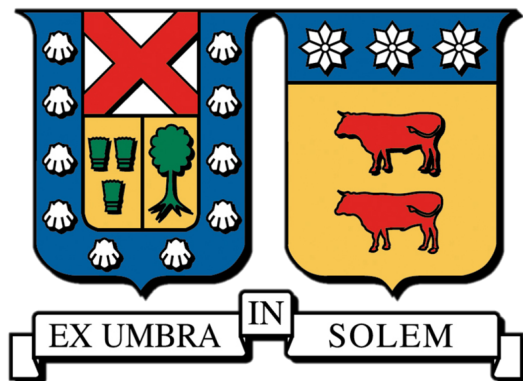


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS  
SANTIAGO DE CHILE



---

Un enfoque de descomposición de Benders para resolver  
un modelo binivel con múltiples seguidores en la  
planificación y programación de la cosecha agrícola

Carlos Villanueva Hernández

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA INDUSTRIAL Y AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA:

**Dr. Victor Albornoz S.**

PROFESORES CORREFERENTES:

**Dr. Fernando Camacho V.**

**Dr. Pablo Escalona R.**

Julio 2025



## CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

### 1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

**Tipo de monografía (marcar una opción):**  Memoria o trabajo de título;  Tesis de Postgrado;

**Título del trabajo:** Un enfoque de descomposición de Benders para resolver un modelo binivel con múltiples seguidores en la planificación y programación de la cosecha agrícola

**Nombre del candidato(a):** Carlos Fernando Villanueva Hernández

**Carrera / Grado:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería Industrial

**Campus:** Casa Central Valparaíso ; **Departamento:** Industrias

### 2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Víctor Manuel Albornoz Sanhueza, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

### 3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

6 meses;  12 meses;  2 años;  3 años;  5 años;  10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

### 4.- FIRMAS

**Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:**

Fecha: 26/8/2025 ; Firma: Víctor M. Albornoz S.

**Estudiante o Candidato(a):**

Fecha: 26/8/2025 ; Firma: [Firma manuscrita]

*Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.*

## Agradecimientos

¡Gracias! A mi familia por el apoyo en las muchas horas que tomó este trabajo.

¡Gracias! A mis amigos más cercanos, que me motivaron a continuar con esta travesía.

¡Gracias! A mis muchos compañeros que tuve en esta universidad, que aportaron con muchas palabras de apoyo y risas.

¡Gracias! A mi profesor por la paciencia, dedicación y preocupación.

## Resumen Ejecutivo

Esta tesis aborda un problema de planificación y programación de la cosecha selectiva en el ámbito de una cadena de suministro agrícola. En este contexto, el desafío radica en coordinar las decisiones de cosecha del productor con las necesidades de múltiples distribuidores, quienes compiten entre sí por obtener el producto. Este problema se formula mediante un modelo jerárquico de programación binivel con múltiples seguidores, donde el productor, que actúa como líder, define las áreas de manejo para la cosecha y las cantidades a ofertar. Por su parte, los distribuidores, como seguidores, toman decisiones sobre las cantidades a adquirir para satisfacer la demanda de sus mercados, lo cual genera una interacción estratégica entre las partes.

El modelo propuesto incorpora la delimitación de zonas de manejo de un terreno, considerando la variabilidad espacial del suelo y de la producción agrícola, lo que permite mejorar tanto la calidad como el rendimiento de los cultivos. Además, la investigación introduce un enfoque estocástico para incorporar la incertidumbre en las decisiones del productor y de los distribuidores, especialmente en lo que respecta a la demanda de productos y las condiciones del mercado.

Para resolver el problema, se propone una estrategia algorítmica basada en la Descomposición de Benders. La descomposición permite dividir el problema en un problema maestro y un subproblema binivel continuo, que es reformulado como un único nivel utilizando las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Esta reformulación reduce la complejidad computacional del problema. Además, se utiliza un enfoque Big-M para representar las restricciones no lineales de complementariedad y asegurar soluciones viables. Esta reformulación entrega información relevante a partir de la cual se extraen los cortes de Benders al problema maestro,

Los resultados obtenidos en diferentes instancias resaltan la importancia del modelo y la metodología aplicada, mostrando su capacidad para generar soluciones adecuadas que permiten enfrentar de manera efectiva los desafíos del proceso de cosecha selectiva en un entorno agrícola sujeto a incertidumbre.

En resumen, este trabajo presenta un enfoque innovador que combina la programación

binivel estocástica con múltiples seguidores y la descomposición de Benders para abordar de manera efectiva los desafíos inherentes a la planificación de cosecha selectiva en cadenas de suministro agrícolas. Las contribuciones de esta investigación no solo son relevantes desde el punto de vista teórico, sino que también tienen importantes implicaciones prácticas para la gestión eficiente de la producción y distribución de productos agrícolas en mercados competitivos y sujetos a incertidumbre.

## Abstract

This paper addresses a selective harvest planning and scheduling problem in the context of a fresh agri-food supply chain. The problem considers an integrated approach, incorporating the definition of management zones for harvesting, the harvest problem itself and the coordination between the producer and the wholesalers. The problem is represented by a mixed-integer linear bilevel multi-followers programming model that considers the hierarchy between the producer (leader) and the wholesalers (followers). The producer plans the harvest for the different management zones into which the farm is subdivided and the production levels to be offered to each wholesaler, while the wholesalers decide the quantity of product to be purchased to satisfy their demand requirements. Additionally, an algorithmic strategy of resolution based on the Benders decomposition method is proposed where the master problem contemplates the integer decisions of the model and the subproblem is a bilevel model in continuous variables which is reformulated in a single level using the Karush-Kuhn-Tucker conditions. The results achieved in a set of instances are shown to highlight the importance of the problem and the proposed strategy.

# Tabla de Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivos . . . . .	10
1.1.1	Generales . . . . .	10
1.1.2	Específicos . . . . .	10
1.2	Estructura . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>12</b>
2.1	Optimización . . . . .	12
2.1.1	Programación lineal . . . . .	16
2.1.2	Dualidad . . . . .	17
2.1.3	Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker . . . . .	18
2.1.4	Programación lineal entera . . . . .	19
2.1.5	Programación estocástica . . . . .	21
2.2	Método de Descomposición de Benders . . . . .	23
2.3	Programación Binivel . . . . .	26
2.3.1	Programación lineal binivel: variables continuas . . . . .	27
2.3.2	Métodos clásicos de resolución . . . . .	29
2.3.3	Enoque Kunh–Tucker . . . . .	30
2.3.4	Programación lineal binivel: variables discretas . . . . .	31
2.3.5	Enoques clásicos . . . . .	32
2.3.6	Programación lineal binivel y Descomposición de Benders . . . . .	33
2.3.7	Programación binivel con múltiples seguidores . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>45</b>
3.1	Descripción del problema . . . . .	45
3.2	Problema Binivel Estocástico . . . . .	47
3.3	Problema Binivel Estocástico Con Múltiples Seguidores . . . . .	51
3.4	Reformulación . . . . .	53

3.4.1	Subproblema . . . . .	54
3.4.2	Aplicación del enfoque Karush-Kunh-Tucker . . . . .	54
3.4.3	Aplicación del enfoque Big-M . . . . .	57
3.4.4	Problema de Programación Entera Mixta . . . . .	57
3.4.5	Problema de Programación Lineal . . . . .	58
3.4.6	Problema Maestro . . . . .	59
3.4.7	Problema Maestro Reducido . . . . .	61
3.5	Benders Con Múltiples Cortes . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Caso de Estudio</b>	<b>69</b>
4.1	Descripción . . . . .	69
4.2	Instancias . . . . .	69
4.3	Resultados y discusión . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>

# 1. Introducción

En un escenario marcado por la creciente incertidumbre debido a tensiones geopolíticas, condiciones climáticas adversas y enfermedades que afectan a animales y plantas, junto con la volatilidad en los precios de los principales insumos agrícolas, el panorama global de la agricultura, la ganadería y la pesca se presenta como un desafío considerable. A pesar de estos obstáculos, las proyecciones para los próximos 10 años indican que la producción mundial en estos sectores experimentará un crecimiento anual promedio del 1,1 % (OECD/FAO, 2023). Además, se estima que el comercio global de productos agrícolas básicos experimentará un aumento anual del 1,3 % (OECD/FAO, 2023).

Sin embargo, se anticipa un continuo aumento en la demanda alimentaria, proyectando un crecimiento del 1,3 % anual hasta el año 2032 (OECD/FAO, 2023). Este incremento, sin embargo, implica un aumento en la proporción de productos agrícolas destinados al consumo humano. Simultáneamente, surge la necesidad de explorar nuevas técnicas y tecnologías que garanticen la calidad y frescura de las frutas y verduras, ya que se estima que las mejoras en la calidad y rendimiento representarán el 79 % del crecimiento de la producción mundial de cultivos (OECD/FAO, 2023). En este contexto, resulta fundamental establecer un proceso de manipulación adecuado y optimizar las operaciones de cosecha, lo que permitirá asegurar una buena calidad de la fruta, reducir costos en el proceso y, como consecuencia, brindar al productor mayores beneficios económicos (Ampatzidis et al., 2014).

En el ámbito agrícola, los cambios en las propiedades del suelo son un factor decisivo que afecta la calidad del producto. Calidad y rendimiento de los cultivos (Albornoz et al., 2015). El uso de índices de suelo y vegetación para identificar áreas de manejo específicas permite una planificación de la cosecha, una optimización de la calidad y del rendimiento más precisas. En la literatura se han explorado varios métodos para identificar áreas de manejo a partir de datos de muestras de suelo y vegetación utilizando métodos de agrupamiento, como los estudios de suelos y sitios Fraisse et al., 2001 y Schepers et al., 2004. Otros métodos, como Carr et al., 1991, zonificación básica en mapas topográficos, y Bhatti et al., 1991 y Johnson et al., 2003 se centran en el muestreo de suelos.

Por otro lado, otros métodos utilizan mapas con datos combinados dados. de varias tem-

poradas, por ejemplo [Blackmore, 2013](#), [Diker et al., 2004](#) y [Pedroso et al., 2010](#). Algunos estudios combinan muestras de suelo y mapas de rendimiento, como los estudios [Franzen and Nanna, 2003](#) y [Hornung et al., 2003](#). Un ejemplo de un enfoque innovador es el uso de algoritmos de segmentación de cuencas, como [Roudier et al., 2008](#), que permiten que las áreas de manejo se adapten a morfologías específicas.

La clasificación de áreas de gestión también utiliza técnicas de análisis de componentes principales, clustering y algoritmos como K-medias o K-medias difusas, métodos utilizados en los estudios [Ortega et al., 2002](#), [Ortega and Santibáñez, 2007](#) y [Whelan et al., 2010](#) para Mejora la uniformidad dentro del área generada.

Sin embargo, estos métodos tienen limitaciones debido a la forma irregular de los gráficos generados, lo que los hace difíciles de usar. maquinaria agrícola. Para resolver este problema [Cid-Garcia et al., 2013](#) desarrolló un modelo para formar un área de control rectangular mediante programación entera binaria, y esta sugerencia se aplicó al diseño del sistema de riego [Haghverdi et al., 2015](#) Y mejorado mediante análisis de variograma [Zhang et al., 2016](#) para determinar el tamaño de cuadrícula óptimo.

Posteriormente, [Albornoz et al., 2015](#) propuso un modelo de optimización de objetos biológicos para reducir el número de regiones de control y maximizar su homogeneidad. [Saez and Albornoz, 2016](#) luego amplió el modelo con un enfoque estocástico de dos etapas, y [Albornoz and Ñanco, 2016](#) desarrolló un método de generación de columnas para resolver el modelo determinista original. A su vez, [Albornoz et al., 2019](#) adoptó esta estrategia para dar cuenta de incertidumbres futuras en los índices de suelo y vegetación. En su último desarrollo, [Albornoz and Zamora, 2021](#) amplía el modelo para incorporar restricciones vecinales en la planificación de cultivos, ayudando a reducir la propagación de plagas y optimizar la utilización de nutrientes, mientras [Wolfert et al., 2017](#) implementa sistemáticamente recomendaciones para apoyar la toma de decisiones agrícolas.

Además, el momento óptimo de cosecha es crucial para los productores. La planificación selectiva de la cosecha permite definir cronogramas detallados en función de la disponibilidad de recursos, optimizando la calidad y el rendimiento. Modelos de optimización específicos, como el desarrollado para la caña de azúcar por [Jena and Poggi, 2013](#) y el enfoque desarrollado por [González-Araya et al., 2015](#) para la cosecha de frutas, integran aspectos de gestión de

costos y calidad del proceso de cosecha.

La creciente variabilidad en la demanda y los cambios en las condiciones de los precios del mercado han llevado al desarrollo de métodos de optimización estocásticos y robustos, como [Herrera-Cáceres et al., 2017](#), que integra la calidad y disponibilidad de los recursos, y [Albornoz and Zamora, 2021](#), que Examina las prácticas de gestión agrícola en condiciones específicas. Como sugiere [Wolfert et al., 2017](#), estas herramientas integradas en los sistemas de apoyo a las decisiones facilitan la toma de decisiones en tiempo real en condiciones agrícolas cambiantes.

Por otro lado, la sostenibilidad agrícola se ha convertido en un factor clave para gestionar eficazmente la agricultura. Estos recursos, como el agua, los nutrientes y los pesticidas. Delinear zonas de manejo que promuevan prácticas sustentables es fundamental para minimizar los impactos ambientales y optimizar el uso de recursos, como muestra [Albornoz and Zamora, 2021](#) en su modelo de límites comunitarios diseñado para reducir la propagación de plagas y mejorar la eficiencia del uso de nutrientes en la superficie de esa manera. Finalmente, métodos como el análisis de componentes principales y los algoritmos de agrupamiento y la ciencia de datos están redefiniendo los métodos de zonificación agrícola al optimizar la variabilidad del paisaje y complementar los métodos de zonificación agrícola. Precisión de las aplicaciones de datos brutos ([Gavioli et al., 2016](#); [Zhang et al., 2016](#)). El último avance en agricultura de precisión es el uso de modelos de optimización de dos etapas o dos niveles para coordinar decisiones en todos los niveles de la cadena de suministro agrícola. En este caso [Albornoz and Vera, 2023](#) se propone un modelo de optimización estocástico de dos etapas para la planificación de la cosecha. Integre designaciones de áreas de gestión y planes de cosecha selectiva para maximizar los beneficios para productores y distribuidores en condiciones inciertas. Estos desarrollos resaltan la importancia de la innovación en la agricultura de precisión y su potencial para satisfacer las necesidades alimentarias y la necesidad de prácticas sostenibles ([Testuri et al., 2019](#)).

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Generales

Formular y resolver un modelo de planificación de cosecha en una cadena de suministro agrícola jerárquica, que integre la definición de zonas de manejo para la cosecha por parte del productor, así como la distribución de productos gestionada por múltiples distribuidores, incorporando factores de incertidumbre.

### 1.1.2. Específicos

- Desarrollar un modelo de optimización binivel estocástico que incorpore a un productor (líder) que se encargue de la planificación de zonas de manejo para la cosecha y a múltiples distribuidores (seguidores) que se ocupen de la distribución del producto.
- Modelar y analizar la interacción entre el productor y los distribuidores en una cadena de suministro agrícola, donde se optimicen las decisiones del productor en función de la demanda de los distribuidores, considerando la incertidumbre en los datos.
- Analizar la interacción y la competencia entre los distribuidores en términos de demanda y precios.
- Implementar el enfoque de descomposición de Benders, adaptado a problemas de programación binivel con múltiples seguidores, para resolver el modelo de planificación de la cosecha.
- Determinar un valor adecuado de la constante  $M$  en el enfoque Big- $M$  que garantice la viabilidad y precisión de las soluciones, evitando tanto el sobredimensionamiento como el subdimensionamiento de las restricciones.
- Analizar los resultados obtenidos para validar la metodología propuesta y plantear las principales aportes y conclusiones del trabajo.

## 1.2. Estructura

En lo que sigue la estructura de esta tesis se compone de otros cuatro capítulos. En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico, donde se abordan los tópicos centrales de la investigación. El tercer capítulo expone la metodología propuesta, detallando los modelos de optimización matemática, la problemática a resolver y la estrategia seleccionada para su solución. En el cuarto capítulo, se presentan los resultados principales de este trabajo, acompañados de su correspondiente discusión. Finalmente, en el quinto capítulo, se ofrecen las conclusiones obtenidas, recomendaciones y posibles extensiones futuras de esta investigación.

## 2. Marco Teórico

### 2.1. Optimización

La historia de la optimización matemática se remonta al Renacimiento, donde problemas de maximización y minimización aparecieron en diversos contextos. Los primeros problemas documentados de optimización se encuentra en los escritos de Fermat y Lagrange, matemáticos quienes realizaron contribuciones significativas al campo. Fermat desarrolló métodos para encontrar máximos y mínimos utilizando técnicas geométricas, mientras que Lagrange introdujo el concepto de multiplicadores de Lagrange en el siglo XVIII, que resultó ser esencial para la resolución de problemas de optimización con restricciones.

El siglo XIX fue testigo de avances notables, especialmente con la obra de Karl Weierstrass y Augustin-Louis Cauchy en el cálculo de variaciones, un área fundamental de la optimización. Sin embargo, la optimización matemática como disciplina independiente alcanza un nuevo auge el siglo XX, donde la Investigación de Operaciones desempeñó un papel crucial en su desarrollo y aplicación.

Durante la primera mitad del siglo XX, con el desarrollo de la teoría de conjuntos y el análisis funcional, la optimización matemática encontró una base sólida. La programación lineal, una rama importante de la optimización, se desarrolló durante la Segunda Guerra Mundial, cuando matemáticos como George Dantzig aplicaron métodos matemáticos para resolver problemas logísticos y de planificación militar ([Hillier and Lieberman, 2023](#)).

Con el tiempo, la optimización se expandió a diversas áreas, incluyendo la ingeniería, la economía, la ciencia de la computación y la estadística. La formulación de modelos matemáticos para representar problemas del mundo real y la aplicación de técnicas de optimización se convirtieron en prácticas comunes en la investigación y el desarrollo.

En las últimas décadas, el auge de la computación y la capacidad para resolver problemas de optimización de manera eficiente ha llevado a avances significativos. Algoritmos de optimización numérica para los diversos y nuevos modelos de optimización han revolucionado la forma en que abordamos problemas complejos de optimización en diversas disciplinas.

En la actualidad, la optimización matemática desempeña un papel crucial en la toma

de decisiones en campos tan variados como el diseño de redes, determinación de rutas, rotación de tripulantes, problemas de transporte, administración de inventarios, gráficas por computadora, ingeniería de software, bases de datos, finanzas, ingeniería y optimización combinatoria, entre otras (Hillier and Lieberman, 2023).

La optimización es una herramienta muy potente que permite al tomador de decisiones escoger la mejor alternativa de un número elevadísimo o infinito de posibilidades, empleando un modelo matemático propio de la Programación Matemática (Sioshansi and Conejo, 2017). En este sentido, para resolver un problema de optimización debemos recurrir a un modelo, se entiende por modelo a una abstracción de un problema real, al cual se le aplicarán ciertas consideraciones matemáticas, permitiendo obtener resultados óptimos (Pérez, 2020).

Los componentes principales de un problema de optimización son:

- **Variables de decisión:** Las variables de decisión son aquellas sobre las que se tiene control en el problema y representan las elecciones posibles dentro de un conjunto definido.
- **Función objetivo:** La función objetivo es una expresión matemática que representa el criterio que se busca maximizar o minimizar en el problema de optimización.
- **Restricciones:** Las restricciones son condiciones que deben cumplir las variables de decisión para que la solución sea viable dentro del contexto del problema.

Un problema de optimización matemática, o simplemente un problema de optimización, tiene la forma,

$$\text{mín } f_0(y) \tag{2.1a}$$

$$\text{s.t. } f_i(y) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.1b}$$

$$h_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, p \tag{2.1c}$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$  es la variable de optimización,  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función objetivo y  $f_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son a las funciones de las restricciones. Además, a las desigualdades  $f_i(y) \leq 0$  se llama restricciones de desigualdad, mientras que a las ecuaciones  $h_i(y) = 0$  se denomina restricciones de igualdad.

El campo de la optimización es ampliamente reconocido por su popularidad y la diversidad de teorías, métodos y software disponibles. La clasificación de los modelos de optimización desempeña un papel crucial al permitir la comprensión profunda de los problemas de optimización y facilitar la selección precisa de algoritmos. Cada tipo de problema de optimización presenta características únicas que pueden ser mejor abordadas por algoritmos específicos. Así, la clasificación adecuada ayuda a identificar cuál algoritmo se adapta mejor a las condiciones y restricciones particulares de cada caso, maximizando la eficiencia y la precisión en la resolución de problemas complejos.

La figura 2.1 muestra un desglose detallado de los enfoques comúnmente utilizados en optimización.

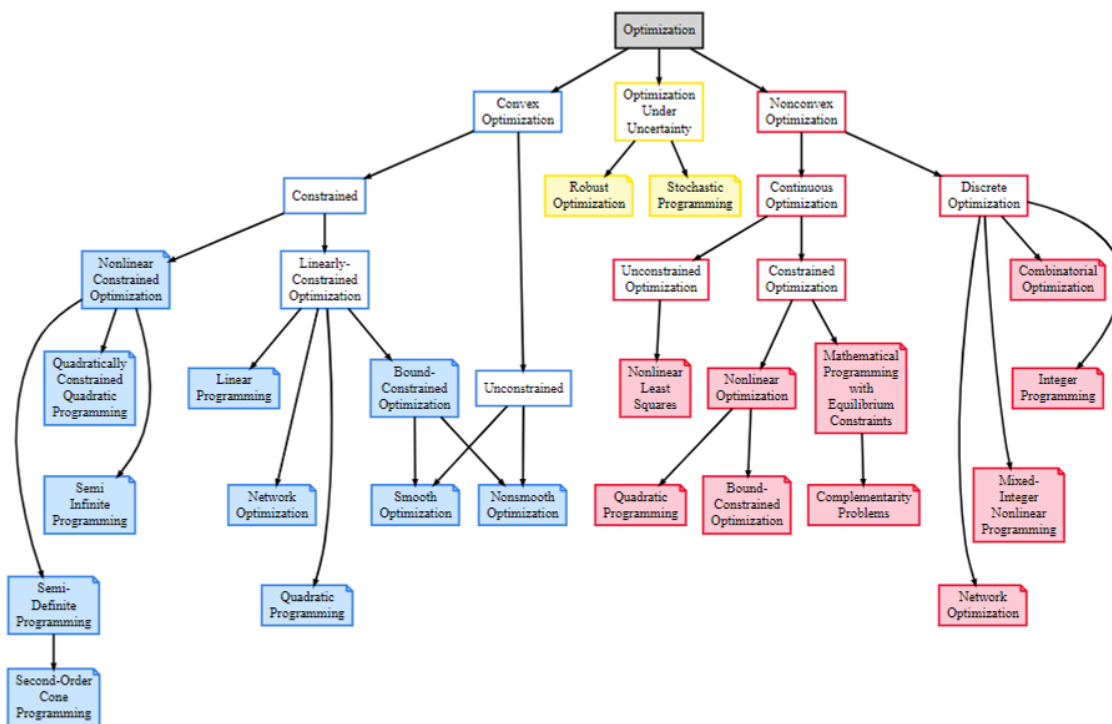


Figura 2.1: Tipos de problemas de optimización. (Fuente: [Guide, 2024](#))

- **Optimización Continua:** Se caracteriza por trabajar en un dominio continuo, donde las variables de decisión son continuas y pueden asumir cualquier valor dentro de un intervalo determinado.
- **Optimización Discreta:** En este tipo de problemas las variables pueden tomar sólo valores discretos, como números enteros. Este tipo de optimización es crucial en proble-

mas como la programación de horarios, asignación de tareas, problemas de red, entre otros.

- **Optimización Lineal:** La función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales. Este tipo de optimización es utilizado frecuentemente en modelos económicos y de producción.
- **Optimización No Lineal:** La función objetivo o alguna de las restricciones no son lineales. Este tipo de problemas es más complejo y abarca una amplia gama de aplicaciones, desde el diseño de estructuras hasta la gestión de carteras financieras.
- **Optimización Determinista:** Se asume que todos los datos son conocidos con precisión. Este enfoque es adecuado para sistemas donde la incertidumbre es mínima o puede ser ignorada.
- **Optimización Estocástica:** Se considera la incertidumbre en los datos, introduciendo variables aleatorias y distribuciones de probabilidad. Este enfoque es esencial en situaciones donde los datos futuros son inciertos, como en la gestión de inventarios y en las finanzas.
- **Optimización Convexa:** Los problemas convexos tienen la propiedad de que cualquier mínimo local es también un mínimo global. Este tipo de optimización es más fácil de resolver y tiene aplicaciones en muchas áreas científicas y de ingeniería.
- **Optimización No Convexa:** En este tipo de problemas los mínimos locales no necesariamente son mínimos globales, lo que complica la solución del problema. Es común en diseño industrial y optimización de procesos complejos.
- **Optimización Mono-objetivo:** Se enfoca en la optimización de una única función objetivo. Es utilizada en problemas donde un solo criterio de desempeño es suficiente.
- **Optimización Multi-objetivo:** Considera múltiples funciones objetivo simultáneamente. Es vital en áreas donde se deben balancear diferentes criterios, como en la ingeniería ambiental y la toma de decisiones en políticas públicas.

### 2.1.1. Programación lineal

Un problema de Programación Lineal (PL) u Optimización Lineal es un modelo de optimización donde su función objetivo lineal y sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. Este tipo de modelos es fundamental en la investigación de operaciones y la gestión de recursos, ya que permite encontrar la mejor solución posible para problemas que pueden ser modelados matemáticamente.

Los supuestos a través de los cuales se sustentan los problemas de Programación Lineal son:

- **Aditividad:** La contribución total de cada variable de decisión a la función objetivo y a las restricciones es la suma de sus contribuciones individuales.
- **Divisibilidad:** Las variables de decisión pueden tomar cualquier valor, incluyendo valores fraccionarios.
- **Proporcionalidad:** La relación entre las variables de decisión y la función objetivo, así como las restricciones, es lineal.

En la literatura, existen diferentes formas de representar un problema de Programación Lineal. Una de las más conocidas es mediante el uso de matrices ([Bard, 1998](#)), como se muestra a continuación:

$$\text{mín } cy \tag{2.2a}$$

$$\text{s.t. } Ay = b \tag{2.2b}$$

$$y \geq 0 \tag{2.2c}$$

donde  $c$  es un vector fila de  $n$  dimensiones,  $b$  un vector columna de  $m$  dimensiones,  $A$  una matriz de  $m \times n$  con  $m \leq n$ , y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Para resolver problemas de optimización, uno de los métodos clásicos es el **Método Simplex**, un algoritmo iterativo utilizado para problemas de programación lineal con más de dos variables ([Bazaraa et al., 2010](#)). El método comienza en un vértice de la región factible y se desplaza a lo largo de los vértices de esta región, buscando mejorar el valor de la función objetivo en cada iteración hasta alcanzar la solución óptima.

### 2.1.2. Dualidad

En la optimización lineal, cada problema tiene un problema asociado conocido como el problema dual. El problema original de optimización lineal se llama problema primal, y el dual mantiene relaciones fundamentales con el primal. Estas relaciones incluyen la estructura subyacente, la función objetivo, las restricciones y las variables, así como las propiedades de las soluciones de ambos problemas (Sioshansi and Conejo, 2017).

Para el problema de Programación Lineal (2.2), se puede definir el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  asociado, según se describe en Bard, 1998:

$$\mathcal{L}(y, \lambda, \mu) = cy + \lambda^T(Ay - b) - \mu^T y, \quad (2.3)$$

la función dual  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se define como el valor mínimo del Lagrangiano con respecto a  $y$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  y  $\mu \in \mathbb{R}^n$ :

$$g(\lambda, \mu) = \inf_y \mathcal{L}(y, \lambda, \mu), \quad (2.4)$$

Esta función dual proporciona un límite inferior para el valor óptimo  $p^*$  (es decir,  $cy^*$ ) del problema, siempre que  $\mu \geq 0$ :

$$g(\lambda, \mu) \leq p^* = cx^*, \quad (2.5)$$

Así entonces, la función dual es:

$$g(\lambda, \mu) = \inf_y \mathcal{L}(y, \lambda, \mu) = \begin{cases} -\lambda^T y & \text{si } c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0, \\ -\infty & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Se puede observar la propiedad del límite inferior,  $-\lambda^T b \leq cy^*$ , siempre que  $\mu \geq 0$  y  $c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0$ .

Dado que la función dual proporciona un límite inferior, surge la pregunta: ¿cuál es el mejor límite inferior que se puede obtener? Esto nos lleva al siguiente problema:

$$\max_{\lambda} \quad -\lambda^T b, \tag{2.7a}$$

$$\text{tal que} \quad c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0, \tag{2.7b}$$

$$\mu \geq 0, \tag{2.7c}$$

Utilizando la transitividad de  $\mu \geq 0$  y  $c + \lambda^T A - \mu^T = 0$ , obtenemos  $c + \lambda^T A \geq 0$ . Realizando el cambio  $-\lambda^T = \gamma^T$ , se obtiene:

$$\max_{\gamma} \quad \gamma^T b, \tag{2.8a}$$

$$\text{tal que} \quad A^T \gamma \leq c, \tag{2.8b}$$

Al problema (2.8) se le conoce como el problema dual del problema primal (2.2).

### 2.1.3. Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

En el ámbito de la optimización, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) juegan un papel fundamental para determinar la optimalidad de las soluciones en problemas PL. Consideremos el problema primal de programación lineal definido en (2.2) y su correspondiente problema dual (2.8), descrito mediante el valor mínimo del Lagrangiano en (2.4). Los valores óptimos de los problemas primal y dual deben cumplir ciertas condiciones cruciales para garantizar la optimalidad.

Para el problema primal, se define el Lagrangiano  $L(y, \lambda, \mu)$  como:

$$L(y, \lambda, \mu) = cy + \lambda^T (Ay - b) - \mu^T y \tag{2.9}$$

donde  $c$  es el vector de costos,  $A$  es la matriz de restricciones,  $b$  es el vector de recursos o lado derecho de las restricciones,  $\lambda$  y  $\mu$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de igualdad y naturaleza de las variables, respectivamente. Los puntos  $y^*, \lambda^*, \mu^*$  que minimizan el Lagrangiano deben satisfacer que el gradiente del Lagrangiano con respecto a  $x$  se iguale a cero:

$$\nabla_y L(y, \lambda^*, \mu^*) = c + \lambda^{*T} A - \mu^{*T} = 0 \quad (2.10)$$

De esta ecuación, derivamos el sistema de condiciones de KKT, que incluye tanto igualdades como desigualdades:

$$c + \lambda^{*T} A - \mu^{*T} = 0 \quad (2.11a)$$

$$Ay^* = b \quad (2.11b)$$

$$\lambda^{*T}(Ay^* - b) = 0 \quad (2.11c)$$

$$\mu^{*T} y^* = 0 \quad (2.11d)$$

$$y^* \geq 0 \quad (2.11e)$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (2.11f)$$

Estas condiciones, expresadas en (2.11), son necesarias y suficientes para la optimalidad en problemas de programación lineal, siempre que las funciones involucradas sean diferenciables y se satisfaga la dualidad fuerte. Es decir, cualquier par de soluciones óptimas, tanto del problema primal como del dual, debe cumplir con las condiciones KKT para ser considerado como óptimo (Boyd and Vandenberghe, 2004).

#### 2.1.4. Programación lineal entera

En muchas situaciones, como la planificación de la producción y la asignación de recursos, es necesario que algunas o todas las variables de decisión tomen valores enteros o binarios. Esto se debe a que ciertos aspectos de estos problemas son inherentemente discretos. Para abordar estos casos, se emplean modelos de programación lineal entera, que permiten representar adecuadamente la naturaleza discreta de las variables involucradas.

Algunas de las características más importantes de los componentes de este tipo de problemas son las siguientes (Bard, 1998):

- Las variables de decisión pueden ser exclusivamente enteras o binarias en algunos casos, mientras que en otros, algunas variables pueden tomar cualquier valor en los números reales.
- La función objetivo es una combinación lineal de las variables de decisión.

- Las restricciones son combinaciones lineales de las variables de decisión.

En la literatura, se distinguen cuatro tipos de problemas de programación lineal entera (Bard, 1998):

Programación Lineal Entera (ILP).

$$\text{mín } cx \tag{2.12a}$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \tag{2.12b}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.12c}$$

Programación Lineal Entera Binaria (BLP).

$$\text{mín } cx \tag{2.13a}$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \tag{2.13b}$$

$$x \in \{0, 1\} \tag{2.13c}$$

Programación Lineal Entera Mixta-Binaria (MIBLP).

$$\text{mín } cx + dy \tag{2.14a}$$

$$\text{s.t. } Ax + By \leq b \tag{2.14b}$$

$$x \in \{0, 1\} \tag{2.14c}$$

$$y \geq 0 \tag{2.14d}$$

Programación Lineal Entera Mixta (MILP).

$$\text{mín } cx + dy \tag{2.15a}$$

$$\text{s.t. } Ax + By \leq b \tag{2.15b}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.15c}$$

$$y \geq 0 \tag{2.15d}$$

donde  $c, d \in \mathbb{R}^n$  son vectores fila,  $b \in \mathbb{R}^m$  es un vector columna que representa los lados derechos de las restricciones,  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  con  $m \leq n$ ,  $B \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$  con  $m \leq p$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$  es la variable entera e  $y \in \mathbb{R}^p$  la variable continua, ambos no negativos.

Cada caso se diferencia del resto por la naturaleza de las variables. En el problema de

Programación Lineal Entera (2.12), todas las variables son enteras. En el problema de Programación Lineal Binaria (2.13), todas las variables son binarias. El problema de Programación Lineal Mixto-Binario (2.14) incluye variables binarias y continuas. Finalmente, el problema de Programación Lineal Mixta (2.15) cuenta con variables enteras y continuas.

### 2.1.5. Programación estocástica

En la optimización determinista tradicional de problemas de PL, se parte del supuesto de que los parámetros del problema son conocidos con certeza. Sin embargo, estos modelos no siempre son los más adecuados para capturar los comportamientos aleatorios que ocurren en la vida real, donde la incertidumbre introduce variaciones imprevistas en las condiciones y resultados esperados.

La incertidumbre es una característica común en la mayoría de los sistemas, pero suele ser difícil de manejar explícitamente debido a la complejidad que añade a muchos problemas. Esta incertidumbre puede surgir por la falta de datos confiables, errores de medición o la naturaleza de parámetros que representan información sobre eventos futuros (Quinteros et al., 2006).

Por esta razón, a mediados del siglo XX, varios autores comenzaron a explorar formas de integrar la incertidumbre en sus modelos de programación lineal deterministas, buscando así reflejar más fielmente la complejidad y variabilidad del mundo real (Dantzig, 2010).

Estos modelos de optimización con incertidumbre se conocen como problemas de Programación Estocástica. En estos problemas, los parámetros pueden ser desconocidos en el momento de tomar la decisión, pero se puede conocer o estimar, por ejemplo a partir de observaciones previas, su distribución probabilística. Esto permite modelar diferentes escenarios posibles y evaluar decisiones bajo condiciones de incertidumbre de manera más precisa y realista.

En la literatura, uno de los modelos de Programación Estocástica más conocidos y frecuentemente utilizados son aquellos en los que las decisiones se toman en dos etapas, una de las cuales la información esta disponible en el momento ("here and now") y otras a medida que se revela la información de los antecedentes bajo incertidumbre. Estos son conocidos también como modelos de Programación con Recurso de dos etapas, donde se toman dos tipos de decisiones: la primera etapa involucra decisiones estratégicas que se toman antes de

conocer el estado exacto de la naturaleza, mientras que la segunda etapa implica decisiones tácticas o de ajuste basadas en el conocimiento de los resultados de la primera etapa y en la información adicional que se va revelando.

Para entender de mejor manera esto, a continuación se presenta matemáticamente el problema de Programación Lineal con Recurso de dos etapas.

$$\text{mín } cx + E_{\omega} [Q(x, \xi^{\omega})] \quad (2.16a)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \quad (2.16b)$$

$$x \geq 0 \quad (2.16c)$$

donde,

$$Q(x, \xi^{\omega}) = \text{mín}_{y_{\omega}} q_{\omega} y_{\omega} \quad (2.17a)$$

$$\text{s.t. } W_{\omega} y_{\omega} \leq h_{\omega} - T_{\omega} x \quad (2.17b)$$

$$y_{\omega} \geq 0 \quad (2.17c)$$

En este modelo,  $x$  corresponde a la variable de primera etapa, y  $y_{\omega}$  es la variable de recursos de segunda etapa para las diferentes realizaciones de  $\omega$  del parámetro incierto.

Es importante destacar que este nuevo problema considera el valor esperado en la función objetivo. Ahora bien, este problema de Programación Estocástica puede ser formulado de forma equivalente por un nuevo problema que es conocido como problema determinista equivalente en su forma compacta. Este considera un número finito de escenarios  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\omega}\}$  con  $\omega \in \Omega$ , con sus respectivas probabilidades  $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{\omega}\}$ ,

$$\text{mín}_{x, y_{\omega}} cx + \sum_{\omega \in \Omega} \pi_{\omega} q_{\omega} y_{\omega} \quad (2.18a)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \quad (2.18b)$$

$$W_{\omega} y_{\omega} \leq h_{\omega} - T_{\omega} x, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.18c)$$

$$x \geq 0 \quad (2.18d)$$

$$y_{\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.18e)$$

Este enfoque permite incorporar explícitamente la incertidumbre en el modelo, evaluando múltiples escenarios y sus respectivas probabilidades para tomar decisiones más robustas y adaptables a las condiciones reales.

## 2.2. Método de Descomposición de Benders

En ocasiones, los modelos de optimización pueden ser muy grandes y complejos, lo que dificulta su resolución directa debido al alto número de variables y restricciones involucradas. Esto puede resultar en tiempos de cálculo excesivamente largos y en la ineficacia de los métodos tradicionales. Por este motivo, el método de Benders es especialmente útil, ya que permite descomponer el problema original en subproblemas más pequeños y manejables. Esta descomposición no solo facilita la resolución al reducir la complejidad, sino que también optimiza el uso de los recursos computacionales. Al separar las variables que más obstaculizan la búsqueda de la solución óptima, se mejora la eficiencia del proceso de optimización. Además, esta técnica permite aprovechar mejor las características estructurales del problema, proporcionando una mayor flexibilidad y adaptabilidad en su aplicación a diferentes tipos de problemas de programación matemática.

El método de Benders, propuesto por primera vez por [Benders, 1962](#), ha sido ampliamente adoptado y aplicado en la literatura desde su aparición. Diversos autores han explorado y extendido este algoritmo en múltiples áreas, lo que ha dado lugar a una vasta cantidad de investigaciones y aplicaciones. Como se menciona en [Rahmaniani et al., 2017](#), el método ha sido utilizado en una variedad de tópicos, incluyendo la planificación y producción [Hooker, 2007](#), [Canto, 2008](#), atención médica [Luong, 2015](#), transporte y telecomunicaciones [Costa, 2005](#), gestión de energía y recursos [Cai et al., 2001](#), [Zhang and Ponnambalam, 2006](#), y el diseño de procesos químicos [Zhu and Kuno, 2003](#), entre muchos otros.

El algoritmo de descomposición de Benders fue inicialmente diseñado para abordar problemas MILP (2.15). Al fijar las variables enteras, el problema se reduce a un programa lineal continuo, lo que permite aplicar la teoría de la dualidad para generar cortes. A partir de su introducción, se han desarrollado numerosas extensiones para adaptar el algoritmo a una gama más amplia de problemas, como se observa en trabajos de autores como [Geoffrion, 1972](#) y [Hooker and Ottosson, 2003](#). Además, se han propuesto mejoras adicionales para incrementar

la eficiencia del algoritmo en ciertas clases de optimización [Costa et al., 2012](#), [Côté et al., 2014](#). La Descomposición de Benders también ha servido como base para diseñar heurísticas efectivas que abordan problemas complejos que, de otro modo, serían intratables [Côté and Laughton, 1984](#), [Raidl, 2015](#). En consecuencia, el enfoque de la descomposición de Benders se ha convertido en una herramienta fundamental para resolver una amplia variedad de problemas de optimización, incluyendo problemas lineales, no lineales, enteros, estocásticos, de múltiples etapas y bilevel, entre otros.

Para describir el algoritmo de Descomposición de Benders clásico, consideremos el problema MILP (2.15) (o también el problema MIBLP (2.14)),

$$\text{mín } cx + dy \tag{2.19a}$$

$$\text{s.t. } Ax + By \leq b \tag{2.19b}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.19c}$$

$$y \geq 0 \tag{2.19d}$$

Este problema se descompone en un problema maestro y un subproblema ([Benders, 1962](#)). En el subproblema, solo consideramos las variables continuas  $y$ , mientras que las variables enteras  $x$  se fijan en un valor específico  $\bar{x}$ . De esta forma, el subproblema se formula como un problema PL de la siguiente manera:

$$\text{mín } dy \tag{2.20a}$$

$$\text{s.t. } By \leq b - A\bar{x} \tag{2.20b}$$

$$y \geq 0 \tag{2.20c}$$

En la descomposición de Benders, este problema representa el subproblema primal, y su dual se expresa del siguiente modo:

$$\text{mín } (b - A\bar{x})\lambda \tag{2.21a}$$

$$\text{s.t. } A^T\lambda \leq d \tag{2.21b}$$

$$\lambda \leq 0 \tag{2.21c}$$

Este problema se conoce como subproblema dual, donde  $\lambda$  son las variables duales aso-

ciadas a las restricciones (2.21b) del subproblema primal.

Sean  $(\lambda)^1, \dots, (\lambda)^I$  vértices o puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del subproblema dual, el problema original (2.15) es equivalente a resolver:

$$\begin{aligned} \text{mín } & cx && + \max_{p=1, \dots, I} (b - A\bar{x}) \lambda^{(p)} \\ \text{s.t. } & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Lo anterior es posible definirlo de forma equivalente a través del siguiente problema:

$$\text{mín } cx + \eta \tag{2.23a}$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - A\bar{x}) \lambda^{(p)} \quad p = 1, \dots, I \tag{2.23b}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.23c}$$

Si el problema (2.19) resulta infactible ante ciertos valores de  $x$ , se considera adicionalmente las direcciones extremas  $\lambda^{I+1}, \dots, \lambda^{I+P}$  del conjunto de soluciones factibles del Subproblema Dual, esto define entonces el siguiente Problema Maestro (PM),

$$\text{mín } cx + \eta \tag{2.24a}$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - A\bar{x}) \lambda^{(p)} \quad p = 1, \dots, I \tag{2.24b}$$

$$0 \geq (b - A\bar{x}) \lambda^{(l)} \quad l = I + 1, \dots, I + L \tag{2.24c}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.24d}$$

En la  $k$ -ésima iteración, el método de Benders considera un Problema Maestro Reducido (PMR) con una parte de las  $I$  restricciones de optimalidad y  $L$  restricciones de factibilidad.

$$\text{mín } cx + \eta \tag{2.25a}$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - A\bar{x}) \lambda^{(i)} \quad i = 1, \dots, k - 1 \tag{2.25b}$$

$$0 \geq (b - A\bar{x}) \lambda^{(j)} \quad j = 1, \dots, k - 1 \tag{2.25c}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.25d}$$

El problema descrito en (2.25) representa el problema maestro reducido clásico del Método de Benders. Las restricciones (2.25b) y (2.25c) se conocen como cortes de optimalidad y cortes de factibilidad, respectivamente. En la primera iteración, el algoritmo de Benders resuelve el PMR inicial sin estos cortes. A medida que se avanza en cada iteración, se añaden cortes de

optimalidad o factibilidad al PMR, en función de las soluciones obtenidas del subproblema dual. Este proceso continúa hasta que la brecha de optimalidad entre la solución del PMR y el subproblema sea lo suficientemente pequeña.

### 2.3. Programación Binivel

Muchos de los problemas de la vida real implican una relación jerárquica entre dos o más niveles de decisión (Labbé and Violin, 2013). Estos problemas pueden ser representados como un problema Binivel, donde el nivel superior y el nivel inferior interactúan de manera secuencial y jerárquica. En este contexto, el nivel superior toma decisiones que afectan las restricciones y los resultados del nivel inferior, mientras que el nivel inferior reacciona optimizando sus propias decisiones bajo las restricciones impuestas por el nivel superior.

Un ejemplo clásico de esta estructura jerárquica se encuentra en la gestión de recursos y planificación de infraestructuras. Por ejemplo, en la planificación del transporte, el operador de la red (nivel superior) busca mejorar el rendimiento general de la red, mientras que los usuarios de la red (nivel inferior) optimizan sus decisiones de viaje basadas en las condiciones establecidas por el operador (Colson et al., 2007). Otro ejemplo se puede encontrar en la fijación de precios de productos, donde una empresa (nivel superior) decide los precios de los productos para maximizar sus ingresos, y los clientes (nivel inferior) deciden sus compras para minimizar sus costos (Stackelberg, 1952).

En estos problemas, las decisiones del nivel superior influyen directamente en las restricciones y el espacio de solución del nivel inferior. Esta relación se puede modelar matemáticamente utilizando programación binivel, donde el objetivo es encontrar una solución óptima para ambos niveles. Los problemas de programación binivel son intrínsecamente difíciles debido a la naturaleza jerárquica y la interdependencia de las decisiones en ambos niveles (Bracken and McGill, 1973; Candler and Norton, 1977).

Una característica clave de los problemas binivel es que el seguidor elige su solución óptima una vez que se conoce la elección del líder. Esto introduce una estructura secuencial que debe ser manejada cuidadosamente en el modelado y la solución del problema. En muchos casos, esto requiere el uso de técnicas avanzadas y algoritmos especializados para resolver eficientemente estos problemas complejos, que se ha demostrado que son NP-Hard (Dempe,

2002; Loridan and Morgan, 1996).

En la formulación del modelo que se muestra a continuación, las variables de decisión para el nivel superior o líder son  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ , las variables de decisión del nivel inferior o seguidor  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ , tanto el líder como el seguidor buscan minimizar  $F(x, y)$  y  $f(x, y)$  respectivamente, en general el Problema de Programación Binivel (BLPP, por sus siglas en inglés Linear Bilevel Programming Problem) (Bard, 1998) se escribe como,

$$\min_{x \in X} F(x, y) \tag{2.26a}$$

$$\text{s.t. } G(x, y) \leq 0 \tag{2.26b}$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \tag{2.26c}$$

$$\text{s.t. } g(x, y) \leq 0 \tag{2.26d}$$

donde  $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , y  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  suponiendo que son continuas y dos veces diferenciables. Los conjuntos  $X$  e  $Y$  emplean restricciones adicionales a las variables como puede ser la no negatividad o de naturaleza entera de las decisiones.

### 2.3.1. Programación lineal binivel: variables continuas

La gran mayoría de las investigaciones en programación binivel se ha centrado en la versión lineal del problema, conocida como Programación Binivel Lineal (BLPP).

Para  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , el problema de programación bilivel lineal se puede escribir de la siguiente manera:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = c_1x + d_1y \tag{2.27a}$$

$$\text{s.t. } A_1x + B_1y \leq b_1 \tag{2.27b}$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = c_2x + d_2y \tag{2.27c}$$

$$\text{s.t. } A_2x + B_2y \leq b_2 \tag{2.27d}$$

donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^q$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ . Los conjuntos  $X$  y  $Y$  imponen restricciones adicionales a las variables, tales como límites superiores e inferiores o requisitos de integridad. Por supuesto, una vez que el líder selecciona una  $x$ , el primer término en la función objetivo del seguidor se convierte en una constante y puede ser eliminado del problema. En este caso, reemplazamos  $f(x, y)$  con  $f(y)$ .

La naturaleza secuencial de las decisiones implica que  $y$  puede ser vista como una función de  $x$ ; es decir,  $y = y(x)$ .

A partir de la formulación de BLPP se pueden establecer las siguientes definiciones:

- Región de restricciones del BLPP:

$$S = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\} \quad (2.28)$$

- Conjunto factible para el seguidor para cada  $x \in X$  fijo:

$$S(x) = \{y \in Y : (x, y) \in S\} \quad (2.29)$$

- Proyección de  $S$  en el espacio de decisión del líder:

$$S(X) = \{x \in X : \exists y \in Y, A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\} \quad (2.30)$$

- Conjunto de reacción racional del seguidor para  $x \in S(X)$ :

$$P(x) = \{y \in Y : y \in \arg \min_{\hat{y}} [f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\} \quad (2.31)$$

- Región inducible:

$$IR = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in P(x)\} \quad (2.32)$$

A partir de las definiciones anteriores, tenemos que  $P(x)$  es la reacción racional del seguidor, es decir, cómo responderá el seguidor a las decisiones del líder. La región inducible  $IR$  es el conjunto sobre el cual el líder puede optimizar sus decisiones.

Para asegurar que el BLPP esté bien planteado, se debe verificar que la región de restricciones  $S$  es un conjunto no vacío y compacto, y que para todas las decisiones tomadas por el líder, el seguidor tiene algún espacio para responder. Luego, utilizando las definiciones anteriores, el BLPP se puede escribir como:

$$\min\{F(x, y) : (x, y) \in IR\} \quad (5.2)$$

Para resolver un BLPP existen diferentes algoritmos que abordan el problema.

### 2.3.2. Métodos clásicos de resolución

En la literatura diversos métodos exactos de resolución han sido desarrollados para abordar los BLPP, mucho de los cuales tienen un gran interés académico [Bard, 1998](#). En general, existen tres enfoques principales para resolver un problema binivel lineal, estos son:

- El primer enfoque se basa en un teorema que establece: "La solución  $(x^*, y^*)$  de un BLPP ocurre en un vértice de  $S$ ". Este método involucra la enumeración de vértices utilizando el método símplex. [Candler and Townsley, 1982](#) fueron los pioneros en desarrollar un algoritmo globalmente óptimo. Este enfoque se centra en la resolución iterativa de dos PL: uno para el líder, que involucra las variables  $x$  y un subconjunto de las variables  $y$  asociadas a una base óptima del problema del seguidor, y otro que resuelve el problema del seguidor con  $x$  fijo. Mediante un esquema iterativo que verifica los costos reducidos, se obtiene la base óptima del problema. Posteriormente, [Bialas and Karwan, 1984](#) propusieron un esquema diferente basado en la búsqueda de vértices.
- El segundo enfoque es conocido como el enfoque de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que se basa en la formulación del problema del seguidor utilizando las condiciones de KKT. Este enfoque emplea la estrategia de branch and bound para manejar las restricciones relacionadas con las holguras complementarias. Al relajar estas restricciones, el problema se transforma en un PL (2.2), lo que facilita su resolución. Los métodos propuestos por [Júdice and Faustino, 1992](#), [Fortuny-Amat and McCarl, 1981](#) y [Bard and Moore, 1990](#) buscan garantizar el cumplimiento de las restricciones complementarias.
- El tercer enfoque se basa en las penalizaciones. [Aiyoshi and Shimizu, 1984](#) propone una reformulación del problema del seguidor en un problema sin restricciones utilizando un método de penalización. Para asegurar las soluciones del problema, se incluyen las restricciones de estacionaridad y, además, se exige que la función del seguidor sea estrictamente convexa.

### 2.3.3. Enoque Kunh–Tucker

Este enfoque para resolver un BLPP (2.27) consiste en resolver el siguiente problema equivalente:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = c_1x + d_1y \quad (2.33a)$$

$$\text{s.t. } A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (2.33b)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (2.33c)$$

$$d_2 + uB_2 - v = 0 \quad (2.33d)$$

$$u(b_2 - A_2x - B_2y) = 0 \quad (2.33e)$$

$$vy = 0 \quad (2.33f)$$

$$x, y \geq 0, \quad u, v \geq 0 \quad (2.33g)$$

Esta reformulación en un solo nivel del BLPP lineal se basa en las condiciones de KKT, lo que resulta en un problema de programación no lineal debido a la no convexidad inherente del BLPP lineal. Lo anterior refleja claramente en la existencia de las restricciones de complementariedad (2.33e) y (2.33f), que introducen no linealidades en el problema.

Para abordar esta problemática, todas las restricciones de desigualdad (2.27d) del problema del seguidor se denotan como  $g_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, q + m$ , y las restricciones de complementariedad se denotan como  $u_i g_i = 0$ . La no linealidad del problema se aborda transformándolo en un problema lineal entero mixto, lo cual se logra introduciendo variables binarias y un término Big-M en reemplazo de las restricciones de complementariedad, tal como se propone en Fortuny-Amat and McCarl, 1981. Las restricciones de complementariedad,

$$u(A_2x + B_2y - b_2) = 0 \quad (2.34a)$$

$$vy = 0 \quad (2.34b)$$

se reemplazan por el siguiente conjunto de desigualdades:

$$u_i \leq Mz_i \quad (2.35a)$$

$$g_i \leq M(1 - z_i) \quad (2.35b)$$

donde M es una constante suficientemente grande y  $z_i \in \{0, 1\}$  es una variable auxiliar.

Aunque esta reformulación incrementa el número de variables en  $q + m$  y añade  $2(q + m)$  restricciones adicionales, resulta dar origen a un modelo lineal para resolver problemas binivel. Sin embargo, es importante seleccionar adecuadamente la constante  $M$ . Determinar la validez de la constante  $M$  puede ser tan complejo como resolver el propio problema binivel (Kleinert et al., 2020). Si se selecciona una constante  $M$  demasiado pequeña, esto puede resultar en soluciones subóptimas para el problema binivel (Pineda and Morales, 2019). Kleinert and Schmidt, 2023 destacan que, a menos que se deriven constantes  $M$  adecuadas basadas en un análisis del problema, no puede esperar que la reformulación entregue resultados correctos.

### 2.3.4. Programación lineal binivel: variables discretas

En el ámbito de la optimización binivel, es frecuente enfrentar problemas donde algunas o todas las variables de decisión están restringidas a valores discretos, lo que da lugar a un tipo específico de BLPP conocido como problema de Programación Lineal Binivel con variables discretas.

Mas precisamente, se considera un vector de decisiones del líder  $x = (x_1, x_2)$ , con  $n = n_1 + n_2$ , donde  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  corresponde a las variables continuas y  $x_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$  a las variables discretas. De manera análoga, el vector de decisiones del seguidor  $y = (y_1, y_2)$ , con  $m = m_1 + m_2$ , está compuesto por  $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$  para las variables continuas y  $y_2 \in \mathbb{Z}^{m_2}$  para las variables discretas. Estas definiciones dan lugar al siguiente modelo:

$$\min_x \quad c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + d_{11}y_1 + d_{12}y_2 \quad (2.36a)$$

$$\text{s.t.} \quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}y_1 + B_{12}y_2 \leq b_1 \quad (2.36b)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z} \quad (2.36c)$$

$$\text{mín} \quad c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + d_{21}y_1 + d_{22}y_2 \quad (2.36d)$$

$$\text{s.t.} \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{21}y_1 + B_{22}y_2 \leq b_2 \quad (2.36e)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{Z} \quad (2.36f)$$

Bajo esta definición, es común encontrar variantes del modelo anteriormente descrito, particularmente cuando el líder, el seguidor, o ambos, tienen únicamente variables discretas. Para abordar estas variaciones, se utilizará el modelo BLPP sin especificar si las variables son continuas o discretas:

$$\min_{x \in X} c_1 x + d_1 y \quad (2.37a)$$

$$\text{s.t. } A_1 x + B_1 y \leq b_1 \quad (2.37b)$$

$$\text{mín } c_2 x + d_2 y \quad (2.37c)$$

$$\text{s.t. } A_2 x + B_2 y \leq b_2 \quad (2.37d)$$

donde  $c_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^q$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ .

A partir de esta definición, se pueden distinguir tres modelos según la naturaleza de las variables involucradas. Estos son los siguientes:

1. **Problema de Programación Binivel Discretos (DL-BLPP):** Contempla solo variables discretas, es decir,  $X \in \mathbb{Z}^n$ ,  $Y \in \mathbb{Z}^m$  ó  $X \in B^n$ ,  $Y \in B^m$ .
2. **Problema de Programación Binivel Discreto Continuo (DCL-BLPP):** Considera variables discretas para el líder y continuas para el seguidor, es decir,  $X \in \mathbb{Z}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  o  $X \in B^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$ .
3. **Problema de Programación Binivel continuo Discreto (CDL-BLPP):** Contempla variables continuas para el líder y discretas para el seguidor, es decir,  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{Z}^m$  o  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in B^m$ .

### 2.3.5. Enfoques clásicos

En la literatura, existen diversos métodos para resolver los BLPP con variables discretas, sin embargo, los dos enfoques principales para resolver este tipo de problemas, estos son:

- El primer enfoque se utiliza para resolver DL-BLPP y DCL-BLPP de . Este se basa en relajar las variables discretas para luego reformular en un solo nivel mediante Karush-Kuhn-Tucker y resolver utilizando Brand and Bound.
- El segundo enfoque se utiliza para resolver un DL-BLPP binario. Este resuelve el problema binivel mediante la enumeración implícita. La clave de este algoritmo está en el

reconocimiento de que cualquier solución de DL-BLPP binario debe estar en el conjunto de reacción racional del seguidor  $P(x)$ .

### 2.3.6. Programación lineal binivel y Descomposición de Benders

Una de las aplicaciones recientes más atractivas en el contexto de los problemas de Programación Binivel es la Descomposición de Benders. Sin embargo, la literatura sobre la aplicación de la Descomposición de Benders en estos problemas es limitada. Esto se debe a múltiples factores, entre los cuales los más importantes son:

- Los problemas bilevel son inherentemente más complejos que los problemas de optimización estándar debido a su estructura jerárquica y no convexa del modelo.
- La naturaleza específica de los problemas bilevel exige métodos especializados para abordarlos.
- La investigación sobre la descomposición de Benders empleada en problemas bilevel está todavía en etapas tempranas.
- Existen pocos casos de estudio que hayan usado con éxito la descomposición de Benders en problemas bilevel, lo que limita la literatura disponible.

A pesar de estas limitaciones, algunos estudios han mostrado el potencial de la descomposición de Benders en problemas bilevel. Estos estudios demuestran que, bajo ciertas condiciones, la descomposición de Benders puede ser una herramienta poderosa para abordar problemas de gran escala con estructuras jerárquicas complejas.

La mayoría de los problemas de programación binivel que se encuentran en la literatura son problemas de Programación Binivel Entero Mixto con variables binarias para el líder y variables continuas para el seguidor. Por ejemplo, [Fontaine and Minner, 2014](#) aborda un problema binivel entero mixto utilizando la Descomposición de Benders para el diseño de redes de tráfico; [Nik et al., 2016](#) trata un problema de asignación y programación de puertas y pistas de aterrizaje en un aeropuerto principal; [Bagloee et al., 2017](#) selecciona el mejor subconjunto de proyectos de extensión de carreteras dentro de un presupuesto limitado; [Labbé et al., 2019](#) aborda la problemática de la ubicación de instalaciones como plantas

químicas y vertederos, [Goudarzi et al., 2024](#) explora la complejidad de la fijación de precios en mercados eléctricos, [Wu and Conejo, 2017](#) aborda la planificación de la defensa de la red eléctrica contra posibles ataques físicos

También existen casos en los que se utilizan variables continuas en el líder y variables binarias en el seguidor. [Rahmani et al., 2024](#) examina un problema de localización y enrutamiento de instalaciones en cadenas de suministro cerradas en un entorno competitivo.

En otros escenarios, las variables del líder pueden ser binarias, mientras que las del seguidor son continuas y binarias. [Domínguez et al., 2023](#) resuelve un problema de ubicación de instalaciones de captura máxima cooperativa, y [Aazami and Saidi-Mehrabad, 2019](#) aplica la Descomposición de Benders para un problema de Programación Binivel Entero Mixto.

Asimismo, hay casos donde tanto las variables del líder como las del seguidor pueden ser continuas y binarias. [Byeon and Hentenryck, 2022](#) desarrolla una Descomposición de Benders para un Problema de Programación Binivel Entero Mixto.

Existen otros casos particulares donde los problemas pueden ser no lineales o se distinguen por alguna característica especial. [Han et al., 2024](#) aborda un problema para microgrids autónomos interconectados a través de un sistema de distribución de energía, caracterizado por ser no lineal y tener variables continuas en el líder y variables continuas y binarias en el seguidor. [Gálvez, 2021](#) analiza la coordinación de precios, surtido y demanda en el sector minorista utilizando variables continuas en el líder y variables binarias en el seguidor. [Lin et al., 2024](#) aborda un problema de localización de instalaciones p-mediana utilizando variables binarias en el líder como seguidor.

Uno de los trabajos más relevantes en esta área es el realizado por [Saharidis and Ierapetritou, 2009](#), quienes introdujeron estrategias para acelerar la descomposición de Benders en problemas binivel. Su investigación no solo demostró la aplicabilidad de la descomposición de Benders en estos problemas, sino que también proporcionó un marco metodológico que ha sido base para estudios posteriores.

Los autores de este trabajo proponen un nuevo algoritmo para resolver problemas de Programación Lineales Binivel Entera Mixta con variable continuas y binarias en el líder, mientras que en el seguidor utilizan variables continuas. Este algoritmo se basa en la técnica de descomposición de Benders para resolver el problema Binivel.

Si bien el algoritmo de descomposición basado en Benders propuesto por Saharidis e Ierapetritou ha sido ampliamente aplicado en la resolución de problemas binivel con variables enteras mixtas, esta investigación se distingue por abordar un problema binivel estocástico con múltiples seguidores. Mientras que trabajos previos como el de [Caramia and Mari, 2016](#), [Shokr et al., 2021](#) y [Alizadeh and Nishi, 2019](#) han aplicado la descomposición de Benders en contextos específicos como la localización de instalaciones, la planificación de cadenas de suministro humanitarias y la expansión dinámica de hubs en sistemas de transporte de carga, la presente tesis introduce un enfoque novedoso al modelar la interacción entre múltiples seguidores en una cadena de suministro agrícola.

A diferencia de los artículos citados, que en su mayoría se centran en estructuras con un solo seguidor, este trabajo extiende la formulación del problema al considerar múltiples seguidores que optimizan sus decisiones de manera simultánea, considerando además antecedentes bajo incertidumbre que da origen a uno estocástico de dos etapas que introduce nuevas complejidades en la coordinación de las soluciones y en la gestión de la incertidumbre. Esta característica aporta un avance significativo en la capacidad de modelar y resolver problemas más realistas en contextos de producción y distribución, donde la interacción entre múltiples actores es crucial.

Para poder explicar cómo se realiza el planteamiento de este algoritmo, consideremos el siguiente problema de Programación Lineal Binivel Entero Mixto:

$$\min \quad F(x) = d_1x + e_1y + f_1z \quad (2.38a)$$

$$\text{s.t.} \quad A_1x + B_1y + C_1z \leq b_1 \quad (2.38b)$$

$$x \geq 0, \quad z \in \{0, 1\} \quad (2.38c)$$

$$\min \quad f(z) = d_2x + e_2y + f_2z \quad (2.38d)$$

$$\text{s.t.} \quad A_2x + B_2y + C_2z \leq b_2 \quad (2.38e)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z \leq b_3 \quad (2.38f)$$

$$y \geq 0 \quad (2.38g)$$

Fijando los valores de las variables binarias  $z = \bar{z}$ , este problema de Programación Lineal Binivel puede ser formulado del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f_1 z & \quad + \quad \text{Min } d_1 x + e_1 y \\
 \text{s.t. } z \in \{0, 1\} & \quad \text{s.t. } A_1 x + B_1 y \leq b_1 - C_1 \bar{z} \\
 & \quad \text{mín } d_2 x + e_2 y + f_2 \bar{z} \\
 & \quad \text{s.t. } A_2 x + B_2 y \leq b_2 - C_2 \bar{z} \\
 & \quad A_3 x + B_3 y \leq b_3 - C_3 \bar{z} \\
 & \quad y \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

A partir de la formulación de la Programación Lineal Binivel Entera Mixta es posible observar una descomposición del problema original en un problema de Programación Entera y un problema de Programación Lineal Binivel. Esta separación facilita la reformulación del problema de Programación Lineal Binivel:

$$\min F(x, y) = d_1 x + e_1 y + f_1 \bar{z} \tag{2.40a}$$

$$\text{s.t. } A_1 x + B_1 y \leq b_1 - C_1 \bar{z} \tag{2.40b}$$

$$x \geq 0 \tag{2.40c}$$

$$\text{mín } f(z) = d_2 x + e_2 y + f_2 \bar{z} \tag{2.40d}$$

$$\text{s.t. } A_2 x + B_2 y \leq b_2 - C_2 \bar{z} \tag{2.40e}$$

$$A_3 x + B_3 y \leq b_3 - C_3 \bar{z} \tag{2.40f}$$

$$y \geq 0 \tag{2.40g}$$

Utilizando las condiciones KKT (Shi et al., 2006; Bialas and Karwan, 1984; Hansen et al., 1992), el enfoque Big-M y la estrategia de restricciones activas (Grossmann and Floudas, 1987), es posible transformar el problema de Programación Lineal Binivel en un problema lineal entero mixto:

$$\min F(x, y) = d_1 x + e_1 y + f_1 \bar{z} \tag{2.41a}$$

$$\text{s.t. } A_1 x + B_1 \bar{y} \leq b_1 - C_1 \bar{z} \tag{2.41b}$$

$$A_2 x + B_2 \bar{y} \leq b_2 - C_2 \bar{z} \tag{2.41c}$$

$$A_3 x + B_3 \bar{y} \leq b_3 - C_3 \bar{z} \tag{2.41d}$$

$$w_1 - Mv_1 \leq 0 \tag{2.41e}$$

$$w_2 - Mv_2 \leq 0 \tag{2.41f}$$

$$w_3 - Mv_3 \leq 0 \tag{2.41g}$$

$$w_4 - Mv_4 \leq 0 \quad (2.41h)$$

$$(b_2 - C_2\bar{z}) - A_2x - B_2y - M(1 - v_1) \leq 0 \quad (2.41i)$$

$$(b_3 - C_3\bar{z}) - A_3x - B_3y - M(1 - v_3) \leq 0 \quad (2.41j)$$

$$x - M(1 - v_3) \leq 0 \quad (2.41k)$$

$$y - M(1 - v_4) \leq 0 \quad (2.41l)$$

$$w_1A_2 + w_2A_3 - w_4 = 0 \quad (2.41m)$$

$$w_1A_2 + w_2A_3 - w_3 = -e_2 \quad (2.41n)$$

$$x, y, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \quad (2.41\tilde{n})$$

$$v_1, v_2, v_3, v_4 \in \{0, 1\} \quad (2.41o)$$

A partir de la solución de (2.41), encontramos qué restricciones están activas, es decir, la Región Inducible de la Programación Lineal Binivel. De este modo transformamos de manera equivalente el problema inicial (2.40) al siguiente problema lineal (2.42), donde asumimos que el primer grupo de restricciones del seguidor está activo.

$$\min F(x, y) = d_1x + e_1y + f_1\bar{z} \quad (2.42a)$$

$$\text{s.t. } A_1x + B_1y \leq b_1 - C_1\bar{z} \quad (2.42b)$$

$$A_2x + B_2y = b_2 - C_2\bar{z} \quad (2.42c)$$

$$A_3x + B_3z \leq b_3 - C_3\bar{z} \quad (2.42d)$$

$$x, y \geq 0 \quad (2.42e)$$

La forma general de (2.42) se puede reformular de la siguiente manera (2.42):

$$\min F(x, y) = d_1x + e_1y \quad (2.43a)$$

$$\text{s.t. } A_1x + B_1y + Q_1s = b_1 - C_1\bar{z} \quad (2.43b)$$

$$A_2x + B_2y + Q_2s = b_2 - C_2\bar{z} \quad (2.43c)$$

$$A_3x + B_3z + Q_3s = b_3 - C_3\bar{z} \quad (2.43d)$$

$$x, y, s \geq 0 \quad (2.43e)$$

donde  $Q_1, Q_2$  son matrices donde todos los elementos son iguales a cero excepto los elementos en la diagonal que corresponden a restricciones no activas y son iguales a 1. Para simplificar la presentación, transformamos el problema de la siguiente forma:

$$\min F(x, y) = Jg \quad (2.44a)$$

$$\text{s.t. } Dg \leq b - E\bar{y} \quad (2.44b)$$

$$g \geq 0 \quad (2.44c)$$

donde,

$$J^T = \begin{bmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{bmatrix}; g = \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & Q_1 \\ A_2 & B_2 & Q_2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Esto representa el Subproblema Primal de la descomposición de Benders, cuyo dual es el siguiente:

$$\text{Max } \nu(b - E\bar{z}) \quad (2.45a)$$

$$\text{s.t. } D^T \nu \leq J \quad (2.45b)$$

$$\nu \in \mathbb{R} \quad (2.45c)$$

donde  $(\nu)^1, \dots, (\nu)^I$  son los puntos extremos (o rayos extremos) del conjunto de soluciones factibles del Subproblema Primal (2.44) o Subproblema Dual (2.48). Luego, el problema original es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Min } f_1 z &+ \max_{i=1, \dots, I} (b - E\bar{z}) \nu^i \\ \text{s.t. } z &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Empleando un reformulación en términos de un modelo lineal, el problema anterior es equivalente al siguiente

$$\text{Min } f_1 z + \eta \quad (2.47a)$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - E\bar{z}) \nu^i \quad i = 1, \dots, I \quad (2.47b)$$

$$\nu \in \mathbb{R}, \quad z \in \{0, 1\} \quad (2.47c)$$

Si el problema (2.48) resulta infactible ante ciertos valores de la variable  $z$ , se considera adicionalmente las direcciones extremas  $(\nu)^{(I+1)}, \dots, (\nu)^{(I+L)}$  del conjunto de soluciones factibles del Subproblema dual, entonces el problema original queda expresado de la siguiente

manera:

$$\text{Min } f_1 z + \eta \quad (2.48a)$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - E\bar{z}) \nu^i \quad i = 1, \dots, I \quad (2.48b)$$

$$0 \geq (b - E\bar{z}) \nu^p \quad p = I, \dots, I + L \quad (2.48c)$$

$$\nu \in \mathbb{R}, \quad z \in \{0, 1\} \quad (2.48d)$$

En cada etapa del algoritmo, solo algunas restricciones de (2.48) son conocidas explícitamente, lo que da lugar a un problema llamado problema maestro reducido e involucra un subconjunto de las restricciones del problema maestro. Para ello asumiremos para la iteración  $k$ -ésima el método de Benders considera un problema maestro reducido con parte de las  $I$  restricciones de optimalidad y  $L$  restricciones de viabilidad.

$$\text{Min } f_1 z + \eta \quad (2.49a)$$

$$\text{s.t. } \eta \geq (b - E\bar{z}) \nu^i \quad i = 1, \dots, k - 1 \quad (2.49b)$$

$$0 \geq (b - E\bar{z}) \nu^p \quad p = 1, \dots, k - 1 \quad (2.49c)$$

$$\nu \in \mathbb{R}, \quad z \in \{0, 1\} \quad (2.49d)$$

Si bien el algoritmo de descomposición basado en Benders propuesto por [Saharidis and Ierapetritou, 2009](#) ha sido ampliamente aplicado en la resolución de problemas binivel con variables enteras mixtas, esta investigación se distingue por abordar un problema bi-nivel estocástico con múltiples seguidores.

Esta característica aporta un avance significativo en la capacidad de modelar y resolver problemas más realistas en contextos de producción y distribución, donde la interacción entre múltiples actores es crucial en un contexto bajo en condiciones de incertidumbre. Además, se proponen mejoras en la eficiencia computacional mediante la optimización del proceso de generación de cortes, lo que permite obtener soluciones más eficientes en entornos estocásticos.

### 2.3.7. Programación binivel con múltiples seguidores

Para cerrar este capítulo, se resumen algunas de las propiedades básicas de los modelos con múltiples seguidores, pues gran parte de las investigaciones sobre los problemas binivel se han centrado principalmente en la situación donde en el nivel superior hay un líder y en

el nivel inferior hay un seguidor. Sin embargo, en el mundo real, muchas de las decisiones del nivel inferior pueden involucrar a múltiples seguidores. Es así como el líder es afectado por los objetivos y estrategias de los múltiples seguidores quienes a su vez se ajustan optimamente a las decisiones del líder.

Este tipo de problemas, donde un líder interactúa con más de un seguidor, se conoce como Programación Binivel con Múltiples Seguidores (BLMF). Aquí, el líder busca optimizar su función objetivo bajo la consideración de las reacciones de múltiples seguidores, cada uno con sus propios objetivos y restricciones, es decir, el líder no solo debe considerar sus propias decisiones, sino que también debe anticipar las reacciones de los múltiples seguidores ante dichas decisiones.

Esta dinámica añade una nueva complejidad a los problemas binivel, ya que la interacción entre los seguidores es un factor importante a considerar. Esto debido a que la solución óptima de cada seguidor puede no solo depender de las decisiones del líder, sino también de las decisiones de otros seguidores. Bajo este contexto, las interacciones entre los seguidores pueden ser de tres tipos: Cooperativa, no cooperativa y parcialmente cooperativa.

Las interacciones cooperativas se distinguen por el hecho de que los seguidores comparten completamente las variables de decisión tanto en sus objetivos como en sus restricciones. En contraste, en las interacciones no cooperativas, no existe intercambio de variables de decisión entre los seguidores. Por otro lado, las interacciones parcialmente cooperativas se caracterizan por compartir solo algunas de las variables de decisión entre los seguidores.

Cada tipo de interacción presenta subcasos según si los objetivos y restricciones son compartidos entre los seguidores, lo que da lugar a un total de nueve modelos diferentes. En la Tabla 2.1 se detallan los tres tipos de interacción y los nueve modelos de BLMF.

En particular, en este trabajo se considera el modelo de BLMF que corresponde más precisamente al modelo  $S_1$  donde las interacciones entre los seguidores son no cooperativas, es decir, no se relacionan las variables de decisión, función objetivo y restricciones entre los seguidores.

Para  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $y_i \in Y_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_K)^T$ ,  $F : X \times Y_1 \times \dots \times Y_K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i : X \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}$  y  $i = 1, 2, \dots, K$ , el BLPP se puede extenderse a un problema BLMF lineal no cooperativo con  $K \geq 2$  seguidores mediante el siguiente modelo:

Tipos de relación	Factores de relación			Modelos
	VARIABLES DE DECISIÓN	Objetivos	Restricciones	
No cooperativa	Individual	Individual	Individual	$S_1$
Cooperativa	Compartida	Compartida	Compartida	$S_2$
			Individual	$S_3$
		Individual	Compartida	$S_4$
			Individual	$S_5$
Parcialmente cooperativa	Parcialmente individual y	Compartida	Compartida	$S_6$
	parcialmente		Individual	$S_7$
	compartida	Individual	Compartida	$S_8$
			Individual	$S_9$

Tabla 2.1: Marco general de los problemas binivel con múltiples seguidores (Fuente: Lu et al., 2006).

$$\min_{x \in X} F(x, y) = cx + \sum_{s=1}^K d_s y_s \tag{2.50a}$$

$$\text{s.t. } Ax + B_t y_t \leq b \tag{2.50b}$$

donde, para cada valor de  $x$ ,  $y_i$  corresponde a la solución del problema de nivel inferior para cada seguidor ( $i = 1, 2, \dots, K$ ):

$$\min_{y_i \in Y_i} f_i(x, y_i) = c_i x + d_i y_i \tag{2.50c}$$

$$\text{s.t. } A_i x + C_i y_i \leq b_i \tag{2.50d}$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $e_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $b \in \mathbb{R}^p$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{p \times m_i}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{q_i \times n}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q_i \times m_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ .

A partir de la formulación de problema BLMF lineal se puede establecer las siguientes definiciones:

- Región de restricciones del BLMF:

$$S^{MF} = \{(x, y_1, \dots, y_K) : x \in X, y_i \in Y_i, Ax + By \leq b, A_i x + C_i y_i \leq b_i, i = 1, \dots, K\} \tag{2.51}$$

- Conjunto factible para el seguidor para cada  $x \in X$  fijo:

$$S_i^{MF}(x) = \{y_i \in Y_i : (x, y_1, \dots, y_K) \in S\}, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.52)$$

- Proyección de  $S^{MF}$  en el espacio de decisión del líder:

$$S^{MF}(X) = \{x \in X : \exists y_i \in Y_i, Ax + By \leq b, A_i x + C_i y_i \leq b_i, i = 1, \dots, K\} \quad (2.53)$$

- Conjunto de reacción racional del seguidor para  $x \in S^{MF}(X)$ :

$$P_i^{MF}(x) = \{y_i \in Y_i : y_i \in \arg \min_{\hat{y}_i} [f(x, \hat{y}_i) : \hat{y}_i \in S_i(x)]\} \quad i = 1, \dots, K \quad (2.54)$$

- Región inducible:

$$IR^{MF} = \{(x, y_1, \dots, y_K) : (x, y_1, \dots, y_K) \in S^{MF}, y_i \in P_i(x), i = 1, \dots, K\} \quad (2.55)$$

Por lo tanto, en términos de las notaciones anteriores, el problema BLMF lineal (2.50) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\min \{F(x, y_1, \dots, y_k) : (x, y_1, \dots, y_k) \in IR\} \quad (2.56)$$

A continuación, se desarrollará una reformulación del problema BLMF lineal (2.56) utilizando Karush-Kuhn-Tucker. Para ello reescribimos este problema del siguiente modo:

$$\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_k) \quad (2.57a)$$

$$\text{s.t. } (x, y_1, \dots, y_k) \in IR^{MF} \quad (2.57b)$$

Utilizando la expresión (2.55) este problema equivalente a:

$$\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_k) \quad (2.58a)$$

$$\text{s.t. } (x, y_1, \dots, y_k) \in S^{MF} \quad (2.58b)$$

$$y_i \in P_i(x) \quad (2.58c)$$

Luego, utilizando (2.54) reescribimos este problema de la siguiente manera:

$$\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_k) \quad (2.59a)$$

$$\text{s.t. } (x, y_1, \dots, K, y_k) \in S^{MF} \quad (2.59b)$$

$$y_i \in \arg \min_{\hat{y}_i} [f(x, \hat{y}_i) : \hat{y}_i \in S_i(x)] \quad (2.59c)$$

Usando (2.52) el problema queda como:

$$\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_k) \quad (2.60a)$$

$$\text{s.t. } (x, y_1, D, y_k) \in S^{MF} \quad (2.60b)$$

$$\min_{x \in X} f_i(x, y_i) \quad (2.60c)$$

$$\text{s.t. } y_i \in S^{MF} \quad (2.60d)$$

En consecuencia, para un modelo lineal tenemos que (2.50) es equivalente a lo siguiente:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = cx + \sum_{s=1}^K d_s y_s \quad (2.61a)$$

$$\text{s.t. } Ax + \sum_{t=1}^K B_t y_t \leq b \quad (2.61b)$$

$$A_j x + C_j y_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, K \quad (2.61c)$$

donde, para cada valor de  $x$ ,  $y_i$  corresponde a la solución del problema de nivel inferior para cada seguidor ( $i = 1, 2, \dots, K$ ):

$$\min_{y_i \in Y_i} f_i(x, y_i) = c_i x + d_i y_i \quad (2.61d)$$

$$\text{s.t. } Ax + \sum_{t=1}^K B_t y_t \leq b \quad (2.61e)$$

$$A_j x + C_j y_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, K \quad (2.61f)$$

Aplicando el enfoque de Karush-Kuhn-Tucker a cada seguidor  $i = 1, 2, \dots, K$ :

$$A_i x + C_i y_i \leq b_i \quad (2.62a)$$

$$d_i + w_i B_i + u_i C_i - v_i = 0 \quad (2.62b)$$

$$w_i \left( b - Ax - \sum_{t=1}^K B_t y_t \right) = 0 \quad (2.62c)$$

$$u_i (b_i - A_i x - C_i y_i) = 0 \quad (2.62d)$$

$$v_i y_i = 0 \quad (2.62e)$$

$$x, y_i, w_i, u_i, v_i \geq 0 \quad (2.62f)$$

El problema BLMF es equivalente a resolver el siguiente problema equivalente:

$$\min F(x, y) = cx + \sum_{s=1}^K d_s y_s \quad (2.63a)$$

$$\text{s.t. } Ax + \sum_{t=1}^K B_t y_t \leq b \quad (2.63b)$$

$$A_i x + C_i y_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63c)$$

$$d_i + w_i B_i + u_i C_i - v_i = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63d)$$

$$w_i \left( b - Ax - \sum_{t=1}^K B_t y_t \right) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63e)$$

$$u_i (b_i - A_i x - C_i y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63f)$$

$$v_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63g)$$

$$x, y_i, w_i, u_i, v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.63h)$$

Similar al caso lineal (2.33) de BLPP, las restricciones de complementariedad (2.63e)-(2.63g), que introducen no linealidad en el problema (2.63), pueden ser linealizadas utilizando el enfoque Big-M.

## 3. Metodología

### 3.1. Descripción del problema

La cadena de suministro agrícola se configura como una red esencial y dinámica que se extiende desde la producción en los campos hasta la entrega de productos frescos a los consumidores finales. Este proceso complejo requiere una coordinación eficiente a lo largo de diversas fases, desde la planificación y cultivo hasta la distribución y venta al por mayor. La colaboración fluida a lo largo de esta cadena es fundamental para asegurar la disponibilidad, calidad y sostenibilidad de los alimentos que llegan a los hogares de los consumidores finales.

En este contexto, el presente trabajo se enfoca en algunas fases críticas que involucran al productor y a múltiples distribuidores, destacando la interacción entre el productor y cada uno de estos distribuidores como la principal innovación del modelo. El productor desempeña un rol central en la generación de productos agrícolas, siendo responsable de la planificación y programación de la cosecha en zonas de manejo predefinidas, con el objetivo de comercializar cada cosecha en el período adecuado a través de múltiples distribuidores. Estos distribuidores son responsables de acercar los productos a sus clientes finales. Para lograrlo, es esencial que la producción asignada a cada distribuidor se considere como la oferta disponible para sus respectivos mercados. Si esta oferta no es suficiente para cubrir la demanda, cada distribuidor deberá recurrir a terceros para adquirir las unidades de producto necesarias.

Es importante subrayar que los diferentes agentes tienen objetivos distintos. Mientras que el productor busca maximizar sus beneficios económicos seleccionando zonas de manejo que aseguren cierta homogeneidad en el terreno, también se deben tener en cuenta los costos operativos, como salarios y transporte. Por su parte, los distribuidores están enfocados en satisfacer la demanda de sus clientes finales, minimizando al mismo tiempo los costos de adquisición de productos de terceros.

La utilidad del productor se calcula considerando los ingresos por la venta de la cosecha a los distribuidores, definidos por los precios y cantidades correspondientes, y los costos asociados, que incluyen los gastos fijos de zonificación, los salarios de los trabajadores, incluidas las horas extras, y los costos de transporte, que abarcan el desplazamiento y la logística para

trasladar la cosecha.

La coordinación jerárquica asumida entre el productor y los múltiples distribuidores introduce un nivel de complejidad adicional en la cadena de suministro agrícola, lo que hace necesario abordar este desafío como un problema binivel, donde el productor actúa como líder y los distribuidores como múltiples seguidores. Aunque los distribuidores no interactúan entre sí, la interacción individual de cada uno con el productor genera una dinámica compleja que el modelo debe capturar con precisión.

Además, es esencial considerar factores externos que generan incertidumbre, como los rendimientos de la cosecha, los precios fluctuantes y las demandas variables de los consumidores finales. Estos elementos aumentan la complejidad del problema, especialmente cuando se trata de modelos estocásticos.

El modelo de programación binivel estocástico propuesto en este trabajo plantea un desafío adicional en el contexto de la agricultura moderna debido a la gran cantidad de datos generados por tecnologías avanzadas como satélites, drones, sensores remotos y sistemas de información geográfica (SIG), que permiten la recopilación de información detallada sobre el campo de cosecha. Estos avances, aunque sean beneficiosos, imponen el manejo de grandes volúmenes de datos en el modelo.

Por lo tanto, el enfoque principal de este trabajo es proponer una descomposición de Benders adecuada para resolver el problema de programación binivel estocástico con múltiples seguidores. Esta descomposición permitirá gestionar de mejor manera la complejidad del problema, asegurando la capacidad de encontrar soluciones incluso en contextos con volúmenes de datos extensos.

### 3.2. Problema Binivel Estocástico

En lo que sigue, se presenta una extensión del problema de programación binivel estocástico propuesto por [Albornoz and Vera, 2023](#). A diferencia de dicho enfoque, que se concentra en la coordinación entre un productor y un único distribuidor, este trabajo explora un escenario más complejo que involucra la interacción entre un productor y múltiples distribuidores, quienes actúan como múltiples seguidores en la estructura jerárquica. Esta ampliación introduce nuevos desafíos en la toma de decisiones, aumentando significativamente el alcance y la relevancia del modelo en contextos de cadenas de suministro con diversos actores en la fase de distribución.

Antes de introducir el problema binivel estocástico con múltiples seguidores, se revisará el problema de coordinación binivel con un solo seguidor abordado en [Albornoz and Vera, 2023](#) para resaltar las diferencias entre ambos modelos. Este enfoque preliminar facilita la comprensión de la dinámica entre un productor y un único distribuidor en un contexto jerárquico, estableciendo un claro punto de referencia.

En el problema de coordinación binivel abordado por estos autores, es importante destacar que ambos actores persiguen objetivos distintos. El productor, que actúa como líder, se enfoca en la zonificación del terreno para luego planificar y programar la cosecha, con el propósito de maximizar sus utilidades. Por otro lado, el distribuidor, en su rol de seguidor, tiene como objetivo principal satisfacer la demanda final de los consumidores utilizando la cosecha proporcionada por el productor. En caso de que esta cosecha sea insuficiente, el distribuidor tiene la opción de adquirir las unidades faltantes a un proveedor externo.

A continuación, se plantea el problema de coordinación binivel estocástico entero mixto entre un productor y un distribuidor:

#### Conjuntos:

- $Z$  : Conjunto de potenciales zonas de manejo,  $z \in Z$ .
- $S$  : Conjunto de puntos muestrales de una propiedad del suelo o los vegetales,  $s \in S$ .
- $T$  : Conjunto de períodos de cosecha,  $t \in T$ .
- $\Omega$  : Conjunto de escenarios de cosecha,  $\omega \in \Omega$ .

#### Parámetros:

$a_{s,z}$	: Coeficiente que toma valor 1 cuando el punto muestral $s \in S$ pertenece a la zona potencial de manejo $z \in Z$ y 0 en caso contrario.
$N$	: Número total de puntos muestrales en la zona $z \in Z$ .
$\sigma_T^2$	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en todo el campo.
$\sigma_z^2$	: Varianza de la propiedad seleccionada del suelo en la zona $z \in Z$ .
$\alpha$	: Nivel de homogeneidad requerido.
$b_{t,z}$	: Coeficiente binario que toma valor 1 si en el período $t \in T$ , la zona $z \in Z$ puede ser cosechada y 0 en caso contrario.
$p_{z,\omega}$	: Producción total en la zona $z \in Z$ en el escenario $\omega \in \Omega$ .
$st_t$	: Salario en el período $t \in T$ para trabajadores temporales.
$ss$	: Salario para trabajadores estacionales.
$ss^e$	: Salario para trabajadores estacionales en horas extras.
$trc_z$	: Costo de viaje a la zona $z \in Z$ .
$vc$	: Capacidad del vehículo en kilogramos.
$pv_\omega$	: Precio de la cosecha pagado por el vendedor mayorista en el escenario $\omega \in \Omega$ .
$pc_\omega$	: Costo de compra a un externo en el escenario $\omega \in \Omega$ .
$D_\omega$	: Demanda agregada que enfrenta el vendedor mayorista en el escenario $\omega \in \Omega$ .
$Cf$	: Costo fijo por cada zona de manejo cosechada.

### VARIABLES DE DECISIÓN DEL LÍDER:

- Variables de decisión de primera etapa:

$q_z$	: Variable binaria que toma valor 1 si la zona $z \in Z$ está dentro de la partición, 0 en caso contrario.
$SW$	: Número de trabajadores permanentes.

- Variables de decisión de segunda etapa:

$X_{t,z,\omega}$	: Cantidad total de kilogramos cosechados en el período $t \in T$ , en la zona $z \in Z$ y escenario $\omega \in \Omega$ .
$TW_{t,\omega}$	: Número de trabajadores temporales en el período $t \in T$ y escenario $\omega \in \Omega$ .

### VARIABLES DE DECISIÓN DEL SEGUIDOR:

- Variables de decisión de segunda etapa:

$Q_\omega$  : Cantidad total de kilogramos comprados al productor en el escenario  $\omega \in \Omega$ .

$Y_\omega$  : Cantidad total de kilogramos adquiridos de manera externa en el escenario  $\omega \in \Omega$ .

Con la notación de conjuntos, parámetros y variables establecida, se formula el problema de programación binivel estocástico entero mixto para la coordinación de la cadena de suministro agrícola entre el productor y el distribuidor, como se detalla a continuación:

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_\omega \left[ pv_\omega \cdot Q_\omega - \left( ss \cdot SW + \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_{t,\omega}^e + st_t \cdot TW_{t,\omega} \right. \right. \right. \quad (3.1.1)$$

$$\left. \left. \left. + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z \right) \right]$$

$$\text{s.t.} \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.1.3)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1) \cdot \sigma_z^2 + (1 - \alpha) \cdot \sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha) \sigma_T^2 \cdot N \quad (3.1.4)$$

$$SW \geq swmin \quad (3.1.5)$$

$$SW \leq swmax \quad (3.1.6)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_{t,\omega}^e + pt \cdot TW_{t,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.7)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq p_{z,\omega} \cdot q_z, \quad \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.8)$$

$$TW_{t,\omega} \leq twmax, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.9)$$

$$X_{t,z,\omega} \leq vc \cdot NT_{t,z,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.10)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z,\omega} \leq trh_t, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.11)$$

$$SW_{t,\omega}^e \leq SW, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.12)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.1.13)$$

$$SW, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.14)$$

$$X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.15)$$

$$\min \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_\omega (pc_\omega \cdot Y_\omega) \quad (3.1.16)$$

$$\text{s.t.} \quad Q_\omega + Y_\omega = D_\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.17)$$

$$Q_\omega \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.18)$$

$$Q_\omega, Y_\omega \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.1.19)$$

El problema binivel estocástico de dos etapas (3.1) esta compuesto por un problema líder representado por las expresiones (3.1.1) - (3.1.15) y un problema del seguidor que utiliza las expresiones (3.1.16) - (3.1.19).

Para el problema del líder, su función objetivo (3.1.1) está diseñada para maximizar los beneficios del productor, tomando en cuenta las ventas de la cosecha y los costos asociados al proceso de zonificación, proceso de cosecha y transporte. La restricción (3.1.2) asegura la selección de un conjunto de zonas que determinan una partición del terreno. La restricción (3.1.3) establece un límite superior en la cantidad de zonas de manejo según  $|Z^*|$ , mientras que la restricción (3.1.4) asegura que las particiones cumplan con el nivel de homogeneidad  $\alpha$  necesario. Las restricciones (3.1.5) y (3.1.6) limitan la cantidad de trabajadores estacionales. La restricción (3.1.7) garantiza que la cantidad cosechada no supere la capacidad de producción en términos del número de personas disponibles, y la restricción (3.1.8) se encarga de asegurar que la cantidad cosechada, debe ser menor a la cantidad disponible para recolectar. Las restricción (3.1.9) limita la cantidad de trabajadores temporales. Además, la restricción (3.1.10) asegura que la cosecha no exceda la capacidad de transporte, la restricción (3.1.11) controla el número de viajes, y la restricción (3.1.12) limita las horas extras únicamente a los trabajadores estacionales. Por último, las expresiones (3.1.13) -(3.1.15) describen la naturaleza de las variables para el problema del líder.

Para el seguidor, la función objetivo (3.1.16) busca minimizar los costos derivados de la demanda insatisfecha, considerando la posibilidad de recurrir a un tercero para cubrir dicha demanda. Este problema enfrenta dos restricciones, la primera es la restricción (3.1.17), que asegura el cumplimiento de la demanda, y la segunda es restricción (3.1.18), que limita las compras al productor basadas en la cosecha obtenida. La restricción (3.1.19) define la naturaleza de las variables para el seguidor.

### 3.3. Problema Binivel Estocástico Con Múltiples Seguidores

A continuación, se presenta como propuesta una extensión del modelo de Programación Binivel Estocástico con recurso de dos etapas, ahora considerando la interacción entre un productor y múltiples distribuidores, quienes actúan como múltiples seguidores en el nivel inferior de la estructura jerárquica. Este modelo representa un desafío más complejo debido a la necesidad de coordinar las decisiones del líder con las reacciones de varios seguidores, cada uno con sus propias funciones objetivo y restricciones. Dado que la incertidumbre es un aspecto crucial en este contexto, se asume que los parámetros críticos, como la demanda y los costos de adquisición, están sujetos a variaciones representadas a través de diferentes escenarios. Estos escenarios permiten captar las posibles fluctuaciones del mercado, reflejando así un entorno realista en el cual los distribuidores y el productor deben tomar decisiones.

Para abordar este problema, es fundamental extender las variables y parámetros para representar las decisiones y características de cada distribuidor. Se asume que la relación entre los distribuidores  $k = 1, \dots, K$  es no cooperativa, es decir, sus variables de decisión, funciones objetivo y restricciones son independientes entre seguidores, es decir, cada distribuidor toma decisiones de manera independiente, pero dentro del marco establecido por el productor, resolviendo un problema de optimización con una estructura común que incluye la minimización de los costos derivados de la demanda insatisfecha. Sin embargo, los parámetros específicos pueden variar en cada escenario, permitiendo que el modelo capture la respuesta de cada distribuidor ante distintas condiciones de mercado.

En este contexto, se considera que cada distribuidor negocia un precio único con el productor y adquiere unidades con proveedores externos diferentes, lo que implica que el precio asociado a la adquisición externa varía para cada distribuidor. Dado que los mercados a los que atienden son distintos, la demanda del cliente final también difiere entre los distribuidores.

A continuación, se detallan las modificaciones y elementos adicionales en los conjuntos, parámetros y variables respecto al Problema Binivel Estocástico con recursos en dos etapas y un único seguidor:

**Conjuntos:**

$K$  : Conjunto de distribuidores ( $k = 1, \dots, K$ ).

**Parámetros:**

- $pv_{k,\omega}$  : Precio de la cosecha pagado por el distribuidor  $i$  en el escenario  $\omega$ .  
 $pc_{k,\omega}$  : Costo de comprar a un externo por el distribuidor  $i$  en el escenario  $\omega$ .  
 $D_{k,\omega}$  : Demanda agregada que enfrenta el distribuidor  $i$  en el escenario  $\omega$ .

**VARIABLES DE DECISIÓN DEL SEGUIDOR:**

- Variables de decisión de segunda etapa:

- $Q_{k,\omega}$  : Cantidad total de kilogramos comprados por el distribuidor  $k$  en el escenario  $\omega$ .  
 $Y_{k,\omega}$  : Cantidad total de kilogramos adquiridos de manera externa por el distribuidor  $k$  en el escenario  $\omega$ .

Con esta notación extendida, el modelo de programación binivel estocástico con recursos en dos etapas y múltiples seguidores se formula de la siguiente manera:

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{k=1}^K pv_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \left( ss \cdot SW + \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_{t,\omega}^e + st_t \cdot TW_{t,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z \right] \quad (3.2.1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.2.2)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.2.3)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1) \cdot \sigma_z^2 + (1 - \alpha) \cdot \sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha) \sigma_T^2 \cdot N \quad (3.2.4)$$

$$SW \geq swmin \quad (3.2.5)$$

$$SW \leq swmax \quad (3.2.6)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_{t,\omega}^e + pt \cdot TW_{t,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.7)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} \leq p_{z,\omega} \cdot q_z, \quad \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.8)$$

$$TW_{t,\omega} \leq twmax, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.9)$$

$$X_{t,z,\omega} \leq vc \cdot NT_{t,z,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.10)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z,\omega} \leq trh_t, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.11)$$

$$SW_{t,\omega}^e \leq SW, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.12)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.13)$$

$$q_z \in \{0, 1\}, \quad \forall z \in Z \quad (3.2.14)$$

$$SW, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z} \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.15)$$

$$X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.16)$$

donde, para cada valor de las variables de líder,  $Q_{k,\omega}$  corresponde a la solución del problema de nivel inferior para cada seguidor ( $k = 1, \dots, K$ ):

$$\min \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega}(pc_{k,\omega} \cdot Y_{k,\omega}) \quad (3.2.17)$$

$$\text{s.t. } Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.18)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.2.19)$$

A diferencia del problema binivel estocástico con un solo seguidor, este modelo del líder considera  $K$  problemas entre sus restricciones, uno por cada seguidor en el nivel inferior, cada uno representado por su propio problema de optimización. Cada seguidor cuenta con su propia función objetivo, variables y restricciones. La función objetivo (3.2.17) minimiza los costos asociados con la demanda insatisfecha para cada seguidor  $k$ , mientras que la restricción (3.2.18) garantiza el cumplimiento de la demanda del seguidor  $k$ .

Una diferencia clave entre ambos modelos radica en la restricción (3.1.18) del problema binivel estocástico con un solo seguidor. En el modelo con múltiples seguidores, la restricción (3.21.8) limita la suma de las compras de todos los seguidores  $k = 1, \dots, K$ . Dado que esta restricción afecta a todos los seguidores, se implementa en el problema de nivel superior.

### 3.4. Reformulación

A continuación, se propondrá una estrategia para reformular el problema de programación binivel estocástico con recurso de dos etapas y múltiples seguidores (3.2). Para ello, se empleará el algoritmo propuesto por Saharidis and Ierapetritou, 2009, que descompone el problema original en un problema maestro y un subproblema mediante la descomposición de Benders. En este enfoque, el problema maestro gestiona las variables de la primera etapa, mientras que el subproblema se encarga de las variables de la segunda etapa. Bajo esta descomposición, el subproblema se reformula como un problema de MIP de un solo nivel, utilizando las condiciones de KKT y la técnica Big-M. Al resolver este problema, se determina

la región inducible del subproblema, es decir, las restricciones que se satisfacen con igualdad, lo que permite formular un PL a partir del cual se obtienen los precios duales.

Dado que el algoritmo considera un subproblema con variables continuas, se aplicará una relajación de las restricciones de integridad, lo que permitirá obtener una solución aproximada del problema original.

### 3.4.1. Subproblema

Considerando las variables de segunda etapa, el subproblema es el siguiente:

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{k=1}^K pv_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_{t,\omega}^e + st_t \cdot TW_{t,\omega} + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z \right] \quad (3.3.1)$$

$$\text{s.t. (3.1.7) - (3.1.12)} \quad (3.3.2)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.3.3)$$

$$SW, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z}, X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.3.4)$$

donde, para cada valor de las variables de líder,  $Q_{k,\omega}$  corresponde a la solución del problema de nivel inferior para cada seguidor ( $k = 1, \dots, K$ ):

$$\min \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} (pc_{k,\omega} \cdot Y_{k,\omega}) \quad (3.4.1)$$

$$\text{s.t. } Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.4.2)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.4.3)$$

### 3.4.2. Aplicación del enfoque Karush-Kuhn-Tucker

El subproblema propuesto en (3.2) puede ser reformulado en un solo nivel utilizando las condiciones de KKT en el nivel inferior para cada seguidor. Para ello es necesario ajustar este problema según lo propuesto por los autores [Lu et al., 2006](#), tal y como, se muestra a continuación:

$$\text{Max} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{k=1}^K pv_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_{t,\omega}^e + st_t \cdot TW_{t,\omega} + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z \right] \quad (3.5.1)$$

$$\text{s.t.} \quad (3.1.7) - (3.1.12) \quad (3.5.2)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.5.3)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.5.4)$$

$$SW, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z}, X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.5.5)$$

donde, para cada valor de las variables de líder,  $Q_{i,\omega}$  corresponde a la solución del problema de nivel inferior para cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$ :

$$\text{mín} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} (pc_{v,\omega} \cdot Y_{v,\omega}) \quad (3.6.1)$$

$$\text{s.t.} \quad (3.1.7) - (3.1.12) \quad (3.6.2)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.6.3)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.6.4)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.6.5)$$

Las restricciones de cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$  pueden asociarse con los multiplicadores  $\beta_{k,\omega}$ ,  $\lambda_{k,\omega}$ ,  $\mu_{k,\omega}^1$  y  $\mu_{k,\omega}^2$ , respectivamente. De este modo, las condiciones de KKT para cada seguidor  $k$  se expresan de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.1)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.2)$$

$$\beta_{k,\omega} + \lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^1 = \Pi_{\omega} pc_{k,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.3)$$

$$\lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^2 = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.4)$$

$$\beta_{k,\omega} \cdot \left( \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} - \sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \right) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.5)$$

$$\mu_{k,\omega}^1 \cdot Q_{k,\omega} = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.6)$$

$$\mu_{k,\omega}^2 \cdot Y_{k,\omega} = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.7)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.8)$$

$$\beta_{k,\omega}, \mu_{k,\omega}^1, \mu_{k,\omega}^2 \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.9)$$

$$\lambda_{k,\omega} \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.7.10)$$

De esta forma, el subproblema se reformula en un solo nivel como un problema no-lineal de la siguiente manera:

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{k=1}^K pv_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_{t,\omega}^e + st_t \cdot TW_{t,\omega} + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z,\omega} \right) + \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z \right] \quad (3.8.1)$$

$$\text{s.t. (3.1.7) - (3.1.12)} \quad (3.8.2)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_{k,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.8.3)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.4)$$

$$\beta_{k,\omega} + \lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^1 = \Pi_{\omega} pc_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.5)$$

$$\lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^2 = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.6)$$

$$\beta_{k,\omega} \cdot \left( \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} - \sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \right) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.7)$$

$$\mu_{k,\omega}^1 \cdot Q_{k,\omega} = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.8)$$

$$\mu_{k,\omega}^2 \cdot Y_{k,\omega} = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.9)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \beta_{k,\omega}, \mu_{k,\omega}^1, \mu_{k,\omega}^2 \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.10)$$

$$\lambda_{k,\omega} \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.8.11)$$

$$SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z}, X_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z, \forall \omega \in \Omega \quad (3.8.12)$$

En este problema, las condiciones KKT se reflejan en las restricciones (3.8.3)-(3.8.11) para cada seguidor  $k = 1, \dots, K$ . La principal dificultad en esta formulación radica en las restricciones no lineales (3.8.7)-(3.8.9). Sin embargo, como se menciono anteriormente existen métodos para linealizar estas restricciones. En la siguiente sección, se presenta una reformulación que convierte las restricciones no lineales en restricciones de lineales con incorporación de variables binarias.

### 3.4.3. Aplicación del enfoque Big-M

Al formular las condiciones KKT (2.11) para cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$ , surgen restricciones asociadas a las condiciones de complementariedad. Estas restricciones pueden ser reformuladas utilizando restricciones lineales con incorporación de variables binarias. Para ello, una variable binaria asociada a cada una de estas restricciones. En este caso, se utilizarán las variables binarias  $\phi_{k,\omega}$ ,  $\psi_{k,\omega}^1$  y  $\psi_{k,\omega}^2$  para cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Además, es esencial introducir el parámetro  $M$ , conocido como Big-M, que representa un valor grande. Este parámetro es crucial para la reformulación de las restricciones.

A continuación, se detalla la reformulación de las restricciones de complementariedad para cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$  mediante las ecuaciones (3.9.1)-(3.9.3):

$$\beta_{k,\omega} \cdot \left( \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} - \sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \right) = 0 \quad (3.9.1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta_{k,\omega} \leq M \cdot \phi_{k,\omega}, & \forall \omega \in \Omega \\ \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} - \sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \leq M \cdot (1 - \phi_{k,\omega}), & \forall \omega \in \Omega \end{cases}$$

$$\mu_{k,\omega}^1 \cdot Q_{k,\omega} = 0 \rightarrow \begin{cases} \mu_{k,\omega}^1 \leq M \cdot \psi_{k,\omega}^1, & \forall \omega \in \Omega \\ Q_{k,\omega} \leq M \cdot (1 - \psi_{k,\omega}^1), & \forall \omega \in \Omega \end{cases} \quad (3.9.2)$$

$$\mu_{k,\omega}^2 \cdot Y_{k,\omega} = 0 \rightarrow \begin{cases} \mu_{k,\omega}^2 \leq M \cdot \psi_{k,\omega}^2, & \forall \omega \in \Omega \\ Y_{k,\omega} \leq M \cdot (1 - \psi_{k,\omega}^2), & \forall \omega \in \Omega \end{cases} \quad (3.9.3)$$

### 3.4.4. Problema de Programación Entera Mixta

Al sustituir las restricciones de complementariedad de cada seguidor  $k = 1, 2, \dots, K$  por las nuevas condiciones, el subproblema no lineal se transforma en un problema MIP. Esta reformulación se presenta a continuación en (3.10):

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{i=1}^K p v_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \sum_{t \in T} \left( s s^e \cdot S W_{t,\omega}^e + s t_t \cdot T W_t + \sum_{z \in Z} t r_z N T_{t,z,\omega} \right) \right] \quad (3.10.1)$$

$$\text{s.t. (3.1.7) - (3.1.12)} \quad (3.10.2)$$

$$\sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.10.3)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.4)$$

$$\beta_{k,\omega} + \lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^1 = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.5)$$

$$\beta_{k,\omega} + \lambda_{k,\omega} - \mu_{k,\omega}^1 = \Pi_{\omega} p c_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.6)$$

$$\lambda_{k,\omega} \leq M \cdot \phi_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.7)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} - \sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} \leq M \cdot (1 - \phi_{k,\omega}), \quad \forall \sum_{i=1}^K, \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.8)$$

$$\mu_{k,\omega}^1 \leq M \cdot \psi_{\omega}^1, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.9)$$

$$Q_{k,\omega} \leq M \cdot (1 - \psi_{k,\omega}^1), \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.10)$$

$$\mu_{k,\omega}^2 \leq M \cdot \psi_{k,\omega}^2, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.11)$$

$$Y_{k,\omega} \leq M \cdot (1 - \psi_{k,\omega}^2), \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.12)$$

$$X_{t,z,\omega}, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.10.13)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \beta_{k,\omega}, \mu_{k,\omega}^1, \mu_{k,\omega}^2 \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.14)$$

$$\lambda_{k,\omega} \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.15)$$

$$\phi_{k,\omega}, \psi_{k,\omega}^1, \psi_{k,\omega}^2 \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.10.16)$$

La solución del subproblema (3.10) revela la región inducible del BLPP (3.3). Al resolver el subproblema (3.10), se identifican las restricciones activas, lo que permite formular un problema PL para obtener los precios duales.

### 3.4.5. Problema de Programación Lineal

A partir de la información sobre la región inducible obtenida en el problema (3.10), se puede considerar un problema de PL para calcular los precios duales, como se muestra a continuación:

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} \left[ \sum_{i=1}^K p v_{k,\omega} \cdot Q_{k,\omega} - \sum_{t \in T} \left( s s^e \cdot SW_{t,\omega}^e + s t_t \cdot TW_{t,\omega} + \sum_{z \in Z} t r_z \cdot NT_{t,z,\omega} \right) \right] \quad (3.11.1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} - p s^e \cdot SW_{t,\omega}^e - p t \cdot TW_{t,\omega} + B_{t,\omega}^1 h_{t,\omega}^1 = p s \cdot S\bar{W}, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.11.2)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z,\omega} + B_{z,\omega}^2 h_{z,\omega}^2 = p_{z,\omega} \cdot \bar{q}_z, \quad \forall z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.11.3)$$

$$TW_{t,\omega} + B_{t,\omega}^3 h_{t,\omega}^3 = twmax, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.11.4)$$

$$X_{t,z,\omega} - vc \cdot NT_{t,z,\omega} + B_{t,z,\omega}^4 h_{t,z,\omega}^4 = 0, \quad \forall t \in T, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.11.5)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z,\omega} + B_{t,\omega}^5 h_{t,\omega}^5 = trh_t, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.11.6)$$

$$SW_{t,\omega}^e + B_{t,\omega}^6 h_{t,\omega}^6 = S\bar{W}, \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega \quad (3.11.7)$$

$$\sum_{i=1}^K Q_{i,\omega} - \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z,\omega} + B_{k,\omega}^7 h_{k,\omega}^7 = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.11.8)$$

$$Q_{k,\omega} + Y_{k,\omega} = D_{k,\omega}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.11.9)$$

$$X_{t,z,\omega}, SW_{t,\omega}^e, TW_{t,\omega}, NT_{t,z,\omega} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.11.10)$$

$$Q_{k,\omega}, Y_{k,\omega} \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.11.11)$$

$$h_{t,\omega}^1, h_{z,\omega}^2, h_{t,\omega}^3, h_{t,z,\omega}^4, h_{t,\omega}^5, h_{t,\omega}^6, h_{k,\omega}^7 \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z, k \in \{1, \dots, K\}, \omega \in \Omega \quad (3.11.12)$$

En este problema, las matrices  $B^1, \dots, B^7$  se utilizan para las restricciones (3.22.2)-(3.22.8) respectivamente. Todos los elementos de estas matrices son iguales a 0, excepto los elementos en la diagonal que corresponden a restricciones no activas y son iguales a 1.

Finalmente, a partir de los precios duales obtenidos al resolver este problema, es posible formular el problema maestro de la descomposición de Benders.

### 3.4.6. Problema Maestro

Al resolver el problema (3.11), se obtiene el siguiente vector de precios duales:

$$\gamma = (\gamma_{t,\omega}^1, \gamma_{z,\omega}^2, \gamma_{t,\omega}^3, \gamma_{t,z,\omega}^4, \gamma_{t,\omega}^5, \gamma_{t,\omega}^6, \gamma_{i,\omega}^7, \gamma_{i,\omega}^8),$$

Este vector corresponde a los precios duales asociados a las restricciones (3.22.2)-(3.22.9) respectivamente.

Denotemos por  $((\gamma)^1, \dots, (\gamma)^I)$  al conjunto de puntos extremos del subproblema. Esto permite reformular el problema (3.12), con las variables de la segunda etapa relajadas, en el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{z \in Z} \Pi_{\omega} \cdot cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m \quad + \max_{p=1, \dots, I} H(\gamma^p) \\
 \text{s.t.} \quad & (3.2.2) - (3.2.5) \\
 & \sum_{m=1}^{swmax} SW_m \geq swmin \\
 & q_z, SW_m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, swmax, z \in Z
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 H(\gamma^p) = & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \\
 & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trh_t (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dado que el algoritmo de [Saharidis and Ierapetritou, 2009](#) utiliza únicamente variables binarias en el problema maestro, la variable  $SW$  se redefine en términos de variables binarias, cada una representando a un trabajador, con un máximo de  $swmax$  trabajadores. Esto hace que la restricción (3.2.6), que limita el número de trabajadores estacionales, se vuelva redundante.

El problema (3.12) se puede resolver de manera equivalente mediante el problema (3.14):

$$\max \quad \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m + \eta \tag{3.14.1}$$

$$\text{s.t.} \quad (3.2.2) - (3.2.5) \tag{3.14.2}$$

$$\sum_{m=1}^{swmax} SW_m \geq swmin \tag{3.14.3}$$

$$\begin{aligned}
 \eta \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \\
 & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trh_t (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p, \\
 & p = 1, \dots, I
 \end{aligned} \tag{3.14.4}$$

$$q_z, SW_m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, swmax, z \in Z \quad (3.14.5)$$

Ahora bien, si  $((\nu)^{I+1}, \dots, (\nu)^{I+P})$  son las direcciones extremas del conjunto de soluciones factibles de (3.11), entonces es posible definir finalmente el siguiente Problema Maestro (3.15):

$$\max \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m + \eta \quad (3.15.1)$$

$$\text{s.t. (3.2.2) - (3.2.5)} \quad (3.15.2)$$

$$\sum_{m=1}^{swmax} SW_m \geq swmin \quad (3.15.3)$$

$$\begin{aligned} \eta \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trht (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p, \\ & p = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (3.15.4)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\nu_{t,\omega}^1)^r + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\nu_{z,\omega}^2)^r + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\nu_{t,\omega}^3)^r \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trht (\nu_{t,\omega}^5)^r + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\nu_{i,t,\omega}^7)^r + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\nu_{i,\omega}^8)^r, \\ & r = I + 1, \dots, I + L \end{aligned} \quad (3.15.5)$$

$$q_z, SW_m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, swmax, z \in Z \quad (3.15.6)$$

### 3.4.7. Problema Maestro Reducido

En la  $k$ -ésima iteración, el método de Benders considera un PMR, que incluye solo un subconjunto de las restricciones de optimalidad y viabilidad,  $I$  y  $L$  respectivamente. El PMR se formula de la siguiente manera en (3.16):

$$\max \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m + \eta \quad (3.16.1)$$

$$\text{s.t. (3.2.2) - (3.2.5)} \quad (3.16.2)$$

$$\sum_{j=1}^{sumax} SW_j \geq swmin \quad (3.16.3)$$

$$\begin{aligned} \eta \leq & \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trht (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p, \\ & p = 1, \dots, y_1 \end{aligned} \quad (3.16.4)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\nu_{t,\omega}^1)^r + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\nu_{z,\omega}^2)^r + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\nu_{t,\omega}^3)^r \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trht (\nu_{t,\omega}^5)^r + \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\nu_{i,t,\omega}^7)^r + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\nu_{i,\omega}^8)^r, \\ & r = 1, \dots, y_2 \end{aligned} \quad (3.16.5)$$

$$q_z, SW_m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, sumax, z \in Z \quad (3.16.6)$$

En este contexto,  $y_1$  y  $y_2$  representan la cantidad de cortes de optimalidad y viabilidad en la  $y$ -ésima iteración, con  $y = y_1 + y_2$ . Si  $q_z^y$  es la solución óptima del PMR, esta también será óptima para el problema maestro, siempre y cuando satisfaga:

$$\begin{aligned} \eta \leq & \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \quad (3.17) \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trht (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{sumax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p, \\ & p = 1, \dots, I \end{aligned}$$

Para verificar esta condición, se resuelve el subproblema (3.3) mediante su reformulación como un problema de MIP (3.10) y luego el problema de PL (3.11).

Si el subproblema tiene una solución óptima, esta se alcanzará en un punto extremo  $\gamma^y$ , y el proceso de descomposición concluye a comprobar:

$$\begin{aligned}
 \eta^y \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} p_s SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^y + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^y + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^y \\
 & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trh_t (\gamma_{t,\omega}^5)^y + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^y + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^y
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

En caso de que no se cumpla, se agrega al problema maestro reducido una nueva restricción como corte de optimalidad,

$$\begin{aligned}
 \eta \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} p_s SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^y + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^y + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^y \tag{3.19} \\
 & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trh_t (\gamma_{t,\omega}^5)^y + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^y + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^y
 \end{aligned}$$

En caso de que el subproblema no esté acotado, se obtiene la dirección extrema  $\nu^y$  y se añade una nueva restricción de viabilidad al PMR:

$$\begin{aligned}
 0 \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} p_s SW_m (\nu_{t,\omega}^1)^y + \sum_{z \in Z} \sum_{\omega \in \Omega} p_{z,\omega} q_z (\nu_{z,\omega}^2)^y + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} twmax (\nu_{t,\omega}^3)^y \tag{3.20} \\
 & + \sum_{t \in T} \sum_{\omega \in \Omega} trh_t (\nu_{t,\omega}^5)^y + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} SW_m (\nu_{i,t,\omega}^7)^y + \sum_{i=1}^K \sum_{\omega \in \Omega} D_{i,\omega} (\nu_{i,\omega}^8)^y
 \end{aligned}$$

A continuación se presenta el algoritmo para resolver el problema de programación binivel estocástico con seguidores utilizando al algoritmo de Benders.

---

**Algorithm 1** Descomposición de Benders para el problema de programación binivel estocástico con múltiples seguidores

---

**Paso 1.** Establecer  $UB = +\infty$ ,  $LB = -\infty$  y  $\epsilon = 0,01$ . **Ir al Paso 2.**

**Paso 2.** Formular en un solo nivel el problema binivel estocástico con múltiples seguidores (3.2) relajando las variables enteras y obtener un corte inicial para el problema maestro reducido (3.16). **Ir al Paso 3.**

**Paso 3.** Resolver el problema (3.10) e identificar las restricciones activas. **Ir al Paso 4.**

**Paso 4.** Resolver (3.11) usando las restricciones activas.

- Si el problema (3.11) no es acotado, añadir un corte de factibilidad  $\nu(b - Ah) \leq 0$  al problema maestro reducido. **Ir al Paso 5.**
- Si el problema (3.11) es acotado, actualizar  $LB = \max(LB, (3.11.1))$  y añadir  $\nu(b - Ah) - \eta \leq 0$  como un corte de optimalidad al problema maestro reducido. **Ir al Paso 5.**

**Paso 5.** Resolver el problema maestro reducido y actualizar  $UB = \max(UB, (3.16.1))$ . **Ir al Paso 6.**

**Paso 6.** Resolver el problema maestro reducido y fijar  $\bar{z} = z$ . **Ir al Paso 7.**

**Paso 7.** Si GAP relativo  $\leq \epsilon$ , detenerse y obtener la solución; de lo contrario **Ir al Paso 3.**

$$\text{GAP relativo} = \frac{UB - LB}{\sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{sumax} ss \cdot SW_m + (3.16.1)}$$


---

### 3.5. Benders Con Múltiples Cortes

Dado que la descomposición de Benders utiliza las variables de primera y segunda etapa para definir el algoritmo, se propone una versión con múltiples cortes. En este enfoque, se resuelve un subproblema independiente para cada escenario  $\omega \in \Omega$ , obteniendo un corte específico para cada uno. Todas las variables y restricciones indicadas con el subíndice  $\omega$  están definidas individualmente para cada escenario, y el modelo debe ser entendido como aplicable de forma independiente en cada escenario.

A continuación, se presenta el subproblema MIP para cada escenario específico  $\omega$ , formulado utilizando las condiciones KKT y el método de Big-M:

$$\max \sum_{i=1}^K pv_k \cdot Q_k - \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_t^e + st_t \cdot TW_t + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z} \right) \quad (3.21.1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq ps \cdot SW + ps^e \cdot SW_t^e + pt \cdot TW_t, \quad \forall t \in T \quad (3.21.2)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} \leq p_z \cdot q_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.21.3)$$

$$TW_t \leq twmax, \quad \forall t \in T \quad (3.21.4)$$

$$X_{t,z} \leq vc \cdot NT_{t,z}, \quad \forall t \in T, \forall z \in Z \quad (3.21.5)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} \leq trh_t, \quad \forall t \in T \quad (3.21.6)$$

$$SW_t^e \leq SW, \quad \forall t \in T \quad (3.21.7)$$

$$\sum_{k=1}^K Q_k \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z} \quad (3.21.8)$$

$$\sum_{i=1}^K Q_i \leq \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z}, \quad (3.21.9)$$

$$Q_k + Y_k = D_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.10)$$

$$\beta_k + \lambda_k - \mu_k^1 = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.11)$$

$$\beta_k + \lambda_k - \mu_k^1 = pc_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.12)$$

$$\lambda_k \leq M \cdot \phi_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.13)$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z} - \sum_{i=1}^K Q_i \leq M \cdot (1 - \phi_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.14)$$

$$\mu_k^1 \leq M \cdot \psi^1, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.15)$$

$$Q_k \leq M \cdot (1 - \psi_k^1), \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.16)$$

$$\mu_k^2 \leq M \cdot \psi_k^2, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.17)$$

$$Y_k \leq M \cdot (1 - \psi_k^2), \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.18)$$

$$X_{t,z}, SW_t^e, TW_t, NT_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z \quad (3.21.19)$$

$$Q_k, Y_k \geq 0, \quad \beta_k, \mu_k^1, \mu_k^2 \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.20)$$

$$\lambda_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.21)$$

$$\phi_k, \psi_k^1, \psi_k^2 \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.21.22)$$

A su vez, al resolver el Subproblema para el escenario  $\omega$ , se identifica la región inducible del subproblema, es decir, las restricciones activas. Posteriormente, con esta información se resuelve el siguiente problema PL para el escenario  $\omega$ :

$$\max \sum_{i=1}^K pv_k \cdot Q_k - \sum_{t \in T} \left( ss^e \cdot SW_t^e + st_t \cdot TW_t + \sum_{z \in Z} tr_z NT_{t,z} \right) \quad (3.22.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} - ps^e \cdot SW_t^e - pt \cdot TW_t + B_t^1 h_t^1 = ps \cdot \bar{S}W, \quad \forall t \in T \quad (3.22.2)$$

$$\sum_{z \in Z} b_{t,z} \cdot X_{t,z} + B_z^2 h_z^2 = p_z \cdot \bar{q}_z, \quad \forall z \in Z \quad (3.22.3)$$

$$TW_t + B_t^3 h_t^3 = twmax, \quad \forall t \in T \quad (3.22.4)$$

$$X_{t,z} - vc \cdot NT_{t,z} + B_{t,z}^4 h_{t,z}^4 = 0, \quad \forall t \in T, z \in Z \quad (3.22.5)$$

$$\sum_{z \in Z} tr_z \cdot NT_{t,z} + B_t^5 h_t^5 = trh_t, \quad \forall t \in T \quad (3.22.6)$$

$$SW_t^e + B_t^6 h_t^6 = \bar{S}W, \quad \forall t \in T \quad (3.22.7)$$

$$\sum_{i=1}^K Q_i - \sum_{t \in T} \sum_{z \in Z} b_{t,z} X_{t,z} + B_k^7 h_k^7 = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.22.8)$$

$$Q_k + Y_k = D_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.22.9)$$

$$X_{t,z}, SW_t^e, TW_t, NT_{t,z} \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z \quad (3.22.10)$$

$$Q_k, Y_k \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.22.11)$$

$$h_t^1, h_z^2, h_t^3, h_{t,z}^4, h_t^5, h_t^6, h_k^7 \geq 0, \quad \forall t \in T, z \in Z, k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.22.12)$$

A partir de este último problema se obtienen los precios duales correspondientes al subproblema del escenario  $\omega$ . Una vez resueltos los subproblemas para todos los escenarios, utilizando tanto el problema (3.10) como el problema (3.11), los cortes generados para cada escenario se integran en el siguiente problema maestro reducido:

$$\max \sum_{z \in Z} \sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m + \sum_{\omega \in \Omega} \eta_\omega \quad (3.23.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{z \in Z} a_{s,z} \cdot q_z = 1, \quad \forall s \in S \quad (3.23.2)$$

$$\sum_{z \in Z} q_z \leq |Z^*| \quad (3.23.3)$$

$$\sum_{z \in Z} ((n_z - 1) \cdot \sigma_z^2 + (1 - \alpha) \cdot \sigma_T^2) q_z \leq (1 - \alpha) \sigma_T^2 \cdot N \quad (3.23.4)$$

$$\sum_{m=1}^{swmax} SW_m \geq swmin \quad (3.23.5)$$

$$\begin{aligned} \eta_\omega \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} ps SW_m (\gamma_{t,\omega}^1)^p + \sum_{z \in Z} p_{z,\omega} q_z (\gamma_{z,\omega}^2)^p + \sum_{t \in T} twmax (\gamma_{t,\omega}^3)^p \\ & + \sum_{t \in T} trh_t (\gamma_{t,\omega}^5)^p + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K SW_m (\gamma_{i,t,\omega}^7)^p + \sum_{i=1}^K D_{i,\omega} (\gamma_{i,\omega}^8)^p, \\ & i = 1, \dots, k_1, \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \quad (3.23.6)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} ps SW_m (\nu_{t,\omega}^1)^r + \sum_{z \in Z} p_{z,\omega} q_z (\nu_{z,\omega}^2)^r + \sum_{t \in T} twmax (\nu_{t,\omega}^3)^r \\ & + \sum_{t \in T} trh_t (\nu_{t,\omega}^5)^r + \sum_{m=1}^{swmax} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^K (\nu_{i,t,\omega}^7)^r + \sum_{i=1}^K (\nu_{i,\omega}^8)^r, \\ & j = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2, \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \quad (3.23.7)$$

$$q_z, SW_m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, swmax, z \in Z, \omega \in \Omega \quad (3.23.8)$$

A continuación se presenta el algoritmo para resolver el problema de programación binivel estocástico con múltiples seguidores utilizando al algoritmo de Benders con múltiples cortes.

---

**Algorithm 2** Descomposición de Benders para el problema de programación binivel estocástico con múltiples seguidores y múltiples cortes

---

**Paso 1.** Establecer  $UB = +\infty$ ,  $LB = -\infty$  y  $\epsilon = 0,01$ . **Ir al Paso 2.**

**Paso 2.** Formular en un solo nivel el problema binivel estocástico con múltiples seguidores (3.2) relajando las variables enteras y obtener un corte inicial para el problema maestro reducido (3.23). **Ir al Paso 3.**

**Paso 3.** Definir  $\omega = 1$  y  $LB_{total} = 0$ . **Ir al Paso 4.**

**Paso 4.** Resolver el problema (3.21) para el escenario  $\omega$  e identificar las restricciones activas. **Ir al Paso 5.**

**Paso 5.** Resolver el problema (3.22) para el escenario  $\omega$  usando las restricciones activas del problema (3.21).

- Si el problema (3.22) no es acotado, añadir un corte de factibilidad  $\nu(b - Ah) \leq 0$  al problema maestro reducido para el escenario  $\omega$ . **Ir al Paso 6.**
- Si el problema (3.22) es acotado, actualizar  $LB = LB + (3.22.1)$  y añadir  $\nu(b - Ah) - \eta \leq 0$  como un corte de optimalidad al problema maestro reducido para el escenario  $\omega$ . **Ir al Paso 6.**

**Paso 6.** Si  $\omega = |\Omega|$  actualizar  $LB = \max(LB, LB_{total})$  y **Ir al Paso 7**, sino actualizar  $w = w + 1$  e **Ir al Paso 5.**

**Paso 7.** Resolver el problema maestro reducido y actualizar  $UB = \max(UB, (3.23.1))$ . **Ir al Paso 8.**

**Paso 8.** Resolver el problema maestro reducido y fijar  $\bar{z} = z$ . **Ir al Paso 9.**

**Paso 9.** Si GAP relativo  $\leq \xi$ , detenerse y obtener la solución; de lo contrario **Ir al Paso 3.**

$$\text{GAP relativo} = \frac{UB - LB}{\sum_{z \in Z} cfc \cdot q_z + \sum_{m=1}^{swmax} ss \cdot SW_m + (3.22.1)}$$


---

## 4. Caso de Estudio

### 4.1. Descripción

En esta sección se analizan 10 instancias utilizando la descomposición de Benders para resolver el modelo de programación binivel estocástico (3.1.2)-(3.1.19), que considera un solo distribuidor, y el modelo de programación binivel estocástico con múltiples seguidores (3.2.2)-(3.2.19), en el cual se considera el caso específico de dos distribuidores ( $K = 2$ ).

En todas las instancias se utiliza el lenguaje de modelado algebraico AMPL 3.6.4 junto con el solver Gurobi 11.0.0. El dispositivo utilizado para la resolución de los problemas de programación es un Lenovo Legion con procesador Intel Core i7-10750H a 2.60 GHz y 16 GB de RAM.

### 4.2. Instancias

Se han resuelto exitosamente 10 instancias utilizando los datos del estudio realizado por [Albornoz et al., 2019](#). Las características principales de las instancias provienen de un terreno ubicado en la zona centro-sur de Chile, destinado a la cosecha de uva. Estas instancias abarcan desde una superficie de 3,2 hectáreas en la instancia 1, hasta 10,4 hectáreas en la instancia 10.

En este análisis, se emplea el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI) como indicador del estado del terreno. Este índice, que varía entre -1 y 1, permite cuantificar la vegetación, donde los valores más bajos indican la presencia de agua o nieve, y los más altos reflejan una mayor densidad de vegetación. Los valores de NDVI, registrados en diciembre, oscilan entre 0,7641 y 0,7718.

Cada instancia incluye entre 80 y 260 puntos de muestreo distribuidos uniformemente, con una resolución de 20 metros por 20 metros. El conjunto de zonas potenciales se determina mediante el algoritmo propuesto por [Cid-García et al., 2013](#), generando desde 1.980 zonas potenciales en la instancia 1, hasta 19.035 zonas en la instancia 10.

El rendimiento de cada zona potencial de manejo se evalúa en función del NDVI en cada punto de muestreo dentro de la zona. Valores más altos de NDVI corresponden a mayores

rendimientos y períodos de cosecha más largos, mientras que valores más bajos se asocian con menores rendimientos y tiempos de cosecha más cortos.

Es importante señalar que, en la instancia 1 se considera un periodo de cosecha de 15 días, mientras que en las instancias 2 a 5, el periodo es de 14 días, manteniéndose una demanda constante para cada distribuidor en estas primeras cinco instancias. Para las instancias restantes, el periodo de cosecha se extiende a 21 días, con una demanda constante mayor, en consonancia con la expansión progresiva del terreno.

Los datos de cada instancia incorporan información sobre los precios de venta para ambos distribuidores, obtenida de la Oficina de Estudios y Políticas Agrarias (ODEPA), y salarios ajustados conforme a la legislación chilena. Además, se consideran parámetros con incertidumbre en los rendimientos, precios y proyecciones de demanda futura, abarcando un total de 13 escenarios distintos.

Adicionalmente, se contempla la inclusión de un segundo distribuidor con demanda constante en todas las instancias, pero con un nivel más elevado en las últimas cinco, aunque siempre inferior al del primer distribuidor. Los precios de compra de este segundo distribuidor son menores, mientras que los costos de adquisición a proveedores externos son más altos.

La Tabla 4.1 resume el tamaño del modelo y la cantidad de variables y restricciones empleadas en la resolución óptima de cada instancia. La primera columna presenta el número de instancias con las que fueron resueltos los modelos. La segunda, tercera y cuarta columna detallan las zonas de manejo rectangulares, la cantidad de muestras y los periodos de cosecha respectivamente. La cuarta y quinta columna enumeran el número de variables y restricciones involucradas en el problema binivel estocástico (3.1) que considera solo a un distribuidor, mientras que las sexta y séptima columna reflejan las correspondientes al problema binivel estocástico con múltiples seguidores.

La Tabla 4.2 presenta los resultados experimentales en términos del número de iteraciones, el tiempo de resolución (en segundos) y el GAP relativo alcanzado por el algoritmo de Benders en los distintos enfoques evaluados

La Tabla 4.2 presenta los tiempos de resolución y la cantidad de iteraciones requeridas por el algoritmo de Benders para resolver el modelo de programación binivel estocástico

Instancia	Z	S	T	Problema Binivel Estocástico		Problema Binivel Estocástico Con Múltiples Seguidores	
				# Restricciones	# Variables	# Restricciones	# Variables
1	1.980	80	15	2.402.630	388.521	2.402.656	774.452
2	3.025	100	14	4.275.183	553.990	4.275.209	1.104.394
3	4.290	120	14	7.263.848	785.490	7.263.874	1.566.114
4	5.775	140	14	11.394.973	1.057.235	11.394.999	2.108.129
5	7.480	160	14	16.853.358	1.369.260	16.853.384	2.730.464
6	9.405	180	21	35.674.467	2.577.577	35.674.493	5.144.895
7	11.550	200	21	48.661.472	3.165.297	48.661.498	6.318.200
8	13.915	220	21	64.469.537	3.813.312	64.469.563	7.611.860
9	16.500	240	21	83.375.862	4.521.637	83.375.888	9.025.890
10	19.305	260	21	105.657.647	5.290.187	105.657.673	10.560.205

Tabla 4.1: Resumen del tamaño del modelo y cantidad de variables y restricciones para las 10 instancias resueltas del problema binivel estocástico y el problema binivel estocástico con múltiples seguidores.

(3.1) en las distintas instancias. En la primera columna se indica la cantidad de instancias del modelo. Las columnas segunda, tercera y cuarta muestran, respectivamente, la cantidad de iteraciones, el tiempo de resolución y el GAP relativo para el algoritmo de Benders sin múltiples cortes. Por su parte, las columnas quinta, sexta y séptima presentan los mismos indicadores, pero para el algoritmo de Benders con múltiples cortes. Es relevante mencionar que el GAP relativo utilizado como criterio de parada fue del 1%, por lo que todos los GAP relativos con los que se detiene el algoritmo son menores a este valor.

Instancia	Benders Sin Múltiples Cortes			Benders Con Múltiples Cortes		
	# Iteraciones	Tiempo	GAP [%]	# Iteraciones	Tiempo	GAP [%]
1	1	7,253	0,429 %	1	7,345	0,430 %
2	1	15,202	0,804 %	1	10,110	0,872 %
3	10	88,762	0,946 %	6	58,772	0,988 %
4	17	202,972	0,976 %	9	132,980	0,621 %
5	27	420,500	0,991 %	7	216,912	0,995 %
6	22	628,253	0,584 %	8	235,573	0,905 %
7	29	1101,300	0,718 %	11	426,638	0,831 %
8	20	1403,330	0,555 %	8	444,843	0,691 %
9	22	2297,970	0,741 %	9	625,257	0,845 %
10	28	4067,360	0,840 %	11	764,025	0,636 %

Tabla 4.2: Tiempos de resolución, número de iteraciones y GAP relativo del algoritmo de Benders sin y con múltiples cortes para el problema binivel estocástico.

Siguiendo la misma estructura que la Tabla 4.2, la Tabla 4.3 presenta los tiempos de

resolución, la cantidad de iteraciones y GAP requerido por el algoritmo de Benders para resolver el problema binivel estocástico con múltiples seguidores (3.2).

Instancia	Benders Sin Múltiples Cortes			Benders Con Múltiples Cortes		
	# Iteraciones	Tiempo	GAP [%]	# Iteraciones	Tiempo	GAP [%]
1	3	14,750	0,0173 %	2	11,621	0,017 %
2	3	24,485	0,897 %	2	18,491	0,664 %
3	11	100,731	0,966 %	6	63,062	0,935 %
4	21	260,434	0,80 %	10	149,465	0,993 %
5	23	364,216	0,731 %	9	294,868	0,814 %
6	16	495,529	0,806 %	11	339,864	0,834 %
7	27	1034,586	0,652 %	15	598,666	0,881 %
8	30	1885,840	0,338 %	10	769,763	0,945 %
9	16	2266,540	0,951 %	11	776,342	0,651 %
10	31	4500,230	0,868 %	12	937,761	0,970 %

Tabla 4.3: Tiempos de resolución, número de iteraciones y GAP relativo del algoritmo de Benders sin y con múltiples cortes para el problema binivel estocástico con múltiples seguidores.

De las Tablas 4.1, 4.2, 4.3 se puede apreciar que el tiempo de resolución de cada instancia incrementa a medida que el tamaño del modelo crece. Este aumento está directamente relacionado con el incremento en el número de puntos de muestreo y zonas de manejo rectangulares, lo que hace que el modelo se vuelva más complejo. En particular, a medida que el número de instancias aumenta, el modelo requiere más recursos computacionales, tanto en términos de tiempo como de iteraciones.

Al comparar los tiempos de resolución del algoritmo de Benders con y sin múltiples cortes, tanto para un distribuidor como para dos distribuidores, se aprecia una mejora notable en los tiempos de ejecución cuando se utilizan múltiples cortes. La diferencia más significativa se observa en la instancia 10, con una mejora del 100 %, mientras que la menor diferencia se da en la instancia 1, con una mejora del 1 %. Estos resultados indican que, en general, a medida que el tamaño del modelo se expande, la eficiencia del algoritmo con múltiples cortes se vuelve más evidente, logrando tiempos de resolución cada vez más favorables en comparación con el modelo sin múltiples cortes.

Al comparar los tiempos de resolución entre la programación binivel estocástica y la programación binivel estocástica con múltiples seguidores, para ambos enfoques del algoritmo de Benders, se observa que los tiempos son mayores en el modelo de dos distribuidores, debido

a su mayor tamaño y complejidad, como se muestra en la Tabla 4.1.

En lo que sigue, se presentan los resultados computacionales de ambos modelos, junto con el análisis correspondiente. Los resultados que se discutirán corresponden al enfoque con múltiples cortes, ya que este ha demostrado ser más eficiente en términos de tiempos de ejecución.

### 4.3. Resultados y discusión

Las Tablas 4.4 y 4.5 presentan los resultados obtenidos para las 10 instancias, considerando tanto un seguidor y múltiples seguidores, respectivamente. En cada instancia, se muestran los principales indicadores financieros, como el beneficio neto del productor, el ingreso total del productor, los costos asociados tanto al productor como al distribuidor, y el costo de la demanda insatisfecha.

Instancia	Beneficio del Productor	Ingreso del Productor	Costo del Productor	Costo del Distribuidor	Desviación [%]
1	13.612.400	21.331.300	7.718.900	24.461.600	1,0120 %
2	16.357.700	25.081.500	8.723.800	20.199.200	0,553 %
3	22.799.500	31.829.900	9.030.400	12.480.600	0,524 %
4	24.407.600	36.580.600	12.173.000	7.119.650	0,500 %
5	28.091.000	41.074.700	12.983.700	2.223.620	0,722 %
6	33.737.400	47.377.600	13.640.200	7.863.040	0,416 %
7	36.359.600	50.665.800	14.306.200	4.280.650	0,352 %
8	39.174.800	53.905.700	14.730.900	828.529	0,418 %
9	40.066.400	54.681.700	14.615.300	29.554	0,302 %
10	40.629.700	54.710.600	14.080.900	0	0,0230 %

Tabla 4.4: Resumen del beneficio del productor, ingreso, costo del productor, costo del distribuidor y desviación porcentual del modelo con un distribuidor para las 10 instancias.

Para resolver estos problemas, se empleó el algoritmo de Benders con múltiples cortes, relajando las variables enteras del subproblema para formular las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Esta aproximación permite obtener una solución muy próxima a aquella que incluye todas las variables enteras. Para evaluar la calidad de esta aproximación, las tablas incluyen un porcentaje de desviación que compara el valor obtenido mediante el algoritmo de Benders con el que se obtendría resolviendo el modelo con todas las variables enteras. En general, esta desviación es pequeña, situándose por debajo del 1 %, lo que sugiere que la aproximación es adecuada.

Instancia	Beneficio del Productor	Ingreso del Productor por Venta al D1	Ingreso del Productor por Venta al D2	Costo del Productor	Costo del D1	Costo del D2	Desviación [%]
1	14.526.700	22.264.200	0	7.737.500	24.398.400	12.637.300	0,663 %
2	15.942.400	24.133.900	0	8.191.500	22.359.700	12.637.300	0,792 %
3	24.114.800	33.065.200	0	8.950.400	12.569.600	12.637.300	0,384 %
4	26.026.500	38.360.500	242.217	12.576.217	6.818.640	12.309.200	0,699 %
5	31.046.200	42.776.700	1.810.060	13.540.560	2.187.950	10.270.600	0,573 %
6	36.098.500	49.315.700	693.580	13.910.780	7.853.030	15.073.000	0,097 %
7	39.703.900	52.909.700	2.025.350	15.231.150	4.078.250	13.333.400	0,379 %
8	44.404.900	56.357.900	4.747.650	16.700.650	560.995	9.984.480	0,602 %
9	47.902.900	56.817.800	8.211.410	17.126.310	105.674	6.014.500	0,208 %
10	50.349.200	56.925.000	10.928.800	17.504.600	0	2.984.360	0,539 %

Tabla 4.5: Resumen del beneficio del productor, ingreso por venta a los distribuidores, costo del productor, costos de los distribuidores y desviación porcentual del modelo con multiples seguidores para las 10 instancias.

En la Tabla 4.4, la desviación más baja se encuentra en la instancia 10, con un valor de 0,023 %, mientras que la mayor desviación se presenta en la instancia 1, con un valor de 1,012 %. El promedio de desviación para las 10 instancias del modelo con un distribuidor es de aproximadamente 0,53 %, lo que indica que la relajación de las variables enteras proporciona una buena aproximación a la solución del modelo completo.

Por otro lado, en la Tabla 4.5, la desviación más baja ocurre en la instancia 6, con un valor de 0,0969 %, mientras que la mayor desviación se presenta en la instancia 2, con un valor de 0,792 %. El promedio de desviación para este modelo es de aproximadamente 0,48 %, lo que sugiere que la aproximación es efectiva incluso en problemas más complejos.

La Tabla 4.4 refleja el desempeño del modelo cuando solo existe un distribuidor, el cual adquiere todo el producto generado por el productor. En este caso, se observa que el beneficio del productor aumenta progresivamente desde la instancia 1 hasta la instancia 10. Esto está directamente relacionado con el aumento en la superficie de cultivo, lo que permite al productor incrementar la cantidad de producto cosechado y, por lo tanto, incrementar sus ventas.

El costo de la demanda insatisfecha, reflejado en el costo del distribuidor, disminuye a medida que aumenta la producción. Esto se debe a que, al disponer de más producto, el distribuidor puede satisfacer una mayor parte de su demanda, reduciendo el impacto de la demanda insatisfecha. En las primeras instancias, el distribuidor enfrenta mayores costos

debido a la menor cantidad de producto disponible, pero a medida que avanza el modelo, los costos disminuyen de manera significativa.

Por otro lado, la Tabla 4.5, introduce una dinámica de competencia que no se observa en el caso de un solo distribuidor. Esto permite al productor diversificar sus ventas y, en consecuencia, obtener mayores beneficios a medida que aumenta la producción. En este contexto, el productor se ve favorecido por la posibilidad de vender a dos distribuidores, lo que incrementa sus ingresos de manera progresiva a lo largo de las 10 instancias.

El distribuidor 1, con un precio de compra más elevado y menores costos de demanda insatisfecha, tiene una clara ventaja competitiva desde las primeras instancias. En las instancias iniciales (1 a 3), el distribuidor 1 adquiere la mayor parte del producto disponible, ya que su capacidad de pagar un precio superior lo posiciona favorablemente frente al distribuidor 2, quien no puede competir en estas primeras fases debido a su menor poder adquisitivo y mayores costos por demanda insatisfecha. Esto se traduce en una mayor eficiencia operativa para el distribuidor 1, ya que logra satisfacer una mayor proporción de su demanda con menores costos.

A partir de la instancia 4, el distribuidor 2 comienza a participar de forma más activa en la compra del producto, debido a que el incremento en la capacidad de producción permite que ambos distribuidores tengan acceso a más producto. Aunque el distribuidor 2 empieza a reducir sus costos de demanda insatisfecha, no logra alcanzar la misma eficiencia que el distribuidor 1. Esta diferencia se mantiene incluso en las instancias posteriores (6 a 10), donde la oferta sigue creciendo, pero el distribuidor 2 continúa enfrentando un costo por demanda insatisfecha más alto que el distribuidor 1, lo que refleja una desventaja estructural en su capacidad para competir.

El comportamiento observado en las últimas instancias demuestra cómo, a pesar de la mayor disponibilidad de producto, el distribuidor 1 sigue dominando en términos de eficiencia. Al tener menores costos por demanda insatisfecha y poder pagar un precio más alto, el distribuidor 1 maximiza su participación, mientras que el distribuidor 2, aunque aumenta su cuota de compra, lo hace con mayores dificultades debido a su estructura de costos menos favorable.

La ventaja competitiva del distribuidor 1 no solo radica en su capacidad de pagar más por

el producto, sino también en su habilidad para manejar los costos de demanda insatisfecha de manera más eficiente. Esto le permite ajustar mejor sus operaciones y mantener una posición dominante en el mercado, incluso cuando la oferta aumenta y el distribuidor 2 empieza a participar más activamente. Sin embargo, la participación del distribuidor 2 es limitada por su capacidad de gestionar la demanda insatisfecha, lo que lo coloca en una posición de desventaja a lo largo de todas las instancias.

Este análisis muestra cómo, en un modelo binivel con múltiples seguidores, las decisiones del líder (el productor) y la estructura de precios y costos de los seguidores (los distribuidores) influyen directamente en la asignación de producto y en los costos asociados a la demanda insatisfecha. Aunque la oferta aumenta de manera significativa, la ventaja competitiva del distribuidor 1 persiste, mientras que el distribuidor 2 sigue enfrentando mayores costos y una menor capacidad de satisfacer su demanda de manera eficiente.

Por otra parte, la Tabla 4.6 presenta los valores del Valor Esperado de la Información Perfecta (EVPI) para las 10 instancias consideradas en el problema binivel estocástico con múltiples seguidores. El EVPI se expresa tanto en valores absolutos como en porcentajes respecto al valor esperado con información perfecta, lo que permite una interpretación clara de su impacto relativo en cada instancia. Se observa que el valor del EVPI aumenta conforme incrementa el tamaño del problema.

Instancia	EVPI	EVPI [%]
1	1.486.900	9,229 %
2	1.903.200	10,589 %
3	3.522.100	12,701 %
4	4.133.000	13,621 %
5	5.024.900	13,862 %
6	4.971.600	12,095 %
7	4.910.600	10,97 %
8	7.966.400	15,134 %
9	8.528.600	15,087 %
10	10.822.800	17,614 %

Tabla 4.6: Valores de EVPI para el problema binivel estocástico con múltiples seguidores.

Este incremento progresivo del EVPI sugiere que la incertidumbre juega un papel cada vez más crucial en las soluciones óptimas, lo que resalta el valor potencial de contar con información perfecta en estas situaciones.

Desde el punto de vista práctico, estos resultados demuestran la importancia de la información en la toma de decisiones bajo incertidumbre. A medida que las instancias avanzan, el porcentaje de EVPI indica que la falta de información perfecta afecta significativamente el rendimiento de las soluciones obtenidas por un modelo determinista comparado con el estocástico.

Para resolver ambos problemas binivel utilizando el algoritmo de Benders, fue necesario aplicar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para reformular el subproblema. Esto derivó en una serie de restricciones no lineales que se resolvieron mediante el enfoque Big-M. Sin embargo, surge la interrogante sobre el valor adecuado para este parámetro, ya que una elección arbitraria puede conducir a soluciones no óptimas.

Para determinar los valores aceptables de este parámetro, se establecerá un límite a partir del cual las soluciones sean viables. En particular, para el problema binivel estocástico con múltiples seguidores, asumimos que la cantidad de producto que vende el productor o que compra cualquiera de los distribuidores es positiva en cualquier escenario  $\omega$ . Para que esto sea posible, la variable binaria  $\psi_{k,\omega}^1$  debe ser igual a 0, de acuerdo con la restricción (3.10.10). Al considerar además la restricción de demanda (3.10.4) y la combinación de las restricciones (3.10.10) y (3.10.12), obtenemos la relación

$$\frac{D_{k,\omega}}{1 - \psi_{k,\omega}^2} \leq M$$

para todo distribuidor  $k$  y escenario  $\omega$ . Esto genera dos casos extremos: cuando para todos los distribuidores  $k$  y escenarios  $\omega$  la variable binaria  $\psi_{k,\omega}^2$  es igual a 0, y cuando para todos los distribuidores  $k$  y escenarios  $\omega$   $\psi_{k,\omega}^2$  es igual a 1. El caso más crítico ocurre cuando  $\psi_{k,\omega}^2 = 1$  para todos los distribuidores y escenarios, ya que esto asegura que la solución sea válida. En este caso, la relación se reduce a

$$D_{k,\omega} \leq M.$$

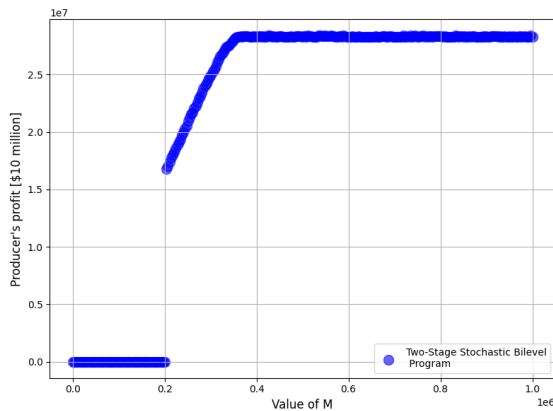
Aplicando la esperanza matemática a ambos lados de esta desigualdad, se concluye que el límite inferior de  $M$  para cada distribuidor  $k$  es

$$\sum_{\omega}^{\Omega} \Pi_{\omega} D_{k,\omega} \leq M.$$

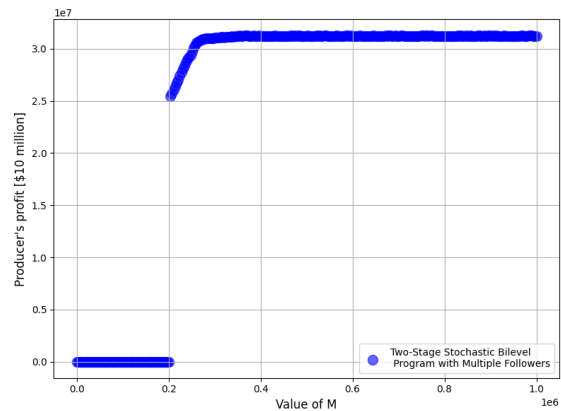
Dado que el caso más crítico corresponde al distribuidor con la mayor esperanza de demanda, se deduce que el límite inferior de  $M$  debe ser

$$\text{máx} \left\{ \sum_{\omega}^{\Omega} \Pi_{\omega} D_{k,\omega} \right\} \leq M.$$

Para verificar lo anterior, se resolvió directamente el problema binivel estocástico y el problema binivel estocástico con múltiples seguidores 300 veces utilizando la instancia 5 y diferentes valores del parámetro  $M$ . A partir de estos resultados, se generó la Figura 4.1, la cual muestra la variación del beneficio del productor en función de los distintos valores de  $M$ .



(a) Gráfico A



(b) Gráfico B

Figura 4.1: Comparación de los beneficios del productor al variar el parámetro  $M$  en el problema binivel estocástico (Gráfico A) y problema binivel estocástico con múltiples seguidores (Gráfico B).

De la Figura 4.1 se observan tres comportamientos principales. Primero, para valores pequeños de  $M$ , las soluciones obtenidas en ambos modelos resultan inviables. En segundo lugar, se identifica un rango intermedio de valores de  $M$  en el que las soluciones son subóptimas en ambos modelos. Finalmente, para valores grandes de  $M$ , las soluciones se estabilizan, lo que garantiza que la solución obtenida en ambos modelos sea óptima.

Asimismo, la Figura 4.1b muestra que la solución del problema binivel estocástico con múlt-

tiples seguidores se estabiliza cuando  $M = 3,6 \cdot 10^5$ , un valor que excede  $\max \{ \sum_{\omega \in \Omega} \Pi_{\omega} D_{k,\omega} \} = 3,5 \cdot 10^5$ , donde el distribuidor con la mayor esperanza de demanda es  $k = 1$ . Esto confirma la validez de la expresión deducida para el límite inferior del parámetro  $M$ . De manera análoga, lo mismo ocurre en el problema binivel estocástico, donde tanto el valor del parámetro  $M$  de la Figura 4.1a como la esperanza de demanda son similares.

## 5. Conclusiones

Este trabajo presenta un modelo novedoso de programación binivel estocástico con múltiples seguidores, diseñado específicamente para abordar la planificación de cosecha en una cadena de suministro agrícola bajo condiciones de incertidumbre. A través de este modelo, se ha logrado capturar la relación jerárquica entre el productor (líder) y los distribuidores (seguidores), donde las decisiones de cosecha y producción del productor influyen directamente en las decisiones de compra y distribución de los seguidores. Este enfoque es particularmente valioso para problemas de planificación agrícola, donde la incertidumbre en los rendimientos de cosecha y la demanda del mercado son factores críticos que afectan la toma de decisiones.

El aporte principal de este trabajo radica en la formulación de un modelo que integra tanto la definición de zonas de manejo para la cosecha como la coordinación entre los distintos actores de la cadena de suministro, gestionando la incertidumbre mediante escenarios estocásticos. Este modelo permite optimizar las decisiones del productor en función de la demanda de los distribuidores, ajustándose a los cambios en las condiciones del mercado y del rendimiento agrícola.

Además, se implementó una estrategia de descomposición de Benders adaptada a la estructura binivel del modelo, lo que permitió descomponer el modelo en un problema maestro y múltiples seguidores. Este enfoque facilitó la resolución eficiente del modelo sobre instancias, con la adición de múltiples cortes para mejorar la convergencia del algoritmo. Los resultados obtenidos en las simulaciones muestran que el modelo propuesto no solo optimiza los costos operativos del productor, sino que también mejora la eficiencia en la asignación de recursos, logrando una coordinación efectiva entre las partes.

Otro componente crucial de este trabajo ha sido la aplicación del enfoque Big-M en la

reformulación del subproblema. La inclusión de la constante  $M$  adecuada ha permitido manejar las restricciones de complementariedad en el subproblema y convertirlo en un problema de programación entera mixta, facilitando su resolución. Se ha demostrado que la elección cuidadosa del valor de  $M$  es fundamental para evitar tanto sobredimensionamientos como subdimensionamientos, asegurando que las soluciones sean aceptables.

Además, los experimentos demostraron que el manejo de la incertidumbre a través de escenarios estocásticos es esencial para obtener decisiones robustas que se adapten a variaciones en los rendimientos de cosecha, precios y la demanda. El análisis del Valor Esperado de la Información Perfecta (EVPI) resalta que la obtención de mejor información sobre las condiciones futuras podría traducirse en una mejora sustancial en los resultados, tanto en términos de eficiencia como de rentabilidad.

Esta tesis representa una contribución significativa al ámbito de la optimización aplicada, destacándose por su enfoque innovador que combina programación binivel, modelado estocástico, descomposición de Benders y múltiples distribuidores para resolver problemas de planificación agrícola. No obstante, su impacto podría ser aún mayor si se integrara el flujo completo de la cadena de suministro, abarcando desde las etapas iniciales de producción, pasando por el procesamiento, almacenamiento y transporte, hasta la distribución y el consumidor final. Además, tener en cuenta la perecibilidad de los productos agrícolas, un aspecto crucial en las cadenas de suministro de productos frescos, permitiría abordar desafíos logísticos y estratégicos adicionales, ampliando así la aplicabilidad y relevancia práctica del modelo propuesto.

La implementación de múltiples cortes de Benders en la resolución de modelos, como se menciona en la tesis, es una estrategia fundamental para reducir de manera significativa los tiempos de cómputo. Al descomponer el problema original en subproblemas más manejables y añadir cortes que capturan información relevante en cada iteración, se optimiza el uso de los recursos computacionales y se acelera la convergencia hacia una solución óptima. Esto es especialmente valioso en modelos complejos, donde las interacciones jerárquicas o estocásticas crean estructuras difíciles de resolver directamente. Este enfoque no solo mejora la eficiencia, sino que también amplía la aplicabilidad del modelo a problemas de mayor escala y complejidad, lo que refuerza su contribución tanto en el ámbito académico como en

el práctico.

Finalmente, trabajo abre nuevas oportunidades para futuras investigaciones, como la posibilidad de integrar ciertos escenarios directamente en el problema maestro. Este enfoque podría ofrecer información adicional clave que ayude en la toma de decisiones, mejorando así la calidad de los cortes generados por el subproblema para los demás escenarios y permitiendo un acercamiento más eficiente a la solución óptima.

Sin embargo, es fundamental determinar qué escenarios y cuántos de ellos deberían integrarse al problema maestro. Dado que el modelo aborda la incertidumbre en aspectos esenciales como la demanda, los precios y el rendimiento de la cosecha, es necesario realizar un análisis detallado para identificar de manera objetiva los escenarios más relevantes y la cantidad adecuada de estos. Esto garantizaría que la integración de escenarios maximice su potencial, optimizando la eficiencia del algoritmo de Benders y adaptándolo a las particularidades del problema planteado.

## Referencias

- A. Aazami and M. Saidi-Mehrabad. Benders decomposition algorithm for robust aggregate production planning considering pricing decisions in competitive environment: A case study. *Scientia Iranica*, 26(5):3007–3031, 2019. ISSN 1026-3098. 10.24200/sci.2018.5563.1346. URL [https://scientiairanica.sharif.edu/article\\_21059.html](https://scientiairanica.sharif.edu/article_21059.html).
- E. Aiyoshi and K. Shimizu. A solution method for the static constrained stackelberg problem via penalty method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12):1111–1114, 1984. 10.1109/TAC.1984.1103455.
- V. M. Albornoz and P. I. Vera. Coordinating harvest planning and scheduling in an agricultural supply chain through a stochastic bilevel programming. *International Transactions in Operational Research*, 30(4):1819–1842, 2023. 10.1111/itor.13190.
- V. M. Albornoz and G. E. Zamora. Decomposition-based heuristic for the zoning and crop planning problem with adjacency constraints. *TOP*, 29:248–265, 2021.
- V. M. Albornoz, N. M. Cid-García, R. Ortega, and Y. A. Ríos-Solís. *A hierarchical planning scheme based on precision agriculture*, pages 129–162. Springer, 2015.
- V. M. Albornoz, L. J. Ñanco, and J. L. Sáez. Delineating robust rectangular management zones based on column generation algorithm. *Computers and Electronics in Agriculture*, 161:194–201, 2019.
- V. M. Albornoz and L. J. Ñanco. An empirical design of a column generation algorithm applied to a management zone delineation problem. In R. Fonseca, G.W. Weber, and J. Telhada, editors, *Computational Management Science*, volume 682 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, 2016.
- R. Alizadeh and T. Nishi. Dynamic p+q maximal hub location problem for freight transportation planning with rational markets. *Advances in Mechanical Engineering*, 11(2), 2019. 10.1177/1687814018822934.

- Y. G. Ampatzidis, S. G. Vougioukas, M. D. Whiting, and Q. Zhang. Applying the machine repair model to improve efficiency of harvesting fruit. *Biosystems Engineering*, 120(25-33), 2014.
- S.A. Bagloee, M. Sarvi, and M. Patriksson. A hybrid branch-and-bound and benders decomposition algorithm for the network design problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 32:319–343, 2017. 10.1111/mice.12224. URL <https://doi.org/10.1111/mice.12224>.
- Jonathan F. Bard. *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, primera edición edition, 1998. ISBN 978-1-4419-4807-6.
- Jonathan F. Bard and James T. Moore. A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(2):281–292, 1990. 10.1137/0911017.
- Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 4th edition, 2010. ISBN 978-0-470-46272-0.
- J.F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numer. Math.*, 4:238–252, 1962. 10.1007/BF01386316.
- A. Bhatti, D. Mulla, and B. Frazier. Estimation of soil properties and wheat yields on complex eroded hills using geostatistics and thematic mapper images. *Remote Sensing of Environment*, 37(3):181–191, 1991.
- Wayne F. Bialas and Mark H. Karwan. Two-level linear programming. *Management Science*, 30(8):1004–1020, 1984. 10.1287/mnsc.30.8.1004. URL <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.8.1004>.
- S. Blackmore. The interpretation of trends from multiple yield maps. *Computers and Electronics in Agriculture*, 26(1):37–51, 2013.
- S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, 2004.

- J. Bracken and J. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, 21:37–44, 1973. 10.1287/opre.21.1.37. URL <https://doi.org/10.1287/opre.21.1.37>.
- Geunyeong Byeon and Pascal Van Hentenryck. Benders subproblem decomposition for bilevel problems with convex follower. *INFORMS Journal on Computing*, 34(3):1749–1767, 2022. URL <https://doi.org/10.1287/ijoc.2021.1128>.
- X. Cai, D. C. McKinney, L. S. Lasdon, and D. W. Watkins. Solving large nonconvex water resources management models using generalized benders decomposition. *Operations Research*, 49(2):235–245, 2001. 10.1287/opre.49.2.235.13537.
- W. Candler and R. Norton. Multilevel programming. Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington, DC, 1977.
- Wilfred Candler and Robert Townsley. A linear two-level programming problem. *Computers & Operations Research*, 9(1):59–76, 1982. ISSN 0305-0548. [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(82\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0305-0548(82)90006-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0305054882900065>.
- S. P Canto. Application of benders’ decomposition to power plant preventive maintenance scheduling. *European Journal of Operational Research*, 184(2):759–777, 2008. 10.1016/j.ejor.2006.11.018. January.
- M. Caramia and R. Mari. A decomposition approach to solve a bilevel capacitated facility location problem with equity constraints. *Optimization Letters*, 10:997–1019, 2016. <https://doi.org/10.1007/s11590-015-0918-z>.
- P. Carr, G. Carlson, J. Jacobsen, G. Nielsen, and E. Nielsen. Farming soils, not fields: A strategy for increasing fertilizer profitability. *Journal of Production Agriculture*, 4(1): 57–61, 1991.
- N. M. Cid-Garcia, V. Albornoz, Y. A. Rios-Solis, and R. Ortega. Rectangular shape management zone delineation using integer linear programming. *Computers and Electronics in Agriculture*, 93, 2013.

- B. Colson, P. Marcotte, and G. Savard. An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research*, 153:235–256, 2007. 10.1007/s10479-007-0176-2. URL <https://doi.org/10.1007/s10479-007-0176-2>.
- A. M. Costa. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & Operations Research*, 32(6):1429–1450, 2005. 10.1016/j.cor.2003.11.012.
- A. M. Costa, J.-F. Cordeau, B. Gendron, and G. Laporte. Accelerating benders decomposition with heuristic master problem solutions. *Pesquisa Operacional*, 32(1):03–20, 2012. 10.1590/S0101-74382012000500005.
- G. Côté and M. A. Laughton. Large-scale mixed integer programming: Benders-type heuristics. *European Journal of Operational Research*, 16(3):327–333, 1984.
- J.-F. Côté, M. Dell’Amico, and M. Iori. Combinatorial benders’ cuts for the strip packing problem. *Operations Research*, 62(3):643–661, 2014. 10.1287/opre.2013.1248.
- George Dantzig. *Linear Programming Under Uncertainty*. Springer, Management Science, Volumen 50, 2010, 2010. ISBN 978-1-4419-1641-9. Páginas 1-11.
- S. Dempe. *Foundations of bilevel programming*, volume 61 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Kluwer, Dordrecht, 2002.
- K. Diker, D. Heermann, and M. Brodahl. Frequency analysis of yield for delineating yield response zones. *Precision Agriculture*, 5:435–444, 2004.
- Concepción Domínguez, Ricardo Gázquez, Juan Miguel Morales, and Salvador Pineda. The cooperative maximum capture facility location problem. 2023. URL <https://arxiv.org/abs/2305.15169>.
- Pirmin Fontaine and Stefan Minner. Benders decomposition for discrete–continuous linear bilevel problems with application to traffic network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 70:163–172, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2014.09.007>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261514001611>.

- J. Fortuny-Amat and B. McCarl. A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. *Journal of the Operational Research Society*, 32(9):783–792, 1981.
- C. Fraisse, K. Sudduth, and N. Kitchen. Delineation of site-specific management zones by unsupervised classification of topographic attributes and soil electrical conductivity. *Transactions of the ASAE*, 44(1):155–166, 2001.
- D. Franzen and T. Nanna. Management zone delineation methods. In *Proceedings of the 6th International Conference on Precision Agriculture and Other Precision Resources Management*, Minneapolis, 14–17 July 2003. MN.
- Alan Gavioli, Eduardo Godoy de Souza, Claudio Leones Bazzi, Luciana Pagliosa Carvalho Guedes, and Kelyn Schenatto. Optimization of management zone delineation by using spatial principal components. *Computers and Electronics in Agriculture*, 127:302–310, 2016. ISSN 0168-1699. 10.1016/j.compag.2016.06.029. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016816991630432X>.
- A.M. Geoffrion. Generalized benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10:237–260, 1972. 10.1007/BF00934810.
- Marcela C. González-Araya, Wladimir E. Soto-Silva, and Luis G. Acosta Espejo. *Harvest Planning in Apple Orchards Using an Optimization Model*, pages 79–105. Springer New York, New York, NY, 2015.
- Hamed Goudarzi, Mohammad Reza Hesamzadeh, Derek Bunn, Mahmud Fotuhi-Firuzabad, and Mohammad Shahidehpour. A strengthened primal-dual decomposition algorithm for solving electricity market pricing with revenue-adequacy and ffr constraints. *IEEE Transactions on Energy Markets, Policy and Regulation*, pages 1–13, 2024. 10.1109/TEMPR.2024.3363371.
- I.E. Grossmann and C.A. Floudas. Active constraint strategy for flexibility analysis in chemical processes. *Computers & Chemical Engineering*, 11(6):675–693, 1987. ISSN 0098-1354. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(87\)87011-4](https://doi.org/10.1016/0098-1354(87)87011-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0098135487870114>.

- N. Guide. Optimization problem types, 2024. URL <https://neos-guide.org/optimization-tree>.
- Sebastián Andrés Dávila Gálvez. *Algorithms for Bi-level Optimization in Retail: Pricing, Assortment and Demand Coordination*. Doctoral thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil Industrial, Santiago, Chile, 2021. URL [https://scientiairanica.sharif.edu/article\\_21059.html](https://scientiairanica.sharif.edu/article_21059.html).
- A. Haghverdi, B. G. Leib, R. A. Washington-Allen, P. D. Ayers, and M. J. Buschermohle. Perspectives on delineating management zones for variable rate irrigation. *Computers and Electronics in Agriculture*, 117:154–167, 2015.
- Xutao Han, Zhiyi Li, Zuyi Li, Yi Zhao, and Mingfei Ban. Privacy-preserving operational decision making for networked autonomous microgrids based on bilevel mixed-integer optimization. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 15(3):2881–2897, 2024. 10.1109/TSG.2023.3323789.
- Pierre Hansen, Brigitte Jaumard, and Gilles Savard. New branch-and-bound rules for linear bilevel programming. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(5):1194–1217, 1992. 10.1137/0913069. URL <https://doi.org/10.1137/0913069>.
- Celso Herrera-Cáceres, Francisco Pérez-Galarce, Eduardo Álvarez Miranda, and Alfredo Candia-Véjar. Optimization of the harvest planning in the olive oil production: A case study in chile. *Computers and Electronics in Agriculture*, 141:147–159, 2017. ISSN 0168-1699. 10.1016/j.compag.2017.07.017. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168169916310006>.
- Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill, 11.<sup>a</sup> edition, 2023. ISBN 978-6071520302.
- J. Hooker and G. Ottosson. Logic-based benders decomposition. *Mathematical Programming, Series A*, 96:33–60, 2003. 10.1007/s10107-003-0375-9.
- J. N. Hooker. Planning and scheduling by logic-based benders decomposition. *Operations Research*, 55(3):588–602, 2007. 10.1287/opre.1060.0371.

- A. Hornung, R. Khosla, R. Reich, and D Westfall. Evaluation of site-specific management zones: grain yield and nitrogen use efficiency. In *Precision agriculture Papers from the 4th European Conference on Precision Agriculture*, Berlin, Germany, 15-19 June 2003. MN.
- Sanjay Dominik Jena and Marcus Poggi. Harvest planning in the brazilian sugar cane industry via mixed integer programming. *European Journal of Operational Research*, 230(2):374–384, 2013. ISSN 0377-2217. 10.1016/j.ejor.2013.04.011. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221713003093>.
- C. K. Johnson, D. A. Mortensen, B. J. Wienhold, J. F. Shanahan, and J. W. Doran. Site-specific management zones based on soil electrical conductivity in a semiarid cropping system. *Agronomy Journal*, 95(2):303–315, 2003.
- J.J. Júdice and A.M. Faustino. A sequential lcp method for bilevel linear programming. *Annals of Operations Research*, 34:89–106, 1992. <https://doi.org/10.1007/BF02098174>.
- Thomas Kleinert and Martin Schmidt. Why there is no need to use a big-m in linear bilevel optimization: a computational study of two ready-to-use approaches. *Computational Management Science*, 20(3), 2023. 10.1007/s10287-023-00435-5. URL <https://doi.org/10.1007/s10287-023-00435-5>.
- Thomas Kleinert, Martine Labbe, Frank Plein, and Martin Schmidt. Technical note—there’s no free lunch: On the hardness of choosing a correct big-m in bilevel optimization. *Operations Research*, 68(6):1716–1721, 2020. 10.1287/opre.2019.1944. URL <https://doi.org/10.1287/opre.2019.1944>.
- M. Labbé and A. Violin. Bilevel programming and price setting problems. *4OR-Q J Oper Res*, 11:1–30, 2013.
- Martine Labbé, Marina Leal, and Justo Puerto. New models for the location of controversial facilities: A bilevel programming approach. *Computers & Operations Research*, 107:95–106, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.03.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054819300577>.

- Yun Hui Lin, Qingyun Tian, Dongdong He, and Yuan Wang. Revisiting stackelberg p-median problem with user preferences. *Computers & Operations Research*, 161:106429, 2024. 10.1016/j.cor.2023.106429. URL <https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106429>.
- P. Loridan and J. Morgan. Weak via strong stackelberg problem: New results. *Journal of Global Optimization*, 8:263–287, 1996. 10.1007/BF00121269. URL <https://doi.org/10.1007/BF00121269>.
- Jie Lu, Chenggen Shi, and Guangquan Zhang. On bilevel multi-follower decision making: General framework and solutions. *Information Sciences*, 176(11):1607–1627, 2006. ISSN 0020-0255. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2005.04.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025505001611>.
- C. Luong. An examination of benders decomposition approaches in large-scale healthcare optimization problems. Master’s thesis, University of Toronto, 2015. Master’s thesis.
- Mohsen Sadegh Amal Nik, Javad Ansarifar, and Faezeh Akhavizadegan. Benders’ decomposition algorithm to solve bi-level bi-objective scheduling of aircrafts and gate assignment under uncertainty. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 9:111–126, 2016. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:51168313>.
- OECD/FAO. *OCDE-FAO Perspectivas Agrícolas 2023-2032*. OECD Publishing, Paris, 2023.
- J. Ortega, W. Foster, and R. Ortega. Definicion de sub-rodas para una silvicultura de precision: Una aplicacion del metodo fuzzy k-means. *Ciencia e Investigacion Agraria v*, 29(1):35–44, 2002.
- R. A. Ortega and O. A. Santibáñez. Determination of management zones in corn (zea mays l.) based on soil fertility. *Computers and Electronics in Agriculture*, 58(1):49–59, 2007.
- M. Pedroso, J. Taylor, B. Tisseyre, B. Charnomordic, and S. Guillaume. A segmentation algorithm for the delineation of agricultural management zones. *Computers and Electronics in Agriculture*, 70(1):199–208, 2010.
- Salvador Pineda and Juan Miguel Morales. Solving linear bilevel problems using big-ms: Not all that glitters is gold. *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(3):2469–2471, 2019.

- R. Pérez. Introducción a los modelos de optimización. *Universidad Piloto de Colombia*, page 11, 2020. 10.2307/j.ctv2cw0t8k.
- Martín Quinteros, Antonio Alonso, Laureano Escudero, Monique Guignard, and Andrés Weintraub. *Una Aplicación de Programación Estocástica en un Problema de Gestión Forestal*. Revista Ingeniería de Sistemas, 2006.
- Arsalan Rahmani, Meysam Hosseini, and Amir Sahami. A competitive bilevel programming model for green elcs in light of government incentives. *Journal of Mathematics*, 2024. URL <https://doi.org/10.1155/2024/4866890>.
- Ragheb Rahmaniani, Teodor Gabriel Crainic, Michel Gendreau, and Walter Rei. The benders decomposition algorithm: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 259(3):801–817, 2017. ISSN 0377-2217. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.12.005>.
- G. R. Raidl. Decomposition based hybrid metaheuristics. *European Journal of Operational Research*, 244(1):66–76, 2015. 10.1016/j.ejor.2014.12.005.
- P. Roudier, B. Tisseyre, H. Poilvé, and J. M Roger. Management zone delineation using a modified watershed algorithm. *Precision Agriculture*, 9(5):233, 2008.
- J. L. Saez and V. M. Albornoz. Delineation of rectangular management zones under uncertainty conditions. In *ICORES*, pages 271–278, 2016.
- G.K. Saharidis and M.G. Ierapetritou. Resolution method for mixed integer bi-level linear problems based on decomposition technique. *J Glob Optim*, 44:29–51, 2009.
- A. R. Schepers, J. F. Shanahan, M. A. Liebig, J. S. Schepers, S. H. Johnson, and A Luchiani. Appropriateness of management zones for characterizing spatial variability of soil properties and irrigated corn yields across years. *Agronomy Journal*, 96(1):195–203, 2004.
- Chenggen Shi, Jie Lu, Guangquan Zhang, and Hong Zhou. An extended branch and bound algorithm for linear bilevel programming. *Applied Mathematics and Computation*, 180(2):529–537, 2006. ISSN 0096-3003. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.12.039>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300306000415>.

- Iman Shokr, Fariborz Jolai, and Ali Bozorgi-Amiri. A novel humanitarian and private sector relief chain network design model for disaster response. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 65:102522, 2021. ISSN 2212-4209. <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2021.102522>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212420921004830>.
- Ramteen Sioshansi and Antonio J. Conejo. *Optimization in Engineering: Models and Algorithms*. Springer Optimization and Its Applications, 2017.
- H. V. Stackelberg. *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press, Oxford, 1952.
- Carlos E. Testuri, Héctor Cancela, and Víctor M. Albornoz. Stochastic discrete lot-sizing with lead times for fuel supply optimization. *Pesquisa Operacional*, 39(1):37–55, 2019. 10.1590/0101-7438.2019.039.01.0037.
- B. Whelan, J. Cupitt, and A. McBratney. Study on delineation of irrigation management zones based on management zone analyst software. In *In International conference on computer and computing technologies in agriculture*, 2010.
- S. Wolfert, L. Ge, C. Verdouw, and M.-J. Bogaardt. Big data in smart farming – a review. *Agricultural Systems*, 153:69–80, 2017.
- Xuan Wu and Antonio J. Conejo. An efficient tri-level optimization model for electric grid defense planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(4):2984–2994, 2017. 10.1109/TPWRS.2016.2628887. URL <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2016.2628887>.
- J.L. Zhang and K. Ponnambalam. Hydro energy management optimization in a deregulated electricity market. *Optimization and Engineering*, 7:47–61, 2006. 10.1007/s11081-006-6590-5.
- X. Zhang, L. Jiang, X. Qiu, J. Qiu, J. amd Wang, and Y Zhu. An improved method of delineating rectangular management zones using a semivariogram-based technique. *Computers and Electronics in Agriculture*, 121:74–83, 2016.

Y. Zhu and T. Kuno. Global optimization of nonconvex minlp by a hybrid branch-and-bound and revised general benders decomposition approach. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 42(3):528–539, 2003. 10.1021/ie0200813.