

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

# Reconstrucción de Canales EEG Faltantes Mediante Procesamiento de Señales en Grafos con Regularización Temporal

Tesis de grado presentada por

**Carlos Saldivia Heinz**

Como requisito parcial para optar al grado de

**Magíster en Ciencias de la Ingeniería**

Director de Tesis: Alejandro Weinstein, Ph.D.

Profesor Correferente: Matías Zañartu Salas, Ph.D.

Valparaíso, Chile, Junio de 2026



## CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

### 1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

**Tipo de monografía (marcar una opción):** ☐ Memoria o trabajo de título ☒ Tesis de Postgrado

**Título del trabajo:** Reconstrucción de Canales EEG Faltantes Mediante Procesamiento de Señales en Grafos con Regularización Temporal

**Nombre del candidato(a):** Carlos Saldivia Heinz

**Carrera / Grado:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electronica

**Campus:** Casa Central Valparaíso **Departamento:** Ing. Civil Electronica

### 2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Alejandro Weinstein Oppenheimer, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

### 3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

**Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):**

---

---

---

### 4.- FIRMAS

**Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:**

**Fecha:** 18-8-2026

**Firma:** A. Weinstein O.

**Estudiante o Candidato(a):**

**Fecha:** 18-8-2026

**Firma:** Carlos

*Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.*

# Resumen

La electroencefalografía (EEG) es una herramienta central en neurociencia clínica y experimental, pero la pérdida de canales por fallas de contacto, movimiento o saturación del amplificador compromete análisis posteriores. Esta tesis evalúa métodos de interpolación de canales EEG faltantes bajo un protocolo reproducible que combina métodos geométricos, estadísticos, GSP y regularización espacio-temporal.

El estudio considera tres bases públicas (PhysioNet, BCI Competition IV 2a y MNE Sample), escenarios de pérdida aleatoria y contigua con severidades entre 10 % y 40 %, y métricas de amplitud, forma temporal, preservación espectral y costo computacional. La evaluación se organiza en fases: selección preliminar de métodos y grafos, reducción de candidatos, optimización intermedia y comparación final pareada entre TRSS y MNE-Python.

Los resultados apoyan una conclusión condicional. TRSS fijo reduce la mediana de MAE en 12,4 % frente a MNE-Python, alcanza una tasa de victoria de 72,0 % y mejora NRMSE en 13,9 %. Su ventaja aumenta en pérdidas cercanas o periféricas severas, donde la continuidad temporal compensa la pérdida de información espacial local. Sin embargo, MNE-Python conserva ventajas en costo computacional, estabilidad operativa y preservación espectral global. Por tanto, TRSS es recomendable cuando la fidelidad de reconstrucción bajo pérdida espacial difícil es prioritaria y el análisis puede ejecutarse fuera de línea; MNE-Python sigue siendo la referencia robusta para preprocesamiento estándar y escenarios con restricciones de tiempo.

El código, configuraciones, registros de optimización y artefactos de resultados se preservan para garantizar trazabilidad completa.

**Palabras clave:** EEG, canales faltantes, interpolación, Procesamiento de Señales en Grafos, regularización temporal, TRSS, MNE-Python, evaluación reproducible.

# Abstract

Electroencephalography (EEG) is a central tool in clinical and experimental neuroscience, but channel loss caused by contact failures, motion artifacts, or amplifier saturation can compromise downstream analyses. This thesis evaluates methods for interpolating missing EEG channels under a reproducible protocol that includes geometric, statistical, Graph Signal Processing (GSP), and spatio-temporal regularization approaches.

The study uses three public datasets (PhysioNet, BCI Competition IV 2a, and MNE Sample), random and contiguous loss scenarios with severities from 10 % to 40 %, and metrics covering amplitude error, temporal shape, spectral preservation, and computational cost. The evaluation is organized into phases: preliminary method–graph selection, candidate reduction, intermediate optimization, and a final paired comparison between TRSS and MNE-Python.

The results support a conditional conclusion. Fixed TRSS reduces median MAE by 12.4 % relative to MNE-Python, reaches a 72.0 % win rate, and improves NRMSE by 13.9 %. Its advantage increases under severe nearby or peripheral losses, where temporal continuity compensates for missing local spatial information. However, MNE-Python retains advantages in computational cost, operational stability, and global spectral preservation. Thus, TRSS is advisable when reconstruction fidelity under difficult spatial loss is the priority and offline processing is acceptable; MNE-Python remains the robust reference for standard preprocessing and time-constrained scenarios.

Code, configurations, optimization logs, and result artifacts are preserved to ensure full traceability.

**Keywords:** EEG, missing channels, interpolation, Graph Signal Processing, temporal regularization, TRSS, MNE-Python, reproducible evaluation.

# Agradecimientos

Este camino estuvo lejos de ser sencillo. Hubo momentos de avance, pero también etapas difíciles, probablemente más de las que habría querido. No habría podido atravesarlas sin las personas que permanecieron a mi lado. A mi familia y a mi pareja, gracias por sostenerme, por su paciencia, por escucharme y por recordarme que debía seguir adelante incluso cuando yo mismo dudaba de poder hacerlo.

Quiero agradecer especialmente a mi profesor supervisor, quien entregó generosamente una parte importante de su tiempo a este trabajo. Las horas dedicadas a nuestras reuniones, la evaluación cuidadosa de los resultados y la revisión y corrección de mis escritos fueron fundamentales para que este proyecto pudiera crecer y llegar a término. Más allá de su guía académica, valoro profundamente la comprensión y la empatía con que me acompañó durante los momentos más difíciles.

Finalmente, agradezco a la Universidad Técnica Federico Santa María por haberme brindado no solo las herramientas necesarias para desarrollar este proyecto, sino también la flexibilidad en los plazos y los permisos que necesité para concluirlo. Agradezco igualmente a quienes forman parte de ella y que, frente a cada dificultad, estuvieron dispuestos a orientarme, abrir una puerta o ayudarme a encontrar una solución. Su disposición hizo que un camino complejo fuera un poco más llevadero.

# Índice general

|                                                                                                  |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                                           | <b>1</b> |
| 1.1. Contexto General y Planteamiento del Problema . . . . .                                     | 1        |
| 1.2. Limitaciones de los Enfoques Tradicionales . . . . .                                        | 2        |
| 1.3. El Advenimiento del Procesamiento de Señales en Grafos . . . . .                            | 3        |
| 1.4. La Brecha en la Literatura y la Motivación del Trabajo . . . . .                            | 4        |
| 1.4.1. La pregunta central: ¿por qué funciona tan bien la interpolación de MNE-Python? . . . . . | 5        |
| 1.5. Objetivos . . . . .                                                                         | 5        |
| 1.5.1. Objetivo General . . . . .                                                                | 5        |
| 1.5.2. Objetivos Específicos . . . . .                                                           | 5        |
| 1.6. Preguntas de Investigación . . . . .                                                        | 6        |
| 1.7. Alcance y Aportes de la Investigación . . . . .                                             | 6        |
| 1.8. Estructura de la Tesis . . . . .                                                            | 7        |
| <b>2. Marco Teórico y Estado del Arte</b>                                                        | <b>8</b> |
| 2.1. Fundamentos Neurofisiológicos de la Señal EEG . . . . .                                     | 8        |
| 2.1.1. Generación y Propagación . . . . .                                                        | 8        |
| 2.1.2. Bandas de Frecuencia y Potenciales Relacionados a Eventos . . . . .                       | 9        |
| 2.2. Procesamiento de Señales en Grafos . . . . .                                                | 10       |
| 2.2.1. Definiciones Fundamentales . . . . .                                                      | 10       |
| 2.2.2. Laplaciano, Suavidad y Transformada de Fourier en Grafos . . . . .                        | 10       |
| 2.2.3. Construcción de Grafos para EEG . . . . .                                                 | 11       |
| 2.3. Estado del Arte en Interpolación de Señales Biomédicas . . . . .                            | 13       |

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3.1. Métodos Geométricos y Estadísticos . . . . .                | 13        |
| 2.3.2. Métodos Basados en GSP . . . . .                            | 14        |
| 2.3.3. Regularización Espacio-Temporal: TRSS . . . . .             | 14        |
| 2.4. Mecanismo Interno de la Interpolación en MNE-Python . . . . . | 15        |
| 2.4.1. Formulación Original y sus Seis Mejoras . . . . .           | 15        |
| 2.4.2. Los Tres Pilares de la Robustez . . . . .                   | 16        |
| <b>3. Metodología</b>                                              | <b>18</b> |
| 3.1. Conjuntos de Datos . . . . .                                  | 19        |
| 3.2. Protocolos de Simulación de Canales Faltantes . . . . .       | 19        |
| 3.3. Construcción de Grafos . . . . .                              | 20        |
| 3.4. Métodos de Interpolación . . . . .                            | 21        |
| 3.5. Métricas de Evaluación . . . . .                              | 22        |
| 3.6. Optimización Bayesiana con Optuna . . . . .                   | 22        |
| 3.7. Arquitectura del Sistema Experimental . . . . .               | 23        |
| 3.7.1. Trazabilidad y Gestión de Artefactos . . . . .              | 24        |
| 3.8. Diseño Experimental . . . . .                                 | 26        |
| 3.9. Protocolo de Validación Comparativa . . . . .                 | 27        |
| 3.10. Control de Calidad . . . . .                                 | 27        |
| 3.11. Síntesis del Diseño . . . . .                                | 28        |
| <b>4. Experimentos y Resultados</b>                                | <b>29</b> |
| 4.1. Mapa de fases experimentales . . . . .                        | 29        |
| 4.2. Selección preliminar de métodos y grafos . . . . .            | 30        |
| 4.3. Reducción de candidatos . . . . .                             | 31        |
| 4.4. Optimización intermedia . . . . .                             | 32        |
| 4.5. Inventario de la comparación final . . . . .                  | 33        |
| 4.6. Resumen descriptivo de TRSS frente a MNE . . . . .            | 34        |
| 4.7. Efecto del escenario de pérdida . . . . .                     | 35        |
| 4.8. Señales temporales representativas . . . . .                  | 36        |

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.9. Preservación espectral . . . . .                                | 38        |
| 4.10. Contribución temporal de TRSS . . . . .                        | 39        |
| 4.11. Costo computacional . . . . .                                  | 40        |
| 4.12. Frontera práctica TRSS–MNE . . . . .                           | 41        |
| <b>5. Discusión</b>                                                  | <b>42</b> |
| 5.1. Lectura integrada de la trayectoria experimental . . . . .      | 42        |
| 5.2. Aporte de la selección preliminar de métodos y grafos . . . . . | 43        |
| 5.3. Por qué MNE-Python sigue siendo una referencia fuerte . . . . . | 44        |
| 5.4. Interpretación condicional de TRSS . . . . .                    | 44        |
| 5.5. Tensión entre precisión temporal, espectro y costo . . . . .    | 45        |
| 5.6. Costo computacional y escalabilidad . . . . .                   | 45        |
| 5.7. Deficiencias y carencias del estudio . . . . .                  | 46        |
| 5.8. Aspectos fuera del alcance . . . . .                            | 46        |
| 5.9. Lecciones metodológicas . . . . .                               | 47        |
| <b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>                              | <b>48</b> |
| 6.1. Conclusiones por pregunta de investigación . . . . .            | 48        |
| 6.2. Conclusiones sobre la fase experimental completa . . . . .      | 49        |
| 6.3. Aportes de la tesis . . . . .                                   | 50        |
| 6.4. Deficiencias reconocidas . . . . .                              | 51        |
| 6.5. Trabajo futuro priorizado . . . . .                             | 51        |
| 6.6. Cierre . . . . .                                                | 52        |
| <b>A. Derivaciones Matemáticas</b>                                   | <b>54</b> |
| A.1. Solución de Tikhonov en Grafos . . . . .                        | 54        |
| A.2. Solución de TRSS en Forma Matricial . . . . .                   | 55        |
| A.3. Operador de Diferencias Temporales . . . . .                    | 55        |
| A.4. Propiedades Espectrales del Laplaciano . . . . .                | 55        |
| A.5. Implicancias Computacionales . . . . .                          | 56        |

---

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>B. Síntesis Extendida de Resultados</b>                       | <b>57</b> |
| B.1. Resumen global por variante . . . . .                       | 57        |
| B.2. Portafolio descriptivo de métricas . . . . .                | 58        |
| B.3. Comparación de variantes TRSS . . . . .                     | 58        |
| <b>C. Protocolo de Reproducibilidad</b>                          | <b>59</b> |
| C.1. Entorno computacional . . . . .                             | 59        |
| C.2. Datos y preprocesamiento . . . . .                          | 59        |
| C.3. Máscaras y semillas . . . . .                               | 60        |
| C.4. Fases reproducibles . . . . .                               | 60        |
| C.5. Reglas de exclusión . . . . .                               | 60        |
| C.6. Validación del documento . . . . .                          | 60        |
| <b>D. Inventario de Artefactos Computacionales</b>               | <b>61</b> |
| D.1. Artefactos de datos y resultados . . . . .                  | 61        |
| D.2. Scripts generadores . . . . .                               | 62        |
| D.3. Relación entre artefactos y capítulos . . . . .             | 62        |
| <b>E. Trazabilidad Histórica de la Revisión</b>                  | <b>63</b> |
| E.1. De resultados aislados a trayectoria experimental . . . . . | 63        |
| E.2. Cambio de marco interpretativo . . . . .                    | 63        |
| E.3. Correcciones de lenguaje y formato . . . . .                | 64        |
| E.4. Métodos invalidados o no concluyentes . . . . .             | 64        |
| E.5. Uso de este apéndice . . . . .                              | 64        |

# Índice de figuras

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Manifestaciones EEG relevantes para interpolación . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                | 9  |
| 2.2. Conceptos fundamentales de GSP . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 11 |
| 2.3. Descomposición del operador TRSS . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 15 |
| 3.1. Flujo metodológico de evaluación . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 18 |
| 3.2. Diagrama de bloques de la arquitectura . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 24 |
| 3.3. Cadena de trazabilidad experimental . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 25 |
| 4.1. Resumen exploratorio por método en la campaña de iteraciones preliminares.<br>Las barras muestran MAE mediano por método en el resumen consolidado;<br>menor es mejor. Sobolev se muestra como panel separado por su escala<br>mayor. . . . .                                                                                              | 31 |
| 4.2. Perfil descriptivo de calidad para TRSS fijo frente a MNE. Las barras<br>positivas favorecen a TRSS después de respetar la dirección de cada mé-<br>trica; las barras negativas favorecen a MNE. El costo temporal se reporta<br>por separado porque su escala es muy distinta a la de las métricas de<br>reconstrucción. . . . .          | 35 |
| 4.3. Resumen por patrón y severidad de pérdida. Cada celda muestra mejora<br>mediana de MAE, tasa de victoria (WR) y número de pares. La ventaja de<br>TRSS crece en pérdidas cercanas o periféricas severas, donde la información<br>espacial local disponible para MNE disminuye. . . . .                                                     | 36 |
| 4.4. Reconstrucciones temporales representativas en MNE Sample. Cada fila<br>muestra señal original, reconstrucción MNE y reconstrucción TRSS para<br>un canal oculto seleccionado de forma reproducible. Los casos incluyen un<br>escenario favorable a TRSS, uno favorable a MNE, un empate práctico y<br>una pérdida cercana severa. . . . . | 38 |

- 
- 4.5. PSD original versus PSD interpolado para los casos representativos. La figura compara directamente la densidad espectral de potencia de la señal original con las reconstrucciones MNE y TRSS. Esta lectura permite explicar por qué TRSS puede mejorar error de amplitud sin dominar necesariamente la métrica LSD. . . . . 39
- 4.6. Aporte descriptivo del término temporal dentro de TRSS. Las barras muestran la mejora de TRSS completo frente a TRSS sin término temporal. 40

# Índice de tablas

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Familias de métodos: principio matemático, fortalezas y limitaciones. . .                                                                                                                                                                                                                                          | 17 |
| 3.1. Características de los tres conjuntos de datos experimentales. . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 19 |
| 3.2. Estrategias de construcción de grafos. La columna «Fase» indica si el grafo se usó en la fase exploratoria (E), comparativa (C) o ambas (E+C). . . .                                                                                                                                                               | 20 |
| 3.3. Métodos de interpolación implementados y evaluados. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                        | 21 |
| 3.4. Métricas de evaluación. La notación $\mathcal{F}$ denota el conjunto de canales faltantes, $x_i$ la señal real y $\hat{x}_i$ la reconstrucción. . . . .                                                                                                                                                            | 22 |
| 3.5. Espacios de búsqueda de hiperparámetros. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 23 |
| 3.6. Artefactos generados por el sistema experimental. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 26 |
| 3.7. Relación entre preguntas de investigación, experimentos y evidencia esperada.                                                                                                                                                                                                                                      | 26 |
| 4.1. Mejor combinación método-grafo por conjunto durante la selección exploratoria. La columna Método usa nombres legibles consistentes con las familias de la Tabla 3.3; el ranking corresponde al puntaje compuesto preliminar y no constituye la comparación final contra MNE. . . . .                               | 30 |
| 4.2. Microbenchmark de latencia usado como criterio de reducción de candidatos. La columna de rol indica por qué cada familia fue relevante para decidir qué métodos avanzar a la comparación final. . . . .                                                                                                            | 32 |
| 4.3. Resumen descriptivo pareado de TRSS fijo frente a MNE para métricas de calidad. La mejora mediana positiva favorece a TRSS después de respetar la dirección de cada métrica; la tasa de victoria indica la proporción de pares donde TRSS supera a MNE. Los intervalos son bootstrap descriptivos al 95 %. . . . . | 34 |

|                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4. Resumen por patrón y severidad de pérdida para MAE. Cada fila reporta la mejora mediana de TRSS frente a MNE, la tasa de victoria (proporción de pares donde TRSS obtiene menor MAE) y la mejora media como lectura complementaria. . . . . | 35 |
| 4.5. Casos representativos seleccionados de forma reproducible en MNE Sample para inspección temporal y espectral. La mejora se calcula en MAE para TRSS fijo frente a MNE; valores negativos indican que MNE fue mejor en ese caso. . . . .     | 37 |
| 4.6. Contribución descriptiva del término temporal dentro de TRSS. La comparación retira el término temporal y mide cuánto cambia el desempeño relativo del modelo completo. . . . .                                                             | 40 |
| 4.7. Complejidad computacional e implementación observada. $N$ es el número de canales, $T$ el número de muestras temporales, $E$ el número de aristas del grafo y $K$ el número de iteraciones del resolvidor. . . . .                          | 41 |
| B.1. Resumen compacto de variantes principales. Los valores corresponden a medianas agregadas; menor MAE/NRMSE/LSD y menor tiempo son preferibles, mientras que mayor correlación es preferible. . . . .                                         | 57 |
| D.1. Inventario resumido de artefactos de resultados usados en el documento final.                                                                                                                                                               | 61 |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto General y Planteamiento del Problema

La electroencefalografía (EEG) ha sido, durante décadas, una de las herramientas fundamentales de la neurociencia clínica y experimental. Su alta resolución temporal, en el orden de los milisegundos, su naturaleza no invasiva y su costo relativamente bajo frente a técnicas como la resonancia magnética funcional o la tomografía por emisión de positrones la han consolidado como el estándar para estudiar la dinámica cerebral en tiempo real [3]. Sus aplicaciones abarcan el diagnóstico de epilepsia y trastornos del sueño, la investigación en neurociencia cognitiva y el desarrollo de interfaces cerebro-computador para comunicación asistida y neurorrehabilitación.

Ahora bien, la adquisición de EEG es un proceso frágil. En la práctica clínica y de investigación, la pérdida parcial o total de información en uno o más electrodos es frecuente. Estas fallas pueden deberse al aumento de la impedancia de contacto por transpiración o secado del gel conductor, a fallas en el amplificador como la saturación de voltaje, a movimientos bruscos del paciente que desconectan los sensores, o simplemente al descarte deliberado de canales que presentan una relación señal-ruido inaceptablemente baja durante la etapa de preprocesamiento [17].

La pérdida de canales no es un problema cosmético: compromete la integridad de todo análisis posterior. La ausencia de información espacial distorsiona la topografía de la señal, afecta la localización de fuentes neuronales y altera biomarcadores electrofisiológicos como los Potenciales Relacionados a Eventos (ERP) y la Densidad Espectral de Potencia (PSD) [15]. En sistemas modernos de aprendizaje automático aplicados a interfaces cerebro-computador, la pérdida impredecible de canales cambia la dimensionalidad de

entrada de los clasificadores y obliga, con frecuencia, a descartar ensayos completos de datos clínicamente valiosos [14]. La interpolación precisa de estos canales es, por tanto, un paso ineludible del flujo de preprocesamiento, y su calidad condiciona directamente la validez de cualquier conclusión neurofisiológica o clínica posterior.

## 1.2. Limitaciones de los Enfoques Tradicionales

Históricamente, el problema de la interpolación de canales EEG ha sido abordado mediante métodos espaciales o estadísticos. El enfoque más extendido y utilizado por defecto en bibliotecas de análisis como EEGLAB [5] o MNE-Python [8, 9] es la interpolación por *spherical splines* [19]. Este método, junto con otros enfoques basados en distancia euclidiana como la interpolación por vecinos más cercanos o las funciones de base radial, asume que la cabeza humana es una esfera conductora perfecta y estima el voltaje del canal faltante proyectando geométricamente los voltajes de los electrodos circundantes sobre dicha superficie.

Aunque estos métodos son rápidos y matemáticamente elegantes, adolecen de una limitación fundamental: operan estrictamente en el dominio espacial estático para cada instante de tiempo individual. Al hacerlo, ignoran dos realidades neurofisiológicas esenciales. En primer lugar, la distribución espacial del potencial eléctrico en el cuero cabelludo no es isotrópica ni homogénea: la conducción volumétrica a través de tejidos de distinta conductividad (cuero cabelludo, cráneo y líquido cefalorraquídeo) distorsiona el campo de manera no uniforme, de modo que un modelo esférico simplificado no captura completamente esta heterogeneidad [17]. En segundo lugar, las señales EEG son generadas por osciladores neuronales sujetos a leyes físicas de continuidad y momento. Al reconstruir un canal muestra por muestra de forma aislada, los métodos puramente espaciales son incapaces de preservar la dinámica de alta frecuencia, generando trazos con ruido de fase y distorsiones en los picos transitorios [13]. Los métodos estadísticos de descomposición, Análisis de Componentes Independientes (ICA) y Análisis de Componentes Principales (PCA), proyectan las señales observadas sobre fuentes latentes y reconstruyen el canal perdido a partir de esa proyección [11]. Sin embargo, cuando varios canales contiguos fallan simultáneamente, estos métodos tienden a inyectar ruido global o a perder los picos transitorios locales que definen la morfología fina de los ERP.

## 1.3. El Advenimiento del Procesamiento de Señales en Grafos

Para superar estas limitaciones, en los últimos años ha emergido con fuerza el marco del Procesamiento de Señales en Grafos (GSP, por sus siglas en inglés) [18, 24]. El GSP ofrece una perspectiva natural y poderosa para lidiar con datos que residen en dominios irregulares no euclidianos. En lugar de modelar la cabeza como un espacio continuo tridimensional, GSP modela la red de electrodos como un grafo discreto  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W})$ , donde cada electrodo es un nodo ( $\mathcal{V}$ ), las aristas ( $\mathcal{E}$ ) definen qué pares de electrodos están conectados, y la matriz de pesos ( $\mathbf{W}$ ) cuantifica la intensidad de cada conexión. Las relaciones de similitud o distancia fisiológica entre electrodos se codifican en  $\mathbf{W}$  mediante núcleos de distancia gaussianos o basados en correlación. Bajo este paradigma, el voltaje medido en un instante se interpreta como una señal de grafo, y conceptos clásicos como la Transformada de Fourier, el filtrado paso-bajo y el muestreo se trasladan al dominio del grafo mediante el operador Laplaciano  $\mathbf{L}$ . La intuición es simple: las señales en nodos fuertemente conectados tienden a ser similares. Al minimizar una función de costo que penaliza las variaciones abruptas sobre la topología del grafo, los datos faltantes se reconstruyen con mayor fidelidad que usando solo la distancia euclidiana [16].

Una extensión aún más avanzada es la regularización espacio-temporal. Trabajos recientes han introducido enfoques como la Regularización Temporal de Suavidad de Sobolev (TRSS, por sus siglas en inglés) [6], que optimiza conjuntamente la topología espacial y la derivada temporal de la señal. Al penalizar saltos bruscos en el tiempo de forma simultánea a los saltos en el espacio, TRSS impone restricciones fisiológicas reales: las neuronas no cambian su potencial de membrana instantáneamente, sino que obedecen dinámicas de integración continua. Esta restricción dual, espacial y temporal, es lo que la teoría predice como el factor diferencial frente a los métodos puramente espaciales.

Aunque existen enfoques entrenables de aprendizaje profundo orientados a la interpolación o super-resolución espacial de EEG, incluyendo redes encoder–decoder para interpolación de canales y modelos generativos para aumentar la resolución espacial [4, 20], esta tesis no los incorpora como línea experimental. La razón es metodológica: el objetivo es comparar métodos algorítmicos sin entrenamiento, geométricos, estadísticos, GSP y regularización espacio–temporal, bajo un protocolo controlado y trazable. Incluir modelos entrenables requeriría particiones de entrenamiento, validación externa, control de fuga de información y análisis de generalización entre sujetos, tareas y montajes, lo que excede el alcance de este trabajo.

## 1.4. La Brecha en la Literatura y la Motivación del Trabajo

A pesar del potencial teórico de los algoritmos GSP y TRSS, su validación empírica en la literatura de señales biomédicas presenta limitaciones metodológicas relevantes. Se identifican tres brechas que motivan el diseño experimental de esta tesis.

El primer problema es que los estudios que proponen nuevos algoritmos GSP suelen compararse contra *spherical splines* usando las configuraciones por defecto de los paquetes de software, sin realizar una búsqueda rigurosa de hiperparámetros para los métodos de referencia. Esto puede inflar artificialmente las ventajas del método propuesto y distorsionar la percepción del verdadero estado del arte [21]. El segundo problema es que la mayoría de los trabajos restringe su evaluación a métricas de error de amplitud global, como RMSE o MAE, y aplica escenarios de desconexión simples, tales como la remoción de canales aleatorios aislados en bases de datos pequeñas. Rara vez se investiga el impacto morfológico de la reconstrucción mediante métricas temporales como el *Dynamic Time Warping* o espectrales como la Distancia Espectral Logarítmica. El tercer problema es la escasez de comparaciones contra implementaciones comunitarias maduras. En particular, la interpolación de MNE-Python incorpora más de una década de refinamientos de ingeniería: normalización de coordenadas, regularización diagonal adaptativa, aumento del sistema con restricciones lineales, pseudoinversa con tolerancia adaptativa y un mecanismo de reintento automático. Estos mecanismos la hacen sustancialmente más robusta que una implementación ingenua de *spherical splines*. Ignorar esta implementación equivale a comparar contra un método de referencia debilitado artificialmente.

La motivación concreta de este trabajo nace directamente de estas brechas. El objetivo no es diseñar desde cero un nuevo marco teórico matemático, sino someter a la frontera del conocimiento actual, incluyendo métodos geométricos, GSP y regularización temporal, a una evaluación empírica rigurosa, exhaustiva y justa. Al utilizar Optuna [1] para explorar configuraciones comparables en múltiples conjuntos de datos, esta tesis busca identificar el punto de cruce práctico entre el paradigma clásico y el paradigma de grafos: cuándo basta una referencia madura como MNE-Python y cuándo la regularización espacio-temporal aporta valor adicional.

### 1.4.1. La pregunta central: ¿por qué funciona tan bien la interpolación de MNE-Python?

Una pregunta recurrente que emerge del análisis preliminar, y que motiva una sección dedicada en el marco teórico de esta tesis, es por qué la función de interpolación de MNE-Python produce resultados tan competitivos, incluso frente a métodos teóricamente superiores como TRSS. La respuesta, que se desarrolla en profundidad en el Capítulo 2, reside en que la implementación de MNE no es una simple transcripción del artículo original de Perrin y colaboradores [19], sino que incorpora un conjunto de mejoras de ingeniería acumuladas durante más de diez años de desarrollo como código abierto.

Estas mejoras, que incluyen normalización de coordenadas a esfera unitaria, uso global de canales, regularización diagonal adaptativa, aumentación del sistema con restricciones lineales, pseudoinversa con tolerancia adaptativa y reintento automático, no aparecen descritas en la literatura académica, pero están presentes en el código fuente de MNE. Son las responsables de que un método formulado en 1989 siga siendo hoy una referencia competitiva. Esta tesis dedica una sección completa del marco teórico (Capítulo 2) a documentar estos mecanismos, y una validación comparativa independiente (Capítulo 4) a cuantificar la brecha real entre TRSS y MNE.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo General

Comparar el rendimiento espacial, temporal y espectral de los métodos de reconstrucción de canales EEG basados en GSP con regularización temporal frente a las referencias geométricas bajo un marco experimental riguroso, reproducible y optimizado mediante optimización bayesiana.

### 1.5.2. Objetivos Específicos

- **OE1: Sistema unificado de evaluación.** Implementar dieciocho métodos de interpolación en un sistema modular con interfaz común, definir protocolos de pérdida aleatoria y contigua (10 %–40 %), e integrar Optuna para la optimización imparcial de todos los algoritmos, incluyendo una fase de selección preliminar y reducción de candidatos antes de la comparación final.

- **OE2: Evaluación multi-métrica y fisiológica.** Cuantificar el desempeño mediante seis métricas primarias (MAE, RMSE, SNR, DTW, LSD, Coherencia) sobre tres conjuntos de datos y 120 escenarios de pérdida, documentando tanto los resultados preliminares de selección método-grafo como la preservación morfológica y espectral mediante métricas auxiliares, visualizaciones temporales y potencia por banda.
- **OE3: Trazabilidad y reproducibilidad.** Generar un repositorio de artefactos computacionales (código, configuraciones, registros de optimización y resultados) que garantice la trazabilidad completa de cada afirmación cuantitativa hasta el archivo que la origina.

## 1.6. Preguntas de Investigación

En lugar de organizar la evaluación alrededor de contrastes inferenciales, esta tesis formula el análisis en torno a dos preguntas comparativas:

**P1.** ¿En qué condiciones la regularización espacio-temporal mejora la reconstrucción de canales EEG faltantes frente a métodos espaciales de referencia, como splines esféricos, distancia inversa, RBF, vecino más cercano, interpolación lineal y MNE-Python?

**P2.** ¿Qué compromiso práctico existe entre precisión de reconstrucción, fidelidad espectral y tiempo de cómputo al elegir entre TRSS y MNE-Python?

Estas preguntas se responden mediante comparaciones pareadas, estratificación por escenario y análisis multi-métrico; no se interpreta la tesis como aceptación o rechazo de hipótesis nulas.

## 1.7. Alcance y Aportes de la Investigación

El alcance de este trabajo abarca la ejecución computacional a gran escala del sistema de evaluación sobre tres conjuntos de datos, ciento veinte escenarios de falla y dieciocho métodos de interpolación. A diferencia de las evaluaciones acotadas que predominan en la literatura, aquí se consolidan miles de ensayos EEG bajo más de quince mil configuraciones paramétricas exploradas mediante Optuna.

Para garantizar la reproducibilidad, la ejecución se ancla en un registro exhaustivo de corridas experimentales que fija explícitamente las combinaciones de conjuntos de datos,

modos de pérdida, semillas, tipos de grafo y familias de métodos. Este diseño evita las evaluaciones improvisadas y permite trazar cada afirmación cuantitativa reportada en los capítulos posteriores hasta el artefacto experimental que la origina, según se detalla en el Apéndice D.

Los aportes principales se articulan en cuatro ejes. Primero, se proporciona evidencia empírica pareada de que TRSS mejora métricas de amplitud y ajuste temporal frente a referencias geométricas en regímenes difíciles, una vez que todos los métodos han sido optimizados. Segundo, se muestra que bajo pérdida contigua severa (30 % o más de los canales) la restricción temporal puede compensar la pérdida de información espacial local. Tercero, se documentan en formato académico los mecanismos de ingeniería que convierten a MNE-Python en una referencia inesperadamente competitiva. Cuarto, se entrega un sistema unificado en Python, rastreable y reproducible para ejecutar interpolaciones GSP con optimización bayesiana automatizada sobre datos EEG.

## 1.8. Estructura de la Tesis

Para desarrollar el análisis propuesto, el documento se organiza en seis capítulos. El Capítulo 2 presenta los fundamentos neurofisiológicos del EEG, el Procesamiento de Señales en Grafos, los métodos de interpolación y los mecanismos internos de MNE-Python. El Capítulo 3 define la metodología: datos, máscaras de pérdida, construcción de grafos, métodos, métricas, arquitectura, trazabilidad y separación entre fase exploratoria y fase comparativa. El Capítulo 4 documenta los experimentos y resultados: selección preliminar, reducción de candidatos, optimización intermedia, comparación final TRSS–MNE, señales representativas, PSD, contribución temporal y frontera práctica de uso. El Capítulo 5 discute las causas y limitaciones de los resultados. El Capítulo 6 resume conclusiones y trabajo futuro.

Los apéndices complementan el documento con derivaciones matemáticas, síntesis extendida de resultados, protocolo de reproducibilidad, inventario de artefactos y trazabilidad histórica. Esta organización permite seguir una cadena de decisiones verificables: qué métodos y grafos se consideraron, cuáles se descartaron, qué variantes pasaron a la comparación final y cómo se interpretan los resultados mediante evidencia descriptiva y criterios prácticos.

# Capítulo 2

## Marco Teórico y Estado del Arte

Este capítulo presenta los fundamentos sobre los que se construye la investigación: principios neurofisiológicos del EEG, bases matemáticas del Procesamiento de Señales en Grafos, estado del arte en interpolación de señales biomédicas, y los mecanismos internos que convierten a la implementación de MNE-Python en una referencia comunitaria sólida.

### 2.1. Fundamentos Neurofisiológicos de la Señal EEG

#### 2.1.1. Generación y Propagación

La señal de voltaje EEG registrada en el cuero cabelludo resulta de la actividad sincronizada de grandes poblaciones de neuronas piramidales en la corteza cerebral [3]. Estas neuronas, orientadas perpendicularmente a la superficie cortical, generan dipolos de corriente ante potenciales postsinápticos. La suma espacial de estos dipolos, que requiere entre diez mil y cien mil neuronas sincronizadas para producir una señal detectable [17], constituye la fuente primaria del EEG.

La señal de voltaje generada en la corteza atraviesa desde su origen hasta los electrodos de superficie múltiples capas de conductividad variable: líquido cefalorraquídeo, meninges, cráneo (aproximadamente ochenta veces menos conductor que el cuero cabelludo) y cuero cabelludo [17]. Esta conducción volumétrica actúa como un filtro espacial paso-bajo que suaviza la distribución de potencial y limita la resolución espacial efectiva del EEG a unos dos o tres centímetros. Para la interpolación de canales, las consecuencias observables más relevantes son la preservación de formas de onda temporales y de topografías espaciales coherentes.

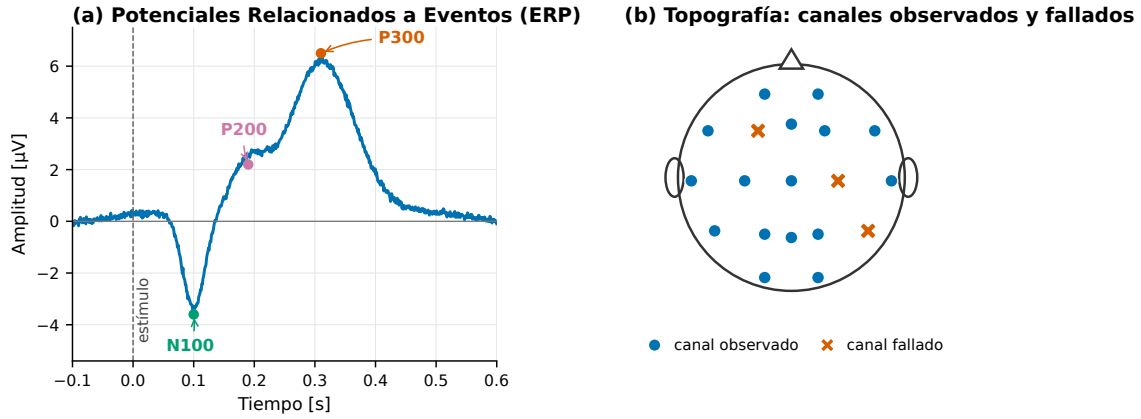


Figura 2.1: Manifestaciones EEG relevantes para la interpolación de canales. (a) Ejemplo esquemático de ERP con componentes N100, P200 y P300, cuya morfología debe preservarse al interpolar. (b) Topografía de electrodos con canales observados y canales fallados sobre una cabeza con orientación anatómica. Esquema de elaboración propia basado en la descripción neurofísica de [17] y en la nomenclatura ERP de [15].

### 2.1.2. Bandas de Frecuencia y Potenciales Relacionados a Eventos

La señal EEG se caracteriza por su contenido oscilatorio en bandas de frecuencia asociadas a estados funcionales específicos: delta (0.5–4 Hz, sueño profundo), theta (4–8 Hz, procesamiento de memoria), alpha (8–13 Hz, reposo vigil), beta (13–30 Hz, procesamiento activo) y gamma (30–100 Hz, procesamiento perceptual de alto nivel) [3]. La preservación de la estructura espectral en cada banda es un criterio fundamental para evaluar la calidad de cualquier interpolación.

Los Potenciales Relacionados a Eventos (ERP) son fluctuaciones de voltaje sincronizadas con un estímulo sensorial, motor o cognitivo, obtenidas mediante promediación coherente de múltiples ensayos [15]. Componentes como N100, P300 y N400 constituyen biomarcadores electrofisiológicos cuya preservación morfológica (amplitud de pico, latencia y distribución topográfica) es uno de los criterios de evaluación más exigentes para cualquier método de interpolación. La Figura 2.1(a) muestra un ejemplo de forma de onda ERP con sus componentes principales, y la Figura 2.1(b) ilustra la topografía de canales observados y fallados.

## 2.2. Procesamiento de Señales en Grafos

El Procesamiento de Señales en Grafos (GSP) [18, 24] extiende los conceptos del procesamiento clásico de señales a dominios irregulares representados por grafos.

### 2.2.1. Definiciones Fundamentales

Un grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W})$  consiste en  $N$  nodos  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ , en este caso los electrodos; un conjunto de aristas  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  que define qué electrodos están conectados; y una matriz de pesos  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  simétrica que especifica con qué intensidad:  $W_{ij} > 0$  si existe arista entre  $i$  y  $j$ , y  $W_{ij} = 0$  en caso contrario. La distinción entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathbf{W}$  es relevante porque  $\mathcal{E}$  define la topología (pares conectados) mientras que  $\mathbf{W}$  codifica la fuerza de cada conexión; en grafos densos pueden coincidir, pero en grafos sparse como k-NN difieren.

Una señal de grafo en el instante  $t$  es el vector  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^N$  de voltajes en los  $N$  electrodos. La matriz  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$  contiene  $T$  instantes temporales de la ventana de análisis EEG.

### 2.2.2. Laplaciano, Suavidad y Transformada de Fourier en Grafos

La matriz Laplaciana se define como  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ , con  $D_{ii} = \sum_j W_{ij}$ . La forma cuadrática

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} (x_i - x_j)^2 \quad (2.1)$$

cuantifica la variación total del vector de voltajes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  sobre el grafo: valores pequeños indican que nodos fuertemente conectados tienen valores similares, es decir, que la señal es *suave*. Esta propiedad es el pilar de la interpolación GSP: la mejor reconstrucción minimiza  $S(\mathbf{x})$  sujeta a coincidir con los canales observados. La Ecuación 2.1 es la base de todos los métodos de regularización en grafos discutidos en este capítulo.

$\mathbf{L}$  admite la descomposición espectral  $\mathbf{L} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^\top$ , donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  contiene los autovalores ordenados  $0 = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ , y  $\mathbf{U}$  es la matriz ortogonal de autovectores. Los  $\lambda_k$  actúan como frecuencias en el grafo: valores pequeños corresponden a modos de variación lenta, valores grandes a modos de variación rápida (Figura 2.2b).

La Transformada de Fourier en Grafos (GFT) se define como  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^\top \mathbf{x}$ . Una señal es *de banda limitada* si  $\hat{x}_k = 0$  para  $k > K$ , con  $K \ll N$ . La suavidad en el dominio

espectral es  $S(\mathbf{x}) = \sum_k \lambda_k \hat{x}_k^2$ , penalizando los modos de alta frecuencia proporcionalmente a su autovalor. En este contexto, una reconstrucción regularizada es la estimación de los canales faltantes que conserva los canales observados y minimiza simultáneamente una penalización de variación sobre el grafo.

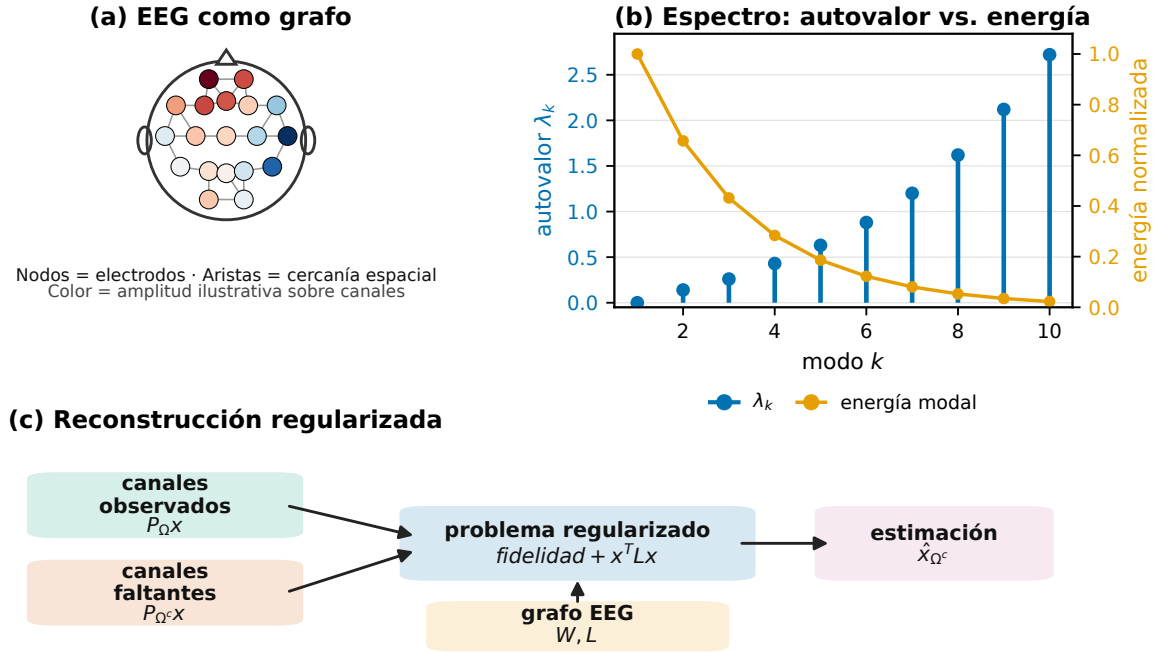


Figura 2.2: Conceptos fundamentales de GSP aplicados a EEG. (a) Los electrodos forman un grafo ponderado sobre una topografía de cabeza; las aristas codifican cercanía espacial. (b) El espectro del Laplaciano ordena los modos desde variación suave hasta variación rápida. La curva azul muestra autovalores, mientras que la curva naranja ilustra que la energía de una señal suave tiende a concentrarse en modos bajos. (c) La reconstrucción regularizada estima los canales faltantes combinando fidelidad a los canales observados y suavidad inducida por el grafo.

La Figura 2.2(a) muestra el grafo de electrodos, la Figura 2.2(b) separa explícitamente los autovalores del Laplaciano de la energía modal ilustrativa, y la Figura 2.2(c) resume la reconstrucción regularizada como compromiso entre datos observados y suavidad espacial.

### 2.2.3. Construcción de Grafos para EEG

La elección del grafo subyacente es una decisión metodológica de primer orden: un mismo algoritmo de interpolación GSP produce resultados distintos según el grafo sobre el que opera. En este trabajo se implementaron y evaluaron nueve estrategias de construcción de grafos, organizadas en tres categorías según la fuente de información que utilizan.

**Grafos geométricos (basados en distancia).** Utilizan exclusivamente las posiciones físicas de los electrodos, lo que los hace inmunes a la presencia de canales faltantes y deterministas por construcción:

- **k-NN no ponderado (knn).** Conecta cada electrodo a sus  $k$  vecinos más próximos con pesos binarios  $\{0, 1\}$ . Es el grafo más simple y sirve como línea base estructural.
- **k-NN gaussiano (knng).** Extiende el anterior ponderando cada arista con  $W_{ij} = \exp(-\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2^2 / 2\sigma^2)$ , donde  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$  es el vector de coordenadas 3D del electrodo  $i$  según el sistema 10–20 o 10–10,  $\sigma$  controla la escala de decaimiento y  $k$  determina la dispersión.
- **k-NN gaussiano variable (vknng).** Similar al knng pero con  $k_i$  adaptativo según la densidad local de electrodos: en regiones densas (e.g., zona occipital en montajes 10–10) usa menos vecinos, y en regiones dispersas usa más. El parámetro  $\alpha$  controla la sensibilidad a la densidad local.
- **$\varepsilon$ -ball (epsilon\_ball).** Conecta todos los pares cuya distancia es menor que un umbral  $\varepsilon$ , con pesos  $\{0, 1\}$ . A diferencia de k-NN, el grado de cada nodo es variable y depende de la densidad local.
- **Distancia completa gaussiana (gaussian).** Conecta todos los pares de electrodos con el núcleo gaussiano, generando una matriz densa. No requiere el parámetro  $k$  y captura interacciones de largo alcance, aunque puede introducir ruido de conexiones débiles.
- **Conectividad total inversa (fully\_connected\_inverse\_distance).** Usa  $W_{ij} = 1/d_{ij}$ , generando un grafo denso donde la influencia decae linealmente con la distancia.

**Grafos basados en correlación funcional.** Utilizan la serie temporal observada para cuantificar similitud entre electrodos. La construcción es  $W_{ij} = |\rho_{ij}|$ , donde  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación de Pearson entre los electrodos  $i$  y  $j$ , calculado solo con canales disponibles. Este criterio es informativo para exploración, pero introduce circularidad si se usa para confirmar desempeño: el grafo queda parcialmente determinado por las mismas señales sobre las que luego se evalúa la reconstrucción. Por esta razón, los grafos de correlación se usaron solo en la fase de selección preliminar y no sostienen las conclusiones comparativas principales.

**Grafos data-driven (aprendidos desde los datos).** No requieren especificar un núcleo ni sus parámetros; la estructura del grafo emerge de las señales mismas. En este grupo se consideraron dos alternativas:

- **Kalofolias (kalofolias).** Formula el aprendizaje del grafo como optimización convexa

que minimiza la variación de la señal observada con restricciones de grado positivo [12]. Se implementó una versión propia con descenso de gradiente proyectado sobre la función objetivo de log-grados más regularización de Frobenius.

- **AEW (Adaptive Edge Weighting)**. Optimización conjunta de pesos y topología mediante el algoritmo AEW [23], que alterna entre actualización de pesos vía descenso de gradiente y proyección sobre restricciones de grado.

Los grafos data-driven se evaluaron en la fase exploratoria pero no se incluyeron en la fase comparativa por dos razones: su mayor costo computacional ( $O(N^3)$  en el caso de Kalofolias) y la dificultad de garantizar reproducibilidad determinista entre ejecuciones. Esta decisión no es puramente teórica: el Capítulo 4 documenta la selección preliminar de combinaciones método-grafo y la reducción experimental que llevó a concentrar la comparación final en grafos geométricos reproducibles y en la referencia MNE-Python. Su impacto sobre TRSS se propone como trabajo futuro.

## 2.3. Estado del Arte en Interpolación de Señales Biomédicas

### 2.3.1. Métodos Geométricos y Estadísticos

El método más establecido es el de *spherical splines* [19], que modela el potencial sobre el cuero cabelludo como una función suave sobre una esfera. El potencial estimado en una posición  $\mathbf{r}$  es  $\hat{V}(\mathbf{r}) = c_0 + \sum_{i=1}^M c_i g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$ , donde  $M$  es el número de canales observados,  $g_m$  es la función de Green del operador pseudo-laplaciano de orden  $m$  sobre la esfera y los coeficientes se obtienen resolviendo un sistema lineal aumentado. En una forma regularizada, el bloque principal del sistema puede escribirse como  $(\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{c} + c_0 \mathbf{1} = \mathbf{v}$ , donde  $G_{ij} = g_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  y  $\lambda$  estabiliza el ajuste. Así,  $m$  controla la rigidez de la superficie y  $\lambda$  regula el compromiso entre ajuste y suavidad. Junto a los splines esféricos, se implementaron y evaluaron otros métodos de la familia geométrica. La **interpolación por distancia inversa** (IDW) estima el canal faltante como promedio ponderado de los canales observados, con pesos  $w_i = 1/d_i^p$  donde  $d_i$  es la distancia euclidiana al canal faltante y  $p$  controla la velocidad de decaimiento. La **interpolación por vecino más cercano** asigna al canal faltante el valor del canal observado más próximo. Las **funciones de base radial** (RBF) generalizan el enfoque usando núcleos gaussianos o multicuádricos y han sido aplicadas explícitamente a reconstrucción de EEG [10]. La **interpolación lineal** estima por triangulación sobre las posiciones 2D/3D de los electrodos. Estos métodos

comparten la propiedad de operar exclusivamente en el dominio espacial, ignorando la estructura temporal de la señal.

Entre los métodos estadísticos, el **Análisis de Componentes Independientes (ICA)** [11] se utilizó en dos variantes: una implementación propia con FastICA y la implementación de MNE-Python (ICA-MNE) con algoritmo Picard. ICA proyecta las señales observadas sobre fuentes independientes, elimina componentes artefactuales y reconstruye los canales faltantes desde el espacio de fuentes. Su inclusión se justifica porque es el método estándar de la comunidad EEG para remoción de artefactos, y evaluar su capacidad de reconstruir canales completamente ausentes, no solo corregir canales ruidosos, es una pregunta metodológica relevante. Sin embargo, ICA requiere la estimación de la matriz de mezcla sobre datos completos y su desempeño se degrada cuando la pérdida de canales es severa y contigua, por lo que se reservó para la fase exploratoria. El **Análisis de Componentes Principales (PCA)** se menciona aquí como contexto histórico pero no se evaluó experimentalmente por su desempeño consistentemente inferior en pruebas preliminares.

### 2.3.2. Métodos Basados en GSP

La **regularización de Tikhonov en grafos** formula la interpolación como un problema de optimización convexa:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{M} \odot (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_2^2 + \alpha \cdot \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}, \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{M} \in \{0, 1\}^N$  es la máscara binaria de canales observados (con  $M_i = 1$  si el canal  $i$  está observado y  $M_i = 0$  si está faltante),  $\odot$  denota el producto Hadamard (multiplicación elemento a elemento entre dos matrices o vectores del mismo tamaño), y  $\alpha$  controla el compromiso entre fidelidad a los datos y suavidad espacial. La Ecuación 2.2 admite solución cerrada  $\hat{\mathbf{x}} = (\text{diag}(\mathbf{M}) + \alpha \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{M} \odot \mathbf{y})$ . El **método de muestreo en grafos** asume que la señal es de banda limitada y busca la señal de banda limitada que interpola exactamente los valores observados.

### 2.3.3. Regularización Espacio-Temporal: TRSS

La Regularización Temporal de Suavidad de Sobolev (TRSS) [6] incorpora la continuidad temporal de las señales neuronales mediante un término adicional de penalización. El

problema conjunto sobre la matriz espacio-temporal  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$  es

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{M} \odot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{L} \mathbf{X}) + \beta \cdot \|\mathbf{X} \mathbf{D}_t\|_F^2, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{D}_t \in \mathbb{R}^{T \times (T-1)}$  es la matriz de diferencias finitas con  $(\mathbf{D}_t)_{t,t} = -1$ ,  $(\mathbf{D}_t)_{t+1,t} = 1$ , y  $\|\mathbf{X} \mathbf{D}_t\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} (X_{i,t+1} - X_{i,t})^2$  penaliza los cambios abruptos muestra a muestra.  $\beta$  controla la suavidad temporal:  $\beta = 0$  reduce TRSS a Tikhonov independiente por instante;  $\alpha = 0$  lo convierte en un suavizador temporal sin guía espacial. La interacción de ambos términos se evalúa empíricamente mediante el estudio de descomposición de componentes del Capítulo 4. La Figura 2.3 descompone visualmente la contribución de cada término en la Ecuación 2.3.

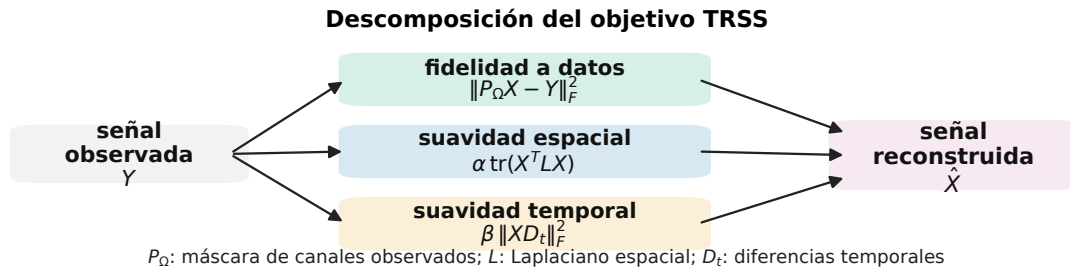


Figura 2.3: Descomposición del operador TRSS. La reconstrucción combina fidelidad a los canales observados, suavidad espacial inducida por el Laplaciano del grafo y suavidad temporal inducida por diferencias finitas. El término temporal no agrega información externa: restringe el espacio de soluciones admisibles mediante  $D_t$ .

## 2.4. Mecanismo Interno de la Interpolación en MNE-Python

Esta sección documenta las mejoras de ingeniería, no descritas en la literatura académica, que convierten a la implementación de *spherical splines* en MNE-Python [8, 9] en una referencia sólida. La información se obtuvo mediante inspección directa del código fuente.

### 2.4.1. Formulación Original y sus Seis Mejoras

El artículo de Perrin [19] formula la interpolación como un sistema lineal aumentado en el que la regularización se incorpora al bloque de Green, de manera análoga a  $(\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{c}$ . La formulación original ya utiliza todos los canales observados para estimar cada canal

faltante; por tanto, la ventaja de MNE-Python no proviene de usar más canales que Perrin, sino de una implementación numéricamente robusta y bien integrada al flujo M/EEG. MNE-Python incorpora las siguientes decisiones de ingeniería:

1. **Normalización a esfera unitaria.** Las coordenadas de electrodos  $\mathbf{p}_i$  se centran y escalan:  $\mathbf{p}'_i = (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}) / \max_j \|\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}\|_2$ . Esto elimina la dependencia de unidades físicas y mejora el condicionamiento numérico.
2. **Uso global preservado.** Igual que la formulación de Perrin, todos los  $M$  canales observados contribuyen a cada estimación. En un montaje de 64 canales con 2 canales malos, la reconstrucción aprovecha 62 electrodos; esto la diferencia de métodos locales como vecino más cercano o  $k$ -NN con  $k$  pequeño, no de Perrin.
3. **Regularización adaptativa.** El regularizador efectivo se escala según la matriz de Green  $\mathbf{G}$ :  $\varepsilon = 10^{-6} \cdot \text{tr}(\mathbf{G})/M$ . Aquí  $\varepsilon$  cumple el papel numérico de  $\lambda$  en el sistema regularizado.
4. **Aumentación con restricciones lineales.** Se fuerzan  $\sum_i c_i = 0$  y condiciones análogas para las coordenadas, garantizando unicidad.
5. **Pseudoinversa con tolerancia adaptativa.** Ante matrices numéricamente singulares, se usa una pseudoinversa con umbral proporcional a la norma.
6. **Reintento automático.** Si la reconstrucción produce valores nulos, el sistema reintenta con parámetros por defecto.

Estas mejoras transforman un algoritmo teóricamente simple en un estimador notablemente robusto. La implicación para esta tesis es clara: no es válido comparar contra implementaciones simplificadas de Perrin; la referencia debe ser MNE-Python mismo.

### 2.4.2. Los Tres Pilares de la Robustez

Desde el punto de vista **físico**, el modelo de cabeza esférica, cuya solución involucra polinomios de Legendre como base ortogonal natural para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, es una solución regularizada de dicha ecuación: no es una heurística sino el modelo más simple que captura la física de la conducción volumétrica. Cuando la información previa es correcta, y la suavidad espacial del EEG es un hecho físico bien documentado, los métodos con restricciones físicas simples superan a alternativas más complejas.

Desde el punto de vista **estadístico**, la regularización de MNE puede interpretarse como un estimador penalizado con una preferencia explícita por superficies suaves. No se

afirma que MNE implemente un modelo bayesiano completo; la analogía relevante es que la penalización actúa como información previa de suavidad espacial. En el régimen de alta redundancia espacial típico del EEG de cuero cabelludo, este estimador penalizado aprovecha una propiedad física real de la señal. Desde el punto de vista **informacional**, el EEG de cuero cabelludo exhibe redundancia espacial alta por el filtrado paso-bajo de la conducción volumétrica. Los métodos globales, que utilizan todos los canales observados, extraen más información que los métodos locales que restringen la estimación a un subconjunto de vecinos, como el vecino más cercano o  $k$ -NN con  $k$  pequeño. La Tabla 2.1 resume las familias de métodos discutidas en esta sección, indicando su principio matemático, fortaleza principal y limitación característica.

Tabla 2.1: Familias de métodos: principio matemático, fortalezas y limitaciones.

| Familia      | Principio                       | Fortaleza                 | Limitación                             |
|--------------|---------------------------------|---------------------------|----------------------------------------|
| Geométrica   | Distancia + superficie esférica | Velocidad, simplicidad    | Ignora dinámica temporal               |
| Estadística  | Descomposición en fuentes (ICA) | Separa artefactos         | Requiere datos completos               |
| GSP-Tikhonov | Suavidad espacial en grafo      | Topología flexible        | Independiente por instante             |
| GSP-Muestreo | Banda limitada en grafo         | Fundamento de muestreo    | Sensible a selección de $K$            |
| TRSS         | Suavidad espacio-temporal       | Preserva morfología       | Costo computacional alto               |
| MNE-Python   | Splines + mejoras ing.          | Robusta en rég. favorable | Pierde precisión bajo pérdida contigua |

# Capítulo 3

## Metodología

Este capítulo integra el diseño metodológico completo: conjuntos de datos, protocolos de simulación de canales faltantes, construcción de grafos, algoritmos de interpolación, métricas de evaluación, motor de optimización bayesiana, arquitectura del sistema experimental, trazabilidad de artefactos, diseño experimental y protocolo de validación comparativa. La Figura 3.1 resume el flujo metodológico completo.

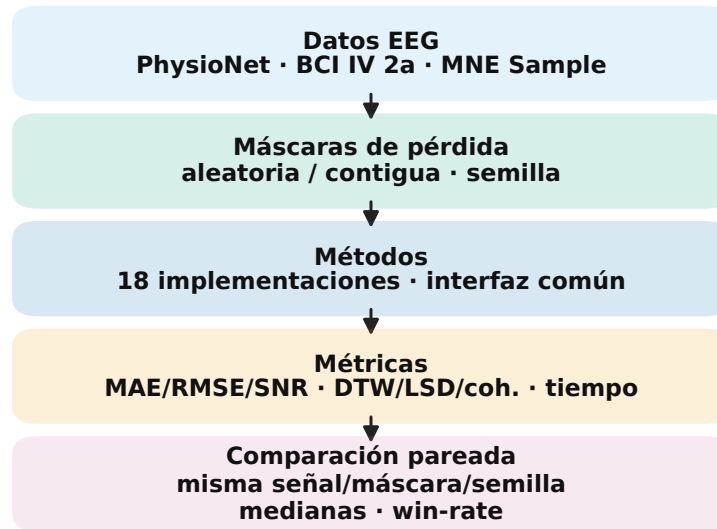


Figura 3.1: Flujo metodológico de evaluación con control pareado. Cada método se aplica sobre los mismos conjuntos de datos, máscaras de pérdida y semillas; luego se calculan métricas de reconstrucción y costo antes de comparar los métodos por escenario pareado.

### 3.1. Conjuntos de Datos

La evaluación se realizó sobre tres bases de datos EEG públicas que cubren un espectro diverso de densidades de electrodos, paradigmas y poblaciones (Tabla 3.1).

Tabla 3.1: Características de los tres conjuntos de datos experimentales.

| Dataset    | Canales | Sistema    | Frec. (Hz) | Sujetos | Paradigma    |
|------------|---------|------------|------------|---------|--------------|
| PhysioNet  | 64      | 10–10      | 160        | 109     | Reposo       |
| BCI IV 2a  | 22      | 10–20      | 250        | 9       | Imag. motora |
| MNE Sample | 60      | 10–20 ext. | 600        | 1       | Auditivo     |

**PhysioNet** [7, 22] contiene 64 canales (10–10) a 160 Hz de 109 sujetos. Se usaron segmentos de reposo con ojos abiertos (60 s por sujeto). **BCI Competition IV 2a** [2] aporta 22 canales (10–20) a 250 Hz de 9 sujetos en tareas de imaginación motora de cuatro clases. Se extrajeron 2592 ensayos de 2 s. **MNE Sample** [8] corresponde a un registro de un sujeto; de ese registro se seleccionaron 60 canales EEG a 600 Hz y 72 ensayos de 0.7 s alrededor de estímulos auditivos.

Estos tres conjuntos cubren el espacio de variabilidad real: desde 22 canales (clínica ambulatoria) hasta 64 (investigación), con frecuencias de 160 a 600 Hz y paradigmas de reposo, imaginación motora y potenciales evocados.

### 3.2. Protocolos de Simulación de Canales Faltantes

La evaluación de métodos de interpolación requiere conocer la señal verdadera (*ground truth*) para cuantificar el error de reconstrucción. La estrategia adoptada consiste en simular la pérdida sobre canales que sí están presentes y cuya señal real se conoce: se selecciona un subconjunto de canales, se oculta su señal (máscara de falta), se aplica el método de interpolación para estimar dicha señal, y se compara la estimación con la señal original oculta. Esta estrategia, estándar en la literatura de imputación de señales fisiológicas, permite calcular métricas de error exactas sobre datos reales sin requerir registros simultáneos de referencia.

Se definieron dos modos de pérdida de canales. El **modo aleatorio** selecciona un porcentaje  $p$  de canales al azar, modelando fallas esporádicas (secado del gel, desprendimiento de electrodos). El **modo contiguo** selecciona un canal semilla y marca como faltantes los  $p$  canales más cercanos en distancia euclidiana, modelando fallas catastróficas localizadas (saturación de amplificador).

Para cada modo se evaluaron cuatro severidades ( $p \in \{10\%, 20\%, 30\%, 40\%\}$ ) con 5 semillas aleatorias, generando  $3 \times 2 \times 4 \times 5 = 120$  escenarios. La semilla determina qué canales específicos se marcan como faltantes y se preserva para garantizar que todos los métodos se evalúen sobre exactamente las mismas máscaras.

### 3.3. Construcción de Grafos

Los métodos basados en GSP requieren un grafo subyacente que define la topología de conectividad entre electrodos. La construcción del grafo es una decisión metodológica independiente del algoritmo de interpolación: un mismo método puede operar sobre distintos grafos, y un mismo grafo puede alimentar distintos algoritmos.

Se implementaron nueve estrategias de construcción de grafos, organizadas según la fuente de información que utilizan (Tabla 3.2). La nomenclatura entre paréntesis corresponde al identificador usado en el código del repositorio.

Tabla 3.2: Estrategias de construcción de grafos. La columna «Fase» indica si el grafo se usó en la fase exploratoria (E), comparativa (C) o ambas (E+C).

| Estrategia   | Tipo        | Descripción                                                  | Fase |
|--------------|-------------|--------------------------------------------------------------|------|
| knn          | Geométrico  | k-NN no ponderado ( $k$ vecinos, pesos binarios)             | E    |
| knng         | Geométrico  | k-NN con kernel gaussiano ( $k$ , $\sigma$ )                 | E+C  |
| vknn         | Geométrico  | k-NN variable según densidad local ( $\alpha$ )              | E    |
| epsilon_ball | Geométrico  | $\varepsilon$ -ball (todos los pares con $d < \varepsilon$ ) | E    |
| gaussian     | Geométrico  | Distancia completa con kernel gaussiano ( $\sigma$ )         | E+C  |
| inv_distance | Geométrico  | Conectividad total con $W_{ij} = 1/d_{ij}$                   | E    |
| correlation  | Correlación | $W_{ij} =  \rho_{ij} $ (solo fase exploratoria)              | E    |
| kalofolias   | Data-driven | Optimización de log-grados + regularización Frobenius        | E    |
| aew          | Data-driven | <i>Adaptive Edge Weighting</i>                               | E    |

Los grafos geométricos operan exclusivamente sobre las posiciones físicas de los electrodos, lo que los hace inmunes a canales faltantes y deterministas. Las posiciones se obtuvieron desde los montajes disponibles en MNE-Python: PhysioNet se estandarizó con

el montaje estándar 1005; BCI IV 2a se mapeó a los 22 nombres de canal del montaje 10–20 extendido; y MNE Sample usó las coordenadas incluidas en el registro público. Cuando un canal no tenía coordenada explícita, el sistema lo marcó como caso a revisar y evitó usarlo para conclusiones fuertes. Los grafos de correlación funcional se usaron únicamente en la fase de selección preliminar, donde era necesario evaluar un gran número de combinaciones método×grafo; se descartaron para la fase comparativa porque la correlación se estima sobre las mismas señales que luego se reconstruyen, introduciendo circularidad metodológica. Los grafos data-driven se evaluaron en la fase exploratoria pero no pasaron a la fase comparativa por su mayor costo computacional y menor reproducibilidad determinista. Los grafos knng y gaussian fueron los únicos que avanzaron a la fase comparativa, por su balance entre expresividad y reproducibilidad.

### 3.4. Métodos de Interpolación

Se implementaron dieciocho métodos de interpolación organizados en cuatro familias (Tabla 3.3). La nomenclatura de familias es consistente a lo largo de todo el documento.

Tabla 3.3: Métodos de interpolación implementados y evaluados.

| Familia     | Métodos                                                                                                  | Fase |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Geométrica  | Vecino más cercano, Distancia inversa (IDW), RBF, Spherical splines, Lineal                              | E    |
| Estadística | ICA (FastICA), ICA-MNE (Picard)                                                                          | E    |
| GSP         | Tikhonov en grafos, Banda limitada (BGSRP), Suavizado en grafos, TV en grafos, GTT (graph-time Tikhonov) | E    |
| TRSS        | Regularización espacio-temporal de Soble                                                                 | E+C  |
| Referencia  | MNE-Python (defecto), MNE-Python (Optuna)                                                                | E+C  |

Es metodológicamente crucial distinguir entre la implementación propia de *spherical splines* y la de MNE-Python, que incorpora mejoras de ingeniería documentadas en el Capítulo 2. Los métodos GSP (Tikhonov, BGSRP, TV, GTT) y TRSS se evaluaron sobre múltiples grafos de la Sección 3.3, generando variantes por método según el grafo subyacente. Los métodos geométricos y estadísticos se evaluaron en la fase exploratoria; solo TRSS y MNE-Python (en sus variantes por defecto y optimizada) avanzaron a la fase comparativa.

### 3.5. Métricas de Evaluación

Se emplearon seis métricas primarias organizadas en tres categorías, más el tiempo de cómputo como métrica complementaria (Tabla 3.4). Ninguna métrica individual captura todos los aspectos relevantes; por ello se reportan de forma independiente en los resultados.

Tabla 3.4: Métricas de evaluación. La notación  $\mathcal{F}$  denota el conjunto de canales faltantes,  $x_i$  la señal real y  $\hat{x}_i$  la reconstrucción.

| Categoría   | Métrica                                                                                                        | Símbolo | Dirección |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|
| Amplitud    | Error absoluto medio: $\frac{1}{ \mathcal{F} } \sum_{i \in \mathcal{F}}  x_i - \hat{x}_i $                     | MAE     | ↓         |
|             | Raíz del error cuadrático medio: $\sqrt{\frac{1}{ \mathcal{F} } \sum_{i \in \mathcal{F}} (x_i - \hat{x}_i)^2}$ | RMSE    | ↓         |
|             | Relación señal-ruido: $10 \log_{10}(\ x_{\mathcal{F}}\ ^2 / \ x_{\mathcal{F}} - \hat{x}_{\mathcal{F}}\ ^2)$    | SNR     | ↑         |
| Morfológica | <i>Dynamic Time Warping</i> : $\text{DTW}(x, \hat{x})$                                                         | DTW     | ↓         |
| Espectral   | Distancia Espectral Logarítmica: $\sqrt{\frac{1}{B} \sum_b (\log S_x(b) - \log S_{\hat{x}}(b))^2}$             | LSD     | ↓         |
|             | Coherencia: $ S_{x\hat{x}}(f) ^2 / (S_{xx}(f) S_{\hat{x}\hat{x}}(f))$                                          | Coh.    | ↑         |
| Temporal    | Tiempo de cómputo por caso (s)                                                                                 | $t$     | ↓         |

Las métricas de **amplitud** cuantifican el error muestra a muestra sobre los canales faltantes. El **DTW** permite deformaciones no lineales del eje temporal, relevante para segmentos con transitorios. Las métricas **espectrales** (LSD, Coherencia) cuantifican la distorsión del espectro de forma independiente del error de amplitud. El **tiempo de cómputo** se reporta como dimensión complementaria porque la mejora en precisión de reconstrucción debe sopesarse contra el costo computacional adicional.

### 3.6. Optimización Bayesiana con Optuna

Para garantizar una comparación justa, todos los algoritmos fueron optimizados mediante Optuna [1] con muestreo TPE (*Tree-structured Parzen Estimator*). El TPE modela las distribuciones de configuraciones con buen y mal desempeño y guía la búsqueda hacia regiones prometedoras, siendo más eficiente que una búsqueda aleatoria o de grilla para espacios de alta dimensionalidad.

Los espacios de búsqueda se definieron por familia (Tabla 3.5). Se ejecutaron 30 intentos por método de grafo, 10 intentos con NSGA-II multiobjetivo para *spherical splines*, y barridos de grilla fina para TRSS. En total se exploraron más de quince mil configuraciones

paramétricas distintas.

Tabla 3.5: Espacios de búsqueda de hiperparámetros.

| Familia         | Parámetros                                              | Escala | Estrategia            |
|-----------------|---------------------------------------------------------|--------|-----------------------|
| GSP (grafo)     | $\sigma \in [0,01, 1,0], k \in \{3, 5, 7, 10, 15, 20\}$ | Lineal | TPE (30 intentos)     |
| TRSS            | $\alpha \in [10^{-4}, 10^2], \beta \in [10^{-3}, 10^3]$ | Log    | Grilla fina           |
| Splines propios | $m \in \{2, 3, 4\}, \lambda \in [10^{-8}, 10^{-2}]$     | Mixta  | NSGA-II (10 intentos) |
| MNE (Optuna)    | $m \in \{2, 3, 4\}, \lambda \in [10^{-8}, 10^{-2}]$     | Mixta  | NSGA-II (10 intentos) |

### 3.7. Arquitectura del Sistema Experimental

El sistema se organiza en cinco módulos con interfaces explícitas que operan en cadena (Figura 3.2). El módulo de **datos** expone una interfaz común para los tres conjuntos. El módulo de **simulación de daños** genera máscaras binarias con semilla trazable. El módulo de **métodos** combina la construcción de grafos, nueve estrategias que producen **W** y **L**, con las dieciocho implementaciones de interpolación bajo una interfaz unificada. El módulo de **evaluación** calcula las métricas primarias y complementarias, y el módulo de **artefactos/optimización** orquesta Optuna en la fase exploratoria y registra resultados trazables para la fase comparativa.

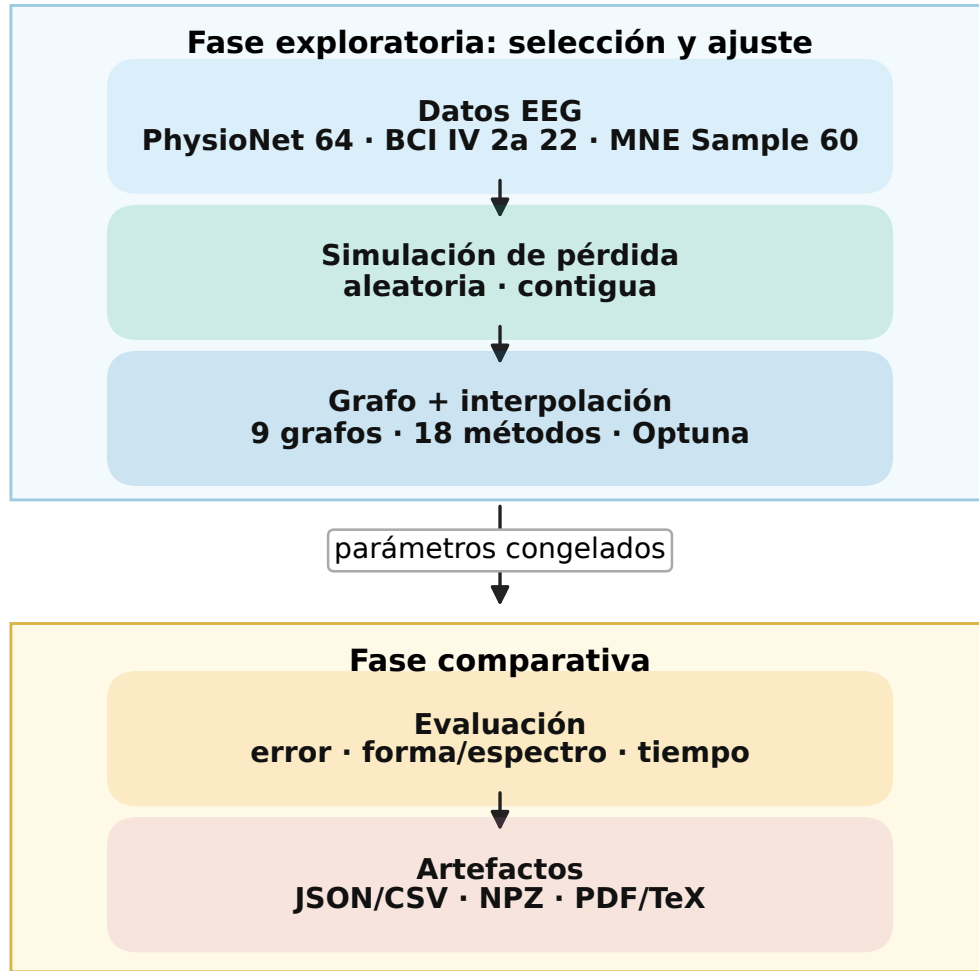


Figura 3.2: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema experimental. Cinco módulos con interfaces explícitas operan en cadena. La figura distingue fase exploratoria y fase comparativa, indicando que los resultados comparativos no reabren la búsqueda de hiperparámetros.

### 3.7.1. Trazabilidad y Gestión de Artefactos

En experimentos computacionales a gran escala (18 métodos, 120 escenarios, más de 15 000 configuraciones), la gestión sistemática de artefactos resuelve tres problemas concretos. Primero, **auditoría**: cada número reportado debe poder rastrearse hasta el archivo que lo origina; sin trazabilidad es imposible distinguir un hallazgo real de un error de transcripción. Segundo, **control de contaminación**: las fases exploratoria y

comparativa deben mantenerse físicamente separadas para que resultados exploratorios no influyan inadvertidamente en decisiones posteriores. Tercero, **reproducibilidad**: un tercero con acceso al repositorio público (<https://github.com/Carloss97/Tesis-GSP-EEG-Carlos-Saldivia>) puede revisar el código, las configuraciones y los artefactos finales necesarios para reproducir el flujo experimental. Cada ejecución recibe un identificador único (SHA-256 de la tupla completa de parámetros) y preserva: configuración inmutable (YAML), métricas agregadas (JSON), señales reconstruidas en formato NPZ (NumPy comprimido), máscara de daño, y tiempos de ejecución (Tabla 3.6). El código está versionado con Git y cada conjunto de resultados está asociado a un *commit hash* específico. La Figura 3.3 ilustra la cadena de trazabilidad desde el texto hasta el script generador.

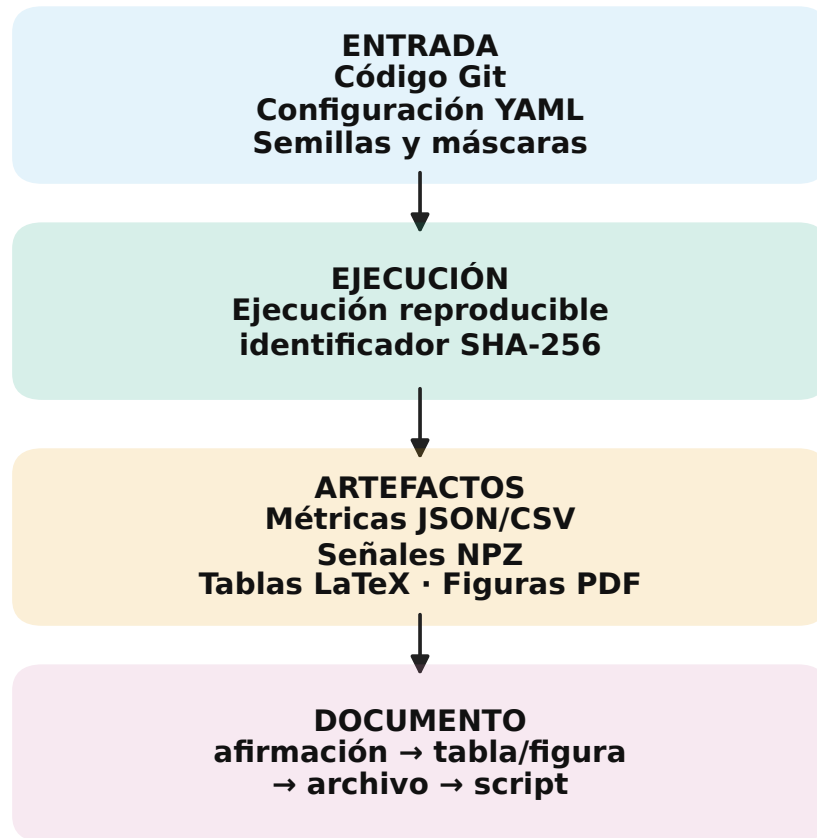


Figura 3.3: Cadena de trazabilidad experimental. Cada afirmación cuantitativa se vincula con la tabla o figura correspondiente, el archivo de datos asociado y el script que generó el resultado.

Tabla 3.6: Artefactos generados por el sistema experimental.

| Artefacto          | Formato     | Función                               |
|--------------------|-------------|---------------------------------------|
| Configuración      | YAML        | Registro inmutable de parámetros      |
| Métricas           | JSON        | Resultados de las métricas requeridas |
| Señal reconstruida | NPZ (NumPy) | Salida verificable bit a bit          |
| Máscara de daño    | NPZ (NumPy) | Trazabilidad de canales faltantes     |
| Tiempos            | JSON        | Perfil de eficiencia computacional    |

### 3.8. Diseño Experimental

El diseño experimental se resume en la Tabla 3.7, que vincula cada pregunta de investigación con el experimento diseñado para responderla y la evidencia esperada. La lógica central es pareada: dos métodos se comparan sobre la misma señal, la misma máscara de canales ocultos y la misma semilla, evitando que diferencias del caso experimental contaminen la comparación.

La ejecución no consistió en una única evaluación final. Primero se realizó una exploración preliminar de combinaciones método-grafo para observar qué familias eran competitivas en datos sintéticos, proxies EEG y registros reales. Luego se redujo el conjunto de candidatos considerando desempeño, costo de ejecución, reproducibilidad y riesgo de circularidad en la construcción del grafo. En una tercera fase se optimizaron hiperparámetros mediante Optuna o grillas controladas y se congelaron las variantes que pasarían a la comparación final. El Capítulo 4 reporta esta trayectoria experimental antes de presentar los resultados finales TRSS-MNE.

Tabla 3.7: Relación entre preguntas de investigación, experimentos y evidencia esperada.

| Pregunta                           | Experimento                    | Evidencia esperada                                                          |
|------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| P1: ¿Cuándo mejora TRSS?           | Comparación global de familias | Reducción de error y ajuste temporal en pérdida agrupada o severa           |
| P1: ¿Aporta el término temporal?   | Descomposición $\alpha/\beta$  | Diferencia observable entre TRSS completo y TRSS sin temporalidad           |
| P1: ¿Preserva morfología temporal? | Series temporales y DTW        | Menor distorsión temporal en escenarios representativos                     |
| P2: ¿Cuándo conviene MNE?          | Comparación TRSS vs. MNE       | MNE gana o empata en pérdida baja, señales suaves o restricciones de tiempo |
| P2: ¿Dónde está el punto de cruce? | Curvas por patrón y severidad  | Frontera de uso dependiente de severidad, patrón y métrica                  |

Las **variables independientes** son: método de interpolación, conjunto de datos, modo de pérdida, severidad y semilla (5 réplicas). Las **variables dependientes** son las métricas de la Sección 3.5. Las **variables controladas** incluyen: versiones exactas de todas las bibliotecas, semillas globales, preprocesamiento idéntico (filtro Butterworth 0.5–45 Hz, referencia promedio común, segmentación uniforme), y hardware de ejecución (CPU Intel Core i7-13700H, 32 GB RAM, sin aceleración GPU).

### 3.9. Protocolo de Validación Comparativa

La validación comparativa es una fase independiente que responde a una necesidad metodológica concreta: los resultados de la fase exploratoria (barridos de 15 000 configuraciones) no deben usarse como evidencia principal porque el riesgo de sobreajuste es alto. Un método que obtuvo buenos resultados porque sus hiperparámetros se ajustaron extensivamente sobre los datos de prueba no demuestra superioridad general; demuestra capacidad de ajuste al protocolo exploratorio. La fase comparativa reduce este riesgo al congelar los hiperparámetros de TRSS tras la optimización exploratoria y evaluarlo sobre una partición independiente, contra MNE-Python con parámetros por defecto.

La fase se diseñó con 100 estratos definidos por régimen de señal, patrón de pérdida y severidad, con tres semillas por estrato (300 casos pareados). Los regímenes incluyen señales reales y controles sintéticos suave/rugoso. El diseño es de medidas repetidas: cada caso comparte la misma señal y máscara, por lo que las diferencias se atribuyen al método bajo las condiciones del protocolo. El análisis reporta diferencias pareadas, medianas por estrato, tasas de victoria e intervalos de incertidumbre vía bootstrap jerárquico (1000 remuestreos), sin convertir la decisión metodológica en un contraste inferencial único.

### 3.10. Control de Calidad

Antes de cualquier análisis se ejecutaron verificaciones automáticas: todas las ejecuciones contienen las métricas requeridas, ningún identificador duplicado con resultados diferentes, las máscaras coinciden con la semilla, y se excluyen ejecuciones con valores no numéricos, tiempo excesivo ( $>10$  min) o reconstrucción idéntica a la entrada.

## 3.11. Síntesis del Diseño

El diseño experimental de esta tesis se distingue de la literatura previa en cuatro aspectos: todos los métodos fueron optimizados con el mismo motor bayesiano; se incorporó una comparación independiente contra MNE-Python; la evaluación abarca métricas de amplitud, morfología y espectro; y los escenarios incluyen pérdida aleatoria y contigua en un rango de severidades clínicamente relevante. La arquitectura modular, la separación estricta de fases y la trazabilidad completa de artefactos garantizan que las conclusiones sean auditables y reproducibles.

La consecuencia práctica de este diseño es que el Capítulo 4 debe leerse en dos niveles. El primer nivel es experimental: muestra cómo el repositorio pasó de un espacio amplio de grafos y métodos a un subconjunto final defendible. El segundo nivel es comparativo: evalúa ese subconjunto bajo casos pareados y métricas comunes. Esta distinción evita confundir resultados exploratorios con evidencia final y permite justificar por qué la tesis se concentra en TRSS y MNE-Python.

Además, la separación de fases hace explícitas las decisiones negativas del estudio. No todos los métodos implementados avanzaron a la comparación final; algunos fueron descartados por costo, otros por circularidad potencial en la construcción del grafo, y otros por no mejorar respecto de referencias más simples. Documentar esas reducciones es parte del resultado experimental, porque muestra que la comparación final no fue seleccionada arbitrariamente sino derivada de evidencia intermedia trazable.

# Capítulo 4

## Experimentos y Resultados

Este capítulo documenta la trayectoria experimental completa de la tesis. No se limita a reportar la comparación final TRSS–MNE: primero describe cómo se exploró el espacio de métodos y grafos, cómo se redujo el conjunto de candidatos, cómo se congelaron variantes para evitar contaminación entre fases, y luego presenta los resultados comparativos finales mediante evidencia descriptiva, temporal, espectral y práctica. Esta organización permite distinguir entre resultados preliminares, útiles para diseñar el experimento, y resultados finales, usados para responder las preguntas de investigación.

### 4.1. Mapa de fases experimentales

La evaluación se organizó como una cadena de decisiones, no como un único experimento aislado. Primero se realizó una **exploración preliminar** de combinaciones método–grafo sobre datos sintéticos y EEG proxy/real, con el objetivo de identificar familias plausibles sin convertir ese ranking en conclusión final. Luego vino la **reducción de candidatos**: se descartaron alternativas inestables, demasiado costosas o dependientes de información circular. En una tercera fase se hizo **optimización intermedia**, donde se exploraron hiperparámetros y se congelaron variantes antes de la comparación pareada. Solo entonces se ejecutó la **comparación final** TRSS–MNE. Finalmente, la **inspección cualitativa** revisó señales temporales y PSD para comprobar que las métricas agregadas correspondieran a reconstrucciones interpretables.

Esta separación es metodológicamente importante. Los resultados preliminares no se interpretan como evidencia final porque fueron usados para decidir qué métodos seguir explorando. Su función en este capítulo es explicar por qué la comparación final se

concentra en TRSS y MNE, y por qué algunas estrategias teóricamente atractivas no pasaron a la etapa comparativa.

## 4.2. Selección preliminar de métodos y grafos

La selección preliminar evaluó combinaciones de familias de interpolación y construcción de grafos sobre datos sintéticos, proxies EEG y registros reales. La exploración incluyó métodos geométricos, estadísticos como ICA, regularizadores GSP como Tikhonov y variantes temporales como TRSS. La Tabla 4.1 muestra la mejor combinación método-grafo por conjunto dentro del ranking exploratorio. La columna de método usa nombres legibles vinculados con las familias de la Tabla 3.3: TRSS corresponde a la regularización espacio-temporal, TV temporal a variantes de variación total en el tiempo y vecino más cercano a la familia geométrica. El patrón general es que las variantes con información temporal aparecen repetidamente en las primeras posiciones, aunque no de manera universal: algunos conjuntos favorecen métodos instantáneos o geométricos simples.

Tabla 4.1: Mejor combinación método-grafo por conjunto durante la selección exploratoria. La columna Método usa nombres legibles consistentes con las familias de la Tabla 3.3; el ranking corresponde al puntaje compuesto preliminar y no constituye la comparación final contra MNE.

| Conjunto         | Familia<br>(Sec. 3) | Grafo                   | Método             | MAE                   | SNR    |
|------------------|---------------------|-------------------------|--------------------|-----------------------|--------|
| PhysioNet proxy  | TRSS                | AEW                     | TRSS               | $5,00 \times 10^{-6}$ | 14,361 |
| PhysioNet real   | TRSS                | k-NN, $k = 5$           | TRSS               | $2,84 \times 10^{-6}$ | 17,366 |
| MNE Sample proxy | GSP/TV              | k-NN, $k = 3$           | TV temporal        | $2,95 \times 10^{-7}$ | 11,277 |
| BCI IV proxy     | TRSS                | Kalofolias              | TRSS               | $4,07 \times 10^{-7}$ | 13,024 |
| BCI IV real S1   | TRSS                | k-NN, $k = 3$           | TRSS               | $1,91 \times 10^{-6}$ | 17,057 |
| BCI IV real S2   | TRSS                | Gaussiano, $\sigma = 1$ | TRSS               | $6,48 \times 10^{-7}$ | 24,429 |
| BCI IV real S3   | Geométrica          | k-NN, $k = 3$           | Vecino más cercano | $6,14 \times 10^{-7}$ | 15,063 |
| Sintético 16 ch  | TRSS                | k-NN, $k = 3$           | TRSS               | 0,475                 | 3,188  |
| Sintético 32 ch  | TRSS                | k-NN, $k = 3$           | TRSS               | 0,412                 | 3,861  |

La lectura de esta tabla no es “el mejor método final es siempre el de la primera fila de cada conjunto”. Su función es más limitada: mostrar que el espacio de búsqueda inicial es amplio y heterogéneo. En PhysioNet y varios conjuntos BCI, TRSS aparece como candidato fuerte; en MNE Sample proxy, una variante temporal distinta queda primera; y en algunos casos reales BCI aparece una referencia instantánea. Por eso la tesis no salta directamente a una afirmación de superioridad de TRSS: primero reduce el espacio experimental y luego compara contra una referencia comunitaria fuerte.

La Figura 4.1 resume la misma fase desde el punto de vista de las iteraciones consolidadas. La campaña exploratoria alcanzó archivos hasta la iteración 800; el resumen usado para la figura contiene 736 iteraciones con al menos una métrica válida. La figura muestra únicamente métodos conservados como evidencia exploratoria válida para orientar la reducción de candidatos.

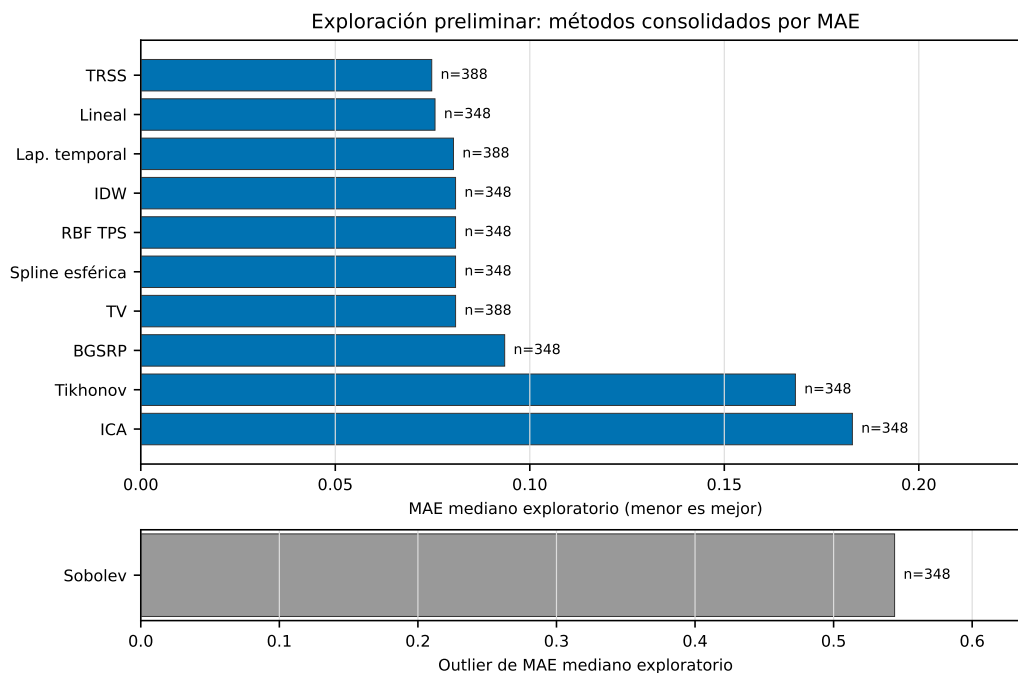


Figura 4.1: Resumen exploratorio por método en la campaña de iteraciones preliminares. Las barras muestran MAE mediano por método en el resumen consolidado; menor es mejor. Sobolev se muestra como panel separado por su escala mayor.

### 4.3. Reducción de candidatos

La reducción de candidatos combinó tres criterios. Primero, se descartaron estrategias que dependían de información potencialmente circular, como grafos contruidos desde correlaciones de la misma señal evaluada. Segundo, se relegaron métodos data-driven cuya reproducibilidad o costo dificultaba una comparación final controlada. Tercero, se consideró el tiempo de ejecución, porque un método que mejora una métrica pero no es operativo puede ser poco útil en flujos EEG reales.

La Tabla 4.2 resume un microbenchmark usado como señal de costo. Métodos simples como media o lineal son muy rápidos pero menos expresivos; TRSS queda en una zona intermedia; y métodos como TV temporal resultan costosos para una evaluación extensiva.

Esta evidencia apoyó concentrar la fase final en una comparación interpretable: TRSS como representante espacio-temporal y MNE-Python como referencia madura.

Tabla 4.2: Microbenchmark de latencia usado como criterio de reducción de candidatos. La columna de rol indica por qué cada familia fue relevante para decidir qué métodos avanzar a la comparación final.

| Método                 | Rol en la reducción de candidatos                   | Mediana   |
|------------------------|-----------------------------------------------------|-----------|
| Media                  | Línea base rápida y poco expresiva                  | 0,32 ms   |
| Lineal                 | Referencia geométrica local de bajo costo           | 0,34 ms   |
| Laplaciano temporal    | Alternativa temporal intermedia                     | 6,13 ms   |
| RBF TPS                | Interpolación geométrica flexible                   | 6,58 ms   |
| TRSS                   | Candidato espacio-temporal principal                | 9,44 ms   |
| Spline esférica propia | Referencia geométrica propia no optimizada como MNE | 136,64 ms |
| TV temporal            | Variante temporal costosa para evaluación extensa   | 443,36 ms |

A partir de esa evidencia, la reducción se resolvió así. Los métodos geométricos propios se conservaron como antecedentes, pero MNE-Python pasó a ser la referencia principal por su implementación comunitaria más robusta. Los grafos de correlación se usaron solo como exploración, porque pueden depender de la misma señal evaluada. Los grafos data-driven se dejaron para trabajo futuro por su mayor costo y menor determinismo. Los métodos temporales distintos de TRSS permanecieron como evidencia intermedia, pero no sostienen la comparación final. De esta forma, el cierre experimental queda concentrado en una pregunta más limpia: cómo se comporta TRSS frente a MNE cuando ambos se evalúan sobre casos pareados.

## 4.4. Optimización intermedia

La fase intermedia usó Optuna y barridos controlados para explorar hiperparámetros de familias candidatas. En esta etapa se evaluaron configuraciones por conjunto, patrón de pérdida y severidad; también se compararon configuraciones globales contra óptimos locales. El propósito fue estimar si el rendimiento dependía de una calibración específica por escenario o si una variante fija podía sostener la comparación final.

La distinción entre variantes cumple una función práctica. La **búsqueda por familia** identifica rangos plausibles de hiperparámetros, pero no fija conclusiones definitivas.

La **configuración global** evalúa si una parametrización única mantiene desempeño razonable entre escenarios. **TRSS fijo** representa la variante reproducible con parámetros congelados antes de la comparación pareada, por lo que es la lectura principal frente a MNE. **TRSS calibrado** aproxima una selección más adaptativa y se usa como análisis auxiliar de sensibilidad. El **oráculo** solo estima una cota superior no desplegable; sirve como contexto metodológico, no como método aplicable.

Esta fase explica por qué la comparación final distingue entre TRSS fijo, TRSS calibrado y oráculo. En la narrativa principal se privilegia TRSS fijo frente a MNE, porque es la lectura más transparente y menos dependiente de sobreajuste. Las variantes calibrada y oracular ayudan a interpretar cuánto podría cambiar el desempeño bajo reglas de selección más flexibles, pero no reemplazan la comparación principal.

## 4.5. Inventario de la comparación final

La comparación final se apoya en cinco tipos de evidencia. Los **datos** provienen de MNE Sample, PhysioNet, BCI IV 2a y controles sintéticos descritos en el Capítulo 3; los resultados se almacenan en CSV crudos y derivados. Los **métodos** se reducen a MNE como referencia comunitaria y TRSS fijo como variante propuesta principal, dejando TRSS calibrado y oráculo como análisis auxiliares. Los **escenarios** combinan máscaras aleatorias, cercanas, periféricas y de alta varianza con severidades bajas y altas. Las **métricas** separan error de amplitud, forma temporal, preservación espectral y tiempo de cómputo. Finalmente, los **casos cualitativos** muestran ejemplos favorables a TRSS, favorables a MNE, empates prácticos y pérdidas severas seleccionadas de forma reproducible.

Esta descripción reemplaza un inventario tabular porque la información es conceptual, no numérica. Lo importante es que el lector distinga dos niveles de evidencia: las tablas cuantitativas describen tendencias agregadas; las figuras temporales y espectrales muestran cómo se ven esas tendencias en señales concretas. Las métricas se calculan sobre los canales ocultos, no sobre los canales observados. MAE, RMSE y NRMSE describen error de amplitud; DTW y correlación capturan aspectos de forma temporal; LSD y coherencia resumen propiedades espectrales; y el tiempo de cómputo cuantifica el costo práctico.

## 4.6. Resumen descriptivo de TRSS frente a MNE

La Tabla 4.3 resume la comparación pareada descriptiva entre TRSS fijo y MNE. En las métricas de amplitud, TRSS reduce el error mediano respecto de MNE: la mejora mediana es 12,4 % en MAE, 13,9 % en RMSE y 13,9 % en NRMSE. Las tasas de victoria cercanas al 70 % indican que la mejora no se concentra en un único caso extremo, sino que aparece en una proporción amplia de pares. También se observan mejoras en DTW, correlación y  $R^2$ , lo que sugiere una mejor conservación de la forma temporal en parte importante del protocolo.

Tabla 4.3: Resumen descriptivo pareado de TRSS fijo frente a MNE para métricas de calidad. La mejora mediana positiva favorece a TRSS después de respetar la dirección de cada métrica; la tasa de victoria indica la proporción de pares donde TRSS supera a MNE. Los intervalos son bootstrap descriptivos al 95 %.

| Categoría | Métrica     | Med. MNE              | Med. TRSS             | Mej. med. (%) | Victoria (%) | IC descriptivo (%) |
|-----------|-------------|-----------------------|-----------------------|---------------|--------------|--------------------|
| Amplitud  | MAE         | $1,13 \times 10^{-5}$ | $8,46 \times 10^{-6}$ | +12,4         | 72,0         | [+7,8; +17,4]      |
| Amplitud  | RMSE        | $1,47 \times 10^{-5}$ | $1,06 \times 10^{-5}$ | +13,9         | 70,3         | [+6,4; +19,3]      |
| Amplitud  | NRMSE       | $7,25 \times 10^{-1}$ | $6,34 \times 10^{-1}$ | +13,9         | 70,3         | [+6,4; +19,3]      |
| Forma     | DTW         | $6,73 \times 10^{-4}$ | $5,60 \times 10^{-4}$ | +9,8          | 71,0         | [+5,5; +12,7]      |
| Amplitud  | SNR         | $9,47 \times 10^0$    | $1,00 \times 10^1$    | +3,7          | 61,0         | [+0,9; +9,6]       |
| Espectral | LSD         | $7,51 \times 10^{-1}$ | $7,67 \times 10^{-1}$ | -2,3          | 40,7         | [-4,0; -0,2]       |
| Espectral | Coherencia  | $8,87 \times 10^{-1}$ | $8,88 \times 10^{-1}$ | +0,2          | 58,3         | [0,0; +0,5]        |
| Forma     | Correlación | $9,27 \times 10^{-1}$ | $9,42 \times 10^{-1}$ | +0,8          | 68,7         | [+0,3; +2,0]       |
| Forma     | $R^2$       | $4,75 \times 10^{-1}$ | $5,98 \times 10^{-1}$ | +16,9         | 70,3         | [+3,4; +52,8]      |

La lectura cambia al considerar espectro y costo. En LSD, donde valores menores son preferibles, TRSS presenta una mejora mediana negativa y una tasa de victoria inferior al 50 %. Esto indica que TRSS puede mejorar el error de amplitud y aun así no preservar mejor la distancia espectral global. En tiempo de cómputo, MNE domina claramente: TRSS requiere más tiempo por caso, lo que impide recomendarlo como reemplazo universal. La Figura 4.2 resume las métricas de calidad; el costo se analiza por separado en la Sección 4.11 para que la gran diferencia temporal no comprima las demás métricas.

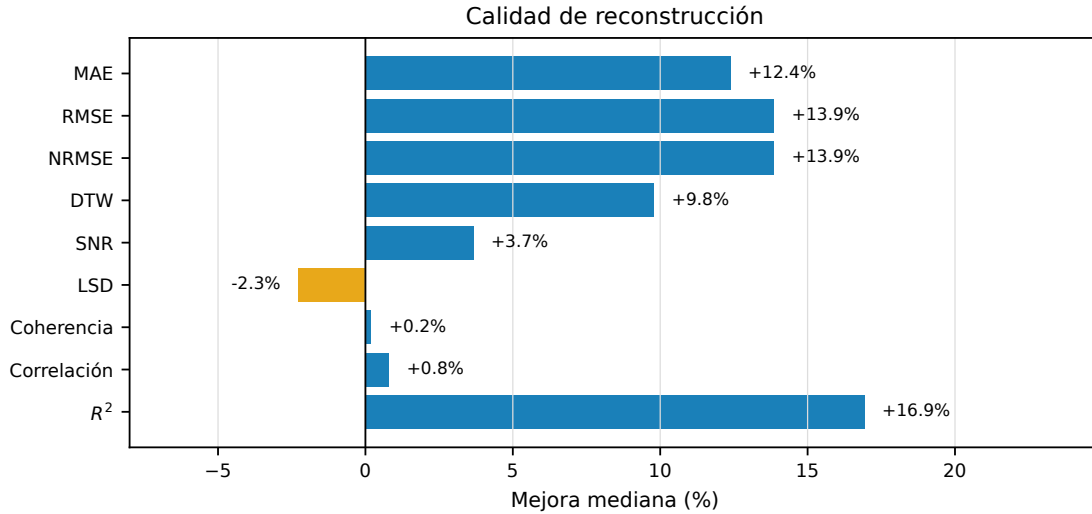


Figura 4.2: Perfil descriptivo de calidad para TRSS fijo frente a MNE. Las barras positivas favorecen a TRSS después de respetar la dirección de cada métrica; las barras negativas favorecen a MNE. El costo temporal se reporta por separado porque su escala es muy distinta a la de las métricas de reconstrucción.

## 4.7. Efecto del escenario de pérdida

El comportamiento global se entiende mejor al separar patrón y severidad de pérdida. La Tabla 4.4 muestra que la ventaja de TRSS aumenta cuando la pérdida elimina información espacial local: los patrones cercanos y periféricos de alta severidad son los casos donde la regularización temporal se vuelve más útil. En cambio, con pérdida baja o pocos canales ocultos, la diferencia puede acercarse a un empate práctico, porque MNE ya cuenta con suficientes canales vecinos para reconstruir la señal mediante suavidad espacial.

Tabla 4.4: Resumen por patrón y severidad de pérdida para MAE. Cada fila reporta la mejora mediana de TRSS frente a MNE, la tasa de victoria (proporción de pares donde TRSS obtiene menor MAE) y la mejora media como lectura complementaria.

| Patrón        | Severidad   | $n$ | Mej. med. (%) | Victoria (%) | Mej. media (%) |
|---------------|-------------|-----|---------------|--------------|----------------|
| Cercano       | 40 %        | 15  | +40.8         | 86.7         | +33.5          |
| Cercano       | 30 %        | 15  | +41.2         | 80.0         | +26.3          |
| Periférico    | 40 %        | 15  | +31.6         | 80.0         | +25.5          |
| Periférico    | 10 %        | 15  | +23.2         | 73.3         | +17.4          |
| Aleatorio     | 40 %        | 15  | +13.0         | 80.0         | +11.6          |
| Aleatorio     | 10 %        | 15  | +5.7          | 66.7         | +3.8           |
| Alta varianza | 40 %        | 15  | +10.1         | 80.0         | +9.2           |
| Cercano       | 2 canal(es) | 15  | 0.0           | 46.7         | -0.3           |

La Figura 4.3 ofrece la misma lectura en formato gráfico. Cada celda contiene tres

elementos: la primera línea es la mejora mediana de MAE de TRSS frente a MNE; la segunda línea es la tasa de victoria; la tercera línea es el número de pares. La tabla y el mapa no son resultados independientes: ambos resumen la misma comparación pareada desde dos ángulos. La tabla facilita revisar valores extremos y comprobar magnitudes; el mapa permite ver el patrón global de una sola vez. Esta doble presentación justifica la conclusión de la sección: TRSS no gana por igual en todos los casos, sino que su ventaja aumenta cuando la pérdida reduce información espacial local.

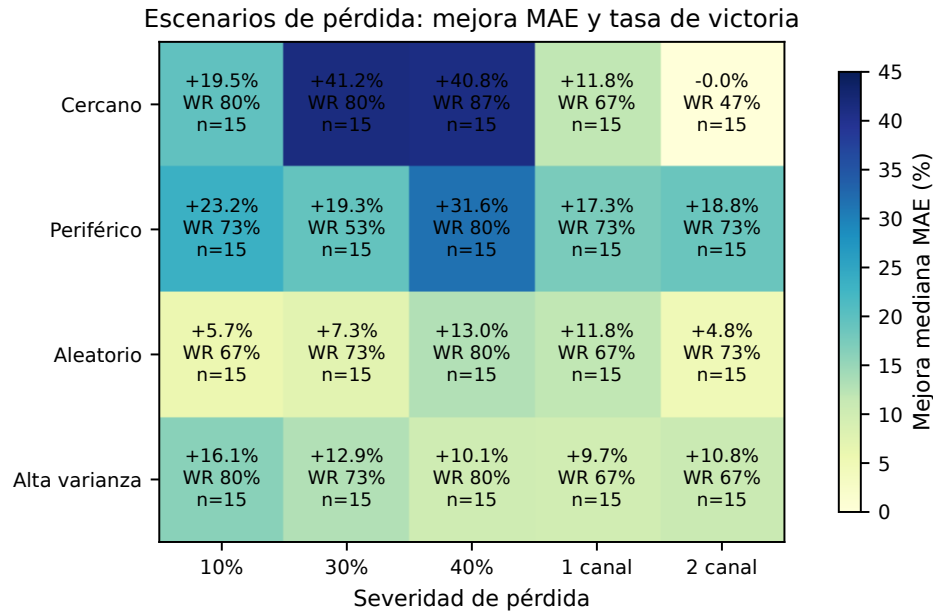


Figura 4.3: Resumen por patrón y severidad de pérdida. Cada celda muestra mejora mediana de MAE, tasa de victoria (WR) y número de pares. La ventaja de TRSS crece en pérdidas cercanas o periféricas severas, donde la información espacial local disponible para MNE disminuye.

## 4.8. Señales temporales representativas

Las métricas agregadas no bastan para evaluar si una reconstrucción es fisiológicamente plausible. Por ello se seleccionaron casos representativos de manera reproducible desde los resultados balanceados: un caso favorable a TRSS, un caso favorable a MNE, un empate práctico y un caso de pérdida cercana severa. La Tabla 4.5 documenta la regla de selección de cada caso, el patrón de pérdida, la semilla y el canal visualizado.

La selección no busca mostrar únicamente casos favorables. El primer caso ilustra el régimen donde TRSS reduce marcadamente el error; el segundo conserva un ejemplo

Tabla 4.5: Casos representativos seleccionados de forma reproducible en MNE Sample para inspección temporal y espectral. La mejora se calcula en MAE para TRSS fijo frente a MNE; valores negativos indican que MNE fue mejor en ese caso.

| Rol                    | Patrón     | Sev.    | Sem. | Canal | Mej. MAE ( %) | Regla                     |
|------------------------|------------|---------|------|-------|---------------|---------------------------|
| TRSS favorable         | Cercano    | 40 %    | 0    | 15    | +71.0         | Mayor mejora MAE.         |
| MNE favorable          | Periférico | 1 canal | 2    | 39    | -38.7         | Peor caso MAE para TRSS.  |
| Empate práctico        | Aleatorio  | 30 %    | 1    | 1     | +0.1          | Mejora absoluta mínima.   |
| Pérdida cercana severa | Cercano    | 40 %    | 2    | 14    | +34.0         | Escenario cercano severo. |

donde MNE es preferible; el tercero fuerza un empate práctico; y el cuarto representa una pérdida cercana severa típica de la discusión metodológica. Esta combinación hace visible la heterogeneidad del problema y evita que las señales temporales funcionen como ejemplos aislados o escogidos solo por conveniencia.

La Figura 4.4 compara la señal original con las reconstrucciones de MNE y TRSS. La lectura importante es que TRSS no se comporta de forma uniforme. En el caso favorable, conserva mejor la morfología de la señal oculta; en el caso favorable a MNE, la regularización temporal no compensa el sesgo introducido y MNE se acerca más a la señal original; en el empate práctico, ambas reconstrucciones son similares; y en la pérdida cercana severa se observa el régimen donde la continuidad temporal puede aportar estabilidad. Esta figura responde directamente a si un mal caso de TRSS es universal: no lo es, pero sí existe y debe considerarse al decidir el método.

La inspección temporal cumple una función distinta a la métrica agregada. No cambia el ranking global ni reemplaza las tablas, pero permite revisar si la diferencia numérica corresponde a una señal plausible. Por eso se incluyen casos favorables y desfavorables: el objetivo no es escoger ejemplos visualmente convenientes, sino mostrar el tipo de comportamiento que sustenta la frontera práctica entre métodos.

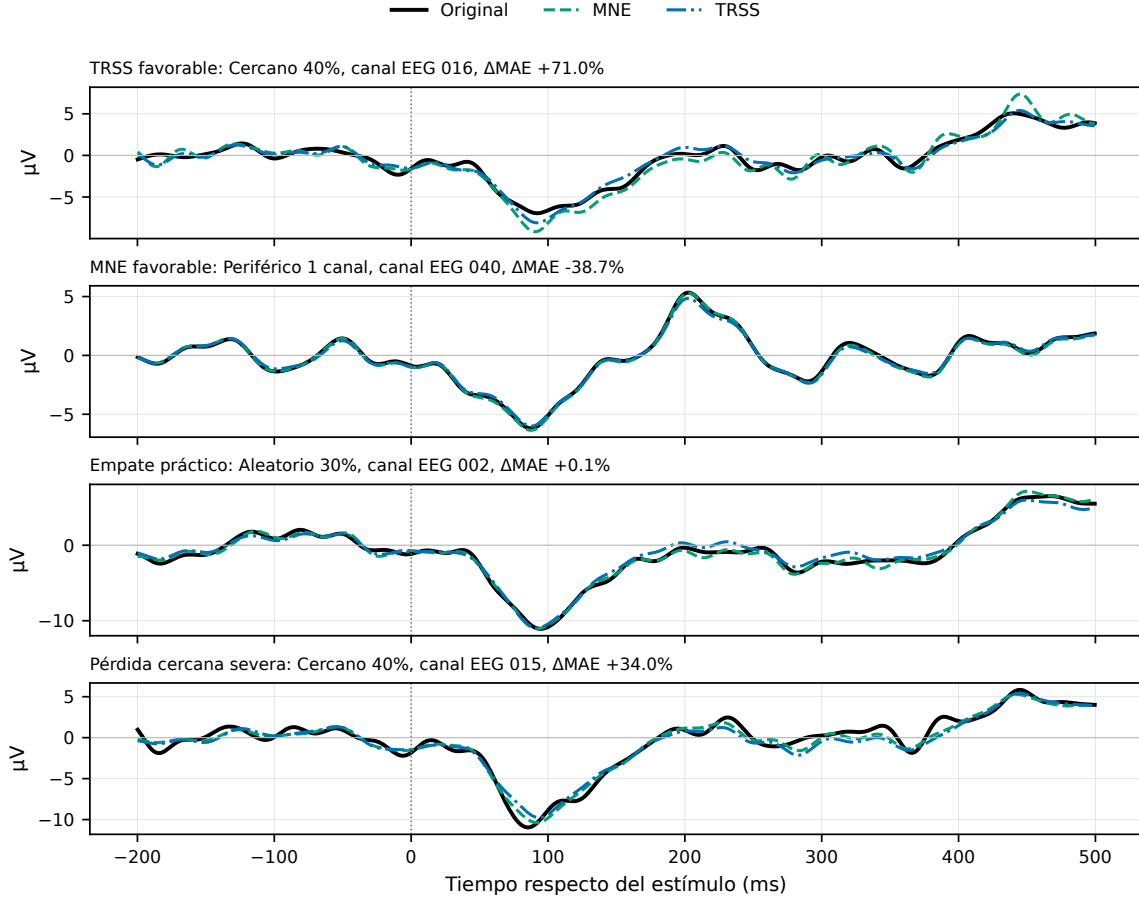


Figura 4.4: Reconstrucciones temporales representativas en MNE Sample. Cada fila muestra señal original, reconstrucción MNE y reconstrucción TRSS para un canal oculto seleccionado de forma reproducible. Los casos incluyen un escenario favorable a TRSS, uno favorable a MNE, un empate práctico y una pérdida cercana severa.

## 4.9. Preservación espectral

La preservación temporal y la preservación espectral no son equivalentes. Un método puede reducir MAE y NRMSE, pero alterar la distribución de potencia por frecuencia. Por esta razón, la Figura 4.5 reemplaza la comparación espectral multi-método previa por una lectura directa: para los mismos casos representativos, se grafica el espectro de la señal original junto con los espectros de MNE y TRSS. Las curvas se estiman con Welch sobre el canal oculto visualizado, usando la frecuencia de muestreo del registro MNE Sample.

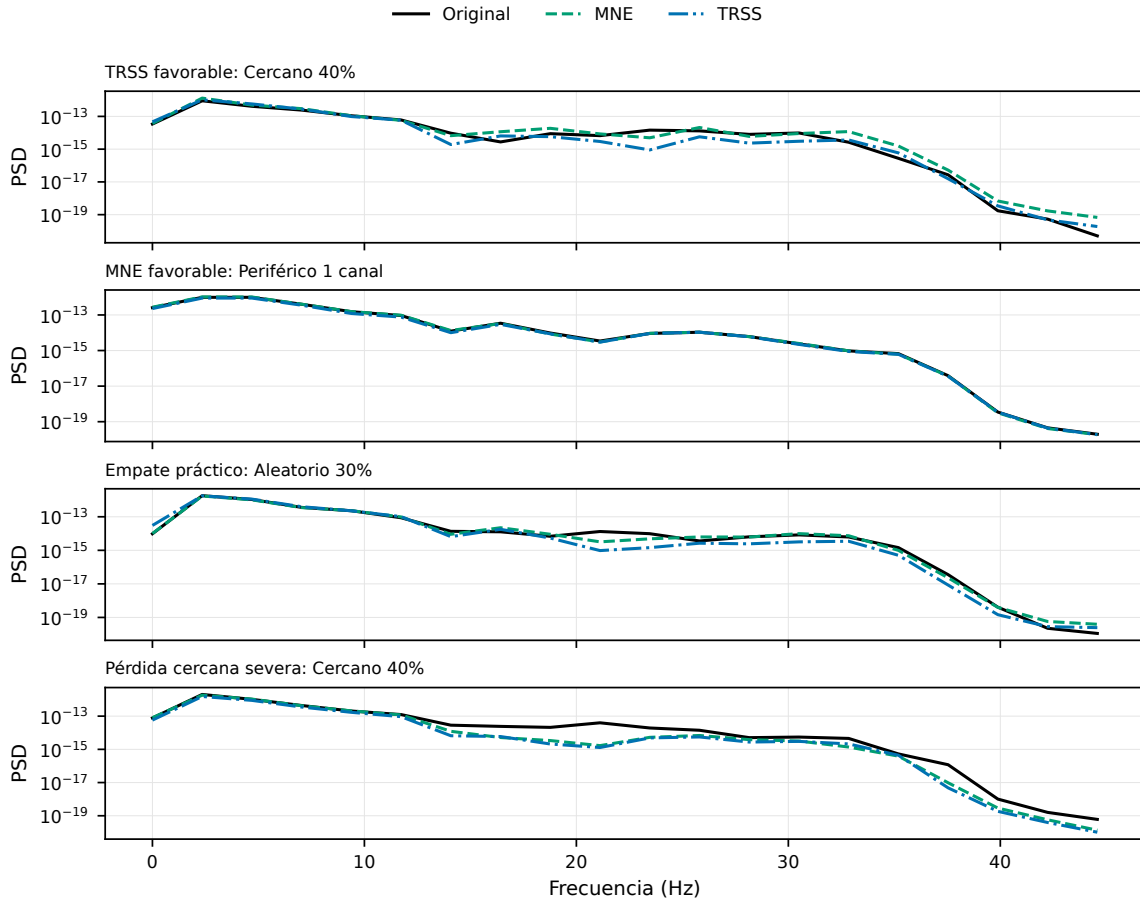


Figura 4.5: PSD original versus PSD interpolado para los casos representativos. La figura compara directamente la densidad espectral de potencia de la señal original con las reconstrucciones MNE y TRSS. Esta lectura permite explicar por qué TRSS puede mejorar error de amplitud sin dominar necesariamente la métrica LSD.

La rugosidad de un espectro estimado depende de la duración de la ventana, la frecuencia de muestreo, el canal observado y el método de estimación. En esta versión, el uso de Welch reduce la variabilidad visual y permite comparar la forma global de las curvas. Si TRSS y MNE se separan en bandas concretas, esa diferencia debe interpretarse junto con LSD y no solo con MAE.

## 4.10. Contribución temporal de TRSS

En este contexto, el análisis de contribución consiste en repetir la evaluación retirando un componente del modelo para estimar su aporte específico. La comparación de esta sección contrasta TRSS completo contra una variante sin término temporal. Por tanto,

no evalúa si TRSS completo supera a MNE, sino cuánto cambia TRSS cuando se elimina la restricción temporal. La Tabla 4.6 resume la magnitud descriptiva de ese aporte.

Tabla 4.6: Contribución descriptiva del término temporal dentro de TRSS. La comparación retira el término temporal y mide cuánto cambia el desempeño relativo del modelo completo.

| Métrica | Mej. med. (%) | Mej. media (%) | Victoria (%) |
|---------|---------------|----------------|--------------|
| MAE     | +0.7          | +0.7           | 100.0        |
| RMSE    | +0.7          | +0.7           | 100.0        |
| DTW     | +1.5          | +2.0           | 100.0        |
| LSD     | +6.4          | +6.5           | 100.0        |

La Figura 4.6 muestra que el término temporal aporta mejoras descriptivas dentro de la familia TRSS, aunque la magnitud no explica por sí sola toda la diferencia frente a MNE. La interpretación más prudente es que la temporalidad estabiliza la reconstrucción cuando la información espacial es insuficiente, pero no convierte automáticamente a TRSS en dominante para toda métrica ni para todo escenario.

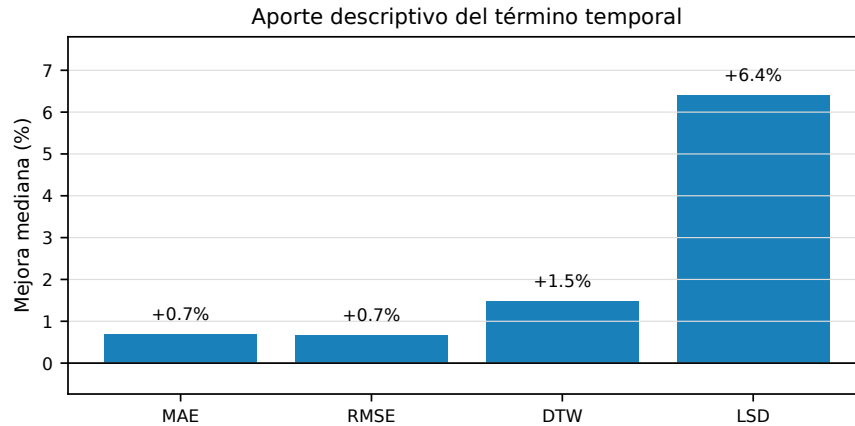


Figura 4.6: Aporte descriptivo del término temporal dentro de TRSS. Las barras muestran la mejora de TRSS completo frente a TRSS sin término temporal.

## 4.11. Costo computacional

El costo computacional es parte de la conclusión, no un detalle de implementación. Para interpretar la Tabla 4.7,  $N$  representa el número de canales,  $T$  el número de muestras temporales,  $E$  el número de aristas,  $K$  las iteraciones del resolutor y  $H$  el número de configuraciones evaluadas durante calibración. La variable  $H$  no describe el costo de

aplicar TRSS con parámetros ya fijados: solo aparece cuando hay búsqueda o calibración de hiperparámetros.

La Tabla 4.7 conecta esa notación con el tiempo observado por caso. MNE resuelve una interpolación espacial de tamaño moderado y luego aplica la solución a las muestras temporales. TRSS, en cambio, itera sobre un operador que combina estructura espacial y temporal.

Tabla 4.7: Complejidad computacional e implementación observada.  $N$  es el número de canales,  $T$  el número de muestras temporales,  $E$  el número de aristas del grafo y  $K$  el número de iteraciones del resolutor.

| Método         | Operación dominante                                 | Complejidad orientativa | Mediana (s/caso) |
|----------------|-----------------------------------------------------|-------------------------|------------------|
| MNE spline     | Sistema global regularizado y aplicación a muestras | $O(N^3) + O(NT)$        | 0.0090           |
| TRSS fijo      | Iteraciones sobre grafo espacio-temporal disperso   | $O(K(ET + NT))$         | 0.1214           |
| TRSS calibrado | TRSS fijo más selección de hiperparámetros          | $O(HK(ET + NT))$        | 0.0845           |

Esta diferencia explica la ventaja operativa de MNE en procesamiento masivo o interactivo; TRSS queda para escenarios difíciles donde el análisis puede ejecutarse fuera de línea.

## 4.12. Frontera práctica TRSS–MNE

Los resultados no muestran una dominancia universal de TRSS. La regla práctica es simple: MNE debe mantenerse como opción por defecto; TRSS debe considerarse cuando la pérdida espacial es difícil y el análisis puede ejecutarse fuera de línea. En los términos de la Tabla 4.4, pérdida baja corresponde a pocos canales o severidad cercana al 10 %, mientras que pérdida severa corresponde a 30–40 % o a patrones cercanos/periféricos que degradan la vecindad espacial. En concreto, MNE es preferible cuando la señal es espacialmente suave, el análisis es principalmente espectral o el costo domina; TRSS es razonable cuando la pérdida amenaza la fidelidad de reconstrucción y la regularidad temporal puede compensar la falta de información local. En casos intermedios, la decisión debe apoyarse en la métrica relevante para el análisis posterior.

# Capítulo 5

## Discusión

Este capítulo interpreta la trayectoria experimental completa presentada en el Capítulo 4. La tesis no culmina en una comparación aislada TRSS–MNE: antes de esa comparación se implementó un espacio amplio de métodos, se realizó una selección preliminar de combinaciones método–grafo, se redujeron candidatos por criterios metodológicos y computacionales, y se congelaron variantes para evitar que la comparación final dependiera de decisiones posteriores al resultado. La discusión se organiza en cuatro niveles: el valor científico de la trayectoria experimental, la interpretación condicional de TRSS frente a MNE, las tensiones entre métricas y costo, y las limitaciones que deben quedar explícitas antes de formular conclusiones.

### 5.1. Lectura integrada de la trayectoria experimental

El primer resultado conceptual del trabajo es que la evaluación de interpolación EEG no puede reducirse a escoger el método con menor error promedio. La fase inicial mostró un espacio heterogéneo: algunas familias fueron competitivas en datos sintéticos, otras en registros EEG reales, y varias dependieron fuertemente de la construcción del grafo, de la disponibilidad de coordenadas o del costo de ejecución. Por eso, la reducción de candidatos no debe entenderse como una etapa administrativa, sino como parte del resultado experimental: documenta qué opciones eran plausibles, cuáles se descartaron y por qué la comparación final se concentra en TRSS y MNE-Python.

Esta separación evita confundir evidencia preliminar con evidencia final. Los rankings exploratorios de la Tabla 4.1 orientaron el diseño, pero no se usaron como conclusión principal. La evidencia final proviene de comparaciones pareadas sobre la misma señal,

máscara y semilla, resumidas en las tablas y figuras posteriores del Capítulo 4. Así, la tesis no selecciona TRSS de forma arbitraria: llega a TRSS mediante una secuencia trazable de implementación, selección preliminar, reducción, optimización y comparación final.

## 5.2. Aporte de la selección preliminar de métodos y grafos

La selección preliminar aportó tres lecciones. Primero, las variantes con información temporal aparecieron de forma recurrente entre las combinaciones competitivas. Esto justificó estudiar con mayor detalle una formulación espacio-temporal, en vez de limitar la tesis a interpolación puramente espacial. Segundo, los grafos geométricos reproducibles resultaron preferibles para sostener conclusiones finales, porque dependen de posiciones de electrodos y no de la misma señal que se intenta reconstruir. Tercero, algunos grafos aprendidos o basados en correlación fueron informativos como exploración, pero no adecuados como soporte principal de la comparación final por costo, reproducibilidad o riesgo de circularidad.

Esta lectura rescata el valor de los resultados intermedios sin exagerar su alcance. Un método descartado no es necesariamente inútil; puede haber sido demasiado costoso, difícil de estabilizar, sensible a hiperparámetros o poco apropiado para una comparación final controlada. En ese sentido, la fase de reducción cumple una función científica: transforma un espacio experimental amplio en una comparación interpretable, auditable y menos propensa a sobreajuste narrativo.

También es importante que el documento mantenga visibles los métodos no finalistas. Tikhonov, BGSRP, TV en grafos, ICA/FastICA/Picard, RBF, IDW, vecino más cercano, interpolación lineal y splines esféricos forman parte del espacio experimental que condujo a la comparación final. Que no todos aparezcan con igual profundidad en el cierre no significa que hayan sido ignorados, sino que la tesis distingue entre cobertura exploratoria y evidencia final.

## 5.3. Por qué MNE-Python sigue siendo una referencia fuerte

MNE-Python debe interpretarse como una referencia comunitaria madura, no como una línea base débil. Su interpolación por splines esféricas combina un prior espacial fisiológicamente razonable con una implementación robusta, normalización interna, regularización numérica y uso global de los canales disponibles. Cuando la pérdida es baja, el vecindario espacial conserva suficiente información o la señal es espacialmente suave, este prior puede reconstruir canales faltantes sin requerir una restricción temporal adicional.

Esta fortaleza explica los empates y los casos favorables a MNE observados en el Capítulo 4. También eleva el estándar de comparación: una ventaja de TRSS frente a MNE ocurre contra una herramienta real usada en la práctica, no contra una implementación simplificada diseñada solo para la tesis. Por ello, MNE debe mantenerse como primera referencia para estudios EEG y como opción operativa cuando rapidez, estabilidad y reproducibilidad estándar sean criterios dominantes.

## 5.4. Interpretación condicional de TRSS

TRSS aporta valor cuando la información espacial disponible se vuelve insuficiente. En pérdidas cercanas, periféricas o severas, el canal oculto puede quedar sin vecinos informativos; en ese régimen, la continuidad temporal restringe el conjunto de soluciones plausibles y puede reducir errores de amplitud o forma. Esta es la zona donde los resultados descriptivos muestran la utilidad más clara de TRSS.

Sin embargo, la conclusión no es una dominancia universal. En escenarios de baja pérdida, señales suaves o restricciones fuertes de tiempo, MNE puede igualar o superar a TRSS. Además, el ajuste de hiperparámetros condiciona el desempeño de la regularización temporal. La contribución debe formularse, por tanto, como una frontera práctica de uso: TRSS es justificable cuando la pérdida espacial amenaza la calidad de reconstrucción y el análisis admite costo adicional; MNE sigue siendo preferible en condiciones estándar o cuando la velocidad pesa más que una ganancia moderada de reconstrucción.

## 5.5. Tensión entre precisión temporal, espectro y costo

Las métricas del Capítulo 4 miden propiedades distintas. MAE, RMSE y NRMSE resumen error de amplitud; DTW, correlación y  $R^2$  se relacionan con forma temporal; LSD, coherencia y PSD capturan preservación espectral; el tiempo de ejecución determina factibilidad práctica. Por eso, mejorar una familia de métricas no implica mejorar todas. TRSS puede acercarse mejor punto a punto a la señal original y aun así no dominar la distancia espectral global.

Esta tensión obliga a elegir el método según el objetivo posterior. Si la prioridad es reconstruir segmentos para análisis temporal fuera de línea, TRSS puede ser atractivo en escenarios difíciles. Si la prioridad es preservar propiedades espectrales globales, procesar grandes volúmenes de datos o mantener un flujo estándar de preprocesamiento, MNE conserva ventajas claras. Las figuras temporales y espectrales del Capítulo 4 no sustituyen una validación por tarea, pero sí muestran por qué una única métrica sería insuficiente para decidir.

## 5.6. Costo computacional y escalabilidad

El costo computacional es una limitación práctica de TRSS. Aunque los tiempos por caso pueden ser aceptables en análisis planificados y fuera de línea, la diferencia frente a MNE se vuelve relevante en estudios con muchos sujetos, ventanas temporales, variantes de grafo o búsqueda de hiperparámetros. En aplicaciones interactivas, pipelines clínicos o procesamiento masivo, esta diferencia puede pesar más que la mejora en una métrica de reconstrucción.

La escalabilidad futura requiere cambios de ingeniería: matrices dispersas, factorizaciones reutilizables del Laplaciano, solvers iterativos con parada temprana, paralelización por sujeto o por bloque de canales, y reglas de hiperparámetros que eviten búsqueda exhaustiva. Sin estas mejoras, TRSS debe entenderse como una alternativa de análisis controlado, no como sustituto inmediato de MNE en flujos rutinarios de baja latencia.

## 5.7. Deficiencias y carencias del estudio

La principal limitación experimental es el uso de canales ocultos artificialmente. Esta estrategia permite disponer de verdad de terreno y medir error de reconstrucción, pero no reproduce todos los casos reales de canal dañado: saturación, ruido muscular, deriva lenta, contactos inestables o artefactos intermitentes pueden afectar de manera distinta a cada método. Por ello, los resultados son evidencia controlada de interpolación bajo ausencia simulada, no validación clínica completa.

Una segunda carencia es la ausencia de evaluación experta ciega. La plausibilidad visual de las reconstrucciones se inspecciona mediante señales representativas y PSD, pero no se sometió a revisión sistemática por especialistas EEG. Tampoco se evaluó el impacto en tareas posteriores como clasificación BCI, detección de potenciales evocados, conectividad, análisis por bandas o localización de fuentes. Un método que reduce MAE no necesariamente mejora una decisión neurofisiológica posterior.

También debe reconocerse que la reducción del espacio experimental dejó familias fuera de la comparación final. Los grafos aprendidos, grafos adaptativos y métodos temporales alternativos quedaron como evidencia intermedia o trabajo futuro, no como conclusiones cerradas. Esta decisión fue necesaria para evitar una comparación saturada y difícil de interpretar, pero implica que la tesis no agota todas las combinaciones posibles de interpolación y construcción de grafos.

Finalmente, la selección de hiperparámetros sigue siendo una limitación abierta. El oráculo representa una cota superior no desplegable; la variante calibrada reduce parcialmente ese problema, pero todavía se requiere una regla automática basada en propiedades observables del registro, la máscara de canales faltantes, el grafo y la señal. Sin esa regla, una parte del potencial de TRSS depende de calibraciones costosas.

## 5.8. Aspectos fuera del alcance

Algunas decisiones quedaron fuera por tiempo, recursos o alcance metodológico. No se incorporaron modelos supervisados ni aprendizaje profundo porque habrían requerido particiones de entrenamiento, validación externa y controles adicionales para evitar fuga de información. No se hizo evaluación clínica con expertos ni validación sobre canales realmente dañados, porque ello requiere anotaciones externas y criterios de calidad distintos a la verdad de terreno simulada. Tampoco se evaluó desempeño en tareas posteriores, ya que cada tarea introduce métricas, pipelines y fuentes de variabilidad propias.

Del mismo modo, no se agotaron grafos aprendidos ni adaptativos. Su inclusión rigurosa exigiría separar construcción del grafo y evaluación de reconstrucción para evitar circularidad, además de medir estabilidad entre ejecuciones y costo. La tesis optó por concentrar la interpretación principal en una comparación más acotada y reproducible. Esta decisión reduce amplitud, pero aumenta interpretabilidad.

## 5.9. Lecciones metodológicas

La primera lección es que una referencia comunitaria fuerte debe evaluarse con el mismo cuidado que el método propuesto. Comparar TRSS solo contra líneas base internas habría producido una lectura incompleta. MNE-Python obliga a reconocer los escenarios donde una herramienta madura sigue siendo superior.

La segunda lección es que los descartes también son resultados. Mostrar la selección preliminar y la reducción de candidatos hace más transparente el proceso experimental y evita que el lector vea la comparación final como una decisión posterior no justificada. En trabajos computacionales con muchas variantes, explicar qué no se usó y por qué es parte de la contribución.

La tercera lección es que la evaluación multi-métrica es indispensable. Amplitud, forma temporal, espectro y costo no colapsan en una única respuesta. La tesis gana solidez porque explicita ganancias, pérdidas y empates prácticos, y porque conecta cada afirmación con artefactos reproducibles: tablas, CSV, figuras, scripts y validadores.

En síntesis, la discusión no transforma los resultados en una recomendación universal, sino en una regla de lectura. MNE-Python debe seguir siendo la referencia operacional cuando el escenario es favorable a la suavidad espacial o cuando el costo domina. TRSS se vuelve relevante cuando la pérdida espacial deteriora la vecindad local y la continuidad temporal aporta una restricción adicional plausible. Esta distinción es el puente natural hacia las conclusiones del capítulo siguiente.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

Este capítulo cierra la tesis integrando la trayectoria experimental completa: implementación de métodos, selección preliminar de combinaciones método-grafo, reducción de candidatos, optimización intermedia, comparación final TRSS-MNE e interpretación práctica. Las conclusiones se formulan como respuestas a las preguntas de investigación y no como una declaración de superioridad universal de un método.

### 6.1. Conclusiones por pregunta de investigación

#### **P1: ¿En qué condiciones TRSS mejora la reconstrucción de canales EEG faltantes?**

La evidencia muestra que TRSS puede mejorar métricas de reconstrucción en escenarios difíciles, especialmente cuando la pérdida de canales degrada la información espacial local. Las mejoras descriptivas en MAE, RMSE, NRMSE, DTW, correlación y  $R^2$  indican que la regularización espacio-temporal puede aportar valor cuando los métodos espaciales de referencia, incluidos splines esféricos, RBF, distancia inversa, vecino más cercano, interpolación lineal y MNE-Python, disponen de pocos vecinos informativos o enfrentan patrones de pérdida cercana, periférica o severa. Las señales representativas del Capítulo 4 apoyan esta lectura cualitativa: existen casos donde TRSS conserva mejor la morfología temporal de la señal oculta.

La respuesta, sin embargo, es condicional. TRSS no reemplaza universalmente a MNE-Python. En baja pérdida, señales espacialmente suaves o escenarios donde el costo computacional pesa más que la reducción de error, MNE puede ser igual o preferible.

Por tanto, la conclusión de P1 es que TRSS mejora la reconstrucción bajo regímenes de pérdida espacial difícil, no que sea la opción dominante para todo preprocesamiento EEG.

### **P2: ¿Qué compromiso existe entre precisión, preservación espectral y costo computacional?**

El compromiso principal es que TRSS puede mejorar error de amplitud y forma temporal, pero no domina todas las dimensiones de calidad. La métrica LSD y el análisis PSD muestran que una reconstrucción con menor error punto a punto no necesariamente preserva mejor la distribución espectral global. Además, MNE conserva una ventaja clara de velocidad y estabilidad operativa.

La respuesta de P2 es, por tanto, una frontera práctica de uso. Si el objetivo es una reconstrucción fuera de línea en escenarios de pérdida difícil, TRSS es una alternativa justificable. Si el objetivo es procesamiento rápido, análisis espectral global o integración en flujos estándar, MNE-Python debe mantenerse como referencia preferente. La contribución de la tesis es hacer explícita esta frontera y respaldarla con métricas, casos representativos y trazabilidad experimental.

## **6.2. Conclusiones sobre la fase experimental completa**

La fase experimental completa aporta una conclusión adicional: el camino hacia la comparación final es tan importante como el resultado final. La selección preliminar mostró que el espacio método-grafo es heterogéneo y que distintas familias pueden ser competitivas bajo condiciones distintas. La reducción de candidatos fue necesaria para evitar una comparación saturada, costosa y difícil de interpretar. La optimización intermedia mostró que los hiperparámetros influyen en el desempeño y que el oráculo no representa una estrategia desplegable.

La cadena experimental puede resumirse en cuatro decisiones. Primero, la implementación amplia de métodos y grafos aseguró cobertura metodológica suficiente. Segundo, la selección preliminar permitió detectar familias plausibles sin convertir ese ranking en conclusión final. Tercero, la reducción y congelamiento de variantes evitó que la comparación TRSS-MNE dependiera de decisiones tomadas después de mirar los resultados finales. Cuarto, la comparación pareada separó precisión, forma temporal, espectro y

costo, permitiendo formular una frontera práctica en vez de un ranking absoluto.

Esta trayectoria justifica que la comparación final se concentre en TRSS y MNE. TRSS resume la propuesta metodológica central —usar regularización espacio-temporal sobre grafos—, mientras que MNE representa una referencia comunitaria madura, rápida y robusta. La tesis no afirma haber agotado todas las alternativas posibles; afirma haber construido una ruta experimental reproducible para reducir el espacio de opciones y comparar una alternativa espacio-temporal contra una referencia fuerte.

## 6.3. Aportes de la tesis

El primer aporte es un marco experimental reproducible para evaluar reconstrucción de canales EEG faltantes. El marco integra conjuntos de datos, máscaras de pérdida, construcción de grafos, métodos de interpolación, métricas, artefactos y validadores bajo una lógica pareada por señal, máscara y semilla.

El segundo aporte es una evaluación multi-fase de métodos y grafos. La tesis no reporta solo un resultado final: documenta selección preliminar, reducción de candidatos y optimización intermedia. Esto permite entender por qué algunas familias quedan como antecedentes o trabajo futuro y por qué otras pasan a la comparación final.

El tercer aporte es una comparación práctica contra MNE-Python. Al usar una referencia comunitaria fuerte, la tesis evita conclusiones artificialmente favorables al método propuesto. La ventaja de TRSS, cuando aparece, debe interpretarse como una mejora frente a una herramienta madura.

El cuarto aporte es la caracterización condicional de TRSS. La tesis identifica escenarios donde la regularización temporal es útil, escenarios donde MNE sigue siendo preferible y métricas donde la decisión cambia. Esta caracterización es más informativa que una tabla única de ranking.

El quinto aporte es la trazabilidad de artefactos. Tablas, figuras, CSV, scripts y planes quedan conectados de forma explícita, permitiendo auditar el paso desde resultados crudos hasta afirmaciones escritas.

En términos de cumplimiento, el cierre puede leerse sin necesidad de una tabla densa:

- El objetivo general queda satisfecho porque la tesis compara reconstrucción de canales EEG faltantes mediante una trayectoria reproducible y no mediante una única corrida aislada.
- El OE1 se cumple con el sistema modular de datos, máscaras, métodos, grafos, métricas

y validadores.

- El OE2 se cumple con la evaluación multi-métrica pareada, que distingue precisión, forma, espectro y costo.
- El OE3 se cumple con la trazabilidad de artefactos y la conexión explícita entre resultados, figuras, tablas y scripts.
- La primera pregunta de investigación se responde de forma condicional: TRSS aporta valor en regímenes difíciles de pérdida espacial.
- La segunda pregunta se responde como compromiso práctico: MNE conserva ventajas de velocidad y estabilidad, mientras TRSS se justifica cuando la pérdida espacial vuelve insuficiente el prior puramente espacial y el análisis puede asumir mayor costo.

## 6.4. Deficiencias reconocidas

El estudio tiene límites claros. Primero, la verdad de terreno proviene de ocultamiento artificial de canales presentes. Esto permite medir error, pero no reproduce completamente canales dañados reales con saturación, ruido muscular, contactos inestables o artefactos intermitentes. Segundo, no se realizó evaluación ciega por expertos EEG. Tercero, no se midió impacto en tareas posteriores como clasificación BCI, detección de potenciales evocados, análisis de conectividad, PSD por bandas o localización de fuentes.

Además, el espacio experimental fue reducido deliberadamente. Grafos aprendidos, grafos adaptativos, métodos temporales alternativos y modelos entrenables no fueron agotados en la comparación final. Esta decisión permitió mantener una evaluación interpretable y reproducible, pero deja abiertas preguntas metodológicas. Por último, TRSS aún requiere mejoras de eficiencia y reglas automáticas de hiperparámetros antes de recomendarlo como herramienta rutinaria.

## 6.5. Trabajo futuro priorizado

### Prioridad técnica inmediata

La primera línea futura es acelerar TRSS. Las direcciones más directas son usar matrices dispersas, reutilizar factorizaciones del Laplaciano, incorporar solvers iterativos con parada temprana, procesar ventanas temporales por lote y paralelizar por sujeto o bloque de canales. Junto con ello, se requiere una regla automática de hiperparámetros que use

solo información observable, como severidad de pérdida, densidad de canales buenos, estructura del grafo, autocorrelación temporal y estimadores de ruido.

### **Prioridad experimental**

La segunda línea es validar el protocolo con datos más cercanos al uso real. Esto incluye canales efectivamente dañados, anotación por expertos, evaluación ciega y datasets externos con distintos montajes, referencias, equipos y poblaciones. También debe evaluarse si la mejora de reconstrucción se traduce en mejoras funcionales en tareas posteriores: clasificación BCI, ERP, análisis espectral por bandas, conectividad y localización de fuentes.

### **Prioridad metodológica**

La tercera línea es extender la construcción de grafos sin introducir circularidad. Grafos adaptativos o aprendidos podrían mejorar TRSS, pero deben construirse con separación clara entre información usada para definir el grafo e información usada para evaluar la reconstrucción. También sería útil estimar incertidumbre por caso y desarrollar reglas automáticas que decidan cuándo usar MNE, TRSS u otro método según propiedades observables del registro.

### **Prioridad de extensión**

La cuarta línea es transferir el enfoque a otros dominios irregulares con dinámica temporal: MEG, ECoG, arreglos de microelectrodos o sensores fisiológicos distribuidos. Esta extensión no debe asumirse directa, porque cada modalidad tiene geometría, ruido y escalas temporales propias. También queda abierta la comparación con modelos entrenables, siempre que exista un diseño de entrenamiento, validación externa y control de fuga de información.

## **6.6. Cierre**

La tesis muestra que la regularización temporal en grafos es una herramienta valiosa para reconstruir canales EEG faltantes cuando la pérdida espacial vuelve insuficiente el prior puramente espacial. También muestra que una referencia clásica bien implementada

puede ser superior en escenarios favorables, en fidelidad espectral global o en velocidad. La conclusión final es deliberadamente condicional: MNE-Python debe mantenerse como referencia robusta y rápida; TRSS es una alternativa justificable cuando la pérdida espacial amenaza la fidelidad de reconstrucción y el análisis permite asumir costo computacional adicional.

El valor final del trabajo está, por tanto, en delimitar una decisión metodológica reproducible. La tesis no reemplaza el criterio del investigador ni cierra todas las variantes posibles, pero entrega evidencia suficiente para elegir con mayor fundamento entre una referencia espacial madura y una regularización espacio-temporal más costosa. Ese equilibrio entre ambición metodológica, control experimental y prudencia interpretativa constituye el aporte central del documento.

En una defensa, esta conclusión puede resumirse de manera simple: el aporte no es afirmar que la regularización temporal deba reemplazar a los métodos espaciales establecidos, sino mostrar que existe un régimen experimental donde esa regularización agrega información útil. Identificar ese régimen, documentar sus límites y dejar trazable el camino que conduce a él es el resultado principal de la tesis.

# Apéndice A

## Derivaciones Matemáticas

Este apéndice reúne las derivaciones matemáticas necesarias para interpretar los métodos GSP y TRSS usados en la tesis. El objetivo no es repetir el Capítulo 2, sino explicitar las formas algebraicas que justifican la implementación computacional.

### A.1. Solución de Tikhonov en Grafos

Sea  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  la señal observada en un instante y sea  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  una máscara diagonal con  $m_i = 1$  para canales observados y  $m_i = 0$  para canales faltantes. La regularización de Tikhonov en grafos estima

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_2^2 + \alpha \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{L}$  es el Laplaciano del grafo y  $\alpha > 0$  controla el peso de suavidad espacial. Derivando respecto de  $\mathbf{x}$  e igualando a cero:

$$2\mathbf{M}^\top \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2\alpha \mathbf{L} \mathbf{x} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como  $\mathbf{M}$  es diagonal binaria,  $\mathbf{M}^\top \mathbf{M} = \mathbf{M}$ . Por tanto,

$$(\mathbf{M} + \alpha \mathbf{L}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{L})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{y}. \quad (\text{A.3})$$

En la práctica no es necesario formar la inversa explícita: basta resolver el sistema lineal. La presencia de  $\alpha \mathbf{L}$  acopla los canales faltantes con los canales observados según la topología del grafo.

## A.2. Solución de TRSS en Forma Matricial

TRSS extiende la regularización anterior a una ventana temporal  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ . La formulación usada en esta tesis es

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{M} \odot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})\|_F^2 + \alpha \text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{L} \mathbf{X}) + \beta \|\mathbf{X} \mathbf{D}_t\|_F^2, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\mathbf{D}_t$  es el operador de diferencias finitas temporales. Al vectorizar  $\mathbf{X}$  como  $\tilde{\mathbf{x}} = \text{vec}(\mathbf{X})$ , el término espacial se expresa mediante  $\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{L}$  y el término temporal mediante  $\mathbf{D}_t \mathbf{D}_t^\top \otimes \mathbf{I}_N$ . El sistema lineal resultante es

$$\left( \tilde{\mathbf{M}} + \alpha (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{L}) + \beta (\mathbf{D}_t \mathbf{D}_t^\top \otimes \mathbf{I}_N) \right) \hat{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.5})$$

Esta forma muestra por qué TRSS es más costoso que una interpolación puramente espacial: el sistema acopla canales y tiempo. También muestra su ventaja conceptual: la reconstrucción no se decide muestra a muestra, sino considerando continuidad temporal de la ventana completa.

## A.3. Operador de Diferencias Temporales

El operador de diferencias finitas hacia adelante  $\mathbf{D}_t \in \mathbb{R}^{T \times (T-1)}$  contiene  $-1$  y  $+1$  en posiciones consecutivas. Para una fila temporal  $\mathbf{x}_{i,:}$ , el producto  $\mathbf{x}_{i,:} \mathbf{D}_t$  calcula diferencias  $x_{i,t+1} - x_{i,t}$ . Por ello,

$$\|\mathbf{X} \mathbf{D}_t\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} (X_{i,t+1} - X_{i,t})^2. \quad (\text{A.6})$$

El término penaliza saltos abruptos y favorece reconstrucciones temporalmente suaves. No agrega información externa; restringe el conjunto de soluciones compatibles con los canales observados.

## A.4. Propiedades Espectrales del Laplaciano

Para un grafo no dirigido con pesos no negativos, el Laplaciano  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$  es semidefinido positivo. Su forma cuadrática cumple

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

El primer autovalor es cero y su autovector asociado es constante en cada componente conexa. La conectividad algebraica  $\lambda_2$  aumenta cuando el grafo está mejor conectado. En interpolación, un grafo demasiado desconectado limita la propagación de información, mientras que un grafo demasiado denso puede suavizar en exceso. Esta tensión justifica la evaluación empírica de varios grafos en la selección preliminar.

## A.5. Implicancias Computacionales

Las derivaciones anteriores explican la diferencia práctica entre Tikhonov espacial, TRSS y MNE-Python. En Tikhonov espacial, el sistema se resuelve de forma independiente para cada muestra temporal, por lo que el costo principal depende de  $N$  y de la estructura de  $\mathbf{L}$ . En TRSS, en cambio, el operador vectorizado acopla  $N$  canales y  $T$  muestras; por ello, aun cuando las matrices sean dispersas, el resolutor opera sobre un espacio de mayor dimensión efectiva.

Esta diferencia no invalida TRSS, pero sí condiciona su uso. Si una ventana temporal es corta, la pérdida espacial es severa y el análisis se realiza fuera de línea, el costo adicional puede ser aceptable. Si se procesan muchos sujetos, muchas ventanas o flujos de baja latencia, conviene reutilizar factorizaciones, explotar dispersidad y limitar la búsqueda de hiperparámetros. La frontera práctica descrita en el Capítulo 4 se deriva precisamente de esta combinación entre forma matemática, calidad de reconstrucción y costo computacional.

# Apéndice B

## Síntesis Extendida de Resultados

Este apéndice conserva la síntesis numérica que complementa el Capítulo 4, pero evita repetir tablas anchas difíciles de leer. Los archivos CSV y las tablas completas quedan como artefactos reproducibles; aquí se resume la evidencia necesaria para interpretar la frontera práctica TRSS–MNE.

### B.1. Resumen global por variante

La Tabla B.1 resume las diferencias principales entre MNE-Python, TRSS fijo, TRSS calibrado y TRSS oráculo. El oráculo se conserva solo como cota superior no desplegable: usa información que no estaría disponible en un flujo real.

Tabla B.1: Resumen compacto de variantes principales. Los valores corresponden a medianas agregadas; menor MAE/NRMSE/LSD y menor tiempo son preferibles, mientras que mayor correlación es preferible.

| Variante       | MAE med.              | NRMSE | Corr. | Tiempo med. |
|----------------|-----------------------|-------|-------|-------------|
| MNE-Python     | $1,13 \times 10^{-5}$ | 0,804 | 0,808 | 0,0090 s    |
| TRSS fijo      | $8,46 \times 10^{-6}$ | 0,604 | 0,860 | 0,1214 s    |
| TRSS calibrado | $8,31 \times 10^{-6}$ | 0,589 | 0,860 | 0,0845 s    |
| TRSS oráculo   | $8,11 \times 10^{-6}$ | 0,570 | 0,865 | 0,0808 s    |

La lectura principal no cambia: TRSS mejora métricas de amplitud y forma temporal, pero paga un costo de tiempo muy superior a MNE. La variante calibrada reduce parcialmente el costo respecto de TRSS fijo en estos resultados agregados, pero sigue sin convertir TRSS en opción de baja latencia. El oráculo delimita potencial, no una estrategia aplicable.

## B.2. Portafolio descriptivo de métricas

Para TRSS fijo frente a MNE, el portafolio se resume así:

- **Amplitud:** MAE mejora +12,4 %, RMSE +13,9 % y NRMSE +13,9 %; las tasas de victoria se sitúan alrededor del 70 %.
- **Forma temporal:** DTW mejora +9,8 %, correlación +0,8 % y  $R^2$  +16,9 %, lo que respalda la utilidad de la regularización temporal en varios casos.
- **Espectro:** LSD favorece a MNE con -2,3 %, mientras que coherencia muestra una diferencia pequeña a favor de TRSS (+0,2 %).
- **Costo:** el tiempo favorece claramente a MNE; TRSS no debe plantearse como reemplazo universal en flujos de baja latencia.

Esta síntesis evita ocultar la tensión central del documento: un método puede mejorar amplitud y forma temporal sin dominar la preservación espectral ni el costo computacional.

## B.3. Comparación de variantes TRSS

La comparación entre TRSS fijo y TRSS calibrado muestra que la calibración no elimina la lectura condicional. En MAE y NRMSE, ambas variantes mantienen mejoras cercanas al 12–14 % frente a MNE. En LSD, sin embargo, la calibración puede empeorar la distancia espectral global, por lo que no basta ajustar hiperparámetros para resolver todas las dimensiones de calidad. En tiempo, ambas variantes siguen siendo más costosas que MNE.

Por ello, el criterio práctico no debe ser “TRSS calibrado siempre es mejor”, sino “TRSS puede ser útil cuando la pérdida espacial es difícil y la métrica relevante favorece forma/amplitud más que costo o espectro global”. Esta lectura es la que se retoma en las conclusiones.

# Apéndice C

## Protocolo de Reproducibilidad

Este apéndice documenta el protocolo necesario para reproducir los resultados reportados en la tesis. La reproducción completa requiere el código experimental, los conjuntos de datos públicos indicados en el Capítulo 3, las versiones de bibliotecas registradas en los archivos de configuración y los artefactos derivados conservados junto con el documento.

### C.1. Entorno computacional

El sistema experimental fue desarrollado en Python y utiliza bibliotecas científicas estándar: MNE-Python para manejo de registros EEG, NumPy y SciPy para álgebra numérica, scikit-learn para métodos auxiliares, Optuna para optimización de hiperparámetros, pandas para manejo de tablas y matplotlib para figuras. Las versiones exactas deben fijarse antes de ejecutar la reproducción porque cambios menores en solvers, interpoladores o generadores de números aleatorios pueden modificar resultados de frontera.

### C.2. Datos y preprocesamiento

Los conjuntos de datos se obtienen desde fuentes públicas. Cada registro se transforma a una interfaz común: matriz de canales por tiempo, nombres de canales, frecuencia de muestreo, coordenadas de electrodos y metadatos de sujeto o ensayo. El preprocesamiento se mantiene idéntico entre métodos: filtrado, referencia, segmentación y selección de canales se aplican antes de simular pérdida de canales. Cuando un canal no dispone de coordenadas confiables, se excluye de afirmaciones fuertes.

## C.3. Máscaras y semillas

La pérdida de canales se simula mediante máscaras aleatorias y contiguas. Cada máscara queda definida por conjunto de datos, severidad, modo de pérdida y semilla. La misma máscara se aplica a todos los métodos de un caso pareado, lo que permite atribuir diferencias de desempeño al método y no a variaciones del caso experimental. Las semillas deben fijarse globalmente antes de generar máscaras, optimizar hiperparámetros o seleccionar casos representativos.

## C.4. Fases reproducibles

La reproducción sigue cuatro fases. Primero se ejecuta la selección preliminar de métodos y grafos, que explora familias amplias sin convertir sus rankings en evidencia final. Luego se realiza la reducción de candidatos, documentando costo, circularidad y reproducibilidad. En tercer lugar se ejecuta la optimización intermedia y se congelan variantes. Finalmente se corre la comparación pareada TRSS–MNE y se generan tablas/figuras del Capítulo 4.

## C.5. Reglas de exclusión

Las reglas de exclusión deben aplicarse antes de sintetizar resultados. Se descartan ejecuciones con valores no numéricos, tiempos excesivos, identificadores duplicados inconsistentes, reconstrucciones triviales idénticas a la entrada o variantes que no formen parte del conjunto final de métodos válidos para análisis. Solo después de aplicar esos filtros se generan rankings exploratorios, tablas descriptivas y figuras del documento.

## C.6. Validación del documento

La versión final del documento debe compilarse desde el controlador principal y, cuando corresponda, desde controladores parciales usados para revisión. La validación mínima incluye: ausencia de errores LaTeX, ausencia de citas o referencias indefinidas, ausencia de overfull hbox, comprobación de figuras existentes, y revisión visual de páginas con tablas/figuras modificadas. Las tablas del Capítulo 4, Capítulo 6 y anexos se generan o verifican contra los CSV derivados antes de cerrar el documento.

# Apéndice D

## Inventario de Artefactos Computacionales

Este apéndice cataloga los principales artefactos computacionales que respaldan el documento. La finalidad del inventario es que cada afirmación cuantitativa pueda vincularse con una tabla, figura, script o archivo de resultados derivado. No se listan rutas locales absolutas; los nombres se expresan como identificadores relativos del paquete de tesis.

### D.1. Artefactos de datos y resultados

Tabla D.1: Inventario resumido de artefactos de resultados usados en el documento final.

| Artefacto                           | Contenido                                                                           | Uso en la tesis                      |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| CSV crudos de comparación final     | Casos pareados TRSS–MNE por señal, máscara, semilla y métrica                       | Tablas descriptivas del Capítulo 4.  |
| CSV derivados balanceados           | Resúmenes por métrica, escenario y tasa de victoria                                 | Tabla 4.3 y síntesis por escenario.  |
| Resumen de iteraciones preliminares | Campaña exploratoria consolidada por método                                         | Figura 4.1.                          |
| Casos representativos               | Identificadores reproducibles de señales favorables a TRSS, MNE y empates prácticos | Figuras temporales y tabla de casos. |
| Manifiestos de construcción         | Registro de scripts, fuentes y exclusiones                                          | Trazabilidad del cierre final.       |

## D.2. Scripts generadores

Las figuras y tablas principales se generan mediante scripts versionados. Los más relevantes para el documento final son: generadores de figuras neurofisiológicas y GSP de Capítulo 2, generadores de diagramas metodológicos de Capítulo 3, generadores de artefactos descriptivos de Capítulo 4 y generadores de la figura de iteraciones preliminares. Cuando una figura se modifica por observación de formato o legibilidad, el cambio se realiza en el script y luego se recompila el documento, evitando ediciones manuales no reproducibles del PDF.

## D.3. Relación entre artefactos y capítulos

Los capítulos 1–3 usan artefactos principalmente explicativos: figuras de conceptos, metodología y arquitectura. El Capítulo 4 concentra los artefactos cuantitativos y visuales de evidencia. El Capítulo 5 interpreta esa evidencia y el Capítulo 6 resume objetivos, preguntas y trabajo futuro. Los anexos conservan derivaciones, protocolo reproducible, inventario y síntesis extendida, de modo que el cuerpo principal pueda mantenerse legible sin perder trazabilidad.

# Apéndice E

## Trazabilidad Histórica de la Revisión

Este apéndice documenta cómo evolucionó el documento hasta la versión final. No incluye tablas antiguas como evidencia principal, porque algunas pertenecen a fases exploratorias o a marcos de análisis que fueron reemplazados durante la revisión. Su función es dejar constancia de la evolución metodológica y de las decisiones de cierre.

### E.1. De resultados aislados a trayectoria experimental

La versión inicial del trabajo enfatizaba rankings y comparaciones agregadas. Durante la revisión se reorganizó el Capítulo 4 como *Experimentos y Resultados*, incorporando selección preliminar, reducción de candidatos, optimización intermedia, comparación final, señales representativas, PSD, análisis de contribución temporal, costo computacional y frontera práctica. Este cambio evita que el lector vea la comparación TRSS–MNE como una elección directa sin justificación previa.

### E.2. Cambio de marco interpretativo

El cierre final se estructura alrededor de preguntas de investigación, comparaciones pareadas descriptivas, tasas de victoria, intervalos de incertidumbre y criterios prácticos de decisión. Los contrastes inferenciales no son el eje del documento final. Esta decisión es coherente con el objetivo de la tesis: caracterizar cuándo TRSS es útil, cuándo MNE sigue siendo preferible y qué condiciones limitan la generalización.

## **E.3. Correcciones de lenguaje y formato**

La revisión final eliminó términos poco adecuados para el registro académico del documento, aclaró la expresión “métodos espaciales de referencia”, retiró menciones a archivos locales, redujo guiones largos innecesarios y ajustó tablas cuya información era más clara en prosa. También se rediseñaron figuras y tablas cuando el formato visual interfería con la lectura.

## **E.4. Métodos invalidados o no concluyentes**

Algunas variantes experimentales quedaron fuera del cierre final. Grafos aprendidos, grafos adaptativos, correlación funcional y métodos temporales alternativos permanecen como evidencia exploratoria o trabajo futuro cuando no cumplen condiciones de costo, reproducibilidad o independencia metodológica suficientes para sostener conclusiones finales.

## **E.5. Uso de este apéndice**

Este apéndice no debe leerse como una fuente adicional de resultados cuantitativos. Para resultados finales deben consultarse el Capítulo 4, el Capítulo 6 y la síntesis extendida del Apéndice B. Su propósito es documentar la trazabilidad editorial y metodológica de la versión final.

# Bibliografía

- [1] Takuya Akiba, Shotaro Sano, Toshihiko Yanase, Takeru Ohta, and Masanori Koyama. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. In *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*, pages 2623–2631, 2019.
- [2] Clemens Brunner, Robert Leeb, Gernot R. Müller-Putz, Alois Schlögl, and Gert Pfurtscheller. BCI Competition IV – Dataset 2a. Graz University of Technology, 2008. URL <https://www.bbci.de/competition/iv/>.
- [3] György Buzsáki. Rhythms of the brain. 2006. doi: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
- [4] Isaac A. Corley and Yufei Huang. Deep EEG super-resolution: Upsampling EEG spatial resolution with generative adversarial networks. In *2018 IEEE EMBS International Conference on Biomedical & Health Informatics (BHI)*, pages 100–103. IEEE, 2018. doi: 10.1109/BHI.2018.8333379.
- [5] Arnaud Delorme and Scott Makeig. Eeglab: An open source toolbox for analysis of single-trial eeg dynamics including independent component analysis. *Journal of Neuroscience Methods*, 134(1):9–21, 2004. doi: 10.1016/j.jneumeth.2003.10.009.
- [6] J. H. Giraldo, A. Mahmood, B. Garcia-Garcia, D. Thanou, and T. Bouwmans. Reconstruction of time-varying graph signals via sobolev smoothness. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 8:201–214, 2022. doi: 10.1109/TSIPN.2022.3156886.
- [7] Ary L. Goldberger, Luis A. N. Amaral, Leon Glass, Jeffrey M. Hausdorff, Plamen Ch. Ivanov, Roger G. Mark, Joseph E. Mietus, George B. Moody, Chung-Kang Peng, and H. Eugene Stanley. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, 101(23):e215–e220, 2000. doi: 10.1161/01.CIR.101.23.e215.

- [8] Alexandre Gramfort, Martin Luessi, Eric Larson, Denis A. Engemann, Daniel Strohmeier, Christian Brodbeck, Roman Goj, Mainak Jas, Teon Brooks, Lauri Parkkonen, and Matti Hämäläinen. MEG and EEG data analysis with MNE-Python. *Frontiers in Neuroscience*, 7:267, 2013. doi: 10.3389/fnins.2013.00267.
- [9] Alexandre Gramfort, Martin Luessi, Eric Larson, Denis A. Engemann, Daniel Strohmeier, Christian Brodbeck, Lauri Parkkonen, and Matti S. Hämäläinen. MNE software for processing MEG and EEG data. *NeuroImage*, 86:446–460, 2014. doi: 10.1016/j.neuroimage.2013.10.027.
- [10] Janin Jäger, Alexander Klein, Martin Buhmann, and Wolfgang Skrandies. Reconstruction of electroencephalographic data using radial basis functions. *Clinical Neurophysiology*, 127(4):1978–1983, 2016. doi: 10.1016/j.clinph.2016.01.003.
- [11] Tzyy-Ping Jung, Scott Makeig, Martin J. McKeown, Anthony J. Bell, Te-Won Lee, and Terrence J. Sejnowski. Imaging brain dynamics using independent component analysis. *Proceedings of the IEEE*, 89(7):1107–1122, 2001. doi: 10.1109/5.939827.
- [12] Vassilis Kalofolias. How to learn a graph from smooth signals, 2016. URL <http://arxiv.org/abs/1601.02513>.
- [13] Chun-Hung Lai, Yi-Ming Chen, and Wen-Chieh Liao. A controlled study of the eeg during the performance of neurofeedback. *Clinical EEG and Neuroscience*, 36(4): 219–225, 2005.
- [14] Fabien Lotte, Laurent Bougrain, Andrzej Cichocki, Maureen Clerc, Marco Congedo, Alain Rakotomamonjy, and Florian Yger. A review of classification algorithms for eeg-based brain–computer interfaces: A 10 year update. *Journal of Neural Engineering*, 15(3):031005, 2018. doi: 10.1088/1741-2552/aab2f2.
- [15] Steven J. Luck. *An Introduction to the Event-Related Potential Technique*. MIT Press, 2nd edition, 2014.
- [16] S. K. Narang and A. Ortega. Signal processing techniques for interpolation in graph structured data. In *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 5445–5449, 2013. doi: 10.1109/ICASSP.2013.6638704.
- [17] Paul L. Nunez and Ramesh Srinivasan. *Electric Fields of the Brain: The Neurophysics of EEG*. Oxford University Press, 2nd edition, 2006. doi: 10.1093/acprof:oso/9780195050387.001.0001.

- [18] A. Ortega, P. Frossard, J. Kovacevic, J. M. F. Moura, and P. Vandergheynst. Graph signal processing: Overview, challenges, and applications. *Proceedings of the IEEE*, 106(5):808–828, 2018. doi: 10.1109/JPROC.2018.2820126.
- [19] F. Perrin, J. Pernier, O. Bertrand, and J. F. Echallier. Spherical splines for scalp potential and current density mapping. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 72(2):184–187, 1989. doi: 10.1016/0013-4694(89)90180-6.
- [20] Sari Saba-Sadiya, Tuka Alhanai, Taosheng Liu, and Mohammad M. Ghassemi. EEG channel interpolation using deep encoder–decoder networks. In *2020 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine (BIBM)*, pages 2432–2439. IEEE, 2020. doi: 10.1109/BIBM49941.2020.9312979.
- [21] Carlos Saldivia, Alejandro Weinstein, and Matías Zañartu. Trss vs. Spherical Splines: A reproducible benchmark for EEG channel interpolation under missing-data scenarios. *In Preparation*, 2026. Manuscript in preparation. Results derived from this thesis.
- [22] Gerwin Schalk, Dennis J. McFarland, Thilo Hinterberger, Niels Birbaumer, and Jonathan R. Wolpaw. BCI2000: A general-purpose brain-computer interface (BCI) system. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 51(6):1034–1043, 2004. doi: 10.1109/TBME.2004.827072.
- [23] S. Shekkizhar and A. Ortega. Graph construction from data by non-negative kernel regression. In *2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3892–3896, 2020. doi: 10.1109/ICASSP40776.2020.9054425.
- [24] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(3):83–98, 2013. doi: 10.1109/MSP.2012.2235192.