entre las subestructuras [14,15].

En conjunto a la reducción basada en modos dominantes para el interior de las subestructuras y en modos característicos para la interfaz, se incorporan explícitamente la contribución de los *residual fixed-interface normal modes* [16,24], en la técnica que se denomina *corrección estática* [17,18]. Al incorporar esta técnica se logra una importante mejora en la estimación de valores y vectores propios [16,19].

Las técnicas de reducción desarrolladas en este trabajo son complementadas con una parametrización eficiente del modelo de elementos finitos [20]. Aunque las subestructuras se modelen dependiendo de solo un parámetro, las interfaces dependen del conjunto de ellos, por lo que las parametrizaciones utilizadas para los modos interiores no son aplicables. En consecuencia, el problema de valores y vectores propios de la interfaz para el cálculo de los *characteristic constraint modes* debe ser incorporado en los análisis, lo que requiere de un esfuerzo computacional adicional. En este trabajo se aborda esta problemática proponiendo la utilización de bases de modos característicos que permitan aproximar estos vectores en los nuevos puntos de análisis mediante interpolaciones. Este esquema esta basado en algunas ideas de [21]. Con lo anterior, se espera aliviar el costo computacional del problema de interfaz, obteniendo modelos reducidos parametrizados que pueden ser utilizados para aproximar la respuesta estructural sin perder la exactitud de los resultados. La efectividad de las técnicas de interpolación incorporadas a la reducción de modelos de elementos finitos es evaluada en una serie de problemas de simulación compleja con modelos de alta dimensionalidad, tanto lineales como con no-linealidades localizadas.

1.1. Estructura del trabajo de tesis

La presente tesis esta constituida por 8 capítulos, los cuales fueron organizados de acuerdo a una secuencia lógica que va desde la formulación del problema hasta los resultados y conclusiones. La disposición de los capítulos es la siguiente:

- **Capítulo 1:** Presentación de los detalles y la importancia del tipo de problema abordado en esta tesis. Se indican los objetivos generales y específicos.
- **Capítulo 2:** Se revisan los esquemas de síntesis modal mediante los cuales es posible generar un modelo reducido del sistema estructural.
- **Capítulo 3:** Se desarrollan las parametrizaciones a las distintas variantes de modelos reducidos para su aplicación a problemas de re-análisis.
- **Capítulo 4:** Se presenta una técnica de interpolación a nivel de interfaz para mejorar la eficiencia de la parametrización de los modelos reducidos con reducción de interfaz.
- **Capítulo 5:** Se presentan las aplicaciones en que serán evaluadas las técnicas de interpolación incorporadas a la parametrización de los modelos reducidos.
- **Capítulo 6, 7, 8, 9 y 10:** Se desarrollan cinco ejemplos numéricos que demuestran la aplicabilidad del método propuesto.
- **Capítulo 11:** Se exponen las conclusiones del trabajo desarrollado y se plantean problemas a abordar en el futuro.

1.2. Objetivos Generales

1. Generalización del método de síntesis modal considerando condensación de grados de libertad de borde e interfaz.
2. Desarrollo de técnicas de aproximación para los modos característicos de interfaz.
3. Parametrización y aproximación de subestructuras dependientes de parámetros correlacionados, los cuales son caracterizados mediante campos aleatorios.
4. Aplicación de técnicas eficientes de síntesis modal a problemas complejos de simulación.

1.3. Objetivos Específicos

1. Implementación de técnicas de aproximación para los modos característicos de interfaz.
2. Modelar la incertidumbre de los parámetros del sistema estructural a través de funciones de distribución probabilísticas.
3. Obtener la respuesta dinámica de sistemas estructurales lineales y con no-linealidades singulares utilizando modelos reducidos.
4. Adaptar la implementación computacional de simulaciones de tipo *Subset Simulation* para la evaluar la eficacia de las técnicas de reducción de modelos propuestas.
5. Implementar computacionalmente simulaciones de propagación de incertidumbre para evaluar la eficacia de las técnicas de reducción de modelos propuestas.

1.4. Formulación del problema

En el contexto de los problemas de simulación mencionados anteriormente, se deben realizar un alto número de análisis dinámicos para distintas combinaciones de los parámetros que definen el modelo de elementos finitos. Para un grupo bastante general de sistemas estructurales dinámicos se puede describir su comportamiento por la siguiente ecuación de movimiento

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}_{nl}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{z}(t)) + \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\omega}) \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de desplazamiento de dimensión n , $\dot{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de velocidad, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de aceleración, \mathbf{R}_{nl} es el vector de fuerzas restitutivas de los dispositivos no lineales, $\mathbf{z}(t)$ es una variable adimensional que describe el estado de las componentes no lineales y \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas. Las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} describen la masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, respectivamente. Estas matrices y los dispositivos no lineales son función de la variable $\boldsymbol{\theta}$ que representa los parámetros que describen el modelo. El vector de fuerzas externas \mathbf{F} , depende de la incertidumbre en la sollicitación $\boldsymbol{\omega}$. La solución del sistema depende de los parámetros que describen el modelo y de la incertidumbre asociada a las sollicitaciones. La evolución del conjunto de variables $\mathbf{z}(t)$ esta definida por la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{\mathbf{z}}(t, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{z}(t)) \quad (1.2)$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ representa un vector función no lineal. De esta forma se pueden modelar diferentes tipos de no linealidades incluyendo histéresis y degradación [22,23]. De la ecuación (1.2) se observa que el conjunto de variables $\mathbf{z}(t)$ es función de los desplazamientos $\mathbf{x}(t)$ y velocidades $\dot{\mathbf{x}}(t)$ además de los parámetros del sistema $\boldsymbol{\theta}$. Por lo tanto, las ecuaciones (1.1) y (1.2) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$. Esta formulación es adecuada para problemas en los que la mayor parte de las componentes se comportan de manera lineal y solo algunas de manera no-lineal. Este tipo de problemas incluye sistemas con dispositivos de control de vibraciones tales como disipadores, aisladores, entre otros.

Si se divide el modelo estructural en N_s subestructuras y reescribiendo las coordenadas del sistema $\mathbf{x}(t)$ en coordenadas interiores a las subestructuras $\mathbf{x}_i(t)$ y de interfaz $\mathbf{x}_b(t)$, las matrices de masa $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ y rigidez $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ pueden ser reescritas como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{ii}^1, \dots, \mathbf{M}_{ii}^{N_s}] & [\mathbf{M}_{ib}^1, \dots, \mathbf{M}_{ib}^{N_s}] \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{M}_{ib}^{1T}, \dots, \mathbf{M}_{ib}^{N_s T}] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{M}_{bb}^1, \dots, \mathbf{M}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ii}^1, \dots, \mathbf{K}_{ii}^{N_s}] & [\mathbf{K}_{ib}^1, \dots, \mathbf{K}_{ib}^{N_s}] \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{K}_{ib}^{1T}, \dots, \mathbf{K}_{ib}^{N_s T}] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{K}_{bb}^1, \dots, \mathbf{K}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

donde i y b contienen los grados de libertad internos y de interfaz (o borde) de la subestructura

s respectivamente. Las matrices \mathbf{M}_{ii}^s , \mathbf{M}_{ib}^s , \mathbf{M}_{bb}^s , \mathbf{K}_{ii}^s , \mathbf{K}_{ib}^s y \mathbf{K}_{bb}^s con $s = 1, \dots, N_s$ representan las particiones de las matrices de masa y rigidez de la subestructura s asociadas a los grados de libertad internos i y de interfaz b . Por otro lado la matriz $\tilde{\mathbf{T}}$ es una matriz de transformación que mapea las coordenadas de borde de cada subestructura al conjunto de coordenadas de borde del modelo ensamblado.

El conjunto de coordenadas puede ser expresado en términos de las coordenadas modales internas \mathbf{q}_{id} y las coordenadas modales de interfaz $\boldsymbol{\eta}_I$ [7, 14], como se presenta en las ecuaciones (1.5) y (1.6). Es importante mencionar, que el desarrollo y explicación detallado de las ecuaciones expuestas a continuación es presentado en el capítulo (2).

$$\mathbf{x}_i(t) = [\boldsymbol{\Phi}_{id}^1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{id}^{N_s}] \mathbf{q}_{id}(t) + [\boldsymbol{\Psi}_{ib}^1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \boldsymbol{\eta}_I(t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{x}_b(t) = \boldsymbol{\Upsilon}_I \boldsymbol{\eta}_I(t) \quad (1.6)$$

donde $[\boldsymbol{\Phi}_{id}^1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{id}^{N_s}]$ corresponden a los *fixed-interface normal modes* dominantes, $[\boldsymbol{\Psi}_{ib}^1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{ib}^{N_s}]$ son los *interface constraint modes* y $\boldsymbol{\Upsilon}_I$ son los modos de interfaz. Al utilizar estas coordenadas es posible realizar la reducción del modelo, dejando algunos de los *fixed-interface normal modes* y algunos de los modos de interfaz. Para cada muestra $\boldsymbol{\theta}^k$ en un problema de re-análisis, se debe resolver el problema de valores y vectores propios de interfaz

$$\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}^k) \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^k) - \mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}^k) \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^k) \boldsymbol{\Omega}_I(\boldsymbol{\theta}^k) = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

donde \mathbf{K}_I y \mathbf{M}_I corresponden a la partición de la matriz de masa y rigidez asociada a la interfaz. $\boldsymbol{\Omega}_I$ son los valores propios del problema.

En este trabajo se desarrolla una técnica para obtener de manera eficiente los modos de interfaz y modos característicos de la ecuación (1.7), aliviando el costo computacional del problema de valores y vectores propios. De esta forma la reducción de interfaz resulta una herramienta eficiente para simulaciones complejas.

Síntesis Modal

En este capítulo se describen las técnicas de reducción utilizadas en este trabajo. En particular, se utilizan técnicas de Síntesis Modal, utilizando como base el método conocido como *Craig-Bampton* [7], mediante el cual es posible llevar el modelo completo de elementos finitos a un modelo reducido con un número mucho menor de grados de libertad. A esta metodología, se incluye la reducción de interfaz global. Posteriormente se considera el aporte explícito de los modos normales residuales. La ventaja de aplicar estas metodologías es que permite reducir considerablemente los costos computacionales asociados al análisis de la estructura, esto sin afectar la exactitud de los resultados. Además, debido a las características de las matrices involucradas en la transformación, es posible definir, bajo ciertas condiciones, un esquema de parametrización el cual permite controlar las propiedades de la estructura de manera eficiente, lo cual es muy ventajoso para los problemas de simulación.

2.1. Subestructuración

Para presentar el desarrollo de las técnicas de reducción de modelos en base a la síntesis modal, considere la figura (2.1), en la cual se esquematiza un sistema estructural compuesto por marcos y un dispositivo de disipación de energía con comportamiento no-lineal.

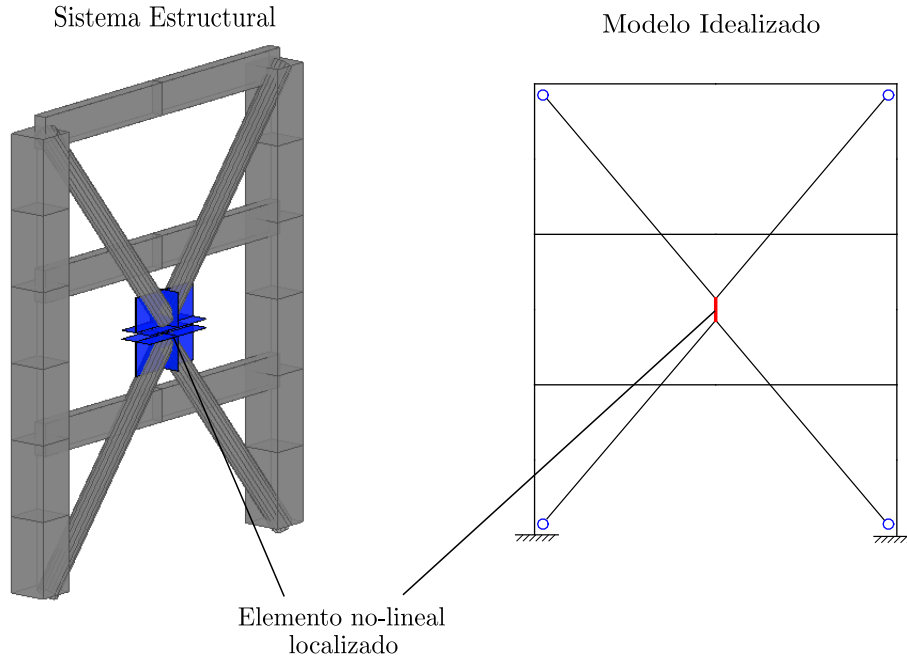


Figura 2.1: Marco con disipador

El sistema estructural es caracterizado por la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_e)\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}_{nl}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{z}(t)) + \mathbf{K}_e\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ representa el vector de desplazamiento de dimensión n , $\dot{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de velocidad, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ es el vector de aceleración, \mathbf{R}_{nl} es el vector de fuerzas restitutivas de los dispositivos no lineales, $\mathbf{z}(t)$ es una variable adimensional que describe el estado de las componentes no lineales y \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas. Las matrices \mathbf{M} y \mathbf{C} representan la masa y amortiguamiento del sistema. La matriz \mathbf{K}_l representa la rigidez de las componentes lineales, mientras que la matriz \mathbf{K}_e representa la rigidez efectiva de las componentes no-lineales. De esta forma la ecuación de movimiento puede reescribirse como [25]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{R}}(t) \quad (2.2)$$

donde $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_e$ es la rigidez elástica del sistema y $\bar{\mathbf{R}}(t)$ es la carga externa efectiva. Debido a

la no-linealidad de las cargas, este problema se resuelve en forma iterativa, lo cual se detalla en [25].

La evolución del conjunto de variables $\mathbf{z}(t)$ esta definida por la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{z}(t)) \quad (2.3)$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ representa un vector función no lineal. De esta forma se pueden modelar diferentes tipos de no linealidades incluyendo histéresis y degradación [22,23]. De la ecuación (1.2) se observa que el conjunto de variables $\mathbf{z}(t)$ es función de los desplazamientos $\mathbf{x}(t)$ y velocidades $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Por lo tanto, las ecuaciones (2.2) y (2.3) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$.

Para reducir el tamaño de las matrices correspondientes al modelo estructural, se requiere realizar una subestructuración. La idea básica de esta, es generar una partición de la estructura original en un número determinado N_s de subestructuras, como se presenta en la figura (2.2), donde se divide el sistema estructural de ejemplo en $N_s = 7$ subestructuras.

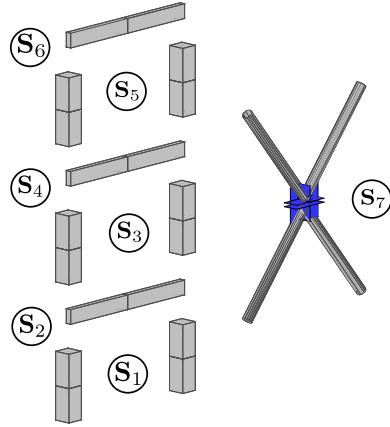


Figura 2.2: Subestructuración

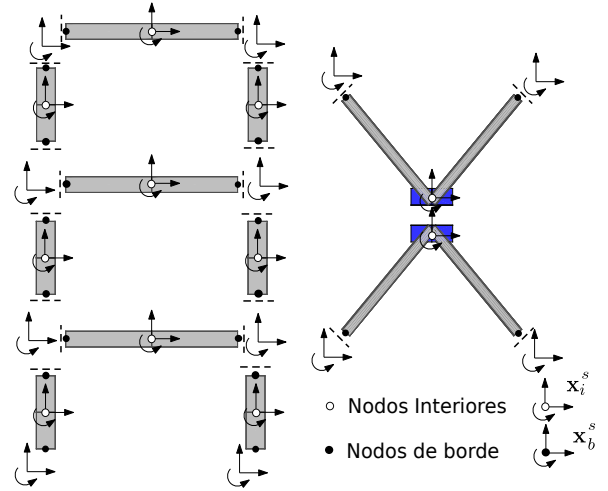


Figura 2.3: Esquema grados de libertad

En la figura (2.3) se esquematizan los grados de libertad interiores $\mathbf{x}_i^s, s = 1, \dots, 7$ correspondientes a los nodos interiores, representados con círculos blancos. Además, se esquematizan los grados de libertad de interfaz $\mathbf{x}_b^s, s = 1, \dots, 7$, correspondientes a los nodos de borde, los cuales son representados con círculos negros. Los grados de libertad de interfaz $\mathbf{x}_b^s \in \mathbb{R}^{n_b^s}$ incluyen los grados de libertad que son comunes entre subestructuras adyacentes, mientras que los grados de libertad internos $\mathbf{x}_i^s \in \mathbb{R}^{n_i^s}$ no son compartidos con ninguna subestructura adyacente. El vector de coordenadas físicas de todas las subestructuras $\bar{\mathbf{x}}(t)$ queda expresado como

$$\bar{\mathbf{x}}(t)^T = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{x}_i(t)^T = \langle \mathbf{x}_i^1(t)^T, \dots, \mathbf{x}_i^{N_s}(t)^T \rangle \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_i = \sum_{s=1}^{N_s} n_i^s$ es el vector de coordenadas físicas de los grados de libertad internos de todas las subestructuras y $\mathbf{x}_b(t)^T = \langle \mathbf{x}_b^1(t)^T, \dots, \mathbf{x}_b^{N_b}(t)^T \rangle \in \mathbb{R}^{n_b}$, $n_b = \sum_{l=1}^{N_b} n_b^l$ es el vector de coordenadas físicas de los grados de libertad de las N_b interfaces independientes, donde n_b^l es el número de grados de libertad para la interfaz l , notar que $n_i + n_b = n$, con n el número total de grados de libertad.

Las coordenadas de interfaz independientes $\mathbf{x}_b(t)^T$ se relacionan con las coordenadas de interfaz de todas las subestructuras $\mathbf{x}_{bd}(t)^T = \langle \mathbf{x}_{bd}^1(t)^T, \dots, \mathbf{x}_{bd}^{N_s}(t)^T \rangle \in \mathbb{R}^{n_{bd}}$, $n_{bd} = \sum_{s=1}^{N_s} n_{bd}^s$ por medio de la matriz de transformación $\tilde{\mathbf{T}}$, esto es

$$\mathbf{x}_{bd}(t) = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}_b(t) \quad (2.5)$$

Es importante mencionar que las coordenadas de interfaz de cada subestructura $\mathbf{x}_{bd}^s(t)^T$ pueden contener una o más coordenadas de interfaz independientes $\mathbf{x}_b^l(t)$, $l = 1, \dots, N_b$.

Para relacionar el vector de coordenadas físicas de todas las subestructuras $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ con el vector de coordenadas físicas de la estructura $\mathbf{x}(t)$ se utiliza la matriz de transformación \mathbf{L} , esto es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (2.6)$$

Para cada subestructura lineal s , $s = 1, \dots, N_s$ la siguiente partición a la matriz de masa $\mathbf{M}^s \in \mathbb{R}^{n^s \times n^s}$ y matriz de rigidez $\mathbf{K}^s \in \mathbb{R}^{n^s \times n^s}$ es considerada

$$\mathbf{M}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii}^s & \mathbf{M}_{ib}^s \\ \mathbf{M}_{bi}^s & \mathbf{M}_{bb}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^s & \mathbf{K}_{ib}^s \\ \mathbf{K}_{bi}^s & \mathbf{K}_{bb}^s \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde i y b contienen los grados de libertad internos y de interfaz (o borde) de la subestructura s respectivamente.

Acoplando las matrices de masa y rigidez de todas las subestructuras y utilizando la matriz de transformación $\tilde{\mathbf{T}}$ de la ecuación (2.5), se obtienen las matrices de masa y rigidez de todo el sistema.

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{ii}^1, \dots, \mathbf{M}_{ii}^{N_s}] & [\mathbf{M}_{ib}^1, \dots, \mathbf{M}_{ib}^{N_s}] \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{M}_{ib}^1{}^T, \dots, \mathbf{M}_{ib}^{N_s}{}^T] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{M}_{bb}^1, \dots, \mathbf{M}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ii}^1, \dots, \mathbf{K}_{ii}^{N_s}] & [\mathbf{K}_{ib}^1, \dots, \mathbf{K}_{ib}^{N_s}] \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{K}_{ib}^1{}^T, \dots, \mathbf{K}_{ib}^{N_s}{}^T] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\mathbf{K}_{bb}^1, \dots, \mathbf{K}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde la notación $[\mathbf{M}_{ii}^1, \dots, \mathbf{M}_{ii}^{N_s}]$ es equivalente a un acople diagonal por bloques como el repre-

sentado por

$$[\mathbf{M}_{ii}^1, \dots, \mathbf{M}_{ii}^{N_s}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_{ii}^{N_s} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Con estas matrices es posible calcular las propiedades dinámicas del sistema al resolver el problema de valores y vectores propios

$$\mathbf{K}_e \boldsymbol{\varphi}_e - \mathbf{M}_e \boldsymbol{\varphi}_e \boldsymbol{\Omega}_e = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

donde $(\boldsymbol{\Omega}_e)^{1/2}$ son las frecuencias de la estructura y los modos de la estructura $\boldsymbol{\varphi}_s$ son obtenidos de

$$\boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{L} \boldsymbol{\varphi}_e \quad (2.12)$$

Para la generación de los modelos reducidos, el análisis dinámico de la estructura se desarrolla en base a los *fixed-interface normal modes* y los *interface constraint modes*. Los primeros, describen el comportamiento dinámico interno a la subestructura y son calculados restringiendo los grados de libertad de borde de la subestructura y resolviendo el siguiente problema:

$$\mathbf{K}_{ii}^s \boldsymbol{\Phi}_{ii}^s - \mathbf{M}_{ii}^s \boldsymbol{\Phi}_{ii}^s \boldsymbol{\Lambda}_{ii}^s = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

donde $\boldsymbol{\Phi}_{ii}^s$ contiene todos los n_i^s *fixed-interface normal modes*, y $\boldsymbol{\Lambda}_{ii}^s$ corresponde a la matriz de los valores propios. Los *interface constraint modes* son calculados estáticamente imponiendo un desplazamiento unitario a los grados de libertad de interfaz x_b^s uno a la vez mientras el resto de los grados de libertad de borde se mantienen fijos. Además, se asume que no hay fuerzas externas en los grados de libertad internos. Lo cual queda expresado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^s & \mathbf{K}_{ib}^s \\ \mathbf{K}_{ib}^{sT} & \mathbf{K}_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{ib}^s \\ \mathbf{I}_{bb}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{ib}^s \\ \mathbf{R}_{bb}^s \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

donde la parte interior de los *interface constraint mode* queda expresado por $\boldsymbol{\Psi}_{ib}^s = -\mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s \in \mathbb{R}^{n_i^s \times n_b^s}$ [7] y \mathbf{R}_{bb}^s representa las reacciones en la interfaz. Los modos de las subestructuras se usan para definir la matriz de transformación \mathbf{T}_{cb} que relaciona el vector de coordenadas físicas de todas las subestructuras $\bar{\mathbf{x}}(t)$ con el vector de coordenadas modales internas $\mathbf{q}_i(t)$, esta es

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_{cb} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{q}_i(t)^T = \langle \mathbf{q}_i^1(t)^T, \dots, \mathbf{q}_i^{N_s}(t)^T \rangle \in \mathbb{R}^{n_i}$, notar que $n_i + n_b = n$. La matriz de transformación

T_{cb} queda de la forma [9, 24]

$$T_{cb} = \begin{bmatrix} [\Phi_{ii}^1, \dots, \Phi_{ii}^{N_s}] & [\Psi_{ib}^1, \dots, \Psi_{ib}^{N_s}] \tilde{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Como ejemplo de *fixed-interface normal modes* se presenta la deformación asociada a $\langle \Phi_{11}^1{}^T, \mathbf{0} \rangle$, correspondiente a uno de los modos internos de la subestructura S_1 . Además, como ejemplo de *interface constraint modes* se presenta la deformada asociada a $\langle \Psi_{11}^1{}^T \tilde{T}, [1, \dots, 0] \rangle$, correspondiente a uno de los modos asociados a la deformación de uno de los grados de libertad de la interfaz entre las subestructuras S_1 y S_2 .

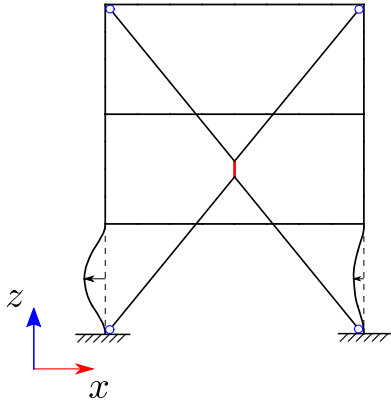


Figura 2.4: *fixed-interface normal mode*

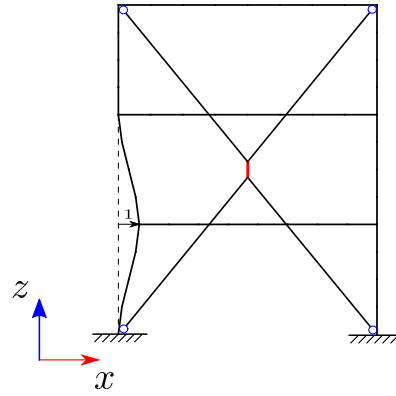


Figura 2.5: *interface constraint mode*

2.2. Modelo reducido basado en modos dominantes

De las ecuaciones (2.15) y (2.16) el vector de coordenadas físicas de los grados de libertad internos de todas las subestructuras $\mathbf{x}_i(t)$ es desarrollado en términos de los *fixed-interface normal modes* y los *interfaces constraint modes*. Los *fixed-interface normal modes* pueden ser descompuestos en los modos dominantes y residuales. Con lo anterior el vector $\mathbf{x}_i(t)$ se puede reescribir como:

$$\mathbf{x}_i(t) = [\Phi_{id}^1, \dots, \Phi_{id}^{N_s}] \mathbf{q}_{id}(t) + [\Phi_{ir}^1, \dots, \Phi_{ir}^{N_s}] \mathbf{q}_{ir}(t) + [\Psi_{ib}^1, \dots, \Psi_{ib}^{N_s}] \tilde{T} \mathbf{x}_b(t) \quad (2.17)$$

donde $\Phi_{id}^s \in \mathbb{R}^{n_{id}^s}$ son los *fixed-interface normal modes* dominantes, $\Phi_{ir}^s \in \mathbb{R}^{n_{ir}^s}$ son los *fixed-interface normal modes* residuales ($n_{id}^s + n_{ir}^s = n_i^s$), $\mathbf{q}_{id}^T = \langle \mathbf{q}_{id}^1{}^T, \dots, \mathbf{q}_{id}^{N_s}{}^T \rangle$ y $\mathbf{q}_{ir}^T = \langle \mathbf{q}_{ir}^1{}^T, \dots, \mathbf{q}_{ir}^{N_s}{}^T \rangle$ son los correspondientes *fixed-interface normal modes* dominantes y *fixed-interface normal modes* residuales de todas las subestructuras. En la formulación estándar la utilización de los *fixed-interface normal modes* dominantes define la reducción del modelo. Entonces, el vector de desplazamientos

global $\bar{\mathbf{x}}(t)$ queda aproximado por:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{T}_D \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} [\Phi_{id}^1, \dots, \Phi_{id}^{N_s}] & [\Psi_{ib}^1, \dots, \Psi_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{T}_D es la matriz de transformación reducida denominada matriz de transformación Craig-Bampton [1,27]. Usando esta matriz de transformación y normalizando los *fixed-interface normal modes* dominantes de cada subestructura por la matriz de masa \mathbf{M}_{ii}^s correspondiente, de forma que $\phi_{id}^{sT} \mathbf{M}_{ii}^s \phi_{id}^s = \mathbf{I}_{dd}^s$ y $\phi_{id}^{sT} \mathbf{K}_{ii}^s \phi_{id}^s = \Lambda_{dd}^s$, las matriz de masa reducida $\mathbf{M}_D = \mathbf{T}_D^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_D \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ y la matriz de rigidez reducida $\mathbf{K}_D = \mathbf{T}_D^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_D \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$, $n_D = \sum_{s=1}^{N_s} n_{id}^s + n_b$ tienen la forma [14,21]:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}] & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1{}^T, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}{}^T] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} [\Lambda_{dd}^1, \dots, \Lambda_{dd}^{N_s}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde $\hat{\mathbf{M}}_{ib}^s = \Phi_{id}^{sT} \mathbf{M}_{ii}^s \Psi_{ib}^s + \Phi_{id}^{sT} \mathbf{M}_{ib}^s$, $\hat{\mathbf{K}}_{bb}^s = \mathbf{K}_{ib}^{sT} \Psi_{ib}^s + \mathbf{K}_{bb}^s$ y $\hat{\mathbf{M}}_{bb}^s = (\Psi_{ib}^{sT} \mathbf{M}_{ii}^s + \mathbf{M}_{ib}^s) \Psi_{ib}^s + \Psi_{ib}^{sT} \mathbf{M}_{ib}^s + \mathbf{M}_{bb}^s$. Las dimensiones de las matrices reducidas puede ser sustancialmente menores que las dimensiones de matrices no reducidas $n_D \ll n$.

Utilizando las matrices reducidas \mathbf{M}_D y \mathbf{K}_D se pueden obtener aproximaciones para las frecuencias y modos de la estructura, al resolver

$$\mathbf{K}_D \varphi_D - \mathbf{M}_D \varphi_D \Omega_D = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

donde $(\Omega_D)^{1/2}$ es la aproximación de las frecuencias del sistema estructural y la aproximación de los modos φ_{sD} esta dada por

$$\varphi_{sD} = \mathbf{L} \mathbf{T}_D \varphi_D \quad (2.21)$$

2.3. Reducción de Interfaz

El número de grados de libertad de interfaz en el modelo de elementos finitos es determinado por el mallado que se realice. Si la malla es fina en las regiones de interfaz, especialmente en aplicaciones en las que se utilizan líneas y superficies que se acoplan, o si hay muchas subestructuras, puede generar matrices de interfaz relativamente grandes. Consecuentemente, sería deseable reducir el número de grados de libertad de interfaz. En este campo hay varias aproximaciones propuestas. Entre éstas, las que se basan en los *characteristic constraint modes* han probado tener mayor precisión y se adoptan en este trabajo [14, 20]. La aproximación corresponde a un problema de valores y vectores propios sobre la partición de interfaz de las matrices de Masa y Rigidez, de forma

$$\mathbf{K}_I \boldsymbol{\Upsilon}_I - \mathbf{M}_I \boldsymbol{\Upsilon}_I \boldsymbol{\Omega}_I = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

donde

$$\mathbf{M}_I = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{K}_I = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.23)$$

la matriz $\boldsymbol{\Upsilon}_I$ contiene los n_I modos de interfaz y $\boldsymbol{\Omega}_I$ es la matriz diagonal que contiene los correspondiente valores propios. Dejando los modos de interfaz normalizados respecto de \mathbf{M}_I se tiene que $\boldsymbol{\Upsilon}_I^T \mathbf{M}_I \boldsymbol{\Upsilon}_I = \mathbf{I}_I$, donde \mathbf{I}_I es la matriz identidad, y $\boldsymbol{\Upsilon}_I^T \mathbf{K}_I \boldsymbol{\Upsilon}_I = \boldsymbol{\Omega}_I$. Es importante mencionar que el número de modos de interfaz seleccionados puede ser bastante pequeño respecto al total de grados de libertad de interfaz, $n_I \ll n_b$. Dejando un grupo de modos de interfaz para representar el vector de coordenadas físicas en las N_b interfaces independientes $\mathbf{x}_b(t)$ se tiene

$$\mathbf{x}_b(t) = \boldsymbol{\Upsilon}_I \boldsymbol{\eta}_I(t) \quad (2.24)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_I(t)$ son las coordenadas modales de interfaz. Usando la representación de la ecuación (2.18) se tiene

$$\bar{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{T}_{DI} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_I(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{DI} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Phi}_{id}^1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{id}^{N_s}] & [\boldsymbol{\Psi}_{ib}^1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon}_I \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde la correspondiente matriz de masa reducida $\mathbf{M}_{DI} = \mathbf{T}_{DI}^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI} \in \mathbb{R}^{n_{DI} \times n_{DI}}$ y la matriz de rigidez reducida $\mathbf{K}_{DI} = \mathbf{T}_{DI}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI} \in \mathbb{R}^{n_{RI} \times n_{DI}}$, $n_{DI} = \sum_{s=1}^{N_s} n_{id}^s + n_I$ están dadas por

$$\mathbf{M}_{DI} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}] & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \\ \boldsymbol{\Upsilon}_I^T \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}] & \mathbf{I}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{DI} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^1, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{N_s}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_I \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Las matrices de masa y rigidez son diagonales con términos fuera de la diagonal solo en la matriz de masa. La matriz $\boldsymbol{\Upsilon}_{II} = [\boldsymbol{\Psi}_{ib}^1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \in \mathbb{R}^{n_i \times n_I}$ dentro de la matriz de transformación \mathbf{T}_{DI} puede ser interpretada como una combinación lineal de los *interface constraint modes* ponderada por los modos de interfaz y referida a los grados de libertad internos de todas las subestructuras

$(\mathbf{x}_i(t))$. La columna formada por Υ_{II} y Υ_I

$$\Upsilon_{cc} = \begin{Bmatrix} \Upsilon_{II} \\ \Upsilon_I \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

corresponde a los denominados *characteristic constraint modes* los cuales entregan una aproximación de los modos de deformación principales para la interfaz. En forma ilustrativa en las figuras (2.6) y (2.7) se presentan las deformaciones correspondientes a los 2 primeros modos característicos de la estructura ejemplo.

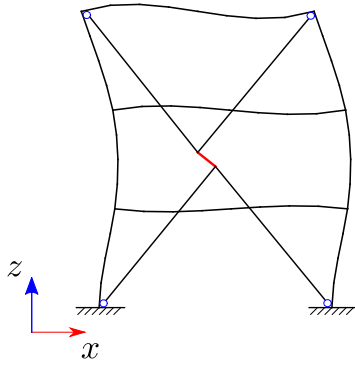


Figura 2.6: Υ_{cc1}

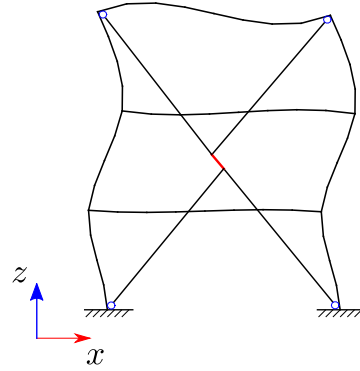


Figura 2.7: Υ_{cc2}

Utilizando las matrices reducidas M_{DI} y K_{DI} se pueden obtener aproximaciones para las frecuencias y modos de la estructura, al resolver

$$\mathbf{K}_{DI}\varphi_{DI} - M_{DI}\varphi_{DI}\Omega_{DI} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

donde $(\Omega_{DI})^{1/2}$ es la aproximación de las frecuencias del sistema estructural y la aproximación de los modos φ_{sDI} esta dada por

$$\varphi_{sDI} = \mathbf{L}\mathbf{T}_{DI}\varphi_{DI} \quad (2.29)$$

En resumen, dependiendo del tipo de respuesta y el rango de frecuencia de interés, los *fixed-interface normal modes* dominantes y los *characteristic constraint modes* pueden definir un modelo reducido con una gran reducción de grados de libertad, esto es $n_{DI} \ll n$. La selección del número de coordenadas modales depende del problema en particular. Como una guía general los modos normales con una frecuencia natural menor a un múltiplo de una frecuencia de corte (mayor a la frecuencia de interés) son una potencial forma de seleccionar los modos a ser retenidos. Valores específicos son entregados en los ejemplos de aplicación.

2.4. Contribución de los modos residuales

De la Eq. (2.17) se observa que el vector de coordenadas física de los grados de libertad internos de todas las subestructuras $\mathbf{x}_i(t)$ es expresado en términos de los *fixed-interface normal modes* dominantes y residuales en conjunto a los *interface constraint modes*. Recordar que la formulación estándar considera solo la contribución de los modos dominantes. Claramente, si se considera la contribución de los modos residuales en el análisis, se espera que la aproximación en la respuesta sea mejorada.

2.4.1 Corrección Estática

En la presente formulación la contribución de los *fixed-interface normal modes* residuales en la respuesta de los grados de libertad interna de cada subestructura $\mathbf{x}_i^s(t)$, $s = 1, \dots, N_s$ es aproximada utilizando la llamada corrección estática. En esta dirección, el problema de vibraciones libres sin amortiguamiento es considerado, referido a las coordenadas modales $\langle \mathbf{q}_{id}(t)^T, \boldsymbol{\eta}(t)^T \rangle$. La correspondiente ecuación de movimiento esta dada por

$$\mathbf{M}_{DI} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{id}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_I(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_{DI} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_I(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

de la primer fila de esta ecuación se observa que el vector de las coordenadas internas de todas las subestructuras $\mathbf{q}_{id}(t)$ satisface la ecuación

$$\ddot{\mathbf{q}}_{id}(t) + [\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^1, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{N_s}] \mathbf{q}_{id}(t) = -[\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \ddot{\boldsymbol{\eta}}_I(t) \quad (2.31)$$

utilizando la definición de $\hat{\mathbf{M}}_{ib}^s$, $s = 1, \dots, N_s$ y la definición de la matriz de los *interface constraint modes* $\boldsymbol{\Psi}_{ib}^s$, $s = 1, \dots, N_s$, la ecuación (2.31) se puede reescribir como

$$\ddot{\mathbf{q}}_{id}(t) + [\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^1, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{N_s}] \mathbf{q}_{id}(t) = -[\boldsymbol{\Phi}_{id}^1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{id}^{N_s}] \bar{\mathbf{M}}_{ib} \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \ddot{\boldsymbol{\eta}}_I(t) \quad (2.32)$$

donde

$$\bar{\mathbf{M}}_{ib} = [\mathbf{M}_{ib}^1 - \mathbf{M}_{ii}^1 \mathbf{K}_{ii}^{1-1}, \dots, \mathbf{M}_{ib}^{N_s} - \mathbf{M}_{ii}^{N_s} \mathbf{K}_{ii}^{N_s-1}] \quad (2.33)$$

Combinando las ecuaciones (2.5) y (2.24) se tiene $\mathbf{x}_{bd} = \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I \boldsymbol{\eta}_I(t)$, y por lo tanto la ecuación de movimiento anterior, a nivel de subestructura, se transforma en

$$\ddot{\mathbf{x}}_{id}^s(t) + \boldsymbol{\Lambda}_{dd}^s \mathbf{q}_{id}^s(t) = -\boldsymbol{\Phi}_{id}^{sT} \bar{\mathbf{M}}_{ib}^s \ddot{\mathbf{x}}_b^s(t), \quad s = 1, \dots, N_s \quad (2.34)$$

donde $\bar{\mathbf{M}}_{ib}^s = \mathbf{M}_{ib}^s - \mathbf{M}_{ii}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1}$. La contribución de los modos altos de las subestructuras (*residual fixed-interface normal modes*) a la respuesta de los grados de libertad internos es por medio de la

carga $\bar{\mathbf{M}}_{ib}^s \ddot{\mathbf{x}}_b^s d(t)$, la cual es aproximada por la corrección estática [17, 18]. Esto es razonable en el sentido que los modos de alta frecuencia responden esencialmente en forma estática cuando son excitados por bajas frecuencias. La corrección estática toma la forma $-\bar{\mathbf{F}}^s \bar{\mathbf{M}}_{ib}^s \ddot{\mathbf{x}}_b^s d(t)$ donde $\bar{\mathbf{F}}^s$ es la flexibilidad residual correspondiente al problema de los *fixed-interface normal modes* de la subestructura s dado por

$$\bar{\mathbf{F}}^s = \mathbf{K}_{ii}^{s-1} - \Phi_{id}^s \Lambda_{dd}^{s-1} \Phi_{id}^{sT} \quad (2.35)$$

Usando la contribución de los *residual fixed-interface normal modes* y las ecuaciones de (2.18) es claro que el vector de coordenadas físicas de los grados de libertad internos de cada subestructura puede ser expresado mediante

$$\mathbf{x}_i^s(t) \approx \Phi_{id}^s \mathbf{q}_{id}^s + \Psi_{ib}^s \mathbf{x}_{bd}^s(t) - \bar{\mathbf{F}}^s \bar{\mathbf{M}}_{ib}^s \ddot{\mathbf{x}}_b^s d(t), \quad s = 1, \dots, N_s \quad (2.36)$$

desde aquí el vector de coordenadas físicas de los grados de libertad de todas las subestructuras puede ser escrito como

$$\mathbf{x}_i(t) \approx [\Phi_{id}^1, \dots, \Phi_{id}^{N_s}] \mathbf{q}_{id}(t) + [\Psi_{ib}^1, \dots, \Psi_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}} \Upsilon_I \boldsymbol{\eta}_I(t) - \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{M}}_{ib} \tilde{\mathbf{T}} \Upsilon_I \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad (2.37)$$

donde $\bar{\mathbf{F}}$ es una matriz diagonal por bloques que contiene las flexibilidades residuales de todas las subestructuras, de la forma $[\bar{\mathbf{F}}^1, \dots, \bar{\mathbf{F}}^{N_s}]$.

2.4.2 Matriz de transformación mejorada

Usando la aproximación para $\mathbf{x}_i(t)$ el vector de coordenadas físicas de todas las subestructuras $\bar{\mathbf{x}}(t)$ puede ser expresada como

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} \approx \mathbf{T}_{DI} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_I(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{M}}_{ib} \tilde{\mathbf{T}} \Upsilon_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{id}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_I(t) \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Luego, la relación entre el vector de coordenadas modales $\langle \mathbf{q}_{id}(t)^T, \boldsymbol{\eta}_I(t)^T \rangle$ y las segundas derivadas es aproximada considerando (2.30). Esto es

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{id}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_I(t) \end{Bmatrix} = -\mathbf{M}_{DI}^{-1} \mathbf{K}_{DI} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_I(t) \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

y la ecuación (2.38) puede ser escrita de la forma

$$\bar{\mathbf{x}}(t) \approx [\mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{id}(t) \\ \boldsymbol{\eta}_I(t) \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

donde

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}_{ib}\tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{DI} \quad (2.41)$$

es la matriz de transformación que aparece de la contribución de los *fixed-interface normal modes* residuales. Considerando la partición de la masa reducida \mathbf{M}_{DI} se tiene

$$\mathbf{M}_{DI}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{M}_\Upsilon(\mathbf{I}_I - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \mathbf{M}_\Upsilon^T & -\mathbf{M}_\Upsilon(\mathbf{I}_I - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \\ -(\mathbf{I}_I - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \mathbf{M}_\Upsilon^T & (\mathbf{I}_I - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

donde $\mathbf{M}_\Upsilon = [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I$. Realizando el producto entre la matriz particionada de 2×2 en (2.41) y la matriz $\hat{\mathbf{M}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{DI}$, la matriz de transformación \mathbf{T}_R queda expresada de la forma

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

con

$$\mathbf{T}_{R1} = -\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}_{ib}\tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I(\mathbf{I} - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \mathbf{M}_\Upsilon \Lambda, \quad \mathbf{T}_{R2} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}_{ib}\tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I(\mathbf{I} - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \Omega_I \quad (2.44)$$

donde $\Lambda = [\Lambda_{dd}^1, \dots, \Lambda_{dd}^{N_s}]$. La matriz $\mathbf{T}_{DIR} = \mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R$ queda dada por

$$\mathbf{T}_{DIR} = \begin{bmatrix} [\Phi_{id}^1, \dots, \Phi_{id}^{N_s}] & [\Psi_{ib}^1, \dots, \Psi_{ib}^{N_s}] \tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I \\ \mathbf{0} & \Upsilon_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}_{ib}\tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I(\mathbf{I} - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \mathbf{M}_\Upsilon \Lambda & \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}_{ib}\tilde{\mathbf{T}}\Upsilon_I(\mathbf{I} - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon)^{-1} \Omega_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La matriz \mathbf{T}_{DIR} representa una matriz de transformación mejorada, la cual incorpora la contribución de los modos residuales en forma explícita en el análisis. Es importante mencionar que todas las matrices involucradas en la definición de \mathbf{T}_R están disponibles previamente en la formulación basada en los modos dominantes y en la reducción de interfaz (matriz de transformación \mathbf{T}_{DI}). Además, es importante mencionar que el término $\mathbf{I} - \mathbf{M}_\Upsilon^T \mathbf{M}_\Upsilon$ que aparece en la matriz de transformación \mathbf{T}_R y la cual es invertida, es de dimensión $n_I \times n_I$, donde n_I es el número de modos de interfaz seleccionada ($n_I \ll n_b$). Esto es, si el número seleccionado de modos de interfaz es pequeño, el costo computacional de invertir esta matriz no será alto.

En esta sección se presenta el desarrollo para el caso con reducción de interfaz, siguiendo los mismos pasos es posible obtener la corrección para el modelo sin reducción de interfaz [9, 24].

2.4.3 Matrices Reducidas

Usando la matriz de transformación mejorada la correspondiente matriz de masa reducida $\mathbf{M}_{DIR} \in \mathbb{R}^{n_{DI} \times n_{DI}}$ y la matriz de rigidez reducida $\mathbf{K}_{DIR} \in \mathbb{R}^{n_{DI} \times n_{DI}}$ queda definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{DIR} &= (\mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R)^T \mathbf{M}_e (\mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R) \\ &= \mathbf{M}_{DI} + \mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI} + (\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI})^T + \mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_R \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{DIR} &= (\mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R)^T \mathbf{K}_e (\mathbf{T}_{DI} + \mathbf{T}_R) \\ &= \mathbf{K}_{DI} + \mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI} + (\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI})^T + \mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_R \end{aligned} \quad (2.47)$$

Utilizando las matrices reducidas \mathbf{M}_{DIR} y \mathbf{K}_{DIR} se pueden obtener aproximaciones para las frecuencias y modos de la estructura, al resolver

$$\mathbf{K}_{DIR} \boldsymbol{\varphi}_{DIR} - \mathbf{M}_{DIR} \boldsymbol{\varphi}_{DIR} \boldsymbol{\Omega}_{DIR} = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

donde $(\boldsymbol{\Omega}_{DIR})^{1/2}$ es la aproximación de las frecuencias del sistema estructural y la aproximación de los modos $\boldsymbol{\varphi}_{sDIR}$ esta dada por

$$\boldsymbol{\varphi}_{sDIR} = \mathbf{L} \mathbf{T}_{DIR} \boldsymbol{\varphi}_{DIR} \quad (2.49)$$

Es importante mencionar que al considerar la contribución residual de los modos de las subestructuras en la matriz de transformación \mathbf{T}_R , se espera que las matrices del modelo reducido sean mas precisas que las obtenidas con la formulación basada solo en los modos dominantes de las subestructuras. Esto será verificado en los ejemplos de aplicación.

En el esquema de la figura (2.8) se presenta a modo de resumen los pasos que se deben realizar para la construcción de los modelos reducidos para un valor nominal.

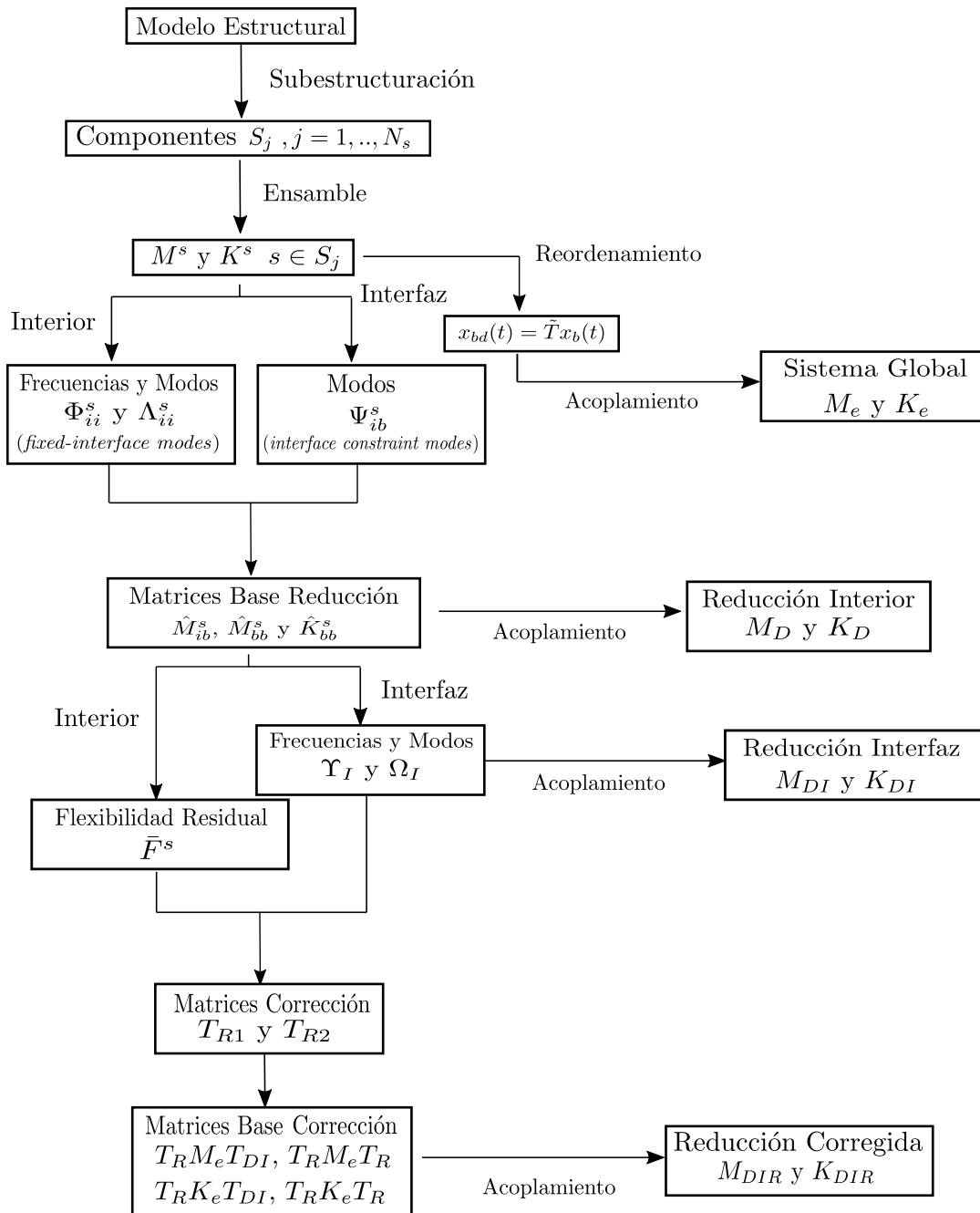


Figura 2.8: Esquema Generación Modelo Reducido Nominal

Parametrización Estructural

En este capítulo se formulan las parametrizaciones para los modelos reducidos presentados en el capítulo (2), para así tener disponible estas técnicas para los problemas de re-análisis. Con este fin, se considera un modelo de elementos finitos parametrizado por un conjunto de parámetros $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$. En los problemas de re-análisis, la reiterada generación de modelos reducidos para los diferentes valores de los parámetros del modelo puede ser muy costoso computacionalmente, debido a que se requiere un trabajo considerable a nivel de subestructura y de interfaz. Para solucionar esta dificultad, un efectivo esquema de parametrización es considerado en el presente trabajo. La división de la estructura original es guiada por el esquema de parametrización, considerando que cada subestructura depende solo de uno de los parámetros del modelo. Es importante mencionar que este tipo de dependencia es encontrada en numerosas aplicaciones prácticas, donde los parámetros del modelo pueden representar alguna propiedad geométrica o de los materiales [1, 2, 21, 24, 26].

3.1. Modos Dominantes

Se considera el conjunto S_j de subestructuras que depende del parámetro del modelo θ_j , $j = 1, \dots, n_\theta$. La dependencia de las matrices de rigidez y masa de la subestructura, se asume de la forma $\mathbf{K}^s = \bar{\mathbf{K}}^s h^j(\theta_j)$ y $\mathbf{M}^s = \bar{\mathbf{M}}^s g^j(\theta_j)$, con $s \in S_j$. Las matrices de referencia $\bar{\mathbf{K}}^s$ y $\bar{\mathbf{M}}^s$ son independientes de θ_j . Además, las funciones h^j y g^j son funciones generales de los parámetros del modelo θ_j . Entonces, los valores propios y vectores propios asociados con los *fixed-interface normal modes* dominantes de la subestructura $s \in S_j$ quedan expresados como [2, 24, 28].

$$\mathbf{\Lambda}_{dd}^s = \bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^s \frac{h^j(\theta_j)}{g^j(\theta_j)}, \quad \mathbf{\Phi}_{id}^s = \bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s \frac{1}{\sqrt{g^j(\theta_j)}} \quad (3.1)$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^s$ y $\bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s$ son la solución del problema de valores propios $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^s \bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s - \bar{\mathbf{M}}_{ii}^s \bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s \bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^s = \mathbf{0}$ para las matrices de referencia $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^s$ y $\bar{\mathbf{M}}_{ii}^s$, las cuales son independientes del parámetro θ_j . Debido a que los *fixed-interface normal modes* están normalizados por la matriz de masa $\bar{\mathbf{M}}_{ii}^s$, es fácil mostrar que los modos $\bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s$ satisfacen $\bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^{sT} \bar{\mathbf{M}}_{ii}^s \bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s = \mathbf{I}$, y $\bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^{sT} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^s \bar{\mathbf{\Phi}}_{id}^s = \bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^s$. Adicionalmente, los *interface constraint modes* son también independientes de θ_j , debido a que $\mathbf{\Psi}_{ib}^s = -\mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s = -\bar{\mathbf{K}}_{ii}^{s-1} h^j(\theta_j)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{ib}^s h^j(\theta_j) = -\bar{\mathbf{K}}_{ii}^{s-1} \bar{\mathbf{K}}_{ib}^s = \bar{\mathbf{\Psi}}_{ib}^s$.

De esta forma, es posible expresar las matrices de masa $\mathbf{M}_D(\boldsymbol{\theta})$ y rigidez $\mathbf{K}_D(\boldsymbol{\theta})$ del modelo reducido basado en modos dominantes como

$$\mathbf{M}_D = \bar{\mathbf{M}}_{D0} + \sum_{j=1}^{n_\theta} (\bar{\mathbf{M}}_{D1j} \sqrt{g^j(\theta_j)} + \bar{\mathbf{M}}_{D2j} g^j(\theta_j)) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}_D = \bar{\mathbf{K}}_{D0} + \sum_{j=1}^{n_\theta} (\bar{\mathbf{K}}_{D1j} \frac{h^j(\theta_j)}{g^j(\theta_j)} + \bar{\mathbf{K}}_{D2j} h^j(\theta_j)) \quad (3.3)$$

donde θ_j es la j -ésima componente del vector de parámetros del modelo $\boldsymbol{\theta}$, y

$$\bar{\mathbf{M}}_{D0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s} \delta_{N_s,0}] \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 T \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s T} \delta_{N_s,0}] & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 T \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s T} \delta_{N_s,0}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{D1j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s} \delta_{N_s,j}] \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 T \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s T} \delta_{N_s,j}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{D2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 T \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s T} \delta_{N_s,j}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{D0} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{A}}_{dd}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{A}}_{dd}^{N_s} \delta_{N_s,0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,0}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{D1j} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{A}}_{dd}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{A}}_{dd}^{N_s} \delta_{N_s,j}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{D2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,j}] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

con $\delta_{s0} = 1$ si la subestructura s no depende de ningún parámetro del modelo y $\delta_{s0} = 0$ en otro caso. Además, $\delta_{sj} = 1$ si $s \in S_j$ y $\delta_{sj} = 0$ en otro caso. Es importante mencionar que las matrices de referencia, las cuales son independientes de los parámetros del modelo, son evaluadas en algún valor nominal $\boldsymbol{\theta}^n$.

3.2. Modos de Interfaz

Para la obtención de los modos de interfaz $\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\theta})$ se considera la partición de las matrices de masa $\mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta})$ y rigidez $\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta})$ de la interfaz, las cuales pueden ser parametrizadas como

$$\mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,0}] \tilde{\mathbf{T}} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,j}] \tilde{\mathbf{T}} g^j(\theta_j) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,0}] \tilde{\mathbf{T}} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s,j}] \tilde{\mathbf{T}} h^j(\theta_j) \quad (3.11)$$

donde δ_{s0} y δ_{sj} fueron definidos previamente. Con estas matrices se calcula el problema de valores y vectores propios de interfaz

$$\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Omega}_I(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

obteniendo las frecuencias $\boldsymbol{\Omega}_I(\boldsymbol{\theta})$ y modos de interfaz $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta})$ en función del parámetro $\boldsymbol{\theta}$. Se observa que el problema de valores y vectores propios debe ser resuelto para cada realización de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$.

3.3. Contribución de Modos Residuales

En este caso se considera la parametrización para los modelos reducidos basados en los modos dominantes y residuales con reducción de interfaz. De las ecuaciones (2.46) y (2.47) es claro que la parametrización de \mathbf{M}_{DIR} y \mathbf{K}_{DIR} depende de la parametrización de las matrices \mathbf{M}_{DI} ,

$\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI}$, $\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_R$, \mathbf{K}_{DI} , $\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI}$ y $\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_R$. Primero, es posible demostrar que las matrices reducidas, \mathbf{M}_{DI} y \mathbf{K}_{DI} , obtenidas desde los modos internos dominantes y de la reducción de interfaz global pueden ser expresados como [20, 24]

$$\mathbf{M}_{DI} = \mathbf{M}_{DI0}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbf{M}_{DI1j}(\boldsymbol{\theta}) \sqrt{g^j(\theta_j)}, \quad \mathbf{K}_{DI} = \bar{\mathbf{K}}_{DI0} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \bar{\mathbf{K}}_{DI1j} \frac{h^j(\theta_j)}{g^j(\theta_j)} + \mathbf{K}_{DI2}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.13)$$

donde

$$\mathbf{M}_{DI0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s} \delta_{N_s0}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta})^T \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1{}^T \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}{}^T \delta_{N_s0}] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_{DIj} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s} \delta_{N_sj}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta})^T \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{ib}^1{}^T \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{ib}^{N_s}{}^T \delta_{N_sj}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{DI0} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^{N_s} \delta_{N_s0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{DI1j} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{\Lambda}}_{dd}^{N_s} \delta_{N_sj}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}_{DI2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_I(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde δ_{s0} y δ_{sj} fueron definidos previamente.

Dado que el uso de los modos de orden superior a nivel de subestructura puede ser considerado como un efecto de segundo orden comparado con el de los modos dominantes, se propone considerar las componentes de la matriz de transformación \mathbf{T}_R constante y evaluadas en el valor nominal de los parámetros del modelo $\boldsymbol{\theta}^n$. Claramente, esta es una aproximación debido a que las diferentes matrices involucradas en la generación de la matriz \mathbf{T}_R dependen de los parámetros del modelo. No obstante, la experiencia numérica sugiere que esta aproximación genera resultados suficientemente exactos [20]. La validación de este supuesto es revisada en los ejemplos numéricos. Considerando el supuesto previo, las matrices $\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_R$ y $\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_R$ admiten la parametrización

$$\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_R = \bar{\mathbf{M}}_{RR0} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \bar{\mathbf{M}}_{RR1j} g^j(\theta_j), \quad \mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_R = \mathbf{K}_{RR0}^- + \sum_{j=1}^{n_\theta} \bar{\mathbf{K}}_{RR1j} h^j(\theta_j) \quad (3.18)$$

donde

$$\bar{\mathbf{M}}_{RR0} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R2} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1{}^T \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s}{}^T \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{RRj} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R2} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{RR0} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R2} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_s0}] \mathbf{T}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{RRj} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R2} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R1} & \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \delta_{N_sj}] \mathbf{T}_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

con \mathbf{T}_{R1} y \mathbf{T}_{R2} las componentes de matriz \mathbf{T}_R definidas en el capítulo (2).

De forma similar, las matrices $\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI}$ y $\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI}$ pueden ser expandidas como

$$\mathbf{T}_R^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}_{DI} = \bar{\mathbf{M}}_{RDI0}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^{n_\theta} \bar{\mathbf{M}}_{RDI1j} \sqrt{g^j(\theta_j)} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbf{M}_{RDI2j}(\boldsymbol{\theta}) g^j(\theta_j) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_{DI} = \bar{\mathbf{K}}_{RDI0} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \bar{\mathbf{K}}_{RDI1j} \frac{h^j(\theta_j)}{\sqrt{g^j(\theta_j)}} \quad (3.24)$$

donde

$$\bar{\mathbf{M}}_{RDI0j}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_s0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_s0}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{R1}^T [(\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{10}, \dots, (\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{N_s0}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{R2}^T [(\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{10}, \dots, (\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{N_s0}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{RDI1j}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_sj}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_sj}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_{RDI2j}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{R1}^T [(\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{1j}, \dots, (\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{N_sj}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{R2}^T [(\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{1j}, \dots, (\bar{\mathbf{M}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ib}^1 + \bar{\mathbf{M}}_{ib}^1) \delta_{N_sj}] \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{RDI0} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_s0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^1 \delta_{10}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{id}^{N_s} \delta_{N_s0}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{RDI1j} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{R1}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \bar{\Phi}_{id}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \bar{\Phi}_{id}^{N_s} \delta_{N_s j}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{R2}^T [\bar{\mathbf{K}}_{ii}^1 \bar{\Phi}_{id}^1 \delta_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{ii}^{N_s} \bar{\Phi}_{id}^{N_s} \delta_{N_s j}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Es importante mencionar que las matrices involucradas en la expansión de las matrices reducidas \mathbf{M}_{DIR} y \mathbf{K}_{DIR} son independientes de los parámetros del modelo, exceptuando $\mathbf{M}_{DI0}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{M}_{DI1j}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{K}_{DI2}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{M}_{RDI0}(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathbf{M}_{RDI2j}(\boldsymbol{\theta})$. La dependencia de $\boldsymbol{\theta}$ de estas matrices está dada por el término correspondiente a los modos de interfaz $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta})$. Así, la caracterización del modelo reducido para diferentes valores de los parámetros del modelo involucra la suma de un número de matrices evaluadas en algún valor nominal junto al recálculo de los modos de interfaz. Es importante mencionar que el tamaño de las matrices de interfaz es mucho más pequeño que las matrices del modelo de elementos finitos completo, por lo tanto obtener los modos de interfaz se realiza en una manera bastante eficiente. Entonces, se puede ver que incorporar el aporte de los modos residuales en forma constante, simplifica el esquema de parametrización del modelo reducido considerablemente. También es importante desde el punto de vista numérico, debido a que el costo de actualizar la matriz \mathbf{T}_R puede ser bastante importante en algunos casos.

En el esquema de la figura (3.1) se presentan, a modo de resumen, los pasos que se deben realizar para la parametrización de los modelos reducidos desde las matrices nominales.

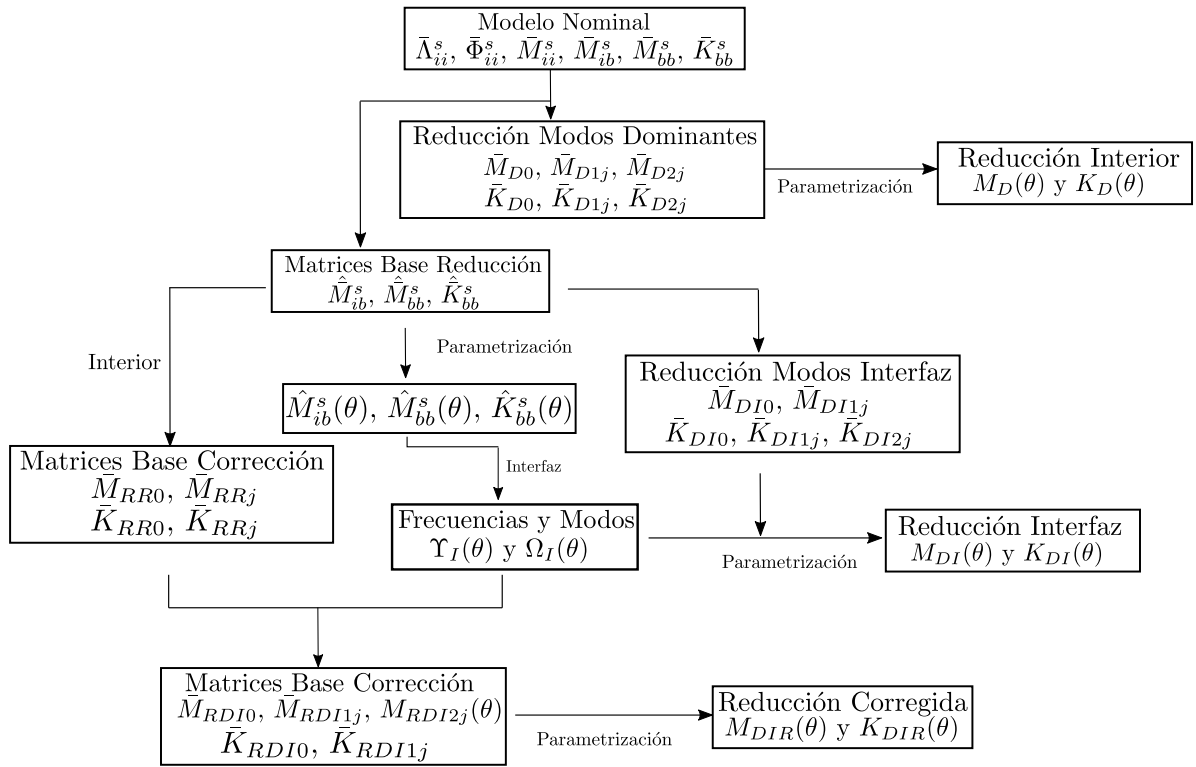


Figura 3.1: Esquema de Parametrización

Interpolación de Interfaz

La división de la estructura en subestructuras y la reducción del número de coordenadas físicas a un número mucho menor de coordenadas modales, ciertamente alivia el esfuerzo computacional en la resolución del análisis del modelo de elementos finitos durante los procesos de simulación basados en re-análisis. Pese a esto, la repetitiva generación de modelos reducidos para los diferentes valores de los parámetros del modelo θ , requeridos durante el proceso de simulación, puede ser computacionalmente muy costoso debido a los gastos generales a nivel de subestructura y de interfaz. Para lidiar con el problema a nivel de subestructura, se utilizan las parametrizaciones antes presentadas. Por otro lado, con el propósito de evitar el re-análisis a nivel de interfaz, un esquema de interpolación puede ser incorporado, aproximando los modos de interfaz para varios valores de los parámetros del modelo en términos de una familia de modelos en un número de puntos de soporte [20, 21]. Es importante mencionar que una aproximación similar puede ser considerada a nivel de subestructura en el caso que las matrices de las subestructuras dependan de más de un parámetro del modelo.

En este capítulo, se desarrollan las técnicas de interpolación presentando la forma en que se utilizan para aproximar los modos de interfaz en los distintos puntos de análisis de la simulación. Además, se presentan posibles metodologías para seleccionar los puntos de soporte.

4.1. Metamodelo para Modos de Interfaz

El supuesto que las matrices de las subestructuras depende de solo uno de los parámetros del modelo no es válida para las matrices de interfaz \mathbf{K}_I y \mathbf{M}_I . De hecho, estas matrices dependen de todos los parámetros del modelo θ . A nivel local, las matrices \mathbf{K}_{Il} y \mathbf{M}_{Il} , $l = 1, \dots, N_l$, pueden depender de varios parámetros dependiendo del número de subestructuras a las cuales esta conectada la interfaz. Por lo tanto, el esquema de parametrización presentado previamente no es aplicable y las matrices de interfaz deben ser ensambladas para cada uno de los nuevos valores del vector de parámetros del modelo durante el proceso de simulación.

Para visualizar que las matrices de interfaz dependen de más de un parámetro, en la figura (4.1) se presenta un esquema que explica la forma en que están conectadas varias subestructuras por medio de una interfaz. Este esquema esta basado en el modelo estructural ejemplo previamente definido. Las subestructuras S_j , $j = 5, 6, 7$ depende de un solo parámetro θ_j , $j = 5, 6, 7$ y por lo tanto sus respectivas matrices quedan parametrizadas por un solo parámetro. Por otro lado, para la interfaz entre estas subestructuras $l = 3$, sus correspondientes matrices de masa \mathbf{M}_{Il} y rigidez \mathbf{K}_{Il} dependerán de la combinación de los parámetros asociados a cada subestructura.

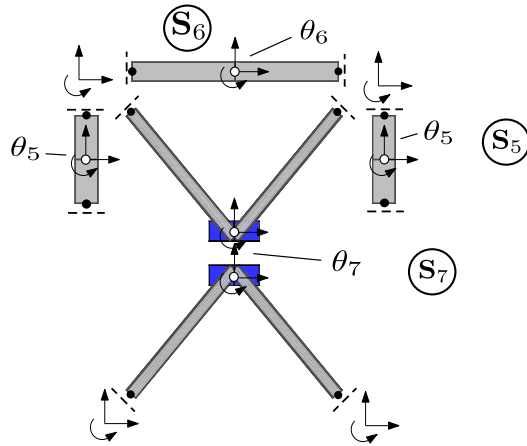


Figura 4.1: Interfaz subestructuras 5 a 7

Las correspondientes matrices de masa \mathbf{M}_{Il} y rigidez \mathbf{K}_{Il} quedan expresadas por

$$\mathbf{M}_{Il}(\theta_5, \theta_6, \theta_7) = \mathbf{M}_{bbI}^5 g^5(\theta_5) + \mathbf{M}_{bbI}^6 g^6(\theta_6) + \mathbf{M}_{bbI}^7 g^7(\theta_7) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{K}_{Il}(\theta_5, \theta_6, \theta_7) = \mathbf{K}_{bbI}^5 h^5(\theta_5) + \mathbf{K}_{bbI}^6 h^6(\theta_6) + \mathbf{K}_{bbI}^7 h^7(\theta_7) \quad (4.2)$$

donde \mathbf{M}_{bbI}^s y \mathbf{K}_{bbI}^s corresponden a la partición de la matriz de masa y rigidez de interfaz de la subestructura s asociada a la interfaz l .

Debido a que las matrices de interfaz deben ser ensambladas para cada punto de simulación el correspondiente problema de valores y vectores propios de interfaz de la ecuación (2.22) debe ser resuelto. Para evitar la evaluación directa de este problema de interfaz para diferentes muestras,

un esquema de interpolación aproximando los modos de interfaz en términos de los parámetros del modelo es considerado. Esta aproximación se basa en algunas ideas presentadas por [21], aproximando la matriz de vectores propios usando puntos de información conocida o puntos de soporte.

4.2. Puntos de Soporte

Se considera que el cálculo de las matrices $\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$ y $\mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$ en los $P + 1$ puntos de soporte en el espacio de parámetros del modelo, asociados al problema de valores propios

$$\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}^p)\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p) - \mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}^p)\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p)\boldsymbol{\Omega}_I(\boldsymbol{\theta}^p) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

esta resuelto, por lo que se posee modos de interfaz $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$ en los $P + 1$ puntos de soporte. Los puntos de soporte $\boldsymbol{\theta}^p$, $p = 1, \dots, P$ están distribuidos entorno al punto nominal $\boldsymbol{\theta}^n$ (punto $P + 1$), lo cual se presenta esquemáticamente con $P = 4$ en las figuras (4.2) y (4.3).

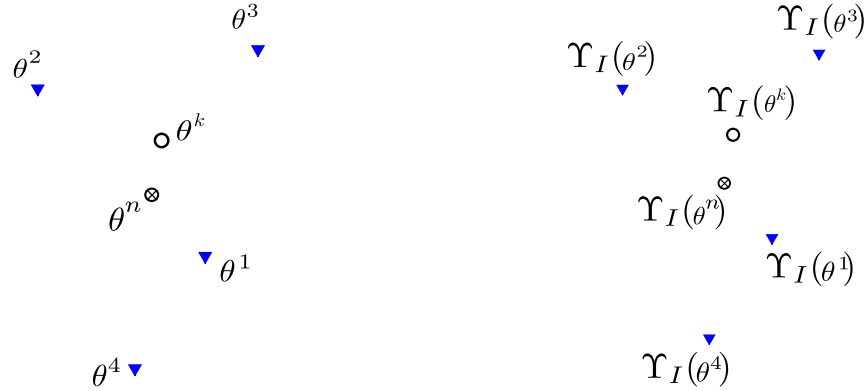


Figura 4.2: Puntos de soporte $\boldsymbol{\theta}^p$, $p = 1, \dots, 4$ Figura 4.3: Modos de soporte $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$, $p = 1, \dots, 4$

En la figura (4.2) se presentan los parámetros $\boldsymbol{\theta}^p$ entorno al valor nominal, mientras que en la figura (4.3) se presentan los correspondiente modos de interfaz $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$. Los parámetros $\boldsymbol{\theta}^k$ en los cuales se busca realizar el análisis son conocidos, mientras que los correspondientes modos asociados a ese punto $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^k)$ no se conocen, y serán aproximados utilizando una interpolación de los $\boldsymbol{\Upsilon}_I(\boldsymbol{\theta}^p)$, $p = 1, \dots, P + 1$.

Es importante mencionar que las matrices \mathbf{M}_I y \mathbf{K}_I evaluadas en el punto de soporte $\boldsymbol{\theta}^p$ pueden ser expresadas como

$$\mathbf{M}_I(\boldsymbol{\theta}^p) = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s 0}] \tilde{\mathbf{T}} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{M}}_{bb}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s j}] \tilde{\mathbf{T}} g^j(\theta_j^p) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_I(\boldsymbol{\theta}^p) = \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{10}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s 0}] \tilde{\mathbf{T}} + \sum_{j=1}^{n_\theta} \tilde{\mathbf{T}}^T [\hat{\mathbf{K}}_{bb}^1 \delta_{1j}, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{N_s} \delta_{N_s j}] \tilde{\mathbf{T}} h^j(\theta_j^p) \quad (4.5)$$

donde θ_j^p es la j -ésima componente del punto de soporte θ^p . Además $\delta_{s0} = 1$ si la subestructura s no depende de ningún parámetro y $\delta_{s0} = 0$ en otro caso. Por otro lado $\delta_{sj} = 1$ si la subestructura s depende del parámetro θ_j , y $\delta_{sj} = 0$ en otro caso.

4.3. Aproximación de los Modos de Interfaz

Para derivar la aproximación de los modos de interfaz en el punto de análisis θ^k , se consideran las coordenadas relativas al punto nominal θ^n . Considerando solo el punto θ^p en una representación lineal se tiene el esquema presentado en la figura (4.4).



Figura 4.4: Coordenadas relativas

En estas coordenadas se observa que es posible escribir el vector $(\theta^k - \theta^n)$ como una fracción del punto de soporte relativo $\theta^p - \theta^n$ de forma

$$(\theta^k - \theta^n) = \xi_p^k (\theta^p - \theta^n) \quad (4.6)$$

donde $0 \leq \xi_p^k \leq 1$. Reordenando esta ecuación se obtiene

$$\theta^k = (1 - \xi_p^k) \theta^n + \xi_p^k \theta^p \quad (4.7)$$

donde las funciones $(1 - \xi_p)$ y ξ_p son funciones que permiten construir una función lineal entre los puntos θ^n y θ^p . Estas funciones son representadas por el esquema de la figura (4.5).

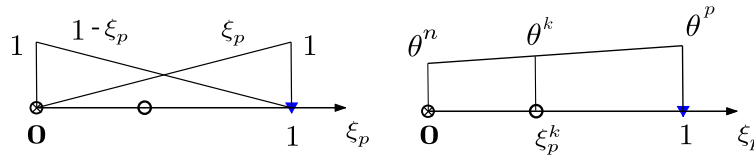
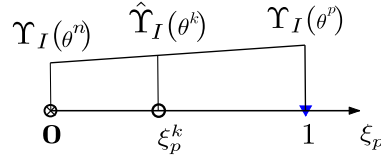


Figura 4.5: Aproximación Lineal θ

Extendiendo esta idea al espacio de los modos de interfaz se tiene que

$$\hat{\Upsilon}_I(\xi_p^k \theta^p) = (1 - \xi_j^k) \Upsilon_I(\theta^n) + \xi_j^k \Upsilon_I(\theta^p) \quad (4.8)$$

donde $\hat{\Upsilon}_I(\xi_p^k \theta^p)$ es la aproximación de $\Upsilon_I(\theta^k)$. Esta aproximación lineal es representada en forma gráfica en la figura (4.6).


 Figura 4.6: Aproximación Lineal Υ_I

Generalizando la expansión previa para el caso donde se tiene $P + 1$ puntos de soporte, θ^p , $p = 0, \dots, P$, la matriz Υ_I en el punto de simulación θ^k puede aproximarse por la expresión

$$\hat{\Upsilon}_I(\theta^k) = (1 - \sum_{p=1}^P \xi_p^k) \Upsilon_I(\theta^0) + \sum_{p=1}^P \xi_p^k \Upsilon_I(\theta^p) \quad (4.9)$$

donde los coeficientes ξ_p^k representan la contribución del punto de soporte θ^p a la simulación del punto θ^k . Se debe considerar interpolación de los puntos θ^k de forma que se tenga una región convexa al seleccionar los puntos de soporte. La caracterización de los coeficientes ξ_p^k es presentada en la siguiente sección. La aproximación previa no es usada directamente para aproximar los modos de interfaz ya que no son obtenidos como la solución del problema de valores y vectores propios. En otras palabras, el vector de aproximación de los vectores propios $\hat{\Upsilon}_{Ic}(\theta^k)$ está definido como la combinación lineal de los vectores componentes de la matriz $\hat{\Upsilon}_I(\theta^k)$ de la forma

$$\hat{\Upsilon}_{Ic}(\theta^k) = \hat{\Upsilon}_I(\theta^k) \mathbf{T}_I(\theta^k) \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{T}_I(\theta^k) \in \mathbb{R}^{n_{Ia} \times n_{Id}}$ es una matriz auxiliar. Basado en la transformación previa, la matriz auxiliar puede ser obtenida desde la solución del problema reducido de valores y vectores propios

$$[\hat{\Upsilon}_I^T(\theta^k) \mathbf{K}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_I(\theta^k)] \mathbf{T}_I(\theta^k) = [\hat{\Upsilon}_I^T(\theta^k) \mathbf{M}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_I(\theta^k)] \mathbf{T}_I(\theta^k) \hat{\Omega}_I(\theta^k) \quad (4.11)$$

donde $\hat{\Omega}_I(\theta^k)$ entrega una aproximación de los valores propios correspondientes a los modos de interfaz $\Upsilon_I(\theta^k)$. Las matrices de interfaz $\mathbf{M}_I(\theta^k)$ y $\mathbf{K}_I(\theta^k)$ que aparecen en el problema reducido de valores y vectores propios pueden ser evaluadas directamente según las ecuaciones (4.3). De esta forma se cumple que

$$[\hat{\Upsilon}_{Ic}^T(\theta^k) \mathbf{K}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_{Ic}(\theta^k)] = \hat{\Omega}_I(\theta^k) \quad (4.12)$$

$$[\hat{\Upsilon}_{Ic}^T(\theta^k) \mathbf{M}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_{Ic}(\theta^k)] = \mathbf{I} \quad (4.13)$$

lo cual permite utilizar la aproximación de los modos de interfaz $\hat{\Upsilon}_{Ic}^T$ directamente en las expresiones de los modelos reducidos presentadas en los capítulos anteriores. Es importante mencionar que las matrices $\hat{\Upsilon}_I^T(\theta^k) \mathbf{K}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_I(\theta^k)$ y $\hat{\Upsilon}_I^T(\theta^k) \mathbf{M}_I(\theta^k) \hat{\Upsilon}_I(\theta^k)$ son de dimensión $n_{Id} \times n_{Id}$ donde $n_{Id} \ll n_I$, con lo que este problema de valores y vectores propios es de dimensión bastante menor que la cantidad de grados de libertad de interfaz.

4.4. Determinación de los Coeficientes de Interpolación

Para determinar los coeficientes de interpolación primero se obtiene la mínima distancia entre el punto de simulación θ^k y los puntos de soporte θ^p , $p = 1, \dots, P$. En el esquema de la figura (4.7) se utiliza $P = 4$ para ejemplificar la búsqueda del punto de soporte mas cercano.

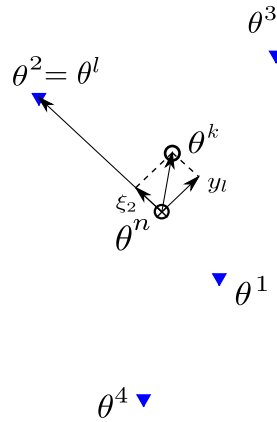


Figura 4.7: Punto mas cercano θ^l

Si el punto de soporte $\theta^l = \theta^2$ es el punto mas cercano al punto θ^k , entonces el coeficiente ξ_l^k es obtenido como la proyección de $(\theta^k - \theta^n)$ sobre $(\theta^l - \theta^n)$ en coordenadas relativas a θ^n , de forma que

$$\xi_l^k = \frac{(\theta^k - \theta^n)^T (\theta^l - \theta^n)}{\|(\theta^l - \theta^n)\|^2} \quad (4.14)$$

La componente perpendicular a $(\theta^l - \theta^n)$ esta dada por $y^k = (\theta^k - \theta^n) - \xi_l^k (\theta^l - \theta^n)$. Esta componente, es esquematizada en la figura (4.8).

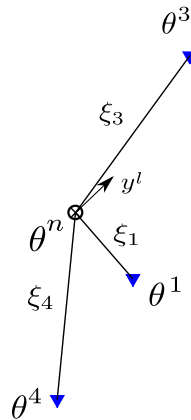


Figura 4.8: Puntos de soporte

Este vector es entonces representado como una combinación lineal de los restantes puntos de

soporte θ^p , $p = 1, \dots, P$, $p \neq l$ como

$$[(\theta^1 - \theta^n), \dots, (\theta^{l-1} - \theta^n), (\theta^{l+1} - \theta^n), \dots, (\theta^P - \theta^n)] \xi^k = \mathbf{y}^k \quad (4.15)$$

donde las componentes del vector ξ^k están dadas por $\xi = \langle \xi_l^1, \dots, \xi_l^{l-1}, \xi_l^{l+1}, \dots, \xi_l^P \rangle^T$. El sistema previo es resuelto utilizando descomposición de valores singulares (SVD), técnica que tiene la ventaja de ser aplicable a problemas de sistemas sobre determinados [29]. Es importante mencionar que el esquema de interpolación asegura que la aproximación sea exacta en los puntos de soporte. De hecho, si $\theta^k = \theta^p$ donde θ^p es uno de los puntos de soporte, entonces $\xi_p^k = 1$ y $\mathbf{y}^k = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\xi^k = \mathbf{0}$. Consecuentemente,

$$\Upsilon_I(\theta^k) = \Upsilon_I(\theta^p) \quad (4.16)$$

de esta forma se mejora la aproximación en puntos de simulación cercanos a los puntos de soporte.

4.5. Aproximación de Segundo Orden

Si la dependencia de los modos de interfaz es altamente no-lineal con respecto a los parámetros del modelo un esquema de interpolación lineal puede no ser suficientemente exacto. Para mejorar la exactitud de la aproximación se utilizan esquemas de interpolación de alto orden. Por ejemplo, un esquema de interpolación cuadrático requiere los siguientes puntos de soporte $\{\theta^n, \theta^p, \theta^{(-p)}, p = 1, \dots, P\}$. Los puntos $\theta^{(-p)}$ son generados con una simetría puntual de los puntos θ^p respecto al punto nominal θ^n como se presenta en el esquema de la figura (4.9), donde se considera $P = 4$.

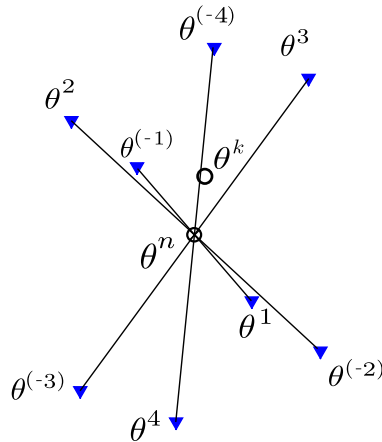


Figura 4.9: Puntos de soporte θ^p y $\theta^{(-p)}$

En forma análoga a la interpolación lineal, las funciones de interpolación de segundo orden son presentadas en la figura (4.10).

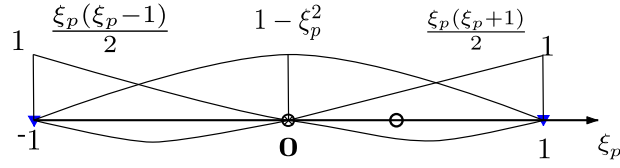


Figura 4.10: Funciones interpolación cuadrática

De las funciones de la figura (4.10), la interpolación en el eje formado por θ^p y $\theta^{(-p)}$ es representada en el esquema de la figura (4.11).

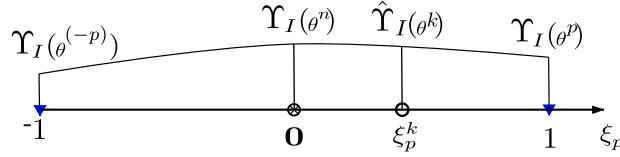


Figura 4.11: Aproximación cuadrática

La ecuación asociada a esta aproximación esta dada por

$$\hat{\Upsilon}_I(\theta^k) = (1 - (\xi_p^k)^2)\Upsilon_I(\theta^n) + \frac{1}{2}\xi_p^k(\xi_p^k + 1)\Upsilon_I(\theta^p) + \frac{1}{2}\xi_p^k(\xi_p^k - 1)\Upsilon_I(\theta^{(-p)}) \quad (4.17)$$

Generalizando la aproximación cuadrática de los modos de interfaz en el punto de simulación θ^k utilizando $2P + 1$ puntos de soporte se tiene

$$\hat{\Upsilon}_I(\theta^k) = (1 - \sum_{p=1}^P (\xi_p^k)^2)\Upsilon_I(\theta^n) + \sum_{p=1}^P \frac{1}{2}\xi_p^k(\xi_p^k + 1)\Upsilon_I(\theta^p) + \sum_{p=1}^P \frac{1}{2}\xi_p^k(\xi_p^k - 1)\Upsilon_I(\theta^{(-p)}) \quad (4.18)$$

donde el coeficiente ξ_p^k representa la contribución del punto de soporte θ^p y $\theta^{(-p)}$ a la simulación del punto θ^k . Los coeficientes ξ_p^k , $p = 1, \dots, P$ son obtenidos de la forma descrita en (4.4), exceptuando el cálculo para obtener el punto mas cercano a θ^k . En este caso, la minima distancia se calcula entre el punto de simulación θ^k y los $2P$ puntos de soporte $\{\theta^p, \theta^{(-p)}, p = 1, \dots, P\}$. Si el punto más cercano corresponde a uno del grupo $\{\theta^{(-p)}, p = 1, \dots, P\}$, el correspondiente coeficiente debe ser multiplicado por -1 . El resto de coeficientes debe ser obtenido según (4.15). Como se describió en la sección (4.3) los vectores componentes de la matriz $\hat{\Upsilon}_I(\theta^k)$ son usados como un subespacio para extender la aproximación de los modos de interfaz $\Upsilon_I(\theta^k)$. Resolviendo el problema de valores y vectores propios reducido de la ecuación (4.11) se obtiene la aproximación final de los modos de interfaz $\hat{\Upsilon}_{Ic}(\theta^k)$.

4.6. Puntos de Soporte

Dependiendo de la aplicación en la que se utilicen los modelos reducidos con interpolación de interfaz, se tienen diversas metodologías de selección de los puntos de soporte correspondientes. Estas metodologías pueden ser clasificadas mediante puntos de soporte fijos y puntos de soporte adaptativos. Las técnicas con puntos fijos buscan seleccionar inicialmente los puntos de soporte de forma que puedan ser utilizados durante toda la simulación sin problemas. Las técnicas con puntos adaptativos buscan actualizar los puntos de soporte a medida que los puntos muestreo van evolucionando durante la simulación.

4.6.1 Puntos de Soporte Fijos

Como fue previamente mencionado los puntos de soporte están distribuidos en torno al punto nominal θ^n . Diferentes enfoques pueden ser considerados para elegir el punto nominal y sus correspondientes puntos de soporte. Por ejemplo, el valor nominal puede ser seleccionado como el valor esperado de los parámetros inciertos del modelo. Entonces, los puntos de soporte pueden ser generados por métodos de muestreo como, muestreo aleatorio, *Latin Hypercube Sampling*, muestreo ortogonal, entre otros [30]. En los siguientes esquemas se presentan ejemplos de los puntos de soporte generados entorno al punto nominal para el caso de dos dimensiones. Los puntos de soporte están representados por triángulos, mientras que el punto nominal esta representado por una cruz.

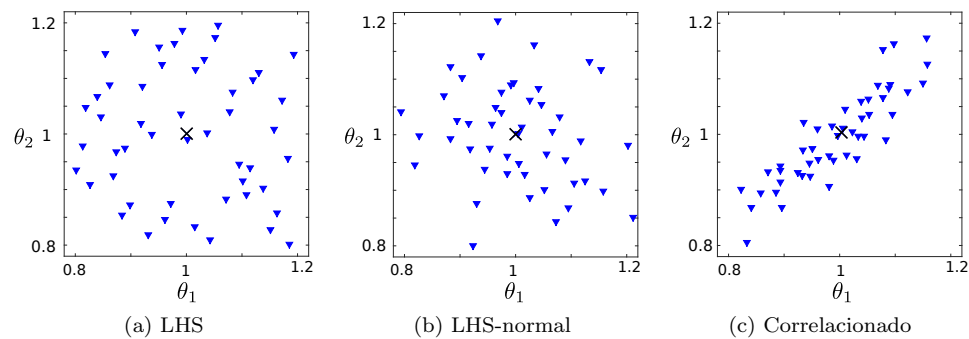


Figura 4.12: Muestreo puntos de soporte

En la figura (4.12 a) los puntos de soporte fueron seleccionados mediante la técnica *Latin Hypercube sampling (LHS)*, con lo cual se distribuyen en forma uniforme en un cierto rango de interés (0.8 a 1.2 en este ejemplo). En la figura (4.12 b) se distribuyen mediante *LHS* normal, con lo cual los puntos quedan distribuidos en forma normal con un cierto valor medio μ y matriz de covarianza Σ . Por último en la figura (4.12 c) se utilizan una combinación del algoritmo *LHS* normal con el campo aleatorio correlacionado que será desarrollado en el siguiente capítulo. En todas estas técnicas se debe intentar seleccionar aquella que cubra de mejor forma los puntos de muestreo de la simulación para realizar la correspondiente interpolación en base a los puntos de soporte.

4.6.2 Puntos de Soporte Adaptivos

Dependiendo en como van evolucionando los puntos de muestreo de la simulación, puede ocurrir que una base fija de puntos de soporte no logre cubrir la zona en que están ubicados los puntos de análisis, o si el espacio de análisis es muy grande, los efectos de la corrección estática en base al punto nominal pueden perder efecto. Por estos motivos, se propone la utilización de puntos de soporte adaptivos, para de esta forma mantener una zona convexa respecto a los puntos de interpolación y además para mantener los puntos de análisis en una zona cercana al punto nominal, con lo cual no se pierden los efectos de la corrección estática en base al punto nominal.

Por ejemplo para una simulación de tipo *Subset*, en la etapa (r) el punto nominal θ^n puede ser definido como el valor medio de las muestras condicionales generadas en la etapa anterior ($r - 1$), y los puntos de soporte pueden ser seleccionados entre las muestras condicionales situadas en el evento de falla intermedio F_{r-1} . Por ejemplo, los puntos de soporte pueden ser seleccionados en la vecindad de θ^n con respecto a la distancia *Eucludiana* o la distancia de *Mahalanobis* [30, 31], basado en la escala de la matriz de covarianza de las muestras condicionales. El uso de los puntos de soporte situados en eventos de falla intermedios genera un incremento en la exactitud de la aproximación durante el proceso de simulación. En los siguientes esquemas se presenta esta idea

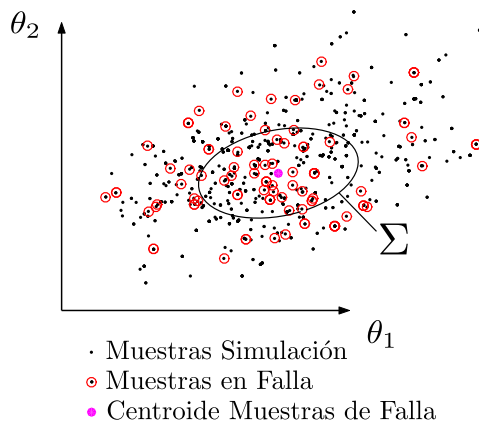


Figura 4.13: Muestreo

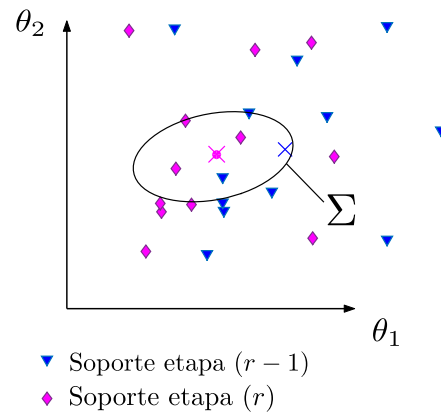


Figura 4.14: Soporte

En la figura (4.13) los puntos de muestreo están representados por puntos negros, mientras que los puntos encerrados en un círculo son los correspondientes puntos de falla correspondientes a la etapa ($r - 1$) de la simulación. En torno al valor medio de estos puntos de falla, representado por un punto morado, se gráfica una elipse que representa la matriz de covarianza Σ de estos puntos de falla. En la figura (4.14) se presentan los puntos de soporte, con triángulos los asociados a la etapa ($r - 1$) y con diamantes los que se generan entorno al valor medio con proporciones asociadas a la matriz de covarianza Σ y que serán utilizados en la etapa (r) de simulación.

El número de puntos de soporte depende del problema en análisis y esta basado en una serie de factores como lo son el nivel de exactitud buscado, la dimension del espacio de parámetros inciertos,

y el rango de variabilidad de los parámetros del modelo. La eficiencia computacional y exactitud de las aproximaciones es analizada en los ejemplos de aplicación.

En el esquema de la figura (4.15) se presenta la incorporación de las técnicas de interpolación en la parametrización de modelos reducidos desde las matrices nominales.

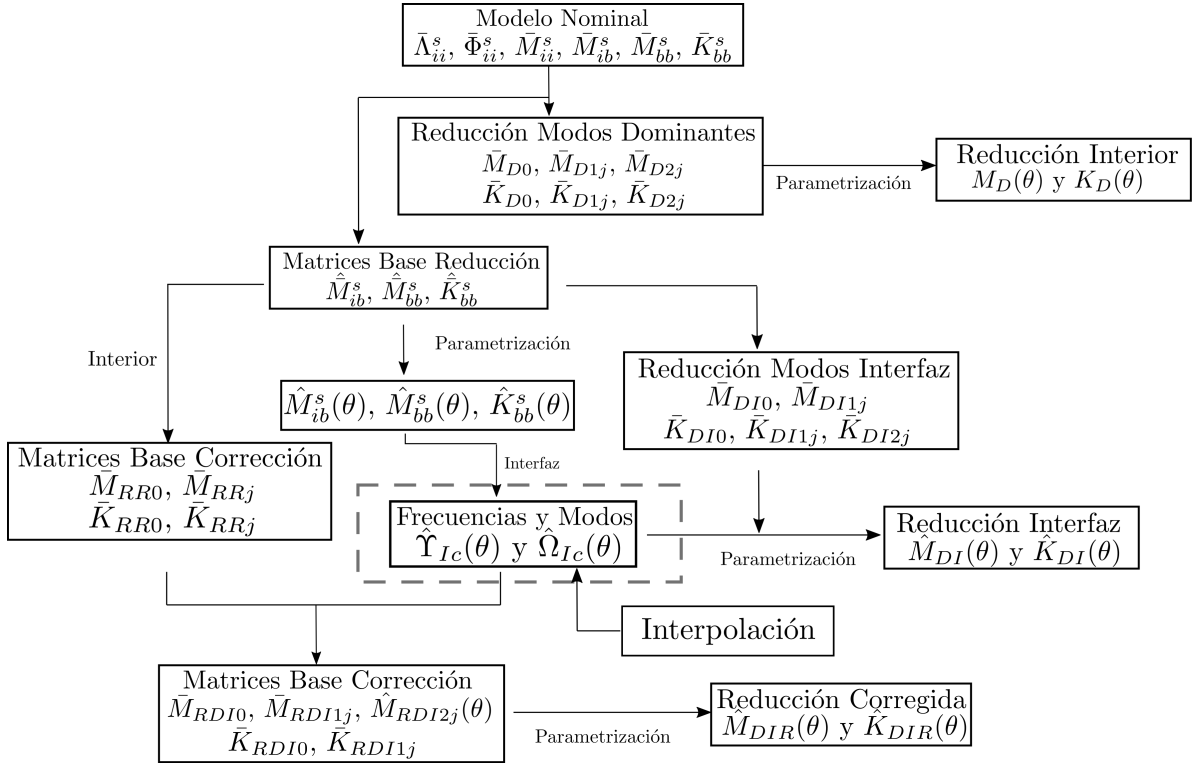


Figura 4.15: Incorporación Interpolación en Parametrización

En el esquema de la figura (4.16) se resumen los procesos involucrados en la interpolación de los modos de interfaz Υ_{Ic} para un punto de simulación θ^k . El esquema se desarrolla suponiendo que los puntos de soporte ya fueron seleccionados con alguna de las técnicas presentadas.

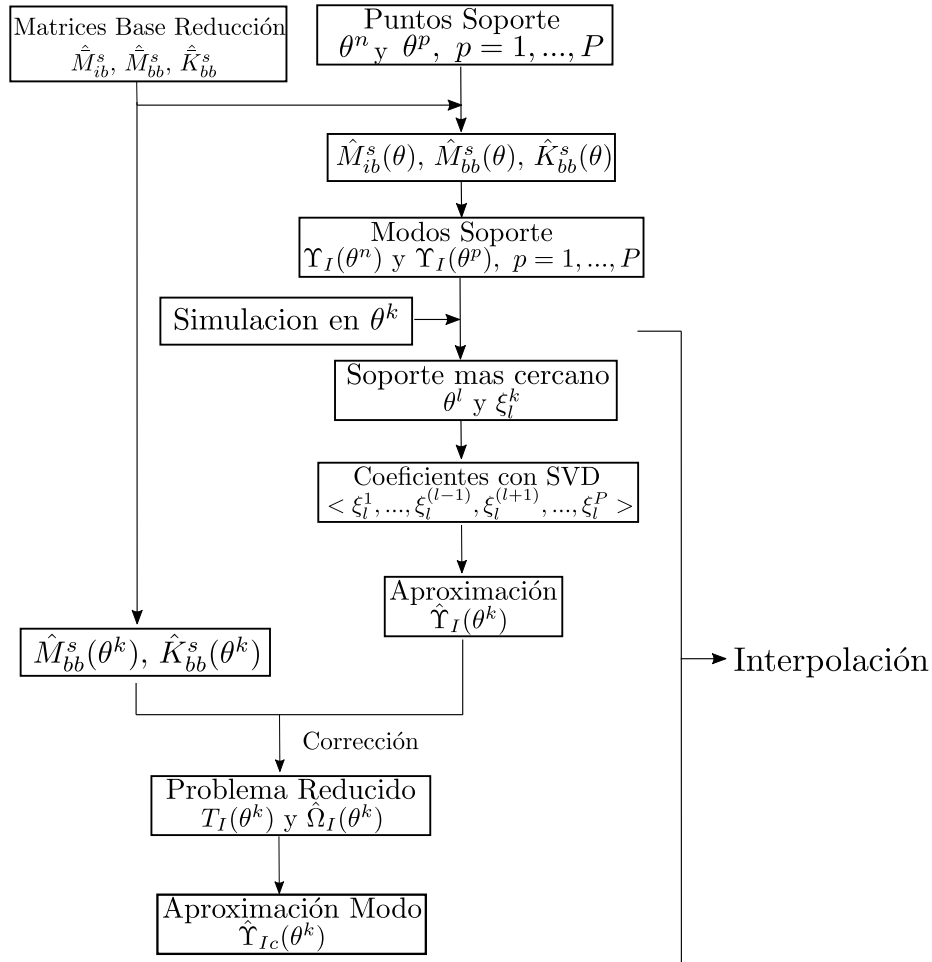


Figura 4.16: Esquema Interpolación

Confiabilidad y Propagación de Incertidumbre

En este capítulo se explican los tipos de problemas de simulación que se consideran en los ejemplos de aplicación. En estos problemas, se pondrán a prueba las técnicas de reducción y parametrización de modelos presentadas en los capítulos anteriores. Se comienza con el problema de evaluación de la confiabilidad, entregando detalles de como estimar numéricamente este problema y de las consideraciones en la solicitud utilizadas. Posteriormente se describe el problema de propagación de incertidumbre, entregando detalles de como considerar la incertidumbre en los parámetros del modelo utilizando campos aleatorios. Modelos específicos y sus correspondientes resultados de simulación son presentados en los capítulos posteriores de aplicación. Es importante mencionar que estas simulaciones corresponden a problemas de re-análisis de alta dimensionalidad.

5.1. Evaluación de la Confiabilidad

Considerando un sistema estructural sujeto a una excitación estocástica caracterizada por la variable aleatoria $\mathbf{w} \in \Omega_w \subset \mathbb{R}^{n_w}$, el cual es definido en términos de la función de densidad de probabilidad $p(\mathbf{w})$. Sin una pérdida de generalidad, se asume que las componentes de \mathbf{w} son independientes, esto es, $p(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{n_w} p_j(w_j)$ donde para cada j , p_j es una distribución unidimensional para w_j . Adicionalmente, considerar un vector $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$ de parámetros inciertos del modelo, los cuales están caracterizados de manera probabilística por la función de densidad de probabilidad $q(\boldsymbol{\theta})$.

El desempeño del sistema estructural debido a la excitación es caracterizado mediante n_r respuestas de interés $r_i(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$, $i = 1, \dots, n_r$, $t \in [0, T]$, donde T es la duración de la excitación. Claramente, la respuesta r_i es función del tiempo (debido a la naturaleza dinámica de la carga), pero además es función de los parámetros que caracterizan el modelo $\boldsymbol{\theta}$ y el vector de variable aleatoria \mathbf{w} que caracteriza la excitación. La función de respuesta $r_i(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$, $i = 1, \dots, n_r$ es obtenida desde la solución de la ecuación de movimiento que caracteriza al modelo estructural presentada en el capítulo (2).

Con propósitos de confiabilidad, la probabilidad de primera excursión es utilizada para caracterizar el nivel de seguridad de la estructura [33]. Esta probabilidad mide las posibilidades que tiene una respuesta de superar un cierto umbral preestablecido en un intervalo de tiempo específico. En otras palabras, esta probabilidad mide la posibilidad de ocurrencia del evento de falla $F = d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) > 1$, donde $d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$ es la llamada función normalizada de demanda. El correspondiente dominio de falla es definido como

$$\Omega_F = \{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) | d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \geq 1\} \quad (5.1)$$

En la figura (5.1) se presenta esquemáticamente la región de falla en el espacio de parámetros inciertos del modelo $\boldsymbol{\theta}$ y de variables aleatorias que caracterizan la excitación \mathbf{w} . Se observa que la región segura queda separada de la región de falla por la curva correspondiente a $d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = 1$.

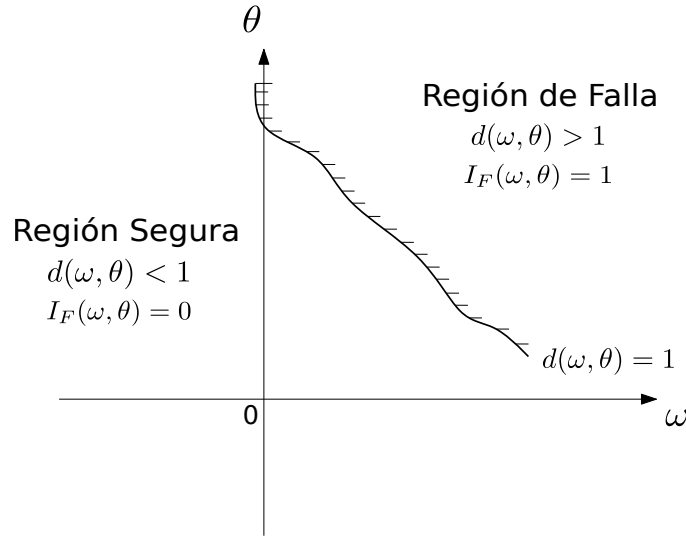


Figura 5.1: Dominio de Falla

La función de demanda normalizada es definida como el máximo cociente entre la respuesta estructural de interés y el correspondiente nivel umbral, esto es

$$d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \max_{i=1, \dots, n_r} \left(\max_{t \in [0, T]} \left(\left| \frac{r_i(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})}{r_i^*} \right| \right) \right) \quad (5.2)$$

donde r_i^* , $i = 1, \dots, n_r$ son los niveles de respuesta aceptados (nivel umbral). El cociente $r_i(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})/r_i^*$ puede ser interpretado como la razón entre demanda y capacidad al comparar el valor de la respuesta $r_i(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$ con el máximo valor de r_i^* .

La probabilidad de ocurrencia del evento de falla P_f puede ser expresada en términos de la integral de probabilidad

$$P_f = \int_{\Omega_F} p(\mathbf{w})q(\boldsymbol{\theta})d\mathbf{w}d\boldsymbol{\theta} = \int_{\mathbf{w} \in \Omega_w, \boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta} I_F(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{w})q(\boldsymbol{\theta})d\mathbf{w}d\boldsymbol{\theta} \quad (5.3)$$

donde $I_F(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})$ es la función indicatriz la cual es 1 en caso que la función de demanda normalizada es igual o mayor que 1 y 0 en otro caso. En general, la integral de probabilidad (5.3) involucra una gran cantidad de variables aleatorias (cientos o miles) en el contexto de sistemas dinámicos bajo solicitaciones estocásticas. Por lo tanto, esta integral representa un problema de confiabilidad de alta dimensionalidad.

5.1.1 Estimación de la Confiabilidad

Como se indicó anteriormente, la integral de probabilidad (5.3) representa un problema de confiabilidad de alta dimensionalidad. Adicionalmente, la estimación de la función de demanda normalizada necesita la evaluación de la función indicatriz, lo que usualmente implica la solución

del modelo de elementos finitos una gran cantidad de veces. Estas observaciones muestran que es fundamental la aplicación de técnicas avanzadas de simulación para hacer frente a la integral de probabilidad [34]. En particular, un método general aplicable, llamado *Subset Simulation*, es utilizado en la presente formulación [35]. La generalidad de este método se debe al hecho que no se basa en ningún supuesto geométrico de la topología de falla. Actualmente, cálculos de validación muestran que la técnica *Subset Simulation* es aplicada eficientemente en un amplio rango de sistemas dinámicos [36, 37]. Algunos aspectos fundamentales de *Subset Simulation* son revisados en esta sección.

La idea básica de la simulación *Subset* es descomponer el evento de falla F en secuencias anidadas de eventos de falla $F = F_m \subset F_{m-1} \subset \dots \subset F_1$ esto es $F = \bigcap_{r=1}^m F_r$. Por definición de probabilidad condicional

$$P(F) = P(F_m) = P(\bigcap_{r=1}^m F_r) = P(F_1) \prod_{r=1}^{m-1} P(F_{r+1}/F_r) \quad (5.4)$$

La idea de los eventos de falla intermedios F_r se esquematiza en la figura (5.2) donde se tiene un conjunto de muestras iniciales o no condicionadas y luego de la definición del primer evento de falla F_1 , las muestras siguientes son generadas mediante cadenas de markov para cada evento sucesivo F_r [38].

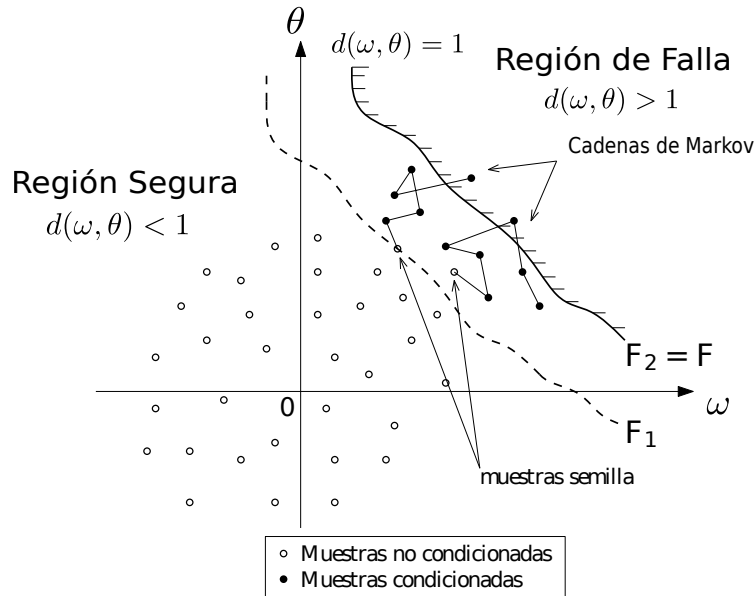


Figura 5.2: Simulación *Subset*

Entonces, la probabilidad de falla queda expresada como un producto de $P(F_1)$ y las probabilidades de falla condicionadas $\{P(F_{r+1}/F_r), r = 1, \dots, m - 1\}$. Se observa incluso que si $P(F)$ es pequeño, seleccionando m y F_r , $r = 1, \dots, m - 1$ apropiadamente, la probabilidad condicional puede ser aun suficientemente grande, y por lo tanto puede ser evaluada de manera eficiente por simulación directa porque los eventos de falla son más frecuentes. Para la implementación uti-

lizada, los eventos de falla intermedios son elegidos en forma adaptativa usando la información de las muestras simuladas, las cuales corresponden a algún evento condicional de probabilidad de falla. Para ser más específicos, la secuencia de eventos de falla intermedios está definida como $F_r = d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) > \delta_r, r = 1, \dots, m$ donde $0 < \delta_1 < \dots < \delta_m = 1$ es una secuencia de valores umbrales intermedios. Durante la simulación *Subset* los valores umbrales intermedios son generados adaptativamente, esto es, las probabilidades de falla condicionales son seleccionadas iguales a un valor preestablecido, por ejemplo p_0 . Así, se puede ver que los valores de la función de demanda $\delta_1, \dots, \delta_m$, a un nivel de probabilidad específico, son estimados. Por esto, la simulación *Subset* esencialmente genera muestras mientras los valores de la función de demanda correspondan a los niveles de probabilidad preestablecidos. Por lo tanto, la probabilidad condicional es automáticamente igual a p_0 excepto en la última etapa de simulación en la cual es $P(F_m/F_{m-1})$. La probabilidad de falla es entonces estimada como

$$P_f \approx p_0^{m-1} \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} I_{F_m}(\mathbf{w}_{m-1,i}, \boldsymbol{\theta}_{m-1,i}) \quad (5.5)$$

donde $\{(\mathbf{w}_{m-1,i}, \boldsymbol{\theta}_{m-1,i}, i = 1, \dots, N_m)\}$ es el conjunto de muestras generadas en la última etapa de la simulación *Subset* (etapa $m - 1$). Para la implementación actual de la simulación *Subset* basada en [9,39], se asume que los parámetros inciertos del sistema $\boldsymbol{\theta}$ no son independientes y están caracterizados mediante un campo aleatorio que será desarrollado en una de las secciones siguientes.

5.1.2 Solicitación Sísmica

La excitación sísmica es modelada como un proceso estocástico no estacionario. En particular, un modelo estocástico que combina un modelo *Point Source* con un pulso de velocidad [40]. El modelo es caracterizado por los parámetros M que representa la magnitud de momento, d_r que representa la distancia epicentral, T que representa la duración de la excitación y Δt que representa el tamaño del intervalo de muestreo [9,41,42]. En la figura (5.3) se esquematiza la representación física de la generación de la excitación sísmica.

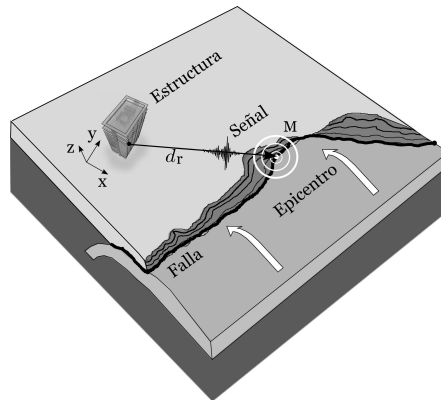


Figura 5.3: Esquema *Point Source*

Para ser mas específicos, para un evento dado de magnitud M y epicentro a una distancia d_r , el movimiento del suelo es obtenido de la siguiente forma. Primero, una secuencia discreta de ruido blanco es generada como

$$\mathbf{w}^T = \langle \sqrt{1/\Delta t} \omega_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n_T \quad (5.6)$$

donde ω_j , $j = 1, \dots, n_t$, son variables aleatorias gaussianas estándar independientes, idénticamente distribuidas, Δt es el intervalo de muestreo, y n_T es el numero de intervalos iguales que compone a la duración de la excitación T dividido por el intervalo de muestreo. La secuencia de ruido blanco es modulada por una función envolvente. Se aplica la transformada de Fourier a la secuencia modulada de ruido blanco y el espectro resultante es multiplicado por el espectro del movimiento del suelo. Después, con la transformada de Fourier inversa, se devuelve al dominio del tiempo, para obtener la aceleración del suelo como un registro tiempo historia. Detalles de este procedimiento así como de la caracterización de la función envolvente y del espectro del movimiento del suelo pueden ser encontrados en [9, 42–44].

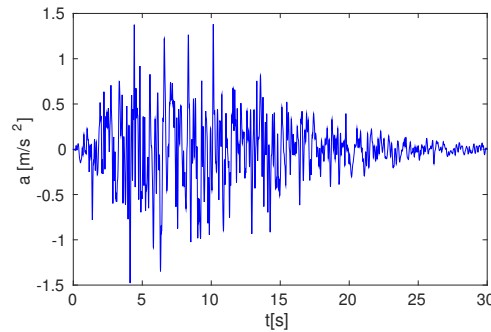


Figura 5.4: Aceleración Basal

En la figura (5.4) se presenta un registro tiempo historia típico generado sintéticamente con el método presentado, utilizando una magnitud de momento $M = 7.0$ y distancia de ruptura igual a $d_r = 25Km$. La duración de la excitación es tomada igual a $T = 30[s]$ con un intervalo de muestreo $\Delta t = 0.01[s]$. Así, la secuencia de ruido blanco contiene $n_T = 3001$ variables aleatorias y por lo tanto el vector de parámetros inciertos \mathbf{w} involucra un problema de alta dimensionalidad.

5.2. Propagación de Incertidumbre

La importancia de manejar racionalmente la incertidumbre en los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos es ampliamente reconocida en el sentido de predecir de manera más precisa las respuestas estructurales de interés [45, 46]. El campo de la probabilidad y estadística entrega las herramientas para tomar en cuenta la incertidumbre en los parámetros estructurales y en las

cargas. En esta sección se otorga especial énfasis a la incertidumbre en los parámetros del modelo estructural θ y como éstas se transmiten a propiedades o respuestas de interés. Algunas de estas pueden ser las propiedades espectrales, respuesta en el dominio del tiempo o respuesta en el dominio de la frecuencia, entre otras.

En este trabajo se considera algún elemento principal del sistema estructural y se genera un campo aleatorio para modelar el comportamiento de las incertezas en alguno de los parámetros de interés como por ejemplo el módulo de elasticidad. Es importante mencionar que se han desarrollado técnicas que intentan aproximar el mecanismo de transmisión de las incertezas desde los parámetros del modelo a las respuestas de interés, las cuales se pueden revisar en [21, 47–53].

De manera ilustrativa, para guiar la exposición de los campos aleatorios que se utilizaran, considere el sistema estructural de la figura (5.5) de el cual se separa como elemento principal el núcleo central de muros de hormigón

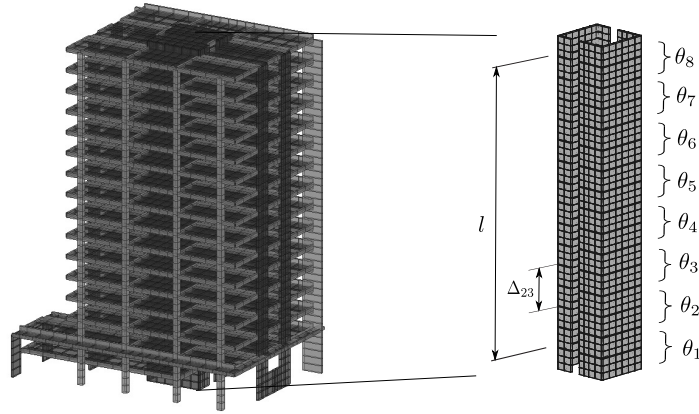


Figura 5.5: Campo Aleatorio

La rigidez del núcleo de hormigón, representada mediante el módulo de elasticidad, es considerada incierta. Específicamente, el modulo de elasticidad de los elementos de muro es agrupado cada dos pisos y es modelada mediante un campo aleatorio Log-normal homogéneo e isotrópico \mathbf{E} con valor medio $\mu_E \mathbf{1}$, desviación estándar σ_E y función de correlación dada por

$$R(\Delta) = \exp(-\beta\Delta^2) \quad (5.7)$$

donde Δ representa una distancia característica y β es un parámetro que permite ajustar el grado de correlación. La correspondiente matriz de covarianza del proceso esta dada por $\Sigma_E = \sigma_E^2 \mathbf{R}$, donde \mathbf{R} es la matriz de correlación con coeficientes $\mathbf{R}_{ij} = R(\Delta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n_\theta$, donde Δ_{ij} es la distancia entre el centroide de los grupos de elementos de muro i y j normalizada por el largo de correlación l . Para el sistema estructural de la figura (5.5) se considera $n_\theta = 8$ y a modo de ejemplo

se presenta la distancia Δ_{23} que representa la distancia entre los grupos de elementos de muro 2 y 3 asociadas a los parámetros θ_2 y θ_3 .

El campo aleatorio Log-Normal correspondiente al núcleo de hormigón puede ser expresado como

$$\mathbf{E} = \exp(\mu_N \mathbf{1} + \Phi \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{z}) \quad (5.8)$$

donde $\mu_N \mathbf{1}$ representa el valor medio del campo aleatorio gaussiano con

$$\mu_N = \ln(\mu_E) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_E^2}{\mu_E^2}\right) \quad (5.9)$$

Φ y $\mathbf{\Lambda}$ son los vectores y valores propios de la matriz de covarianza Σ_N del campo aleatorio gaussiano y son obtenidos desde

$$\Sigma_N = \Phi^T \mathbf{\Lambda} \Phi \quad (5.10)$$

los correspondiente coeficientes de la matriz de covarianza están dados por

$$\Sigma_{Nij} = \ln\left(1 + \frac{\sigma_E^2 \mathbf{R}_{ij}}{\mu_E^2}\right) \quad i, j = 1, \dots, n_\theta \quad (5.11)$$

por otro lado \mathbf{z} es un vector de variables aleatorias normales independientes asociado a la respectiva simulación con que se este trabajando.

Para llevar el campo aleatorio a la notación utilizada en los capítulos anteriores en que los parámetros del modelo esta representados por θ , se tiene que

$$\theta = \mathbf{E} ./ \bar{\mathbf{E}} \quad (5.12)$$

donde $./$ representa la división componente a componente y $\bar{\mathbf{E}}$ corresponde al valor nominal del modulo de elasticidad de cada componente del campo aleatorio.

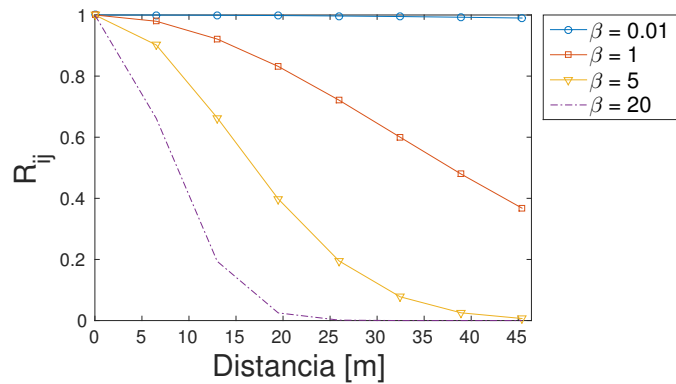


Figura 5.6: Función de Correlación

En la figura (5.6) se presentan valores típicos de los elementos de la matriz de correlación R_{ij} respecto a los valores de distancia entre el grupo 1 y el grupo j , $j = 1, \dots, 8$. Se grafican los valores correspondientes para varios valores del parámetro β . Si el parámetro β es muy pequeño la función de correlación tiende a 1 en forma independiente a la distancia, lo cual representa un campo aleatorio fuerte o completamente correlacionado, lo cual en términos físicos esto significa que los muros de todos los grupos tienen la misma rigidez o modulo de elasticidad. Por otro lado cuando el parámetro β es muy grande, los valores de la función de correlación tienden a ser 1 solo para la distancia 0 que corresponde a los muros del primer grupo, lo cual en términos físicos representa que la rigidez o modulo de elasticidad de cada piso es completamente independiente a la de los otros grupos.

En las distintas aplicaciones se utiliza un valor intermedio del parámetro β , debido a que por motivos constructivos en general se tiene una cierta dependencia entre las propiedades de elementos adyacentes. La correcta selección de este parámetro mejora la representatividad que tiene el modelo del sistema estructural en la realidad.

Una de las formas en que se puede analizar la influencia o propagación de las incertezas en los parámetros estructurales es generar un numero N_m de muestras gobernadas por el campo aleatorio como se ilustra en la figura (5.7), en la cual se presenta un campo aleatorio bidimensional con un valor del parámetro β intermedio. Se generan las N_m muestras en el espacio de variables independientes z y por medio de las ecuaciones (5.8) y (5.12) las muestras son transformadas al espacio de parámetros del modelo estructural θ . Posteriormente, diversos análisis pueden ser realizados sobre estas muestras y con los resultados obtenidos se realizan estadísticas que permiten entender como se propagan la incertidumbre.

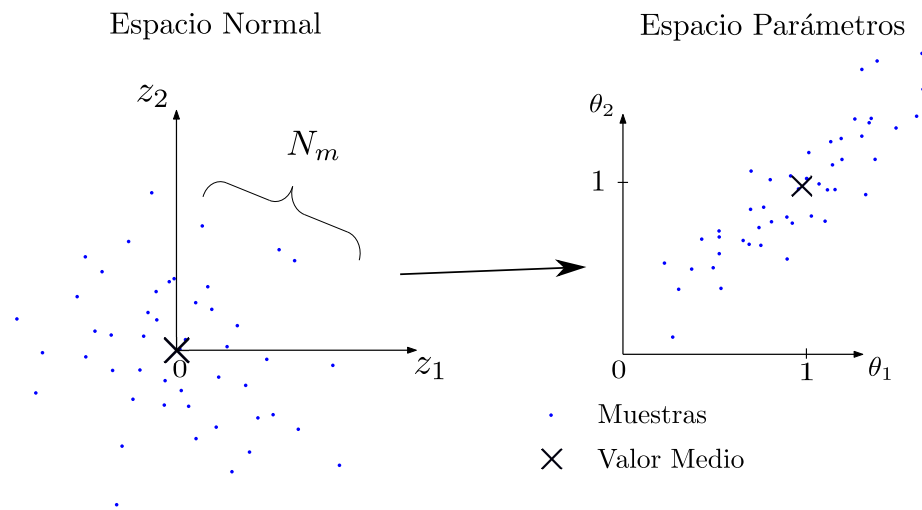


Figura 5.7: Muestras Campo Aleatorio

Para el caso de las frecuencias de vibración del modelo estructural, tomando cada una de las muestras θ^j , $j = 1, \dots, N_m$ se realiza un histograma de las frecuencias mas importante (ω_1 a ω_5).

De la variabilidad que tiene cada una se desprende como se ven influenciadas por la incertidumbre en los parámetros estructurales. En la figura (5.8) se ilustra esta idea. Se observa en este caso que las primeras frecuencias (ω_1 y ω_2) se ven poco afectadas por la incertidumbre en los parámetros estructurales, teniendo baja variabilidad. Por otro lado las frecuencias altas (ω_4 y ω_5) se ven muy afectadas teniendo una gran variabilidad.

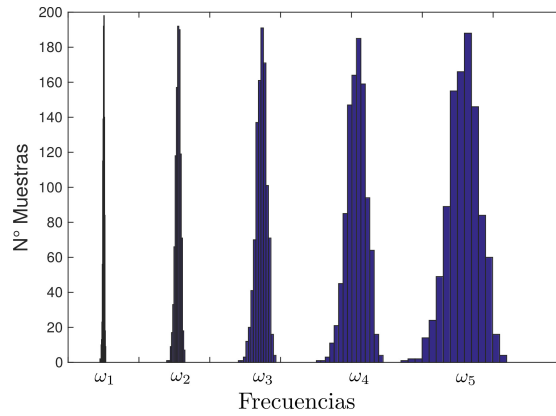


Figura 5.8: Histograma Frecuencias

Otra posible forma de analizar la propagación de la incertidumbre, es analizar la respuesta estructural para cada una de las muestras θ^j , $j = 1, \dots, N_m$. En la figura (5.9) se presenta ilustrativamente la respuesta en el dominio de la frecuencia de un grado de libertad j debido a una excitación armónica en un grado de libertad i . La línea principal representa el valor medio de las respuestas mientras que el área sombreada representa el intervalo de confianza del 95%. Se observa una alta variabilidad en las frecuencias altas (ω_3 y ω_4), lo cual implica que estas frecuencias se ven mucho más influenciadas por la incertidumbre en los parámetros del modelo.

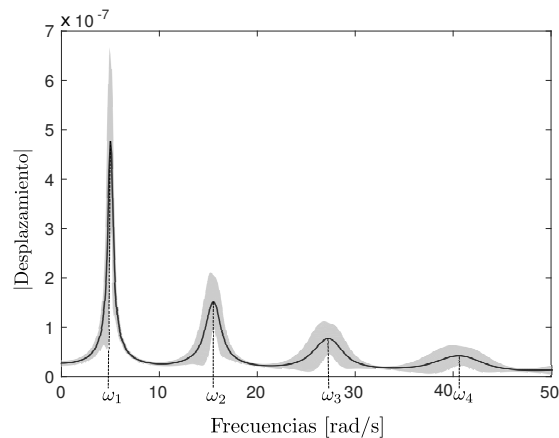


Figura 5.9: Respuesta Dominio de la Frecuencia

Para analizar efectivamente la propagación de incertidumbre se deben realizar análisis a muchos modelos del sistema estructural, por lo que hacer estos análisis de manera eficiente es fundamental, con lo cual las técnicas de reducción pueden tener gran importancia. La eficacia de las técnicas de reducción en este ámbito son evaluadas en los capítulos de ejemplos de aplicación.

Ejemplo de Aplicación 1

En este capítulo se describe la aplicación de las técnicas de reducción a un modelo de marcos de hormigón. Se comienza con la descripción del modelo y la subestructuración utilizada, que dará origen a los modelos reducidos. Se formula el problema de confiabilidad en el cual se probará el desempeño de los modelos reducidos, se describen la sollicitación y las propiedades del campo aleatorio utilizadas. Posteriormente, se realiza un análisis completo de las distintas técnicas de reducción presentadas, incluyendo parametrización e interpolación. Finalmente se presentan los resultados de las simulaciones de confiabilidad mediante el método *Subset*, entregando detalles de la reducción en costo computacional.

6.1. Descripción del Modelo

El modelo consiste en un marco plano de 8 pisos, con columnas de sección $40 \times 40[cm]$ y vigas de sección $40 \times 40[cm]$. La altura de columnas es de $5[m]$, mientras que el largo de las vigas es de $10[m]$. El material considerado es Hormigón H30 con módulo de elasticidad $2.485E10[N/m^2]$. El modelo cuenta con un total de 408 grados de libertad. En la figura (6.1) se presenta un esquema del modelo con las respectivas dimensiones.

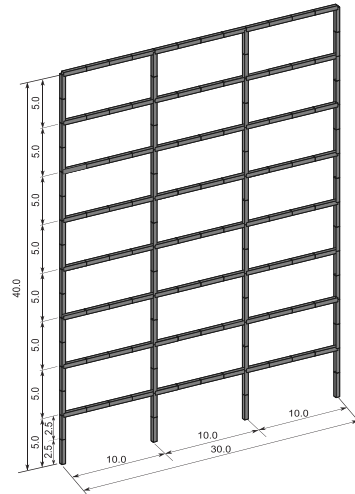


Figura 6.1: Esquema marco 8 pisos

La subestructuración se realiza por columnas y vigas asociadas a cada piso, como se presenta en la figura (6.2). El sistema queda definido por un total de 16 subestructuras S_j , $j = 1, \dots, 16$.

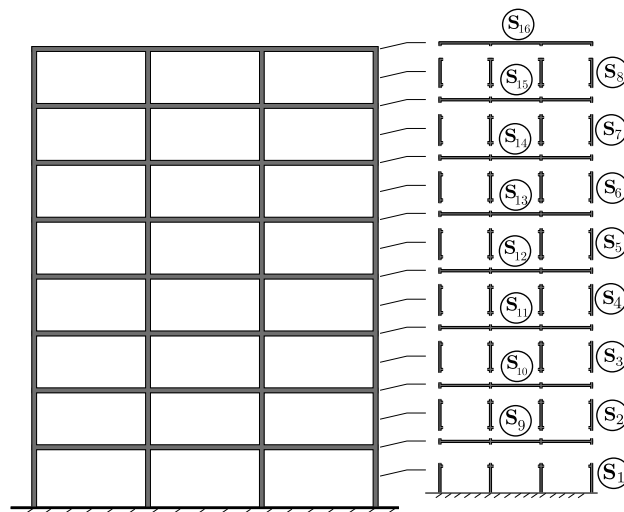


Figura 6.2: Esquema Subestructuras marco 8 pisos

La configuración de reducción utilizada se presenta en tabla (6.1).

Caso	Modos internos		Modos de borde	
	S1 - S8	S9 - S16	B1 - B8	Total
$m-1$	4	3	20	76

Tabla 6.1: Casos Modelos Reducidos

Los grados de libertad de borde son 96, distribuidos en 8 bordes (B1-B8). Se considera reducción de los grado de libertad de borde a un total de 20, con una reducción al 20%. En total, se tiene una reducción al 18.6% en la cantidad total de grados de libertad. En el apéndice (B) se detalla la definición de las interfaces.

6.2. Formulación del Problema

Para ilustrar el desempeño de la estructura, ésta es caracterizada mediante la probabilidad de ocurrencia de un evento de falla relacionado con el desplazamiento relativo del ultimo piso (octavo) respecto al suelo. La correspondiente función de demanda normalizada esta dada por:

$$d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \max_{t \in [0, T]} \left(\left| \frac{\delta(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})}{\delta^*} \right| \right) \quad (6.1)$$

donde δ es el desplazamiento en la parte superior de la estructura y $\delta^* = 0.2[m]$ el nivel de desplazamiento aceptado el cual corresponde a un 0.5% de la altura.

La duración de la sollicitación es tomada igual a $T = 30[s]$ con intervalos iguales a $\Delta t = 0.01[s]$. Así, la secuencia tiene $n_T = 3001$ variables aleatorias. Los correspondientes valores de magnitud de momento y distancia de ruptura son $M = 7.0$ y $d_r = 25[km]$.

La rigidez de las columnas, representada mediante el módulo de elasticidad, es considerada incierta. Específicamente, el módulo de elasticidad de los elementos columnas de los distintos pisos es modelada mediante un campo aleatorio Log-normal homogéneo e isotrópico \mathbf{E} con valor medio $\mu_E \mathbf{1}$, desviación estándar σ_E . El valor medio y la desviación estándar del campo aleatorio Log-normal son seleccionados como $\mu_E = 2.485 \times 10^{10} [N/m^2]$ y $\sigma_E = 2.0 \times 10^9 [N/m^2]$, respectivamente. Los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ del modelo quedan expresados por

$$\theta_i = E_i / \bar{E} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (6.2)$$

donde $\bar{E} = \mu_E$. En la figura (6.3) se presenta un esquema de las distancias utilizadas entre las componentes y sus correspondientes parámetros. El largo de correlación es utilizado como $l = 35m$ y a modo de ejemplo en la figura, el largo entre las subestructuras 2 y 3 tiene el valor $\Delta_{23} = 5[m]$.

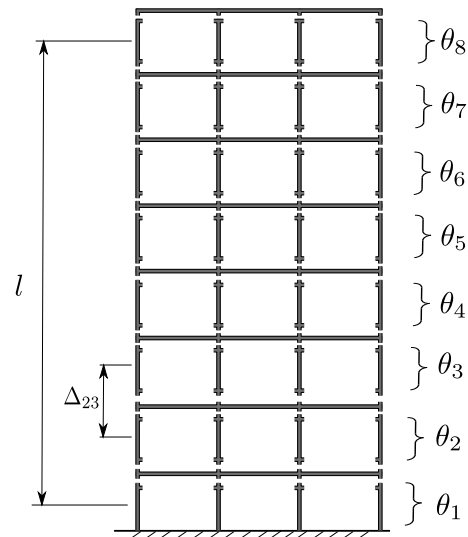


Figura 6.3: Esquema Campo Aleatorio

El efecto del parámetro β (relacionado con el grado de correlación del campo aleatorio) sobre la función de correlación R_{ij} se ve reflejado en la figura (6.4), donde se presenta la función R_{1j} en función de Δ_{1j} , ambos referidos a la correlación entre el primer piso y los restantes j , $j = 1, \dots, 8$.

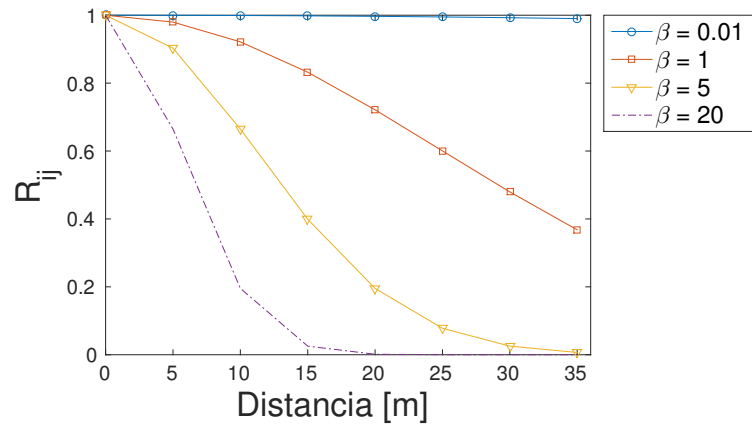


Figura 6.4: Correlación campo aleatorio

Se considera el campo con $\beta = 0.01$ fuertemente correlacionado, con $\beta = 1$ débilmente correlacionado y con $\beta \rightarrow \infty$ no correlacionado. El efecto del parámetro β sobre la confiabilidad del sistema será analizado en las siguientes secciones.

6.3. Modelo Reducido Nominal

Para verificar la exactitud de los modelos reducidos, las frecuencias y modos de vibrar del sistema completo son comparadas con los correspondientes al modelo reducido $m-1$. Se generan el modelo basado en modos dominantes D , con reducción de interfaz DI y con la corrección para el caso con reducción de interfaz DIR . La comparación de frecuencias se presenta en la tabla (6.2) y en forma gráfica en la figura (6.5).

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.034	2.772E-04	2.772E-04	1.862E-10
2	15.572	2.845E-03	2.845E-03	1.138E-08
3	27.373	9.892E-03	9.893E-03	1.065E-06
4	40.890	2.522E-02	2.526E-02	3.393E-05
5	56.142	5.324E-02	5.336E-02	1.549E-04
6	72.528	9.307E-02	9.335E-02	5.060E-04
7	77.178	1.284E-02	1.328E-02	4.602E-04
8	82.483	1.311E-02	1.330E-02	2.406E-04
9	86.012	1.313E-02	1.372E-02	5.555E-04
10	87.556	9.242E-02	9.811E-02	5.972E-03

Tabla 6.2: Comparación errores

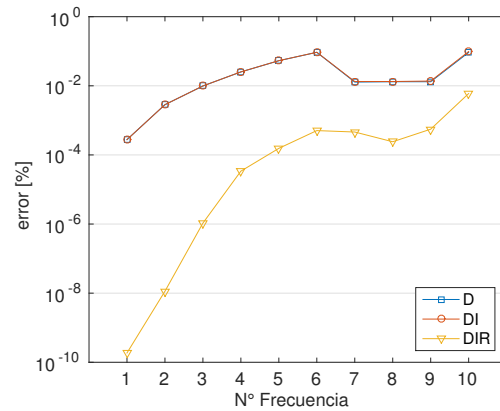


Figura 6.5: Errores Frecuencias

La comparación de los modos de vibrar se presentan en la figura (6.6), por medio del criterio MAC, el cual es presentado en el apéndice (A).

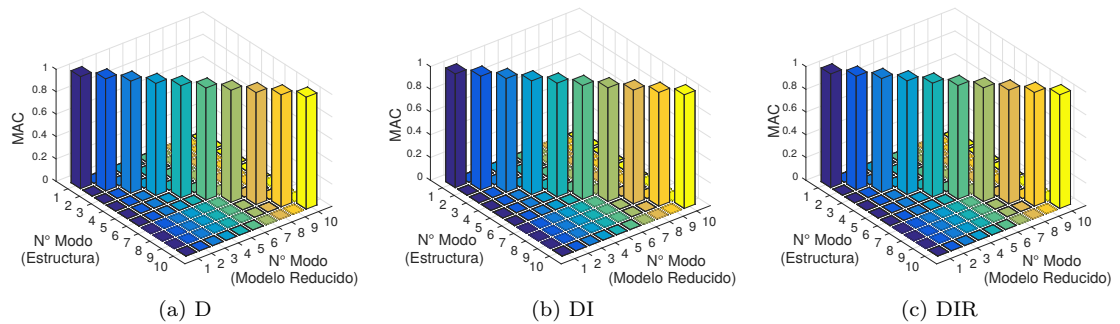


Figura 6.6: MAC modelo $m-1$ nominal

En la comparación de frecuencias, se observa que entre el modelo D y DI no hay mucha diferencia, mientras que al comparar con el modelo DIR hay una gran mejora, al incorporar los efectos de los modos residuales. Por otro lado al comparar los modos, los resultados son prácticamente iguales, lo que indica que se podría haber realizado una reducción mucho mayor.

En la tabla (6.3) se presentan los tiempos asociados a las actividades necesarias para generar cada uno de los modelos reducidos, de esta forma se puede visualizar cuales de estas consumen mayor tiempo en la generación de los modelos reducidos.

	Actividad	Tiempo [s]
1	Ensamble Componentes	0.0667
2	Frecuencias Componentes	0.0963
3	Matrices Base Reducción	0.0010
4	Frecuencias Borde	0.0198
5	Matrices Base Corrección	0.0075
6	TR1 y TR2 con reducción	0.0018

Tabla 6.3: Tiempos Ensable

Posteriormente, en la tabla (6.4), se resumen los tiempos asociados a la construcción de cada modelo, comparando estos tiempos con los asociados al ensamble y análisis modal de la estructura completa (Estructura).

Modelo	Base [s]	Generación [s]	<i>speed-up</i>	Total [s]
Estructura	-	0.0962	1.00	0.0962
D	0.1640	0.0228	4.21	0.1868
DI	0.1640	0.0430	2.23	0.2070
DIR	0.1854	0.0432	2.23	0.2286

Tabla 6.4: Tiempos Modelos

Dentro del tiempo Base se consideran los tiempos de ensamble y cálculo de frecuencias de matrices componentes de los modelos reducidos, actividades que solo se deben realizar una vez en un proceso de re-análisis al utilizar las parametrizaciones presentadas. Mientras que en tiempo Generación, se considera el tiempo de acople de matrices componentes, el análisis modal de la interfaz y del modelo completo, actividades que se deben realizar para cada muestra en un proceso de re-análisis.

Se observa que en los tiempos de generación hay un factor de aumento de velocidad (*speed-up*) entre 2 y 4, pero en el tiempo total de construcción del punto nominal se utiliza más tiempo en los modelos reducidos. Dado que estas técnicas son utilizadas en simulaciones basadas en re-análisis, al calcular reiteradas muestras, el tiempo de generación es el que predomina, con lo cual los modelos reducidos se vuelven más efectivos que el ensamble elemento a elemento de la estructura completa.

6.4. Parametrización

Para analizar las parametrizaciones sobre el modelo $m-1$, se consideran la combinación de parámetros asociada a los puntos: $\theta^{k1} = [0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9]$ y $\theta^{k2} = [1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1]$. Los cuales corresponden a un punto más flexible (θ^{k1}) y uno más rígido (θ^{k2}). En las tablas (6.5) y (6.6) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (6.7) y (6.8) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica.

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	4.938	4.002E-04	2.665E-04	1.744E-07
2	15.233	3.946E-03	2.709E-03	3.610E-06
3	26.659	1.285E-02	9.276E-03	2.607E-05
4	39.619	3.042E-02	2.326E-02	1.376E-04
5	54.108	5.978E-02	4.828E-02	4.308E-04
6	69.546	9.817E-02	8.334E-02	1.091E-03
7	75.614	1.830E-02	1.304E-02	2.072E-02
8	80.754	2.130E-02	1.324E-02	2.222E-02
9	84.104	1.169E-01	1.058E-01	6.914E-03
10	84.262	1.992E-02	1.367E-02	2.855E-02

Tabla 6.5: Comparación errores θ^{k1}

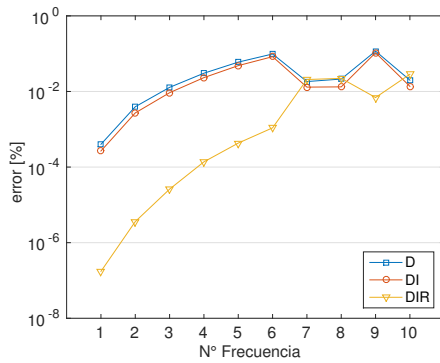


Figura 6.7: Errores Frecuencias θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.119	1.692E-04	2.868E-04	1.352E-07
2	15.875	1.871E-03	2.970E-03	3.022E-06
3	28.023	7.236E-03	1.048E-02	2.496E-05
4	42.065	2.046E-02	2.720E-02	1.564E-04
5	58.041	4.708E-02	5.843E-02	1.054E-03
6	75.329	8.802E-02	1.035E-01	3.331E-03
7	78.630	8.525E-03	1.349E-02	1.958E-02
8	84.067	6.705E-03	1.333E-02	2.075E-02
9	87.600	7.875E-03	1.374E-02	2.637E-02
10	89.920	5.534E-02	7.333E-02	2.646E-02

Tabla 6.6: Comparación errores θ^{k2}

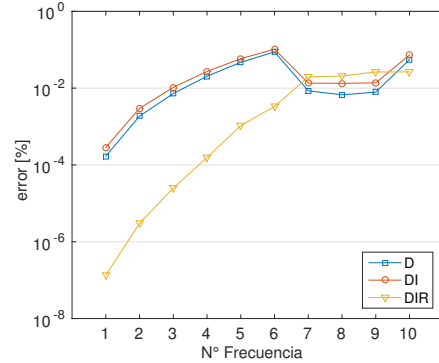


Figura 6.8: Errores Frecuencias θ^{k2}

Se observa que utilizando el modelo DIR se tienen mejores resultados en las 5 primeras frecuencias, las cuales son las más importantes para la respuesta en desplazamiento. Incluso al mantener la matriz de corrección T_{R1} y T_{R2} constantes, la disminución en el error es bastante considerable. Esto se debe a que las matrices asociadas al modelo DIR se ven actualizadas en una parte de la

parametrización por medio de la actualización de los modos de interfaz Υ_I . Por otro lado se observa que los resultados del modelo DI son mejores que los del modelo D para θ^{k1} que para θ^{k2} , esto se debe a que la estructura en θ^{k2} es más rígida con lo que se deben usar frecuencias de corte más altas para aproximar correctamente las frecuencias de la estructura.

La comparación de los modos de vibrar por medio del criterio MAC se presenta en la figura (6.9) para el punto θ^{k1} . Por otra parte, para el punto θ^{k2} se presentan las figuras (6.10).

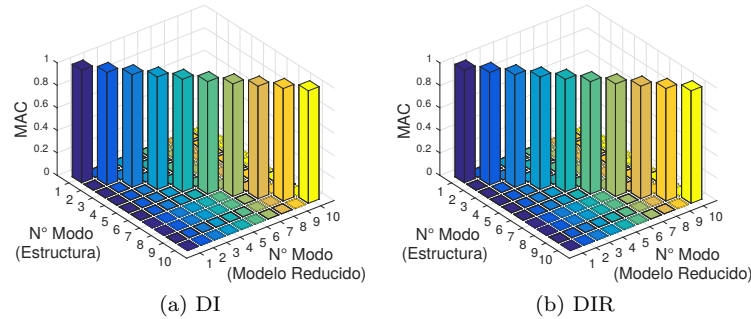


Figura 6.9: MAC parametrización modelo $m-1$ en θ^{k1}

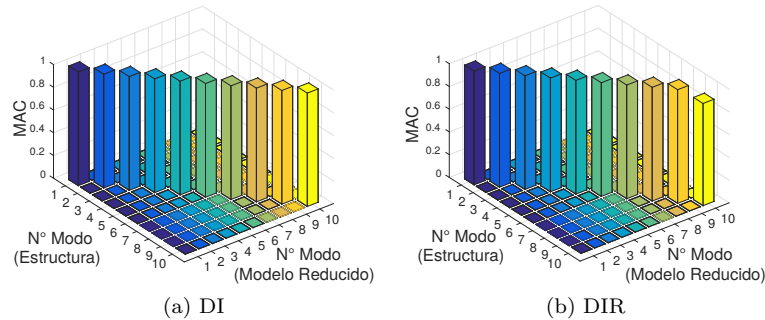


Figura 6.10: MAC parametrización modelo $m-1$ en θ^{k2}

Se observa en ambos casos que el uso de la matriz T_R nominal mantiene una buena relación entre los modos de la estructura y los modos del modelo reducido. El pequeño error en el modelo DIR para el punto θ^{k2} se debe a valores residuales que acumulan en error en las multiplicaciones de las matrices componentes.

En la tabla (6.7) se realiza una comparación de los tiempos asociados a construir las matrices del modelo completo (Estructura) y los modelos reducidos correspondientes en un punto θ^k , utilizando las parametrizaciones presentadas.

Modelo	Cargar [s]	Base [s]	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i> [s]
Estructura	0.0004	-	-	0.0962	0.0962	1.00
D	0.0035	0.1640	0.0009	0.0215	0.0224	4.29
DI	0.0055	0.1640	0.0223	0.0214	0.0437	2.20
DIR	0.0171	0.1854	0.0252	0.0178	0.0430	2.20

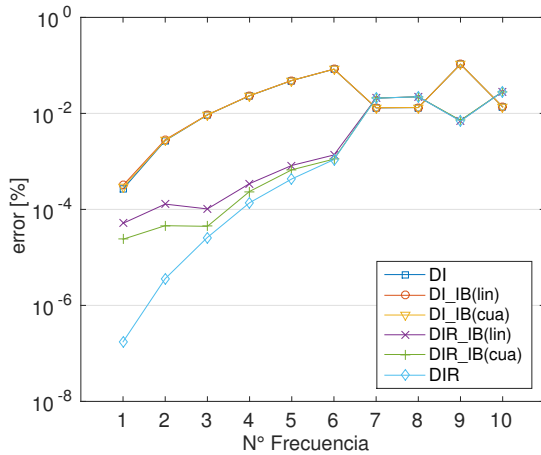
Tabla 6.7: Tiempos Parametrización

En Actualización se incluyen todos los cálculos asociados a pasar desde las matrices nominales a las correspondientes al punto de análisis θ . Se observa que para los modelos DI y DIR los tiempos de actualización son bastante mayores a los tiempos del modelo D, lo cual se debe a que para cada nuevo θ^k se debe recalcular el problema de valores y vectores propios de interfaz. Esto, justifica la utilización de la interpolación que disminuye los tiempos asociados al análisis modal de la interfaz. Los modelos reducidos tienen un factor de aumento de velocidad de cálculo por punto (*speed-up*) de entre 2 y 4.

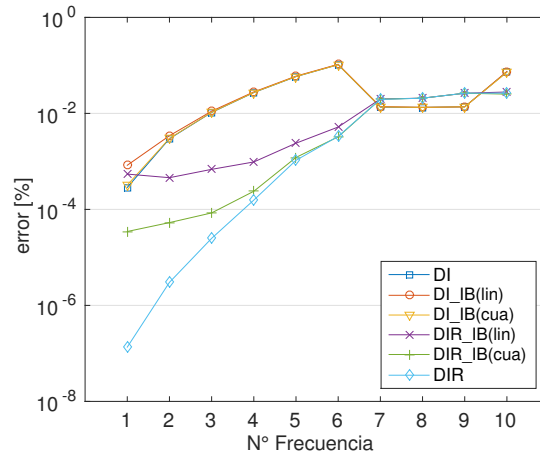
6.5. Interpolación de Interfaz

Dado el alto costo computacional en la interfaz, se analiza el efecto de la interpolación en la parametrización. Para esto, se realiza la comparación de frecuencias y modos en los mismos puntos que la parametrización para el modelo $m-1$. Se utilizan como puntos de soporte 36 puntos distribuidos en forma uniforme en θ entre 0.8 y 1.2 para la interpolación lineal. Para la interpolación cuadrática, se utilizan 72 puntos, los cuales corresponden a la reflexión puntual de los 36 puntos de la interpolación lineal, como se explica en el capítulo (4). En las tablas (6.8) y (6.9) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (6.7) y (6.8) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica. El texto ‘_IB’ agregado al nombre del modelo, significa que se han utilizado la interpolación de borde para el modelo correspondiente. Por otro lado ‘(lin)’ o ‘(cua)’ esta asociado al uso de la interpolación lineal o cuadrática respectivamente.

N	Est. [rad/s]	DLIB	DIR_IB	DLIB	DIR_IB
		(36lin) [%]	(36lin) [%]	(72cua) [%]	(72cua) [%]
1	4.938	3.17E-04	5.13E-05	2.90E-04	2.39E-05
2	15.233	2.83E-03	1.28E-04	2.75E-03	4.58E-05
3	26.659	9.35E-03	1.02E-04	9.29E-03	4.43E-05
4	39.619	2.34E-02	3.44E-04	2.33E-02	2.36E-04
5	54.108	4.86E-02	8.23E-04	4.84E-02	6.67E-04
6	69.546	8.36E-02	1.36E-03	8.34E-02	1.11E-03
7	75.614	1.31E-02	2.07E-02	1.31E-02	2.08E-02
8	80.754	1.32E-02	2.22E-02	1.32E-02	2.22E-02
9	84.104	1.05E-01	7.02E-03	1.06E-01	7.20E-03
10	84.262	1.36E-02	2.85E-02	1.36E-02	2.85E-02

Tabla 6.8: Comparación errores θ^{k1} Figura 6.11: Errores Frecuencias θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	DLIB	DIR_IB	DLIB	DIR_IB
		(36lin) [%]	(36lin) [%]	(72cua) [%]	(72cua) [%]
1	5.119	8.30E-04	5.44E-04	3.21E-04	3.46E-05
2	15.875	3.42E-03	4.57E-04	3.02E-03	5.31E-05
3	28.023	1.11E-02	6.83E-04	1.05E-02	8.45E-05
4	42.065	2.80E-02	9.73E-04	2.72E-02	2.38E-04
5	58.041	5.97E-02	2.39E-03	5.85E-02	1.21E-03
6	75.329	1.05E-01	5.20E-03	1.03E-01	3.25E-03
7	78.630	1.38E-02	1.99E-02	1.36E-02	1.97E-02
8	84.067	1.33E-02	2.07E-02	1.33E-02	2.07E-02
9	87.600	1.37E-02	2.63E-02	1.37E-02	2.63E-02
10	89.920	7.47E-02	2.79E-02	7.18E-02	2.52E-02

Tabla 6.9: Comparación errores θ^{k2} Figura 6.12: Errores Frecuencias θ^{k2}

En los gráficos, se incluye los errores para los modelos DI y DIR, los cuales sirven de referencia para analizar el efecto de la interpolación. Se observa que los modelos DI_IB se mantienen cercanos al modelo DI, siendo levemente mejor el con interpolación cuadrática. Por otro lado, los modelos DIR_IB se encuentran entre los errores asociados al modelo DI y DIR, mostrando ahora más claramente una mejor aproximación para la interpolación con puntos de soporte cuadráticos.

En la figura (6.13) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k1} por medio del criterio MAC. Adicionalmente, en las figuras (6.14) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k2} .

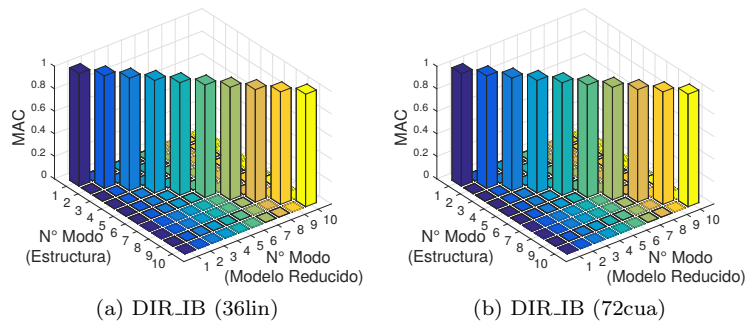


Figura 6.13: MAC interpolación modelo $m-1$ en θ^{k1}

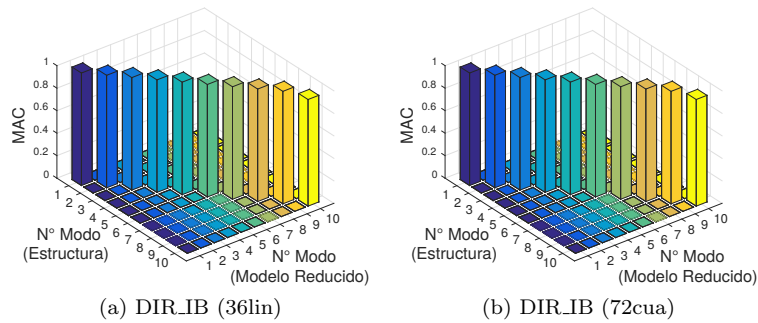


Figura 6.14: MAC interpolación modelo $m-1$ en θ^{k2}

En todos los casos los resultados son muy buenos. Como se mencionó anteriormente, esto indica que se podría haber realizado una reducción aun mayor tanto a nivel de subestructura como de interfaz.

En la tabla (6.10) se presentan los tiempos requeridos para construir los puntos de soporte, junto al tiempo necesario para cargar la base cuando se quiera utilizar.

Modelo	Nominal [s]	Base [s]	Cargar [s]	Total [s]
DI_IB (36 lin)	0.2070	0.8028	0.0662	1.0760
DI_IB (72 cua)	0.2070	1.6056	0.1159	1.9285
DIR_IB (36 lin)	0.2292	0.8028	0.0762	1.1082
DIR_IB (72 cua)	0.2286	1.6056	0.1361	1.9703

Tabla 6.10: Tiempos construcción Base

Por otra parte en la tabla (6.11) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices del modelo reducido utilizando las interpolaciones lineal y cuadrática respectivamente para un punto θ^k :

Modelo	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i> [s]
Estructura	-	0.0962	0.0962	1.00
DI_IB (36 lin)	0.0068	0.0238	0.0306	3.14
DI_IB (72 cua)	0.0080	0.0226	0.0306	3.14
DIR_IB (36 lin)	0.0083	0.0193	0.0276	3.48
DIR_IB (72 cua)	0.0099	0.0211	0.0310	3.10

Tabla 6.11: Tiempos Ensamble

Al utilizar las interpolación el factor de velocidad de cálculo por muestras (*speed-up*) aumenta desde 2 a más de 3, lo cual se debe a la reducción de tiempo en interpolar el problema de valores y vectores propios de interfaz.

6.6. Resultados Confiabilidad

En esta sección se presentan los resultados del análisis de confiabilidad utilizando el método *Subset*. Para revisar la influencia de la variabilidad de las componentes estructurales, se realiza un análisis suponiendo que los módulos de elasticidad están fijos en 0.8, 1 y 1.2 del valor nominal en cada caso. En la figura (6.15) se presenta la curva de probabilidad de falla en función del valor umbral para un promedio de 5 semillas.

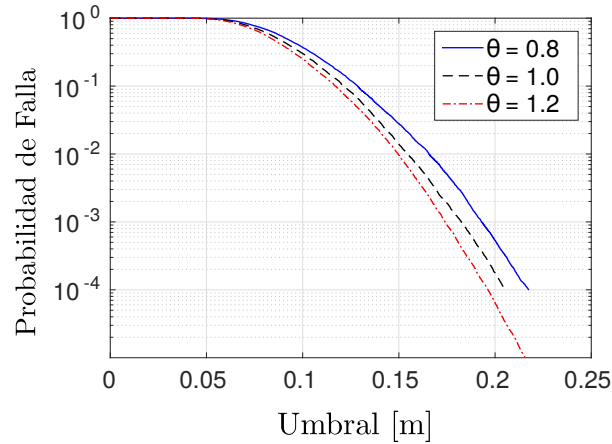


Figura 6.15: P_{falla} vs Nivel umbral

Las correspondientes probabilidades de falla se presentan en la tabla (6.12).

θ	P_{falla}
0.8	5.438E-04
1.0	1.854E-04
1.2	6.458E-05

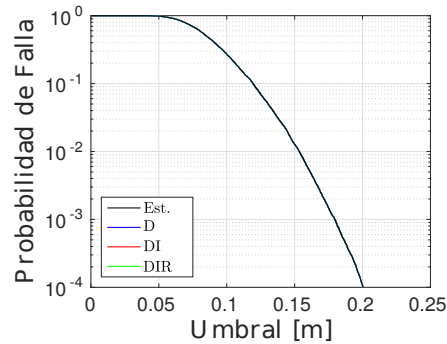
Tabla 6.12: Probabilidades de Falla θ fijo

Para $\theta = 0.8 \times 1$ se obtiene una probabilidad más grande debido a que se tiene una estructura más flexible, con lo cual tenderían a incrementarse los desplazamientos de techo, lo cual corrobora una probabilidad de falla más alta. Por otro lado, para $\theta = 1.2 \times 1$ se tiene una estructura más rígida, con lo cual tenderían a reducirse los desplazamientos de techo, lo cual corrobora una probabilidad de falla más pequeña.

Se observa que con las variaciones de $\pm 20\%$ en los parámetros no se generan grandes diferencias en las curvas de probabilidad de falla. Para obtener mayores detalles de esta influencia, se deberían realizar análisis de sensibilidad, lo cual se abordará en trabajos futuros.

Utilizando la misma línea, aplicando confiabilidad con los parámetros del modelo fijos en algún punto, en la figura (6.16) se presentan las curvas de probabilidad de falla utilizando los distintos modelos reducidos para una combinación de los parámetros $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$, en conjunto a la respuesta de la estructura completa. Adicionalmente en la tabla (6.13) se presentan las correspondientes probabilidades de falla.

Modelo	P_{falla}	error [%]
Est.	1.208E-04	-
D	1.201E-04	0.60
DI	1.201E-04	0.60
DIR	1.208E-04	0.00

Tabla 6.13: Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$ Figura 6.16: P_{falla} vs Nivel umbral

Para revisar los efectos de la interpolación y corrección se presentan en la figura (6.17) las curvas de probabilidad analizando solo los efectos de la interpolación y en la figura (6.18) las curvas de probabilidad de falla analizando los efectos de la interpolación y corrección. En las tablas (6.14) y (6.15) se presentan las correspondientes tablas con las probabilidades de falla

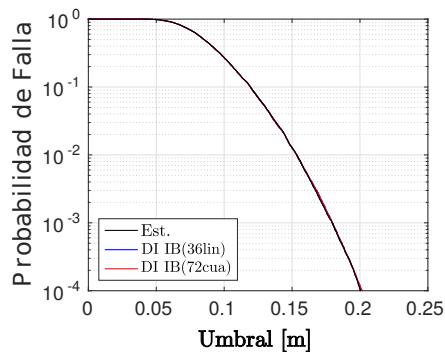


Figura 6.17: Probabilidad de Falla DI_IB

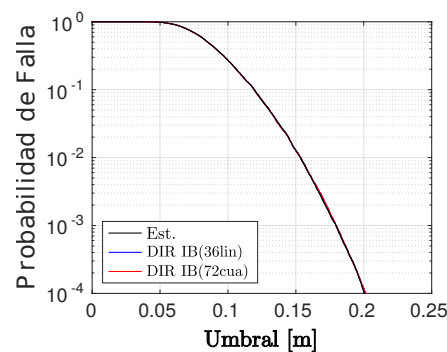


Figura 6.18: Probabilidad de Falla DIR_IB

Modelo	P_{falla}	error [%]
DI_IB (36 lin)	1.201E-04	0.56
DI_IB (72 cua)	1.208E-04	0.00

Modelo	P_{falla}	error [%]
DIR_IB (36 lin)	1.208E-04	0.00
DIR_IB (72 cua)	1.208E-04	0.00

Tabla 6.14: Probabilidades de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$ Tabla 6.15: Probabilidades de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$

Se observa que los errores en las probabilidades de falla son bastante pequeños, lo cual indica que se pueden obtener modelos reducidos aun más pequeños.

Una vez analizados los resultados para los parámetros del modelo fijos, se analiza el caso cuando están modelados por un campo aleatorio con $\sigma = 0.1$, el cual fue presentado anteriormente. Se realiza un análisis utilizando las distintas combinaciones del parametro β , para visualizar la influencia de este parámetro en la confiabilidad. En la figura (6.19) se presentan las curvas de probabilidad en función del valor umbral para $\beta = 0.01, 1$ y ∞ , considerando un promedio de 5 semillas.

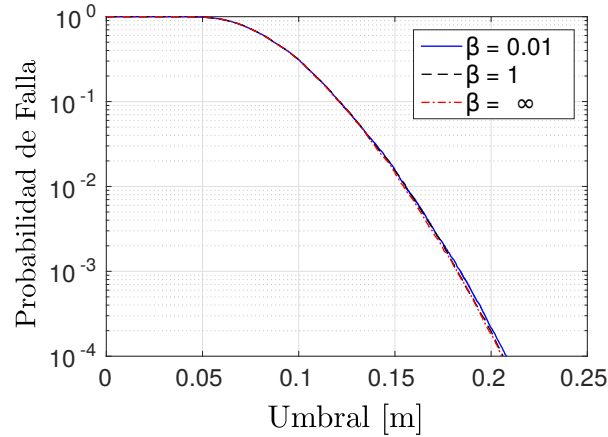


Figura 6.19: P_{falla} vs Nivel umbral

Las correspondientes probabilidades de falla se presentan en la tabla (6.16).

β	P_{falla}
0.01	2.2100E-04
1.00	1.922E-04
Inf	1.808E-04

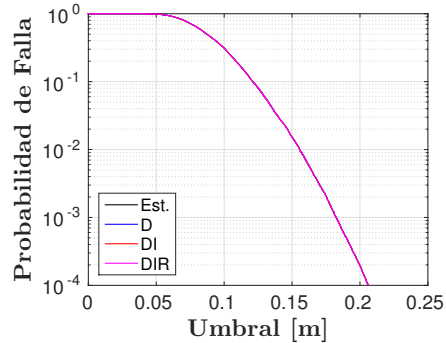
Tabla 6.16: Probabilidad de Falla distintos factores β

Al utilizar un β grande la probabilidad de falla tiende a ser más pequeña, lo puede ser causado por una compensación de las respuestas de las distintas muestras, que para este caso tendrían un comportamiento más bien independiente.

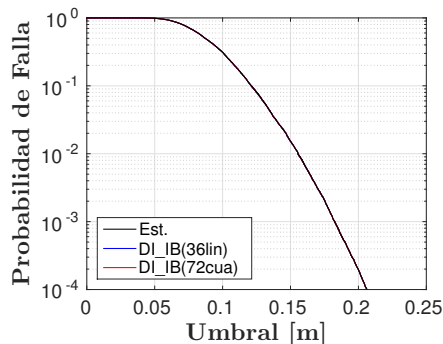
Se observa que la influencia del factor β considerando una variabilidad del 10% es bastante baja, no pudiendo diferenciar cada una de las curvas de probabilidad en la escala completa.

Considerando la confiabilidad con la modelación de los parámetros estructurales utilizando el campo aleatorio, en la figura (6.20) se comparan las curvas de probabilidad en función del nivel umbral considerando $\beta = 1$ (un valor intermedio). En la tabla (6.17) se presentan los correspondientes valores de probabilidad de falla.

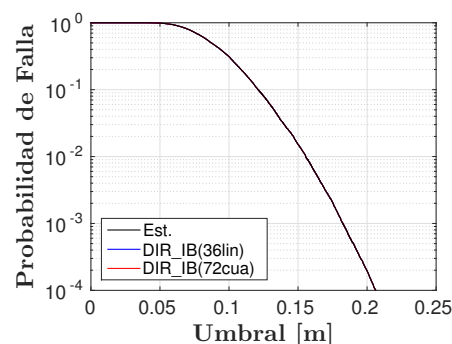
Modelo	P_{falla}	error [%]
Est.	1.922E-04	-
D	1.924E-04	0.10
DI	1.922E-04	0.00
DIR	1.922E-04	0.00

Tabla 6.17: Probabilidades de Falla $\beta = 1$ Figura 6.20: P_{falla} vs Nivel umbral

Para revisar los efectos de la interpolación y corrección se presentan en las figura(6.21) las curvas de probabilidad analizando solo los efectos de la interpolación y en la figura (6.22) las curvas de probabilidad de falla analizando los efectos de la interpolación y corrección. En las tablas (6.18) y (6.19) se presentan las correspondientes tablas con las probabilidades de falla

Figura 6.21: P_{falla} vs Nivel umbral DI_IB

Modelo	P_{falla}	error [%]
DI_IB (36 lin)	1.922E-04	0.00
DI_IB (72 cua)	1.922E-04	0.00

Tabla 6.18: Probabilidades de Falla $\beta = 1$ Figura 6.22: P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB

Modelo	P_{falla}	error [%]
DIR_IB (36 lin)	1.922E-04	0.00
DIR_IB (72 cua)	1.922E-04	0.00
DIR_aIB (72 cua)	1.922E-04	0.00

Tabla 6.19: Probabilidades de Falla $\beta = 1$

Se observa que los errores son incluso menores que cuando se utilizaban los parámetros del modelo fijos, esto se puede explicar por el efecto de compensación que ocurre en las respuestas para las distintas muestras.

A modo de resumen de los tiempos de ejecución de los procesos de confiabilidad utilizando los modelos reducidos, en la tabla (6.20) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices correspondientes a cada modelo reducido y al proceso de simulación *Subset*.

Modelo	Base [s]	Parametrización [s]	Confiabilidad [s]	Total [s]	<i>speed-up</i> [s]
Estructura	0.0004	0.0962	2047.8*	2047.8*	1.00
D	0.1675	0.0224	602.7	602.9	3.39
DI	0.1695	0.0437	1013.0	1013.2	2.02
DIR	0.1925	0.0430	1272.6	1272.8	1.60
DLIB (36 lin)	1.0760	0.0306	723.5	724.6	2.82
DLIB (72 cua)	1.9285	0.0306	725.6	727.5	2.81
DIR_IB (36 lin)	1.1082	0.0276	697.8	698.9	2.93
DIR_IB (72 cua)	1.9703	0.0310	733.4	735.3	2.78
DIR_aIB (36 lin)	6.932	0.0276	714.8	721.7	2.83

Tabla 6.20: Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)

En cada proceso de *Subset* se realizaron 4 etapas, lo que equivale a 3700 re-análisis por semilla, considerando actualización, ensamblaje y respuesta. Se observa que los factores de aumento de velocidad (*speed-up*) son similares a los factores de tiempo de parametrización.

Para el caso del modelo DIR_aIB, se utilizan los puntos de soporte adaptativos presentados en el capítulo (4). En este caso, el tiempo utilizando puntos de soporte adaptativos prácticamente el mismo que utilizando puntos de soporte fijos, lo cual se debe a que el sistema estructural es pequeño y predomina el tiempo asociado al proceso de simulación.

En este caso, predomina el modelo D, que corresponde a la reducción basada en modos dominantes. Utilizando una mayor reducción de interfaz y una menor cantidad de puntos de soporte se pueden igualar los tiempos de simulación. El grado de reducción de interfaz y la cantidad de puntos de soporte a utilizar es materia de investigación.

Ejemplo de Aplicación 2

Utilizando el sistema estructural descrito en el capítulo anterior, se revisa la eficacia del uso de la matriz de corrección estática \mathbf{T}_R constante evaluado en el valor nominal (θ^n). Esto se realiza por medio del análisis de propagación de incertidumbre. Se analiza el efecto de la incertidumbre en las propiedades de los materiales, modeladas por medio de un campo aleatorio, en las frecuencias del modelo y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema completo.

7.1. Respuesta en el dominio de la frecuencias

La respuesta en el dominio de la frecuencia puede ser caracterizada por la función de transferencia $H_{pk}(\omega)$. Esta función representa la respuesta en el grado de libertad p del sistema original de elementos finitos debido a una fuerza unitaria armónica de frecuencia ω aplicada en el grado de libertad k . Asumiendo que los modos están normalizados por la matriz de masa y que se utiliza amortiguamiento viscoso clásico la función de transferencia queda dada por

$$H_{pk} = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_{pj}\varphi_{kj}}{(\omega_j^2 - \omega^2 + i2\xi_j\omega_j\omega)} \quad (7.1)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, N es el número de modos a utilizar en la respuesta, ω_j , $j = 1, \dots, N$ son las frecuencias obtenidas desde el modelo reducido, ξ_j , $j = 1, \dots, N$ son las razones de amortiguamiento para cada modo. Por otro lado, p y k son las componentes del modo φ_j del modelo de elementos finitos completo. Es importante mencionar que las aproximaciones de los modos del sistema completo pueden ser obtenidos al resolver el problema de valores propios reducido.

$$(\hat{\mathbf{K}}_{DIR} - \hat{w}_{DIRj}^2 \hat{\mathbf{M}}_{DIR}) \hat{\varphi}_{DIR} = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

donde $\hat{\mathbf{M}}$ y $\hat{\mathbf{K}}$ son las matrices de masa y rigidez reducidas. Posteriormente, aplicando la transformaciones de coordenadas presentadas en el capítulo (2) se obtiene la aproximación para los modos del sistema completo $\hat{\varphi}_{sDIR}$ como

$$\hat{\varphi}_{sDIR} = \mathbf{L}\mathbf{T}_{DIR}\hat{\varphi}_{DIR} \quad (7.3)$$

7.2. Comparación frecuencias

Se genera un número $N_m = 1000$ de muestras θ modeladas con el campo aleatorio de las subestructuras de columnas presentado en el capítulo (6). Tomando cada una de las muestras θ^j , $j = 1, \dots, N_m$ se generan los correspondientes modelos reducidos $DIR(\theta^j)$ y se realiza un histograma de las 5 primeras frecuencias, las cuales corresponden a las que tienen mayor influencia en la respuesta estructural. En la figura (7.1) se presentan los histogramas de frecuencias para las N_m muestras utilizando el modelo de elementos finitos completo (a) y el modelo con reducción de interfaz corregido (DIR) (b).

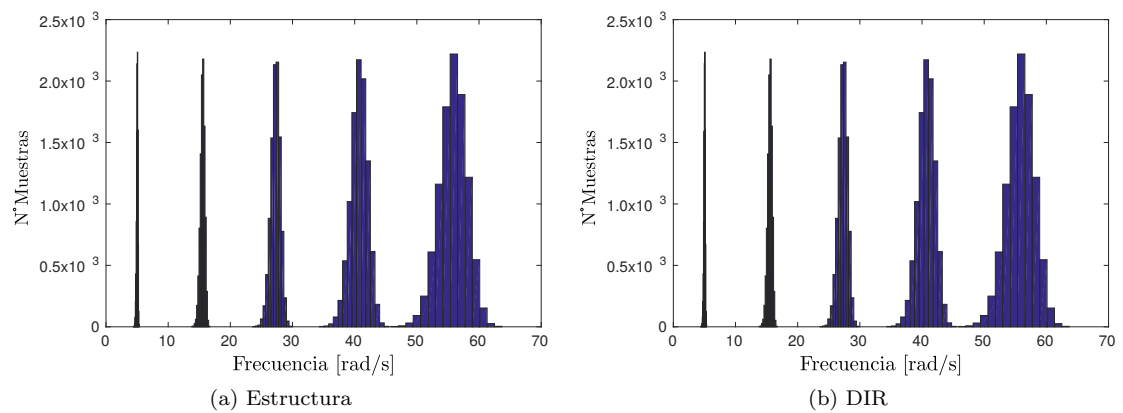


Figura 7.1: Histograma frecuencias modelo $m-1$

No hay diferencia apreciable desde los gráficos en la utilización de la estructura o del modelo reducido. De la variabilidad del histograma asociado a cada frecuencia, se observa como se ven influenciadas por la incertidumbre en los parámetros estructurales. El histograma asociado a la primera frecuencias ($5.34[rad/s]$) tiene una variabilidad muy baja, por lo tanto la influencia de la incertidumbre en los parámetros estructurales es muy baja. Por otro lado, el histograma asociado a la quinta frecuencia ($56.14[rad/s]$) tiene gran variabilidad, por lo tanto esta muy influenciado por la incertidumbre en los parámetros del modelo.

7.3. Resultados Respuesta

En esta sección se analizan los efectos de la variabilidad estructural en la respuesta en el dominio de la frecuencia de la sección (7.1). En la figura (7.2) se presenta la respuesta horizontal del piso 8 debido a una solicitación horizontal en el piso 1. En (a) se presenta la respuesta exacta con el modelo de la estructura y en (b) la respuesta utilizando el modelo reducido corregido *DIR*. La línea central corresponde al valor medio de las respuestas, mientras que el área sombreada representa el intervalo de confianza del 95 %.

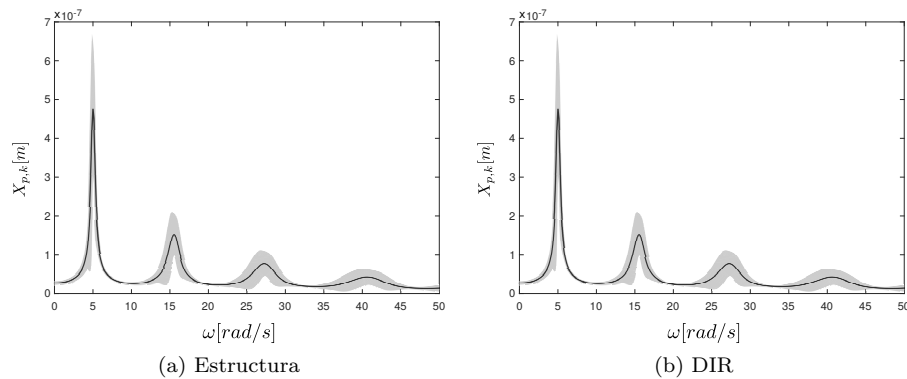


Figura 7.2: Respuesta dominio frecuencia piso 8

En la figura (7.3) se presenta la respuesta horizontal del piso 1 debido a una solicitación horizontal en el piso 1. En (a) se presenta la respuesta exacta con el modelo de la estructura y en (b) la respuesta utilizando el modelo reducido corregido *DIR*. La línea central corresponde al valor medio de las respuestas, mientras que el área sombreada representa el intervalo de confianza del 95 %.

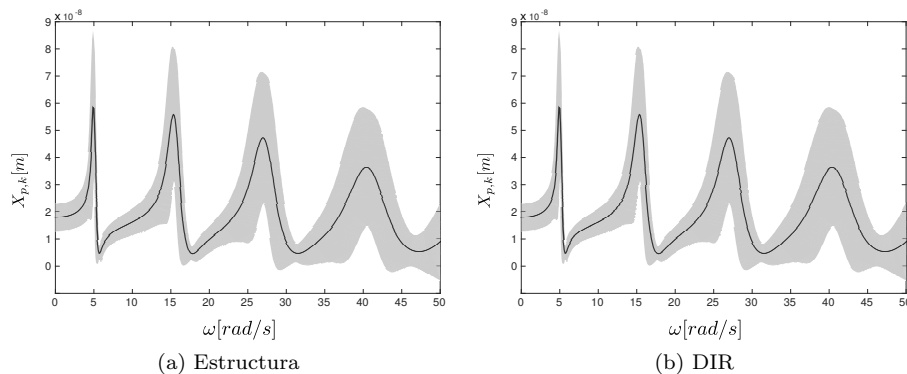


Figura 7.3: Respuesta dominio frecuencia piso 1

En ambos casos, no hay diferencia apreciable entre la respuesta generada con el modelo estructural completo o con el modelo reducido. De la misma forma que en el histograma de frecuencias, se

observa que las frecuencias mas altas son mucho más influenciadas por el efecto de la incertidumbre en los parámetros del modelo.

7.4. Comparación de Tiempos

En la tabla (7.1) se presentan los tiempos de calculo para la respuesta en el dominio de la frecuencia. Se comparan el tiempo de la estructura completa con los tiempos del modelo DIR y DIexR. Este ultimo corresponde al modelo DIR actualizando las matriz \mathbf{T}_R de la corrección.

Modelo	Base [s]	Generación [s]	Respuesta	Total [s]	<i>speed-up</i> [s]
Estructura	-	0.0962	0.13	226	1.00
DIR	0.1640	0.0430	0.13	173	1.30
DIexR	0.1640	0.0569	0.13	187	1.21

Tabla 7.1: Tiempos Respuesta dominio de la frecuencia

Se logra un aumento de velocidad de cálculo (*speed-up*) de 1.3 al utilizar la matriz de corrección \mathbf{T}_R constante. Por otro lado, al recalcar ésta matriz en el modelo DIexR se obtienen tiempos un poco mayores. No se presentan los gráficos correspondientes al modelo DIexR, para las comparaciones de histograma y respuesta, debido a que no hay diferencia apreciable con los gráficos correspondientes al modelo DIR.

En este caso el aumento de velocidad de cálculo es menor que en el ejemplo de confiabilidad debido a que el tiempo asociado a la respuesta en el dominio de la frecuencia es considerablemente mayor que los tiempos de generación de los modelos reducidos. El los modelos de mayor dimensión se invierte esta situación y los factores de velocidad de cálculo (*speed-up*) quedan dominados por las proporciones de tiempo entre el ensamble y generación de los modelos reducidos.

Para modelos de mayor dimensionalidad el esfuerzo computacional de actualizar la matriz \mathbf{T}_R se va escalando. Factores de aumento de velocidad mayores son presentados en los ejemplos de aplicación siguientes, con lo cual se va demostrando la eficacia utilizar la matriz \mathbf{T}_R constante.

Ejemplo de Aplicación 3

En el siguiente capítulo se describe la aplicación de las técnicas de reducción a un modelo de edificio. Se comienza con la descripción del modelo y la subestructuración que dará origen a los modelos reducidos. Seguido a esto, se formula el problema de confiabilidad en el cual se probará el desempeño de los modelos reducidos. Posteriormente se realiza un análisis completo de las distintas técnicas de reducción, incluyendo optimización e interpolación. Finalmente se presentan los resultados de las simulaciones de confiabilidad mediante el método *Subset*, entregando detalles de la reducción en costo computacional.

8.1. Descripción del Modelo

El modelo consiste en un edificio tridimensional de 16 pisos. El modelo de elementos finitos está compuesto por vigas, columnas, losas y muros. El edificio presenta un núcleo central de 2 muros tipo C. Los demás muros están ubicados en los costados de la estructura. La altura entre cada piso es de $3.24[m]$ a excepción del primer piso que tiene una altura de $3.42[m]$. En la figura (8.1) se presenta un esquema del modelo estructural, mientras que en la figura (8.2) se presenta una imagen de la estructura en la realidad.

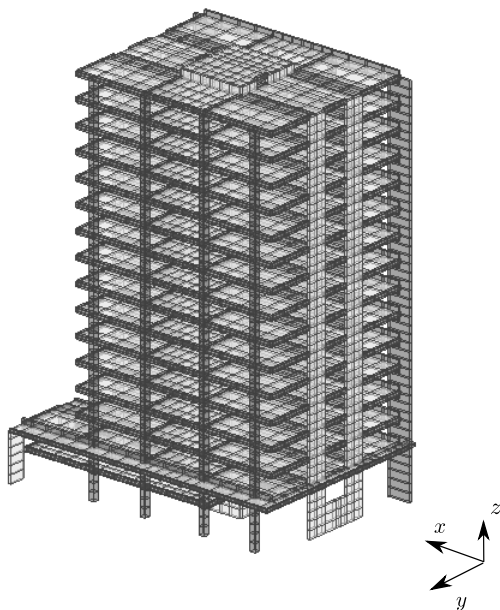


Figura 8.1: Modelo edificio Alcazar



Figura 8.2: Edificio Alcazar

En las figuras (8.3), (8.4) y (8.5) se presentan las plantas de los distintos pisos.

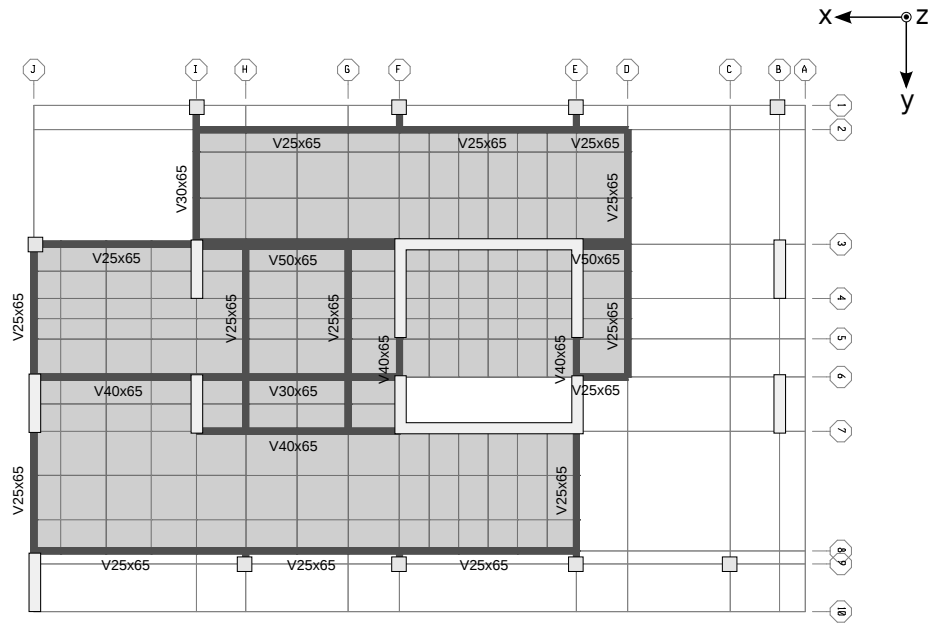


Figura 8.3: Planta piso 1

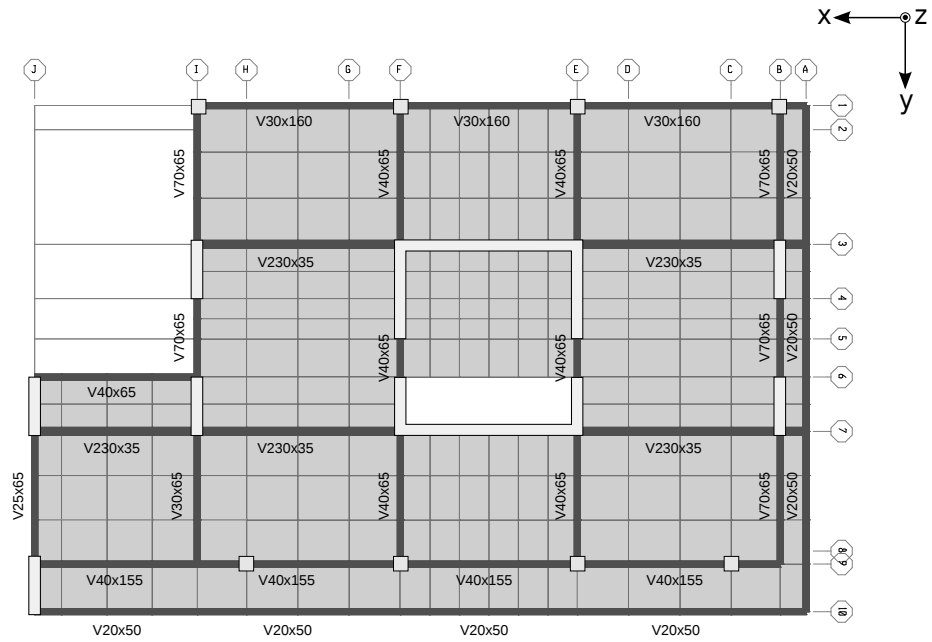


Figura 8.4: Planta piso 2

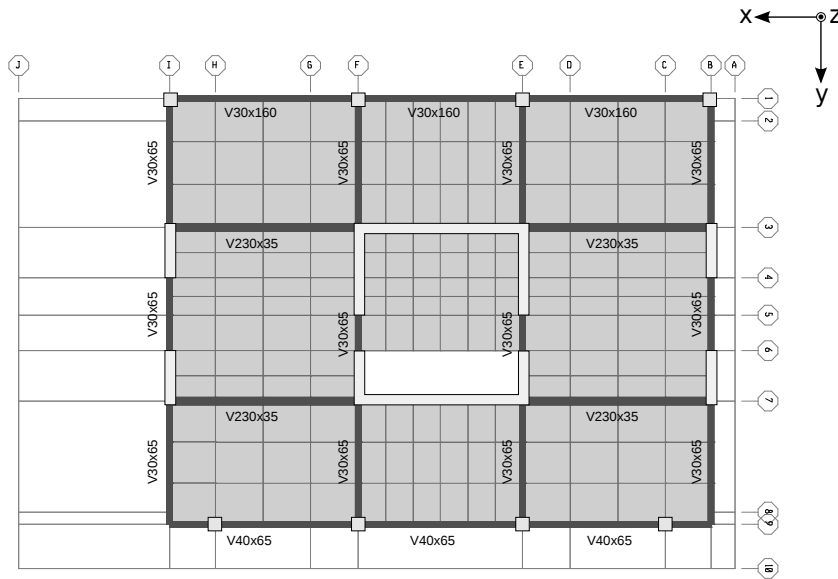


Figura 8.5: Planta piso 3 a 16

La posición correspondientes de los ejes en las vistas en planta se detallan en la tabla (8.1)

Eje	$x[m]$	Ejes	$y[m]$
A	0.00	1	0.00
B	1.28	2	1.20
C	3.73	3	6.90
D	8.83	4	9.60
E	11.38	5	11.60
F	20.18	6	13.50
G	22.73	7	16.20
H	27.83	8	22.15
I	30.28	9	22.80
J	38.36	10	25.17

Tabla 8.1: Coordenadas de los ejes en las vistas en planta

Los muros de la estructura tienen un espesor de $40[cm]$, a excepción de los muros de los dos primeros pisos ubicados en el eje J los cuales tienen un espesor de $25[cm]$. Las losas tienen un espesor de $23[cm]$. Todas las columnas ubicadas en el eje 10 son de sección cuadrada de $80 \times 80[cm]$. Las columnas ubicadas en las intersecciones $B - 1$ e $I - 1$ son de sección rectangular de $32 \times 40[cm]$, mientras que las otras dos columnas del eje 1 son de sección rectangular de $80 \times 60[cm]$. Por último,

la columna del primer piso ubicada en $J - 2$ es de sección rectangular de $25 \times 100[cm]$. El modelo completo de elementos finitos tiene un total de 29466 grados de libertad.

Para el hormigón se considera una densidad $\rho = 2500[kg/m^3]$ y un módulo de poisson $\nu = 0.3$. El material considerado para los elementos varia dependiendo el tipo de elemento y el piso al que corresponden, esta información se detalla en la tabla (8.2). Además, se considera una razón de amortiguamiento del 5%.

Elemento	Material	$E[N/m^2]$
Columnas	H35	2.5E10
Vigas	H30	2.3E10
Muros	H35	2.5E10
Losas pisos 1 y 2	H25	2.1E10
Losas pisos 3 a 16	H25	2.5E10

Tabla 8.2: Material elementos

La subestructuración se esquematiza en la figura (8.6), la cual se realiza en base a los pisos, separando en forma independiente el núcleo central de muros.

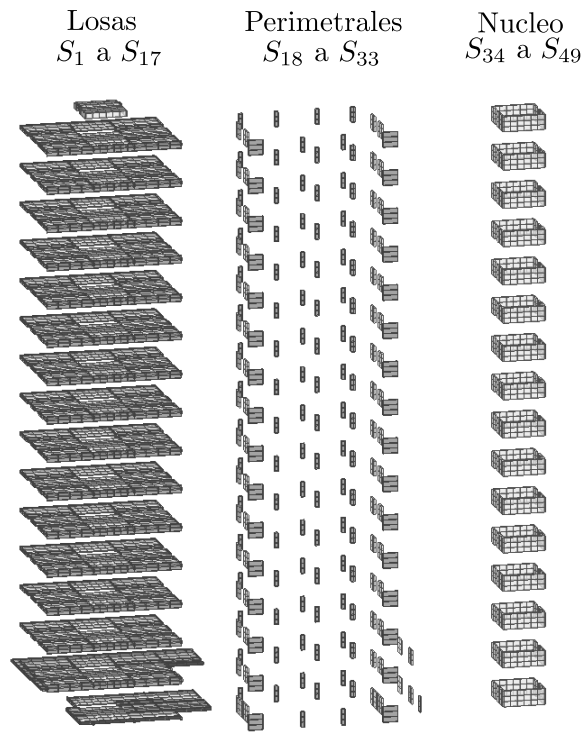


Figura 8.6: Esquema Subestructuras edificio alzarar

Las subestructuras S_1 a S_{17} corresponden a las losas de los pisos. Las subestructuras S_{18} a S_{33} corresponden a las columnas y muros perimetrales por piso. Por último, las subestructuras S_{34} a S_{49} corresponden a los elementos del núcleo por piso. En total se tienen 49 subestructuras. La configuración de reducción utilizada se presenta en la tabla (8.3)

	Modos internos	Modos de borde	
Caso	S1 - S49	B1 - B36	Total
$a-1$	147	200	347

Tabla 8.3: Casos Modelos Reducidos

Los grados de libertad de borde son 4494, distribuidos en 36 interfaces. Se consideran 3 modos internos por cada subestructura y una reducción al 4.45% de los grados de libertad de interfaz. En total, se presenta una reducción al 1.17%. En el apéndice (B) se detalla la definición de las interfaces.

8.2. Formulación del Problema

Para ilustrar el desempeño de la estructura, está es caracterizada mediante la probabilidad de ocurrencia de un evento de falla relacionado con el desplazamiento relativo del ultimo piso respecto al suelo. La correspondiente función de demanda normalizada esta dada por

$$d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \max_{t \in [0, T]} \left(\left| \frac{\delta(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})}{\delta^*} \right| \right) \quad (8.1)$$

donde δ es el desplazamiento en la parte superior de la estructura y $\delta^* = 0.17[m]$ el nivel de desplazamiento aceptado.

La duración de la sollicitación es tomada igual a $T = 30[s]$ con intervalos iguales a $\Delta t = 0.01[s]$. Así, la secuencia tiene $n_T = 3001$ variables aleatorias. Los correspondientes valores de magnitud de momento y distancia de ruptura son $M = 7.5$ y $d_r = 25[km]$.

La rigidez del núcleo central de muros, representada mediante el módulo de elasticidad, es considerada incierta. Específicamente, el modulo de elasticidad de los elementos de muros cada dos pisos es modelada mediante un campo aleatorio Log-normal homogéneo e isotrópico \mathbf{E} con valor medio $\mu_E \mathbf{1}$, desviación estándar σ_E . El valor medio y la desviación estándar del campo aleatorio Log-normal están seleccionados como $\mu_E = 2.0 \times 10^{10} [N/m^2]$ y $\sigma_E = 2.0 \times 10^9 [N/m^2]$, respectivamente. Se consideran 8 parámetros, donde cada uno esta asignado al modulo de Elasticidad del los grupos de muros del núcleo central. Los parámetros del modelo $\boldsymbol{\theta}$ quedan expresados por

$$\theta_i = E_i / \bar{E} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (8.2)$$

donde $\bar{E} = \mu_E$. En la figura (8.7) se presenta un esquema de las distancias utilizadas entre las componentes y sus correspondientes parámetros. El largo de correlación es utilizado como $l = 48m$ y a modo de ejemplo en la figura, el largo entre las subestructuras 2 y 3 tiene el valor $\Delta_{23} = 6[m]$.

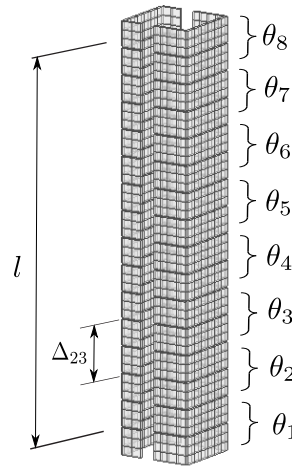


Figura 8.7: Esquema Campo Aleatorio

El efecto del parámetro β (relacionado con el grado de correlación del campo aleatorio) sobre la función de correlación R se ve reflejado en la figura (8.8), donde se presenta la función R_{1j} en función de Δ_{1j} , ambos referidos a la correlación entre el primer grupo de muros y los restantes j , $j = 1, \dots, 8$.

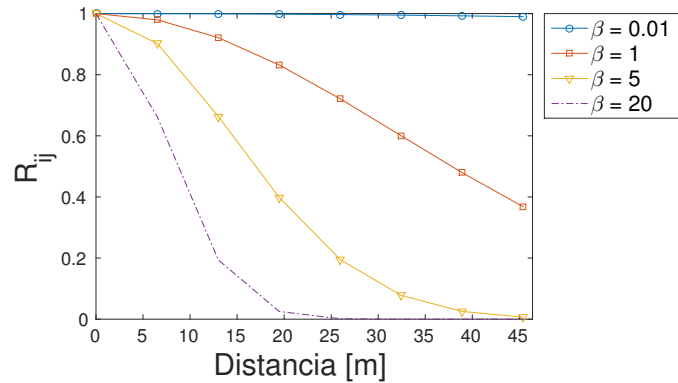


Figura 8.8: Correlación campo aleatorio

Se considera el campo con $\beta = 0.01$ fuertemente correlacionado, con $\beta = 1$ debilmente correlacionado y con $\beta \rightarrow \infty$ no correlacionado. El efecto del parametro β sobre la confiabilidad del

sistema sera analizada en las siguientes secciones.

8.3. Modelo Reducido Nominal

Para verificar la exactitud de los modelos reducidos, las frecuencias y modos de vibrar del sistema completo son comparadas con los correspondientes al modelo reducido $a-1$. Se generan el modelo basado en modos dominantes D, con reducción de interfaz DI y con la corrección para el caso con reducción de interfaz DIR. La comparación de frecuencias se presenta en la tabla (8.4) y en forma gráfica en la figura (8.9).

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.285	3.416E-03	3.416E-03	1.193E-09
2	6.135	2.753E-03	2.753E-03	8.193E-10
3	7.124	4.547E-03	4.547E-03	1.267E-09
4	19.021	7.931E-02	7.931E-02	1.862E-05
5	22.503	5.006E-02	5.006E-02	5.511E-06
6	27.106	7.189E-02	7.194E-02	7.188E-05
7	36.447	6.598E-01	6.673E-01	1.408E-02
8	38.550	5.857E-01	5.991E-01	1.173E-02
9	38.682	1.264E+00	1.282E+00	1.329E-02
10	39.208	8.651E-02	2.142E-01	1.389E-01
11	41.969	1.702E+00	1.703E+00	7.604E-02
12	42.443	2.612E+00	2.637E+00	1.298E-02
13	43.494	3.904E-01	4.109E-01	2.284E-02
14	43.609	1.806E+00	1.830E+00	2.052E-02
15	43.628	1.919E+00	1.931E+00	7.202E-02

Tabla 8.4: Comparación errores

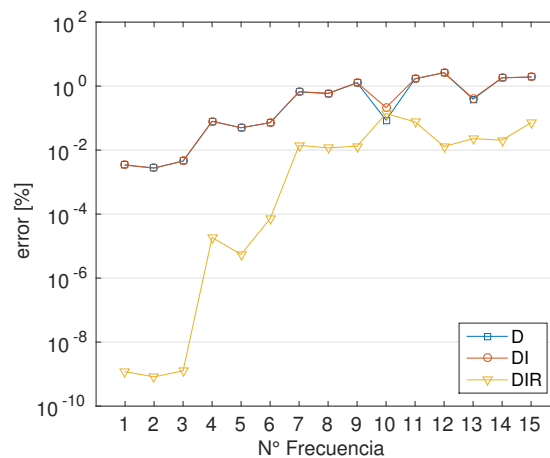


Figura 8.9: Errores Frecuencias

La comparación de los modos de vibrar se presentan en la figura (8.10), por medio del criterio MAC, el cual es presentado en el apéndice (A).

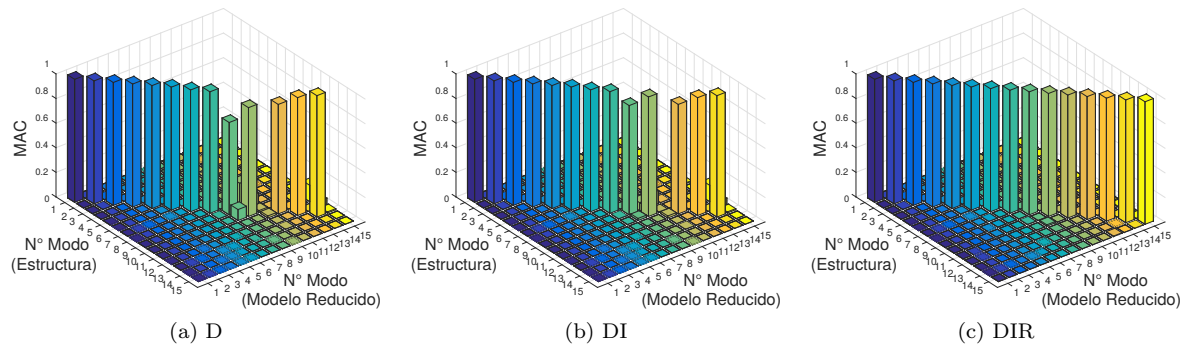


Figura 8.10: MAC modelo $a-1$ nominal

En la comparación de frecuencias, se observa que entre el modelo D y DI no hay mucha diferencia, mientras que al comparar con el modelo DIR hay una gran mejora, al incorporar los efectos de los modos residuales. Por otro lado al comparar los modos, el modelo DIR mejora considerablemente la aproximación de los modos, validando la corrección utilizada.

En la tabla (8.5) se presentan los tiempos asociados a las actividades necesarias para generar cada uno de los modelos reducidos, de esta forma se puede visualizar cuales de estas consumen mayor tiempo en la generación de los modelos reducidos.

	Actividad	Tiempo [s]
1	Ensamble Componentes	8.3103
2	Frecuencias Componentes	5.8921
3	Matrices Base Reducción	0.7890
4	Frecuencias Borde	5.2977
5	Matrices Base Corrección	1.2798
6	Matrices Optimización Reducida	11.4262
7	TR1 y TR2 con reducción	17.7873

Tabla 8.5: Tiempos Ensamble

Posteriormente, en la tabla (8.6), se resumen los tiempos asociados a la construcción de cada modelo, comparando estos tiempos con los asociados al ensamble y análisis modal de la estructura completa (Estructura).

Modelo	Base [s]	Generación [s]	Total [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	-	26.675	26.675	1.00
D	14.9914	1.2255	16.2169	21.7
DI	14.9914	6.2218	21.2133	4.28
DIR	45.4847	7.5521	53.0368	3.53

Tabla 8.6: Tiempos Modelos

Dentro del tiempo Base se consideran los tiempos de ensamble y cálculo de frecuencias de matrices componentes de los modelos reducidos, actividades que solo se deben realizar una vez en un proceso de re-análisis al utilizar las parametrizaciones presentadas. Mientras que en tiempo Generación, se considera el tiempo de acople de matrices componentes, el análisis modal de la interfaz y del modelo completo, actividades que se deben realizar para cada muestra en un proceso de re-análisis.

Se observa que en los tiempos de generación hay un factor de aumento de velocidad (*speed-up*) entre 4 y 22, pero en el tiempo total de construcción del punto nominal se utiliza más tiempo en los modelos reducidos. Dado que estas técnicas son utilizadas en simulaciones de re-análisis, al calcular reiteradas muestras, el tiempo de generación es el que predomina, con lo cual los modelos reducidos se vuelven más efectivos que el ensamble elemento a elemento de la estructura completa.

8.4. Parametrización

Para analizar las parametrizaciones sobre el modelo $a-1$, se considera la combinación de parámetros asociada a los puntos: $\theta^{k1} = [0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9]$ y $\theta^{k2} = [1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1]$. Los cuales corresponden a un punto más flexible (θ^{k1}) y uno más rígido (θ^{k2}). En las tablas (8.7) y (8.8) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (8.11) y (8.12) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica.

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.150	3.254E-03	3.250E-03	8.228E-06
2	5.947	2.577E-03	2.574E-03	1.511E-05
3	6.960	4.368E-03	4.365E-03	1.246E-05
4	18.465	7.431E-02	7.426E-02	1.704E-04
5	21.908	4.719E-02	4.718E-02	2.470E-04
6	26.047	6.620E-02	6.614E-02	1.083E-03
7	36.136	6.539E-01	6.614E-01	1.888E-01
8	37.593	9.514E-01	9.518E-01	1.621E-02
9	38.433	5.770E-01	5.900E-01	8.388E-02
10	39.203	5.565E-02	2.036E-01	1.191E+00
11	41.453	4.235E-01	4.240E-01	2.919E-02
12	41.685	4.161E+00	4.185E+00	2.061E-01
13	43.339	4.859E-01	5.053E-01	7.404E-02
14	43.472	1.725E+00	1.746E+00	1.172E-01
15	43.496	1.793E+00	1.805E+00	2.445E-01

Tabla 8.7: Comparación errores θ^{k1}

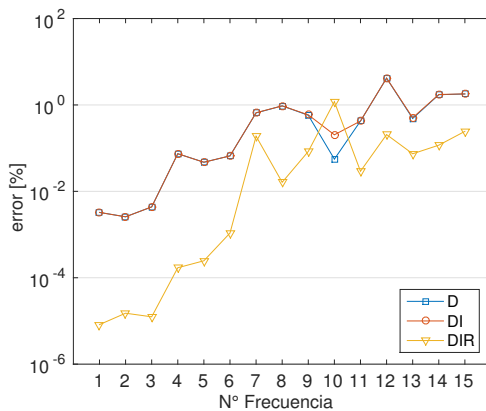


Figura 8.11: Errores Frecuencias θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.413	3.573E-03	3.577E-03	7.145E-06
2	6.312	2.930E-03	2.934E-03	1.389E-05
3	7.283	4.718E-03	4.721E-03	1.203E-05
4	19.549	8.425E-02	8.429E-02	2.796E-04
5	23.059	5.279E-02	5.280E-02	2.164E-04
6	28.126	7.787E-02	7.805E-02	5.039E-03
7	36.697	6.647E-01	6.723E-01	2.501E+00
8	38.655	5.905E-01	6.048E-01	3.856E-01
9	39.204	6.494E-02	2.067E-01	6.124E-01
10	39.617	1.849E+00	1.851E+00	8.956E-02
11	42.351	2.790E+00	2.807E+00	3.161E-01
12	43.114	1.508E+00	1.530E+00	9.909E-01
13	43.635	3.971E-01	4.086E-01	2.381E-01
14	43.710	1.917E+00	1.945E+00	2.761E-01
15	43.996	1.382E+00	1.447E+00	1.215E+00

Tabla 8.8: Comparación errores θ^{k2}

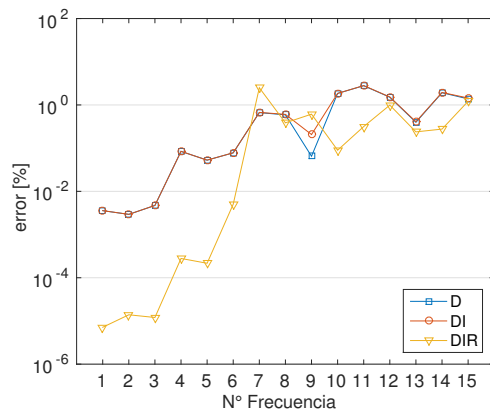


Figura 8.12: Errores Frecuencias θ^{k2}

Se observa que utilizando el modelo DIR se tienen mejores resultados en las primeras frecuencias, las cuales son las más importantes para la respuesta en desplazamiento. Incluso al mantener la matriz de corrección T_{R1} y T_{R2} constantes, la disminución en el error es bastante considerable. Esto se debe a que las matrices asociadas al modelo DIR se ven actualizadas en una parte de la parametrización por medio de la actualización de los modos de interfaz Υ_I .

La comparación de los modos de vibrar por medio del criterio MAC se presenta en la figura (8.13) para el punto θ^{k1} . Por otra parte, para el punto θ^{k2} se presentan las figuras (8.14).

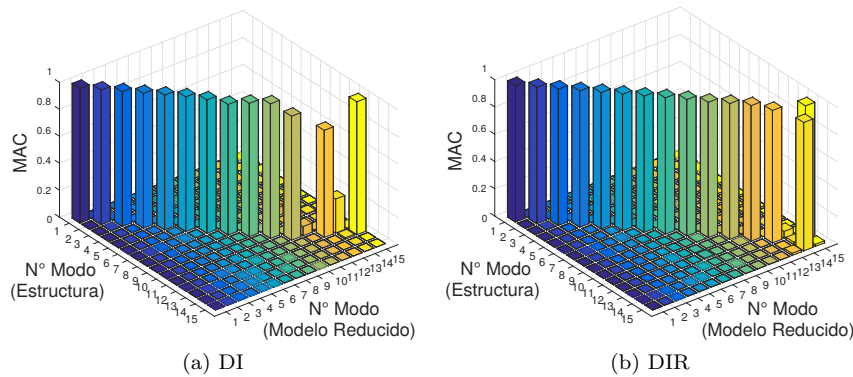


Figura 8.13: MAC parametrización modelo $a-1$ en θ^{k1}

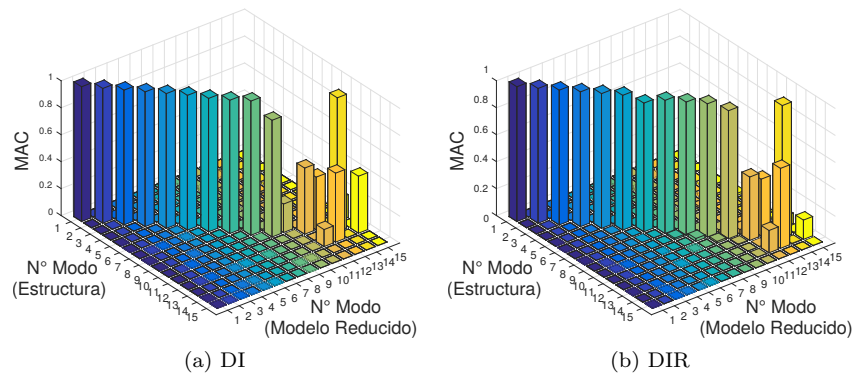


Figura 8.14: MAC parametrización modelo $a-1$ en θ^{k2}

Se observa en ambos casos que el uso de la matriz T_R nominal mejora la aproximación de los modos.

En la tabla (8.9) se realiza una comparación de los tiempos asociados a construir las matrices del modelo completo (Estructura) y los modelos reducidos correspondientes un punto θ^k , utilizando las parametrizaciones presentadas.

Modelo	Cargar [s]	Base [s]	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	0.0004	-	-	26.675	26.675	1.00
D	0.3202	14.991	0.0066	1.2104	1.217	21.9
DI	0.7022	14.991	5.4270	0.8927	6.3197	4.22
DIR	1.7107	45.484	6.6982	0.4576	7.1558	3.73

Tabla 8.9: Tiempos Parametrizacion

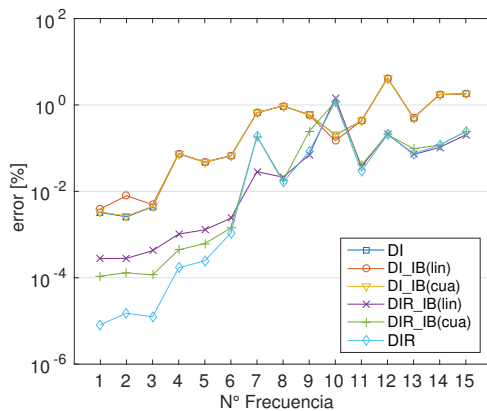
En Actualización se incluyen todos los cálculos asociados a pasar desde las matrices nominales a las correspondientes al punto de análisis θ . Se observa que para los modelos DI y DIR los tiempos de actualización son mayores a los tiempos del modelo D, lo cual se debe a que para cada nuevo θ^k se debe recalcular el problema de valores y vectores propios de interfaz. Esto, justifica la utilización de la interpolación que disminuye los tiempos asociados al análisis modal de la interfaz.

Los modelos reducidos tienen un factor de aumento de velocidad de cálculo por punto (*speed-up*) de entre 4 y 22, lo cual ya es mas considerable que para el problema del marco del capitulo (6).

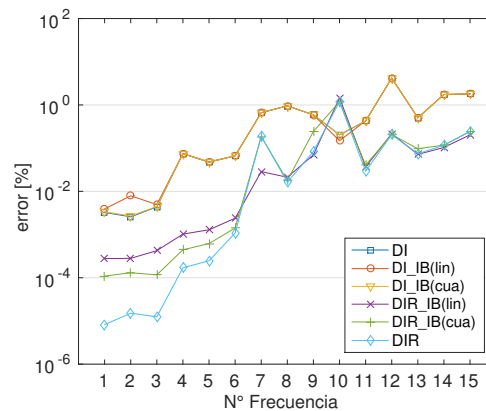
8.5. Interpolación de Interfaz

Dado el alto costo computacional en la interfaz, se analiza el efecto de la interpolación en la parametrización. Para esto, se realiza la comparación de frecuencias y modos en los mismos puntos que la parametrización para el modelo $a-1$. Se utilizan como puntos de soporte 50 puntos distribuidos en forma uniforme en θ entre 0.7 y 1.3 para la interpolación lineal. Para la interpolación cuadrática, se utilizan 100 puntos, los cuales corresponden a la reflexión puntual de los 50 puntos de la interpolación lineal, como se explica en el capítulo (4). En las tablas (8.10) y (8.11) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (8.11) y (8.12) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica.

N	Est. [rad/s]	(50lin)	(100cua)	(50lin)	(100cua)
		DI-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]	DIR-error [%]
1	5.150	3.91E-03	3.35E-03	6.75E-04	1.09E-04
2	5.947	7.90E-03	2.68E-03	5.34E-03	1.30E-04
3	6.960	4.93E-03	4.47E-03	5.80E-04	1.16E-04
4	18.465	7.49E-02	7.45E-02	8.90E-04	4.43E-04
5	21.908	4.81E-02	4.75E-02	1.24E-03	6.18E-04
6	26.047	6.67E-02	6.65E-02	1.65E-03	1.42E-03
7	36.136	6.62E-01	6.63E-01	1.82E-01	1.85E-01
8	37.593	9.52E-01	9.52E-01	1.80E-02	1.77E-02
9	38.433	5.88E-01	5.90E-01	2.43E-01	2.44E-01
10	39.203	1.48E-01	2.03E-01	1.20E+00	1.18E+00
11	41.453	4.28E-01	4.27E-01	4.26E-02	4.05E-02
12	41.685	4.18E+00	4.18E+00	2.05E-01	2.05E-01
13	43.339	5.04E-01	5.05E-01	9.63E-02	9.71E-02
14	43.472	1.74E+00	1.74E+00	1.16E-01	1.17E-01
15	43.496	1.80E+00	1.80E+00	2.42E-01	2.42E-01

Tabla 8.10: Comparación errores θ^{k1} Figura 8.15: Efecto interpolación θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	(50lin)	(100cua)	(50lin)	(100cua)
		DI-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]	DIR-error [%]
1	5.413	3.92E-03	3.68E-03	3.51E-04	1.19E-04
2	6.312	3.46E+00	3.06E-03	3.45E+00	1.44E-04
3	7.283	5.14E-03	4.82E-03	4.34E-04	1.12E-04
4	19.549	8.45E-02	8.45E-02	6.11E-04	5.47E-04
5	23.059	5.32E-02	5.31E-02	7.15E-04	5.41E-04
6	28.126	7.85E-02	7.84E-02	9.94E-03	5.32E-03
7	36.697	6.96E-01	6.92E-01	2.70E+00	2.46E+00
8	38.655	6.70E-01	6.04E-01	6.49E-01	3.76E-01
9	39.204	3.30E-01	2.08E-01	1.16E+00	5.99E-01
10	39.617	1.85E+00	1.85E+00	3.31E+00	8.96E-02
11	42.351	2.82E+00	2.81E+00	4.45E-01	3.15E-01
12	43.114	1.53E+00	1.53E+00	1.08E+00	9.91E-01
13	43.635	4.38E-01	4.25E-01	2.53E-01	2.38E-01
14	43.710	1.93E+00	1.93E+00	9.43E-01	2.68E-01
15	43.996	1.44E+00	1.44E+00	1.22E+00	1.21E+00

Tabla 8.11: Comparación errores θ^{k2} Figura 8.16: Efecto Optimización θ^{k2}

El texto 'IB' agregado al nombre del modelo, significa que se han utilizado la interpolación de borde para el modelo correspondiente. Por otro lado '(lin)' o '(cua)' esta asociado al uso de la interpolación lineal o cuadrática respectivamente.

En los gráficos, se incluye los errores para los modelos DI y DIR, los cuales sirven de referencia para analizar el efecto de la interpolación. Se observa que los modelos DI_IB se mantienen cercanos al modelo DI, siendo levemente mejor el con interpolación cuadrática. Por otro lado, los modelos DIR_IB se encuentran entre los errores asociados al modelo DI y DIR, mostrando ahora más claramente una mejor aproximación para la interpolación con puntos de soporte cuadráticos.

En la figura (8.17) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k1} por medio del criterio MAC. Adicionalmente, en las figuras (8.18) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k2} .

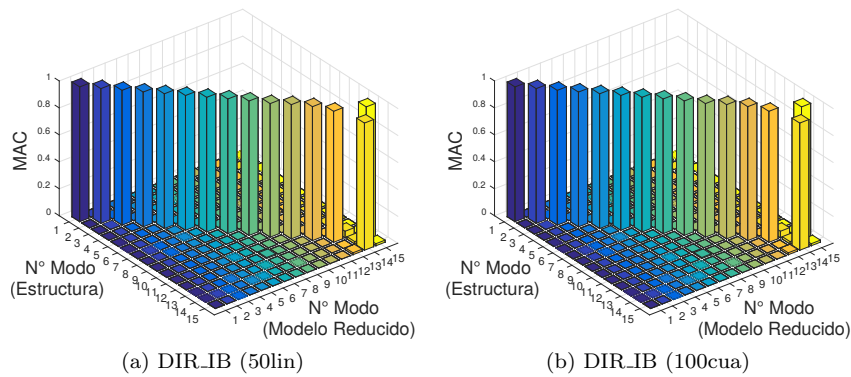


Figura 8.17: MAC interpolación modelo $a-1$ en θ^{k1}

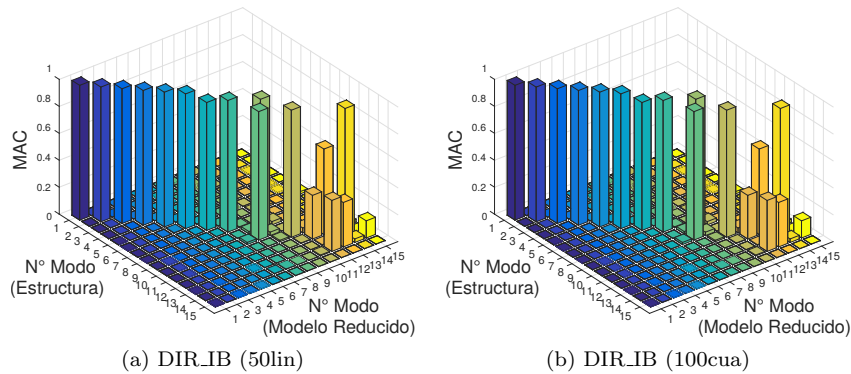


Figura 8.18: MAC interpolación modelo $a-1$ en θ^{k2}

Todos las aproximaciones de modos son bastante buenas, solo se tiene algún deterioro para las frecuencias más altas, las cuales tienen una menor importancia en la respuesta del sistema.

En la tabla (8.12) se presentan los tiempos requeridos para construir los puntos de soporte, junto al tiempo necesario para cargar la base cuando se quiera utilizar.

Modelo	Nominal [s]	Base [s]	Cargar [s]	Total [s]
DI_IB (50 lin)	21.21	311	38.33	370.54
DI_IB (100 cua)	21.21	622	85.00	728.21
DIR_IB (50 lin)	53.03	311	28.33	392.33
DIR_IB (100 cua)	53.03	622	75.66	750.69

Tabla 8.12: Tiempos construcción Base

Por otra parte en la tabla (8.13) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices del modelo reducido utilizando las interpolaciones lineal y cuadrática respectivamente para un punto θ^k :

Modelo	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	-	26.67	26.67	1.00
DI_IB (50 lin)	3.27	0.88	4.15	6.42
DI_IB (100 cua)	5.89	1.71	7.60	3.50
DIR_IB (50 lin)	4.08	0.52	4.60	5.79
DIR_IB (100 cua)	6.68	1.21	7.89	3.38

Tabla 8.13: Tiempos Ensamble

Al utilizar las interpolación el factor de velocidad de cálculo (*speed-up*) aumenta de 4 a 6 para la interpolación lineal, lo cual se debe a la reducción de tiempo en interpolar el problema de valores y vectores propios de interfaz.

8.6. Resultados Confiabilidad

En esta sección se presentan los resultados del análisis de confiabilidad utilizando el método *Subset*. Para revisar la influencia de la variabilidad de las componentes estructurales, se realiza un análisis suponiendo que los módulos de elasticidad están fijos en 0.8, 1 y 1.2 del valor nominal en cada caso. En la figura (8.19) se presenta la curva de probabilidad de falla en función del valor umbral.

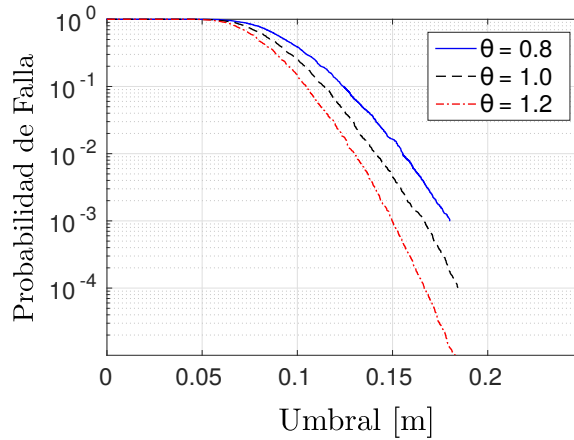


Figura 8.19: Aceleración Basal

Las correspondientes probabilidades de falla se presentan en la tabla (8.14).

θ	P_{falla}
0.8	2.640E-03
1.0	6.690E-04
1.2	6.390E-05

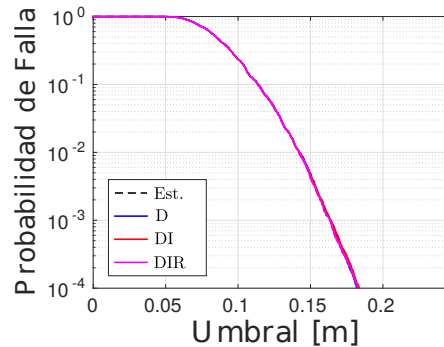
Tabla 8.14: Probabilidades de Falla θ fijo

Para $\theta = 0.8 \times 1$ se obtiene una probabilidad más grande debido a que se tiene una estructura más flexible, con lo cual tenderían a incrementarse los desplazamientos de techo, lo cual corrobora una probabilidad de falla más alta. Por otro lado, para $\theta = 1.2 \times 1$ se tiene una estructura más rígida, con lo cual tenderían a reducirse los desplazamientos de techo, lo cual corrobora una probabilidad de falla más pequeña.

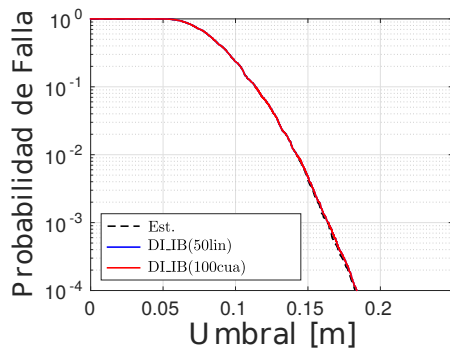
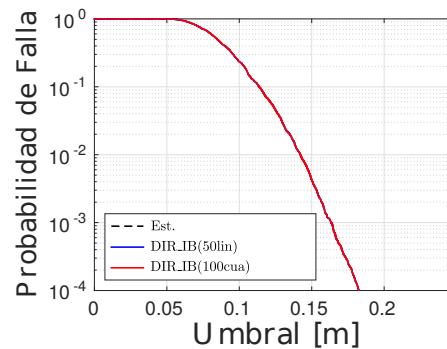
Se observa que con las variaciones de $\pm 20\%$ en los parámetros no se generan grandes diferencias en las curvas de probabilidad de falla. Para obtener mayores detalles de esta influencia, se deberían realizar análisis de sensibilidad, lo cual se abordará en trabajos futuros.

Utilizando la misma línea, aplicando confiabilidad con los parámetros del modelo fijos en algún punto, en la figura (8.20) se presentan las curvas de probabilidad de falla utilizando los distintos modelos reducidos para una combinación de los parámetros $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$, en conjunto a la respuesta completa. Adicionalmente en la tabla (8.15) se presentan las correspondientes probabilidades de falla.

Modelo	P_{falla}
Est.	1.922E-04
D	1.924E-04
DI	1.922E-04
DIR	1.922E-04

Tabla 8.15: Probabilidad de Falla $\theta = 1.1 \times \mathbf{1}$ Figura 8.20: P_{falla} vs Nivel umbral

Para revisar los efectos de la interpolación y corrección se presentan en la figura (8.21) las curvas de probabilidad analizando solo los efectos de la interpolación y en la figura (8.22) las curvas de probabilidad de falla analizando los efectos de la interpolación y corrección. En las tablas (8.16) y (8.17) se presentan las correspondientes tablas con las probabilidades de falla

Figura 8.21: P_{falla} vs Nivel umbralFigura 8.22: P_{falla} vs Nivel umbral

Modelo	P_{falla}	error [%]
DLIB (50 lin)	1.922E-04	0.00
DLIB (100 cua)	1.922E-04	0.00

Tabla 8.16: Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$

Modelo	P_{falla}	error [%]
DIR_IB (50 lin)	1.922E-04	0.00
DIR_IB (100 cua)	1.922E-04	0.00

Tabla 8.17: Probabilidades de Falla $\theta = 1.1$

Se observa que los errores en las probabilidades de falla son bastante pequeños, lo cual indica que se pueden obtener modelos reducidos aun más pequeño

Una vez analizados los resultados para los parámetros del modelo fijos, se analiza el caso cuando están modelados por un campo aleatorio con $\sigma = 0.1$, el cual fue presentado anteriormente. Se realiza un análisis utilizando las distintas combinaciones del parametro β , para visualizar la influencia de este parámetro en la confiabilidad. En la figura (8.23) se presentan las curvas de probabilidad en función del valor umbral para $\beta = 0.01, 1$ y 20 .

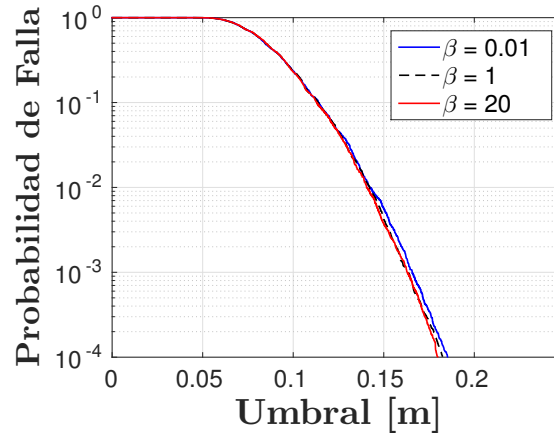


Figura 8.23: P_{falla} vs Nivel umbral

Las correspondientes probabilidades de falla se presentan en la tabla (8.18).

β	Estructura
0.01	6.49E-04
5.00	4.51E-04
20	4.34E-04

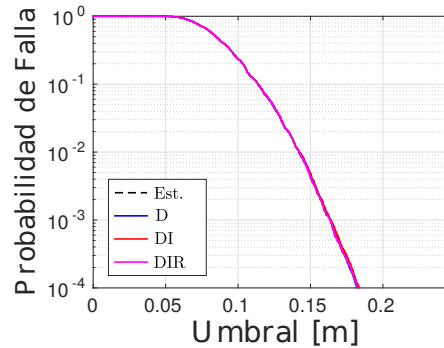
Tabla 8.18: Probabilidad de Falla distintos factores β

Al utilizar un β grande la probabilidad de falla tiende a ser más pequeña, lo que puede ser causado por una compensación de las respuestas de las distintas muestras, que para este caso tendrían un comportamiento más bien independiente.

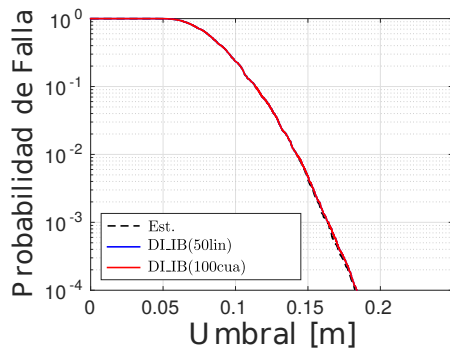
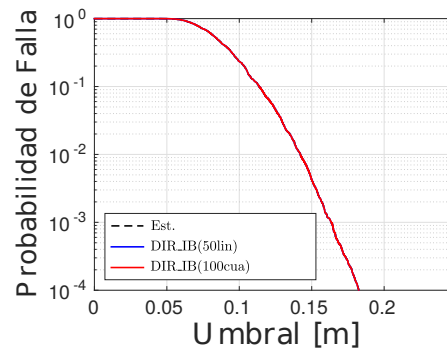
Se observa que la influencia del factor β considerando una variabilidad del 10% puede ser visualizada levemente en las diferencias de las curvas de probabilidad.

Considerando la confiabilidad con la modelación de los parámetros estructurales utilizando el campo aleatorio, en la figura (8.24) se comparan las curvas de probabilidad en función del nivel umbral considerando $\beta = 5$ (un valor intermedio). En la tabla (8.19) se presentan los correspondientes valores de probabilidad de falla.

Modelo	P_{falla}
Est.	4.51E-04
D	4.91E-04
DI	4.91E-04
DIR	4.51E-04

Tabla 8.19: Probabilidad de Falla $\beta = 5$ Figura 8.24: P_{falla} vs Nivel umbral

Para revisar los efectos de la interpolación y corrección se presentan en las figura(8.25) las curvas de probabilidad analizando solo los efectos de la interpolación y en la figura (8.26) las curvas de probabilidad de falla analizando los efectos de la interpolación y corrección. En las tablas (8.20) y (8.21) se presentan las correspondientes tablas con las probabilidades de falla

Figura 8.25: P_{falla} vs Nivel umbral DI_IBFigura 8.26: P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB

Modelo	P_{falla}	error [%]
DI_IB (50 lin)	4.91E-04	0.00
DI_IB (100 cua)	4.91E-04	0.00

Tabla 8.20: Probabilidades de Falla $\beta = 5$

Modelo	P_{falla}	error [%]
DI_IB (50 lin)	4.91E-04	0.00
DI_IB (100 cua)	4.91E-04	0.00

Tabla 8.21: Probabilidades de Falla $\beta = 5$

Se observa que los errores son incluso menores que cuando se utilizaban los parámetros del

modelo fijos, esto se puede explicar por el efecto de compensación que ocurre en las respuestas para las distintas muestras.

A modo de resumen de los tiempos de ejecución de los procesos de confiabilidad utilizando los modelos reducidos, en la tabla (8.22) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices correspondientes a cada modelo reducido y al proceso de simulación *Subset*.

Modelo	Base [s]	Parametrización [s]	Confiabilidad [hr]	Total [hr]	<i>speed-up</i>
Estructura	0.0004	26.675	28.2*	28.2*	1.00
D	16.217	1.225	1.2	1.2	23.5
DI	21.213	6.221	6.1	6.1	4.62
DIR	53.036	7.552	7.4	7.4	3.81
DLIB (50 lin)	370.54	4.15	3.9	3.9	7.23
DLIB (100 cua)	728.21	7.60	7.8	7.8	3.61
DIR_IB (50 lin)	392.33	4.60	4.2	4.2	6.71
DIR_IB (100 cua)	750.69	7.89	6.8	6.8	4.14
DIR_aIB (50 lin)	1481.1	4.60	5.3	5.3	5.32

Tabla 8.22: Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)

En cada proceso de *Subset* se realizaron 4 etapas, lo que equivale a 3700 re-análisis, considerando actualización, ensamblaje y respuesta. Se observa que los factores de aumento de velocidad (*speed-up*) son similares a los factores de tiempo en construir los modelos reducidos, quedando para el modelo DIR_IB con interpolación lineal en 7.

Para el caso del modelo DIR_aIB, se utilizan los puntos de soporte adaptativos presentados en el capítulo (4). Si bien el factor de aumento de velocidad disminuye a 5, se tiene como ventaja la mayor generalidad en la selección de los puntos de soporte. Analizando el número óptimo de puntos de soporte requeridos, esta técnica adaptativa puede tomar más importancia.

Ejemplo de Aplicación 4

En este capítulo se utiliza el mismo modelo del capítulo anterior, pero utilizando una subestructuración diferente. Se dirige la subestructuración en base a la parametrización requerida para la simulación y los elementos que se mantienen invariantes se agrupan en una sola gran subestructura. Las diferencias con la subestructuración del capítulo anterior son presentadas en base a la construcción del modelo reducido nominal. Este ejemplo se presenta con el mismo enfoque del capítulo anterior, pero se llega solo hasta los tiempos asociados a la construcción del modelo nominal.

9.1. Descripción de las Subestructuras

Para el análisis de confiabilidad se parametriza el núcleo central de muros de hormigón, como elemento principal. Dado esto, el orden lógico es dividir las subestructuras en función de la parametrización que se va a utilizar. En la figura (9.1) se presenta la subestructuración del núcleo de muros de hormigón cada 2 pisos, lo cual corresponde a las subestructuras S_2 a S_9 . El resto de elementos que se mantendrán fijos, se agrupan en la subestructura S_1 , con lo cual se tiene un total de 9 Subestructuras.

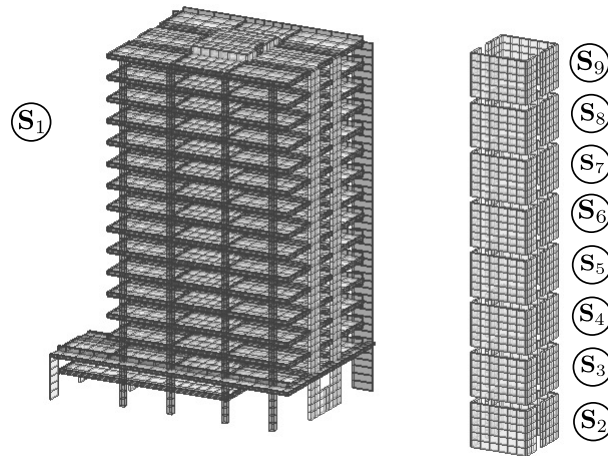


Figura 9.1: Esquema subestructuras Alcazar

Las configuraciones de reducción utilizada se presenta en tabla (9.1)

	Modos internos	Modos de borde	
Caso	S1 - S49	B1 - B15	Total
$\alpha-2$	147	200	347

Tabla 9.1: Casos Modelos Reducidos

Los grados de libertad de borde son 2490 distribuidos en 15 interfaces. Se consideran 3 modos internos por cada subestructura del núcleo central y 100 la subestructura exterior. Se considera una reducción al 8% de los grados de libertad de interfaz. En total, se presenta una reducción al 1.17%, con lo cual se tiene un modelo reducido del mismo tamaño que el presentado en el capítulo (8). En el apéndice (B) se presenta el detalle de la definición de interfaces.

9.2. Formulación del Problema

Para ilustrar el desempeño de la estructura, ésta es caracterizada mediante la probabilidad de ocurrencia de un evento de falla relacionado con el desplazamiento relativo del ultimo piso respecto al suelo. La correspondiente función de demanda normalizada esta dada por:

$$d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \max_{t \in [0, T]} \left(\left| \frac{\delta(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})}{\delta^*} \right| \right) \quad (9.1)$$

donde δ es el desplazamiento en la parte superior de la estructura y $\delta^* = 0.17[m]$ el nivel de desplazamiento aceptado.

La duración de la sollicitación es tomada igual a $T = 30[s]$ con intervalos iguales a $\Delta t = 0.01[s]$. Así, la secuencia tiene $n_T = 3001$ variables aleatorias y por lo tanto el vector de parámetros inciertos \mathbf{w} involucra un problema de alta dimensionalidad. Para la figura anterior, los correspondientes valores de magnitud de momento y distancia de ruptura son $M = 7.5$ y $d_r = 25[km]$.

La rigidez del núcleo central de muros, representada mediante el módulo de elasticidad, es considerada incierta. Específicamente, el modulo de elasticidad de los elementos de muros cada dos pisos es modelada mediante un campo aleatorio Log-normal homogéneo e isotrópico \mathbf{E} con valor medio $\mu_E \mathbf{1}$, desviación estándar σ_E . El valor medio y la desviación estándar del campo aleatorio Log-normal están seleccionados como $\mu_E = 2.0 \times 10^{10}[N/m^2]$ y $\sigma_E = 2.0 \times 10^9[N/m^2]$, respectivamente. Se consideran 8 parámetros, donde cada uno esta asignado al modulo de Elasticidad de las subestructuras de muros del núcleo central. Los parámetros del modelo $\boldsymbol{\theta}$ quedan expresados por

$$\theta_i = E_i / \bar{E} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (9.2)$$

donde $\bar{E} = \mu_E$. En la figura (9.2) se presenta un esquema de las distancias utilizadas entre las componentes y sus correspondientes parámetros. El largo de correlación es utilizado como $l = 48m$ y a modo de ejemplo en la figura, el largo entre las subestructuras 2 y 3 tiene el valor $\Delta_{23} = 6[m]$.

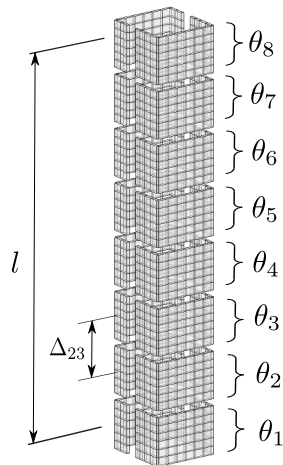


Figura 9.2: Esquema Campo Aleatorio

El efecto del parámetro β (relacionado con el grado de correlación del campo aleatorio) sobre la función de correlación R se ve reflejado en la figura (9.3), donde se presenta la función R_{1j} en función de Δ_{1j} , ambos referidos a la correlación entre el primer grupo de muros y los restantes j , $j = 1, \dots, 8$.

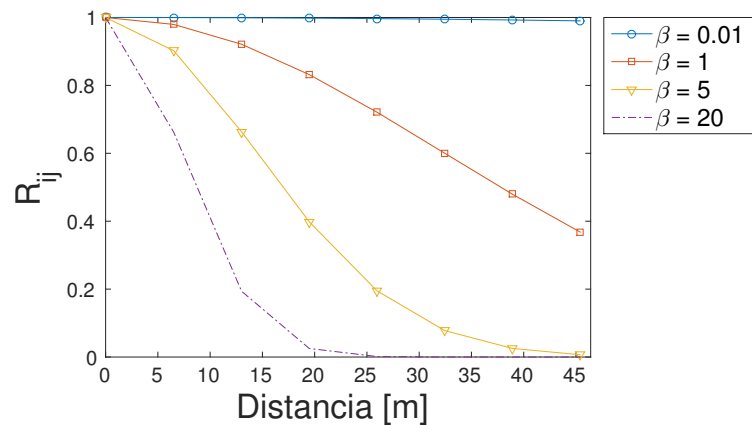


Figura 9.3: Correlación campo aleatorio

Se considera el campo con $\beta = 0.01$ fuertemente correlacionado, con $\beta = 1$ débilmente correlacionado y con $\beta \rightarrow \infty$ no correlacionado. El efecto del parámetro β sobre la confiabilidad del sistema será analizada en las siguientes secciones.

9.3. Modelo Reducido Nominal

Para verificar la exactitud de los modelos reducidos, las frecuencias y modos de vibrar del sistema completo son comparadas con los correspondientes al modelo reducido *a-2*. Se generan el modelo basado en modos dominantes D, con reducción de interfaz DI y con la corrección para el caso con reducción de interfaz DIR. La comparación de frecuencias se presenta en la tabla (9.2) y en forma gráfica en la figura (9.4).

N	Estructura [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	5.284	2.713E-02	2.713E-02	9.639E-09
2	6.132	4.259E-02	4.259E-02	5.503E-09
3	7.120	1.264E-01	1.264E-01	2.458E-08
4	19.001	3.506E-01	3.506E-01	3.212E-05
5	22.469	1.415E+00	1.415E+00	3.169E-05
6	27.065	6.477E-01	6.478E-01	1.996E-04
7	35.972	1.173E-01	1.202E-01	4.661E-03
8	37.027	9.938E-04	1.837E-03	8.485E-04
9	37.867	4.007E-02	5.223E-02	1.233E-02
10	38.453	1.034E+00	1.036E+00	4.335E-03
11	40.535	2.417E-02	4.945E-02	2.551E-02
12	41.366	5.285E-01	5.310E-01	4.894E-03
13	41.697	1.049E-01	1.216E-01	1.568E-02
14	41.815	2.146E-02	2.531E-02	3.956E-03
15	42.061	4.271E-01	4.471E-01	1.187E-02

Tabla 9.2: Comparación errores

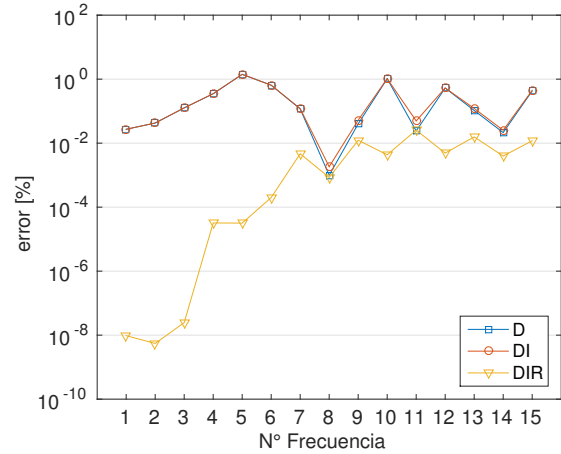


Figura 9.4: Errores Frecuencias

La comparación de los modos de vibrar se presentan en la figura (9.5), por medio del criterio MAC, el cual es presentado en el apéndice (A).

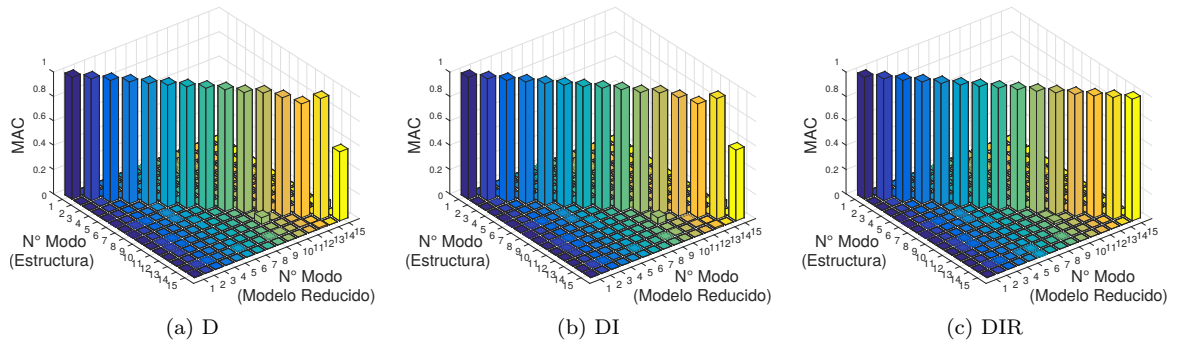


Figura 9.5: MAC modelo *a-2* nominal

En la comparación de frecuencias, se observa que entre el modelo D y DI no hay mucha diferencia, mientras que al comparar con el modelo DIR hay una gran mejora, al incorporar los efectos de los

modos residuales. Por otro lado al comparar los modos, el modelo DIR mejora considerablemente la aproximación de los modos, validando la corrección utilizada.

En la tabla (9.3) se presentan los tiempos asociados a las actividades necesarias para generar cada uno de los modelos reducidos, de esta forma se puede visualizar cuales de estas consumen mayor tiempo en la generación de los modelos reducidos.

	Actividad	Tiempo [s]
1	Ensamble Componentes	13.5609
2	Frecuencias Componentes	70.6381
3	Matrices Base Reducción	139.0565
4	Frecuencias Borde Global	28.6848
5	Matrices Base Optimización	529.3355
6	Matrices Optimización Reducida	11.1230
7	TR1 y TR2 con reducción	11.5179

Tabla 9.3: Tiempos Ensamble

Posteriormente, en la tabla (9.4), se resumen los tiempos asociados a la construcción de cada modelo, comparando estos tiempos con los asociados al ensamble y análisis modal de la estructura completa (Estructura).

Modelo	Base [s]	Generación [s]	Total [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	-	26.675	26.675	1.00
D	223.2556	6.4544	229.7100	4.13
DI	223.2556	40.1355	263.3911	0.66
DIR	775.2320	40.8475	816.0795	0.65

Tabla 9.4: Tiempos Modelos

Dentro del tiempo Base se consideran los tiempos de ensamble y cálculo de frecuencias de matrices componentes de los modelos reducidos, mientras que en tiempo generación, se considera el tiempo de acople de matrices componentes y el calculo de frecuencias y modos de vibrar del modelo completo.

Se observa una gran diferencia en tiempos con respecto al modelo del capítulo (8). Incluso la construcción del modelo nominal es de 10 a 40 veces más costoso que ensamblar el modelo elemento a elemento.

9.4. Comparación de Subestructuraciones

Para explicar porque el modelo con esta subestructuración tiene un costo computacional mucho mayor, se utilizaran las matrices del modelo D (\mathbf{K}_D y \mathbf{M}_D) en forma gráfica. Es posible visualizar las matrices bidimensionales graficando con un punto las posiciones de la matriz cuyo valor es distinto de 0 y no graficando nada si se tiene un valor igual a 0. En las figuras (9.6) y (9.7) se presenta la visualización de las matrices de masa y rigidez del modelo D para la subestructuración del capítulo (9). Se observa una gran acumulación de elementos (puntos) en la parte inferior derecha de ambas matrices. Esta parte, corresponde a las matrices \mathbf{M}_I y \mathbf{K}_I asociadas a la interfaz, las cuales son bastante densas.

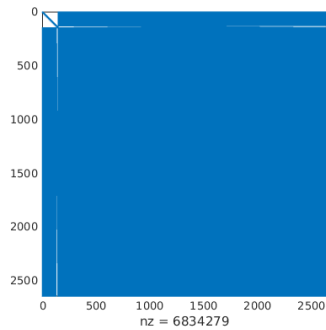


Figura 9.6: Matriz de Masa D

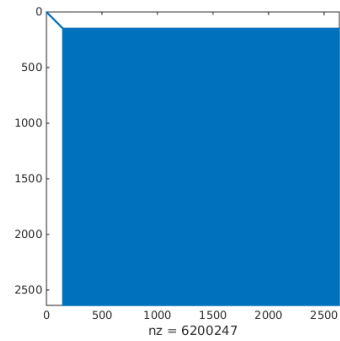


Figura 9.7: Matriz de Rigidez D

En las figuras (9.8) y (9.9) se presenta la visualización de las matrices de masa y rigidez del modelo D para la subestructuración del capítulo (8). Se observa que la parte inferior derecha de ambas matrices es una matriz diagonal por bandas. Esta parte, que corresponde a las matrices \mathbf{M}_I y \mathbf{K}_I asociadas a la interfaz, al ser diagonal por bandas tiene la ventaja de ser mas adecuada en el manejo computacional, por ejemplo para la resolución del problema de valores y vectores propios de interfaz.

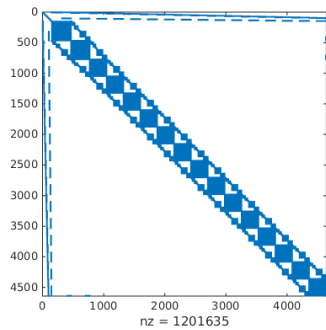


Figura 9.8: Matriz de Masa D

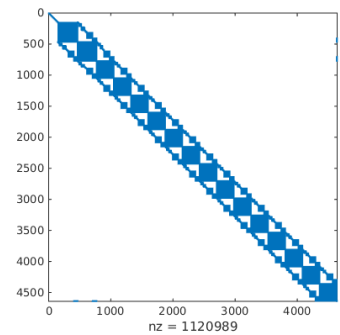


Figura 9.9: Matriz de Rigidez D

Observando la ventaja de diagonalidad por bandas de las matrices asociadas a la subestructuración del capítulo (8) se puede explicar el porque la generación de modelos reducidos es mucho más eficiente con una subestructuración que con otra. Adicionalmente, trabajar con una subestructura con muchos elementos implica la utilización de matrices de mayor dimensión en los procesos intermedios.

Ejemplo de Aplicación 5

En el siguiente capítulo se describe la aplicación de las técnicas de reducción a un modelo de edificio un poco más complejo que los ejemplos anteriores, debido a su mayor dimensionalidad y a que posee elementos de disipación de energía. Se comienza con la descripción del modelo y la subestructuración que dará origen a los modelos reducidos. Seguido a esto, se formula el problema de confiabilidad en el cual se probará el desempeño de los modelos reducidos. Posteriormente se realiza un análisis completo de las distintas técnicas de reducción, incluyendo optimización e interpolación. Finalmente se presentan resultados preliminares de las simulaciones de confiabilidad mediante el método *Subset*, entregando detalles de la reducción en costo computacional.

10.1. Descripción del Modelo

El modelo consiste en una representación de un edificio *Titanium*, el cual posee 55 pisos y una altura de 190[m]. El modelo de elementos finitos está compuesto por vigas, columnas, losas y muros. El edificio presenta un núcleo central de muros y los demás muros están ubicados en las esquinas de la estructura. La altura entre cada piso es de 3.6[m]. Para el hormigón se considera una densidad $\rho = 2500[\text{kg}/\text{m}^3]$ y un módulo de poisson $\nu = 0.3$. En la figura (10.1) se presenta un esquema del modelo de la estructura y en la figura (10.2) una imagen de edificio en la realidad.

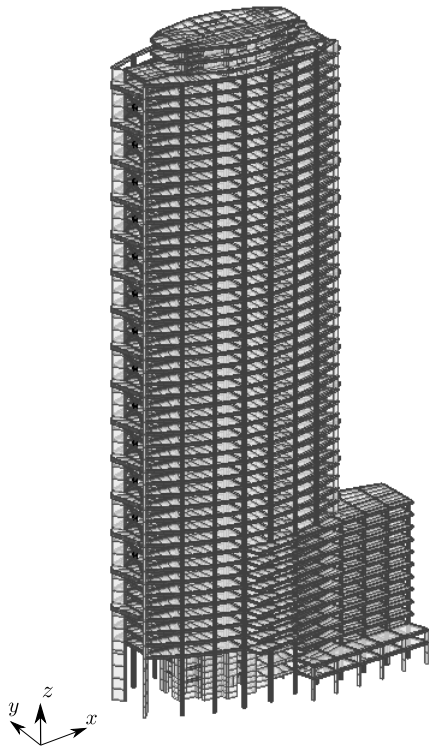


Figura 10.1: Modelo edificio Titanium



Figura 10.2: Edificio Titanium

En las figuras (10.3) y (10.4) se presentan las plantas típicas del sistema estructural. Se tiene una planta base entre los pisos 1 a 15 y otra para los pisos 16 a 52. Para mayores detalles de las dimensiones, a este trabajo se adjunta los planos de las plantas en formato digital.

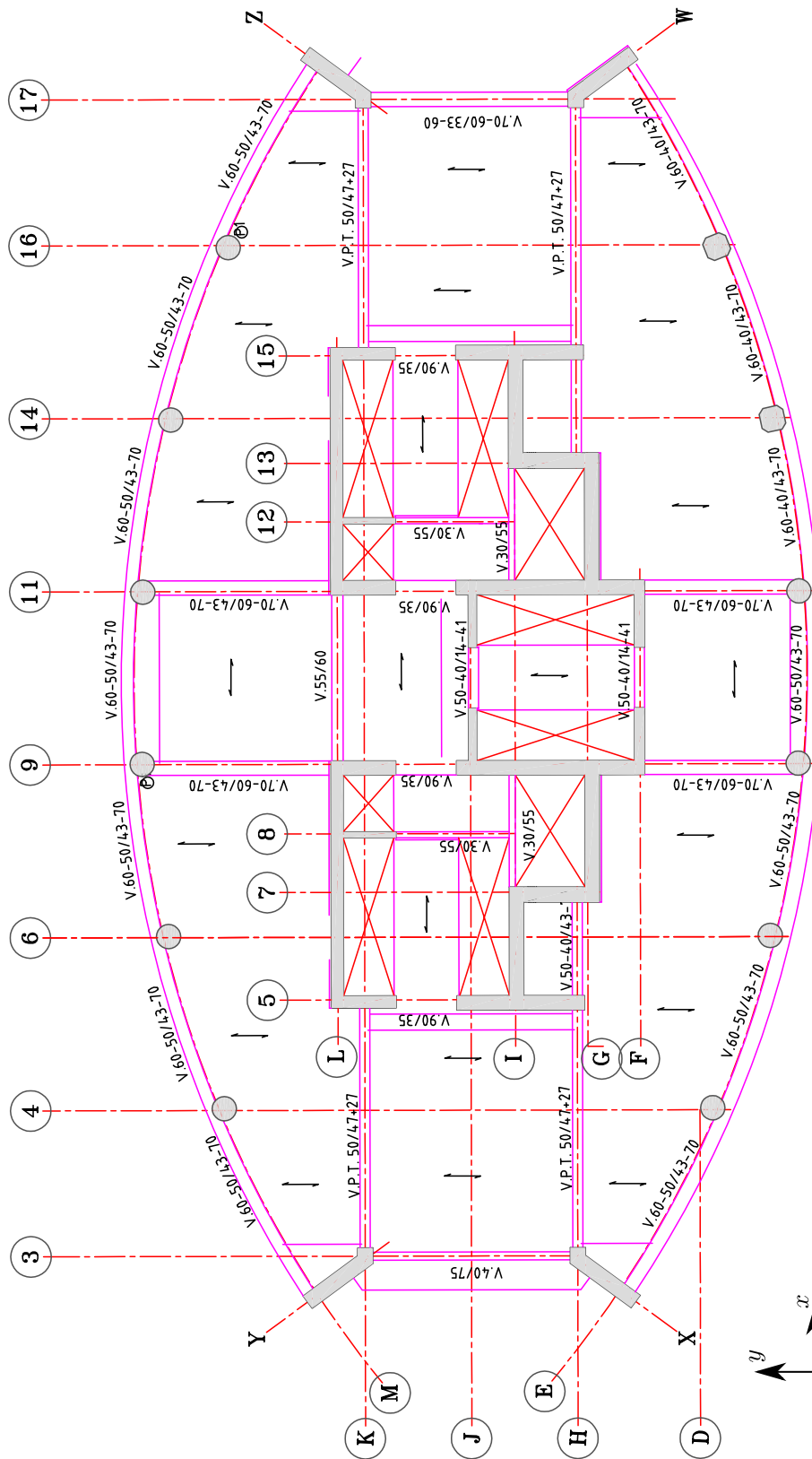


Figura 10.4: Planta típica pisos 16 a 52

El material considerado para los elementos varia según el piso y tipo al que corresponde, esta información se detalla en la tabla (10.1). Además, se considera una razón de amortiguamiento del 5%.

Elemento	Material
Elementos Hormigónn piso 1 a 15	H60
Elementos Hormigón piso 16 a 55	H40
Perfiles Tubulares	A53/ASTM

Tabla 10.1: Material elementos

Los muros de la estructura tienen un espesor dependiendo del piso y dirección en planta, lo cual se presenta en la tabla (10.2).

Piso	Espesor	
	Dirección X	Dirección Y
1 a 5	60	70
6 a 15	55	65
16 a 20	55	65
21 a 25	50	60
26 a 30	45	55
31 a 35	40	50
36 a 46	35	40
47 a 55	30	35

Tabla 10.2: Espesores Muros

Las columnas se modelan como circulares de $110[cm]$ de diámetro. El sistema de losas esta compuesto por losetas prefabricadas, las cuales se modelan con un espesor de $23[cm]$. El modelo completo de elementos finitos tiene un total de 88244 grados de libertad.

La ubicación de los disipadores en planta se esquematiza en la figura (10.5).

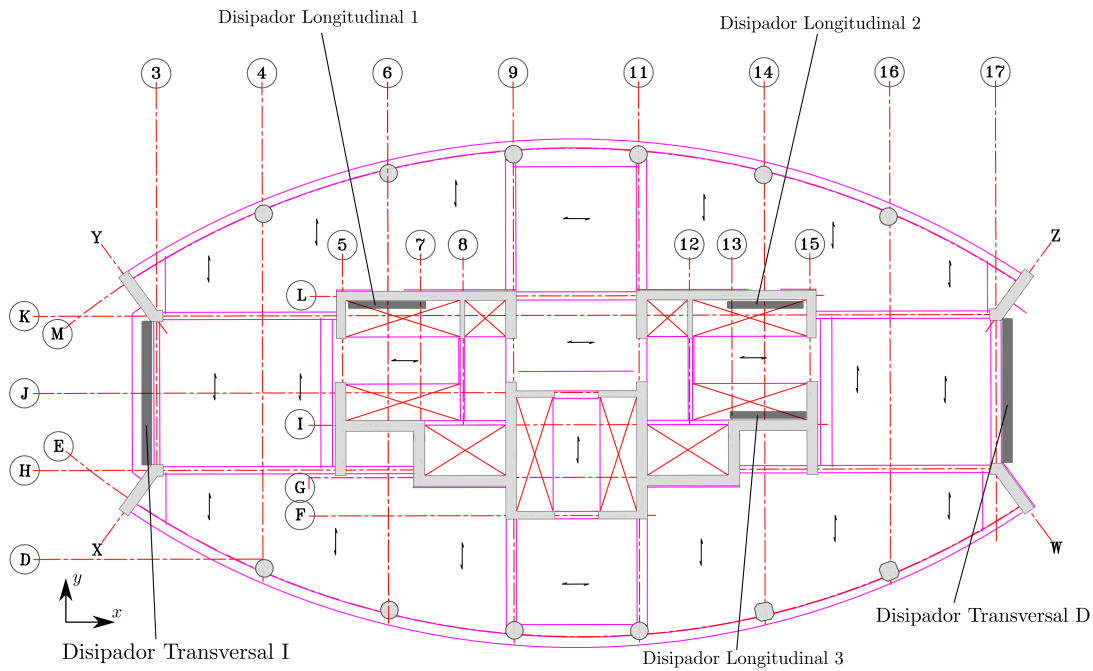


Figura 10.5: Ubicación disipadores en planta

Los disipadores transversales consisten en diagonales de acero de sección tubular de 50×2 [cm] con un sistema de disipación del tipo *U-shape flexural plates* (UFP) [55]. En la figura (10.6) se presenta una imagen de los disipadores diagonales en la realidad y su respectivo modelo estructural.



Figura 10.6: Disipadores Transversales

Los disipadores longitudinales consisten en muros de hormigón de sección 500×40 [cm] con un sistema de disipación del tipo UFP. En la figura (10.7) se presenta una imagen de los disipadores de muros en la realidad y su respectivo modelo estructural.



Figura 10.7: Disipadores Longitudinales

La ubicación en altura de los disipadores se presenta en la tabla (10.3)

Disipador	Cantidad	Pisos
Longitudinal 1	4	39 a 51
Longitudinal 2	10	21 a 51
Longitudinal 3	6	21 a 39
Transversal I	13	12 a 51
Transversal D	12	15 a 51

Tabla 10.3: Ubicación disipadores en altura

La subestructuración se esquematiza en la figura (10.8), la cual se realiza separando los elementos cada dos pisos. El núcleo central de muros y los elementos de disipación se dejan por separado.

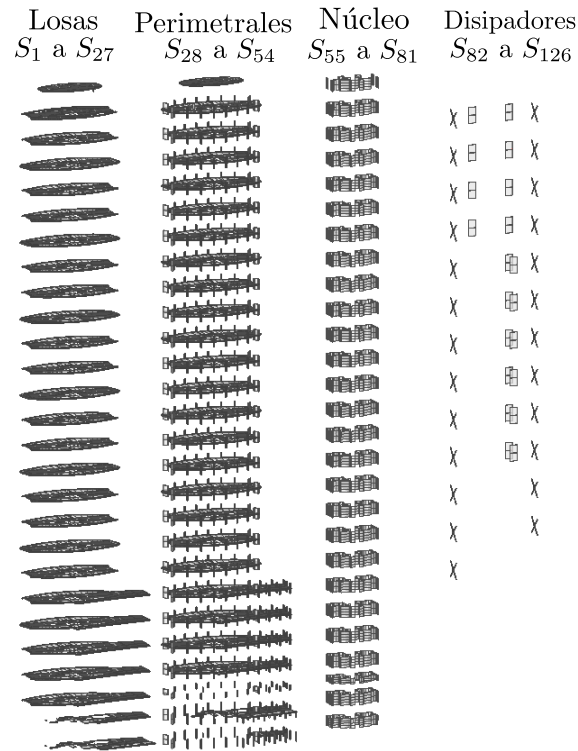


Figura 10.8: Esquema Subestructuras edificio Titanium

Las subestructuras S_1 a S_{27} corresponden a las losas cada dos pisos. Las subestructuras S_{28} a S_{54} corresponden a todos los elementos cada dos pisos exceptuado los elementos de núcleo y disipadores. Las subestructuras S_{55} a S_{81} corresponden a los elementos del núcleo central de muros, agrupadas cada dos pisos. Por último, las subestructuras S_{82} a S_{126} corresponden a los sistemas estructurales que contienen los disipadores de energía. En total se tienen 126 subestructuras. La configuración de reducción utilizada se presenta en la tabla (10.4)

	Modos internos		Modos de borde
Caso	S1 - S126	B1 - B196	Total
$t-1$	252	100	352

Tabla 10.4: Caso Modelo Reducido

Los grados de libertad de borde son 23700. El modelo tiene 2 modos internos por subestructura, mientras que la interfaz se reduce a un 0.42%. En total, se presenta una reducción aproximada al 0.4%.

10.2. Formulación del Problema

Para ilustrar el desempeño de la estructura, ésta es caracterizada mediante la probabilidad de ocurrencia de un evento de falla relacionado con el desplazamiento relativo del ultimo piso respecto al suelo. La correspondiente función de demanda normalizada esta dada por:

$$d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \max_{t \in [0, T]} \left(\left| \frac{\delta(t, \mathbf{w}, \boldsymbol{\theta})}{\delta^*} \right| \right) \quad (10.1)$$

donde δ es el desplazamiento en la parte superior de la estructura y $\delta^* = 1.1[m]$ el nivel de desplazamiento aceptado.

La duración de la solicitación es tomada igual a $T = 20[s]$ con intervalos iguales a $\Delta t = 0.01[s]$. Así, la secuencia tiene $n_T = 2001$ variables aleatorias y por lo tanto el vector de parámetros inciertos \mathbf{w} involucra un problema de alta dimensionalidad. Para la figura anterior, los correspondientes valores de magnitud de momento y distancia de ruptura son $M = 7.5$ y $d_r = 25[km]$.

La rigidez del núcleo central de muros, representada mediante el módulo de elasticidad, es considerada incierta. Específicamente, el módulo de elasticidad de los elementos de muros cada dos pisos es modelada mediante un campo aleatorio Log-normal homogéneo e isotrópico \mathbf{E} con valor medio $\mu_E \mathbf{1}$, desviación estándar σ_E . El valor medio y la desviación estándar del campo aleatorio Log-normal están seleccionados como $\mu_E = 2.0 \times 10^{10}[N/m^2]$ y $\sigma_E = 2.0 \times 10^9[N/m^2]$, respectivamente. Se consideran 27 parámetros que agrupan los elementos del núcleo de muros cada 2 pisos. Los parámetros del modelo $\boldsymbol{\theta}$ quedan expresados por

$$\theta_i = E_i / \bar{E}_i \quad i = 1, \dots, 27 \quad (10.2)$$

donde $\bar{E}_i = \mu_E$. En la figura (10.9) se presenta un esquema de las distancias utilizadas entre las componentes y sus correspondientes parámetros. El largo de correlación es utilizado como $l = 182m$ y a modo de ejemplo en la figura, el largo entre los grupos de muros 1 y 2 tiene el valor $\Delta_{12} = 7.2[m]$.

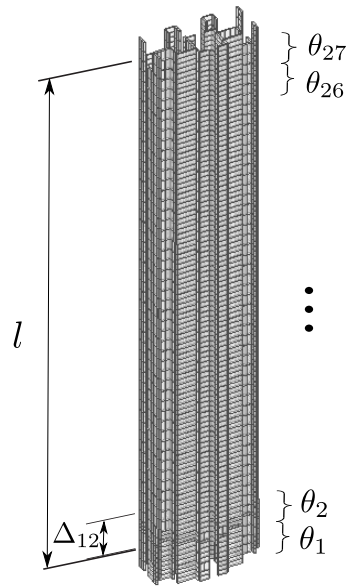


Figura 10.9: Esquema Campo Aleatorio

El efecto del parámetro β (relacionado con el grado de correlación del campo aleatorio) sobre la función de correlación R se ve reflejado en la figura (10.10), donde se presenta la función R_{1j} en función de Δ_{1j} , ambos referidos a la correlación entre el primer grupo de muros y los restantes j , $j = 1, \dots, 27$.

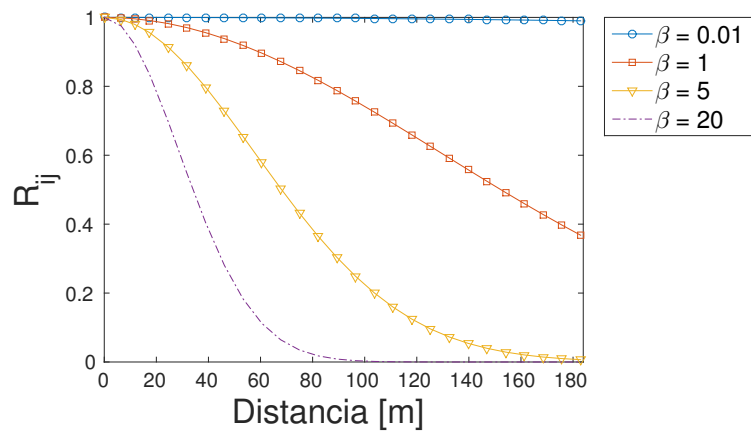


Figura 10.10: Correlación campo aleatorio

Se considera el campo con $\beta = 0.01$ fuertemente correlacionado, con $\beta = 1$ débilmente correlacionado y con $\beta \rightarrow \infty$ no correlacionado. El efecto del parámetro β sobre la confiabilidad del sistema será analizada en las siguientes secciones.

Cada dispositivo de disipación UFP, tiene un comportamiento hysterético unidimensional del tipo no-lineal, modelado por la fuerza restitutiva

$$r_d(t) = \alpha k_e \delta(t) + (1 - \alpha) k_e U_y z(t) \tag{10.3}$$

donde k_e es la rigidez antes de la fluencia, U_y es el desplazamiento de fluencia, α es el factor que define el rango que la fuerza restitutiva es lineal, $z(t)$ es una variable adimensional, y $\delta(t)$ es el desplazamiento relativo entre la parte superior e inferior del dispositivo. La variable adimensional $z(t)$ describe el estado en el ciclo de histéresis de las componentes no-lineales y satisface las ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{\delta}(t)}{U_y} [\beta_1 - z(t)^2 [\beta_2 + \beta_3 \text{sgn}(z(t) \dot{\delta}(t))]] \tag{10.4}$$

donde β_1 , β_2 y β_3 son constantes adimensionales que caracterizan el comportamiento hysterético, y $\text{sgn}(\cdot)$ es la función *signo*. Las constantes β_1 , β_2 y β_3 representan la escala, el ancho del ciclo (*loop fatness*) y angostamiento del ciclo (*loop pinching*) respectivamente. Una completa caracterización del modelo de comportamiento hysterético tipo *Bouc-Wen* puede ser revisado en [56]. Los valores utilizados se describen en la tabla (10.5). En la figura (10.11) se presenta una curva típica de fuerza restitutiva del disipador.

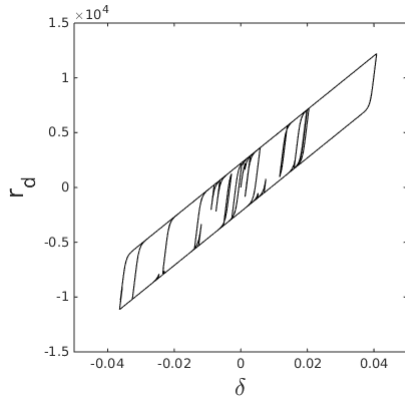


Figura 10.11: Respuesta típica disipador

Parámetro	valor	Unidad
α	0.1	-
β_1	1	-
β_2	0.5	-
β_3	0.5	-
k_e	2.5×10^6	N/m
U_y	5×10^{-5}	m

Tabla 10.5: Parámetros disipador

10.3. Modelo Reducido Nominal

Para verificar la exactitud de los modelos reducidos, las frecuencias y modos de vibrar del sistema completo son comparadas con los correspondientes al modelo reducido $t-1$. Se generan el modelo basado en modos dominantes D, con reducción de interfaz DI y con la corrección para el caso con reducción de interfaz DIR. La comparación de frecuencias se presenta en la tabla (10.6) y en forma gráfica en la figura (10.6).

N	Estructura [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	1.156	2.580E-04	2.580E-04	3.768E-09
2	1.558	6.144E-04	6.144E-04	2.349E-09
3	1.953	6.850E-04	6.850E-04	5.842E-10
4	4.277	3.820E-03	3.820E-03	1.167E-08
5	4.808	7.775E-03	7.775E-03	7.887E-09
6	6.885	1.048E-02	1.048E-02	2.451E-07
7	8.136	2.838E-02	2.838E-02	3.560E-07
8	9.107	1.556E-02	1.556E-02	1.204E-06
9	12.374	6.302E-02	6.302E-02	7.611E-06
10	14.385	4.385E-02	4.387E-02	3.395E-05
11	14.807	5.144E-02	5.145E-02	5.410E-05
12	16.805	5.628E-01	5.635E-01	1.592E-03
13	17.917	1.408E-01	1.408E-01	1.634E-04
14	18.676	8.186E-01	8.202E-01	4.109E-03
15	19.974	7.990E-01	7.996E-01	2.505E-03

Tabla 10.6: Comparación errores

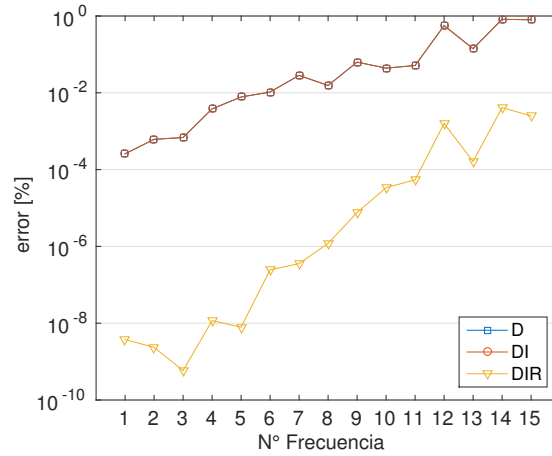
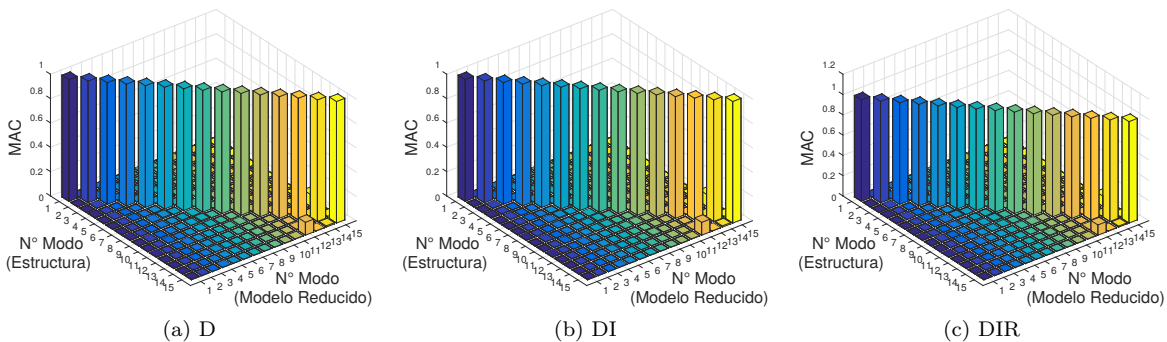


Figura 10.12: Errores Frecuencias

La comparación de los modos de vibrar se presentan en la figura (10.13), por medio del criterio MAC, el cual es presentado en el apéndice (A).

Figura 10.13: MAC modelo $t-1$ nominal

En la comparación de frecuencias, se observa que entre el modelo D y DI no hay mucha diferencia, mientras que al comparar con el modelo DIR hay una gran mejora, al incorporar los efectos de los modos residuales. Por otro lado al comparar los modos, los resultados son prácticamente iguales, lo que indica que se podría haber realizado una reducción mucho mayor.

En la tabla (10.7) se presentan los tiempos asociados a las actividades necesarias para generar cada uno de los modelos reducidos, de esta forma se puede visualizar cuáles de estas consumen mayor tiempo en la generación de los modelos reducidos.

	Actividad	Tiempo [s]
1	Ensamble Componentes	22.9327
2	Frecuencias Componentes	20.6316
3	Matrices Base Reducido	13.7281
4	Frecuencias Borde	40.3247
5	Matrices Base Optimización	8.2158
6	Matrices Optimización Reducida	111.1150
7	TR1 y TR2 con reducción	296.4672

Tabla 10.7: Tiempos Ensamble

Posteriormente, en la tabla (10.8), se resumen los tiempos asociados a la construcción de cada modelo, comparando estos tiempos con los asociados al ensamble y análisis modal de la estructura completa (Estructura).

Modelo	Base [s]	Generación [s]	Total [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	-	267.5531	267.5531	1.00
D	57.2924	14.8088	72.1012	18.0
DI	57.2924	43.8318	101.1242	6.11
DIR	473.0905	47.2205	520.3110	5.66

Tabla 10.8: Tiempos Modelos

Dentro del tiempo Base se consideran los tiempos de ensamble y cálculo de frecuencias de matrices componentes de los modelos reducidos, actividades que solo se deben realizar una vez en un proceso de re-análisis al utilizar las parametrizaciones presentadas. Mientras que en tiempo Generación, se considera el tiempo de acople de matrices componentes, el análisis modal de la interfaz y del modelo completo, actividades que se deben realizar para cada muestra en un proceso de re-análisis.

Se observa que en los tiempos de generación hay un factor entre 6 y 20 de reducción en tiempo, pero en el tiempo total de construcción del punto nominal se utiliza más tiempo en los modelos

reducidos. Dado que estas técnicas son utilizadas en simulaciones de re-análisis, al calcular reiteradas muestras, el tiempo de generación es el que predomina, con lo cual los modelos reducidos se vuelven más efectivos que el ensamble elemento a elemento de la estructura completa.

10.4. Parametrización

Para analizar las parametrizaciones sobre el modelo $t-1$, se consideran las combinaciones de parámetros asociadas a los puntos: $\theta^{k1} = 0.9 \mathbf{1}$ y $\theta^{k2} = 1.1 \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{27}$. Los cuales corresponden a un punto más flexible (θ^{k1}) y uno más rígido (θ^{k2}). En las tablas (10.9) y (10.10) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (10.18) y (10.19) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica.

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	1.179	2.673E-04	2.674E-04	3.918E-07
2	1.578	6.352E-04	6.352E-04	6.627E-07
3	2.004	7.112E-04	7.112E-04	1.614E-06
4	4.377	4.002E-03	4.003E-03	9.022E-06
5	4.889	8.004E-03	8.004E-03	8.436E-06
6	7.105	1.129E-02	1.129E-02	5.926E-05
7	8.330	2.958E-02	2.959E-02	6.807E-05
8	9.354	1.629E-02	1.629E-02	5.885E-05
9	12.697	6.675E-02	6.676E-02	2.355E-04
10	14.918	4.815E-02	4.818E-02	6.101E-04
11	15.276	5.582E-02	5.583E-02	5.911E-04
12	17.057	5.959E-01	5.966E-01	6.234E-03
13	18.381	1.828E-01	1.829E-01	5.706E-03
14	18.753	7.960E-01	7.975E-01	4.280E-03
15	20.038	8.120E-01	8.126E-01	4.941E-03

Tabla 10.9: Comparación errores θ^{k1}

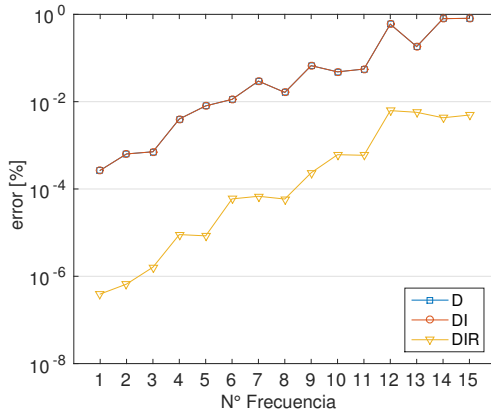


Figura 10.14: Errores Frecuencias θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	D-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]
1	1.132	2.484E-04	2.483E-04	4.581E-07
2	1.536	5.918E-04	5.918E-04	8.335E-07
3	1.899	6.587E-04	6.586E-04	1.913E-06
4	4.171	3.634E-03	3.632E-03	9.804E-06
5	4.723	7.532E-03	7.531E-03	9.503E-06
6	6.652	9.685E-03	9.685E-03	6.221E-05
7	7.933	2.711E-02	2.710E-02	7.203E-05
8	8.848	1.484E-02	1.484E-02	5.641E-05
9	12.033	5.916E-02	5.915E-02	2.110E-04
10	13.823	4.000E-02	4.001E-02	3.822E-04
11	14.316	4.737E-02	4.737E-02	3.206E-04
12	16.495	5.242E-01	5.248E-01	2.939E-03
13	17.415	1.258E-01	1.258E-01	1.107E-03
14	18.594	8.074E-01	8.091E-01	4.093E-03
15	19.881	7.497E-01	7.502E-01	6.832E-03

Tabla 10.10: Comparación errores θ^{k2}

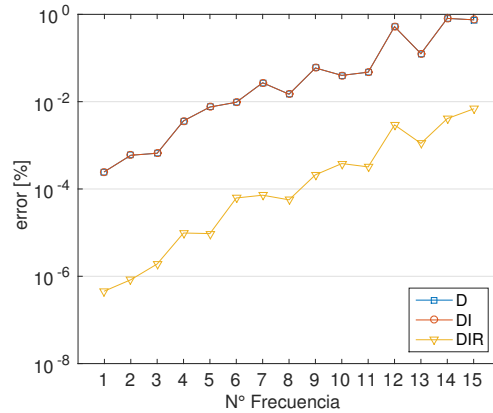


Figura 10.15: Errores Frecuencias θ^{k2}

Se observa que utilizando el modelo DIR se tienen mejores resultados en todas las frecuencias presentadas y necesarias para la respuesta en desplazamiento. Incluso al mantener la matriz de corrección \mathbf{T}_{R1} y \mathbf{T}_{R2} constantes, la disminución en el error es bastante considerable. Esto se debe a que las matrices asociadas al modelo DIR se ven actualizadas en una parte de la parametrización por medio de la actualización de los modos de interfaz $\mathbf{\Upsilon}_I$.

La comparación de los modos de vibrar por medio del criterio MAC se presenta en la figura (10.16) para el punto θ^{k1} . Por otra parte, para el punto θ^{k2} se presentan las figuras (10.17).

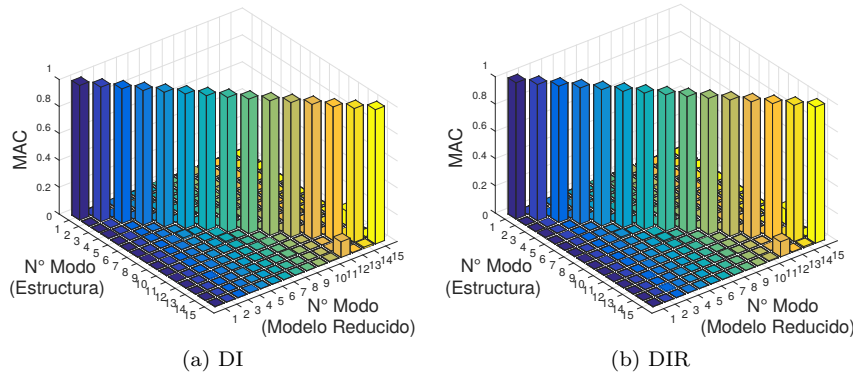


Figura 10.16: MAC parametrización modelo $T-1$ en θ^{k1}

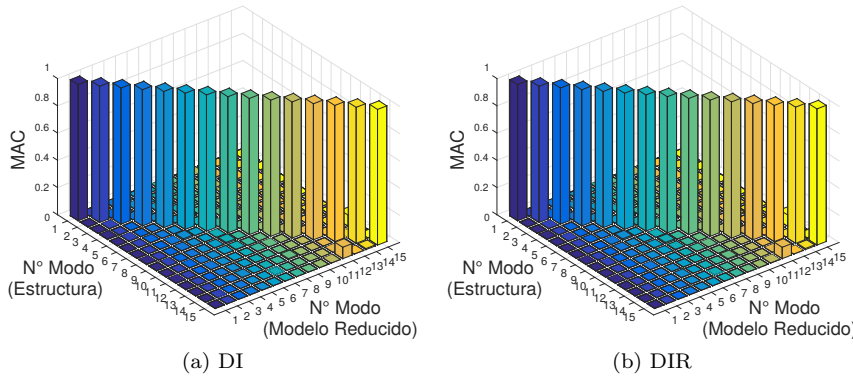


Figura 10.17: MAC parametrización modelo $T-1$ en θ^{k2}

En ambos casos no hay diferencia entre los MAC utilizando la matriz \mathbf{T}_R , lo cual indica que se puede realizar una reducción aun mayor.

En la tabla (10.11) se realiza una comparación de los tiempos asociados a construir las matrices del modelo completo (Estructura) y los modelos reducidos correspondientes un punto θ^k , utilizando las parametrizaciones presentadas.

Modelo	Cargar [s]	Base [s]	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	0.1019	-	-	267.553	267.553	1.00
D	3.644	57.292	0.0418	14.507	14.548	18.4
DI	8.917	57.292	43.648	3.838	47.486	5.63
DIR	10.677	473.090	45.797	1.137	46.934	5.70

Tabla 10.11: Tiempos Parametrizacion

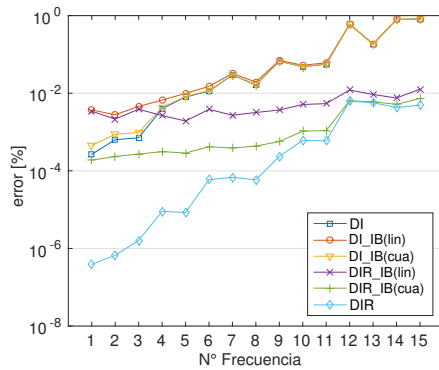
En Actualización se incluyen todos los cálculos asociados a pasar desde las matrices nominales a las correspondientes al punto de análisis θ . Se observa que para los modelos DI y DIR los tiempos de actualización son mayores a los tiempos del modelo D, lo cual se debe a que para cada nuevo θ^k se debe recalcular el problema de valores y vectores propios de interfaz. Esto, justifica la utilización de la interpolación que disminuye los tiempos asociados al análisis modal de la interfaz.

Los modelos reducidos tienen un factor de aumento de velocidad de cálculo por punto (*speed-up*) de entre 6 y 18.

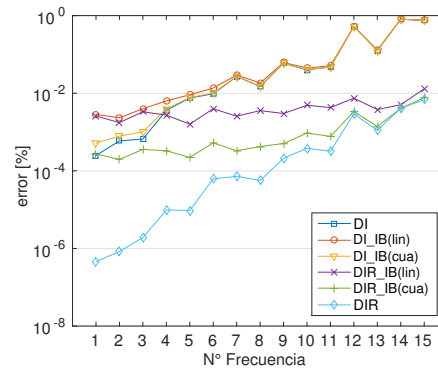
10.5. Interpolación de Interfaz

Dado el alto costo computacional en la interfaz, se analiza el efecto de la interpolación en la parametrización. Para esto, se realiza la comparación de frecuencias y modos en los mismos puntos que la parametrización para el modelo $t-1$. Se utilizan como puntos de soporte 81 puntos distribuidos en forma uniforme en θ entre 0.6 y 1.4 para la interpolación lineal. Para la interpolación cuadrática, se utilizan 162 puntos, los cuales corresponden a la reflexión puntual de los 81 puntos de la interpolación lineal, como se explica en el capítulo (4). En las tablas (10.12) y (10.13) se presenta la comparación de los errores para los distintos modelos reducidos. Adicionalmente, en las figuras (10.18) y (10.19) se presentan las mismas comparaciones en forma gráfica.

N	Est. [rad/s]	(81lin)	(162cua)	(81lin)	(162cua)
		DI-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]	DIR-error [%]
1	1.179	3.70E-03	4.55E-04	3.43E-03	1.88E-04
2	1.578	2.78E-03	8.69E-04	2.15E-03	2.34E-04
3	2.004	4.58E-03	9.80E-04	3.87E-03	2.70E-04
4	4.377	6.64E-03	4.30E-03	2.65E-03	3.13E-04
5	4.889	9.92E-03	8.28E-03	1.92E-03	2.87E-04
6	7.105	1.50E-02	1.16E-02	3.83E-03	4.18E-04
7	8.330	3.22E-02	2.99E-02	2.70E-03	3.85E-04
8	9.354	1.94E-02	1.66E-02	3.18E-03	4.34E-04
9	12.697	7.02E-02	6.71E-02	3.70E-03	5.68E-04
10	14.918	5.27E-02	4.86E-02	5.13E-03	1.05E-03
11	15.276	6.06E-02	5.63E-02	5.39E-03	1.09E-03
12	17.057	6.02E-01	5.96E-01	1.21E-02	6.39E-03
13	18.381	1.86E-01	1.83E-01	9.28E-03	6.01E-03
14	18.753	8.00E-01	7.98E-01	7.54E-03	5.16E-03
15	20.038	8.20E-01	8.14E-01	1.27E-02	7.34E-03

Tabla 10.12: Comparación errores θ^{k1} Figura 10.18: Efecto interpolación θ^{k1}

N	Est. [rad/s]	(81lin)	(162cua)	(81lin)	(162cua)
		DI-error [%]	DI-error [%]	DIR-error [%]	DIR-error [%]
1	1.132	2.83E-03	5.19E-04	2.59E-03	2.71E-04
2	1.536	2.34E-03	7.87E-04	1.75E-03	1.96E-04
3	1.899	3.97E-03	1.01E-03	3.31E-03	3.55E-04
4	4.171	6.34E-03	3.95E-03	2.72E-03	3.29E-04
5	4.723	9.11E-03	7.74E-03	1.59E-03	2.22E-04
6	6.652	1.36E-02	1.01E-02	3.99E-03	5.24E-04
7	7.933	2.95E-02	2.73E-02	2.55E-03	3.30E-04
8	8.848	1.83E-02	1.52E-02	3.56E-03	4.21E-04
9	12.033	6.19E-02	5.94E-02	2.99E-03	5.06E-04
10	13.823	4.45E-02	4.05E-02	4.90E-03	9.40E-04
11	14.316	5.13E-02	4.78E-02	4.27E-03	7.73E-04
12	16.495	5.29E-01	5.25E-01	7.44E-03	3.37E-03
13	17.415	1.28E-01	1.26E-01	3.80E-03	1.39E-03
14	18.594	8.10E-01	8.09E-01	5.05E-03	4.07E-03
15	19.881	7.56E-01	7.51E-01	1.30E-02	7.72E-03

Tabla 10.13: Comparación errores θ^{k2} Figura 10.19: Efecto Optimización θ^{k2}

El texto ‘_IB’ agregado al nombre del modelo, significa que se han utilizado la interpolación de borde para el modelo correspondiente. Por otro lado ‘(lin)’ o ‘(cua)’ esta asociado al uso de la interpolación lineal o cuadrática respectivamente.

En los gráficos, se incluye los errores para los modelos DI y DIR, los cuales sirven de referencia para analizar el efecto de la interpolación. Se observa que los modelos DI_IB se mantienen cercanos al modelo DI, siendo levemente mejor el con interpolación cuadrática. Por otro lado, los modelos DIR_IB se encuentran entre los errores asociados al modelo DI y DIR, mostrando ahora más claramente una mejor aproximación para la interpolación con puntos de soporte cuadráticos.

En la figura (8.17) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k1} por medio del criterio MAC. Adicionalmente, en las figuras (8.18) se presenta la comparación de los modos para el punto θ^{k2} .

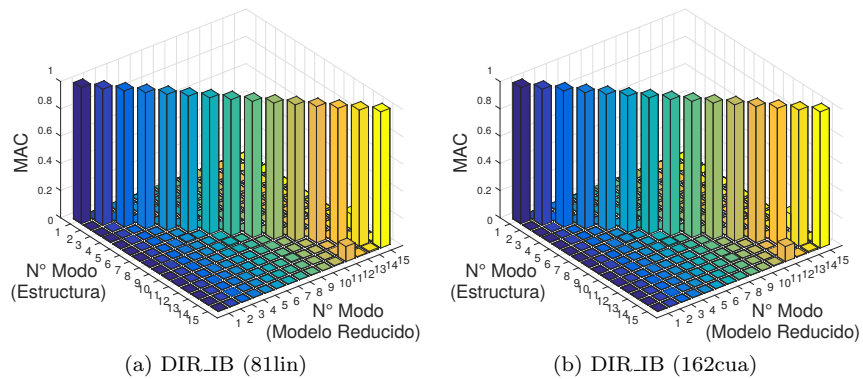


Figura 10.20: MAC interpolación modelo $t-1$ en θ^{k1}

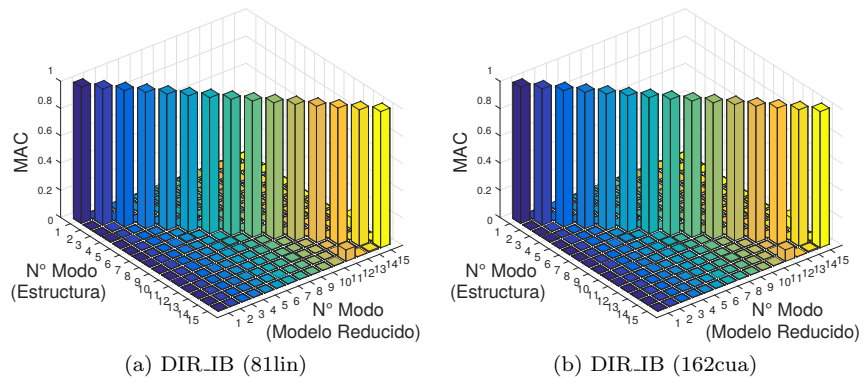


Figura 10.21: MAC interpolación modelo $t-1$ en θ^{k2}

Todos las aproximaciones de modos son bastante buenas, lo cual indica que el modelo se puede reducir aun más.

En la tabla (10.14) se presentan los tiempos requeridos para construir los puntos de soporte, junto al tiempo necesario para cargar la base cuando se quiera utilizar.

Modelo	Nominal [s]	Base [s]	Cargar [s]	Total [s]
DI_IB (81 lin)	101.124	3709	123	3933
DI_IB (162 cua)	101.124	7420	368	7889
DIR_IB (81 lin)	520.311	3709	123	4352
DIR_IB (162 cua)	520.311	7420	368	8308

Tabla 10.14: Tiempos construcción Base

Por otra parte en la tabla (10.15) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices del modelo reducido utilizando las interpolaciones lineal y cuadrática respectivamente para un punto θ^k :

Modelo	Actualización [s]	Generación [s]	Total Parametrización [s]	<i>speed-up</i>
Estructura	-	267.55	267.55	1.00
DI_IB (81 lin)	8.200	3.40	11.60	23.0
DI_IB (162 cua)	17.072	2.89	19.96	13.4
DIR_IB (81 lin)	14.634	1.70	16.33	16.38
DIR_IB (162 cua)	17.621	0.92	18.54	14.43

Tabla 10.15: Tiempos Ensamble

Al utilizar las interpolación el factor de velocidad de cálculo (*speed-up*) aumenta de 6 a 16 para la interpolación lineal con corrección, lo cual se debe a la reducción de tiempo en interpolar el problema de valores y vectores propios de interfaz.

10.6. Resultados Confiabilidad

Considerando la simulación de confiabilidad con la modelación de los parámetros estructurales utilizando el campo aleatorio, en la figura (10.22) se comparan las curvas de probabilidad en función del nivel umbral considerando $\beta = 1$ (un valor intermedio). En la tabla (10.16) se presentan los correspondientes valores de probabilidad de falla.

Modelo	P_{falla}
Est.	3.82E-04
D	3.82E-04
DI	-
DIR	-

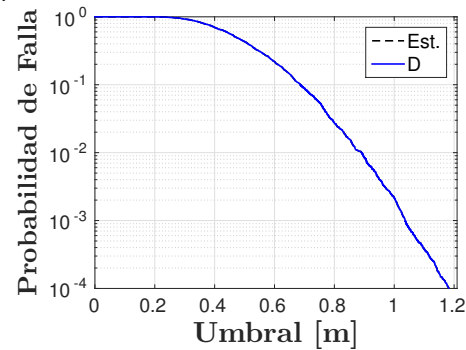


Tabla 10.16: Probabilidades de Falla $\beta = 1$

Figura 10.22: P_{falla} vs Nivel umbral

Para revisar los efectos de la interpolación y corrección se presentan en la figura(10.23) las curvas de probabilidad analizando solo los efectos de la interpolación y en la figura (10.24) las curvas de probabilidad de falla analizando los efectos de la interpolación y corrección. En las tablas (10.17) y (10.18) se presentan las correspondientes tablas con las probabilidades de falla.

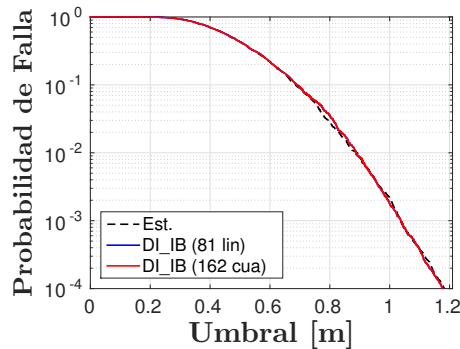


Figura 10.23: P_{falla} vs Nivel umbral DI_IB

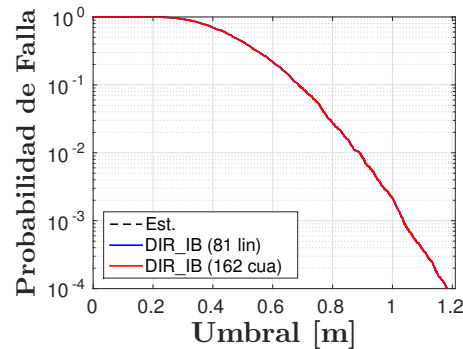


Figura 10.24: P_{falla} vs Nivel umbral DIR_IB

Modelo	P_{falla}	error [%]
DI_IB (81 lin)	3.76E-04	1.57
DI_IB (162 cua)	3.76E-04	1.57

Tabla 10.17: Probabilidades de Falla $\beta = 1$

Modelo	P_{falla}	error [%]
DIR_IB (81 lin)	3.82E-04	0.00
DIR_IB (162 cua)	3.82E-04	0.00

Tabla 10.18: Probabilidades de Falla $\beta = 1$

Se observa que los errores son bastante pequeños con los distintos modelos. Por otro lado, el nulo error en el modelo D, nos indica que el modelo puede reducirse aun más. En los modelos DLIB se observa una pequeña diferencia respecto a la estructura en las curvas de probabilidad, lo cual se puede deber a que se utilizar pocos puntos de soporte. Este error, permite visualizar el efecto de la corrección en los modelos DIR_IB.

A modo de resumen de los tiempos de ejecución de los procesos de confiabilidad utilizando los modelos reducidos, en la tabla (10.19) se presenta una comparación de los tiempos asociados a la construcción de las matrices correspondientes a cada modelo reducido y al proceso de simulación *Subset*.

Modelo	Base [s]	Parametrización [s]	Confiabilidad [hr]	Total [hr]	<i>speed-up</i>
Estructura	0.1019	267.553	265*	265*	1.00
D	72.1012	14.548	13.4	13.5	19.6
DI	101.124	47.486	44	44	6.02
DIR	520.311	46.934	45	45	5.88
DLIB (81 lin)	3933	11.60	10.7	11.8	22.4
DLIB (162 cua)	7889	19.96	10.8	13.0	20.3
DIR_IB (81 lin)	4352	16.33	21.0	22.2	11.9
DIR_IB (162 cua)	8308	18.54	28.3	30.6	8.66

Tabla 10.19: Tiempos Subset (Los tiempos con * son estimados)

En cada proceso de *Subset* se realizaron 4 etapas, lo que equivale a 3700 re-análisis, considerando actualización, ensamblaje y respuesta. Se observa que los factores de aumento de velocidad (*speed-up*) son similares a los factores de tiempo en construir los modelos reducidos, quedando para el modelo DIR_IB con interpolación lineal en 12. Es importante mencionar que optimizando los codigos implementados estos factores se pueden mejorar en buena parte.

En este caso, domina el modelo DLIB (81lin) el cual es comparable al modelo D. Esto muestra que la correcta selección de número de modos de interfaz y de puntos de soporte puede mejorar los resultados asociados a cada modelo reducido.

Conclusiones

En esta tesis se ha propuesto la utilización de interpolaciones de los modos de interfaz en las técnicas de reducción de modelos de elementos finitos. De los resultados en los ejemplos de aplicación queda demostrada la utilidad que tienen las técnicas de reducción de modelos y su parametrización eficiente, en simulaciones basadas en re-análisis. Es importante mencionar que a medida que los modelos tienen más grados de libertad, los factores de aumento de velocidad (*speed-up*) fueron creciendo, incluso al considerar el problema con no-linealidades singulares.

La utilización de la matriz de corrección \mathbf{T}_R constante en el valor nominal, permite mejorar los resultados de la interpolación. De esta forma, se tiene una técnica bastante eficiente para la resolución de los problemas de simulación compleja.

Respecto al tipo de interpolación se concluye que las técnicas cuadráticas mejoran la aproximación respecto a las lineales, con la desventaja del aumento en el costo de generación de la base de puntos de soporte. Este problema se puede solucionar utilizando bases pequeñas que no sean construidas desde una base de puntos lineales demasiado grande (como lo fue en los análisis realizados). Se debe profundizar en la cantidad y forma de selección de los puntos de soporte necesarios para obtener el nivel de error deseado para las distintas simulaciones.

La utilización de puntos de soporte adaptativos ha mostrado tener buenos resultados, con la ventaja de ser más general al momento de seleccionar los puntos de soporte. Adicionalmente, los códigos implementados para esta técnica, permiten extender la utilización de la matriz de corrección abarcando de mejor forma el espacio de análisis. Esto es gracias a que las parametrizaciones se realizan desde puntos nominales que se van moviendo. Lo anterior, puede ser útil para problemas de diseño optimizado.

La comparación de las subestructuraciones para el modelo de edificio del capítulo (8) muestra que la correcta selección de subestructuras, puede ser de gran influencia en los costos computacionales de generación de los modelos reducidos. La propuesta de guiar la parametrización en base a la subestructuración eficiente debe ser analizada con más modelos estructurales, para entender de mejor forma como enfrentar la división del modelo de elementos finitos.

Líneas de investigación futuras apuntan a ampliar lo propuesto en este documento. Temas específicos para estas líneas de investigación incluyen:

- La consideración de ejemplos que involucren subestructuras dependientes de varios parámetros, lo cual puede ser enfrentado en base a interpolaciones como las presentadas.
- La aplicación del método propuesto en aplicaciones de identificación de parámetros estructurales .
- La expansión del dominio de análisis de confiabilidad con las respectivas técnicas de interpolación, para ser utilizados en problema de optimización de diseño.

Muchos de estos temas de investigación se encuentran actualmente en proceso de investigación.

Modal Assurance Criterion

Una de las herramientas más populares para cuantificar la comparación de vectores propios es el *Modal Assurance Criterion* (MAC). El MAC es un indicador estadístico que se utiliza para cuantificar la consistencia entre pares de modos de vibrar. Se caracteriza por ser más sensible para diferencias grandes y relativamente poco sensible ante diferencias más pequeñas. El MAC solo se aplica a modos de vibrar, lo que significa que es necesario realizar un análisis por separado para las frecuencias del sistema.

En este trabajo de tesis se utilizan los valores del MAC para comparar los modos de vibrar de dos modelos estructurales.

A.1. Cálculo del MAC

El MAC es calculado como el producto escalar normalizado de dos conjuntos de vectores $\{\varphi_A\}_i$, $i = 1, \dots, n_a$, y $\{\varphi_B\}_j$, $j = 1, \dots, n_b$. Los escalares resultantes se almacenan en la matriz

$$\mathbf{MAC}(i, j) = \frac{|\{\varphi_A\}_i^T \{\varphi_B\}_j|^2}{\left(\{\varphi_A\}_i^T \{\varphi_A\}_i\right) \left(\{\varphi_B\}_j^T \{\varphi_B\}_j\right)} \quad (\text{A.1})$$

Los valores del MAC van desde 0 a 1, donde 1 indica que los modos son completamente consistentes.

Definición Interfaces

Para la definición de interfaces entre subestructuras, se generó un algoritmo de clasificación de grados de libertad. Se genera una matriz de dimensión $n_b \times N_s$, cada fila se rellena con 1 si el grado de libertad de borde x_b^j , $j = 1, \dots, n_b$ pertenece a la subestructura s , $s = 1, \dots, N_s$ y con 0 si no pertenece. Al terminar de construir esta matriz se filtran en vertical las combinaciones binarias de 1 y 0, con lo que resultan un número N_I de interfaces independientes.

En la siguiente figura se presenta el mapa interfaces para el modelo $m-1$. El cual posee 8 interfaces y 16 subestructuras. Cada fila representa una interfaz independiente, mientras que las componentes de la fila, representan las subestructuras que aportan grados de libertad de borde a la correspondiente interfaz.

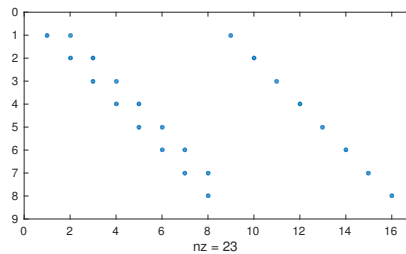


Figura B.1: Mapa de interfaces $t-1$

En la siguiente figura se presenta el mapa interfaces para el modelo $a-1$. El cual posee 36 interfaces y 49 subestructuras.

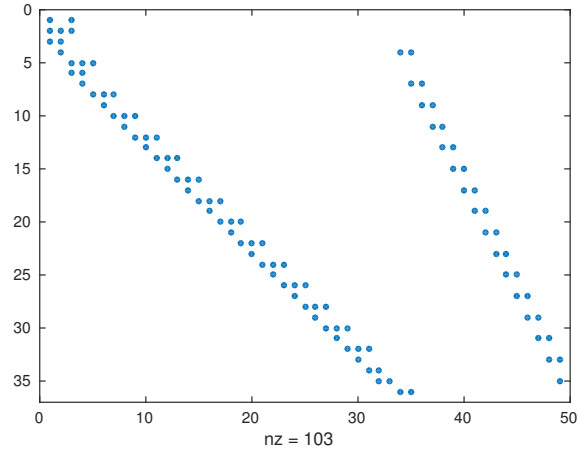


Figura B.2: Mapa de interfaces

En la siguiente figura se presenta el mapa interfaces para el modelo $a-2$. El cual posee 15 interfaces y 9 subestructuras.

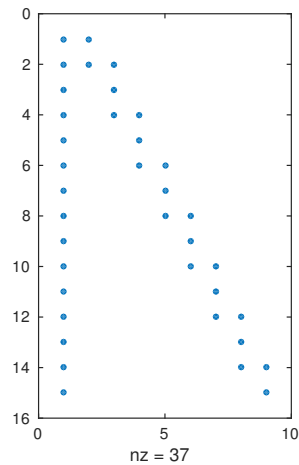


Figura B.3: Mapa de interfaces

En la siguiente figura se presenta el mapa interfaces para el modelo $t-1$. El cual posee 196 interfaces y 126 subestructuras.

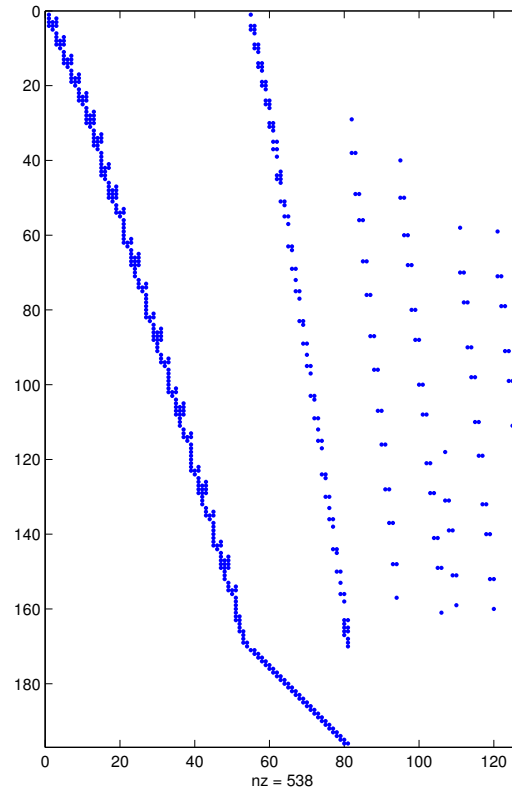


Figura B.4: Mapa de interfaces

Bibliografía

- [1] HA. Jensen, E. Millas, D. Kusanovic, C. Papadimitriou. Model-reduction techniques for Bayesian finite element model updating using dynamic response data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279:301–324. 2014.
- [2] C. Papadimitriou and D. Ch. Papadioti. Component mode synthesis techniques for finite element model updating. *Computers and Structures*, 126:15–28, 2013.
- [3] D. Straub and I. Papaioannou. Bayesian updating with structural reliability methods. *Journal of Engineering Mechanics* 141(3): 04014134, 2015.
- [4] E. Zio and N. Pedroni. Monte Carlo simulation-based sensitivity analysis of the model of a thermal-hydraulic passive system. *Reliability Engineering and System Safety*, 107:90–106, 2012.
- [5] H.J. Pradlwarter, G.I. Schuëller, and G.S. Szekely. Random eigenvalue problems for large systems. *Computers and Structures*, 80:2415–2424, 2002.
- [6] HA. Jensen, F. Mayorga C. Papadimitriou. Reliability sensitivity analysis of stochastic finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296:327–353, 2015.
- [7] R.R Craig Jr. and M.C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(5):678-685, 1965.
- [8] R.R Craig Jr. Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods, John Wiley & Sons. New York, 1981.
- [9] Muñoz, Alvaro. Técnicas de reducción aplicadas a modelos de elementos finitos estocásticos. Valparaíso: Universidad Técnica Federico Santa Maria, 2016.
- [10] F. Bourquin, and F. d’Hennezel. Numerical study of an intrinsic component mode synthesis method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97:49-76. 1992.
- [11] E. Balmes. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference*. Bethel, CT., Vol 1:204-210. 1996.
- [12] D.M. Tran. Component mode synthesis using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry. *Computers and Structures*, 79: 209-222. 2001.
- [13] Y. Aoyama and G. Yagawa. Component mode synthesis for large scale structural eigenanalysis. *Computer and Structures*, 79(6): 605-615. 2001.

-
- [14] M.P. Castanier, Y.C. Tan and C. Pierre. Characteristic constraint modes for component mode synthesis. *AIAA Journal*, 39(6): 1182-1186. 2001.
- [15] Y.C Tan, P. Castanier and C. Pierre. Efficient reduced order modeling of low to mid frequency vibration and power flow in complex structures. *Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference*, Bethel, CT, Vol.2: 1070-1076. 2001.
- [16] J. Kim and P.S. Lee, An enhanced Craig-Bampton method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 103: 79-93, 2015.
- [17] K.J Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [18] C.A. Schenk, H.J. Pradlwarter, G.I. Schuëller. Non-stationary response of large, non-linear finite element systems under stochastic loading. *Computers and Structures*, 83:1086-1102, 2005.
- [19] S.H. Boo, J.G. Kim and P.S. Lee. Error estimation of the automated multi-level substructuring method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106:927-950, 2016.
- [20] H.A. Jensen, V. Araya, A. Muñoz, M. Valdebenito. A Physical Domain-Based Substructuring as Framework for an Effective Dynamic Modeling and Reanalysis of Systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, En Prensa.
- [21] B. Goller, H.J. Pradlwarter, and G.I. Schuëller. An Interpolation scheme for the approximation of dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289:409-428, 2015.
- [22] T. Baber, Y. Wen, Random vibration hysteretic, degrading systems. *J. Eng. Mech. Div.* 1981;107(6):1069-1087
- [23] Park YJ, Wen YK, Ang AH. Random vibration of hysteretic systems under bi-directional ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1986;14(4):543-557.
- [24] H.A. Jensen, A. Muñoz, C. Papadimitriou, C. Vergara. An enhanced substructure coupling technique for dynamic re-analyses: Application to simulation-based problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307(2016) 215-234.
- [25] E. L. Wilson. Three dimensional static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering. *Computers and Structures* (1998).
- [26] H.A, Jensen. A. Muñoz, C, Papadimitriou and E, Millas. Model reduction techniques for reliability-based design problems of complex structural systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 149:204-217. 2016.
- [27] P. Angelikopoulos, C. Papadimitriou and P. Koumoutsakos. X-TMCMC: Adaptive kriging for Bayesian inverse modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289:409-428, 2015.

- [28] H.A Jensen, C. Esse, V.Araya, and C. Papadimitriou. Implementation of an adaptive meta-model for Bayesian finite element model updating using dynamic response data. *Reliability Engineering and System Safety*. accepted, 2016.
- [29] Trefethen, Lloyd N. and Bau, David, *Linear Algebra*. ISBN: 978-0-898713-61-9.
- [30] McKay, M.D.; Beckman, R.J.; Conover, W.J. (May 1979). A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. American Statistical Association. 21 (2): 239?245. ISSN 0040-1706. JSTOR 1268522. OSTI 5236110. doi:10.2307/1268522.
- [31] Mahalanobis, Prasanta Chandra (1936). On the generalised distance in statistics. Proceedings of the National Institute of Sciences of India. 2 (1): 49?55.
- [32] Deza, Elena; Deza, Michel Marie (2009). Encyclopedia of Distances. Springer. p. 94.
- [33] Soong T. and Grigoriu M. *Random vibration of mechanical and structural systems*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall; 1993.
- [34] G.S. Fishman. *Monte Carlo: concepts, algorithms and applications*. Springer, New York, NY, 1996.
- [35] S.K. Au and J.L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4):263?277, 2001.
- [36] J. Ching, S.K. Au, and J.L. Beck. Reliability estimation for dynamical systems subject to stochastic excitation using subset simulation with splitting. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1557?1579, 2005.
- [37] K. M. Zuev, J.L. Beck, S. K. Au, L. Katafygiotis. Bayesian post-processor and other enhancements of Subset Simulation for estimating failure probabilities in high dimensions. *Computers and Structures*, 92-92:283?296. 2012.
- [38] N. Metropolis and S. Ulam. The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335?341, 1949.
- [39] Franco, Mayorga. Estimación de la sensibilidad de la confiabilidad de sistemas estructurales no lineales bajo excitación estocástica. Valparaíso: Universidad Técnica Federico Santa María, 2016.
- [40] G.P. Mavroeidis and A.S. Papageorgiou. A mathematical representation of near-fault ground motions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(3):1099-1131, 2003.
- [41] D.M. Boore. Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and Applied Geophysics*, 160(3-4):635?676, 2003.
- [42] G.M. Atkinson and W. Silva. Stochastic modeling of California ground motions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90(2):255?274, 2000.

- [43] D.M. Boore, W.B. Joyner, and T.E. Fumal. Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western north american earthquakes: A summary of recent work. *Seismological Research Letters*, 68(1):128-153, 1997.
- [44] J.G. Anderson and S.E. Hough. A model for the shape of the Fourier amplitude spectrum of acceleration at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(5):1969-1993, 1984.
- [45] J. Hurtado, A. Barbat, Monte Carlo technique in computational stochastic mechanics. *Arch. Comput. Engrg.* 5(1)(1998) 3-29.
- [46] G. Schuëller. Development in stochastic structural mechanics. *Arch. Appl. Mech.* 75(2006) 755-773.
- [47] B. Mace, P. Shorter. A local modal/perturbational method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain properties. *J. Sound Vib.* 242(5)(2001) 793-811.
- [48] H. Pradlwarter. G. Schuëller. G. Székely. Random eigenvalue problems for large systems. *Comput. Struct.* 80(2002) 2415-2424.
- [49] M. Kleiber. T. Hien. *The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation.* John Wiley & Sons Ltd.,1992.
- [50] R. Ghanem, P. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach,* Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [51] D. Ghosh, R. Ghanem, J. Red-Horse, Analysis of eigenvalues and modal interaction of stochastic systems, *AIAA J.* 42(10)(2005) 2196-2201.
- [52] A.Giunta, M. Eldred, J. Castro, Uncertainty quantification using response surface approximation, in: *Proceedings of the 9th ASCE Joint Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability,* Albuquerque, NM,2007.
- [53] L. Pichler, H. Pradlwarter, G. Schuëller. A mode-based meta-model for the frequency response functions of uncertain structural systems, *Comput. Struct.* 87(5-6)(2009) 332-341.
- [54] M. Pastor and M. Binda and Tomás Harcarik. Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering,* (48)543-548, 2012.
- [55] H. Jensen, J. Sepulveda, On the reliability-based design of structures including passive energy dissipation systems, *Structural Safety* 34 (2011) 390-400.
- [56] T. Baber, Y. Wen, Random vibration hysteretic, degrading systems., *Journal of Engineering Mechanics* 107 (6) (1981) 1069-1087.