



Universidad Técnica Federico Santa María.  
Departamento de Física.

---

# Formalismo para perturbaciones cosmológicas afines

---

**Manuel Morocho-López**  
Advisor: Oscar Castillo

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los  
requisitos para el grado de Doctor en Ciencias Físicas, de la  
Universidad Técnica Federico Santa María y la Pontificia  
Universidad Católica de Valparaíso.

Julio, 2024



---

TÍTULO DE LA TESIS:

**FORMALISMO PARA PERTURBACIONES  
COSMOLÓGICAS AFINES**

AUTOR:

**MANUEL MOROCHO-LÓPEZ**

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Doctor en Ciencias Físicas, de la Universidad Técnica Federico Santa María y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

**COMISIÓN EXAMINADORA:**

Oscar Castillo	(USM)	.....
Alfonso Zerwekh	(USM)	.....
Cristóbal Corral	(UAI)	.....
Aureliano Skirzewski	(UDELAR)	.....

4 de octubre de 2024

---

A mi esposa, mi hijo, mis padres, mis amigos y profesores.

## Resumen

La suposición de que la materia en el Universo se distribuye de manera homogénea e isotrópica nos ha permitido entender gran parte de la fenomenología asociada a la evolución y expansión del mismo. A pesar de lo anterior, la formación de estructura no puede explicarse a partir del Principio Cosmológico solamente. La implementación de perturbaciones sobre soluciones cosmológicas típicamente es utilizada para modelar la formación de clústeres de galaxias y cúmulos de estrellas. Hasta ahora, el formalismo de perturbaciones sólo ha podido implementarse en formulaciones métricas de gravedad como relatividad general y su equivalente en teorías afines no ha sido desarrollada. En el presente trabajo tiene como fin proponer una metodología para implementar perturbaciones cosmológicas en teorías de gravedad que tengan a la conexión como su campo fundamental. Se utiliza la teoría de grupos junto con los objetos disponibles en soluciones cosmológicas (afines) para determinar los campos irreducibles en los que una perturbación cosmológica afín puede descomponerse, en analogía con su contraparte métrica. Además, en el presente trabajo se exploran las diferentes elecciones de *gauges* que pueden implementarse en el formalismo para eliminar los grados de libertad de la perturbación asociados a elecciones particulares de sistemas de coordenadas y se muestra de qué manera pueden construirse campos invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas.

## Agradecimientos

En primer lugar, le doy gracias a Dios dado que sin su ayuda, guía e inspiración no hubiese podido estar en el lugar en el que estoy ni haber podido concretar los logros que he alcanzado hasta ahora.

A continuación, agradezco a mis padres, Manuel Fernando y Alexandra Isella. Gracias a ellos soy la persona que soy dado que siempre se aseguraron de que mi educación y mi vida fuesen las mejores posibles mientras viví de forma dependiente a ellos.

Les doy las gracias también a mis mejores amigos, a mis amigos y compañeros de pregrado y postgrado dado que cada de uno de ellos, de alguna u otra forma, contribuyeron a que pudiera completar esta etapa a través de palabras de ánimo o reprendas.

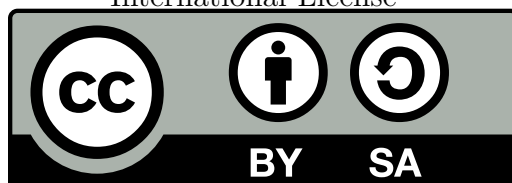
Por supuesto, le agradezco infinitamente al profesor Oscar Castillo, por haber creído en mí, por haberme considerado para colaborar con él y por cada uno de los triunfos y resultados que alcanzamos juntos con este trabajo. Esta tesis de doctorado es tan mía como de él. Junto con él, le agradezco a cada uno de mis compañeros y amigos en el grupo de investigación en Gravedad Afín dado que todos siempre se prestaron a escucharme y calificar con el mayor rigor posible cada uno de los resultados que alcancé con este trabajo.

Además, le agradezco tanto a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y a la Universidad Técnica Federico Santa María por aceptarme en su programa de Doctorado en Ciencias Físicas y le agradezco a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo por la Beca de Doctorado Nacional No. 2023-21231762 que me permitió costear mis estudios durante la realización de este trabajo de tesis.

Por último, les doy las gracias a mi esposa Fanny Michelle y mi hijo Manuel Rafael, por toda la paciencia que tuvieron conmigo durante esta etapa de nuestras vidas. Este trabajo es para ustedes.

---

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0  
International License



---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría de grupos</b>	<b>5</b>
2.1. Definición de grupo . . . . .	5
2.2. Grupos discretos y continuos . . . . .	6
2.2.1. Revisión breve de algunos grupos discretos y el grupo de permutaciones $S_n$ . . . . .	6
2.2.2. Revisión breve de algunos grupos continuos: grupos de Lie . . . . .	7
2.3. Clases de conjugación de grupos . . . . .	9
2.4. Representaciones de grupos finitos . . . . .	10
2.4.1. Tipos de representaciones . . . . .	10
2.5. Caracter de una representación . . . . .	11
2.6. Descomposición de representaciones reducibles . . . . .	12
2.7. Homeomorfismo de los grupos $SU(2, \mathbb{C})$ y $SO(3, \mathbb{R})$ . . . . .	15
<b>3. Geometría diferencial</b>	<b>17</b>
3.1. Topologías y espacios topológicos . . . . .	17
3.2. Variedades . . . . .	18
3.2.1. Vectores y covectores . . . . .	19
3.2.2. Tensores . . . . .	21
3.3. Fibrados . . . . .	21
3.3.1. Fibrado tangente . . . . .	22
3.3.2. Campos vectoriales . . . . .	23
3.4. Conexiones afines . . . . .	23
3.4.1. Torsión y Curvatura . . . . .	25
3.5. Métricas . . . . .	26
3.5.1. No metricidad . . . . .	27
<b>4. Formulaciones de gravedad y el principio cosmológico</b>	<b>29</b>
4.1. Relatividad general . . . . .	30
4.2. Algunas formulaciones alternativas de gravedad . . . . .	34
4.2.1. Formulación afín de gravedad de Eddington . . . . .	35
4.2.2. Extensión afín de relatividad general de Kijowski . . . . .	36
4.2.3. Teoría afín de gravedad de Poplawski . . . . .	38
4.3. El formalismo de gravedad polinomial afín . . . . .	41

4.4. Soluciones del formalismo de gravedad polinomial afín consistentes con el principio cosmológico . . . . .	46
<b>5. Formalismo de perturbaciones métricas</b>	<b>51</b>
5.1. Descripción general del método . . . . .	51
5.2. Ilustración del método en el caso de gravedad débil . . . . .	53
<b>6. Obtención de la descomposición de Helmholtz de una perturbación afín cosmológica</b>	<b>59</b>
6.1. Análisis preliminar del comportamiento tensorial de la perturbación . . . . .	60
6.2. Descomposición de las contribuciones de la perturbación bajo el grupo $GL(3, \mathbb{R})$ y el grupo $SO(3, \mathbb{R})$ . . . . .	62
6.3. Origen de la descomposición de Helmholtz para elementos del grupo $SO(3, \mathbb{R})$ : Pasando de $SO(3, \mathbb{R})$ a $SO(2, \mathbb{R})$ . . . . .	64
6.4. Obtención de la descomposición de Helmholtz de las contribuciones novedosas en la perturbación . . . . .	66
6.5. Descomposición de Helmholtz completa de una perturbación afín general . . . . .	69
<b>7. Análisis de variaciones de los campos de una perturbación afín cosmológica y gauges asociados</b>	<b>73</b>
7.1. Variaciones de las contribuciones de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas . . . . .	73
7.2. Variaciones de los campos de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas . . . . .	74
7.3. Discusión sobre cantidades invariantes y determinación de los gauges posibles . . . . .	77
<b>8. Discusión de resultados y conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

# Introducción

---

En la escala cosmológica, el Universo se modela bajo los preceptos de isotropía y homogeneidad y en la mayoría de esquemas cosmológicos se supone que la teoría que explica las interacciones gravitacionales es la *Relatividad General*. La premisa anterior típicamente es conocida como el *principio cosmológico* y se acepta como válida cuando se consideran porciones *grandes* del espacio. A pesar de lo anterior, actualmente se entiende que aceptar la condición anterior con rigurosidad no permitiría explicar la formación de estructuras como los clústeres de estrellas, galaxias y demás en el Universo observable.

De la breve discusión anterior, podemos postular que la formación de estructuras en el Universo debe resultar de una *desviación* desde el principio cosmológico. En teorías como relatividad general, debido a la complejidad de las ecuaciones de Einstein, la estrategia que típicamente se sigue radica en considerar *perturbaciones* desde una *solución de fondo* isótropa y homogénea; y luego encontrar las condiciones que las ecuaciones de campo imponen sobre los campos de la perturbación, hasta un cierto orden. En dicha formulación y en otras *fundamentalmente métricas*, la métrica es el campo responsable que media las interacciones gravitacionales, por lo que típicamente uno considera que una métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  *general* (es decir, *perturbada*) resulta de la suma de una métrica  $g_{\mu\nu}$  isótropa y homogénea de fondo; y de un tensor simétrico  $h_{\mu\nu}$ , es decir,  $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ , en donde  $\epsilon$  es un *parámetro de expansión* que controla el tamaño (u *orden*) de la perturbación.

Por otro lado, tenemos el hecho de que en el *modelo  $\Lambda$  de materia oscura fría* (en donde  $\Lambda$  indica la existencia de una *constante cosmológica*), el 26 % del Universo observado corresponde a *materia oscura* y el 69 % de éste comprende *energía oscura*, lo que en conjunto constituye lo que típicamente recibe el nombre de *sector oscuro* del Universo y que realmente corresponden a dos objetos cuyo origen y naturaleza, al día de hoy, aún no son bien entendidas ni han podido ser observadas directamente, [1]. Aunque hemos podido observar efectos que podrían atribuirse a su existencia, no han podido detectarse directamente.

El hecho de que en ciertos escenarios resulte necesario un *gran sector oscuro* para entender la estructura y evolución del Universo en la escala más grande, a través de los fundamentos del modelo  $\Lambda$  de materia oscura fría, resalta la incógnita sobre si nuestras teorías de gravedad y partículas son fundamentales o sólo *teorías efectivas* (en el sentido Wilsoniano) de *teorías fundamentales aún por descubrir*. La cuestión anterior ha impulsado la formulación de muchas generalizaciones de los modelos estándar, incluso agregando tipos *exóticos* de materia e interacciones desde el punto de vista de la física de partículas y la *extensión* del sector gravitacional.

Si nos centramos en el conjunto de extensiones del sector gravitacional se pueden encontrar varios tipos de teorías. Hay teorías métricas de gravedad que consideran órdenes mayores para la curvatura en su acción, como las formulaciones de gravedad de Lanczos-Lovelock [2, 3]; y también hay teorías métrico-afines de gravedad en las que tanto la métrica como la

conexión afín son considerados campos fundamentales (e independientes, incluso), [4]. Además, existen teorías (puramente) afines de gravedad en los que el campo que media la interacciones gravitacionales corresponde a la conexión afín y el tensor métrico no es requerido para construir su acción correspondiente, [5, 6].

Respecto al último tipo de formulaciones de gravedad, soluciones cosmológicas asociadas a éstos han sido obtenidas en varios escenarios, [7–9]. A pesar de lo anterior, análisis de perturbaciones desde soluciones cosmológicas exactas en estas teorías no han sido desarrollados en la misma medida con la que se han implementado para teorías métricas dado que para llevarlos a cabo se necesita hacer perturbaciones sobre la conexión. Aunque a finales del año pasado se reportó un formalismo de teoría de perturbaciones para teorías métrico-afines [10], hasta antes del desarrollo del presente trabajo no se presentado en la literatura un símil para teorías puramente afines de gravedad.

En este trabajo presentamos un formalismo para poder desarrollar perturbaciones *afines* cosmológicas sobre la conexión afín. El método que presentamos puede utilizarse para analizar las inhomogeneidades del Universo tanto en teorías puramente afines como en teorías métrico-afines de gravedad. En resumen, el método de perturbaciones consiste en tomar una solución cosmológica de fondo de una teoría afín de gravedad que *induzca* la existencia de un tensor *métrico* en la subvariedad 3-dimensional espacial del espaciotiempo y perturbarlo con una campo afín *general*. La existencia del tensor métrico mencionado puede interpretarse como un requerimiento del método dado que, como una perturbación de la conexión se comporta como un tensor, se puede usar la *teoría de grupos* para obtener la descomposición de Helmholtz de la perturbación y para eso resulta conveniente trabajar con tensores cuyos índices sean, o bien todos covariantes o bien contravariantes y es ahí en donde aparece la necesidad de un objeto que permita subir y bajar índices *espaciales*, como mínimo. El hecho de que el método *necesite* que la solución de fondo de la teoría (en el caso de interés) sea cosmológica (de forma que aparezca naturalmente un objeto que se comporte como un tensor métrico), hace que el formalismo pueda ser categorizado como un formalismo de perturbaciones cosmológicas.

El presente trabajo se organizará de la forma que se comenta a continuación. En el capítulo 2 se describen los fundamentos e ideas necesarias de la teoría de grupos que se utilizarán para desarrollar la *descomposición* de nuestra perturbación afín. En el capítulo 3 se presentan los elementos de geometría diferencial que utilizamos para construir el espaciotiempo para el cual hallaremos soluciones cosmológicas y las herramientas con las que podemos construir y caracterizar perturbaciones afines. En el capítulo 4 se presentan tanto la formulación de gravedad del modelo estándar como también varias formulaciones alternativas de gravedad en las que el campo fundamental de la misma es la conexión. Además, en dicho capítulo presentamos una revisión de la *teoría de gravedad polinomial afín*, la cual corresponde a la formulación de gravedad que hemos utilizado en este trabajo para obtener soluciones cosmológicas en nuestro espaciotiempo de fondo. En el capítulo 5 se presenta una breve revisión del formalismo actual de perturbaciones métricas del que se dispone en la literatura, con el objetivo de poder contextualizar la forma en la que actualmente se desarrollan perturbaciones en formulaciones métricas de gravedad. En el capítulo 6 empezamos formalmente el trabajo del desarrollo del método de perturbaciones afines al detallar la manera en la que pueden obtenerse descomposiciones de Helmholtz de perturbaciones afines cosmológicas. En el capítulo 7 continuamos el trabajo de la construcción del formalismo de perturbaciones afines mostrando los *gauges* y campos invariantes que pueden contruirse a partir de la descomposición de la perturbación afín. Finalmente,

---

el capítulo 8 desarrolla un análisis de los principales resultados por la formulación propuesta y plantea la conclusión de este trabajo.



# Teoría de grupos

En este capítulo se presenta una revisión de las principales herramientas asociadas a la *teoría de grupos* que hemos utilizado para este trabajo. Se detallan las definiciones de grupos, clases, caracteres y descomposiciones en representaciones irreducibles en el contexto tanto de grupos *discretos* y *continuos* haciendo un énfasis en los últimos, dado que las simetrías de nuestros objetos de estudio están asociadas a varios grupos de ese tipo.

## 2.1. Definición de grupo

Un grupo  $G$  es un conjunto de objetos,  $\{g_i\}$ , dotados de una operación binaria  $(\cdot)$  (típicamente llamada *multiplicación* por la forma en que es interpretada cuando los elementos del grupo se ordenan en su respectiva *tabla de multiplicación*), que cumplen los siguientes axiomas:

- Clausura: El resultado de la operación  $g_i \cdot g_j = g_k, \forall g_i, g_j \in G$  vive dentro del conjunto  $G$ , es decir  $g_k \in G$ .
- Asociatividad:  $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$  para cualquier  $g_i, g_j, g_k \in G$ .
- Existencia de elemento identidad: Dentro de  $G$  debe aparecer un único elemento *identidad*,  $e$ , tal que  $e \cdot g_i = g_i \cdot e = g_i, \forall g_i \in G$ .
- Existencia de elemento inverso: Para todo elemento  $g \in G$ , existe un elemento  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

Los elementos de un *grupo* pueden ser de cualquier *naturaleza*, en el sentido de que pueden corresponder a cualquier tipo de objeto, siempre y cuando el conjunto de éstos cumpla los axiomas que permita calificarlo como grupo. Varios de los elementos de los grupos que se mencionan en la sección siguiente corresponden, por ejemplo, a *transformaciones* que actúan sobre un conjunto de objetos en donde el grupo como tal corresponde al conjunto de transformaciones en lugar del *set* de objetos en sí.

Una operación que permite formar un grupo a partir de dos grupos *cíclicos* (los cuales se definen en la sección 2.2) es el *producto directo de grupos cíclicos*. Si  $G = (\{g_a\}, \cdot)$  y  $G' = (\{g'_m\}, *)$  son dos grupos, el producto directo  $G \times G'$  comprende de:

- El conjunto de los elementos de la forma  $(g_a, g'_m)$ ,
- La operación  $\boxtimes$  que satisface la relación general  $(g_a, g'_m) \boxtimes (g_b, g'_n) = (g_a \cdot g_b, g'_m * g'_n)$ .

Por último, una idea que nos resulta útil definir ahora es la de *subgrupo*: Un *subgrupo*  $H$  de un grupo  $G$  es un grupo (en el sentido definido al principio de esta sección) formado por un subconjunto de elementos de  $G$  que satisfacen entre ellos mismos los axiomas de grupo bajo la operación de grupo.

## 2.2. Grupos discretos y continuos

Los grupos pueden dividirse en grupos *discretos* y en grupos *continuos*, dependiendo de si, para etiquetar o diferenciar los elementos del grupo entre sí, se requiere de una variable *discreta* (que puede tener asociado un número finito o infinito de elementos) o de una variable *continua*. El número de elementos del grupo es conocido (en el contexto de la teoría de grupos) como el *orden* del grupo.

### 2.2.1. Revisión breve de algunos grupos discretos y el grupo de permutaciones $S_n$

Algunos ejemplos de grupos discretos de interés son los *grupos cíclicos*  $Z_n$  de orden  $n$  (que corresponden a aquellos grupos en los que todos los elementos del mismo se pueden generar para partir de uno sólo), los *grupos dihedros*  $D_n$  (que corresponden al conjunto de simetrías de polígonos regulares de  $n$  vértices) y el *grupo de permutaciones*  $S_n$ , ó *grupo de simetrías* (que corresponde al conjunto de las transformaciones de  $n$  objetos indistinguibles). Entre los anteriores, el grupo  $S_n$  nos resulta de mayor interés debido a que pueden ser estudiados bajo la *descomposición de ciclos*.

Como se mencionó, el grupo de simetrías  $S_n$  corresponde al grupo conformado por todas las permutaciones que pueden efectuarse sobre  $n$  objetos indistinguibles y, por lo anterior, el orden del grupo de simetrías  $S_n$  es  $\text{ord}(S_n) = n!$ . Una característica de los elementos del grupo  $S_n$  (es decir, de cada *permutación*) corresponde a la *descomposición de ciclos* que puede usarse para representarlos.

La descomposición de ciclos de una permutación en  $S_n$  corresponde a una notación utilizada para indicar todos los ciclos que experimentan los  $n$  objetos que se permutan en cada elemento del grupo. Si  $\sigma$  representa un elemento del grupo en  $S_6$  entonces establecer que, por ejemplo

$$\sigma = (126)(4)(35) = (126)(35),$$

Indica que en la permutación de los 6 objetos, el primero es permutado a la segunda posición, el segundo a la sexta, el tercero a la quinta, el cuarto no se permuta, el quinto es permutado a la tercera y el sexto es permutado a la primera. El ciclo (126) se conoce como un 3-ciclo, el ciclo (35) es un 2-ciclo y el ciclo (4) es un 1-ciclo (que en la notación típica suelen omitirse). La palabra *ciclo* viene precisamente del hecho de que los objetos permutados en un ciclo siempre tienen la posición inicial del primer objeto igualada a la posición final del último objeto, lo que permite que esta permutación *se cierre* sobre sí misma o *cierre su ciclo* de permutaciones.

Una forma gráfica de entender la *estructura de ciclo* de  $S_n$  puede obtenerse a partir de dibujar las *particiones* de  $n$ , y representando los  $r$ -ciclos con un *arreglo* de  $r$  cajas ordenadas en filas con un número de cajas igual al de la cantidad de objetos en cada ciclo de un elemento,

empezando desde arriba con la(s) fila(s) más larga(s) y culminando abajo con la(s) fila(s) más corta(s). Los arreglos mencionados son dibujos que se conocen típicamente como los *diagramas de Young* para el grupo  $S_n$ , [11].

Por ejemplo, la estructura de ciclo de  $S_4$  (y su correspondiente *descomposición en partes irreducibles*, que es un tópico que se explica con más detalle desde la sección 2.4 hasta la sección 2.6), está dada por los siguientes diagramas de Young:

- Una *copia* del diagrama  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (XXXX)$ ,
- Tres *copias* del diagrama  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = (XXX)(X)$ ,
- Dos *copias* del diagrama  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (XX)(XX)$ ,
- Tres *copias* del diagrama  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = (XX)(X)(X)$  y
- Una *copia* del diagrama  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = (X)(X)(X)(X)$ .

Cada una de las *copias* (o *patrones*) mencionadas en la descomposición anterior para el grupo  $S_4$  se conoce como *tableau estándar de Young*, las cuales se construyen ubicando los valores desde 1 hasta 4 (para  $S_4$ ) en las cajas de cada diagrama, de forma que los números no decrezcan cuando se mira una fila de izquierda a derecha, sin que se repitan; y que aumenten cuando se lee una columna desde arriba hacia abajo. El ordenamiento de los números en cada diagrama de Young determina el número de patrones independientes de cada diagrama y establece *la dimensión de la representación irreducible asociado a cada diagrama* en que puede descomponerse el grupo  $S_4$  en este caso. Por lo anterior, los diagramas y tableau de Young pueden utilizarse para determinar la descomposición en representaciones irreducibles de algunos grupos. Esta técnica se explorará con mayor detalle en la sección 2.6 de este capítulo y en la sección 6.2 del capítulo siguiente.

Un resultado muy importante asociado al estudio de los grupos de permutaciones se resume en el teorema de Cayley: **Todo grupo de orden  $n$  finito es isomórfico a algún subgrupo del grupo de permutaciones  $S_n$ .** Un *isomorfismo* corresponde a un *mapa* o función para el cual existe un inverso y que, tanto la ésta como su inversa, preservan la *estructura* de los grupos bajo los que actúan.

### 2.2.2. Revisión breve de algunos grupos continuos: grupos de Lie

Como se mencionó anteriormente un grupo *continuo* es aquel que está conformado por elementos etiquetados por variables continuas, es decir,  $g_i \rightarrow g(\theta)$ . La operación de grupo para grupos continuos actúa de la forma siguiente.

$$g(\theta_\alpha)g(\theta_\beta) = g(\theta_\gamma = f(\theta_\alpha, \theta_\beta)).q \quad (2.1)$$

La función  $f$  en la ecuación 2.1 es una función continua en los parámetros  $\theta_\alpha$  y  $\theta_\beta$ . Cuando esta función  $f$  es una función *analítica*, el grupo continuo es conocido como *grupo de Lie*. Los grupos de Lie son, de hecho, los grupos que típicamente se estudian con mayor profundidad en Física.

Además de la definición anterior, se suele decir también que los grupos de Lie son grupos que pueden interpretarse como una *variedad*. Una *variedad*, como se verá en detalle en el capítulo 3, corresponde a un conjunto dotado de una *topología* y un *homeomorfismo* entre el conjunto y el espacio real  $\mathbb{R}^d$   $d$ -dimensional. Los *homeomorfismos* son mapas o funciones que preservan la *estructura* del grupo y una *topología* corresponde a un subconjunto del conjunto potencia de un cierto conjunto que cumple ciertos axiomas. Puede ver el capítulo 3 para mayores detalles. Cada elemento del grupo es simultáneamente un punto en una variedad y actúa en otros elementos como una *transformación de punto* (por su interpretación como punto dentro de una variedad).

En general, un grupo de Lie  $G$ , como variedad, tiene más de una componente *conectada*. La componente conectada al elemento identidad está denotada como  $G_0$  y corresponde a una variedad *suavemente conectada*. La propiedad analítica y el hecho de que los elementos estén parametrizados por una variable continua nos permite escribir los elementos de la componente mencionada como una función analítica de la forma

$$g(\theta^j) = e^{iT_j\theta^j}, \quad (2.2)$$

para  $j = 1, \dots, n$ , en donde  $n$  se conoce como la *dimensión del grupo*,  $n = \dim(G)$ , y los  $T_j$  son los *generadores* del grupo.

A partir de la relación de clausura, es posible ver que el *corchete de Lie*  $[T_j, T_k]$  de dos generadores  $T_j$  y  $T_k$  (que se comporta como el *conmutador*  $[A, B] \equiv AB - BA$ ) cumple la siguiente condición,

$$[T_j, T_k] = if_{jk}{}^l T_l. \quad (2.3)$$

Los corchetes de Lie definen un *álgebra de Lie* (que se puede interpretar como un conjunto de objetos sujetos a las condiciones de clausura, asociatividad, existencias de elementos identidad e inverso, pero dotados con el corchete de Lie como operación *del álgebra*, sujetos al cumplimiento de la ecuación 2.3). Los coeficientes  $f_{jk}{}^l$  son constantes, conocidas como *constantes de estructura*, que definen las propiedades algebraicas de su grupo de Lie correspondiente.

Entre los grupos de Lie más relevantes para el trabajo presente podemos destacar los siguientes:

- El grupo general lineal  $GL(n, \mathbb{K})$ : Corresponde al conjunto de todas las matrices  $n \times n$  con cada una de sus componentes perteneciendo al campo  $\mathbb{K}$  y determinante no nula, es decir, los elementos no singulares de  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ ; dotados junto con la multiplicación matricial como operación binaria del grupo. Este grupo también puede representar el conjunto de todas las transformaciones lineales en un espacio vectorial  $V = V_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n$ . De lo anterior puede verse que la variedad asociada al grupo  $GL(n, \mathbb{K})$  es una *subvariedad* de  $\mathbb{K}^{n^2}$ .

Un resultado importante asociado a los grupos de Lie que conviene mencionar es el siguiente: **Todo subgrupo continuo de un grupo de Lie es un grupo de Lie.**

El enunciado anterior implica justamente que subgrupos relevantes pueden obtenerse restringiendo el grupo general lineal al subconjunto de elementos preservando ciertas

propiedades del espacio  $V_{\mathbb{K}}$  en el cual actúan. Tres propiedades que resultan importantes de preservar en  $V_{\mathbb{K}}$  son: (i) el volumen, (ii) la norma y (iii) la orientación.

- El grupo especial lineal  $SL(n, \mathbb{K})$ : Corresponde al subgrupo de  $GL(n, \mathbb{K})$  con elementos de determinante unitaria que preservan el volumen. Dependiendo del campo  $\mathbb{K}$ , pueden haber distintos tipos de grupos *especiales*. Por ejemplo, dos casos de interés corresponden a  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , en el que los grupos  $SL(n, \mathbb{R})$  y  $SL(n, \mathbb{C})$  comprenden grupos de transformaciones que preservan el volumen en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$ , respectivamente, definidos por el subconjunto de matrices de  $GL(n, \mathbb{K})$  con determinante igual a uno, es decir,  $\det(M) = +1$ .
- Los grupos unitarios  $U(n, \mathbb{K})$  y  $SU(n, \mathbb{K})$ : Corresponden a los grupos de transformaciones que preservan *métricas sesquilineales* (es decir, *funciones de distancia* en el que uno de sus dos argumentos es intercambiado por el conjugado del original). Como subgrupos de  $GL(n, \mathbb{K})$ , comprenden el conjunto de todas las matrices de transformación  $U$  que son *unitarias*, es decir, que cumplen,  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ , en donde  $U^\dagger$  representa el transpuesto conjugado de  $U$ . Si no se impone restricción alguna sobre el determinante de los elementos del grupo anterior, éste se llama  $U(n, \mathbb{K})$ , mientras que la restricción adicional  $\det(U) = +1$  hace que el grupo sea el grupo unitario especial  $SU(n, \mathbb{K})$ .
- Los grupos ortogonales  $O(n, \mathbb{K})$  y  $SO(n, \mathbb{K})$ : Corresponden a los grupos de transformaciones que preservan *métricas simétricas bilineales* (es decir, *funciones de distancia* que dependen de dos argumentos y que son simétricas bajo el intercambio de éstas). Como subgrupo de  $GL(n, \mathbb{K})$ , comprenden el conjunto de todas las matrices de transformación  $O$  que son *ortogonales*, es decir, que cumplen,  $OO^\top = O^\top O = \mathbb{1}$ , en donde  $O^\top$  representa el transpuesto de  $O$ . Tanto los elementos de  $O(n, \mathbb{K})$  como  $SO(n, \mathbb{K})$  tienen  $|\det(O)| = +1$ , sin embargo la determinante de algunos elementos de  $O(n, \mathbb{K})$ , asociados a *inversiones*, puede ser igual a  $-1$ , lo que no ocurre con *todos* los elementos de  $SO(n, \mathbb{K})$  para los que su determinante es siempre igual a  $+1$ .

## 2.3. Clases de conjugación de grupos

Una forma para poder subdividir elementos de un grupo en subcategorías o *clases* se puede realizar a través de la operación de *conjugación*, la cual es un homeomorfismo análogo a las operaciones de *transformaciones de similaridad* en álgebra lineal. Se dice que, en un grupo  $G$ , dos elementos  $g_a, \tilde{g}_a \in G$  son *conjugados* el uno al otro si existe un  $g$  tal que

$$\tilde{g}_a = gg_ag^{-1}. \tag{2.4}$$

Algo que vale la pena señalar es el hecho de que la multiplicación de elementos del grupo es invariante bajo la conjugación (de forma análoga a como la traza y la determinante de matrices son invariantes bajo transformaciones de similaridad). La conjugación, además, preserva la descomposición por ciclos del grupo de permutación  $S_n$  (lo que típicamente se suele ser referido al decir que *los elementos conjugados tienen la misma estructura de ciclo*).

Como la conjugación preserva la estructura de ciclo, esta característica es utilizada para reagrupar elementos del grupo en subconjuntos con propiedades similares, conocidos como

*clases*: La descomposición de un grupo en clases es una partición del grupo  $G$ , en donde *los elementos dentro de cada pieza de la partición se relacionan por conjugación*. Matemáticamente, una clase  $C_a$  se define por la expresión

$$C_a = \{gg_a g^{-1} | g_a \text{ fijo}, g \in G\} \quad (2.5)$$

Si el orden del grupo es  $n = \text{ord}G$ , el número de clases,  $k$ , siempre  $k \leq n$ . Es notable además que la identidad,  $e$ , es por sí solo una clase.

## 2.4. Representaciones de grupos finitos

Una *representación de un grupo*  $D$  es un homeomorfismo desde el grupo  $G$  sobre el conjunto de *endomorfismos* (o conjuntos de matrices, en este caso) asociados al espacio vectorial  $V$ , es decir,  $D : G \rightarrow \text{End}(V)$ . Así, para un espacio vectorial  $V$  dado, si uno dispone de un conjunto de matrices sobre  $V$ , es decir,  $D \in \text{End}(V)$ , tal que:

- Hay una matriz  $D(g)$  (no necesariamente diferente), asociado a cada elemento  $g \in G$  del grupo,
- $\forall g_j, g_k \in G$ , sus matrices asociadas satisfacen  $D(g_j)D(g_k) = D(g_j g_k)$ ,

en ese caso entonces el conjunto de matrices se dice que es una representación del grupo  $G$ .

De la definición anterior queda claro que la identidad  $e$  del grupo debe asociarse a la identidad de  $\text{End}(V)$ , es decir,  $D(e) = \mathbb{1}$ . Además la *dimensión de la representación* se define como la dimensión del espacio vectorial sobre el que actúa, es decir,  $\dim(V)$ .

Vale la pena tener presente que el espacio vectorial  $V$ , referido arriba, se supone abarcado por una base  $N$ -dimensional  $\{|i\rangle\}$  satisfaciendo *ortogonalidad*, es decir,  $\langle i|j\rangle = \delta^i_j$  y *clausura*,  $\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$ .

### 2.4.1. Tipos de representaciones

Un mismo grupo  $G$  puede tener asociadas, en principio, infinitas y diferentes formas o *tipos* de representaciones. Entre las más relevantes tenemos las siguientes:

- La representación *trivial*: Es una representación 1-dimensional en la que todos los elementos del grupo son *mapeados* al número uno, es decir,  $\forall g \in G : D(g) = 1$ .
- La representación *regular*  $D_R$ : Es una representación en la que cada elemento  $g$  del grupo  $G$  se asocia a un *vector base* de  $V$ . La dimensión de esta representación es igual al orden del grupo  $G$ , es decir,  $\dim(D_R(G)) = \dim(V) = \text{ord}(G)$ .
- Representaciones *unitarias*: Son representaciones para las cuales, los endomorfismos  $D(g)$  son operadores *unitarios* en  $V$ ,  $\forall g \in G$ .
- Representaciones *reducibles*: Son representaciones para las que el espacio vectorial  $V$  tiene *subespacios invariantes* bajo la acción de la representación  $D$  que se esté analizando.

Cuando una representación es reducible, se puede definir un operador proyector  $P$  en el subespacio invariante, tal que

$$PD(g) = D(g)P, \quad \forall g \in G.$$

Como  $P$  es un proyector, en el sentido de que  $P^2 = P$ , entonces su acción por izquierda en la ecuación anterior da

$$PD(g)P = D(g)P, \quad \forall g \in G.$$

- Representaciones *irreducibles*: Son representaciones que pueden considerarse como una *base* para las demás representaciones (en el sentido de que éstas puedan escribirse como una *suma directa* de representaciones irreducibles). A partir de la definición de representaciones reducibles, se puede establecer que una representación es irreducible si su acción sobre el espacio vectorial  $V$  no deja subespacios invariantes.
- Representaciones *completamente reducibles*: Son representaciones reducibles en las que la representación  $D$  que se analiza puede partirse o *descomponerse* en una *suma directa* de representaciones irreducibles  $D_i$  con  $i = 1, 2, \dots, r$ , es decir,

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_r, \quad (2.6)$$

en cuyo caso, el espacio vectorial  $V$  admite la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r,$$

en donde  $V_i$  es el espacio vectorial en el que la representación irreducible  $D_i$  actúa. Toda representación completamente reducible puede ser escrita como una *matriz diagonal por bloques*.

- Representaciones *equivalentes*: Son aquellas que se relacionan a través de una matriz no singular  $S$ . Así,  $D$  y  $D'$  son representaciones equivalentes si  $\forall g \in G, D'(g) = S^{-1}D(g)S$ .

## 2.5. Caracter de una representación

En la *teoría de la representación* (que es la rama de la matemática asociada al estudio de las representaciones), la traza de una representación  $D_a$  se conoce como *caracter*,  $\chi_a(g) = \text{Tr}(D_a(g))$ . El caracter de una representación, aprovechando su propiedad de invarianza bajo transformaciones de similaridad, permite establecer una *descomposición de la representación* (si es que esta es reducible) en términos de representaciones irreducibles bajo la partición del grupo a través de sus clases de conjugación (debido a que esta operación se comporta de forma análoga a una transformación de similaridad actuando sobre la traza de una matriz).

Lo anterior permite establecer *relaciones de ortogonalidad* entre los caracteres de diferentes representaciones y pensar en éstos como *elementos de una base* que permiten escribir los caracteres de representaciones reducibles como una *combinación lineal* de caracteres de representaciones irreducibles, [12–20]. Si utilizamos las letras latinas minúsculas desde la  $a$  hasta

la  $h$  para etiquetar los subíndices de un caracter asociados a representaciones diferentes; y las letras desde la  $i$  en adelante para etiquetar los subíndices de un caracter asociados a clases de conjugación diferentes, las relaciones de ortogonalidad pueden escribirse de la forma siguiente

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n_c} n_i \chi_{ai} \chi_{bi} = \{\chi_a, \chi_b\} = \delta_{ab} \quad y \quad (2.7)$$

$$\sum_{a=1}^{n_r} \chi_{ai} \chi_{aj} = \frac{N}{n_i} \delta_{ij} \quad \text{con} \quad N = \sum_{i=1}^{n_c} n_i, \quad (2.8)$$

En donde  $N$  representa el orden del grupo (o la dimensión de éste, en el contexto de grupos continuos) considerado,  $n_c$  corresponde a la cantidad total de clases de conjugación del grupo,  $n_r$  corresponde al total de representaciones irreducibles que tiene el grupo (y que puede verificarse que se relaciona con  $n_c$  como  $n_c = n_r$ ). La notación  $\{\chi_a, \chi_b\}$  representa un *corchete entre el caracter de la representación  $a$  y el caracter de la representación  $b$* , como típicamente es conocido; y se interpreta como una especie de *producto interno* entre caracteres de diferentes representaciones.

La notación detallada en el párrafo anterior permite, por decirlo de algún modo, *proyectar* el caracter  $\chi(g)$  de una representación reducible de un elemento  $g$  de un grupo  $G$  en una *base* generada y abarcada por caracteres de representaciones irreducibles. Si consideramos una representación  $D$  de un grupo  $G$  conteniendo la  $a$ -ésima representación irreducible con multiplicidad  $n_a$ , es decir,  $D = \sum_a n_a D_a$ , entonces

$$\chi(g) = \sum_a n_a \chi_a(g) \quad \text{con} \quad \{\chi, \chi_b\} = \sum_a n_a \{\chi_a, \chi_b\} = n_b, \quad (2.9)$$

En donde  $n_b$  representa la multiplicidad de la representación irreducible  $D_b$ . Además

$$\{\chi, \chi\} = \sum_{a,b} n_a n_b \{\chi_a, \chi_b\} = \sum_a n_a^2. \quad (2.10)$$

Un caso particularmente interesante se obtiene cuando se aplican las ecuaciones (2.9) y (2.10) para proyectar el caracter de una representación regular  $R$ . En este caso se puede demostrar que  $\chi(g \neq e) = 0$ ,  $\chi_R(e) = N$  y  $\{\chi_R, \chi_a\} = n_a$ . A partir de las relaciones anteriores, se puede ver que si se descompone esa representación reducible (regular) en términos de representaciones irreducibles  $n_a$ -dimensionales (con multiplicidad  $n_a$ ), entonces

$$N = \sum_a n_a^2, \quad (2.11)$$

La cual es una relación que puede aplicarse siempre que la representación reducible tenga dimensión igual al orden del grupo, es decir, sea *regular*.

## 2.6. Descomposición de representaciones reducibles

El cálculo de caracteres y los diagramas Young, junto con algunos objetos *característicos* de cada grupo, nos permiten descomponer representaciones (reducibles) de éstos a través de representaciones irreducibles correspondientes al grupo considerado.

Como se mencionó en la sección 2.2, los diagramas y tableau de Young permiten descomponer representaciones regulares del grupo de permutaciones  $S_k$  a través de clases de conjugación, por sus correspondientes ciclos de descomposición. Una forma para determinar la *dimensión*  $\Delta_Y$  de cada representación irreducible (como alternativa al conteo de los tableau estándar de Young asociado a cada diagrama  $Y$ ) corresponde al uso de la siguiente fórmula *de Hook*, [11]:

$$\Delta_\lambda = \frac{k!}{|\lambda|}, \quad (2.12)$$

En donde  $|\lambda|$  es un *número* calculado con una *regla de Hook*:  $|\lambda|$  corresponde al producto de todos los números insertados en cada caja del diagrama de Young  $\lambda$ , de forma que en cada caja, su número correspondiente sea igual al total de cajas a la derecha y abajo de la caja considerada, más uno (por la propia caja en sí). Así, los ciclos de descomposición determinan cada una de las representaciones irreducibles que pueden utilizarse para descomponer una descomposición regular del grupo  $S_k$  y la dimensión de estas representaciones irreducibles puede calcularse a partir de la ecuación (2.12), de forma que esta representación regular tenga una descomposición de la forma dada en la ecuación (2.6).

Tal y como se mencionó al principio de la sección 2.5, el cálculo de caracteres también permite determinar la descomposición de una representación reducible de un grupo en términos de representaciones irreducibles. En el caso de representaciones regulares, tal y como ocurre con el grupo de permutaciones, las clases de conjugación establecen la cantidad total de las representaciones irreducibles asociadas al grupo y la ecuación (2.11) establece la dimensión y la multiplicidad de cada representación irreducible en la descomposición.

Para *representaciones de producto tensorial* de un grupo, además de que con la técnica de diagramas de Young se pueda obtener una descomposición en representaciones irreducibles por las simetrías de sus índices (con la representaciones del grupo de permutación), la técnica de caracteres también puede ser utilizada a través del cálculo de éstos, asociado a cada representación (irreducible) para obtener el producto tensorial. Si  $V_a$  y  $V_b$  son espacios vectoriales con dimensión  $n_a$  y  $n_b$ , respectivamente; y  $D_a$  y  $D_b$  son representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo  $G$  que actúa en  $V_a$  y  $V_b$ , respectivamente, la *representación de producto tensorial*  $D_a \otimes D_b$  del grupo  $G$  que actúa en el espacio vectorial  $n_a \times n_b$ -dimensional  $V_a \otimes V_b$  es una representación con regla operacional

$$(D_a \otimes D_b)(g) |v_a\rangle \otimes |v_b\rangle = D_a(g) |v_a\rangle \otimes D_b(g) |v_b\rangle,$$

Con  $v_a \in V_a$  y  $v_b \in V_b$ . Como el caracter de la representación  $D_a \otimes D_b$  puede ser calculado como  $\chi_a \cdot \chi_b$ , por la regla operacional anterior, se puede utilizar el corchete entre caracteres de representaciones para encontrar la multiplicidad  $r_\alpha$  de cada representación irreducible  $D_\alpha$  del grupo con la que puede descomponerse el producto tensorial, es decir,

$$\{\chi_{a \times b}, \chi_\alpha\} = r_\alpha. \quad (2.13)$$

En este caso, antes de aplicar la ecuación (2.13), conviene realizar una *tabla de caracteres* de forma que se conozca el caracter  $\chi_{\alpha_j}$  de cada clase  $j$  de conjugación del grupo en todas sus representaciones irreducibles  $D_\alpha$ , para desarrollar la suma en la ecuación.

La descomposición de grupos continuos como  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $SU(n, \mathbb{K})$  y  $SO(n, \mathbb{K})$  (además de otros grupos continuos mencionados anteriormente) puede desarrollarse mediante representaciones de diagramas de Young. Como todos los grupos en cuestión son subgrupos de  $GL(n, \mathbb{K})$ ,

todos son invariantes bajo transformaciones lineales que, en general, si consideramos un  $r$ -tensor covariante de  $r$  índices, pueden asociarse a permutaciones de sus índices, por lo que se pueden utilizar algunos argumentos de la descomposición del grupo  $S_r$  para encontrar la descomposición de estos grupos continuos, [21].

En primer lugar, el argumento mencionado en el párrafo anterior implica que las representaciones irreducibles de  $S_k$  y  $GL(n, \mathbb{K})$  coinciden para  $k$ -tensores covariantes siempre que los tableau estándar de Young utilizados para tal efecto no tengan más de  $n$  filas, [11]. Otra cuestión que puede demostrarse es que, dado que la determinante de los elementos de los grupos  $SL(n, \mathbb{K})$  y  $SU(n, \mathbb{K})$  es  $+1$ , las representaciones irreducibles de  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $SL(n, \mathbb{K})$  y  $SU(n, \mathbb{K})$  coinciden y son independientes entre sí, [21], (tomando en cuenta que, dada las restricciones de determinante para los grupos  $SL$  y  $SU$ , los tableau de Young de mas de  $n - 1$  filas no son admisibles para desarrollar la descomposición). Lo anterior implica que las dimensiones de estas representaciones se pueden calcular de la misma forma. Una expresión para determinar la dimensión  $d_\lambda$  de la representación irreducible asociada al diagrama de Young  $\lambda$  está dada como, [11]:

$$d_\lambda = \frac{f_\lambda(n)}{|\lambda|}, \quad (2.14)$$

En donde  $f_\lambda(n)$  es un polinomio obtenido por el diagrama de Young  $\lambda$  multiplicando los números escritos en las cajas de  $\lambda$ , considerando que:

- La caja superior izquierda contiene un  $n$ .
- Los números en una fila incrementan por una unidad cuando se leen de izquierda a derecha.
- Los números en una columan decremantan por uno cuando se leen desde arriba hasta abajo.

Así, si  $k$  es el número de cajas en  $\lambda$ ,  $f_\lambda(n)$  es un polinomio en  $n$  de grado  $k$ . Otra forma para calcular  $d_\lambda$  se presenta en la sección 6.2 a manera de ilustrar que existen varias maneras para calcular la dimensión de una representación irreducible de  $GL(n, \mathbb{K})$ .

Para obtener las representaciones irreducibles de  $SO(n, \mathbb{K})$  se debe tener presente que este subgrupo de  $GL(n, \mathbb{K})$  dispone de la operación *traza*, además de las transformaciones lineales que permiten obtener representaciones irreducibles para  $GL(n, \mathbb{K})$ . Lo anterior implica que una descomposición adicional de las representaciones que son irreducibles para  $GL(n, \mathbb{K})$  puede realizarse a través de esta nueva operación, si es que estas representaciones tienen traza no nula. Por el contrario, representaciones irreducibles para  $GL(n, \mathbb{K})$  con traza nula son representaciones irreducibles también para  $SO(n, \mathbb{K})$ . De este modo, las representaciones irreducibles de  $GL(n, \mathbb{K})$  que no tienen traza y aquellas representaciones sin traza que resultan de la descomposición de las representaciones (irreducibles para  $GL(n, \mathbb{K})$  que tienen traza no nula pueden ser representadas también con los diagramas de Young asociados a sus representaciones correspondientes de  $GL(n, \mathbb{K})$ . La dimensión de las representaciones irreducibles sin traza de  $SO(n, \mathbb{R})$  puede determinarse a partir de la resta de la dimensión de la representación irreducible de  $GL(n, \mathbb{K})$  y la cantidad total de trazas que pueden calcularse para dicha representación, considerando que las transformaciones lineales en general y el cálculo de trazas conmutan para

los objetos sobre los que actúan los elementos de  $SO(n, \mathbb{K})$  conmutan y que un  $r$ -tensor covariante, por ejemplo, tiene  $r(r-1)/2$  trazas disponibles. Expresiones explícitas para el cálculo de las dimensiones de las representaciones irreducibles in traza de  $SO(n, \mathbb{K})$  pueden hallarse en [11] y [22].

## 2.7. Homeomorfismo de los grupos $SU(2, \mathbb{C})$ y $SO(3, \mathbb{R})$

A partir de la definición de los grupos unitarios, se puede demostrar que los generadores de estos grupos deben corresponder a matrices  $H$  hermíticas, es decir, aquellas que cumplen  $H = H^\dagger$ . Además de lo anterior, puede verse que el conjunto de la identidad con las *matrices de Pauli*  $\sigma^i$  es decir,  $(\mathbf{1}, \sigma^i)$  con  $i = 1, 2, 3$  conforma el conjunto de generadores para  $U(2, \mathbb{C})$  y que las matrices de Pauli conforman el conjunto de generadores para  $SU(2, \mathbb{C})$  dado que la condición de que sus elementos tengan determinante igual a  $+1$ , se traduce en que la traza de sus generadores tenga traza nula.

A continuación, vale la pena mencionar que cualquier matriz hermítica  $M$  puede ser escrita como una combinación real lineal de las matrices de Pauli y la matriz identidad como sigue

$$M = \frac{1}{2}\text{Tr}(M)\mathbf{1} + \text{Tr}(\sigma_i M)\sigma_i,$$

De donde puede verse que una combinación real de las tres matrices de Pauli tiene traza nula y es hermítica. Suponga ahora que  $x_i$  con  $i = 1, 2, 3$  con las componentes de un vector  $\vec{r}$  y una  $S$  una matriz tal que

$$S = \vec{\sigma} \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i x^i \quad \text{con} \quad x_i = \frac{1}{2}\text{Tr}(S\sigma_i), \quad \det(S) = -\sum_{i=1}^3 x_i^2 = -|\vec{r}|^2$$

Si consideramos la transformación de similaridad  $\hat{S} = USU^{-1}$ , tal que  $U$  es un elemento de  $SU(2, \mathbb{C})$ , la matriz resultante  $\hat{S}$  será una matriz hermítica cumpliendo  $\det \hat{S} = \det S$ . De forma análoga a lo que se planteó anteriormente para  $S$ , bien podríamos establecer que

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \hat{x}_i, \quad \text{con} \quad \hat{x}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$$

En donde  $R_{ij}$  representan los elementos de una matriz real ortogonal  $R$  que pertenece, en general al grupo  $O(3, \mathbb{R})$  y que implica que las normas de los vectores  $\vec{r}$  y  $\hat{\vec{r}}$  son iguales, por definición de los grupos ortogonales. Si suponemos un cambio continuo de  $U$  desde la matriz identidad, esto implica necesariamente la variación continua de  $R$  desde su correspondiente matriz identidad y por ende que  $R$  debería ser un elemento de  $SO(3, \mathbb{R})$ . Las relaciones entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\hat{\vec{r}}$  y sus correspondientes matrices  $S$  y  $\hat{S}$  establecen una correspondencia uno-a-uno entre  $\pm U \in SU(2, \mathbb{C})$  y  $R \in SO(3, \mathbb{R})$  de la forma

$$U\sigma_i U^{-1} = \sum_{j=1}^3 \sigma_j R_{ij}.$$

Como la correspondencia anterior es invariante bajo la multiplicación de los elementos del grupos, esto implica la existencia de homeomorfismo entre  $SU(2, \mathbb{C})$  y  $SO(3, \mathbb{R})$ , es decir,

$$SO(3, \mathbb{R}) \sim SU(2, \mathbb{C}). \quad (2.15)$$



# Geometría diferencial

En este capítulo se introducen las ideas y objetos más relevantes con los cuales podemos caracterizar y construir el *espacio* con el que pretendemos modelar el *espaciotiempo* que analizamos en capítulos posteriores. Se detallan con cierto nivel de profundidad las definiciones de topología, espacios topológicos, variedades, vectores, covectores, tensores, conexiones y métricas haciendo principal énfasis en los últimos objetos dado que son los que más estudiamos a lo largo de este trabajo. La discusión mostrada en este capítulo esta basada en las referencias [23–26] y [27].

## 3.1. Topologías y espacios topológicos

El *espaciotiempo* puede entenderse, en primera aproximación, como el conjunto de todas las coordenadas (espaciales) e instantes de tiempo (o *coordenadas temporales*) con el que pueden describirse todos los *eventos* en el Universo, dotado de cierta *estructura* que permite *establecer mediciones*. La primera estructura con la que podemos construir nuestro espaciotiempo es la *topología*.

Sean los conjuntos  $X$  y  $\mathcal{O} \in P(X)$  en donde  $P(X)$  representa el *conjunto potencia* del conjunto  $X$  (en donde el conjunto potencia de  $X$  corresponde al conjunto que tiene como elementos los *subconjuntos* de  $X$ ). Podemos establecer que  $\mathcal{O}$  es una *topología* si:

- Tanto el conjunto vacío como  $X$  pertenecen a  $\mathcal{O}$ .
- Para todo par de subconjuntos  $U, V \in \mathcal{O}$  del  $\mathcal{O}$ , su intersección  $U \cap V$  es un elemento de  $\mathcal{O}$ , es decir,  $U \cap V \in \mathcal{O}$ .
- Considerando un *colección* arbitraria de conjuntos  $U_\alpha \in \mathcal{O}$  con  $\alpha \in \mathcal{A}$  formando parte de un conjunto de índices, su unión es un elemento de  $\mathcal{O}$ , es decir,  $(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha) \in \mathcal{O}$ .

Todo conjunto  $X$  dotado con una topología  $\mathcal{O}_X \subseteq P(X)$ , es decir la *dupla*  $(X, \mathcal{O}_X)$  conforma un *espacio topológico*. Una topología de interés, dada su utilidad, corresponde a la *topología estándar*  $\mathcal{O}_{std}$  que, junto con el conjunto  $\mathbb{R}^n$ , forma el espacio topológico asociado al espacio *euclídeano*.

La topología estándar  $\mathcal{O}_{std}$  comprende todo conjunto  $U \in \mathcal{O}_{std}$  para el que si y solo si  $p \in U$ , entonces existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que la *bola abierta* en el punto  $p$   $\mathcal{B}_r(p) \subseteq U$ . La bola abierta en un punto  $p \in \mathbb{R}^d$  es el conjunto

$$\mathcal{B}_r(p) = \left\{ (q_1, q_2, \dots, q_d) \mid \sum_{i=1}^d (q_i - p_i)^2 < r^2 \right\} \quad \text{con } r \in \mathbb{R}^+$$

Un subconjunto  $U \subseteq M$  de un conjunto  $M$  se conoce como *conjunto abierto* si  $U \in \mathcal{O}_M$  siendo  $\mathcal{O}_M$  una topología de  $M$ . Además el abierto  $U(x)$  es un *vecindario* o entorno de  $x$  si  $x \in U(x)$ . El concepto de vecindario es importante dado que nos permite tener una noción de la idea de *cercanía* a un punto. Respecto a espacios topológicos asociados al espacio euclideo, un punto  $a$  está *más cerca* de un punto  $b$  que otro punto  $c$  si  $\sum_i (a_i - b_i)^2 < \sum_i (c_i - b_i)^2$ .

Otra idea u objeto que nos resulta útil a la hora de realizar mediciones o parametrizar un fenómeno físico en nuestro espaciotiempo es la del *homeomorfismo*, que se definió anteriormente en la sección 2.2. Ahora detallaremos un poco más esta idea.

Sea  $f : X \rightarrow Y$  un *mapa* (o función como se mencionó también anteriormente) que relaciona cada elemento  $x \in X$  con un elemento  $y = f(x) \in Y$ . Si para todos los elementos  $y \in Y$  del conjunto de llegada, existe al menos un elemento  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ , se dice que el mapa es *sobreyectivo*. Si además  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ , es decir cada elemento del conjunto de llegada o *imagen* tiene una única *preimagen* o elemento correspondiente del conjunto de partida del mapa, se dice que el maa es *inyectivo* y si un mapa es tanto sobreyectivo como inyectivo entonces se dice que es *biyectivo*.

Además, un mapa entre dos espacios topológicos  $(X, \mathcal{O}_X)$  y  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ,  $f : X \rightarrow Y$  es *continuo* con respecto  $\mathcal{O}_X$  y  $\mathcal{O}_Y$ , si  $\forall U \in \mathcal{O}_Y \implies \text{preim}_f(U) \in \mathcal{O}_X$ .

Un mapa entre dos espacios topológicos  $(X, \mathcal{O}_X)$  y  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  es un *homeomorfismo* si

- $f$  tiene asociado un mapa inverso  $f^{-1}$ , tal que  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Esta condición necesita que  $f$  sea biyectiva.
- Tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son mapas continuos respecto a  $\mathcal{O}_X$  y  $\mathcal{O}_Y$ .

Cuando existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos se dice que estos son *homeomórficos*.

## 3.2. Variedades

Como necesitamos asociar los puntos de nuestro espaciotiempo a espacios  $\mathbb{R}^n$  (así como la superficie de la Tierra puede ser representada por una sección  $\mathbb{R}^2$  a través de un atlas), introducimos ahora el concepto de *variedad* con el fin de poder definir más objetos y poder dotarlo de más estructura. Antes de presentar la definición de variedad, definimos primero algunos objetos y propiedades auxiliares para tal fin.

Si  $C \subseteq \mathcal{O}$  es una colección de abiertos, entonces  $C$  se conoce como *cubierta abierta* si la unión de los conjuntos en  $C$  *recubre* el espacio topológico por entero.

Un espacio topológico  $(M, \mathcal{O}_M)$  es un *espacio topológico de Hausdorff* si para cualquier par de puntos  $p$  y  $q$  con  $p \neq q$ , existe una vecindad  $U$  de  $p$  y una vecindad  $V$  de  $q$  de tal forma que su intersección es vacía, es decir,  $\exists U \in \mathcal{O}_M \wedge V \in \mathcal{O}_M : U \cap V = \emptyset$ , con  $p \in U$  y  $q \in V$ . Si consideramos un espacio topológico  $(M, \mathcal{O}_M)$  con una cubierta  $C$ , una cubierta abierta  $\bar{C}$ , de forma que  $\forall U \in C, \exists \bar{U} \in \bar{C}$ , con  $\bar{U} \subseteq U$ , se llama *refinamiento abierto*. Un espacio topológico  $(M, \mathcal{O}_M)$  es *paracompacto* si toda cubierta abierta  $C$  tiene un refinamiento abierto  $\bar{C}$  que es localmente finito.

Un *parche*  $U$  es un subconjunto abierto en una topología  $\mathcal{O}$ , es decir  $U \in \mathcal{O}$ . Los parches  $U$  en un espacio topológico  $(M, \mathcal{O}_M)$ , es decir,  $U \in \mathcal{O}_M$ , se equipan con mapas  $x : U \rightarrow x(U)$

sobre bolas abiertas en  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{O}_{std})$ , es decir,  $x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ . El par  $(U, x)$  se conoce como una *carta coordenada* para  $M$ .

Un espacio topológico paracompacto de Hausdorff  $(M, \mathcal{O}_M)$  se conoce como una *variedad topológica  $d$ -dimensional* (o *variedad* simplemente) si, para todo punto  $p \in M$ , existe una vecindad (abierto)  $U$  de  $p$ , es decir,  $U \in \mathcal{O}_M$  con  $p \in U$ ; y un homeomorfismo  $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  entre  $(M, \mathcal{O}_M)$  y  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{O}_{std})$ .

Las definiciones anteriores permiten interpretar a las imágenes  $x(p)$  de los elementos  $p \in M$  de la variedad  $M$  como *coordenadas* en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^d$ , por lo que el mapa  $x$  se conoce como el *mapa de la carta* y está compuesto por  $d$  *mapas coordinados*, es decir,  $x(p) = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ . Un *atlas*  $\mathcal{A}$  es la colección de todas las cartas, es decir,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  siendo  $A$  el conjunto de índices y considerando que  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$  en donde  $M$  es la variedad.

Consideremos ahora un punto  $p$  común a dos abiertos  $U$  y  $V$ , es decir, para estos abiertos existe una región de traslape  $U \cap V \neq \emptyset$ . Este punto puede ser descrito desde la perspectiva de dos cartas diferentes,  $(U, x)$  y  $(V, y)$  y por ende a partir de mapas *compuestos* de la forma  $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , conocidos como *mapas de transición*. Estos mapas permiten describir un mismo punto  $p$  perteneciente a la región  $U \cap V$  a través de conjuntos diferentes de coordenadas.

Las variedades topológicas consideran la cualidad de *continuidad* que puede asociarse a los elementos del espacio. Además de lo anterior, una variedad también puede ser *suave* pero esto requiere una noción de *diferenciabilidad*. Un mapa *suave* es un mapa infinitamente diferenciable, es decir, un  $C^\infty$ -mapa. Un *difeomorfismo* es un homomorfismo en el que el mapa que lo define es suave. Dos cartas son *suavemente compatibles* si el mapa de transición entre ellas es un *difeomorfismo*. Un *atlas maximalmente suave* es un atlas que contiene toda carta que es suavemente compatible con cada una de las otras cartas que lo conforman y así, una *variedad suave* es la dupla consistiendo de un conjunto  $M$  y un atlas maximalmente suave en  $M$ .

### 3.2.1. Vectores y covectores

Dado que las variedades pueden no corresponder a espacios *planos*, en Geometría diferencial típicamente se introducen los objetos que en este contexto se conocen como *vectores* a través del concepto de *velocidad*, a la que se dota con la cualidad de ser *tangente* a su trayectoria correspondiente.

Sea el triplete  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  una variedad suave, siendo  $\mathcal{O}_M$  y  $\mathcal{A}_M$  la topología y el atlas asociado al conjunto  $M$ . Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  una trayectoria al menos de clase  $C^1$ , tal que  $\gamma(\lambda_0) = p$  con  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  y  $p \in M$ . La *velocidad* de la trayectoria  $\gamma$ , en el punto  $p$ , es un mapa *lineal* (es decir, *linear* en sus argumentos) que actúa sobre las funciones (suaves)  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} v_{\gamma,p} : C^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto v_{\gamma,p}(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda_0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

En donde el conjunto  $C^\infty(M)$  es el espacio *vectorial* (es decir, un conjunto dotado de una operación suma entre sus elementos y una operación producto con elementos de  $\mathbb{R}$ ) de las funciones infinitamente diferenciables (suaves).

El conjunto  $T_p M = \{v_{\gamma,p} \mid \text{para todas las curvas suaves } \gamma \text{ a través de } p\}$  de las velocidades de todas las curvas que pasan a través de un punto  $p$  en la variedad  $M$  es un espacio vectorial

conocido como *espacio tangente* de la variedad  $M$  en el punto  $p$ . Para escribir los vectores (velocidad) *de forma explícita*, se utiliza una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_{suave}$ , que a través de la regla de la cadena nos permite expresar lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 v_{\gamma,p}(f) &= (f \circ \gamma)'(\lambda_0) = ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))'(\lambda_0) \\
 &= ((x \circ \gamma)')^i(\lambda_0) \cdot (f \circ x^{-1})'_i(x(p)) \\
 &= ((x \circ \gamma)')^i(\lambda_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})'_i(x(p)) \\
 &= V^i \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^i} f \right)_p \\
 &= V[f].
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Los escalares  $V^i \equiv ((x \circ \gamma)')^i$  son las componentes del vector (velocidad)  $V$  en la carta y los objetos  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  (denotados también como  $\partial_i$ ) forman una *base* (inducida) por la carta  $(U, x)$  conocida como *base natural* (lo que establece que la dimensión del espacio tangente  $T_p M$  es igual al de la variedad sobre la cual se define). Además, la notación  $V[f] = V^i \partial_i f$ , en la que  $f$  es una función sobre  $M$ , puede interpretarse como una *derivada direccional* de  $f$  a lo largo de la dirección  $V$ , por lo que el vector velocidad  $V$ , actuando sobre la función  $f$ , representa la variación de la función  $f$  en el punto  $p$  de la trayectoria  $\gamma$  a lo largo de la dirección de  $V$ .

Como un vector  $V = V[f]$  es el mismo sin importar la carta a la cual sea referido para escribirlo explícitamente, es posible obtener una relación entre las componentes del vector expresadas por medio de diferentes cartas (ya que el cambio de carta se puede interpretar como un cambio de coordenadas para el mismo punto en una variedad). A través de un desarrollo similar al que se realizó en la ecuación (3.2), puede verse que las componentes  $V^i$  obtenidas en la carta  $(U, x)$  y las componentes  $\bar{V}^i$  obtenidas en la carta  $(\bar{U}, \bar{x})$  se relacionan como

$$\bar{V}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} V^j. \tag{3.3}$$

Tal y como se puede asociar a cada punto  $p$  de la variedad suave  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  un espacio tangente  $T_p M$ , podemos asociarle también un *espacio vectorial dual* (al espacio tangente en  $p$ )  $T_p^* M$  en el que *viven* los mapas cuyo conjunto de partida es el espacio tangente  $T_p M$  hacia los escalares  $\mathbb{R}$ , es decir,

$$T_p^* M = \{ \omega \mid \omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \}. \tag{3.4}$$

La manera en la que los elementos de  $T_p^* M$  actúan sobre los vectores que viven en  $T_p M$  está contenida en la operación *gradiente* de una función. Si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces el gradiente de  $f$  en el punto  $p \in M$  se define como

$$\begin{aligned}
 (df)_p &: T_p M \rightarrow \mathbb{R} \\
 V &\mapsto (df)_p(V) = V[f].
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Los objetos  $\omega \in T_p^* M$  se conoce como *covectores*. Por la base natural  $\{\partial_i\}$ , inducida por los vectores que viven  $T_p M$ , la operación gradiente induce una base  $\{dx^i\}$  en el  $T_p^* M$  y que es *dual* a la base  $\{\partial_i\}$  del espacio tangente, es decir,

$$(dx^i)_p(\partial_j)_p = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \langle dx^i \mid \partial_j \rangle = \delta^i_j \tag{3.6}$$

Con la base dual, podemos escribir un covector  $\omega$  en general como  $\omega = \omega_i dx^i$  y la acción de un covector general  $\omega$  sobre un vector general  $V$  puede verse como

$$\omega(V) = \langle \omega|V \rangle = \langle \omega_i dx^i | V^j \partial_j \rangle = \omega_i V^j \delta^i_j = \omega_i V^i. \quad (3.7)$$

Incluso, conociendo cómo transforman las componentes  $V^i$  de un vector, es posible ver cómo transforman las componentes de un covector. A partir de un análisis similar al utilizado para obtener la ecuación de transformación (3.3), es posible ver que las componentes  $\omega_i$  obtenidas en la carta  $(U, x)$  y las componentes  $\bar{\omega}_i$  obtenidas en la carta  $(\bar{U}, \bar{x})$  se relacionan como

$$\bar{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \omega_j. \quad (3.8)$$

### 3.2.2. Tensores

De la misma forma en la que definimos el espacio dual al espacio tangente de un punto de una variedad, es decir, como un conjunto de mapas (lineales) que van del espacio (tangente) de los vectores hacia los escalares, podemos definir un *tensor* como un mapa *multilineal* (es decir, con varios argumentos) que va desde un espacio de tipo *producto* de espacios vectoriales hacia  $\mathbb{R}$ . Así, un  $\binom{p}{q}$ -tensor sobre  $T_p M$  es un mapa de la forma

$$T : \otimes^p T_p M \otimes^q T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Tal y como se realizó con los vectores y covectores para escribirlos de forma explícita, un tensor  $T$  se puede escribir de forma explícita a través de una carta  $(U, x)$  y las bases  $\{\partial_i\}$  y  $\{dx^i\}$  como

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}. \quad (3.10)$$

Las cantidades  $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  representan las componentes del tensor. La forma en la que transforman estas componentes del tensor entre cartas puede deducirse a partir de las ecuaciones de transformación de las componentes de vectores y covectores, ecuaciones (3.3) y (3.8). De esta manera es posible ver que las componentes  $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  obtenidas en la carta  $(U, x)$  y las componentes  $\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  obtenidas en la carta  $(\bar{U}, \bar{x})$  se relacionan como

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}. \quad (3.11)$$

## 3.3. Fibrados

Con lo que hemos hecho ahora, hemos podido construir un espaciotiempo que considera las nociones de *continuidad*, *cercanía*, *suavidad* y que permite asociar a cada punto de este objeto un espacio vectorial (tangente) y un espacio dual a éste. La limitación de esto está en el hecho de que aunque hemos provisto a este espaciotiempo con una estructura de espacio vectorial, esta sólo asociado a un punto. Para poder analizar *campos físicos*, que son cantidades con la propiedad de estar definidos en cada punto de la variedad, necesitamos dotar a nuestro espaciotiempo con una estructura adicional que permita generalizar la noción de espacios tangentes a un punto. Esta estructura se conoce como *fibrado*.

Un fibrado es un triplete de la forma  $(E, M, \pi)$  en donde  $E$  representa una variedad suave comúnmente llamada *espacio total*,  $M$  representa a otra variedad suave comúnmente conocida como *espacio base* y  $\pi : E \rightarrow M$  representa un mapa sobreyectivo conocido como *mapa de proyección* que asocia cualquier punto  $p_E \in E$  a un punto  $p \in M$ . Para todo punto  $p \in M$ , la preimagen de  $p$  por el mapa de proyección  $\pi$  es conocido como la *fibra*  $F$ ,

$$F = \text{preim}_\pi(p). \quad (3.12)$$

Otro objeto importante que puede definirse ahora es una *sección* del fibrado. Una sección  $\sigma : M \rightarrow E$  de un fibrado  $(E, B, \pi)$  con  $\pi : E \rightarrow M$  es un mapa tal que  $\pi \circ \sigma = \text{Id}_B$ . Son estos objetos los que se utilizan en geometría diferencial para representar *campos vectoriales*, sin embargo, para tal fin necesitamos definir una estructura adicional asociada con la estructura de fibrado. Esta nueva estructura se define en la sección siguiente.

### 3.3.1. Fibrado tangente

Para definir campos vectoriales, de forma análoga a la construcción de los espacios vectoriales tangentes a un punto de una variedad, es evidente que sería bueno disponer de una estructura tipo fibrado, análoga a una variedad suave, en donde una fibra en cualquier punto  $p$  en la variedad  $M$  represente un espacio tangente  $T_p M$ . Esta estructura, que se comporta como una variedad suave y es un fibrado, se conoce como *fibrado tangente* a la variedad  $M$ . Para que un fibrado asociado a una variedad  $M$  sea un fibrado tangente, éste se caracteriza de la forma siguiente:

- El espacio total  $TM$  de este fibrado tangente corresponde a la unión de todos los espacios tangentes a los puntos de la variedad  $M$ , es decir,  $\forall p \in M, TM = \bigcup_p T_p M$ .
- El espacio base de este fibrado se establece igual a la variedad  $M$  de forma que la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  del fibrado sea el mapa que lleve un vector  $V \in T_p M$  al punto  $p$  de la variedad  $M$  correspondiente, es decir,  $\pi(V) = p$ .
- Para que el mapa  $\pi$  sea continuo, se requiere que dotemos al conjunto  $TM$  con una topología  $\mathcal{O}_{TM}$ . Si consideramos un conjunto  $U \in \mathcal{O}$ , podemos definir  $\mathcal{O}_{TM} = \{\text{preim}_\pi(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ .
- Para que a partir del espacio topológico  $(TM, \mathcal{O}_{TM})$  podamos construir una variedad suave, se necesita definir un atlas suave  $\mathcal{A}_{TM}$  sobre este espacio. Se sabe que es posible inducir un atlas suave en el fibrado tangente a partir del atlas (suave)  $\mathcal{A}_M$  de la variedad  $M$ . Para toda carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$  y  $\forall TU \in \mathcal{O}_{TM}$ , podemos definir  $\mathcal{A}_{TM} = \{(TU, \xi_x) \mid (U, x) \in \mathcal{A}_M\}$ , en donde el mapa  $\xi_x : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  actúa sobre los vectores  $V$  en  $TM$  de la forma siguiente:

$$\xi_x(V) = \left( (x^1 \circ \pi)(V), \dots, (x^n \circ \pi)(V), (dx^1)_{\pi(V)}(V), \dots, (dx^n)_{\pi(V)}(V) \right) \quad (3.13)$$

Al interesante del mapa  $\xi_x$  es que sus imágenes viven en un espacio  $\mathbb{R}^{2d}$  en el que las  $n$  primeras componentes de cada imagen están asociadas a las coordenadas (en  $\mathbb{R}^d$ ) del punto  $p \in M$  y las siguientes  $n$  componentes están asociadas a las  $n$  componentes del

vector  $V \in T_p M$ . Se puede verificar que con estas propiedades el atlas  $\mathcal{A}_{TM}$  es suave y por ende el triplete  $(TM, \mathcal{O}_{TM}, \mathcal{A}_{TM})$  es una variedad suave, a partir de la definición del fibrado tangente  $(TM, M, \pi)$ .

### 3.3.2. Campos vectoriales

El fibrado tangente  $TM$ , dotado de una topología  $\mathcal{O}_{TM}$ , considera la noción de continuidad con la que se deben caracterizar las estructuras y los objetos físicos en escala macroscópica. Dotado con el atlas suave  $\mathcal{A}_{TM}$ , el fibrado tangente  $TM$  además toma en cuenta la suavidad y diferenciabilidad con la que se pueden definir estructuras y mapas que puedan ser diferenciables. Este tipo de estructuras resultan análogas al concepto de *campo*, introducido por Faraday en sus trabajos sobre electrodinámica. A partir de esta analogía, podemos establecer que un *campo vectorial*  $\chi$  es una sección (suave) en el fibrado tangente  $TM$ , es decir, un mapa suave  $\chi : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ \chi = \text{Id}_M$ . De forma análoga a como se han definido espacios duales (o *cotangentes*) al espacio tangente a un punto en una variedad, bien se pueden definir también fibrados cotangentes y campos tensoriales.

## 3.4. Conexiones afines

Hasta este momento hemos dotado a nuestro espaciotiempo con la estructura suficiente como para poder definir campos vectoriales (continuos y diferenciables) en todo punto de nuestra *variedad*. A pesar de lo anterior, nos hace falta dotar a nuestro espaciotiempo con una estructura que permita establecer *comparaciones* entre objetos geométricos localizados en lugares diferentes.

En el caso de vectores, para compararlos lo que típicamente se hace es *trasladar paralelamente* los vectores hasta un origen de coordenadas en donde podemos caracterizarlos a través de sus componentes. En el caso de nuestro espaciotiempo, con toda la estructura con el que lo hemos dotado, no podemos hacer esto sin una estructura adicional: la *conexión afín*. Esta nueva estructura debería ser construída de forma que nos indique cómo cambia un vector es desplazado en cierta dirección, por lo que debería poder asociarse a una *derivada direccional* (conocida también como *derivada covariante*) que pueda operar sobre vectores (e incluso tensores de cualquier tipo) y por ende debería poder interpretarse como una generalización de la derivada de funciones (escalares)  $f$ .

Una conexión sobre una variedad (suave)  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  puede formarse a partir de un mapa  $\nabla : C^\infty(TM) \otimes C^\infty(T_q^p(M)) \rightarrow C^\infty(T_q^p(M))$ , en donde  $C^\infty(TM)$  representa una sección *suave* en el espacio  $TM$  definido en la sección anterior (y de forma análoga con los espacios tangentes  $T_q^p(M)$ ). Si  $X$  es el vector que da la dirección respecto a la cual se deriva (o se transportan los objetos), el mapa  $\nabla_X$  es una conexión si cumple las siguientes propiedades:

- $\nabla_X f = X[f], \forall f \in C^\infty(M)$ .
- $\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S, \forall T, S \in C^\infty(T_q^p(M))$ .
- $\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S), \forall T, S \in C^\infty(T_q^p(M))$ .
- $\forall f, g \in C^\infty(M), \nabla_{fX+gY} T = f\nabla_X T + g\nabla_Y T$ .

Para ver la *forma explícita* de las componentes de una conexión  $\nabla_X$ , se puede hacer operar esta sobre un vector  $Y \in C^\infty(TM)$  con respecto a una cierta carta. Si consideramos una variedad suave  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  con la conexión  $\nabla$  como el cuadruple  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M, \nabla)$ , conocida también como *variedad conectada afínmente*, las componentes de la conexión pueden determinarse a partir del cálculo de  $\nabla_X Y$  con respecto a una carta del atlas suave  $\mathcal{A}_M$ :

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) \\ &= X^i (\nabla_{\partial_i} Y^j) \partial_j + X^i Y^j (\nabla_{\partial_i} \partial_j) \\ &= X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j (\Gamma_{i^q j}^q \partial_q)\end{aligned}$$

En donde hemos aplicado la definición  $\nabla_{\partial_i} \partial_j \equiv \Gamma_{i^q j}^q \partial_q$  dado que este objeto tiene dos índices libres por lo que es posible referirlo a una base  $\{\partial_q\}$ . De lo anterior es posible establecer entonces que

$$(\nabla_X Y)^j = X^i (\partial_i Y^j + Y^m \Gamma_{i^m j}^j). \quad (3.14)$$

Los coeficientes  $\Gamma_{i^q j}^q : U \in \mathcal{A}_M \rightarrow \mathbb{R}$  representan las *componentes de la conexión* con respecto a una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$  del atlas  $\mathcal{A}_M$  de la variedad conectada afínmente. Dada su cantidad de índices, corresponden, en general, a un conjunto de  $(\dim M)^3$  funciones independientes, necesarias para definir la conexión (o *derivada direccional de un campo vectorial*). Además, a partir de la regla de Leibniz, podemos calcular la derivada direccional de covectores y  $\binom{p}{q}$ -tensores. A partir de lo anterior, es demostrable que:

$$(\nabla_X \omega)_j = X^i (\partial_i \omega_j - \omega_m \Gamma_{i^m j}^m) \quad y \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\nabla_X T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} &= X^n \partial_n T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + X^n \Gamma_n^{i_1 m} T^{m i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + \dots + X^n \Gamma_n^{i_p m} T^{i_1 i_2 \dots m}_{j_1 j_2 \dots j_q} \\ &\quad - X^n \Gamma_n^m_{j_1} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{m j_2 \dots j_q} - \dots - X^n \Gamma_n^m_{j_q} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots m}.\end{aligned} \quad (3.16)$$

Además, considerando otra carta  $(U', x')$  tal que  $(U, x), (U', x') \in \mathcal{A}_M$  y  $U \cap U' \neq \emptyset$ , se puede ver que entre cartas los coeficientes de la conexión transforman como

$$\Gamma'_{i^j k} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^k} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \Gamma_{m n}^l. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) es muy importante dado que permite demostrar que, a primer orden, bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, es demostrable que la ley de transformación de una perturbación afín general  $C_\alpha^\beta \gamma$  en una conexión *de fondo*  $\Gamma_\alpha^\beta \gamma$  está dada por la *derivada de Lie*  $\mathcal{L}_\xi \Gamma_\alpha^\beta \gamma$  de la conexión en dirección del generador  $\xi$  de la transformación, [23, 28], es decir,

$$\delta C_\alpha^\beta \gamma = \mathcal{L}_\xi \Gamma_\alpha^\beta \gamma, \quad (3.18)$$

En donde  $\delta C_\alpha^\beta \gamma$  representa la variación de la perturbación afín bajo la transformación infinitesimal de coordenadas. Esta identidad nos servirá más adelante para realizar el análisis de las variaciones de las componentes de una perturbación afín general. Por ahora, nos parece suficiente mencionar que la derivada de Lie es un operador diferencial, análogo a la derivada

covariante, que mide la variación de cualquier tipo de campo u objeto a lo largo del *flujo* de un campo vectorial, aunque sin necesidad de definir una conexión pero suponiendo que conocemos el campo vectorial en el punto en donde se evalúa la derivada de Lie y su correspondiente *vecindario*.

Por último, nos parece meritorio señalar que es posible caracterizar el *paralelismo* de campos vectoriales a través de la conexión afín. Si  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M, \nabla)$  es una variedad conectada afínmente, se dice que un campo vectorial  $X$  en  $M$  se transporta paralelamente a lo largo de la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  si

$$\nabla_{v_\gamma} X = (\nabla_{v_{\gamma, \gamma(\lambda)}} X)_{\gamma(\lambda)} = 0. \quad (3.19)$$

Además, se dice que la curva  $\gamma$  está *transportada autoparalelamente* o es *autoparalela* si cumple la condición

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0. \quad (3.20)$$

Considerando una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$  en el atlas de una variedad conectada afínmente, la ecuación (3.20) puede reescribirse como

$$\ddot{\gamma}_x^i + \Gamma_j^i \dot{\gamma}_x^j \dot{\gamma}_x^k = 0, \quad (3.21)$$

en donde las derivadas en los objetos  $\ddot{\gamma}$  y  $\dot{\gamma}$  corresponden a derivadas con respecto al parámetro  $\lambda$  que parametriza la curva  $\gamma(\lambda)$ .

### 3.4.1. Torsión y Curvatura

A pesar de que la conexión no es un tensor (dado que no transforma como tal por su ley de transformación, ecuación (3.17)), a partir de ella podemos definir dos tensores que son de particular interés: la torsión y la curvatura.

La *torsión* de una conexión  $\nabla$  es el  $\binom{1}{2}$ -tensor  $\mathcal{T}$  definido como

$$\mathcal{T}(X, \omega, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]), \quad (3.22)$$

En donde  $X$  e  $Y$  son vectores,  $\omega$  es un covector,  $[X, Y]$  representa el *conmutador* de  $X$  y  $Y$ , es un campo vectorial definido por

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]]. \quad (3.23)$$

Dada una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ , se puede demostrar que las componentes  $\mathcal{T}(\partial_i, dx^k, \partial_j) \equiv \mathcal{T}_i^k{}_j$  de la torsión  $\mathcal{T}$  pueden calcularse como

$$\mathcal{T}_i^k{}_j = \Gamma_i^k{}_j - \Gamma_j^k{}_i = 2\Gamma_{[i}^k{}_{j]}. \quad (3.24)$$

La curvatura  $\mathcal{R}$  de una conexión  $\nabla$  es un  $\binom{1}{3}$ -tensor definido como

$$\mathcal{R}(X, Y, \omega, Z) = \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z). \quad (3.25)$$

De forma análoga a lo realizado para la torsión, dada una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ , se puede mostrar que las componentes  $\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j, dx^k, \partial_l) \equiv \mathcal{R}_{ij}^k{}_l$  del tensor de curvatura (o de *Riemann*) pueden calcularse como

$$\mathcal{R}_{ij}^k{}_l = \partial_i \Gamma_j^k{}_l - \partial_j \Gamma_i^k{}_l + \Gamma_i^k{}_n \Gamma_j^n{}_l - \Gamma_j^k{}_n \Gamma_i^n{}_l = 2 \left( \partial_{[i} \Gamma_{j]}^k{}_l + \Gamma_{[i}^k{}_n \Gamma_{j]}^n{}_l \right). \quad (3.26)$$

A nivel práctico, la torsión y la curvatura resultan relevantes dado que toman en cuenta la diferencia al calcular el resultado de la aplicación de dos derivadas covariantes sucesivas en direcciones diferentes sobre funciones o vectores y luego restarlo del resultado de invertir estas direcciones, es decir, al calcular la *anticonmutación* de derivadas covariantes. Sobre funciones (escalares), esta diferencia está dada directamente dada por la torsión (lo que implica que cuando una conexión no tiene torsión, dos derivadas covariantes actuando sobre una función conmuten). Sobre vectores, covectores y tensores en general, la diferencia está contenida en la curvatura y en la torsión, pudiendo quedar esta información contenida sólo en la curvatura cuando la conexión afín no tiene torsión.

Otro tensor de mucha utilidad es el *tensor de Ricci*  $\mathcal{R}_{ij}$  que corresponde al tensor que se obtiene cuando se contraen dos índices del tensor de curvatura. Lo anterior implica que se deben tener en cuenta las *simetrías del tensor de curvatura*, es decir, se debe tener presente el hecho de que el tensor de curvatura es antisimétrico bajo el intercambio de sus dos primeros índices, por ejemplo. Con las consideraciones anteriores, bien podemos decir que el tensor de Ricci puede definirse como

$$\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ki}{}^k{}_j = -\mathcal{R}_{ik}{}^k{}_j, \quad (3.27)$$

o bien,

$$\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}{}^k{}_k. \quad (3.28)$$

### 3.5. Métricas

Hasta ahora, nuestro espaciotiempo tiene la estructura suficiente como para poder *desarrollar física* a través de él. Sin embargo, hay una estructura adicional con la que típicamente se suele dotar a los espacios topológicos en *Relatividad General* y en muchas otras formulaciones *métricas* de gravedad. Esta estructura adicional se conoce como *métrica*, a la que asocia la noción de *distancia*.

La métrica  $s$  es un  $\binom{0}{2}$ -tensor que cumple las siguientes dos propiedades:

- Es simétrico, es decir,  $s(X, Y) = s(Y, X)$ .
- Es invertible.

Dada una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ , las componentes  $s(\partial_i, \partial_j) \equiv s_{ij}$  de la métrica  $s$  pueden establecerse. A través de estas componentes, podemos establecer longitudes de *elementos de líneas o diferenciales de distancia*  $dl^2$  como

$$dl^2 = s_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.29)$$

Podemos definir las componentes  $s^{ij}$  del tensor inverso a la métrica a través de la relación

$$s^{il} s_{lj} = \delta^i_j. \quad (3.30)$$

Además, siendo la característica que nos resulta más relevante, la métrica nos permite hacer una correspondencia entre vectores y covectores a través del proceso de *subir y bajar* índices,

$$s_{ij} X^j \equiv X_i \quad \text{y} \quad s^{ij} Y_i \equiv Y^j. \quad (3.31)$$

Con la correspondencia anterior, es posible definir la operación del *producto punto* en donde índices de objetos que viven en el espacio tangente y en el espacio dual pueden igualarse,

$$X \cdot Y = s_{ij}X^iY^j = X^iY_i = X_jY^j. \quad (3.32)$$

En particular, el producto punto de un vector consigo mismo, permite definir la *norma* de un vector, dado que este producto punto puede igualarse al cuadrado de la norma,

$$X \cdot X = X^2 = s_{ij}X^iX^j = X^iX_i. \quad (3.33)$$

El signo del resultado anterior permite *clasificar* a los vectores como vectores *de tipo tiempo*, *de tipo espacio* o *de tipo luz*.

Utilizando una base de coordenadas adecuada, la métrica puede escribirse como  $s_{ij} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ . A partir de eso, podemos definir la *signatura* de la métrica como el par  $(p, q)$  en donde  $p$  indica la cantidad de 1's y  $q$  indica la cantidad de -1's en la *diagonal* de la métrica. De eso, típicamente se establece que una métrica es *riemanniana* si es que su signatura es  $(p, 0)$  en una variedad  $p$ -dimensional y es *lorentziana* si su signatura es  $(1, q)$  en una variedad  $(q + 1)$ -dimensional o  $(p, 1)$  en una variedad  $(p + 1)$ -dimensional.

A partir de la métrica y el tensor de curvatura se puede definir el escalar de curvatura  $\mathcal{R}$  como sigue,

$$\mathcal{R} = s^{ij}\mathcal{R}_{ki}{}^k{}_j = s^{ij}\mathcal{R}_{ij}. \quad (3.34)$$

El escalar de curvatura es de gran importancia dado que es parte de las ecuaciones de campo de la teoría de relatividad general, a través de la construcción del *tensor de Einstein*, cuya definición se mostrará más adelante, en la sección 4.1.

A partir de la definición del elemento de línea, (3.29), podemos definir el largo  $L[\gamma]$  de una curva, sumando todas las longitudes de los elementos de línea consecutivos. Así, dada una curva  $\gamma(\lambda) : (0, 1) \rightarrow X$ , el largo de dicha curva puede calcularse como

$$L[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{(v_{\gamma(\lambda)}, v_{\gamma(\lambda)})} d\lambda. \quad (3.35)$$

Además, una curva  $\gamma$  se llama *geodésica* si el largo  $L[\gamma]$  es *estacionario* (es decir, constante) con respecto a las variaciones  $\delta\gamma$  de ésta. Estas curvas pueden obtenerse a partir de un análisis variacional y de las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de este análisis. De hecho, las ecuaciones de Euler-Lagrange corresponden a la ecuación de la geodésica:

$$\ddot{\gamma}^i + \frac{1}{2}s^{ij}(\partial_k s_{jl} + \partial_l s_{kj} - \partial_i s_{kl})\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l = 0. \quad (3.36)$$

### 3.5.1. No metricidad

La conexión puede ser o no *compatible* con una métrica  $s_{ij}$  de acuerdo con la condición

$$\nabla_k s_{ij} = 0, \quad (3.37)$$

en el sentido de que cuando se cumple, se dice que la conexión es compatible con la métrica y esta condición suele especificarse además comentando que la métrica es *covariantemente constante*.

Además de la condición anterior, la conexión además puede no tener torsión. Una conexión que es compatible con la métrica (es decir, para la que su derivada covariante es tal que se cumple la condición (3.37)) y que no tiene torsión es la *conexión de Levi-Civita*  $\{\overset{i}{k}l\}$ , que puede construirse a partir de una métrica  $s_{ij}$  como

$$\{\overset{i}{k}l\} \equiv \frac{1}{2}s^{ij}(\partial_k s_{jl} + \partial_l s_{kj} - \partial_i s_{kl}). \quad (3.38)$$

Se puede verificar que, cuando se utilizan conexiones afines sin torsión, como la conexión de Levi-Civita, las ecuaciones de curvas autoparalelas, es decir la ecuación (3.21), y las de las de geodésicas, como la ecuación (3.36), son físicamente equivalentes.

De acuerdo con lo que se ha mencionado, una conexión afín *general* (que puede tener torsión) puede no ser compatible con una métrica. Una forma de *cuantificar* esta *incompatibilidad* entre la métrica y la conexión afín puede realizarse a través del *tensor de no metricidad*  $\mathcal{Q}_{ijk}$  que se define como

$$\mathcal{Q}_{ijk} \equiv \nabla_i s_{jk}. \quad (3.39)$$

El efecto de la no metricidad puede ser medido y analizado en algunas teorías de gravitación, como en algunas formulaciones métrico-afines de gravedad, [29].

# Formulaciones de gravedad y el principio cosmológico

---

La *cosmología* es la rama de la física que estudia las propiedades a gran escala (típicamente conocida como la *escala cosmológica*), la estructura y la evolución del Universo como un todo. El modelo actual bajo el cual se representa el Universo en la escala cosmológica es el *modelo  $\Lambda$  de materia oscura fría*, ya mencionado anteriormente en el capítulo 1, dado que gran parte de sus predicciones teóricas han podido ser corroboradas a través de muchas *observaciones*, como puede verificarse con una búsqueda bibliográfica sencilla. Este modelo supone que la *teoría general de la relatividad* es la formulación correcta de gravedad para el Universo en esta escala.

Actualmente, sin embargo, se reconoce que la relatividad general representa más una *teoría efectiva* (en el sentido *wilsoniano*) que una teoría fundamental por lo que al día de hoy, varios investigadores se encuentran desarrollando teorías *alternativas* de gravedad que resulten consistentes con relatividad general en cierto límite y que puedan explicar de formas más *naturales* la fenomenología del Universo en escala cosmológica. Varias de las formulaciones que se proponen, postulan que una alternativa viable para poder estudiar el campo gravitatorio en el Universo corresponde a tomar a la *conexión afín* (revisada en detalle en la sección 3.4) como el campo *fundamental* que media las interacciones gravitacionales dados los *beneficios* que han podido observarse en teorías análogas de partículas que tienen a una conexión como campo fundamental. Estas teorías de gravedad en las que la conexión afín es el campo fundamental del mismo son típicamente conocidos como *teorías o formulaciones afines* de gravedad.

Respecto al objetivo de nuestro trabajo, hasta ahora, con todo lo que se ha presentado, disponemos casi de todas las herramientas necesarias para poder desarrollar el análisis de perturbaciones afines en un *fondo* cosmológico. A partir de este punto, a la luz de lo que acabamos de comentar respecto al surgimiento de formulaciones de gravedad alternativas a relatividad general, lo que debemos hacer es *establecer una solución de fondo* para el espaciotiempo que hemos construido y para esto tenemos que *escoger* una teoría *afín* de gravedad *adecuada* y determinar soluciones de sus ecuaciones de campo que sean consistentes con el *principio cosmológico*, es decir, soluciones para las que el Universo pueda caracterizarse como un objeto *isótropo y homogéneo*.

El formalismo de gravedad a utilizar debería tener como campo fundamental a la conexión, de manera que sus soluciones cosmológicas puedan ser perturbadas de forma afín. Por lo anterior, en este capítulo presentamos en detalle tanto la formulación de relatividad general como también varias teorías afines de gravedad de manera que puedan contrastarse las *capacidades* de todas las formulaciones que se presentan y cómo las teorías afines, a pesar de que su campo fundamental sea la conexión afín y no la métrica, pueden conducir a resultados consistentes con aquellos que pueden ser obtenidos a través de relatividad general. Entre todas las formulacio-

nes *afines* de gravedad que presentamos en este capítulo, la teoría que escogimos para obtener una solución de fondo cosmológica es la *formulación polinomial afín de gravedad* dadas sus características, las cuales son presentadas detalladamente en la sección 4.3 de este capítulo, y cuyas posibles soluciones cosmológicas son mostradas al final de esta parte de nuestro trabajo.

En términos de notación, vale la pena tener presente que, a partir de este momento, se hace la clara distinción entre la forma en que pueden escribirse los índices de un objeto. A partir de ahora, los índices se representarán con letras griegas si es que pueden evaluarse para cualquier *dirección* del espaciotiempo, o con letras del alfabeto latino si es que se asocian solamente a las direcciones que pertenecen a la subvariedad 3-dimensional espacial de nuestro espaciotiempo.

## 4.1. Relatividad general

En esta subsección revisaremos brevemente los detalles que nos parecen más relevantes de la teoría de la relatividad general de Einstein, a la luz de que es el formalismo que se utiliza para analizar las interacciones gravitacionales en el Universo en el modelo cosmológico estándar actual, el modelo  $\Lambda$  de materia oscura fría. La teoría de la relatividad de Einstein se basa principalmente en interpretar a la *gravedad* como consecuencia de las *características geométricas* del espaciotiempo. La discusión que se presenta a continuación está basada principalmente en el trabajo de Cheng, [30].

La *teoría especial de la relatividad* detalla cómo observadores *inerciales*, es decir en movimiento relativo con velocidad constante y para los cuales se cumple la Primera Ley de Newton, pueden describir varios *eventos* de forma distinta aunque *compatible*. Los postulados de la teoría especial de la relatividad de Einstein son los siguientes:

- Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales.
- La rapidez de la luz  $c$  en el vacío es una constante universal y es la misma para todos los observadores inerciales.

Las transformaciones de coordenadas, entre observadores inerciales, que resultan ser consistentes con los postulados de la relatividad general son las *transformaciones de Lorentz*. Una forma de caracterizar las transformaciones de Lorentz, radica en el hecho de que estas transformaciones dejan invariante a la *métrica de Minkowski*,  $\eta_{ij}$ , la cual, para cierta carta en un cierto atlas del espaciotiempo, bien puede representarse como  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

Una manera en la que se puede extender la teoría de Einstein para poder analizar la forma en la que observadores no inerciales pueden describir eventos, consiste en recurrir al *principio de equivalencia*. El principio de equivalencia permite establecer relaciones entre las observaciones desde sistemas con aceleración y sistemas en los que actúa la gravedad. A partir de esto, el principio de equivalencia permite compatibilizar observaciones en las siguientes situaciones:

- Una persona dentro de una nave, en el espacio exterior, lo suficientemente lejos de cualquier *fuerza de gravedad* que pueda afectar el movimiento de la nave. En el interior de la nave, la persona podría estar en contacto con la nave o flotando, pero ambas se mueven *de la misma forma* y su separación relativa se mantiene constante.

- Una persona y una nave se mueven en caída libre hacia la superficie de la Tierra. Aunque ambos aceleran hacia la Tierra, ellos aceleran de la misma forma y, si la persona estaba flotando cuando empiezan a acelerar, su separación, tal y como en el caso anterior, se mantendrá constante.
- Ahora la persona y la nave se encuentran sobre la superficie de la Tierra. En este caso, la persona, parada sobre la base de la nave, percibe que la nave ejerce una fuerza sobre sí. La fuerza que percibe es que la que típicamente reconocemos como la *fuerza normal*.
- Por último, si la persona está parada sobre la base de la nave y se encuentran lejos de cualquier fuente de gravedad pero la nave acelera, la persona otra vez percibirá una fuerza: la fuerza que el piso de la nave ejerce sobre él. Esta fuerza es también la fuerza normal pero, en este caso, esta fuerza hace que la persona acelere con la misma aceleración de la nave.

A partir de estas situaciones, se puede pensar que lo que los observadores experimentan producto de la gravedad resulta *indistinguible* de lo que observarían cuando están en un sistema acelerado. Lo anterior implica que una teoría general de la relatividad, o *relatividad general*, debería ser vista como una teoría de gravitación.

Otro experimento interesante es aquel en el que un rayo de luz se emite de forma perpendicular a la dirección de movimiento de un sistema que puede acelerar o caer en caída libre por efecto de la gravedad. El principio de equivalencia establece que el comportamiento observado del rayo debe ser indistinguible en ambos sistemas por lo que se puede concluir que la gravedad deflecta o *curva* la trayectoria del haz luminoso. Dado que el comportamiento de la luz en el sistema con gravedad se debe a un carácter puramente *geométrico*, en la relatividad general la gravedad deja de considerarse como una *fuerza* (la cual fue la interpretación que se le dió a través de las leyes de Newton), para ser interpretada como una manifestación de la *geometría* del espaciotiempo, que típicamente se especifica a través de su *curvatura* o comentando que el espaciotiempo es *curvo*.

En un espacio curvo, las curvas equivalentes a las líneas rectas en espacio plano (es decir, aquellas que dan la distancia más corta entre dos puntos) son las curvas geodésicas, caracterizadas por la conexión de Levi-Civita como se vió en la sección 3.5. Por lo anterior, la ecuación de movimiento de una partícula cualquiera en *caída libre*, dentro del formalismo de relatividad general, es la ecuación de la geodésica, la ecuación [peqref:qgeo](#).

La cantidad fundamental en el formalismo de relatividad general, que media y determina las interacciones gravitacionales en esta teoría, es la métrica, típicamente representada en este contexto como  $g_{\mu\nu}$ . Tal y como se mencionó en la sección 3.5, la métrica permite establecer nociones de distancia, separación entre puntos en el espaciotiempo y permite calcular productos punto y contraer índices en objetos de interés para la teoría. Las ecuaciones que dictan cómo se curva el espaciotiempo en el formalismo de relatividad general son *las ecuaciones de campo de Einstein*, que tienen como solución justamente a la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a una *extensión* de la Ley de gravitación de Newton, es decir, corresponden al *límite relativista* de la ecuación

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{4.1}$$

en donde  $G$  representa la constante universal de Newton,  $\rho$  representa la densidad de masa y  $\Phi$  es el potencial gravitacional clásico.

La construcción de una extensión relativista de la ecuación anterior debe considerar una ecuación (tensorial) que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas (para que la misma sea válida para todos los observadores). El tensor correspondiente a la densidad de masa  $\rho$  en relatividad general es el *tensor de energía-momento*  $T_{\mu\nu}$ . El tensor de energía-momento contiene información asociada a la *densidad de energía* (que por la definición de la energía en reposo en la teoría especial de la relatividad, se escribe típicamente como  $\rho c^2$ ) y dispone también de información asociada a la densidad de momentum  $p^\mu$  y del flujo de estas cantidades. Por definición, el tensor  $T_{\mu\nu}$  es simétrico, es decir,  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  y es *covariantemente constante*, es decir,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Respecto al lado izquierdo de la ecuación (4.1), el término del laplaciano (clásico) del potencial gravitacional  $\nabla^2\Phi$  debería asociarse a un término (tensorial) que efectivamente corresponda a la segunda derivada de la métrica y, además, por la *covarianza de los índices*, este término debería ser simétrico en sus dos índices libres y covariantemente constante. Uno podría considerar al tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  como un buen candidato esta tarea dado que se forma a partir de segundas derivadas de la métrica (por la definición de la curvatura en términos de la conexión afín y por la definición de la conexión de Levi-Civita en términos de la métrica), mas sin embargo, no dispone de todas las propiedades con las que cuenta el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ .

Es posible construir un tensor covariantemente constante, junto con las simetrías y propiedades requeridas, a partir del tensor de curvatura y aprovechando la propiedad de la métrica por la que permite subir y bajar índices. De esta manera, podemos escribir el tensor de curvatura con todos sus índices abajo como

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\gamma\nu}\mathcal{R}^{\nu}_{\alpha\beta\delta}. \quad (4.2)$$

El tensor de Riemann con los índices abajo tiene las mismas simetrías que el tensor de curvatura tal y como fue presentado en la sección 3.5, sin embargo de este objeto nos interesan sólo tres simetrías. Dos de estas simetrías corresponden al hecho de que el tensor de Riemann es antisimétrico bajo el intercambio de sus dos primeros índices y es antisimétrico bajo el intercambio de sus dos últimos índices, es decir,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (4.3)$$

La tercera simetría que nos interesa, y que *sólo es aplicable cuando consideramos una conexión sin torsión* o compatible con la métrica (que es algo que ocurre en relatividad general) [31], corresponde al hecho de que el tensor de Riemann es simétrico bajo el intercambio, por bloques, del bloque del primer y segundo índice con el bloque del tercer y cuarto índice:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

por lo que el tensor de Ricci puede ser escrito como

$$\mathcal{R}_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\alpha}{}_{\delta}, \quad (4.5)$$

y, por lo comentado antes respecto a la tercera simetría, en el caso de relatividad general se puede demostrar que el tensor de Ricci es simétrico bajo el intercambio de sus índices,

$$\mathcal{R}_{\beta\delta} = \mathcal{R}_{\delta\beta}. \quad (4.6)$$

A partir de todo lo que se ha comentado, podemos construir un  $\binom{0}{2}$ -tensor simétrico en sus dos índices y covariantemente constante. Un buen punto de partida para tal tarea consiste primero en plantear una *identidad de Bianchi* asociada a la derivada covariante del tensor de Riemann (considerando de nuevo una conexión compatible con la métrica, como ocurre en relatividad general),

$$\nabla_{\mu}\mathcal{R}_{\nu\gamma\alpha\beta} + \nabla_{\gamma}\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_{\nu}\mathcal{R}_{\gamma\mu\alpha\beta} = 0. \quad (4.7)$$

Lo siguiente, consiste en obtener el escalar de curvatura a partir del primer término de la ecuación. Para realizar esto, podemos *contraer* toda la ecuación con la métrica  $g^{\nu\alpha}$  e introducir dicha métrica *dentro* de la derivada covariante en los otros términos recordando que la métrica es covariantemente constante en relatividad general, es decir,  $\nabla_{\mu}g^{\nu\alpha} = 0$ . Así, podemos escribir

$$\nabla_{\mu}\mathcal{R}_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\mathcal{R}_{\mu\beta} + \nabla_{\nu}(g^{\nu\alpha}\mathcal{R}_{\gamma\mu\alpha\beta}) = 0. \quad (4.8)$$

Ahora, si contraemos la ecuación resultante con la métrica  $g^{\gamma\beta}$  podemos obtener,

$$\nabla_{\mu}\mathcal{R} - \nabla_{\gamma}(g^{\gamma\beta}\mathcal{R}_{\mu\beta}) - \nabla_{\nu}(g^{\nu\alpha}\mathcal{R}_{\alpha\mu}) = 0. \quad (4.9)$$

En esta última ecuación, podemos ver que los dos últimos términos en el lado izquierdo de la ecuación son iguales. Para poder *despejar* la derivada covariante en la última ecuación, podemos contraer una vez más la ecuación con una métrica de la forma  $g^{\mu\phi}$ . Al hacerlo, finalmente la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\nabla_{\mu}(g^{\mu\phi}\mathcal{R} - 2\mathcal{R}^{\mu\phi}) = 0. \quad (4.10)$$

La ecuación anterior define el tensor que típicamente es conocido en relatividad general como *tensor de Einstein*,  $G_{\mu\nu}$ ,

$$G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

con el que las ecuaciones de campo de Einstein pueden reescribirse como

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

La cantidad  $k$  da cuenta de las constantes en el lado derecho de la ecuación de la teoría de Newton, la ecuación (4.1), por lo que también representa una constante. De esta forma, para que el límite relativista de la ecuación de Newton corresponda a las ecuaciones de campo de Einstein, se debe establecer que

$$k = -\frac{8\pi G}{c^4}. \quad (4.13)$$

Hasta ahora, se puede entender que  $G_{\mu\nu}$  es un  $\binom{0}{2}$ -tensor simétrico y covariantemente constante. A pesar de lo anterior, en relatividad general, dado que la conexión afín está dada por la conexión de Levi-Civita, la métrica  $g_{\mu\nu}$  también se comporta como un tensor simétrico

covariantemente constante. Este argumento nos permite agregar un término adicional en el lado izquierdo de la ecuación (4.12). De esta manera, podemos escribir

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

en donde la constante  $\Lambda$  se conoce como *constante cosmológica* (mencionada en la sección 1) y típicamente suele asociarse a la *materia oscura* del Universo en el modelo cosmológico estándar.

A lo largo de los años, se han propuesto muchas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, es decir, a las ecuaciones (4.14), dependiendo de las propiedades *geométricas* con las que se modela el Universo (o *parte* del Universo) en el problema de interés a la mano. En nuestro caso, dado que tenemos interés en un *espaciotiempo de fondo* caracterizado de forma consistente con el *principio cosmológico*, nos interesan soluciones que en el sector espacial del espaciotiempo resulten homogéneas e isotropas. En el modelo cosmológico estándar, esta solución corresponde a la *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* que en términos de componentes, bien puede escribirse como

$$g_{ij} = a^2(t) \left( \delta_{ij} + \kappa \frac{x^i x^j}{1 - \kappa x^2} \right), \quad g_{it} = 0, \quad g_{tt} = -1, \quad (4.15)$$

y en donde  $x^2$  representa la norma al cuadrado de un vector de *posición* que vive en la subvariedad 3-dimensional espacial del espaciotiempo,  $a(t)$  se conoce comúnmente como *factor de escala* y  $\kappa$  es un parámetro que toma en cuenta la curvatura del espaciotiempo y que puede tomar los siguientes valores dependiendo de si la subvariedad 3-dimensional del espaciotiempo es simétrica bajo los *grupos* de transformaciones de rotaciones  $SO(4)$  en todo el espaciotiempo, transformaciones de rotaciones  $E_3$  en un espacio euclídeo, o transformaciones de Lorentz  $SO(3,1)$

$$\kappa = \begin{cases} 1 & SO(4) \\ 0 & E_3 \\ -1 & SO(3,1) \end{cases}. \quad (4.16)$$

Para establecer por completo la solución, el comportamiento del factor de escala  $a(t)$  se debe determinar introduciendo la solución (4.15) en las ecuaciones de campo de Einstein y considerando una *ecuación de estado* para los elementos del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Dependiendo de la ecuación de estado que se proponga, en concordancia con la *época* del Universo que se esté estudiando, soluciones para el factor de escala  $a(t)$  pueden determinarse. En todos los casos, las soluciones del factor  $a(t)$  nos permiten deducir que el Universo se expande, siendo diferente la manera en la que se expande y dependiendo esta diferencia de la época del Universo que se esté considerando y de la solución explícita de  $a(t)$ . La expansión del Universo es un comportamiento consistente con muchas observaciones obtenidas hasta este momento, como las *desviaciones* en las frecuencias de líneas espectrales desde galaxias distantes cuando se comparan con sus valores observados en laboratorios localizados en la Tierra, [32].

## 4.2. Algunas formulaciones alternativas de gravedad

Con el fin de extender el trabajo de Einstein o proponer formulaciones de gravedad que podrían ser cuantizables o, tal vez, proponer formulaciones de gravedad que resulten más

*fundamentales*, a lo largo del siglo 20 hasta la actualidad se han propuesto varias formulaciones de gravedad que resultan *alternativas* a relatividad general.

A pesar de su éxito, la teoría general de la relatividad enfrenta dificultades que sugieren que se necesita aún una descripción más fundamental de las interacciones gravitacionales que su formalismo. La necesidad de incluir un *sector oscuro* para el cual, a pesar de todo, no existe evidencia y que domine la evolución cósmica y la dinámica de galaxias y cústeres de ellas, puede apuntar hacia la necesidad de una nueva dinámica gravitacional, al menos, necesaria para el análisis de la radiación infrarroja, [33]. Como resultado, con el paso del tiempo se está normalizando más la noción de que la relatividad general puede ser vista principalmente como una *teoría efectiva* que requiere extensiones, sobre todo a escalas *muy pequeñas* y *muy grandes*.

La forma en cómo una formulación de gravedad debería ser planteada, requiriendo que pueda considerarse como una *modificación* al compararse con relatividad general, es una cuestión importantísima a la hora de proponer una idea y es por eso que actualmente se pueden encontrar múltiples alternativas en la teoría. Entre todos los intentos de generalización, teniendo presente que las dificultades que surgen en relatividad general sugieren el desarrollo de *nueva física*, implicando la introducción de nuevos campos o cambiando la teoría gravitacional, incluso, se encuentran aquellos en los que se propone, o cambiar el campo fundamental del formalismo o agregar nuevos campos a la métrica en el conjunto de campos fundamentales de la teoría con el fin de intentar cuantizar las interacciones gravitacionales. Por esto, a lo largo de los años, se han desarrollado teorías en los que el campo fundamental del formalismo de gravedad propuesto no es la métrica sino más bien la conexión (o al menos añadirla como campo fundamental junto a la métrica), a la luz de que, por ejemplo, las interacciones dentro del modelo estándar de partículas son descritos a través de conexiones y es por ello que la cuantización de la teoría es completamente realizable.

A continuación presentamos algunas formulaciones de gravedad afín con el fin de poder ilustrar de qué manera se pueden obtener las ecuaciones de campo en estos formalismos y cómo sus resultados pueden compatibilizarse con los que podrían obtenerse a partir de la relatividad general.

### 4.2.1. Formulación afín de gravedad de Eddington

La primera teoría de gravedad en la que la conexión era el campo fundamental de la misma, (que pertenece al conjunto de formalismos comúnmente conocidos como *teorías afines* de gravedad) fue el formalismo de Sir A. Eddington, presentado en 1924, que consideró a una conexión  $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$  como el campo fundamental del formalismo y una acción  $S_{\text{Edd}}$  definida como la raíz cuadrada del determinante de un tensor de Ricci, [34], es decir

$$S_{\text{Edd}} = 2k \int d^4x \sqrt{|\mathcal{R}|}, \quad (4.17)$$

en donde  $k$  es una constante con dimensiones inversas a las de la constante cosmológica  $\Lambda$  y  $|\mathcal{R}|$  representa el determinante del tensor de Ricci,  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ . En este caso vale la pena señalar que el tensor de Ricci es construido por completo a partir de la conexión. Al variar la acción  $S_{\text{Edd}}$  con respecto a la conexión, puede obtenerse la siguiente ecuación de campo, después de eliminar términos con traza nula,

$$\nabla_{\alpha}(2k\sqrt{|\mathcal{R}|}\mathcal{R}^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.18)$$

en donde  $\nabla$  representa la derivada covariante definida a partir de la parte simétrica de la conexión (que en esta teoría, de hecho, correspondería a la conexión completa dado que, por definición, se establece que la conexión sea simétrica en sus índices covariantes al establecer el formalismo, [35]).  $\mathcal{R}^{\mu\nu}$  representa el inverso del tensor de Ricci. Para resolver la ecuación anterior, se puede definir un tensor invertible  $q_{\mu\nu}$  de manera que  $2k\sqrt{|\mathcal{R}|\mathcal{R}^{\mu\nu}} = \sqrt{|q|}q^{\mu\nu}$ , de forma que la ecuación (4.18) pueda reescribirse como

$$\nabla_{\alpha}(\sqrt{|q|}q^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.19)$$

Puede verse que las ecuaciones (4.19) podrían reescribirse como las ecuaciones de Einstein si se identifica al tensor  $q_{\mu\nu}$  con la métrica  $g_{\mu\nu}$  de relatividad general y  $k \equiv \Lambda^{-1}$ . Por lo anterior, la acción de Eddington puede representar un punto viable y alternativo de partida a relatividad general para modelar las interacciones gravitacionales en el Universo. De hecho, puede pensarse que ambas teorías, relatividad general y la teoría afín de gravedad de Eddington, son *duales* la una a la otra en el sentido de que la acción  $S_{\text{Edd}}$  es inversamente proporcional a la constante cosmológica  $\Lambda$ , mientras que la acción a partir de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de campo en relatividad general<sup>1</sup> (conocida como la *acción de Einstein-Hilbert*,  $S_{\text{EH}}$ ), es proporcional a  $\Lambda$ . De este hecho se podría pensar que cada formalismo podría ser útil en diferentes regímenes.

A pesar de los resultados mostrados, la teoría de Eddington se considera como *incompleta* en el sentido de que, así como se establece el formalismo, no puede incluir materia, [36]. Para poder incluir materia en el formalismo de Eddington, se consideran *variaciones* de su método en los que la acción depende de una conexión  $\Gamma$ , así como también de grados de libertad materiales asociados a un campo  $\Psi$  y de una métrica  $g$ , aunque considerando que la métrica y la conexión son campos independientes, como se postula típicamente en *formulaciones métrico-afines de gravedad*<sup>2</sup>. Estableciendo la variación de la acción con respecto a la métrica y luego con respecto a la conexión pueden obtenerse ecuaciones de campo de gravedad, que, aunque no corresponden a las ecuaciones de campo de Einstein, sí conducen a correcciones adicionales, incluso, [37].

### 4.2.2. Extensión afín de relatividad general de Kijowski

Otra teoría relevante de gravedad afín, que surgió posteriormente, al formalismo de Eddington corresponde a la *formulación afín de relatividad general de Kijowski*, presentada en el trabajo [38].

Kijowski se dió cuenta de que la conexión (simétrica en sus índices inferiores), más que la métrica, podría cumplir el rol de *potencial* en la relatividad general. Además, postuló que las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser obtenidas a través de la variación de una acción  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  con densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  dependiente de una conexión (simétrica)  $\Gamma_{(\mu}^{\lambda}{}_{\nu)}$ , un campo material  $\Psi$  (de haber alguno); y de sus primeras derivadas parciales, es decir, de  $\partial_{\kappa}\Gamma_{(\mu}^{\lambda}{}_{\nu)}$

---

<sup>1</sup>La acción de Einstein-Hilbert está dada como  $S_{\text{EH}} \equiv \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|}(g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta} - 2\Lambda)$  en donde  $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$  representa el tensor de Ricci asociado a la métrica  $g_{\mu\nu}$  a través de la conexión de Levi-Civita.

<sup>2</sup>Una revisión bastante completa de las formulaciones métrico-afines de gravedad más relevantes en años recientes está disponible en la referencia [4].

y de  $\partial_\alpha \Psi$ . En este formalismo, puede mostrarse que la métrica aparece como una componente del *momento canónico*  $\Pi$  *conjugado* a la conexión:

$$\Pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \Gamma_{(\mu}^{\lambda \kappa)})}. \quad (4.20)$$

En el formalismo de Kijowski, la relatividad general puede obtenerse como un *caso particular* del mismo. Para esto, puede interpretarse a la relatividad general como una teoría regida por el siguiente supuesto: la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  depende de las derivadas de  $\Gamma$  sólo a través de la parte simétrica  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  de un tensor de Ricci  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  (no necesariamente simétrico):

$$\mathcal{R}_{(\mu\nu)} = \mathcal{R}_{\lambda(\mu}^{\lambda \nu)}, \quad (4.21)$$

en donde  $\mathcal{R}_{\mu\alpha}^{\lambda \nu}$  representa el tensor de curvatura, definido en la sección 3.4.1.

Por simplicidad y con el fin de mostrar la compatibilidad del formalismo de Kijowski con relatividad general, supongamos que  $\mathcal{L}$  depende de  $\Gamma$  a través de  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$ , por lo cual, consideremos que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{R}_{(\mu\nu)}, \Psi, \partial_\mu \Psi). \quad (4.22)$$

La suposición expresada en la ecuación (4.22) implica que el momento  $\Pi$ , de acuerdo con su definición dada en la ecuación (4.20), en este caso puede reescribirse como

$$\Pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{(\alpha\beta)}} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{R}_{(\alpha\beta)}}{\partial(\partial_\kappa \Gamma_{\mu}^{\lambda \nu})} \right) = \Pi^{\alpha\beta} (\delta_\lambda^\kappa \delta_\alpha^{(\mu} \delta_\beta^{\nu)} - \delta_\lambda^{(\nu} \delta_\alpha^{\mu)} \delta_\beta^\kappa), \quad (4.23)$$

en donde

$$\Pi^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{(\alpha\beta)}}. \quad (4.24)$$

Al final podemos obtener que

$$\Pi_\lambda^{\mu\nu\kappa} = \delta_\lambda^\kappa \Pi^{\mu\nu} - \delta_\lambda^{(\mu} \Pi^{\nu)\kappa}. \quad (4.25)$$

Puede verse que este formalismo es equivalente a la relatividad general de Einstein si se interpreta la densidad tensorial  $\Pi^{\mu\nu}$  como la densidad contravariante del tensor métrico  $g$ , es decir,

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{1}{k} \sqrt{-|g|} g^{\mu\nu}, \quad (4.26)$$

en donde  $k$  es la constante en la ecuación de campo de Einstein, es decir, en la ecuación (4.12). La ecuación anterior representaría una definición del tensor métrico en el formalismo de Kijowski, en términos del momento  $\Pi$ .

Las ecuaciones de campo del formalismo mostrado pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange que surgen de tomar la variación de la acción  $S$  con respecto a  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  y  $\Psi$ . Se puede demostrar que la ecuación de campo asociada a  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  toma la forma

$$\nabla_\kappa \Pi^{\mu\nu\kappa} = 0, \quad (4.27)$$

en donde  $\nabla$  representa la derivada covariante asociada a  $\Gamma$ . La ecuación anterior, a través de la ecuación (4.25) y la definición de la métrica en el formalismo de Kijowski dada en la ecuación (4.26), puede reescribirse como

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.28)$$

que representa la condición de que esta métrica, dada por la ecuación (4.26), es covariantemente constante y la conexión  $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$  es *compatible* con la métrica  $g_{\mu\nu}$ , en el contexto establecido en la sección 3.5.1. Este resultado implica que, como consecuencia de considerar una densidad lagrangiana que depende de la conexión a través de un tensor de Ricci simétrico, la conexión necesariamente debe ser compatible con un tensor invertible asociado al momento conjugado del tensor de Ricci simétrico. A partir de aquí se ve que la conexión, al principio no necesariamente simétrica en sus índices covariantes, debe corresponder a la conexión de Levi-Civita presentada en la sección 3.5.

Una ecuación de campo equivalente a la ecuación de campo de Einstein, ecuación (4.12), puede obtenerse analizando la ecuación de Euler-Lagrange asociada al campo material  $\Psi$  y considerando la transformación de Legendre de la densidad lagrangiana. Después de un manejo algebraico cuidadoso y a partir de *las ecuaciones de Hamilton* que se obtienen por la transformación de Legendre, las ecuaciones de Hamilton asociadas a  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  y su momento canónico  $\Pi$  conducen a la ecuación

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = k \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (4.29)$$

la cual es una ecuación equivalente a la ecuación de campo de Einstein en ausencia de constante cosmológica  $\Lambda$  si  $\mathcal{L}_{\text{mat}} \equiv \mathcal{L} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{(\mu\nu)}\Pi^{\mu\nu}$  puede interpretarse como una *densidad lagrangiana material*.  $\mathcal{R}$  representa el escalar de curvatura presentado en la sección 3.5.

### 4.2.3. Teoría afín de gravedad de Poplawski

Un último formalismo afín de gravedad que nos parece importante mencionar es la formulación desarrollada por Nikodem Poplawski a principios del siglo XXI, [39]. El formalismo de Poplawski se diferencia de las otras teorías en el sentido de que propone una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  dinámica *más simple* y que depende *enteramente* de la conexión y es una función lineal de sus derivadas, es decir, no depende *implícitamente* de la conexión a través de un tensor simétrico asociado a ésta sino que depende *explícitamente* de algunos de los campos que componen la conexión.

Como la conexión  $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$  no es un tensor, formalmente sólo puede aparecer en la densidad lagrangiana a través de tensores que se puedan construir a partir de ella. Estos tensores son el tensor de curvatura  $\mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho}$  y la torsión  $\mathcal{T}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$  o un tensor asociado a ésta, definidos ambos en la sección 3.4.1. En el formalismo de Poplawski, el tensor asociado a la torsión se representa como  $S_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} \equiv \Gamma_{[\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu]} = \mathcal{T}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}/2$ .

Para construir a partir de cada tensor un escalar que sea lineal en las derivadas de la conexión (con el fin de que la densidad lagrangiana sea lo más simple posible), la curvatura o el tensor asociado a la torsión deben contraerse con un tensor contravariante de segundo rango que no sea proporcional a las derivadas de la conexión. Este tensor contravariante de segundo rango debe formarse entonces a partir del tensor  $S$ . Los tensores de segundo rango más sencillos que se pueden formar a partir del tensor  $S$  son cuadráticos en el mismo y pueden ser tres, difiriendo de otros como máximo por constantes multiplicativas

$$k_{\mu\nu} = S_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu} S_{\rho}{}^{\lambda}{}_{\nu}, \quad (4.30)$$

$$l_{\mu\nu} = S_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} S_{\rho}, \quad m_{\mu\nu} = S_{\mu} S_{\nu}, \quad (4.31)$$

en donde  $S_\mu \equiv S_\mu{}^\nu{}_\nu$ . Bajo una transformación de coordenadas, al menos una componente de la traza  $S_\mu$  del tensor  $S$  puede anularse, lo que implicaría que los tensores  $l_{\mu\nu}$  y  $m_{\mu\nu}$  no sean invertibles. Por lo anterior, el tensor más conveniente para formar escalares a partir de los tensores de curvatura y  $S$  es el tensor  $k_{\mu\nu}$ , conocido también como *tensor de Poplawski*. Definimos además el tensor contravariante  $k^{\mu\nu}$  de rango dos como la inversa al tensor  $k_{\mu\nu}$

$$k^{\mu\rho}k_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (4.32)$$

Considerando entonces que  $k \equiv |k| = \det(k_{\mu\nu})$ , la densidad (*escalar*) lagrangiana  $\mathcal{L}_g$  del campo gravitacional, sin considerar diferencias por factores globales multiplicativos, en el formalismo de Poplawski puede definirse como

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{R}_{\mu\nu}k^{\mu\nu}\sqrt{k}. \quad (4.33)$$

La expresión anterior representa la densidad lagrangiana más sencilla, dinámica y no degenerada que está enteramente compuesta por la conexión, a través de la curvatura y torsión y es lineal en la derivada de la conexión. Con el fin de que la densidad lagrangiana de la ecuación (4.33) tenga significancia física, se impone sobre el 2-tensor  $k_{\mu\nu}$  asociado a la torsión la condición de que  $k \neq 0$ .

Si empezamos el análisis con el campo gravitacional en ausencia de materia, la variación de la acción  $\delta S$ , utilizando el hecho de que  $\delta k = -\frac{1}{2}k k_{\mu\nu}\delta k^{\mu\nu}$ , es

$$\delta S = \delta \int \mathcal{R}_{\mu\nu}k^{\mu\nu}\sqrt{k}d\Omega = \int \delta\mathcal{R}_{\mu\nu}k^{\mu\nu}\sqrt{k}d\Omega + \int \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\rho\sigma}k^{\rho\sigma}k_{\mu\nu}\right)\delta k^{\mu\nu}\sqrt{k}d\Omega, \quad (4.34)$$

en donde  $d\Omega$  representa un elemento de 4-volumen. Las ecuaciones de campo que resultan de igualar a cero la variación expresada en la ecuación (4.34) pueden obtenerse a partir de la variación de la conexión  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  considerando que esta puede dividirse en una parte simétrica  $\delta\Gamma_{(\mu\nu)}^\rho$  y una parte antisimétrica  $\delta\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = \delta S_{\mu\nu}^\rho$ . La acción se puede variar bajo estas dos partes por separado. Si consideramos primero la variación con respecto  $\delta\Gamma_{(\mu\nu)}^\rho$ , la variación  $\delta S_{\Gamma_0}$  de la acción en ese caso puede escribirse como

$$\delta S_{\Gamma_0} = \int \delta\Gamma_{(\mu\nu)}^\rho \left[ (2S_\rho k^{\mu\nu} - 2S_\sigma \delta_\rho^{(\nu} k^{\mu)\sigma} - 2S_\rho^{(\nu} k^{\mu)\sigma})\sqrt{k} - \nabla_\rho(k^{\mu\nu}\sqrt{k}) + \delta_\rho^{(\nu}\nabla_\sigma(k^{\mu)\sigma}\sqrt{k}) \right] d\Omega, \quad (4.35)$$

en donde  $\nabla$  representa la derivada covariante asociada a la conexión (completa)  $\Gamma$ .

Igualando a cero la variación dada en la ecuación (4.35), a través de la definición de campos auxiliares y después de varias contracciones con el tensor  $k_{\mu\nu}$  es posible obtener la siguiente descomposición para la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  como resultado de la variación de la acción bajo la parte simétrica de la conexión:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \{\rho_{\mu\nu}\}_k + S_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{3}(\delta_\mu^\rho S_\nu + \delta_\nu^\rho S_\mu), \quad (4.36)$$

en donde  $\{\rho_{\mu\nu}\}_k$  representa la conexión de Levi-Civita asociado al tensor  $k_{\mu\nu}$ , tal y como se definió en la sección 3.5 (y cuyas componentes comúnmente son conocidas también como *símbolos de Christoffel*). La ecuación de campo (4.36) relaciona la conexión con la torsión y sus derivadas.

Si se define

$$C^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \{\rho{}_{\mu\nu}\}_k = S_{\mu}{}^\rho{}_\nu - \frac{1}{3}(\delta_\mu{}^\rho S_\nu + \delta_\nu{}^\rho S_\mu), \quad (4.37)$$

es posible descomponer el tensor de curvatura y el tensor de Ricci en términos asociados sólo a la conexión de Levi-Civita y un resto asociado al campo  $C$  recién definido en la ecuación (4.37).

Si  $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(k)} = \mathcal{R}_{\rho\nu}^{(k)\rho}{}_\mu$  es el tensor de Ricci asociado a la componente de Levi-Civita de la conexión, la acción  $S$  puede reescribirse como

$$S = \int \left( \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(k)} k^{\mu\nu} + 4 - \frac{1}{3} m_{\mu\nu} k^{\mu\nu} \right) \sqrt{k} d\Omega. \quad (4.38)$$

Como el último término entre paréntesis en la ecuación (4.38) puede anularse bajo una transformación de coordenadas conveniente, la acción anterior puede manipularse para que adquiera la forma de un lagrangiano de tipo Einstein-Hilbert para el campo gravitacional con una constante cosmológica en relatividad general considerando que el tensor  $k_{\mu\nu}$  puede identificarse con un tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , siendo diferentes, como máximo, a través de un factor global. Si definimos un tensor adimensional

$$g_{\mu\nu} = \frac{2}{\Lambda} k_{\mu\nu}, \quad (4.39)$$

en donde la constante  $\Lambda$  tiene dimensión del inverso de una longitud al cuadrado, entonces los símbolos de Christoffel construídos desde  $g_{\mu\nu}$  satisfacen  $\{\rho{}_{\mu\nu}\}_g = \{\rho{}_{\mu\nu}\}_k$ . Los tensores de curvatura y de Ricci cumplen también las mismas relaciones que las conexiones de Levi-Civita de los tensores  $k_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$ .

De esta forma, los primeros dos términos de la ecuación (4.38) representan una acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica  $\Lambda$  (difiriendo por un factor global):

$$S \propto \int (\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(g)} g^{\mu\nu} + 2\Lambda) \sqrt{g} d\Omega, \quad (4.40)$$

en donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Para que la relación (4.39) tenga significado físico, se utiliza el requerimiento de la signatura sobre  $g_{\mu\nu}$ , lo que impone una restricción sobre el signo de  $\det(k_{\mu\nu})$  y que se establece como negativo de manera que el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  tenga signatura Lorentziana, en el sentido definido en la sección 3.5.

Un resultado interesante del presente análisis radica en el hecho de que la ecuación (4.39) le da sentido físico a la constante cosmológica. En el contexto que aquí se presenta, la constante  $\Lambda$  provee una escala de longitud de la conexión afín. Junto con las constantes universales  $c$  y  $G$ ,  $\Lambda$  provee un sistema natural de estándares de medición para las cantidades de longitud, masa y tiempo.

En presencia de materia, se debe agregar un término adicional a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_g$  que esté asociado a la materia, la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_m$  para la materia. En ese caso la acción para el campo gravitacional y la materia toma la forma

$$S = \int (\mathcal{L}_g + \alpha \mathcal{L}_m) d\Omega, \quad (4.41)$$

en donde  $\alpha$  representa una constante que establezca las unidades de masa. Si los campos materiales no se acoplan a la conexión a través de la derivada covariante, entonces sólo pueden

depender de la conexión a través de la torsión. En ese caso, todos los resultados obtenidos hasta el momento no cambiarían a pesar del término adicional en la acción de la ecuación (4.41) dado que la variación de la acción bajo la parte simétrica de la conexión sería independiente de los campos materiales. En esos casos, la acción (4.38) debe reescribirse como

$$S = \int \left( \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(k)} k^{\mu\nu} + 4 - \frac{1}{3} m_{\mu\nu} k^{\mu\nu} \right) \sqrt{k} d\Omega + \alpha \int \mathcal{L}_m d\Omega. \quad (4.42)$$

Tomando ahora la variación de la acción dada en la ecuación (4.42) respecto a la parte antisimétrica de la conexión, se pueden obtener las siguientes condiciones para una variación  $\delta S_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}$  arbitraria

$$\begin{aligned} S_{\mu} &= 0, \\ \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(k)} - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\rho\sigma}^{(k)} k^{\rho\sigma} k_{\mu\nu} &= 2k_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta k^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Al sustituir la definición (4.39) en la ecuación anterior y utilizando la definición del tensor de energía-momento,  $T_{\mu\nu}$ , válida para relatividad general  $\delta \mathcal{L}_m = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu}$ , llegamos a

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\rho\sigma}^{(g)} g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{\Lambda} \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{\Lambda} T_{\mu\nu}. \quad (4.44)$$

La ecuación anterior reproduce las ecuaciones de campo de Einstein de relatividad general con constante cosmológica, presentadas en la sección 4.1, si consideramos

$$G = -\frac{\alpha c^4}{8\pi\Lambda} \quad (4.45)$$

como constante gravitacional.

Con la formulación que se acaba de presentar hemos visto de qué maneras podemos compatibilizar las ecuaciones de campo que surgen en algunas teorías afines de gravedad con las ecuaciones de campo de Einstein de relatividad general. A partir de la sección siguiente se presenta el formalismo de gravedad polinomial afín, el cual es también una formulación afín de gravedad pero que corresponde a la teoría que utilizamos para construir nuestra *solución de fondo* para el espaciotiempo, considerando el principio cosmológico. Así, en las dos secciones siguientes presentamos una descripción breve del formalismo, de las ecuaciones de campo que pueden obtenerse a partir del mismo y de las soluciones que pueden proponerse para éstas a la luz del principio cosmológico.

### 4.3. El formalismo de gravedad polinomial afín

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, la teoría de gravedad polinomial afín es un formalismo de gravedad en el que, a diferencia de lo que se establece en el relatividad general, el *campo fundamental* de la teoría es la conexión y no la métrica, por lo que se categoriza como un formalismo de gravedad *afín*, [40]. El adjetivo de *polinomial* en el nombre de la teoría surge del hecho de que la *acción* del formalismo se forma a partir de una densidad

que resulta ser un polinomio de los campos que principalmente definen la conexión y la forma de volumen, como se mostrará en breve.

Algo interesante de la formulación en cuestión es que la acción considera *todos* los términos posibles no redundantes que se pueden formar a partir de las combinaciones de los campos de la conexión, a diferencia de lo que pasa con la teoría de relatividad general y demás formalismos métricos en los que la acción suele poder formarse a partir de tantos términos asociados a la métrica o la curvatura, como se desee.

Entre otros aspectos relevantes del formalismo de gravedad polinomial afín, se encuentra el hecho de que es capaz de reproducir las ecuaciones de campo de Einstein en el caso sin materia en el límite sin torsión requiriendo que la conexión sea *equiafín*. También, aunque no sea necesario para el formalismo, a través de los campos que definen la conexión se pueden construir  $\binom{0}{2}$ -tensores simétricos e invertibles que pueden desempeñar un papel de métrica y que permiten introducir *campos materiales* en la teoría. Estos tensores se conocen en el formalismo como *métricas emergentes*. A continuación se mostrará en detalle varias de las características de la teoría que se han mencionado hasta este momento.

Como se mencionó anteriormente, el campo fundamental de la teoría es una conexión afín general de la forma  $\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ . Para construir la acción, resulta conveniente descomponer la conexión afín de la siguiente forma

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} = \Gamma_{(\alpha}^{\beta}{}_{\gamma)} + \Gamma_{[\alpha}^{\beta}{}_{\gamma]}, \quad (4.46)$$

en donde el primer término corresponde a la parte simétrica de la conexión y el segundo a su parte antisimétrica. Adicionalmente, podemos descomponer la parte antisimétrica en una parte con traza y otra sin traza, de modo que podemos definir  $\mathcal{A}_{\alpha} \equiv \Gamma_{[\alpha}^{\mu}{}_{\mu]}$  como la traza de la parte antisimétrica de la conexión y  $\mathcal{B}_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$  como la parte sin traza de la parte antisimétrica de la conexión. De este manera la conexión se puede descomponer como

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} = \hat{\Gamma}_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} + \mathcal{B}_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} + \delta_{[\gamma}^{\beta} \mathcal{A}_{\alpha]}, \quad (4.47)$$

en donde hemos identificado  $\Gamma_{(\alpha}^{\beta}{}_{\gamma)} \equiv \hat{\Gamma}_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ . Es importante recordar que los dos últimos términos en el lado derecho de la ecuación (4.47) corresponden a la contribución de la torsión en la descomposición.

Posteriormente es conveniente definir una *forma de volumen* para construir la acción del formalismo, aunque el mismo no considere la existencia a priori de un tensor métrico. A pesar de lo anterior, podemos utilizar el *producto cuña* para construir un objeto que se *comporte* (o *represente*) como una forma de volumen como  $dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}$ . Como se requiere que la acción de la teoría sea invariante bajo difeomorfismos, los términos que pueden formar la densidad lagrangiana sólo pueden asociarse a la parte antisimétrica de la conexión y como máximo la parte simétrica sólo puede aparecer a través de la acción de la derivada covariante  $\nabla^{\hat{\Gamma}}$  asociada a la parte simétrica de la conexión. De esta forma, *los bloques de construcción* de la acción sólo pueden formarse a partir de los campos  $\nabla_{\alpha}^{\hat{\Gamma}}$ ,  $\mathcal{B}_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}$ ,  $\mathcal{A}_{\alpha}$  y  $dV^{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Para construir todos los términos posibles que podrían conformar la acción, se realiza una especie de *análisis dimensional* en el que se toman en cuenta *la cantidad de índices libres y el peso* de cada término, en el sentido de cada uno se comporta como una *densidad tensorial* y el *peso* de estos lo determina el grado de la potencia del Jacobiano que resulta como factor cuando varían bajo una transformación de coordenadas. La idea principal radica en que todos

los términos *no tengan índices libres* y, como la densidad lagrangiana es una densidad escalar, el peso de todos los términos debe ser igual a uno.

Para lograr el objetivo mencionado se definen dos operadores,  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{W}$  que cuenten el número de índices libres, tanto superiores como inferiores; y el peso, respectivamente, de cada término. En el caso del *operador de índice*  $\mathcal{N}$ , éste se establece de forma que pueda considerar el hecho de que un índice sea covariante (es decir, inferior) o contravariante (es decir, superior). Para hacerlo, se establece que el operador  $\mathcal{N}$  aumente en 1 por cada índice libre superior que el término tenga y disminuya en 1 por cada índice inferior que tenga el término. Con estas consideraciones, los operadores aplicados a los campos con los que se va a conformar los términos de la densidad lagrangiana dan los siguientes resultados

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathcal{A}) &= -1, & \mathcal{N}(\mathcal{B}) &= -1 + 1 - 1 = -1, & \mathcal{N}(\nabla) &= -1, & \mathcal{N}(dV^{\alpha\beta\gamma\delta}) &= 4, \\ \mathcal{W}(\mathcal{A}) &= 0, & \mathcal{W}(\mathcal{B}) &= 0, & \mathcal{W}(\nabla) &= 0, & \mathcal{W}(dV^{\alpha\beta\gamma\delta}) &= 1.\end{aligned}$$

Si consideramos un término polinomial en los campos mencionados anteriormente de la forma general  $\mathcal{Z} = \nabla^m \mathcal{A}^n \mathcal{B}^p (dV^{\alpha\beta\gamma\delta})^q$ , los resultados de aplicar los operadores  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{W}$  sobre este tipo de términos son

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathcal{Z}) &= -m - n - p + 4q, \\ \mathcal{W}(\mathcal{Z}) &= q.\end{aligned}\tag{4.48}$$

De este análisis, se ve que los términos que pueden formar parte de la densidad lagrangiana son aquellos que cumplen las condiciones  $m + n + p = 4q$  y  $q = 1$ . Se debe tener presente, sin embargo que para cada configuración, pueden haber múltiples permutaciones que necesitan analizarse a la luz de las simetrías de los campos fundamentales con los que se construyen.

Así, a partir de todas las consideraciones mencionadas, la acción  $S$  más *general* (exceptuando invariantes topológicos y términos de borde) en cuatro dimensiones está dada como

$$\begin{aligned}S &= \int dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ B_1 \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\nu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\rho{}_\delta + B_2 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta \mathcal{B}_\mu{}^\rho{}_\nu + B_3 \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^\mu{}_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\nu{}_\gamma \mathcal{A}_\delta + B_4 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\rho{}_\delta \mathcal{A}_\sigma \right. \\ &\quad + B_5 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \mathcal{A}_\sigma + C_1 \mathcal{R}_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\nu \nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta + C_2 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta + D_1 \mathcal{B}_\nu{}^\mu{}_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\alpha \nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\lambda{}_\delta \\ &\quad + D_2 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\mu{}^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta + D_3 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\nu \mathcal{B}_\beta{}^\lambda{}_\gamma \nabla_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\delta + D_4 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \nabla_\lambda \mathcal{A}_\sigma + D_5 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\sigma \nabla_\lambda \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \\ &\quad + D_6 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\gamma \nabla_\lambda \mathcal{A}_\delta + D_7 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\lambda \nabla_\gamma \mathcal{A}_\delta + E_1 \nabla_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\rho{}_\beta \nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta + E_2 \nabla_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\rho{}_\beta \nabla_\gamma \mathcal{A}_\delta \\ &\quad \left. + F_1 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \mathcal{B}_\mu{}^\lambda{}_\rho \mathcal{B}_\sigma{}^\rho{}_\lambda + F_2 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\lambda \mathcal{B}_\delta{}^\lambda{}_\rho \mathcal{B}_\mu{}^\rho{}_\nu + F_3 \mathcal{B}_\nu{}^\mu{}_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\lambda{}_\gamma \mathcal{A}_\delta + F_4 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right].\end{aligned}\tag{4.49}$$

En la acción anterior, como se mencionó antes, la derivada covariante está asociada a la parte simétrica de la conexión, por lo que el tensor de curvatura que aparece en la densidad lagrangiana también está asociada a dicha parte de la conexión por lo que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\hat{\Gamma}}$ .

Una característica bastante relevante de este formalismo radica en el hecho de que la falta de un tensor métrico implica necesariamente que el número de términos en la acción es finito. Esta propiedad típicamente es conocida como *rigidez* de la teoría. El hecho de las constantes de acoplamiento (las *amplitudes* de cada contribución en la densidad lagrangiana) sean adimensionales sugiere que la teoría puede ser *renormalizable por conteo de potencias*, de manera que, en el caso hipotético en que la teoría sea cuantizable, todos los términos que podrían surgir deberían tener la forma de aquellos escritos en la ecuación (4.49). Lo anterior resulta algo beneficioso desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos. Adicionalmente, la

naturaleza adimensional de las constantes de acoplamiento sugiere una *simetría conforme*, al menos a nivel clásico.

Por medio de la acción definida en la ecuación (4.49), se pueden obtener las ecuaciones de campo de la teoría bajo la variación de la acción en términos de los campos de los que depende la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  a través de un análisis variacional. En este caso las ecuaciones de Euler-Lagrange corresponderían a las ecuaciones de campo del formalismo. Dado que la conexión está descompuesta a través de tres campos, las ecuaciones para cada campo están dadas como:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho} &= 0, \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho} &= 0, \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Para obtener una forma conveniente de estas ecuaciones, explícitas en términos de los campos de la conexión, resulta provechoso definir momentos canónicos conjugados a los campos de la conexión. Primero, podemos definir el momento canónico  $\Pi_{\hat{\Gamma}}$  conjugado a  $\hat{\Gamma}$  definido como

$$(\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho}. \quad (4.51)$$

Como la derivada de la conexión sólo aparece en el tensor de curvatura, bien podemos escribir

$$(\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta} \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho} \equiv (z_{\hat{\Gamma}})^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho}. \quad (4.52)$$

En donde se ha definido  $(z_{\hat{\Gamma}})^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta$ . El segundo factor en el lado derecho de la ecuación (4.52) puede ser calculado explícitamente a partir de la definición del tensor de curvatura. De esta forma es demostrable que

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho} = 4\delta^\gamma{}_\lambda \delta^\mu{}_{[\alpha} \delta^{(\nu} \delta^{\rho)}{}_{\beta]} \delta^\delta, \quad (4.53)$$

de donde se obtiene que

$$(\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = 2(z_{\hat{\Gamma}})^{[\mu\nu]}{}_{\lambda\rho} + 2(z_{\hat{\Gamma}})^{[\mu\rho]}{}_{\lambda}{}^\nu. \quad (4.54)$$

De forma similar el segundo término de la ecuación de Euler-Lagrange para  $\Gamma$ . De esta manera puede obtenerse que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta} \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho}. \quad (4.55)$$

Una vez más, el último factor de la ecuación anterior puede ser calculado a partir de la definición de curvatura:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho} = 4 \left[ \delta^\gamma{}_\lambda \delta^{(\nu} \delta^{\rho)}{}_{[\alpha} \hat{\Gamma}_{\beta]}{}^\delta + \delta^\rho{}_\delta \delta^{(\nu} \delta^{\lambda)}{}_{[\beta} \hat{\Gamma}_{\alpha]}{}^\gamma \right], \quad (4.56)$$

Y con este resultado podemos obtener

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho} = 2 \left[ (z_{\hat{\Gamma}})^{[\nu\beta]}{}_\lambda \delta \hat{\Gamma}_\beta{}^\rho{}_\delta + (z_{\hat{\Gamma}})^{[\rho\beta]}{}_\lambda \delta \hat{\Gamma}_\beta{}^\nu{}_\delta + (z_{\hat{\Gamma}})^{[\beta\nu]}{}_\gamma \rho \hat{\Gamma}_\beta{}^\gamma{}_\lambda + (z_{\hat{\Gamma}})^{[\beta\rho]}{}_\gamma \nu \hat{\Gamma}_\beta{}^\gamma{}_\lambda \right] \quad (4.57)$$

$$= -(\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\lambda \delta \hat{\Gamma}_\mu{}^\rho{}_\delta - (\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\rho}{}_\lambda \delta \hat{\Gamma}_\mu{}^\nu{}_\delta + (\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\gamma \rho \hat{\Gamma}_\mu{}^\gamma{}_\lambda. \quad (4.58)$$

De esta forma, las ecuaciones de campo para la parte simétrica de la conexión pueden escribirse como

$$\nabla_\mu (\Pi_{\hat{\Gamma}})^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = \frac{\partial^* \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_\nu^\lambda{}_\rho}, \quad (4.59)$$

en donde el asterisco en la derivada parcial del lado derecho de la ecuación anterior señala que la derivada se toma sólo sobre los términos en los que  $\hat{\Gamma}$  aparezca explícitamente y no en aquellos en los que aparecería indirectamente a través del tensor de curvatura.

Un tratamiento similar puede realizarse para los campos  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A}$ . Con definiciones adecuadas de momentos conjugados para los campos  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A}$ , denotados como  $(\Pi_{\mathcal{B}})$  y  $(\Pi_{\mathcal{A}})$ , respectivamente, las ecuaciones de campo para estos campos pueden escribirse como

$$\nabla_\mu (\Pi_{\mathcal{B}})^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho}. \quad (4.60)$$

$$\nabla_\mu (\Pi_{\mathcal{A}})^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu}. \quad (4.61)$$

En el caso de la ecuación de campo para  $\mathcal{B}$  conviene tener presente que

$$\frac{\partial \nabla_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\gamma{}_\delta}{\partial (\partial_\mu \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho)} = 2 \delta^\mu{}_\alpha \delta^\gamma{}_\lambda \delta^{[\nu}{}_\beta \delta^{\rho]}{}_\delta, \quad (4.62)$$

y también que

$$\frac{\partial \nabla_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\gamma{}_\delta}{\partial \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho} = -2 \hat{\Gamma}_\alpha{}^{[\nu}{}_\beta \delta^{\rho]}{}_\delta \delta^\gamma{}_\lambda - 2 \hat{\Gamma}_\alpha{}^{[\rho}{}_\delta \delta^{\nu]}{}_\beta \delta^\gamma{}_\lambda + 2 \hat{\Gamma}_\alpha{}^\gamma{}_\lambda \delta^{[\nu}{}_\beta \delta^{\rho]}{}_\delta. \quad (4.63)$$

La ecuación de campo para  $\mathcal{A}$  es más sencilla de manejar y, a través de un enfoque riguroso como el que se utilizó para obtener las otras ecuaciones de campo, se puede reescribir dicha ecuación en términos de su momento conjugado.

Otro aspecto interesante de la gravedad polinomial afin descansa en el hecho de que, aunque este formalismo es una teoría afin, es decir, su campo fundamental es la conexión y se puede prescindir de un tensor métrico, es posible en este formalismo construir  $\binom{0}{2}$ -tensores simétricos a través de los campos de la conexión. Si son invertibles, estos objetos pueden considerarse como tensores métricos que *emergen* o son *inducidos* por la conexión y las simetrías que se imponen sobre ella. Algunos  $\binom{0}{2}$ -tensores simétricos que pueden formarse a partir de los campos de la conexión son el tensor *simetrizado* de Ricci  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  definido aquí convenientemente como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda(\mu}{}^\lambda{}_{\nu)}, \quad (4.64)$$

el tensor de Poplawski  $\mathcal{P}$ , presentado en la sección 4.2.3, que corresponde a una contracción de la torsión,

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} \propto \mathcal{T}_\mu{}^\lambda{}_\sigma \mathcal{T}_\nu{}^\sigma{}_\lambda, \quad (4.65)$$

y, de forma análoga, bien se podría definir un tensor simétrico que surga de la contracción del campo  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} \propto \mathcal{B}_\mu^\lambda \mathcal{B}_\nu^\sigma \mathcal{B}_\lambda^\sigma. \quad (4.66)$$

Después de esto, lo que resta es obtener soluciones a las ecuaciones de campo que tengan las simetrías requeridas de acuerdo a algún problema de interés. Dado que nos interesan soluciones cosmológicas a las ecuaciones de campo, a continuación veremos cómo pueden establecerse explícitamente las componentes de la conexión afín, como soluciones a las ecuaciones de campo y de manera consistente con el *principio cosmológico*.

## 4.4. Soluciones del formalismo de gravedad polinomial afín consistentes con el principio cosmológico

Como se ha mencionado antes, el principio cosmológico establece que, en escala cosmológica, el Universo es isótropo y homogéneo. Si nuestro espaciotiempo es cuatro-dimensional con coordenadas  $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ , el principio cosmológico impone isotropía y homogeneidad a nuestro espaciotiempo a través de la subvariedad tri-dimensional, que en nuestro caso está parametrizado por las coordenadas  $x^i = (r, \theta, \varphi)$ .

La isotropía impone la cualidad de que nuestra subvariedad 3-dimensional sea indistinguible bajo rotaciones, mientras que la homogeneidad asegura que el *origen* de coordenadas de la subvariedad sea indistinguible bajo traslaciones. Lo anterior establece que nuestra subvariedad 3-dimensional tiene tres elecciones posibles para su grupo de simetrías: el grupo ortogonal  $SO(4)$ , el grupo ortogonal  $SO(3, 1)$  y el grupo euclídeo  $E_3$ .

El *álgebra* de los grupos anteriormente mencionados permite establecer los generadores de las transformaciones asociadas a estos grupos, es decir sus *vectores de Killing* correspondientes. Estos vectores de Killing, en coordenadas esféricas, pueden escribirse explícitamente como:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\theta & \cot\theta \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta & \cot\theta \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

$$P_1 = \sqrt{1 - \kappa r^2} \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \cos\varphi & \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

$$P_2 = \sqrt{1 - \kappa r^2} \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \sin\varphi & \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r} & -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

$$P_3 = \sqrt{1 - \kappa r^2} \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

en donde el parámetro  $\kappa$ , tal y como ocurre en la construcción de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en el formalismo de relatividad general, sección 4.1, está dado por

$$\kappa = \begin{cases} 1 & SO(4) \\ 0 & E_3 \\ -1 & SO(3, 1) \end{cases}. \quad (4.73)$$

Como hay seis vectores de Killing asociados a la subvariedad espacial 3-dimensional de nuestro espaciotiempo, se puede ver que nuestra 3-subvariedad espacial, sujeta a las características

de homogeneidad e isotropía, es *maximalmente simétrico*, [41]. Las componentes explícitas de la conexión, bajo las imposiciones de que la subvariedad 3-dimensional es isótropa y homogénea, pueden determinarse a partir de la derivada de Lie de la conexión considerando a los vectores de Killing como generadores de las transformaciones anteriormente mencionadas, [40]. Asimismo es demostrable que las simetrías en esta subvariedad espacial inducen una métrica  $s_{ij}$  y una conexión  $\gamma_i^j{}_k$  que emergen como resultado de la imposición del principio cosmológico, dadas como

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

la parte simétrica de la conexión dada como

$$\begin{aligned} \gamma_r^r{}_r &= \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}, & \gamma_\theta^r{}_\theta &= \kappa r^3 - r, \\ \gamma_\varphi^r{}_\varphi &= (\kappa r^3 - r) \sin^2 \theta, & \gamma_{(r}{}^\theta{}_\theta) &= \frac{1}{r}, \\ \gamma_\varphi^\theta{}_\varphi &= -\cos \theta \sin \theta, & \gamma_{(r}{}^\varphi{}_\varphi) &= \frac{1}{r}, \\ \gamma_{(\theta}{}^\varphi{}_\varphi) &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

y los términos adicionales asociados a la torsión (diferentes, como máximo, por un factor multiplicativo)

$$\gamma_{[i}^j{}_{k]} \equiv S_i^j{}_k = \sqrt{s} s^{jl} \varepsilon_{ilk}. \quad (4.76)$$

A partir de estos objetos, se puede establecer la solución para la conexión 4-dimensional, de acuerdo con [42],

$$\begin{aligned} \Gamma_t^t{}_t &= f(t), & \Gamma_{(i}^t{}_{j)} &= g(t) s_{ij}, \\ \Gamma_{(t}^i{}_{j)} &= h(t) \delta_j^i, & \Gamma_{(i}^j{}_{k)} &= \gamma_{(i}^j{}_{k)}, \\ \Gamma_{[t}^i{}_{j]} &= p(t) S_t^i{}_j & \Gamma_{[i}^j{}_{k]} &= q(t) S_i^j{}_k, \\ &= -p(t) \delta_j^i, \end{aligned} \quad (4.77)$$

en donde  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $p$  y  $q$  son sólo funciones del tiempo, las cuales son determinadas cuando uno requiere que las ecuaciones de campo, obtenidas por el formalismo de gravedad polinomial afín, sean satisfechas (por lo que dichas funciones dependen de la teoría que se utilice). De las funciones anteriores, bajo una reparametrización adecuada del tiempo,  $f$  puede igualarse a cero, por lo que la solución cosmológica de fondo está determinada principalmente por las funciones  $g$ ,  $h$ ,  $p$  y  $q$ ; además de la métrica  $s_{ij}$  y la conexión  $\gamma_i^j{}_k$ . Es posible, además, relacionar las componentes de esta conexión isótropa y homogénea, dadas por la ecuación (4.77), con la traza  $\mathcal{A}_\mu$  y la parte sin traza  $\mathcal{B}_\alpha^\beta{}_\gamma$ . Es demostrable que, a partir de las simetrías impuestas por el principio cosmológico, las componentes no nulas de  $\mathcal{A}_\mu$  y  $\mathcal{B}_\alpha^\beta{}_\gamma$  pueden escribirse como

$$\mathcal{A}_t = -3p(t), \quad \mathcal{B}_i^j{}_k = \Gamma_{[i}^j{}_{k]} = q(t) S_i^j{}_k. \quad (4.78)$$

Dicho todo lo anterior, a continuación obtendremos las ecuaciones de campo de la teoría a partir del formalismo mostrado en la sección 4.3 y sustuiremos en ellas las ecuaciones (4.77) y

(4.78) para obtener soluciones para las funciones  $g$ ,  $h$ ,  $p$  y  $q$ . El análisis mostrado a continuación representa un resumen del trabajo [43].

A través de la variación de la acción detallada en la ecuación (4.49) y utilizando las soluciones para la conexión mostradas en las dos ecuaciones anteriores, pueden obtenerse las siguientes ecuaciones de campo

$$\left( B_3 (\dot{g} + gh + 2\kappa) - 2B_4 (\dot{g} - gh) - 6D_6 pg - 2F_3 q^2 \right) q = 0, \quad (4.79)$$

$$(-3B_3 pq + 6B_4 pq + C_1 (\dot{q} - 2hq)) g = 0, \quad (4.80)$$

$$-3(B_3 + 2B_4) pgq + 2C_1 (\kappa q + 4ghq - g\dot{q} - q\dot{g}) - 2q^3 (D_1 - 2D_2 + D_3) = 0, \quad (4.81)$$

$$-3B_3 (p(hq - \dot{q}) - qp\dot{p}) + 6B_4 (p(-hq - \dot{q}) - qp\dot{p}) + C_1 (4h^2 q + 2q\dot{h} - \ddot{q}) + 9D_6 p^2 q = 0, \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} & -3B_3 (\dot{g} + gh + 2\kappa) p + 6B_4 (\dot{g} - gh) p + C_1 (2\kappa h + 4gh^2 + 2g\dot{h} - \ddot{g}) \\ & - 6hq^2 (D_1 - 2D_2 + D_3) + 9D_6 p^2 g + 18F_3 pq^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

en donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  producen solo una ecuación cada una, ecuaciones (4.79) y (4.83), respectivamente, mientras que las otras tres vienen de la parte simétrica de la conexión  $\Gamma$ . Es meritorio resaltar que tenemos cuatro funciones desconocidas del tiempo ( $g(t)$ ,  $h(t)$ ,  $q(t)$ ,  $p(t)$ ) mientras que tenemos cinco ecuaciones diferenciales, lo que significa que el sistema de ecuaciones diferenciales está *sobredeterminado*. Este sistema de ecuaciones, sin embargo, puede ser resuelto analíticamente sin ninguna suposición. Aquí es conveniente desarrollar un *esquema lógico* que permita buscar sistemáticamente soluciones por medio de *ramas*.

Primero, puede evidenciarse que las ecuaciones (4.79) y (4.80) tienen la forma

$$\mathcal{F}(g, \dot{g}, h, q, p) q = 0, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{G}(h, q, \dot{q}, p) g = 0, \quad (4.85)$$

en donde

$$\mathcal{F}(g, \dot{g}, h, q, p) \equiv B_3 (\dot{g} + gh + 2\kappa) - 2B_4 (\dot{g} - gh) - 6D_6 pg - 2F_3 q^2. \quad (4.86)$$

$$\mathcal{G}(h, q, \dot{q}, p) \equiv -3B_3 pq + 6B_4 pq + C_1 (\dot{q} - 2hq). \quad (4.87)$$

Así, utilizando las ecuaciones (4.84) y (4.85) es posible distinguir cuatro ramas diferentes:

- Primera rama:  $\mathcal{F}(g, h, q, p) = 0 \wedge \mathcal{G}(h, q, p) = 0$ .
- Segunda rama:  $\mathcal{F}(g, h, q, p) = 0 \wedge g = 0$ .
- Tercera rama:  $\mathcal{G}(h, q, p) = 0 \wedge q = 0$ .

- Cuarta rama:  $q = 0 \wedge g = 0$ .

Puede demostrarse que sólo aparecen soluciones analíticas no triviales a las ecuaciones de campo en la primera y segunda rama. Sin embargo, aquí se presentarán solamente las soluciones correspondientes a la primera rama dado que permiten construir *métricas emergentes* a partir de las soluciones obtenidas, de acuerdo con lo que se presentó en la sección 4.3.

Con el fin de simplificar los cálculos, introducimos el factor constante  $\Omega$  definido como

$$\Omega \equiv \frac{\gamma}{\alpha\beta}, \quad (4.88)$$

en donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  representan constantes asociadas a algunas constantes de acoplamiento que aparecen en las ecuaciones de campo definidas como

$$\alpha = \left( \frac{D_1 - 2D_2 + D_3}{C_1} \right), \quad (4.89)$$

$$\beta = \left( \frac{3B_3 - 2B_4}{2} \right), \quad (4.90)$$

$$\gamma = (\beta - 2B_3)\alpha + 2F_3, \quad (4.91)$$

y considerando además los reescalamientos por la constante de integración  $\lambda$

$$q(t) \rightarrow \frac{q(t)}{\lambda}, \quad g(t) \rightarrow \frac{g(t)}{\lambda^2}, \quad (4.92)$$

nos permite escribir

$$h(t) = -\frac{\Omega}{2t(1+\Omega)}, \quad (4.93)$$

$$g(t) = g_1 t^{-\frac{\Omega}{1+\Omega}} - \left( \frac{\alpha}{1+\Omega} \right) t^{\frac{1-\Omega}{1+\Omega}}, \quad (4.94)$$

$$q(t) = \left( \frac{1}{1+\Omega} \right) t^{-\frac{\Omega}{1+\Omega}}, \quad (4.95)$$

$$p(t) = 0, \quad (4.96)$$

en donde  $g_1$  es una constante de integración. En esta representación, el parámetro  $\Omega$  determina la dependencia temporal, mientras que la razón  $g_1/\alpha$  caracteriza la amplitud relativa de los dos términos en la ecuación (4.94). Considerando la dependencia temporal en esa ecuación, de hecho, puede notarse que si  $\Omega > 1$ , entonces los dos términos divergen en el origen del tiempo, divergiendo el primero más rápido al principio pero decayendo más rápido que el segundo. Si, en cambio,  $0 < \Omega < 1$ , entonces sólo el término proporcional a  $g_1$  diverge en  $t = 0$ . Para  $-1 < \Omega < 0$ , este término se anula en  $t = 0$  y el segundo es dominante para tiempos posteriores. Por último, si  $\Omega < -1$  entonces ambos términos divergen en  $t = 0$ . No es difícil ver que  $q(t)$  es regular en el origen del tiempo sólo cuando  $0 < \Omega < 1$ . Esto implica que la única forma posible de hacer que  $q(t)$  y  $g(t)$  sean regulares en  $t = 0$  consiste en establecer el valor de la constante de integración  $g_1$  igual a cero cuando  $0 < \Omega < 1$ . A pesar de todo, sin importar el valor de  $\Omega$ ,  $h(t)$  siempre diverge cuando  $t \rightarrow 0$ .

De acuerdo con lo comentado en la sección 4.3, en el formalismo de gravedad afín pueden construirse algunos  $\binom{0}{2}$ -tensores que pueden ser candidatos de métricas inducidas en la teoría, es decir, candidatos de métricas emergentes. En este caso, dado que establecimos que  $p(t) = 0$ , la cual es una función asociada a la traza de la parte antisimétrica de la conexión, no se formar un  $\binom{0}{2}$ -tensor invertible a partir de la parte antisimétrica de la torsión, por lo que en este caso el tensor de Poplawski no representaría una métrica.

Por el contrario, el tensor simetrizado de Ricci, mostrado primeramente en la ecuación (4.64) y formado a partir de la curvatura asociada a la parte simétrica de la conexión (o de la simetrización del tensor de Riemann con una conexión general), sí puede representar una métrica. Utilizando la solución cosmológica para la conexión presentada en la ecuación (4.77), las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\mathcal{R}_{tt} = -3(\dot{h} + h^2), \quad \mathcal{R}_{rr} = \frac{\dot{g} + gh + 2\kappa}{1 - \kappa r^2}, \quad (4.97)$$

con  $\mathcal{R}_{\theta\theta}$  y  $\mathcal{R}_{\phi\phi}$  relacionados con  $\mathcal{R}_{rr}$  como se esperaría. Si este tensor de Ricci debiese ser identificado con una métrica homogénea e isotrópica, hubiéramos podido escribir  $g_{tt} = \mathcal{R}_{tt}/\mathcal{R}_0$  y  $a^2(t)s_{ij} = \mathcal{R}_{ij}/\mathcal{R}_0$  en donde  $a(t)$  representaría el factor de escala mencionado en la sección 4.1,  $s_{ij}$  representaría la métrica inducida en la solución de la conexión por el principio cosmológico en la subvariedad 3-dimensional del espaciotiempo y  $\mathcal{R}_0$  es una constante con dimensiones de curvatura de manera que tengamos una métrica sin dimensiones.

Utilizando las ecuaciones (4.93), (4.94) y (4.97), podemos calcular las componentes del tensor simetrizado de Ricci (en el caso de  $\kappa = 0$ )

$$\mathcal{R}_{tt} = -\frac{3\Omega(2 + 3\Omega)}{4t^2(1 + \Omega)^2}, \quad (4.98)$$

$$\mathcal{R}_{rr} = \frac{\alpha(3\Omega - 2)}{2(\Omega + 1)^2} t^{-\frac{2\Omega}{1+\Omega}}. \quad (4.99)$$

Tenga presente que si  $\Omega \neq -1$  entonces el tensor de Ricci con seguridad se comporta como un tensor métrico debido a que esa condición define una matriz invertible.

Lo que debería verificarse a continuación es si este objeto satisface la *restricción* de signatura lorentziana (en el sentido con el que esta propiedad fue presentada en la sección 3.5) en una variedad (1,3)-dimensional como bajo la cual nuestro espaciotiempo puede ser representado. De lo que debiésemos asegurarnos es que la teoría sea invariante bajo una elección libre de signatura en el sentido de que uno pudiese tener plena libertad de escoger entre  $-+++$  ó  $+- - -$ . Bajo un análisis cuidadoso puede apreciarse que está libertad puede conseguirse a través de la constante arbitraria de proporcionalidad  $\mathcal{R}_0$ , definiéndola de manera adecuada en ambas elecciones de signatura.

# Formalismo de perturbaciones métricas

---

En este capítulo se describe brevemente el formalismo habitual de perturbaciones que se implementa sobre la métrica en relatividad general y que cumple el papel del método convencional que se utiliza para realizar perturbaciones cosmológicas, actualmente. Esta introducción al formalismo mencionado se realiza con el fin de poder contrastarlo con el método de perturbaciones cosmológicas afines que proponemos en este trabajo. En la primera sección del capítulo describimos brevemente cómo se desarrolla el método y en la segunda sección desarrollamos en detalle un caso ilustrativo: la teoría de perturbaciones *métricas* como herramienta para modelar la aproximación de *gravedad débil*. El método es esencialmente el mismo aunque el espaciotiempo de fondo no sea *curvo*. La discusión que se presenta en este capítulo está basada principalmente en las referencias [32, 44] y [45].

## 5.1. Descripción general del método

El método de perturbaciones cosmológicas (métricas) en relatividad general se fundamenta principalmente en la idea de *considerar desviaciones* desde soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein, ecuación (4.14). La motivación de esto radica en el hecho de que a través de la idea de un Universo perfectamente isótropo y homogéneo, no se puede explicar la formación de estructuras como estrellas, clústeres de galaxias y demás objetos que no puedan sustentarse directamente a partir del principio cosmológico. En este aspecto, la teoría de perturbaciones y el análisis de la dinámica de éstas surgen en conjunto como una primera forma de abordar el problema de la formación de estructuras en el Universo sin necesitar encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de campo que consideren estas *inhomogeneidades* en el Universo.

El desarrollo del método empieza suponiendo que la métrica *real*  $\bar{g}_{\mu\nu}$  del espaciotiempo puede ser expresada como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

en donde  $h_{\mu\nu}$  representa una desviación *perturbativa* de la métrica real desde una métrica  $g_{\mu\nu}$  de *fondo*, la cual es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein. Para perturbaciones cosmológicas, esta métrica de fondo representaría la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, ecuación (4.15). Por la consistencia que se supone para la ecuación anterior, la perturbación  $h$  tiene las mismas simetrías que las métricas  $\bar{g}$  y  $g$ , por lo cual, se puede ver que tiene 10 componentes independientes. A partir de este punto, el método puede desarrollarse de dos formas completamente equivalentes.

La primera forma, bajo el supuesto de que la perturbación es *pequeña* consiste en desarrollar una *linealización* de las ecuaciones de campo en un *parámetro de control*  $\lambda$  que *mide el tamaño*

de la perturbación en el sentido de que la métrica real  $\bar{g} = \bar{g}(\lambda)$  depende diferenciablemente del parámetro y  $\bar{g}(0) = g$ , es decir, cuando el parámetro de control se iguala a cero, las soluciones real y de fondo son equivalentes, [44].

Si  $\mathcal{E}[\bar{g}(\lambda)] = 0$  representa la ecuación de campo evaluada en la métrica real, una forma más sencilla de esta ecuación puede obtenerse diferenciándola respecto al parámetro  $\lambda$  y estableciendo  $\lambda$  igual a cero,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} [\mathcal{E}(\bar{g}(\lambda))] \right|_{\lambda=0} = 0. \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) es una ecuación linealizada para la perturbación

$$h = \left. \frac{d\bar{g}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (5.3)$$

lo que implica que pueda ser expresada como  $\mathcal{L}(h) = 0$  en donde  $\mathcal{L}$  representa un operador lineal (típicamente diferencial).

La segunda forma consiste en calcular los términos de las ecuaciones de campo de Einstein que dependen explícitamente de la métrica y escribirlos en términos de la perturbación  $h$  hasta el orden de la misma que se desee considerar y sustituir dichas expresiones en las ecuaciones de campo.

Hasta este punto, si se decidiera tomar cualesquiera de los dos caminos mencionados sin tratar previamente la perturbación, las ecuaciones que se obtendrían podrían catalogarse como repulsivamente complicadas", [32]. En el caso cosmológico, sin embargo, es posible simplificar dichas expresiones si se considera una descomposición (3+1) de la perturbación y posteriormente una *descomposición de Helmholtz* de sus componentes de manera que la perturbación pueda descomponerse en escalares, vectores *solenoidales* o *transversos* (es decir, cuya divergencia es cero) y tensor simétricos sin divergencia y sin traza, dado que esta descomposición permite *desacoplar* entre sí las ecuaciones de campo de Einstein en *modos* escalares, vectoriales y tensoriales. En la sección 5.2 se mostrará como puede realizarse esta descomposición en el caso de un fondo con una métrica de Minkowski. Las descomposiciones de Helmholtz generales de vectores y  $\binom{0}{2}$ -tensores simétricos en el caso de fondos con curvatura no nula están dadas desde la ecuación (6.35) hasta la ecuación (6.41) en la sección 6.5.

Como último paso previo antes de tratar las ecuaciones de campo en términos de la perturbación  $h$  es conveniente además realizar una transformación infinitesimal de coordenadas sobre los campos en los que se descompone la perturbación con el fin de encontrar *gauges* (o *calibres* como suelen ser conocidos, clásicamente) que puedan establecerse sobre el sistema e incluso poder definir cantidades invariantes bajo la transformación. Este tipo de análisis es relevante debido a que ilumina la forma en como pueden categorizarse las componentes o *grados de libertad* de los campos de la perturbación.

Puede verse que al fijar un *gauge*, cuatro grados de libertad pueden ser *eliminados* de la perturbación dado que éstos *codifican* información sobre las coordenadas solamente. De aquí se ve que el *verdadero* número de componentes independientes de la perturbación, que contienen información respecto al campo gravitacional solamente (y que por ende *no depende de la elección del sistema coordinado*, son seis, [45]. Este análisis permite establecer cuántos campos invariantes (y de cuántas componentes cada uno) bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas pueden establecerse.

Después del análisis mencionado, es conveniente entonces ahora sí implementar la perturbación a través de sus campos en las ecuaciones de campo de Einstein de cualquiera de las dos formas anteriormente descritas. A través de esto, la dinámica de los campos de la perturbación puede establecerse y muchas conclusiones pueden desarrollarse a partir de las ecuaciones de evolución que puede obtenerse para cada campo de la perturbación. Esta fue la manera, de hecho, en cómo apareció el primer indicio (teórico) de la existencia de *ondas gravitacionales*, representadas a través del campo *doblemente transverso* (es decir, que tiene traza y divergencia nulas y, por ende, sólo cuenta con dos grados de libertad) de la perturbación. Al aplicar el método de perturbaciones descrito puede demostrarse que la ecuación de evolución para el campo mencionado toma la forma de una ecuación de onda, lo que inmediatamente sugiere que su solución debe ser una función de onda para que sea solución de la ecuación mencionada. Análisis posteriores pueden demostrar incluso que los dos grados de libertad del campo pueden asociarse a las dos *polarizaciones* posibles que la onda gravitacional puede tener.

Esencialmente, el método como tal consiste en lo que se ha descrito y desarrolla los cimientos del análisis de fluctuaciones cosmológicas dado que a través del formalismo presentado se pueden deducir las ecuaciones de la teoría de relatividad general que gobiernan la dinámica de fluctuaciones pequeñas y se pueden establecer conclusiones e implicaciones a partir de su estudio. Desde el punto de vista de la cosmología, sin embargo, tratamientos posteriores pueden realizarse a los campos en los que se descompone una perturbación métrica cosmológica. Típicamente, el formalismo presentado en este capítulo es aplicado para estudiar la evolución de estructuras en el Universo desde la era dominada por la radiación hasta tiempos *cercanos* al presente, con el fin de obtener resultados que puedan ser contrastados con las fluctuaciones observadas, por ejemplo, en el *fondo cósmico de microondas*, [32]. Lastimosamente, este análisis posterior escapa al alcance del presente trabajo dado a que el formalismo que proponemos aún se encuentra en una etapa temprana de desarrollo y lo que se busca con esta propuesta es mostrar que efectivamente es posible establecer un formalismo de perturbaciones cosmológicas para teorías de gravedad afines y presentar algunos resultados de esta propuesta.

A continuación, ilustramos la aplicación del formalismo de perturbaciones métricas a través de un caso particular en la sección siguiente.

## 5.2. Ilustración del método en el caso de gravedad débil

Con el fin de ilustrar el método de perturbaciones métricas de primera mano, en esta sección lo aplicamos al problema de gravedad débil. En este sentido, el método de perturbaciones permite modelar un Universo en el que el campo gravitatorio es lo suficientemente débil en todas partes como para ser considerado como una desviación pequeña desde un Universo esencialmente *plano* (es decir, sin curvatura). En este caso, la solución (de fondo) de la ecuación de campo de Einstein corresponde a la métrica de Minkowski  $\eta$ , ya presentada anteriormente en la sección 4.1.

A partir de lo anterior, la métrica real  $\bar{g}$  en el problema de gravedad débil puede expresarse como

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}. \quad (5.4)$$

Una primera descomposición de tipo (3+1) sugiere que la perturbación  $h$  puede analizarse a través de sus componentes  $h_{tt}$ ,  $h_{ti}$  y  $h_{ij}$ . A continuación, conviene proponer una descomposición

de Helmholtz para cada una de estas componentes. En este sentido, la componente escalar  $h_{tt}$  de  $h$  no puede descomponerse más dado que corresponde sólo a una componente independiente y la descomposición de Helmholtz permite descomponer campos de tres o más componentes independientes en campos de una y dos componentes independientes<sup>1</sup>. Es demostrable entonces que las componentes de la perturbación métrica tienen las siguientes descomposiciones de Helmholtz, [45]:

$$\begin{aligned} h_{tt} &= 2\mathcal{U}/c^2, \\ h_{ti} &= -4\mathcal{U}_i/c^3 - \partial_i\mathcal{X}/c, \\ h_{ij} &= 2\delta_{ij}\mathcal{V}/c^2 + (\partial_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\mathcal{W} + (\partial_i\mathcal{W}_j + \partial_j\mathcal{W}_i)/c^2 + h_{ij}^{TT}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

junto con las condiciones

$$\partial_j\mathcal{U}^j = 0, \quad \partial_j\mathcal{W}^j = 0, \quad \partial_k h_{TT}^{jk} = 0 = \delta_{jk} h_{TT}^{jk}. \quad (5.6)$$

Se debe tener presente que, como el fondo es plano, la descomposición de Helmholtz puede plantearse a través de derivadas parciales para los términos longitudinales y transversos en lugar de utilizar derivadas covariantes. En el caso de un fondo con curvatura, las derivadas parciales deben ser sustituidas por derivadas covariantes, como se realiza en la referencia [46]. Asimismo, en el caso de un fondo más general, los tensores delta de Kronecker deben ser reemplazados por el tensor métrico del fondo (o el que *pueda definirse* o *emerger* en la solución de fondo).

Por las restricciones dadas en la ecuación (5.6), puede verse que los campos  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}_i$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W}_i$  y  $h_{ij}^{TT}$  tienen una, dos, una, una, una, dos y dos componentes independientes, respectivamente. Las constantes asociadas a factores numéricos y la rapidez de la luz pueden ser absorbidas en los campos mencionados pero en este ejemplo se dejan intencionalmente con el fin de facilitar el álgebra.

A continuación, veremos cómo las 10 componentes independientes de la perturbación métrica  $h$  (contenidas en los campos mostrados en la descomposición (5.5)) varían bajo una transformación infinitesimal de coordenadas, pertenecientes al grupo de diffeomorfismos infinitesimales. Para esto, es necesario primero ver cómo varía cualquier componente de la perturbación  $h$  bajo la transformación de coordenadas mencionada. Consideremos una transformación *pequeña* de coordenadas de la forma

$$x'^\alpha = x^\alpha + \zeta^\alpha(x^\beta), \quad (5.7)$$

en donde  $\zeta^\alpha$  es un vector en el mismo *orden* que la perturbación, es decir, ambos son del orden del parámetro de control  $\lambda$ , en el contexto de la discusión desarrollada en la sección 5. A primer orden en  $\lambda$ , la inversa a la ecuación (5.7) sería  $x^\alpha = x'^\alpha - \zeta^\alpha(x'^\beta)$ , dado que las diferencias entre  $\zeta^\alpha(x^\beta)$  y  $\zeta^\alpha(x'^\beta)$  son de segundo orden en  $\lambda$ . Lo anterior implica que un elemento diferencial de posición transforma como  $dx^\alpha = (\delta^\alpha_\beta - \partial_\beta\zeta^\alpha)dx'^\beta$  y su sustitución en la ecuación (3.29) del elemento de línea  $dl^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$  revela que la métrica *real* transforma como

$$\bar{g}'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha(\eta_{\beta\mu}\zeta^\mu) - \partial_\beta(\eta_{\alpha\mu}\zeta^\mu) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (5.8)$$

---

<sup>1</sup>Desde el punto de vista de la teoría de grupos, capítulo 2, la descomposición de Helmholtz puede entenderse como una descomposición de una representación irreducible en el grupo  $SO(3)$  en representaciones irreducibles para el grupo  $SO(2)$ . Una justificación de este enunciado, a través del cálculo de caracteres de elementos típicos a ambos grupos, se presenta en la sección 6.3 del capítulo 6.

De esta manera, evidenciando que a primer orden en  $\lambda$  la métrica de fondo es invariante bajo la transformación, se puede ver que la perturbación transforma como

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \zeta_\beta - \partial_\beta \zeta_\alpha, \quad \text{con} \quad \zeta_\alpha \equiv \eta_{\alpha\mu} \zeta^\mu. \quad (5.9)$$

Como paso siguiente para ver cómo varían los campos de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, es conveniente descomponer también el generador  $\zeta_\alpha$  de la transformación a través de una descomposición de Helmholtz. De forma análoga a lo que se hizo en la ecuación (5.5), podemos establecer

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \alpha/c, \\ \zeta_i &= \beta_i/c^2 + \partial_i \gamma, \quad \text{con} \quad \partial_i \beta^i = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

en donde otra vez se han insertado factores  $c$  por conveniencia. La substitución de las ecuaciones (5.5) y (5.10) en la ecuación de transformación (5.9), eventualmente produce que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \mathcal{U} - \dot{\alpha}, \\ \mathcal{U}'_i &= \mathcal{U}_i + \dot{\beta}_i, \\ \mathcal{V}' &= \mathcal{V} - \frac{1}{3}c^2 \nabla^2 \gamma, \\ h'^{TT}_{ij} &= h^{TT}_{ij}, \\ \mathcal{X}' &= \mathcal{X} + \alpha + \dot{\gamma}, \\ \mathcal{W}' &= \mathcal{W} - 2\gamma, \\ \mathcal{W}'_i &= \mathcal{W}_i - 4\beta_i, \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde (y partir de ahora) hemos usado la notación  $\dot{A} \equiv \partial_t A$ . Además vale la pena recordar también que  $t \equiv x^t/c$  y señalar además que la parte doblemente transversa  $h^{TT}_{ij}$  es invariante bajo la transformación por el hecho de que el generador de esta es un vector.

Como resultado de haber obtenido las variaciones de la ecuación (5.11), la inspección de estas revela que podemos definir las siguientes cantidades invariantes:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \mathcal{U} + \dot{\mathcal{X}} + \frac{1}{2}\ddot{\mathcal{W}}, \\ \Phi_i &\equiv \mathcal{U}_i + \frac{1}{4}\dot{\mathcal{W}}_i, \\ \Psi &\equiv \mathcal{V} - \frac{1}{6}c^2 \nabla^2 \mathcal{W}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

así como  $h^{TT}_{ij}$  son todas *invariantes de gauge*. Tal y como se mencionó en la discusión de la sección anterior, estos *potenciales* tienen codificada la información asociada sólo al campo gravitacional y esta información no depende de la elección del sistema de coordenadas. Por lo tanto, *los verdaderos grados de libertad* del campo gravitacional están contenidos en estos *potenciales invariantes de gauge*. En los potenciales escalares  $\Phi$  y  $\Psi$  tenemos sólo una componente independiente en cada uno, en el potencial vectorial  $\Phi_i$  tenemos sólo dos componentes independientes (dado que se define a través de campos solenoidales) y en el potencial tensorial  $h^{TT}_{ij}$  tenemos sólo dos componentes independientes (ya que es doblemente transverso). Este

conteo de componentes implica que el número de grados de libertad puramente gravitacionales es seis y con estas definiciones se eliminan cuatro componentes de la perturbación  $h$  que contienen información (físicamente irrelevante) sobre el sistema de coordenadas escogido. Esta eliminación de grados de libertad físicamente irrelevantes también puede lograrse al escoger un gauge.

Hay diferentes gauges que pueden escogerse. En el *gauge de Coulomb*, por ejemplo, se establece que  $\mathcal{X} = \mathcal{W} = \mathcal{W}_i = 0$  y con eso algunos de los campos de la descomposición de la perturbación pueden igualarse a los potenciales invariantes de gauge. El paso siguiente consiste en analizar la dinámica de los campos de la perturbación (o de los potenciales invariantes de gauge).

En este caso, se aplicará el enfoque de calcular los términos de la ecuación de campo de Einstein, además de que todo el análisis siguiente se realizará escogiendo el gauge de Coulomb con el fin de facilitar los cálculos. Si consideramos un Universo sin energía oscura y sin materia oscura, podemos anular el valor de constante cosmológica  $\Lambda$  y la ecuación de campo de Einstein toma la forma dada en la ecuación (4.12). Lo primero que debemos hacer es calcular la forma que toma el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  en términos de la perturbación  $h$ . Puede verificarse que, en este caso, el tensor de Einstein puede reescribirse como

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\square h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) - \partial_{\alpha\mu} h^{\mu}_{\beta} - \partial_{\beta\mu} h^{\mu}_{\alpha}) + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\square(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) - \partial_{\mu\nu} h^{\mu\nu}), \quad (5.13)$$

en donde  $\square \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}$  representa el D'Alembertiano u *operador de onda de espaciotiempo plano*. Utilizando la descomposición de Helmholtz de la perturbación, dada en la ecuación (5.5) y la definición de las cantidades invariantes, dada en la ecuación (5.12), las componentes del tensor de Einstein pueden escribirse como

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -\frac{2}{c^2} \nabla^2 \Psi, \\ G_{ti} &= -\frac{2}{c^3} \partial_i \dot{\Psi} + \frac{2}{c^3} \nabla^2 \Phi_i, \\ G_{ij} &= -\frac{2}{3c^2} \delta_{ij} \nabla^2 (\Phi - \Psi) - \frac{2}{c^4} \delta_{ij} \ddot{\Psi} + \frac{1}{c^2} \left( \partial_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) (\Phi - \Psi) + \frac{2}{c^4} (\partial_i \dot{\Phi}_j + \partial_j \dot{\Phi}_i) - \frac{1}{2} \square h_{ij}^{TT}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por las sustituciones anteriores, a través de la ecuación (5.14), se ve que se ha podido obtener una descomposición de Helmholtz para el tensor de Einstein. Para completar la escritura de la ecuación de Einstein, es conveniente también establecer una descomposición de Helmholtz para el tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}$ . De forma análoga a lo que se hizo con la perturbación  $h$  en la ecuación (5.5), para el tensor  $T^{\mu\nu}$  podemos proponer que

$$\begin{aligned} T^{tt} &= \rho c^2, \\ T^{ti} &= (s^i + \partial^i s) c, \\ T^{ij} &= \tau \delta^{ij} + (\partial^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \nabla^2) \sigma + (\partial^i \sigma^j + \partial^j \sigma^i) + \sigma_{TT}^{ij}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

junto con las condiciones

$$\partial_j s^j = 0, \quad \partial_j \sigma^j = 0, \quad \partial_k \sigma_{TT}^{jk} = 0 = \delta_{jk} \sigma_{TT}^{jk}. \quad (5.16)$$

En este contexto,  $\varrho$  representa la densidad de masa de la distribución de materia como se mide por un observador en reposo respecto a un marco coordenado  $x^\alpha$  (y que es diferente de la densidad de masa propia  $\rho$  de un fluido perfecto). El vector  $s^i + \partial^i s$  es la densidad de momento de una distribución de materia y  $T^{ij}$  es el tensor de esfuerzos.

Aunque parezca que el tensor  $T^{\mu\nu}$  posee diez componentes independientes, la conservación del momento-energía, escrita para el fondo considerado como  $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ , impone cuatro restricciones sobre las componentes del tensor  $T^{\mu\nu}$ , por lo que estrictamente hablando el tensor de energía-momento tiene seis componentes independientes. Dado que el enunciado de la conservación de la energía-momento puede escribirse en términos de las ecuaciones siguientes

$$\nabla^2 s = -\dot{\varrho}, \quad \nabla^2 \sigma^i = -\dot{s}^i, \quad \nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2}(\dot{s} + \tau), \quad (5.17)$$

puede entonces notarse que sólo  $\varrho$ ,  $s^i$ ,  $\tau$  y  $\sigma_{ij}$  son campos independientes, acumulando entre ellos seis componentes independientes.

Como tenemos descomposiciones de Helmholtz para el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento, podemos hacer una identificación entre los términos de cada descomposición para obtener ecuación de evolución para los potenciales invariantes de gauge. Sustituyendo entonces las ecuaciones (5.14) y (5.15) en la ecuación (4.12), podemos obtener las siguientes ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \varrho, \\ \nabla^2 (\Phi - \Psi) &= \frac{12\pi G}{c^2} (\dot{s} + \tau), \\ \nabla^2 \Phi_i &= 4\pi G s_i, \\ \square h_{ij}^{TT} &= \frac{16\pi G}{c^4} \sigma_{ij}^{TT}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A partir de este punto, lo único que queda es intentar hallar soluciones explícitas para las cantidades invariantes en la ecuación anterior. Las tres primeras ecuaciones en (5.18) representan ecuaciones de Poisson en las que los campos independientes del tensor de energía-momento son fuentes de dichas ecuaciones. En estas ecuaciones, los potenciales invariantes en el instante de tiempo  $t$  dependen del estado de las cantidades *materiales* en el mismo instante.

La última ecuación en (5.18), en cambio, representa una *ecuación de onda* para el campo doblemente transversal  $h^{TT}$  de la perturbación. En esta ecuación, los valores de  $h^{TT}$  en un instante  $t$  depende del estado de las variables materiales en un instante anterior  $t'$ ; siendo este retraso lo que permite la propagación de una señal luminosa desde una fuente puntual en la posición  $\mathbf{x}'$  hacia la posición  $\mathbf{x}$ .

Como resultado del análisis de las ecuaciones podemos concluir que, de los seis grados de libertad del campo gravitacional, solo dos son radiativos (las componentes independientes de  $h^{TT}$ ); las cuatro restantes no lo son y todas son dependientes de la distribución material (aunque si no consideráramos una distribución material, igualmente podríamos obtener ecuaciones de Laplace y de onda que podríamos resolver en términos de alguna condición de borde). De esta manera, puede verse que, bajo la fijación de un gauge y disponiendo de soluciones para las componentes independientes del tensor de energía-momento, virtualmente es posible encontrar soluciones para los potenciales invariantes de gauge.



# Obtención de la descomposición de Helmholtz de una perturbación afín cosmológica

Con el fin de establecer un formalismo de perturbaciones para teorías de gravedad en los que el campo fundamental no sea la métrica o, al menos, no sólo ésta forme parte del conjunto de campos fundamentales de la teoría, en este capítulo establecemos la primera parte de un formalismo de perturbaciones afines, es decir, perturbaciones que puedan realizarse sobre la conexión cuando éste sea el campo fundamental de una teoría de gravedad. Tratando de establecer un formalismo *similar* al de las perturbaciones métricas, en el sentido de que los pasos a seguir resulten, al menos, *parecidos* al del método descrito en el capítulo 5, lo primero que intentamos hacer respecto a las perturbaciones afines es implementar una descomposición de Helmholtz sobre todas sus componentes.

De esta manera, en este capítulo detallamos el formalismo bajo el cual pueden obtenerse los campos (irreducibles) en los que una perturbación afín *cosmológica* puede descomponerse. A partir de aquí, las perturbaciones afines pueden considerarse *cosmológicas* dado que nos servimos de cómo el principio cosmológico establece una solución de fondo del formalismo de gravedad afín, consistente con las simetrías del principio, e induce la existencia de un objeto en la subvariedad espacial del espaciotiempo que se comporta como una métrica. Este objeto es utilizado explícitamente para desarrollar la descomposición de Helmholtz de la perturbación, por lo que automáticamente el formalismo propuesto se convierte en un formalismo de perturbaciones afines cosmológicas.

De forma análoga a los análisis de perturbaciones alrededor de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein en *relatividad general*, la descomposición de perturbaciones detalla la distribución de las componentes de la perturbación entre los campos que la generan, permite eliminar componentes irrelevantes (asociadas a la elección de un sistema coordenado particular) a través del análisis de variaciones de los campos bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas y puede dar luz del significado físico de estos campos (como ocurre con el campo doblemente transversal de una perturbación métrica que se asocia típicamente a las ondas gravitacionales en el análisis de perturbaciones descritas en el capítulo 5). Todo lo anterior da cuenta de lo útil que resulta disponer de un algoritmo que permita descomponer perturbaciones en formulaciones de gravedad en los que en el campo fundamental sea la conexión.

La diferencia más relevante respecto a las descomposiciones de Helmholtz que pueden desarrollarse en perturbaciones métricas y en perturbaciones afines radica en el hecho de que en el último caso es *menos trivial* obtenerlas porque la cantidad de índices en perturbaciones

afines y la falta de simetrías inherentes a éstas implican que se deben desarrollar descomposiciones *intermedias* entre la descomposición (3+1) y la descomposición de Helmholtz de la perturbación. Aprovechando la propiedad de que la perturbación afín se calcula a partir de una diferencia de conexión, puede postularse que la perturbación se comporta como un tensor y esta propiedad permite aplicar la *maquinaria* de la teoría de grupos para poder desarrollar estas descomposiciones intermedias. Durante el desarrollo, mostraremos que es posible descomponer la perturbación bajo los grupos  $GL(3, \mathbb{R})$  y  $SO(3, \mathbb{R})$ , en ese orden, antes de implementar una descomposición de Helmholtz, como paso conveniente para obtener campos análogos a aquellos en los que se descompone una perturbación métrica bajo una descomposición de Helmholtz.

A continuación presentamos en detalle todo el proceso bajo el cual puede obtenerse la descomposición de Helmholtz de una perturbación afín cosmológica.

## 6.1. Análisis preliminar del comportamiento tensorial de la perturbación

Consideremos ahora un espaciotiempo cosmológico, modelado por un formalismo cuyo campo de fondo es la conexión  $\Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma}$  y que es perturbada a través de un campo afín general  $\epsilon C_{\alpha}^{\beta\gamma}$ , dando pie a una conexión perturbada  $\bar{\Gamma}_{\alpha}^{\beta\gamma}$  de la forma

$$\bar{\Gamma}_{\alpha}^{\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha}^{\beta\gamma} + \epsilon C_{\alpha}^{\beta\gamma}. \quad (6.1)$$

De la ecuación (6.1) se puede ver que, como la perturbación  $\epsilon C_{\alpha}^{\beta\gamma}$  se puede calcular a partir de una diferencia de conexiones, ésta transforma como un tensor de 64 componentes, por los valores posibles que pueden tomar sus índices libres [32, 45, 47]. El factor  $\epsilon$  es un parámetro que controla el tamaño de la perturbación (lo que resultará útil cuando estudiemos la dinámica de los campos que generan la perturbación, [44]) y el tensor  $C_{\alpha}^{\beta\gamma}$  contiene la información de los campos que generan la perturbación. A partir de ahora, en lo que resta del capítulo, por conveniencia nos referiremos al tensor  $C_{\alpha}^{\beta\gamma}$  como la perturbación afín general.

Tal y como se hace con perturbaciones métricas [32, 45], para analizar las diferentes componentes de la perturbación afín se puede suponer que en el espaciotiempo en cuestión existe una *base* y podemos proyectar la perturbación general a través de las *direcciones* de ésta. Por lo tanto, si queremos obtener la descomposición escalar-vectorial-tensorial de la perturbación (o, *de Helmholtz* como también es conocida), con el fin de que podamos analizar los campos generadores de ésta, podemos obtener la descomposición de Helmholtz de contribuciones de la forma  $C_t^t$ ,  $C_t^i$ ,  $C_i^t$ ,  $C_i^j$ ,  $C_j^i$ ,  $C_j^t$  y  $C_i^j$ . Esta es la primera *descomposición* que podemos desarrollar para la perturbación, la cual típicamente se conoce como descomposición (3+1). Aquí vale la pena recordar que se está considerando que esta perturbación afín es *general* en el sentido de que no necesariamente es simétrica en sus índices inferiores.

De las contribuciones mencionadas en el párrafo anterior, la primera se comporta como un escalar, los tres objetos siguientes se comportan como vectores, las siguientes tres contribuciones se comportan como 2-tensores y la última contribución se comporta como un 3-tensor. A continuación, para facilitar el análisis, es conveniente considerar también una separación previa del tensor  $C_{\alpha}^{\beta\gamma}$  en sus partes simétrica y antisimétrica,  $\Sigma_{\alpha}^{\beta\gamma}$  y  $\Lambda_{\alpha}^{\beta\gamma}$  respectivamente, con

respecto a sus dos índices inferiores, es decir,

$$\Sigma_{\alpha}^{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(C_{\alpha}^{\beta\gamma} + C_{\gamma}^{\beta\alpha}) \quad \text{y} \quad \Lambda_{\alpha}^{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(C_{\alpha}^{\beta\gamma} - C_{\gamma}^{\beta\alpha}). \quad (6.2)$$

Como último paso previo al análisis, considerando que en el sector espacial del espaciotiempo considerado existe un objeto  $s_{ij}$  que se comporta como una *métrica*, adicionalmente nos resulta de utilidad establecer las siguientes relaciones

$$C_{\gamma t\alpha} \equiv C_{\gamma}^t{}_{\alpha} \quad \text{y} \quad C_{\gamma i\alpha} \equiv s_{ij}C_{\gamma}^j{}_{\alpha}. \quad (6.3)$$

La primera de las dos relaciones anteriores se establece de la forma descrita porque, en el formalismo de gravedad polinomial afín, contribuciones de la forma  $C_{\gamma}^t{}_{\alpha}$  y  $C_{\gamma t\alpha}$  son dependientes la una de la otra a través de un factor (global) que solo depende del tiempo, lo cual es irrelevante para descomponer la perturbación. La segunda relación surge a partir del uso del tensor  $s_{ij}$  por las razones ya mencionadas. De esta manera, la tarea de descomponer la perturbación se reduce entonces a obtener la descomposición de tensores covariantes y, con ello, se puede disponer de todo el aparataje matemático de la *Teoría de grupos* para lograrlo, [48]. En la tabla 6.1 resumimos la cantidad de componentes asociadas a cada contribución relevante en la perturbación afín.

CUADRO 6.1: *Número de componentes asociadas a cada contribución de la perturbación afín general.*

Términos	Parte simétrica ( $\Sigma$ )	Parte antisimétrica ( $\Lambda$ )
$C_{ttt}$	1	0
$C_{tit}$	3	0
$C_{itt}, C_{tti}$	3	3
$C_{itj}$	6	3
$C_{ijt}, C_{tji}$	9	9
$C_{ijk}$	18	9
Componentes en total:	40	24

El número de componentes de cada contribución en la tabla 6.1 puede determinarse a partir de la consideración de las simetrías inherentes a la misma y del hecho de que cada índice libre tiene, como máximo, tres valores posibles (y por ende conlleva tres componentes en su contribución correspondiente). A partir de este análisis se puede observar que todas las 64 componentes de la perturbación afín general pueden asociarse a alguna de las contribuciones anteriormente mencionadas.

La descomposición de Helmholtz de todas las contribuciones, a excepción de la última, puede obtenerse a partir de los resultados de otros trabajos, [32, 45]. Por otra parte, la descomposición de Helmholtz del 3-tensor en la última fila de la tabla 6.1, que sólo tiene índices que viven en el sector espacial del espaciotiempo, no está disponible en ningún trabajo previo. En las próximas secciones de este capítulo, detallaremos la descomposición de todas contribuciones ya mencionadas de la perturbación afín general, haciendo un énfasis especial en la contribución tipo 3-tensor dado lo novedoso que nos resulta su estudio.

## 6.2. Descomposición de las contribuciones de la perturbación bajo el grupo $GL(3, \mathbb{R})$ y el grupo $SO(3, \mathbb{R})$

Por lo mencionado en la sección 6.1, empezaremos con una descomposición preliminar de la contribución novedosa. La contribución de tipo 3-tensor covariante  $C_{ijk}$  de la perturbación en total tiene 27 componentes ya que el espacio en donde vive puede construirse a partir del producto tensorial de 3 espacios de dimensión 3 (por la naturaleza de sus índices libres). A su vez, tal y como se mostró en el capítulo 2, esta contribución, bajo el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$ , puede expresarse como una suma directa de componentes irreducibles de acuerdo al diagrama de Young siguiente [12–17, 48, 49].

$$\begin{aligned}
 \square \otimes \square \otimes \square &= \left( \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square \\
 &= \underbrace{\square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}_{18 \text{ simétricas}} \oplus \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}_{9 \text{ antisimétricas}} \\
 &= 10_{GL_3} \oplus 8_{GL_3} \oplus 8_{GL_3} \oplus 1_{GL_3}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

El número de componentes de cada una de las partes (irreducibles bajo el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$ ) en que puede descomponerse el 3-tensor  $C_{ijk}$  al final de la ecuación (6.4) puede determinarse a partir de una *fórmula de longitud de Hook*, equivalente a la ecuación (2.14), mostrada en la sección 2.6. Este procedimiento de cálculo de componentes también puede ser aplicado a cada una de las partes irreducibles en que pueden descomponerse las demás contribuciones de la perturbación afín bajo el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$ . Si  $\mathbf{C}_m$  representa la  $m$ -ésima parte del tensor  $C_{ijk}$  (asociada a su  $m$ -ésima representación irreducible para  $SO(3, \mathbb{R})$ ), entonces la dimensión  $\dim \mathbf{C}_m$  (o el número de componentes) de la  $m$ -ésima parte se puede calcular como

$$\dim \mathbf{C}_m = d_{\lambda_m} = \prod_{(\alpha, \beta) \in \lambda_m} \frac{3 + \beta - \alpha}{\text{hook}(\alpha, \beta)}, \tag{6.5}$$

En donde  $\lambda_m$  representa el diagrama de Young asociado al espacio de la  $m$ -ésima parte de la contribución. El par de números  $(\alpha, \beta)$  denota la posición de una celda en la tabla de Young  $\lambda_m$ :  $\alpha$  representa a la fila y  $\beta$  representa a la columna de la celda. Así mismo, para una celda  $(\alpha, \beta)$ , el número natural  $\text{hook}(\alpha, \beta)$  se conoce como *longitud de Hook* y se define como el número de celdas que están en la misma fila a la derecha de la celda de interés, sumado con el número de celdas en la misma columna abajo de ella, más uno (por la misma celda, en sí). Este cálculo del número de componentes permite corroborar la descomposición (en el sentido de verificar que el producto tensorial de los espacios debe ser igual a la suma directa de los nuevos espacios en los que se descompone) y, a su vez, determinar el número de componentes asociados a cada parte. Así, a partir del análisis con los diagramas de Young en la ecuación (6.4), corroborado con la fórmula de la ecuación (6.5), se determina que el tensor  $C_{ijk}$ , bajo el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$ , se descompone en una parte  $10_{GL_3}$  totalmente simétrica (por su representación con los diagramas de Young) de 10 componentes, 2 partes  $8_{GL_3}$  *mixtas* (es decir, que no son

ni totalmente simétricas ni totalmente antisimétricas) de 8 componentes cada una y una parte  $1_{GL_3}$  totalmente antisimétrica de 1 componente.

La consideración de que el espaciotiempo de *fondo* (o *background* como también suele ser referido) es cosmológico implica la existencia de una *forma de volumen* y de una métrica  $s_{ij}$  en su sector espacial, dotándolo de una estructura de tipo  $SO(3, \mathbb{R})$ . Por lo tanto, las componentes obtenidas al final de la ecuación (6.4) pueden a su vez descomponerse como

$$\begin{aligned} 10_{GL_3} &\rightarrow 7_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}, \\ 8_{GL_3} &\rightarrow 5_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}, \\ 1_{GL_3} &\rightarrow 1_{SO_3}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

La descomposición de la ecuación (6.6) surge precisamente de la consideración del tensor  $s_{ij}$ , el cual nos permite descomponer tensores de rango  $n \geq 2$  en una contribución asociada a la traza del tensor (las partes  $3_{SO_3}$ ) y otra contribución sin traza (las partes  $7_{SO_3}$  y  $5_{SO_3}$ , en este caso). De esto y del hecho de que el grupo  $SU(2, \mathbb{C})$  es homeomórfico al grupo  $SO(3, \mathbb{R})$  como se mostró en la sección 2.7 de este trabajo, [12–20, 48, 49], podemos establecer que la contribución  $C_{ijk}$  (considerando tanto su parte simétrica como su parte antisimétrica) puede generarse a partir de un campo de spín 3, dos campos de spín 2, tres campos de spín 1 y un escalar.

Las primeras cuatro contribuciones en (las tres primeras filas de) la tabla 6.1 tienen una descomposición trivial bajo el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$  debido a que corresponden a escalares y vectores tanto para el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$  como para  $SO(3, \mathbb{R})$ . De esta forma podemos escribir

$$1 \rightarrow 1_{GL_3} \rightarrow 1_{SO_3}, \tag{6.7}$$

$$3 \rightarrow 3_{GL_3} \rightarrow 3_{SO_3}. \tag{6.8}$$

Las siguientes tres contribuciones en la cuarta y quinta fila de la tabla 6.1 tienen una descomposición un poco más compleja. Dado que corresponden a 2-tensores covariantes, de manera general y bajo el grupo  $GL(3, \mathbb{R})$  éstas contribuciones se descomponen en una parte totalmente simétrica  $6_{GL_3}$  de 6 componentes y una parte totalmente antisimétrica (sin traza)  $3_{GL_3}$  de 3 componentes. La consideración del objeto  $s_{ij}$  en el sector espacial del espaciotiempo permite hacer una descomposición adicional de las contribuciones en cuestión bajo el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$  debido a que la traza de un 2-tensor covariante corresponde a un escalar. Así, los objetos de 6 y 9 componentes, respectivamente, se pueden descomponer como

$$6 \rightarrow 6_{GL_3} \rightarrow 5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3}, \tag{6.9}$$

$$9 \rightarrow 6_{GL_3} \oplus 3_{GL_3} \rightarrow 5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}. \tag{6.10}$$

En la tabla 6.2 presentamos un resumen de la descomposición de todas las contribuciones de la perturbación afín en términos de sus partes simétrica y antisimétrica, bajo el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$ .

A partir de este punto, para obtener la descomposición de Helmholtz de todas las contribuciones de la perturbación, es necesario hacer una descomposición más. Esta última descomposición consiste en reescribir las representaciones irreducibles de  $SO(3, \mathbb{R})$  en términos de representaciones irreducibles de  $SO(2, \mathbb{R})$  dado que esa es la forma en como puede interpretarse una descomposición de Helmholtz en términos de la teoría de grupos. Un argumento que justifica esta última descomposición se presenta en la sección siguiente.

CUADRO 6.2: Resumen de las representaciones irreducibles de  $SO(3, \mathbb{R})$  obtenidas a partir de las componentes irreducibles de la perturbación afín tensorial  $C$ , en términos de sus partes simétrica ( $\Sigma$ ) y antisimétrica ( $\Lambda$ ).

Contribución	Componentes	Descomposición $GL(3, \mathbb{R})$	Descomposición $SO(3, \mathbb{R})$
$\Sigma_{ttt}$	$1_{\Sigma}$	$1_{GL_3}$	$1_{SO_3}$
$\Sigma_{tit}$	$3_{\Sigma}$	$3_{GL_3}$	$3_{SO_3}$
$\Sigma_{tti}$	$3_{\Sigma}$	$3_{GL_3}$	$3_{SO_3}$
$\Lambda_{tti}$	$3_{\Lambda}$	$3_{GL_3}$	$3_{SO_3}$
$\Sigma_{itj}$	$6_{\Sigma}$	$6_{GL_3}$	$5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3}$
$\Lambda_{itj}$	$3_{\Lambda}$	$3_{GL_3}$	$3_{SO_3}$
$\Sigma_{tij}$	$9_{\Sigma}$	$6_{GL_3} \oplus 3_{GL_3}$	$5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}$
$\Lambda_{tij}$	$9_{\Lambda}$	$6_{GL_3} \oplus 3_{GL_3}$	$5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}$
$\Sigma_{ijk}$	$18_{\Sigma}$	$10_{GL_3} \oplus 8_{GL_3}$	$7_{SO_3} \oplus 3_{SO_3} \oplus 5_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}$
$\Lambda_{ijk}$	$9_{\Lambda}$	$6_{GL_3} \oplus 3_{GL_3}$	$5_{SO_3} \oplus 1_{SO_3} \oplus 3_{SO_3}$

### 6.3. Origen de la descomposición de Helmholtz para elementos del grupo $SO(3, \mathbb{R})$ : Pasando de $SO(3, \mathbb{R})$ a $SO(2, \mathbb{R})$

De acuerdo con lo que se revisó en la sección 2.6 del capítulo 2, la descomposición del caracter de una representación (reducible) de un grupo como la suma directa de los caracteres de otras representaciones (irreducibles) ilustra la forma en que una representación reducible puede descomponerse en términos de otras representaciones irreducibles. Es justamente esta idea la que nos permite dilucidar que una representación de  $SO(3, \mathbb{R})$  puede descomponerse en varias representaciones irreducibles de  $SO(2, \mathbb{R})$ .

Las representaciones irreducibles de  $SO(3, \mathbb{R})$  (es decir, sobre espacios vectoriales reales) tienen dimensión  $(2\ell + 1)$ ,  $\forall \ell \in \mathbb{N}$  y las clases de conjugación del grupo están constituidas por todos los objetos que efectúan *rotaciones* (sobre otros) a través de un ángulo  $\theta$ . El caracter  $\chi_{SO_3}^{(\ell)}(\theta)$  de la clase de conjugación de los elementos del grupo caracterizados por dicho ángulo, en representaciones irreducibles etiquetadas por el spín  $\ell$ , se puede expandir como

$$\chi_{SO_3}^{(\ell)}(\theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\ell} \cos(n\theta) = 1 + 2(\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(\ell\theta)). \quad (6.11)$$

Por otra parte, *todas* las representaciones irreducibles de  $SO(2, \mathbb{R})$  (sobre espacios vectoriales reales también), con la excepción de la representación trivial, son 2-dimensionales y están etiquetadas por  $\ell \in \mathbb{N}$ . De forma explícita, un elemento  $M^{(\ell)}(g(\theta))$  caracterizado por el parámetro  $\theta$  en la representación irreducible etiquetada por  $\ell$  tiene la siguiente forma

$$M^{(\ell)}(g(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\ell\theta) & -\sin(\ell\theta) \\ \sin(\ell\theta) & \cos(\ell\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

Y su caracter es

$$\chi_{SO_2}^{(\ell)}(\theta) = 2 \cos(\ell\theta). \quad (6.13)$$

El resultado de la ecuación (6.13) muestra que  $SO(2, \mathbb{R})$  está contenido en  $SO(3, \mathbb{R})$ . Lo anterior sustenta el hecho de que es posible descomponer representaciones irreducibles de  $SO(3, \mathbb{R})$  en representaciones irreducibles de  $SO(2, \mathbb{R})$  de la siguiente forma:

$$(2\ell + 1)_{SO_3} = 1_{SO_2} + \underbrace{2_{SO_2}^{n=1} + \cdots + 2_{SO_2}^{n=\ell}}_{\ell \text{ veces}}, \quad (6.14)$$

En donde hay una representación  $2_{SO_2}^n$  para cada valor de  $n = 1, 2, \dots, \ell$ . Así, por ejemplo, bien podemos decir ahora que

$$1_{SO_3} \rightarrow 1_{SO_2}, \quad (6.15)$$

$$3_{SO_3} \rightarrow 1_{SO_2} \oplus 2_{SO_2}^{n=1}, \quad (6.16)$$

$$5_{SO_3} \rightarrow 1_{SO_2} \oplus 2_{SO_2}^{n=1} \oplus 2_{SO_2}^{n=2}, \quad (6.17)$$

$$7_{SO_3} \rightarrow 1_{SO_2} \oplus 2_{SO_2}^{n=1} \oplus 2_{SO_2}^{n=2} \oplus 2_{SO_2}^{n=3}. \quad (6.18)$$

Los resultados desde las ecuaciones (6.15) hasta la ecuación (6.18) implican que, por ejemplo,

- Los escalares en  $SO(3, \mathbb{R})$  son escalares en  $SO(2, \mathbb{R})$ .
- Los 1-tensores  $3_{SO_3}$  o campos de 1 spín, vectores y 2-tensores covariantes antisimétricos (dado que sólo tienen 3 componentes independientes, como se señaló en la discusión anterior a la tabla 6.2) tienen una descomposición de Helmholtz a través de un escalar *longitudinal* y un vector *transverso*.
- Los 2-tensores covariantes simétricos sin traza  $5_{SO_3}$  o campos de spín 2 tienen una descomposición de Helmholtz a través de un escalar *longitudinal*, un vector *transverso* y un 2-tensor simétrico *transverso* y sin traza.
- Los 3-tensores totalmente simétricos sin traza  $7_{SO_3}$  tienen una descomposición de Helmholtz a través de un escalar *longitudinal*, un vector *transverso*, un 2-tensor simétrico sin traza y *transverso* y un 3-tensor totalmente simétrico *transverso* y sin traza (siendo la traza *transversa* también).

Las nociones de *longitudinal* y *transverso* se aclararán en la sección siguiente. El análisis anterior resulta útil dado que da una idea clara de las propiedades de los campos con los que se pueden desarrollar las descomposiciones de Helmholtz de las contribuciones de la perturbación afín.

La forma explícita de la descomposición e Helmholtz de las cinco primeras contribuciones en la tabla 6.2 está reportada en trabajos anteriores, [32, 45]. La descomposición de Helmholtz de las 3 contribuciones siguientes resultan un poco diferentes a las anteriores por la presencia de la parte de tipo 2-tensor antisimétrico  $3_{SO_3}$  no nula que tienen. La forma explícita de la descomposición de esas partes se realiza considerando la simetría de los índices libres y un objeto que sea antisimétrico y que esté disponible en el sector espacial del espaciotiempo. En esos casos un objeto como  $\mathcal{E}_{ijk} \equiv \sqrt{|s|}\varepsilon_{ijk}$ , que corresponde al tensor de Levi-Civita asociado a la forma de volumen del sector espacial del espaciotiempo, es ideal para escribir la forma explícita de la descomposición. Las descomposiciones de Helmholtz de las últimas dos contribuciones

resultan más complicadas debido a que corresponden a descomposiciones de 3-tensores. En la sección siguiente se verá cuál es el procedimiento para determinar la forma explícita de la descomposición de ese tipo de objetos.

## 6.4. Obtención de la descomposición de Helmholtz de las contribuciones novedosas en la perturbación

La contribución  $C_{ijk}$  de la perturbación se puede analizar estudiando las contribuciones  $\Sigma_{ijk}$  y  $\Lambda_{ijk}$ . A partir del tableau de Young en la sección 6.2 se puede ver que 18 de las 27 componentes de  $C_{ijk}$  están asociadas a  $\Sigma_{ijk}$  y las 9 restantes están asociadas a  $\Lambda_{ijk}$ . Así mismo, los análisis en las secciones 6.2 y 6.3 muestran que las 18 componentes de  $\Sigma_{ijk}$  se pueden a su vez repartir en 10 componentes para una parte totalmente simétrica  $\Sigma^{(10)}_{ijk}$  y las restantes 8 a una parte mixta  $\Sigma^{(8)}_{ijk}$ ; mientras que las 9 componentes de  $\Lambda_{ijk}$  se pueden repartir en 1 componente para su parte totalmente antisimétrica  $\Lambda^{(1)}_{ijk}$  y las restantes 8 para una parte mixta  $\Lambda^{(8)}_{ijk}$  también. Debe tener presente, sin embargo, que las partes mixtas de  $\Sigma_{ijk}$  y  $\Lambda_{ijk}$  se descomponen de forma diferente dadas las simetrías propias de cada contribución, a pesar de que tengan el mismo número de componentes. Así, considerando las simetrías de los objetos mencionados en el parrafo anterior y su descomposición bajo el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$ , se puede establecer que  $\Sigma^{(10)}_{ijk}$ ,  $\Sigma^{(8)}_{ijk}$ ,  $\Lambda^{(1)}_{ijk}$  y  $\Lambda^{(8)}_{ijk}$  explícitamente, [48], se pueden descomponer como

$$\begin{aligned} \Sigma^{(10)}_{ijk} &= \frac{3}{5} s_{(ij} \Sigma^{(3)}_{k)} + \Sigma^{(7)}_{ijk}, \quad \text{con} \quad \Sigma^{(3)}_k \equiv s^{ij} \Sigma^{(10)}_{ijk}, \\ \Sigma^{(7)}_{ijk} &= \Sigma^{(7)}_{(ijk)} \quad \text{y} \quad s^{ij} \Sigma^{(7)}_{ijk} = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(8)}_{ijk} &= \frac{1}{2} (\delta_i^l \mathcal{E}_{kj}{}^m + \delta_k^l \mathcal{E}_{ij}{}^m) (\Sigma^{(5)}_{(ml)} + \Sigma^{(3')}_{[ml]}), \\ \text{con} \quad s^{lm} \Sigma^{(5)}_{(lm)} &= s^{lm} \Sigma^{(3')}_{[lm]} = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\Lambda^{(1)}_{ijk} = \frac{1}{6} \mathcal{E}_{ijk} \Lambda, \quad \text{con} \quad \Lambda \equiv \mathcal{E}^{ijk} \Lambda^{(1)}_{ijk} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(8)}_{ijk} &= \frac{1}{2} (2\delta_j^l \mathcal{E}_{ik}{}^m + \delta_k^l \mathcal{E}_{ik}{}^m - \delta_i^l \mathcal{E}_{kj}{}^m) (\Lambda^{(5)}_{(ml)} + \Lambda^{(3')}_{[ml]}), \\ \text{con} \quad s^{lm} \Lambda^{(5)}_{(lm)} &= s^{lm} \Lambda^{(3')}_{[lm]} = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Por los resultados de las ecuaciones desde la 6.19 hasta la ecuación 6.22 y a partir de la discusión final en la sección 6.3, nos parece conveniente señalar que

- $\Lambda$  es un escalar bajo  $SO(2, \mathbb{R})$ .
- $\Sigma^{(3)}_i$ ,  $\Sigma^{(3')}_{[ml]}$  y  $\Lambda^{(3')}_{[ml]}$  se comportan como vectores bajo  $SO(3, \mathbb{R})$  (incluso los dos últimos, dado que son 2-tensores covariantes antisimétricos  $\Theta_{[ml]}$  en el sector espacial del espaciotiempo y por tanto pueden reescribirse como  $\mathcal{E}_{ml}{}^n \theta_n$  siendo  $\theta_n$  un vector bajo  $SO(3, \mathbb{R})$ ); y se descomponen a través de un escalar longitudinal y un vector transversal bajo  $SO(2, \mathbb{R})$ .

- Las partes  $\Sigma^{(5)}_{(ml)}$  y  $\Lambda^{(5)}_{(ml)}$  son 2-tensores covariantes simétricos sin traza bajo  $SO(3, \mathbb{R})$  y se descomponen a través de un escalar longitudinal, un vector transverso y un 2-tensor simétrico y sin traza.
- Por último,  $\Sigma^{(7)}_{ijk}$  es un 3-tensor covariante totalmente simétrico sin traza bajo  $SO(3, \mathbb{R})$  que se descompone a través de un escalar longitudinal, un vector transverso, un 2-tensor simétrico transverso sin traza y un 3-tensor totalmente simétrico transverso y sin traza bajo  $SO(2, \mathbb{R})$ .

Además de lo anterior, es conveniente comentar ahora que los objetos en  $SO(2, \mathbb{R})$  son *longitudinales* o *transversos* respecto a su divergencia y su traza. Los objetos son transversos si su divergencia o su traza en el sector espacial del espaciotiempo es cero y son longitudinales básicamente cuando no son transversos. Con todo lo dicho y desarrollado hasta ahora, estamos listos para detallar la descomposición del objeto  $\Sigma^{(7)}_{ijk}$ , el cual es realmente el más novedoso de los mencionados hasta el momento.

El método que se muestra a continuación podría considerarse como una extensión de la descomposición de 2-tensores simétricos que se muestra en el trabajo de Poisson, [45]. Consideremos un 3-tensor covariante  $R_{lmn}$  totalmente simétrico y sin traza ( $R_{lmn} = R_{(lmn)}$  y  $s^{lm}R_{lmn} = 0$ ) para el análisis. Para desarrollar la descomposición de Helmholtz del tensor mencionado, consideremos primero una descomposición espectral de la forma

$$R_{lmn} = \int d^3k \hat{R}_{lmn}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (6.23)$$

La cual resulta útil debido a que esto permite la descomposición de la amplitud  $\hat{R}_{lmn}$  (que tampoco tiene traza) en contribuciones longitudinales (o *paralelas*) y transversos (u *ortogonales*) al vector  $\vec{k}$ . Lo anterior, de hecho, corresponde al significado original con el cual fueron definidos los términos *longitudinal* y *transverso*.

Pensando en poder extender la descomposición (6.23) a casos de espacios planos y no planos incluso, por el requerimiento de que el tensor  $\hat{R}_{lmn}$  es totalmente simétrico, podemos proponer entonces que

$$\hat{R}_{lmn} = -ik_{(l}k_mk_n)\hat{R} - 3k_{(l}k_m\hat{R}^{(T)}_{n)} + 3ik_{(l}\hat{R}^{(T)}_{mn)} + \hat{R}^{(T)}_{lmn}, \quad (6.24)$$

E imponemos condiciones de ortogonalidad sobre  $\hat{R}^{(T)}_l$ ,  $\hat{R}^{(T)}_{lm}$  y  $\hat{R}^{(T)}_{lmn}$ , es decir,  $ik^l\hat{R}^{(T)}_l = 0$ ,  $ik^l\hat{R}^{(T)}_{lm} = 0$  e  $ik^l\hat{R}^{(T)}_{lmn} = 0$ . Lo anterior provee la descomposición de  $\hat{R}_{lmn}$  en partes longitudinal, longitudinales-transversas, longitudinal-transversa-transversa y totalmente transversa (en el sentido de que las contribuciones en que se descompone  $\hat{R}_{lmn}$  son proporcionales a tres, dos, uno o ningún vector  $k_l$ ). Ahora podemos además plantear la descomposición de los tensores  $\hat{R}^{(T)}_{lm}$  y  $\hat{R}^{(T)}_{lmn}$  en partes con traza y sin traza, sujetas a las condiciones anteriormente mencionadas:

$$\hat{R}^{(T)}_{jm} = \frac{1}{3}s_{jm}\hat{R}^{(T)} + \hat{R}^{(TT)}_{jm} \quad \text{con} \quad s^{ij}\hat{R}^{(TT)}_{ij} = 0, \quad ik^l\hat{R}^{(TT)}_{lm} = 0 \quad \text{y} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^{(T)}_{ijk} &= \frac{1}{5}(\beta_i s_{jk} + \beta_j s_{ki} + \beta_k s_{ij}) + \hat{R}^{(TT)}_{ijk} \\ \text{con} \quad s^{ij}\hat{R}^{(T)}_{ijk} &= \beta_k, \quad s^{ij}\hat{R}^{(TT)}_{ijk} = 0 \quad \text{y} \quad ik^l\hat{R}^{(TT)}_{lmn} = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Las etiquetas  $(TT)$  en los superíndices de los objetos indica que estos son *doblemente transversos* (tienen traza nula y son ortogonales al vector  $\vec{k}$ ). Del hecho de que  $\hat{R}_{ijk}$  no tiene traza se puede establecer que  $\hat{R}^{(T)} = \frac{3}{5}k^2\hat{R}$  y  $\beta_i = k^2\hat{R}^{(T)}_i$ , mostrando que las trazas de  $\hat{R}^{(T)}_{jm}$  y  $\hat{R}^{(T)}_{lmn}$  no contribuyen con componentes independientes a  $\hat{R}_{ijk}$ . Lo anterior y las condiciones impuestas sobre  $\hat{R}^{(TT)}_{jm}$  y  $\hat{R}^{(TT)}_{ijk}$  permiten demostrar que ambos tensores sólo tienen 2 componentes independientes cada uno. Dado que  $\hat{R}$  es un escalar y  $\hat{R}^{(T)}_i$  es un vector sujeto a una condición de ortogonalidad, estos objetos aportan con sólo 1 y 2 componentes independientes, respectivamente, en la descomposición de  $\hat{R}_{ijk}$ , mostrando así que la descomposición propuesta es consistente.

Así, considerando que  $D_i$  representa la derivada covariante asociada a la parte simétrica de la conexión del sector espacial del espaciotiempo, a partir de la descomposición espectral en la ecuación (6.23), para el 3-tensor sin traza totalmente simétrico  $R_{lmn}$  se puede plantear ahora una descomposición de Helmholtz, en el caso de espacio plano (sin curvatura), de la forma

$$R_{lmn} = R^{(0)}_{lmn} + R^{(1)}_{lmn} + R^{(2)}_{lmn} + R^{(3)}_{lmn} \quad (6.27)$$

En donde

$$R^{(0)}_{lmn} = (\partial_{(l}\partial_m\partial_n) - \frac{3}{5}s_{(lm}\partial_n)D^2)R \quad (6.28)$$

$$R^{(1)}_{lmn} = \partial_{(l}\partial_m R^{(T)}_{n)} - \frac{1}{5}s_{(lm}D^2 R^{(T)}_{n)} \quad (6.29)$$

$$R^{(2)}_{lmn} = \partial_{(l}R^{(TT)}_{mn)} \quad (6.30)$$

$$R^{(3)}_{lmn} = R^{(TT)}_{lmn} \quad (6.31)$$

Con sus componentes estando caracterizadas por las condiciones

$$s^{mn}\partial_n R^{(T)}_m = 0, \quad s^{mn}R^{(TT)}_{mn} = 0, \quad s^{mn}\partial_n R^{(TT)}_{ml} = 0, \quad s^{mn}R^{(TT)}_{lmn} = 0 \quad \text{y} \quad s^{ml}\partial_l R^{(TT)}_{mnp} = 0. \quad (6.32)$$

Del análisis anterior, puede considerarse a la descomposición (6.27) como una extensión de la descomposición de Helmholtz de un 2-tensor sin traza totalmente simétrico para el caso de espacio plano.

Después de proponer una descomposición como la de la ecuación (6.27), lo que típicamente se realiza para validar la misma es considerar la ortogonalidad de dichas componentes para obtener ecuaciones de Poisson (o de Helmholtz inhomogéneas) para éstas y corroborar la existencia de soluciones de dichas ecuaciones, [50]. El análisis anterior, a partir de algún *Teorema de Existencia y Unicidad* que pueda aplicarse en el caso de interés, permite concluir que, si las soluciones de las ecuaciones anteriormente mencionadas existen, satisfaciendo condiciones de borde y regularidad que resulten consistentes con requerimientos físicos, entonces la descomposición propuesta es válida.

La descomposición de la ecuación (6.27) puede utilizarse también para plantear una descomposición de un 3-tensor totalmente simétrico y sin traza en el caso de espacio no plano con curvatura  $K$  constante. Si se "particionan" todos los términos desde la ecuación (6.28) hasta la ecuación (6.31) en "términos no redundantes." en los que las derivadas covariantes no conmuten, se puede plantear una descomposición de Helmholtz para el caso de espacio curvo con curvatura constante. Traduciendo el requerimiento de que el tensor simétrico no tenga traza en

la condición de que cada una de las contribuciones de la descomposición no tenga traza, en el caso de curvatura  $K$  constante, la descomposición de Helmholtz de un 3-tensor totalmente simétrico y sin traza  $R_{lmn}$  queda como

$$R_{lmn} = (D_{(l}D_mD_{n)} - \frac{2}{5}D^2s_{(lm}D_{n)} - \frac{1}{5}s_{(lm}D_{n)}D^2)R + D_{(l}D_mR^{(T)}_{n)} - \frac{1}{5}s_{(lm}D^2R^{(T)}_{n)} - \frac{1}{5}s_{(lm}D^jD_{n)}R^{(T)}_{j)} + D_{(l}R^{(TT)}_{mn)} + R^{(TT)}_{lmn} \quad (6.33)$$

Así mismo, con sus componentes estando sujetas a las restricciones

$$s^{mn}D_mR^{(T)}_n = 0, \quad s^{mn}R^{(TT)}_{mn} = 0, \quad s^{ln}D_lR^{(TT)}_{mn} = 0, \quad s^{mn}R^{(TT)}_{lmn} = 0 \quad \text{y} \quad s^{lp}D_pR^{(TT)}_{lmn} = 0. \quad (6.34)$$

De las ecuaciones (6.33) y (6.34) se evidencia que es posible obtener la descomposición (6.27) como un caso particular de la descomposición (6.33) en la que la curvatura  $K$  es cero (caso plano). Esta última descomposición se ha verificado de acuerdo con la idea de las soluciones de ecuaciones de Poisson y Helmholtz inhomogéneas planteada anteriormente, en base a un trabajo anterior asociado a la sustentación de descomposiciones de Helmholtz para 2-tensores simétricos, [46].

## 6.5. Descomposición de Helmholtz completa de una perturbación afín general

Las ecuaciones (6.33) y (6.34) especifican la forma en que puede descomponerse explícitamente el tensor  $\Sigma^{(7)}_{ijk}$  (o cualquier 3-tensor totalmente simétrico sin traza  $7_{SO_3}$ , de hecho). Tal y como se ha mencionado a lo largo del capítulo, las descomposiciones de Helmholtz de objetos  $3_{SO_3}$  y  $5_{SO_3}$  está disponible en trabajos anteriores, [32, 45]. A partir de las obras mencionadas, si  $\mathcal{A}_i$  representa un objeto  $3_{SO_3}$  (como  $\Sigma^{(3)}_i$ ) y  $\mathcal{B}_{ij}$  representa un objeto  $5_{SO_3}$  (como  $\Sigma^{(5)}_{(ml)}$  y  $\Lambda^{(5)}_{(ml)}$ ), sus descomposiciones de Helmholtz explícitas están dadas como

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}^{(T)}_i + D_i\mathcal{H} \quad (6.35)$$

$$\mathcal{I}_{ij} = (D_iD_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2)\mathcal{I} + 2D_{(i}\mathcal{I}^{(T)}_{j)} + \mathcal{B}^{(TT)}_{ij} \quad (6.36)$$

Con sus campos sujetos a las restricciones

$$s^{mn}D_m\mathcal{I}^{(T)}_n = s^{mn}D_m\mathcal{H}^{(T)}_n = 0, \quad s^{mn}\mathcal{I}^{(TT)}_{mn} = 0 \quad \text{y} \quad s^{ln}D_l\mathcal{I}^{(TT)}_{mn} = 0. \quad (6.37)$$

Las descomposiciones de Helmholtz de 2-tensores covariantes antisimétricos (como  $\Sigma^{(3')}_{[ml]}$  y  $\Lambda^{(3')}_{[ml]}$ ) se puede realizar como se señala en la discusión posterior a la ecuación (6.22), rescribiendo estos objetos en términos del tensor de Levi-Civita y utilizando luego una descomposición como la de la ecuación (6.35). Las descomposiciones de Helmholtz explícitas de objetos  $6_{SO_3}$  y  $9_{SO_3}$  se pueden obtener combinando las descomposiciones de las ecuaciones (6.35) y (6.36), considerando las simetrías de sus índices y agregando objetos  $1_{SO_3}$  escritos de forma que la descomposición sea *covariante*, en el sentido indicado en [48]. Así si  $\mathcal{C}_{ij}$  representa

un objeto  $6_{SO_3}$  y  $\mathcal{F}_{ij}$  representa un objeto  $9_{SO_3}$ , sus descomposiciones de Helmholtz explícitas están dadas como

$$\mathcal{C}_{ij} = \frac{s_{ij}}{3}\mathcal{G} + (D_i D_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2)\mathcal{C} + 2D_{(i}\mathcal{C}^{(T)}_{j)} + \mathcal{C}^{(TT)}_{ij} \quad (6.38)$$

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{s_{ij}}{3}\mathcal{H} + (D_i D_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2)\mathcal{F} + 2D_{(i}\mathcal{F}^{(T)}_{j)} + \mathcal{F}^{(TT)}_{ij} + \mathcal{E}_{ijk}s^{kl}(D_l\mathcal{I} + \mathcal{I}_l) \quad (6.39)$$

Así también, con sus campos sujetos a las restricciones

$$s^{mn}D_m\mathcal{C}^{(T)}_n = 0, \quad s^{mn}\mathcal{C}^{(TT)}_{mn} = 0, \quad s^{ln}D_l\mathcal{C}^{(TT)}_{mn} = 0, \quad (6.40)$$

$$s^{mn}D_m\mathcal{F}^{(T)}_n = s^{mn}D_m\mathcal{I}^{(T)}_n = 0, \quad s^{mn}\mathcal{F}^{(TT)}_{mn} = 0 \quad \text{y} \quad s^{ln}D_l\mathcal{F}^{(TT)}_{mn} = 0. \quad (6.41)$$

A partir de todo lo anterior, podemos proponer las siguientes descomposiciones de Helmholtz explícitas para las contribuciones de las partes simétrica y antisimétrica de la perturbación afín general listadas en la tabla 6.2:

$$\Sigma_{ttt} = A, \quad (6.42)$$

$$\Sigma_{tit} = D_i B + C_i, \quad (6.43)$$

$$\Sigma_{tti} = D_i D + E_i, \quad (6.44)$$

$$\Lambda_{tti} = D_i \tilde{B} + \tilde{C}_i, \quad (6.45)$$

$$\Lambda_{itj} = \mathcal{E}_{ijk}s^{kl}(D_l \tilde{D} + \tilde{E}_l), \quad (6.46)$$

$$\Sigma_{itj} = \frac{s_{ij}}{3}F + \left(D_i D_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2\right)G + 2D_{(i}H_{j)} + I_{ij}, \quad (6.47)$$

$$\Sigma_{tij} = \mathcal{E}_{ijk}s^{kl}(D_l J + K_l) + \frac{s_{ij}}{3}L + \left(D_i D_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2\right)M + 2D_{(i}N_{j)} + O_{ij}, \quad (6.48)$$

$$\Lambda_{tij} = \mathcal{E}_{ijk}s^{kl}(D_l \tilde{J} + \tilde{K}_l) + \frac{s_{ij}}{3}\tilde{L} + \left(D_i D_j - \frac{s_{ij}}{3}D^2\right)\tilde{M} + 2D_{(i}\tilde{N}_{j)} + \tilde{O}_{ij}, \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ijk} = & \frac{3}{5}(s_{(ij}D_k)P + s_{(ij}Q_k) + \left(D_{(i}D_j D_k) - \frac{2}{5}D^2 s_{(ij}D_k) - \frac{1}{5}s_{(ij}D_k)D^2\right)R \\ & + D_{(i}D_j S_k) - \frac{1}{5}D^2 s_{(ij}S_k) - \frac{1}{5}s_{(ij}D^m D_k)S_m + D_{(i}T_{jk)} + U_{ijk} + \frac{1}{2}s^{pq}(\mathcal{E}_{ijp}\delta_k^r + \mathcal{E}_{kjp}\delta_i^r) \\ & \left[\left(D_q D_r - \frac{1}{3}s_{qr}D^2\right)V + 2D_{(q}W_{r)} + X_{qr} + \mathcal{E}_{qrm}s^{mn}(D_n Y + Z_n)\right], \end{aligned} \quad (6.50)$$

Y, por último

$$\begin{aligned} \Lambda_{ijk} = & \mathcal{E}_{ijk}\tilde{A} + \frac{1}{2}s^{pq}(2\mathcal{E}_{ikp}\delta_j^r + \mathcal{E}_{ijp}\delta_k^r - \mathcal{E}_{kjp}\delta_i^r) \\ & \left[\left(D_q D_r - \frac{1}{3}s_{qr}D^2\right)\tilde{V} + 2D_{(q}\tilde{W}_{r)} + \tilde{X}_{qr} + \mathcal{E}_{qrm}s^{mn}(D_n \tilde{Y} + \tilde{Z}_n)\right], \end{aligned} \quad (6.51)$$

En donde todos los campos vectoriales son transversos y todos los campos de tipo 2-tensor y 3-tensor son simétricos, transversos y no tienen traza. En resumen, la perturbación afín general ha sido descompuesta en catorce escalares, seis *pseudoescalares* (en el sentido de que su signo se invierte bajo inversiones de paridad), diez vectores transversos, cinco pseudovectores

transversos, cuatro 2-tensores simétricos ( $TT$ ), dos pseudo 2-tensores simétricos y un 3-tensor totalmente simétrico ( $TT$ ). Esta descomposición resulta crucial cuando se examina la dinámica de teorías que preservan la paridad. Es posible concluir que campos escalares y pseudoescalares de la perturbación afín no se mezclan en el análisis, de forma que no se viole la paridad, sin embargo no se puede asegurar lo mismo para algunos vectores y pseudovectores, por lo que comportamientos como éstos enfatizan el potencial de que estos campos puedan interactuar en este contexto. En la tabla 6.3 presentamos en detalle a qué categoría pertenece cada campo.

CUADRO 6.3: *Categorías de los campos generadores de la perturbación afín general.*

Escalares	$A, B, D, F, G, L, M, P, R, Y, \tilde{B}, \tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{Y}$
Pseudoescalares	$J, V, \tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{V}$
Vectores	$C_i, E_i, H_i, N_i, Q_i, S_i, Z_i, \tilde{C}_i, \tilde{N}_i, \tilde{Z}_i$
Pseudovectores	$K_i, W_i, \tilde{E}_i, \tilde{K}_i, \tilde{W}_i$
2-tensores	$I_{ij}, O_{ij}, T_{ij}, \tilde{O}_{ij}$
Pseudo 2-tensores	$X_{ij}, \tilde{X}_{ij}$
3-tensores	$U_{ijk}$

Todos los campos listados en la tabla 6.3 determinan por completo una perturbación afín general (sobre una conexión de fondo cosmológico) y permiten obtener la descomposición de Helmholtz de la misma.



# Análisis de variaciones de los campos de una perturbación afín cosmológica y gauges asociados

---

El siguiente paso en el análisis de perturbaciones corresponde a determinar, de ser posible, cantidades invariantes a partir de los campos generadores de la perturbación (que permitan describir ésta de la mejor forma posible) y establecer *gauges* convenientes para el estudio. A continuación presentamos en detalle las variaciones de los campos generadores de la perturbación afín general bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas y toda la información que podemos extraer a partir de éstas.

## 7.1. Variaciones de las contribuciones de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas

Para determinar las transformaciones (o variaciones) de los campos de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas (con su correspondiente generador de transformaciones denotado como  $\xi_\alpha$ ), primero resulta conveniente obtener expresiones explícitas para las variaciones de sus contribuciones, es decir, para los objetos listados en las tablas 6.1 y 6.2. Como se mencionó en la sección 3.4, se puede demostrar que, bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, [23, 28], obviando el parámetro global  $\epsilon$  que controla el tamaño de la perturbación, la variación  $\delta C_\mu^\lambda{}_\nu$  de la perturbación afín se puede calcular a través de la derivada de Lie  $\mathcal{L}_\xi \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu$  de la conexión de fondo:

$$\begin{aligned} \delta C_\mu^\lambda{}_\nu &= \mathcal{L}_\xi \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu \\ &= \xi^\sigma \mathcal{R}_{\sigma\mu}^\lambda{}_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\lambda - \nabla_\mu (\mathcal{T}_\nu^\lambda{}_\sigma \xi^\sigma), \end{aligned} \tag{7.1}$$

En donde  $\mathcal{R}_{\sigma\mu}^\lambda{}_\nu$  representa el *tensor de Riemann* o *tensor de curvatura*,  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante (para todo el espaciotiempo) y  $\mathcal{T}_\mu^\lambda{}_\nu \equiv 2\Gamma_{[\mu}^\lambda{}_{\nu]}$  es la torsión, asociados a la conexión de fondo  $\Gamma_\mu^\lambda{}_\nu$ . Después de calcular cada uno de los términos de la ecuación 7.1, utilizando las definiciones explícitas de las componentes de la conexión de fondo  $\Gamma_\mu^\lambda{}_\nu$ , definidas en el capítulo 4.4; y evaluando explícitamente los índices libres en ésta como índices temporal  $t$  ó espacial  $i$  (ó a través de cualquier índice *latino*), se pueden obtener las siguientes expresiones para las

variaciones de cada una de las contribuciones de la tabla 6.1:

$$\delta C_t^t = \ddot{\xi}^t, \quad (7.2)$$

$$\delta C_t^i = \ddot{\xi}^i + 2h\dot{\xi}^i, \quad (7.3)$$

$$\delta C_t^i = D_i\dot{\xi}^t + g s_{ij}\dot{\xi}^j - (h-p)D_i\xi^t, \quad (7.4)$$

$$\delta C_i^t = D_i\dot{\xi}^t - (h+p)D_i\xi^t + g s_{ij}\dot{\xi}^j, \quad (7.5)$$

$$\delta C_i^j = D_i D_j \xi^t + 2g s_{k(i} D_j) \xi^k - gq \left( 2s_{kj} S_i^k{}_l + s_{ki} S_j^k{}_l + s_{kl} S_i^k{}_j \right) \xi^l + s_{ij} (\dot{g}\xi^t - g\dot{\xi}^t) - q S_i^k{}_j D_k \xi^t, \quad (7.6)$$

$$\delta C_t^j = D_i \dot{\xi}^j + \delta_i^j \partial_t ((h-p)\xi^t) - q S_i^j{}_k \dot{\xi}^k, \quad (7.7)$$

$$\delta C_i^j = D_i \dot{\xi}^j + \delta_i^j \partial_t ((h+p)\xi^t) + q S_i^j{}_k \dot{\xi}^k \quad y \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \delta C_i^k{}_j = & D_i D_j \xi^k + \kappa \left( \delta_l^k s_{ij} - \delta_i^k s_{lj} \right) \xi^l - g s_{ij} \dot{\xi}^k + \dot{q} S_i^k{}_j \xi^t + (h+p) \delta_i^k D_j \xi^t + (h-p) \delta_j^k D_i \xi^t \\ & - q \left( S_i^l{}_j D_l \xi^k + 2S_l^k{}_{[i} D_j] \xi^l \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

A partir de la descomposición de la perturbación afín  $C_\alpha{}^\beta{}_\gamma$  en sus partes simétrica  $\Sigma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$  y antisimétrica  $\Lambda_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ , de acuerdo con la ecuación (6.2); y de los resultados obtenidos desde la ecuación 7.2 hasta la ecuación 7.9, las variaciones de las contribuciones de las partes simétricas y antisimétricas de la perturbación afín, listadas en la tabla 6.2, pueden establecerse como

$$\delta \Sigma_t^t = \ddot{\xi}^t, \quad (7.10)$$

$$\delta \Sigma_t^i = \ddot{\xi}^i + 2h\dot{\xi}^i, \quad (7.11)$$

$$\delta \Sigma_i^t = D_i \dot{\xi}^t + g s_{ij} \dot{\xi}^j - h D_i \xi^t, \quad (7.12)$$

$$\delta \Lambda_i^t = -h D_i \xi^t, \quad (7.13)$$

$$\delta \Sigma_i^j = D_i D_j \xi^t + 2g s_{k(i} D_j) \xi^k + s_{ij} (\dot{g}\xi^t - g\dot{\xi}^t), \quad (7.14)$$

$$\delta \Lambda_i^j = -gq \left( 2s_{kj} S_i^k{}_l + s_{ki} S_j^k{}_l + s_{kl} S_i^k{}_j \right) \xi^l - q S_i^k{}_j D_k \xi^t, \quad (7.15)$$

$$\delta \Sigma_i^j{}_t = D_i \dot{\xi}^j + \delta_i^j \partial_t (h\xi^t), \quad (7.16)$$

$$\delta \Lambda_i^j{}_t = \delta_i^j \partial_t (p\xi^t) + q S_i^j{}_k \dot{\xi}^k, \quad (7.17)$$

$$\delta \Sigma_i^k{}_j = D_{(i} D_j) \xi^k + \kappa \left( \delta_l^k s_{ij} - \delta_{(i}^k s_{j)l} \right) \xi^l - g s_{ij} \dot{\xi}^k + 2h \delta_{(i}^k D_j) \xi^t \quad y \quad (7.18)$$

$$\delta \Lambda_i^k{}_j = D_{[i} D_j] \xi^k - \kappa \delta_{[i}^k s_{j]l} \xi^l + \dot{q} S_i^k{}_j \xi^t + 2p \delta_{[i}^k D_j] \xi^t - q \left( S_i^l{}_j D_l \xi^k + 2S_l^k{}_{[i} D_j] \xi^l \right). \quad (7.19)$$

A continuación, utilizaremos los resultados detallados desde la ecuación 7.10 hasta la ecuación (7.19) para obtener las variaciones de los campos generadores de la perturbación afín en la sección siguiente.

## 7.2. Variaciones de los campos de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas

Para obtener la forma explícita de las reglas de transformación de los campos generadores de la perturbación afín bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, debemos descomponer las componentes espaciales  $\xi^i$  del generador de la transformación en sus componentes

longitudinal y transversa, es decir,

$$\xi^i \rightarrow D^i\psi + \zeta^i \text{ con } D_i\zeta^i = 0. \quad (7.20)$$

La descomposición 7.20 permite calcular explícitamente las derivadas covariantes del generador de la transformación que aparecen en varios de los términos de las ecuaciones de transformación de las contribuciones simétricas y simétricas de la perturbación, desde la ecuación 7.10 hasta la ecuación (7.19). Junto con la descomposiciones de estas mismas contribuciones, listadas desde la ecuación (6.42) hasta la ecuación (6.51), a través de un *método de identificación*, [45], o sirviéndonos de la naturaleza longitudinal, transversa o doblemente transversa de los campos que se analizan, podemos usar ambos conjuntos de ecuaciones ya referidos para obtener las ecuaciones de transformación de los campos.

De las ecuaciones (6.42) y (7.10), se puede obtener directamente que

$$\delta A = \ddot{\xi}^t. \quad (7.21)$$

Similarmente, las ecuaciones (6.43) y (7.11) producen las variaciones,

$$\delta B = \ddot{\psi} + 2h\dot{\psi}, \quad (7.22)$$

$$\delta C^i = \ddot{\zeta}^i + 2h\dot{\zeta}^i. \quad (7.23)$$

A partir de las ecuaciones de transformación (7.12) y (7.13), los campos de las descomposiciones (6.44) y (6.45) transforman como

$$\delta D = \dot{\xi}^t - h\xi^t + g\dot{\psi}, \quad (7.24)$$

$$\delta E_i = g s_{ij}\dot{\zeta}^j \quad (7.25)$$

$$\delta \tilde{B} = p \xi^t, \quad (7.26)$$

$$\delta \tilde{C}^i = 0. \quad (7.27)$$

Luego, de la ecuación de transformación (7.15), los campos de la descomposición (6.46) tienen las variaciones

$$\delta \tilde{D} = q \xi^t, \quad (7.28)$$

$$\delta \tilde{E}_i = 0. \quad (7.29)$$

Después, considerando la descomposición (6.47) y tomando las trazas, tanto de dicha ecuación como de la ecuación de transformación (7.14), podemos obtener las siguientes variaciones

$$\delta F = 3\dot{g}\xi^t - 3g\dot{\xi}^t + D^2(\xi^t + 2g\psi), \quad (7.30)$$

$$\delta G = \xi^t + 2g\psi, \quad (7.31)$$

$$\delta H_i = g\zeta_i, \quad (7.32)$$

$$\delta I_{ij} = 0. \quad (7.33)$$

La variación (7.16) permite obtener las ecuaciones de transformación de los campos de la descomposición (6.48) como

$$\delta(D_l J + K_l) = -\frac{1}{2\sqrt{s}} s_{lk} \varepsilon^{kij} D_i \zeta_j, \quad (7.34)$$

$$\delta L = 3(\dot{h}\xi^t + h\dot{\xi}^t) + D^2 \psi, \quad (7.35)$$

$$\delta M = \dot{\psi}, \quad (7.36)$$

$$\delta N_i = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_i, \quad (7.37)$$

$$\delta O_{ij} = 0. \quad (7.38)$$

Enseguida, la ecuación (7.17) da las variaciones de los campos de la descomposición (6.49) de la forma siguiente

$$\delta \tilde{J} = q\dot{\psi}, \quad (7.39)$$

$$\delta \tilde{K}_i = q s_{ij} \dot{\zeta}^j, \quad (7.40)$$

$$\delta \tilde{L} = -3(\dot{p}\xi^t + p\dot{\xi}^t), \quad (7.41)$$

$$\delta \tilde{M} = 0, \quad (7.42)$$

$$\delta \tilde{N}_i = 0, \quad (7.43)$$

$$\delta \tilde{O}_{ij} = 0. \quad (7.44)$$

A partir de las ecuaciones de transformación (7.18) y (7.19) se pueden obtener las variaciones de los campos restantes. Mediante un procedimiento similar al aplicado para obtener los resultados desde la ecuación (7.30) hasta la ecuación (7.33), es decir, tomando la traza de las ecuaciones (7.18) y (7.19) y de sus ecuaciones de descomposición correspondientes, pueden separarse las contribuciones y, a través de un método de identificación (o calculando divergencias en su defecto), pueden obtenerse las ecuaciones de transformación restantes. Así, puede comprobarse que los campos de la descomposición (6.50) transforman como

$$\delta P = D^2 \psi + \frac{4}{3} \kappa \psi + \frac{10}{3} h \xi^t - \frac{5}{3} g \dot{\psi}, \quad (7.45)$$

$$\delta Q_i = \frac{2}{3} \kappa \zeta_i + \frac{1}{3} D^2 \zeta_i - \frac{5}{3} g \dot{\zeta}_i, \quad (7.46)$$

$$\delta R = \psi, \quad (7.47)$$

$$\delta S_i = \zeta_i, \quad (7.48)$$

$$\delta T_{ij} = 0, \quad (7.49)$$

$$\delta U_{ikj} = 0 \quad (7.50)$$

$$\delta V = 0, \quad (7.51)$$

$$\delta W_i = \frac{1}{3} \sqrt{s} \varepsilon_{ijk} D^j \zeta^k, \quad (7.52)$$

$$\delta X_{ij} = 0, \quad (7.53)$$

$$\delta Y = \frac{4}{3} \kappa \psi - \frac{2}{3} h \xi^t - \frac{2}{3} g \dot{\psi}, \quad (7.54)$$

$$\delta Z_i = \frac{2}{3} \kappa \zeta_i + \frac{1}{3} D^2 \zeta_i - \frac{2}{3} g \dot{\zeta}_i, \quad (7.55)$$

Mientras que los campos de la descomposición (6.51), varían como sigue

$$\delta\tilde{A} = \dot{q}\xi^t + \frac{1}{3}qD^2\psi, \quad (7.56)$$

$$\delta\tilde{V} = \frac{4}{3}q\psi, \quad (7.57)$$

$$\delta\tilde{W}_i = \frac{2}{3}q\zeta_i, \quad (7.58)$$

$$\delta\tilde{X}_{ij} = 0, \quad (7.59)$$

$$\delta\tilde{Y} = \frac{2}{3}p\xi^t, \quad (7.60)$$

$$\delta\tilde{Z}_i = 0. \quad (7.61)$$

De esta manera hemos obtenido las variaciones de todos los campos generadores de la perturbación. Para finalizar el capítulo, en la sección siguiente analizamos los diferentes *gauges* y cantidades invariantes que podemos establecer a partir de las ecuaciones de transformación recientemente obtenidas.

### 7.3. Discusión sobre cantidades invariantes y determinación de los gauges posibles

Después del análisis descrito en las dos secciones anteriores, lo primero que podemos hacer es destacar los diferentes campos que bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas resultan invariantes por defecto. En adición a los 2-tensores y 3-tensores que, por defecto, ya son invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas (debido a que el generador de dichas transformaciones es un vector, [45]), de la ecuación (7.51) observamos que el campo  $V$  de la parte simétrica; y los campos  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}_i$ ,  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{Z}_i$  de la parte antisimétrica de la perturbación, a partir de las ecuaciones (7.26), (7.27), (7.29), (7.42) y (7.61), son también invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas o *gauges*. Cantidades invariantes adicionales pueden definirse a partir de la combinación de las ecuaciones de transformación de los otros campos, sin embargo, la definición de las cantidades invariantes adicionales no es única.

Considerando que podemos establecer la siguiente relación entre la componente temporal del generador de transformaciones infinitesimales de coordenadas y algunos de los campos de la perturbación a partir de sus variaciones:

$$\xi^t = \delta(G - 2gR), \quad (7.62)$$

una elección de definición de cantidades invariantes (adicionales a las ya mencionadas) puede

ser la siguiente:

$$\Delta \equiv M - \dot{R}, \quad (7.63)$$

$$\Delta_i \equiv \dot{S}_i - 2N_i, \quad (7.64)$$

$$\Theta \equiv B - \ddot{R} - 2hM, \quad (7.65)$$

$$\Theta_i \equiv C_i - \ddot{S}_i - 4hN_i, \quad (7.66)$$

$$\Xi \equiv A - \partial_{tt}(G - 2gR), \quad (7.67)$$

$$\Xi_i \equiv E_i - 2gN_i, \quad (7.68)$$

$$\Pi \equiv D - \partial_t(G - 2gR) + h(G - 2gR) - gM, \quad (7.69)$$

$$\Pi_i \equiv H_i - gS_i, \quad (7.70)$$

$$\Upsilon \equiv F - D^2G - 3(\dot{g} - g\partial_t)(G - 2gR), \quad (7.71)$$

$$\Upsilon_i \equiv Q_i + \frac{5}{3}E_i - \frac{1}{3}(D^2 + 2\kappa)S_i, \quad (7.72)$$

$$\Phi \equiv L - D^2M - 3\partial_t(h(G - 2gR)), \quad (7.73)$$

$$\Phi_i \equiv Z_i - \frac{1}{3}(D^2 + 2\kappa)S_i + \frac{2}{3}gE_i, \quad (7.74)$$

$$\chi \equiv P - (D^2 + \frac{4}{3}\kappa)R + \frac{5}{3}gMm - \frac{10}{3}(G - 2gR), \quad (7.75)$$

$$\chi_i \equiv 3W_i - \mathcal{E}_{ijk}D^jS^k, \quad (7.76)$$

$$\Psi \equiv Y - \frac{4}{3}\kappa R + \frac{2}{3}gM + \frac{2}{3}h(G - 2gR), \quad (7.77)$$

$$\Psi_i \equiv K_i + D_iJ + \frac{\mathcal{E}_{ijk}}{s}D^jN^k, \quad (7.78)$$

$$\tilde{\Delta} \equiv q\tilde{B} - p\tilde{D}, \quad (7.79)$$

$$\tilde{\Theta} \equiv \frac{\tilde{J}}{q} - \frac{3}{4}\partial_t\left(\frac{\tilde{V}}{q}\right), \quad (7.80)$$

$$\tilde{\Xi} \equiv \tilde{B} - \frac{3}{2}\tilde{Y}, \quad (7.81)$$

$$\tilde{\Pi} \equiv 9\dot{\tilde{Y}} + 2\tilde{L}, \quad (7.82)$$

$$\tilde{\Upsilon} \equiv q\left(\tilde{A} - \frac{1}{4}D^2\tilde{V}\right) - \dot{q}\tilde{D} \quad y \quad (7.83)$$

$$\tilde{\Phi}_i \equiv \frac{\tilde{K}_i}{q} - \frac{3}{2}\partial_t\left(\frac{\tilde{W}_i}{q}\right), \quad (7.84)$$

que comprenden en total 56 de las 64 componentes de la perturbación.

Recordando que 4 componentes de la perturbación pueden relacionarse directamente con la elección de un sistema de coordenadas particular, las 4 componentes restantes pueden obtenerse a partir de la combinación de las variaciones de algunas cantidades de la parte simétrica de la

perturbación y algunas de su parte antisimétrica. Así, bien podemos definir

$$\iota \equiv 4qR - 3\tilde{V}, \quad (7.85)$$

$$\tilde{\iota} \equiv \tilde{D} + 2gqR - qG \quad y \quad (7.86)$$

$$\iota_i \equiv 2qS_i - 3\tilde{W}_i, \quad (7.87)$$

que corresponden a las cantidades que completan *un* conjunto particular de campos, asociados a la perturbación (es decir, que permiten escribirla en términos de éstos), que son *invariantes*, es decir, no varían bajo la acción del grupo de diffeomorfismos infinitesimales.

La observación de los campos que son invariantes (por defecto) implica que 24 componentes de la perturbación son *invariantes de gauge*, dejando 40 componentes que varían bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas y cuyas variaciones se detallan en la sección anterior. Específicamente, de las 40 componentes mencionadas, 29 componentes pertenecen a la parte simétrica de la perturbación y las 11 componentes restantes pertenecen a la parte antisimétrica. La *libertad de elección del gauge* puede ser utilizada para reducir las 40 componentes no invariantes a 36 componentes no invariantes, [45], dado que las 4 restantes pueden asociarse a la elección de un sistema coordinado particular, como se mencionó anteriormente. A continuación, estableceremos algunos gauges posibles igualando algunas variables específicas a cero. En nuestro contexto, esta flexibilidad será exclusivamente aplicada al sector gravitacional debido a que en este trabajo no estamos tomando en cuenta campos materiales.

Para determinar los gauges posibles, primero podemos aprovechar la libertad asociada con la transformación en la coordenada temporal para eliminar uno de los siguientes siete campos ( $G, P, Y, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{Y}$ ). Adicionalmente, la transformación en la coordenada espacial nos permite escoger  $\psi$  estratégicamente, pudiendo eliminar uno de los cinco siguientes posibles campos ( $F, G, R, \tilde{A}, \tilde{V}$ ). Finalmente, la libertad asociada con las contribuciones  $\zeta^i$  nos permite remover uno de los campos del conjunto siguiente ( $H_i, S_i, W_i, \tilde{W}_i, D_i J + K_i$ ) dando pie a un total de 165 combinaciones de gauges diferentes<sup>1</sup>. Un gauge que nos parece particularmente interesante resulta de establecer  $J = K_i = 0$  a través de  $\zeta^i$ , ec. (7.34), porque  $J$  es un pseudoescalar que transforma a través del vector  $\zeta^i$ , produciendo por lo tanto un término de naturaleza mixta.

Finalmente, podemos señalar que, considerando un *fondo* sin torsión, indicando que  $p = q = 0$ , los campos ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{L}, \tilde{V}, \tilde{Y}, \tilde{K}_i, \tilde{W}_i$ ) permanecen invariantes. Lo anterior implica la invarianza de la parte antisimétrica (tensorial)  $\Lambda_\alpha^\beta{}_\gamma$  de la perturbación bajo transformaciones infinitesimales cuando la conexión de fondo es simétrica en sus índices inferiores. Dicha invarianza es una consecuencia del lema bien conocido de Stewart-Walker, que asegura que un tensor es un *invariante de gauge* si es que se puede anular en el fondo, [51].

---

<sup>1</sup>A pesar de que hemos considerado un espaciotiempo genérico, es importante notar que en casos específicos, el número de cantidades invariantes puede variar. Por ejemplo, si la conexión de fondo no tuviese torsión, es decir,  $p = q = 0$ , esta condición implica la existencia de nuevas cantidades invariantes.



# Discusión de resultados y conclusiones

---

En este trabajo, hemos supuesto que la estructura de nuestro espaciotiempo está determinada por completo a través de la conexión. En este contexto, pudimos desarrollar un formalismo de perturbaciones cosmológicas. Suponiendo un *fondo* consistente con un Universo isótropo y homogéneo, hemos podido desarrollar perturbaciones sobre la conexión, es decir, implementar perturbaciones *afines* en el fondo. Considerando la ausencia de métrica, a partir del formalismo propuesto hemos dispuesto 64 campos de la perturbación afín, asociados con la conexión. A pesar de la naturaleza no tensorial de la conexión, la perturbación es un tensor y ésta se ha descompuesto en dos partes diferentes: una parte simétrica y una parte antisimétrica asociada a la torsión. La descomposición anterior permite a su vez una descomposición posterior en 40 componentes asociadas a la parte simétrica y 24 asociadas a la parte antisimétrica. Vale la pena notar, sin embargo, que cuando se supone que la torsión es despreciable, la perturbación tiene 40 componentes independientes en total, como típicamente se esperaría en concordancia con Relatividad General.

Posterior a la implementación de una descomposición de tipo (3+1) en las componentes de la perturbación afín y aprovechando las simetrías impuestas en la subvariedad *espacial* 3-dimensional, adicionalmente descompusimos las *contribuciones* de la perturbación bajo los grupos  $GL(3, \mathbb{R})$  y  $SO(3, \mathbb{R})$ . Evidenciando, a través de la expansión del caracter de un objeto típico de  $SO(3, \mathbb{R})$ , que representaciones irreducibles de  $SO(3, \mathbb{R})$  pueden descomponerse a su vez en representaciones irreducibles de  $SO(2, \mathbb{R})$ , los diferentes campos asociados con la perturbación afín se sometieron a una descomposición en componentes irreducibles, como la descomposición de Helmholtz en el marco de trabajo cosmológico convencional. Al final como resultado de la descomposición, establecimos una clasificación de los campos de la perturbación afín en escalares, pseudoescalares, vectores, pseudovectores, 2-tensores, pseudo 2-tensores y 3-tensores. La clasificación mencionada contrasta con la naturaleza de los campos en que se descompone una perturbación métrica, por lo cual resulta interesante y podría volverse importante a la hora de estudiar la dinámica de los campos de la perturbación afín.

Asimismo, imitando el formalismo de perturbaciones que se utiliza típicamente en Relatividad General, hicimos uso de la libertad asociada a la implementación de transformaciones infinitesimales de coordenadas para simplificar el análisis de las perturbaciones. A partir de la técnica anterior, identificamos todos los campos que son invariantes bajo este tipo de transformaciones y establecimos todas las variaciones de los campos bajo transformaciones de coordenadas, permitiéndonos establecer, a partir de éstas, un total de 165 posibles *gauges* en el caso general. Estas posibilidades de *gauges* pueden estudiarse en trabajos posteriores con el fin de determinar cuáles de ellos pueden resultar ventajosos para simplificar cálculos algebraicos.

Finalmente, pudimos observar que cuando la parte antisimétrica de la conexión es cero en el fondo, su perturbación se vuelve un invariante de gauge, lo que resulta una manifestación

del lema de Stewart-Walker. A partir de esta discusión, podemos ver que este formalismo es valioso por el cúmulo de posibilidades de estudio que pueden derivarse a partir de él y un análisis de la dinámica de los campos de la perturbación afín resulta meritorio con el fin de explorar la posibilidad de obtener resultados consistentes con el formalismo de perturbaciones en Relatividad General.

# Bibliografía

- [1] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, *et al.*, “Planck 2018 results-vi. cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6.
- [2] C. Lanczos, “A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions,” *Annals of Mathematics* (1938) 842–850.
- [3] D. Lovelock, “The uniqueness of the einstein field equations in a four-dimensional space,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **33** (1969) 54–70.
- [4] E. N. Saridakis, R. Lazkoz, V. Salzano, P. V. Moniz, S. Capozziello, J. B. Jiménez, M. De Laurentis, and G. J. Olmo, “Modified gravity and cosmology,” tech. rep., Springer, 2021.
- [5] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*. The University Press, 1923.
- [6] N. J. Poplawski, “A unified, purely affine theory of gravitation and electromagnetism,” *arXiv preprint arXiv:0705.0351* (2007) .
- [7] O. Castillo-Felisola, J. Perdiguero, O. Orellana, and A. R. Zerwekh, “Emergent metric and geodesic analysis in cosmological solutions of (torsion-free) polynomial affine gravity,” *Classical and Quantum Gravity* **37** no. 7, (2020) 075013.
- [8] D. Iosifidis and L. Ravera, “Cosmology of quadratic metric-affine gravity,” *Physical Review D* **105** no. 2, (2022) 024007.
- [9] S. Capozziello and F. Bajardi, “Minisuperspace quantum cosmology in metric and affine theories of gravity,” *Universe* **8** no. 3, (2022) 177.
- [10] K. Aoki, S. Bahamonde, J. G. Valcarcel, and M. A. Gorji, “Cosmological perturbation theory in metric-affine gravity,” *arXiv preprint arXiv:2310.16007* (2023) .
- [11] P. Cvitanovic, *Group theory: birdtracks, Lie’s, and exceptional groups*. Princeton University Press, 2008.
- [12] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course*, vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. Taylor & Francis, 2000.

- [14] R. Slansky, “Group theory for unified model building,” *Physics reports* **79** no. 1, (1981) 1–128.
- [15] P. Ramond, *Group Theory: A Physicist’s Survey*. Cambridge University Press, 2010.
- [16] P. Cvitanovic, *Group theory: birdtracks, Lie’s, and exceptional groups*. Princeton University Press, 2008.
- [17] F. Iachello, *Lie algebras and applications*, vol. 708. Springer, 2006.
- [18] G. Costa and G. Fogli, *Symmetries and group theory in particle physics: An introduction to space-time and internal symmetries*. Springer, 2012.
- [19] A. P. Isaev and V. A. Rubakov, *Theory of groups and symmetries: finite groups, Lie groups, and Lie algebras*. World Scientific, 2018.
- [20] R. Gilmore, *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Courier Corporation, 2006.
- [21] M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*. Courier Corporation, 2012.
- [22] Z.-Q. Ma, *Group theory for physicists*. World Scientific, 2007.
- [23] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*. Courier Dover Publications, 2020.
- [24] C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, and Y. Choquet-Bruhat, *Analysis, manifolds and physics*. North-Holland, 1978.
- [25] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor analysis on manifolds*. Courier Corporation, 2012.
- [26] J. L. Synge and A. Schild, *Tensor calculus*, vol. 5. Courier Corporation, 1978.
- [27] D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, differential forms, and variational principles*. Courier Corporation, 1989.
- [28] M. Hohmann, “Perturbations of connections, tetrads and finsler functions,”.
- [29] D. Iosifidis, “Metric-affine gravity and cosmology/aspects of torsion and non-metricity in gravity theories,” *arXiv preprint arXiv:1902.09643* (2019) .
- [30] T.-P. Cheng, *Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction*, vol. 11. Oxford University Press, 2009.
- [31] S. Jensen, “General relativity with torsion: extending wald’s chapter on curvature,” *IN: <http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/GRTorsion.pdf>* (2005) .
- [32] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford, 2008.

- 
- [33] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The astronomical journal* **116** no. 3, (1998) 1009.
- [34] M. Banados and P. G. Ferreira, “Eddington’s theory of gravity and its progeny,” *Physical review letters* **105** no. 1, (2010) 011101.
- [35] H. Azri, “Eddington’s gravity in immersed spacetime,” *Classical and Quantum Gravity* **32** no. 6, (2015) 065009.
- [36] S. Chakraborty and T. Padmanabhan, “Eddington gravity with matter: An emergent perspective,” *Physical Review D* **103** no. 6, (2021) 064033.
- [37] D. N. Vollick, “Born-infeld-einstein theory with matter,” *Physical Review D* **72** no. 8, (2005) 084026.
- [38] J. Kijowski, “On a purely affine formulation of general relativity,” in *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics: Proceedings of the Conferences Held at Aix-en-Provence, September 3–7, 1979 and Salamanca, September 10–14, 1979*, pp. 455–461, Springer. 1980.
- [39] N. Popławski, “Affine theory of gravitation,” *General Relativity and Gravitation* **46** (2014) 1–11.
- [40] O. Castillo-Felisola, “Beyond einstein: a polynomial affine model of gravity,” *Gravity: Geoscience Applications, Industrial Technology and Quantum Aspect* (2018) 183.
- [41] W. Thirring, *A course in mathematical physics 1 and 2: Classical dynamical systems and classical field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [42] O. Castillo-Felisola, J. Perdiguero, and O. Orellana, “Cosmological solutions to polynomial affine gravity in the torsion-free sector,” in *Redefining Standard Model Cosmology*. IntechOpen, 2018.
- [43] O. Castillo-Felisola, B. Grez, G. J. Olmo, O. Orellana, and J. P. Gárate, “Cosmological solutions in polynomial affine gravity with torsion,” *arXiv preprint arXiv:2404.11703* (2024) .
- [44] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [45] E. Poisson and C. M. Will, *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [46] N. Straumann, “Proof of a decomposition theorem for symmetric tensors on spaces with constant curvature,” *Annalen der Physik* **520** no. 8, (2008) 609–611.
- [47] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*. Springer, 2008.

- [48] Y. Itin and S. Reches, “Decomposition of third-order constitutive tensors,” *Math. Mech. Solids* **27** no.~2, (May, 2021) 222.
- [49] J. M. Landsberg, *Tensors: Geometry and Applications*, vol. 128 of *Graduate studies in mathematics*. 1st ed., 2011.
- [50] A. Brandenburg, G. Gogoberidze, T. Kahniashvili, S. Mandal, A. R. Pol, and N. Shenoy, “The scalar, vector, and tensor modes in gravitational wave turbulence simulations,” *Classical and quantum gravity* **38** no. 14, (2021) 145002.
- [51] J. M. Stewart and M. Walker, “Perturbations of space-times in general relativity,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **341** no. 1624, (1974) 49–74.