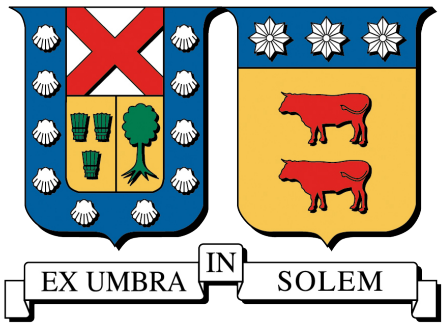
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



ACERCA DE UN MODELO GENERAL DE IGNICIÓN PARA COMBUSTIBLES SÓLIDOS

JOSÉ IGNACIO RIVERA RODRÍGUEZ

TÉSIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Y AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA	:	PROF. ANDRÉS FUENTES
PROFESOR CORREFERENTE	:	DR. FRANCISCO VALENZUELA
PROFESOR CORREFERENTE EXTERNO	:	PROF. ALBERT SIMEONI
		PROF. PEDRO RESZKA

JULIO 2021

A Sonia mi madre. A Víctor y Alex, mis hermanos. Y a Carolina mi novia.

RESUMEN EJECUTIVO

Los modelos de la teoría clásica de ignición para combustibles sólidos han permitido obtener correlaciones simples del tiempo de encendido cuando el medio está expuesto a flujos de calor en un perfil constante, útil en aplicaciones de ingeniería de incendios, sin embargo, este acercamiento clásico se desarrolla considerando que la radiación no penetra dentro del medio y que este no posee contenido de humedad. Con los años, algunos modelos más recientes han logrado integrar la divergencia de la radiación bajo condiciones específicas y limitadas a cada situación pero solo en regímenes constantes sin humedad, mientras que otros estudios han integrado el efecto de flujos incidentes variables en el tiempo pero solo considerando una absorción superficial de la radiación, lo cual, para sólidos semitransparentes o medios porosos donde la radiación es el mecanismo de transferencia de calor dominante, deja de ser un acercamiento adecuado. En cuanto a la humedad, es un tema escasamente abordado aún en la actualidad, limitado principalmente a problemas de secado.

Este trabajo ha abordado aquellas problemáticas y brechas referentes a la ignición de combustibles sólidos, con lo que proporciona modelos de predicción versátiles, capaces de adaptarse a diversas situaciones y condiciones de borde sin la necesidad de realizar una nueva derivación de la ecuación de energía, además permite obtener correlaciones rápidas y sencillas para determinar los tiempos de ignición para un problema dado. Para lograr lo anterior, se ha dividido el trabajo realizado en tres grandes etapas. (i) Se desarrolló un modelo de ignición para un medio poroso sin humedad que considerando una divergencia radiativa en su interior, el cual fue derivado para coordenadas cilíndricas y validado con la ayuda de data experimental de una una campaña realizada previamente. (ii) Luego, se realizó una extensión y generalización del modelo anterior, para un medio poroso incluyendo el efecto de la humedad, también considerando la divergencia de la radiación para el medio humedecido y desarrollado en coordenadas cilíndricas. Para este caso, se utilizaron datos experimentales obtenidos por campañas anteriores. (iii) Finalmente, se trabajó en un modelo general que capaz de abarcar una amplia variedad de escenarios y fenómenos, con el cual es posible derivar los modelos del las etapas desarrolladas previamente además de una gran cantidad de trabajos ya publicados a partir de una sola ecuación general.

Índice de Contenidos

I General **9**

1. Introducción **10**
1.1. Contexto . . . 11
1.2. Justificación . . . 11
1.3. Objetivos . . . 12
1.4. Alcance . . . 12
Referencias . . . 13

II Marco Teórico **14**

2. Teoría de Ignición de Sólidos **15**
2.1. Introducción . . . 16
2.2. Descripción . . . 16
2.2.1. Gases de pirólisis . . . 17
2.2.1.1. Generación . . . 17
2.2.1.2. Difusión . . . 18
2.3. Ignición piloteada . . . 18
2.4. Ignición Espontánea . . . 19
2.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin . . . 20
2.5.1. Criterio para thermally thin . . . 20
2.5.2. Teoría thermally thin . . . 21
2.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick . . . 22
2.6.1. Teoría thermally thick . . . 22
Referencias . . . 26

3. Radiación Térmica **27**
3.1. Introducción . . . 28
3.2. Transferencia de calor . . . 28
3.2.1. Conducción . . . 28
3.2.2. Convección . . . 29
3.2.3. Radiación . . . 30
3.3. Fundamentos de la radiación térmica . . . 30
3.3.1. Naturaleza de la radiación térmica . . . 30
3.3.2. Leyes básicas de la radiación térmica . . . 32
3.3.3. Poder de emisión . . . 32
3.3.3.1. Poder de emisión espectral de *Blackbody* . . . 33
3.3.3.2. Poder de emisión total de *Blackbody* . . . 33

3.3.4. Ángulo sólido . . . 34
3.3.5. Intensidad de la radiación . . . 35
3.3.6. Flujo de calor radiativo . . . 37
3.3.7. Intensidad de la radiación en el vacío . . . 39
3.3.8. Radiación característica de las partículas . . . 39
3.3.9. Ecuación de transferencia radiativa (RTE) . . . 40
Referencias . . . 43

III Diseño Experimental 44

4. Aparato Experimental 45
4.1. Introducción . . . 46
4.2. Descripción general . . . 46
4.3. Componentes del set up experimental . . . 47
4.3.1. Heater . . . 47
4.3.2. Motor lineal . . . 48
4.3.3. Porta muestras o *basket* . . . 48
4.3.4. Termocuplas . . . 48
4.4. Metodología experimental . . . 49
4.4.1. Preparación de las muestras . . . 49
4.4.1.1. Seco . . . 49
4.4.1.2. Humedecido . . . 49
4.4.2. Procedimiento . . . 49
4.4.3. Medidas de ignición . . . 50
4.4.3.1. Temperatura . . . 50
4.4.3.2. Tiempo . . . 50
4.4.3.3. Flujo crítico . . . 51
Referencias . . . 52

IV DESARROLLO DE MODELOS 53

5. Conceptos previos de cálculo vectorial 54
5.1. Introducción . . . 55
5.2. Definiciones generales . . . 55
5.2.1. Campo escalar . . . 55
5.2.2. Campo vectorial . . . 56
5.3. Operatoria vectorial . . . 56
5.3.1. Derivada . . . 56
5.3.1.1. Notaciones . . . 56
5.3.2. Operador *nabla* o *del* . . . 58
5.3.3. Gradiente . . . 58
5.3.4. Divergencia . . . 59
5.3.5. Operador Laplaciano . . . 60
5.3.6. Resumen para cada sistema coordenado tradicional . . . 60
Referencias . . . 62

6. Aproximación a otros modelos 63
6.1. Introducción . . . 64
6.2. Incluyendo humedad al modelo clásico - Khan et al . . . 64
6.3. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección x para un medio poroso - Mindykowski et al . . . 65
6.4. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección r para un sólido - N. Hernández et al 65
6.5. Incluyendo humedad y porosidad al modelo clásico . . . 66

6.5.1. Modelo térmico . . . 66
6.5.2. Resultados . . . 68
6.5.2.1. Temperatura de ignición . . . 68
6.5.2.2. Tiempos de ignición . . . 68
6.5.3. Propiedades efectivas . . . 70
6.5.4. Desarrollo en condiciones Thermally Thick . . . 71
6.5.5. Respuesta térmica del material . . . 72
Referencias . . . 74

7. Estrato de combustible seco **75**
7.1. Introducción . . . 77
7.2. Planteamiento general de la ecuación de calor . . . 77
7.3. Componente de la ecuación de calor . . . 80
7.3.1. Operatoria a magnitudes físicas . . . 80
7.3.1.1. Temperatura . . . 80
7.3.1.2. Flujo de calor . . . 81
7.3.1.3. Velocidad . . . 81
7.3.2. Conducción . . . 82
7.3.3. Convección interior . . . 82
7.3.4. Radiación . . . 82
7.4. Ecuación general de calor para un medio seco . . . 83
7.5. Divergencia del flujo radiativo . . . 88
7.5.1. Método de los esféricos armónicos . . . 89
7.5.1.1. Ecuación de Bessel . . . 90
7.6. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio sin humedad . . . 95
7.7. Condiciones de Ignición . . . 97
7.7.1. Flujo Crítico . . . 97
7.7.2. Charring . . . 97
7.7.3. Temperatura y Tiempo de Ignición . . . 98
7.7.4. Criterio de Ignición . . . 99
7.7.5. Resumen de supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio sin humedad . . . 99
7.8. Resolución Numérica Exacta del Modelo de Energía . . . 100
7.9. Modelo Analítico . . . 100
7.10. Medidas experimentales . . . 104
7.11. Correlaciones . . . 105
7.12. Resultados . . . 105
7.12.1. Temperatura de ignición . . . 105
7.12.2. Tiempos de ignición . . . 106
7.12.3. Adimensionalización . . . 107
7.12.4. Propiedades efectivas . . . 108
Referencias . . . 110

8. Estrato de combustible húmedo **111**
8.1. Introducción . . . 113
8.2. Planteamiento general de la ecuación de calor para un medio de múltiples fases con humedad . . . 114
8.3. Incremento de energía térmica: lado izquierdo . . . 116
8.4. Intercambio neto de calor en la interfase: lado derecho . . . 120
8.4.1. Componentes de la ecuación de calor para un medio húmedo . . . 121
8.4.1.1. Conducción en medio húmedo . . . 121
8.4.1.2. Convección al interior del medio húmedo . . . 122
8.4.1.3. Radiación en medio húmedo . . . 122
8.5. Ecuación general de calor para un medio humedecido . . . 123

8.5.1. Condiciones de borde para un medio con múltiples fases . . . 127
8.6. Divergencia del flujo radiativo para un medio humedecido . . . 128
8.6.1. Método de los esféricos armónicos para medio humedecido . . . 128
8.6.1.1. Ecuación de Bessel . . . 130
8.7. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio con humedad . . . 130
8.7.1. Propiedades y humedad . . . 131
8.7.2. Dos problemas - inverse embeed technique . . . 132
8.8. Condiciones de ignición para para el modelo de dos partes . . . 133
8.8.1. Flujo crítico . . . 133
8.8.2. Charring . . . 134
8.8.3. Temperatura y tiempo de ignición . . . 134
8.8.4. Criterio de ignición . . . 134
8.8.5. Resumen de los supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio con humedad . . . 135
8.9. Resolución numérica exacta para el modelo de dos partes . . . 137
8.10. Modelo analítico para el modelo de dos partes . . . 137
8.10.1. Problema P_h . . . 137
8.10.2. Problema P_d . . . 142
8.11. Medidas experimentales para el modelo de dos partes . . . 145
8.12. Unificación de los modelos para fase seca y con humedad . . . 146
8.12.1. Divergencia del modelo radiativo para el modelo unificado . . . 148
8.12.2. Resolución numérica exacta para el modelo unificado . . . 148
8.12.3. Modelo analítico unificado . . . 149
8.13. Resultados . . . 150
8.13.1. Temperatura de ignición . . . 150
8.13.2. Tiempo de ignición . . . 152
8.13.3. Adimensionalización . . . 152
Referencias . . . 154

9. Coordenadas curvilíneas 156
9.1. Introducción . . . 157
9.2. Coordenadas Curvilíneas Ortogonales . . . 157
9.2.1. Superficies y curvas coordenadas . . . 158
9.2.2. Vectores unitarios en sistemas curvilíneos . . . 159
9.2.3. Vectores normales y tangentes en sistemas curvilíneos . . . 160
9.2.3.1. Ortogonalidad en un sistema curvilíneo . . . 161
9.3. Gradiente en un sistema curvilíneo . . . 161
9.4. Divergencia y Laplaciano en un sistema curvilíneo . . . 162
9.5. Matriz y determinante Jacobianos . . . 166
9.6. Resumen de operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas . . . 168
9.6.1. Aplicación a los sistemas de coordenadas tradicionales . . . 169
Referencias . . . 170

10. Ecuación de energía en coordenadas curvilíneas 171
10.1. Introducción . . . 172
10.2. Planteamiento general . . . 172
10.3. Volumen de control con humedad y continuidad de fases . . . 173
10.4. Intercambio de calor en la interfase en coordenadas curvilíneas . . . 175
10.4.1. Componentes de la ecuación de calor . . . 175
10.4.2. Conducción . . . 175
10.4.3. Convección interna . . . 176
10.4.4. Radiación . . . 176
10.5. Ecuación general de calor en coordenadas curvilíneas . . . 177
10.6. Divergencia del flujo radiativo en coordenadas curvilíneas . . . 178

10.6.1. Aproximación Shuster-Schwarzschild 178
10.6.2. Aproximación de Milne-Eddington (Método del Momentum) 179
10.6.3. Aproximación P_1 179
10.7. Ecuación general de energía en coordenadas curvilíneas para propiedades promediadas espacialmente para un medio seco a húmedo 179
10.8. Movimiento a distintos modelos de energía 183
10.8.1. Movimiento a coordenadas cilíndricas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante 184
10.8.1.1. Movimiento a un medio sólido 185
10.8.2. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante 185
10.8.3. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso sin divergencia radiativa, con humedad y radiación incidente constante 186
Referencias 188

Introducción general

En la investigación de incendios e ignición de sólidos en general, existen diversos modelos de predicción que derivan de la teoría clásica, sin embargo, en su mayoría realiza cambios a alguna de los componentes de la ecuación de energía ya desarrollada en la teoría clásica. Con los años y los avances en la investigación del fenómeno de ignición, han surgido diversos trabajos que tratan algunos de los aspectos claves del proceso y están directamente relacionados a los conceptos que se desarrollan en este trabajo, pero cada uno de manera aislada con sus propias consideraciones.

Producto de lo anterior, este trabajo busca abordar el problema de la ignición de combustibles sólidos y proporcionar modelos de predicción versátiles, capaces de adaptarse a diversas situaciones y condiciones de borde sin la necesidad de una nueva derivación de la ecuación de energía, que además permitan obtener correlaciones rápidas y sencillas para determinar los tiempos para un problema dado. Así, el alcance de este estudio puede ser cubierto por tres grandes etapas; (i) El desarrollo de un modelo de ignición para un medio poroso sin humedad que considera una divergencia radiativa en su interior, el cual desarrollado en coordenadas cilíndricas y validado con la ayuda de data experimental de una una campaña realizada previamente. (ii) Se realiza una extensión y generalización del modelo anterior, pero esta vez para un medio poroso que incluye el efecto de la humedad, también considerando la divergencia de la radiación para el medio humedecido y desarrollado en coordenadas cilíndricas. Para este caso, también se apoya con datos experimentales obtenidos por campañas previas. (iii) Finalmente, luego del desarrollo completo de los modelos anteriores, se propone un modelo general que es capaz de abarcar una amplia variedad de escenarios y fenómenos, del cual es posible derivar los modelos del las etapas anteriores y una gran cantidad de trabajos publicados en los últimos años a partir de una sola ecuación general.

La importancia de ahondar en modelos de este tipo radica en la manera en que se considera tradicionalmente el comportamiento de ciertos fenómenos, particularmente la divergencia del término radiativo y la inclusión del contenido de humedad en un medio poroso. Esto se debe principalmente a que los modelos basado enteramente en la teoría clásica de la ignición de sólidos suelen considerar que la radiación es totalmente absorbida en la superficie, o bien, considerar una proporción que se atribuye al calentamiento interno sin ahondar en mayores detalles, lo cual no una alternativa adecuada para cuando el medio es poroso. Por otro lado, la humedad es tratada como un problema de secado, lo

que significa que el volumen de control es evaluado como un conjunto homogéneo temporalmente en donde solo se considera el fenómeno del calentamiento hasta que el agua contenida en dicho volumen es completamente evaporada.

Producto de lo anterior es que en este trabajo se busca plasmar todos los fenómenos involucrados en el proceso de calentamiento e ignición en un solo modelo general, el cual pueda ser adaptado desde un medio poroso a un medio sólido, ir desde un medio humedecido a uno seco en el cual sea posible moverse desde un sistema de coordenadas a otro sin la necesidad de derivar un nuevo modelo. Y que además, considere que el fenómeno de la radiación puede ser tratado como una absorción completa en la superficie o desarrollarse como una divergencia radiativa al interior del medio según sean las condiciones de borde que caractericen al problema.

Parte I

General

Capítulo 1

Introducción

Contenidos del Capítulo

1.1. Contexto **11**
1.2. Justificación **11**
1.3. Objetivos **12**
1.4. Alcance **12**
Referencias **13**

1.1. Contexto

El hombre reconoce la existencia del fuego y lo ha utilizado directa o indirectamente desde sus primeros pasos, inclusive desde los primeros homínidos que vivían en la sabana del *Pleistoceno* [4]. Por lo que desde su descubrimiento y primeros intentos por entenderlo o controlarlo, la humanidad se ha tornado dependiente en gran medida de su utilización, depositando su confianza en ello, desde cosas tan cotidianas como una fuente de calor, luz, utilización en la cocina y todo tipo de necesidades domésticas, hasta actividades de gran escala, siendo por lo demás el punto de partida de las grandes revoluciones industriales por la que ha pasado la humanidad. Lo cual ha provocado que el hombre se muestre cada día más despreocupado por entender el comportamiento del fuego y sus peligros, invirtiendo tiempo y recursos en mantener y aprovechar mejor el fuego, pero no así en como controlarlo y prever su comportamiento.

Entonces, no hay discusión respecto de la importancia y beneficios que aporta el conocimiento del fuego para el desarrollo de la humanidad, pero también es cierto que representa un gran riesgo para su seguridad. Durante la última década, varios países alrededor del mundo tales como Australia, Chile, Grecia, Portugal, España y Estados Unidos han sufrido graves catástrofes producto de grandes incendios forestales. Aún cuando todos están separados por miles de kilómetros, poseen características socioculturales y geográficas muy distintas entre sí, todos tienen algo en común; la mayoría de sus catástrofes se han producido en la interfaz urbano–rural [2, 5].

De esta manera, los incendios forestales representan una amenaza en común para todo el mundo por lo que en los últimos las líneas en investigación de seguridad contra incendios han crecido de manera exponencial, sin embargo, los avances logrados aún no son suficientes para comprender y controlar en su totalidad estos fenómenos. Por lo tanto, se requiere continuar, profundizar y ampliar las líneas de investigación en este campo con el fin de avanzar en este materia, logrando así, acercarse un paso más hacía la comprensión de los incendios [2].

1.2. Justificación

Los fenómenos de ignición, combustión y propagación del fuego tienen sus particularidades, por lo que en este trabajo se analiza el fenómeno de la ignición espontánea asociada a una pavesa que emite radiación y cae sobre un estrato combustible, ya que los incendios forestales comúnmente implican la producción de partículas incandescentes denominadas que son transportadas a través de la pluma convectiva y pueden causar nuevos focos de incendio, proceso que se conoce como *propagación por spotting*. Este mecanismo de propagación se puede distinguir en tres partes: (i) Generación de pavesas desde vegetación y estructuras encendidas. (ii) Transporte de las pavesas producidas por medio de corrientes convectiva y viento. (iii) La eventual ignición de estrato combustible en la superficie donde aterriza la pavesa incandescente transportada [3]. Si bien el transporte y propagación de pavesas han sido ampliamente discutidos en la literatura [1, 6, 7], no sucede lo mismo con la ignición asociada a este transporte, por lo que este trabajo busca proporcionar nueva información en este tema.

1.3. Objetivos

Desarrollar un modelo teórico general de ignición para medios desde sólidos a porosos, secos o con presencia de humedad con el objetivo de medir su impacto en el proceso de ignición. Desarrollado en coordenadas curvilíneas, que lo hacen extensible a cualquier sistema ortogonal de coordenadas, permitiendo integrar el efecto de un perfil de divergencia radiativa interior hasta una absorción superficial, ya sea para flujos constantes o variables de radiación incidente. El modelo es aplicado y testeado como proxi en la ignición de un estrato de combustible forestal seco, extensible a un medio húmedo, ayudando a la comprensión de los fenómenos térmicos y físicos involucrados en la ignición de incendios forestales corrientes.

1.4. Alcance

El presente trabajo busca acercar un paso más a la comunidad científica hacia la comprensión de la ignición y los incendios. Por lo que en una primera etapa, se desarrollará un modelo que permite modelar el fenómeno de la ignición representando el escenario en que una pavesa de forma cilíndrica, cae sobre un terreno combustible formando un medio poroso [3]. Para lograr esto, se trabaja un modelo teórico derivado desde la ecuación general de energía en donde se incluye la divergencia de la radiación hacía el interior del estrato, considerando que le terreno se encuentra sin humedad. Este modelo se apoya en la data proporcionada por una campaña experimental realizada con anterioridad, la cual queda fuera del alcance de lo efectuado exclusivamente para este trabajo.

Con lo anterior como punto de partida, se extiende el modelo a un estrato humedecido en donde se modela la caída de una pavesa encendida emitiendo radiación y cayendo sobre el estrato de combustible húmedo. Lo anterior con el fin de cuantificar el impacto de la humedad presente en la vegetación silvestre sobre los tiempos de ignición y flujos mínimos de calor incidente que son necesarios para encender el estrato vegetal según el grado de porosidad que lo caracteriza.

Finalmente, se generalizará los puntos anteriores hacía un modelo general de ignición capaz de modelar una gran variedad de escenarios. El cual es válido para medios que van desde sólidos a poroso, pueden contener humedad o ser medios secos, incluyendo la divergencia de la radiación al interior, o bien, considerando que esta es completamente absorbida en la superficie. Y este modelo desarrollado, debe ser adaptable a cualquier sistema de coordenadas, lo que lo hace versátil para todo tipo de condiciones geométricas y orientación.

Referencias

[1] Ralph A Anthenien, D Tse Stephen y A Carlos Fernandez-Pello. «On the trajectories of embers initially elevated or lofted by small scale ground fire plumes in high winds». En: *Fire Safety Journal* 41.5 (2006), págs. 349-363.

[2] Stefan H Doerr y Cristina Santín. «Global trends in wildfire and its impacts: perceptions versus realities in a changing world». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 371.1696 (2016), pág. 20150345.

[3] A Carlos Fernandez-Pello. «Wildland fire spot ignition by sparks and firebrands». En: *Fire Safety Journal* 91 (2017), págs. 2-10.

[4] Diana Gómez de la Rúa y Fernando Díez Martín. «La domesticación del fuego durante el pleistoceno inferior y medio: estado de la cuestión». En: (2009).

[5] Sebastiín Martinuzzi y col. «The 2010 wildland-urban interface of the conterminous United States». En: *Research Map NRS-8. Newtown Square, PA: US Department of Agriculture, Forest Service, Northern Research Station. 124 p.[includes pull-out map].* 8 (2015), págs. 1-124.

[6] N Sardoy y col. «Numerical study of ground-level distribution of firebrands generated by line fires». En: *Combustion and Flame* 154.3 (2008), págs. 478-488.

[7] John P Woycheese, Patrick J Pagni y Dorian Liepmann. «Brand propagation from large-scale fires». En: *Journal of Fire Protection Engineering* 10.2 (1999), págs. 32-44.

Parte II

Marco Teórico

Capítulo 2

Teoría de Ignición de Sólidos

Contenidos del Capítulo

2.1. Introducción **16**
2.2. Descripción **16**
2.2.1. Gases de pirólisis 17
2.2.1.1. Generación 17
2.2.1.2. Difusión 18
2.3. Ignición piloteada **18**
2.4. Ignición Espontánea **19**
2.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin **20**
2.5.1. Criterio para thermally thin 20
2.5.2. Teoría thermally thin 21
2.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick **22**
2.6.1. Teoría thermally thick 22
Referencias **26**

2.1. Introducción

En este capítulo se explicarán los conceptos básicos y fundamentales de la teoría que rodea al fenómeno de la ignición. Los conceptos generales y su clasificaciones pueden ser variados, han cambiado con el paso de los años, por lo que es necesario realizar una breve recapitulación de los conceptos fundamentales que ayudan a entender los mecanismos involucrados en todo este proceso. Como se verá en las secciones siguientes, el proceso de ignición involucra muchos conceptos que van más allá de la simple idea de un material incendiándose, pues este proceso involucra múltiples etapas y cambios tanto físicos como químicos, los cuales pueden dirigir el estudio de la ignición en diversos sentidos.

Finalmente, luego de aclarar algunos conceptos, se profundizará en el desarrollo de los modelos clásicos de ignición diferenciando el fenómenos por las condiciones de borde que caracterizan al problema. Concretamente, se presentarán los modelos clásicos para la ignición de sólidos bajo aproximaciones *thermally thin* y *thermally thick*, las cuales a pesar de ser teorías y acercamientos distintos, poseen varios puntos en común que pueden ser explotados en modelos generales más complejos como se verá en los capítulos posteriores.

2.2. Descripción

La ignición ocurre cuando un medio (combustible) es calentado hasta alcanzar temperaturas que provoquen una rápida reacción exotérmica de oxidación denominada *combustión*, en donde la energía necesaria para provocar este aumento de temperatura generalmente es obtenido desde una fuente externa. Esta energía requerida depende de diversos factores, como por ejemplo, las propiedades termo-físicas del material, características geométricas, condiciones que limitan el fenómeno y especialmente el tiempo de exposición a la fuente de calor [3].

En cuanto a las sustancias afectas a los procesos de ignición, frecuentemente se asocia a combustibles líquidos pero no está limitada a estos, pues los combustibles sólidos son parte fundamental de la teoría que ayuda a comprender la ignición. Así, cuando un material sólido en condiciones normales de presión y temperatura es expuesto a una fuente externa de energía, la temperatura de la superficie expuesta al flujo de calor comienza a aumentar. Este momento es definido como el inicio del proceso de ignición en $t = 0$, luego, se desencadena una serie de fenómenos físicos-químicos en la medida que el flujo en la superficie expuesta comienza a calentar el medio [3].

En este contexto, los potenciales combustibles que contribuyen a incendios forestales son en su mayoría combustibles sólidos, lo cuales tienen múltiples factores de riesgo que deben ser considerados, entre los cuales se puede mencionar el potencial de *autoignición*, propensión al *smoldering*, propensión a la ignición, rapidez de propagación del fuego sobre la superficie del terreno y el calor liberado una vez que la ignición ha ocurrido. Estos factores son particularmente complejos de describir pues dependen de múltiples parámetros, incluyendo la geometría, orientación y disposición, propiedades químicas del material junto a las condiciones ambientales que contextualizan el escenario. En estas últimas se tiene flujo externo de calor y la concentración de oxígeno sobre la superficie del sólido como los factores más

relevantes del estudio de ignición [4].

2.2.1. Gases de pirólisis

2.2.1.1. Generación

La ignición con presencia de llama (*flaming ignition*) y la combustión en la superficie de un sólido involucran múltiples procesos físico-químicos. Uno de los requisitos esenciales en los materiales sólidos es que primero deben gasificarse antes de que pueda ocurrir la ignición y la presencia de fuego como tal, para lo cual el sólido es calentado utilizando una fuente externa de calor, y este calor es percibido por la superficie expuesta como $\dot{q}''_{inc}$ [4]. Lo cual se presenta en la Figura 2.1.

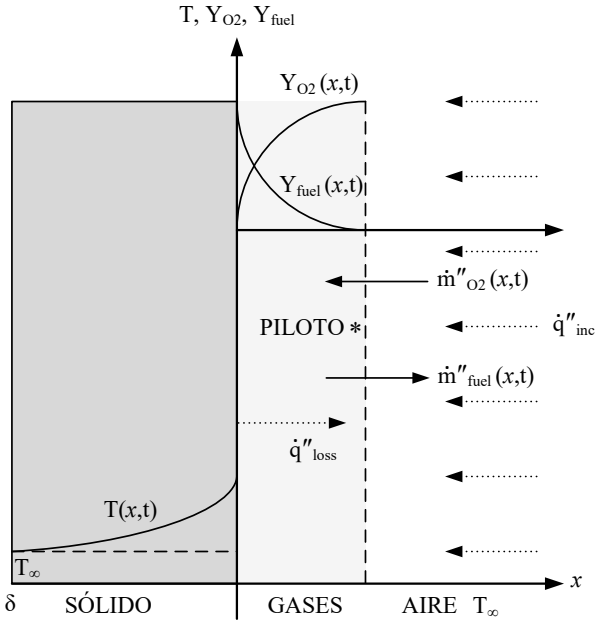


Figura 2.1: Factores involucrados en la ignición de un sólido.

La gasificación de materiales sólidos generalmente implica la descomposición de moléculas complejas en moléculas más simples en un proceso denominado *pirólisis*, el cual es inducido térmicamente. Este punto es de gran relevancia, pues a diferencia de los combustibles líquidos que experimentan cambios físicos (evaporación) pero no necesariamente químicos, los sólidos generalmente experimentan ambos durante el proceso de pirólisis [3].

Cuando la tasa de gasificación por calentamiento aumenta, comienza a producirse una concentración de gases inflamables cerca de la superficie del sólido. Luego, la rapidez del proceso de pirólisis en la superficie del sólido depende directamente de la temperatura de ésta y puede ser representada en función de una ecuación *exponencial de Arrhenius* como en la Ecuación 2.1 [3]

$$\dot{m}'''_{fuel} = A_s Y_{O_2}^m Y_{fuel}^n \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right). \tag{2.1}$$

En donde Y_{O_2}, Y_{fuel} corresponden a las fracciones en masa de oxígeno y del combustible participantes en la degradación respectivamente. A_s es el factor pre–exponencial, y E_s la energía de activación, siendo

ambas propiedades del sólido. Los parámetros m, n y R son constantes de la reacción y T la temperatura. Es importante destacar que la pirólisis es un proceso endotérmico por múltiples reacciones químicas (algunas veces cientos), las cuales pueden ocurrir de manera secuencial, o bien, simultáneamente (en competición) [3].

De lo anterior, cuando la temperatura superficial incrementa, la tasa a la que ocurre la reacción también lo hace y el sólido comienza a experimentar cambios. Así, para una distribución de temperatura dentro del material, la tasa de descomposición es una función dependiente de la dirección x, en donde una gran generación de gases de pirólisis ocurre cerca de la superficie del sólido y una menor producción al interior de él, por lo que el flujo másico total de gases de pirólisis esta dado por

$$\dot{m}''_{fuel} = \int_{x=0}^{x=\delta_T} A Y_{O_2}^m Y_{fuel}^n \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right) dx, \tag{2.2}$$

donde δ_T es la profundidad hasta la cual es apreciable el efecto del calentamiento. De manera general, se puede considerar que el proceso de pirólisis inicia a una temperatura $T_{py,0}$ hasta la cual el sólido es inerte químicamente (ver Figura 2.2). Es importante mencionar que $T_{py,0}$ no es un parámetro físico como tal, más bien corresponde a una manera simple de indicar el inicio de una alta actividad química [3].

2.2.1.2. Difusión

Los gases combustibles deben ser liberados desde la superficie del sólido lo suficientemente rápido como para formar un mezcla con el aire del ambiente y que esta sea susceptible a encender, mecanismo que es denominado *difusión*. Luego, ya que los vapores son retirados constantemente desde la superficie caliente por las corrientes convectivas (fenómeno propio calentamiento, o bien, de alguna fuerza externa), deben ser reemplazados constantemente por nuevos vapores para asegurar que la mezcla con aire sea inflamable [3, 4]. En la Figura 2.1 se representa como la fracción en masa de oxígeno Y_{O_2} es menor cerca de la superficie del sólido y mayor al alejarse de ella. Por otro lado, la fracción en masa de los gases reactantes de pirólisis Y_{fuel} posee una mayor concentración cerca de la superficie del sólido y disminuye al alejarse de ella. Naturalmente los gases de pirólisis difundirán hacia las zonas donde sea menor su concentración, mientras que el oxígeno lo hará hacia donde sea menor, lo cual, eventualmente da lugar a la formación de una mezcla inflamable.

La definición de mezcla inflamable considera el nivel de concentración de combustible de forma que será inflamable sólo si se encuentra entre el *límite inferior de inflamabilidad (LFL)* y el *límite superior de inflamabilidad (UFL)*, así, bajo el LFL la concentración de combustible es muy baja y sobre el UFL es demasiado alta como para provocar la ignición.

2.3. Ignición piloteada

En la mayoría de los escenarios encontrados en la naturaleza, en el lugar que ocurre la ignición es común encontrar alguna región de mayor temperatura que permita iniciar la reacción de combustión.

Así, en presencia de un piloto, como puede ser una llama, chispa o arco eléctrico [3], es posible asumir que la ignición ocurre en el momento en que la mezcla inflamable alcanza la posición espacial en la que se encuentra el piloto en el LFL.

De lo anterior, se puede decir que una vez que la ignición ocurre, la llama generada se propaga a través de las regiones donde esté presenta la mezcla inflamable consumiendo los reactantes, en donde la situación más probable es que esto ocurra cerca de la superficie del sólido. Por otro lado, la tasa de pirólisis al momento en que aparece la llama determinará si ésta podrá continuar existiendo o si la reacción de combustión cesará después que la mezcla inflamable sea consumida, por lo que el calor liberado por la llama incrementará la tasa de pirólisis. Si esto no es suficiente, la llama se extinguirá y continuará el proceso de pirólisis que llevará una vez más la formación de una mezcla inflamable y una eventual ignición. Este fenómeno se manifiesta como una serie de destellos (*flashes* en inglés) que preceden a la ocurrencia de una llama sostenida. La aparición del primer destello se denomina *flash point* y se da a la temperatura T_{flash} y la aparición de la llama sostenida se denomina *fire point* a la temperatura $T_{fp} = T_{ig,pi}$ como se aprecia en la Figura 2.2 [3].

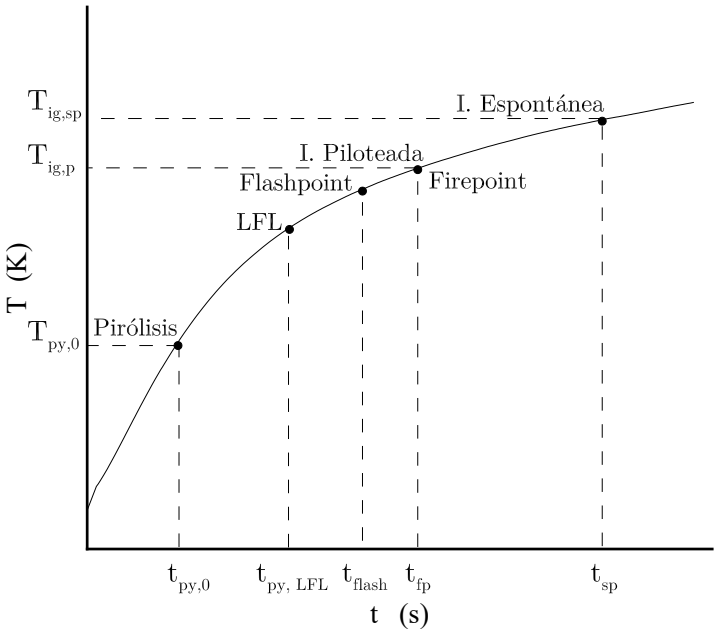


Figura 2.2: Evolución de la temperatura en la superficie de un sólido expuesto a un flujo de calor externo.

2.4. Ignición Espontánea

La ignición espontánea muestra características distintas a la piloteada descrita en la sección 2.3. En este caso, una vez que se ha formado la mezcla inflamable se que la temperatura aumente hasta que la reacción de combustión ocurra alcanzando $T_{ig,sp}$, por esto, es común asociar un tiempo de pirólisis y uno de *inducción*. El primero se refiere al tiempo necesario desde el inicio del calentamiento del sólido hasta la producción de una mezcla inflamable, mientras que el último corresponde al tiempo requerido por la mezcla inflamable para alcanzar la temperatura de ignición $T_{ig,sp}$. De esta manera, en un proceso de ignición espontánea no existe un piloto que actúe como punto de inicio para la reacción, por lo que la mezcla inflamable debe absorber suficiente energía para alcanzar la ignición [3].

Dicha cantidad de energía requerida puede ser asociada al número de *Damköhler*, que corresponde al ratio entre el tiempo de residencia y el tiempo requerido por la reacción química, el cual puede ser obtenido como el inverso de la tasa de reacción. Mientras que esta, puede expresarse por medio de una *Ecuación de Arrhenius* similar a la de pirólisis. Con lo anterior, el tiempo de reacción química se ve afectado por la temperatura de manera que mientras mayor sea esta, la tasa de combustión será mayor y el tiempo de reacción química menor. Por otro lado, el tiempo de residencia tiene directa relación con la rapidez de los gases, por lo que a mayor velocidad el tiempo de residencia es menor. De esta manera, si el tiempo requerido por la reacción química es menor al tiempo de residencia la reacción, esta tiene suficiente tiempo para proceder y la llama puede existir, por lo que existe un número de Damköhler crítico que es necesario alcanzar antes de que la ignición pueda ocurrir [3].

2.5. Ignición en sólidos Thermmally Thin

En esta sección se presentará la teoría básica relativa los tiempos de ignición para problemas simples, cuyo propósito es ilustrar la naturaleza del problema junto con las aproximaciones y simplificaciones clásicas utilizadas para este tipo de problemas.

2.5.1. Criterio para thermally thin

Primero se considera un objeto delgado, es decir, que puede ser aproximado sin considerar gradientes internos de temperatura. Esto es lo que se conoce como *thermally thin*, lo cual requiere que el espesor físico d sea menor que el espesor de penetración térmica δ_T. Para el gradiente de temperatura sea pequeño sobre el dominio d, se requiere que

$$d \ll \delta_T \approx \sqrt{\alpha t} \approx \frac{k\,(T_s - T_o)}{\dot{q}''}, \tag{2.3}$$

o en términos del *número de Biot*

$$Bi \equiv \frac{dh_c}{k} \ll \frac{h_c\,(T_s - T_o)}{\dot{q}''}. \tag{2.4}$$

Si $\dot{q}''$ se basa en el calentamiento únicamente por convección $\dot{q}'' = h_c\,(T_\infty - T_s)$, la Ecuación 2.4 se convierte en

$$Bi \ll \frac{T_s - T_o}{T_\infty - T_s}, \tag{2.5}$$

lo que se traduce en que para un caso thermally thin, en donde d es lo suficientemente pequeño, la diferencia de temperatura interna debe ser mucho menor que la diferencia en la interfase.

2.5.2. Teoría thermally thin

Este acercamiento es direto y se puede aplicar a un material de espesor d aislado por uno de sus lados, cuyas condiciones de borde están dadas por

$$\dot{q}'' = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_s=0} \tag{2.6}$$

$$0 = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=d} \tag{2.7}$$

Sin embargo, con la aproximación themally thin, la temperatura no posee un gradiente al interior $T(x,t) \approx T(t)$, por lo tanto, considerando un volumen de control alrededor del material, se tiene el siguiente balance de energía

$$\rho c_p d \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dot{q}'' = \dot{q}_e'' - h_c \left(T - T_\infty \right) + \epsilon \left(T^4 - T_\infty^4 \right). \tag{2.8}$$

El flujo neto de calor incluye las pérdidas por radiación y las ganancia provenientes desde el ambiente a temperatura T_∞, además, debido al exponente a la cuarta de la temperatura en el término radiativo, no es posible obtener una solución analítica, por lo que se aproxima el término de la radiación mediante una expansión en series de Taylor en alrededor de T_∞, utilizando un coeficiente efectivo total h_r

$$h_r \equiv \frac{\epsilon\sigma \left(T^4 - T_\infty^4 \right)}{\left(T - T_\infty \right)} \approx 4\epsilon\sigma T_\infty^3 \tag{2.9}$$

para $T - T_\infty$ pequeño. Por tanto, con $h_t \equiv h_c + h_r$

$$\rho c_p d \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_e'' - h_t \left(T - T_\infty \right). \tag{2.10}$$

Ahora, se define

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\dot{q}_e''/h_t} \qquad\qquad \tau \equiv \frac{h_t t}{\rho c_p d}$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = 1 - \theta, \tag{2.11}$$

sujeto a la condición inicial $\theta(0) = 0$, por lo que su solución esta dad por

$$\theta = 1 - \exp\left(-\tau\right) \tag{2.12}$$

Luego, volviendo a los parámetros y variables originales

$$T - T_\infty = \frac{\dot{q}_e''}{h_t} \left[1 - \exp\left(-\frac{h_t t}{\rho c_p d} \right) \right] \tag{2.13}$$

para un sólido aislado de espesor d que es calentado por un flujo incidente de calor radiativo $\dot{q}_e''$. De esta manera, desde la Ecuación 2.13, cuando $t \to \infty$ se alcanza el estado estacionario, mientras que para $t \to 0$, el término exponecial $e^{-\tau} \approx 1 - \tau$. Lo anterior permite obtener expresiones sencillas

para el tiempo de ignición t_{ig} a la temperatura $T = T_{ig}$. Entonces, para tiempos de ignición cortos $1 - e^{-\tau} \approx \tau$

$$t_{ig} \approx \frac{\rho c_p d \left(T_{ig} - T_\infty\right)}{\dot{q}''_e}. \tag{2.14}$$

Mientras que para tiempo largos de exposición, eventualmente en $t \to \infty$ la temperatura alcanzará T_{ig}, en cuyo caso se tiene que para cualquier flujo de calor menor al flujo crítico de ignición $\dot{q}''_{cri}$ la ignición no es posible por el modelo de conducción. De esta forma, se puede obtener una expresión para el flujo crítico de ignición

$$\dot{q}''_{cri} = h_t \left(T_{ig} - T_\infty\right), \tag{2.15}$$

la cual es obtenida para la forma aproximada mediante la linealización del término radiativo. Sin embargo, se puede obtener una expresión más precisa sin linealizar el término radiativo

$$\dot{q}''_{cri} = h_c \left(T_{ig} - T_\infty\right) + \epsilon\sigma \left(T_{ig}^4 - T_\infty^4\right). \tag{2.16}$$

2.6. Ignición en sólidos Thermmally Thick

En esta sección se presenta una metodología que busca al igual que en la sección 2.5, explicar la teoría básica que sirve de base para extrapolar a otros análisis. Esta vez se estudia para la ignición de un sólido como un medio semi-infinito, el cual es un supuesto característico ampliamente usado para este tipo de problemas. Para este caso, se requiere que la ignición ocurra antes de que el espesor térmico de penetración δ_T alcance $x = d$. Entonces, sea

$$d \geq \delta_T \approx \sqrt{D t_{ig}} \tag{2.17}$$

con D como difusividad térmica.

2.6.1. Teoría thermally thick

Para el sólido semi-infinito, considerar un problema de conducción para una temperatura constante en la superficie. Las ecuaciones parciales diferenciales provenientes del balance de energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2.18}$$

Las condiciones de borde que caracterizan el problema, junto a la condición inicial se pueden definir como

$$\begin{aligned} x &= 0, && T = T_s \text{ constante} \\ x &\to \infty, && T = T_\infty \\ t &= 0, && T = T_\infty \end{aligned}$$

Luego, con el propósito de resolver la ecuación diferencial anterior, se definen las siguientes variables normalizadas

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \qquad \Rightarrow \qquad \partial T = (T_s - T_\infty)\,\mathrm{d}\theta \tag{2.19}$$

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \qquad \Rightarrow \qquad \partial t = \frac{-2t}{\eta}\,\mathrm{d}\eta \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow \qquad \partial x = 2\sqrt{Dt}\,\mathrm{d}\eta \tag{2.21}$$

Ahora, reescribiendo el problema original en las nuevas variables normalizadas

$$(T_s - T_\infty)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right) = D\,(T_s - T_\infty)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right)^2. \tag{2.22}$$

Entonces, la Ecuación 2.22 se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\eta^2} + 2\eta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{2.23}$$

que corresponde a una *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden*, sujeta a las condiciones

$$\eta = 0, \qquad \theta = 1 \tag{2.24}$$

$$\eta \to \infty, \qquad \theta = 0 \tag{2.25}$$

Se resuelve la Ecuación 2.23 definiendo el cambio de variable $u = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\eta} \to \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\eta^2}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta} = -2\eta u, \tag{2.26}$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden, luego, integrando el problema de variables separables

$$\ln u = -2\eta + c_1, \tag{2.27}$$

por lo que se puede aplicar la función exponencial a ambos lados

$$u = e^{\left(-\eta^2 + c_1\right)}. \tag{2.28}$$

Reemplazando el cambio de variables se obtiene

$$\mathrm{d}\theta = e^{\left(-\eta^2 + c_1\right)}\,\mathrm{d}\eta \tag{2.29}$$

integrando nuevamente y aplicando la condición de borde 2.24

$$\theta - \theta(0) = e^{c_1}\int_0^\eta e^{\left(-\eta^2\right)}\,\mathrm{d}\eta, \tag{2.30}$$

y luego

$$\theta = 1 + e^{c_1} \int_0^{\eta} e^{\left(-\eta^2\right)} \, \mathrm{d}\eta, \tag{2.31}$$

luego, con la condición de 2.25 se obtiene

$$e^{c_1} = \frac{-1}{\int_0^{\infty} e^{\left(-\eta^2\right)} \, \mathrm{d}\eta}. \tag{2.32}$$

La Ecuación 2.32 se puede definir en términos de la *función error de Gauss*

$$\mathrm{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{\left(-\eta^2\right)} \, \mathrm{d}\eta, \tag{2.33}$$

donde $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ y $\mathrm{erf}(0) = 0$, así

$$e^{c_1} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.34}$$

con lo que la solución esta dada como

$$\theta = 1 - \mathrm{erf}(\eta). \tag{2.35}$$

Para una forma más general de las condiciones de borde como en la Ecuación 2.13, se incluyen las pérdidas de calor en la superficie

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x_s=0} = \dot{q}'' = \dot{q}_e'' - h_t \left(T - T_\infty\right), \tag{2.36}$$

con el término radiativo linealizado, sujeto a la condición inicial $t = 0 \rightarrow T = T_\infty$. Por lo tanto, la solución para la temperatura en la superficie T_s

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_e''}{h_t} \left[1 - \exp\left(\gamma^2\right) \mathrm{erfc}(\gamma)\right], \tag{2.37}$$

en donde $\gamma = h_t \sqrt{t/k\rho c_p}$ y $\mathrm{erfc}(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$ es la *función error complementaria.*

Ahora, análogo como se realizó para la teoría thermally thin, se busca ver el comportamiento para tiempos cortos y tiempos largos de exposición. Realizando una expansión en series

$$\gamma \rightarrow \text{largo} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{erfc}(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-\gamma^2\right)}{\gamma}, \tag{2.38}$$

entonces la Ecuación 6.24

$$\frac{T_s - T_\infty}{\dot{q}_e''/h_t} \approx 1 - \frac{\exp\left(\gamma^2\right) - \exp\left(-\gamma^2\right)}{\sqrt{\pi}\gamma} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma}. \tag{2.39}$$

Entonces, para tiempos largos

$$t_{ig} \approx \frac{k\rho c_p}{\pi} \frac{\left(\dot{q}_e''/h_t\right)^2}{\left[\dot{q}_e'' - h_t \left(T_{ig} - T_\infty\right)\right]^2}, \tag{2.40}$$

y como en el caso thermally thin, cuando $t_{ig} \to \infty$ el flujo critico de ignición (Ecuación 2.15)

$$\dot{q}''_{cri} = h_t \left(T_{ig} - T_\infty \right).$$

Mientras que para los tiempos cortos,

$$\gamma \to \text{pequeño} \qquad \Rightarrow \qquad \text{erf}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma \tag{2.41}$$

$$\exp\left(\gamma^2\right) \approx 1 + \gamma^2 \tag{2.42}$$

entonces,

$$\frac{T_s - T_\infty}{\dot{q}''_e / h_t} \approx 1 - \left(1 + \gamma^2\right)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}\gamma}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}\gamma} \tag{2.43}$$

Por lo tanto, para tiempos cortos

$$t_{ig} \approx \frac{\pi}{4} k \rho c_p \left(\frac{T_{ig} - T_\infty}{\dot{q}''_e} \right)^2. \tag{2.44}$$

Referencias

[1] Horatio Scott Carslaw y John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Inf. téc. Clarendon Press, 1959.

[2] Geoffrey Cox y DD Drysdale. *Combustion fundamentals of fire*. s 40. Academic press London, 1995.

[3] Morgan J Hurley y col. *SFPE handbook of fire protection engineering*. Springer, 2015.

[4] Frederick W Mowrer. «Fundamentals of the fire hazards of materials». En: *Handbook of Building Materials for Fire Protection* (2004).

[5] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[6] Warren M Rohsenow, James P Hartnett, Young I Cho y col. *Handbook of heat transfer*. Vol. 3. McGraw-Hill New York, 1998.

[7] CL Tien, KY Lee y AJ Stretton. «Radiation heat transfer». En: *SFPE handbook of fire protection engineering* 3 (2002).

Capítulo 3

Radiación Térmica

Contenidos del Capítulo

3.1. Introducción 28

3.2. Transferencia de calor 28

3.2.1. Conducción 28

3.2.2. Convección 29

3.2.3. Radiación 30

3.3. Fundamentos de la radiación térmica 30

3.3.1. Naturaleza de la radiación térmica 30

3.3.2. Leyes básicas de la radiación térmica 32

3.3.3. Poder de emisión 32

3.3.3.1. Poder de emisión espectral de *Blackbody* 33

3.3.3.2. Poder de emisión total de *Blackbody* 33

3.3.4. Ángulo sólido 34

3.3.5. Intensidad de la radiación 35

3.3.6. Flujo de calor radiativo 37

3.3.7. Intensidad de la radiación en el vacío 39

3.3.8. Radiación característica de las partículas 39

3.3.9. Ecuación de transferencia radiativa (RTE) 40

Referencias 43

3.1. Introducción

El concepto de transferencia de calor por radiación o radiación térmica se utiliza para describir la ciencia de la transferencia de calor provocada por las ondas electromagnéticas. El efecto del calentamiento de la luz del sol que se percibe en un día soleado, cuando una persona se encuentra frente a alguna fuente de fuego como chimenea, fogata, etc. siente la parte frontal del cuerpo más caliente que la espalda, son solo algunos ejemplos mundanos del efecto de la radiación térmica con los que el ser humano interactúa diariamente.

Todos los materiales se encuentran emitiendo y absorbiendo continuamente ondas electromagnéticas (o fotones), ya sea disminuyendo o aumentando los niveles de energía molecular. Este fenómeno es parte de los mecanismos de transferencia de calor: *conducción*, *convección* y *radiación*, los cuales se describirán brevemente a en este capítulo. Así, en este apartado se explicarán de manera general los fundamentos de los mecanismos de transferencia de calor y se proporcionará un análisis más detallado en lo referente al fenómeno de la radiación.

3.2. Transferencia de calor

El calor se define como la forma de energía que se puede transferir de un sistema a otro como resultado de la diferencia de temperatura. Dicha transferencia de energía en forma de calor siempre se produce del medio de mayor temperatura hacia el de menor temperatura (contacto térmico). Este proceso se detiene cuando los dos medios alcanzan la misma temperatura (equilibrio térmico).

El calor se puede transferir a través de tres mecanismos distintos: (i) conducción, (ii) convección y (iii) radiación, en donde todos requieren de la existencia de un gradiente de temperatura [2].

3.2.1. Conducción

La conducción es la transferencia de energía de las partículas más energéticas de una sustancia hacia las adyacentes con un menor nivel de energía resultante de las interacciones entre esas partículas. Este mecanismo de transferencia de calor puede darse en sólidos, líquidos o gases. Por un lado, se tiene que en gases y líquidos se debe a las colisiones y a la difusión de las moléculas durante su movimiento aleatorio. Mientras que en los sólidos se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una retícula y al transporte de energía por parte de los electrones libres [2].

La rapidez o tasa de la conducción de calor a través de un medio depende de condiciones propias de él como su configuración geométrica, espesor y tipo de material que lo compone, así como de la diferencia de temperatura a lo largo de él. Los experimentos permiten concluir que la razón de la conducción de calor a través de una capa plana es proporcional a la diferencia de temperatura a través de ésta y al área de transferencia de calor, pero es inversamente proporcional al espesor de esa capa. Lo

anterior puede expresarse mediante la *Ley de Fourier* para la conducción de calor

$$\dot{q}_{cond} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.1}$$

donde la constante de proporcionalidad κ corresponde a la conductividad térmica del material, la cual puede ser interpretada como una medida de la capacidad del material para conducir el calor. Por otro lado, $\partial T/\partial x$ corresponde al gradiente de temperatura al interior del material en la dirección x y A representa el área de la sección transversal que es normal a la transferencia de calor.

Es importante notar que la dependencia de la conductividad térmica tiene una dependencia con la temperatura, lo cual implica un mayor grado de complejidad en el análisis de la conducción, por lo que es usual utilizar un valor constante medido a una temperatura media $\sim \overline{\kappa}$ por lo que se omite el símbolo de valor medio y solo se expresa como constante.

3.2.2. Convección

La convección es el mecanismo de transferencia de energía entre una superficie sólida y un líquido o gas adyacente que se encuentra en movimiento y comprende los efectos combinados de conducción junto al movimiento de fluidos [2]. Entre más rápido es el movimiento de un fluido, mayor es la transferencia de calor por convección, por el contrario, en ausencia de cualquier movimiento masivo de fluido, la transferencia de calor entre una superficie sólida y el fluido adyacente es por conducción pura.

La convección se dice que es *convección forzada* si el fluido es forzado a fluir sobre la superficie mediante medios agentes externos como un ventilador, bomba o el mismo viento exterior al volumen de control. Mientras que si el movimiento del fluido es causado por las fuerzas de empuje que son inducidas por las diferencias de densidad debidas a un gradiente de temperatura al interior del volumen de control, se dice que es *convección natural o libre* [3].

La *Ley de Enfriamiento de Newton* establece que la rapidez de la transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura

$$\dot{q}_{conv} = hA_s \left(T_s - T_\infty\right), \tag{3.2}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección medido en $\mathrm{W/m^2K}$, A_s es el área de la superficie expuesta a convección, T_s la temperatura en la superficie y T_∞ la temperatura del fluido lo suficientemente alejado de la superficie. Es importante destacar que el coeficiente de convección h no es una propiedad del fluido, sino que corresponde a un parámetro que se determina en forma experimental y cuyo valor depende de todas las variables que influyen en la convección; configuración geométrica de la superficie, naturaleza del movimiento del fluido, propiedades termo-físicas de éste y de la velocidad a la que se mueve.

3.2.3. Radiación

La radiación se puede entender a grandes rasgos como la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas (o fotones), resultado de los cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas. A diferencia de la conducción y la convección, la transferencia de calor por radiación no requiere de la presencia de un medio, inclusive, es la más rápida (a la velocidad de la luz) y no sufre atenuación en el vacío [2].

La radiación térmica es la forma de radiación emitida por los cuerpos debido a su temperatura. Todos los cuerpos a una temperatura arriba del cero absoluto emiten radiación térmica, que corresponde a un fenómeno volumétrico, así, todos los sólidos, líquidos y gases *emiten*, *absorben* y *transmiten* radiación en diversos grados. Sin embargo, la radiación suele considerarse como un fenómeno superficial para los sólidos que son *opacos* a la radiación térmica, ya que emitido desde el interior de un material de ese tipo nunca llega a la superficie, mientras que la radiación incidente sobre estos cuerpos suele absorberse en unos pocos micrómetros al interior del sólido.

La razón máxima de la radiación que puede ser emitida desde una superficie a una temperatura T_s es expresada por la *Ley de Stefan–Boltzmann*

$$\dot{q}_{rad,bb} = \sigma A_s T_s^4, \tag{3.3}$$

con σ constante de Stefan–Boltzmann. De esta manera, la superficie idealizada que emite radiación a esta razón máxima se denomina *cuerpo negro*. La radiación efectiva que es emitida por todas las superficies es menor que la emitida por un cuerpo negro a una misma temperatura Esto puede ser expresado como

$$\dot{q}_{rad} = \epsilon \sigma A_s T_s^4, \tag{3.4}$$

donde ϵ es la emisividad de la superficie y puede tomar valores $0 \leq \epsilon \leq 1$, y representa la medida de cuán próxima es un superficie a ser un cuerpo negro.

La diferencia entre los flujos de radiación emitida por una superficie y absorbida por otra corresponde a la razón neta de transferencia de calor, por lo que determinar este valor neto entre ambas superficies depende de las propiedades radiativas de cada una, su orientación geométrica y la eventual participación del medio que las rodea.

3.3. Fundamentos de la radiación térmica

3.3.1. Naturaleza de la radiación térmica

Desde el punto de vista de la naturaleza de la radiación térmica, se tiene que toda onda electromagnética o fotones se propagan a través de cualquier medio a una gran velocidad. Como la luz es una parte del espectro de ondas electromagnéticas, su velocidad es conocida como *velocidad de luz c*, la cual depende del medio a través del cual se encuentra viajando y se puede relacionar a la *velocidad*

de la luz en el vacío, c_0 como:

$$c = \frac{c_0}{n}, \tag{3.5}$$

con $c_0 = 2,998 \times 10^8$ m/s y n índice de refracción (*refractive index*) del medio. Por definición el índice de refracción del vacío es $n \equiv 1$, mientras que para la mayoría de los gases el índice de refracción es cercano a la unidad, por ejemplo, el aire a temperatura ambiente es $n = 1,00029$ sobre el espectro visible, de esta manera, la luz se propaga en los gases a una velocidad cercana a la de la luz. Cada onda electromagnética puede ser identificada por los siguientes parámetros

frecuencia;	ν	medida en ciclos/s $=s^{-1}$ =Hz
longitud de onda;	λ	medida en μm=10^{-6} o nm=10^{-9}m
período;	η	medida en cm^{-1}
frecuencia angular;	ω	medida en radianes/s $=s^{-1}$

los cuales se encuentran relacionados a través de

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = c\eta. \tag{3.6}$$

Dependiendo de su comportamiento o ocurrencia, las ondas electromagnéticas se puede agrupar en categorías (ver Figura 3.1). Así, la radiación térmica puede ser definida como las ondas electromagnéticas que son emitidas por un medio debido únicamente por su temperatura. Esto acota el intervalo de interés del rango de longitudes de onda para las transferencias de calor entre 0,1 μm (ultravioleta) y 0,1 μm (infrarrojo medio)

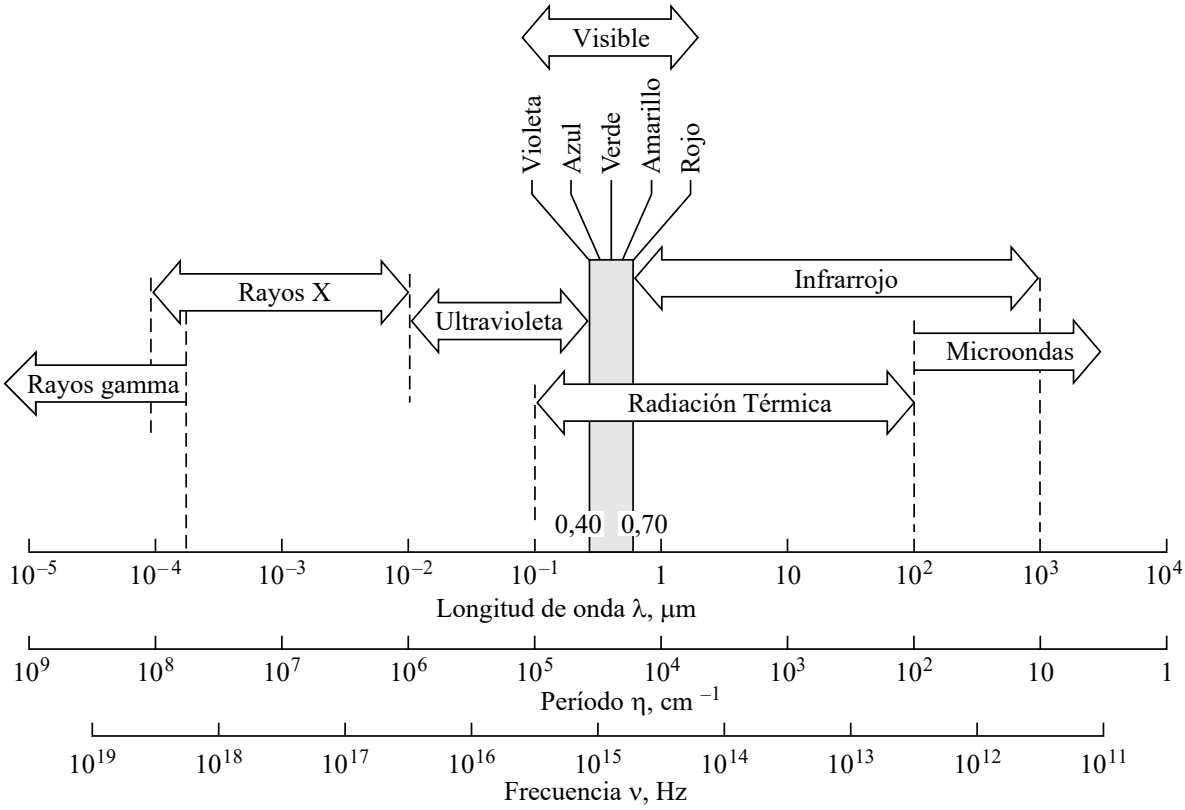


Figura 3.1: Espectro de ondas electromagnética.

3.3.2. Leyes básicas de la radiación térmica

Cuando una onda electromagnética viaja a través de un medio (o vacío) se encuentra con la superficie de otro medio, ya sea solido o liquido, partícula o burbuja, la onda puede ser reflejada parcial o totalmente, y toda parte *no-reflejada* penetrará dentro del medio con el que se encontró. Ahora bien, mientras atraviesa el medio, la onda puede ser continuamente atenuada. Si esta atenuación es completa, entonces no hay radiación penetrante que emerge, esto se denomina *opaco*, por otro lado, si la onda pasa a través de un medio sin ninguna atenuación se denomina *transparente*, mientras que, un cuerpo con atenuación parcial es llamado *semitransparente*. El que un medio sea transparente, semitransparente u opaco, depende tanto del material como de su espesor (por ejemplo, la distancia que debe viajar la onda electromagnética a través del medio).

3.3.3. Poder de emisión

Todo medio emite continuamente radiación electromagnética de forma aleatoria en todas las direcciones una tasa que depende de la temperatura local y de las propiedades del material. El flujo de calor radiativo emitido por una superficie es denominado *poder emisivo* E y se puede distinguir entre *poder emisivo total* (flujo de calor emitido sobre todo el espectro) o *espectral* (flujo de calor emitido para una frecuencia dada por unidad de intervalo de frecuencia)

poder emisivo espectral	$E_\nu \equiv$	energía emitida / tiempo / área superficial / frecuencia
poder emisivo total	$E \equiv$	energía emitida / tiempo / área superficial

La radiación térmica de una sola frecuencia o longitud de onda también se conoce como *radiación monocromática* ya que en el espectro visible, el ojo humano percibe que las ondas electromagnéticas tienen los colores del arcoíris. Entonces, el poder emisivo total y espectral están relacionados como

$$E(T) = \int_0^\infty E_\nu(T,\nu)d\nu. \tag{3.7}$$

3.3.3.1. Poder de emisión espectral de *Blackbody*

Asumiendo que una molécula puede emitir fotones solo a distintos niveles de energía, la distribución del poder de emisión espectral de un cuerpo negro o *blackbody*, ahora conocido como *Ley de Planck*, para una superficie negra rodeada por un medio transparente con índice de refracción n

$$E_{b\nu}(T,\nu) = \frac{2\pi h\nu^3 n^2}{c_0^2\left[\exp\left(h\nu/kT\right)-1\right]}, \tag{3.8}$$

con k constante de Stefan–Boltzmann. Luego, la Ecuación 3.8 puede ser expresada en términos de la longitud de onda y período por medio de la Ecuación 3.6 como

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\nu}d\nu = \int_0^\infty E_{b\lambda}d\lambda = \int_0^\infty E_{b\eta}d\eta, \tag{3.9}$$

o bien,

$$E_{b\nu}d\nu = -E_{b\lambda}d\lambda = E_{b\eta}d\eta. \tag{3.10}$$

3.3.3.2. Poder de emisión total de *Blackbody*

Desde la Ecuación 3.8 y Ecuación 3.9 es posible obtener el poder de emisividad total para un cuerpo negro, considerando las constantes abreviadas $C_1 = 2\pi hc_0^2$, $C_2 = hc_0/k$

$$\begin{aligned} E_b(T) &= \int_0^\infty E_{b\lambda}(T,\lambda)d\lambda = C_1 n^2 T^4 \int_0^\infty \frac{d(n\lambda T)}{(n\lambda T)^5\left[e^{(C_2/(n\lambda T))}-1\right]} \\ &= \left[\frac{C_1}{C_2^4}\int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\varepsilon - 1} n^2 T^4\right], \end{aligned} \tag{3.11}$$

para n constante. Así, se puede obtener lo siguiente

$$E_b(T) = n^2\sigma T^4, \qquad \sigma\frac{\pi^4 C_1}{15C_2^4} = 5,670\times 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}, \tag{3.12}$$

donde σ es la tradicional forma de la constante de Stefan–Boltzmann.

3.3.4. Ángulo sólido

Cuando la energía radiativa deja un medio y entra a otro, usualmente tiene diferentes fuerzas en direcciones. De manera similar, una onda electromagnética o fotón fluyendo a través de un punto dentro de un medio puede variar su dirección. Ahora, considerando un punto P en una superficie opaca dA irradiando a otro medio, digamos aire, como en la Figura 3.2. Es aparente que la superficie puede irradiar en infinitas direcciones, con cada rayo penetrando a través de una *semiesfera* de radio unitario (ver Figura 3.2). El área superficial total de esta semiesfera es $2\pi 1^2 = 2\pi$ es conocida como el *ángulo sólido total* sobre la superficie. Luego, una dirección arbitraria de emisión desde la superficie es definida por el vector unitario de dirección $\hat{\mathbf{s}}$ que puede ser expresado en términos del *ángulo polar* θ (medido desde la normal a la superficie $\hat{\mathbf{n}}$) y el *ángulo azimutal* φ (medido entre un eje arbitrario en la superficie y la proyección de $\hat{\mathbf{s}}$ en la superficie). Para la semiesfera se tiene que los ángulos estan comprendidos como $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

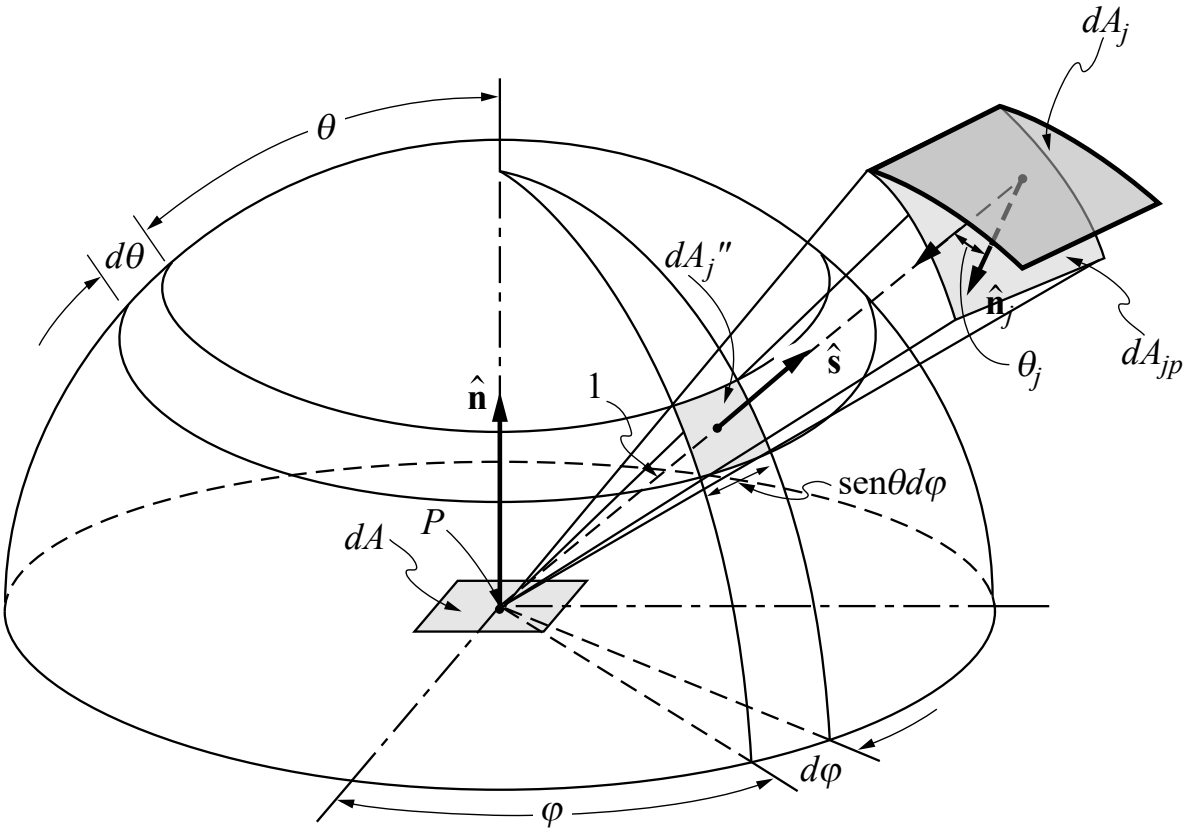


Figura 3.2: Dirección de emisión y ángulos sólidos en una semiesfera unitaria.

El *ángulo sólido* para el cual un diferencial de superficie dA_j es visto desde un punto P, está definido como la proyección de la superficie en un plano normal a la dirección del vector, dividido por el cuadrado de la distancia S entre dA_j y P (ver Figura 3.2). Si la superficie es proyectada en la

semiesfera unitaria sobre el punto, el ángulo sólido es igual a la misma área proyectada

$$d\Omega = \frac{dA_{jp}}{S^2} = \frac{\cos\theta_j dA_j}{S^2} = dA''_j. \tag{3.13}$$

Entonces, un ángulo sólido diferencial es un diferencial de ara en una esfera unitaria, o bien

$$d\Omega = dA''_j = (1 \times \operatorname{sen}\theta d\varphi)\,(1 \times d\theta) = \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi. \tag{3.14}$$

Integrando sobre todos las posibles direcciones

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi = 2\pi, \tag{3.15}$$

para todo el ángulo sólido sobre la superficie. Ahora, para el ángulo sólido en el cual un áre finita A_j es vista desde el punto P, se tiene desde la Ecuación 3.13

$$\Omega = \int_{A_{jp}} \frac{dA_{jp}}{S^2} = \int_A \frac{\cos\theta_j dA_j}{S^2} = \int_{A_j} dA''_j = A''_j, \tag{3.16}$$

que corresponde a la proyección de A_j en la semiesfera sobre P.

3.3.5. Intensidad de la radiación

De lo visto hasta el momento parece ser que el poder de emisión es suficiente para describir el flujo de calor radiativo saliendo de una superficie, sin embargo, no es adecuado para describir la dependencia del campo radiativo con la dirección, particularmente al interior de un medio que absorbe/emite y donde los fotones pueden no haber sido originados en la superficie. Por lo tanto, de manera similar a como se hizo con el poder de emisión, se define la *intensidad radiativa* I como el flujo de energía radiativa por unidad de ángulo sólido y unidad de área normal a los rayos (opuesto al área superficial). Nuevamente se puede distinguir entre intensidad espectral y total

intensidad espectral	$I_\lambda \equiv$	flujo de energía radiativa / tiempo / área normal al rayo / ángulo sólido / longitud de onda
intensidad total	$I \equiv$	flujo de energía radiativa / tiempo / área normal al rayo / ángulo sólido

Nuevamente, la intensidad espectral y total se relacionan por

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \int_0^\infty I_\lambda(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \lambda) d\lambda. \tag{3.17}$$

Ahora, $\mathbf{r}$ es un vector posición fijando la ubicación de un punto en el espacio, $\hat{\mathbf{s}}$ es el vector unitario de dirección previamente definido. Mientras que el poder de emisión depende de la posición y la longitud de onda, la intensidad depende además del vector de dirección $\hat{\mathbf{s}}$. De esta manera, la energía emitida

desde dA en la dirección $\hat{\mathbf{s}}$ contenida dentro de un ángulo sólido infinitesimal $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$ es

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) dA_p d\Omega = I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) dA \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi, \tag{3.18}$$

donde dA_p es el área proyectada de dA normal al rayo, por lo que dA es vista desde la dirección $-\hat{\mathbf{s}}$. Entonces, integrando sobre todas las posibles direcciones se obtiene la energía total emitida desde dA, por lo que dividiendo luego por dA

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi = \int_{2\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega, \tag{3.19}$$

la cual también es válida en una base espectral.

El comportamiento direccional de la intensidad de la radiación dejando un cuerpo negro se puede obtener fácilmente de na variación de la *Ley de Kirchhoff*. Considerar una superficie pequeña y negra suspendida en el centro de un volumen esférico isotérmico (ver Fig. 3.3), asumiendo que el volumen tiene una superficie que lo reviste que refleja toda la radiación que llega y al igual que un espejo en todo el lugar, excepto por una pequeña área en el manto dA_s, que también refleja toda la radiación que llega excepto por un pequeño intervalo de longitudes de onda entre *lambda* y $\lambda + d\lambda$. En este pequeño rango de longitudes, dA_s se comporta como un cuerpo negro. Ahora, toda la radiación dejando dA, viajando a la esfera (excepto por la luz de longitud *lambda* viajando hacia dA_s), será reflejada hacia dA donde serpa absorbida (ya que dA es negra). Entonces, el flujo de energía neta desde dA a la esfera

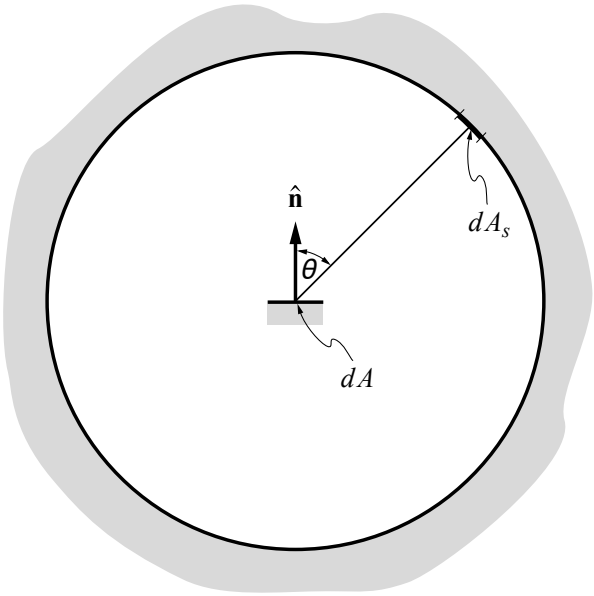


Figura 3.3: Ley de Kirchhoff para el comportamiento direccional de la intensidad de un cuerpo negro.

$$I_{b\lambda}(T, \theta, \varphi, \lambda)(dA\cos\theta)d\Omega_s d\lambda = I_{b\lambda}(T, \theta, \varphi, \lambda)(dA\cos\theta)\left(\frac{dA_s}{R^2}\right)d\lambda, \tag{3.20}$$

donde $d\Omega_s$ es el ángulo sólido con el cual dA_s es visto desde dA. Por otro lado, también por la Ley de Kirchhoff, la esfera no emite ninguna radiación ya que no absorbe nada excepto sobre dA_s a la longitud de onda λ. Toda la energía emitida desde dA_s eventualmente regresará a sí misma excepto por

la fracción interceptada por dA. Entonces, el flujo de energía neta desde la esfera a dA es

$$I_{bn\lambda}(T,\lambda)dA_s d\Omega d\lambda = I_{bn\lambda}(T,\lambda)dA_s\left(\frac{dA\cos\theta}{R^2}\right)d\lambda, \tag{3.21}$$

en donde el subíndice n denota emisión en la dirección normal ($\theta_s = 0, \varphi_s arbitrario$), y $d\Omega$ es el ángulo sólido con el cual dA es visto desde dA_s. Ahora, por la Segunda Ley de la Termodinámica, esos dos flujos deben ser iguales para un volumen isotérmico

$$I_{b\lambda}(T,\theta,\varphi,\lambda) = I_{bn\lambda}(T,\lambda). \tag{3.22}$$

Ya que la dirección (θ,φ) con que dA_s está orientada es arbitraria, se concluye que $I_{b\lambda}$ es independiente de la dirección, con lo que

$$I_{b\lambda} = I_{b\lambda}(T,\lambda). \tag{3.23}$$

Por lo que sustituyendo la Ecuación 3.37 en la Ecuación 3.19, se obtiene la siguiente relación entre la intensidad de un cuerpo negro y el poder de emisión

$$E_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda) = \pi I_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda). \tag{3.24}$$

Lo anterior implica que la intensidad dejando un cuerpo negro o cualquier superficie cuya intensidad de salida es independiente de la dirección (*difusa*), puede ser evaluada desde el poder de emisión de un cuerpo negro o flujo de calor de salida

$$I_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda) = \frac{E_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda)}{\pi}. \tag{3.25}$$

En la literatura, la intensidad espectral de un cuerpo negro es usualmente conocida como *Función de Planck*. El comportamiento direccional de la emisión de un cuerpo negro es encontrada al comparar la intensidad (flujo de energía por ángulo sólido y por área normal a los rayos) y el flujo direccional emitido (flujo de energía por ángulo sólido y por unidad de área superficial). El flujo direccional de calor también es llamado poder de emisión direccional

$$\begin{aligned} E'_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda,\theta,\varphi)dA &= I_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda)dA_p \\ E'_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda,\theta,\varphi) &= I_{b\lambda}(\mathbf{r},\lambda)\cos\theta, \end{aligned} \tag{3.26}$$

esto significa que el flujo direccional emitido de un cuerpo negro varia con el coseno del ángulo polar, lo cual también se conoce como *Ley de Lambert* o *Ley del coseno*.

3.3.6. Flujo de calor radiativo

Considerar la superficie de la Figura 3.4. La radiación térmica desde un ángulo solido infinitesimal alrededor de la dirección $\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}$ incide en la superficie con una intensidad $I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i})$. Dicha radiación se denomina *lápiz de rayos* ya que el ángulo solido infinitesimal es usualmente dibujando visto como la punta de un lápiz afilado. Luego, aplicando la definición de intensidad se puede ver que imparte un ratio de flujo de

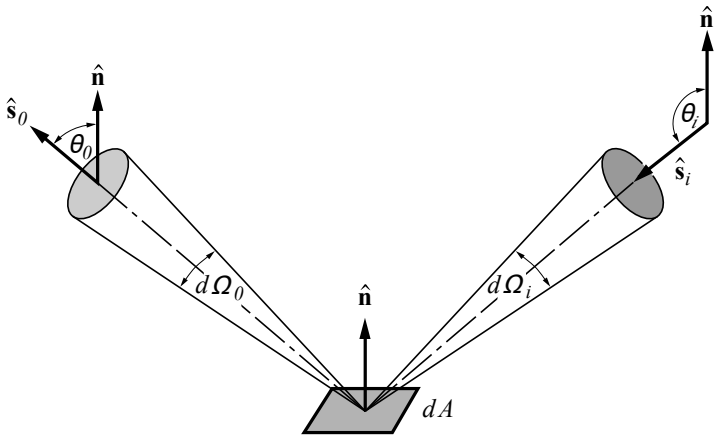


Figura 3.4: Flujo de calor radiativo incidiendo en una superficie arbitraria.

calor infinitesimal por longitud de onda en la superficie en la cantidad de

$$d\Omega_\lambda = I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i})d\Omega_i dA_p = I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i})d\Omega_i(dA\cos\theta_i), \tag{3.27}$$

donde la tasa de calor es tomada como positivo en la dirección de la normal de la superficie exterior (entrando al medio), de modo que el flujo entrante que entra en la superficie es negativo ya que $\cos\theta_i < 0$. Luego, integrando sobre todo 2π direccines entrantes y dividendo por el area superficial, se obtiene el total de flujo de calor entrante por unidad de longitud de onda

$$(q_\lambda)_{\text{in}} = \int_{\cos\theta_i<0} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i})\cos\theta_i d\Omega_i. \tag{3.28}$$

La perdida de calor de la superficie a lo largo del lápiz de ratos en la dirección $\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{o}$, integrado sobre todas las direcciones salientes

$$(q_\lambda)_{\text{out}} = \int_{\cos\theta_o>0} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{o})\cos\theta_o d\Omega_o i. \tag{3.29}$$

Si la superficie es negra ($\epsilon_\lambda = 1$), entonces no hay energía reflejada desde la superficie y $I_\lambda = I_{b\lambda}$ dejando a $(q_\lambda)_{\text{out}} = E_{b\lambda}$. Si la superficie no es negra, la intensidad saliente consiste en las contribuciones tanto de la emisión como de las reflexiones. El flujo de calor saliente es positivo ya que esta entrando al medio. El flujo neto de calor desde la superficie puede ser calculado al sumar ambas contribuciones

$$(q_\lambda)_{\text{net}} = (q_\lambda)_{\text{in}} + (q_\lambda)_{\text{out}} = \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}})\cos\theta d\Omega, \tag{3.30}$$

donde un solo vector dirección $\hat{\mathbf{s}}$ es considerado para describir el rango total de ángulos solidos 4π. Como se puede ver desde la Figura 3.4, $\cos\theta = \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{s}}$ ya que el flujo de calor neto es evaluado como el flujo en dirección-$\hat{\mathbf{n}}$ positiva

$$(q_\lambda)_{\text{net}} = \mathbf{q}_\lambda\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{s}}d\Omega. \tag{3.31}$$

Por lo tanto, para obtener el *flujo de calor radiativo total* en la superficie, la Ecuación 3.31 es integrada sobre todo el espectro

$$\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_0^\infty \mathbf{q}_\lambda\cdot\hat{\mathbf{n}}d\lambda = \int_0^\infty\int_{4\pi} I_\lambda(\hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{s}}d\Omega d\lambda. \tag{3.32}$$

3.3.7. Intensidad de la radiación en el vacío

Como se vio en la sección 3.3.3, el concepto de intensidad tiene una ventaja sobre el poder de emisión, esto es, la intensidad emitida no varia con la dirección. Dentro de un medio, la definición de poder de emisión no es aplicable ya que no hay superficie al cual relacionarlo. La intensidad, definida como la energía radiativa transferida por unidad de tiempo, ángulo sólido, variable espectral y área normal al lápiz de ratos, es la variable mas adecuada para describir la transferencia radiativa en dentro de un medio.

Considerar la intensidad radiativa penetrando en un ángulo normal a través de un área infinitesimal ficticia dA_1 en la posición s_1 y tiempo t_1 como se presenta en la XX. Basado en la definición de intensidad, se puede ver que la cantidad de energía pasando a través de dA_1 por una duración dt y rango espectral $d\eta$ que llegará un poco después a la superficie infinitesimal dA_2

$$I_\eta(s_1,t_1)dtd\Omega_{1\to 2}d\eta dA_1 = I_\eta(s_1,t_1)dt\frac{dA_2}{(s_2-s_1)^2}d\eta dA_1, \tag{3.33}$$

donde $d\Omega_{1\to 2}$ es el angulo solido con el cual dA_2 es visto por un observador en dA_1. Ya que a la radiacion le toma un tiempo $t_2 = t_1 + (s_2 - s_1/c)$ para viajar desde s_1 a s_2, se puede decir que esa energía entrando en dA_2 que viene de dA_1 es

$$I_\eta(s_2,t_2)dtd\Omega_{2\to 1}d\eta dA_2 = I_\eta(s_2,t_2)dt\frac{dA_1}{(s_2-s_1)^2}d\eta dA_2, \tag{3.34}$$

y ya que ambas energías deben ser iguales

$$I_\eta(s_2, t_1 + (s_2 - s_1)/c) = I_\eta(s_1,t_1). \tag{3.35}$$

Sin embargo, ya que la velocidad de la luz es tan grande en comparación que las escalas de tiempo utilizadas en los problemas de ingeniería, casi siempre se puede asumir que la energía llega ïnstantáneamente.[a] cualquier parte en el medio,

$$I_\eta(s_2) = I_\eta(s_1), \tag{3.36}$$

o bien,

$$I_\eta(\hat{\mathbf{s}}) = \text{constante}. \tag{3.37}$$

Por lo tanto, dentro de un medio que no emite, absorbe ni es disperso (conocido como *medio no participativo*), la intensidad radiativa en cualquier dirección dada es constante a lo largo de la trayectoria. En cambio, en un *medio participativo* que absorbe, emite y/o es disperso, cualquier cambio en la intensidad a lo largo de cualquier trayectoria dada debe ser por uno o mas de esos fenómenos.

3.3.8. Radiación característica de las partículas

La interacción entre fotones (o bien ondas electromagnéticas) con pequeñas partículas es un tanto diferente de cuando es con gases, líquidos o sólidos homogéneos. Mientras que para un medio

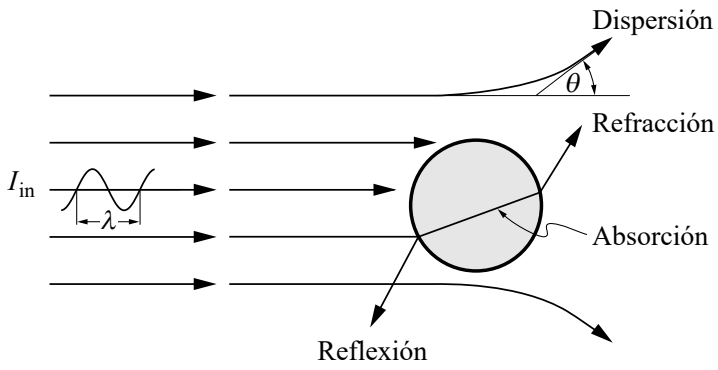


Figura 3.5: Interacción de ondas electromagnéticas con una partícula pequeña.

homogéneo, la radiación que viaja a través de una nube de partículas puede ser transmitida, reflectada o absorbida. Además, la interacción con una partícula puede alterar la dirección en la que el fotón viaja (ver Figura 3.5). Esto puede ocurrir por uno de tres mecanismos: (i) La trayectoria del fotón es alterada sin colisionar nunca con otra partícula por *difracción*. (ii) Un fotón puede cambiar su dirección por reflexión de la partícula. (iii) El fotón puede penetrar dentro de la partícula, cambiando su dirección por *refracción*. Los tres fenómenos en conjunto son conocidos como *dispersión o scattering* de la radiación. La *absorción* toma lugar cuando la onda electromagnética penetra dentro de la partícula. Por tanto, en presencia de scattering, la ecuación para la transmisividad de una capa de material Ecuación 3.38

$$\tau_\eta = e^{-\kappa_\eta s}, \tag{3.38}$$

debe ser extendida a

$$\tau_\eta = e^{-(\kappa_\eta + \sigma_{s\eta})s} = e^{-\beta_\eta s}, \tag{3.39}$$

donde $\sigma_{s\eta}$ es conocida como *coeficiente de dispersión o scattering* y $\beta_\eta = \kappa_\eta + \sigma_{s\eta}$ es el *coeficiente de extinción*. Los rayos dispersados viajan sin atenuación, y la probabilidad de que un rayo desde una dirección sea dispersado (scattering) en otra cierta dirección por en un ángulo θ es descrita por la *scattering phase function* o *función de fase de dispersión* Φ_η. Además, se puede establecer el *single scattering albedo*, donde albedo es el porcentaje de radiación que cualquier superficie refleja respecto a la radiación que incide sobre ella, definido como

$$\omega_\eta \equiv \frac{\sigma_{s\eta}}{\kappa_\eta + \sigma_{s\eta}} = \frac{\sigma_{s\eta}}{\beta_\eta}, \tag{3.40}$$

por lo que cuando un medio no presenta dispersión en absoluto, tiene $\omega = 0$, mientras que un $\omega = 1$ indica que es puramente dispersión (nonabsorbing media o no absorbente).

3.3.9. Ecuación de transferencia radiativa (RTE)

Para determinar el flujo radiativo en una superficie o cualquier punto dentro del medio, se requiere conocer la intensidad radiativa en ese punto, para todas as direcciones y todas las longitudes de ondas o períodos. El campo de intensidad dentro de un medio participativo es gobernado por la *ecuación de energía radiativa*, que es el balance de energía radiativa a lo largo de un lápiz de rayos delgado. Esta ecuación establece que a lo largo de una línea de visión en la dirección $\hat{\mathbf{s}}$, la intensidad

radiativa espectral cambia de acuerdo con

$$\frac{dI_\eta}{ds} = \kappa_\eta I_{b\eta} - \kappa_\eta I_\eta - \sigma_{s\eta} I_\eta + \frac{\sigma_{s\eta}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\eta(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}) \Phi(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}, \hat{\mathbf{s}}) d\Omega_i. \tag{3.41}$$

Los términos del lado derecho indican como a lo largo de la trayectoria s, la intensidad es aumentada por emisión ($\kappa_\eta I_{b\eta}$), disminuida por absorción ($\kappa_\eta I_\eta$) y dispersión o *scattering* lejos de $\hat{\mathbf{s}}$ ($\sigma_{s\eta} I_\eta$). La radiación dispersa es simplemente cancelada en otras direcciones, entonces el último término en la Ecuación 3.41 es el incremento de la intensidad debido a la radiación desde otras direcciones, pues la función de fase de dispersión $\Phi(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}, \hat{\mathbf{s}})$ da la probabilidad de que un rayo proveniente desde $\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}$ es dispersado hacía $\hat{\mathbf{s}}$. Se debe notar que si $\kappa_\eta = \sigma_{s\eta} = 0$ (medio no participativo), la Ecuación 3.41 se reduce a la Ecuación 3.37

$$\frac{dI_\eta}{ds} = 0 \qquad \text{ó} \qquad I_\eta(\hat{\mathbf{s}}) = \text{constante}. \tag{3.42}$$

Para una mejor diferenciación entre atenuación y aumento de radiación, se introduce la *función fuente* para la intensidad radiativa

$$S_\eta(s, \hat{\mathbf{s}}) = (1 - \omega_\eta)\, I_{b\eta} + \frac{\omega_\eta}{4\pi} \int_{4\pi} I_\eta(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}) \Phi(\hat{\mathbf{s}}_\mathbf{i}, \hat{\mathbf{s}}) d\Omega_i, \tag{3.43}$$

donde ω es el single scattering albedo definido en la Ecuación 3.40. Por lo que la ecuación de transferencia radiativa se puede simplificar

$$\frac{dI_\eta}{ds} = \beta_\eta \left[S_\eta(s, \hat{\mathbf{s}}) - I_\eta \right]. \tag{3.44}$$

Para el caso especial de un coeficiente de extinción espacial invariable β_η =constante

$$I_\eta(s) = I_\eta(0) e^{-\beta_\eta s} + \int_0^s S_\eta(s', \hat{\mathbf{s}}) e^{-\beta_\eta (s - s')} \beta_\eta ds'. \tag{3.45}$$

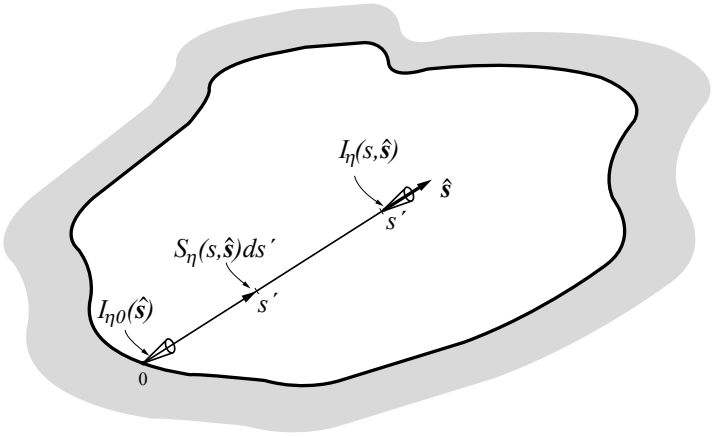


Figura 3.6: Variación de la intensidad al interior de un medio radiativamente participativo.

La intensidad local en s consiste en dos partes (ver Figura 3.6). (i) Intensidad entrando al medio en $s = 0$ (digamos un muro delimitador) atenuado por absorción y dispersión-saliente de 0 a s, y (iii) incremento de intensidad a lo largo de la trayectoria en s' (por emisión y/o dispersión-entrante) atenuado a lo largo de la distancia restante entre s' y s. Es importante recordar que si el medio dispersa

($\omega > 0$), la función fuente en la Ecuación 3.45 contiene la intensidad radiativa en cada punto a lo largo de la trayectoria, para todas las posibles direcciones (no solo $\hat{\mathbf{s}}$): la ecuación de transferencia radiativa Ecuación 3.41, es una ecuación integro-diferencial (intensidad aparece tanto como derivada como también dentro de la integral en el lado derecho) en cinco dimensiones (tres espaciales y dos coordenadas direccionales). Esto hace la RTE extremadamente difícil de resolver, por lo que los métodos existentes para resolverla son de suma importancia pero a su vez, también muy complejos de comprender y aplicar.

Referencias

[1] Horatio Scott Carslaw y John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Inf. téc. Clarendon Press, 1959.

[2] Y Cengel y A Ghajar. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 2002.

[3] William Morrow Kays. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2011.

[4] Michael F Modest. *Radiative heat transfer*. Academic press, 2013.

[5] Frederick W Mowrer. «Fundamentals of the fire hazards of materials». En: *Handbook of Building Materials for Fire Protection* (2004).

[6] Donald A Nield, Adrian Bejan y col. *Convection in porous media*. Vol. 3. Springer, 2006.

[7] M Necati Ozisik. *Heat transfer: a basic approach*. Vol. 1. McGraw-Hill New York, 1985.

[8] M Necati Özisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 1993.

[9] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[10] Warren M Rohsenow, James P Hartnett, Young I Cho y col. *Handbook of heat transfer*. Vol. 3. McGraw-Hill New York, 1998.

Parte III

Diseño Experimental

Capítulo 4

Aparato Experimental

Contenidos del Capítulo

4.1. Introducción **46**

4.2. Descripción general **46**

4.3. Componentes del set up experimental **47**

4.3.1. Heater 47

4.3.2. Motor lineal 48

4.3.3. Porta muestras o *basket* 48

4.3.4. Termocuplas 48

4.4. Metodología experimental **49**

4.4.1. Preparación de las muestras 49

4.4.1.1. Seco 49

4.4.1.2. Humedecido 49

4.4.2. Procedimiento 49

4.4.3. Medidas de ignición 50

4.4.3.1. Temperatura 50

4.4.3.2. Tiempo 50

4.4.3.3. Flujo crítico 51

Referencias **52**

4.1. Introducción

El presente capítulo caracteriza y describe como se ha obtenido la data experimental utilizada para validar los modelos teóricos desarrollados en este trabajo. Para este propósito, se pueden distinguir tres grandes campañas experimentales que han servido de apoyo para los modelos aquí trabajados.

1. Para un lecho de combustible forestal seco en un medio poroso desarrollado, la data se obtuvo de los experimentos realizados por Nicolás Hernández, MSc. en el aparato experimental *I-FIT*, en cuyos ensayos varió el grado de porosidad del estrato para flujos de calor de hasta 25 kW/m^2. Las muestras de biomasa utilizada fueron aciculas de pino radiata colectadas en la región de Valparaíso, Chile. Esta data se utilizó para validar los modelos desarrollados para un medio seco (Capítulo 7)

2. En un lecho de combustible forestal rehidratado para un medio poroso, alcanzando un contenido de humedad promedio de $\sim$ 17 % luego de la rehidratación de la biomasa muerta y variando la porosidad del estrato. Esta campaña fue realizada por Felipe González, MSc. en el aparato experimental *I-FIT* y sus ensayos alcanzaron flujos de hasta 30 kW/m^2 para aciculas de pino radiata colectadas en la región de Valparaíso, Chile. Esta data es utlilizada en conjuntos a los modelos desarrollados para un medio con humedad y en un sistema de coordenadas cilíndricas (Capítulo 8).

3. Para un estrato de combustible forestal humedecido para una porosidad fija. Estos experimentos fueron realizados por el profesor Jorge Contreras, PhD. en el aparato experimental *cono calorímetro* para aciculas de *pinus pinaster* colectadas en Malaga, España. En esta campaña se modificó el contenido de humedad testeado desde un 0 % hasta un 110 % aproximadamente con flujos de calor de hasta 30 kW/m^2. Mayores detalles en la sección 6.5 del Capítulo 6.

En este capítulo se presentan conceptos generales que son relevantes para comprender las campañas experimentales y metodologías empleadas en los ensayos realizados en el aparato experimental *I-FIT*.

4.2. Descripción general

Los experimentos de ignición espontánea se realizaron con lechos de combustible forestal comúnmente encontrados en la naturaleza, concretamente acículas de pino (*pine needles*). Para ello se utilizó el *Idealized-Firebrand Ignition Test (I-FIT)*, el cual es un aparato experimental especialmente diseñado para reproducir las condiciones que se pueden encontrar en un escenario real, esto es, representar a una acícula de pino incandescente (pavesa), que cae y aterriza verticalmente sobre un terreno de biomasa.

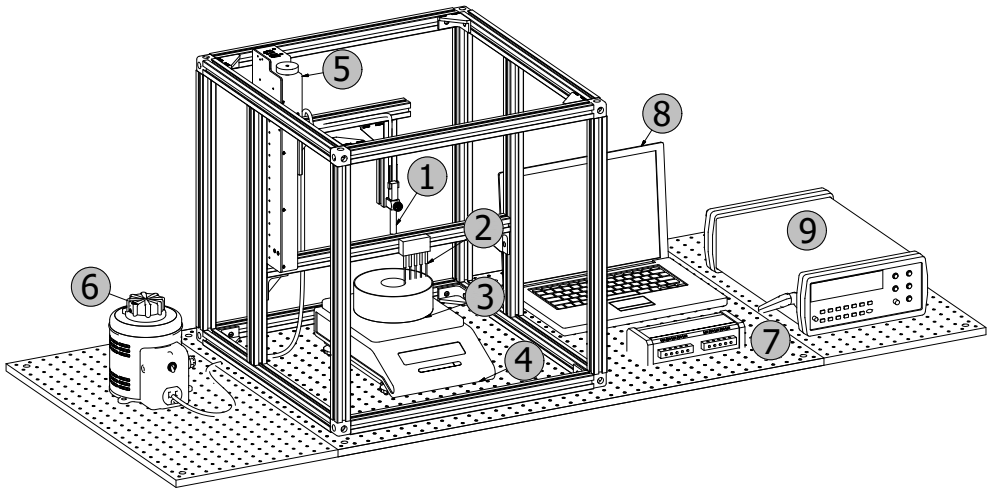


Figura 4.1: Aparato experimental I-FIT y sus principales componentes.

Como se puede ver en la figura, la sección que representa el aterrizaje de la pavesa se encuentra dentro de una estructura metálica que permite aislarla de efectos externos (como corrientes de viento) mediante *Plexigas*, esto con el fin de controlar las condiciones que se están representando en los experimentos para así poder modelar de manera físico-matemática estas mismas condiciones, buscando disminuir las fuentes de incertidumbre o condiciones que provoquen respuestas no controladas en las variables de estudio. Lo anterior es fundamenta para poder obtener medidas precisas de perdida de masa o mediciones de temperatura debido a que una corriente de viento puede provocar perdidas de calor, y en los modelos a desarrollar, se busca aislar los efectos activos y aleatorios del medio ambiente debido principalmente a la dificultad adicional que esto involucra.

Para los experimentos, la pavesa es representada por un *heater* eléctrico, el cual mediante una fuente de energía (red electrica), puede elevar la temperatura del heater y dadas sus características de fabricación, este puede emitir radiación simulando la incandescencia de la pavesa. Luego este heater encendido es posicionado dentro de un porta muestras de manera tal que no tenga puntos de contacto con la biomasa evitando que se produzca conducción, por lo que el calor que emite solo es mediante radiación (debido a la ausencia de corrientes de aire). Con este proceso se realizan una serie de mediciones, como pérdida de masa, mediciones de temperatura y tiempo hasta que se produzca la ignición (según criterios que se discuten más adelante en el Capítulo 7).

4.3. Componentes del set up experimental

4.3.1. Heater

Diversos estudios han mostrado que las geometrías mas comunes de encontrar en pavesas son con formas de disco y cilíndricas [1, 3, 4], lo cual es intuitivo al considerar que la mayoría de pavesas

proviene de ramas con sección transversal circula, de ahí las formas cilíndricas o de discos.

Por lo anterior es que el heater utilizado tiene forma cilíndrica. Fue fabricado por *Bach RC* y tiene dimensiones $r = 5$ mm y un largo (zona caliente) de $l = 46$ mm. La composición del heater es a base de nitruro de silicio (Si_3N_4) cuya emisividad es de $\epsilon > 0,9$, lo cual es de gran utilidad para objetivo de estos experimentos y posterior modelado. Otra de las cualidades de este componente es la alta temperatura que soporta gracias a su composición, pues puede soportar más de 1.000°C sin problemas de seguridad, mientras que el resto de heaters disponibles en el mercado se encuentran en un rango de 500 a 700°C y con emisividades muy bajas.

4.3.2. Motor lineal

Corresponde al mecanismo utilizado para el descenso rápido, preciso y seguro del heater al interior del estrato vegetal. El motor elegido es fabricado por *Thorlabs*, modelo LTS150. Su desplazamiento es lineal y unidimensional, con un máximo de 150 mm y un paso mínimo de 1 μm. En posición vertical permite una velocidad de hasta 3 mm/s soportando hasta 4 kg, lo cual es fundamental una vez producida la ignición en el estrato ya que permite retirar rápidamente el heater desde la llama generada.

4.3.3. Porta muestras o *basket*

La forma y distribución del volumen de control fueron elegidos de manera conveniente con el fin de simplificar los cálculos de radiación incidente $\dot{q}''_{inc}$. Con lo cual el factor de forma entre la superficie cilíndrica del heater $A_h = 2\pi r_h l$ y la del estrato expuesto a radiación $A_i = 2\pi r_i l$ es mas sencillo cuando ambos son axisimétricos, lo que respalda la elección de un portamuestras de sección anular. En tanto que su altura fue elegida igual a la altura l de la zona caliente del heater. Por otro lado, el radio externo, r_o y el interno r_i fueron elegidos de tal manera que el espesor del estrato $(r_o - r_i)$ representara condiciones realistas, por lo que se definió a $r_i = 20$ mm y $r_o = 65$ mm. Además, se concluyó luego de múltiples ensayos, que una malla delgada y lo suficientemente abierta permite controlar el bending de las agujas de pino durante el calentamiento, evitando con ello muchos ensayos fallidos.

El material elegido debe cumplir con dos condiciones básicas: densidad relativamente baja y capacidad de soportar altas temperaturas, por lo que finalmente se optó por acero inoxidable y las uniones en soldadura *TIG*. La restricción de densidad está dada por la capacidad máxima de la balanza que es de 320 g.

4.3.4. Termocuplas

Son el instrumento de medición de temperatura y consisten en la unión de dos metales distintos que producen una diferencia de potencial (m̃V) lo cual depende de la diferencia de temperaturas. Las termocuplas elegidas son tipo K, donde uno de los metales es una aleación denominada cromel (Ni–Cr) y el otro alumel (Ni–Al), con un rango de operación de –200 °C hasta 1370 °C aproximadamente. Sus dimensiones son de 1,5 m de largo y diámetro de 1 mm, por lo que son un instrumento de medición

relativamente no intrusivo al interior del estrato, es decir, no provocan grandes perturbaciones en las mediciones.

4.4. Metodología experimental

4.4.1. Preparación de las muestras

Los experimentos de los cuales se utiliza la data experimental para validad los modelos en este estudio, corresponden a acículas de pino obtenidas en la región de Valparaíso, Chile, de la especie Radiata (*pinus radiata*), colectados directamente de los bosques en zonas WUI (Wildland urban interface) [5-7].

4.4.1.1. Seco

Para reducir el contenido de humedad, la biomasa es secada en un horno a 333 K por al menos 12 h, siguiendo el procedimiento de [5, 7], luego de las 12 h no se observan cambios en la masa de las muestras por lo que se asume que su contenido de humedad es $\approx 0\,\%$.

4.4.1.2. Humedecido

Para el caso humedecido las muestras luego del proceso de secado, son nuevamente rehidratadas a la máxima capacidad del horno humidificador, esto es a $95\,\%$ de humedad relativa. Lo anterior se traduce en que las acículas vuelven a tener un contenido de agua pero que solo alcanza un $\approx 17\,\%$ aproximadamente, lo que se debe a recomposiciones estructurales de la biomasa. No se indaga en mayores detalles ya que son problemas de la bioquímica de la vegetación que está fuera del alcance de este tipo de estudios. No obstante, es importante destacar que este proceso de rehidratación se realiza desde cero para asegurar que las muestras sean homogéneas, eliminando el efecto de la humedad inicial con que fueron colectadas.

4.4.2. Procedimiento

Posterior a la preparación de las muestras y a la distribución de las acículas de pino, el recipiente se coloca sobre la balanza analítica y su eje de simetría es alineado con el del heater. Una vez que el recipiente se encuentra alineado, se establece el voltaje de salida en el transformador variable con el que efectivamente operará el heater. Una vez que el voltaje ha sido fijado y el circuito cerrado, se espera a que el heater alcance condiciones de estado estacionario, lo cual es verificado mediante un radiómetro para medir que la radiación incidente no varíe de forma importante en el tiempo, de no verificarse esta condición se debe esperar hasta que se alcance un estado estacionario.

Luego que el heater se encuentra emitiendo en forma estacionaria, se inicia su descenso por medio del motor lineal hasta quedar introducido dentro del estrato vegetal como en la Figura 4.2. Una

vez se ha detenido el descenso y el heater esta correctamente posicionado de manera concéntrica con el basket (volumen de control para los modelos teóricos), se inician las mediciones [2, 5].

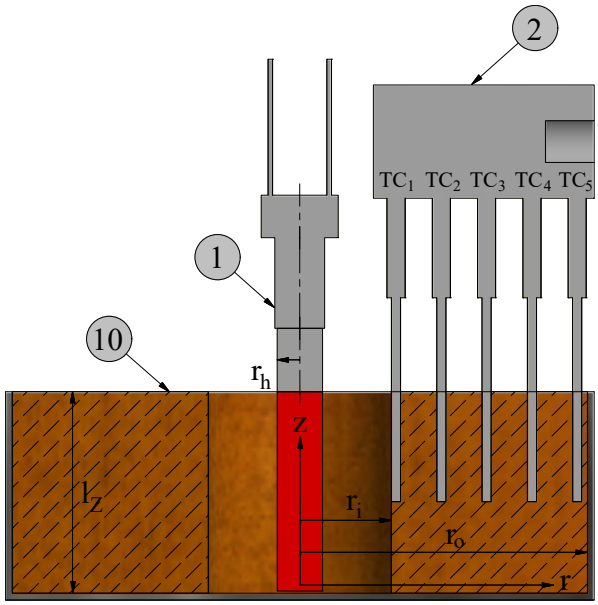


Figura 4.2: Esquema del heater y termocuplas posicionadas al interior del porta muestras junto con la biomasa, donde se indican algunas de las dimensiones del volumen de control.

4.4.3. Medidas de ignición

4.4.3.1. Temperatura

La temperatura del estrato vegetal se determina colocando cinco termocuplas denominadas como TC_j con $j = \{1, 2, ..., 5\}$, al interior del estrato de manera equidistantes en dirección radial y a una altura de 23 mm medido desde el fondo del contenedor de acículas, las cuales miden en tiempo real la temperatura y la envían al DAQ para ser transmitida al computador. Las mediciones se detienen posterior a la ignición y combustión, cuando ya no existen cambios apreciables en la masa.

4.4.3.2. Tiempo

El tiempo de ignición se determinó considerando *flaming ignition* (ignición con presencia de llama) por inspección visual. Sin embargo, a pesar de que en algunos experimentos se detectó *glowing* (ignición sin presencia de llama), estos tiempos no fueron considerados. Adicionalmente, las mediciones por inspección visual con cronometro, se contrastan con los datos obtenidos de la balanza por perdida de masa y de las termocuplas con el cambio abrupto de pendiente en la curva de temperatura.

4.4.3.3. Flujo crítico

Para determinar el mínimo flujo en qe se produce ignición, se parte desde un valor elevado para luego descender hasta los flujos mas bajos, cuando se detecta un punto en que la ignición toma mas tiempo en ocurrir se disminuye el paso de descenso y se consideran tiempo de 60 min como valor critico para discriminar que la ignición no sucederá para ese flujo. En estos valores se aumenta el numero d experimentos debido a la alta variabilidad en los resultados.

Referencias

[1] Alexander Filkov y col. «Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest». En: *Proceedings of the Combustion Institute* 36.2 (2017), págs. 3263-3270.

[2] N Hernández y col. «Spontaneous ignition of wildland fuel by idealized firebrands». En: *Experimental Thermal and Fluid Science* 95 (2018), págs. 88-95.

[3] Samuel L Manzello, Alexander Maranghides y William E Mell. «Firebrand generation from burning vegetation1». En: *International Journal of Wildland Fire* 16.4 (2007), págs. 458-462.

[4] Samuel L Manzello y col. «On the development and characterization of a firebrand generator». En: *Fire Safety Journal* 43.4 (2008), págs. 258-268.

[5] P Mindykowski y col. «Piloted ignition of wildland fuels». En: *Fire Safety Journal* 46.1-2 (2011), págs. 34-40.

[6] Albert Simeoni y col. «Flammability studies for wildland and wildland–urban interface fires applied to pine needles and solid polymers». En: *Fire Safety Journal* 54 (2012), págs. 203-217.

[7] Virginie Tihay y col. «Experimental study of laminar flames obtained by the homogenization of three forest fuels». En: *International journal of thermal sciences* 48.3 (2009), págs. 488-501.

Parte IV

DESARROLLO DE MODELOS

Capítulo 5

Conceptos previos de cálculo vectorial

Contenidos del Capítulo

5.1. Introducción 55
5.2. Definiciones generales 55
5.2.1. Campo escalar 55
5.2.2. Campo vectorial 56
5.3. Operatoria vectorial 56
5.3.1. Derivada 56
5.3.1.1. Notaciones 56
5.3.2. Operador *nabla* o *del* 58
5.3.3. Gradiente 58
5.3.4. Divergencia 59
5.3.5. Operador Laplaciano 60
5.3.6. Resumen para cada sistema coordenado tradicional 60
Referencias 62

5.1. Introducción

Para comprender los fenómenos físicos que se estudian y darles un sentido matemáticamente, es necesario comprender algunos conceptos y fundamentos del calculo vectorial. Por ello, en este apartado se describen brevemente algunos conceptos como *Gradiente*, *Divergencia* y *Laplaciano* junto a sus aplicaciones tanto a campos escalares como vectoriales. Dado que el objetivo de este trabajo es el desarrollo de modelos teóricos acerca de fenómenos físicos, en este apartado se abarcan de manera muy general los conceptos que son necesarios para comprender las componentes que interactúan en las ecuaciones de calor y balances de magnitudes físicas, mientras que su detalle y correcta aplicación se desarrollan en los apartados correspondientes de cada modelo.

5.2. Definiciones generales

Se dice que existe un campo asociado a una magnitud física, en una región del espacio, si se puede asignar un valor a dicha magnitud para todos los puntos de dicha región en cada instante. Los sistemas físicos formados por un conjunto de partículas interactuantes de la mecánica clásica y los sistemas físicos de partículas relativistas sin interacción, son sistemas con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los campos físicos, además de la variación de magnitud en el espacio, muestran la variación en el tiempo. Esa característica hace que los campos físicos se consideren informalmente como sistemas con un número infinito de grados de libertad. Las peculiaridades de los campos hacen que sus ecuaciones de "movimiento" o evolución temporal vengan dadas por ecuaciones en derivadas parciales en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5.2.1. Campo escalar

En matemáticas y física, un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud escalar, asociando un valor a cada punto del espacio. En matemáticas, el valor es un número; en física, una magnitud física. Los campos escalares se usan en física, por ejemplo, para indicar la distribución de la temperatura o la presión de un gas en el espacio.

Un campo escalar en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función:

$$f : U \to \mathbb{R}$$

en la que a cada punto $\mathbf{x} \in U$, se le asigna un número o escalar $f(\mathbf{x})$. Esta función también es conocida como función de punto o simplemente función escalar.

5.2.2. Campo vectorial

En matemáticas, un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Es una expresión de cálculo vectorial que asocia un vector a cada punto en el espacio euclidiano, de la forma $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Los campos vectoriales se utilizan en física, por ejemplo, para representar la velocidad y la dirección de un fluido en el espacio, o la intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética.

Un campo vectorial sobre un subconjunto del espacio euclidiano $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función con valores vectoriales:

$$\mathbf{F} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}^n$$

Se dice que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^k si como función es k-veces diferenciable con continuidad en X. Un campo vectorial se puede visualizar como un espacio X con un vector n- dimensional unido a cada punto en X.

5.3. Operatoria vectorial

5.3.1. Derivada

En cálculo diferencial y análisis matemático, la derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio (media) de dicha función en cierto intervalo, el cual se torna cada vez más pequeño. Por esto es que se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado.

Entonces, el valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, pues corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, la cual es a su vez, la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto. La noción de derivada puede generalizarse para el caso de funciones de más de una variable con la derivada parcial y el diferencial.

5.3.1.1. Notaciones

En esta sección se describirá de manera muy general algunas de las notaciones comúnmente utilizadas por la literatura para describir el concepto de derivadas, las cuales se utilizarán en el resto de capítulos.

Sea f una función. Se escribe la derivada de la función f respecto al valor x según en los siguientes modos [2-4].

Notación de Newton

Agregar un punto arriba del nombre de la función según el orden de derivación:

$$\dot{x} = x'(t)$$
$$\ddot{x} = x''(t)$$

Notación de Leibniz

Esta notación sugiere la idea de que la derivada de una función con respecto a otra se puede expresar como un cociente de diferenciales.

$$\frac{d\left(f(x)\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \frac{df}{dx}$$

Mientras que para las derivadas sucesivas,

$$\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{d\left(\ldots\left(\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}\right)\right)}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

La notación de Leibniz es muy útil ya que permite especificar la variable de diferenciación (en el denominador); lo cual es pertinente en caso de diferenciación parcial o teorema de cambio de variable.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Notación de Jacobi

Es la notación utilizada frecuentemente para referirse a derivadas parciales. Esto es; la derivada parcial de una función de varias variables es la derivada con respecto a cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes.

Sea $f(x_1, x_2, x_3, ...)$ un función multivariable.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f = \partial_{x_1} f$$

donde ∂ es conocida como la letra *«d» de Jacobi*.

Nota: Newton desarrolló en Cambridge su propio método para el cálculo de tangentes, donde desarrolló un algoritmo para derivar funciones algebraicas que coincidía con el descubierto por Fermat. A finales de 1665 se dedicó a reestructurar las bases de su cálculo, intentando desligarse de los

infinitesimales, e introdujo el concepto de *fluxión*, que para él era la velocidad con la que una variable *«fluye»* con el tiempo (varía).

Por su parte, Gottfried Leibniz formuló y desarrolló el cálculo diferencial en 1675. Fue el primero en publicar de manera independiente los mismos resultados que Isaac Newton descubriera 10 años antes. En su investigación conservó un carácter geométrico y trató a la derivada como un cociente incremental y no como una velocidad, viendo el sentido de su correspondencia con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

5.3.2. Operador *nabla* o *del*

En calculo vectorial, *nabla* o también llamado *del*, es un operador diferencial vectorial simbolizado por ∇, su aplicación es válida tanto para campos escalares como vectoriales y su resultado difiere si es aplicado a uno u otro.

Puede darse una definición del operador nabla que no esté condicionada a un sistema de coordenadas fijo. Esta definición es una generalización de la que se emplea para definir la divergencia (se explica con mayor detalle su definición en la sección 5.3.4):

$$\nabla * \mathbb{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbb{F} * d\vec{S} \tag{5.1}$$

En la Ecuación 5.1, la expresión $*$ representa una función de producto arbitrario que puede ser escalar, vectorial, tensorial o por un escalar (como producto punto o producto cruz) y $\mathbb{F}$ es un campo que puede ser escalar, vectorial o tensorial. La expresión ΔV es un volumen diferencial que en el limite se reduce a un punto, de esta manera puede definirse de forma intrínseca el gradiente, la divergencia, el rotacional y otros operadores con la misma expresión general [1].

5.3.3. Gradiente

El gradiente o también conocido como vector gradiente, denotado por ∇f de un campo escalar f, es un campo vectorial. El vector gradiente de f evaluado en un punto genérico x del dominio de f, $\nabla f(x)$, indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

El gradiente se representa con el operador diferencial nabla (∇) seguido de la función (no confundir el gradiente con la divergencia; esta última se denota con un punto de producto escalar entre el operador nabla y el campo). También puede representarse mediante $\vec{\nabla} f$, o usando la notación $\mathbf{grad}(f)$.

La generalización del concepto de gradiente para funciones vectoriales de varias variables es el concepto de *matriz Jacobiana*.

En matemáticas, el *gradiente* es una generalización multivariable de la derivada. Mientras que una derivada se puede definir solo en funciones de una sola variable, para el caso de funciones de varias

variables, el gradiente toma su lugar. El gradiente es una función de valor vectorial, a diferencia de una derivada, que es una función de valor escalar. Al igual que la derivada, el gradiente representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Más precisamente, el gradiente apunta a los puntos de la gráfica a los cuales la gráfica tiene un mayor incremento. La magnitud del gradiente es la pendiente de la gráfica en esa dirección.

Los componentes del gradiente en coordenadas son los coeficientes de las variables presentes en la ecuación del espacio tangente al gráfico. Esta propiedad de caracterización del degradado permite que se defina independientemente de la elección del sistema de coordenadas, como un campo vectorial cuyos componentes en un sistema de coordenadas se transformarán cuando se pase de un sistema de coordenadas a otro.

Se toma como campo escalar el que se asigna a cada punto del espacio una presión P (campo escalar de 3 variables), entonces el vector gradiente en un punto genérico del espacio indicará la dirección en la cual la presión cambiará más rápidamente. Otro ejemplo es el de considerar el mapa de líneas de nivel de una montaña como campo escalar, que asigna a cada pareja de coordenadas latitud/longitud un escalar altitud (campo escalar de 2 variables). En este caso el vector gradiente en un punto genérico indicará la dirección de máxima inclinación de la montaña. Nótese que el vector gradiente será perpendicular a las líneas de contorno (líneas «equiescalares») del mapa.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo escalar entonces el gradiente de f en $\mathbf{r}$ se define como el campo vectorial $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las derivadas parciales del campo escalar, esto es:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_n} \right)$$

De forma geométrica, el gradiente es un vector normal (perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando (x_1, x_2, x_3) como por ejemplo temperatura. Considere una habitación en la cual la temperatura se define a través de un campo escalar, de tal manera que en cualquier punto (x, y, z), la temperatura es $\phi(x, y, z)$. Asumiendo que la temperatura no varía con respecto al tiempo, para cada punto de la habitación, el gradiente en ese punto indicará la dirección en la cual la temperatura aumenta más rápido. La magnitud del gradiente dirá cuan rápido aumenta la temperatura en esa dirección.

5.3.4. Divergencia

La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes"la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros", la divergencia será negativa. La divergencia mide la rapidez neta con la que se conduce la materia al exterior de cada punto, y en el caso de ser la divergencia idénticamente igual a cero, describe al flujo incompresible del fluido.

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F(x)}$ en el punto $\mathbf{x_0}$ se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero:

$$\mathbf{divF}\big|_{x_0} = (\nabla \cdot \mathbf{F})\big|_{x_0} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{|V|} \int \int_{s(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde S es una superficie cerrada que se reduce a un punto en el límite.

5.3.5. Operador Laplaciano

Es un operador diferencial elíptico de segundo orden, denotado como Δ. Expresado en coordenadas cartesianas es igual a la suma de todas las segundas derivadas parciales no mixtas dependientes de una variable. Corresponde a la divergencia del gradiente de un campo f, es decir, div (grad f) donde se hace uso del símbolo delta Δ o nabla cuadrado ∇^2 para representarlo.

5.3.6. Resumen para cada sistema coordenado tradicional

En este capítulo se desarrollan algunas descripciones y carcaterizaciones generales para algunos operadores matemáticos ampliamente utilizados en ingeniería. En los capítulos siguientes se presentará como estos conceptos son fundamentales para la derivación de todos los modelos de energía independiente del sistema de coordenadas que se estudie, si bien el sistema cartesiano es el sistema más simple de trabajar en la mayoría de los casos desde un punto de vista matemático (como lo es para la derivación de modelos en la teoría clásica), algunos escenarios requieren que el sistema en que se modele sea distinto y en esos casos los operadores aquí descritos son igualmente validos pero con algunas dificultades adicionales en cuanto a la matemática involucrada, como se detallará más adelante (Capítulo 7) para un sistema de coordenadas cilíndricas ya que es la manera más conveniente de representar el caso estudiado (*I-FIT*). No obstante, su desarrollo y validez no se limita a este sistema de coordenada por lo que a continuación se presentan tablas que resumen los operadores trabajados en este capitulo para cada sistema de coordenadas.

	ϕ Campo escalar $(\nabla\phi)$ Gradiente	F Campo vectorial $(\nabla \cdot F)$ Divergencia
Cartesianas	$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right)$	$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$
Cilíndricas	$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right)$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{(\partial\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$
Esféricas	$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{rsen\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\hat{\psi}\right)$	$\left(\frac{1}{r^2}\frac{(\partial r^2 F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{rsen\varphi}\frac{\partial(sen\varphi F_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{rsen\varphi}\frac{\partial(F_\psi)}{\partial\psi}\right)$
Resulta en	Campo vectorial	Campo escalar

Tabla 5.1: Resumen

	$\big($ div (grad) $f\big)$, f Campo escalar $\Delta f = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f$ Operador Laplaciano
Cartesianas	$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$
Cilíndricas	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$
Esféricas	$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(sen\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}\right)\right)$
Resulta en	Campo escalar

Tabla 5.2: Resumen Laplaciano

Referencias

[1] Harry M Schey y Mario Iona. «Div, grad, curl, and all that». En: *American Journal of Physics* 42.1 (1974), págs. 86-86.

[2] George F Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press, 2016.

[3] James Stewart, Daniel K Clegg y Saleem Watson. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning, 2020.

[4] John Stillwell. *Mathematics and Its History. (Revised)*. 2000.

Capítulo 6

Aproximación a otros modelos

Contenidos del Capítulo

6.1. Introducción 64

6.2. Incluyendo humedad al modelo clásico - Khan et al 64

6.3. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección x para un medio poroso - Mindykowski et al 65

6.4. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección r para un sólido - N. Hernández et al 65

6.5. Incluyendo humedad y porosidad al modelo clásico 66

6.5.1. Modelo térmico 66

6.5.2. Resultados 68

6.5.2.1. Temperatura de ignición 68

6.5.2.2. Tiempos de ignición 68

6.5.3. Propiedades efectivas 70

6.5.4. Desarrollo en condiciones Thermally Thick 71

6.5.5. Respuesta térmica del material 72

Referencias 74

6.1. Introducción

En el área de investigación asociada a los incendios e ignición de sólidos existen diversos modelos de predicción que derivan de la teoría clásica (Capítulo 2), sin embargo, la gran mayoría realiza cambios a alguna de los componentes de la ecuación de energía ya desarrollada en los modelos clásicos. Ante esto, existen algunos trabajos que tratan algunos aspectos claves del fenómeno de la ignición y están directamente relacionados a los conceptos que se desarrollan en este trabajo, por lo que se incluyen de manera general algunos modelos relevantes para este estudio como casos desarrollados previamente. Como se verá hacia el Capítulo 10, con el modelo general que se busca con este trabajo, es posible derivar a cada uno de los modelos aquí presentados, por ello, se deben tener algunas consideraciones antes de continuar este capítulo.

En cada sección se sigue la notación propia del modelo desarrollado ya que no existe una notación equivalente entre todos los trabajos previos y el actual, no obstante, la notación que se mantiene y puede ser homologada no es especificada y se refiere a los mismos parámetros declarados para este trabajo. Además ,esto es útil para el lector para continuar la lectura de los trabajos propios de cada autor y ver en mayor profundidad cada uno de los modelos.

Es importante destacar que solo se incluyen los aspectos más relevantes y representativos de los modelos, además, se presenta en este apartado de modelos solo algunos de los diversos trabajos relacionados a modelos de ignición. Por supuesto existen muchos otros modelos con otras variantes tales como [1, 2, 5, 7, 11, 12], pero estos son los fundamentos de las ecuaciones de conservación por lo que engloban de manera general los conceptos mas cercanos a lo trabajado en este estudio, tal como la inclusión de la humedad, variación de sistemas de referencias y penetración de la radicación, solo por mencionar algunos.

La clasificación de los siguientes trabajos se hace en relación a su contribución y similitud a los modelos que se desarrollan en este estudio, lo cual no significa que estos trabajos y modelos estén limitados a lo que aquí se presentan o dependan en términos absolutos de la clasificación aquí dada.

6.2. Incluyendo humedad al modelo clásico - Khan et al

El modelo de khan incluye la humedad al modelo clásico de ignición para solidos [4, 8], sin embargo solo presenta sus hallazgos para los tiempos de ignición. Por lo demás, en su trabajo la temperatura es superficial y es un parámetro obtenido desde el flujo critico de ignición, por lo que no se detiene en buscar alguna expresión para la evolución de la temperatura,

$$(\dot{q}''_e - \chi \dot{q}''_{cr})\, t_{ig} = \alpha\,(1 + \gamma m_w)\,. \tag{6.1}$$

El modelo presentado representa que los requerimientos energéticos para alcanzar la ignición deben ser iguales a la energía recibida por la superficie, en donde los parámetros utilizados corresponden a α como la energía requerida para calentar el material sólido, γ el incremento adicional para evaporar el

agua contenida y m_w es la fracción añadida de masa de agua en la muestra, la cual se define a partir del contenido de humedad, MC= $m_w \times 100$. Los parámetros descritos se definen como

$$\alpha = c_{pc} m''_{dry}\left(T_{ig-T_0}\right) \qquad \gamma = \frac{c_{pw}\left(T_b - T_0\right) + L_w}{c_{pc}\left(T_{ig-T_0}\right)} \qquad m_w = \frac{\left(m_{wet} - m_{dry}\right)}{m_{dry}}$$

Como se mencionó anteriormente, el modelo considera la obtención de la temperatura de ignición desde el flujo critico. Este a su vez, es obtenido desde los datos experimentales como el best-fit de la data experimental en $1/t_{ig}$, interceptando la recta formada por esta tendencia cuando corta al eje de la ordenada en cero.

6.3. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección x para un medio poroso - Mindykowski et al

Este trabajo es uno de los primeros trabajos que trabaja casos de estudio similares a los desarrollados aquí, por una parte incluye el estudio de un medio poroso y por el otro incluye la penetración de la radiación en el medio, en una configuración en coordenadas cartesianas [6], ya que los experimentos son desarrollados en el *Fire Propagation Apparatus (FPA)*. Pero uno el aspecto mas relevante que lo hace sumamente útil para la comprensión de este trabajo, es que es el primero en trabajar a la temperatura como un fenómeno volumétrico, producto del hecho de considerar que la radiación penetra y con ello produce calentamiento hacía el interior.

En este caso, el modelo desarrollado desde la ecuación general corresponde a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_g \rho_g h_g + \alpha_k \rho_k h_k\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_g \rho_g u_g h_g\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{eq}\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \kappa_a\left[G - 4\sigma T^4\right], \tag{6.2}$$

luego, aplicando las condiciones de borde y resolviendo el modelo radiativo

$$\alpha_k \rho_k C_{pk}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{a_b}{\delta}\dot{q}''_{inc} + \frac{2a_b}{\delta}\sigma\left(T_\infty^4 - \overline{T}^4\right) + \frac{h_{conv}}{\delta}\left(T_\infty - \overline{T}\right) \tag{6.3}$$

donde el término correspondiente a la radiación, es obtenido por medio de la Aproximación de Schuster-Schwarzchild, con la absortividad definida como $a_b = 1 - \exp\left(-2(\alpha_k \sigma_k/4)\delta\right)$.

6.4. Incluyendo divergencia de la radiación en dirección r para un sólido - N. Hernández et al

Este modelo es desarrollado a partir de los acercamientos propuestos por Mindykowski (ver sección 6.3), pero esta vez se realiza para un sistema en coordenadas cilíndricas para un medio sólido [3]. Al tratarse de coordenadas cilíndricas, no es posible realizar el mismo tratamiento al término radiativo ya que la aproximación de Schuster-Schwarzchild es desarrollada para placas planas paralelas, lo cual era posible en el caso anterior. Por ello, este trabajo usa la Aproximación-P_1 para obtener el comportamiento

de la radiación en un medio en coordenadas cilíndricas, lo cual requiere de un manejo distinto de las ecuaciones diferenciales involucradas y las condiciones de borde que caracterizan al problema.

De esta manera, este trabajo es el punto de inicio de los modelos desarrollados más adelante en los capítulos 7 y 8, ya que considera a la temperatura como un fenómeno volumétrico siendo promediada espacialmente (continuando lo propuesto por Mindykpwski en coordenadas cartesianas), y con ello considera un modelo radiativo apropiado para un sistema de coordenadas cilíndricas. Esto representa un gran avance, pues como se detallará más adelante, las ecuaciones involucradas en los modelos de este tipo son matemáticamente difíciles de manejar, por lo que este trabajo brinda indicios de como trabajarlas y señala el camino a seguir.

EL modelo de energía desarrollado en términos promediados es el siguiente,

$$\rho c_p \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{2}{r_o} h_c \left(\overline{T} - T_\infty\right) - \frac{2}{r_o} \dot{q}''_r(r_o), \tag{6.4}$$

al cual solo resta agregar el modelo radiativo, que es obtenido mediante la Aproximación-P_1.

6.5. Incluyendo humedad y porosidad al modelo clásico

Este desarrollo tiene cabida luego del desarrollo de Khan et al en la sección 6.2 donde incluye la humedad al modelo clásico. En esta sección se extiende el modelo para un medio poroso como un nuevo modelo desarrollado a partir de los conceptos previos aquí descritos y sirve como un modelo introductorio a los problemas con humedad, pues no indaga en mayor profundidad en otros conceptos más complejos como por ejemplo considerar la penetración de la radiación u otro sistema de coordenadas. Este tipo de problemas serán abordados más adelante en el Capítulo 8.

6.5.1. Modelo térmico

Ahora bien, considerando al medio poroso m como un medio equivalente continuo y radiativamente participativo, con la fase sólida s y gaseosa g en equilibrio térmico, se puede plantear desde la ecuación general de energía (cuya derivación es tratada con mayor detalle en el Capítulo 7),

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla u \right) = - \nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_s \rho_s e_s + \alpha_g \rho_g e_g \right) + \mathbf{v_g} \cdot \nabla \alpha_g \rho_g e_g = - k \nabla^2 T - \nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{R}} \tag{6.6}$$

donde α_i es la fracción en volumen y $e_i = \int_{T_\infty}^{T} C_{p,i} dT$ para cada una de las fases involucradas $i = s, g$ respectivamente. Además, se tiene que la entalpía asociada a la fase gaseosa es aproximadamente $\sim 10^3$ ordenees de magnitud menor que la de la fase sólida $\alpha_s \rho_s c_{p,s}$, por lo que puede ser despreciada de la ecuación de energía.

Luego, dadas las características físicas y geométricas del problema modelado, se puede considerar transferencia de calor solamente en la dirección del eje z, en donde l_z corresponde al espesor físico del volumen de control

$$\alpha_s \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha_g \rho_g v_z \frac{\partial e_g}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{R}}}{\partial z} \right). \tag{6.7}$$

Se aplica el operador $\int_0^{l_z} dz$ a ambos lados de la Ecuación 6.7 sujeto a las siguientes condiciones de borde,

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_g \rho_g e_g \right)\Big|_{z=0} = \dot{q}''_{inc} - \chi \dot{q}''_{cri} \tag{6.8}$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_g \rho_g e_g \right)\Big|_{z=l_z} = 0 \tag{6.9}$$

Con lo anterior, se puede definir un flujo de calor incidente combinado como $\dot{q}''_T = \dot{q}''_{inc} - \chi \dot{q}''_{cri}$, el cual es obtenido desde flujo de calor incidente menos las pérdidas promedio de calor como una porción del flujo de calor crítico mediante el factor χ, con lo cual se puede reescribir la Ecuación 6.7 de la siguiente manera

$$\alpha_k \rho_k l_z c_{p,k} \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}''_T - \epsilon\sigma \left(T^4 - T_\infty^4 \right). \tag{6.10}$$

Para obtener una expresión analítica que permita obtener la temperatura, se realiza una aproximación mediante series de potencias de Taylor al término no linea de T^4 al rededor de la temperatura ambiente T_∞, para lo cual se define un coeficiente de calor efectivo como $h_R = 4\epsilon\sigma T_\infty^3$. Entonces, el balance de energía en su forma linealizada para un medio poroso queda como

$$\alpha_s \rho_s l_z c_{p,s} \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}''_T - h_R (T - T_\infty), \tag{6.11}$$

el cual corresponde a una variación del modelo clásico, el cual ahora es derivado para un medio poroso.

Por otro lado, con el procedimiento estudiado en la sección anterior 6.2, es posible integrar el efecto de la humedad a este modelo poroso de la Ecuación 6.11. Para ello, se definen los siguientes parámetros; ς como la energía requerida para alcanzar la ignición del material sólido en la fase s, μ como el incremento normalizado de energía que se requiere para calentar el agua contenida y evaporarla de a fase sólida

$$\varsigma = \rho_d c_{p,d} (T_{ig} - T_\infty) \qquad \mu = \frac{c_{p,w}(T_b - T_\infty) + L_w}{c_{p,d}(T_{ig} - T_\infty)} \qquad \lambda = \frac{m_w}{m_s}$$

siendo λ el contenido de humedad medido en base seca, por lo que la Ecuación 6.10 se puede reescribir como

$$\alpha_k l_z \varsigma (1 + \mu\lambda) \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}''_T - h_R (T - T_\infty). \tag{6.12}$$

Esta ecuación de calor involucra los requerimientos para calentar el material seco junto al agua contenida en la muestra como contenido de humedad hasta evaporarla y luego provocar la ignición del material, entonces, solo resta obtener la expresión analítica que permita obtener la temperatura a la que esto ocurriría. Para ello, para resolver la ecuación planteada, se definen los siguientes parámetros y variables

normalizadas

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_{ig} - T_\infty} \qquad \tau = \frac{\alpha_k l_z \varsigma (1 + \mu\lambda)}{\dot{q}''_{cri}}$$
$$\psi = \frac{h_R (T_{ig} - T_\infty)}{\dot{q}''_{cri}} \qquad \varphi = \frac{\dot{q}''_T}{\dot{q}''_{cri}}$$

Con esto, la Ecuación 6.12 es reescrita en forma normalizada sujeta a la condición inicial $\Theta|_{t=0} = 0$, con la que finalmente se puede obtener una solución analítica para $T(t)$ como

$$T(t) = T_\infty + \frac{\dot{q}''_T}{h_R} \left[1 - e^{-\left(\frac{h_R t}{\alpha_k \rho_d l_z c_{p,d} (1 + \mu\lambda)} \right)} \right]. \tag{6.13}$$

6.5.2. Resultados

Para ver el desempeño del modelo desarrollado, se contrasta con mediciones experimentales realizadas por el profesor J. Contreras (PUCV) en Malaga, España. Estas mediciones experimentales se hicieron para aciculas de *pinus pinaster* con diferentes contenidos de humedad utilizando un cono calorímetro. Mayores detalles del procedimiento y metodologías usadas no son incluidas en este estudio, pero se detallan en el articulo producto de esta campaña experimental en conjunto con la utilización de este modelo térmico.

6.5.2.1. Temperatura de ignición

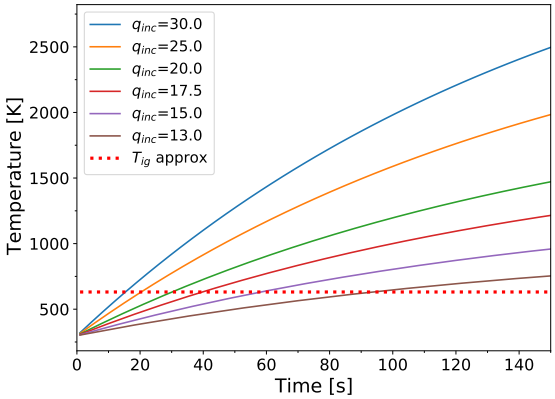
La evolución de la temperatura en el tiempo para diferentes flujos de calor incidente, se puede graficar a partir de la Ecuación 6.13. Esto se presentan en la Figura 6.1 para cuatro diferentes humedades en un rango de flujos de calor incidente entre 13 kW/m^2 y 30 kW/m^2.

La temperatura a la que se alcanza la ignición esta marcada por la línea punteada en cada gráfico, lo cual permite obtener el tiempo de ignición al interceptarla con la curva de evolución de temperatura en el tiempo. De esto se puede desprender que mientras mayor es el contenido de humedad, la ignición toma mas tiempo en alcanzarse.

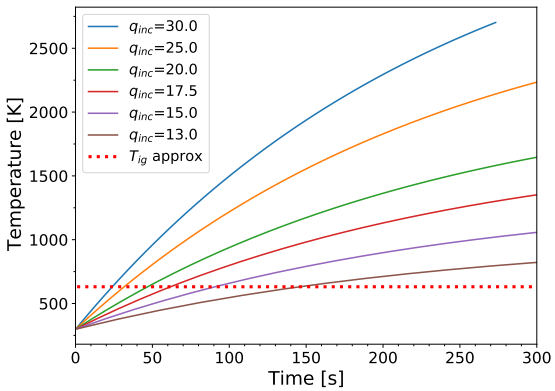
Para observar el impacto del contenido de humedad, se grafica la evolución de la temperatura según el flujo de calor incidente para un tiempo de ignición dado, lo cual se puede ver en la Figura 6.2. Esta figura muestra que para un mismo flujo incidente, el volumen de control alcanza temperaturas de ignición más bajas en la medida que el contenido de humedad es mayor ante un mismo tiempo de exposición. Lo anterior se hace aún mas evidente para los flujos de calor más altos.

6.5.2.2. Tiempos de ignición

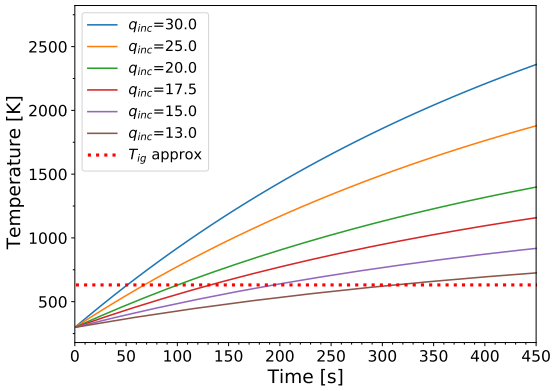
Para obtener el tiempo de ignición, la temperatura de ignición debe ser un valor conocido, independiente de la forma en que se obtenga ya sea de medidas experimentales, de manera teórica o



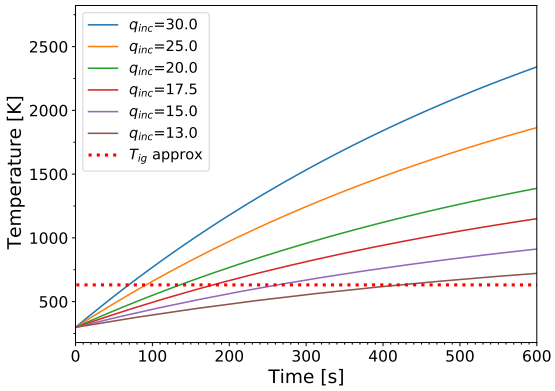
(a) Temperatura versus tiempo para un contenido de humedad λ=0,020.



(b) Temperatura versus tiempo para un contenido de humedad λ=0,137.



(c) Temperatura versus tiempo para un contenido de humedad λ=0,510.



(d) Temperatura versus tiempo para un contenido de humedad λ=0,757.

Figura 6.1: Evolución de la temperatura versus tiempo para distintos flujos de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ y contenidos de humedad λ

desde la literatura. Para este caso, hace mediante su relación con el flujo crítico de ignición cuando $T = T_{ig}$

$$\dot{q}''_{cri} = \sigma \left(T_{ig}^4 - T_\infty^4 \right) \tag{6.14}$$

Entonces, desde la Ecuación 6.13 cuando $t \to \infty$ alcanza el estado estacionario, se linealiza el término exponencial y se aplican las condiciones de ignición (Ecuación 6.14), con lo que se puede obtener una expresión para el tiempo de ignición

$$t_{ig} = \frac{\alpha_k l_z \varsigma (1 + \mu\lambda)}{\dot{q}''_{inc} - \chi \dot{q}''_{cri}} \tag{6.15}$$

Luego, desde la Ecuación 6.15 se puede obtener una relación lineal entre el inverso del tiempo de ignición $1/t_{ig}$ y el flujo incidente combinado $\dot{q}''_T$ como se presenta a continuación,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \left(\frac{1}{\alpha_k l_z \varsigma (1 + \mu\lambda)} \right) \left(\dot{q}''_{inc} - \chi \dot{q}''_{cri} \right). \tag{6.16}$$

Los resultados del modelo son presentados en la Figura 6.3 junto a la data experimental disponible,

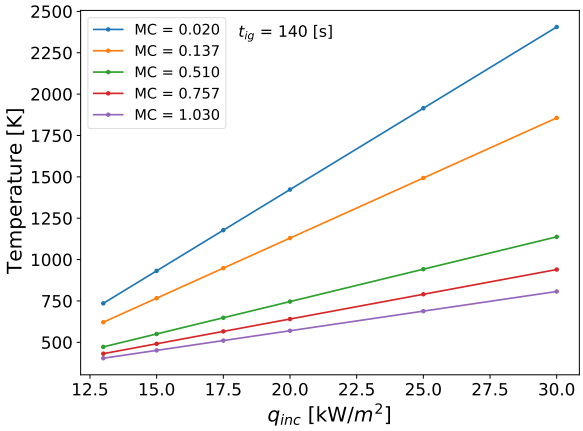
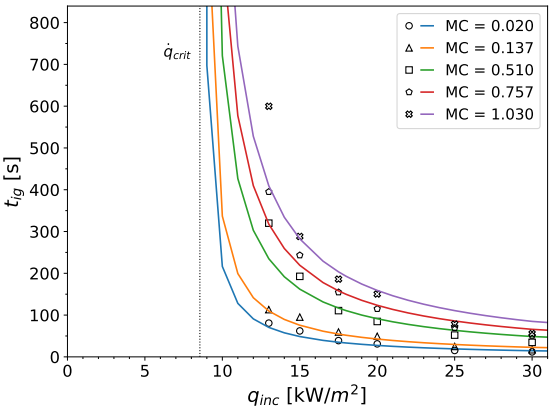
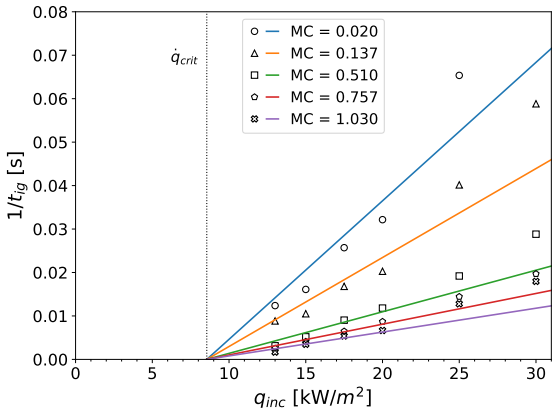


Figura 6.2: Temperatura T versus flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ para distintos contenidos de humedad a un tiempo de exposición de 140 s.

en donde se puede extrapolar de manera teórica desde la Figura 6.3b para derivar un flujo critico de ignición teórico $\dot{q}''_{cri,teo}$, dada la dificultad experimental que representa su obtención. Este valor es obtenido de manera iterativa con la Ecuación 6.16 cuando $t \to \infty$, $\dot{q}''_{inc} \to \dot{q}''_{cri,teo}$, dando un valor de 8,5 W/m^2.



(a) Tiempos de ignición t_{ig} para distintos flujos de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$.



(b) Inverso del tiempos de ignición $1/t_{ig}$ para distintos flujos de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$.

Figura 6.3: Tiempos de ignición para distintos flujos de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ para diferentes contenidos de humedad λ

6.5.3. Propiedades efectivas

Desde la ecuación Ecuación 6.16, se pueden obtener las tendencias lineales extrapolando la data experimental y con ello obtener un best-fit. La recta formada tiene una pendiente m_λ según cada humedad, con la que se pueden obtener las propiedades efectivas para el material, el proceso es análogo para obtener propiedades efectivas desde el modelo analítico pero el punto de interés radica justamente en el comportamiento efectivo de las propiedades termo-físicas cuando se encuentran sometidas a un estrés externo (calentamiento). Desafortunadamente, esto solo es posible obtenerlo de manera separada para ρ_d y $c_{p,d}$ ya que se encuentran relacionadas por el contenido de humedad que es medido en base seca, esto significa que las propiedades extensivas como la densidad y masa, siempre estarán ligadas al

contenido de humedad y no así con el calor específico, por lo que no es posible obtener una expresión para ambas propiedades en su conjunto como propiedades termo-físicas

$$\rho_{d,eff} = \frac{1}{m_\lambda \alpha_k l_z \left(c_{p,d}(T_{ig} - T_\infty) + \lambda(c_{p,w}(T_b - T_\infty) + L_w)\right)}, \tag{6.17}$$

$$c_{pd,eff} = \frac{1}{m_\lambda \alpha_k l_z \rho_d (T_{ig} - T_\infty)} - \frac{\lambda(c_{p,w}(T_b - T_\infty) + L_w)}{\rho_d (T_{ig} - T_\infty)}. \tag{6.18}$$

No obstante, ya que no es posible obtener relaciones directas para las propiedades efectivas en seco, se pueden obtener para las propiedades humedecidas, es decir, incluyendo el efecto que tiene el requerimiento adicional de energía para calentar y evaporar el agua contenida

$$\rho_d c_{p,d} \left(1 + \mu\lambda\right) = \frac{1}{m_\lambda \alpha_f l_z \left(T_{ig} - T_\infty\right)} \tag{6.19}$$

6.5.4. Desarrollo en condiciones Thermally Thick

Tratando el volumen de control como en la teoría clásica, es decir, como a un sólido semi infinito en donde la variable de interés es solo la temperatura en la superficie T_s, la Ecuación 6.6 se convierte en

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{6.20}$$

siguiendo la notación del modelo thermally thin. Entonces, a partir del coeficiente de difusión $D = k/(\rho c_p)$ se introduce un coeficiente de difusión modificado por la porosidad como D_α.

Las condiciones de borde que caracterizan el problema, junto a la condición inicial se pueden definir como

$$\begin{aligned} x &= 0, && T = T_s, \text{constante} \\ x &\to \infty, && T = T_\infty \\ t &= 0, && T = T_\infty \end{aligned}$$

Luego, con el propósito de resolver la ecuación diferencial anterior, se definen las siguientes variables normalizadas

$$\Omega(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \tag{6.21}$$

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{D_\alpha t}} \tag{6.22}$$

Notar que el proceso de normalización consiste en desplazar la variable a su origen, es decir, mover el punto cero, para luego dividir por el intervalo en que la variable original está definida. De esta manera, se realizan las sustituciones correspondientes y el problema inicial se presenta ahora en las nuevas

variables normalizadas

$$(T_s - T_\infty)\frac{d\Omega}{d\eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right) = D_\alpha (T_s - T_\infty)\frac{d^2\Omega}{d\eta^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right)^2, \tag{6.23}$$

el cual se resuelve para las condiciones presentadas en 6.8 y 6.9, dando como solución para la temperatura superficial

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}''_T}{\chi \dot{q}''_{cri}}\left(1 - e^{\gamma^2}\,\mathrm{erfc}(\gamma)\right), \tag{6.24}$$

en donde $\gamma = \chi\dot{q}''_{cri}\sqrt{D_\alpha t}/(\kappa\varsigma(1+\mu\lambda))$.

En las condiciones de ignición, la temperatura superficial se convierte en $T_s = T_{ig}$, por lo que el tiempo de ignición t_{ig} se puede obtener de la Ecuación 6.24 aplicando una expansión en serie

$$t_{ig(thick)} = \frac{\frac{\pi}{4}\alpha_k D\left[\varsigma(1+\mu\lambda)\right]^2}{\left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right)^2}. \tag{6.25}$$

6.5.5. Respuesta térmica del material

Considerando la expresión obtenida en la Ecuación 6.15 como el tiempo de ignición en condiciones thermally thin, se puede definir un tiempo de difusión térmica τ_{th} (s), el cual demarca la transición de la respuesta térmica del material, es decir, el paso desde un comportamiento thermally thin a uno thermally thick o viceversa.

$$\tau_{th} = \frac{\alpha_k(1+\mu\lambda)4\rho_d c_{p,d} l_z^2}{\pi\kappa_d}. \tag{6.26}$$

Esto es útil para entender el comportamiento de la respuesta térmica de un material, permitiendo definir acercamiento físico con que se debe abordar el problema de manera más precisa, es decir, tratar las condiciones del problema como thermally thin o thermally thick. Con esto, se pueden relacionar los tiempos según cada forma de abordar el problema por medio del coeficiente de difusión térmica

$$t_{ig(thin)} = \left(\tau_{th} t_{ig(thick)}\right)^{1/2}. \tag{6.27}$$

Entonces, utilizando la relación de la Ecuación 6.27, se puede definir una forma generalizada que puede ser aplicada a los dos comportamientos antes mencionados

$$t_{ig(thick/thin)} = \left[\left(\frac{\left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\alpha_k D(1+\mu\lambda)\right)^{1/2}\varsigma\left(T_{ig} - T_\infty\right)}\right)^4 \frac{1}{\tau_{th}^2} + \left(\frac{\left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\alpha_k D(1+\mu\lambda)\right)^{1/2}\varsigma\left(T_{ig} - T_\infty\right)}\right)^8\right]^{-1/4}. \tag{6.28}$$

Entonces, en la Ecuación 6.28 si el comportamiento del material corresponde a uno thermally thick, el tiempo de ignición t_{ig} será menor al tiempo de difusión térmica τ_{th}, de lo contrario, si el material responde como un material thermally thin, el tiempo de ignición será mayor que el tiempo de difusión térmica. De esta manera, la relación entre τ_{th} y t_{ig} proporciona la transición entre el comportamiento thermally thin y thermally thick.

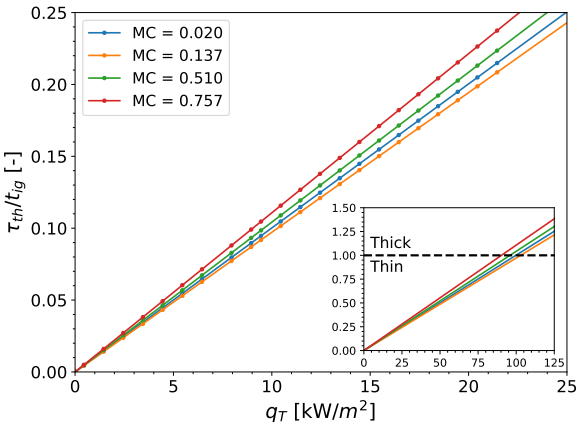


Figura 6.4: Respuesta térmica del material versus flujo de calor combinado $\dot{q}''_T$ para distintos contenidos de humedad.

Referencias

[1] Horatio Scott Carslaw y John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Inf. téc. Clarendon Press, 1959.

[2] David W Hahn y M Necati Özisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 2012.

[3] N Hernández y col. «Piloted ignition delay times on optically thin PMMA cylinders». En: *Proceedings of the Combustion Institute* 37.3 (2019), págs. 3993-4000.

[4] Mohammed M Khan, John L De Ris y Steve D Ogden. «Effect of moisture on ignition time of cellulosic materials». En: *Fire Safety Science* 9 (2008), págs. 167-178.

[5] Kenneth K Kuo. *Principles of combustion*. TJ254. 5 K85 2005. 2005.

[6] P Mindykowski y col. «Piloted ignition of wildland fuels». En: *Fire Safety Journal* 46.1-2 (2011), págs. 34-40.

[7] Michael F Modest. *Radiative heat transfer*. Academic press, 2013.

[8] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[9] Pedro Reszka y col. «Ignition delay times of live and dead pinus radiata needles». En: *Fire safety journal* 112 (2020), pág. 102948.

[10] J Rivera y col. «Ignition of wildland fuels by idealized firebrands». En: *Fire Safety Journal* 120 (2021), pág. 103036.

[11] Warren M Rohsenow, James P Hartnett, Young I Cho y col. *Handbook of heat transfer*. Vol. 3. McGraw-Hill New York, 1998.

[12] Forman A Williams. *Combustion theory*. CRC Press, 2018.

Capítulo 7

Estrato de combustible seco

Contenidos del Capítulo

7.1. Introducción 77
7.2. Planteamiento general de la ecuación de calor 77
7.3. Componente de la ecuación de calor 80
7.3.1. Operatoria a magnitudes físicas 80
7.3.1.1. Temperatura 80
7.3.1.2. Flujo de calor 81
7.3.1.3. Velocidad 81
7.3.2. Conducción 82
7.3.3. Convección interior 82
7.3.4. Radiación 82
7.4. Ecuación general de calor para un medio seco 83
7.5. Divergencia del flujo radiativo 88
7.5.1. Método de los esféricos armónicos 89
7.5.1.1. Ecuación de Bessel 90
7.6. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio sin humedad 95
7.7. Condiciones de Ignición 97
7.7.1. Flujo Crítico 97
7.7.2. Charring 97
7.7.3. Temperatura y Tiempo de Ignición 98
7.7.4. Criterio de Ignición 99
7.7.5. Resumen de supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio sin humedad 99
7.8. Resolución Numérica Exacta del Modelo de Energía 100
7.9. Modelo Analítico 100
7.10. Medidas experimentales 104
7.11. Correlaciones 105

7.12. Resultados **105**
7.12.1. Temperatura de ignición 105
7.12.2. Tiempos de ignición 106
7.12.3. Adimensionalización 107
7.12.4. Propiedades efectivas 108
Referencias **110**

7.1. Introducción

Una vez que se manejan los conceptos matemáticos básicos del calculo vectorial y se han estudiado algunos modelos previamente desarrollados, es posible continuar el análisis hacía modelos de ignición mas complejos que requieren el dominio de los conceptos tratados con anterioridad. En este capitulo se derivará a partir de la ecuación de energía, un modelo de ignición para un medio poroso sin humedad, cuyas condiciones geométricas y disposición requieren trabajar la ecuación de calor en coordenadas cilíndricas. Este punto es fundamental, ya que requiere un manejo mas acabado de las herramientas del calculo vector que en un escenario en coordenadas cartesianas.

Que el medio sea poroso tiene repercusiones importantes en la forma de abordar la ecuación de energía, pues al incluir la presencia de aire al interior del volumen de control, el medio pasa a representar el calentamiento de dos fases distintas que tienen al equilibrio térmico y por ello generan gradientes de temperatura al interior. Lo anterior es congruente con lo trabajado en el Capítulo 2, en donde las aproximaciones thermally thick y thermally thin presentan formas de abordar el problema, sin embargo, estos acercamientos clásicos son desarrollados para un medio sólido. Como se estudió en dicho capítulo, estas aproximaciones consideran solo a la temperatura superficial y al problema como un problema puramente de conducción, por lo que no incluyen efectos como la emisión o absorción. Además, al tratarse de un medio poroso, la transferencia de calor al interior no puede darse enteramente por conducción ya que debido a la porosidad, el material sólido tiene muy pocos puntos de contacto por lo que el mecanismo que predomina debe ser otro. Si se considera un medio aislado de corrientes externas de aire de tal forma de controlar las condiciones de borde del problema para poder modelar el fenómeno, la convección tampoco tiene un gran impacto pues solo se produce como convección interna producto de la liberación de gases. Entonces, la respuesta radica en la transferencia de calor por radiación, la cual no es absorbida enteramente en la superficie por los mismos fenómenos descritos recientemente, por lo que en este apartado se aborda de manera especial el término radiativo.

Desafortunadamente, al hablar de radiación es usual encontrarse con dificultades matemáticas considerables, partiendo por el hecho de que no es posible encontrar expresiones analíticas de manera trivial debido al comportamiento de este término. Por ello, en este capitulo se propone un modelo que incluye el fenómeno radiativo como la divergencia de la radiación al interior del medio, del cual se obtiene una solución por medio de una resolución numérica, y adicionalmente, con el fin de obtener expresiones afines a la teoría clásica, se propone un modelo analítico que aproxima el término radiativo asumiendo un nivel de perdida de precisión en los resultados.

7.2. Planteamiento general de la ecuación de calor

De acuerdo con Modest, la ecuación general de energía para un fluido compresible en movimiento se puede se puede establecer de la siguiente manera

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \dot{\mathbf{q}}'' - p\nabla \mathbf{v} + \mu\Phi + Q''', \tag{7.1}$$

donde las propiedades del medio corresponden a ρ densidad del medio, u energía interna, $\mathbf{v}$ vector velocidad, $\dot{\mathbf{q}}''$ vector de flujo de calor total, Φ función de disipación y $\dot{Q}'''$ calor generado en el medio (por ejemplo, una reacción química). Un desarrollo mas detallado del modelamiento general de la ecuación de energía se puede ver en [9]. Si el medio es radiativamente participante a través de la emisión, absorción y scattering, entonces la ecuación de conservación para momentum y energía son alteradas por tres efectos:

1. El termino del flujo de calor $\dot{\mathbf{q}}''$, en la mayoría de las aplicaciones no tiene el termino de radiación por lo que es solo difusión molecular (conducción de calor), pero ahora tiene otro componente que es el flujo radiativo debido a la energía radiativa interactuando con el medio dentro del volumen de control.
2. La energía interna ahora contiene la contribución de la radiación (radiación incidente G).
3. El tensor de presión de radiación se debe agregar al tradicional tensor de presión de dinámica de fluidos.

Luego, la *derivada material*, se puede reescribir como [Modest]:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla u \right) \tag{7.2}$$

Luego, despreciando los efectos de disipación y momentum producto del movimiento de las partículas, sin generación de calor producto de reacciones internas en el proceso de pirólisis ni ninguna otra reacción química, la Ecuación 7.1 combinada con la Ecuación 7.2 permite reescribir lo siguiente

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla u \right) = - \nabla \dot{\mathbf{q}}''. \tag{7.3}$$

Lo anterior es válido para un medio continuo en una sola fase o estado, pero el caso en estudio de este trabajo corresponde a un medio poroso, por ello, la Ecuación 7.3 se debe desarrollar más para el caso particular aquí planteado.

Al tratarse de un estrato poroso, se tiene que coexisten por un lado una fase gaseosa y por otro la parte solida del medio, de esta forma, se considera al lecho combustible como un medio heterogéneo compuesto por partículas solidas de igual geometría y propiedades. Luego, para un pequeño volumen de control de este estrato V, se dice que la fase sólida seca d coexiste en equilibrio con la fase gaseosa g por lo que se puede definir una fracción en volumen, o *packing ratio* α_d

$$\alpha_d = \frac{V_d}{V} \tag{7.4}$$

donde V_d es el volumen ocupado por la fase sólida seca d en el volumen V. De manera análoga, se tiene para el volumen ocupado por la fase gaseosa, es decir, la porosidad o *grado de aireación*

$$\alpha_g = \frac{V_g}{V}. \tag{7.5}$$

Para este estrato poroso, considerando un contenido de humedad teórico del 0 %, se puede decir que en él solo hay material seco solido y material gaseoso solamente como aire, por lo que el medio m solo contiene una fase solida seca d (de *dry* en inglés) y la fase gaseosa g. Estos conceptos se deben integrar de alguna manera a lo definido en la Ecuación 7.3.

De acuerdo con [10], los modelos de ignición se pueden clasificar en tres grandes: *(i)* fase gaseosa, *(ii)* heterogéneos, *(iii)* fase solida, según lo cuales las ecuaciones que gobiernan el proceso de ignición puede diferir en algunos aspectos. En este sentido, el presente estudio se puede clasificar como ignición hetoregenea ya que el mecanismo que controla el proceso es la interacción que existe entre la fase solida y el ambiente, a su vez, las ecuaciones de los modelos de ignición de fase solida, el mecanismo predominante que eleva la temperatura es por el intercambio de calor con una fuente externa. De esta manera, se tiene que la ecuación de energía para la fase solida esta dada por

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_s c_{p,d} T\right)}_{\text{energía térmica}} = \underbrace{\nabla\cdot\left(k_d \nabla T\right)}_{\text{conducción}} + \underbrace{\dot{q}'''_{quim,d}}_{\text{reacción exotérmica}} + \underbrace{\dot{q}'''_{rad,d}}_{\text{absorción radiación}} - \underbrace{\dot{q}'''_{piro,d}}_{\text{pirólisis}} + \underbrace{\dot{q}'''_{fot,d}}_{\text{energía fotoquímica}} \tag{7.6}$$

Mientras que para la fase gaseosa se tiene que la ecuación de continuidad es

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g\right)}_{\text{acumulación de masa}} + \underbrace{\nabla\cdot\left(\rho_g \mathbf{v_g}\right)}_{\text{tasa de eflujo másico}} = 0 \tag{7.7}$$

Si bien estas ecuaciones pueden diferir en algunos elementos según algunos autores, las concepciones generales son las mismas, por lo que bajo las consideraciones mencionadas al inicio de esta sección, las ecuaciones de conservación para la fase solida y gaseosa se pueden unificar en una sola ecuación general para el medio mediante las fracciones en volumen α_s y α_g de cada fase en la forma de la Ecuación 7.1 como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_d \rho_d e_d + \alpha_g \rho_g e_g\right) + \nabla\cdot\alpha_g \rho_g e_g \mathbf{v_g} = -\nabla\left(\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} + \dot{\mathbf{q}}''\right), \tag{7.8}$$

con $e_i = \int_{T_\infty}^{T_i} c_{p,i} dT$ energía interna de la fase i, $\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}}$ el vector del calor por conducción en el medio y $\dot{\mathbf{q}}''$ el vector de calor radiativo.

Dado que la entalpía asociada a la fase gaseosa $\alpha_g \rho_g c_{p,g}$ es $\sim 10^3$ ordenes de magnitud menor a la entalpía de la fase sólida, se puede despreciar de la Ecuación 7.8. Reordenando los términos, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_d \rho_d c_{p,d} T\right) = -\nabla\left(\mathbf{q_{cond,m}}\right) - \nabla\cdot\alpha_g \rho_g e_g \mathbf{v_g} - \nabla\left(\dot{\mathbf{q}}''\right) \tag{7.9}$$

En este punto ya se tiene un balance de energía compacto, el cual puede ser trabajado con las condiciones físicas del problema sin un mayor nivel de dificultad. La Ecuación 7.9 representa un balance en donde el lado izquierdo corresponde a la variación de energía interna del estrato, el cual debe ser igual al lado derecho, en donde se tiene la variación de calor por conducción (*ley de Fourier*), menos el

calor producto del movimiento de gases al interior del estrato y finalmente la variación producto de la radiación, el cual será trabajado como la divergencia del flujo radiativo (sección 7.5).

7.3. Componente de la ecuación de calor

Ahora bien, se procede a trabajar cada término mencionado por separado ya que al tratarse de fenómenos físicos espaciales, el operador nabla descompone cada magnitud física en diferentes componentes espaciales o direcciones según su comportamiento (campo vectorial o escalar). Por lo que es importante realizar algunas aclaraciones y definiciones para comprender la distribución espacial y temporal de las magnitudes involucradas.

7.3.1. Operatoria a magnitudes físicas

Las magnitudes físicas se pueden distinguir según como está condicionado el sistema que describen, esto es:

- **Propiedades intensivas** son aquellas que no dependen de la cantidad de materia que posee un cuerpo. Si el sistema se divide en varios subsistemas su valor permanecerá inalterable, por este motivo no son aditivas.
- **Propiedades extensivas** son aquellas que sí dependen de la masa, son magnitudes cuyo valor es proporcional al tamaño del sistema que describe, son propiedades aditivas. Estas magnitudes pueden ser expresadas como la suma de las magnitudes de un conjunto de subsistemas que forman el sistema original de cada materia.

Muchas magnitudes extensivas, como el volumen o la cantidad de calor, pueden convertirse en intensivas dividiéndolas por la cantidad de sustancia, la masa o el volumen de la muestra; resultando en valores por unidad de sustancia, de masa, o de volumen respectivamente; como lo son el volumen molar, la porosidad, el calor específico o el peso específico. Con lo anterior, se procede a describir vectorialmente cada magnitud física involucrada en la ecuación de calor de manera genérica para luego desarrollarla por si sola.

7.3.1.1. Temperatura

La temperatura es un magnitud intensiva que adopta un valor distinto para cada punto del espacio, por lo que puede ser descrito como un campo escalar $T = T(x_1, x_2, x_3)$ en el que (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas del punto considerado. Asumiendo que el valor de la temperatura viene dado por una función continua y diferenciable, el gradiente ∇T se define mediante derivadas parciales como el vector:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)$$

7.3.1.2. Flujo de calor

El vector de flujo calor total $\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} + \dot{\mathbf{q}}''$ se puede descomponer en sus componentes direccionales, tanto para el término de conducción como el de radiación.

$$\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} = \left(\dot{q}''_{cond,m,r}, \dot{q}''_{cond,m,\varphi}, \dot{q}''_{cond,m,z}\right) \tag{7.10}$$

$$\dot{\mathbf{q}}'' = \left(\dot{q}''_{r}, \dot{q}''_{\varphi}, \dot{q}''_{z}\right) \tag{7.11}$$

Es importante notar que desde la *Ley de Fourier* para la conducción, se tiene que el flujo de calor por unidad de superficie es igual al gradiente de temperatura por la conductividad térmica del medio $\mathbf{q_{cond}} = k\nabla T$. Lo cual, dado lo anterior, transforma el campo escalar de temperatura en un campo vectorial (gradiente), por lo que consecuentemente el flujo de calor se entiende como un campo vectorial.

7.3.1.3. Velocidad

La convección al interior del estrato esta dada por la velocidad con que se mueva el fluido, en este caso el aire, al interior del medio

$$\nabla \cdot \alpha_g \rho_g e_g \mathbf{v_g}.$$

Las propiedades de la parte gaseosa $\alpha_g \rho_g$ son constantes al tratarse al aire como un *material isotrópico*, por lo que $e_g \mathbf{v_g}$ es un campo vectorial, luego, al aplicar el operador gradiente sobre un vector, actúa como la divergencia de dicho vector, $\nabla \cdot (e_g \mathbf{v_g})$, da como resultado un escalar. Para ejemplificar esto, se definen $\vec{A}, \vec{B}$ vectores:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_n \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + ... + A_n B_n \tag{7.12}$$

Con lo anterior, ahora es posible plantear cada termino de manera direccional, y con ello buscar una forma de resolver la ecuación de calor de manera conjunta. De esta manera, se continua desarrollando cada término de la Ecuación 7.9.

Como se ha dicho, el lado izquierdo corresponde a la variación de energía interna del sistema, en cuanto al lado derecho se detalla cada término.

7.3.2. Conducción

Sea k_m el coeficiente de conducción del medio equivalente $k_m = \alpha_k k_k + (1 - \alpha_k)k_g$.

$$\nabla\left(k_m \nabla T\right) = k_m \nabla^2 T \tag{7.13}$$

$$= k_m \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{7.14}$$

7.3.3. Convección interior

Desde la Ecuación 7.2, se debe encontrar una expresión para la *derivada convectiva* o *derivada direccional*, en donde, desde [15] se tiene que:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\right) \tag{7.15}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{7.16}$$

La ecuación de continuidad en la forma de 7.15 describe la tasa de cambio de la densidad en un punto fijo el fluido. Luego, diferenciando a ambos lados y agrupando todas las derivadas de ρ en el lado izquierdo, se puede obtener la forma equivalente de la ecuación de continuidad como Ecuación 7.16, por lo tanto las expresiones de las ecuaciones generales para la fase gaseosa son equivalente entre lo propuesto por [10, 13, 15].

Luego, aplicando el mismo proceso a la energía interna e en lugar de la densidad para el vector de velocidad $\mathbf{v_g} = (u_g, v_g, w_g)$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_g} \cdot \nabla e_m &= \mathbf{v_g} \cdot \nabla \alpha_g \rho_g e_g \\
&= \alpha_g \rho_g \left(\nabla \cdot e_g \mathbf{v}\right) \\
&= \alpha_g \rho_g \left(\nabla \cdot (e_g u_g, e_g v_g, e_g w_g)\right) \\
&= \alpha_g \rho_g \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(e_g r u_g) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(e_g v_g) + \frac{\partial}{\partial z}(e_g w_g)\right)
\end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3.4. Radiación

El vector de flujo radiativo tiene componentes direccionales por lo que puede ser descompuesto en cada dirección. De momento solo se detallará como se puede desagregar en un sistema de coordenadas cilíndricas y su desarrollo se expandirá en la sección 7.5.

$$\dot{\mathbf{q}}'' = \left(\dot{q}_r'', \dot{q}_\varphi'', \dot{q}_z''\right) \tag{7.18}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\dot{q}_\varphi'')}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z} \tag{7.19}$$

7.4. Ecuación general de calor para un medio seco

Ahora bien, reemplazando en la Ecuación 7.9 cada término obtenido en la sección anterior (Ecuación 7.14, Ecuación 7.17 y Ecuación 7.19).

$$\begin{aligned}\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial T}{\partial t} = &-k_m \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \\ &- \alpha_g \rho_g \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(e_g r u_g) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(e_g v_g) + \frac{\partial}{\partial z}(e_g w_g)\right) - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\dot{q}_\varphi'')}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{7.20}$$

Ahora bien, dado que la temperatura es un fenómeno espacial y temporal, no es posible obtener un valor inmediato, ya que se requiere definir en que punto del espacio y tiempo se obtendrá la temperatura (campo escalar), además, se tiene un medio participativo con dos fases presentes (solida y gaseosa), por lo que para cada punto espacio-tiempo existirá una medida de temperatura para cada fase, las cuales eventualmente tenderán a un equilibrio térmico (transferencia de calor entre fases hasta llegar a un punto de equilibrio). Este proceso se da de manera continua, motivo por el cual la temperatura para este caso de estudio es efectivamente un campo escalar que posee diferentes medidas para cada combinación espacio-tiempo. Para poder resolver el problema, se asume un equilibrio térmico entre fases, es decir, el medio es tratado como un medio continuo en donde la fase solida y gaseosa se encuentran en equilibrio térmico, por lo que en cada combinación de espacio-tiempo, existirá una única temperatura para todo el volumen de control, lo cual permite reducir las ecuaciones de energía para T_k y T_g a una sola ecuación de transferencia de calor en una temperatura única T.

De esta forma, la Ecuación 7.20 representa lo anteriormente descrito, pero aun se requiere definir cada punto del espacio para obtener las coordenadas en donde se desea medir la temperatura en algún tiempo determinado, pero realizar este proceso no resulta practico ni demasiado útil en aplicaciones para la ingeniería. En este punto, la teoría clásica para la transferencia de calor en un medio participante asume que toda la radiación se absorbe en la superficie por lo que la divergencia del flujo radiativo es cero, y con ello, el problema se transforma en conducción pura. Sin embargo, como se ha trabajado en la sección referente al flujo radiativo, tratar este fenómeno de esa manera no seria del todo correcto ya que el espesor de penetración de la radiación no debe ser necesariamente despreciable, ya que en el proceso de calentamiento, este fenómeno cobra gran importancia sobretodo en fenómenos en donde el medio es poroso (como este caso de estudio), ya que el material (aciculas de pino) al encontrarse distribuidas de manera aleatoria, tienen muy pocos puntos de contacto al interior del volumen de control, por lo que

mientras mayor sea la porosidad del material, más importante se vuelva la transferencia de calor en donde no hay dependencia del contacto físico, tal como lo es la convección y la radiación, en donde esta última es tradicionalmente despreciada en la mayoría de configuraciones debido a la dificultad para abordar física y matemáticamente el fenómeno.

Por lo anterior, se define una temperatura espacial promedio $\overline{T}$, la cual representa la temperatura de todo el estrato o volumen de control como un solo elemento, permitiendo obtener un valor para la temperatura de todo el estrato para cada instante de tiempo. Al tratarse de un valor promedio, es de esperar que el valor medido en la superficie (expuesta a un flujo de calor) o al final del estrato (expuesto a las condiciones propias del ambiente que rodea al medio), puedan ser muy diferentes entre sí, por lo que el valor de $\overline{T}$ se encontrará en aquel rango. Dicha temperatura promediada espacialmente puede definirse de manera general para un sistema en coordenada cilíndricas como se presenta en la Ecuación 7.22, en donde la temperatura volumétrica es promediada entre las coordenadas iniciales del volumen de control, que es por donde incide el flujo de calor que genera el proceso de calentamiento, hasta el punto interior en donde la penetración de la radiación tiene efecto, es decir, hasta un espesor de penetración δ en la dirección del calentamiento. Es importante destacar que este punto no necesariamente debe coincidir con el extremo externo del volumen de control, pues puede ser el caso en que las condiciones y comportamiento del material o del medio no permitan que la radiación penetre a todo el material debido a sus propiedades térmicas o configuración, etc.

Promediar espacialmente la temperatura es posible ya que el medio es continuo y equivalente, la fase solida y gaseosa se consideran en equilibrio térmico como se ha mencionado en el párrafo anterior, por lo que la temperatura puede asumirse como homogénea al interior del estrato gracias al gradiente de temperatura a medida que la radiación penetra y calienta el medio.

Lo anterior es un punto fundamental, ya que el gradiente es pequeño al interior del medio, por lo que se puede asumir un equilibrio térmico entre las fases y esto permite obtener una temperatura promedio del medio espacialmente hablando *thermally thin*. Que el medio sea térmicamente delgado proviene del numero de Biot, el cual establece que si $Bi´ < 1$, el medio se considera *thermally thin*. Este se calcula como

$$Bi = \frac{h_{conv} L}{\lambda}, \tag{7.21}$$

que se traduce en que si un medio está expuesto a un mismo flujo (h_{conv}) y es capaz de conducir más calor a través de el (λ), este será térmicamente delgado. Esto ocurre por que el medio es *optically thin*, es decir que la radiación puede entrar fácilmente al medio ya que el camino óptico es muy pequeño ($´ < 1$), comportándose como si fuese un medio cuasi-transparente. Caso contrario sería si el medio fuese *optically thick*, es decir que es demasiado "grueso"para que la radiación penetre más allá de la superficie, esto provoca que la radiación se absorba casi completamente en la superficie provocando un gradiente muy grande al interior del medio (porque pasa de una temperatura muy alta en la superficie a temperatura ambiente en tan solo unos milímetros al interior del medio), lo cual genera que la radiación "no penetrez el medio tome un comportamiento como material *thermally thick*, por lo que no sería correcto utilizar una temperatura promediada espacialmente, solo se debería considerar la temperatura

superficial como se ha hecho en diversos trabajos de varios autores, continuando el acercamiento de la teoría clásica.

Para un volumen de control definido en un sistema en coordenadas cilíndricas, entre un radio r_1 y r_2, una altura l_1 y l_2, una circunferencia entre φ_1 y φ_2, se puede definir una temperatura promediada espacialmente como

$$\overline{T}(t) = \frac{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} T(r,\varphi,z,t) r dr d\varphi dz}{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz}. \tag{7.22}$$

Con lo anterior, se puede obtener un operador que es capaz de pasar la variable de temperatura puntual a un valor promediado. Como se ha descrito en esta sección, debido a las limitantes de trabajar con valores puntuales y su conflicto con el fenómeno físico, se busca trabajar en términos de propiedades promediadas para el volumen de control, por lo que se aplica el operador integral $\Big/ * \frac{1}{\pi l_z (r_2^2 - r_1^2)} \int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz$ a la Ecuación 7.20, obteniéndose

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\alpha_k \rho_k c_{p,k}\frac{\partial T}{\partial t}\right) r dr d\varphi dz}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr dz d\varphi} &= -\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} k_m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) r dr dz d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz} \\
&- \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha_g \rho_g\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(e_g r u_g)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(e_g v_g)+\frac{\partial}{\partial z}(e_g w_g)\right) r dr d\varphi dz}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz} \\
&- \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\dot{q}_\varphi'')}{\partial \varphi}+\frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z}\right) r dr dz d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Para el caso del *I-FIT*, se tiene que las condiciones geométricas del estrato en estudio son r_1 y $r_2 = r_1 + \delta$, una altura $l_1 = 0$ y $l_2 = l_z$, una circunferencia entre $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 2\pi$, por lo que los parámetros de integración se pueden simplificar. Es importante destacar que para este caso, como el espesor de penetración es mayor al diámetro exterior del *sample holder*, se considerará como notación solo como r_2 entendiendo que es es el radio inicial interior mas el espesor de penetración δ. Luego,

aplicando la condición de simetría radial, las variaciones $\partial\varphi$ son cero.

$$\alpha_k\rho_k c_{p,k}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} = -\frac{2\pi\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} k_m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}$$
$$-\frac{2\pi\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha_g\rho_g\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(e_g r u_g)+\frac{\partial}{\partial z}(e_g w_g)\right)rdrdz}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)} - \frac{2\pi\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r}+\frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z}\right)}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)} \quad (7.24)$$

Ahora, reagrupando los términos para cada dirección:

$$\alpha_k\rho_k c_{p,k}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} = -\frac{2\pi l_z}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_m r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\alpha_g\rho_g\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(e_g r u_g)\right)\right)rdr$$
$$-\frac{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{l_1}^{l_2}\left(k_m\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\alpha_g\rho_g\frac{\partial}{\partial z}(e_g w_g)+\frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z}\right)dz - \frac{2\pi l_z}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r}rdr \quad (7.25)$$

Se reordenan términos y factoriza cada derivada direccional para facilitar la aplicación del teorema fundamental del calculo. El término radiativo en la dirección r se ha dejado como un término por si solo ya que será tratado en un apartado especial para la radiación.

$$\alpha_k\rho_k c_{p,k}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} = -\frac{2}{\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_m r\frac{\partial T}{\partial r}+\alpha_g\rho_g e_g r u_g\right)rdr$$
$$-\frac{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(k_m\frac{\partial T}{\partial z}+\alpha_g\rho_g e_g w_g+\dot{q}_z''\right)dz - \frac{2\pi l_z}{\pi l_z\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{q}_r'')rdr \quad (7.26)$$

Luego, debido a que no hay condiciones que sustenten lo contrario, se asume que el gradiente en el eje z es lo suficientemente débil como para generar un impacto considerable en la ecuación de calor, por lo que se puede despreciar de la Ecuación 7.26.

$$\alpha_k\rho_k c_{p,k}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} = -\frac{2}{\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_m r\frac{\partial T}{\partial r}+\alpha_g\rho_g e_g r u_g\right)rdr - \frac{2}{\left(r_2^2-r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{q}_r'')rdr \quad (7.27)$$

Aplicando las técnicas de integración para intervalos cerrados y considerando al radio interior $r_1 = r_i$ como radio interior (*in*) y $r_2 = r_i + \delta = r_o$ como el radio exterior de integración (*out)* que es hasta donde la penetración de la radiación tiene efecto, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} =& -\frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[\left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_o} - \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i} \right] \\ & - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[(r \dot{q}_r'') \Big|_{r_o} - (r \dot{q}_r'') \Big|_{r_i} \right] \end{aligned} \tag{7.28}$$

A continuación, se aplican las condiciones de borde que caracterizan al problema físico en particular, dando forma a una situación muy particular, por lo que es en este punto donde la aplicación de este mismo modelo está sujeto a la validez de las condiciones de borde consideradas. De momento, al término de la radicación y sus valores en la frontera, no serán considerados y solo se dejarán expresados, pues como se mencionó anteriormente, se tratará este termino de manera especial en donde se utilizarán un método de resolución y es en ese punto donde se aplicarán las condiciones de borde, no obstante, se podría explicar ese apartado en este mismo punto y aplicar todas las condiciones de borde en r_i y r_o de manera simultanea para los términos agrupados de conducción y convección y también a la radiación, pero dada la extensión y complejidad de este ultimo, no es conveniente hacerlo de manera simultanea por lo que se hará de manera consecutiva como se ha descrito.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cd}'' =& \dot{q}_{cv}'' \\ \frac{\dot{q}_{cd}}{A_v} =& \frac{h}{A_h} \left(\overline{T} - T_\infty \right) \\ \text{Fenómeno volumétrico:} \quad \frac{2}{(r_i^2)} \left(k_m \frac{\partial T}{\partial r} \right) =& \left(\frac{h}{r_i^2} \left(\overline{T} - T_\infty \right) \right) \frac{1}{l_z} \end{aligned} \tag{7.29}$$

Por lo tanto, en el borde interior r_i se tiene que la convección interna junto a la conducción (efectos convectivo y difusivo) se pueden agrupar con un solo coeficiente de transferencia de calor h_c para intercambio entre la superficie interior expuesta y el ambiente.

$$r = r_i : \qquad \frac{h_{comb}}{l_z} \left(\overline{T} - T_\infty \right) = \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i} \tag{7.30}$$

$$r = r_i + \delta : \qquad 0 = \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g r u_g \right) \Big|_{r_i + \delta} \tag{7.31}$$

Con esto, se puede plantear una ecuación de calor en término de las propiedades promedio:

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{h_c}{l_z}\left(\overline{T} - T_\infty\right) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)}\left(r_o \dot{q}_r''(r_o) - r_i \dot{q}_r''(r_i)\right) \tag{7.32}$$

Ahora bien, como se ha mencionado antes, se trabajará el termino de la radiación de manera especial y se aplicarán las condiciones de borde que no se han utilizado en esta última parte.

7.5. Divergencia del flujo radiativo

Para contextualizar el problema, en este apartado se trabajará la divergencia del flujo radiativo, es decir, $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}''$ con lo cual se busca obtener una solución para la componente radial del vector de flujo de calor radiativo $\dot{q}_r''$ (por el supuesto empleado de transferencia de calor solo en la dirección r).

De acuerdo con la teoría clásica, el termino radiativo se considera absorbido completamente en la superficie, por lo que la temperatura es la temperatura superficial (no como en este caso que se considera un promedio espacial), y por tanto no hay calentamiento interior producto de la penetración de la radiación, esto se traduce en que al expresar la divergencia del flujo radiativo en la ecuación de calor, se puede emplear sin dificultad el teorema fundamental del calculo ya que al aplicar el operador integral a la divergencia del flujo de calor radiativo, este se considera constante en la dirección de la transferencia de calor resultando en el mismo flujo radiativo, es decir:

$$\int_{z_1}^{z_2} \dot{q}_z'' z = \dot{q}_z''(z_1) \tag{7.33}$$

debido a que se considera que toda la radiación es absorbida en la superficie, el término de la radiación evaluado en un punto hacía el interior del estrato evaluado (en el ejemplo una profundidad mayor a $z_1 = 0$) alejado de la superficie es cero.

Por otro lado, en este caso al tratarse de un medio poroso, la conducción se da en muy pocos puntos por lo que la transferencia de calor debe producirse por lo otros medios, sin embargo, al no existir un movimiento importante de fluido o aire al interior del volumen de control, la convección esta limitada a un papel secundario, por lo que el principal mecanismo de transferencia de calor es la radiación. Por este motivo es que no se aplica el mismo procedimiento clásico y se considera un espesor de penetración δ para la radiación. Lo anterior se sustenta en el supuesto de *thermally thin conditions*, en donde el material se comporta lo suficientemente delgado térmicamente como para permitir que la radiación penetre en el medio. Por esto y todo lo anterior, es que en este estudio se debe trabajar la divergencia del flujo radiativo $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}''$ para encontrar una solución (o comportamiento) para el flujo radiativo $\dot{q}_r''(r)$ en función de que tanto avanza en el medio (dirección r), el cual tendrá un comportamiento distinto al del flujo radiativo tratado de manera tradicional como $\dot{q} = \epsilon \sigma A_s T_s^4$, aún cuando ambos puedan depender de la temperatura a la cuarta potencia (como se verá a continuación), difieren en su dependencia con la dirección de la transferencia de calor.

7.5.1. Método de los esféricos armónicos

Para un medio con condiciones de borde delimitadas por ser superficie difusa y gris, la Aproximación-P_1 se puede trabajar de dos formas: (i) por medio de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (EDPs-1) simultaneas en radiación incidente y flujo de calor radiativo, o (ii) por una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden (EDP-2) para la radiación incidente. Para este caso se utilizará la primera forma ya que se tiene equilibrio radiativo para un medio gris.

Las ecuaciones simultaneas de manera general son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{7.34}$$

$$\nabla G = -\left(3\beta - A_1\sigma_s\right)\mathbf{q} \tag{7.35}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w : \qquad 2\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \quad 4J_w(r_w) - G \tag{7.36}$$

donde $\mathbf{q}$ es el flujo de calor radiativo total, $\nabla \cdot \mathbf{q}$ es la divergencia del flujo de calor radiativo total, G es la radiación incidente, $I_b(T)$ es la intensidad de la radiación en el medio, A_1 es un *linear-anisotropic scattering factor*, $J_w(r_w)$ es el flujo de calor total dejando la superficie en la locación r_w k es el coeficiente de absorción, σ_s es el coeficiente de scattering (dispersión), β es el coeficiente de extinción, y se tiene que:

$$\beta = \kappa + \sigma_s \tag{7.37}$$

Para este caso en particular, se considera un medio *non-scattering* (sin dispersión), por lo que $\sigma_s = 0$. De esta forma, el coeficiente de extinción es $\beta = \kappa$. Luego, desarrollando las condiciones de borde para coordenadas cilíndricas de manera general, se pueden plantear en función de T

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right) = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{7.38}$$

$$\nabla G = -\left(3\beta_1 - A_1\sigma_s\right)\dot{\mathbf{q}}'' \qquad \frac{\partial G}{\partial r} = -3\kappa\dot{q}_r'' \tag{7.39}$$

Luego, desarrollando el término para el flujo radiativo

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{7.40}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right) = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \Big/ \frac{\partial}{\partial r} \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right) = -\kappa\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right) \tag{7.42}$$

$$\tag{7.43}$$

Entonces, se puede combinar con la radiación incidente $\nabla G = -\left(3\beta - A_1\sigma_s\right)\dot{\mathbf{q}}''$,

$$-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right) = -3\kappa\dot{q}_r'' \tag{7.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(\dot{q}_r'' + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\right)\right) = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{7.45}$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) + \dot{q}_r''\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)(r)\right)\frac{1}{r} = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{7.46}$$

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\dot{q}_r''\right) - \frac{1}{r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\dot{q}_r''\right)\right)r\frac{1}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\right) = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{7.47}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) - \left(3\kappa^2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(\dot{q}_r''\right) = 0 \tag{7.48}$$

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) - \left(3\kappa^2 r^2 + 1\right)\left(\dot{q}_r''\right) = 0 \tag{7.49}$$

En donde la Ecuación 7.49 responde a la forma de una *Ecuación de Bessel Modificada*.

7.5.1.1. Ecuación de Bessel

Como se menciona en el apartado anterior, la Ecuación 7.49 tiene la forma de un tipo especial de ecuación de Bessel. En este apartado se explicará brevemente los conceptos generales de este tipo de ecuaciones para poder entender como afectar al modelo para la radiación.

Usualmente en problemas relacionados a fenomenos físicos, las soluciones de las ecuaciones difereciales no es posible encontrarlas como un conjunto cerrado, sin embargo, si se pueden encontrar en la forma de series de potencias convergentes. Para entender la utilidad de esto, se presenta a continuación un breve y sencillo ejemplo. Sea

$$y' = xy \tag{7.50}$$

Su solución analítica se puede obtener fácilmente mediante separación de variables: $y = Ce^{x^2/2}$. Ahora, se busca resolver el mismo problema mediante una expansión en series de potencias para la función desconocida:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{7.51}$$

Asumiendo que la serie es absolutamente convergente, se puede diferenciar y obtener:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} ka_kx^{k-1} \tag{7.52}$$

Luego, combinando la Ecuación 7.51 y Ecuación 7.52, se obtiene lo siguiente:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + ... = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 + ... \quad (7.53)$$

Ahora igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se obtiene:

$$a_1 = 0 \qquad a_3 = a_1/3 = 0 \qquad a_5 = a_3/5 = 0 \quad (7.54)$$

$$a_2 = a_0/2 \qquad a_4 = a_2/4 = a_0/(2 \cdot 4) \qquad a_6 = a_4/6 = a_0/(2 \cdot 4 \cdot 6), ... \quad (7.55)$$

Entonces, la expansión de la Ecuación 7.51 se puede reescribir como:

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{x^6}{8} + ...\right) \quad (7.56)$$

Donde la expresión entre paréntesis corresponde a una *serie de MacLaurin* de $e^{x^2/2}$, por lo tanto, la expresión de Ecuación 7.56 es $y = a_0 e^{x^2/2}$, luego, aplicando la condición inicial en que $y(0) = C = a_0$, la solución en serie de potencias coincide con la obtenida mediante variables separables.

Lo anterior muestra la posibilidad de encontrar soluciones mediante series de potencias para funciones desconocidas, lo cual resulta bastante útil cuando se tienen funciones en que los métodos primarios mas sencillo no pueden ayudar, lo cual es el caso del flujo de calor radiativo.

Ahora bien, en muchos problemas en que se modelan fenómenos físicos especialmente, es común encontrar ecuaciones diferenciales de la forma:

$$r^2y''(r) + ry'(x) + \left(\lambda r^2 - p^2\right)y(r) = 0 \quad (7.57)$$

donde p es un valor fijo dado y λ es un parámetro adicional. La Ecuación 7.57 es llamada como *Ecuación de Bessel de orden p* y por lo general tiene soluciones no triviales que corresponden a un set de condiciones de borde dadas solo para ciertos valores del parámetro λ, los cuales se conocen como *eigenvalues (valores propios)*. El objetivo se vuelve encontrar esos eigenvalues para un set de condiciones de borde dadas y sus soluciones $y(r)$, las cuales se llaman *eigenfunctions o funciones propias*. Para mayor detalle en la explicación y obtención de las soluciones, se recomienda [4-6, 11]. Sea el cambio de variable $x = \sqrt{\lambda}r$, la Ecuación 7.57 queda:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - p^2\right)y(x) = 0 \quad (7.58)$$

Dividiendo:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (7.59)$$

Luego, la solución se obtiene mediante series de potencias, en la forma de:

$$y = a_0 2^p p! \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - ... + (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} + ... \right] \tag{7.60}$$

Como la serie en los paréntesis cuadrados es absolutamente convergente para todos los valores de x (confirmar usando criterio de D'Alambert), y por la presencia de los factoriales en el denominador, la serie converge rápidamente. Esta suma es llamada como *función de Bessel de orden p* y se denota como $J_p(x)$:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} \tag{7.61}$$

De esta manera se obtiene una solución para la Ecuación 7.59 para el caso de la función $y(x)$ finita en $x = 0$. Pero esta solución es valida solo para valores **enteros no negativos** de p. Una solución de la Ecuación 7.59 es cualquier función de la forma $AJ_p(x)$, donde A es el número $2^p p!$ el cual resulta de que a_0 puede tomar cualquier valor y porque la multiplicación de la solución por cualquier constante también es una solución debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación.

Ahora, se busca generalizar el caso anterior de p enteros no negativos a **valores reales** arbitrarios. Para ello, se reemplaza el valor entero de la función p por la función Gamma $\Gamma(p)$ que está definida para valores reales de p, con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{7.62}$$

lo cual converge para cualquier p, en particular, reemplazando p por $-p$:

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{7.63}$$

Como la ecuación de Bessel 7.59 contiene p^2, las funciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son soluciones para el mismo p. Si este es no entero, las soluciones serán linealmente independientes ya que el primer término en 7.63 y 7.62 tienen diferentes potencias de x, p y $-p$ respectivamente, entonces la solución general puede ser escrita como:

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x) \tag{7.64}$$

Nota: El punto $x = 0$ debe ser excluido del dominio de la definición de la Ecuación 7.63 ya que x^{-p} diverge en ese punto.

Las soluciones $J_p(x)$ no son las únicas soluciones de la Ecuación 7.59. Todas las soluciones de esta ecuación tienen un nombre en común, *funciones cilíndricas o funcones de Bessel*, las cuales aparecen naturalmente en muchos problemas físico-matemáticos con coordenadas cilíndricas o polares.

Están compuestas de las funciones cilíndricas de primera especie $J_p(x)$ (*funciones de Bessel*), pero también se pueden encontrar funciones cilíndricas de segunda especie $N_p(x)$ llamadas *funciones de Neumann* o también conocidas como *funciones de Weber* $Y_p(x)$ y las funciones cilíndricas de tercera especie $H_p^{(1)}(x)$ y $H_p^{(2)}(x)$ conocidas como *funciones de Hankel*.

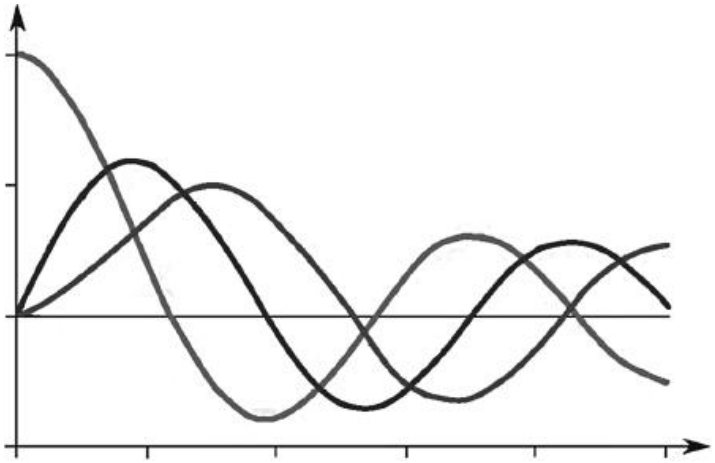


Figura 7.1: Gráfica de las funciones de primera especie $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$.

Aclarados los conceptos anteriores, ahora se puede avanzar a las *ecuaciones de Bessel modificadas*, las cuales tienen forma:

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + p^2\right) = 0 \tag{7.65}$$

Usando la transformación $x = iz$, la ecuación se puede reducir a una ecuación de Bessel ordinaria:

$$z^2y''(z) + zy'(z) - \left(z^2 - p^2\right) = 0, \tag{7.66}$$

en donde se puede resolver con un procedimiento análogo al mostrado anteriormente, obteniendo expresiones similares a las de la Ecuación 7.62

$$I_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{7.67}$$

pero sin el componente oscilatorio. Es importante destacar que si el cambio de variable $x = iz$ de la Ecuación 7.66 se realiza en la Ecuación 7.62, se puede obtener la expansión en serie de potencias de la Ecuación 7.67 de manera inmediata, lo cual es valido para valores reales arbitrarios de p. En particular, para obtener I_{-p} solo es necesario reemplazar p por $-p$ en la Ecuación 7.67.

De esta forma, $I_p(x)$ es llamada *función de Bessel modificada de primera especie*, y su relación con la función ordinaria queda dada por:

$$I_p(x) = i^p J_p(x). \tag{7.68}$$

Ya que el término en la serie de la Ecuación 7.68 tiene signo constante, $I_p(x)$ crece *monotonicamente*

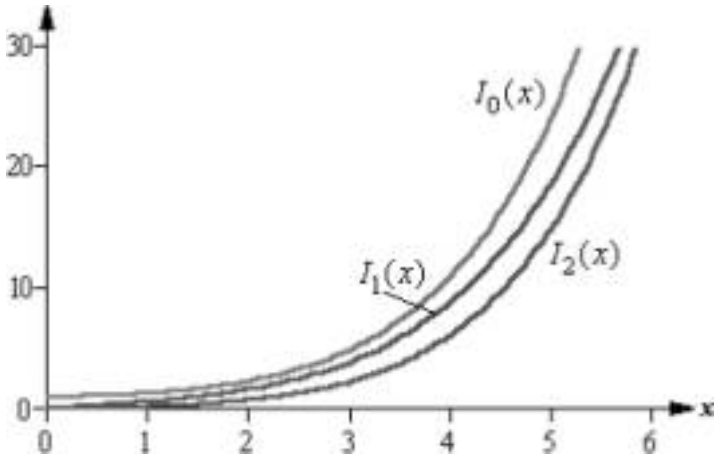


Figura 7.2: Gráfica de las funciones modificadas de primera especie $I_0(x)$, $I_1(x)$ y $I_2(x)$.

con el incremento de x.

Nota: Una función se dice **monotónica** si y solo sí, es enteramente no-creciente o enteramente no-decreciente en su dominio. Si una función crece monotonicamente, no necesariamente debe ser enteramente creciente, simplemente debe no-decrecer.

Otra solución para la Ecuación 7.65 se define como:

$$k_p(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\operatorname{sen} p\pi}. \tag{7.69}$$

La función $K_p(x)$ se llama *función de Bessel modificada de segunda especie* o también se conoce como *función de Macdonald*. Análogamente a la función de primera especie, se tiene una relación con las funciones ordinarias de Bessel,

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(x). \tag{7.70}$$

Entonces la solución general para la Ecuación 7.65 es:

$$y(x) = C_1 I_p(x) + C_2 K_p(x). \tag{7.71}$$

Si $p \leq 0, 1, 2, ...$, entonces la solución dada por la Ecuación 7.71 es la combinación de las funciones linealmente independientes $I_p(x)$ y $I_{-p}(x)$. Pero si p es un entero no negativo, el segundo término contiene un ratio indeterminado $0/0$, el cual puede ser resuelto con el *teorema de L'Hopital*. Sin embargo, se puede decir que la Ecuación 7.71 es una solución general a las ecuaciones de Bessel modificadas para cualquier real p. La expresión para $K_p(x)$ es análoga a la función de Neumann $N_p(x)$ para $K_0(x)$:

$$K_0(x) = -I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} h_k. \tag{7.72}$$

De esta manera, para enteros p, la función $K_n(x)$ diverge mientras $x \to 0$ y decrece monotonicamente

cuando x incrementa.

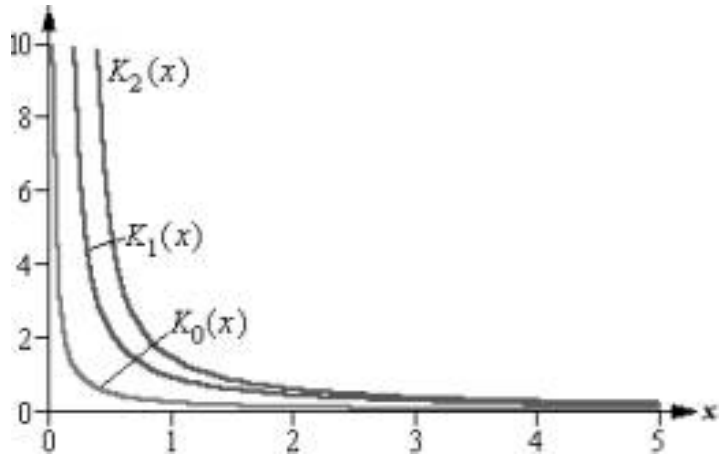


Figura 7.3: Gráfica de las funciones modificadas de segunda especie $K_0(x)$, $K_1(x)$ y $K_2(x)$.

7.6. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio sin humedad

Una vez comprendido el comportamiento de las funciones que modelan el flujo radiativo obtenido desde la aproximación por esféricos armónicos, se puede obtener finalmente una expresión para el flujo de calor al interior del medio dadas sus particularidades y condiciones de borde características. Así, la Ecuación 7.49 escrita en la forma de la Ecuación 7.71 tiene como solución

$$\dot{q}_r''(r) = C_1 I_1\left(\sqrt{3}\kappa r\right) + C_2 K_1\left(\sqrt{3}\kappa r\right). \tag{7.73}$$

Para resolver la Ecuación 7.73 se deben considerar las condiciones de borde del problema y aplicarlos a al fenómeno de la radiación mediante la Aproximación-P_1, donde se deben encontrar expresiones para las constantes C_1, C_2 de las funciones. Es en este punto donde se evalúan las condiciones de borde para la parte radiativa que se omitieron y dejaron expresadas en la sección anterior al trabajar en 7.30 y 7.31.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w: \qquad 2\dot{\mathbf{q}}'' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4J_w - G \tag{7.74}$$

$$= \frac{\epsilon}{2-\epsilon}\left(4\pi I_{bw} - G\right) \tag{7.75}$$

$$r = r_i: \qquad 2\dot{q}_r''\Big|_{r=r_i} = 4\left(\dot{q}_{inc}'' + \sigma T_\infty^4\right) - \left(4\sigma\overline{T}^4 - \frac{1}{\kappa}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right)\Big|_{r=r_i} \tag{7.76}$$

$$r = r_i + \delta: \qquad -2\dot{q}_r''\Big|_{r=r_i+\delta} = 4\sigma T_\infty^4 - \left(4\sigma\overline{T}^4 - \frac{1}{\kappa}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right)\Big|_{r=r_i+\delta} \tag{7.77}$$

Con lo que finalmente se pueden obtener expresiones para las constantes C_1, C_2 para la Ecuación 7.73, lo cual junto a las funciones I_1 de primera clase orden 1 y K_1 segunda clase orden 1, permiten obtener una expresión para el flujo de calor en la dirección r.

Ahora que se tiene una forma para el modelo radiativo (Ecuación 7.73) con sus respectivas constantes para las funciones de Bessel, se puede acoplar a la ecuación de calor (Ecuación 7.32) y de esta forma obtener una solución para temperatura y tiempos de ignición según cada evaluación de los parámetros. Pero desafortunadamente la resolución de estas ecuaciones de manera simultanea no es posible ya que la solución es implícita, pues la variable de $\overline{T}$ está como variable respuesta pero también aparece dentro del modelo radiativo elevada a la cuarta potencia. Este tipo de ecuaciones corresponden a un tipo especial de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo cual se trabajará a continuación. Para ello, recordar la ecuación de calor

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{h_c}{l_z}\left(\overline{T} - T_\infty\right) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)}\left(r_o \dot{q}_r''(r_o) - r_i \dot{q}_r''(r_i)\right).$$

En cuanto al modelo radiativo, se tiene que las constantes C_1, C_2 son funciones de $f(r_i, \delta, \dot{q}_{inc}'', \kappa, T_\infty, \sigma, \overline{T})$ por lo que se puede buscar una forma de reagrupar términos y separar las funciones de *Bessel* como factores independientes de la temperatura promedio, lo cual da una forma similar a la tradicional de tratar la radiación (χT^4). Esto se puede ver como:

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -b_3 h_c\left(\overline{T} - T_\infty\right) + b_1 \dot{q}_{inc}'' - b_2\left(\overline{T}^4 - T_\infty^4\right), \tag{7.78}$$

en donde los coeficientes b_1, b_2 y b_3 solo dependen de $r_i, \delta, \kappa, \sigma, T_\infty$, los cuales son parámetros, ya no se encuentra la dependencia de las variables $\overline{T}$ y $\dot{q}_{inc}''$ dentro de los coeficientes. Así, reagrupando se tiene una forma similar a un tipo de ecuación diferencial de primero orden conocida, esto es:

$$\underbrace{\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}}_{\frac{dy}{dx}} = \underbrace{-b_2\left(\overline{T}^4 - T_\infty^4\right)}_{f(x)y^n(x)} \underbrace{- b_3 h_c\left(\overline{T} - T_\infty\right)}_{g(x)y(x)} + \underbrace{b_1 \dot{q}_{inc}''}_{h(x)} \tag{7.79}$$

Lo anterior responde a la forma de una *ecuación de Chini*:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^n(x) + g(x)y(x) + h(x). \tag{7.80}$$

Para $n = 2$ es una *ecuación de Ricatti*, para $n = 3$ es una *ecuación de Abel*. Sin embargo, para ordenes superiores no se tiene un procedimiento general de integración como para las anteriores, por lo que solo se puede obtener el *invariante de Chini*, el cual es:

$$I = n^{-n} f(x)^{-(1+n)} h(x)^{(1-2n)} \left(f(x)h'(x) - f'h(x) - nf(x)g(x)h(x)\right)^n, \tag{7.81}$$

el cual si satisface que $dI/dx = 0$, entonces se puede resolver de manera directa. Lo cual para el caso estudiado no se cumple, por lo que su resolución solo es posible obtenerla de manera numérica. No obstante, con el fin de obtener un modelo analítico que sea manejable, se realizan ciertos supuestos y

técnicas de linealización para obtener una expresión analítica como en la teoría clásica.

7.7. Condiciones de Ignición

Para establecer un criterio de ignición (desde el punto de vista de la teoría clásica de ignición), primero se debe diferenciar el proceso ya sea para ignición piloteada o ignición espontánea (ver sección 2.3 y 2.4), donde esta última presenta características distintas a la ignición piloteada. Una vez que se ha logrado una mezcla inflamable, se requiere que esta aumente su temperatura hasta que la reacción de combustión ocurra alcanzando la temperatura de ignición $T_{ig,sp}$. En este proceso se puede diferenciar un tiempo asociado a la fase de pirólisis y otro de inducción; el primero comprende el tiempo desde el inicio del proceso de calentamiento del solido hasta que se produce la mezcla inflamable, luego, como no se tiene un piloto para iniciar la reacción, esta mezcla debe aumentar su energía lo suficiente como para poder alcanzar la ignición.

La energía requerida se puede asociar al *número de Damkohler*, el cual corresponde al ratio entre tiempo de residencia (asociado a la rapidez de reacción de los gases) y tiempo requerido por la reacción química en cuestión (obtenido desde el inverso de la tasa de reacción de la ecuación de Arrhenius). De esta forma, si el tiempo requerido por la reacción química es menor al tiempo de residencia, la reacción tiene suficiente tiempo para continuar y la llama puede existir, por lo tanto, existe un número de Damkohler crítico que debe ser alcanzado antes de que la ignición ocurra.

7.7.1. Flujo Crítico

En lo descrito anteriormente se hace referencia a la energía necesaria para llevar a cabo el proceso de calentamiento y todo lo que ello provoca, sin embargo, dicha energía debe obtenerse de alguna parte. Es aquí donde entra en juego el flujo de radiación incidente, pues como se ha descrito a lo largo de esta investigación, no hay contacto entre la fuente de calor y el medio, por lo que la energía que llega al volumen de control proviene exclusivamente por radiación. Así, se define el flujo crítico de un material sólido como el mínimo flujo externo de calor al cual debe estar sometido el medio ($\dot{q}''_{cri}$) para que pueda generar cantidades suficientes de gases de pirólisis sobre su superficie para permitir la ignición del material [8]. Al igual que antes, este flujo critico de ignición se puede diferencia para cuando el proceso es ignición espontánea o piloteada, y como se puede esperar intuitivamente, los flujos críticos para esta última son menores que los de ignición espontánea debido a la energía extra necesaria para provocar la ignición.

7.7.2. Charring

Producto de algunas reacciones químicas en sólidos, puede producirse material carbonizado (*char*) sobre la superficie del solido durante el proceso de pirólisis (denominado *charring*). Esta capa de material carbonizado que se forma interfiere en la tasa de transferencia de calor entre el entorno y el material o medio donde ocurre la pirólisis, por ello además se reduce la tasa de pirólisis en el

tiempo. Esta interferencia en la tasa de transferencia de calor se debe tanto a sus propiedades como aislante térmico y a la re-radicación producida por esta capa, la cual puede alcanzar temperaturas muy superiores a T_{py}. [15]

7.7.3. Temperatura y Tiempo de Ignición

Como se ha mencionado en secciones anteriores () se han considerado algunos supuestos para poder abordar el problema. Uno de ellos es considerar al solido como inerte durante el proceso de calentamiento hasta que ocurra la ignición, y además, que la fase gaseosa y solida están en equilibrio térmico. Esto permite caracterizar al proceso de ignición por medio de una temperatura característica de la superficie, la cual se conoce como temperatura de ignición T_{ig}, la cual se alcanza luego de que el solido esté expuesto a una fuente externa de calor durante un determinado tiempo hasta que se alcance la ignición, el cual se denomina tiempo de ignición t_{ig} asociado a dicha temperatura.

Luego de lo anterior, se puede decir que la condición crítica de ignición se da cuando el tiempo requerido para alcanzarla t_{ig} es infinitamente largo, por lo que no existirán gradientes de temperatura al interior del medio y las pérdidas de calor por la superficie serán iguales al calor recibido desde el exterior, por lo que existe un flujo de calor mínimo (flujo crítico $\dot{q}''_{inc,cri}$), al cual debe estar sometida la superficie hasta alcanzar la temperatura de ignición T_{ig}.

Lo anterior se refiere a las condiciones críticas para un sólido, en donde se considera la temperatura de la superficie expuesta a la fuente de calor como temperatura de ignición, no obstante, en este trabajo se considera la temperatura promediada espacialmente, por lo que las condiciones críticas son evaluadas con algunas particularidades, especialmente para la temperatura, pues si bien el medio eleva su temperatura superficialmente, también se produce un proceso de calentamiento interior mediante la penetración de la radiación (mayoritariamente, no exclusivamente), de esta manera existe una energía adicional requerida versus una concepción tradicional solo para temperatura superficial, pues a medida que se eleva la temperatura en la superficie, se produce un gradiente interior por lo que se requiere un incremento adicional de energía para compensar ese gradiente y continuar elevando la temperatura en la superficie al mismo tiempo que se requiere energía para calentar el material hacía el interior hasta que se logre alcanzar la ignición. Además, no se debe olvidar que se está considerando al medio como inerte, desde un punto de vista químico significa que en dichas condiciones, se considera que no hay reacción (por ello tampoco se produce charring), lo cual es diferente del hecho de que el medio si pueda elevar su temperatura interna y no solo superficialmente. De esta manera, la temperatura que se debe lograr es $\overline{T}_{ig}$ en las condiciones descritas.

Es importante hacer mención al hecho de que este flujo critico de ignición $\dot{q}''_{inc,cri}$ no es una condición absoluta del material, pues es la resultante de diversos factores como las propiedades termofísicas del material y las condiciones a las que se encuentra expuesto [7].

7.7.4. Criterio de Ignición

Luego de todo lo anterior, se pueden establecer condiciones que deben darse para que la ignición se lleve a cabo. Esto se traduce en que cuando el flujo radiativo que incide en el medio $\dot{q}''_{inc}$ es igual al mínimo flujo necesario para que la ignición ocurra a la temperatura $\overline{T}_{ig}$, es decir, el flujo critico $\dot{q}''_{inc,cri}$, lo cual se da luego de un largo tiempo de exposición al flujo t_{ig} o bien cuando las variaciones de la temperatura en el tiempo son lo suficientemente pequeñas como para decir que el gradiente temporal es cero, lo que se conocer como condiciones en *estado estacionario*. Esto se ve en el modelo de la ecuación de calor (Ecuación 7.32) como

$$0 = -\frac{h_c}{l_z}\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)}\left(r_o \dot{q}''_r(r_o) - r_i \dot{q}''_r(r_i)\right) \tag{7.82}$$

7.7.5. Resumen de supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio sin humedad

La aplicación y el análisis de esta metodología para otras configuraciones depende de validez de los supuestos empleados según cada caso. A continuación se resumen los supuestos utilizados que permiten continuar el análisis físico del problema:

1. El estrato vegetal se considera como un medio continuo, en donde la fase gaseosa y la fase sólida se encuentran en equilibrio térmico. Lo anterior permite tratar ambas fases como un todo, considerando variables para un solo medio y no necesitar resolver ecuaciones de calor de manera simultaneas para la fase gaseosa y sólida.

2. Luego de los procesos de secado de las muestras, se asume que el medio no tiene humedad (λ=0 %) y puede ser tratado como un medio opaco y negro.

3. Se consideran *thermally thin conditions*, las cuales son válidas cuando el numero de Biot es menor a 1 [12], lo cual sucede en este caso.

4. Los elementos del estrato vegetal permanecen inertes durante el proceso de calentamiento, es decir, hasta antes de que la ignición ocurra. Este supuesto sustenta el hecho de no incluir las ecuaciones de conservación de masa y momentum y que deban resolverse simultáneamente junto a la ecuación de energía. Por lo tanto, el proceso de pirólisis y su efecto en el calentamiento del estrato es despreciado.

5. La distancia del medio que esta afecta al proceso de calentamiento está dada por el camino libre medio de radiación δ, el cual es calculado usando la fórmula estándar $\delta = 4/\alpha_k\omega$ [12].

6. La ignición ocurre cuando se alcanza la temperatura critica o temperatura de ignición espontánea $T_{ig} = T_{ig,sp}$. En la práctica, la temperatura de ignición se alcanza en la superficie más cercana a la fuente de calor, sin embargo, el modelo desarrollado en este trabajo, obtiene la temperatura promediada espacialmente, lo cual tambien aplica para el caso de la ignición, es decir, se obtiene $\overline{T}_{ig}$.

7. Las propiedades termo-físicas son obtenidas como un valor aparente, esto quiere decir que en un escenario realista, estas propiedades pueden experimentar variaciones en la medida que se producen gradientes de temperatura. Para esto, en secciones posteriores se presentará una alternativa en donde se obtienen propiedades efectivas.

8. El desarrollo del modelo esta dado por la teoría de ignición basado en calentamiento radiativo de un material inerte.

7.8. Resolución Numérica Exacta del Modelo de Energía

Como se acaba de presentar en la sección anterior (7.7.4), la Ecuación 7.82 tiene a la variable de temperatura promedio $\overline{T}_{ig}$ tanto de manera explicita como de manera implícita (ver sec. 7.6), por lo que en condiciones de estado estacionario, no se puede obtener una expresión analítica directamente para la temperatura de ignición, por lo que se resolverá numéricamente mediante algún software de análisis numérico, lo cual se presentará en mayor detalle en secciones posteriores.

Luego, la Ecuación 7.32

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = - \frac{h_c}{l_z} \left(\overline{T} - T_\infty \right) - \frac{2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(r_o \dot{q}_r''(r_o) - r_i \dot{q}_r''(r_i) \right)$$

se resuelve de manera numérica para la temperatura de ignición encontrada también numéricamente, con lo que es posible obtener los tiempos de ignición t_{ig} para dicha temperatura, los cuales para fines prácticos se nombrarán como parámetros exactos, ya que esta es la resolución más precisa que se puede obtener aún sin ser obtenida de manera analítica, esto debido a que todos los términos considerados en la derivación del modelo son conservados en su estado natural (sin aproximar).

7.9. Modelo Analítico

Como se ha mencionado anteriormente, no es posible obtener una expresión analítica para la temperatura de ignición directamente desde la Ecuación 7.32, lo cual se puede ver más claramente en la Ecuación 7.78

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = - b_3 h_c \left(\overline{T} - T_\infty \right) + b_1 \dot{q}_{inc}'' - b_2 \left(\overline{T}^4 - T_\infty^4 \right),$$

sin embargo, se puede linealizar el término radiativo (similar al procedimiento clásico), por lo que la Ecuación 7.78 se transformaría en una ecuación diferencial de fácil resolución. Para esto, se utiliza un desarrollo limitado de Taylor o *serie de Taylor*, que corresponde a una aproximación por series de potencias enteras para polinomios alrededor de un punto en particular. Esto es especialmente útil para este caso, ya que el término combinado está formado por un polinomio de grado 1 desplazado en (-T_∞) , por lo que la expansión en series se realiza para el mismo orden y alrededor de T_∞, esto es:

$$\overline{T}^4 - T_\infty^4 \approx 4T_\infty^3 \left(\overline{T} - T_\infty\right), \tag{7.83}$$

con lo que la Ecuación 7.78 linealizada queda

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = - b_3 h_c \left(\overline{T} - T_\infty\right) + b_1 \dot{q}''_{inc} - b_2 4T_\infty^3 \left(\overline{T} - T_\infty\right). \tag{7.84}$$

Definiendo un coeficiente global combinado como $h_T = h_c + 4b_2/b_3 T_\infty^3$ se puede factorizar y reescribir la Ecuación 7.84 de manera compacta,

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = - b_3 h_T \left(\overline{T} - T_\infty\right) + b_1 \dot{q}''_{inc}. \tag{7.85}$$

Estos últimos pasos aplicados luego de la linealización hasta obtener el modelo compacto como la Ecuación 7.85, son solo para simplificar la forma de resolver el modelo linealizado de la Ecuación 7.84, bien se podría resolver directamente y obtener una expresión analítica para la temperatura desde allí, sin embargo, desde este punto es más sencillo de manejar algebraicamente para obtener dicha expresión de forma "manual", lo cual se puede hacer por cualquier método de resolución que el lector estime conveniente, como aplicar una *transformación de Laplace* o realizar algún otro cambio de variable que simplifique la resolución. En este caso, se procederá con esta última, estableciendo nuevas variables y parámetros normalizados de manera conveniente para la Ecuación 7.84, lo cual será de utilidad más adelante para obtener relaciones adimiensionales entre las variables de interés, dejando todos los otros factores como parámetros normalizados. Sea θ:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\overline{T} - T_\infty}{\overline{T}_{ig} - T_\infty} \\ \text{Derivando en } \overline{T} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{T}}\left(\theta\right) &= \frac{\partial}{\partial \overline{T}}\left(\frac{\overline{T} - T_\infty}{\overline{T}_{ig} - T_\infty}\right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \overline{T}} &= \frac{1}{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)} \end{aligned} \tag{7.86}$$

Con lo cual, la Ecuación 7.85 se puede reescribir como

$$\alpha_k \rho_k c_{p,k} \frac{\partial \theta \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{\partial t} = - b_3 h_T \left(\theta \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)\right) + b_1 \dot{q}''_{inc}, \tag{7.87}$$

ahora, dividiendo a ambos lados por $\left(b_1 \dot{q}''_{inc,cri}\right)$ se tiene

$$\underbrace{\frac{\alpha_k \rho_k c_{p,k} \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}}_{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \underbrace{\frac{b_3 h_T \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}}_{\psi} \theta + \underbrace{\frac{\dot{q}''_{inc}}{\dot{q}''_{inc,cri}}}_{\varphi}. \tag{7.88}$$

Así, la Ecuación 7.85 se puede plantear como una ecuación diferencial de manera compacta en función de las variables y parámetros normalizados

$$\theta = \frac{\overline{T} - T_\infty}{\overline{T}_{ig} - T_\infty} \qquad \tau = \frac{\alpha_k \rho_k c_{p,k} \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}$$
$$\psi = \frac{b_3 h_T \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}} \qquad \varphi = \frac{\dot{q}''_{inc}}{\dot{q}''_{inc,cri}}$$

Obteniéndose lo siguiente

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\psi\theta + \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\psi}{\tau}\theta &= \frac{\varphi}{\tau} \end{aligned} \tag{7.89}$$

De esta manera, se puede apreciar que la Ecuación 7.89 tiene forma de

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \tag{7.90}$$

la cual corresponde a una *ecuación diferencial lineal de primer orden* para un caso no homogéneo.

Sea μ factor integrante definido como $\mu(x) = \exp\left(\int P(x)dx\right)$, aplicándolo a ambos lados de la Ecuación 7.90

$$\begin{aligned} \mu(x)\left(y'(x) + P(x)y(x)\right) &= \mu(x)Q(x) \\ \left(\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x)\right) &= \mu(x)Q(x) \\ \Rightarrow \ \frac{\partial \mu}{\partial x} &= P(x)\mu(x) \\ \left(\mu(x)y'(x) + y(x)\mu(x)'\right) &= \mu(x)Q(x) \\ \left(\mu y\right)'(x) &= \mu(x)Q(x) \qquad \Big/ \int \\ \mu(x)y(x) &= \int \mu(x)Q(x)dx + C \qquad \Big/ \frac{1}{\mu(x)} \\ y(x) &= \underbrace{\frac{C}{\mu(x)}}_{y_h(x)} + \underbrace{\frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx}_{y_p(x)} \end{aligned} \tag{7.91}$$

Por lo tanto, para una EDO con las condiciones de la Ecuación 7.90, se tiene que su solución está dada por la Ecuación 7.91, donde el primer término se llama *solución homogénea* $y_h(x)$ y corresponde a la familia de soluciones indexadas por la constante C, mientras que el segundo término se conoce como *solución particular* $y_p(x)$,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x). \tag{7.92}$$

Así, la solución de la Ecuación 7.89 esta dada por

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t), \tag{7.93}$$

en donde se tiene que la solución homogénea

$$\begin{aligned}
\theta_h(t) =& C \exp\left(-\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \\
=& C \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \\
\text{Condición inicial} \qquad \Rightarrow \overline{T}(0) =& T_\infty \\
\frac{T_\infty - T_\infty}{\overline{T}_{ig} - T_\infty} =& C \exp(0) \\
0 =& C \\
\theta_h(t) =& 0,
\end{aligned} \tag{7.94}$$

por otro lado, en cuanto a la solución particular

$$\begin{aligned}
\theta_p(t) =& \exp\left(-\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \int \exp\left(\int \frac{\psi}{\tau} dt\right) \frac{\varphi}{\tau} dt \\
=& \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \int \exp\left(\frac{\psi}{\tau} t\right) \frac{\varphi}{\tau} dt \\
=& \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) \left(\frac{\tau}{\psi} \exp\left(\frac{\psi}{\tau} t\right) \frac{\varphi}{\tau} + K\right) \\
=& \frac{\varphi}{\psi} + \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right) K \\
\text{Condición inicial} \qquad \Rightarrow \theta(0) =& 0 \\
-\frac{\varphi}{\psi} =& K \\
\theta_p(t) =& \frac{\varphi}{\psi} - \frac{\varphi}{\psi} \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right),
\end{aligned} \tag{7.95}$$

por lo que finalmente, combinando los resultados de la Ecuación 7.94 y la Ecuación 7.95

$$\theta(t) = \frac{\varphi}{\psi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\psi}{\tau} t\right)\right). \tag{7.96}$$

Regresando a las variables y parámetros originales, se tiene una expresión analítica para la temperatura promedio

$$\frac{\left(\overline{T} - T_\infty\right)}{\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}} = \frac{\dot{q}''_{inc}}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{b_1 \cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{b_3 h_T \cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{b_3 h_T \cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}}{\cancel{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{\cancel{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}}{\alpha_k \rho_k c_{p,k} \cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}}\right) t\right],$$

y finalmente

$$\overline{T}(t) = T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}''_{inc}}{b_3 h_T} \left[1 - \exp\left(-\frac{b_3 h_T}{\alpha_k \rho_k c_{p,k}}\right) t\right]. \tag{7.97}$$

7.10. Medidas experimentales

Como se ha descrito en secciones anteriores (ver sec. 7.4), la temperatura $\overline{T}(t)$ se ha definido como un promedio espacial (ver Ecuación 7.22), que luego de algunas consideraciones y supuestos se ha tratado como una temperatura que varía en el tiempo y según su penetración en la dirección r, es decir $T(r,t)$. Con esto, para obtener medidas comparables a las anteriormente obtenidas con el modelo, se realiza una discretización de la temperatura similar al proceso hecho en la Ecuación 7.22 pero para medidas experimentales, por lo que se define una temperatura experimental discretizada $\widetilde{T}$

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(t) =& \frac{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} T(r,\varphi,z,t) r dr d\varphi dz}{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz} \\ \approx& \frac{2\pi l_z \sum_{j=1}^{n} T(r_j,t)\Delta r}{\pi l_z \left(r_0^2 - r_i^2\right)}\end{aligned} \tag{7.98}$$

donde $T(r_j,t)$ corresponde a la temperatura medida por la termocupla (TC_j) en la posición r_j. Como se puede observar, ya que la medida buscada es un promedio, cuanto mayor sea el número de temperaturas medidas TC_j, mayor será la precisión en caracterizar el comportamiento de la temperatura al interior del medio.

Nota: Como se ha observado, para poder determinar las variables de interés como temperatura o tiempo de ignición, es necesario conocer alguno de los valores críticos. Algunos autores consideran la T_{ig} como un valor estándar para ciertos materiales y con ello desarrollan sus modelos, es decir determinar el flujo critico de ignición y todo lo que prosigue. No obstante, esta a pesar de ser la manera tradicional, no es la única, pues se puede obtener esta temperatura de ignición también de manera experimental y obtener resultados mas precisos en los modelos, pero esto no es siempre posible. Sin embargo, en este estudio se plantea la alternativa de obtener el flujo critico de ignición ya que al trabajar una temperatura promediada espacialmente, no es tan sencillo obtenerla, así, la metodología utilizada es obtener un flujo critico desde la campaña experimental para la resolución numérica que necesita el valor para el flujo crítico, y así determinar una temperatura de ignición exacta $\overline{T}_{ig,exac}$, pero también se puede hacer desde la recién planteada Ecuación 7.97, ingresando nuevamente con el valor del flujo critico y así obtener un valor aproximado para la temperatura de ignición de manera analítica $\overline{T}_{ig,app}$. Y finalmente, como es de esperarse, también se puede obtener un valor directamente desde la data experimental para la temperatura de ignición $\widetilde{T}_{ig,exp}$, que es obtenida ponderando la temperatura medida por cada termocupla según su distancia desde la superficie expuesta al flujo incidente.

7.11. Correlaciones

Tomando las variables y parámetros normalizados definidos anteriormente en la sección 7.9, es posible obtener relaciones adimensionales entre estos y las variables de interés originales como t_{ig}. Recordando los parámetros definidos

$$\theta = \frac{\overline{T} - T_\infty}{\overline{T}_{ig} - T_\infty} \qquad \tau = \frac{\alpha_k \rho_k c_{p,k} \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}}$$

$$\psi = \frac{b_3 h_T \left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_1 \dot{q}''_{inc,cri}} \qquad \varphi = \frac{\dot{q}''_{inc}}{\dot{q}''_{inc,cri}}$$

se puede observar que por ejemplo, la variable θ corresponde a la temperatura $\overline{T}$ normalizada por todo el intervalo de valores que esta puede tomar, es decir, ir desde $T_\infty \rightarrow \overline{T}_{ig}$, por ello, el rango completo de la función de temperatura queda definido como $(\overline{T}_{ig} - T_\infty)$ y se desplaza en T_∞ para mover la normalización a cero. Similar es lo ocurrido con φ, en donde el flujo incidente es normalizado por su valor crítico y queda sin dimensión (también se podría haber desplazado al cero pero solo movería el gráfico hacía el origen). Ahora bien, tal como en la teoría clásica de ignición, es interesante conocer la relación que se producirá entre el tiempo de ignición según el flujo incidente al que está sometido, esta vez de manera adimensional ya que ello facilita la obtención y lectura de parámetros, por ello, se utiliza el parámetro τ que responde al tiempo de ignición, si bien no es adimensional pues tiene dimensión de tiempo, se puede obtener la relación que existe entre este parámetro y el tiempo de ignición para obtener una relación entre t_{ig} y $\dot{q}''_{inc}$ pero de manera adimensional. Lo anterior se traduce a obtener una relación entre τ/t_{ig} y φ como se verá en la sección 7.12.3.

7.12. Resultados

7.12.1. Temperatura de ignición

La temperatura de ignición es un valor crítico y muy sensible a pequeñas variaciones en el flujo crítico $\dot{q}''_{cri}$, pues no hay una manera directa de obtener un valor para la temperatura dicho flujo. De esta manera, se puede obtener un valor para la temperatura de ignición de manera experimental (Ecuación 7.98), mediante la solución exacta por resolución numérica (Ecuación 7.32) y de manera aproximada mediante el modelo analítico de temperatura (Ecuación 7.97). La precisión de los modelos varía según las condiciones del problema, como se puede ver en la Figura 7.4 para una fracción en volumen $\alpha_d = 0{,}07$, la temperatura aproximada es mas cercana a la temperatura exacta para valores más altos de $\dot{q}''_{inc}$ y pierde precisión en la medida que $\dot{q}''_{inc} \rightarrow \dot{q}''_{cri}$.

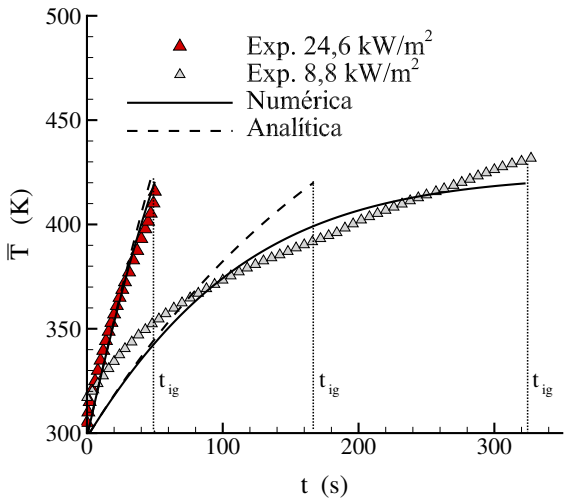
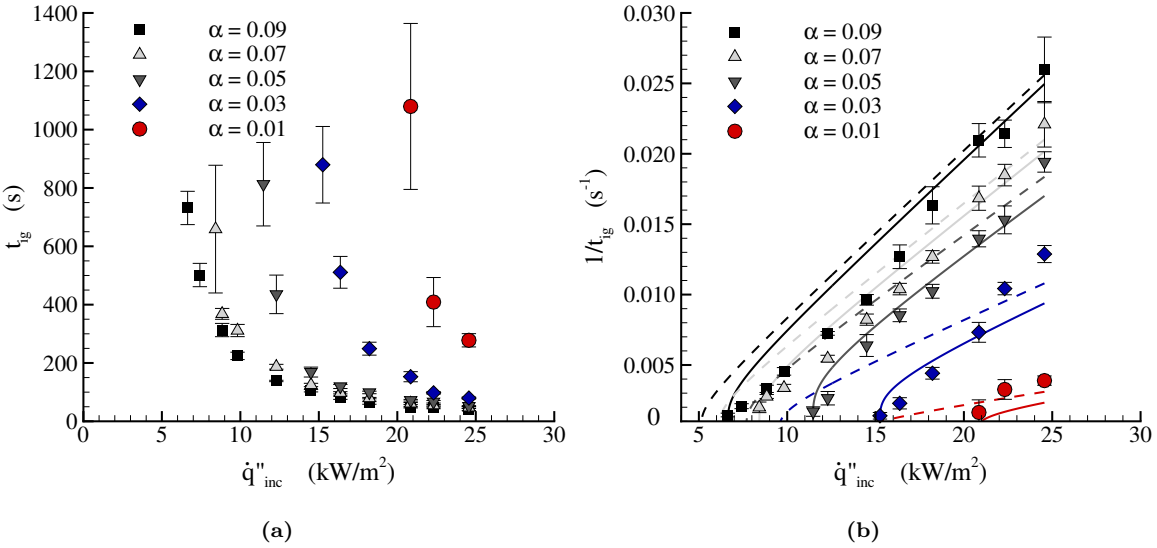


Figura 7.4: Evolución de temperatura promediada. Comparación entre data experimental, solución exacta y analítica para flujos incidentes de $\dot{q}''_{inc}$=24,6 kW/m^2 y $\dot{q}''_{inc}$=8,8 kW/m^2.

7.12.2. Tiempos de ignición

En la figura se presentan las mediciones obtenidas para el tiempo de ignición de manera experimental junto a los resultados del modelo exacto resuelto numéricamente y los obtenidos desde el modelo analítico obtenido por la linealización.



(a) **(b)**

Figura 7.5: (a) Resultados experimentales para el tiempo de ignición t_{ig} versus flujo incidente $\dot{q}''_{inc}$ para estratos con diferentes porosidades. (b) Comparación de los resultados experimentales para el inverso del tiempo de ignición $1/t_{ig}$ con las soluciones exactas (líneas continuas) y aproximadas (líneas punteadas) para diferentes fracciones en volumen.

Como se puede ver, cuando la porosidad aumenta, es decir, la fracción en volumen del material α disminuye, los tiempos de ignición son mayores para un mismo flujo incidente. Por otro lado, cuando

la fracción en volumen aumenta se obtienen tiempos de ignición menores, lo cual es consistente con lo reportado para materiales sólidos, ya que mientras α aumenta, se acerca al comportamiento de un material sólido.

Es importante notar que cuando la fracción en volumen es menor, es decir, el medio es mas poroso, los modelos pierden precisión, lo cual se explica por el hecho de que el medio contiene cada vez menos puntos de contacto, lo que dificulta la transferencia de calor por conducción, haciendo aun más importante el efecto de la penetración de la radiación. Esto también explica la perdida de precisión del modelo analítico respecto de la solución exacta, pues al linealizar el término radiativo incrementa el impacto del error por este fenómeno.

7.12.3. Adimensionalización

Con las variables y parámetros normalizados presentados en la sección 7.11, se puede obtener una relación lineal bastante útil para aplicaciones de ingeniería. Esto es obtener de manera rápida una estimación de los tiempos de ignición solo conociendo la magnitud del flujo incidente.

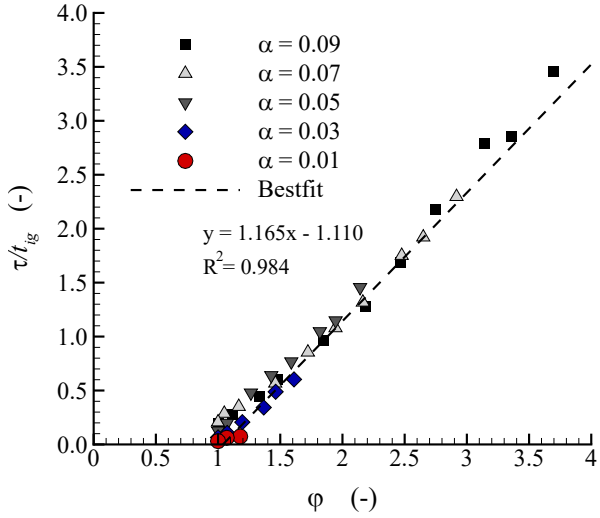


Figura 7.6: Tiempo de ignición adimensional para toda la data experimental.

La Figura 7.6 presenta el colapso de toda la data experimental mediante los parámetros y variables normalizados, en donde se puede ver que forman una relación lineal entre φ y τ/t_{ig}. Con esto, basta conocer la magnitud del flujo incidente $\dot{q}''_{inc}$ para obtener el valor de la abscisa y por medio de la recta formada con estos parámetros obtener un valor para τ/t_{ig} en la ordenada. Luego, dado que τ es un parámetro normalizado de las propiedades termo-físicas del medio, es posible obtener rápidamente un valor estimado para t_{ig}.

7.12.4. Propiedades efectivas

Durante el proceso de calentamiento y en especial bajo las condiciones críticas en las ignición, las propiedades termo-físicas de un material sufren alteraciones producto del aumento de temperatura. Si bien son consideradas como propiedades prácticamente constantes, pero en las condiciones de ignición esto no es necesariamente igual debido al estrés al que se encuentra sometido el material dado el gradiente de temperatura y perdida de masa. Por esto, se busca obtener alguna manera de cuantificar este impacto en las propiedades termo-físicas en comparación con los valores estándar que se encuentran en la literatura para condiciones normales de presión y temperatura.

Para obtener una expresión analítica y estudiar el comportamiento de las propiedades efectivas, se toma la Ecuación 7.97 debido a que es el único acercamiento del que se dispone para obtener relaciones analíticas. Luego, para las condiciones de ignición $\overline{T}_{ig}(t_{ig})$ en estado estacionario cuando el flujo incidente es el valor crítico $\dot{q}''_{inc} = \dot{q}''_{cri}$, se tiene desde la Ecuación 7.85 que la temperatura en la ignición

$$\overline{T}_{ig} \approx T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}''_{cri}}{b_3 h_T}. \tag{7.99}$$

Asumiendo que la temperatura de ignición permanece constante para todos los flujos de calor incidentes, se tiene que la Ecuación 7.97 en condiciones de ignición junto a la Ecuación 7.99

$$T_\infty + \frac{\dot{q}''_{inc}}{b_3 h_T}\left[1 - \exp\left(-\frac{b_3 h_T}{\alpha_k \rho_k c_{p,k}}\right) t_{ig}\right] = T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}''_{cri}}{b_3 h_T}, \tag{7.100}$$

por lo que linealizando el término exponencial mediante una expansión en series con las aproximaciones de Taylor

$$T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}''_{inc}}{\alpha_d \rho_d c_{p,d}} t_{ig} = T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}''_{cri}}{b_3 h_T}. \tag{7.101}$$

Con lo que finalmente se obtiene

$$\frac{1}{t_{ig}} \approx \left(\frac{b_3 h_T}{\alpha_d \rho_d c_{p,d} \dot{q}''_{cri}}\right) \dot{q}''_{inc}. \tag{7.102}$$

La Ecuación 7.102 presenta una relación lineal entre el inverso del tiempo de ignición $1/t_{ig}$ y el flujo incidente $\dot{q}''_{inc}$, por lo que los parámetros contantes que acompañan al flujo incidente, están dados por la pendiente m_i formada en esta relación lineal, así, solo conociendo el valor de la pendiente de las tendencias $1/t_{ig}$ vs $\dot{q}''_{inc}$ se pueden obtener las propiedades efectivas para cada porosidad α_d.

$$\rho_d c_{p,d} = \frac{b_3 h_T}{m_i \alpha_d \dot{q}''_{cri}} \tag{7.103}$$

Es importante destacar que en esta metodología se utilizó una aproximación para la temperatura de ignición $\overline{T}_{ig}$ con el fin de expresar todo en función del flujo crítico, pero también es posible hacerlo por medio del valor exacto o experimental de la temperatura de ignición, en cuyo caso basta con reemplazar el lado derecho de la Ecuación 7.101 por el valor más preciso de la temperatura de ignición. Por otro lado, ya sea para la forma presentada en la Ecuación 7.102 o con un valor dado de $\overline{T}_{ig}$, se pueden obtener las propiedades efectivas tanto para los modelos como para las tendencias de las medidas experimentales, para lo cual solo se debe modificar el valor de la pendiente m_i utilizada. Las pendientes

de la relación $1/t_{ig}$ vs $\dot{q}''_{inc}$ se pueden obtener desde la Figura 7.5b cuando los modelos cortan al eje de las abscisas, mientras que las tendencias experimentales se pueden obtener al aplicar el best-fit a los puntos experimentales.

Finalmente, en la Tabla 7.1 se presentan los resultados obtenidos para las propiedades efectivas desde el modelo con ambas soluciones y desde la data experimental en comparación con los valores estándar de la literatura.

Tabla 7.1: Comparación de propiedades efectivas obtenidas con el modelo por resolución numérica $(\rho_s c_{p,s})^1$, modelo con solución analítica $(\rho_s c_{p,s})^2$ y desde la data experimental $(\rho_s c_{p,s})^3$ con las propiedades efectivas estándar de la literatura $(\rho_s c_{p,s})^4$ para diferentes fracciones en volumen (α_s) de las muestras con masa m_s de combustible forestal, junto a los correspondientes flujos críticos y temperaturas medias de ignición para las muestras testeadas a 0 % de humedad.

	m_s	$\dot{q}''_{inc,cri}$	$\overline{T}_{ig,exp}$	$\overline{T}_{ig,teo}$	$(\rho_k C_{pk})^1$	$(\rho_k C_{pk})^2$	$(\rho_k C_{pk})^3$	$(\rho_k C_{pk})^4$
	g	kW/m^2	K	K	kJ/m^{3}K	kJ/m^{3}K	kJ/m^{3}K	kJ/m^{3}K
$\alpha_s = 0,09$	33,26	6,64	401	400	834	849	743	904
$\alpha_s = 0,07$	25,87	8,42	443	420	936	967	812	904
$\alpha_s = 0,05$	18,48	11,46	449	452	1037	1116	816	904
$\alpha_s = 0,03$	11,09	15,25	460	481	1804	2115	1021	904
$\alpha_s = 0,01$	3,70	20,85	461	489	7167	11318	4319	904

Referencias

[1] R Byron Bird, Warren E Stewart y Edwin N Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, 2001.

[2] Horatio Scott Carslaw y John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Inf. téc. Clarendon Press, 1959.

[3] Y Cengel y A Ghajar. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 2002.

[4] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Kyle Forinash. *Mathematical methods in physics: Partial differential equations, fourier series, and special functions*. CRC Press, 2009.

[5] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Mikhail Khenner. *Ordinary and partial differential equations*. CRC Press, 2013.

[6] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Alexander Nepomnyashchy. *Partial Differential Equations: Analytical Methods and Applications*. Chapman y Hall/CRC, 2019.

[7] Morgan J Hurley y col. *SFPE handbook of fire protection engineering*. Springer, 2015.

[8] Y Katto. «Critical heat flux». En: *International Journal of Multiphase Flow* 20 (1994), págs. 53-90.

[9] William Morrow Kays. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2011.

[10] Kenneth K Kuo. *Principles of combustion*. TJ254. 5 K85 2005. 2005.

[11] Michihiko Matsuda. *First order algebraic differential equations: a differential algebraic approach*. Vol. 804. Springer, 2006.

[12] P Mindykowski y col. «Piloted ignition of wildland fuels». En: *Fire Safety Journal* 46.1-2 (2011), págs. 34-40.

[13] Michael F Modest. *Radiative heat transfer*. Academic press, 2013.

[14] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[15] Warren M Rohsenow, James P Hartnett, Young I Cho y col. *Handbook of heat transfer*. Vol. 3. McGraw-Hill New York, 1998.

[16] K Vafai, HA Hadim y JR Howell. *Radiative transfer in porous media, Handbook of Porous Media*. 2000.

Capítulo 8

Estrato de combustible húmedo

Contenidos del Capítulo

8.1. Introducción 113

8.2. Planteamiento general de la ecuación de calor para un medio de múltiples fases con humedad 114

8.3. Incremento de energía térmica: lado izquierdo 116

8.4. Intercambio neto de calor en la interfase: lado derecho 120

8.4.1. Componentes de la ecuación de calor para un medio húmedo 121

8.4.1.1. Conducción en medio húmedo 121

8.4.1.2. Convección al interior del medio húmedo 122

8.4.1.3. Radiación en medio húmedo 122

8.5. Ecuación general de calor para un medio humedecido 123

8.5.1. Condiciones de borde para un medio con múltiples fases 127

8.6. Divergencia del flujo radiativo para un medio humedecido 128

8.6.1. Método de los esféricos armónicos para medio humedecido 128

8.6.1.1. Ecuación de Bessel 130

8.7. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio con humedad 130

8.7.1. Propiedades y humedad 131

8.7.2. Dos problemas - inverse embeed technique 132

8.8. Condiciones de ignición para para el modelo de dos partes 133

8.8.1. Flujo crítico 133

8.8.2. Charring 134

8.8.3. Temperatura y tiempo de ignición 134

8.8.4. Criterio de ignición 134

8.8.5. Resumen de los supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio con humedad 135

8.9. Resolución numérica exacta para el modelo de dos partes 137

8.10. Modelo analítico para el modelo de dos partes 137

8.10.1. Problema P_h 137
8.10.2. Problema P_d 142
8.11. Medidas experimentales para el modelo de dos partes 145
8.12. Unificación de los modelos para fase seca y con humedad 146
8.12.1. Divergencia del modelo radiativo para el modelo unificado 148
8.12.2. Resolución numérica exacta para el modelo unificado 148
8.12.3. Modelo analítico unificado 149
8.13. Resultados 150
8.13.1. Temperatura de ignición 150
8.13.2. Tiempo de ignición 152
8.13.3. Adimensionalización 152
Referencias 154

8.1. Introducción

Luego de trabajar y desarrollar el modelo de ignición para un medio seco, surge la pregunta, ¿que ocurre cuando el medio tiene humedad? pues uno de los fuertes supuestos trabajados en su desarrollo fue que no tenia humedad y en la campaña experimental utilizada para validar los resultados se aseguró que la biomasa testeada estuviese en las mismas condiciones. En este capítulo se explota esta idea, pero como se verá mas adelante, no es posible utilizar las metodologías tradicionales para incluir la humedad.

En la literatura existen algunos estudio (sin ser demasiados) que tratan el tema de la humedad, sin embargo, en su mayoría no abordan el problema desde el punto de vista de la ignición sino desde el secado y evaporación del agua. Esto significa que el volumen de control que modelan los trabajos aludidos es evaluado como un *drying problem* o problema de secado, en donde solo se considera el fenómeno hasta que el agua contenida en dicho volumen es completamente evaporada, por lo que el proceso de calentamiento es más bien lento y expuesto a bajos flujos de calor. Lo anterior se retrata en problemas de estudio como algunos presentados para *melting problems* [2, 3, 7, 10, 18].

Para sobrellevar el problema antes mencionado, en este capítulo se desarrolla un modelo derivado desde la ecuación general de energía similar al Capítulo 7 que incluye la energía adicional requerida para calentar y evaporar el agua contenida en el volumen de control, lo que equivale a un problema de secado para el material y luego, una segunda parte en donde se calienta el material restante sin agua contenida. A pesar de que la idea parece ser correcta y ser simplemente la suma de dos variables, en la practica no es de esta manera. Esto debido a que el modelo considera dos fenómenos, cuyas condiciones de borde y las ecuaciones diferenciales involucradas que gobiernas los procesos son representantes de variables y dominios diferentes pero que derivan de un mismo problema inicial. Una situación similar es estudiada por Crank en [7], en donde propone una *embedding technique*, la cual es utilizada para combinar dos problemas con condiciones de borde distintas pero relacionadas por la misma temperatura. Más adelante en este capítulo se aborda esta técnica y se proponen formas para dar solución a la ecuación de calor de tal forma que aborde el problema de secado junto a la ignición del sólido. Y análogo al capítulo anterior, se propone un modelo radiativo conjunto a la ecuación de calor, que incluye la divergencia radiativa para ambas partes, pero debido a las limitaciones impuestas por la forma de las funciones involucradas no es posible obtener expresiones analíticas directas, motivo por el que se desarrollan modelos aproximados para obtener expresiones analíticas a ambos problemas. Posterior a esto, con el fin de obtener correlaciones más sencillas y rápidas de conseguir, se propone un modelo unificado, en donde se transforma a todo el problema como un problema de secado siguiendo la manera tradicional en que se ha hecho hasta el momento, pero aplicado a un medio poroso y en un sistema de coordenadas cilíndricas, lo cual no esta exento de dificultades adicionales como se ha visto en el anterior capítulo.

8.2. Planteamiento general de la ecuación de calor para un medio de múltiples fases con humedad

Como se trabajó en la sección 7.2, la ecuación general de energía para el medio participante es válida para una fase continua en movimiento. Recordando la ecuación general de energía se tiene que

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\nabla\dot{\mathbf{q}}'' - p\nabla\mathbf{v} + \mu\Phi + Q^{'''},$$

donde las propiedades del medio corresponden a ρ densidad del medio, u energía interna, $\mathbf{v}$ vector velocidad, $\dot{\mathbf{q}}''$ vector de flujo de calor total, Φ función de disipación y $Q^{'''}$ calor generado en el medio (por ejemplo, una reacción química). Nuevamente para un medio radiativamente participativo con emisión, absorción y difusión, la ecuación general esta sometida a tres principales efectos

1. El termino del flujo de calor $\dot{\mathbf{q}}$, en la mayoría de las aplicaciones no tiene el termino de radiación por lo que es solo difusión molecular (conducción de calor), pero ahora tiene otro componente que es el flujo radiativo debido a la energía radiativa interactuando con el medio dentro del volumen de control.
2. La energía interna ahora contiene la contribución de la radiación (radiación incidente G).
3. El tensor de presión de radiación se debe agregar al tradicional tensor de presión de dinámica de fluidos.

Luego, con la derivada material

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla u\right),$$

y despreciando los efectos de disipación y momento, sin generación de calor por reacciones químicas, la ecuación para un medio continuo se puede escribir como

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla u\right) = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''.$$

En este apartado se trabaja el para el escenario en que el estrato si cuenta con la presencia de agua, es decir, un contenido de humedad distinto de cero. Para esto, se considera ahora al lecho combustible como un medio heterogéneo compuesto por partículas solidas de igual geometría y propiedades, de n diferentes tipos. Para un pequeño volumen de control de este estrato V, N fases solidas coexisten con la fase gaseosa. Por lo que se puede definir una fracción en volumen al igual que en el caso seco como

$$\alpha_i = \frac{V_i}{V},$$

donde V_i es el volumen ocupado por la fase i, es decir, α_g para la fase gaseosa (ver Ecuación 7.5) y α_s

para la fase sólida. Sin embargo, en este caso no hay solo material seco por lo que se necesita modificar este parámetro para incluir el efecto del agua, para ello, se amplía el concepto de fracción en volumen [18]. La fase sólida puede estar compuesta por k tipos de partículas distintas dentro del volumen V, por lo que puede contener más de un tipo de material con sus respectivas propiedades termo-físicas, de esta manera, se redefine la fracción en volumen para la fase sólida como

$$\alpha_s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k, \tag{8.1}$$

con lo que también debe cumplirse

$$\alpha_g + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1. \tag{8.2}$$

Para el caso particular donde solo hay un tipo de material y contenido de agua, se puede tratar al agua como una de las k fases de la parte sólida, que si bien es un liquido, desde el punto de vista energético puede tratarse como sólido, y considerando que el agua que participa en el proceso de calentamiento, no es absorbida por el material seco en sus interior o por algún mecanismo biológico que modifique su estructura, es decir, solo se adhiere a la superficie externa del material seco, por lo que puede entenderse como una fase distinta que solo está en contacto con la fase seca,

$$\alpha_s = \alpha_d + \alpha_w, \tag{8.3}$$

en donde α_d es la fracción que ocupa el volumen solo de la fase solida seca y α_w corresponde al volumen ocupado por la fase liquida (agua o *water* en inglés).

Ahora que la fase sólida contiene más de una fase, se debe verificar que las ecuaciones de continuidad sigan siendo válidas en las formas planteadas anteriormente. Recordando la ecuación de energía para la fase sólida seca (Ecuación 7.6) es expandida a la fase sólida s

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_s c_{p,s} T\right) = \nabla \cdot \left(k_s \nabla T\right) + \dot{q}'''_{quim,s} + \dot{q}'''_{rad,s} - \dot{q}'''_{piro,s} + \dot{q}'''_{fot,s}, \tag{8.4}$$

en donde no hay interacciones químicas entre el agua y el material sólido, por lo que los términos asociados a la parte química nuevamente son despreciados del balance de energía. Luego, considerando al volumen de control como medio m donde se desarrolla un proceso de calentamiento para todas las fases involucradas, se puede plantear la Ecuación 7.1 como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s \rho_s e_s + \alpha_g \rho_g e_g\right) + \nabla \alpha_g \rho_g \mathbf{v_g} e_g = -\nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} \tag{8.5}$$

con $e_i = \int_{T_\infty}^{T_i} c_{p,i} dT$ como energía interna de la fase i y $\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}}$ vector de calor al interior del medio.

8.3. Incremento de energía térmica: lado izquierdo

Luego de este punto no se puede replicar el mismo procedimiento que para el caso anterior donde el medio tenia solo una fase seca (ver Capítulo 7), debido a que los balances de energía y propiedades cambian según la fase sólida sea seca o agua, y por sobre todo, el dominio y recorrido de las variables y funciones no es el mismo por lo que no se pueden separar simplemente como una suma aritmética simple, se debe distinguir cada propiedad según como esta esté definida y sea coherente físicamente.

Ahora bien, con el balance general de energía de la Ecuación 8.5, se puede trabajar algebraicamente para desarrollar los términos y obtener expresiones de manera análoga a como se hizo en el Capítulo 7 para el modelo desarrollado en un medio seco.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V_s}{V}\frac{m_s}{V_s}e_s + \frac{V_g}{V}\frac{m_g}{V_g}e_g\right) + \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_s e_s + m_g e_g\right) = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g \tag{8.7}$$

Los términos del lado izquierdo corresponden a la variación de energía de la fase gaseosa y solida. Ya que esta última contiene agua, en el proceso de calentamiento se pueden distinguir el calor sensible y calor latente de vaporización debido a que existe una etapa de calentamiento y posteriormente se produce un cambio de fase cuando el agua alcanza su temperatura de vaporización. No obstante, aún cuando este valor sea un parámetro conocido a priori (2.264,3 KJ/Kg a 97°C), se desconoce la rapidez a la que se realiza este proceso de calentamiento, por lo que no es posible determinar su impacto en el tiempo adicional requerido para la ignición del medio en estado seco. Solo se conoce su temperatura o calor de vaporización, pero no cuanto de este calor es requerido en cada unidad de tiempo, lo cual agrega un problema adicional al fenómeno, pues no solo se debe determinar el calor necesario para calentar el material sólido seco, sino que además, se debe adicionar calor para calentar el agua y evaporarla para poder alcanzar el punto de ignición del material seco. Esto bajo el supuesto en que el agua esta contenida a un nivel superficial y no a un nivel estructural donde podría modificar las propiedades del material, por lo que el agua superficial se calienta, luego evapora, y finalmente calienta el resto del material seco hasta alcanzar su punto de ignición

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T - T_\infty) + m_w c_{p,w}(T_b - T_\infty) + m_w L_w + m_g e_g\right) = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g, \tag{8.8}$$

donde L_w es el calor latente de vaporización del agua, m_d y m_w son las masas de combustible seco y masa de agua presentes en el estrato respectivamente. Ahora, con manipulaciones algebraicas y agrupaciones convenientes de términos en el lado izquierdo se puede reescribir el problema

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+m_w c_{p,w}(T_b-T_\infty)+m_w L_w+m_g e_g\right)=\mathbf{der} \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+\left(\frac{m_d c_{p,d}}{m_d c_{p,d}}\right)\left(m_w c_{p,w}(T_b-T_\infty)+m_w L_w\right)+m_g e_g\right)=\mathbf{der} \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+\left(\frac{m_d c_{p,d}}{m_d c_{p,d}}\right)\left[\left(m_{d+w}-m_d\right)c_{p,w}(T_b-T_\infty)+\left(m_{d+w}-m_d\right)L_w\right]+m_g e_g\right)=\mathbf{der} \tag{8.11}$$

dado que la masa de agua durante el proceso de calentamiento comenzará a evaporarse, la masa de agua liquida planteada disminuirá conforme pasa el tiempo, por lo que $m_w = f(t)$ y puede escribirse como la masa inicial total menos la masa seca, que se considera constante en el proceso de calentamiento, bajo el supuesto de que la perdida de masa seca es despreciable respecto de la perdida de agua. De esta manera, se define el contenido de humedad en base seca, como la evolución de la masa de agua en el tiempo $\lambda(t)$

$$\lambda(t)=\frac{m(t)_{d+w}-m_d}{m_d} \tag{8.12}$$

por lo que la Ecuación 8.11 continua como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+m_d c_{p,d}\left(\frac{(m(t)_{d+w})-m_d}{m_d c_{p,d}}\right)c_{p,w}(T_b-T_\infty)+m_d c_{p,d}\left(\frac{(m(t)_{d+w})-m_d}{m_d c_{p,d}}\right)L_w+m_g e_g\right)=\mathbf{der} \tag{8.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+m_d c_{p,d}\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t)(T_b-T_\infty)+m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t)+m_g e_g\right)=\mathbf{der} \tag{8.14}$$

Dado que la temperatura $T = f(\chi, t)$ es una función del espacio χ y tiempo t, se puede separar su dominio como la unción de dos sub-dominios. De esta manera, se puede definir el tiempo en que la función de la temperatura existe como la unión de dos intervalos, es decir, $t \in [t_\infty, t_b] \cup]t_b, t_{ig}]$, donde t_∞ es el tiempo $t = 0$ cuando la muestra se encuentra a temperatura ambiente, t_b corresponde al tiempo en que el agua alcanza su punto de vaporización a una temperatura T_b y t_{ig} es el tiempo en que el estrato alcanza la temperatura de ignición T_{ig}.

Desde este punto, se hará diferencia al hablar de temperatura y su respectivo tiempo de evaluación con los sub-índices h, d para referirse a la parte en que hay material seco-humedecido h y solo material seco *(d)*. Con esto, se puede escribir la diferencia de temperatura según su dominio

$$T(t) = \big(T_h(t_h) + T_d(t_d)\big), \quad T_h(t_h) = \big\{\big(t_h, T_h(t_h)\big) : t_h \in [t_\infty, t_b] \to [T_\infty, T_b]\big\},$$
$$T_d(t_d) = \big\{\big(t_d, T_d(t_d)\big) : t_d \in [t_b, t_{ig}] \to [T_b, T_{ig}]\big\} \tag{8.15}$$

Notar que la temperatura de ignición se da cuando solo hay material seco (d), por lo tanto no se hace diferenciación para ello, pues se asume que en todas las condiciones y materiales a evaluar con este tipo de modelos, requieren una temperatura de ignición mayor a la de ebullición del agua, y con ello, primero se debe pasar por el tiempo de ebullición para alcanzar dicha temperatura, con lo que le tiempo de ignición también será siempre mayor a al tiempo de ebullición.

$$T_{ig}(t) - T_\infty(t) = \big(T_{ig}(t_d) - T_b(t_d)\big) + \big(T_b(t_h) - T_\infty(t_h)\big) \quad t_h \in [t_\infty, t_b], t_d \in [t_b, t_{ig}] \tag{8.16}$$

En la Ecuación 8.16, el tiempo t_∞ corresponde al tiempo inicial en que las propiedades son medidas a condiciones ambiente, es decir, $t_\infty = t_0 = 0$ s, luego, el tiempo t_h representa el tiempo de calentamiento cuando aún existe agua en la muestra, es decir, se calienta el material seco y húmedo simultáneamente, luego, el tiempo t_d corresponde al tiempo en que solo queda material seco en la muestra y es calentado hasta alcanzar la ignición, ya que luego de la temperatura T_b, toda el agua ha sido evaporada y no se encuentra presente en forma liquida en el estrato. De esta forma, la Ecuación 8.14 se puede continuar como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\Bigg[m_d c_{p,d}\Big(\big(T_{ig}(t_d) - T_b(t_d)\big) + \big(T_b(t_h) - T_\infty(t_h)\big)\Big) + m_d c_{p,d}\Big(T_b(t_h) - T_\infty(t_h)\Big)\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_h)$$
$$+\ m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g(t_h + t_d)\Bigg] = \mathbf{der} \tag{8.17}$$

Luego, aplicando la condición de borde a $T(t)\big|_{t=t_b}$, se tiene que cuando el tiempo t se acerca a t_b, la temperatura $T(t_b)$ debe ser igual tanto por la izquierda como por la derecha, por lo que

$$\lim_{t_h \to t_b^-} T_h(t) = \lim_{t_d \to t_b^+} T_d(t) \tag{8.18}$$

lo que permite asegurar la continuidad de $T(t), t \in [t_0, t_{ig}]$ para todo el dominio y separar el problema en 2 partes. Con lo anterior, la Ecuación 8.17 sigue como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\Bigg(m_d c_{p,d}\big(T_{ig}(t_d) - T_h(t_d)\big) + m_d c_{p,d}\big(T_w(t_h) - T_\infty(t_h)\big)$$
$$+m_d c_{p,d}\Big(T_w(t_h) - T_\infty(t_h)\Big)\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_h) + m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g\Bigg) = \mathbf{der} \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}\Big(T_{ig}(t_d)-T_w(t_d)\Big)+m_d c_{p,d}\Big(T_w(t_h)-T_\infty(t_h)\Big)\left[1+\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_h)\right]\right.$$
$$\left.+\ m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g e_g(t)\right)=\mathbf{der} \quad (8.20)$$

luego, con la definición de fracción en volumen de la Ecuación 8.1, se puede separar el lado izquierdo en dos sub-problemas con sus respectivos dominios como se planteó en la Ecuación 8.16, en donde se puede asegurar la continuidad del problema en $T_w(t)$ con la existencia de los limites como en la Ecuación 8.18,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{V_s}{V}\left(\frac{m_d}{V_s}c_{p,d}\Big(T_{ig}(t_d)-T_w(t_d)\Big)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{V_s}{V}\left(\frac{m_d}{V_s}c_{p,d}\Big(T_w(t_h)-T_\infty(t_h)\Big)\left[1+\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_h)\right]\right)$$
$$+\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{V_s}{V}\left(\frac{m_d}{V_s}c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g e_g(t)\right)=\mathbf{der} \quad (8.21)$$

en donde aparece el término V_s el cual corresponde al volumen ocupado por el material seco y el contenido de humedad de la muestra como se planteó en la Ecuación 8.1, lo cual, junto a la Ecuación 8.12 representan el cambio del volumen de la fase k en conjunto conforme transcurre el tiempo y se evapora el agua de la muestra, por lo que $V_s = f(t)$, por lo que, de una manera rigurosa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s(t)\frac{m_d}{V_s(t)}c_{p,d}\big(T_{ig}(t_d)-T_w(t_d)\big)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t)\frac{m_d}{V_s(t)}c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g e_g(t_h+t_d)\right)$$
$$+\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s(t)\frac{m_d}{V_s(t)}c_{p,d}\Big(T_w(t_h)-T_\infty(t_h)\Big)\left(1+\left(\frac{c_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_h)\right]\right)=\mathbf{der} \quad (8.22)$$

pero dado que la energía necesaria para calentar solo el material seco (primer término del lado izquierdo), es una función definida en el dominio de $t \in]t_w, t_{ig}]$ y la variación en el tiempo del volumen está definida para $V_s = f(t), t \in [t_0, t_w]$ que es cuando el agua se evapora, deja al volumen para ese intervalo como un valor constante $V_s(t_d) = V_d, t_d \in]t_w, t_{ig}]$. Además,

$$\alpha_s(t) = \alpha_d(t_d) + \alpha_w(t_h) \quad (8.23)$$
$$\alpha_s(t) = \overline{\alpha_d}(t_d) + \alpha_w(t_h) \quad (8.24)$$
$$\frac{V_s(t)}{V} = \frac{\overline{V_d}(t_d)}{V} + \frac{V_w(t_h)}{V} \quad (8.25)$$
$$\alpha_s(t) = \frac{\overline{V_d}(t_d) + V_w(t_h)}{V} \quad (8.26)$$
$$\alpha_s(t) = \frac{\overline{V_d}(t_d) + \left(\dfrac{m_w(t_h)}{\rho_w}\right)}{V} \quad (8.27)$$
$$\alpha_s(t) = \frac{\overline{V_d}(t_d) + \lambda(t_h)\left(\dfrac{\overline{m_d}(t_d)}{\rho_w}\right)}{V} \quad (8.28)$$

por lo que $\alpha_s(t)$ se puede plantear como una única función para todo t, o bien, separar en dos partes $(\alpha_d + \alpha_w)$ y considerar solo como variable a $\alpha_w(t_d)$.

Considerando la relación entre la masa del material y el volumen inicial que este ocupa para la fase s, se puede definir la densidad aparente del material seco como

$$\rho_{s,ap}(t) = \frac{m_d}{V_s(t)} \tag{8.29}$$

Luego, con la Ecuación 8.29 y definiendo los siguientes parámetros se puede escribir la Ecuación 8.22 de una manera más compacta

$$\beta(t) = \rho_{s,ap}(t) c_{p,d} \tag{8.30}$$

$$\gamma = \frac{c_{p,w}}{c_{p,d}} \tag{8.31}$$

considerando que los calores específicos permanecen constantes durante el proceso de calentamiento. Algunos autores proponen un ajuste de las propiedades de materiales húmedos incluyendo un factor de ajuste por el contenido de humedad inicial de la forma $prop_{humeda} = prop_{seca} \cdot (1 + \omega) MC_0$. Por el momento no se realiza un ajuste a las propiedades ya que el balance realizado se hizo de tal manera de mantener por separado las propiedades del material seco y material humedecido, por lo que no es necesario ajustarlo, pero se detallará su uso más adelante en la sección 8.7.1.

Para el lado izquierdo se tiene el balance general, incluyendo el análisis para la compactación α_m, en donde se puede distinguir los fenómenos físicos que ocurren en cada dominio del tiempo t

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\alpha_d}(t_d)\overline{\beta}(t_d)\Big(T_{ig}(t_d) - T_w(t_d)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\Big(T_w(t_h) - T_\infty\Big)\Big(1 + \gamma\lambda(t_h)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g(t_h + t_d)\right) = \mathbf{der} \tag{8.32}$$

8.4. Intercambio neto de calor en la interfase: lado derecho

Ahora, trabajando el lado derecho planteado al inicio en Ecuación 8.9,

$$\mathbf{der} = -\nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla \alpha_g \rho_g \mathbf{v_g} e_g \tag{8.33}$$

donde el término correspondiente al flujo de calor total en el medio m

$$\nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} = \nabla\left(\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} + \dot{\mathbf{q}}''\right) \tag{8.34}$$

tiene las componentes para la conducción y radiación en el medio. Dado el problema de la humedad, ambos fenómenos tendrán distintos comportamientos según el intervalo de tiempo que se evalúe, antes o

después de que toda el agua sea evaporada en $\big(t_w, T_w(t_w)\big)$. Con esto, el lado derecho se puede plantear de la siguiente manera

$$\mathbf{der} = -\nabla\big(k_m \nabla T(t)\big) - \nabla \alpha_g \rho_g \mathbf{v_g} e_g(t) - \nabla \dot{\mathbf{q}}'' \tag{8.35}$$

8.4.1. Componentes de la ecuación de calor para un medio húmedo

Como se trabajó en la derivación del modelo sin humedad, se analiza cada componente de la ecuación de calor para ver su comportamiento direccional y temporal.

8.4.1.1. Conducción en medio húmedo

Dado que coexisten varias fases dentro del medio, se puede ponderar un termino global para el coeficiente de conducción k_m, el cual al tratarse de un fenómeno volumétrico con transferencia de calor a todo el volumen, se puede realizar un procedimiento similar a la fracción en volumen presentado en Ecuación 8.1 mediante ponderaciones.

$$\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} = k_m \nabla T(t) \tag{8.36}$$

$$= \left(\overline{\alpha_g(t)} k_g + \alpha_s(t) k_s\right) \nabla T(t) \tag{8.37}$$

Esta es una forma de abordar el problema, considerando la conducción limitada por la evolución de perdida de masa de agua $\lambda(t_h)$. No obstante, para continuar la homogeneidad del problema y su futura resolución, puede ser más conveniente separar la conducción para la parte humedecida y para la parte solo con material seco. Es importante destacar que si bien, se adicionan variables al problema, se pueden solucionar gracias a las condiciones de borde y la existencia y unicidad de los límites en T_w (Ecuación 8.18).

$$\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} = \left(\overline{\alpha_g(t_d)} k_g + \overline{\alpha_d(t_d)} k_d\right) \nabla T(t_d) + \left(\overline{\alpha_g(t_h)} k_g + \overline{\alpha_d(t_h)} k_d + \alpha_w(t_h) k_w\right) \nabla T(t_h) \tag{8.38}$$

Puesto que ambos dominios de temperaturas se encuentran claramente definidos, al evaluarse el tiempo fuera de su dominio, el valor es cero, ya que no se encuentra definida la función de temperatura $(\alpha_w(t_d) T_d(t_d))$, además, la parte gaseosa se debe asociar a ambos tramos, lo que en su conjunto representa que el término de conducción asociado al aire interior del estrato es considerado tanto para la parte humedecida como para la parte de material seco.

Ahora se puede desarrollar cada término del lado derecho como se planteo en la Ecuación 8.35, dejando por el momento el término de la radiación (divergencia de la radiación) como un factor del

medio $\nabla\dot{\mathbf{q}}''$ y se tratará con mayor detalle en secciones posteriores (sección 8.6).

$$\nabla\big(k_m\nabla T(t)\big) = k_m\nabla^2 T(t) \tag{8.39}$$

$$= k_m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T(t)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T(t)}{\partial z^2}\right) \tag{8.40}$$

Por su parte, como la temperatura es función de las coordenadas espaciales y el tiempo, se puede manipular separando como en los casos anteriores en la variable tiempo, ya que en las coordenadas espaciales continua en un solo dominio.

$$T(r,\varphi,z,t) = T(r,\varphi,z,t_h) + T(r,\varphi,z,t_d) \qquad \forall \quad r\in[r_i, r_i+\delta],\ \varphi\in[0,2\pi], z\in[0,l_z], \quad t_h\in[t_\infty,t_b],\ t_d\in[t_b,t_{ig}] \tag{8.41}$$

lo cual permite desarrollar la divergencia de la conducción en el medio para la parte seca y húmeda,

$$\begin{aligned} k_m\nabla^2 T(t) = &\left(\overline{\alpha_g(t_h)}k_g + \overline{\alpha_d(t_h)}k_d + \alpha_w(t_h)k_w\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_h(t_h)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T_h(t_h)}{\partial z^2}\right) \\ &+ \left(\overline{\alpha_g(t_d)}k_g + \overline{\alpha_d(t_d)}k_d\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_d(t_d)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T_d(t_d)}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{8.42}$$

8.4.1.2. Convección al interior del medio húmedo

Para el término de convección al interior del medio poroso, este tiene efecto tanto para la parte seca como para la parte húmeda, por lo que el término de convección es válido para ambos intervalos de t, entonces, aplicando las condiciones de continuidad (Ecuación 7.16)

$$\nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g = \alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}(\nabla\cdot e_g(t)\mathbf{v_g}) \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_g(t)\rho_g\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial r e_g(t)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial e_g(t)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial e_g(t)}{\partial z}\right) \\ &= \alpha_g(t)\rho_g\left[\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial r e_g(t_h)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial e_g(t_h)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial e_g(t_h)}{\partial z}\right)\right. \\ &\quad \left.+\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial r e_g(t_d)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial e_g(t_d)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial e_g(t_d)}{\partial z}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.44}$$

8.4.1.3. Radiación en medio húmedo

Nuevamente se presenta de manera muy breve el término radiativo ya que se tratará en detalle en secciones posteriores. Se expresa de manera general para el medio en la dirección r y mas adelante se desarrollara su expansión a los diferentes intervalos $[t_\infty, t_b]$, $]t_b, t_{ig}]$.

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\mathbf{q}}'' &= \dot{q}_r'' + \dot{q}_\varphi'' + \dot{q}_z'' \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r'')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\dot{q}_\lambda'')}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\dot{q}_z'')}{\partial z} \end{aligned} \tag{8.45}$$

Por lo tanto, el lado derecho puede expresarse en función de cada componente para el espacio en coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned}
\textbf{der} =& -\nabla\big(k_m\nabla T(t)\big) - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g(t_h+t_d) - \nabla\dot{\mathbf{q}}'' \\
=& -k_m\nabla^2T(t) - \alpha_g\rho_g c_{p,g}(\mathbf{v_g}\nabla T) - (R_{m,r}+R_{m,\varphi}+R_{m,z}) \\
=& -\left(\overline{\alpha_g(t_h)}k_g + \overline{\alpha_d(t_h)}k_d + \alpha_w(t_h)k_w\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T_h(t_h)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2T_h(t_h)}{\partial z^2}\right) \\
&-\left(\overline{\alpha_g(t_d)}k_g + \overline{\alpha_d(t_d)}k_d\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T_d(t_d)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2T_d(t_d)}{\partial z^2}\right) \\
&-\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}\Bigg[\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial rT_h(t_h)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial z}\right) \\
&+\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial rT_d(t_d)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial z}\right)\Bigg] - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\dot{\mathbf{q}}''}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}''}{\partial\varphi} + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}''}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{8.46}$$

8.5. Ecuación general de calor para un medio humedecido

Combinando la expresión de la Ecuación 8.32 para el lado izquierdo con la Ecuación 8.46 para el lado derecho, se puede obtener una ecuación general de energía a la cual integrar el modelo radiativo de la Ecuación 8.85, resultando en

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\overline{\alpha_d}(t_d)\overline{\beta}(t_d)\Big(T_{ig}(t_d) - T_d(t_d)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\Big(T_h(t_h) - T_\infty\Big)\Big(1+\gamma\lambda(t_h)\Big) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g(t_h+t_d)\right) = \\
&-\left(\overline{\alpha_g(t_h)}k_g + \overline{\alpha_d(t_h)}k_d + \alpha_w(t_h)k_w\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T_h(t_h)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2T_h(t_h)}{\partial z^2}\right) \\
&-\left(\overline{\alpha_g(t_d)}k_g + \overline{\alpha_d(t_d)}k_d\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T_d(t_d)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2T_d(t_d)}{\partial z^2}\right) \\
&-\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}\Bigg[\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial rT_h(t_h)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial z}\right) \\
&+\left(u_g\frac{1}{r}\frac{\partial rT_d(t_d)}{\partial r} + v_g\frac{1}{r}\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial\varphi} + w_g\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial z}\right)\Bigg] - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\dot{\mathbf{q}}''}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}''}{\partial\varphi} + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}''}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{8.47}$$

Es importante destacar que si el contenido de humedad inicial es cero y considerando que la muestra no se humedecerá producto del contacto con el ambiente con una rapidez suficiente que modifique el contenido de agua en la muestra en el tiempo de evaluación, es decir, 0 % de humedad de manera constante, la Ecuación 8.47 es equivalente al modelo presentado en la Ecuación 7.20, lo cual es posible ya que existe continuidad en $T_b(t_b)$ como se ha descrito anteriormente (ver sección 8.3),

$$\alpha_d\rho_d c_{p,d}\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla\big(k_m\nabla T\big) - (1-\alpha_d)\rho_g\nabla\mathbf{v_g}e_g - \nabla\dot{\mathbf{q}}'', \tag{8.48}$$

cuyas condiciones iniciales y resolución ya han sido trabajadas. Para que el modelo planteado en

la Ecuación 8.47 represente el fenómeno físico que se esta modelando, se deben realizar algunas consideraciones y supuestos que deben ser expandidos a los presentados en el modelo anterior (ver sección 7.4).

Por otro lado, la temperatura es un fenómeno espacial y temporal, de esta manera, se puede definir una temperatura volumétrica promediada (de manera espacial, no temporal como promedio estándar) del medio hasta donde la penetración tiene efecto.

$$\overline{T}(t) = \frac{\int_{\varphi_h}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} T(r,\varphi,z,t) r dr d\varphi dz}{\int_{\varphi_h}^{\varphi_2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi dz} \tag{8.49}$$

Además, se debe recordar que dada a dependencia de la temperatura del tiempo, esta se puede separar en tramos siempre y cuando exista continuidad en los puntos extremos de cada tramo, lo cual es independiente de las coordenadas espaciales

$$\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_d(t_d) + \overline{T}_h(t_h)\right) \Big/ \quad \overline{T}_h(t_h) = \left\{\left(t_h, \overline{T}_h(t_h)\right) : t_h \in [t_\infty, t_b] \to [T_\infty, \overline{T}_b]\right\}, \tag{8.50}$$

$$\overline{T}_d(t_d) = \left\{\left(t_d, \overline{T}_d(t_d)\right) : t_d \in [t_b, t_{ig}] \to [\overline{T}_b, \overline{T}_{ig}]\right\} \tag{8.51}$$

Siempre y cuando exista continuidad, de ta manera que

$$\lim_{t_h \to t_b^-} T_h(t) = \lim_{t_d \to t_b^+} T_d(t) \tag{8.52}$$

Ahora bien, dado que la temperatura es un fenómeno espacial y temporal, no es posible obtener un valor inmediato, ya que se requiere definir en que punto del espacio y tiempo se obtendrá la temperatura (campo escalar), además, se tiene un medio participativo con dos fases presentes (solida y gaseosa), por lo que para cada punto espacio-tiempo existirá una medida de temperatura para cada fase, las cuales eventualmente tenderán a un equilibrio térmico (transferencia de calor entre fases hasta llegar a un punto de equilibrio). Este proceso se da de manera continua, motivo por el cual la temperatura para este caso de estudio es efectivamente un campo escalar que posee diferentes medidas para cada combinación espacio-tiempo. Para poder resolver el problema, se asume un equilibrio térmico entre fases, es decir, el medio es tratado como un medio continuo en donde la fase solida y gaseosa se encuentran en equilibrio térmico, por lo que en cada combinación de espacio-tiempo, existirá una única temperatura para todo el volumen de control, lo cual permite reducir las ecuaciones de energía para T_k y T_g a una sola ecuación de transferencia de calor en una temperatura única T.

De esta forma, la Ecuación 7.20 representa lo anteriormente descrito, pero aun se requiere definir cada punto del espacio para obtener las coordenadas en donde se desea medir la temperatura en algún tiempo determinado, pero realizar este proceso no resulta practico ni demasiado útil en aplicaciones

para la ingeniería. En este punto, la teoría clásica para la transferencia de calor en un medio participante asume que toda la radiación se absorbe en la superficie por lo que la divergencia del flujo radiativo es cero, y con ello, el problema se transforma en conducción pura. Sin embargo, como se ha trabajado en la sección referente al flujo radiativo, tratar este fenómeno de esa manera no seria del todo correcto ya que el espesor de penetración de la radiación no debe ser necesariamente despreciable, ya que en el proceso de calentamiento, este fenómeno cobra gran importancia sobretodo en fenómenos en donde el medio es poroso (como este caso de estudio), ya que el material (aciculas de pino) al encontrarse distribuidas de manera aleatoria, tienen muy pocos puntos de contacto al interior del volumen de control, por lo que mientras mayor sea la porosidad del material, más importante se vuelva la transferencia de calor en donde no hay dependencia del contacto físico, tal como lo es la convección y la radiación, en donde esta última es tradicionalmente despreciada en la mayoría de configuraciones debido a la dificultad para abordar física y matemáticamente el fenómeno.

Por lo anterior, se define una temperatura espacial promedio $\overline{T}$, la cual representa la temperatura de todo el estrato o volumen de control como un solo elemento, permitiendo obtener un valor para la temperatura de todo el estrato para cada instante de tiempo. Al tratarse de un valor promedio, es de esperar que el valor medido en la superficie (expuesta a un flujo de calor) o al final del estrato (expuesto a las condiciones propias del ambiente que rodea al medio), puedan ser muy diferentes entre sí, por lo que el valor de $\overline{T}$ se encontrará en aquel rango. Dicha temperatura promediada espacialmente puede definirse de manera general para un sistema en coordenada cilíndricas como se presenta en la Ecuación 7.22, en donde la temperatura volumétrica es promediada entre las coordenadas iniciales del volumen de control, que es por donde incide el flujo de calor que genera el proceso de calentamiento, hasta el punto interior en donde la penetración de la radiación tiene efecto, es decir, hasta un espesor de penetración δ en la dirección del calentamiento. Es importante destacar que este punto no necesariamente debe coincidir con el extremo externo del volumen de control, pues puede ser el caso en que las condiciones y comportamiento del material o del medio no permitan que la radiación penetre a todo el material debido a sus propiedades térmicas o configuración, etc.

Promediar espacialmente la temperatura es posible ya que el medio es continuo y equivalente, la fase solida y gaseosa se consideran en equilibrio térmico como se ha mencionado en el párrafo anterior, por lo que la temperatura puede asumirse como homogénea al interior del estrato gracias al gradiente de temperatura a medida que la radiación penetra y calienta el medio.

Lo anterior es un punto fundamental, ya que el gradiente es pequeño al interior del medio, por lo que se puede asumir un equilibrio térmico entre las fases y esto permite obtener una temperatura promedio del medio espacialmente hablando *thermally thin*. Que el medio sea térmicamente delgado proviene del numero de Biot, el cual establece que si $Bi´ < 1$, el medio se considera *thermally thin*. Este se calcula como

$$Bi = \frac{h_{conv} L}{k}, \tag{8.53}$$

que se traduce en que si un medio está expuesto a un mismo flujo (h_{conv}) y es capaz de conducir más calor a través de el (k), este será térmicamente delgado. Esto ocurre por que el medio es *optically thin*,

es decir que la radiación puede entrar fácilmente al medio ya que el camino óptico es muy pequeño ($´ < 1$), comportándose como si fuese un medio cuasi-transparente. Caso contrario sería si el medio fuese *optically thick*, es decir que es demasiado "grueso"para que la radiación penetre más allá de la superficie, esto provoca que la radiación se absorba casi completamente en la superficie provocando un gradiente muy grande al interior del medio (porque pasa de una temperatura muy alta en la superficie a temperatura ambiente en tan solo unos milímetros al interior del medio), lo cual genera que la radiación "no penetrez el medio tome un comportamiento como material *thermally thick*, por lo que no sería correcto utilizar una temperatura promediada espacialmente, solo se debería considerar la temperatura superficial como se ha hecho en diversos trabajos de varios autores, continuando el acercamiento de la teoría clásica.

Para evitar confusiones por notación, desde ahora se omitirán las barras para representar las propiedades constantes y solo se referirá al promedio, para este caso temperatura promedio $\overline{T}$, con lo que la Ecuación 8.47 se reescribe como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\big(T_d(t_d)-T_h(t_d)\big)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(T_h(t_h)-T_\infty\big)\Big(1+\gamma\lambda(t_h)\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g e_g(t_h+t_d)\right)=\\
&-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_w(t_h)k_w\big)\left(r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\right)+\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)\left(r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\right)\right.\\
&\left.+\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}\big(u_g rT_h(t_h)+u_g rT_d(t_d)\big)+(r\dot{\mathbf{q}}'')\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_w(t_h)k_w\big)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial\varphi}\right)\right.\\
&\left.+\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial\varphi}\right)+\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}\big(v_g T_h(t_h)+v_g T_d(t_d)\big)+(\dot{\mathbf{q}}'')\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_w(t_h)k_w\big)\left(\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial z}\right)+\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)\left(\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial z}\right)\right.\\
&\left.+\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}\big(w_g T_h(t_h)+w_g T_d(t_d)\big)+(\dot{\mathbf{q}}'')\right].
\end{aligned}\tag{8.54}$$

Con la Ecuación 8.49, se busca plantear el balance de energía de la Ecuación 8.47 en función de las propiedades promediadas. Para ello, se integra en el volumen del estrato en que penetra la radiación ($\varphi_1\to\varphi_2, l_1\to l_2, r_1\to r_2$) a ambos lados de la Ecuación 8.54 y se divide por el volumen en que la radiación actúa, resultando una ecuación general para un sistema en coordenadas cilíndricas con presencia de humedad.

Ahora, considerando los siguientes supuestos:

i) El cuerpo de estudio es el volumen entre dos cilindros concéntricos de la misma altura finita, es decir, sus límites son ($\varphi_1=0\to\varphi_2=2\pi$), ($l_1=0\to l_2=l_z$), ($r_1=r_i\to r_1=r_i+\delta$).

i) La temperatura no varía en el eje radial, por lo que los gradientes en este eje son cero (simetría radial o axial).

i) La variación a lo largo de la altura del medio varía muy poco por lo que se considera despreciable, es decir, el gradiente de la temperatura en el eje z es cero.

Luego, se puede expresar la Ecuación 8.54 en términos promediados como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\big(\overline{T}_d(t_d)-\overline{T}_h(t_d)\big)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(\overline{T}_h(t_h)-T_\infty\big)\Big(1+\gamma\lambda(t_h)\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g(\overline{e}_g(t_h)+\overline{e}_g(t_d))\right)=\\
&-\frac{2}{((r_i+\delta)^2-r_i^2)}\Bigg[\Big(\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_h(t_h)k_h\big)r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\\
&+\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}+\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}u_g r\big(T_h(t_h)+T_d(t_d)\big)\Big)\Big|_{(r_i+\delta)}\\
&-\Big(\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_h(t_h)k_w\big)r\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}+\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)r\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\\
&+\alpha_g(t)\rho_g c_{p,g}u_g r\big(T_h(t_h)+T_d(t_d)\big)\Big)\Big|_{r_i}\Bigg]\\
&-\frac{2}{((r_i+\delta)^2-r_i^2)}\left[\left(r\dot{q}''_{r,h}(r)\Big|_{r_i+\delta,h}-r\dot{q}''_{r,h}\Big|_{r_{i,h}}\right)+\left(r\dot{q}''_{r,d}(r)\Big|_{r_i+\delta,d}-r\dot{q}''_{r,d}\Big|_{r_{i,d}}\right)\right] \qquad (8.55)
\end{aligned}$$

8.5.1. Condiciones de borde para un medio con múltiples fases

Despreciando la variación de energía de la fase gaseosa, se pueden establecer las siguientes condiciones de borde para el problema según cada etapa (con o sin presencia de humedad).

$$\begin{aligned}
r=r_i, t=t_h: \quad -h_{c,h}\big(\overline{T}_h(t_h)-T_\infty\big) &= -\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_w(t_h)k_w\big)\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\\
&\quad-\alpha_g(t_h)\rho_g c_{p,g}u_g T_h(t_h) \qquad (8.56)\\
r=r_i, t=t_d: \quad -h_{c,d}\big(\overline{T}_d(t_d)-T_\infty\big) &= -\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\\
&\quad-\alpha_g(t_d)\rho_g c_{p,g}u_g T_d(t_d) \qquad (8.57)\\
r=r_i+\delta, t=t_h: \quad 0 &= -\big(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_d(t_h)k_d+\alpha_w(t_h)k_w\big)\frac{\partial T_h(t_h)}{\partial r}\\
&\quad-\alpha_g(t_h)\rho_g c_{p,g}u_g T_h(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_w) \qquad (8.58)\\
r=r_i+\delta, t=t_d: \quad 0 &= -\big(\alpha_g(t_d)k_g+\alpha_d(t_d)k_d\big)\frac{\partial T_d(t_d)}{\partial r}\\
&\quad-\alpha_g(t_d)\rho_g c_{p,g}u_g\big(T_d(t_d)\big) \qquad (8.59)\\
r=r_i+\delta, t: \quad \overline{T}_h(t_h)=\overline{T}_d(t_d) &= T_\infty \qquad (8.60)\\
\overline{T}(r,t_b): \quad \overline{T}_h(t_b)=\overline{T}_d(t_b) &= \overline{T}_b \qquad (8.61)\\
\overline{T}_d(r,0): \quad \overline{T}_h(0) &= T_\infty \qquad (8.62)
\end{aligned}$$

Con $h_{c,h}, h_{c,d}$ como coeficientes de transferencia de calor entre el medio y el ambiente que incluyen las perdidas radiativas y convectivas para cada fase respectivamente. Con lo cual se puede reescribir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\big(\overline{T}_d(t_d)-\overline{T}_h(t_d)\big)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(\overline{T}_h(t_h)-T_\infty\big)\bigg(1+\gamma\lambda(t_h)\bigg)\\ +\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)\right)=\\ -\frac{h_{c,h}}{l_z}\big(\overline{T}_h-T_\infty\big)-\frac{2}{((r_i+\delta)^2-r_i^2)}\bigg((r_{i,h}+\delta)\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h}+\delta)-(r_{i,h})\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h})\bigg)\\ -\frac{h_{c,d}}{l_z}\big(\overline{T}_d-T_\infty\big)-\frac{2}{((r_i+\delta)^2-r_i^2)}\bigg((r_{i,d}+\delta)\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d}+\delta)-(r_{i,d})\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d})\bigg)\end{aligned}\tag{8.63}$$

8.6. Divergencia del flujo radiativo para un medio humedecido

Como se trabajó en la sección 7.5, el fenómeno radiativo es fundamental en el proceso de calentamiento de este tipo de problemas, aún cuando el medio este humedecido, sigue siendo poroso por lo que la conducción se da a través de muy pocos puntos de contacto, así, el fenómeno predominante en el calentamiento interior es la radiación.

8.6.1. Método de los esféricos armónicos para medio humedecido

La formulación matemática para este sub-problema aislado no cambia desde la formulación en seco, por lo que su planteamiento inicial es válido para este escenario. Recordando las ecuaciones que se deben resolver de manera simultanea

En cuanto al término radiativo, éste debería ser tratado análogamente a las otras partes del problema, considerando un comportamiento de la penetración de la radiación de manera distinta cuando hay presencia de agua a cuando no la hay.

Se definen las propiedades que afectan a la penetración de la radiación según el dominio que se evalúe. Para la parte en donde existe agua, las propiedades se trabajaran como pertenecientes al dominio 1 (para tiempo desde $t_0 \to t_b$ y dominio 2 para las propiedades en que el medio se encuentra seco ($t_b \to t_{ig}$)

$$\mathbf{D_h}: t_h \in [t_\infty, t_b] \;/\; \dot{q}''_r = \dot{q}''_{r,h}(r)\big|_{t=t_h} \tag{8.64}$$

$$\mathbf{D_d}: t_d \in [t_b, t_{ig}] \;/\; \dot{q}''_r = \dot{q}''_{r,h}(r)\big|_{t=t_d} \tag{8.65}$$

donde existe continuidad en el flujo radiativo incidente en el limite t_w,

$$\lim_{t_h \to t_b^-} \dot{q}''_{r,h}(r) = \lim_{t_d \to t_b^+} \dot{q}''_{r,d}(r) \tag{8.66}$$

siendo $\dot{\mathbf{q}}''_r(r)$ el flujo radiativo en r, con los sub índices h, d para los dominios en que el medio contiene

humedad y cuando esta seco respectivamente, como se presento anteriormente en Ecuación 8.64, Ecuación 8.65.

Primero se plantean las condiciones de borde de manera general para ambos dominios, con lo cual se tiene lo siguiente

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{8.67}$$

$$\nabla G = -\left(3\beta - A_1\sigma_s\right)\dot{\mathbf{q}}'' \tag{8.68}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w : \qquad 2\dot{\mathbf{q}}'' \cdot \hat{\mathbf{n}} = \quad 4J_w(r_w) - G \tag{8.69}$$

donde $\dot{\mathbf{q}}''$ es el flujo de calor radiativo total, $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}''$ es la divergencia del flujo de calor radiativo total, G es la radiación incidente, $I_b(T)$ es la intensidad de la radiación en el medio, A_1 es un *linear-anisotropic scattering factor*, $J_w(r_w)$ es el flujo de calor total dejando la superficie en la locación r_w k es el coeficiente de absorción, σ_s es el coeficiente de scattering (dispersión), β es el coeficiente de extinción, y se tiene que:

$$\beta = \kappa + \sigma_s \tag{8.70}$$

Para este caso en particular, se asume un medio *non-scattering* (sin dispersión), por lo que $\sigma_s = 0$. De esta forma, el coeficiente de extinción es $\beta = \kappa$. Luego, desarrollando las condiciones de borde para coordenadas cilíndricas de manera general, se pueden plantear en función de T

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right) = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{8.71}$$

$$\nabla G = -\left(3\beta_h - A_1\sigma_s\right)\dot{\mathbf{q}}'' \qquad \frac{\partial G}{\partial r} = -3\kappa\dot{q}_r'' \tag{8.72}$$

Luego, desarrollando el término para el flujo radiativo

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}'' = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{8.73}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right) = \kappa \left(4\pi I_b(T) - G\right) \Big/ \frac{\partial}{\partial r} \tag{8.74}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right) = -\kappa\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right) \tag{8.75}$$

$$\tag{8.76}$$

Entonces, se puede combinar con la radiación incidente $\nabla G = -\left(3\beta - A_1\sigma_s\right)\dot{\mathbf{q}}''$,

$$-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right) = -3\kappa\dot{q}_r'' \tag{8.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(\dot{q}_r'' + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\right)\right) = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{8.78}$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) + \dot{q}_r''\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)(r)\right)\frac{1}{r} = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{8.79}$$

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\dot{q}_r''\right) - \frac{1}{r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\dot{q}_r''\right)\right)r\frac{1}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right)\right) = 3\kappa^2\dot{q}_r'' \tag{8.80}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) - \left(3\kappa^2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(\dot{q}_r''\right) = 0 \tag{8.81}$$

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dot{q}_r''\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''\right) - \left(3\kappa^2 r^2 + 1\right)\left(\dot{q}_r''\right) = 0 \tag{8.82}$$

En donde la Ecuación 8.82 responde a la forma de una *Función de Bessel Modificada*, las cuales son del tipo [Henner, Belozerova,Forinash]:

8.6.1.1. Ecuación de Bessel

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \left(\kappa^2x^2 + p^2\right) = 0 \tag{8.83}$$

Cuya solución general es

$$y(x) = C_1I_p(\kappa x) + C_2K_p(\kappa x) \tag{8.84}$$

Por lo tanto, la solución a la Ecuación 8.82 es de la forma:

$$\dot{q}_r''(r) = C_1I_1\left(\sqrt{3}\kappa r\right) + C_2K_1\left(\sqrt{3}\kappa r\right) \tag{8.85}$$

8.7. Ecuación de calor con un modelo radiativo para un medio con humedad

Para resolver la Ecuación 8.85 se deben considerar las condiciones de borde para la aproximación P_1, tanto para la parte humedecida como seca.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w : \qquad 2\dot{\mathbf{q}}'' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4J_w - G \tag{8.86}$$

$$= \frac{\epsilon}{2-\epsilon}\left(4\pi I_{bw} - G\right) \tag{8.87}$$

$$r = r_i\Big|_{t\in t_h} : \qquad 2\dot{q}''_{r,h}\Big|_{r=r_{i,h}} = 4\left(\dot{q}''_{inc}(t) + \sigma T_\infty^4\right) - \left(4\sigma\overline{T}_h^4 - \frac{1}{\kappa_h}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}''_r\right)\right)\Big|_{r=r_{i,h}} \tag{8.88}$$

$$r = r_i + \delta\Big|_{t\in t_h} : \quad -2\dot{q}''_{r,h}\Big|_{r=r_{i,h}+\delta} = 4\sigma T_\infty^4 - \left(4\sigma\overline{T}_h^4 - \frac{1}{\kappa_h}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}''_r\right)\right)\Big|_{r=r_{i,h}+\delta} \tag{8.89}$$

$$r = r_i\Big|_{t\in t_d} : \qquad 2\dot{q}''_{r,d}\Big|_{r=r_{i,d}} = 4\left(\dot{q}''_{inc}(t) + \sigma T_\infty^4\right) - \left(4\sigma\overline{T}_d^4 - \frac{1}{\kappa_d}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}''_r\right)\right)\Big|_{r=r_{i,d}} \tag{8.90}$$

$$r = r_i + \delta\Big|_{t\in t_d} : \quad -2\dot{q}''_{r,d}\Big|_{r=r_{i,d}+\delta} = 4\sigma T_\infty^4 - \left(4\sigma\overline{T}_d^4 - \frac{1}{\kappa_d}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}''_r\right)\right)\Big|_{r=r_{i,d}+\delta} \tag{8.91}$$

Con lo anterior, se obtienen las constantes c_1, c_2 para la Ecuación 8.85, la cual se obtiene en dos partes según las condiciones de borde usadas, obteniéndose una parte del flujo de calor total para el medio húmedo y otra para el medio seco, en donde existe continuidad en el flujo radiativo incidente en el limite t_w como se definió anteriormente,

$$\lim_{t_h \to t_b^-} \dot{q}''_{r,h}(r) = \lim_{t_d \to t_b^+} \dot{q}''_{r,d}(r) \tag{8.92}$$

Con lo cual se tiene:

$$\dot{q}''_{r,h}(r) = c_{1,1} I_1\left(\sqrt{3}\kappa_h r\right) + c_{2,1} K_2\left(\sqrt{3}\kappa_h r\right) \tag{8.93}$$

$$\dot{q}''_{r,d}(r) = c_{1,2} I_1\left(\sqrt{3}\kappa_d r\right) + c_{2,2} K_2\left(\sqrt{3}\kappa_d r\right) \tag{8.94}$$

8.7.1. Propiedades y humedad

Como propone Khan et al., las propiedades k, ρ y C_p son afectadas cuando hay un incremento en el contenido de humedad. Ignorando la migración de humedad y el pequeño calor de des-absorción del agua, las propiedades humedecidas pueden relacionarse de la siguiente manera; el calor especifico aumenta como $c_{p,\lambda} = c_{p,d}(1 + 5 \cdot \lambda_0)$, la conductividad térmica $k_\lambda = k_d(1 + 2,1 \cdot \lambda_0)$ y la densidad $\rho_\lambda = \rho_s(1 + \lambda_0)$. Las cuales corresponden a tendencias empíricas obtenidas solo como correlaciones experimentales. De esta manera, en ausencia de otros modelos que incluyan la humedad a las propiedades termo-físicas, estas se pueden aproximar mediante las relaciones empíricas mencionadas.

8.7.2. Dos problemas - inverse embeed technique

De esta forma, el problema de la Ecuación 8.63 se puede separar en dos sub-problemas; problema húmedo **P-1** y problema seco **P-2** debido a la continuidad de todas las funciones en ambos dominios de t y la dependencia de las variables. La temperatura al estar promediada espacialmente, pierde su dependencia en las coordenadas (r, φ, z) y solo depende del tiempo t, además, el problema radiativo solo tiene dependencia en r que se ha separado de tal forma en que las condiciones de borde del problema radiativo permiten separarlo en dos tramos, tanto para el dominio de t_h como de t_d, por lo que la resultante, visto gráficamente como una relación $\overline{T}$ vs t, se puede observar la separación y continuidad de las variables $\overline{T}_h + \overline{T}_d$ en todo el dominio de t.

Problema húmedo $\mathbf{P_h}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(\overline{T}_h(t_h) - T_\infty\big)\left(1+\gamma\lambda(t_h)\right) + \alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h)\right] = \\ -\frac{h_{c,h}}{l_z}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\Big((r_{i,h}+\delta)\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h}+\delta) - (r_{i,h})\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h})\Big), \quad (8.95)$$

El problema húmedo P_h corresponde a un problema de secado o *drying problem* y consiste principalmente en evaluar el calentamiento hasta que el agua contenida en el volumen de control es evaporada completamente. Luego, el aumento de energía de la Ecuación 8.95 (lado izquierdo) puede ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha_s(t_h)}{V_s}\left[m_d c_{p,d}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big) + m_d c_{p,d}\left(\frac{c_{p,w}m_w(t_h)\big(\overline{T}_h - T_\infty\big)}{c_{p,d}m_d}\right) + m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\frac{m_w(t_h)}{m_d}\right], \quad (8.96)$$

por lo que reordenando los términos, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha_s(t_h)}{V_s}\left[m_d c_{p,d}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big)\left(1 + \frac{\big(c_{p,w}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big) + L_w\big)\,m_w(t_h)}{m_d c_{p,d}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big)}\right)\right]. \quad (8.97)$$

Luego, considerando la definición de la evolución del contenido de humedad en base seca, se puede obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(\overline{T}_h - T_\infty\big)\left(1 + \frac{\big(c_{p,w}\big(\overline{T}_b - T_\infty\big) + L_w\big)}{c_{p,d}\big(\overline{T}_b - T_\infty\big)}\lambda(t_h)\right)\right]. \quad (8.98)$$

Siendo $\Gamma = \dfrac{\big(c_{p,w}\big(\overline{T}_b - T_\infty\big) + L_w\big)}{c_{p,d}\big(\overline{T}_b - T_\infty\big)}$ el incremento de energía necesario para calentar el agua y evaporarla hasta que se alcanza la temperatura $\overline{T}$ normalizada por la energía necesaria para calentar el material seco en ese mismo rango de temperatura. Luego, combinando este resultado con la Ecuación 8.95

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\big(\overline{T}_h(t_h) - T_\infty\big)\left(1+\Gamma\lambda(t_h)\right) \\ -\frac{h_{c,h}}{l_z}\big(\overline{T}_h - T_\infty\big) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\Big((r_{i,h}+\delta)\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h}+\delta) - (r_{i,h})\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h})\Big), \quad (8.99)$$

Problema seco $\mathbf{P_d}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\left(\overline{T}_d(t_d)-\overline{T}_h(t_d)\right)= \\ -\frac{h_{c,d}}{l_z}\left(\overline{T}_d-T_\infty\right)-\frac{d}{((r_i+\delta)^2-r_i^2)}\left((r_{i,d}+\delta)\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d}+\delta)-(r_{i,d})\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d})\right) \quad (8.100)$$

8.8. Condiciones de ignición para para el modelo de dos partes

Cuando se habla de ignición, se debe tener en cuenta que esta ocurre cuando se produce una mezcla inflamable producto de un proceso de calentamiento en donde ocurre un aumento de temperatura hasta alcanzar un punto crítico en donde el aumento de energía en el medio sea suficiente para que se de la presencia de flama y esta pueda mantenerse una vez que se retira la fuente de calor externa.

En este proceso, la presencia de agua se asume que solo es absorbida por el material sin producir alteraciones estructurales, lo cual se traduce en que durante el proceso de calentamiento al aumentar la temperatura, esta se irá evaporando desde las capas superiores hacía las interiores, es decir, en esta parte del proceso se puede considerar como un proceso de secado en donde el agua migra a través de las capas solidas, alcanza la interfase y luego escapa de la fase sólida. Al tratarse de un proceso que involucra una fase sólida con material seco en contacto con la fase correspondiente al contenido de humedad, durante el proceso de calentamiento se asumen ambas fases como inertes químicamente, por lo que es posible despreciar las perdidas de masa producto de la pirólisis del material seco y solo considerar las perdidas de masa producto de la evaporación del agua contenida. Este supuesto es fundamental para el modelo desarrollado ya que de lo contrario, la energía producto de las reacciones químicas deben ser modificadas y consideradas en los balances de energía, tal como se describe en la Ecuación 7.6.

8.8.1. Flujo crítico

El mínimo flujo externo de calor al cual debe ser expuesto el medio $\dot{q}''_{cri}$ para producir la ignición se define de igual manera que en la sección 7.7.1, pues es un aspecto externo al medio. No obstante, la comparación entre un flujo critico para un material seco y un material humedecido no es trivial, pues es un valor difícil medir dada la sensibilidad con la temperatura y diversos factores. Pero desde un punto de vista teórico, el flujo de calor incidente es el que genera los aumentos de temperatura en el medio al ser la fuente de calor externa, por lo que el medio al estar humedecido requiere de una mayor cantidad de energía para alcanzar las condiciones de ignición, esto se puede ver en la definición del los parámetros μ, λ que representan el incremento de energía adicional que es necesario para el calentamiento de la masa de agua y producir el cambio de fase. De esta manera, se puede decir que el medio humedecido requiere de una mayor cantidad de energía para alcanzar la ignición, pero eso no significa que requiera de una mayor temperatura o que el flujo critico sea mayor, pues bien, el punto de ebullición del agua esta por debajo de las condiciones de ignición del medio, por lo que este punto

es solo un paso intermedio en el proceso de calentamiento, no así con el tiempo de ignición, el cual intuitivamente será mayor y se describirá en las siguientes secciones.

8.8.2. Charring

Producto del agua en la muestra y dado que se ha considerado como un medio inerte químicamente, no hay presencia de material carbonizado en el medio producto de las reacciones químicas con la influencia del agua contenida en el volumen de control, por lo tanto, al igual que en la sección 7.7.2 no se considera en el modelo la presencia de material carbonizado que interfiera en los mecanismos de transferencia de calor en la superficie o interior (debido a que se trata de un estrato poroso).

8.8.3. Temperatura y tiempo de ignición

Como se menciona en la sección 8.8.1, al haber presencia de agua contenida en el volumen de control se requiere de energía adicional para calentar dicha agua y producir su cambio de fase en la evaporación, sin embargo, esto no se traduce directamente en que la temperatura de ignición será mayor ya que la temperatura de vaporización del agua esta por debajo de la temperatura de ignición de un material sólido (en la mayoría de los casos, puede varían en situaciones puntuales). Este supuesto sustenta la idea y metodología utilizada para separar la ecuación de calor en dos sub-problemas, por un lado, un problema de secado en donde se calienta el medio hasta que se evapora toda el agua contenida a una temperatura T_b que se alcanza luego de un tiempo de exposición t_b, mientras que por el otro se tiene un problema clásico de ignición de un medio sólido en donde este es calentado hasta alcanzar la ignición a la temperatura T_{ig} luego de un tiempo t_{ig}. Lo anterior es gracias a la continuidad en el punto de ebullición del agua, en donde el punto de término del problema de secado es la condición inicial del problema de ignición en un sólido. Mayores detalles de las condiciones de ignición para un sólido se describen el la sección 7.7.3, las cuales también son válidas para el problema de secado junto a las condiciones aquí mencionadas,

8.8.4. Criterio de ignición

Las condiciones de ignición dadas en la sección 7.7.4 son análogas para el caso con humedad, sin embargo, las condiciones al problema modelado cambian pues el problema se encuentra separado en dos partes. La ignición ocurre cuando el flujo externo que incide en el medio $\dot{q}''_{inc}$ es igual al mínimo flujo necesario para que la ignición ocurra a la temperatura $\overline{T}_{ig}$ luego de evaporar el agua a la temperatura T_b, es decir, el flujo critico $\dot{q}''_{inc,cri}$,que se da luego de un largo tiempo de exposición al flujo externo t_{ig} o bien cuando las variaciones de la temperatura en el tiempo son lo suficientemente pequeñas como para considerar que se ha alcanzado el estado estacionario para ambos problemas. Por tanto, la Ecuación 8.63

debe cumplir que

$$0 = -\frac{h_{c,h}}{l_z}\left(\overline{T}_h - T_\infty\right) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\left((r_{i,h}+\delta)\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h}+\delta) - (r_{i,h})\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h})\right)$$
$$- \frac{h_{c,d}}{l_z}\left(\overline{T}_d - T_\infty\right) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\left((r_{i,d}+\delta)\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d}+\delta) - (r_{i,d})\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d})\right) \quad (8.101)$$

8.8.5. Resumen de los supuestos considerados en la derivación del modelo para el medio con humedad

A continuación se presenta un resumen de los supuestos y consideraciones empeladas para el desarrollo del modelo de ignición para un medio con presencia de humedad. En la Figura 8.1 se muestra de manera esquemática como se ha considerado el fenómeno físico para coordenadas cilíndricas en un medio poroso con presencia de agua en el volumen de control.

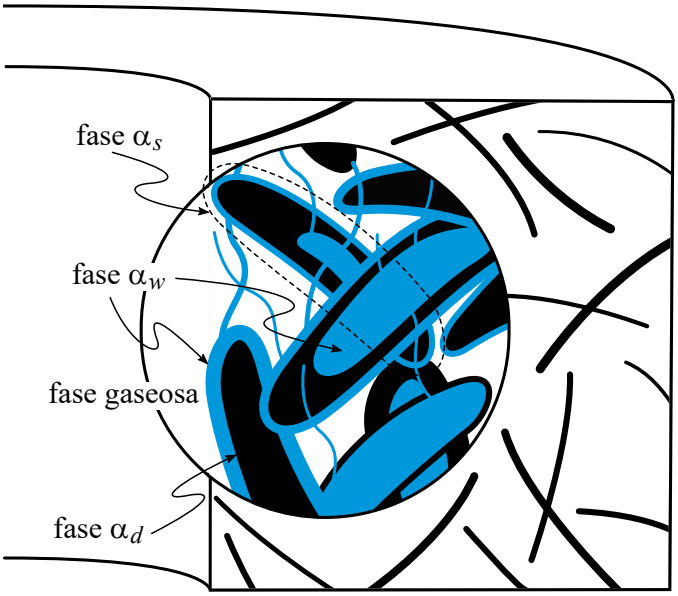


Figura 8.1: Esquema del proceso de secado del agua contenida en un medio poroso en coordenadas cilíndricas. Fenómeno modelado para el caso del I-FIT con contenido de humedad.

1. El estrato vegetal se considera como un medio continuo, en donde la fase gaseosa y la fase sólida, incluyendo la parte seca y agua en el problema de secado, se encuentran en equilibrio térmico. Lo anterior permite tratar a todas las fases como un solo medio para intervalo $[t_\infty, t_b]$, considerando variables para un solo medio y no tener que resolver ecuaciones de calor de manera simultaneas para la fase gaseosa y sólida. Luego, el mismo supuesto permite tratar a la fase sólida seca y la fase gaseosa como un solo medio en el intervalo $[t_b, t_{ig}]$. De esta manera ambos dominios y recorridos de las funciones tiene un solo set de ecuaciones de conservación que se deben resolver sin incurrir en el acoplamiento de ecuaciones como las momentum dentro del mismo problema.

2. Los elementos del estrato vegetal permanecen inertes químicamente durante el proceso de calentamiento, es decir, hasta antes de que la ignición ocurra. Este supuesto sustenta el hecho de no incluir las ecuaciones de conservación de masa y momentum y que deban resolverse simultáneamente

junto a la ecuación de energía. Por lo tanto, el proceso de pirólisis y su efecto en el calentamiento del estrato es despreciado.

3. El agua contenida en el volumen de control no participa en ninguna reacción química que pueda modificar la ecuación de calor, es decir, también se considera como inerte químicamente durante todo el proceso de secado.

4. La distancia del medio que esta afecta al proceso de calentamiento está dada por el camino libre medio de radiación δ, el cual es calculado usando la fórmula estándar $\delta = 4/\alpha_s\omega$.

5. La ignición ocurre cuando se alcanza la temperatura critica o temperatura de ignición espontánea $T_{ig} = T_{ig,sp}$. En la práctica, la temperatura de ignición se alcanza en la superficie más cercana a la fuente de calor, sin embargo, el modelo desarrollado en este trabajo, obtiene la temperatura promediada espacialmente, lo cual también aplica para el caso de la ignición, es decir, se obtiene $\overline{T}_{ig}$.

6. En el punto de vaporización del agua, se considera que las ecuaciones diferenciales de cada subproblema son continuas en dicho punto. En este punto se considera que a la temperatura media de vaporización el agua de todo el volumen es evaporada. Es cierto que esto no es necesariamente así, ya que al ser promediada espacialmente, la temperatura cercana a la superficie expuesta alcanzará antes la temperatura de vaporización y hacía adentro del medio puede que en ese tiempo aún no suceda lo mismo, pero debido a los gradientes de temperatura y la poca masa de agua presente, se puede considerar este supuesto como válido.

7. Las propiedades termo-físicas son obtenidas como un valor aparente, esto quiere decir que en un escenario realista, estas propiedades pueden experimentar variaciones en la medida que se producen gradientes de temperatura. Para esto, en secciones posteriores se presentará una alternativa en donde se obtienen propiedades efectivas afectas al impacto de la humedad, pues al trabajar la evolución del contenido de humedad en base seca, no se puede separar el efecto de la densidad del material seco del contenido de humedad. No obstante, en la literatura hay referencias disponibles de relaciones empíricas para las propiedades termo-físicas modificadas por el contenido de humedad inicial.

8. El desarrollo del modelo esta dado por la teoría de ignición basado en calentamiento radiativo de un material inerte.

9. El agua contenida en estrato combustible, ya sea solo contenida de manera superficial por el material seco, o bien, absorbida en parte al interior del material sin alterar su estructura, es evaporada del volumen de control sin alterar la biomasa a un nivel químico o estructural, considerando que el estrato de estudio corresponde a biomasa muerta desde un punto de vista nutricional pero que ha sido rehidratado por un mecanismo externo y no como un proceso natural. Lo anterior se traduce en que durante el proceso de secado, el agua contenida sube a la superficie del material seco que la contiene, alcanza la interfase entre la fase sólida y gaseosa, donde finalmente sale de la fase sólida en forma de vapor [18].

10. El volumen de control considera la presencia de agua, por lo que durante el periodo de calentamiento, esta experimenta un proceso de secado. De esta manera, el volumen de material sólido en

la fase s cambiará a medida que transcurre el tiempo de secado del material, asimismo, existirá una perdida de masa asociada al agua (fase w), por lo que las propiedades aparentes como la densidad o masa total contenida en la fase s experimentaran variaciones con el tiempo hasta que toda el agua contenida sea evaporada en el punto de vaporización a $\overline{T}_b$, luego de lo cual se consideran constantes debido al supuesto de material sólido seco inerte.

11. Se considera una transferencias de calor unidimensional solo en la dirección r.
12. La variación de entalpía de la fase gaseosa se puede despreciar de la ecuación de calor.

8.9. Resolución numérica exacta para el modelo de dos partes

Tal como ocurrió para el modelo sin humedad en el Capítulo 7, la temperatura aparece como variable explicita e implícita, por lo que no es posible obtener una expresión analítica de manera directa. El problema se vuelve aún mas difícil de manejar al tratar la humedad como una función que evoluciona en el tiempo y considerar dos partes, una para secado y otra para ignición, por lo que con las condiciones de ignición presentadas en las secciones anteriores, solo es posible resolver numéricamente el modelo de la Ecuación 8.63.

8.10. Modelo analítico para el modelo de dos partes

Ya que no es posible obtener una expresión analítica desde la Ecuación 8.63 desde el punto de vista del dominio de las funciones (sin considerar el tipo de funciones provenientes del término de radiación aún), para poder obtener una solución se realiza un procedimiento inverso de los *moving boundary problems* [2, 7, 10], en donde al tener condiciones de borde variables y con ello, ecuaciones diferenciales de diferentes dominios, se realiza algo similar ya que el escenario es inverso, pues se tiene un problema con dominios diferentes. Por ello, primero se resolverá el problema del primer tramo, ya que el borde del dominio de este problema es el inicio del otro sub-problema, es decir, la condición y resultados obtenidos en $\overline{T}_h(t_h) = \overline{T}_b(t_b)$ son los valores de la condición inicial del problema P_d.

8.10.1. Problema P_h

Entonces, planteando el problema que involucra el calentamiento de la parte de material seco y el contenido de humedad, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_d(t_h)\beta(t_h)\Big(1+\Gamma\lambda(t_h)\Big)\left(\overline{T}_h\right) = \\ -\frac{h_{c,h}}{l_z}\left(\overline{T}_h - T_\infty\right) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\Big((r_{i,h}+\delta)\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h}+\delta) - (r_{i,h})\dot{q}''_{r,h}(r_{i,h})\Big), \quad (8.102)$$

el cual es bastante similar al la Ecuación 7.32 de la sección 7.4, pero posee elementos que no permiten resolver y aproximar el modelo en la misma forma, por una parte se tiene la presencia de dos fases, luego, las propiedades termo-físicas de las fases no son constantes por lo que si muestran un comportamiento variable a medida que avanza el tiempo del calentamiento, matemáticamente esto significa que no pueden dejarse fuera de la derivada temporal en el laso izquierdo de la ecuación.

Se ha relacionado el contenido de humedad de manera conveniente para permitir tener el problema planteado en esta forma, esto significa que si bien el problema considera la humedad y las propiedades cambian, matematicamente solo se trata de una nueva variable respuesta, por lo que solo el lado izquierdo es el que presenta las modificaciones importantes. Se debe notar que el término de la radiación y el término de perdidas de calor por convección son similares al caso anterior por lo que es posible obtener un modelo para la radiación de manera similar. Como se describió al inicio de esta sección (ver sección 8.7.2), el problema se resuelve por parte, por ello, al igual que en el Capítulo 7 se obtendrá una expresión analítica para el problema que involucra la presencia de agua dentro del volumen de control. Primero se reescribe el problema en forma factorizada tal como en se hizo con la Ecuación 7.78

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_d(t_h)\beta(t_h)\Big(1+\Gamma\lambda(t_h)\Big)\left(\overline{T}_h\right) = -b_{3,h}h_{c,h}\left(\overline{T}_h - T_\infty\right) + b_{1,h}\dot{q}''_{inc}(t) - b_{2,h}\left(\overline{T}_h^4 - T_\infty^4\right), \quad (8.103)$$

la que también posee forma de una *ecuación de Chini*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^n(x) + g(x)y(x) + h(x),$$

por lo que para obtener un modelo analítico, se linealiza el término radiativo mediante una expansión en series al rededor de T_∞

$$\overline{T}_h^4 - T_\infty^4 \approx 4T_\infty^3\left(\overline{T}_h - T_\infty\right),$$

obteniéndose una expresión linealizada como

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_d(t_h)\beta(t_h)\Big(1+\Gamma\lambda(t_h)\Big)\left(\overline{T}_h\right) = \\ - b_{3,h}h_{c,h}\left(\overline{T}_h - T_\infty\right) + b_{1,h}\dot{q}''_{inc}(t) - b_{2,h}4T_\infty^3\left(\overline{T}_h - T_\infty\right). \quad (8.104)$$

Se define un nuevo coeficiente combinado como $h_{T,h} = h_{c,h} + 4b_{2,h}/b_{3,h}T_\infty^3$, con lo que se reescribe la Ecuación 8.103

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_d(t_h)\beta(t_h)\Big(1+\Gamma\lambda(t_h)\Big)\left(\overline{T}_h\right) = -b_{3,h}h_{T,h}\left(\overline{T}_h - T_\infty\right) + b_{1,h}\dot{q}''_{inc}(t). \quad (8.105)$$

Ahora bien, con el planteo compacto de la Ecuación 8.105 es posible resolver la ecuación diferencial y para ello se realiza un proceso de normalización como se realizó para el modelo sin humedad. Para ello se define una función $g(t)$ que representa la variación de energía producto del efecto de la humedad en las propiedades térmicas y se define como

$$g(t) = \alpha_d(t_h)\beta(t_h)\left(1+\Gamma\lambda(t_h)\right), \quad (8.106)$$

de esta manera, la Ecuación 8.105 se reescribe como

$$\overline{T}_h \frac{\partial g}{\partial t} + g\frac{\partial \overline{T}_h}{\partial t} = -b_{3,h} h_{T,h} \left(\overline{T}_h - T_\infty\right) + b_{1,h}\dot{q}''_{inc}(t). \tag{8.107}$$

Nota: Desde la ecuación general de energía, se tiene que la entalpía es una variación respecto de T_∞ hasta la temperatura medida, sin embargo, se trabaja la variación de la energía en el tiempo, por lo que la constante T_∞ es cero y es omitida de las ecuaciones. Luego, se define θ_h

$$\begin{aligned} \theta_h =& \frac{\overline{T}_h - T_\infty}{\overline{T}_b - T_\infty} \\ \text{Derivando en } \overline{T}_h \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{T}_h}\left(\theta_h\right) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{T}_h}\left(\frac{\overline{T}_h - T_\infty}{\overline{T}_b - T_\infty}\right) \\ \frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}\overline{T}_h} =& \frac{1}{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)} \end{aligned} \tag{8.108}$$

Luego reemplazando en la Ecuación 8.107 y dividiendo por $\left(b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}\right)$

$$\theta_h \left(\frac{\overline{T}_b - T_\infty}{b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}}\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + g(t)\left(\frac{\overline{T}_b - T_\infty}{b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} = -\frac{b_{3,h}h_{T,h}\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}{b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}}\theta_h + \frac{\dot{q}''_{inc}(t)}{\dot{q}''_{inc,cri}}. \tag{8.109}$$

Así, con al definición de parámetros normalizados

$$\begin{aligned} \theta_h =& \frac{\left(\overline{T}_h - T_\infty\right)}{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)} & \tau_h =& \frac{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}{b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}} \\ \psi_h =& -\frac{b_{3,h}h_{T,h}\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}{b_{1,h}\dot{q}''_{inc,cri}} & \varphi_h =& \frac{\dot{q}''_{inc}(t)}{\dot{q}''_{inc,cri}}, \end{aligned}$$

se puede reescribir la Ecuación 8.109 de manera compacta

$$\tau_h \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\theta_h + \tau_h g(t)\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} = -\psi_h\theta_h + \varphi(t). \tag{8.110}$$

Luego, reordenando los términos

$$\underbrace{\left(\frac{\tau_h\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \psi_h}{\tau_h g(t)}\right)}_{P(t)}\theta_h + \frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{\varphi_h(t)}{\tau_h g(t)}}_{Q(t)}, \tag{8.111}$$

se obtiene una ecuación diferencial en la forma

$$\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} + P(t)\theta_h = Q(t). \tag{8.112}$$

En la Ecuación 8.112 se puede observar que esta tiene la forma de

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y(x)^n, \tag{8.113}$$

la cual corresponde a una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea de coeficientes variables* cuya generalización es conocida como *ecuación diferencial de Bernoulli.*

Sea el cambio de variable definido como $z = y(x)^{1-n}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y(x)^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{8.114}$$

por lo que se puede replantear lo siguiente

$$\begin{aligned}
(1-n)y^{-n}(x)\left(y'(x) + P(x)y(x)\right) =& (1-n)y^{-n}(x)Q(x)y^{n}(x) \\
(1-n)y^{-n}(x)y'(x) + (1-n)y^{-n}(x)P(x)y(x) =& (1-n)Q(x) \\
z'(x) + \underbrace{P(x)(1-n)}_{p(x)}z(x) =& \underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)},
\end{aligned} \tag{8.115}$$

que corresponde a una *ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea normalizada.* Luego, puede ser trabajada como la Ecuación 7.90, es decir, como una ecuación diferencial de coeficientes variables.

Sea μ factor integrante definido como $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right)$, luego, se multiplica a ambos lados de la Ecuación 8.115

$$\begin{aligned}
\mu(x)\Big(z'(x) + p(x)z(x)\Big) =& \mu(x)q(x) \\
\left(\mu(x)z'(x) + \mu(x)p(x)y(x)\right) =& \mu(x)q(x) \\
\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} =& p(x)\mu(x) \\
\left(\mu(x)z'(x) + z(x)\mu(x)'\right) =& \mu(x)q(x) \\
\left(\mu z\right)'(x) =& \mu(x)q(x) \qquad \Big/ \int \\
\mu(x)z(x) =& \int \mu(x)q(x)dx + C \qquad \Big/ \frac{1}{\mu(x)} \\
z(x) =& \underbrace{\frac{C}{\mu(x)}}_{z_h(x)} + \underbrace{\frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx}_{z_p(x)}
\end{aligned} \tag{8.116}$$

En donde nuevamente se tiene una solución particular y una solución homogénea. Luego, expandiendo el factor integrante como $\mu(x) = \exp\left(\int (1-n)P(x)dx\right)$, la solución en $y(x)$ esta dada por

$$\begin{aligned}
y^{1-n}(x) = C\exp -\left(\int (1-n)P(x)dx\right) \\
+ \exp\left(-\int (1-n)P(x)dx\right)\int\left[\exp\left(\int (1-n)P(x)dx\right)(1-n)Q(x)\right]dx.
\end{aligned} \tag{8.117}$$

Lo anterior corresponde según la Ecuación 8.112 a un caso particular con $n = 0$, donde se necesita

conocer el valor de la constate C de la condición inicial, por lo que

$$y(x) = \underbrace{C\exp\left(-\int P(x)dx\right)}_{y_h(x)} + \underbrace{\exp\left(-\int P(x)dx\right)\int\left[\exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x)\right]dx}_{y_p(x)}. \tag{8.118}$$

De esta manera, la solución de la Ecuación 8.112

$$\theta_h(t) = \theta_{h,h}(t) + \theta_{h,p}(t), \tag{8.119}$$

tiene como solución homogénea a

$$\begin{aligned}\theta_{h,h}(t) =& C\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\tau_h\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\psi_h}{\tau_h g(t)}\right)dt\right)\\ =& C\exp-\left(\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}}{g(t)}\right)dt+\frac{\psi_h}{\tau_h}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{g(t)}dt\right)\end{aligned} \tag{8.120}$$

La Ecuación 8.120 representa una expresión general para cualquier comportamiento de la evolución del contenido de humedad, por lo que para continuar el desarrollo hacía una expresión especifica se debe definir u obtener de manera experimental (o bien literatura), una forma para la evolución de la pérdida de agua, ya sea constante, lineal, polinomial o bien exponencial. Desde este punto, con el fin de obtener una expresión analítica y ver la forma del modelo analítico conjunto, se evaluará para un perfil constante de la evolución del contenido de humedad fijado por la humedad inicial λ_0. Con ello

$$g = \alpha_{s,0}\beta_0\left(1+\Gamma\lambda_0\right), \tag{8.121}$$

por lo que la Ecuación 8.120 continua como

$$\begin{aligned}&&\theta_{h,h}(t) =& C\exp-\left(\frac{\psi_h}{g\tau_h}t\right)\\ \text{Condición inicial}\quad&\Rightarrow&\overline{T}_h(0) =& T_\infty\\ &&\frac{T_\infty - T_\infty}{\overline{T}_b - T_\infty} =& C\exp(0)\\ &&0 =& C\\ &&\theta_{h,h}(t) =& 0.\end{aligned} \tag{8.122}$$

Dado que la constante $C = 0$, se tiene que existe una solución particular en la forma

$$\begin{aligned}\theta_{h,p}(t) =& \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\psi_h}{g\tau_h}dt\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\int\frac{\psi_h}{g\tau_h}dt\right)\frac{\varphi_h(t)}{g\tau_h}dt\\ =& \exp\left(-\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{\psi_h}{g\tau_h}t\right)\frac{\varphi_h(t)}{g\tau_h}dt.\end{aligned} \tag{8.123}$$

El flujo de calor incidente puede tener un perfil temporal variable, por ello no se puede resolver sin definir un perfil en particular. Sin embargo, la Ecuación 8.123 representa la formulación general de la EDO para el problema con humedad, para el cual solo basta con definir un comportamiento de la radiación incidente y continuar la resolución. Para continuar con en análisis se asume un perfil constante por lo que el flujo de calor incidente queda como $\dot{q}''_{inc}$, y con ello, φ ya no es dependiente de la variable tiempo

$$\begin{aligned}\theta_{h,p}(t) =& \exp\left(-\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right)\left(\frac{g\tau_h}{\psi_h}\exp\left(\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right)\frac{\varphi_h}{g\tau_h}+K\right)\\ =&\frac{\varphi_h}{\psi_h}+\exp\left(-\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right)K\end{aligned}$$

Condición inicial

$$\begin{aligned}\Rightarrow \theta_{h,p}(t_0) =&0\\ -\frac{\varphi_h}{\psi_h} =&K\\ \theta_{h,p}(t) =&\frac{\varphi_h}{\psi_h}-\frac{\varphi_h}{\psi_h}\exp\left(-\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right),\end{aligned} \tag{8.124}$$

por lo que finalmente, combinando los resultados de la Ecuación 8.122 y la Ecuación 8.124

$$\theta_h(t) = \frac{\varphi_h}{\psi_h}\left(1-\exp\left(-\frac{\psi_h}{g\tau_h}(t-t_0)\right)\right). \tag{8.125}$$

Regresando a las variables y parámetros originales, se tiene una expresión analítica para la temperatura promedio humedecida $\overline{T}_h$

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\overline{T}_h - T_\infty\right)}{\cancel{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}} =\\ &\frac{\dot{q}''_{inc}}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}\cdot\frac{b_{1,h}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{b_{3,h}h_{T,h}\cancel{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}}\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{b_{3,h}h_{T,h}\cancel{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}}{\cancel{b_{1,h}}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}\cdot\frac{\cancel{b_{1,h}}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{\alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)\cancel{\left(\overline{T}_b - T_\infty\right)}}\right)(t-t_0)\right],\end{aligned}$$

y finalmente

$$\overline{T}_h = T_\infty + \frac{b_{1,h}\dot{q}''_{inc}}{b_{3,h}h_{T,h}}\left[1-\exp\left(-\frac{b_{3,h}h_{T,h}}{\alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)}(t_h-t_0)\right)\right]. \tag{8.126}$$

8.10.2. Problema $\mathbf{P}_d$

El problema para la parte seca $t \in [t_b, t_{ig}]$ se resuelve de manera análoga al problema planteado en la sección 7.9 del Capítulo 7, en donde se pueden encontrar mas detalles acerca de las condiciones

criticas de ignición. Ahora, replanteando el problema de la sección 7.9 en términos del subproblema seco trabajado en este capítulo, se tiene

$$\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\frac{\partial \overline{T}_d}{\partial t} = -\frac{h_2}{l_z}\left(\overline{T}_2 - T_\infty\right) - \frac{2}{((r_i+\delta)^2 - r_i^2)}\left((r_{i,d}+\delta)\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d}+\delta) - (r_{i,d})\dot{q}''_{r,d}(r_{i,d})\right). \quad (8.127)$$

Para ello, se redefinen los parámetros en la notación trabajada en este capítulo para resolver la Ecuación 8.127

$$\alpha_d\beta_d\frac{\partial \overline{T}_d}{\partial t} = -\, b_{3,d}h_{c,d}\left(\overline{T}_d - T_\infty\right) + b_{1,d}\dot{q}''_{inc}(t) - b_{2,d}\left(\overline{T}^4 - T_\infty^4\right). \quad (8.128)$$

Tal como se ha explicado con anterioridad, debido a la forma de la ecuación es necesario aproximar el término radiativo para obtener una expresión analítica, luego, se define un nuevo coeficiente combinado como $h_{T,d} = h_{c,d} + 4b_{2,d}/b_{3,d}T_\infty^3$, con lo que se reescribe la Ecuación 8.128

$$\alpha_d\beta_d\frac{\partial \overline{T}_d}{\partial t} = -b_{3,d}h_{T,d}\left(\overline{T}_d - T_\infty\right) + b_{1,d}\dot{q}''_{inc}(t). \quad (8.129)$$

Con esto se definen los parámetros y variables normalizadas

$$\theta_d = \frac{\overline{T}_d - \overline{T}_b}{\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b} \qquad \tau_d = \frac{\alpha_d\beta_d\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}{b_{1,d}\dot{q}''_{inc,cri}}$$

$$\psi = \frac{b_{3,d}h_{T,d}\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}{b_{1,d}\dot{q}''_{inc,cri}} \qquad \varphi = \frac{\dot{q}''_{inc}(t)}{\dot{q}''_{inc,cri}}$$

Obteniéndose la Ecuación 8.129 en la forma

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\psi}{\tau}\theta(t) + = \frac{\varphi(t)}{\tau}, \quad (8.130)$$

la cual tiene forma de

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x),$$

que corresponde a una ecuación diferencial lineal de primer orden para un caso no homogéneo, de coeficiente $P(x)$ constante. Así, para una EDO con las condiciones de la Ecuación 8.129, se tiene que su solución está dada por una parte homogénea $\theta_{d,h}(t - t_b)$ y una solución particular $\theta_{d,p}(t - t_b)$

$$\theta_d(t) = \theta_{d,h}(t) + \theta_{d,p}(t). \quad (8.131)$$

La solución homogénea esta dada por

$$\begin{aligned}
\theta_{d,h}(t) =& C\exp\left(-\int_{t_b}^{t}\frac{\psi_d}{\tau_d}dt\right)\\
=& C\exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)\\
\text{Condición inicial}\qquad \Rightarrow \overline{T}(t_b) =& \overline{T}_b\\
\frac{\overline{T}_b-\overline{T}_b}{\overline{T}_{ig}-\overline{T}_b} =& C\exp\left(t_b-t_b\right)\\
0 =& C\\
\theta_{d,h}(t_b) =& 0.
\end{aligned} \tag{8.132}$$

Dado que la constante $C=0$, se tiene que existe una solución particular

$$\begin{aligned}
\theta_{d,p}(t) =& \exp\left(-\int_{t_b}^{t}\frac{\psi_d}{\tau_d}dt\right)\int_{t_b}^{t}\exp\left(\int\frac{\psi_d}{\tau_d}dt\right)\frac{\varphi_d(t)}{\tau}dt\\
=& \exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)\int_{t_b}^{t}\exp\left(\frac{\psi_d}{\tau_d}t\right)\frac{\varphi_d(t)}{\tau_d}dt.
\end{aligned} \tag{8.133}$$

Como se definición en el problema con humedad de la sección anterior, se considera un perfil constante para el flujo de calor incidente, por lo que este queda como $\dot{q}''_{inc}$, y con ello, φ ya no es dependiente de la variable tiempo

$$\begin{aligned}
\theta_{d,p}(t) =& \exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)\left(\frac{\tau_d}{\psi_d}\exp\left(\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)\frac{\varphi_d}{\tau_d}+K\right)\\
=& \frac{\varphi_d}{\psi_d}+\exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)K\\
\text{Condición inicial}\qquad \Rightarrow \theta_{d,p}(t_b) =& 0\\
-\frac{\varphi_d}{\psi_d} =& K\\
\theta_{d,p}(t) =& \frac{\varphi_d}{\psi_d}-\frac{\varphi_d}{\psi_d}\exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right),
\end{aligned} \tag{8.134}$$

por lo que finalmente, combinando los resultados de la Ecuación 8.132 y la Ecuación 8.134

$$\theta_d(t) = \frac{\varphi_d}{\psi_d}\left(1-\exp\left(-\frac{\psi_d}{\tau_d}(t-t_b)\right)\right). \tag{8.135}$$

Regresando a las variables y parámetros originales, se tiene una expresión analítica para la temperatura promedio seca $\overline{T}_d$

$$\frac{\left(\overline{T}_d - \overline{T}_b\right)}{\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}} = \frac{\dot{q}''_{inc}}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{b_{1,d}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{b_{3,d}h_{T,d}\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,d}h_{T,d}\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}}{\cancel{b_{1,d}}\,\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{\cancel{b_{1,d}}\,\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{\alpha_d\rho_d c_{p,d}\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - \overline{T}_b\right)}}\right)(t - t_b)\right],$$

y finalmente

$$\overline{T}_d = \overline{T}_b + \frac{b_{1,d}\dot{q}''_{inc}}{b_{3,d}h_{T,d}}\left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,d}h_{T,d}}{\alpha_d\rho_d c_{p,d}}\right)(t_d - t_b)\right]. \tag{8.136}$$

Ahora, con ambas expresiones para la temperatura (Ecuación 8.126 y Ecuación 8.136), se puede obtener una función por tramos para la evolución de la temperatura promediada espacialmente $\overline{T}(t)$ incluyendo el efecto del contenido de humedad, recordando la Ecuación 8.16

$$T_{ig}(t) - T_\infty(t) = \left(T_{ig}(t_d) - T_b(t_d)\right) + \left(T_b(t_h) - T_\infty(t_h)\right) \quad t_h \in [t_\infty, t_b], t_d \in]t_b, t_{ig}],$$

por lo que sumando ambas expresiones el término $\overline{T}_b$ se cancela en t_b, y se obtiene finalmente

$$\overline{T}(t) = T_\infty + \frac{b_{1,h}\dot{q}''_{inc}}{b_{3,h}h_{T,h}}\left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,h}h_{T,h}}{\alpha_{s,0}\beta_0\left(1 + \gamma\lambda_0\right)}(t_h - t_0)\right)\right] + \frac{b_{1,d}\dot{q}''_{inc}}{b_{3,d}h_{T,d}}\left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,d}h_{T,d}}{\alpha_d\rho_d c_{p,d}}\right)(t_d - t_b)\right]. \tag{8.137}$$

8.11. Medidas experimentales para el modelo de dos partes

Las medidas de temperatura experimentales deben ser calculadas de manera análoga a como se planteo en la sección 7.10 del Capítulo 7, ya que esta varía en el tiempo y según su penetración en la dirección r, es decir $T(r,t)$, por lo que aún cuando la temperatura puede tener un comportamiento (gradiente) diferente según el intervalo que se evalúa, al ser discretizada este efecto ya es incluido pues es ponderado por la distancia a la que se mide. Esto es posible solo por el hecho de tratar la temperatura como un fenómeno volumétrico y ser promediada espacialmente, lo cual no sería posible en un promedio temporal dado que la ponderación de cada paso de tiempo es desconocida a priori. Luego

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(t_h, t_d) =& \frac{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} T(r,\varphi,z,t_h,t_d)\,r\,dr\,d\varphi\,dz}{\int_{l_1}^{l_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\varphi\,dz} \\ \approx& \frac{2\pi l_z \sum_{j=1}^{n} T(r_j, t_h, t_d)\Delta r}{\pi l_z\left(r_0^2 - r_i^2\right)}\end{aligned} \tag{8.138}$$

donde $T(r_j, t_h, t_d)$ corresponde a la temperatura medida por la termocupla (TC_j) en la posición r_j.

8.12. Unificación de los modelos para fase seca y con humedad

Como se ha presentado en las secciones anteriores (8.10.1 y 8.10.2), es posible obtener expresiones analíticas para cada tramo, separando el problema en dos sub problemas de manera similar como se trabaja con los problemas de secado y cambio de fase en el proceso de fusión pero de manera inversa, es decir, un set de ecuaciones diferenciales es separado en dos. Sin embargo, este método no permite obtener soluciones de manera rápida ya que requiere la solución de un problema para poder resolver el siguiente, además, no es posible obtener relaciones lineales debido al cambio de pendiente producto del cambio de función de temperatura según cada intervalo de tiempo.

Para abordar estos inconvenientes, en esta sección se propone abordar el problema genera como un problema de secado. Esto se traduce en que se relajan los supuestos usados a lo largo de este capítulo de tal manera que ahora se considera todo el proceso de calentamiento bajo un solo intervalo de tiempo, es decir, ahora $t_u \in [t_0, t_{ig}]$ por lo que se considera que la humedad participa a lo largo de todo el proceso, mientras que por otra parte, se considera como despreciable las variaciones asociadas a la fase gaseosa. Aún cuando esta consideración no sea correcta y reste precisión de las predicciones, representa una aplicación útil para obtener correlaciones de manera rápida sin un alto impacto en la precisión como ocurre por ejemplo con la linealización de la radiación. Este último punto se discutirá más adelante, ya que representa un punto de sensibilización importante, pues plantea la pregunta acerca de que efecto tiene un mayor impacto en el proceso de calentamiento, es decir, el contendido de humedad o la penetración de la radiación.

Dado que ahora el problema no se divide en intervalos de tiempo, se refórmala el planteamiento general desde el inicio y para ello se debe recordar la Ecuación 8.32

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\alpha_d}(t_d)\overline{\beta}(t_d)\Big(T_{ig}(t_d) - T_w(t_d)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_w(t_h)\beta(t_h)\Big(T_w(t_h) - T_\infty\Big)\Big(1 + \gamma\lambda(t_h)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g(t_h + t_d)\right) = \mathbf{der}.$$

Replanteando los términos en función de un solo intervalo de tiempo t_u y despreciando la entalpía asociada a la fase gaseosa, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\alpha_d}(t_u)\overline{\beta}(t_u)\Big(T_{ig}(t_u) - T_w(t_u)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_w(t_u)\beta(t_u)\Big(T_w(t_u) - T_\infty\Big)\Big(1 + \gamma\lambda(t_u)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_u)\beta(t_u)\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_s)\right) = \mathbf{der}. \quad (8.139)$$

De esta forma, la diferenciación respecto del tiempo es homogénea para todos los términos por lo que es posible agruparlos dentro de un solo operador diferencial, además, las propiedades α y β ahora son

continuas y validas para todo el intervalo independiente de si se refieren al material seco o al agua, por lo que se pueden agrupar bajo el mismo subscript s para referirse a la fase sólida completa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s\beta\left(T_{ig}(t_s)-T_w(t_s)\right)+\alpha_s\beta\left(T_w(t_s)-T_\infty\right)\left(1+\gamma\lambda(t_s)\right)+\left(\alpha_s\beta\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_s)\right)\right]=\mathbf{der}, \tag{8.140}$$

lo cual, en término de las propiedades propiedades promediadas, se puede reescribir en la forma de la Ecuación 8.55 como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s\beta\left(\overline{T}_d-\overline{T}_b\right)+\alpha_s\beta\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)\left(1+\gamma\lambda(t_s)\right)+\left(\alpha_s\beta\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t_s)\right)\right]=\mathbf{der} \tag{8.141}$$

haciendo uso de las condiciones de continuidad en $\overline{T}_h(t_b)=\overline{T}_d(t_b)=\overline{T}_b$ (Ecuación 8.61). Luego, factorizando y ordenando términos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left[m_d c_{p,d}\left(\overline{T}_d-\overline{T}_b\right)+m_d c_{p,d}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)\left(1+\frac{c_{p,w}m_w(t_u)}{c_{p,d}m_d}\right)+m_w(t_u)L_w\right]=\mathbf{der}, \tag{8.142}$$

es posible obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left[m_d c_{p,d}\left(\overline{T}_d-T_\infty\right)+m_w(t_u)\left(c_{p,w}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)+L_w\right)\right]=\mathbf{der}. \tag{8.143}$$

Por la definición de la evolución del contenido de humedad en base seca, es posible reescribirlo como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left[m_d c_{p,d}\left(\overline{T}_d-T_\infty\right)+\lambda(t_u)\left(\frac{c_{p,w}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)+L_w}{c_{p,d}}\right)m_d c_{p,d}\right]=\mathbf{der}, \tag{8.144}$$

con lo que se puede compactar en términos de α_s y β

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s\beta\left(\overline{T}_d-T_\infty\right)+\alpha_s\beta\left(\frac{c_{p,w}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)+L_w}{c_{p,d}}\right)\lambda(t_u)\right]=\mathbf{der}. \tag{8.145}$$

Luego, la Ecuación 8.145 se puede convertir en

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}_d-T_\infty\right)\left(1+\frac{c_{p,w}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)+L_w}{c_{p,d}\left(\overline{T}_{ig}-T_\infty\right)}\lambda(t_u)\right)=\mathbf{der}, \tag{8.146}$$

considerando la energía adicional requerida para calentar el agua como normalizada por la energía necesaria para todo el proceso de calentamiento. Esto, mientras se produce un gradiente de temperatura hasta lograr la ignición en $\overline{T}_{ig}$. Ahora, considerando la energía adicional que se requiere para calentar y evaporar el agua normalizada por la energía necesaria para todo el proceso de calentamiento como $\Gamma=\left(\frac{c_{p,w}\left(\overline{T}_b-T_\infty\right)+L_w}{c_{p,d}\left(\overline{T}_{ig}-T_\infty\right)}\right)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}_u-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t_u)\right)=&\\ -\frac{h_{c,u}}{l_z}\left(\overline{T}_s-T_\infty\right)-\frac{2}{\left((r_i+\delta)^2-r_i^2\right)}&\left((r_{i,u}+\delta)\dot{q}''_r(r_{i,u}+\delta)-(r_{i,u})\dot{q}''_r(r_{i,u})\right).\end{aligned} \tag{8.147}$$

8.12.1. Divergencia del modelo radiativo para el modelo unificado

El procedimiento y justificación para la obtención de la divergencia de la radiación mediante el método de los esféricos armónicos se puede ver en mayor detalle en la sección 8.6. La formulación ya se realizó para la parte de secado del problema de dos partes

$$\dot{q}_r''(r) = C_1 I_1\left(\sqrt{3}\kappa_{a,s} r\right) + C_2 K_1\left(\sqrt{3}\kappa_{a,s} r\right), \tag{8.148}$$

por lo que para este modelo unificado solo cambian las condiciones de borde de la formulación previa.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w: \qquad 2\dot{\mathbf{q}}'' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4J_w - G \tag{8.149}$$

$$= \frac{\epsilon}{2-\epsilon}\left(4\pi I_{bw} - G\right) \tag{8.150}$$

$$r = r_i\Big|_{t\in t_s}: \qquad 2\dot{q}_{r,s}''\Big|_{r=r_{i,s}} = 4\left(\dot{q}_{inc}''(t) + \sigma T_\infty^4\right) - \left(4\sigma\overline{T}_s^4 - \frac{1}{\kappa_s}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right)\Big|_{r=r_{i,s}} \tag{8.151}$$

$$r = r_i + \delta\Big|_{t\in t_s}: \qquad -2\dot{q}_{r,s}''\Big|_{r=r_{i,s}+\delta} = 4\sigma T_\infty^4 - \left(4\sigma\overline{T}_s^4 - \frac{1}{\kappa_s}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{q}_r''\right)\right)\Big|_{r=r_{i,s}+\delta} \tag{8.152}$$

De lo anterior se obtiene un modelo radiativo para el problema de secado en todo el intervalo de tiempo tal como en el Capítulo 7, sin embargo, difiere en que este modelo considera la humedad a través de las propiedades térmicas, esto es, mediante una evolución en el tiempo del contenido de agua por lo que las propiedades pasan a ser funciones del tiempo y el modelo radiativo debe ser resuelto de esta manera junto a un perfil temporal de la radiación incidente. No obstante, como se ha hecho en las secciones anteriores, por simplicidad y continuar hacía expresiones generales, se considera que el flujo incidente $\dot{q}_{inc}''$ tiene un perfil constante y las propiedades térmicas pueden ser ajustadas a la humedad solo con su valor inicial λ_0 tal como se describe en la sección 8.7.1.

8.12.2. Resolución numérica exacta para el modelo unificado

Como el modelo se unificado, ahora tiene la forma idéntica al modelo del problema de secado, por lo que sus condiciones de ignición son las mismas descritas en la sección 8.8, y se tiene el mismo inconveniente de resolución por la temperatura como variable implícita. De esta manera, este problema unificado se resuelve numéricamente para una temperatura de ignición exacta obtenida numéricamente para el estado estacionario

$$0 = -\frac{h_{c,u}}{l_z}\left(\overline{T}_u - T_\infty\right) - \frac{2}{\left((r_i+\delta)^2 - r_i^2\right)}\Big(\left(r_{i,u}+\delta\right)\dot{q}_r''(r_{i,u}+\delta) - \left(r_{i,u}\right)\dot{q}_r''(r_{i,u})\Big), \tag{8.153}$$

8.12.3. Modelo analítico unificado

Obtener una única expresión analítica para la evolución de la temperatura ahora sí es posible mediante un procedimiento similar al utilizado para obtener la expresión para el modelo de secado de la sección 8.10.1, para ello, se reescribe la ecuación de calor en conjunto con el modelo radiativo de forma factorizada

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}_u - T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t_u)\right) = -b_{3,s}h_{c,s}\left(\overline{T}_s - T_\infty\right) + b_{1,s}\dot{q}''_{inc}(t) - b_{2,s}\left(\overline{T}_s^4 - T_\infty^4\right), \tag{8.154}$$

desde la cual se puede reformular de manera compacta mediante la definición del coeficiente combinado como $h_{T,s} = h_{c,s} + 4b_{2,s}/b_{3,s}T_\infty^3$, resultando en

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}_u - T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t_u)\right) = -b_{3,s}h_{T,s}\left(\overline{T}_s - T_\infty\right) + b_{1,s}\dot{q}''_{inc}(t). \tag{8.155}$$

Para el caso más simple considerando ajustes solo por el valor del contenido de humedad inicial λ_0 y un flujo incidente con perfil constante, la Ecuación 8.155 queda

$$g\frac{\partial\overline{T}_u}{\partial t} = -b_{3,u}h_{T,u}\left(\overline{T}_u - T_\infty\right) + b_{1,u}\dot{q}''_{inc}, \tag{8.156}$$

para $g = \alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)$. Luego, con la introducción de las variables y parámetros normalizados

$$\theta_u = \frac{\left(\overline{T}_u - T_\infty\right)}{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)} \qquad \tau_s = \frac{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_{1,u}\dot{q}''_{inc,cri}}$$

$$\psi_s = -\frac{b_{3,u}h_{T,u}\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}{b_{1,u}\dot{q}''_{inc,cri}} \qquad \varphi_u = \frac{\dot{q}''_{inc}}{\dot{q}''_{inc,cri}}$$

se tiene lo siguiente

$$\frac{\mathrm{d}\theta_u}{\mathrm{d}t} + \frac{\psi_u}{g\tau_u}\theta_u = \frac{\varphi_u}{g\tau_u}. \tag{8.157}$$

Lo cual corresponde a una ecuación diferencial lineal no homogénea, sujeta a la condición inicial $\theta_s(t_s = 0) = 0$, por lo que su solución está dada finalmente por

$$\theta_u(t) = \frac{\varphi_u}{\psi_u}\left(1 - \exp\left(-\frac{\psi_u}{g\tau_u}(t-t_0)\right)\right). \tag{8.158}$$

Luego, regresando a las variables y parámetros originales, se tiene una expresión analítica para la temperatura promedio para todo el intervalo de de exposición hasta alcanzar la ignición en $\overline{T}_{ig}$

$$\frac{\cancel{\left(\overline{T}_u - T_\infty\right)}}{\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}} =$$

$$\frac{\dot{q}''_{inc}}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}\cdot\frac{b_{1,u}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{b_{3,u}h_{T,u}\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}}\cdot\left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,u}h_{T,u}\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}}{\cancel{b_{1,u}}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}\cdot\frac{\cancel{b_{1,u}}\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{\alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)\cancel{\left(\overline{T}_{ig} - T_\infty\right)}}\right)(t-t_0)\right]$$

y finalmente

$$\overline{T}_u = T_\infty + \frac{b_{1,u}\dot{q}''_{inc}}{b_{3,u}h_{T,u}}\left[1 - \exp\left(-\frac{b_{3,u}h_{T,u}}{\alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)}(t-t_0)\right)\right]. \tag{8.159}$$

8.13. Resultados

En esta sección se presentan algunos de los principales resultados obtenidos por el modelo con humedad para, los cuales son contrastados con datos experimentales de campañas previas. Para ello, se mantienen las condiciones con que se realizaron dichos experimentos, por lo que los resultados que se muestran a continuación son para un contenido de humedad constante λ=17 % y flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ constante.

8.13.1. Temperatura de ignición

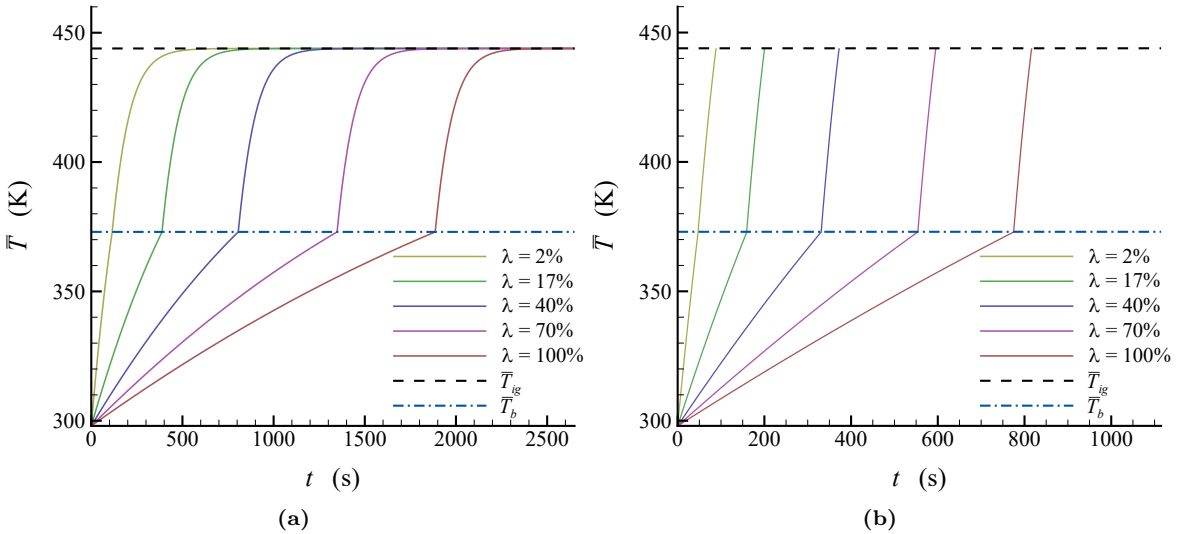


Figura 8.2: Evolución de la temperatura promedio para diferentes contenidos de humedad λ para (a) flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$=9,82 kW/m^2 y (b) un flujo de $\dot{q}''_{inc}$=20,85 kW/m^2.

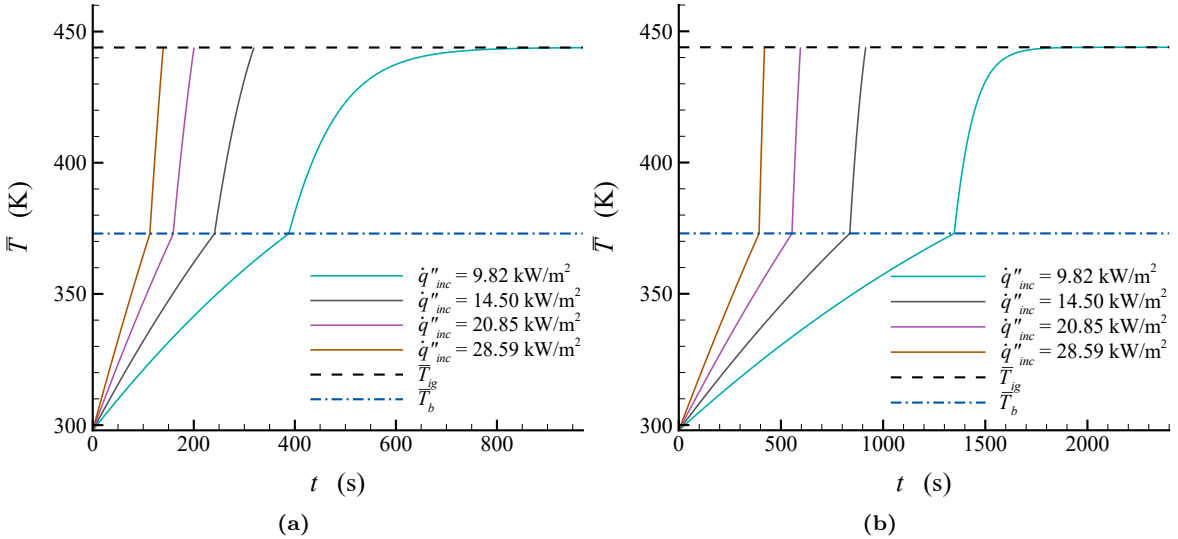


Figura 8.3: Evolución de la temperatura promedio para diferentes flujos incidentes $\dot{q}''_{inc}$ para (a) contenido de humedad λ=17 % y (b) contenido de humedad λ=70 %.

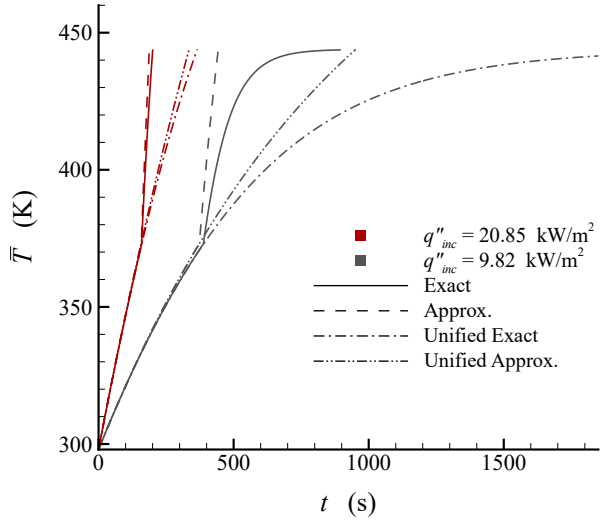


Figura 8.4: Evolución de temperatura versus tiempo para un contenido de humedad λ=17 %.

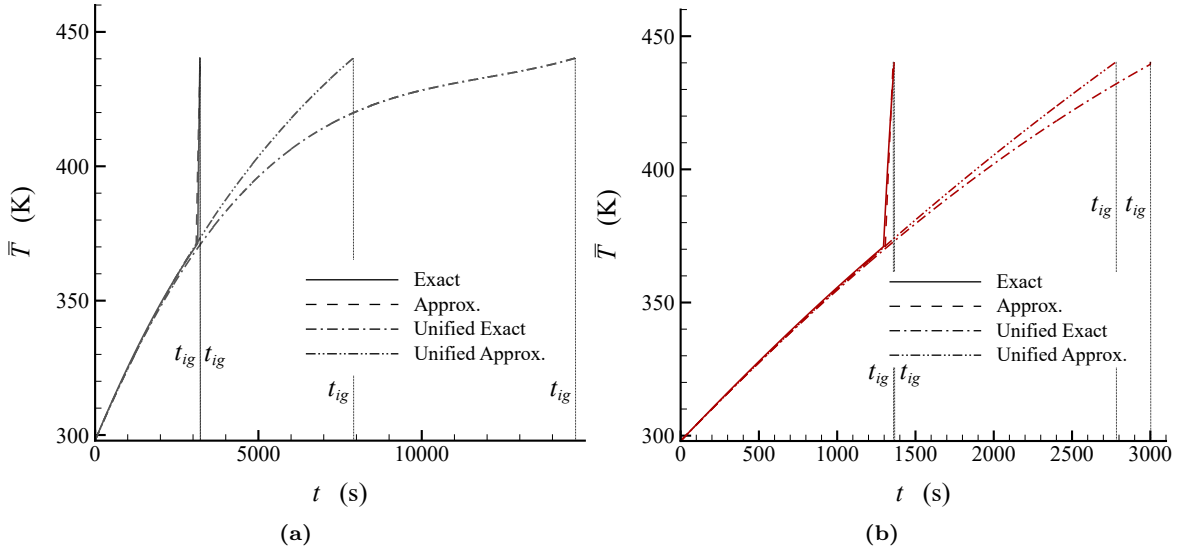


Figura 8.5: Evolución de la temperatura promedio según los diferentes modelos para un contenido de humedad λ=100 % para (a) flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$=9,82 kW/m^2 y (b) un flujo de $\dot{q}''_{inc}$=20,85 kW/m^2.

8.13.2. Tiempo de ignición

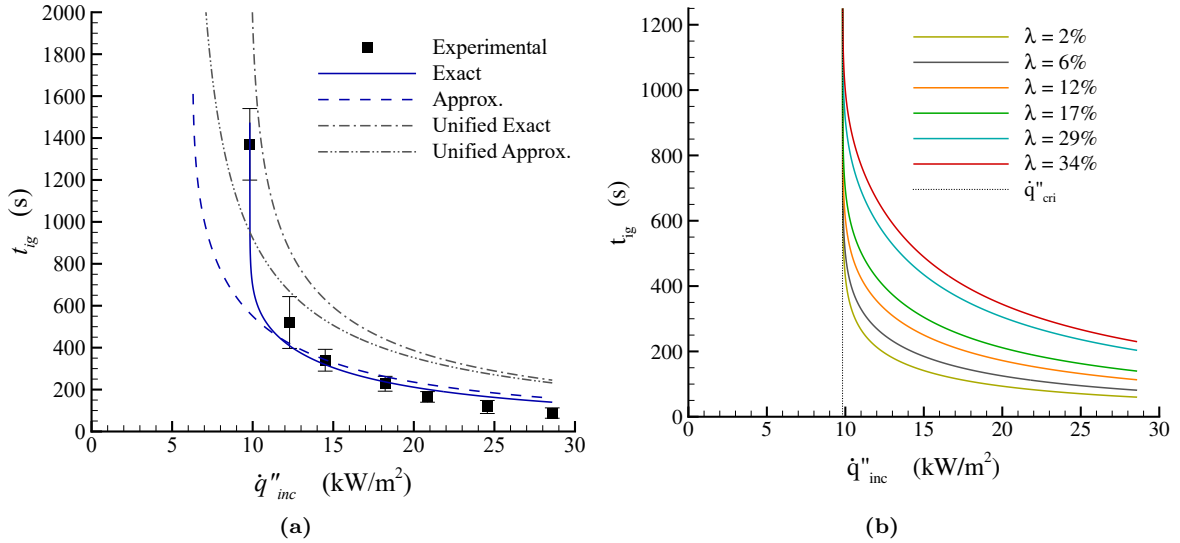


Figura 8.6: (a) Tiempos de ignición según los diferentes modelos y data experimental versus flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ para una fracción en volumen α=0,09 para un contenido de humedad λ=17 %. (b) Tiempos de ignición mediante solución exacta versus flujo de calor incidente $\dot{q}''_{inc}$ para una fracción en volumen α=0,09 a diferentes contenidos de humedad.

8.13.3. Adimensionalización

Con las variables y parámetros normalizados definidos para obtener la solución analítica, se puede obtener una relación lineal bastante útil para aplicaciones de ingeniería. Esto es obtener de manera rápida una estimación de los tiempos de ignición solo conociendo la magnitud del flujo incidente.

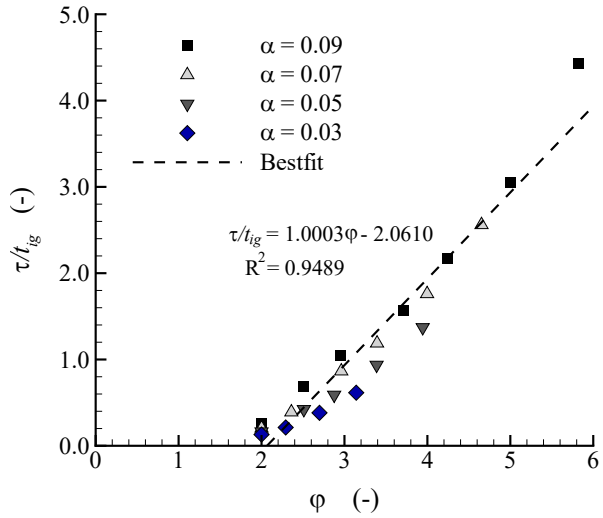


Figura 8.7: Tiempo de ignición adimensional para toda la data experimental a un contenido de humedad λ=17 %.

La Figura 8.7 presenta el colapso de toda la data experimental mediante los parámetros y variables normalizados, en donde se puede ver que forman una relación lineal entre φ y τ/t_{ig}. Con esto, basta conocer la magnitud del flujo incidente $\dot{q}''_{inc}$ para obtener el valor de la abscisa y por medio de la recta formada con estos parámetros obtener un valor para τ/t_{ig} en la ordenada. Luego, dado que τ es un parámetro normalizado de las propiedades termo-físicas del medio, es posible obtener rápidamente un valor estimado para t_{ig}.

Es interesante destacar que el valor de la pendiente es muy cercano a 1, las variaciones que esto puede experimentar se explican por la variabilidad en la data experimental, sin embargo, el modelo analítico desarrollado logra compensar esto y presenta una relación lineal con una baja variación. Así mismo, el intercepto tiene un valor absoluto cercano a 2, el que varia del valor teórico que debería ser 2, por las misma razones antes mencionadas. También se debe mencionar que, dada la forma de obtener esta adimensionalización, es decir, mediante la suma de dos variables normalizadas para el flujo incidente $(\theta_h + \theta_d)$, el eje de las abscisas parte en desfasado en 2, lo que se explica porque esta variable es normalizada por el flujo critico de ignición $\dot{q}''_{cri}$ por lo que al sumar dos veces el flujo incidente (uno por cada variable normalizada), se ve desfasado en ≈ 2.

Referencias

[1] R Byron Bird, Warren E Stewart y Edwin N Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, 2001.

[2] Bruno A Boley. «A method of heat conduction analysis of melting and solidification problems». En: *Journal of Mathematics and Physics* 40.1-4 (1961), págs. 300-313.

[3] Bruno A Boley y Harvey P Yagoda. «The starting solution for two-dimensional heat conduction problems with change of phase». En: *Quarterly of Applied Mathematics* 27.2 (1969), págs. 223-246.

[4] Horatio Scott Carslaw y John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Inf. téc. Clarendon Press, 1959.

[5] James K Carson. «A Versatile Effective Thermal Diffusivity Model for Porous Materials». En: *Int. J. Thermophys.* 42.10 (2021), págs. 1-12.

[6] Y Cengel y A Ghajar. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 2002.

[7] John Crank y J Crank. *Free and moving boundary problems*. Oxford University Press, USA, 1984.

[8] MA Delichatsios, TH Panagiotou y F Kiley. «The use of time to ignition data for characterizing the thermal inertia and the minimum (critical) heat flux for ignition or pyrolysis». En: *Combust. Flame* 84.3-4 (1991), págs. 323-332.

[9] Colomba Di Blasi. «Modeling chemical and physical processes of wood and biomass pyrolysis». En: *Prog. Energ. Combust.* 34.1 (2008), págs. 47-90.

[10] AM Grishin y col. «Formulation and solution of the problem of drying of a layer of combustible forest materials». En: *Combustion, Explosion and Shock Waves* 37.1 (2001), págs. 57-66.

[11] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Kyle Forinash. *Mathematical methods in physics: Partial differential equations, fourier series, and special functions*. CRC Press, 2009.

[12] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Mikhail Khenner. *Ordinary and partial differential equations*. CRC Press, 2013.

[13] Victor Henner, Tatyana Belozerova y Alexander Nepomnyashchy. *Partial Differential Equations: Analytical Methods and Applications*. Chapman y Hall/CRC, 2019.

[14] Marc Janssens. «Piloted ignition of wood: a review». En: *Fire Mater.* 15.4 (1991), págs. 151-167.

[15] Y Katto. «Critical heat flux». En: *International Journal of Multiphase Flow* 20 (1994), págs. 53-90.

[16] William Morrow Kays. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2011.

[17] Mohammed M Khan, John L De Ris y Steve D Ogden. «Effect of moisture on ignition time of cellulosic materials». En: *Fire Safety Science* 9 (2008), págs. 167-178.

[18] M Larini y col. «A multiphase formulation for fire propagation in heterogeneous combustible media». En: *Int. J. of Heat Mass Tran.* 41.6-7 (1998), págs. 881-897.

[19] Michihiko Matsuda. *First order algebraic differential equations: a differential algebraic approach*. Vol. 804. Springer, 2006.

[20] Jean-Claude Michel, Hervé Moulinec y Pierre Suquet. «Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach». En: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 172.1-4 (1999), págs. 109-143.

[21] P Mindykowski y col. «Piloted ignition of wildland fuels». En: *Fire Safety Journal* 46.1-2 (2011), págs. 34-40.

[22] Pierrick Mindykowski y col. «A simple correlation for monitoring the ignition propensity of wet nordic spruce wood». En: *Fire Safety J.* 107 (2019), págs. 186-192.

[23] Roberto Parot y col. «A simplified analytical model for radiation dominated ignition of solid fuels exposed to multiple non-steady heat fluxes». En: *Combust. Flame* 237 (2022), pág. 111866.

[24] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[25] Pedro Reszka y José L. Torero. «Fire Behavior of Timber and Lignocellulose». En: *Lignocellulosic Fibers and Wood Handbook*. Ed. por M Belgacem y A Pizzi. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. Cap. 22, págs. 553-581.

[26] Albert Simeoni y col. «Flammability studies for wildland and wildland–urban interface fires applied to pine needles and solid polymers». En: *Fire Safety Journal* 54 (2012), págs. 203-217.

[27] DL Simms. «Damage to cellulosic solids by thermal radiation». En: *Combustion and Flame* 6 (1962), págs. 303-318.

[28] DL Simms. «On the pilot ignition of wood by radiation». En: *Combustion and Flame* 7 (1963), págs. 253-261.

[29] K Vafai, HA Hadim y JR Howell. *Radiative transfer in porous media, Handbook of Porous Media*. 2000.

[30] Harvey P Yagoda y Bruno A Boley. «Starting solutions for melting of a slab under plane or axisymmetric hot spots». En: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 23.2 (1970), págs. 225-246.

Capítulo 9

Coordenadas curvilíneas

Contenidos del Capítulo

9.1. Introducción 157

9.2. Coordenadas Curvilíneas Ortogonales 157

9.2.1. Superficies y curvas coordenadas 158

9.2.2. Vectores unitarios en sistemas curvilíneos 159

9.2.3. Vectores normales y tangentes en sistemas curvilíneos 160

9.2.3.1. Ortogonalidad en un sistema curvilíneo 161

9.3. Gradiente en un sistema curvilíneo 161

9.4. Divergencia y Laplaciano en un sistema curvilíneo 162

9.5. Matriz y determinante Jacobianos 166

9.6. Resumen de operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas 168

9.6.1. Aplicación a los sistemas de coordenadas tradicionales 169

Referencias 170

9.1. Introducción

Desde el Capítulo 6 al Capítulo 8 el desarrollo de los modelos que representan un fenómeno fisco, han estado estrechamente relacionado con los conceptos fundamentales del calculo vectorial debido a la naturaleza de los problemas, en donde es importante notar que si bien, hay elementos de cada problema que son similares a los de otros fenómenos como los mecanismos de transferencia de calor, estos no se trabajan de la misma manera. Partiendo por el hecho de que si el fenómeno de calentamiento se da una geometría determinada, las mismas condiciones de borde en otra disposición geométrica requieren una derivación completa desde la ecuación de energía para el nuevo sistema coordenado.

Por lo anterior, en este apartado se deriva un sistema coordenado general conocido como *coordenadas curvilíneas*, desde el cual se puede migrar a cada uno de los sistemas de coordenadas ortogonales tradicionales (cartesianas, cilíndricas y esféricas). Si bien este sistema de coordenadas basado en superficies ya tiene una derivación conocida por la literatura, en este capitulo se abordan solo los elementos claves que son necesarios para derivar la ecuación de calor desde sus inicios sin condicionarla a un sistema coordenado en particular.

9.2. Coordenadas Curvilíneas Ortogonales

Las coordenadas curvilíneas son un sistema coordenado del espacio Euclidiano, en donde el sistema de coordenadas puede ser curvo. Este sistema de coordenadas se puede derivar a partir del conjunto de *Coordenadas Cartesianas* usando transformaciones que sean invertibles y biyectivas en cada punto, es decir, se puede transformar un punto en el espacio cartesiano a un punto en el espacio curvilíneo y viceversa.

Para comprender la definición anterior, es útil el ejemplo de los sistemas de coordenadas curvilíneas conocidos, es decir, los sistemas de tres dimensiones del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$ como coordenadas Cilíndricas y coordenadas Esféricas, mientras que el sistema de superficies Cartesianas en el espacio son planos coordinados, por ejemplo $z = 0$ define al plano $x - y$ a la altura de $z = 0$, por el contrario, una superficie coordinada de $r = 1$ en coordenadas esféricas define a una esfera unitaria, la cual forma en efecto, una superficie curvada.

El hecho de agregar el caso especial de ortogonalidad, se refiere a que las superficies coordenadas se unen en un punto y forman ángulos rectos entre ellas. Por ejemplo, en coordenadas Cartesianas en $\mathbb{R}^3$ (x, y, z), es un sistema ortogonal ya que sus superficies coordenadas x = constante, y = constante, y z = constante son planos que se unen y forman ángulos rectos entre cada uno de ellos (perpendiculares).

Estos sistemas de coordenadas curvilíneas pueden transformar varias cantidades físicas de un sistema a otro, lo cual es bastante útil en algunos casos en donde se pueden aprovechar propiedades de otros sistema, como por ejemplo simetrías axiales, radiales, condiciones de borde, etc., además, según el problema físico estudiado, este puede estar definido con mayor facilidad en un sistemas que en otro. Es por estos motivos que se presenta un análisis tensorial de alguna propiedades que son requeridas en los

problemas de transferencia de calor, como lo es el *Gradiente, Divergencia, Rotor y Laplaciano*, con lo cual se busca modelar un fenómeno físico en una ecuación general que permita moverse entre diferentes sistemas coordenados según lo requiera cada problema modelado, ya sea por propiedades físicas o sus condiciones de borde, etc.

9.2.1. Superficies y curvas coordenadas

A partir del sistema Cartesiano que es ortogonal con coordenadas (x, y, z) para cualquier punto $\mathbf{P}$ del espacio, se busca transformar este punto $\mathbf{P}$ a un sistema coordinado curvilíneo con coordenadas (u, v, w). Si x, y, z pueden ser expresadas como funciones de (u, v, w) y tienen derivadas continuas, entonces:

$$\begin{aligned} x =& x(u, v, w) \\ y =& y(u, v, w) \\ z =& z(u, v, w) \end{aligned} \tag{9.1}$$

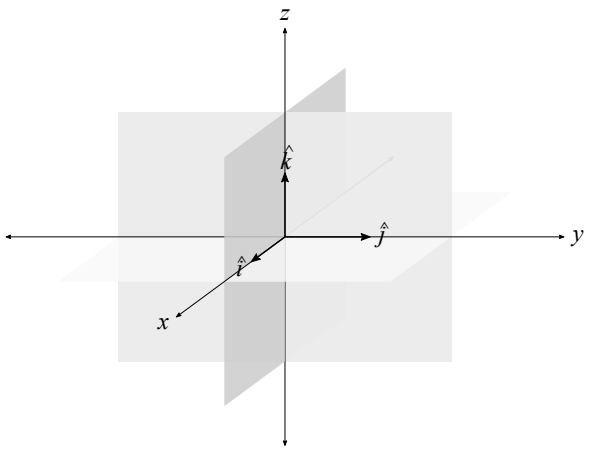
Ahora, supongamos que el sistema de 9.1 puede ser resuelto para u, v, w en función de x, y, z:

$$\begin{aligned} u =& u(x, y, z) \\ v =& v(x, y, z) \\ w =& w(x, y, z) \end{aligned} \tag{9.2}$$

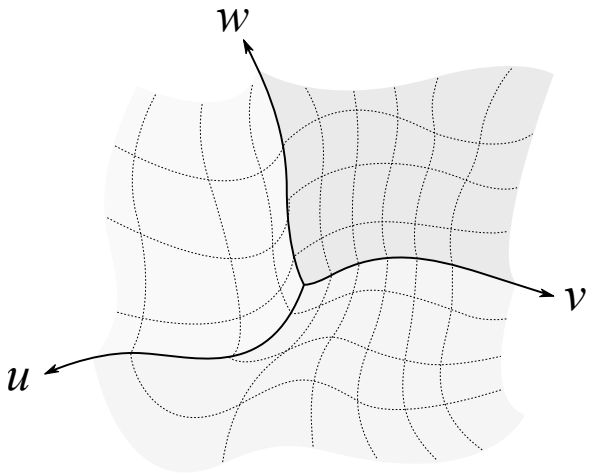
Entonces, con los sistemas de 9.1 y 9.2 se pueden formar infinitos sistemas curvilíneos, pero para trabajar con espacios dimensionales conocidos como Coordenadas Cilíndricas y Coordenadas Esféricas, el análisis se limitara a los sistemas curvilíneas ortogonales. De esta manera, análogo a como se presento anteriormente para el sistema Cartesiano, cualquier punto en el espacio en coordenadas curvilíneas se puede determinar por la intersección de las superficies curvas u, v, w mediante:

$$u = C_u \ , \quad v = C_v \ , \quad w = C_w \tag{9.3}$$

Estas corresponden a las *superficies coordenadas* las cuales son generalmente curvadas y se pueden definir como la familia de superficies que varían según los valores de C_u, C_v, C_w, así mismo, las tres curvas resultantes de la intersección de los pares de dichas superficies corresponden a las *curvas coordenadas* o *lineas*. Por tanto, un punto $\mathbf{P}(x, y, z)$ cualquiera en el espacio Cartesiano, tendrá asociado un único conjunto de coordenadas (u, v, w) llamadas coordenadas curvilíneas del punto $\mathbf{P}$. Entonces, cada curva coordenada es a través de la cual solo esa coordenada está variando (*ceteris paribus*) mientras que las otras coordenadas permanecen fijas, por ejemplo, la curva coordenada u es a través de la cual la coordenada u varía mientras que v, w permanecen constantes.



(a) Evolución de la humedad en el tiempo t_1.



(b) derivada de la evolución de la humedad en el tiempo t_1.

9.2.2. Vectores unitarios en sistemas curvilíneos

Para poder expresar los operadores diferenciales como gradiente o divergencia en un sistema curvilíneo, es conveniente comenzar por explicar como se define un incremento diferencial en coordenadas cartesianas. Sea el vector $\mathbf{r} = \vec{r}$:

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{9.4}$$

que representa un vector posición para un punto $\mathbf{P}$. Además, en el sistema cartesiano por las condiciones de ortogonalidad se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} &= 0 \\ \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} &= 1 \end{aligned} \tag{9.5}$$

En base a lo anterior, cuando se aplica la transformación para pasar del sistema cartesiano al sistema curvilíneo con los sistemas de 9.1 y 9.2, se puede redefinir el vector $\mathbf{r}$ como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$, expandiendo el término diferencial de d$\mathbf{r}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w \tag{9.6}$$

Por lo tanto, un vector tangente a una curva coordenada en el punto $\mathbf{P}$ a lo largo de u, v, w respectivamente, está definido por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\ , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\ , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \tag{9.7}$$

los cuales, son vectores mutuamente ortogonales. Entonces, el vector tangente normalizado en cada dirección a lo largo de 9.7, se define como:

$$\hat{e}_u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|}\ , \quad \hat{e}_v = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}\ , \quad \hat{e}_w = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|} \tag{9.8}$$

en donde los módulos del vector se definen como **factores de escala**, de la forma h_i:

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| \ , \quad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \ , \quad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| \ , \tag{9.9}$$

De esta manera, cada vector tangente a una curva coordenada queda definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \hat{e}_u \ , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \hat{e}_v \ , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \hat{e}_w \tag{9.10}$$

Con lo cual, el incremento infinitesimal de la Ecuación 9.6, se puede reescribir como:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_u \hat{e}_u \, \mathrm{d}u + h_v \hat{e}_v \, \mathrm{d}v + h_w \hat{e}_w \, \mathrm{d}w \tag{9.11}$$

9.2.3. Vectores normales y tangentes en sistemas curvilíneos

Como se verá en mayor profundidad en secciones posteriores Sección 5.2, superficialmente un gradiente se puede interpretar de manera geométrica, como un vector normal (perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando. Dicho esto, $\vec{\nabla} f$ es normal a la superficie $f(x, y, z) = k$ en el sistema cartesiano, entonces, aplicando la misma interpretación geométrica al sistema curvilíneo, $\vec{\nabla} g$ es un vector normal a la superficie $u, v, w = C_i$, por lo que un vector unitario en la dirección de u, v, w está dado por:

$$\hat{E}_u = \frac{\vec{\nabla} u}{\left|\vec{\nabla} u\right|} \ , \quad \hat{E}_u = \frac{\vec{\nabla} v}{\left|\vec{\nabla} v\right|} \ , \quad \hat{E}_w = \frac{\vec{\nabla} w}{\left|\vec{\nabla} w\right|} \tag{9.12}$$

Entonces en un sistema curvilíneo en cada punto $\mathbf{P}$, existe de manera general dos conjuntos de vectores unitarios, $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$ son vectores tangentes a las *curvas o líneas coordenadas*, mientras que $\hat{E}_u, \hat{E}_v, \hat{E}_w$ son vectores normales a las *superficies coordenadas*.

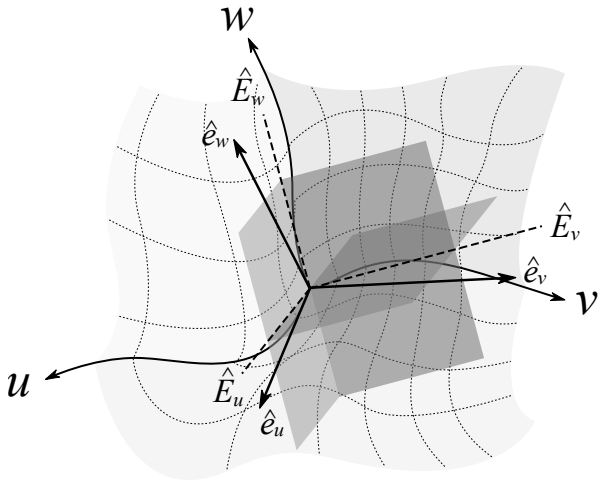


Figura 9.2: derivada de la evolución de la humedad en el tiempo t_1.

Esto es análogo a lo que sucede en el sistema cartesiano con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ en donde al pasar de un punto $\mathbf{P}_i$ al un punto $\mathbf{P}_{i+1}$ no se puede producir un cambio de dirección, mientras que en un sistema

curvilíneo, esto si puede ocurrir debido a la curvatura de las superficies que forman el equivalente a los ejes cartesianos.

9.2.3.1. Ortogonalidad en un sistema curvilíneo

Como se ha descrito en las secciones anteriores, para poder definir los operadores diferenciales en un sistema curvo y replicar las transformaciones de cambio de sistemas sin problemas, se deben cumplir las condiciones de ortogonalidad, por lo tanto, para que las coordenadas curvilíneas u, v, w se digan ortogonales, los vectores unitarios de dirección $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$ deben ser ortonormales, de la misma manera en que lo son los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ en el sistema cartesiano. Como ya han sido normalizados (unitarios), se debe cumplir la condición de normalidad respecto de la superficie (ortogonales), por ello:

$$\begin{aligned} \hat{e}_u \cdot \hat{e_v} = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_w = \hat{e}_w \cdot \hat{e}_u &= 0 \\ \hat{e}_u \cdot \hat{e_u} = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_v = \hat{e}_w \cdot \hat{e}_w &= 1 \end{aligned} \tag{9.13}$$

y además, las tangentes $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$ en el punto $\mathbf{P}$, deben ser mutuamente perpendiculares a las curvas coordenadas u, v, w, entonces, el sistema coordenado u, v, w se dice otogonal.

$$\begin{aligned} \hat{e}_u \times \hat{e}_v = -\hat{e}_v \times \hat{e}_u &= \hat{e}_w \\ \hat{e}_v \times \hat{e}_w = -\hat{e}_w \times \hat{e}_v &= \hat{e}_u \\ \hat{e}_w \times \hat{e}_u = -\hat{e}_u \times \hat{e}_w &= \hat{e}_v \end{aligned} \tag{9.14}$$

9.3. Gradiente en un sistema curvilíneo

Dada una función $f(u, v, w)$ en un sistema de coordenadas curvilíneas, se busca una forma para aplicar el operador gradiente. Para esto, se plantea la función escalar ϕ en su forma diferencial

$$\nabla\phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}} \cdot (\phi) \tag{9.15}$$

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{9.16}$$

ahora, expandiendo su forma diferencial usando coordenadas curvilíneas como en la Ecuación 9.6:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial\phi}{\partial w}\,\mathrm{d}w \tag{9.17}$$

Entonces, se aplica el operador $\Big/ * \frac{1}{h_i} h_i$ a ambos lados de la Ecuación 9.17

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u} h_u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v} h_v\,\mathrm{d}v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w} h_w\,\mathrm{d}w \tag{9.18}$$

Usando la definición presentada en la Ecuación 9.11, se puede obtener lo siguiente:

$$\hat{e}_u \cdot d\mathbf{r} = h_u\,\mathrm{d}u\ , \quad \hat{e}_v \cdot d\mathbf{r} = h_v\,\mathrm{d}v\ , \quad \hat{e}_w \cdot d\mathbf{r} = h_w\,\mathrm{d}w \tag{9.19}$$

Entonces, reescribiendo $\mathrm{d}\phi$:

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{e}_u \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{e}_v \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{e}_w \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{9.20}$$

$$\mathrm{d}f \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{e}_w\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{9.21}$$

Comparando con el resultado presentado en la Ecuación 9.16, se tiene finalmente lo siguiente:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{e}_w \tag{9.22}$$

lo cual representa la forma general para el gradiente en un sistema de coordenadas curvilíneas. Luego, desde la Ecuación 9.22 se puede obtener la expresión para el operador nabla:

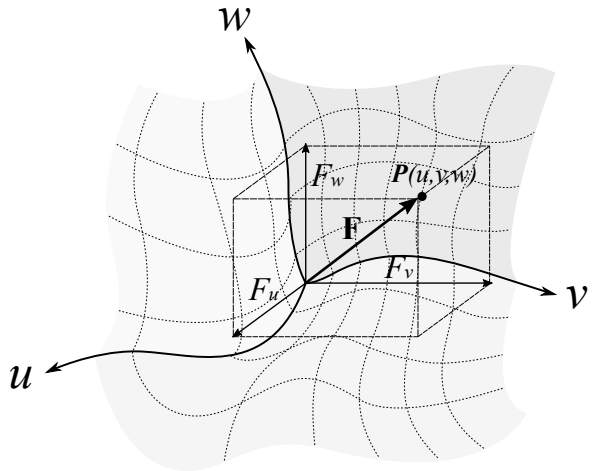
$$\nabla = \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) \tag{9.23}$$

9.4. Divergencia y Laplaciano en un sistema curvilíneo

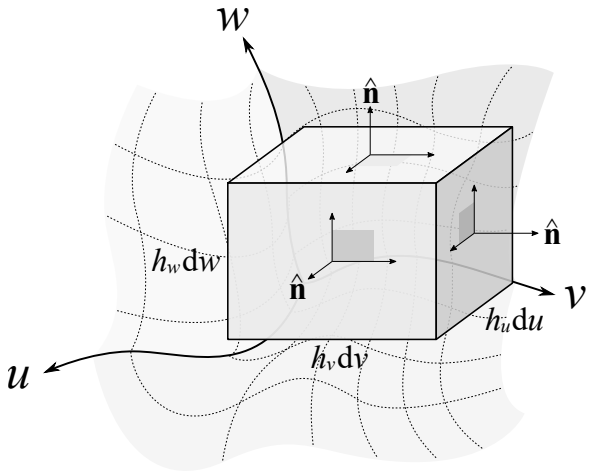
Para la divergencia, considerar un elemento de volumen al rededor del punto **P** con coordenadas curvilíneas (u, v, w). Luego, la divergencia de un campo vectorial **F** en **P** se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \mathrm{d}S \tag{9.24}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{|V|} \int\int_{s(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{9.25}$$



(a) Evolución de la humedad en el tiempo t_1.

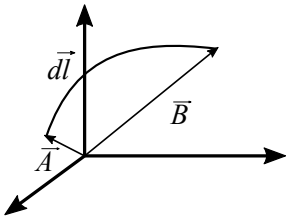


(b) derivada de la evolución de la humedad en el tiempo t_1.

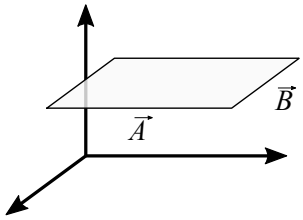
en donde S es la superficie cerrada al rededor del elemento de volumen ΔV, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal que apunta hacía afuera de la superficie S como se puede ver en la FIG. Luego, para calcular la superficie integral en la Ecuación 9.24, se debe proyectar el vector **v** a lo largo de las

componentes u, v, w y multiplicar el resultado por cada elemento de área perpendicular a la superficie evaluada. Considerando al punto $\mathbf{P}(u, v, w)$, el elemento de volumen estará definido por las coordenadas $(u - \mathrm{d}u/2, u + \mathrm{d}u/2)$ a lo largo de u, coordenadas $(v - \mathrm{d}v/2, v + \mathrm{d}v/2)$ a lo largo de v y coordenadas $(w - \mathrm{d}w/2, w + \mathrm{d}w/2)$ a lo largo de w.

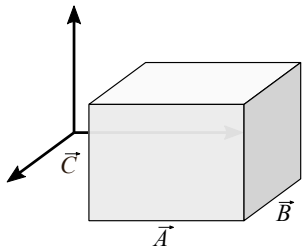
Ahora bien, desde las condiciones de ortogonalidad de 9.13 y 9.14, se pueden definir las operatorias geométricas en un sistema curvilíneo como longitud, área y volumen.



(a) Evolución de la humedad en el tiempo t_1.



(b) derivada de la evolución de la humedad en el tiempo t_1.



(c) derivada de la evolución de la humedad en el tiempo t_1.

$$\begin{aligned} S =& |\vec{A} \times \vec{B}| \\ S_{\perp w} =& |(h_u \,\mathrm{d}u\hat{e}_u) \times (h_v \,\mathrm{d}v\hat{e}_v)| \\ =& h_u h_v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v |\hat{e}_u \times \hat{e}_v| \\ =& h_u h_v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v |\hat{e}_w| \\ =& h_u h_v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{9.26}$$

El procedimiento es análogo para las superficies normales a u, v, por lo tanto $S_{\perp u} = h_v h_w \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w$, $S_{\perp v} = h_u h_w \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}w$ y $S_{\perp w} = h_u h_w \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}w$. En cuanto al cálculo del volumen:

$$\begin{aligned} V =& |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| \\ =& |(h_u \,\mathrm{d}u\hat{e}_u) \cdot ((h_v \,\mathrm{d}v\hat{e}_v) \times (h_w \,\mathrm{d}w\hat{e}_w))| \\ =& h_u h_v h_w \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w |\hat{e}_u \cdot |\hat{e}_v \times \hat{e}_w|| \\ =& h_u h_v h_w \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w |\hat{e}_u \cdot \hat{e}_u| \\ =& h_u h_v h_w \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w \end{aligned} \tag{9.27}$$

Ahora bien, aclaradas las operatorias geométricas, se puede continuar con el desarrollo para obtener la divergencia para un campo vectorial $\mathbf{F}$ de manera general.

Se aplica el operado *del* al vector $\mathbf{F}$, lo que deja lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} =& F_u\hat{e}_u + F_v\hat{e}_v + F_w\hat{e}_w \\ \nabla \cdot \mathbf{F} =& \nabla \cdot (F_u\hat{e}_u) + \nabla \cdot (F_v\hat{e}_v) + \nabla \cdot (F_w\hat{e}_w) \end{aligned} \tag{9.28}$$

Ahora se debe encontrar una expresión para el operador aplicado a cada componente del campo vectorial,

F_u, F_v, F_w. Primero, se calcula el comportamiento del gradiente aplicado a cada una de las superficies, con el fin de encontrar relaciones entre los vectores de dirección, es decir:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } \phi = u; \qquad \nabla u &= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) u \\
&= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial u}{\partial w}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial w} = 0 \\
&= \frac{\hat{e}_u}{h_u} \qquad (9.29)\\
\text{Sea } \phi = v; \qquad \nabla v &= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) v \\
&= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial v}{\partial w}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial v} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial w} = 0 \\
&= \frac{\hat{e}_v}{h_v} \qquad (9.30)\\
\text{Sea } \phi = w; \qquad \nabla w &= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) w \\
&= \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial w}{\partial w}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial w} = 1 \\
&= \frac{\hat{e}_w}{h_w} \qquad (9.31)\\
\text{Por lo tanto} \qquad &\Rightarrow \hat{e}_u = h_u\nabla u,\ \hat{e}_v = h_v\nabla v,\ \hat{e}_w = h_w\nabla w \qquad (9.32)
\end{aligned}$$

Luego, con lo obtenido en 9.32, se pueden reescribir los vectores unitarios de dirección como:

$$\hat{e}_u = \hat{e}_v \times \hat{e}_w = h_v\nabla v \times h_w\nabla w = h_v h_w \nabla v \times \nabla w \qquad (9.33)$$

$$\hat{e}_v = \hat{e}_w \times \hat{e}_u = h_w\nabla w \times h_u\nabla u = h_w h_u \nabla w \times \nabla u \qquad (9.34)$$

$$\hat{e}_w = \hat{e}_u \times \hat{e}_v = h_u\nabla u \times h_v\nabla v = h_u h_v \nabla u \times \nabla v \qquad (9.35)$$

Con esto, se puede replantear la Ecuación 9.28 en términos de las relaciones 9.33, 9.34, 9.35 para cada

superficie.

$$
\begin{aligned}
F_u\hat{e}_u =& F_u h_v h_w \nabla v \times \nabla w \\
\nabla \cdot (F_u\hat{e}_u) =& \nabla \cdot (F_u h_v h_w \nabla v \times \nabla w) \\
& \Rightarrow \text{Usando: } \nabla \cdot (\alpha \vec{F}) = \nabla\alpha \cdot \vec{F} + \alpha(\nabla \cdot \vec{F}) \\
=& \nabla (F_u h_v h_w) \cdot (\nabla v \times \nabla w) + F_u h_v h_w \nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) \\
=& \nabla (F_u h_v h_w) \cdot \frac{\hat{e}_v}{h_v} \times \frac{\hat{e}_w}{h_w} + F_u h_v h_w \left[(\nabla \cdot \nabla w)\nabla v - (\nabla \cdot \nabla v)\nabla w \right] \\
& \Rightarrow \text{pero: } \cancelto{0}{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})} \\
=& \nabla (F_u h_v h_w) \cdot \frac{\hat{e}_u}{h_v h_w} \\
& \Rightarrow \text{Usando la definición de Ecuación 9.23} \\
=& \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \right) (F_u h_v h_w) \cdot \frac{\hat{e}_u}{h_v h_w} \\
=& \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial w} \right) \cdot \frac{\hat{e}_u}{h_v h_w}
\end{aligned}
\tag{9.36}
$$

Finalmente, a la Ecuación 9.36 se aplican las condiciones del producto punto de los vectores direccionales 9.13, con lo que:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (F_u\hat{e}_u) =& \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \cancelto{0}{\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial v}} + \cancelto{0}{\frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial w}} \right) \cdot \frac{\hat{e}_u}{h_v h_w} \\
& \Rightarrow \hat{e}_u \cdot \hat{e}_u = 1 \\
\nabla \cdot (F_u\hat{e}_u) =& \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u}
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

Se realiza el mismo procedimiento que es análogo para las otras superficies, por lo que combinando el resultado de todas las superficies en la forma de la Ecuación 9.37 con la Ecuación 9.28, se obtiene la divergencia para un campo vectorial $\mathbf{F}$ de manera general:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} =& \nabla \cdot (F_u\hat{e}_u) + \nabla \cdot (F_v\hat{e}_v) + \nabla \cdot (F_w\hat{e}_w) \\
=& \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (F_v h_w h_u)}{\partial v} + \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (F_w h_u h_v)}{\partial w} \\
=& \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_w h_u) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

En cuanto al Laplaciano del campo escalar ϕ, este también se puede expresar de manera general para un sistema de coordenadas curvilíneas. Para ello, considerar a $\vec{\Psi} = \nabla \cdot \phi$, el cual corresponde a un campo vectorial, pues el operador nabla aplicado a un campo escalar, da como resultado un campo vectorial. Luego, $\nabla \cdot \vec{\Psi}$ puede ser expresado en la forma de la Ecuación 9.38:

$$\begin{aligned}\vec{\Psi} =& \underbrace{\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}}_{\Psi_u}\hat{e}_u + \underbrace{\frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}}_{\Psi_v}\hat{e}_v + \underbrace{\frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}}_{\Psi_w}\hat{e}_w \\ \Rightarrow \nabla\cdot(\Psi) =& \nabla\cdot(\nabla\cdot\phi) = \nabla^2\phi \\ \nabla\cdot\vec{\Psi} =& \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial(\Psi_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(\Psi_v h_w h_u)}{\partial v} + \frac{\partial(\Psi_w h_u h_v)}{\partial w}\right)\end{aligned} \tag{9.39}$$

Con lo que finalmente se puede obtener

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi h_v h_w}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi h_w h_u}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi h_u h_v}{\partial w}\right)\right), \tag{9.40}$$

o bien,

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)\right), \tag{9.41}$$

En la Tabla 9.1 y Tabla 9.2 se presenta un resumen con los operadores diferenciales en un sistema curvilíneo para un campo escalar ϕ y campo vectorial $\mathbf{F}$. Por el momento se excluye la obtención del rotor para un campo vectorial ya que hasta este punto es despreciado de la Ecuación General de Energía (no se incluye el tensor de esfuerzos). Luego, en la Tabla 9.3 y Tabla 9.4, se muestran las transformaciones aplicadas a los sistemas tradicionales de Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas.

9.5. Matriz y determinante Jacobianos

Una vez definidos los operadores diferenciales para un sistema curvilíneo cualquiera, solo resta por trabajar los operadores integrales, necesarios para realizar operaciones en que se requiera realizar operaciones sobre una superficie o un volumen con cambio de sistemas de coordenadas. Para ello, se requiere comprender como aplicar las transformaciones integrales mediante matrices y el determinante Jacobiano.

Para cálculo vectorial, la matriz Jacobiana de una función vectorial de varias variables, es la matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de primer orden de dicha función. Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función tal que sus derivadas parciales de primer orden existen en $\mathbb{R}^n$. Esta función toma un punto $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ y devuelve un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^n$, luego, la matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$ (denotada por $\mathbb{J}$) es definida como una matriz de tamaño $m\times n$ cuya (i,j)-ésima entrada es: $\mathbb{J}_{i,j} = \dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}$.

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla^T\phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla^T\phi_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_m}{\partial x_m}\end{bmatrix} \tag{9.42}$$

donde $\nabla^T \phi_i$ es la traspuesta del gradiente de la i-ésima componente.

Lo anterior se traduce en que el determinante jacobiano de una aplicación diferenciable $\phi : A \to \mathbb{R}^n$, donde A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{J}\phi(x) = \det(\phi'(x))$ para cada $x \in A$.

Teorema* Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $g : A \to B$ un *difeomorfismo* C^1. Entonces para toda función integrable $\phi \to \mathbb{R}$, la función $(\phi \circ g)|\mathbb{J}g|$ es integrable en A, y

$$\int_B \phi = \int_A (\phi \circ g)|\mathbb{J}g| \tag{9.43}$$

siendo $g = (g_1, ..., g_n)$; $y_1 = g_1(x), ..., y_n = g_n(x)$. Luego,

$$\int_A \phi(g(x))|\mathbb{J}g(x)|dx = \int_B \phi(y)dy \tag{9.44}$$

Por ello, para aplicar poder aplicar el operador integral a una transformación de variables con funciones definidas, se debe emplear el teorema del cambio de variable y obtener el determinante Jacobiano, lo cual ocurriría por ejemplo, al querer pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas con una transformación centrada en el origen.

Sea $g(u, v, w)$ definida $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$g(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\theta) \tag{9.45}$$

tal que $A = \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$.

En este caso, la transformación es a coordenadas esféricas por lo que los factores de escala son $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \operatorname{sen}\theta$, lo cual, de acuerdo a 9.27 resulta en que el diferencial de volumen para la integración es $dV = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\varphi$. Por otra parte, mediante el teorema de cambio de variable para una transformación clásica como la presentada en este apartado, se obtiene que el determinante de la matriz Jacobiana es $\mathbb{J}g(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{sen}\theta$, el cual al ser aplicado junto al operador de integración para el calculo de un elemento de volumen es un resultado equivalente al recién mencionado para coordenadas curvilíneas. Lo anteriormente mencionado se traduce en lo siguiente:

$$\int_{V(r,\theta,\varphi)} \phi(g(r, \theta, \varphi))|\mathbb{J}g(r, \theta, \varphi)|dV = \int_{V(r,\theta,\varphi)} \phi(r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\theta) r^2 \operatorname{sen}\theta dV \tag{9.46}$$

$$\int_{V(u,v,w)} \phi(u, v, w) h_u h_v h_w dV_{(u,v,w)} = \int_{V(u,v,w)} \phi(u, v, w) 1 \cdot r \cdot r \operatorname{sen}\theta dV_{(u,v,w)} \tag{9.47}$$

en donde los lados derechos de ambas ecuaciones representan la misma forma de integrar un elemento de volumen.

Nota: La fórmula de *Leibniz* expresa el determinante de una matriz cuadrada en términos de

permutaciones de los elementos de la matriz, pero para matrices cuadradas de orden 3 ($m = n = 3$), se puede utilizar la *Regla de Sarrus* para calcular rápidamente el determinante de la matriz.

Por otro lado, continuando la transformación de 9.45, los factores de escala se pueden obtener como la derivada del vector posición respecto a la dirección que se esta escalando (Ecuación 9.9).

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}^2\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial r}^2\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial r}^2\right)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta} = 1 \tag{9.48}$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}^2\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}^2\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}^2\right)} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = r \tag{9.49}$$

$$h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}^2\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}^2\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}^2\right)} = \sqrt{r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi} = r\operatorname{sen}\theta \tag{9.50}$$

Lo cual es congruente con los resultados obtenidos anteriormente tanto para los operadores diferenciales con la matriz Jacobiana, como para las transformaciones mediante factores de escala de la **??**.

9.6. Resumen de operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas

A continuación, se presentan de manera resumida los principales operadores diferenciales trabajados en este capítulo. Se debe notar que el operador Laplaciano no se detalla para un campo vectorial ya que no es de interés para este estudio, sin embargo, el procedimiento es el mismo trabajado en este capítulo con la diferencia que la resultante es un campo tensorial, útil para otras aplicaciones como por ejemplo la inclusión del tensor de esfuerzos de la ecuación de energía (el cual no es considerado en este trabajo).

	ϕ escalar
Operador $\nabla()$	$\left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\cdot$
Gradiente ∇	$\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{e}_w$
Divergencia $\nabla\cdot$	-
Laplaciano ∇^2	$\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)\right]$

Tabla 9.1: Resumen

	F vectorial
Operador $\nabla()$	$\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\cdot h_v h_w)+\frac{\partial}{\partial v}(\cdot h_w h_u)+\frac{\partial}{\partial w}(\cdot h_u h_v)\right)$
Gradiente ∇	-
Divergencia $\nabla\cdot$	$\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w)+\frac{\partial}{\partial v}(F_v h_w h_u)+\frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right)$
Laplaciano ∇^2	-

Tabla 9.2: Resumen

9.6.1. Aplicación a los sistemas de coordenadas tradicionales

Para los sistemas de coordenadas cartesianas y cilíndricas queda de la siguiente manera.

	Cartesianas	Cilíndricas
Coordenadas	$u=x,\ v=y,\ w=z$	$u=\rho,\ v=\varphi,\ w=z$
Factores de escala	$h_x=1,\ h_y=1,\ h_z=1$	$h_\rho=1,\ h_\varphi=\rho,\ h_z=1$
∇	$\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$
$\nabla\cdot$	$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{(\partial F_\rho\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$
∇^2	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Tabla 9.3: Resumen

Mientras que para un sistema de coordenadas esféricas se convierte en lo siguiente.

	Esféricas
Coordenadas	$u=r,\ v=\theta,\ w=\varphi$
Factores de escala	$h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_\varphi=r\,\mathrm{sen}\,\theta$
∇	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$
$\nabla\cdot$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(F_\rho r^2)}{\partial\rho}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(F_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(F_\varphi)}{\partial\varphi}$
∇^2	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(\phi r^2)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial(\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right)$

Tabla 9.4: Resumen

Referencias

[1] George B Arfken y Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*. 1999.

[2] David J Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005), 1960.

[3] DR Hamann. «Generalized-gradient functionals in adaptive curvilinear coordinates». En: *Physical Review B* 54.3 (1996), pág. 1568.

[4] I Krichever. «Algebraic-geometrical n-orthogonal curvilinear coordinate systems and solutions to the associativity equations». En: *arXiv preprint hep-th/9611158* (1996).

[5] Ivan Netuka. «The change-of-variables theorem for the Lebesgue integral». En: *Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics* 19 (2011), págs. 37-42.

[6] Murray R Spiegel. «vector analysis and an introduction to tensor analysis». En: (2021).

[7] Jidong Zhao y Dorival Pedroso. «Strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates». En: *International Journal of Solids and Structures* 45.11-12 (2008), págs. 3507-3520.

Capítulo 10

Ecuación de energía en coordenadas curvilíneas

Contenidos del Capítulo

10.1. Introducción **172**
10.2. Planteamiento general **172**
10.3. Volumen de control con humedad y continuidad de fases **173**
10.4. Intercambio de calor en la interfase en coordenadas curvilíneas **175**
10.4.1. Componentes de la ecuación de calor 175
10.4.2. Conducción 175
10.4.3. Convección interna 176
10.4.4. Radiación 176
10.5. Ecuación general de calor en coordenadas curvilíneas **177**
10.6. Divergencia del flujo radiativo en coordenadas curvilíneas **178**
10.6.1. Aproximación Shuster-Schwarzschild 178
10.6.2. Aproximación de Milne-Eddington (Método del Momentum) 179
10.6.3. Aproximación P_1 179
10.7. Ecuación general de energía en coordenadas curvilíneas para propiedades promediadas espacialmente para un medio seco a húmedo **179**
10.8. Movimiento a distintos modelos de energía **183**
10.8.1. Movimiento a coordenadas cilíndricas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante 184
10.8.1.1. Movimiento a un medio sólido 185
10.8.2. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante 185
10.8.3. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso sin divergencia radiativa, con humedad y radiación incidente constante 186
Referencias **188**

10.1. Introducción

De los capítulos trabajados anteriormente, se puede decir el modelo con humedad (Capítulo 8) corresponde a una extensión y generalización del caso en seco, ya que es posible derivar al modelo sin humedad (Capítulo 7) a partir de él. Lo anterior se debe a que el modelo con humedad ha sido derivado y planteado de tal forma, que si el contenido de humedad es cero el problema de secado se combina con el problema seco por las condiciones de continuidad. Con lo cual, es posible agrupar ambos problemas en un solo dominio y obtener finalmente el modelo en seco.

Por otro lado, como se pudo ver en el Capítulo 6 de modelos previos, existen similitudes entre algunos modelos en cuanto a las condiciones de borde pero parecen ser problemas totalmente diferentes al ser representados en geometrías y orientaciones distintas. Lo cual ponen énfasis en que los modelos son derivados inicialmente condicionados a un sistema coordenado. No obstante, como se ha presentado en el Capítulo 9, es posible moverse de un sistema coordenado a otro gracias a las funciones de escala de las coordenadas curvilíneas.

Por lo tanto, es posible plasmar todos los fenómenos involucrados en el proceso de calentamiento e ignición en un solo modelo general, el cual puede ser adaptado desde un medio poroso a un medio sólido, ir desde un medio humedecido a uno seco. En el cual es posible moverse desde coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas o esféricas. Y que además, considera que el fenómeno de la radiación puede ser tratado como una absorción completa en la superficie expuesta a la fuente de calor, o bien, desarrollarse como una divergencia radiativa al interior del volumen de control mediante de la temperatura volumétrica, la cual tiende al valor superficial cuando el espesor de penetración tiende a cero.

En este capítulo, se desarrolla el modelo general descrito, detallando cada una de las componentes de la ecuación de energía y su forma en coordenadas generalizadas. Finalmente, se presenta como este modelo general es capaz de derivar a cada uno de los modelos presentados en el Capítulo 6 al inicio del desarrollo de los modelos.

10.2. Planteamiento general

Tal como en los modelos obtenidos para un medio seco y húmedo trabajados en el Capítulo 7 y Capítulo 8, el modelo general se deriva partiendo desde la ecuación de energía para un medio radiativamente participativo sin ser condicionado a ningún sistema de coordenadas, el cual es válida para una fase continua en movimiento

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\nabla\dot{\mathbf{q}}'' - p\nabla\mathbf{v} + \mu\Phi + Q^{'''},$$

donde las propiedades del medio corresponden a ρ densidad del medio, u energía interna, $\mathbf{v}$ vector velocidad, $\dot{\mathbf{q}}''$ vector de flujo de calor total, Φ función de disipación y $Q^{'''}$ calor generado en el medio (por ejemplo, una reacción química). Luego, con la derivada material y despreciando los efectos de disipación y momentum, sin generación de calor por reacciones químicas, la ecuación para un medio

continuo se puede escribir como

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla u\right)=-\nabla\dot{\mathbf{q}}''.$$

Lo cual es válido para un medio poroso con N fases sólidas en equilibrio térmico con la fase gaseosa (Ecuación 8.2)

$$\alpha_g+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=1,$$

esto bajo el supuesto de que los materiales que componen la fase sólida son inertes químicamente y todos tienen puntos de ignición superiores al punto del agua, y además, todos los componentes de la fase gaseosa pueden ser tratados de manera homogénea inclusive después del cambio de fase.

Luego, considerando al volumen de control como un medio m donde se desarrolla el proceso de calentamiento para todas las fases involucradas

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\rho_k e_k+\alpha_g\rho_g e_g\right)+\nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g=-\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}},\tag{10.1}$$

con $e_j=\int_{T_\infty}^{T_j}C_{p,j}dT$ como energía interna de la fase j y $\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}}$ vector de calor al interior del medio.

10.3. Volumen de control con humedad y continuidad de fases

Esta sección presenta una recapitulación de algunos de los conceptos clave para comprender el desarrollo del modelo para un volumen de control con humedad presentado en el Capítulo 8, por lo que para mayor detalle de su derivación se debe revisar el capítulo mencionado. No obstante, para poder desarrollar las ecuaciones para el modelo general se deben recordar algunos conceptos físicos y matemáticos presentados anteriormente.

Ahora bien, la Ecuación 10.1 plantea un balance de energía para múltiples fases, sin embargo, en las secciones siguientes se considerará que la fase sólida tiene solo un tipo de compuesto al igual que en la derivación del modelo húmedo en el Capítulo 8. Luego, considerando que el agua esta contenida a un nivel superficial y no a un nivel estructural donde podría modificar las propiedades del material, se tiene que el agua superficial será calentada y luego evaporada, por lo que solamente luego de este proceso de cambio de fase del agua, se calienta el resto del material seco hasta alcanzar su punto de ignición. Recordando la Ecuación 8.8

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T-T_\infty)+m_w C_{p,w}(T_b-T_\infty)+m_w L_w+m_g e_g\right)=-\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}}-\nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g$$

Por otro lado, se tiene que la masa de agua contenida en el volumen de control disminuirá conforme aumenta el tiempo de exposición a la fuente de calor externa producto del aumento de temperatura,

por lo que al igual que en la Ecuación 8.12, se considera la evolución de la masa de agua como

$$\lambda(t) = \frac{m(t)_{d+w} - m_d}{m_d},$$

considerando que el material sólido no pierde masa o sufre una variación despreciable respecto de la perdida de masa de agua durante todo el proceso de calentamiento, de esta manera, la Ecuación 10.1 se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\left(m_d c_{p,d}(T - T_\infty) + m_d c_{p,d}\left(\frac{C_{p,w}}{c_{p,d}}\right)\lambda(t)(T_b - T_\infty) + m_d c_{p,d}\frac{L_w}{c_{p,d}}\lambda(t) + m_g e_g\right) = \\ - \nabla \dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla \alpha_g \rho_g \mathbf{v_g} e_g. \quad (10.2)$$

En este punto se tiene una sola ecuación que combina la fase del agua y la fase sólida, sin embargo, ambas ecuaciones tienen dominios y recorridos diferentes de acuerdo a la variable temporal ya que el punto de ebullición del agua se da a una temperatura menor a la temperatura esperada de ignición de un material sólido, por lo que se pueden considerar dos intervalos independientes en la variable tiempo

$$T(t) = T_h(t_h) + T_d(t_d) \;\Big/\; \begin{cases} T_h(t_h) = \{\big(t_h, T_h(u,v,w,t_h)\big) : u \in [u_1,u_2],\ v \in [v_1,v_2], \\ \qquad w \in [w_1,w_2],\ t_h \in [t_\infty, t_b] \to [T_\infty, T_b]\} \\ T_d(t_d) = \{\big(t_d, T_d(u,v,w,t_d)\big) : u \in [u_1,u_2],\ v \in [v_1,v_2], \\ \qquad w \in [w_1,w_2],\ t_d \in [t_b, t_{ig}] \to [T_b, T_{ig}]\} \end{cases} \quad (10.3)$$

bajo los supuestos antes mencionados. Con lo anterior, se pueden definir funciones de temperatura para cada fase con tiempos distintos pero que comparten el mismo volumen de control de manera espacial

$$T(u,v,w,t) = T_h(u,v,w,t_h) + T_d(u,v,w,t_d), \qquad \forall\ t_h \in [t_\infty, t_b],\ t_d \in [t_b, t_{ig}], \\ u \in [u_1,u_2],\ v \in [v_1,v_2], w \in [w_1,w_2] \quad (10.4)$$

por lo tanto, la Ecuación 8.16 sigue siendo manteniéndose para un sistemas en coordenadas curvilíneas

$$T(u,v,w,t) - T_\infty = \big(T_d(u,v,w,t_d) - T_d(u,v,w,t_b)\big) + \big(T_h(u,v,w,t_h) - T_\infty\big) \\ t_h \in [t_\infty, t_b], t_d \in [t_b, t_{ig}], \quad (10.5)$$

lo cual es válido cuando se cumpla que

$$\lim_{t_h \to t_b^-} T_h(u,v,w,t) = \lim_{t_d \to t_b^+} T_d(u,v,w,t). \quad (10.6)$$

Luego, para compactar el modelo considerando las condiciones de continuidad para ambas funciones de temperatura, se han definidos los siguientes parámetros (Ecuación 8.30 y Ecuación 8.31)

$$\begin{aligned}\beta(t) =& \rho_{s,ap}(t) c_{p,d},\\ \gamma =& \frac{c_{p,w}}{c_{p,d}},\end{aligned}$$

con lo que finalmente se puede reescribir la Ecuación 10.1

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\Big(T_d(u,v,w,t_d) - T_d(u,v,w,t_b)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\Big(T_h(u,v,w,t_h) - T_\infty\Big)\Big(1+\gamma\lambda(t_h)\Big)\\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{C_{p,d}}\lambda(t_h) + m_g e_g(t)\right) = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g. \quad (10.7)\end{aligned}$$

Notar que si en este caso el contenido de humedad es cero, se traduce en que $\lambda(t) = 0$ y $\alpha_s = \alpha_d$ por lo que con las condiciones de continuidad

$$\alpha_d\rho_d c_{p,d}\frac{\partial}{\partial t}T(u,v,w,t) = -\nabla\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{m}} - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g. \quad (10.8)$$

10.4. Intercambio de calor en la interfase en coordenadas curvilíneas

Tal como se trabajó en el Capítulo 8, se analizan los componentes de la ecuación de calor que influyen en el intercambio de calor en la interfase (lado derecho)

$$\begin{aligned}&-\nabla\mathbf{q_m} - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g\\ &-\nabla\Big(\lambda_m\nabla T(t) + \dot{\mathbf{q}}''\Big) - \nabla\alpha_g\rho_g\mathbf{v_g}e_g(t)\end{aligned}$$

10.4.1. Componentes de la ecuación de calor

10.4.2. Conducción

Para el término de conducción se tiene desde la Ley de Fourier, que el flujo de calor transmitido por unidad de superficie en un medio *isótropo* es proporcional y de sentido contrario al gradiente del campo de temperatura en una dirección dada. La constante de proporcionalidad corresponde al coeficiente de conducción térmica, que en este caso es definido para el medio equivalente (más de una fase)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}''_{\mathbf{cond,m}} =& \lambda_m \nabla T(t) \\ =& \Big(\alpha_g(t)\lambda_g + \alpha_k(t)\lambda_k\Big)\nabla T(t)\end{aligned}$$

Sin embargo, lo que se busca es la divergencia de la conducción, por lo que en coordenadas curvilíneas se tiene

$$\nabla^2 k_m T(t) = \frac{k_m}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right], \tag{10.9}$$

lo cual es válido para un medio homogéneo de una fase, por lo que extendiendo la forma curvilínea al problema con humedad

$$\begin{aligned}k_m \nabla^2 T(t) =& \frac{(\alpha_g(t_h)k_g + \alpha_s(t_h) + \alpha_s(t_h)k_h)}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T_h}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T_h}{\partial v}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T_h}{\partial w}\right)\right] + \frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g + \alpha_s(t_d))}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T_d}{\partial u}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T_d}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T_d}{\partial w}\right)\right]\end{aligned} \tag{10.10}$$

10.4.3. Convección interna

Para el término de convección al interior del medio poroso, este tiene efecto tanto para la parte seca como para la parte húmeda, por lo que el término de convección es válido para ambos intervalos de t y se debe extender a coordenadas curvilíneas, así, combinando las propiedades de la divergencia de un campo vectorial (Ecuación 9.38) para el vector de velocidad de movimiento del gas al interior (Ecuación 8.43)

$$\begin{aligned}\nabla \alpha_g \rho_g \mathbf{v_g} e_g =& \alpha_g \rho_g c_{p,g}(\nabla \cdot e_g(u,v,w,t)\mathbf{v_g}) \\ =& \frac{\alpha_g \rho_g}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g v_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e_g v_v h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(e_g v_u h_u h_v\right)\right) \qquad (10.11) \\ =& \frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_h) v_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_h) v_v h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_h) v_u h_u h_v\right)\right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_d) v_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_d) v_v h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_d) v_u h_u h_v\right)\right] \qquad (10.12)\end{aligned}$$

10.4.4. Radiación

Se presenta de manera muy breve el término radiativo ya que su desarrollo depende enteramente de la aproximación que se utilice para modelarlo. Se expresa de manera general para el medio coordenadas

curvilíneas como la divergencia del vector de flujo de calor radiativo

$$\nabla \dot{\mathbf{q}}'' = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}_u''(T) h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}_v''(T) h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}_w''(T) h_u h_v\right)\right) \tag{10.13}$$

$$= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}_u''(T_h) h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}_v''(T_h) h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}_w''(T_h) h_u h_v\right)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}_u''(T_d) h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}_v''(T_d) h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}_w''(T_d) h_u h_v\right)\right)\right] \tag{10.14}$$

10.5. Ecuación general de calor en coordenadas curvilíneas

Teniendo las componentes de la ecuación de calor en coordenadas curvilíneas, se puede diferenciar y replantear la ecuación general de calor trabajada hasta este punto, esto es combinando la Ecuación 10.8 para la variación de energía térmica con la Ecuación 10.9, Ecuación 10.11 y Ecuación 10.13 para el intercambio de calor en la interfase

$$\begin{aligned}\alpha_d \rho_d c_{p,d} \frac{\partial}{\partial t} T(u,v,w,t) = &- \frac{k_m}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right] \\ &- \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}_u''(T) h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}_v''(T) h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}_w''(T) h_u h_v\right)\right] \\ &- \frac{\alpha_g \rho_g}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g v_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e_g v_v h_w h_u\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(e_g v_u h_u h_v\right)\right].\end{aligned} \tag{10.15}$$

Así, la Ecuación 10.15 es una forma general de ecuación de calor para un medio poroso participativo radiativamente para cualquier sistema coordenado sin humedad.

Por otro lado, el modelo general de la Ecuación 10.15 se puede extender para el caso en que hay agua contenida en el volumen de control (bajo los supuestos y consideraciones mencionadas con anterioridad), esto se logra combinando la Ecuación 10.7 para la variación de energía térmica con la Ecuación 10.10, Ecuación 10.12 y Ecuación 10.14 para el intercambio de calor en la interfase con

presencia de humedad

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\Big(T_d(u,v,w,t_d)-T_d(u,v,w,t_b)\Big)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\Big(T_h(u,v,w,t_h)-T_\infty\Big)\Big(1+\gamma\lambda(t_h)\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\frac{L_w}{C_{p,d}}\lambda(t_h)+m_g e_g(T)\right)=\\
&-\frac{(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_s(t_h)+\alpha_s(t_h)k_h)}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T_h}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T_h}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T_h}{\partial w}\right)\right]\\
&+\frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g+\alpha_s(t_d))}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T_d}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T_d}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T_d}{\partial w}\right)\right]\\
&-\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_h)v_u h_v h_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_h)v_v h_w h_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_h)v_u h_u h_v\right)\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_d)v_u h_v h_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_d)v_v h_w h_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_d)v_u h_u h_v\right)\right]\\
&-\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_h)h_v h_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_h)h_w h_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_h)h_u h_v\right)\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_d)h_v h_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_d)h_w h_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_d)h_u h_v\right)\right)\right]. \qquad (10.16)
\end{aligned}$$

Con lo anterior, la Ecuación 10.16 se convierte en una ecuación de calor para un medio poroso participativo radiativamente válida para cualquier sistema de coordenadas incluyendo el efecto de la humedad, el cual se puede convertir rápidamente en el modelo de la Ecuación 10.15 cuando el contenido de humedad es 0 %, por lo que también es válido para los casos descritos anteriormente con el modelo general en coordenadas curvilíneas para un medio seco.

10.6. Divergencia del flujo radiativo en coordenadas curvilíneas

10.6.1. Aproximación Shuster-Schwarzschild

Para placas paralelas

$$\frac{dq}{d\tau} = (1-\omega)(4\pi I_b - G) \qquad (10.17)$$

$$\frac{dG}{d\tau} = -4q \qquad (10.18)$$

$$\tau = 0: \qquad G + 2q = 4J_1 \qquad (10.19)$$

$$\tau = \tau_L: \qquad G - 2q = 4J_2 \qquad (10.20)$$

10.6.2. Aproximación de Milne-Eddington (Método del Momentum)

$$\frac{dq}{d\tau} = (1-\omega)(4\pi I_b - G) \tag{10.21}$$

$$\frac{dG}{d\tau} = -3q \tag{10.22}$$

$$\tau = 0: \qquad G + 2q = 4J_1 \tag{10.23}$$

$$\tau = \tau_L: \qquad G - 2q = 4J_2 \tag{10.24}$$

En equilibrio radiativo se tiene que $dq/d\tau = 0$

10.6.3. Aproximación $\mathbf{P}_1$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = (1-\omega)\left(4\pi I_b(T) - G\right) \tag{10.25}$$

$$\nabla G = -\left(3\beta - A_1\sigma_s\right)\mathbf{q} \tag{10.26}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w: \qquad 2\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 4J_w - G \tag{10.27}$$

Si se pasa a coordenadas cartesianas, se tiene el Método del Momentum (sección 10.6.2).

10.7. Ecuación general de energía en coordenadas curvilíneas para propiedades promediadas espacialmente para un medio seco a húmedo

Si las condiciones del problema modelado requieren trabajar con propiedades promediadas, se puede redefinir la temperatura como un fenómeno volumétrico promediado espacialmente utilizando la Ecuación 9.27

$$\overline{T}(t) = \frac{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} T(u,v,w,t)h_u h_v h_w du dv dw}{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} h_u h_v h_w du dv dw}, \tag{10.28}$$

que corresponde al caso cuando existe solo una fase seca sin humedad.

La metodología para pasar a propiedades promediadas espacialmente realizada en la Ecuación 10.28, se puede extender para el caso cuando hay agua presente en el volumen de control por

medio de las condiciones de continuidad trabajadas anteriormente

$$\overline{T}(t) = \frac{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} T_h(u,v,w,t_h)h_u h_v h_w dudvdw}{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} h_u h_v h_w dudvdw} + \frac{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} T_d(u,v,w,t_d)h_u h_v h_w dudvdw}{\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} h_u h_v h_w dudvdw}. \tag{10.29}$$

Entonces, aplicando el operador $\Big/ \left(* \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} h_u h_v h_w dudvdw \cdot 1 \Big/ \int_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dV_{(u,v,w)} \right)$ a ambos lados de la Ecuación 10.16, se obtiene la Ecuación 10.30 que se detalla a continuación. La cual es válida para un medio poroso radiativamente participativo con agua contenida en el volumen de control en un sistema de coordenadas curvilíneas que se pueden adaptar a cualquier sistema de coordenadas tradicionales solo modificando los factores de escala.

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\left(\overline{T}_d(t_d)-\overline{T}_d(t_b)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\left(\overline{T}_h(t_h)-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t_h)\right)+\frac{\partial}{\partial t}m_g e_g(t)=$$
$$-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_s(t_h)+\alpha_s(t_h)k_h)}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial T_h}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_wh_u}{h_v}\frac{\partial T_h}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial T_h}{\partial w}\right)\right]h_uh_vh_w dudvdw$$
$$-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g+\alpha_s(t_d))}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial T_d}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_wh_u}{h_v}\frac{\partial T_d}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial T_d}{\partial w}\right)\right]h_uh_vh_w dudvdw$$
$$-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_h)v_uh_vh_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_h)v_vh_wh_u\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_h)v_uh_uh_v\right)\right]h_uh_vh_w dudvdw-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_d)v_uh_vh_w\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_d)v_vh_wh_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_d)v_uh_uh_v\right)\right]h_uh_vh_w dudvdw$$
$$-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_h)h_vh_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_h)h_wh_u\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_h)h_uh_v\right)\right]h_uh_vh_w dudvdw-\frac{1}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_d)h_vh_w\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_d)h_wh_u\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_d)h_uh_v\right)\right]. \tag{10.30}$$

Luego, se pueden factorizar y reordenar los términos de la Ecuación 10.30 obteniéndose

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_d)\beta(t_d)\left(\overline{T}_d(t_d)-\overline{T}_d(t_b)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s(t_h)\beta(t_h)\left(\overline{T}_h(t_h)-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t_h)\right)+\frac{\partial}{\partial t}m_g e_g(t)=\\
&-\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\left[\frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g+\alpha_s(t_d))}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial T_d}{\partial u}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_d)v_uh_vh_w\right)\right.\\
&\left.+\frac{(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_s(t_h)+\alpha_s(t_h)k_h)}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial T_h}{\partial u}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(e_g(T_h)v_uh_vh_w\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&-\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\left[\frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g+\alpha_s(t_d))}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_wh_u}{h_v}\frac{\partial T_d}{\partial v}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_d)v_vh_wh_u\right)\right.\\
&\left.+\frac{(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_s(t_h)+\alpha_s(t_h)k_h)}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_wh_u}{h_v}\frac{\partial T_h}{\partial v}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial v}\left(e_g(T_h)v_vh_wh_u\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&-\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[\frac{(\alpha_g(t_d)\lambda_g+\alpha_s(t_d))}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial T_d}{\partial w}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_d)v_wh_uh_v\right)\right.\\
&\left.+\frac{(\alpha_g(t_h)k_g+\alpha_s(t_h)+\alpha_s(t_h)k_h)}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial T_h}{\partial w}\right)+\frac{\alpha_g(t)\rho_g}{h_uh_vh_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(e_g(T_h)v_wh_uh_v\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&-\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_d)h_vh_w\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T_h)h_vh_w\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&-\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_d)h_wh_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T_h)h_wh_u\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&-\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)}h_uh_vh_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_d)h_uh_v\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T_h)h_uh_v\right)\right]h_uh_vh_w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

Ahora bien, desde la Ecuación 10.31 se puede obtener un modelo que unifica el problema de secado y calentamiento de un sólido en un solo modelo. Lo anterior se logra con el procedimiento desarrollado en la sección 8.12 del Capítulo 8, en donde se considera todo el proceso de calentamiento como un problema de secado en donde se evapora el agua contenida en el volumen de control. De lo anterior se obtiene un modelo general unificado que permite modelar la ecuación de energía para propiedades promediadas espacialmente para un medio desde sólido a poroso, para radiación absorbida completamente en la superficie hasta un espesor de penetración δ, para flujos de calor incidente ya sea constante, polinomial o exponencial, para casos en que el volumen de control es seco $\lambda = 0$, o bien, cuando posee un contenido de humedad constante λ_0 hasta uno que evoluciona en el tiempo $\lambda(t)$ con un perfil temporal

determinado

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t)\right)= \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_m h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_g\rho_g e_g v_u h_v h_w\right)h_u du \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_m h_w h_u}{h_v}\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_g\rho_g e_g v_v h_w h_u\right)h_v dv \\
&\quad -\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_m h_u h_v}{h_w}\frac{\partial T}{\partial w}+\alpha_g\rho_g e_g v_w h_u h_v\right)h_w dw \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T)h_v h_w\right)h u du \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T)h_w h_u\right)h v dv \\
&\quad -\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T)h_u h_v\right)h w dw, \qquad (10.32)
\end{aligned}$$

luego, solo resta aplicar las condiciones de borde y condiciones iniciales según cada problema para simplificar el modelo, usualmente se trabajan problemas en que la transferencia de calor se puede considerar unidimensional, por lo que los gradientes en las otras coordenadas serán cero (simplificación en Ecuación 10.34).

10.8. Movimiento a distintos modelos de energía

Ahora, desde el modelo simplificado de la Ecuación 10.32 es posible derivar a otros modelos solo aplicando las condiciones de borde propias de cada problema. Por tanto, para un problema con transferencia unidimensional (por ejemplo, solo en la dirección u) en que el medio es poroso y

radiativamente participativo, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t)\right)= \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_m h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}+(\alpha_g\rho_g e_g v_u h_v h_w)\right)h_u du \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_m h_w h_u}{h_v}\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial v}}+\cancelto{0}{(\alpha_g\rho_g e_g v_v h_w h_u)}\right)h_v dv \\
&\quad -\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_m h_u h_v}{h_w}\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial w}}+\cancelto{0}{(\alpha_g\rho_g e_g v_w h_u h_v)}\right)h_w dw \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T)h_v h_w\right)h u du \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{1}{h_v}\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{q}''_v(T)h_w h_u\right)}h v dv \\
&\quad -\frac{(v_2-v_1)(u_2-u_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{1}{h_w}\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial w}\left(\dot{q}''_w(T)h_u h_v\right)}h w dw,
\end{aligned} \tag{10.33}$$

resultando finalmente para coordenadas curvilíneas en

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s\beta\left(\overline{T}-T_\infty\right)\left(1+\Gamma\lambda(t)\right)= \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_m h_v h_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_g\rho_g e_g v_u h_v h_w\right)h_u du \\
&\quad -\frac{(w_2-w_1)(v_2-v_1)}{\int\limits_{V(u,v,w)} h_u h_v h_w dudvdw}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{q}''_u(T)h_v h_w\right)h u du
\end{aligned} \tag{10.34}$$

10.8.1. Movimiento a coordenadas cilíndricas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante

Desde el modelo de la Ecuación 10.34, es posible obtener el modelo de la Ecuación 7.27 trabajado en el Capítulo 7 por medio de la definición de los intervalos de integración y del sistema de coordenadas, es decir, para coordenadas cilíndricas se tiene el cambio de variable es $(u,v,w)\rightarrow(r,\phi,z)$ y los factores de escala son $h_u=1$, $h_v=r$, $h_w=1$, por lo que los límites de integración están definidos por el problema en donde la dimensión radial es $u_1=r_1$, $u_2=r_1+\delta$, la dimensión axial es $v_1=0$, $v_2=2\pi$ y

la dimensión azimutal es $w_1 = 0$, $w_2 = l_z$, por lo tanto, para un medio sin humedad ($\lambda(t) = 0$)

$$\alpha_d \rho_d c_{p,d} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(t) = -\frac{(l_z)(2\pi)}{\pi\left((r_i+\delta)^2 - r_i^2\right) l_z} \int_{r_i}^{r_i+\delta} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_m r}{1}\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g v_r r\right) dr$$
$$- \frac{(l_z)(2\pi)}{\pi\left((r_i+\delta)^2 - r_i^2\right) l_z} \int_{r_i}^{r_i+\delta} \frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''(T) r\right) dr, \tag{10.35}$$

así, se obtiene finalmente

$$\alpha_d \rho_d c_{p,d} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(t) = -\frac{2}{\left((r_i+\delta)^2 - r_i^2\right)} \int_{r_i}^{r_i+\delta} \frac{\partial}{\partial r}\left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_g \rho_g e_g v_r r\right) dr$$
$$- \frac{2}{\left((r_i+\delta)^2 - r_i^2\right)} \int_{r_i}^{r_i+\delta} \frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''(T) r\right) dr, \tag{10.36}$$

en donde el modelo radiativo se resuelve en función del sistema de coordenadas según se presentó en la sección 10.6, el cual ya fue ampliamente explicado en la sección Sección 7.5 del mismo Capítulo 7 y es válido para este caso ya que es con radiación incidente constante.

10.8.1.1. Movimiento a un medio sólido

Aplicando las mismas condiciones a un medio sólido, es posible derivar el modelo de la Ecuación 6.4 del Capítulo 6 de modelos previos, haciendo ahora que $\alpha_d = 1$ y $r_i = 0$

$$\rho_d c_{p,d} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(t) = -\frac{2}{r_o^2}\int_0^{r_o} \frac{\partial}{\partial r}\left(k_m r \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr - \frac{2}{r_o^2}\int_0^{r_o} \frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{q}_r''(T) r\right) dr. \tag{10.37}$$

10.8.2. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso radiativamente participativo, sin humedad y con radiación incidente constante

Desde el modelo de la Ecuación 10.34, es posible obtener el modelo de la Ecuación 6.2 trabajado en el Capítulo 6 por medio de la definición de los intervalos de integración y del sistema de coordenadas, es decir, para coordenadas cartesianas se tiene el cambio de variable es $(u, v, w) \to (x, y, z)$ y los factores de escala son $h_u = 1$, $h_v = 1$, $h_w = 1$, por lo que los límites de integración en x son $u_1 = 0$, $u_2 = \delta$, los límites en y son $v_1 = 0$, $v_2 = y^*$, los límites en z son $w_1 = 0$, $w_2 = z^*$ y sin contenido de humedad ($\lambda(t) = 0$)

$$\alpha_d \rho_d c_{p,d} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(t) = -\frac{y^* z^*}{\delta y^* z^*}\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left(k_m \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_g \rho_g e_g v_x\right) dx - \frac{y^* z^*}{\delta y^* z^*}\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{q}_x''(T)\right) dx, \tag{10.38}$$

por lo que simplificando y resolviendo el modelo radiativo con la Aproximación de Shuster-Schwarzschild presentada en la sección 10.6.1

$$\dot{q}''_x(x,T) = \sigma\left(\overline{T}^4 - T_\infty\right)\left(e^{-2(\delta-x)} - e^{-2x}\right) + \dot{q}''_{inc}(t)e^{-2x}, \tag{10.39}$$

se tiene una expresión para el flujo de calor radiativo en la dirección x. Luego, combinando el modelo radiativo con la ecuación de calor y aplicando las condiciones de borde del problema para radiación incidente constante, se obtiene finalmente

$$\alpha_d\rho_d c_{p,d}\frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(t) = -\frac{h_{conv}}{\delta}\left(\overline{T} - T_\infty\right) - \frac{2a_b}{\delta}\sigma\left(\overline{T}^4 - T_\infty\right) - \frac{a_b}{\delta}\dot{q}''_{inc} \tag{10.40}$$

considerando la absortividad del medio como $a_b = (1 - \exp(-2\delta))$, lo cual es equivalente al modelo desarrollado por Mindykowski et.al como se presenta en el Capítulo 6, sección 6.3.

10.8.3. Movimiento a coordenadas cartesianas para un medio poroso sin divergencia radiativa, con humedad y radiación incidente constante

Desde el modelo de la Ecuación 10.34 es posible derivar el modelo sin aproximar de la sección 6.5 del Capítulo 6. Para ello se definen las coordenadas del sistema cartesiano por medio del cambio de variable $(u,v,w) \to (x,y,z)$, cuyos factores de escala son $h_u = 1$, $h_v = 1$, $h_w = 1$. Luego, estableciendo los límites de integración en x como $u_1 = 0$, $u_2 = \delta$, los límites en y como $v_1 = 0$, $v_2 = y^*$ y límites en z como $w_1 = 0$, $w_2 = z^*$. En este caso, se define un contenido de humedad constante para todo el proceso como λ_0 sin considerar su evolución en el tiempo, por lo que la Ecuación 10.34 se transforma en

$$\alpha_s\beta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} = -\frac{y^*z^*}{\delta y^*z^*}\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(k_m\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_g\rho_g e_g v_x\right)dx - \frac{y^*z^*}{\delta y^*z^*}\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{q}''_x(T)\right)dx, \tag{10.41}$$

luego, en este modelo no se considera una divergencia radiativa sino que esta es absorbida en su totalidad en la superficie y se aplican las condiciones de borde

$$\alpha_s\beta\delta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right) - \epsilon\sigma\left(T^4 - T_\infty^4\right). \tag{10.42}$$

Se linealiza el término de la radiación y se define $h_R = 4\epsilon\sigma T_\infty^3$. Luego, se divide a ambos lados por $\dot{q}''_{cri}$

$$\frac{\alpha_s\beta\delta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)}{\dot{q}''_{cri}}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right)}{\dot{q}''_{cri}} - \frac{\left(T_{ig} - T_\infty\right)h_R}{\dot{q}''_{cri}}\theta, \tag{10.43}$$

y se introducen los siguientes parámetros y variables normalizadas

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_{ig} - T_\infty} \qquad \tau = \frac{\alpha_s\beta\delta\left(1+\Gamma\lambda_0\right)}{\dot{q}''_{cri}}$$

$$\psi = \frac{h_R(T_{ig} - T_\infty)}{\dot{q}''_{cri}} \qquad \varphi = \frac{\left(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri}\right)}{\dot{q}''_{cri}}$$

Con lo que se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\psi}{\tau}\Theta(t) + = \frac{\varphi}{\tau}, \tag{10.44}$$

sujeta a la condición inicial $\theta(t=0)=0$, por lo que su solución esta dada por

$$\Theta(t) = \frac{\varphi}{\psi}\left(1 - \exp\left(-\frac{\psi}{\tau}(t-t_0)\right)\right), \tag{10.45}$$

así, regresando a las variables originales

$$\frac{(T-T_\infty)}{\cancel{(T_{ig}-T_\infty)}} = \frac{(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri})}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{h_R\cancel{(T_{ig}-T_\infty)}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{h_R\cancel{(T_{ig}-T_\infty)}}{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}} \cdot \frac{\cancel{\dot{q}''_{inc,cri}}}{\alpha_s\beta\delta\,(1+\Gamma\lambda_0)\,\cancel{(T_{ig}-T_\infty)}}\right)(t-t_0)\right],$$

y finalmente

$$T(t) = T_\infty + \frac{(\dot{q}''_{inc} - \chi\dot{q}''_{cri})}{h_R}\left[1 - \exp\left(-\frac{h_R}{\alpha_s\beta\delta\,(1+\Gamma\lambda_0)}(t-t_0)\right)\right]. \tag{10.46}$$

De esta manera, el modelo de temperatura de la Ecuación 10.46 equivale al modelo de la Ecuación 6.13, en donde el espesor físico del volumen de control es $\delta = l_z$ dado que no hay divergencia radiativa.

Adicionalmente, es importante destacar que para el caso planteado en la sección 6.5, es posible obtener una solución exacta con el modelo de la Ecuación 10.41 (mediante resolución numérica), el cual se obtiene desde la derivación del modelo general en coordenadas curvilíneas para las mismas condiciones.

Referencias

[1] Bruno A Boley. «A method of heat conduction analysis of melting and solidification problems». En: *Journal of Mathematics and Physics* 40.1-4 (1961), págs. 300-313.

[2] David J Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005), 1960.

[3] AM Grishin y col. «Formulation and solution of the problem of drying of a layer of combustible forest materials». En: *Combustion, Explosion and Shock Waves* 37.1 (2001), págs. 57-66.

[4] DR Hamann. «Generalized-gradient functionals in adaptive curvilinear coordinates». En: *Physical Review B* 54.3 (1996), pág. 1568.

[5] N Hernández y col. «Piloted ignition delay times on optically thin PMMA cylinders». En: *Proceedings of the Combustion Institute* 37.3 (2019), págs. 3993-4000.

[6] Mohammed M Khan, John L De Ris y Steve D Ogden. «Effect of moisture on ignition time of cellulosic materials». En: *Fire Safety Science* 9 (2008), págs. 167-178.

[7] Kenneth K Kuo. *Principles of combustion*. TJ254. 5 K85 2005. 2005.

[8] M Larini y col. «A multiphase formulation for fire propagation in heterogeneous combustible media». En: *Int. J. of Heat Mass Tran.* 41.6-7 (1998), págs. 881-897.

[9] P Mindykowski y col. «Piloted ignition of wildland fuels». En: *Fire Safety Journal* 46.1-2 (2011), págs. 34-40.

[10] Ivan Netuka. «The change-of-variables theorem for the Lebesgue integral». En: *Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics* 19 (2011), págs. 37-42.

[11] James G Quintiere. «Fundamentals of fire phenomena». En: (2006).

[12] Murray R Spiegel. «vector analysis and an introduction to tensor analysis». En: (2021).

[13] J Rivera y col. «Ignition of wildland fuels by idealized firebrands». En: *Fire Safety Journal* 120 (2021), pág. 103036.

[14] Harvey P Yagoda y Bruno A Boley. «Starting solutions for melting of a slab under plane or axisymmetric hot spots». En: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 23.2 (1970), págs. 225-246.

[15] Jidong Zhao y Dorival Pedroso. «Strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates». En: *International Journal of Solids and Structures* 45.11-12 (2008), págs. 3507-3520.