

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
Y
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

AGUJEROS NEGROS CON PELO Y DUALIDAD ADS/CFT

TESIS PRESENTADA POR DAVID CHOQUE QUISPE
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN FÍSICA

DIRECTOR DE TESIS: DUMITRU ASTEFANESEI

NOVIEMBRE 2016

VALPARAÍSO

TITULO DE TESIS:

AGUJEROS NEGROS CON PELO Y DUALIDAD ADS/CFT

AUTOR:

DAVID CHOQUE QUISPE

TESIS PRESENTADA POR DAVID CHOQUE QUISPE
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN FÍSICA

COMITE EXAMINADOR:

DR. DUMITRU ASTEFANESEI (PUCV)

DR. ANDRÉS ACEÑA (UC)

DR. OLIVERA MIŠKOVÍČ (PUCV)

DR. ALFONSO ZERWEKH (UTFSM)

VALPARAÍSO, CHILE. NOVIEMBRE 16, 2016

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres quienes sembraron en mi grandes deseos de superación y amor por la vida

Resumen

La dualidad AdS/CFT es una realización concreta del principio holográfico. Es una herramienta muy eficaz para extraer información de teorías gauge fuertemente acopladas (en d -dimensiones) de una teoría gravitacional clásica (en $d+1$ dimensiones). Los agujeros negros asintóticamente AdS juegan un rol importante en el entendimiento de la dinámica y termodinámica de las teorías del campo holográficas duales. En particular, estos agujeros negros son duales a los estados térmicos de la teoría del campo del borde. Los campos desempeñan un rol importante en cosmología para modelar la materia oscura, en física de altas energías la partícula de Higgs es escalar.

Consideramos teorías de campos escalares mínimamente acoplados a la gravedad con potenciales (escalares) no-triviales. Calculamos la acción on-shell regularizada con el método de renormalización holográfica y de esta obtenemos las cantidades termodinámicas de soluciones exactas de agujeros negros. Estudiamos los diagramas de fase de estos agujeros negros y sus interpretaciones en la teoría del campo dual. Construimos el tensor de stress de Brown-York y calculamos la masa (holográfica). A continuación, para una solución general, calculamos la masa holográfica, la masa Hamiltoniana y vemos que concuerdan para cualesquiera condiciones de borde. Estudiamos la anomalía de traza y su contribución no-trivial a la masa. Estos resultados fueron anteriormente publicados en [1–3].

Contribución de los autores

La tesis contiene materiales que fueron previamente publicados en las refs. [1–3]. En el capítulo 2 presentamos una revisión general de la literatura necesarios para una adecuada comprensión del resto de capítulos. No se hace ninguna afirmación en la originalidad del material presentado en este capítulo. En el capítulo 3 se presentan los resultados de la refs. [4–6] los que fueron publicados por Dumitru Astefanesei y sus colaboradores. De la misma forma presentamos resultados conocidos que permiten ganar intuición. Capítulo 4 es una descripción de los métodos concretos que se usarón en el desarrollo de la investigación y mostramos ejemplos intuitivos ampliamente conocidos en la literatura. Los capítulos 5 y 6 son la presentación de los artículos de ref. [1–3] los que fueron publicados por mi, Dumitru Astefanesei, Andres Anabalon y Cristian Martinez. Mi contribución a estos trabajos fue desarrollar los cálculos, construir las gráficas mediante paquetes matemáticos, participar en las discusiones en todos los estados del desarrollo de los proyectos, diseñar y/o editar los artículos.

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi tutor, Prof. Dumitru Astefanesei, bajo cuya supervisión desarrollé mi tema de investigación. Al Prof. Andres Anabalon quien en diversas conversaciones y reuniones aprendí el uso de los paquetes matemáticos de Maple y Matemática para el desarrollo de cálculos complejos, muy comunes en la Física teórica.

Me gustaría agradecer a la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Univ. Técnica Federico Santa María, quienes a mi llegada al programa de Doctorado me brindaron subvención y demás facilidades para incorporarme al programa de Doctorado. Especialmente al Prof. Issac Florez (Director de Postgrados Científico-Tecnológicos), las secretarías Elizabeth Muga y María Loreto Vergara, por la gran amabilidad y eficacia para con diversos tramites de becas y matrículas. De igual forma agradezco al Instituto de Física de la PUCV y a sus investigadores quienes me acogieron y compartieron sus diversas experiencias en la investigación.

También me gustaría agradecer al programa de becas CONICYT, por su confianza y subvención a mis estudios de Doctorado. De la misma forma, mediante su apoyo realicé una pasantía de investigación en Alemania, Berlín en el instituto Max Planck. Finalmente dicha subvención me permitió ampliar mi biblioteca personal, la que fue crucial para el desarrollo de la presente tesis.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años en el postgrado. Estoy agradecido también con los profesores de mi alma mater, la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco, en especial con el Prof. Oswaldo Luizar que bajo su guía postulé al postgrado en la UTFSM.

Notación

Se usan unidades naturales $\hbar = 1 = c$, donde \hbar la constante de Planck reducida mientras que c es la velocidad de la luz.

Usamos las siglas en Ingles CFT de *Conformal Field Theory* en vez de su traducción al español que es *Teoría del Campo Conforme*.

Usaremos las siglas QCD para *Quantum Chromodynamics* en lugar de su versión en español, la cual rara vez es usada en la literatura.

De la misma forma usamos las siglas en Ingles QFT de *Quantum Field Theory* en lugar de su traducción al español *Teoría Cuántica del Campo*.

Usamos la palabra *bulk* en lugar de la traducción al Español *bolsa*. Esta se refiere al interior de una variedad, cuya dinámica esta determinada por las ecuaciones de Einstein (espacio-tiempo).

Otras de las palabras que dejamos en Ingles son *background* y *ground*. Por ejemplo usamos la expresión *métrica del background* la cual se entiende como *métrica no dinámica*. Y por supuesto la frase *ground state* que se refiere al *estado basal*, o *estado no excitado*.

Los siglas, AdS y SAdS son para denominar las expresiones *Anti de Sitter* y *Schwarzschild Anti de Sitter*.

Índice general

Dedicatoria	4
Resumen	5
Contribución de los autores	6
Agradecimientos	7
Notación	8
1. Introducción	12
1.1. Perfil	14
2. Dualidad gravedad/gauge	15
2.1. Grupo conforme	16
2.2. Espacio Anti-de Sitter	20
2.2.1. Geometría del espacio-tiempo AdS	22
2.3. Dualidad <i>AdS/CFT</i>	26
2.3.1. Límite de 't Hooft	27
2.3.2. Prescripción de Gubser-Klevanov-Polyakov y Witten	28
2.3.3. Partículas y campos en el espacio-tiempo AdS	30
3. Agujeros negros	34
3.1. Principio variacional	35
3.2. Agujeros negros asintóticamente planos, $\Lambda = 0$	36
3.3. Agujeros negros asintóticamente anti-de Sitter	40

3.4. Agujeros negros con pelo escalar	42
3.4.1. Teorema de no pelo	42
3.4.2. Agujero negro neutro con pelo escalar	45
3.4.3. Agujeros negros eléctricamente cargados con pelo	49
4. Renormalización holográfica y formalismo Hamiltoniano	51
4.1. Sustracción background vs contratérminos	51
4.2. Formalismo de Brown-York	57
4.3. Formalismo Hamiltoniano	59
5. Gravedad diseñada	63
5.1. Condiciones de borde y deformaciones multitraza AdS_4	63
5.2. Contratérminos y acción regularizada	71
5.2.1. Principio variacional	71
5.2.2. Acción regularizada y variables termodinámicas	73
5.3. Tensor de stress Brown-York	77
5.4. Masa Hamiltoniana	79
5.4.1. Rama logarítmica y no-logarítmica	80
5.4.2. Equivalencia entre masa holográfica y masa hamiltoniana	82
5.5. Discusión	85
6. Termodinámica de agujeros negros	88
6.1. Espacio-tiempo de Rindler	90
6.2. Temperatura de agujeros negros estacionarios	91
6.3. Transiciones de fase de agujeros negros esféricos	93
6.3.1. Transición de fase a la Hawking y Don Page	97
6.3.2. Discusión	101
6.4. Transiciones de fase de agujeros negros planares	101
6.4.1. AdS solitón	103
6.4.2. Solitón AdS con pelo	108
6.4.3. Implicaciones para las transiciones de fase	112
6.4.4. Discusión	115

7. Conclusiones	116
7.1. Futuras direcciones	117
A. Acción regularizada	119
A.1. Acción-bulk on-shell	119
A.2. Sistema de coordenadas $(t, x, \Sigma_{k,n-1})$	120
A.3. Sistema de coordenadas $(t, r, \Sigma_{k,n-1})$	122
A.4. Ecuaciones de movimiento	125
B. Tensor de stress Brown-York	126
C. Cálculo del potencial on-shell	129
D. Formas diferenciales	132

Capítulo 1

Introducción

Los agujeros negros han fascinado a las diversas generaciones de físicos, desde John Michell en 1783, nombrada por él como *estrellas oscuras*. Pasando luego por el advenimiento de la Relatividad General en 1915 y un año después Karl Schwarzschild obtuvo una de las primeras soluciones a la Relatividad General, *el agujero negro de Schwarzschild*. En los años 60, conocido como la época de oro de los agujeros negros, cuyos principales protagonistas fueron, Wheeler, Bekenstein, Hawking entre otros, mostraron que los agujeros negros se comportan como un sistema termodinámico. Uno de los grandes problemas es describir el origen microscópico de la entropía de los agujeros negros. La teoría de cuerdas fue capaz de explicar la entropía de algunos agujeros negros (extremos y cercanamente extremos) cargados y/o rotantes, donde *AdS* forma parte de la geometría (altamente simétrica) cerca del horizonte [7, 8]. Finalmente, es importante mencionar que observaciones astronómicas demuestran la existencia de agujeros negros cercanamente extremos, por ejemplo la fuente de rayos-X GRS 1915+105 es un agujero negro rápidamente rotante de Kerr [9].

De forma paralela, las teorías cuánticas fueron desarrollándose, explicando con mayor precisión escalas de energía mayores (distancias muy pequeñas). La teoría que describe las interacciones fuertes de las partículas (quarks) que constituyen a los mesones y bariones es QCD, se basa en el grupo gauge $SU(3)$. Esta teoría tiene una característica muy especial, ya que a bajas energías el acoplamiento es fuerte, por lo que los quarks están confinados. En este ente régimen fuerte de acoplamiento es difícil realizar cálculos. En 1974 't Hooft sugirió que cuando el número de colores N

es muy grande se pueden encontrar grandes simplificaciones [10].

Juan Maldacena en 1997 propuso la dualidad AdS/CFT [11], mostrando un ejemplo concreto donde dos teorías aparentemente distintas, como son, gravitación por un lado y una teoría cuántica por el otro son duales. Esta dualidad nos permite obtener información de una teoría cuántica (en d -dimensiones) en su régimen de acoplamiento fuerte a partir de una teoría clásica gravitacional en ($d+1$ dimensiones) clásica. Esta es una realización concreta del principio holográfico. Interesantemente se mostró que las simetrías locales de AdS corresponden a las simetrías globales de la CFT. Es bien conocido que las simetrías AdS en el borde cambian en presencia de campos escalares, la cuestión es investigar en que condiciones los campos escalares preservan la simetría conforme. Los agujeros negros asintóticamente AdS, con temperatura de Hawking T , son los estados térmicos de la teoría cuántica dual, por lo tanto, es importante en el lado gravitacional definir adecuadamente la energía, temperatura, entropía, etc, del sistema gravitacional. En espacios-tiempo AdS, existen diversos métodos para calcular la energía gravitacional. Mientras que el método holográfico esta basado en la dualidad AdS/CFT de la que podemos calcular la masa y las demás cantidades termodinámicas, el procedimiento Hamiltoniano nos da la energía debido a la simetría de las traslaciones temporales. Mostramos que ambos métodos concuerdan en el resultado de la energía, aún cuando la simetría conforme se rompe.

Finalmente es importante destacar la importancia de los campos escalares en diversas áreas de la física. En cosmología el campo escalar conocido como *inflatón* describe la etapa inflacionaria de nuestro universo temprano, cuyos efectos pueden ser medidos del fondo cósmico de radiación. Además uno de los recientes candidatos a la materia oscura son las partículas escalares conocidas como *Axiones*. En Física de altas energías la partícula de Higgs, recientemente descubierta es una partícula escalar con una masa aproximada de 125 GeV.

1.1. Perfil

La presente tesis esta basada en el material previamente publicado en [1–3], y está organizada de la siguiente manera.

El segundo capítulo muestra como el grupo de isometría del espacio tiempo AdS es exactamente (isomorfa) el grupo conforme de la teoría cuántica dual CFT. Presentamos la formulación precisa de la dualidad AdS/CFT y describimos el comportamiento de un campo escalar masivo en el espacio-tiempo AdS.

En el capítulo 3 se presentan soluciones de agujeros negros ampliamente conocidos en la literatura, los cuales usaremos en algunos cálculos posteriores para ganar intuición, explicamos el teorema de no pelo y dos ejemplos de soluciones *exáctas* de agujeros negros que logran evadir dicho teorema. Estos resultados fueron publicados en [4, 5].

Capítulo 4 presentamos detalles de los métodos de Renormalización holográfica y el formalismo Hamiltoniano, los cuales se aplican en el desarrollo de los capítulos posteriores. Para la solución SAdS calculamos la acción on-shell y regularizamos, comparamos con el método de sustracción del background. De la misma forma, calculamos el tensor de stress de Brown-York y de la teoría cuántica dual. Los ejemplos de esta sección son resultados conocidos en la literatura.

Capítulo 5 esta basada en [3]. Investigamos las condiciones de borde de AdS, en presencia de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad. Concretamente para un campo escalar de masa conforme $m^2 = -2/l^2$, para las ramas logarítmica y no logarítmica. Calculamos la acción on-shell, estudiamos el principio variacional y planteamos nuevos contratérminos que regularizan la acción. Construimos el tensor de Brown-York, calculamos el tensor de stress de la teoría cuántica dual y analizamos la anomalía de traza. Con el método Hamiltoniano calculamos la masa gravitacional y estudiamos en que condiciones el campo escalar da una contribución a la masa.

Capítulo 6, la que esta basada en [1, 3], describimos las transiciones de fase de agujeros negros con pelo escalar y de horizontes planar y esférico. Construimos los diagramas de fase y discutimos sus implicaciones en la teoría cuántica dual. Finalmente en el capítulo 7 se presentan las conclusiones y futuras direcciones del trabajo.

Capítulo 2

Dualidad gravedad/gauge

La evidencia experimental es la base del modelo estándar que describe la física a nivel fundamental. Este modelo clasifica a toda la materia de acuerdo a su espín, *Bosones* y *Fermiones*, donde estas partículas son excitaciones de algún campo. Las interacciones fuertes requieren grandes cantidades de energía (pequeñas distancias) para explorar sus propiedades e implicaciones, que se muestran a distancias del orden de la longitud de Planck. En esa escala los efectos de la gravedad cuántica son significativos pero por el momento no se ha podido cuantizar la gravedad de forma consistente. Al rescate viene la teoría de cuerdas, donde los elementos fundamentales, las partículas, son reemplazadas por cuerdas.

Las cuerdas oscilantes dan un espectro de masas o energías, estas oscilaciones son partículas a bajas energías, de hecho las oscilaciones de la cuerda pueden darnos distintos tipos de partículas. Es interesante aclarar que hay varias teorías de cuerdas y todas ellas incluyen partículas de masa cero y espín dos (gravitón). Actualmente, la teoría de cuerdas 10-dimensional es descrita por cuerdas con excitaciones fermiónicas y da lugar a una teoría supersimétrica. Y es posible ir a cuatro dimensiones considerando teoría de cuerdas en $\mathbb{R}^4 \times M_6$ donde M_6 es alguna variedad seis dimensional compacta.

La relación entre teorías gauge y las teorías de cuerdas en espacios-tiempo AdS fue motivado por el estudio de las D-branas y agujeros negros en teoría de cuerdas. Las D-branas son solitones en teoría de cuerdas y vienen en distintas dimensiones. Por ejemplo la D-cero-brana es una partícula puntual tipo solitón. Cuando el aco-

plamiento de la cuerda es pequeño, $g_s \ll 1$, las D-branas son más fundamentales que las cuerdas. En la teoría de cuerdas perturbativa, las Dp-branas se definen como superficies donde las cuerdas abiertas terminan y son fuentes de las cuerdas cerradas¹.

En esta sección discutiremos algunos aspectos a cerca de la dualidad AdS/CFT (gravedad/gauge). En la primera parte mostramos las simetrías (local/global) que comparten el espacio-tiempo AdS y la teoría cuántica conforme. Presentamos la dualidad y su formulación precisa. Finalmente estudiamos el comportamiento de un campo escalar masivo en el espacio-tiempo AdS.

2.1. Grupo conforme

Una extensión interesante de la invarianza de Poincaré es la adición de la simetría de invarianza de escala que relaciona la física a diferentes escalas². En relatividad especial, el álgebra de Poincaré $ISO(d, 1)$ define las simetrías fundamentales del espacio-tiempo $d+1$ dimensional³, con la signatura $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, \dots)$:

$$\begin{aligned} i[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\mu}M_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu}M_{\rho\mu} , \\ i[P_\mu, M_{\sigma\rho}] &= \eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho , \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 , \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $P_\mu, M_{\mu\nu}$ son los generadores de traslación y transformación de Lorentz respectivamente. Cuando intentamos relacionar la física a diferentes escalas (energías)

¹ Estas Dp-branas, son hiperplanos $(p+1)$ -dimensionales en el espacio-tiempo y pueden estar cargados dentro de potenciales gauge $(p+1)$ -forma.

La letra "D" hace referencia a las condiciones de borde de Dirichlet de las cuerdas

²Es interesante mencionar que este es precisamente el comportamiento que muestran los materiales durante una transición de fase cerca del punto crítico.

³En esta sección las letras griegas corresponden a las coordenadas del espacio-tiempo, $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$

agregamos la invarianza de escala al grupo de Poincaré (2.1):

$$\begin{aligned} i[D, P_\mu] &= P_\mu , \\ [M_{\mu\nu}, D] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hasta este punto, el grupo de Poincaré es extendida por D el cual es el generador de dilaciones⁴. La transformación de escala $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ preserva la forma de la métrica salvo un factor de escalar, esta sólo cambia la distancia entre los puntos de forma rígida, como una fotografía que preserva la forma de la foto a diferentes tamaños. El grupo de generadores $P_\mu, M_{\mu\nu}, D$, forman el grupo de Weyl y puede extenderse mediante un generador vectorial, K_μ , que describe las transformaciones conformes especiales

$$K_\mu : \quad x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2x^\nu a_\nu + a^2 x^2} , \quad (2.3)$$

cuyas simetrías estan generadas según el siguiente álgebra en conjunto con (2.1) y (2.2)

$$\begin{aligned} i[M_{\mu\nu}, K_\rho] &= \eta_{\mu\rho} K_\nu - \eta_{\nu\rho} K_\mu , \\ [D, K_\mu] &= iK_\mu , \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2i(M_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} D) , \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se tiene que, el grupo de Poincaré, más transformaciones de escala y la transformaciones conformes especiales forman el grupo conforme. Las teorías cuánticas que son invariantes bajo este grupo se conocen como Teorías Cuánticas Conformes (CFT). El grupo conforme es el grupo de transformaciones que preservan la forma de la métrica salvo un factor conforme $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$. Incluye además la simetría de inversión, que es una simetría discreta actuando como $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$.

⁴En esta sección usamos $d + 1$ como la dimensión del espacio-tiempo en lugar de D para evitar confusiones con el operador de dilatación D

Esta álgebra es isomorfa al álgebra del grupo de isometría $SO(d, 2)$, con generadores $J_{ab} = -J_{ba}$ ($a, b = 0, \dots, d + 1$). Usando la descomposición de los índices $a = (\mu, d, d + 1)$, se pueden realizar las identificaciones de los generadores:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} , \quad J_{\mu d} = \frac{1}{2}(K_{\mu} - P_{\mu}) , \quad J_{\mu(d+1)} = \frac{1}{2}(K_{\mu} + P_{\mu}) , \quad J_{(d+1)d} = D . \quad (2.5)$$

Estos generadores forman una matriz antisimétrica $(d + 1) \times (d + 1)$

$$J_{ab} = \begin{pmatrix} J_{\mu\nu} & J_{\mu d} & J_{\mu(d+1)} \\ -J_{\mu d} & 0 & D \\ -J_{\mu(d+1)} & -D & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

Un caso especial es para un espacio-tiempo $d = 2$ dimensional, donde el grupo es infinito dimensional, esto debido a que tiene un conjunto infinito de generadores. Para espacios-tiempo de dimensión $d \geq 3$ el número de generadores es⁵: $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$

- $P_{\mu} : x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} + a_{\mu} \Rightarrow d$ (generadores) ,
- $M_{\mu\nu} : x_{\mu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \Rightarrow \frac{d(d-1)}{2}$ (generadores) ,
- $D : x^{\mu} \rightarrow \lambda x^{\mu} \Rightarrow 1$ (generador) ,
- $K_{\mu} : x_{\mu} \rightarrow \frac{x_{\mu} + a_{\mu} x^2}{1 + 2x_{\nu} a^{\nu} + a^2 x^2} \Rightarrow d$ (generadores) .

Los operadores (o campos) son autofunciones del operador de escala $D\phi = -i\Delta\phi$, donde Δ es la dimensión escala (*scaling dimension*) del campo

$$x \rightarrow \lambda x \Rightarrow \phi(x) \rightarrow \phi(x)' = \lambda^{\Delta} \phi(\lambda x) . \quad (2.7)$$

Esquemáticamente hablando los generadores K_{μ} y P_{μ} cumplen la función de operadores destrucción y creación respectivamente, donde K_{μ} disminuye la dimensión del campo y P_{μ} la aumenta, veamos, $P_{\mu}\phi = ?$ Considerando el álgebra conforme

$$[D, P_{\mu}] = -iP_{\mu} \Rightarrow D(P_{\mu}\phi) = -i(\Delta + 1)(P_{\mu}\phi) . \quad (2.8)$$

⁵En este conteo no se toma en cuenta la simetría de inversión ya que esta es discreta.

Donde la acción de P_μ sobre el campo $\phi(x)$ (de dimensión Δ) da como resultado un campo de dimensión $\Delta + 1$. Cada representación del grupo conforme tiene campos u operadores de dimensión mínima, estos se llaman Operadores Primarios (*primary operators*), y son tales que $K_\mu\phi = 0$, entonces los operadores primarios son como el estado de vacío $|0\rangle$.

Considerando el álgebra conforme la función de correlación a dos puntos de dos campos de igual dimensión es

$$\langle\phi(0)\phi(x)\rangle \equiv \frac{1}{(x^2)^\Delta} . \quad (2.9)$$

Además la dimensión del tensor energía-momento de cualquier teoría conforme es un operador de dimensión $\Delta = d$, y siempre que hayan simetrías globales las corrientes J_μ conservadas tienen dimensión $\Delta = d - 1$.

2.2. Espacio Anti-de Sitter

El espacio anti-de Sitter (AdS), es un espacio-tiempo (o variedad) de geometría Lorentziana, curvatura constante negativa y que posee el número máximo de isometrías en todas las dimensiones. Es importante diferenciar entre un espacio (variedad Riemanniana) y un espacio-tiempo (variedad Pseudo-Riemanniana o Lorentziana), esta diferencia radica en la signatura de la métrica, la cual debe ser Lorentziana para espacios-tiempo.

Para entender la diferencia, revisaremos rápidamente la geometría de espacios con curvatura constante, como la esfera y el espacio hiperbólico.

La esfera bidimensional S^2 puede definirse como la compactificación del espacio Euclideo plano \mathbb{R}^2 el que se consigue agregando un punto en el infinito, en donde podemos definir naturalmente una teoría conforme en S^2 . Otra manera de obtener S^2 es agregando una ligadura (vínculo) en el espacio Euclideo \mathbb{R}^3 :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 , \quad (2.10)$$

donde la esfera S^2 está sumergida y se define por la ligadura $L = cte$,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 . \quad (2.11)$$

Resolviendo esta ligadura la métrica es

$$ds^2 = L^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (2.12)$$

Esta métrica que define a la esfera S^2 tiene las isometrías descritas por el grupo $SO(3)$, en otras palabras, la esfera de curvatura constante $R = 2/L^2$ es invariante (homogéneo) bajo el grupo de rotaciones $SO(3)$. Similarmente el espacio de curvatura constante negativa es el hiperbólico. No debemos confundir el hiperbolide definido en el espacio Euclideo

$$ds^2 = dZ^2 + dX^2 + dY^2 , \quad (2.13)$$

cuya ligadura es

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2, \quad (2.14)$$

pero este hiperboloide no es homogéneo, es decir no hay un grupo de simetría $SO(3)$ que lo deje invariante⁶.

El espacio hiperbólico H^2 no puede sumergirse en el espacio Euclideo pero si en el espacio 3-dimensional de Minkowski. Definimos el espacio hiperbólico como:

$$ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2, \quad (2.15)$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2, \quad (2.16)$$

donde el grupo de simetría es $SO(1, 2)$ el cual es el grupo de "Lorentz". Parametrizando la ligadura como:

$$X = L \sinh \rho \cos \varphi, \quad Y = L \sinh \rho \sin \varphi, \quad Z = L \cosh \rho, \quad (2.17)$$

se obtiene la métrica de curvatura constante negativa, $R = -2/L^2$,

$$ds^2 = L^2(d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2). \quad (2.18)$$

Vemos que el espacio hiperbólico no es un espacio-tiempo (signatura Lorentziana). Este espacio es la versión euclídea del espacio AdS_2 . Esta métrica puede ser conformalmente mapeada a un disco D_2 cuyo borde $\partial D_2 \equiv S^1$, considerando que $S^1 \equiv \{\infty\} \cup \mathbb{R}$. Entonces, el borde del espacio hiperbólico es el espacio Euclideo compactificado (un círculo).

⁶La signatura de la métrica del hiperboloide en general tiene p-direcciones tipo tiempo y q-tipo espacio, $(-\dots-, +\dots+)$, la cual sí es invariante bajo el grupo $SO(p, q)$ pero no es invariante bajo el grupo $SO(p)$, donde $p + q = 3$.

2.2.1. Geometría del espacio-tiempo AdS

El espacio-tiempo AdS_4 (en cuatro dimensiones) es una solución particular con simetría máxima a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, $\Lambda < 0$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} , \quad (2.19)$$

donde la constante cosmológica esta relacionada con el radio- AdS , l , mediante $\Lambda = -3/l^2$. Los tensores de Riemann, de Ricci y la curvatura escalar, para el espacio-tiempo AdS_4 , son respectivamente

$$R_{\mu\nu\theta\sigma} = -\frac{1}{l^2}(g_{\mu\theta}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\theta}) , \quad R_{\mu\nu} = -\frac{3}{l^2}g_{\mu\nu} , \quad R = -\frac{12}{l^2} . \quad (2.20)$$

El espacio-tiempo AdS_4 puede entenderse como un hiperboloide Lorentziano sumergido en un espacio-tiempo 5-dimensional con dos direcciones tipo tiempo (X_0, X_4)

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_4^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 , \quad (2.21)$$

$$-X_0^2 - X_4^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -l^2 . \quad (2.22)$$

La ligadura (2.22) puede ser parametrizada en términos de las coordenadas $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ como

$$X_0 = l \cosh \rho \cos \tau , \quad (2.23)$$

$$X_4 = l \cosh \rho \sin \tau ,$$

$$X_1 = l \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi ,$$

$$X_2 = l \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi ,$$

$$X_3 = l \sinh \rho \cos \theta .$$

Entonces la métrica (2.21) toma la forma

$$\frac{ds^2}{l^2} = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (2.24)$$

Estas coordenadas cubren todo el hiperboloide si $0 \leq \tau < 2\pi$ y $\rho \geq 0$, por consiguiente las coordenadas $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ son conocidas como coordenadas globales de AdS. La métrica cerca $\rho = 0$ se comporta como

$$\frac{ds^2}{l^2} \approx -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (2.25)$$

cuya topología es $S \times \mathbb{R}^2$, donde S^1 son las curvas cerradas tipo tiempo en la dirección τ , las cuales violan causalidad, para evitarlo consideramos el cubrimiento universal, desenvolviendo (unwrap) el círculo S^1 (esto es, $-\infty < \tau < \infty$), entonces la topología es \mathbb{R}^3 . Las coordenadas canónicas (t, r, θ, φ) se obtienen con la siguiente transformación

$$r := \sinh \rho , \quad t := l\tau , \quad (2.26)$$

entonces

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (2.27)$$

La métrica (2.24) en el sistema de coordenadas conformes $(\tau, \chi, \theta, \phi)$ se obtiene considerando $\tan \chi := \sinh \rho$ ($0 \leq \chi < \pi/2$)

$$\frac{ds^2}{l^2} = \frac{1}{\cos^2 \chi} [-d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] . \quad (2.28)$$

Otro importante sistema de coordenadas es el de Poincaré, estas coordenadas cubren sólo la mitad del hiperboloide (2.22), la parametrización es:

$$X_0 = \frac{lr}{2} \left(\bar{x}_i^2 - t^2 + \frac{1}{r^2} + 1 \right) , \quad X_i = lrx_i \quad (i = 1, 2) , \quad (2.29)$$

$$X_3 = \frac{lr}{2} \left(\bar{x}_i^2 - t^2 + \frac{1}{r^2} - 1 \right) , \quad X_4 = lrt , \quad (2.30)$$

donde (r, t, \vec{x}) , $(0 < r, \vec{x} \in \mathbb{R}^2)$

$$\frac{ds^2}{l^2} = r^2(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{dr^2}{r^2} . \quad (2.31)$$

Las coordenadas de Poincaré son usualmente escritas bajo el siguiente cambio de coordenadas $r = 1/z$, de donde ahora el borde es $z = \infty$ y el interior es $z = 0$,

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2 \right) . \quad (2.32)$$

En este sistema de coordenadas es fácil ver que AdS_4 es conformemente plano. Un espacio-tiempo es máximamente simétrico si admite un máximo número de generadores de simetría, este es el caso del espacio-tiempo AdS_4 . El grupo de isometría para un espacio-tiempo D -dimensional AdS_D es $SO(D-1, 2)$, cuyo número de generadores es $\frac{D(D+1)}{2}$ ⁷. Es importante notar que, el borde conforme de AdS_D es el espacio-tiempo de Minkowski con topología $\mathbb{R}^{1, D-2}$.

La conclusión de estas dos secciones es: El número de generadores del grupo conforme en un espacio-tiempo de $(D-1)$ -dimensiones de Minkowski⁸ es $\frac{D(D+1)}{2}$. Y el número de generadores de isometrías del espacio-tiempo AdS_D (en D -dimensiones) es $\frac{D(D+1)}{2}$. Entonces el grupo de isometría de AdS_D es el grupo conforme del espacio-tiempo de Minkowski en una dimensión menor⁹.

Otra de las características del espacio-tiempo AdS es que la constante cosmológica actúa como un potencial atractivo, de manera más precisa, la constante cosmológica negativa da como resultado el diagrama conforme (2.1)¹⁰.

⁷Usamos en esta sección "D" para referirnos a la dimension del espacio-tiempo AdS, no confundir con el generador de dilataciones D

⁸Note que, $D = d + 2$, donde d es el número de dimensiones del espacio-tiempo de Minkowski del borde conforme de AdS.

⁹En la sección anterior, dejamos en claro que el grupo conforme y el grupo de isometría son isomorfos. Un enunciado que deja más claro el espíritu de la dualidad AdS/CFT es: El grupo de isometría (simetría local) del espacio-tiempo AdS_D , actúa como el grupo de simetría conforme (simetría global) del borde (conforme) de AdS_D el cual, es el espacio-tiempo de Minkowsky en $(D-1)$ -dimensiones.

¹⁰Esta figura fue obtenida de [12].

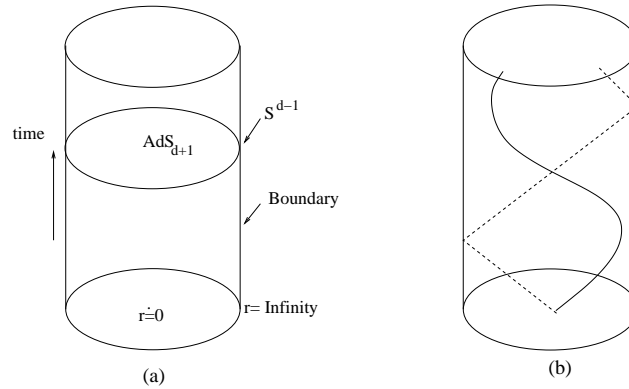


Figura 2.1: (a) El diagrama de Penrose para el espacio-tiempo Anti-de-Sitter (2.28), es un cilindro sólido. El borde contiene la dirección temporal y una esfera, S^{d-1} , representada como un círculo. (b) Geodésica de una partícula masiva (línea sólida) y la geodésica de una partícula no masiva (línea punteada).

Las partículas masivas no llegan a alcanzar el borde en un tiempo finito, pero las partículas sin masa (por ejemplo los fotones) pueden alcanzar el borde y retornar en un tiempo propio finito. Este paradigma es útil para explicar el porque un agujero negro en un espacio-tiempo asintóticamente AdS es estable, contrario a lo que sucede en en espacios-tiempo asintóticamente planos.

2.3. Dualidad AdS/CFT

En la teoría de cuerdas, los objetos fundamentales son las cuerdas las cuales pueden ser abiertas o cerradas. El único parámetro libre de la teoría es la tensión $T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{2\pi l_s^2}$, cuya dimensión es $[T] = L^{-2}$, donde l_s es la longitud de la cuerda y es del orden de $10^{-34}m$. En casos concretos, la consistencia de la teoría requiere 10 dimensiones. En estas dimensiones, las distintas oscilaciones de la cuerda describen distintas partículas del modelo estándar. Es importante recordar que la gravedad emerge cuando cuantizamos las cuerdas. Hay dos tipos de cuerdas, abiertas y cerradas. Las cuerdas abiertas en un espacio-tiempo de 4 dimensiones tienen dos modos de oscilación que corresponden a dos grados de libertad, los cuales son las dos polarizaciones de un campo gauge (fotón). Podemos concluir que las cuerdas abiertas representan a una teoría gauge. Por otro lado, las oscilaciones de las cuerdas cerradas representan al gravitón y dos partículas escalares aún no descubiertas, el dilatón y el axión. Ya que los modos derecho e izquierdo tienen dos grados de libertad, en total serían 4 grados de libertad (en 4 dimensiones), dos para el gravitón y el resto son los grados de libertad de las dos partículas escalares restantes.

Dos cuerdas abiertas (teoría gauge) pueden unirse y formar una nueva cuerda abierta, también pueden unirse los extremos (se requiere una ligadura no local) para formar una cuerda cerrada (gravitón). La conclusión es que la teoría de cuerdas puede describir de manera unificada las teorías gauge (modelo estándar) y la gravitación.

En 1997, Juan Maldacena presentó la conjetura a cerca de la dualidad entre dos teorías aparentemente desconexas. Básicamente explica que existe una dualidad entre una teoría de gravitación (espacios-tiempo asintóticamente AdS) en D -dimensiones y una teoría cuántica conforme ($\mathcal{N} = 4$ SYM en 4-dimensiones) en $(D-1)$ -dimensiones. Esta es una realización concreta del principio holográfico, donde la coordenada radial en AdS_D es la escala de energía para la teoría cuántica dual en $(D-1)$ -dimensiones.

Esta dualidad (correspondencia) nos permite calcular ciertas cantidades en el lado de la gravitación (clásica) las cuales tienen una correspondiente interpretación en el lado de la teoría cuántica dual. Por ejemplo, la dualidad identifica a los agujeros negros en AdS con los estados térmicos de la teoría cuántica dual [13, 14].

La formulación precisa de dualidad AdS/CFT plantea que las funciones de parti-

ción de la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ coincide con la función de partición de $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills en el borde de AdS_5 [11, 15, 16]

$$Z_{gauge} = Z_{string} \quad (2.33)$$

2.3.1. Límite de 't Hooft

QCD es una teoría gauge basada en el grupo gauge $SU(3)$. Es una teoría asintóticamente libre, es decir, las constantes de acoplamiento efectivas decrecen a medida que la escala de energía se incrementa. A bajas energías la teoría es fuertemente acoplada y no es fácil realizar cálculos¹¹, de hecho una posible aproximación es usar simulaciones numéricas en el lattice. Sea la teoría de Yang-Mills (puro) definida por la siguiente función de Lagrange, con el grupo gauge $SU(N)$, con N -colores

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu}^M F_M^{\mu\nu} . \quad (2.34)$$

Donde $F_{\mu\nu}$ es la fuerza del campo para el grupo $SU(N)$, cuyos generadores T^a . Para un valor finito de N no hay un cambio esencial, pero en el límite $N \rightarrow \infty$ manteniendo g_{YM}^2 fijo ocurren simplificaciones importantes. En el límite de 't Hooft el número de colores $N \rightarrow \infty$ es muy grande y el acoplamiento $g_{YM}^2 \rightarrow 0$ es muy pequeño tal que el parámetro $\lambda = Ng_{YM}^2$ (conocido como acoplamiento de 't Hooft) es fijo. Note que en las teorías gauge $SU(N)$, el acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$ es el que controla la expansión perturbativa y no el acoplamiento de Yang-Mills, g_{YM}^2 .

't Hooft esperaba que se pudiese resolver exactamente la teoría con $N = \infty$, y entonces un podría hacer una expansión en $1/N = 1/3$. La expansión diagramática de la teoría del campo sugiere que la teoría *N-grande* es una teoría de cuerdas libre y que el acoplamiento de la cuerda es $g_s \sim 1/N$.

¹¹En este régimen de energía se estudia el fenómeno de confinamiento.

2.3.2. Prescripción de Gubser-Klevanov-Polyakov y Witten

En la presente tesis, nos concentramos en el régimen de acoplamiento débil de la teoría de cuerdas (gravedad clásica), la que es dual al régimen de acoplamiento fuerte de la teoría gauge.

En el lado de la CFT, el régimen de acoplamiento fuerte de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM, esta controlada por el acoplamiento de 't Hooft dada por $\lambda = g_{YM}^2 N \sim g_s N \gg 1$ y $N \rightarrow \infty$, donde g_s es el acoplamiento de la cuerda y se relaciona con el acoplamiento de Yang-Mills como $g_{YM}^2 = 2\pi g_s$. La función de partición de la CFT esta dada por la funcional generatriz W para la funcion de Green en la teoría gauge¹²

$$Z_{CFT} = e^{-W} . \quad (2.35)$$

En la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$, cuando el radio de curvatura de AdS_5 es más grande en comparación a la longitud de la cuerda $l \gg l_s$ el régimen de la supergravedad es válida, concretamente

$$\frac{l^4}{l_s^4} \sim g_{YM}^2 N \sim g_s N \gg 1 , \quad (2.36)$$

de donde $g_s < 1$ implica el límite $N \rightarrow \infty$. Entonces la función de partición de la teoría de cuerdas se aproxima por la función de partición

$$Z_{cuerdas} \approx e^{-I_{SUGRA}^E} , \quad (2.37)$$

donde, I_{SUGRA}^E es la acción clásica de supergravedad (en la aproximación de punto-silla y en la sección Euclidea) evaluada en $AdS_5 \times S^5$ (o en pequeñas deformaciones de este espacio). Entonces,

$$Z_{cuerdas} \approx e^{-I_{SUGRA}^E} = e^{-W} = Z_{CFT} . \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) es una fórmula concreta para calcular observables en la teoría gauge a partir de cálculos geométricos en el lado de supergravedad (gravedad

¹²Trabajamos en la sección Euclidea, donde $\tau = -it$

clásica). Esta fué propuesta en 1998 por Gubser-Klebanov-Polyakov e independientemente por Witten (GKPW) [13, 15]. A temperatura finita, W esta relacionada con la energía libre de la teoría gauge por $W = F/T$, donde T es la temperatura. En el lado izquierdo de (2.38), aplicando por ejemplo al agujero negro de Schwarzschild-AdS, la acción I_{SUGRA}^E se calcula on-shell en las ecuaciones de movimiento. Entonces, dada la igualdad (2.38), se concluye que el agujero negro de Schwarzschild-AdS es dual a los estados térmicos de la teoría gauge (fuertemente acoplado) [13, 14].

Correspondencia Campo \leftrightarrow Operador

Es bien sabido que el cambio de la constante de acoplamiento de la teoría gauge corresponde a un cambio en el valor del borde del dilatón[16]. Entonces (en un espacio-tiempo de 4-dimensiones en el bulk) se tiene¹³

$$\left\langle e^{\int d^3x \phi_0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \right\rangle_{CFT} = e^{-I_{bulk}^E[\phi|_{\partial AdS} \rightarrow \phi_0]}, \quad (2.39)$$

donde $\phi(r, \vec{x})|_{r=\infty} = \phi_0(\vec{x})$, en el lado gravitacional son los valores del dilatón en el borde¹⁴. En el lado de la teoría gauge, ϕ_0 corresponde a la fuente del operador local $\mathcal{O}(\vec{x})$. Entonces las condiciones de borde (en el lado gravitacional), fijan los valores del dilatón ϕ_0 (en el borde) y estas corresponden a operadores en la teoría gauge. De allí que, si consideramos perturbaciones en la métrica (el gravitón) en el borde esta viene a ser la fuente del operador tensor de energía-momento de la teoría gauge¹⁵.

$$\left\langle e^{\int d^3x h_{ab}^0 T^{ab}} \right\rangle_{CFT} = e^{-I_{bulk}^E[h_{\mu\nu}|_{\partial AdS} \rightarrow h_{ab}^0]}. \quad (2.40)$$

¹³La expresión: $\phi|_{\partial AdS}$, se refiere al valor que toma el campo ϕ en el borde de AdS.

¹⁴ $\phi(r, \vec{x})$ es el dilatón que se propaga en el bulk con la condición de borde de que el campo ϕ en el borde tiene el valor de ϕ_0 . Aquí consideramos las coordenadas en la sección Euclidea $\vec{x} = (\tau, \theta, \phi)$ y r la coordenada radial, donde el borde se encuentra en $r = \infty$.

¹⁵O, también, que el gravitón se acopla al operador tensorial de energía-momento de la teoría gauge. Los índices se descomponen como $\mu = (a, r)$.

2.3.3. Partículas y campos en el espacio-tiempo AdS

De acuerdo a la prescripción de GKPW, el campo escalar en el borde es la fuente en la teoría cuántica dual de un operador local \mathcal{O} , por lo que es importante estudiar la dinámica de campos escalares y sus condiciones de borde en el espacio-tiempo AdS . En especial, nos concentramos en un campo escalar masivo en un espacio-tiempo AdS de 4-dimensiones acoplado minimamente a la gravedad y sin potencial.

Sea la ecuación de Klein-Gordon en las coordenadas de Poincaré (2.32), donde consideramos la descomposición de los índices $(t, \vec{x}, z) = (x^n, z)$, donde el borde es $z = 0$

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2)\Phi(z, x^n) = 0 , \quad (2.41)$$

descomponiendo $\Phi(x^\mu, z)$ en sus modos de Fourier

$$\Phi(x^n, z) = \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} d\omega f_k(z) e^{ik_\mu x^\mu} , \quad (2.42)$$

la ecuación de Klein-Gordon queda de la siguiente forma

$$\frac{d^2 f_k}{dz^2} - \frac{2}{z} \frac{df_k}{dz} - \left(k^2 + \frac{m^2 l^2}{z^2}\right) f_k = 0 . \quad (2.43)$$

La solución general es

$$f_k(z) = a_1 z^{3/2} K_\nu(kz) + a_2 z^{3/2} I_\nu(kz) , \quad (2.44)$$

donde $I_\nu(kz)$ y $K_\nu(kz)$ son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo. El comportamiento de la ecuación (2.43) en el interior del espacio AdS ($z \rightarrow \infty$)

$$\frac{d^2 f_k}{dz^2} - k^2 f_k = 0 , \quad (2.45)$$

mientras las soluciones se comportan como: $K_\nu(kz) \sim e^{-kz}$ and $I_\nu(kz) \sim e^{kz}$. El campo escalar debe ser regular en el interior de AdS, por lo que $a_2 = 0$. Entonces la solución es:

$$f_k(z) = a_1 z^{3/2} K_\nu(kz) , \quad K_\nu(kz) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(kz) - I_\nu(kz)}{\sin(\nu\pi)} . \quad (2.46)$$

La solución $f_k(z)$ cerca del borde $z \rightarrow 0$ es

$$f_k(z) = a_1 z^{3/2} \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{kz}{2}\right)^{-\nu} - \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{kz}{2}\right)^{\nu} \right], \quad (2.47)$$

$$f_k(z) = \phi_0 z^{\Delta_-} + \phi_1 z^{\Delta_+},$$

donde $\phi_0 = a_1 2^{-1+\nu} k^{-\nu} \Gamma(\nu)$, $\phi_1 = a_1 2^{-1-\nu} k^{\nu} \Gamma(-\nu)$ y $\Delta_{\pm} = 3/2 \pm \nu$. Sustituyendo en (2.43) obtenemos información adicional para el índice ν

$$\Delta_{\pm}(\Delta_{\pm} - 3) - ml^2 = z^2 k^2 \xrightarrow{z=0} \Delta_{\pm}(\Delta_{\pm} - 3) - ml^2 = 0, \quad (2.48)$$

cuyas soluciones son

$$\Delta_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2 l^2}. \quad (2.49)$$

Entonces, la dimensión conforme Δ del campo escalar depende de su masa m . La condición de Breitenlohner-Freedman (BF) $m^2 \geq -\frac{9}{4l^2}$, asegura que los exponentes sean reales ya que exponentes complejos son signos de inestabilidad lineal. Sea la masa BF $m_{BF}^2 = -\frac{9}{4l^2}$ que define una cota inferior, el límite superior para la masa se le conoce como límite unitario

$$m_{BF}^2 \leq m^2 < m_{BF}^2 + \frac{1}{l^2} \Rightarrow 0 \leq \nu < 1. \quad (2.50)$$

En adelante trabajamos en las coordenadas canónicas $(t, r, \Sigma_k) = (r, x^n)$, donde, Σ_k es la sección transversal, la que puede ser planar $k = 0$, esférica $k = 1$ e hiperbólica $k = -1$. Entonces el fall-off del campo escalar es

$$\phi(r, x^n) = \frac{\alpha(x^n)}{r^{3-\Delta}} + \frac{\beta(x^n)}{r^{\Delta}} + \dots, \quad (2.51)$$

$$\Delta = \frac{3}{2} + \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2 l^2}, \quad (2.52)$$

cuando el cuadrado de la masa del campo escalar se encuentra dentro de las cotas unitaria y la de BF (conocida como *la ventana de BF*), ambos modos $\alpha/r^{3-\Delta}$ y β/r^{Δ}

son normalizables¹⁶. Entonces las posibles condiciones de borde son:

- Condición de borde de Dirichlet: $\alpha = 0, \beta \neq 0$.
- Condición de borde de Neumann: $\alpha \neq 0, \beta = 0$.
- Condición de borde mixta: $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Veamos un ejemplo concreto para un campo escalar de masa $m^2 = -2/l^2$ en cuatro dimensiones, cuyas potencias relevantes del fall-off son: $\nu = 1/2, \Delta = 2, 3 - \Delta = 1$

$$\phi = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \dots \quad (2.53)$$

Dirichlet: El modo β/r^2 cae más rápidamente que α/r y es en general normalizable y puede ser cuantizado, entonces $\alpha = 0$ corresponde a ϕ fijo en el borde, es decir $\phi(x^m, r = \epsilon) = \epsilon^{-2}\phi_0$.

Neumann: En es este caso $\partial_r\phi$ es fijo en el borde, veamos:

$$\partial_r\phi = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\beta}{r^3} + \dots = \frac{\alpha'}{r^2} + \dots \quad (2.54)$$

note que r^{-3} es un modo irrelevante y esto equivale a fijar $\beta = 0$.

Mixto: Finalmente, este caso es cuando $a\phi + b\partial_r\phi$ fijo en el borde, veamos:

$$a\phi + b\partial_r\phi = a\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) + b\left(-\frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\beta}{r^3}\right) = \frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{r^2} + \dots \quad (2.55)$$

lo que equivale a considerar $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

A partir de la prescripción de GKPW, se verifica que la dimensión conforme del operador \mathcal{O} es Δ .

¹⁶Definiendo un producto interior (ϕ_1, ϕ_2) , en una foliación tipo espacio, la norma (ϕ, ϕ) es convergente cuando $0 \leq \nu < 1$.

Deformaciones en AdS/CFT

Uno de los motivos más importantes para estudiar teorías cuánticas conformes es comprender algunos de los aspectos poco entendidos de teorías del campo no conformes como QCD. La pregunta es, cuanto podemos aprender de las teorías no conformes (QCD) de la teoría conformes. Una de las formas de romper la invarianza conforme es estudiar la teoría a temperatura finita¹⁷. Pero también es posible romper la invarianza conforme y al mismo tiempo preservar la simetría de Lorentz, deformando la acción mediante operadores locales,

$$I_{CFT} \rightarrow I_{CFT} + p \int d^3x \mathcal{O}(x) , \quad (2.56)$$

para algún operador escalar de Lorentz y algún coeficiente p . Las diferentes deformaciones dependen de la dimensión de escala Δ del operador \mathcal{O} .

- Si, $\Delta - 3 < 0$, la deformación es conocida como *relevante*, en la que la deformación es fuerte en el régimen *IR* ($r \rightarrow 0$) y débil en el régimen *UV*.
- Si, $\Delta - 3 > 0$, la deformación es llamada *irrelevante*, y su efecto es fuerte en el régimen *UV*. No discutiremos sobre las deformaciones irrelevantes, ya que divergen cerca del borde $r = \infty$.
- El último caso son las *deformaciones marginales*, donde $\Delta = 3$ el cual no rompe la invarianza conforme en ordenes relevantes a la deformación.

¹⁷De hecho, CFT a temperatura finita es muy próxima a QCD a temperatura finita (a altas temperaturas).

Capítulo 3

Agujeros negros

La velocidad de escape de un objeto celeste (estrellas, planetas, etc) puede calcularse usando mecánica Newtoniana y esta dada por $v = \sqrt{2GM/r}$. Esta es la mínima velocidad necesaria para escapar al campo gravitacional de objeto celeste (con simetría esférica) de masa M y de radio r ¹. Un agujero negro es un objeto celeste cuya velocidad de escape es la velocidad de la luz c y ya que no es posible alcanzar velocidades mayores a esta velocidad entonces nada puede escapar de su atracción gravitacional². La teoría Newtoniana es muy limitada para describir correctamente campos gravitacionales muy intensos, en esos casos la Relatividad General es la más adecuada. En esta sección describimos varias de las soluciones de agujeros negros y de que manera podemos evadir el teorema de no pelo, para obtener soluciones de agujeros negros con pelo escalar. Mostramos detalles de como obtener una familia de soluciones de agujeros negros con pelo escalar y de sección transversal plana. Los detalles del cálculo del potencial se encuentran en el apéndice C. Es interesante, que esta familia de soluciones, para algunos de los valores del parámetro pelo ν , se reducen a soluciones particulares encontradas en la literatura. Finalmente, en el límite son constante cosmológica, $1/l^2 = 0$ en la teoría y en las soluciones, se obtiene de forma consistente soluciones asintóticamente planas, y nuevamente este potencial escalar evade el teorema de no pelo.

¹Por ejemplo las velocidades de escape de la tierra y del sol son: $v_{tierra} = 11,2$ km/s y $v_{sol} = 617,5$ km/s, donde los radios de la tierra y del sol son: $r_{tierra} = 6\,371$ km y $r_{sol} = 695\,700$ km.

²Jhon Michell, 1783, ver <https://www.aps.org/publications/apsnews/200911/physicshistory.cfm>.

3.1. Principio variacional

Estudiamos el principio variacional de la acción de Hilbert-Einstein, la que describe gravedad pura (sin materia) y sin constante cosmológica. Como ya vimos en el capítulo anterior, el cálculo de la acción on-shell en la sección Euclidea (en la aproximación del punto silla), nos da la energía libre $F = \beta I_{on-shell}^E$ ³ con la que podemos calcular las cantidades termodinámicas y estudiar las posibles fases térmicas de los agujeros negros. Las ecuaciones de movimiento son obtenidas variando la acción, donde los términos de borde no tienen contribución a las ecuaciones, pero son importantes para obtener las cantidades conservadas y la energía libre.

El principio variacional está bien definido si $\delta I = 0$ en todo el espacio-tiempo. La acción de Hilbert-Einstein con un término de borde es

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + I_B . \quad (3.1)$$

Variando la acción respecto a la métrica, se obtiene

$$\delta I = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \delta I_B , \quad (3.2)$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad (3.3)$$

y el término δI_B debe ser elegido de tal forma que $\delta I = 0$, esto es

$$\delta I_B = - \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = - \oint_{\partial\mathcal{M}} \epsilon v^\mu n_\nu \sqrt{-h} d^3x , \quad (3.4)$$

donde

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = v_{;\mu}^\mu , \quad v^\mu = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta , \quad \epsilon = n^\mu n_\mu = \pm 1 . \quad (3.5)$$

³Donde F puede ser la energía libre de Helmholtz, Gibbs o el Gran potencial, dependiendo del ensemble termodinámico.

El vector unitario n_μ es la normal en el borde y es un vector tipo tiempo ($\epsilon = -1$) o tipo espacio ($\epsilon = 1$), dependiendo si el borde es una variedad de tipo espacio o tiempo. Se puede mostrar que

$$I_B = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K . \quad (3.6)$$

Donde la curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}$, la métrica inducida $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta$ y la traza $K = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$. Este es el término de borde de Gibbons-Hawking que da un principio variacional bien definido $\delta I = 0$ ⁴. Aquí $\kappa = 8\pi G$ con G la constante gravitacional de Newton, h es el determinante de la métrica del borde. Entonces la acción con la contribución de Gibbons-Hawking es

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K . \quad (3.7)$$

Este término de borde tiene contribución a la acción on-shell. En especial, el cálculo de la energía libre para el agujero negro Schwarzschild asintóticamente plano en el que el término de *bulk* (referida a la integral en el volumen del espacio-tiempo) desaparece ya que $R = 0$ ⁵. La única contribución a la acción (energía libre) esta dada por el término de borde Gibbons-Hawking. En general esta es IR divergente. En las secciones posteriores mostramos métodos concretos para eliminar estas divergencias y obtener la acción finita. Para más detalles, ver la el apéndice A.

3.2. Agujeros negros asintóticamente planos, $\Lambda = 0$

La solución de las ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica) de un objeto estático de masa M y con simetría esférica es el *agujero negro de Schwarzschild* descubierto en 1916 por Karl Schwazschild. Esta solución esta caracterizada por su masa y tiene un horizonte de sucesos que esconde la singularidad. Si consideramos un campo electromagnético mínimamente acoplado a la gravedad, obtenemos la solución de Reissner-Nordström, este es una agujero negro estático y con carga eléctrica. El

⁴En las condiciones de borde de Dirichlet, en la que $\delta h = 0$.

⁵La ecuaciones para la métrica son $R_{\alpha\beta} = 0$, de donde $R = 0$.

ansatz más general con simetría esférica y estático, para ambas soluciones, es:

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (3.8)$$

En estas coordenadas el sector asintótico corresponde a $r = cte \rightarrow \infty$. Las soluciones asintóticamente planas tienen las siguientes propiedades :

- La métrica se aproxima a la métrica de Minkowski:

$$ds^2 \sim -dt^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ en la región } r = cte \rightarrow \infty .$$

- El horizonte se obtiene de $N(r_h) = 0$ y está localizado en $r = r_h$ ⁶.
- La única topología permitida por las ecuaciones de Einstein, para la sección transversal, es la esférica: $d\Sigma_{k=1}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.
- El invariante de Kretschmann:

$$Krets = R^{\alpha\beta\gamma\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\sigma} . \quad (3.9)$$

Evaluada para la solución de Schwarzschild es $Kret \sim 1/r^6$ y para Reissner-Nordström es $Krets \sim 1/r^8$. Eso nos dice que la singularidad del espacio-tiempo se encuentra en $r = 0$, región donde la gravedad es infinitamente fuerte.

Agujero negro de Schwarzschild

Sea la acción

$$I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h} , \quad (3.10)$$

donde $\kappa = 8\pi G$, G es la constante de Newton y el término de borde asegura que el principio variacional se satisface $\delta I = 0$. Ya que no hay materia $T_{\mu\nu} = 0$, entonces las ecuaciones para la métrica son

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.11)$$

⁶Es importante recalcar que para el caso de Reissner-Nordström hay dos soluciones para $N(r_h) = 0$, por lo que hay dos horizontes, r_- y r_+ , tal que $r_- < r_+$.

Dado el ansatz (3.8), la solución es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.12)$$

donde el horizonte es tal que: $-g_{tt} = 0 \Rightarrow r_h = \mu$. La masa AMD o energía del agujero negro es ⁷

$$M = \frac{4\pi\mu}{\kappa} = \frac{\mu}{2G}. \quad (3.13)$$

Es fácil ver que en la región cerca del borde, $r \rightarrow \infty$, esta solución se aproxima a la métrica de Minkowski .

Agujero negro de Reissner-Nordström

La acción del campo gravitacional acoplado mínimamente a un campo gauge $U(1)$, es⁸

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h}, \quad (3.14)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Maxwell⁹, A_μ es el potencial gauge. Las ecuaciones de movimiento para la métrica y el campo gauge son, respectivamente,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (3.15)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.16)$$

donde el tensor de stress para el campo gauge es

$$T_{\mu\nu}^{EM} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2. \quad (3.17)$$

⁷Más adelante calcularemos esta masa mediante tres diferentes formas para un caso mucho más general y veremos que en el caso especial de Schwarzschild la masa es justamente $M = \mu/2G$.

⁸En esta sección usaremos algunas expresiones usando las formas diferenciales. Para una breve revisión de las formas diferenciales, ver el apéndice D

⁹El tensor de Maxwell satisface la identidad de Bianchi $F_{\mu\nu;\alpha} = 0$

Las ecuaciones para el campo gauge (3.16) se satisfacen considerando que

$$A \equiv A_\mu dx^\mu = \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r_+} \right) dt, \quad F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt. \quad (3.18)$$

Las condiciones de borde para el campo gauge son tales que es cero en el horizonte de sucesos del agujero negro, $A(r_+) = 0$ y constante en el borde $A(\infty) = -q/r_+$. El horizonte r_+ es la raíz mayor de la ecuación $-g_{tt} = 0$ ¹⁰.

Considerando el anzats (3.8), la distribución de materia es tal que $N(r) = H(r)^{-1} = f(r)$ y la solución para la métrica es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.19)$$

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r} + \frac{q^2}{4r^2} = \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2}. \quad (3.20)$$

donde $r_\pm = \frac{1}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - q^2})$ con $\mu^2 \geq q^2$. Este agujero negro esta caracterizado por su masa M y carga Q . La masa AMD puede leerse fácilmente de $-g_{tt}$

$$M = \frac{4\pi\mu}{\kappa} = \frac{\mu}{2G}, \quad (3.21)$$

y la carga eléctrica de la ley Gauss es el flujo del campo electromagnético en la sección transversal en el borde, con elemento de superficie $d^2\Sigma_{\mu\nu}$:

$$Q \equiv \frac{1}{\kappa} \oint d^2 \star F = -\frac{q}{4G}. \quad (3.22)$$

La ecuación para el horizonte ($-g_{tt} = 0$), expresada en términos de (M, Q) tiene dos raíces (r_-, r_+) , $r_- \leq r_+ = r_h$

$$r_\pm = G(M \pm \sqrt{M^2 - 4Q^2}). \quad (3.23)$$

El horizonte de sucesos existe si $M \geq 2|Q|$, por lo que hay una cantidad máxima de carga que el agujero negro puede tener. A diferencia de los agujeros negros Schwarzschild, estos agujeros negros cargados pueden llegar a tener temperatura cero cuando

¹⁰Las soluciones para $-g_{tt}(r_h) = 0$, son $r_h = r_\pm$, es decir r_- y r_+ , donde $r_- \leq r_+ = r_h$, se tiene dos horizontes.

$r_- = r_+$ y al mismo tiempo tener un horizonte finito¹¹.

El potencial químico Φ se define como la energía ΔE necesaria para traer una carga ΔQ de la región asintótica $r = \infty$ al horizonte del agujero negro

$$\Phi = A_t|_{r=\infty} - A_t|_{r=r_+} = \frac{4GQ}{r_+} . \quad (3.24)$$

Es interesante mencionar que los agujeros negros de RN se generalizan a p-branas en mayores dimensiones [16–18].

3.3. Agujeros negros asintóticamente anti-de Sitter

Los agujeros negros asintóticamente anti-de Sitter son aquellas soluciones a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa $\Lambda = -3/l^2$. Nuevamente consideramos un ansatz radialmente simétrico y estático. Estas soluciones son tales que el borde es

$$ds^2 = \frac{r^2}{l^2} \left(-dt^2 + l^2 d\Sigma_k^2 \right) . \quad (3.25)$$

A diferencia de las soluciones asintóticamente planas, la constante cosmológica permite soluciones con secciones transversales planares, esféricas e hiperbólicas. El ansatz de un agujero negro estático y esféricamente simétrico es

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\Sigma_k^2 . \quad (3.26)$$

donde las posibles geometrías para la sección transversal son

$$d\Sigma_k^2 = \begin{cases} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 & \text{for } k = +1 , \\ \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^2 dx_i^2 & \text{for } k = 0 , \\ d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2 & \text{for } k = -1 . \end{cases} \quad (3.27)$$

¹¹O también $M = 2|Q|$

Distintas elecciones de la geometría de la sección transversal $k = -1, 0, 1$ nos dan distintas topologías del borde ¹²

$$\mathbb{R} \times H^2, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \times S^2, \quad (3.28)$$

respectivamente. Este tipo de soluciones se conocen como agujeros negros topológicos y donde \mathbb{R} corresponde al tiempo y H^2, \mathbb{R}^2, S^2 a $k = -1, 0, 1$. Estas geometrías son el background donde la CFT se define. Es importante aclarar que el borde de AdS ¹³ es no dinámico ya que no hay grados de libertad gravitacionales en la teoría cuántica dual.

Una expresión muy útil para la sección transversal a la hora de usar paquetes matemáticos de cálculo es ¹⁴

$$d\Sigma_k^2 = \frac{dy^2}{1 - ky^2} + (1 - ky^2)dz^2. \quad (3.29)$$

En la que para $k = 0$ cuyo dominio es $-\infty < (y, z) \leq \infty$. Para $k = 1$ se tiene, $y = \cos \theta$, $z = \varphi$ por lo que el dominio es $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Finalmente para $k = -1$ se tiene, $y = \sinh \theta$ y $z = \varphi$ por lo que el dominio es $-\infty < \theta < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Agujero negro de Schwarzschild-AdS

La acción de Hilbert-Einstein con constante cosmológica $\Lambda = -3/l^2$ es

$$I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h}. \quad (3.30)$$

Las ecuaciones de Einstein son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.31)$$

¹²La topología del borde nos dice como debemos foliar radialmente el espacio-tiempo

¹³Este borde (conforme), salvo el factor conforme r^2/l^2 , es Minkowski, es decir, el borde conforme del espacio-tiempo AdS_4 es Minkowski en tres dimensiones.

¹⁴Esta es una forma compacta de escribir la expresión (3.27), y además puede generalizarse para dimensiones mayores, ver apéndice A.

La solución es

$$ds^2 = -\left(k - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(k - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_k^2. \quad (3.32)$$

El horizonte es la solución mayor del polinomio dado por $-g_{tt}(r_h) = 0$

$$k - \frac{\mu}{r_h} + \frac{r_h^2}{l^2} = 0, \quad (3.33)$$

donde la masa AMD es

$$M = \frac{\sigma_k \mu}{\kappa}. \quad (3.34)$$

Fijando $\mu = 0$, recuperamos el espacio-tiempo AdS (global). Si el radio del horizonte del agujero negro esférico AdS, es pequeño en comparación al radio AdS, $r_+ \ll l$, este se parece a la solución asintóticamente plana. De hecho, si fijamos $1/l = 0$, se obtiene la teoría (la acción) y la solución de Schwarzschild de manera consistente.

3.4. Agujeros negros con pelo escalar

J. A. Wheeler (1971) propuso su famosa conjetura, de que los agujeros negros no tienen pelo de campos de materia mas generales que el Maxwell en 4 dimensiones [19]¹⁵. Sin embargo se mostro que la hipótesis de Wheeler no se cumple, por ejemplo para teorías Einstein-Yang-Mills, Einstein-Skyrme y en otras varias combinaciones con campos dilatónicos [20].

3.4.1. Teorema de no pelo

En esta sección presentamos los teoremas de no pelo y como pueden evadirse para obtener soluciones de agujeros negros con pelo. En la literatura existen varias soluciones exactas pero nos concentraremos en las soluciones estudiadas en [4]. El primer teorema de no-pelo-escalar fue planteado por Bekenstein (1974)

¹⁵El pelo se refiere a cantidades conservadas, las mismas que están relacionadas a las constantes de integración. En general los agujeros negros tienen tres pelos, masa, momento angular y carga eléctrica.

- No existen soluciones regulares de agujeros negros esféricos asintóticamente planos con pelo escalar, para campos escalares acoplados mínimamente con potenciales convexos (mínimo): $\partial^2 V / \partial \phi^2 > 0$

Este teorema fue generalizado para campos escalares no-mínimamente acoplados y para potenciales arbitrariamente positivos [21]. Mas tarde estos teoremas fueron obtenidos para agujeros negros asintóticamente AdS [22, 23].

- No hay soluciones de agujeros negros con pelo escalar asintóticamente AdS cuyo potencial tiende asintóticamente a un mínimo (negativo) del potencial, $\partial^2 V / \partial \phi^2 > 0$

Sea la acción de la gravedad acoplada mínimamente a un campo escalar

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.35)$$

donde usamos la convención $\kappa = 8\pi G$. Consideramos unidades naturales $c = 1 = \hbar$, $[\kappa] = M_P^{-2}$ donde M_P es la masa reducida de Planck.

La ecuación de movimiento para el campo escalar es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.36)$$

Para evadir el teorema de no-pelo, el potencial debe cumplir con las siguientes condiciones, las mismas que aseguran la existencia del vacío estable AdS en la región asintótica¹⁶:

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0, \quad V(0) = -\frac{3}{\kappa l^2}, \quad \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} < 0. \quad (3.37)$$

Esta nos dice que el potencial tiene un extremo, que es negativo y es máximo.

Por ejemplo los potenciales escalares construidos en [24, 25], evaden el teorema de no pelo. El potencial $V(\phi)_{AdS}$ tiene dos parámetros α y $\Lambda = -3/l^2$,

$$V(\phi)_{AdS} = \left(-\frac{1}{l^2} + \alpha \phi \right) (4 + 2 \cosh \phi) - 6\alpha \sinh \phi \quad (3.38)$$

¹⁶Consideramos que el campo escalar en el borde es cero.

Para graficar, fijamos $\alpha = (\text{constante})l^{-2}$. Donde, para cualquier sistema de coordenadas en el borde el campo escalar tiende a cero $\phi = 0$. Es interesante que este potencial también permite obtener soluciones si, además de haber un campo escalar, hay un campo gauge que se acopla al campo escalar en la forma no minimal, $e^\phi F^2$, en la acción.

Un segundo potencial se obtiene del anterior, fijando $1/l^2 = 0$, con este potencial se pueden obtener soluciones asintóticamente planas.

$$V(\phi)_{flat} = 2\alpha\phi(2 + \cosh \phi) - 6\alpha \sinh \phi . \quad (3.39)$$

De acuerdo a la figura 3.1, para ambos casos hay dos ramas (familias) $\phi < 0$ y $\phi > 0$,

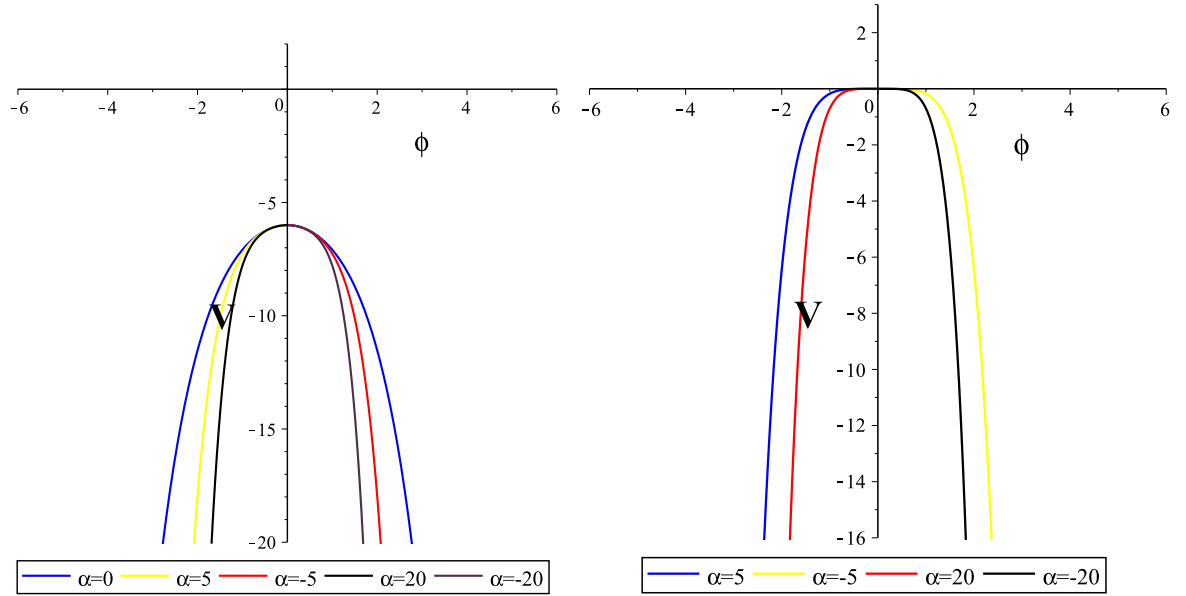


Figura 3.1: En nuestra notación: $V = V(\phi)$, $\phi(x) = \ln x$. La figura de la izquierda es el potencial para teorías asintóticamente AdS. La figura de la derecha es el potencial para teorías asintóticamente planas.

en la que $\phi = 0$ corresponde al valor del campo escalar en el borde y donde el potencial es un máximo global (en cada rama). Note además que $V(\phi, \alpha) = V(-\phi, -\alpha)$.

3.4.2. Agujero negro neutro con pelo escalar

Sean las ecuaciones de movimiento para el campo escalar dada en (3.36) y la métrica obtenidas a partir de la acción (3.35)

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \kappa T_{\mu\nu}^{\phi} , \quad (3.40)$$

donde el tensor de stress del campo de materia es

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi) \right] . \quad (3.41)$$

Usaremos el siguiente ansatz para la métrica de sección transversal plana

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + \frac{dy^2}{l^2} + \frac{dz^2}{l^2} \right] . \quad (3.42)$$

Las ecuaciones para métrica son:

$$\begin{aligned} E_t^t - E_x^x = 0 &\rightarrow \phi'^2 = \frac{3\Omega'^2 - 2\Omega''\Omega}{\Omega^2} , \\ E_t^t - E_y^y = 0 &\rightarrow f'' + \frac{\Omega'f'}{\Omega} = 0 , \\ E_t^t + E_y^y = 0 &\rightarrow V(\phi) = -\frac{1}{\Omega^2\eta^2} \left(f\Omega'' + f'\Omega' \right) . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Las ecuaciones de movimiento pueden ser integradas si escogemos el siguiente factor conforme [5, 24, 25, 95]:

$$\Omega(x) = \frac{\nu^2 x^{\nu-1}}{\eta^2 (x^{\nu} - 1)^2} , \quad (3.44)$$

donde η^2 es sólo una constante de integración que esta relacionada con la masa y ν es el parámetro de pelo. El borde se encuentra en $x_b = 1$ ya que $\Omega(x)$ diverge en ese punto.

Con esta elección de $\Omega(x)$, la ecuación para el campo escalar puede ser inmediata-

mente integrada

$$\phi'^2 = \frac{(\nu - 1)^2}{x^2} - \frac{4\nu(\nu - 1)x^{\nu-2}}{x^\nu - 1} + \frac{4\nu^2 x^{\nu-1}}{(x^\nu - 1)^2} + \frac{2(\nu - 1)}{x^2} + \frac{4\nu(1 - \nu - x^\nu)x^{\nu-2}x^{\nu-2}}{(x^\nu - 1)^2}, \quad (3.45)$$

simplificando e integrando tal que en el borde $x_b = 1$ el campo escalar es $\phi(x_b) = 0$, se tiene que

$$\phi'^2 = \frac{\nu^2 - 1}{2\kappa x^2} \rightarrow \int_{\phi}^{\phi=0} d\phi = \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{2\kappa}} \int_x^1 \frac{dx}{x}, \quad (3.46)$$

$$\phi(x) = l_\nu^{-1} \ln x, \quad l_\nu^{-1} = \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{2\kappa}}. \quad (3.47)$$

La término l_ν^{-1} le llamamos longitud del dilatón. El campo escalar es cero, $\phi = 0$, cuando $\nu = 1$, $l_1^{-1} = 0$, es decir el caso $\nu = 1$ es de no-pelo. De la misma forma, con la elección de este factor conforme, podemos proceder a integrar fácilmente la segunda ecuación para métrica

$$(f'\Omega)' = 0, \quad (3.48)$$

$$f(x) = \frac{c_2 \eta^2}{\nu^2} \int \frac{(x^\nu - 1)^2}{x^{\nu-1}} dx + c_1,$$

$$f(x) = c_1 + \frac{c_2 \eta^2}{\nu^2} \left(\frac{x^{2+\nu}}{2+\nu} + \frac{x^{2-\nu}}{2-\nu} - x^2 \right).$$

Las constantes¹⁷ se fijan de tal forma que en el borde $x_b = 1$, $f(x_b) = 1/l^2$ y $c_2 = \alpha/\eta^2$, entonces se obtiene¹⁸

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \alpha \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Esta solución es invariante bajo la transformación $\nu \rightarrow -\nu$, por lo que es lo mismo estudiar en el rango de valores $\nu \geq 1$ y $\nu \leq -1$, mostramos que el potencial también es invariante bajo el cambio de signo de ν . Trabajaremos en el rango de valores $\nu \geq 1$. Es fácil verificar que esta solución es bien comportada para cualquier valor

¹⁷Aclaro que sólo hay una constante de integración, ya que una de ellas es en realidad la constante cosmológica y esta es un parámetro de la teoría.

¹⁸Esta elección es importante porque cuando calculamos el potencial on-shell, η^2 no debe aparecer en el potencial ya que es una constante de integración y no un parámetro de la teoría.

del parámetro hairy $\nu \geq 1$ incluso en $\nu = 2$, ya que en el límite de $\nu = 2$, $f(x)$ es convergente. Es interesante que con $\Omega(x)$ y $f(x)$ podemos obtener una expresión para el potencial $V(\phi)$, después de un largo y cuidadoso cálculo, considerando que $x = e^{l\nu\phi}$ se obtiene

$$V(\phi) = \frac{\Lambda(\nu^2 - 4)}{6\kappa\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} e^{-\phi l_\nu(\nu+1)} + \frac{\nu + 1}{\nu - 2} e^{\phi l_\nu(\nu-1)} + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} e^{-\phi l_\nu} \right] \quad (3.50)$$

$$+ \frac{\alpha}{\kappa\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} \sinh \phi l_\nu(\nu + 1) - \frac{\nu + 1}{\nu - 2} \sinh \phi l_\nu(\nu - 1) + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} \sinh \phi l_\nu \right].$$

Este potencial tiene dos partes, una que depende de la constante cosmológica Λ y otra que es controlada por α . Los parámetros que definen la teoría son: Λ, G, α, ν . Este parámetro α es importante, ya que si $\alpha = 0$ se obtiene una singularidad desnuda, pero cuando $\alpha \neq 0$ se tiene un horizonte regular. Por lo que α tiene una relevancia importante en el interior del espacio-tiempo.

El comportamiento asintótico del potencial se obtiene expandiendo alrededor de $\phi = 0$

$$V(\phi) = \frac{\Lambda}{\kappa} - \frac{\phi^2}{l^2} + \frac{\kappa\Lambda(\nu^2 - 3)}{18\nu^2 - 1} \phi^4 - \frac{l_\nu^3}{90} (\Lambda\nu^2 - 4\Lambda - 6\alpha) \phi^5 + O(\phi^6), \quad (3.51)$$

de donde vemos que esta solución exacta evade el teorema de no-pelo y acepta el vacío estandar AdS :

$$V(0) = \frac{\Lambda}{\kappa}, \quad \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = -\frac{2}{l^2}. \quad (3.52)$$

El campo escalar tiene masa conforme $m^2 = -2/l^2$ cuyo valor pertenece a la ventana de BF. El campo escalar vive en la parte exterior del horizonte de sucesos y se mantiene relativamente estable por la autointeracción del campo escalar (back-reaction). Este pelo escalar rápidamente disminuye en las proximidades del borde.

Finalmente, es importante destacar que hay dos familias de soluciones bien comportadas, tales que $\eta > 0$ ¹⁹.

- En el intervalo $x \in (0, 1)$ el campo escalar es negativo $\phi < 0$, en ese caso, la singularidad se encuentra en $x = 0$ y el borde es $x_b = 1$.
- En el intervalo $x \in (1, \infty)$ el campo escalar es positivo $\phi > 0$, en donde, $x_b = 1$ sigue siendo el borde y la singularidad se encuentra en $x = \infty$.

Siguiendo un procedimiento similar se puede obtener la solución de sección transversal esférica ($k = 1$). El potencial que obtuvimos para el caso $k = 0$ es el mismo para este caso, y el campo escalar es (3.47). El ansatz y la solución es

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.53)$$

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \alpha \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right] + \frac{x}{\Omega(x)}. \quad (3.54)$$

Cuando fijamos el parámetro $\nu = 1$ el campo escalar es $\phi = 0$ y el potencial escalar se reduce a $V = \Lambda/\kappa$, entonces α deja de ser un parámetro de la teoría y junto con η forman una sólo constante de integración. Para ver esto realizamos la siguiente transformación de coordenadas

$$\Omega(x)|_{\nu=1} = r^2 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\eta r}, \quad (3.55)$$

donde $\eta > 0$ y \pm es para la rama positiva y negativa respectivamente, se obtiene la solución de Schwarzschild-AdS

$$-g_{tt} = \Omega(x)f(x) = k - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}, \quad \mu = \mp \frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3}. \quad (3.56)$$

Aquí μ es la nueva constante de integración relacionada con la masa del agujero negro en las coordenadas (t, r, Σ_k) .

¹⁹Más adelante mostramos que el comportamiento termodinámico es muy similar para ambas familias de soluciones

3.4.3. Agujeros negros eléctricamente cargados con pelo

Veamos un ejemplo simple de una solución de agujero negro cargado con pelo escalar

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{4} e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.57)$$

donde el acoplamiento del campo gauge y el potencial son funciones del dilatón, y usamos la convención $\kappa = 8\pi G$. Las ecuaciones de movimiento para el campo gauge, el dilatón y la métrica, son

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu}) &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{1}{4} \gamma e^{\gamma\phi} F^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} [T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{EM}],$$

donde el tensor de stress de los campos de materia es

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right], \quad T_{\mu\nu}^{EM} = e^{\gamma\phi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right).$$

Solution, $\gamma = 1$

El caso $\gamma = 1$, asintóticamente AdS, el caso asintóticamente plano fue explicado en [25]. El potencial de la teoría en este caso es

$$V(\phi) = \left(\frac{\Lambda}{3} + \alpha\phi \right) (4 + 2 \cosh(\phi)) - 6\alpha \sinh(\phi). \quad (3.58)$$

Considerando el ansatz

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x) dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{x^2 f(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.59)$$

se obtienen las soluciones para la métrica y el campo gauge

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \alpha \left[\frac{(x^2 - 1)}{2x} - \ln x \right] + \eta^2 \frac{(x - 1)^2}{x} - \frac{q^2 \eta^2}{2x^2} (x - 1)^3, \quad (3.60)$$

$$\Omega(x) = \frac{x}{\eta^2 (x-1)^2} \quad , \quad \phi(x) = \ln x \quad , \quad (3.61)$$

$$A = q \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_+} \right) dt, \quad F = -\frac{q}{x^2} dx \wedge dt \quad . \quad (3.62)$$

Es interesante que para $\alpha = 0$ (a diferencia del caso neutro descrito en la sección anterior) aún existen soluciones regulares, en el sentido en el que existen horizontes (los ceros de la ecuación $f(x_+) = 0$) que esconden la singularidad. Actualmente estamos investigando sobre la transición de fase de estos agujeros negros cargados con pelo en diversos escenarios. Por ejemplo si $1/l^2 = 0$ las soluciones asintóticamente planas son regulares (por lo tanto permitidas). Otro caso interesante se da cuando estudiamos soluciones sin potencial escalar $V(\phi) = 0$. En esos casos la responsabilidad para evadir el teorema de no pelo recae en el término $e^\gamma F^2$. Varias de estas soluciones pueden ser encontradas en [24, 25].

Capítulo 4

Renormalización holográfica y formalismo Hamiltoniano

4.1. Sustracción background vs contratérminos

El *background* es el campo de fondo, usualmente el estado base respecto al cual se comparan los estados o campos. En general, la acción on-shell para soluciones de agujeros negros tienen divergencias¹. Estas divergencias pueden eliminarse si calculamos la acción on-shell respecto de su estado base. El método de sustracción background se basa en hecho de que se conoce a priori el estado base de la solución del agujero negro a estudiar. Pero hay soluciones en la literatura donde el estado ground es patológico y casos en los que es imposible obtener el estado ground. Por esta razón sería mucho mejor tener un método independiente del background. Es bien sabido que la acción on-shell contiene divergencias debido a la integración en un volumen infinito. Estas divergencias IR (infrarojas) en el lado de la teoría gravitacional (invocando la dualidad AdS/CFT) se interpretan como las divergencias UV (ultravioleta) de la teoría cuántica dual. La técnica usual en teorías cuánticas del campo consiste en agregar contratérminos que eliminen estas divergencias. Entonces, en el lado gravitacional podemos agregar contratérminos locales que dependen de la geometría intrínseca del

¹Incluso para el espacio-tiempo AdS (global) la acción contiene divergencias.

borde [26]

$$I_g = -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \Xi(l, \mathcal{R}, \nabla\mathcal{R}) . \quad (4.1)$$

Donde $\Xi(l, \mathcal{R}, \nabla\mathcal{R})$ depende del radio AdS l y de los invariantes construídos a partir de la curvatura de Riemann del borde \mathcal{R}_{bcd}^a ². La métrica inducida es h_{ab} y usamos la descomposición de los índices del espacio-tiempo $\mu = (r, a)$. Sea el espacio-tiempo AdS en coordenadas estáticas

$$ds^2 = -\left(k + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(k + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_k^2 , \quad (4.2)$$

de la cual, la sección transversal $d\Sigma_k^2$ admite diferentes topologías. La foliación $r = R = \text{constante}$ nos da la métrica inducida

$$h_{ab} dx^a dx^b = -\left(k + \frac{R^2}{l^2}\right) dt^2 + R^2 d\Sigma_k^2 . \quad (4.3)$$

Es claro que los contratérminos gravitacionales³ I_g que dependen de \mathcal{R} y sus derivadas son distintas según la foliación que escogamos (en este caso, según la topología de la sección transversal). Concretamente, el proceso de regularización depende de la elección del sistema de coordenadas en la región asintótica de AdS. Entonces diferentes foliaciones dan como resultado diferentes teorías cuánticas del campo duales. El borde conforme de AdS como vimos anteriormente es el espacio-tiempo de Minkowski

$$ds^2 = \frac{r_b^2}{l^2} (-dt^2 + l^2 d\Sigma_k^2) , \quad (4.4)$$

donde r_b es el borde $r = \infty$

²El hecho de que dependa sólo de la geometría intrínseca del borde garantiza que las condiciones de borde para la métrica del borde $\delta h = 0$ (Condición de borde de Dirichlet) no se violen.

³De ahora en adelante nombraremos I_g como contratérminos gravitacionales ya que dependen fundamentalmente de la geometría intrínseca del borde

Sustracción background

Sea la acción con constante cosmológica $\Lambda = -3/l^2$ dada en (3.30) y dada la solución de Schwarzschild-AdS de sección transversal esférica $k = 1$, dada en (3.32)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.5)$$

El horizonte es tal que $-g_{tt} = f(\mu, r_+) = 0$ y la temperatura es

$$T = \frac{f'}{4\pi} \Big|_{r_+} = \beta^{-1} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3r_+^2 + l^2}{l^2 r_+} \right). \quad (4.6)$$

El término on-shell del bulk es:

$$I_{bulk}^E = \frac{12\pi\beta}{\kappa l^2} \int_{r_+}^R r^2 dr = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} (R^3 - r_+^3). \quad (4.7)$$

Donde R es un cut-off tal que el borde es $R \rightarrow r_b = \infty$. El término de Gibbons-Hawking se obtiene considerando la foliación $r = R = \text{constante}$ ⁴

$$h_{ab} dx^a dx^b = -\left(1 - \frac{\mu}{R} + \frac{R^2}{l^2}\right) dt^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.8)$$

donde el proyector $P^{ab} = g^{ab} - n^a n^a$, la normal, la curvatura extrínseca y la traza $K = P^{ab} K_{ab}$ de la foliación son, respectivamente

$$n_a = \frac{\delta_a^r}{\sqrt{g^{rr}}}, \quad K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{rr}}}{2} \partial_r h_{ab}, \quad K = \frac{1}{l^2 R^2} \left(1 - \frac{\mu}{R} + \frac{R^2}{l^2}\right)^{-1/2} \left(-\frac{3l^2\mu}{2} + 3R^3 + 2Rl^2\right) \quad (4.9)$$

y obtenemos

$$I_{GH}^E = -\frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(-\frac{3l^2\mu}{2} + 3R^3 + 2Rl^2\right). \quad (4.10)$$

⁴No confundir R con la curvatura escalar de Ricci

Entonces la acción Euclidea para el agujero negro explícitamente divergente es⁵:

$$I_{bh}^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(\frac{3l^2\mu}{2} - 2R^3 - 2Rl^2 - r_+^3 \right). \quad (4.11)$$

El estado ground es el espacio-tiempo AdS (global) a temperatura finita $\beta_0 = 1/T_0$ (AdS térmico), el cual se obtiene a partir de la solución Schwarzschild-AdS considerando $\mu = 0$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.12)$$

Necesitamos calcular la acción on-shell para esta métrica, en la que $0 \leq r \leq r_b$. La coordenada temporal en la sección Euclidea $t \rightarrow -i\tau^E$ tiene periodicidad (temperatura) $\beta_0 = T_0^{-1}$

$$I_{AdS}^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E = \frac{4\pi\beta_0}{\kappa l^2} \left(-2R^3 - 2l^2R \right). \quad (4.13)$$

Para comparar las dos acciones necesitamos que esten a la misma temperatura (ambas soluciones con la misma periodicidad en el borde)

$$\beta_0 \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}} = \beta \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2} - \frac{\mu}{R}}. \quad (4.14)$$

Con esta relación podemos comparar las acciones on-shell (energías libres) en el borde $R \rightarrow r_b$

$$I^E = I_{bh}^E - I_{AdS}^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left[\left(\frac{3l^2\mu}{2} - 2R^3 - 2Rl^2 - r_+^3 \right) - \frac{\beta_0}{\beta} \left(-2R^3 - 2l^2R \right) \right], \quad (4.15)$$

de donde obtenemos la energía libre

$$F = \beta^{-1} I^E = \frac{4\pi}{\kappa l^2} \left(\frac{l^2\mu}{2} - r_+^3 \right). \quad (4.16)$$

⁵La acción Euclidea se relaciona con la energía libre de la siguiente forma $F = \beta^{-1} I_{bh}^E$, consideramos unidades tales que la constante de Boltzman es igual a 1.

Contratérminos

En este caso consideramos que desconocemos la métrica del estado ground. Entonces consideramos contratérminos que están en función de cantidades geométricas intrínsecas al borde, estas eliminan las divergencias infrarojas que aparecen en el lado de la gravedad. Estos contratérminos en el espacio-tiempo se interpretan como los contratérminos que eliminan las divergencias ultravioletas de la teoría cuántica dual y tienen la forma⁶

$$I_g = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{l\mathcal{R}}{2} \right). \quad (4.17)$$

En 4-dimensiones, estos dos primeros contratérminos son suficientes para eliminar las divergencias cúbicas de la contribución del I_{bulk}^E y las divergencias cúbicas y lineales de I_{GH}^E . La acción Euclidea on-shell del *bulk* y de Gibbons-Gawking (GH) es

$$I_{bulk}^E + I_{GH}^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(\frac{3l^2\mu}{2} - 2r_b^3 - 2r_b l^2 - r_+^3 \right). \quad (4.18)$$

Los contratérminos evaluados on-shell son

$$I_g^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(1 + \frac{l^2}{R^2} - \frac{\mu l^2}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}} (2R^3 + kl^2 R) \Big|_{R=r_b} = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} (2r_b^3 + 2l^2 r_b - \mu l^2), \quad (4.19)$$

entonces la acción Euclidea on-shell con esta nueva contribución es

$$I^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(\frac{l^2\mu}{2} - r_+^3 \right). \quad (4.20)$$

Concluimos que ambos métodos nos dan el mismo resultado comparando con (4.16). Un procedimiento similar muestra que para los agujeros negros asintóticamente planos, mostrados en (3.12) la acción finita (usando el método de sustracción background)⁷ da $I^E = \frac{2\pi\beta r_+}{\kappa}$. Las energías libres para el agujero negro de Schwarzschild y

⁶Para espacios-tiempo de 4-dimensiones, estos dos contratérminos son suficientes. Para mayores detalles ver el apéndice A.

⁷Más adelante aclaramos que la extensión del método de contratérminos a espacio-tiempo asintóticamente planos fue extendido.

Schwarzschild-AdS son

$$F_{flat} = \frac{2\pi r_+}{\kappa}, \quad F_{SAdS} = \frac{4\pi}{\kappa l^2} \left(\frac{l^2 \mu}{2} - r_+^3 \right), \quad (4.21)$$

respectivamente. Vemos que el agujero negro de Schwarzschild tiene una energía libre siempre positiva $F > 0$, es decir no cambia de signo por lo que no hay transiciones de fase, de hecho se puede mostrar que es inestable termodinámicamente, ya que la capacidad calorífica es siempre $C < 0$ ⁸.

Para el caso de los agujeros negros de SAdS la energía libre puede cambiar de signo y en este caso podemos hablar de agujeros negros grandes $r_+ > l$ y de agujeros negros pequeños $r_+ < l$ respecto del radio AdS, l . La energía (masa del agujero negro) se calcula mediante la siguiente relación termodinámica, donde $I^E = \beta F$

$$E = -T^2 \frac{\partial I^E}{\partial T} = \frac{\mu}{2G}. \quad (4.22)$$

En la figura 4.1, la capacidad calorífica $C = \partial E / \partial T$ es la pendiente de la curva de la izquierda donde los agujeros negros grandes (de energía o masa grande) tienen capacidad calorífica positiva y son termodinámicamente estables, al contrario de los agujeros negros pequeños ($C < 0$) que son inestables. En la derecha de la figura 4.1, la energía libre puede cambiar de signo, donde el punto crítico ($F = 0$) está dado por la temperatura de Hawking-Page, $T_{HP} = 1/\pi l$. Esto es signo de transiciones de fase de primer orden⁹. En la región donde $F < 0$, los agujeros negros grandes ($r_+ > l$) son preferidos y estables en cambio en la región donde $F > 0$, el espacio AdS (global $\mu = 0$, a temperatura finita) es preferido ($r_+ < l$) pero inestable¹⁰. Más adelante mostramos que las temperaturas de los agujeros negros de Schwarzschild y

⁸El hecho de que los agujeros negros de Schwarzschild tengan $C < 0$, significa que el agujero negro nunca llega a un equilibrio térmico, es decir, radía más de lo que absorbe. Debido a que el borde es plano las partículas pueden escapar al borde (es como un sistema abierto), en cambio AdS es como una caja y un agujero negro en AdS es como un sistema cerrado.

⁹Una transición de fase de 1^{er} orden es tal que que la energía libre $F = 0$ y la entropía cambia de forma discontinua. En términos de agujeros negros, eso significa que la formación de un agujero negro es una transición de fase de primer orden.

¹⁰De hecho en esta región hay agujeros negros pequeños ($r_+ < l$), pero se evaporan rápidamente y es como si el espacio fuese AdS puro.

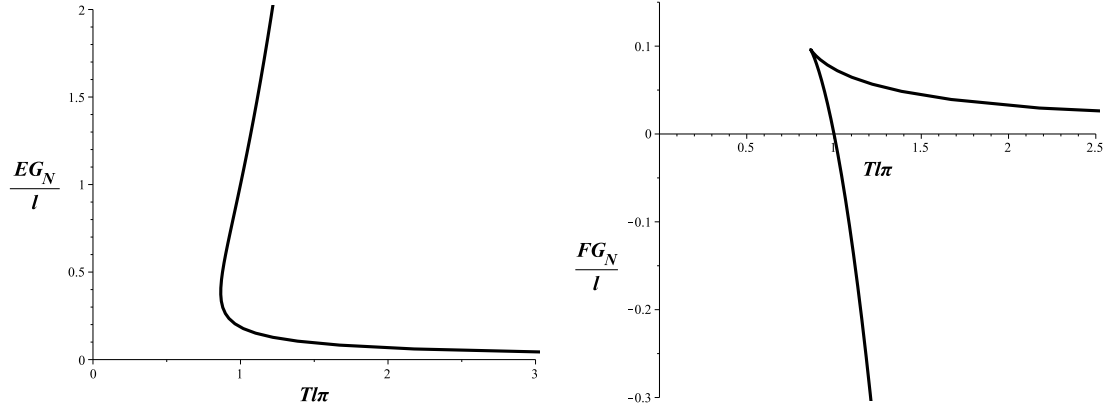


Figura 4.1: Ambas figuras son para los agujeros negros de Schwarzschild-AdS. Izquierda, E vs T y Derecha F vs T. En la figura G_N es la constante de Newton, pero a lo largo de la tesis usaremos G .

Schwarzschild-AdS son respectivamente¹¹

$$T_{flat} = \frac{1}{4\pi r_h} , \quad T_{SAdS} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2} \right) . \quad (4.23)$$

4.2. Formalismo de Brown-York

En el contexto de la dualidad AdS/CFT, el gravitón AdS se acopla al tensor de stress energía del CFT [27, 28]:

$$\int_{\partial\mathcal{M}} d^3x h^{ab} T_{ab} . \quad (4.24)$$

Entonces, desde el punto de vista holográfico, el tensor de stress de Brown-York se interpreta como el tensor de stress energía de la teoría dual del campo. En esta sección, trabajamos en el sistema de coordenadas canónicas (t, r, Σ_k) para el cual, la métrica fue dada en (5.4). Para la geometría del bulk, usaremos la siguiente foliación

¹¹Recuerde que el horizonte lo designamos con r_h , pero la ecuación para el horizonte de Schwarzschild-AdS es cuadrática, por lo que hay dos raíces. En ese caso, consideramos a la raíz mayor como el horizonte $r_h = r_+$.

con superficies $r = R = \text{constant}$ donde la métrica inducida es

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b = -N(R)dt^2 + S(R)d\Sigma_k^2. \quad (4.25)$$

El tensor de stress cuasi-local de Brown-York es definido como [29]

$$\tau^{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h_{ab}}, \quad (4.26)$$

donde I es la acción total, debidamente suplementada con los contratérminos¹². Ya que la métrica donde la teoría dual vive esta relacionada con la métrica del borde por un factor conforme, es muy importante enfatizar que el tensor de stress de CFT esta relacionado con el tensor de stress de Brown-York salvo un factor conforme. Veamos un ejemplo, donde mostramos los detalles de este metodo para el agujero negro de Schwarzschild-AdS— seguiremos el análisis de [30]. Sea la métrica del agujero negro de Schwarzschild-AdS

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.27)$$

Si consideramos la foliación, $r = R$, la métrica inducida h_{ab} de cualquier ‘slice’¹³, es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{R} + \frac{R^2}{l^2}\right)dt^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (4.28)$$

El tensor de stress holográfico se obtiene variando la acción debidamente suplementada con los contratérminos gravitacionales, I_g

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-h} K - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{l\mathcal{R}}{2} \right), \quad (4.29)$$

de donde

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{8\pi G} \left(K_{ab} - h_{ab}K - \frac{2}{l}h_{ab} + lG_{ab} \right). \quad (4.30)$$

¹²Una de las conclusiones más importantes en esta investigación es que una acción debidamente regularizada, tal que el principio variacional este bien definido $\delta I = 0$, se obtiene un tensor cuasi-local τ^{ab} libre de divergencias. Mostramos que de este tensor cuasi-local podemos obtener la energía.

¹³En español se dice cáscara o rabanada. Dejamos la expresión en Inglés.

Como ya puntualizamos anteriormente, la métrica del borde es

$$ds_{\text{borde}}^2 = \frac{R^2}{l^2}(-dt^2 + l^2 d\Omega^2) . \quad (4.31)$$

pero la métrica del background donde la teoría cuántica dual vive es γ_{ab} definida de la siguiente forma

$$ds_{\text{dual}}^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + l^2 d\Omega^2 \quad (4.32)$$

La métrica γ_{ab} no es dinámica y esta relacionada por un factor conforme con la métrica del borde. El correspondiente tensor de stress dual es

$$\langle \tau_{ab}^{\text{dual}} \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{l} \tau_{ab} = \frac{\mu}{16\pi G l^2} (3\delta_a^0 \delta_b^0 + \gamma_{ab}) . \quad (4.33)$$

Escrita en esta forma [30], esta corresponde al tensor de stress de un gas térmico de partículas sin masa y como ya se esperaba, debido a la simetría conforme su traza debe desaparecer $\langle \tau^{\text{dual}} \rangle = \langle \tau_{ab}^{\text{dual}} \rangle \gamma^{ab} = 0$.

4.3. Formalismo Hamiltoniano

En espacios-tiempo AdS existen diferentes métodos para calcular la masa gravitacional y es importante compararlas —para la condición de borde de Dirichlet esto fue hecho en gran detalle [31] y salvo algunas ambigüedades relacionadas a términos constantes en el borde, el formalismo Hamiltoniano, la masa AMD, y el método holográfico producen el mismo resultado. Aunque, como ya fue aclarado en [32], cuando la simetría conforme se rompe en el borde la masa AMD no es la masa física correcta y se debe calcular la masa Hamiltoniana del sistema. En esta sección mostraremos algunos detalles del cálculo de la masa Hamiltoniana y mostraremos que coincide con la masa holográfica aun cuando la simetría conforme en el borde se rompe.

Consideramos el método de Regge-Teitelboim [33] para calcular la masa de teorías de campos escalares acoplados mínimamente a la gravedad en espacios-tiempo asintóticamente locales AdS. Consideramos la acción

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h} , \quad (4.34)$$

para el cual la ligaduras Hamiltonianas \mathcal{H}_\perp and \mathcal{H}_i , con $i = 1, 2, 3$, tienen contribuciones del término gravitacional y de la materia que en este caso corresponde a un campo escalar mínimamente acoplado con un potencial auto-interactuante $V(\phi)$.

Estas ligaduras son funciones de las variables canónicas: la métrica 3-dimensional g_{ij} y el campo escalar ϕ , y sus correspondientes momentos conjugados π^{ij} y π_ϕ . Las ligaduras Hamiltonianas estan dadas por

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{2\kappa}{\sqrt{g}} \left[\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{1}{2} (\pi^i_i)^2 \right] - \frac{1}{2\kappa} \sqrt{g} {}^{(3)}R + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi_\phi^2}{\sqrt{g}} + \sqrt{g} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} \right) + \sqrt{g} V(\phi) , \quad (4.35)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\pi_i^j |_{,j} + \pi_\phi \phi_{,i} . \quad (4.36)$$

La métrica 3-dimensional g_{ij} puede ser reconocida del elemento de línea escrita en su forma ADM

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) , \quad (4.37)$$

donde, g , ${}^{(3)}R$ y la barra vertical $|$ denotan el determinante, la curvatura escalar, y la derivada covariante asociada a métrica espacial, respectivamente. El generador canónico de la simetría asintótica definida por el vector $\xi^\mu = (\xi^\perp, \xi^i)$ es una combinación lineal de las ligaduras $\mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_i$ más un término de superficie $Q[\xi]$

$$H[\xi] = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x (\xi^\perp \mathcal{H}_\perp + \xi^i \mathcal{H}_i) + Q[\xi] . \quad (4.38)$$

$Q[\xi]$ es escogido de tal forma que cancela los términos de superficie que provienen de la variación de los generadores respecto a las variables canónicas. De esta forma, el generador $H[\xi]$ posee una derivada funcional bien definida [33]. La forma general de $Q[\xi]$ para el generador (4.38) esta dado por [34]

$$\begin{aligned} \delta Q[\xi] = \oint d^2S_l \left[\frac{G^{ijkl}}{2\kappa} (\xi^\perp \delta g_{ij|k} - \xi^\perp_{,k} \delta g_{ij}) + 2\xi_k \delta \pi^{kl} \right. \\ \left. + (2\xi^k \pi^{jl} - \xi^l \pi^{jk}) \delta g_{jk} - (\sqrt{g} \xi^\perp g^{lj} \phi_{,j} + \xi^l \pi_\phi) \delta \phi \right] , \quad (4.39) \end{aligned}$$

donde

$$G^{ijkl} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} - 2g^{ij} g^{kl}) . \quad (4.40)$$

La normal y las componentes tangenciales de la deformación permitida (ξ^\perp, ξ^i) están relacionadas con las componentes del espacio-tiempo $(\xi^\perp, {}^{(3)}\xi^i)$ en la siguiente forma

$$\xi^\perp = N^\perp \xi^t , \quad \xi^i = {}^{(3)}\xi^i + N^i \xi^t . \quad (4.41)$$

El siguiente paso es notar que el generador Hamiltoniano (4.38) se reduce al término de superficie $Q[\xi]$ cuando las ligaduras se mantienen. Esto es, el valor de los generadores — las cargas conservadas asociadas a las simetrías asintóticas — están justamente dadas por $Q[\xi]$. Ya que las cargas están definidas por un término de superficie en el borde, estas necesitan solamente el comportamiento de las variables canónicas y simetrías cercanas al borde i.e. su comportamiento asintótico. Nos centraremos en el caso estático. Por definición hay un vector de Killing tipo-tiempo $\xi = \xi^\mu \partial_\mu = \partial_t$, y la correspondiente carga conservada asociada con esta simetría — traslaciones temporales — es de primeros principios la masa M ¹⁴. En el caso estático todos los momentos desaparecen y la expresión (4.39), evaluado para $\xi = \partial_t$, se reduce a

$$\delta M \equiv \delta Q[\partial_t] = \oint d^2 S_l \left[\frac{G^{ijkl}}{2\kappa} (\xi^\perp \delta g_{ij|k} - \xi^\perp{}_{,k} \delta g_{ij}) - \sqrt{g} \xi^\perp g^{lj} \phi_{,j} \delta \phi \right] . \quad (4.42)$$

Notamos que hay una contribución explícita del campo escalar en la masa. En general esta cantidad es distinta de cero. Con el fin de conseguir un mejor entendimiento de esta contribución, es conveniente separarla de la contribución usual gravitacional escribiendo δM como

$$\delta M = \delta M_G + \delta M_\phi , \quad (4.43)$$

donde

$$\delta M_G = \oint d^2 S_l \frac{G^{ijkl}}{2\kappa} (\xi^\perp \delta g_{ij|k} - \xi^\perp{}_{,k} \delta g_{ij}) \quad (4.44)$$

y

$$\delta M_\phi = - \oint d^2 S_l \sqrt{g} \xi^\perp g^{lj} \phi_{,j} \delta \phi . \quad (4.45)$$

¹⁴Del teorema de Noether.

Como ya mencionamos anteriormente, la variación de la masa, dada por la integral de superficie (4.42), necesita justamente el comportamiento asintótico de las variables canónicas y simetrías. Sin embargo, esta variación usualmente requiere más información para ser integrada, y las condiciones de borde deben ser impuestas. La masa de un sistema queda bien definida después de imponer las condiciones de borde. El efecto del fall-off lento del campo escalar en la masa de espacios-tiempo asintóticamente con pelo fueron estudiados en [34–36] usando el formalismo Hamiltoniano descrito anteriormente. Otras aproximaciones y metodos pueden ser encontrados en [20, 37–40].

Un paso más allá se hizo en [32] donde los cálculos de la masa de estas configuraciones con pelo fueron hechas considerando información adicional obtenidas por las ecuaciones de campo. Para este trabajo, nos centraremos en el análisis de una clase de potenciales de masa conforme $m^2 = -2l^{-2}$ en cuatro dimensiones. La construcción de la masa Hamiltoniana nos dió una útil intuición para construir los contratérminos.

Capítulo 5

Gravedad diseñada

El término de Gravedad diseñada (Designer gravity) fue acuñado en [41]. Son aquellos espacios-tiempo asintóticamente AdS tales que para la misma acción hay varias posibles condiciones de borde para el campo escalar y que alterando estas condiciones, las propiedades de la teoría cambian.

5.1. Condiciones de borde y deformaciones multi-traza AdS_4

En esta sección, revisamos el rol de las condiciones de borde de AdS en el contexto de la dualidad AdS/CFT [11]. De acuerdo al diccionario holográfico, imponer condiciones de borde mixtas en el campo escalar corresponde a perturbar la teoría del borde N -largo por una deformación multi-traza relevante, irrelevante o marginal [42]¹.

Vamos a empezar por exhibir algunos hechos conocidos acerca de la dualidad AdS/CFT [11]. Nos gustaría describir qué tipo de condiciones de borde preservan la simetría conforme de la teoría dual del campo e interpretarlas en el contexto de la dualidad AdS/CFT [20, 34, 42].

¹Ver la sección 2.3.3

En primer lugar, describimos el espacio-tiempo AdS_4 y explicamos como las simetrías de las dos teorías duales coinciden. Como explicamos anteriormente en la sección (2.1), el grupo de isometría $SO(3,2)$ de AdS_4 actúa en el borde (conforme) como el grupo conforme² actuando en el espacio-tiempo de Minkowski.

El espacio-tiempo AdS tiene el número máximo de isometrías en todas las dimensiones. Por lo tanto, tiene una forma simple en un gran número de sistemas de coordenadas (ver, p.ej., [43] para una discusión en el contexto de la dualidad AdS/CFT). Dependiendo de la elección de la coordenada radial, las foliaciones a radio constante pueden tener una geometría diferente o incluso una topología diferente. Por ejemplo, uno puede foliar AdS_4 de la siguiente forma:

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(k + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{k + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\Sigma_k^2, \quad (5.1)$$

donde $k = \{+1, 0, -1\}$ para las foliaciones esférica ($d\Sigma_1^2 = d\Omega^2$), plana ($d\Sigma_0^2 = dx^2 + dy^2$), e hiperbólica ($d\Sigma_{-1}^2 = dH^2$), respectivamente. Aquí, $d\Omega^2$ y dH^2 son las métricas unitarias de una esfera e hiperboloide 2-dimensional, respectivamente. El radio l de AdS_4 esta relacionada con la constante cosmológica por $\Lambda = -3/l^2$. El borde conforme está en $r \rightarrow \infty$, para el cual la métrica inducida es

$$h_{ab} dx^a dx^b = \frac{r^2}{l^2} (-dt^2 + l^2 d\Sigma_k^2). \quad (5.2)$$

Ahora está claro que la geometría background donde vive la teoría del campo, está relacionada con la geometría del borde por una transformación conforme. Por lo tanto, la métrica del bulk está asociada con una estructura conforme en el infinito. El factor conforme juega un papel importante cuando se calcula el tensor de stresses del borde.

Aun cuando las diferentes foliaciones de AdS_4 están relacionadas por transformaciones de coordenadas locales, las correspondientes teorías gauge duales no son físicamente equivalentes (por ejemplo, en el caso $k = 1$ existen transiciones de fase Hawking-Page, pero no para $k = 0$). Esto es debido al hecho de que diferentes foliaciones tipo espacio de la geometría del background conducen a diferentes definiciones

²El grupo conforme del espacio-tiempo de Minkowski es el grupo de invariancia del cono de luz, en otras palabras, todas las transformaciones que dejan $ds^2 = 0$ invariante

de la coordenada temporal (y del Hamiltoniano) del sistema cuántico dual.

Las coordenadas de Poincaré (2.32), cubren sólo una parte del espacio-tiempo AdS_4 , el espacio-tiempo de Minkowski aparece de forma natural como el borde conforme. Las isometrías finitas de AdS_4 mapean el borde $z = 0$ a sí mismas y, por otra parte, actúan como transformaciones conformes en el borde. En particular, la transformación $(z, t, x, y) \leftarrow \lambda(z, t, x, y)$, la cual deja la métrica (??) invariante, actúa como la dilatación (transformación de escala) en el borde. Dado que el espacio-tiempo AdS no es globalmente hiperbólico, uno tiene que imponer las condiciones de borde. Dentro de la dualidad AdS/CFT, varias deformaciones de las condiciones de borde de AdS se interpretan como duales a las deformaciones de la CFT. Es bien sabido [44, 45] que un escalar de la masa arbitraria en AdS puede tener ambos modos normalizable y no normalizable. Se ha demostrado en [46, 47] que los modos normalizables describen las fluctuaciones en el bulk y los modos no normalizables corresponden a operadores de inserción en la teoría dual del campo en el borde. Estamos interesados en el caso en que ambos modos son normalizables:

$$m_{BF}^2 + \frac{1}{l^2} > m^2 \geq m_{BF}^2, \quad m_{BF}^2 = -\frac{9}{4l^2} \quad (5.3)$$

donde m_{BF}^2 es la cota de BF (5.3) en cuatro dimensiones. En lo que sigue mostramos una breve revisión de las condiciones de borde que se adaptan a un campo escalar con masa conforme. Estamos interesados en la acción (4.34), donde $V(\phi)$ es el potencial escalar, $\kappa = 8\pi G$ con G la constante gravitacional de Newton, y el último término es el término de borde de Gibbons-Hawking. Aquí, h es el determinante de la métrica del borde y K es la traza de la curvatura extrínseca. Las ecuaciones de movimiento para el campo escalar y la métrica fueron dadas en (3.36) y (3.40), donde el tensor de stress del campo escalar es (3.41). Trabajamos con el ansatz general

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\Sigma_k^2. \quad (5.4)$$

Como se demostró por primera vez en tres dimensiones [35], y luego se generalizó a cuatro y más dimensiones [20, 34, 36, 40], en presencia de campos escalares las condiciones de borde estándares AdS son modificadas. Uno puede obtener el fall-off consistente para la componente métrica g_{rr} considerando las ecuaciones de movi-

miento y el fall-off del campo escalar. Una discusión general para cualquier masa del campo escalar en el rango (5.3) se puede encontrar en [34], pero en este trabajo nos concentraremos en el caso concreto de masa conforme en cuatro dimensiones $m^2 = -2l^{-2}$. Empezamos con el potencial³

$$V(\phi) = -\frac{3}{\kappa l^2} - \frac{\phi^2}{l^2} + O(\phi^4). \quad (5.5)$$

El fall-off del campo escalar en este caso es

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + O(r^{-3}). \quad (5.6)$$

Con el fin de acomodar agujeros negros se considera el siguiente comportamiento asintótico para los coeficientes métricos, $N(r)$ y $S(R)$

$$N(r) = -g_{tt} = \frac{r^2}{l^2} + k - \frac{\mu}{r} + O(r^{-2}), \quad (5.7)$$

$$S(r) = r^2 + O(r^{-2}). \quad (5.8)$$

Ahora, utilizamos la combinación de las ecuaciones de movimiento (3.40), $E_t^t - E_r^r = 0$, de la que obtenemos

$$NS'^2H - 2NS''HS + (NH)'S'S - 2\kappa NHS^2\phi'^2 = 0 \quad (5.9)$$

y entonces

$$H(r) = g_{rr} = \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^4}{r^4} \left(-k - \frac{\alpha^2 \kappa}{2l^2} \right) + \frac{l^5}{r^5} \left(\frac{\mu}{l} - \frac{4\kappa\alpha\beta}{3l^3} \right) + O(r^{-6}). \quad (5.10)$$

La razón por la que desemos obtener el fall-off de g_{rr} de esta manera es por que la masa Hamiltoniana se puede leer de él — si hay una contribución del campo escalar a la masa, uno debe ser capaz de identificarla en g_{rr} . A partir de ahora, se utilizará

³Se verifica inmediatamente que este potencial evade el teorema de no-pelo. Además la teoría es tal que $V(0) = -3/\kappa l^2$, lo que significa que tiene como vacío a AdS.

la notación genérica para la expansión de g_{rr} como

$$g_{rr} = \frac{l^2}{r^2} + \frac{al^4}{r^4} + \frac{bl^5}{r^5} + O(r^{-6}) , \quad (5.11)$$

donde $a = -k - \frac{\kappa\alpha^2}{2l^2}$ y $b = \frac{\mu}{l} - \frac{4\kappa\alpha\beta}{3l^3}$. En este punto, es interesante investigar que cuando las condiciones asintóticas son AdS invariantes y el Hamiltoniano está bien definido. Parece que, para una relación funcional especial de los modos del campo escalar α y β , ambas condiciones se cumplen. Esto se hizo de manera explícita en [20, 34] y aquí sólo presentamos el resultado:

$$\beta = C\alpha^2. \quad (5.12)$$

Curiosamente, también se puede obtener un Hamiltoniano finito cuando la simetría conforme del borde se rompe. Un análisis similar se puede hacer para la llamada *rama logarítmica* [36]. En lo que sigue nos gustaría analizar cuidadosamente este caso y presentar detalles que se van a utilizar en las siguientes secciones.

Es bien sabido que una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos soluciones linealmente independientes. Cuando la relación de las raíces de la ecuación indicial es un número entero, la solución puede desarrollar una rama logarítmica. Esto es exactamente lo que ocurre cuando el campo escalar satura la cota de BF, en cuyo caso el fall-off contiene un término logarítmico [36]. Sin embargo, estamos interesados en un campo escalar de masa conforme $m^2 = -2l^{-2}$. Para obtener la rama logarítmica, un término cúbico en la expansión asintótica del potencial del campo escalar es necesario [34]

$$V(\phi) = -\frac{3}{\kappa l^2} - \frac{\phi^2}{l^2} + \lambda\phi^3 + O(\phi^4) , \quad (5.13)$$

de manera que el fall-off del campo escalar a considerar es

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma \ln(r)}{r^2} + O(r^{-3}) . \quad (5.14)$$

Para obtener el fall-off de g_{rr} usamos el mismo fall-off para las otras componentes de la métrica y la misma combinación de las ecuaciones de movimiento como en la

rama no-logarítmica, $E_t^t - E_r^r = 0$. Obtenemos

$$H(r) = g_{rr} = \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^4}{r^4} \left(-k - \frac{\kappa\alpha^2}{2l^2} \right) + \frac{l^5}{r^5} \left(\frac{\mu}{l} - \frac{4\kappa\alpha\beta}{3l^3} + \frac{2\kappa\alpha\gamma}{9l^3} \right) + \frac{l^5 \ln r}{r^5} \left(-\frac{4\kappa\alpha\gamma}{3l^3} \right) + O \left[\frac{\ln(r)^2}{r^6} \right]. \quad (5.15)$$

Utilizando de nuevo la notación genérica para la expansión asintótica de g_{rr}

$$H(r) = \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^4 a}{r^4} + \frac{l^5 b}{r^5} + \frac{l^5 c \ln r}{r^5} + O \left[\frac{\ln(r)^2}{r^6} \right], \quad (5.16)$$

identificamos los coeficientes relevantes como

$$a = -k - \frac{\alpha^2 \kappa}{2l^2}, \quad b = \frac{\mu}{l} - \frac{4\kappa\alpha\beta}{3l^3} + \frac{2\kappa\alpha\gamma}{9l^3}, \quad c = -\frac{4\kappa\gamma\alpha}{3l^3}. \quad (5.17)$$

Ahora, vamos a ver cuando el fall-off del campo escalar que hemos considerado es compatible con su ecuación de movimiento:

$$\partial_r \left(\frac{\phi' S \sqrt{N}}{\sqrt{H}} \right) - S \sqrt{N} H \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (5.18)$$

En la región asintótica, $r \rightarrow \infty$, esta ecuación viene a ser

$$\frac{3\alpha^2 l^2 \lambda + \gamma}{l^2} + O(r^{-1}) = 0, \quad (5.19)$$

y de esta forma, el coeficiente de γ esta fijado por α as $\gamma = -3l^2 \lambda \alpha^2$ (o, usando la notación que se usaremos más adelante, $\gamma = C_\gamma \alpha^2$, donde $C_\gamma = -3l^2 \lambda$). Este resultado es importante porque, como veremos en breve, también forma parte de las condiciones que preservan la simetría conforme del borde. El último paso en nuestra derivación es investigar cuando las condiciones de borde se preservan dentro de la simetría asintótica AdS. El correspondiente vector de Killing asintótico $\xi^\mu = (\xi^r, \xi^m)$ es

$$\begin{aligned} \xi^r &= r\eta^r(x^m) + O(r^{-1}), \\ \xi^m &= O(1), \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde $\{m\}$ es un índice que para el tiempo y las coordenadas angulares. El fall-off

del campo escalar debe ser invariante dentro de las simetrías asintóticas AdS y así obtenemos:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \xi^\mu \partial_\mu \phi(x) = \frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{r^2} + \frac{\gamma' \ln(r)}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (5.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \eta^r \alpha + \xi^m \partial_m \alpha, \\ \beta' &= \beta - \eta^r (2\beta - \gamma) + \xi^m \partial_m \beta, \\ \gamma' &= \gamma - 2\gamma \eta^r + \xi^m \partial_m \gamma. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si los coeficientes de la serie (5.21) están funcionalmente relacionados, $\beta = \beta(\alpha, x^m)$ y $\gamma = \gamma(\alpha, x^m)$, la simetría conforme en el borde fija la relación funcional entre los coeficientes de modo que las ecuaciones anteriores son compatibles. Se puede realizar una expansión de Taylor de γ' y β' para obtener:

$$\alpha' \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \gamma' = 0 = \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \gamma + \eta^r \left(2\gamma - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) + \xi^m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x^m} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial \gamma}{\partial x^m} \right) \quad (5.23)$$

y

$$\alpha' \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - \beta' = 0 = \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - \beta + \eta^r \left(2\beta - \gamma - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) + \xi^m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x^m} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \beta}{\partial x^m} \right) \quad (5.24)$$

Considerando el hecho de que η^r y ξ^m son independientes, conseguimos de (5.23) que $2\gamma = \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$, lo que implica que $\gamma = C_\gamma \alpha^2$. Este es el resultado obtenido antes de la ecuación de movimiento para el campo escalar. De la integración (5.24) obtenemos

$$\beta(\alpha) = (-C_\gamma \ln(\alpha) + C) \alpha^2. \quad (5.25)$$

Si $C_\gamma = 0$, el resultado coincide con la condición que se encuentra para la rama no logarítmica (5.12). Una vez más, se puede obtener un Hamiltoniano finito incluso si la invariancia conforme se rompe. Una formulación precisa de la dualidad AdS/CFT [11] se propuso en [13, 15] y fue desarrollado para deformaciones multi-traza en [42].

Las observables en el lado de la teoría del campo de la dualidad son las funciones de correlación de los operadores invariantes gauge, que están compuestos de campos elementales. Cualquier campo en supergravedad ϕ corresponde a un operador O en la teoría del campo en el borde. La dualidad relaciona la funcional generadora (generatriz) de funciones de correlación del operador O con la función de partición de cuerdas/gravedad en el espacio AdS con las condiciones de borde que se imponen a las excitaciones en el bulk. En nuestro caso, los campos relevantes en el bulk son el gravitón (perturbaciones métricas) y el campo escalar. Los operadores correspondientes en la teoría del campo dual son el tensor de stress de energía $T_{\mu\nu}$ de la teoría dual del campo y un operador escalar de dimensión Δ , respectivamente. Consideremos un campo escalar masivo. Al resolver la ecuación de movimiento cerca de la frontera, se obtiene:

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{r^{\Delta_-}} + \frac{\beta}{r^{\Delta_+}} + \dots \quad (5.26)$$

donde α y β son las componentes relevantes y sub-relevantes de la expansión asintótica del campo escalar y $\Delta_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + m^2 l^2}$. Dependiendo del valor de la masa, los dos modos (en la sección de Lorentz) puede ser divergente o finito. Por ejemplo, para una masa cuadrado-positiva $m^2 > 0$ el modo de β es divergente en el interior y finito en el borde y el modo α es divergente en el borde pero finito en el interior. Entonces, el modo β corresponde a la fuente de las corrientes en la teoría dual del borde. Por otro lado, activando el modo de α , la geometría del bulk es modificada, mientras la estructura AdS cerca del borde puede ser preservada — este es el tipo de deformación que nos interesa en este trabajo. Puesto la solución de gravedad en el bulk cambia, uno tiene que realizar un análisis linealizado alrededor del *nuevo* background para calcular las funciones de correlación. Esto es exactamente lo que sucede cuando se cambia el vacío en torno al cual se expande para obtener las cantidades físicas. Entonces, en la teoría dual, se da una situación similar: la teoría del campo dual se expande alrededor de un vacío con valores expectación de vacío no triviales (VEV) para los operadores apropiados. De hecho, en el diccionario estandar AdS/CFT [46, 47], una solución para la gravedad en el bulk con un dilatón no trivial corresponde en la teoría del campo dual a la inserción de una fuente para un operador de dimensión conforme Δ_- , VEV α , y la corriente $\beta = J(x)$.

El espectro de los operadores de la teoría del campo dual incluye todas las can-

tidades invariantes gauge, es decir, el producto de las trazas de los productos de los campos (o la suma de estos productos). Los operadores de una sola traza en la teoría del campo pueden ser identificados con los estados de una sola partícula en AdS, mientras que los operadores multi-traza corresponden a los estados de múltiples partículas. La importancia de las deformaciones multi-traza desde un punto de vista del lado de la gravedad se investigó en [20, 42]. Las condiciones de borde mixtas juegan un papel importante, ya que corresponden a una deformación de la acción de la teoría del campo dada por ⁴

$$I_{CFT} \rightarrow I_{CFT} - \int d^3x W[\mathcal{O}(x)] \quad (5.27)$$

donde $\beta(x) = \frac{dW}{d\alpha(x)}$, y W es fijada por las condiciones de borde del lado de la teoría de cuerdas.

5.2. Contratérminos y acción regularizada

En la sección 4.1 mostramos a manera de ejemplo, el análisis y los cálculos para el agujero negro de Schwarzschild-AdS. En esta sección mostramos una generalización al caso de campos escalares mínimamente acoplados a la gravedad. En el apéndice A.1 se muestran algunos detalles de los cálculos en D -dimensiones del espacio-tiempo, los cuales se reducen a este caso especial fijando $D = 3 + 1$.

5.2.1. Principio variacional

Nuestro objetivo es construir contratérminos (términos de borde) que regularizan la acción de forma que el principio variacional este bien definida. Los términos de borde no cambian las ecuaciones de movimiento y de esta forma estos pueden ser incorporados en la acción. Para conseguirlo, primero consideramos la acción (4.34) cuando el campo escalar esta apagado. En este caso, la acción tiene dos términos: la acción del bulk y término de superficie de Gibbons-Hawking necesario para asegurar que la variación de Euler-Lagrange este bien definida. La acción gravitacional

⁴Este es un ejemplo concreto de deformación, ver sección 2.3.3

calculada en esta forma (aún a tree-level) contiene divergencias que surgen por integrar sobre el volumen infinito del espacio-tiempo. En el contexto de AdS/CFT, la divergencias infrarrojas (IR) de la gravedad son interpretadas como las divergencias ultravioletas (UV) de dual CFT. Es bien conocido, que la forma de calcular la acción del bulk sin introducir un background es adicionar contratérminos locales a la acción, los cuales eliminan todas las divergencias, dejando una acción finita que corresponde a la función de partición del CFT. Para gravedad AdS puro en cuatro dimensiones, la acción debe ser suplementada con el siguiente contratérmino [26]⁵:

$$I_g^{ct} = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{\mathcal{R}l}{2} \right). \quad (5.28)$$

Donde, h_{ab} es la métrica inducida en el borde y \mathcal{R} es el escalar de Ricci. En presencia del campo escalar, este contratérmino no es suficiente para cancelar las divergencias en la acción. Para este caso, un término de borde adicional que depende del campo escalar es necesario, concretamente I_ϕ . Estudiaremos el principio variacional de la siguiente acción:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right) + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{\mathcal{R}l}{2} \right) + I_\phi \quad (5.29)$$

para un campo escalar de masa conforme $m = -2l^{-2}$. En algunos trabajos previos (por ejemplo, ver [48, 49]), el siguiente contratérmino que produce una acción finita para la rama no-logarítmica fue propuesto:

$$I_\phi^{ct} = \frac{1}{6\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\phi n^\nu \partial_\nu \phi - \frac{\phi^2}{2l} \right). \quad (5.30)$$

Sin embargo, esta es problemática porque no es intrínseco al borde y también, para condiciones de borde mixtas, el principio variacional no se satisface. En su reemplazo, proponemos nuevos contratérminos para las ramas, logarítmica y no-logarítmica, de forma que la acción es finita y el principio variacional esta bien definido $\delta I = 0$. Los contratérminos intrínsecos son construidos de tal forma que sean compatibles con el método Hamiltoniano, en el sentido en el que los resultados concuerdan para cualquier condición de borde. Comenzaremos con la rama no-logarítmica con el término

⁵Incluso para el agujero negro de Schwarzschild-AdS, ver la sección 4.1

de borde asociado al campo escalar dado por

$$I_\phi = - \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{\phi^2}{2l} + \frac{W(\alpha)}{l\alpha^3} \phi^3 \right]. \quad (5.31)$$

Entonces, usando la expansión en el borde de la métrica y el campo escalar, la variación de la acción da un término de borde evaluada en el cutoff r :

$$\delta I = \int d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{r} \left(-\sqrt{g^{rr}} \phi' - \frac{\phi}{l} - \frac{3W(\alpha)\phi^2}{l\alpha^3} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{d^2W(\alpha)}{d\alpha^2} \right) + \left(\frac{3W(\alpha)}{\alpha} - \beta \right) \frac{\phi^3}{l\alpha^3} \right] \delta\alpha. \quad (5.32)$$

Es fácil mostrar que el principio variacional esta bien definido cuando el cutoff tiende al infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \delta I = 0. \quad (5.33)$$

Para la rama logarítmica debemos trabajar con el siguiente contratérmino para el campo escalar:

$$I_\phi = - \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{\phi^2}{2l} + \frac{\phi^3}{l\alpha^3} \left(W - \frac{\alpha\gamma}{3} \right) - \frac{\phi^3 C_\gamma}{3l} \ln \left(\frac{\phi}{\alpha} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Usando la expansión asintótica de la métrica y el campo escalar, también se muestra que el principio variacional esta bien definido para condiciones de borde arbitrarias cuando el cutoff en el término de superficie tiende a infinito.

5.2.2. Acción regularizada y variables termodinámicas

Evaluando la acción nos da resultados formalmente divergentes. nos gustará mostrar que, de hecho, que todas la divergencias pueden ser eliminadas usando los contratérminos propuestos en la sección previa, de tal forma que la acción queda finita. Usaremos la técnica estadar de la rotación de Wick de la dirección temporal $t = i\tau$. Entonces, la temperatura esta relacionada a la periodicidad del tiempo Euclídeo τ ($\Delta\tau = \beta = 1/T$) y la contribución relevante a la energía libre esta deteriminada por la evaluación de la acción Euclídea. La acción tiene cuatro términos, la parte del bulk I_{bulk}^E , el término de superficie Gibbons-Hawking I_{GH}^E , y dos contratérminos del borde (I_g^{ct} , I_ϕ^{ct}): $I = I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} + I_\phi^{ct}$. Primero calculamos estas contribuciones a la rama no-logarítmica.

Ya que estudiaremos la propiedades de la familia de soluciones exactas de agujeros negros con pelo⁶, comenzamos con el siguiente ansatz para la métrica

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\Sigma_k^2 \right]. \quad (5.35)$$

Expresiones concretas para las funciones $\Omega(x)$ y $f(x)$ fueron presentadas en la sección 3.4.2. Los cálculos en el (t, x, Σ) sistema de coordenadas (5.35) estan relacionados por una simple transformación de coordenadas al sistema (5.4). En lo que sigue, x_b y r_b denotan el borde y x_+ , r_+ el horizonte. La acción Euclidea on-shell del bulk puede ser escrita como

$$I_{bulk}^E = \int_0^{1/T} d\tau \int_{x_+}^{x_b} d^3x \sqrt{g^E} V(\phi) = \frac{\sigma_k}{2\eta\kappa T} \frac{d(\Omega f)}{dx} \Big|_{x_+}^{x_b}, \quad (5.36)$$

donde σ_k es el área de Σ_k (por ejemplo, para $k = 1$, $\sigma_1 = 4\pi$)⁷ y g^E es la métrica en la sección Euclidea. Los dos sistemas de coordenadas (t, x, Σ_k) y (t, r, Σ_k) estan relacionadas por

$$\Omega(x) \rightarrow S(r), \quad f(x) \rightarrow \frac{N(r)}{S(r)}, \quad dx \rightarrow \frac{\sqrt{NH}}{\eta S} dr \quad (5.37)$$

y de esta forma, podemos reescribir la integral del bulk en el sistema de coordenadas (t, r, Σ_k) como

$$I_{bulk}^E = \frac{\sigma_k}{2\kappa T} \frac{S}{\sqrt{NH}} \frac{dN}{dr} \Big|_{r_+}^{r_b}. \quad (5.38)$$

Ahora calculamos el termino de Gibbons-Hawking. Consideramos una hiper-superficie tipo-tiempo (timelike) $x = x_0$. Entonces, la métrica inducida $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$, normal, curvatura extrínseca, y su traza $K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ son

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b = \Omega(x_0) \left[-f(x_0) dt^2 + d\Sigma_k \right], \quad (5.39)$$

⁶Ver la sección 3.4.2

⁷Para los casos de $k = -1, 1$ se trabaja con densidades, por ejemplo la densidad de energía.

$$n_a = \frac{\delta_a^x}{\sqrt{g^{xx}}} \Big|_{x=x_0}, \quad K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{xx}}}{2} \partial_x g_{ab} \Big|_{x=x_0}, \quad K = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{1/2} \left[\frac{(\Omega f)'}{\Omega f} + \frac{2\Omega'}{\Omega} \right] \Big|_{x_0}. \quad (5.40)$$

Usando las ecuaciones de transformación (5.37), la contribución de este término puede ser reescrita como

$$I_{GH}^E = -\frac{\sigma_k}{\kappa T} \frac{\Omega f}{2\eta} \left[\frac{(\Omega f)'}{\Omega f} + \frac{2\Omega'}{\Omega} \right] \Big|_{x_b} = -\frac{\sigma_k}{2T\kappa} \left(\frac{S}{\sqrt{NH}} \frac{dN}{dr} + \frac{2N}{\sqrt{NH}} \frac{dS}{dr} \right) \Big|_{r_b}. \quad (5.41)$$

La contribución del contratérmino gravitacional es

$$I_g^{ct} = \frac{2\sigma_k}{\kappa T l} \left(\Omega^{3/2} f^{1/2} + \frac{l^2 k}{2} f^{1/2} \Omega^{1/2} \right) \Big|_{x_b} = \frac{2\sigma_k}{\kappa T l} S \sqrt{N} \left(1 + \frac{l^2 k}{2S} \right) \Big|_{r_b}. \quad (5.42)$$

Usando la fórmula general para la temperatura

$$T = \frac{N'}{4\pi\sqrt{NH}} \Big|_{r_+}, \quad (5.43)$$

uno puede escribir la suma de estas contribuciones en la acción total como

$$I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} = -\frac{1}{T} \left[\frac{\sigma_k S(r_+) T}{4G} \right] - \frac{\sigma_k}{2\kappa T} \left[\frac{2N}{\sqrt{NH}} \frac{dS}{dr} - \frac{4}{l} S \sqrt{N} \left(1 + \frac{l^2 k}{2S} \right) \right] \Big|_{r_b}. \quad (5.44)$$

Para el fall-off del campo escalar de masa conforme $m^2 = -2l^{-2}$ dada en (5.6) y con el fall-off de la métrica (5.7) y (5.11), la acción Euclidea viene a ser

$$I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} = -\frac{\mathcal{A}}{4G} - \frac{\sigma_k}{T} \left(-\frac{\mu}{\kappa} + \frac{4\alpha\beta}{3l^2} + \frac{r\alpha^2}{2l^2} \right) \Big|_{r_b}. \quad (5.45)$$

Aquí, $\mathcal{A} = \sigma_k S(r_+)$ es el área del horizonte. Ahora es claro que el contratérmino gravitacional no es suficiente para eliminar las divergencias en el borde $r_b \rightarrow \infty$, pero esta nueva divergencia lineal puede ser regularizada con el siguiente contratérmino que depende del campo escalar:

$$I_\phi^{ct} = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h^E} \left[\frac{\phi^2}{2l} + \frac{W(\alpha)}{l\alpha^3} \phi^3 \right] = \frac{\sigma_k}{T} \left(\frac{W}{l^2} + \frac{\alpha\beta}{l^2} + \frac{r\alpha^2}{2l^2} \right) \Big|_{r_\infty}. \quad (5.46)$$

La acción Euclidea renormalizada puede ser reescrita usando $\beta = dW/d\alpha$ como

$$I^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} + I_\phi^{ct} = -\frac{\mathcal{A}}{4G} + \frac{\sigma_k}{T} \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} \right) \right] \quad (5.47)$$

y de esta forma, la energía libre viene a ser

$$F = I^E T = M - TS. \quad (5.48)$$

Las relaciones termodinámicas nos dan la misma masa y entropía para los agujeros negros:

$$M = -T^2 \frac{\partial I^E}{\partial T} = \sigma_k \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} \right) \right] \quad (5.49)$$

y

$$S = -\frac{\partial(I^E T)}{\partial T} = \frac{\mathcal{A}}{4G}. \quad (5.50)$$

Un cálculo similar puede ser realizado para la rama logarítmica. Trabajaremos de nuevo con un campo escalar de masa conforme $m^2 = -2l^{-2}$ con un fall-off (5.14) para el cual la métrica fall-off es (5.15). Si trabajamos con el contratérmino (5.46), obtenemos

$$I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} + I_\phi^{ct} = -\frac{\mathcal{A}}{4G} + \frac{\sigma_k}{T} \left\{ \frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left[W(\alpha) - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} + \frac{2\alpha\gamma}{9} - \frac{\alpha\gamma}{3} \ln r \right] \right\} \quad (5.51)$$

y vemos que aún hay una divergencia logarítmica. Por consiguiente, uno debe considerar una nueva contribución del campo escalar que cancele esa divergencia:

$$\bar{I}_\phi^{ct} = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h^E} \left\{ \frac{\phi^3 \gamma}{3\alpha^2 l} \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\phi} \right) - 1 \right] \right\} = \frac{\sigma_k}{T} \left[-\frac{\alpha\gamma}{3l^2} + \frac{\alpha\gamma \ln r}{3l^2} + O(r^{-1} \ln r) \right]. \quad (5.52)$$

También obtenemos una acción finita para la rama logarítmica

$$I^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^{ct} + I_\phi^{ct} + \bar{I}_\phi^{ct} = -\frac{\mathcal{A}}{4G} + \frac{\sigma_k}{T} \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right], \quad (5.53)$$

donde $\gamma = C_\gamma \alpha^2$ y $C_\gamma = -3l^2 \lambda$. Las relaciones termodinámicas dan resultados co-

rectos:

$$M = -T^2 \frac{\partial I^E}{\partial T} = \sigma_k \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right] \quad (5.54)$$

y

$$S = -\frac{\partial(I^E T)}{\partial T} = \frac{\mathcal{A}}{4G}. \quad (5.55)$$

La simetría conforme del borde es preservada cuando $W(\alpha) = \alpha^3(C + l^2\lambda \ln \alpha)$.

5.3. Tensor de stress Brown-York

En la sección 4.2, presentamos el formalismo de Brown-York y sus interpretaciones en la teoría dual. A modo de ejemplo, mostramos los cálculos para el agujero negro Schwarzschild-AdS. En esta sección estudiaremos la generalización de cuando los campos escalares están presentes.

En la sección anterior vimos que el campo escalar tiene contribución a la acción la misma que nos da un buen principio variacional $\delta I = 0$. De esta acción suplementada con los términos de borde del campo escalar, construiremos el tensor de stress de Brown-York, la cual tiene contribución del campo escalar.

Un procedimiento similar puede ser usado para los agujeros negros con pelo, pero uno de los términos de borde relacionados con el campo escalar. En el caso de la rama no-logarítmica, la acción completa es (5.29) y el término escalar fue dada en (5.30), donde G_{ab} es el tensor de Einstein para la foliación (4.25) dado por $G_{ab} = \delta_a^t \delta_b^t N k / S$. El tensor de stress regularizado es

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} \left(K_{ab} - h_{ab} K + \frac{2}{l} h_{ab} - l G_{ab} \right) - \frac{h_{ab}}{l} \left[\frac{\phi^2}{2} + \frac{W(\alpha)}{\alpha^3} \phi^3 \right]. \quad (5.56)$$

Entonces, las componentes del tensor de stress son

$$\begin{aligned} \tau_{tt} &= \frac{l}{R} \left[\frac{\mu}{8\pi G l^2} + \frac{1}{l^4} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} \right) \right] + O(R^{-2}), \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{l}{R} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} \right) \right] + O(R^{-2}), \\ \tau_{\phi\phi} &= \frac{l \sin^2 \theta}{R} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} \right) \right] + O(R^{-2}). \end{aligned} \quad (5.57)$$

El tensor de stress de la teoría dual del campo puede ser puesta en la forma similar a la del agujero negro de Schwarzschild-AdS:

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \frac{3\mu}{16\pi G l^2} \delta_a^0 \delta_b^0 + \frac{\gamma_{ab}}{l^2} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W(\alpha) - \frac{\alpha\beta}{3} \right) \right]. \quad (5.58)$$

La traza puede ser fácilmente calculada y obtenemos

$$\langle \tau^{dual} \rangle = -\frac{3}{l^4} \left[W(\alpha) - \frac{\alpha\beta}{3} \right]. \quad (5.59)$$

A diferencia del agujero negro de Schwarzschild-AdS, para los agujeros negros con pelo existen diferentes tipos de condiciones de borde, concretamente esta preserva o no la simetría conforme. Como se esperaba, cuando la simetría conforme es preservada, $W = C\alpha^3$, la traza del tensor de stress desaparece $\langle \tau^{dual} \rangle = 0$ y no hay anomalía conforme. Un procedimiento similar pero más complicado puede ser aplicado a la rama logarítmica. La acción (5.29) tiene una nueva contribución (5.52) que cancela la divergencia logarítmica, y el nuevo tensor de stress cuasilocal regularizado es

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} \left(K_{ab} - h_{ab} K + \frac{2}{l} h_{ab} - l G_{ab} \right) - \frac{h_{ab}}{l} \left[\frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{\alpha^3} \left(W - \frac{\alpha\gamma}{3} \right) + \frac{\phi^3 \gamma}{3\alpha^2} \ln \left(\frac{\alpha}{\phi} \right) \right], \quad (5.60)$$

cuyas componentes son

$$\begin{aligned} \tau_{tt} &= \frac{l}{R} \left[\frac{\mu}{8\pi G l^2} + \frac{1}{l^4} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right] + O \left[\frac{(\ln R)^3}{R^2} \right], \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{l}{R} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right] + O \left[\frac{(\ln R)^3}{R^2} \right], \\ \tau_{\phi\phi} &= \frac{l \sin^2 \theta}{R} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right] + O \left[\frac{(\ln R)^3}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

El tensor de stress de la teoría dual viene a ser

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \frac{3\mu}{16\pi G l^2} \delta_a^0 \delta_b^0 + \frac{\gamma_{ab}}{l^2} \left[\frac{\mu}{16\pi G} - \frac{1}{l^2} \left(W(\alpha) - \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \right]. \quad (5.62)$$

Su traza es

$$\langle \tau^{dual} \rangle = -\frac{3}{l^4} \left(W - \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{\alpha\gamma}{9} \right) \quad (5.63)$$

y, como se esperaba, esta desaparece para las condiciones de borde que preserva la condiciones de borde que preserva la simetría conforme:

$$\langle \tau^{dual} \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = -3l^2 \lambda \alpha^2, \quad W(\alpha) = \alpha^3 [C + l^2 \lambda \ln \alpha]. \quad (5.64)$$

5.4. Masa Hamiltoniana

Mediante el formalismo Hamiltoniano calculamos la masa o energía del agujero negro y mostraremos la contribución no-trivial del campo escalar. Nos centramos en el caso concreto de teorías campos escalares mínimamente acoplados a la gravedad y de masa conforme: $m^2 = -2/l^2$. Esta masa conforme es mayor que la masa de BF (Breitenlohner-Freedman) $m_{BF}^2 = -9/4l^2$ y esta por debajo de la cota unitaria: $m_{BF}^2 + 1/l^2 = -5/4l^2$,

$$-5/4l^2 > m^2 \geq -9/4l^2. \quad (5.65)$$

De esta forma ambos modos de la expansión (en la vecindad del borde $r \rightarrow \infty$) del campo escalar son normalizables

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + O(r^{-3}). \quad (5.66)$$

Mostamos la equivalencia de la masa holográfica (obtenida mediante el método de renormalización holográfica) y la masa Hamiltoniana. Finalmente vemos una aplicación concreta a la solución exacta de agujero negro con pelo.

5.4.1. Rama logarítmica y no-logarítmica

En la expansión del potencial como una serie de potencias en torno a $\phi = 0$, se demostró en [34] la ausencia de ramas logarítmicas en el comportamiento asintótico de la métrica y del campo escalar, es debido a que la serie no contiene un término cúbico. Este conjunto de condiciones asintóticas permite soluciones exactas de agujeros negros escalares [5, 6, 50]. El fall-off del campo escalar y la métrica en el infinito se obtuvo en la sección 5.1.

Ahora, evaluamos las expresiones generales (4.44) y (4.45) para configuraciones estáticas, usando las anteriores condiciones asintóticas. Consideramos el borde localizado en $r = \infty$. Integrando las ‘coordenadas angulares’, obtenemos la contribución gravitacional

$$\delta M_G = \frac{\sigma_k}{\kappa} [r\delta a + l\delta b + O(1/r)] \quad (5.67)$$

y la contribución del campo escalar

$$\delta M_\phi = \frac{\sigma_k}{l^2} [r\alpha\delta\alpha + \alpha\delta\beta + 2\beta\delta\alpha + O(1/r)] . \quad (5.68)$$

Mediante la adición de ambas contribuciones tenemos la variación de la masa

$$\delta M = \frac{\sigma_k}{\kappa l^2} [r(l^2\delta a + \kappa\alpha\delta\alpha) + l^3\delta b + \kappa(\alpha\delta\beta + 2\beta\delta\alpha) + O(1/r)] . \quad (5.69)$$

Es importante recordar que esta expresión para δM tiene sentido sólo en el caso cuando se cumplen las ligaduras Hamiltonianas. En el caso estático, solo hay una ligadura no trivial, $H_\perp = 0$, el cual para las condiciones asintóticas dadas anteriormente obtenemos

$$\frac{k+a}{\kappa} + \frac{\alpha^2}{2l^2} = 0 . \quad (5.70)$$

La divergencia lineal en (5.69) es removida por el reemplazo de (5.70) en (5.69). Entonces, la variación asintótica de la masa queda finita

$$\delta M = \frac{\sigma_k}{\kappa l^2} [l^3\delta b + \kappa(\alpha\delta\beta + 2\beta\delta\alpha)] . \quad (5.71)$$

Para integrar las variaciones en (5.71), las condiciones de borde para el campo escalar son necesarias. En particular, la integración de (5.71) requiere una relación funcional

entre α y β . Si definimos $\beta = dW(\alpha)/d\alpha$, la masa del espacio tiempo está dada por

$$M = \sigma_k \left[\frac{lb}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(\alpha \frac{dW(\alpha)}{d\alpha} + W(\alpha) \right) \right] . \quad (5.72)$$

Observamos que en la masa (5.72) se define salvo una constante. Esta constante se fija a cero con el fin de fijar una masa cero para el espacio-tiempo AdS a nivel local debido a que en cuatro dimensiones no hay energía Casimir.

Para obtener la rama logarítmica, es necesario usar el potencial auto-interactuante (5.13) de tal forma que el campo escalar a considerar es (5.14). La ligadura Hamiltoniana $H_{\perp} = 0$ se satisface si (5.70) y

$$\frac{lc}{\kappa} - 4\alpha^3\lambda = 0 \quad (5.73)$$

se cumplen. Ahora, evaluamos (4.44) y (4.45). En este caso encontramos

$$\delta M_G = \left\{ \frac{l\delta b}{\kappa} + \frac{\delta a}{\kappa} r + \frac{l\delta c}{\kappa} \ln(r) + O\left(\frac{\ln(r)^2}{r}\right) \right\} \sigma_k \quad (5.74)$$

y

$$\begin{aligned} \delta M_{\phi} = & \left[\frac{\alpha\delta\beta + 2\beta\delta\alpha + 3\alpha^2 l^2 \lambda \delta\alpha}{l^2} + r \frac{\alpha\delta\alpha}{l^2} \right. \\ & \left. - 12\lambda\alpha^2 \delta\alpha \ln(r) + O\left(\frac{\ln(r)^2}{r}\right) \right] \sigma_k . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Ambas contribuciones contienen divergencias lineales y logarítmicas. Sumando (5.74) y (5.75), las divergencias lineales se cancelan en virtud de (5.70) y las divergencias logarítmicas desaparecen considerando (5.73). De este modo, obtenemos una expresión finita para la variación de la masa,

$$\delta M = \left[\frac{l\delta b}{\kappa} + \frac{\alpha\delta\beta + 2\beta\delta\alpha + 3\alpha^2 l^2 \lambda \delta\alpha}{l^2} \right] \sigma_k . \quad (5.76)$$

Nuevamente, necesitamos condiciones de borde, una relación funcional entre α y β , para integrar δM . Consideramos la relación general $\beta = \frac{dW}{d\alpha}$, de forma que la masa

Hamiltoniana esta dada por

$$M = \left[\frac{lb}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(\alpha \frac{dW}{d\alpha} + W(\alpha) + \alpha^3 l^2 \lambda \right) \right] \sigma_k . \quad (5.77)$$

La masa puede estar relacionada con el primer término sub-relevante de g_{tt} usando (5.17). Así, la masa se puede ser escrita como

$$M = \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W(\alpha) - \frac{1}{3} \alpha \frac{dW}{d\alpha} + \frac{1}{3} \alpha^3 l^2 \lambda \right) \right] \sigma_k . \quad (5.78)$$

Por lo tanto, la expresión $M = \mu \sigma_k \kappa^{-1}$ es obtenida sólo para $\alpha = 0$ o

$$W(\alpha) = \alpha^3 [C + l^2 \lambda \ln(\alpha)] , \quad (5.79)$$

que corresponden con las condiciones de borde AdS invariantes [34].

5.4.2. Equivalencia entre masa holográfica y masa hamiltoniana

Armado con el formalismo de Brown-York suplementado con contratérminos, se puede obtener la energía de agujeros negros con pelo. La métrica del borde se puede escribir, al menos localmente, en forma similar a ADM. Siempre y cuando la geometría del borde tiene una isometría generada por el vector de Killing $\xi^a = (\partial_t)^a$, la energía es, de forma usual, la carga conservada. En concreto, vamos a utilizar las coordenadas (t, r, σ_k) con la métrica (5.4) y la foliación (4.25) parametrizada como

$$d\Sigma_k^2 = \frac{dy^2}{1 - ky^2} + (1 - ky^2) d\phi^2 . \quad (5.80)$$

La energía

$$E = \int d\sigma^i \tau_{ij} \xi^j = \int dy d\phi S u^i \tau_{ij} \xi^j , \quad (5.81)$$

está asociada con la superficie $t = \text{constante}$, para el cual la métrica inducida es

$$ds^2 = \sigma_{ij} dx^i dx^j = S d\Sigma_k^2 , \quad (5.82)$$

con el vector normal $u^a = N^{-1/2}(\partial_t)^a$. Para la rama no-logarítmica, usando el tensor de stress quasilocal (B.3), se obtiene

$$E = \sigma_k \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} \right) \right]. \quad (5.83)$$

Con un cálculo similar para la rama logarítmica, pero con el tensor de stress quasilocal (5.60), se obtiene la siguiente energía del agujero negro con pelo:

$$E = \sigma_k \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{1}{3} \alpha \frac{dW}{d\alpha} - \frac{\alpha \gamma}{9} \right) \right] = \sigma_k \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{1}{3} \alpha \frac{dW}{d\alpha} - \frac{\alpha^3 C_\gamma}{9} \right) \right]. \quad (5.84)$$

Esto muestra un perfecto acuerdo con la masa Hamiltoniana incluso si la simetría conforme se rompe en el borde — con ambos métodos es posible obtener una energía finita y los resultados coinciden. Sin embargo, la prescripción AMD [51] para el cálculo de la masa de un espacio-tiempo con pelo no es adecuado cuando el campo escalar rompe la invariancia asintótica anti-de Sitter [32].

Ejemplo para una solución exacta

Como ejemplo concreto, discutimos las condiciones de borde y algunas propiedades holográficas de las soluciones exactas de [5, 6]. Consideramos el siguiente potencial escalar mostrada anteriormente en la sección 3.4.2, y para evitar confusiones cambiamos de notación $\alpha \rightarrow \Upsilon$. Para algunos valores particulares del parámetro Υ , se convierte en una de las truncaciones de ω -deformed gauged $\mathcal{N}=8$ supergravedad [6, 52, 53]:

$$V(\phi) = \frac{\Lambda(\nu^2 - 4)}{6\kappa\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} e^{-\phi l_\nu(\nu+1)} + \frac{\nu + 1}{\nu - 2} e^{\phi l_\nu(\nu-1)} + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} e^{-\phi l_\nu} \right] \quad (5.85)$$

$$+ \frac{\Upsilon}{\kappa\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} \sinh \phi l_\nu(\nu + 1) - \frac{\nu + 1}{\nu - 2} \sinh \phi l_\nu(\nu - 1) + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} \sinh \phi l_\nu \right].$$

Utilizando el ansatz para la métrica (5.35), las ecuaciones de movimiento pueden ser integradas para el factor conforme (3.44) donde Υ , ν , κ y $\Lambda = -3l^{-2}$ son parámetros del potencial y η es una constante de integración. Todos ellos caracterizan la solución con pelo. Con esta elección del factor de conforme, es sencillo de obtener las

expresiones para el campo escalar ⁸

$$\phi(x) = l_\nu^{-1} \ln x \quad (5.86)$$

y la función métrica

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \Upsilon \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right] + \frac{x}{\Omega(x)} \quad (5.87)$$

donde $l_\nu^{-1} = \sqrt{(\nu^2 - 1)/2\kappa}$.

Para comparar con los resultados presentados en la sección anterior, debemos trabajar con las coordenadas canónicas de AdS. Vamos a discutir la rama $x \in (1, \infty)$ para el cual el campo escalar se define positivamente. Cambiamos la coordenada r de forma que la función delante de la sección transversal, $d\Sigma_k$, tiene la siguiente fall-off:

$$\Omega(x) = r^2 + O(r^{-3}) . \quad (5.88)$$

Esta elección está motivada por el hecho de que el término $O(r^{-2})$ genera un término lineal en el fall-off de Ω . Los tres primeros términos sub-relevantes son

$$x = 1 + \frac{1}{\eta r} + \frac{m}{r^3} + \frac{n}{r^4} + \frac{p}{r^5} + O(r^{-6}) \quad (5.89)$$

y pueden ser calculados teniendo en cuenta la expansión alrededor de $r = \infty$:

$$\Omega(x) = r^2 - \frac{24m\eta^3 + \nu^2 - 1}{12\eta^2} - \frac{24n\eta^4 - \nu^2 + 1}{12\eta^3 r} + \frac{720m^2\eta^6 - 480p\eta^5 + \nu^4 - 20\nu^2 + 19}{240\eta^4 r^2} + O(r^{-3}) . \quad (5.90)$$

Después de un cálculo sencillo obtenemos

$$x = 1 + \frac{1}{\eta r} - \frac{(\nu^2 - 1)}{24\eta^3 r^3} \left[1 - \frac{1}{\eta r} - \frac{9(\nu^2 - 9)}{80\eta^2 r^2} \right] + O(r^{-6}) . \quad (5.91)$$

Las siguientes expansiones asintóticas para las funciones métricas:

$$-g_{tt} = f(x)\Omega(x) = \frac{r^2}{l^2} + 1 + \frac{\Upsilon + 3\eta^2}{3\eta^3 r} + O(r^{-3}) , \quad (5.92)$$

⁸Estas fueron mostradas anteriormente en la sección 3.4.2

$$g_{rr} = \frac{\Omega(x)\eta^2}{f(x)} \left(\frac{dx}{dr} \right) = \frac{l^2}{r^2} - \frac{l^4}{r^4} - \frac{l^2(\nu^2 - 1)}{4\eta^2 r^4} - \frac{l^2(3\eta^2 l^2 + \Upsilon l^2 - \nu^2 + 1)}{3\eta^3 r^5} + O(r^{-6}) . \quad (5.93)$$

La expansión asintótica del campo escalar en estas coordenadas es

$$\phi(x) = l_\nu^{-1} \ln x = \frac{1}{l_\nu \eta r} - \frac{1}{2l_\nu \eta^2 r^2} - \frac{\nu^2 - 9}{24\eta^3 r^3} + O(r^{-4}) \quad (5.94)$$

y entonces, en la notación estandar, obtenemos $\alpha = 1/l_\nu \eta$, $\beta = -1/2l_\nu \eta^2$. Ambos modos son normalizables y, ya que $\beta = C\alpha^2$ con $C = -l_\nu/2$, la simetría conforme en el borde se preserva. Ahora, podemos calcular fácilmente la masa Hamiltoniana del sistema como se propuso en [32]

$$M = \sigma \left[\frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{l^2} \left(W - \frac{\alpha}{3} \frac{dW}{d\alpha} \right) \right] \quad (5.95)$$

y considerando $W = -l_\nu \alpha^3/6$, $\sigma = 4\pi$, y $l_\nu^{-1} = \sqrt{(\nu^2 - 1)}/2\kappa$ obtenemos

$$M = -\frac{\sigma}{\kappa} \left(\frac{3\eta^2 + \Upsilon}{3\eta^3} \right) , \quad (5.96)$$

que coincide con la masa holográfica. Finalizamos con la interpretación de estas soluciones con pelo dentro de la dualidad AdS/CFT. Es decir, puesto que $W = -l_\nu \alpha^3/6$, corresponde a la adición de una deformación de triple traza a la acción del borde como es (5.27) (ejemplos similares se pueden encontrar en [20, 54]):

$$I_{CFT} \rightarrow I_{CFT} + \frac{l_\nu}{6} \int d^3x \mathcal{O}^3 . \quad (5.97)$$

Para diferentes agujeros negros con pelo, los cuales estan caracterizados por el parámetro ν , la relación entre α y β no cambia por lo que hay deformaciones triple traza, pero con diferentes acoplamientos.

5.5. Discusión

Ya que esta sección contiene cálculos detallados e interpretaciones, presentamos algunas conclusiones generales.

El método de contratérminos [26], el cual fue obtenido en el contexto de la dualidad AdS/CFT inicialmente fue propuesto para soluciones asintóticamente AdS [55–57] y entonces fue generalizado a soluciones asintóticamente planas [58–65] e incluso a soluciones dS [66–69], aunque en los últimos dos casos la interpretación holográfica no es clara y generalmente es poco aceptada. Interesantemente, este método da el tensor de stress cuasilocal y las cargas conservadas, en una forma muy similar con la bien comprendida holografía de espacios-tiempo asintóticamente AdS.

Cuando la teoría contiene campos escalares, existe una diversidad de condiciones de borde mixtas que pueden ser impuestas, en particular las condiciones de borde que rompen la simetría conforme del borde. El método de renormalización holográfica [55–57, 70] que usa la expansión de Fefferman-Graham fue generalizado para condiciones de borde mixtas que corresponden a la rama no-logarítmica de las soluciones en [71].

En este trabajo construimos contratérminos explícitamente covariantes que son similares a las propuestas por Balasubramanian y Kraus [26] y generalizadas para teorías (potenciales moduli) que contienen además soluciones de rama logarítmica. Para construir estos contratérminos nos guiamos por el método Hamiltoniano que provee las condiciones de borde correctas (en particular, el fall-off del campo escalar) de tal forma que las cargas conservadas son finitas. También verificamos que el principio variacional para la acción gravitacional este bien definida. Puede que no sea una sorpresa de que la masa holográfica concuerda con la masa Hamiltoniana para todas las condiciones de borde. Sin embargo, cuando comparamos con el formalismo AMD hay un cambio drástico cuando las condiciones de borde no preservan la simetría conforme y, como fue mostrado en [32], la masa AMD no es adecuada para este caso.

Como futuras direcciones, nos gustaría considerar contratérminos para otras masas conformes del campo escalar y para otras teorías en mayores dimensiones. Sería útil, si fuese posible, plantear un algoritmo general para construir contratérminos usando el método Hamiltoniano — no es del todo claro si eso es posible para soluciones de gravedad que son asintóticamente dS. Para agujeros negros extremos, existen diferentes métodos para calcular las cantidades conservadas, el formalismo de la función entropía de Sen [7, 72, 73] (para agujeros negros rotantes fue generalizado en [8]

y en el contexto de la dualidad AdS/CFT, ver por ejemplo [74–78]). Sin embargo, este método nos da las cargas usando los datos de la geometría cerca del horizonte y, cuando hay un flujo RG no-trivial en teorías con escalares encendidos, es interesante comparar las cargas conservadas calculadas en el horizonte con las obtenidas en el borde por el método de contratérminos. El método de contratérminos también fue usado en [1] para estudiar los diagramas de fase de una clase general de agujeros negros con pelo de horizonte esférico.

Una perspectiva diferente naturalmente surge cuando los campos escalares y la gravedad interactúan. De hecho, se demostró anteriormente que en espacios-tiempo asintóticamente planos y cuando el potencial escalar es convexo, el único agujero negro esféricamente simétrico es la solución de Schwarzschild [79, 80], el cual fue generalizado a auto-interacciones no negativas [21, 81], para un reciente review ver [82]. Se esperaba que los teoremas de no-pelo se preservaran cuando, asintóticamente existe una constante cosmológica no trivial. La existencia numérica de agujeros negros AdS fueron verificadas en varios artículos [20, 22, 83] (un gran número de agujeros negros con pelo exáctos fueron encontrados cuando el campo escalar tiene una masa $m^2 = -2/l^2$ [5, 6, 50, 84–88]). Algunos de esos agujeros negros son linealmente estables [83, 89]. Otra interesante dirección es sobre soluciones de estrellas bosónicas y la relación con las inestabilidades de algunas soluciones AdS (y el propio AdS) [90–94].

Capítulo 6

Termodinámica de agujeros negros

Los agujeros negros asintóticamente AdS juegan un rol importante en el entendimiento de la dinámica y termodinámica de las teorías holográficas duales del campo via la dualidad AdS/CFT [11]. En particular, estos agujeros negros son duales a los estados térmicos de la teoría del campo en el borde. Las transiciones de fase de primer orden en el bulk pueden ser relacionadas a las transiciones de fase confinamiento/deconfinamiento en la teoría del campo dual [14]. Ya que los campos escalares aparecen como el moduli en teoría de cuerdas, es importante entender la termodinámica y sus propiedades genéricas de los agujeros negros con pelo.

Motivados por esas consideraciones, en esta sección estudiaremos en detalle la termodinámica de una clase general de agujeros negros con pelo escalar 4-dimensional [6, 88, 95] (ejemplos en otras dimensiones o para diferentes topologías del horizonte pueden ser encontradas en [5, 24, 25, 48, 49, 86, 96, 97]). El potencial escalar esta caracterizado por dos parámetros y la solución del agujero negro tiene una constante de integración que esta relacionada con su masa. Para algunos valores particulares de los parámetros en el potencial, las soluciones pueden ser inmersas en supergravedad [6, 86]. El potencial del campo escalar contiene como casos especiales todas las soluciones exactas estáticas no cargadas discutidas ampliamente en la literatura [50, 84, 85] (para los detalles, ver [4]). Esas configuraciones estáticas fueron extendidas a soluciones de agujeros negros dinámicos [98, 99].

Hay algunas sutilezas en la definición de la masa de los agujeros negros con pelo [20, 32, 34, 37, 40]. En [32], un método concreto del calculo de la masa de un agujero

negro asintóticamente AdS fue propuesto. Este método es muy útil desde un punto de vista práctico porque esta usa justamente la expansión de las funciones métricas en el borde. Sobre todo, esta puede ser usada para agujeros negros con pelo que preservan o no la simetría conforme (las isometrías AdS) del borde. Usaremos este método, el cual esta basada en el formalismo Hamiltoniano [33], para calcular la masa de las soluciones de agujeros negros.

Sin embargo, basados en la física de la dualidad AdS/CFT, un método diferente fue desarrollado, y se conoce como Renormalización Holográfica [100] (ver, también, [26, 57, 70, 101, 102]¹) — para condiciones de borde mixtas del campo escalar, este método fue desarrollado y promovido en [71]. La principal idea detrás de este método es que, considerando la holografía, las divergencias infrarrojas (IR) que aparecen en el lado de la gravedad son equivalentes con las divergencias ultravioletas de la teoría dual del campo. Entonces, para curar estas divergencias, uno necesita adicionar contratérminos que son locales y dependen en la geometría intrínseca del borde. De esta forma, uno puede usar el formalismo cuasi-local de Brown y York [29] suplementadas con estos contratérminos para calcular la acción Euclidea regularizada y el stress tensor del borde. La energía es la carga asociada con el vector de killing ∂_t y esta puede ser obtenida del stress tensor del borde.

Con estos resultados, uno puede investigar la termodinámica y los diagramas de fase de las soluciones de agujeros negros con pelo. En particular, mostramos que existen transiciones de fase de primer orden que llevan a una discontinuidad en la entropía. Resultados similares fueron obtenidas para una clase general de soluciones de agujeros negros en una teoría con un campo escalar invariante conforme [103].

Este capítulo esta organizado de la siguiente manera: En la primera parte describimos un método desarrollado en [64] para calcular la temperatura de cualquier agujero negro estacionario. En la siguiente parte mostramos las transiciones de fase los agujeros negros con horizonte esférico y planar. Presentamos una discusión con el resumen para cada caso.

¹Un método similar para espacios-tiempo asintóticamente AdS fue desarrollado en [58, 59] y algunas aplicaciones concretas fueron presentadas en [64, 65].

6.1. Espacio-tiempo de Rindler

En el espacio-tiempo de Minkowski se puede definir un número infinito de observadores (sistemas de coordenadas) inerciales y no-inerciales. Los observadores inerciales son invariantes bajo el grupo de Lorentz $SO(1,3)$ que dejan invariante la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.1)$$

En espacio-tiempos curvos el principio de equivalencia asegura que el espacio-tiempo es localmente de Minkowski. Es decir, localmente no es posible saber si aceleración es debido a la gravedad o a una fuerza externa. Consideremos observadores no-inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto puede conseguirse mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$t = \rho \sinh(a\tau), \quad x = \rho \cosh(a\tau) \quad (6.2)$$

que mapea la métrica (6.1) a

$$ds^2 = -a^2\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.3)$$

donde los dominios de la aceleración y el parámetro temporal son respectivamente, $a^\mu a_\mu = a^2$, $0 \leq a \leq \infty$, $-\infty \leq \tau \leq \infty$. Estos son los observadores de Rindler y tienen acceso sólo a una parte del espacio-tiempo de Minkowski, el resto es inaccesible causalmente, oculto por el horizonte de Rindler. Es importante recordar que si el observador no-inercial deja de acelerar, este horizonte desaparece. Este tipo de observadores pueden encontrarse en las cercanías del horizonte de sucesos del agujero negro de Schwarzschild, pero a diferencia del espacio-tiempo de Rindler, el horizonte del agujero negro no puede desaparecer bajo un cambio global de coordenadas. Entonces el campo gravitacional del agujero negro de Schwarzschild es equivalente a la aceleración que mide un observador no-inercial en un espacio-tiempo de Minkowski. Este es el principio de equivalencia. El espacio-tiempo de Rindler en la sección Euclidea $\tau \rightarrow -i\tau^E$, donde $\tau^E \in (0, 2\pi)$, presenta una singularidad cónica en $\rho = 0$: $ds^2 = \rho^2 d(a\tau^E)^2 + d\rho^2$, la que puede ser evitada considerando la periodicidad $\beta = \frac{2\pi}{a}$. Esta periodicidad está relacionada con la temperatura mediante

$T = \frac{1}{\beta} = \frac{a}{2\pi}$. Entonces, un observador de Rindler mide una temperatura distinta de cero, y que por el principio de equivalencia un observador en las cercanías del agujero negro de Schwarzschild (localmente) mide una temperatura. Basados en esta idea en [64] mostraron un método general para determinar la temperatura de agujeros negros estacionarios.

6.2. Temperatura de agujeros negros estacionarios

En capítulos anteriores mostramos que en la sección Euclídea podemos obtener la función de partición y, de esta, las cantidades termodinámicas. Sin embargo hay casos en los cuales este metodo no funciona correctamente, tal es el caso de agujeros negros en 5 dimensiones como las soluciones de anillos negros (black rings) debido a que la métrica en la sección Euclídea no es una métrica para una variedad real². En nuestro caso, el ansatz estático (3.26) en la sección euclídea $t \rightarrow -it_E$ es:

$$ds^2 = N(r)dt_E^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\Sigma_k^2. \quad (6.4)$$

Vemos que la métrica resultante es real, pero cuando consideramos soluciones estacionarias³ donde el término $g_{t\varphi}dtd\varphi$ esta presente en la métrica. En la sección Euclídea este nuevo término toma la forma $-ig_{t\varphi}dt_E d\varphi$, entonces la métrica queda compleja. Estas configuraciones con geometría compleja y acción real (función de partición) funcionan adecuadamente y el procedimiento se conoce con el nombre de *cuasi-Euclidean method* [104]⁴.

Aquí nos concentraremos en el caso estático de cuatro dimensiones. Realizando el cambio $\rho = \sqrt{N}$, en la sección Euclídea y reordenando se puede identificar la singularidad cónica en el sector (τ_E, r)

$$ds^2 = g_{rr} \frac{4N}{[(N)']^2} \left[\rho^2 \frac{[(N)']^2}{4Ng_{rr}} d\tau_E^2 + d\rho^2 \right]. \quad (6.5)$$

²Las componentes angulares son funciones complejas

³Por ejemplo la solución de Kerr

⁴En este método se realiza una transformación de Wick a las variables intensivas, para el caso de black ring, $\varphi \rightarrow -i\varphi$

Recordando el caso de Rindler, identificamos la periodicidad $\Delta\tau_E = \beta$ con la temperatura,

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{(N^2)'}{4\pi\sqrt{N^2}g_{rr}} \Big|_H. \quad (6.6)$$

Cuando $g_{t\varphi} = 0$, la métrica invariante bajo la inversión temporal $t \rightarrow -t$, se dice que es el caso estático. Son las soluciones estáticas las que estudiamos a lo largo de la presente tesis.

Usando esta formula podemos calcular la temperatura de los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström, asintóticamente planos:

$$T_{flat} = \frac{1}{4\pi r_h}, \quad T_{RN-flat} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 - \frac{q^2}{4r_+^2}\right). \quad (6.7)$$

De igual forma la temperatura de los agujeros negros de Schwarzschild-AdS y RN-AdS:

$$T_{Sch-AdS} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2}\right), \quad T_{RN-AdS} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{q^2}{4r_+^2}\right). \quad (6.8)$$

Es interesante notar que las temperaturas de los agujeros negros de Schwarzschild-AdS y RN-AdS, cuando el horizonte r_+ es pequeño $r_+ \ll l$, se aproximan a las temperaturas de los agujeros negros asintóticamente planos⁵. Finalmente, calculamos la temperatura de los agujeros negros con pelo escalar (3.53) y (3.54) de secciones transversales $k = 0, 1, -1$:

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\theta^2 + d\Sigma_k^2 \right], \quad (6.9)$$

con la función métrica

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \alpha \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right] + \frac{kx}{\Omega(x)}. \quad (6.10)$$

Una identidad importante es

⁵Esto es equivalente a decir que el radio AdS es muy grande $l \rightarrow \infty$, tomando ese límite se puede ver inmediatamente que las expresiones para la temperatura se reducen a (6.7)

$$f' \Omega(x) = \frac{\alpha}{\eta^2} + 2k + k\nu \frac{x^\nu + 1}{x^\nu - 1}. \quad (6.11)$$

Entonces la temperatura de acuerdo a la fórmula (6.6)

$$T = \frac{f'}{4\pi\eta} \Big|_{x_h} = \frac{1}{4\pi\eta\Omega(x_h)} \left(\frac{\alpha}{\eta^2} + 2k + k\nu \frac{x_h^\nu + 1}{x_h^\nu - 1} \right), \quad (6.12)$$

donde la ecuación que define el horizonte es $f(x_h, \eta) = 0$.

6.3. Transiciones de fase de agujeros negros esféricos

Como ejemplo, trabajaremos con el agujero negro de Schwarzschild-AdS (SAdS) en coordenadas (t, x, θ, φ) , el que puede ser obtenido fijando el parámetro hairy $\nu = 1$

$$ds^2 = \Omega(x) \left(-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (6.13)$$

$$\Omega(x) = \frac{1}{\eta^2(x-1)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{3}\alpha(x-1)^3 + \eta^2 x(x-1)^2. \quad (6.14)$$

Para obtener el agujero negro de SAdS en su forma canónica, necesitamos el siguiente cambio de coordenadas

$$x = 1 + \frac{1}{\eta r}, \quad x = 1 - \frac{1}{\eta r}. \quad (6.15)$$

Tenemos dos ramas que corresponden a $x \in [0, 1)$ y $x \in [1, \infty)$. Ya que hay algunas sutilezas en el cálculo de la acción para la rama $x \in [1, \infty)$ (por ejemplo, la curvatura extrínseca cambia de signo debido al cambio de la normal para la foliación $x = \text{constante}$) en lo que sigue trabajaremos explícitamente en la rama $x \in [0, 1]$. Usando el cambio de coordenadas (6.15) obtenemos el agujero negro de SAdS en coordenadas canónicas:

$$\Omega(x)f(x) = F(r) = 1 - \frac{\mu}{r} + \frac{r^2}{l^2}, \quad \mu = \frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3}. \quad (6.16)$$

En este caso, el potencial del campo escalar se reduce a $V = \frac{\Lambda}{\kappa}$, y el parámetro de la teoría α pasa a ser una constante de integración. Es bien conocido que la acción tiene divergencias aún a tree level debido a la integración en un volumen infinito. Para regularizar la acción, usaremos los contraterminos [26]:

$$I[g_{\mu\nu}] = I_{bulk} + I_{GH} - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{\mathcal{R}l}{2} \right), \quad (6.17)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci de la métrica del borde h_{ab} . Ahora calcularemos la acción del *bulk*. En este caso, siendo que el campo escalar desaparece, el potencial viene a ser la constante cosmológica: $V = \frac{\Lambda}{\kappa} = -\frac{3}{l^2\kappa}$. Usamos la traza del tensor de Einstein y la siguiente combinación de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} E_t^t - E_\phi^\phi = 0 &\Rightarrow 0 = f'' + \frac{\Omega' f'}{\Omega} + 2\eta^2, \\ E_t^t + E_\phi^\phi = 0 &\Rightarrow 2\kappa V(\phi) = -\frac{(f\Omega'' + f'\Omega')}{\Omega^2\eta^2} + \frac{2}{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

para obtener

$$I_{bulk}^E = \frac{4\pi\beta}{\eta^3\kappa l^2} \left[-\frac{1}{(x_b - 1)^3} + \frac{1}{(x_h - 1)^3} \right] = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} (r_b^3 - r_h^3). \quad (6.19)$$

Aquí, x_b and x_h son las localizaciones del borde y del horizonte, y β es la periodicidad del tiempo Euclideo que esta relacionado con la temperatura por $\beta = T^{-1}$.

El término de superficie de Gibbons-Hawking puede ser calculado si elegimos la foliación $x = \text{constante}$ con la métrica inducida

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b = \Omega(x) [-f(x) dt^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (6.20)$$

La normal y la curvatura extrínseca son

$$n_a = \frac{\delta_a^x}{\sqrt{g^{xx}}}, \quad K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{xx}}}{2} \partial_x h_{ab} \quad (6.21)$$

y la contribución de Gibbons-Hawking a la acción es

$$I_{GH}^E = -\frac{2\pi\beta}{\kappa} \left[-\frac{6}{l^2\eta^3(x-1)^3} - \frac{4}{\eta(x-1)} - \left(\frac{\alpha + 3\eta^2}{\eta^3} \right) \right] \Big|_{x_b} = -\frac{2\pi\beta}{\kappa} \left(\frac{6r_b^3}{l^2} + 4r_b - 3\mu \right). \quad (6.22)$$

La última contribución esta dada por el contratérmino gravitacional, el cual es un término intrínseco de superficie que depende sólo de la geometría del borde

$$I_g^E = \frac{2\pi\beta}{\kappa} \left[\frac{4}{l^2\eta^3(x_b-1)^3} + \frac{4}{\eta(x_b-1)} - 2\mu \right] = \frac{2\pi\beta}{\kappa} \left(\frac{4r_b^3}{l^2} + 4r_b - 2\mu \right). \quad (6.23)$$

Podemos ver que las divergencias proporcionales a r_b y r_b^3 se cancelan, y la acción regularizada es

$$I^E = I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^E = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left[\frac{1}{\eta^3(x_h-1)^3} + \frac{\mu l^2}{2} \right] = \frac{4\pi\beta}{\kappa l^2} \left(-r_h^3 + \frac{\mu l^2}{2} \right). \quad (6.24)$$

Los cálculos para el agujero negro general con pelo (5.35), (6.53), (6.55) son muy similares, pero debemos agregar un contratérmino que dependa del campo escalar [57, 71, 100]. Nosotros trabajamos con un contratérmino que es intrínseco a la geometría del borde (no depende de la normal al borde o de las derivadas del campo escalar) [71]:

$$I_\phi^E = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x^E \sqrt{h^E} \left(\frac{\phi^2}{2l} - \frac{l_\nu}{6l} \phi^3 \right) = \frac{4\pi\beta}{\kappa} \left[-\frac{\nu^2 - 1}{4l^2\eta^3(x_b-1)} + \frac{\nu^2 - 1}{3l^2\eta^3} \right]. \quad (6.25)$$

La suma de los otros tres primeros términos de la acción es⁶

$$I_{bulk}^E + I_{surf}^E + I_g^E = -\frac{1}{T} \left(\frac{AT}{4G} \right) + \frac{4\pi\beta}{\kappa} \left[\frac{\nu^2 - 1}{4l^2\eta^3(x_b-1)} + \frac{12\eta^2 l^2 + 4\alpha l^2 - 4\nu^2 + 4}{12l^2\eta^3} \right], \quad (6.26)$$

donde $\mathcal{A} = 4\pi\Omega(x_h)$ es el área del horizonte. Es importante mencionar que el contratérmino gravitacional [26] no es suficiente para cancelar la divergencia en la acción (aun queda un término divergente proporcional a $(x_b - 1)^{-1}$) pero cuando agregamos

⁶En el apéndice estan las expresiones en D-dimensiones de I_{bulk}^E , I_{surf}^E , I_{ct}^E asi como la suma de estos tres primeros términos

el contratérmino (6.25) obtenemos la acción finita:

$$I^E = \beta \left(-\frac{AT}{4G} + \frac{4\pi}{\kappa} \frac{3\eta^2 + \alpha}{3\eta^3} \right). \quad (6.27)$$

Como ya vimos, en el límite clásico, la acción está relacionada con el potencial termodinámico (la energía libre F en este caso), el cual es $F = I^E/\beta = M - TS$. Usando las relaciones termodinámicas podemos mostrar que la masa es (o comparando con la definición de la energía libre):

$$M = \frac{1}{2G} \left(\frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3} \right). \quad (6.28)$$

Usando las siguientes expresiones para la temperatura y la entropía

$$T = \left. \frac{f'(x)}{4\pi\eta} \right|_{x=x_h} = \frac{1}{4\pi\eta\Omega(x_h)} \left[\frac{\alpha}{\eta^2} + 2 + \nu \frac{x_h^\nu + 1}{x_h^\nu - 1} \right], \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{4\pi\Omega(x_h)}{4G}, \quad (6.29)$$

podemos verificar que la primera ley $dM = TdS$ se satisface, considerando la ecuación del horizonte $f(x_h, \eta) = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx_h} = T \left(\frac{\partial S}{\partial x_h} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx_h} \right). \quad (6.30)$$

Como ya mencionamos anteriormente, hay dos tipos de soluciones. Para la familia con campo escalar positivo $x \in [0, \infty)$ la masa es

$$M = -\frac{1}{2G} \left(\frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3} \right) \quad (6.31)$$

y la temperatura

$$T = -\frac{1}{4\pi\eta\Omega(x_h)} \left[\frac{\alpha}{\eta^2} + 2 + \nu \frac{x_h^\nu + 1}{x_h^\nu - 1} \right], \quad (6.32)$$

con la entropía dada por la ley de área.

6.3.1. Transición de fase a la Hawking y Don Page

El espacio-tiempo AdS en la región asintótica puede ser interpretado como una pared de potencial y esta se comporta como una caja infinita (tiene borde conforme)⁷. Dado que no es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico es necesario imponer condiciones de borde.

El campo escalar satisface diferentes condiciones de borde dependiendo si este es positivo o negativo, el cual corresponde a dos familias de soluciones mencionadas anteriormente⁸. Una teoría clásica del campo es completamente definida cuando las condiciones de borde están pre-escritas. Para cualesquiera condiciones de borde en el campo escalar, la configuración de vacío dado por la solución del agujero negro SAdS debe ser incluido como un estado permitido de la teoría. Por lo tanto, en el ensemble canónico, su energía libre puede ser comparada con la del agujero negro a una temperatura dada. Figura 1(a) muestra que, para una familia con un campo escalar positivo, SAdS es siempre más favorable que la configuración hairy. Figura (b) muestra el mismo fenómeno para la familia con un campo escalar negativo. Encontramos que, para valores genéricos de α el comportamiento cualitativo de los diagramas de fase no cambia.

Como en el caso SAdS, aquí hay dos ramas consistentes de agujeros negros grandes y pequeños. Figuras 2(a) y 2(b) muestran la masa versus temperatura para familias con campo escalar positivo y negativo respectivamente.

Estos gráficos nos dan información sobre el calor específico

$$C = \frac{\partial M}{\partial T}, \quad (6.33)$$

que es interpretado como un cambio en la pendiente.

La rama entera de pequeños agujeros negros (para ambas familias) es inestable termodinámicamente y tiene energía libre positiva, mientras que los agujeros negros grandes son estables termodinámicamente y la energía libre negativa para temperaturas $T > T_c$.

⁷Ver la sección 2.2.1

⁸Donde el campo escalar es $\phi = l_\nu^{-1} \ln x$, en el intervalo $x \in [0, 1]$ el campo escalar es $\phi < 0$. En el intervalo $x \in [0, \infty)$ el campo escalar es $\phi > 0$

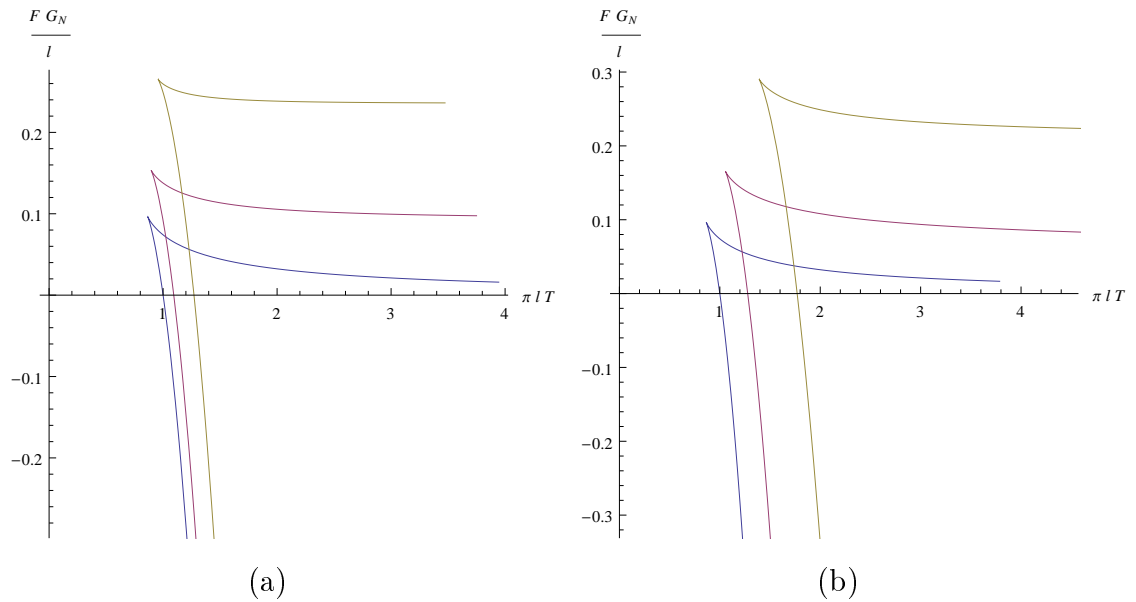


Figura 6.1: (a) Energía libre adimensional versus temperatura adimensional, para diferentes valores de ν y $\alpha = -10l^{-2}$ y campo escalar positivo. Los gráficos son para $\nu = 1, \nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de abajo acia arriba). La energía libre de Schwarzschild AdS ($\nu = 1$) tiende a cero cuando T tiende a infinito. La energía libre de los agujeros negros con pelo tienden a una constante a temperatura infinita. (b) Energía libre adimensional versus temperatura adimensional, para diferentes valores de ν , $\alpha = 10l^{-2}$ y campo escalar negativo. Los gráficos son para $\nu = 1, \nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de abajo hacia arriba).

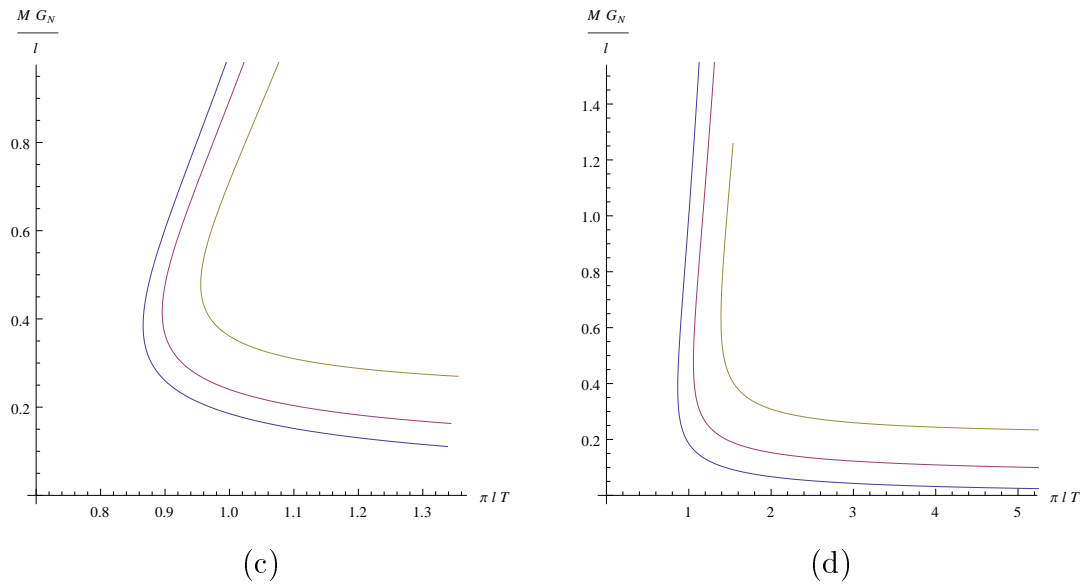
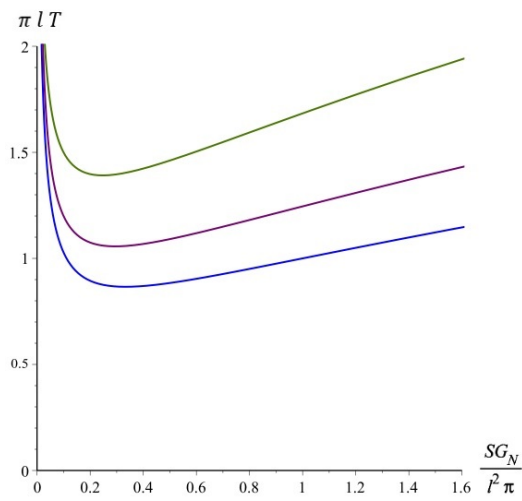
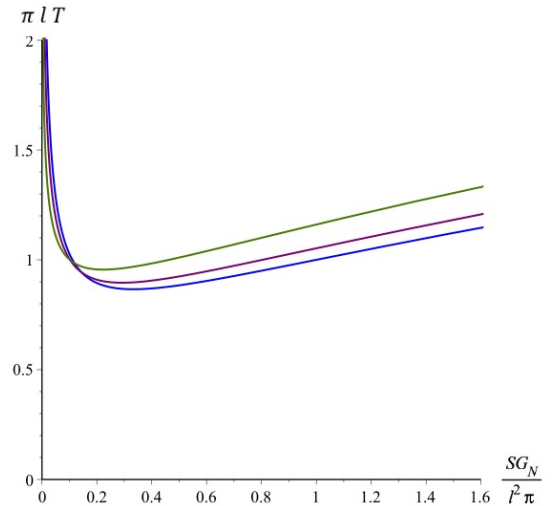


Figura 6.2: (c) Masa adimensional versus temperatura adimensional, para diferentes valores de ν , $\alpha = 10l^{-2}$ y campo escalar negativo. Los graficos son para $\nu = 1$, $\nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de izquierda a derecha). Aquí es posible ver la existencia de pequeños y grandes agujeros negros, exáctamente similar a Schwarzschild AdS.

(d) Masa adimensional versus temperatura adimensional, para diferentes valores de ν , $\alpha = -10l^{-2}$ y campo escalar positivo. Los graficos son para $\nu = 1$, $\nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de izquierda a derecha). Aquí es posible ver la existencia de pequeños y grandes agujeros negros, exáctamente similar a Schwarzschild AdS.



(e)



(f)

Figura 6.3: (e) Temperatura adimensional versus entropía adimensional, para diferentes valores de ν , $\alpha = 10l^{-2}$ y campo escalar negativo. Los graficos son para $\nu = 1, \nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de izquierda a derecha). Aquí es posible ver la existencia de pequeños y grandes agujeros negros, exáctamente similar a Schwarzschild AdS.

(f) Masa adimensional versus temperatura adimensional, para diferentes valores de ν , $\alpha = -10l^{-2}$ y campo escalar positivo. Los graficos son para $\nu = 1, \nu = 1,9$ y $\nu = 3$ (de izquierda a derecha). Aquí es posible ver la existencia de pequeños y grandes agujeros negros, exáctamente similar a Schwarzschild AdS.

A diferencia de los agujeros negros planares, para el cual no existen transiciones de fase de primer orden respecto AdS. Las soluciones de agujeros negros con pelo escalar y horizonte esférico, existen transiciones de fase de primer orden respecto a AdS a temperatura finita — las soluciones de los agujeros negros grandes que tienen energía libre negativa respecto a AdS son claramente preferidas.

6.3.2. Discusión

Desde el punto de vista de la dualidad AdS/CFT, el estudio de la termodinámica de agujeros negros asintóticamente AdS es relevante para entender los diagramas de fase de algunas teorías duales del campo holográficas. Investigamos la termodinámica de una clase general de agujeros negros con pelo con condiciones de borde para el campo escalar de masa conforme $m^2 = -2/l^2$, los cuales preservan las isometrías de AdS. Es importante remarcar la cercana similitud que observamos con la estructura familiar del agujero negro SAdS. Los agujeros negros grandes son termodinámicamente estables, y los pequeños tienen calor específico negativo.

Calculamos la acción Euclidea (y el potencial termodinámico) usando el formalismo cuasilocal suplementado con contratérminos. Usando esos resultados, mostramos que existen transiciones de fase de primer orden entre AdS térmico y el agujero negro con pelo. Por otro lado, comparando la energía libre del agujero negro con pelo con el de la solución SAdS, se muestra que el agujero negro SAdS es siempre preferido.

6.4. Transiciones de fase de agujeros negros planares

En esta sección construimos soluciones neutras de solitones con pelo escalar en un espacio-tiempo asintóticamente AdS [11]. Este análisis es importante en el contexto de la dualidad AdS/CFT porque las soluciones del bulk corresponden a fases de la teoría dual del campo [14].

Consideramos teorías de gravedad acoplados minimalmente a un campo escalar con un potencial $V(\phi)$. Siendo que para la misma auto-interacción existen distintas condiciones de borde para el campo escalar (que pueden o no romper la simetría conforme), uno puede especificar la teoría del campo [41] con un potencial efectivo [41, 54, 89].

Diferentes foliaciones del espacio-tiempo AdS llevan a diferentes definiciones del tiempo y por lo tanto a distintos Hamiltonianos de la teoría del campo dual. Ya que el clásico background de (super)gravedad, con posibles correcciones α' , es equivalente a una teoría cuántica gauge en el correspondiente cascarón⁹, uno espera diferentes teorías gauge físicamente distintas para distintas foliaciones. De hecho cuando la topología del horizonte es Ricci-plano y sin direcciones compactas, no existen transiciones de fase de primer orden similares a las transiciones de fase de Hawking-Page [105] que existen para agujeros negros esféricamente simétricos.

Sin embargo, cuando algunas de las direcciones espaciales son compactificadas asintóticamente en un círculo, uno espera la existencia de una energía negativa de Casimir de una teoría del campo no-supersimétrica que vive en la topología correspondiente. Horowitz y Myers mostraron en [106] que, de hecho, existe una solución (bulk) gravitacional apodado como *AdS solitón*¹⁰ con una energía mas baja que el de AdS. Esta solución fue obtenida por una doble continuación analítica (una en la coordenada temporal y la otra en una de las direcciones angulares compactificadas) del agujero negro planar. Esta encaja de una manera muy bonita con la propuesta de Witten [14] donde una teoría gauge no-supersimétrica de Yang-Mills puede ser descrita dentro de la dualidad AdS/CFT compactificando una de las direcciones e imponiendo condiciones de borde antiperiódicas para los fermiones alrededor del círculo.

Los solitones AdS neutros con pelo escalar fueron previamente analizados (ver, e.g. [107–113]), aunque varios de esos estudios usan metodos numéricos. Por lo tanto, es interesante encontrar ejemplos de solitones AdS con pelo analíticos e investigar sus propiedades genéricas. En años recientes, estas soluciones analíticas fueron construidas, por ejemplo en [5, 24, 48, 86, 97, 114, 115]. De allí que la construcción de soluciones analíticas si es posible. Usamos una de las soluciones exactas particulares de agujeros negros obtenidas en [5, 24] y obtendremos los correspondientes solitones usando la doble continuación analítica como en [106]. Los solitones con pelo AdS son

⁹Se refiere a una de las hiper-superficies, definidas por una folicación tipo-tiempo ($r = R = \text{constante}$).

¹⁰Como veremos más adelante, una de las direcciones de la métrica del solitón es periódica por lo que puede interpretarse como un número topológico que caracteriza la métrica del solitón. Además esta tiene una energía. Esto encaja dentro del concepto de solitón en física no lineal y teoría cuántica de campos.

los candidatos del estado ground de la teoría [116].

Ya que el solitón AdS es la solución con la energía mínima dentro de condiciones de borde dadas [117, 118], es natural investigar la existencia de transiciones de fase respecto a este background térmico. En un bonito trabajo [119], mostraron que existe transiciones de fase de primer orden entre los agujeros negros planares y el solitón AdS. Construimos el solitón AdS con pelo y calculamos su masa por el metodo de Balasubramanian y Kraus [26] suplementado con contratérminos extra para el campo escalar como fue propuesto en [2]. Investigamos la existencia de transiciones de fase de primer orden respecto al solitón AdS con pelo y discutimos el efecto del pelo en el comportamiento termodinámico.

6.4.1. AdS solitón

Comenzaremos con una pequeña revisión de [119]. Sin embargo, para conectar este análisis con el resto de la sección, los cálculos se harán usando el metodo de contratérminos de Balasubramanian y Kraus [26]. Consideramos la acción usual para la gravedad suplementado con el contratérmino gravitacional¹¹ propuesto en [26]

$$I[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^4x (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h} - \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \frac{4}{l} \sqrt{-h}, \quad (6.34)$$

donde $\Lambda = -3/l^2$ es la constante cosmológica (l es el radio de AdS), $16\pi G = 1$ con G la constante gravitacional de Newton, el segundo término es el término de borde de Gibbons-Hawking, y el último término es el contratérmino gravitacional. Aquí, h es el determinante de la métrica inducida del borde y K es la traza de la curvatura extrínseca. La solución del agujero negro planar es

$$ds^2 = -\left(-\frac{\mu_b}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(-\frac{\mu_b}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} (dx_1^2 + dx_2^2), \quad (6.35)$$

¹¹Aquí el término de la curvatura escalar de Ricci es nulo $\mathcal{R} = 0$. Debido a que la métrica del borde ($r = \infty$) es plano i.e. $\mathcal{R}_{bcd}^a = 0$.

donde μ_b es el parámetro de masa y consideraremos las coordenadas compactificadas $0 \leq x_1 \leq L_b$ and $0 \leq x_2 \leq L$ ¹². La normalización es tal que la coordenada temporal y las coordenadas x_1 y x_2 tienen la misma dimensión y de esta manera la continuación analítica para obtener el soliton AdS produce la misma geometría del borde. El rol de contratérmino es cancelar la divergencia infraroja de la acción de esta forma el resultado final es finito¹³:

$$I_b^E = \frac{2LL_b\beta_b}{l^4} \left(-r_h^3 + \frac{\mu_b l^2}{2} \right) = -\frac{LL_b\beta_b r_h^3}{l^4}. \quad (6.36)$$

El radio del horizonte es denotado por r_h y β_b es la periodicidad del tiempo Euclideo que esta relacionada a la temperatura del agujero negro por:

$$T = \beta_b^{-1} = \frac{(-g_{tt})'}{4\pi} \Big|_{r=r_h} = \frac{3r_h}{4\pi l^2}. \quad (6.37)$$

Usando las relaciones termodinámicas usuales y la energía libre $F = I_b^E/\beta_b$, obtenemos la energía y entropía del agujero negro planar:

$$E = -T^2 \frac{\partial I_b^E}{\partial T} = \frac{2LL_b\mu_b}{l^2}, \quad (6.38)$$

$$S = -\frac{\partial(I_b^E T)}{\partial T} = \frac{LL_b r_h^2}{4l^2 G} = \frac{\mathcal{A}}{4G}. \quad (6.39)$$

Por completitud, presentaremos el cuasi-local stress tensor de Brown and York [29]. Este tensor esta relacionado con el stress tensor de la teoría del campo dual, salvo un factor conforme. Considerando la foliación $r = R = \text{constante}$. La metrica del bulk esta asociada con una estructura conforme en el borde y la geometría donde la teoría del campo esta definida se relaciona con la geometría del borde mediante una transformación conforme:

$$ds_{dual}^2 = \frac{l^2}{R^2} ds^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2. \quad (6.40)$$

¹²El horizonte es un toro: $S^1 \times S^1$.

¹³Este cálculo se puede hacer usando directamente el método propuesto en la sección 5.2

El stress tensor dual es [30]

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{l} \tau_{ab} = \frac{\mu_b}{16\pi G_N l^2} [3\delta_a^0 \delta_b^0 + \gamma_{ab}] , \quad (6.41)$$

donde τ_{ab} es el Brown-York stress tensor. Vemos que el stress tensor dual es similar a la de un gas térmico de partículas sin masa, y como es de esperarse, su traza es cero $\langle \tau^{dual} \rangle = \langle \tau_{ab}^{dual} \rangle \gamma^{ab} = 0$. La energía es la carga conservada asociada con la isometría (de la métrica del borde) generada por el vector de Killing $\xi^a = (\partial_t)^a$. Obtenemos

$$E = Q_{\xi_t} = \int d\Sigma^i \tau_{ij} \xi^j = \frac{LL_b}{l^2 \kappa} \left[\mu_b + \frac{l^2}{4R} + O(R^{-2}) \right] , \quad (6.42)$$

que esta en acuerdo con (6.38). El solitón AdS fue obtenido en [106]

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2} d\tau^2 + \left(-\frac{\mu_s}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + \left(-\frac{\mu_s}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) d\theta^2 + \frac{r^2}{l^2} dx_2^2 , \quad (6.43)$$

usando una doble continuación analítica $t \rightarrow i\theta$, $x_1 \rightarrow i\tau$ de la métrica agujero negro planar (6.35). Para distinguir de la solución del agujero negro, denotamos por μ_s el parámetro de masa del solitón AdS y, en la sección Euclidea ($\tau \rightarrow i\tau_E$), la periodicidad es $0 \leq \tau_E \leq \beta_s$. Para obtener una solución Lorentziana regular, la coordenada r esta restringida a $r_s \leq r$, donde

$$-\frac{\mu_s}{r_s} + \frac{r_s^2}{l^2} = 0. \quad (6.44)$$

Para evitar la singularidad cónica en el plano (r, θ) , imponemos la siguiente periodicidad¹⁴ para θ :

$$L_s = \frac{4\pi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{rr}}}{(g_{\theta\theta})'} \Big|_{r=r_s} = \frac{4\pi l^2}{3r_s} . \quad (6.45)$$

La acción on-shell Euclidea y la masa del solitón AdS pueden ser obtenidas de forma similar al del agujero negro (pero no presentaremos los detalles aqui):

$$I_s^E = -\frac{LL_s \beta_s \mu_s}{l^2} \quad (6.46)$$

¹⁴Esta fórmula se demostró en la sección 6.2

y la masa puede ser obtenida usando las relaciones termodinámicas con la energía libre $F = I_s^E/\beta_s = M$ (o del tensor de stress cuasilocal) y el resultado es

$$M = -\frac{LL_s\mu_s}{l^2}. \quad (6.47)$$

La masa del solitón AdS corresponde a la energía Casimir asociada a las direcciones compactas de la teoría dual en el borde y es negativa [106]. Las energías libres (acción on-shell) del agujero negro y del solitón respectivamente (6.36),(6.46) son negativas de allí que son termodinámicamente estables (no hay transiciones de fase) respecto al background AdS.

En [119] se muestra que existen transiciones de fase de primer orden entre agujeros negros y el solitón AdS. Con toda la información obtenida hasta ahora, es sencillo verificar la existencia de las transiciones de fase de primer orden¹⁵. Para comparar las soluciones Euclideas, debemos imponer las mismas condiciones de periodicidad, las cuales en el borde ($r \rightarrow \infty$) son: $\beta_b = \beta_s$ y $L_s = L_b$. Comparemos ahora las acciones on-shell (6.36),(6.46), esto equivale a comparar las energías libres:

$$\Delta I = I_b^E - I_s^E = \frac{L}{2\kappa l^4} \left(\frac{4\pi l^2}{3}\right)^3 L_b\beta_b(L_s^{-3} - \beta_b^{-3}) = \frac{L}{2\kappa l^4} \left(\frac{4\pi l^2}{3}\right)^3 L_b\beta_b \left(\frac{1}{L_s^3} - T^3\right). \quad (6.48)$$

El cambio de signo es indicación de una transición de fase a primer orden entre el agujero negro planar y el solitón AdS. Vemos que a diferencia de la transición de fase Hawking-Page para agujeros negros esféricos AdS, esta es controlada por la proporción r_h/l (parámetro de orden), en el caso planar la proporción r_h/r_s es relevante¹⁶. Por consiguiente debemos comparar la periodicidad del tiempo Euclideo (el inverso de la temperatura) con la periodicidad de las coordenadas compactas obtenidas por la doble continuación analítica.

Para los agujeros negros esféricos AdS [14, 105], cuando $r_h < l$ el espacio-tiempo

¹⁵La transición de fase de primer orden plantea que la derivada de la energía libre es discontinua, para nuestro caso $S = -\partial F/\partial T$. Entonces quiere decir que la entropía es discontinua en el punto crítico definido por $F = 0$ y que respecto a ese punto crítico la energía libre es $F > 0$ (térmicamente inestable) o $F < 0$ (térmicamente estable).

Para el caso de transiciones de fase de segundo orden, la primera derivada de F es continua pero la segunda derivada es discontinua.

¹⁶Recuerde que r_h es radio del horizonte del agujero negro y r_s es el radio mínimo que la métrica del solitón puede describir $r_s \leq r$.

AdS a temperatura finita domina y cuando $r_h > l$ los agujeros negros grandes son térmicamente estables. Para el caso planar, hay cambio drástico [119]. Esto es, la estabilidad del agujero negro planar no depende sólo de la temperatura, también depende de su tamaño. Escribiendo el área del agujero negro $\mathcal{A} = LL_b r_h^2 / l^2$ en términos de T y L_s como en [119], encontramos la proporción

$$\frac{\mathcal{A}}{Tl^3} = \frac{L}{l} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 L_s T . \quad (6.49)$$

Si $\mathcal{A}l^{-2} \ll Tl$ (y L del mismo orden del radio AdS l) entonces $L_s T \ll 1$, y usando (6.37) y (6.45) se verifica que $r_h \ll r_s$ y $F > 0$, lo que significa que los agujeros negros pequeños y calientes (respecto a r_s) son inestables y decaen a agujeros negros pequeños. Por otro lado, si $\mathcal{A}l^{-2} \gg Tl$ entonces $L_s T \gg 1$, y usando (6.37) y (6.45) obtenemos $r_s \ll r_h$ y $F < 0$, esto es una indicación de que los agujeros negros grandes y fríos son estables. Cuando $\mathcal{A} \sim Tl^3$ el solitón y el agujero negro están en equilibrio e incluye los casos cuando son fríos y pequeños o grandes y calientes. El punto crítico es cuando $\Delta I = 0$, para el cual $1 = L_s T$ y $r_h = r_s$. Note que la transición de fase está controlada por el parámetro adimensional $z = TL_s$.

6.4.2. Solitón AdS con pelo

Consideramos las soluciones regulares exactas de agujeros negros con pelo escalar [5, 24, 25]. La acción es

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x K \sqrt{-h} \quad (6.50)$$

y estamos interesados en el siguiente potencial moduli:¹⁷

$$V(\phi) = \frac{\Lambda(\nu^2 - 4)}{3\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} e^{-\phi l_\nu(\nu+1)} + \frac{\nu + 1}{\nu - 2} e^{\phi l_\nu(\nu-1)} + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} e^{-\phi l_\nu} \right] \quad (6.51)$$

$$+ \frac{2\alpha}{\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} \sinh \phi l_\nu(\nu + 1) - \frac{\nu + 1}{\nu - 2} \sinh \phi l_\nu(\nu - 1) + 4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} \sinh \phi l_\nu \right].$$

Nos concentraremos en el caso concreto de $\nu = 3$. Sin embargo, los solitones AdS con pelo para otros valores de ν probablemente también existen, pero el análisis es técnicamente más complicado y no lo presentaremos en el presente trabajo. En este caso el potencial del campo escalar viene a ser

$$V(\phi) = \frac{2\Lambda}{27} \left(5e^{-\phi\sqrt{2}} + 10e^{\phi\sqrt{2}/2} + 16e^{-\phi\sqrt{2}/4} \right) \quad (6.52)$$

$$+ \frac{4\alpha}{45} \left[\sinh \left(\phi\sqrt{2} \right) - 10 \sinh \left(\phi\sqrt{2}/2 \right) + 16 \sinh \left(\phi\sqrt{2}/4 \right) \right].$$

El potencial tiene dos partes que son controladas por los parámetros Λ y α . Asintóticamente, donde el campo escalar desaparece, justamente el parámetro Λ sobrevive y esta relacionado con el radio AdS como $\Lambda = -3l^{-2}$. Usando el ansatz para la métrica dada en (5.35), las ecuaciones de movimiento pueden ser integradas para el factor

¹⁷Para algunos de los valores particulares de los parámetros, viene a ser una de las truncaciones de ω -deformed gauged $\mathcal{N} = 8$ supergravedad [120], ver [6, 52, 53].

conforme [5, 24, 25, 88]

$$\Omega(x) = \frac{9x^2}{\eta^2(x^3 - 1)^2} . \quad (6.53)$$

Con esta elección del factor conforme, es sencillo obtener las expresiones para el campo escalar

$$\phi(x) = 2\sqrt{2}\ln x \quad (6.54)$$

y la función métrica

$$f(x) = \frac{1}{l^2} + \alpha \left[\frac{1}{5} - \frac{x^2}{9} \left(1 + x^{-3} - \frac{x^3}{5} \right) \right]. \quad (6.55)$$

Donde η es sólo una constante de integración. El parámetro α es positivo para $x < 1$ y negativo para $x > 1$. Nos concentraremos en el caso $x < 1$. El borde conforme esta en $x = 1$, donde la métrica viene a ser

$$ds^2 = \frac{R^2}{l^2} \left[-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 \right]. \quad (6.56)$$

Usaremos la siguiente notación para el factor conforme:

$$R^2 \equiv \frac{1}{\eta^2(x - 1)^2} . \quad (6.57)$$

La geometría donde la teoría dual vive tiene la métrica

$$ds_{dual}^2 = \frac{l^2}{R^2} ds^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 . \quad (6.58)$$

La acción Euclídea regularizada para estos agujeros negros fue obtenida en [2] (ver, también, [121]) (en lo que sigue usaremos las siguientes notaciones similares a la anterior sección para β_b y L_b):

$$I_{BH}^E = \beta_b \left(-\frac{\mathcal{A}T}{4G_N} + \frac{2LL_b}{l^2} \frac{\alpha}{3\eta^3} \right) = -\frac{LL_b\alpha\beta_b}{3l^2\eta^3} , \quad (6.59)$$

donde el área del horizonte y la temperatura del agujero negro son

$$\mathcal{A} = \frac{LL_b\Omega(x_h)}{l^2}, \quad T = \frac{\alpha}{4\pi\eta^3\Omega}. \quad (6.60)$$

La masa del agujero negro es [2, 32]

$$M_b = \frac{2LL_b\mu_b}{l^2}, \quad \mu_b = \frac{\alpha}{3\eta^3} \quad (6.61)$$

también se puede verificar usando las relaciones termodinámicas usuales, y por supuesto se verifica la primera ley. Ahora construiremos el solitón AdS. Usando de nuevo la doble continuación analítica $x_1 \rightarrow i\tau$ and $t \rightarrow i\theta$ in (5.35), la métrica viene a ser

$$ds^2 = \Omega_s(x) \left[-\frac{d\tau^2}{l^2} + \frac{\lambda^2 dx^2}{f(x)} + f(x)d\theta^2 + \frac{dx_2^2}{l^2} \right]. \quad (6.62)$$

De manera similar al agujero negro con pelo, el factor conforme (6.53) es

$$\Omega_s(x) = \frac{9x^2}{\lambda^2(x^3 - 1)^2}, \quad (6.63)$$

pero ahora denotaremos la constante de integración con λ para distinguir de la constante de integración η del agujero negro. Para evadir la singularidad cónica en el plano (x, θ) , imponemos la periodicidad:

$$L_s = \frac{4\pi\lambda}{f'} \Big|_{x=x_s} = \frac{4\pi\lambda^3\Omega_s}{\alpha}, \quad (6.64)$$

donde x_s es el mínimo valor de x , concretamente la raíz mayor de $f(x_s) = 0$. Después de imponer la periodicidad en θ y restringir la coordenada x de tal forma que la métrica es Lorentziana, obtendremos una solución regular bien definida Usaremos el metodo de [2] para calcular la acción regularizada Euclidea y el resultado es

$$I_{soliton}^E = -\frac{L\beta_s\Omega_s(x_s)}{4l^2G_N} + \frac{2LL_s\beta_s}{l^2} \frac{\alpha}{3\lambda^3} = -\frac{LL_s\beta_s}{l^2} \left(\frac{\alpha}{3\lambda^3} \right), \quad (6.65)$$

de donde la masa puede ser inmediatamente leída:

$$M_{soliton} = -\frac{LL_s\mu_s}{l^2}, \quad \mu_s = \frac{\alpha}{3\lambda^3}. \quad (6.66)$$

Por completitud, calculamos el stress tensor cuasi-local de Brown y York y calculamos la masa del solitón a partir de ella. El nuevo contratérmino para el campo escalar da una nueva contribución al stress tensor

$$I^\phi = -\int d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{\phi^2}{2l} - \frac{l_\nu}{6l} \phi^3 \right), \quad \tau_{ab}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I^\phi}{\delta h^{ab}}. \quad (6.67)$$

Entonces el stress tensor renormalizado es

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} \left(K_{ab} - h_{ab}K + \frac{2}{l}h_{ab} - lE_{ab} \right) - \frac{h_{ab}}{l} \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{l_\nu}{6} \phi^3 \right), \quad (6.68)$$

donde las componentes son:

$$\tau_{\tau\tau} = \frac{\alpha(x-1)}{3\lambda^2 l} + O[(x-1)^2], \quad (6.69)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\alpha(x-1)}{3\lambda^2 l} + O[(x-1)^2], \quad (6.70)$$

$$\tau_{x_2x_2} = -\frac{\alpha(x-1)}{3\lambda^2 l} + O[(x-1)^2]. \quad (6.71)$$

La métrica (6.62) en el borde esta relacionada con la métrica conforme como

$$ds_{dual}^2 = \frac{l^2}{R^2} ds^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + dx_2^2, \quad (6.72)$$

donde $R \equiv 1/\eta(x-1)$, y en el borde $R \rightarrow \infty$ implica $x \rightarrow x_b$. Entonces el stress tensor de la teoría dual al solitón es:

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{l} \tau_{ab} = \lim_{x \rightarrow x_b} \left[-\frac{1}{\lambda l(x-1)} \right] \tau_{ab} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\alpha}{3\lambda^3} \right) [-3\delta_a^\theta \delta_b^\theta + \gamma_{ab}]. \quad (6.73)$$

La cantidad conservada (masa del solitón) generada por el vector de Killing $\xi^i = (\partial_\tau)^i$ es:

$$M = \oint_{\Sigma} d^2y \sqrt{\sigma} m^a{}_\tau \xi^b = \frac{LL_s f^{1/2} \Omega}{\sqrt{-g_{\tau\tau}}} (\partial_\tau)^i \tau_{ij} (\partial_\tau)^j = -\frac{LL_s}{l^2} \left[\frac{\alpha}{3\lambda^3} + O(x-1) \right], \quad (6.74)$$

donde la foliación es de tipo espacio $\tau = \text{constante}$, con el vector normal y unitario:

$$m^i = \frac{(\partial_t)^i}{\sqrt{-g_{\tau\tau}}}, \quad ds^2 = \sigma_{ij} dx^i dx^j = \Omega(x) \left[f(x) d\theta^2 + \frac{dx_2^2}{l^2} \right]. \quad (6.75)$$

6.4.3. Implicaciones para las transiciones de fase

En el marco de la dualidad AdS/CFT, los agujeros negros son interpretados como estados térmicos en la teoría dual del campo. Mostraremos que existen transiciones de fase de primer orden entre el agujero negro con pelo planar y el solitón con pelo AdS.

Con los resultados de la sección previa, estamos listos para investigar la existencia de las transiciones de fase.¹⁸ Nos concentraremos en el caso $D = 4$. Antes de comparar las acciones, es importante puntualizar que de las definiciones de x_s y x_h se concluye que son iguales, $x_s = x_h$. A primer vista, esto puede ser un poco extraño porque en general se espera estos dependan de los parámetros de masa λ y η para el solitón y el agujero negro. Sin embargo, en estas coordenadas poco usuales, x_s y x_h están definidas por (6.55), pero la verdadera área del horizonte y centro del solitón están determinados por el factor conforme en frente de la métrica. Este factor conforme depende del parámetro de masa, así que definimos:

$$r_b^2 = \frac{\Omega(x_h, \eta)}{l^2}, \quad r_s^2 = \frac{\Omega(x_s, \lambda)}{l^2}. \quad (6.76)$$

Como antes (6.48), necesitamos comparar las energías libres de las soluciones en la misma teoría y debemos imponer las mismas condiciones de periodicidad en el borde $\beta_b = \beta_s$ y $L_s = L_b$. El solitón AdS con pelo tiene energía negativa (el espacio AdS en coordenadas planares tiene masa cero) y este es el ground state de la teoría. De allí que, la energía del agujero negro con pelo debe ser calculado respecto a este

¹⁸El caso $k = 1$, cuando la topología del horizonte es esférico, fue estudiado en [1].

estado base y obtenemos

$$E = M_{bh} - M_{soliton} = \frac{LL_b}{l^2}(2\mu_b + \mu_s), \quad (6.77)$$

con μ_b y μ_s definidas en (6.61) y (6.66). La misma periodicidad del tiempo Euclideo implica la misma temperatura. Consideramos la solución del solitón con pelo como el background térmico:

$$\Delta F = \beta_b^{-1}(I_{BH}^E - I_{soliton}^E) = \frac{TL\alpha}{3l^2} \left(\frac{L_s\beta_s}{\lambda^3} - \frac{L_b\beta_b}{\eta^3} \right). \quad (6.78)$$

Usando las expresiones de la temperatura del agujero negro T y la periodicidad L_s , podemos escribir la diferencia de las energías libres como

$$\Delta F = \frac{4\pi LL_s}{3l^2} \left[\frac{\Omega(\lambda, x_s)}{L_s} - T\Omega(\eta, x_h) \right] = \frac{4\pi L}{3l^2} \Omega(\lambda, x_s) \left(1 - \frac{r_b^3}{r_s^3} \right). \quad (6.79)$$

Escrita en términos de la temperatura, hay un cambio drástico comparado con el caso sin pelo porque el factor conforme aparece explícitamente. Claramente, el signo de esta expresión es controlada por la razón r_b/r_s .

A pesar de la aparición del factor conforme, el punto crítico donde $\Delta F = 0$ corresponde nuevamente a la temperatura $T_c = 1/L_s$ (esto es porque cuando $\Delta F = 0$, $\mu_b = \mu_s$ y entonces $\eta = \lambda$). Esto es lo que uno espera para una teoría del campo conforme, ya que la transición de fase debe depender de la razón de las escalas.

Escibiendo el área del agujero negro en términos de β_b y β_s , encontramos que

$$\frac{\mathcal{A}}{Tl^3} = \frac{\alpha L}{4\pi l^5} \frac{\beta_b^2 L_s}{\eta^3} = \frac{L\mathcal{L}}{l} \left(\frac{\lambda}{\eta} \right) \quad (6.80)$$

donde

$$\mathcal{L} = \frac{16\pi^2}{\alpha^2 l^4} \left[\frac{9x_h^2}{(x_h^3 - 1)^2} \right]^3 \quad (6.81)$$

Sin embargo, siendo que x_h satisface $f(x_h) = 0$, esta puede ser calculada como función del parámetro α del potencial moduli, lo cual implica que el coeficiente $\mathcal{L}(\alpha, l)$ es sólo una función de α y l . De la definición de (6.76), uno puede fácilmente obtener

$r_b/r_s = \lambda/\eta$ y de allí (6.80) puede ser reescrita en esta forma útil:

$$\frac{\mathcal{A}}{Tl^3} = \frac{L \mathcal{L}(\alpha, l)}{l} \frac{r_b}{r_s} \quad (6.82)$$

Aquí hay una importante diferencia en comparación con el caso sin pelo, concretamente la aparición de la función $\mathcal{L}(\alpha, l)$. Cuando α es muy pequeño entonces \mathcal{L} también es pequeño. En este caso, uno puede mantener el radio del horizonte r_b del mismo tamaño que r_s . Por consiguiente, para pequeños α , no sólo los agujeros negros pequeños, también los agujeros negros grandes son inestables y decaen a solitones AdS con pelo. Cuando el parámetro α es grande, el comportamiento termodinámico de los agujeros negros con pelo es similar al agujero negro planar sin pelo.

6.4.4. Discusión

Hawking y Page mostraron que existen transiciones de fase entre el agujero negro esférico (Schwarzschild) AdS y el espacio-tiempo global ($k = 1$) AdS. Es bien conocido que las transiciones de fase, ambas en el lado de la gravedad y en el lado de la teoría gauge son sensitivas a la topología de la foliación AdS. Para los agujeros negros AdS con geometría del horizonte planar, no existen transiciones de fase Hawking-Page respecto al espacio-tiempo AdS. En otras palabras, la fase del agujero negro planar es siempre dominante para cualquier temperatura diferente de cero. Interesantemente, se mostro que cuando una (o más de las direcciones) son compactas existen también transiciones de fase Hawking-Page entre los agujeros negros planares y el soliton AdS, el cual es obtenida por una doble continuación analítica del agujero negro. Obtuvimos un comportamiento similar para los agujeros negros con pelo, pero ahora el ground state corresponde al soliton con pelo. Una importante diferencia con el caso sin pelo es que la transición de fase es también controlada por el parámetro α en el potencial escalar. Una vez que α esta fija, la teoría esta fija, pero para pequeños α la teoría continen agujeros negros calientes (pequeños o grandes) que son inestables y decaen a solitones AdS con pelo. Este cambio drástico esta relacionado con el hecho de que cuando α desaparece, la solución del agujero negro con pelo viene a ser una singularidad desnuda. La auto-interacción del campo escalar es muy debil y entonces las temperaturas grandes pueden desestabilizar el sistema independientemente del tamaño del agujero negro.

Capítulo 7

Conclusiones

La dualidad AdS/CFT es una herramienta eficaz para obtener información de teorías gauge fuertemente acopladas a partir de sistemas gravitacionales clásicos. En particular los campos escalares en AdS corresponden a operadores en la teoría cuántica dual. Los agujeros negros describen los estados térmicos de la teoría cuántica dual. En esta sección describimos brevemente los resultados de las secciones 5 y 6 los cuales son concrétramente los resultados del trabajo de investigación.

En la presente tesis estudiamos las condiciones de borde de un campo escalar (mínimante acoplado a la gravedad) y de masa conforme $m^2 = -2/l^2$, para la cual ambos modos son normalizables. Estudiamos las condiciones de borde que preservan o rompen la simetría conforme.

Propusimos nuevos contratérminos locales para la rama logarítmica, las que nos dieron un buen principio variacional $\delta I = 0$. Calculamos la acción on-shell y mediante fórmulas termodinámicas obtuvimos la entropía y energía gravitacional. Vimos que la masa tiene contribución del campo escalar. Esta contribución desaparece cuando el campo escalar preserva la simetría conforme. Calculamos el tensor de stress de la CFT a partir del tensor de stress de Brown-York y mostramos que la anomalía de traza desaparece cuando la simetría conforme es preservada.

Con el fin de complementar los resultados, trabajamos con el procedimiento Hamiltoniano para obtener la energía del sistema, esto debido a que la energía es de primeros principios la cantidad conservada asociada a la simetría de las translaciones temporales. Vimos que la masa calculada mediante este método da el mismo resul-

tado que el obtenido por el método holográfico, aún cuando la simetría conforme se rompe.

Finalmente estudiamos las transiciones de fase agujeros negros con pelo escalar y de horizonte esférico. Mostramos que existen transiciones de fase de primer orden entre AdS térmico y los agujeros negros con pelo. Usamos los métodos desarrollados en las secciones anteriores para calcular la acción on-shell y las cantidades termodinámicas. Se muestra que, comparando la energía libre del agujero negro (con pelo) con la solución SAdS, esta última es siempre más estable. Para el caso de agujeros negros planares, es bien sabido que no existen transiciones de fase, ya que la energía libre es siempre negativa. Investigaciones previas mostraron que si compactificamos una o más direcciones es posible obtener transiciones de fase Hawking-Page entre agujeros negros planares y el solitón AdS. Construimos solitones con pelo y estudiamos las transiciones de fase, respecto a este estado ground. En este caso el parámetro α que aparece en el potencial y que define la teoría juega un rol importante en las transiciones de fase. Para pequeños valores de α (la autointeracción del campo escalar es pequeña) se tienen agujeros negros calientes, grandes y pequeños, que son inestables y decaen en solitones AdS con pelo.

7.1. Futuras direcciones

El método de contratérminos ha demostrado ser una herramienta muy eficaz para determinar las cantidades conservadas de sistemas gravitacionales asintóticamente AdS, planas y en otras diversas formulaciones de la relatividad general. Actualmente, yo y demás colaboradores estamos trabajando sobre transiciones de fase de agujeros negros (cargados y con pelo escalar) asintóticamente planos. La termodinámica y los diagramas de fase de estos agujeros negros con pelo [25, 82, 122, 123] pueden estudiarse con un método similar al de los contratérminos [58, 59, 64]. Este artículo está próximo a ser publicado.

Paralelamente, en colaboración con el Prof. Edelstein estamos investigando sobre las transiciones de fase en SUGRA $\mathcal{N} = 8$, y las transiciones de fase de los agujeros negros planares respecto al solitón con pelo, para cualquier valor del parámetro pelo ν .

Otra de las interesantes direcciones futuras sería estudiar los diagramas de fase de la familia de agujeros negros cargados (exactos) con pelo presentados en [95]. En este caso, uno puede estudiar ambos ensembles, canónico y gran canónico. En el ensemble canónico la carga, el cual es una variable extensiva, debe mantenerse fija. Debido a que el espacio-tiempo AdS con una carga fija no es solución de las ecuaciones de movimiento, es apropiado calcular la acción Euclídea respecto al estado ground que es el agujero negro extremo en este caso [124]. Usando argumentos similares como en [77, 78] se mostro en [95] que existen agujeros negros extremos un horizonte finito y se espera que el ensemble canónico este bien definido.

Los cálculos de funciones de correlación en el contexto de la inflación pueden realizarse mediante procedimientos similares a los que se realizan en el contexto de la dualidad AdS/CFT. Dada la experiencia desarrollada en el contexto de la dualidad AdS/CFT, pretendemos explorar en los diversos métodos para obtener funciones de correlación en el escenario de la inflación.

Apéndice A

Acción regularizada

En esta sección usamos los símbolos ν_{ij} y ν para designar a las componentes unitarias y el determinante de la sección transversal ¹. El número de dimensiones del espacio-tiempo es $D = n + 1$, donde n es el número de dimensiones del borde tipo-tiempo, $r = \infty$ ($x = 1$).

A.1. Acción-bulk on-shell

Sea la acción de la gravedad acoplado mínimamente a un campo escalar

$$I = \int d^{n+1}x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^n x \sqrt{-h} K + I_g + I_\phi . \quad (\text{A.1})$$

Las ecuaciones de movimiento para la métrica son

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (\text{A.2})$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + V \right] , \quad (\text{A.3})$$

donde la traza es

$$G = -\frac{R(n-1)}{2} , \quad T = -(n-1) \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + V \frac{(n+1)}{(n-1)} \right] . \quad (\text{A.4})$$

¹No confundir con el parámetro hairy ν

De donde obtenemos

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \rightarrow \frac{R}{2\kappa} = \frac{(\partial\phi)^2}{2} + V \frac{(n+1)}{(n-1)}. \quad (\text{A.5})$$

Entonces, la acción on-shell en el sección Euclidea del bulk es

$$I_{bulk}^E = -\frac{2}{n-1} \int d^{n+1}x \sqrt{g^E} V(\phi). \quad (\text{A.6})$$

A.2. Sistema de coordenadas $(t, x, \Sigma_{k,n-1})$

Aprovechamos el hecho de que las ecuaciones de movimiento en este sistema de coordenadas en D-dimensiones fueron obtenidas en [5] y que el cálculo de la acción on-shell debidamente regularizada es muy sencillo en estas coordenadas. Sea el ansatz (5.35)², donde la sección transversal puede ser: hiperbólica, plana, esférica ($k = -1, 0, 1$)

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x) dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\Sigma_k^2 \right]. \quad (\text{A.7})$$

Las ecuaciones de movimiento en este sistema de coordenadas son

$$E_t{}^t - E_x{}^x = 0 \implies 2\kappa\phi'^2 = \frac{D-2}{2\Omega^2} \left[3(\Omega')^2 - 2\Omega\Omega'' \right], \quad (\text{A.8})$$

$$E_t{}^t - \frac{1}{D-2} g^{ab} E_{ab} = 0 \implies f'' + \frac{D-2}{2\Omega} \Omega' f' + 2k\eta^2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$E_t{}^t + \frac{1}{D-2} g^{ab} E_{ab} = 0 \implies 2\kappa V = -\frac{D-2}{2\eta^2\Omega^2} \left[f\Omega'' + \frac{D-4}{2\Omega} f(\Omega')^2 + \Omega' f' \right] + \frac{k(D-2)}{\Omega}. \quad (\text{A.10})$$

Reordenamos convenientemente las ecuaciones (A.9) y (A.10)

$$\frac{d}{dx} [\Omega^{(D-2)/2} f'] + 2\eta^2 k \Omega^{(D-2)/2} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$-\frac{2\eta^2 \Omega^{D/2} (2\kappa V)}{D-2} = f\Omega'' \Omega^{(D-4)/2} + \Omega' (f\Omega^{(D-4)/2})' - 2\eta^2 k \Omega^{(D-2)/2}, \quad (\text{A.12})$$

²Es importante aclarar que el ansatz (5.35) es para cuatro dimensiones y que para dimensiones mayores la sección transversal tiene nuevos términos

combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$2\kappa V = -\frac{D-2}{2\eta^2\Omega^{D/2}}[\Omega^{\frac{D-4}{2}}(f\Omega)']' . \quad (\text{A.13})$$

Sea la sección transversal

$$d\Sigma_k^2 = \nu_{ij}dx^i dx^j , \quad (\text{A.14})$$

en donde $\det(\nu_{ij}) = \nu$ y $\sqrt{-g} = \Omega^{D/2}\eta\sqrt{\nu}$. Entonces la acción on-shell para la parte del *bulk* es fácilmente integrada entre x_h (lugar donde se ubica el horizonte, que es la raíz mayor de la ecuación $f(x_h) = 0$) y x_b (lugar donde se ubica el borde)

$$I_{bulk}^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{2\kappa\eta} \left[\Omega^{\frac{D-4}{2}}(f\Omega)' \right]_{x_h}^{x_b} . \quad (\text{A.15})$$

Definimos el área unitaria (n-1)-dimensional de la sección transversal (A.14) como simbolizada por $\sigma_{k,n-1}$ (para la 2-esfera es $\sigma_{1,2} = 4\pi$). Para calcular el término de Gibbons-Hawking, elegimos la foliación time-like a $x = constant$, con la métrica inducida $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$

$$h_{ab}dx^a dx^b = \Omega(x)[-f(x)dt^2 + d\Sigma_k^2] , \quad (\text{A.16})$$

la normal, curvatura extrínseca y su traza $K = h^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ son:

$$n_a = \frac{\delta_a^x}{\sqrt{g^{xx}}} , \quad K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{xx}}}{2}\partial_x h_{ab} , \quad K = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{1/2} \left[\frac{(\Omega f)'}{\Omega f} + (D-2)\frac{\Omega'}{\Omega} \right] . \quad (\text{A.17})$$

Entonces el término de Gibbons-Hawking en la sección Euclidea es

$$I_{GH}^E = -\frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{2\kappa\eta}\Omega^{(D-2)/2}f \left[\frac{(f\Omega)'}{f\Omega} + (D-2)\frac{\Omega'}{\Omega} \right] . \quad (\text{A.18})$$

Los contratérminos de Balasubramanian-Krauss necesarios para eliminar las divergencias, para dimensiones $D \leq 7$ son [43]:

$$I_g = -\frac{1}{\kappa} \int d^n x \sqrt{-h} \left[\frac{n-1}{l} + \frac{l\mathcal{R}}{2(n-2)} + \frac{l^3}{2(n-4)(n-2)^2} \left(\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} - \frac{n\mathcal{R}^2}{4(n-1)} \right) \right] . \quad (\text{A.19})$$

La curvatura intrínseca, tensor de Ricci, la curvatura escalar y el invariante $R_{ab}R^{ab}$ de la foliación time-like (A.16) son:

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{(n-2)k}{\Omega} \sigma_{ij}, \quad \mathcal{R} = \frac{k(n-2)(n-1)}{\Omega}, \quad \mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} = \frac{(n-2)^2(n-1)k^2}{\Omega^2}. \quad (\text{A.20})$$

Donde la componente $\mathcal{R}_{tt} = 0$. Dadas las cantidades geométricas calculamos el tercer término

$$\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} - \frac{n\mathcal{R}^2}{4(n-1)} = -\frac{k^2}{4\Omega^2}(n-2)^2(n-1)(n-4). \quad (\text{A.21})$$

Entonces el contratérmino gravitacional de Balasubramanian-Krauss en la sección Euclídea es

$$I_g^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{\kappa} \frac{(D-2)}{l} \sqrt{\Omega^{D-1}f} \left(1 + \frac{l^2k}{2\Omega} - \frac{l^4k^2}{8\Omega^2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Considerando las expresiones de la temperatura y entropía, donde el área del horizonte de eventos de dimension $(n-1)$, es: $\mathcal{A} = \sigma_{n-1,k}\Omega^{(n-1)/2}|_{x_h}$. Procedemos a sumar las tres contribuciones

$$\beta^{-1} = T = \frac{f'}{4\pi\eta} \Big|_{x_h}, \quad S = \frac{\mathcal{A}}{4G}, \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^E &= -\frac{1}{T} \left(\frac{\mathcal{A}T}{4G} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma_{D-2,k}}{2\kappa T} \Omega^{(D-2)/2} (D-2) \left[\frac{f\Omega'}{\eta\Omega} - \frac{\sqrt{\Omega}f}{2l} \left(1 + \frac{l^2k}{2\Omega} - \frac{l^4k^2}{8\Omega^2} \right) \right] \Big|_{x_b}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A.3. Sistema de coordenadas $(t, r, \Sigma_{k,n-1})$

Procederemos a realizar el cálculo en las coordenadas usuales, una de las ventajas es que los resultados son más intuitivos que el caso anterior. No es necesario volver a calcular todo, simplemente realizaremos un cambio de coordenadas, sea el ansatz estático en este nuevo sistema coordenado

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\Sigma_k^2. \quad (\text{A.25})$$

Los sistemas coodenados $(t, x, \Sigma_{n-1,k})$ y $(t, r, \Sigma_{n-1,k})$ estan relacionados por

$$\Omega(x) \rightarrow S(r) , \quad f(x) \rightarrow \frac{N(r)}{S(r)} , \quad \frac{\sqrt{NH}}{\eta S} dr \rightarrow dx . \quad (\text{A.26})$$

El potencial es

$$2\kappa V = -\frac{D-2}{2\eta^2\Omega^{D/2}} [\Omega^{\frac{D-4}{2}} (f\Omega)']' \rightarrow 2\kappa V = -\frac{D-2}{2S^{\frac{D-2}{2}}\sqrt{NH}} \frac{d}{dr} \left(\frac{S^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{NH}} \frac{dN}{dr} \right) . \quad (\text{A.27})$$

En estas nuevas coordenadas, r_h es el radio del horizonte de eventos del agujero negro tal que es la solución mayor de $N(r_h) = 0$ y el borde x_b es $r_b = \infty$. El término del *bulk* es

$$I_{bulk}^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{2\kappa\eta} \left[\Omega^{\frac{D-4}{2}} (f\Omega)' \right]_{x_h}^{x_b} \rightarrow I_{bulk}^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{2\kappa} \frac{dN}{dr} \frac{S^{(n-1)/2}}{\sqrt{NH}} \Big|_{r_h}^{r_b} . \quad (\text{A.28})$$

Sea la foliación time-like $r = R = \text{constante}$, donde la métrica inducida es $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$

$$h_{ab} dx^a dx^b = -N(R) dt^2 + S(R) d\Sigma_k^2 , \quad (\text{A.29})$$

la normal, la curvatura extrínseca y la traza $K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ son

$$n_\mu = \frac{\delta_\mu^r}{\sqrt{g^{rr}}} , \quad K_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{g^{rr}}}{2} \partial_r h_{\mu\nu} , \quad K = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left[\frac{N'}{N} + (n-1) \frac{S'}{S} \right] . \quad (\text{A.30})$$

Los términos de Gibbons-Hawking y los contratérminos gravitacionales de Balasubramanian-Krauss en la sección Euclidea son

$$I_{GH}^E = -\frac{\beta\sigma_{k,n-1}}{2\kappa\eta} \Omega^{\frac{D-2}{2}} f \left[\frac{(f\Omega)'}{f\Omega} + (D-2) \frac{\Omega'}{\Omega} \right] \Big|_{x_b} \rightarrow I_{GH}^E = -\frac{\sigma_{k,n-1}}{2\kappa T} \frac{S^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{NH}} \left[\frac{dN}{dr} + (D-2) \frac{N}{S} \frac{dS}{dr} \right] \Big|_{r_b} , \quad (\text{A.31})$$

$$I_g^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}(n-1)}{l\kappa} \Omega^{\frac{D-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{l^2 k}{2\Omega} - \frac{l^4 k^2}{8\Omega^2} \right) \Big|_{x_b} \rightarrow I_g^E = \frac{\beta\sigma_{k,n-1}(n-1)}{l\kappa} S^{\frac{D-2}{2}} N^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{l^2 k}{2S} - \frac{l^4 k^2}{8S^2} \right) \Big|_{r_b} . \quad (\text{A.32})$$

Considerando de nuevo las expresiones para la temperatura y entropía del agujero negro, donde el área del horizonte de eventos es $\mathcal{A} = \sigma_{k,n-1} S^{\frac{D-2}{2}} \Big|_{r_h}$

$$\beta^{-1} = T = \frac{N'}{4\pi\sqrt{NH}} \Big|_{r_h}, \quad S = \frac{\mathcal{A}}{4G}, \quad (\text{A.33})$$

uno puede escribir la suma de las tres contribuciones en la acción total como

$$\begin{aligned} I_{bulk}^E + I_{GH}^E + I_g^E &= -\frac{1}{T} \left(\frac{\mathcal{A}T}{4G} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma_{D-2,k}}{2\kappa T} S^{(D-2)/2} (D-2) \left[\frac{NS'}{S\sqrt{NH}} - \frac{2\sqrt{N}}{l} \left(1 + \frac{l^2 k}{2S} - \frac{l^4 k^2}{8S^2} \right) \right] \Big|_{r_b}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

A.4. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento en las coordenadas, (t, x, Σ_k) y (t, r, Σ_k) , son

$$2\kappa\phi'^2 = \frac{D-2}{2\Omega^2} \left[3(\Omega')^2 - 2\Omega\Omega'' \right]; \quad \frac{2\kappa\phi'^2}{D-2} = \frac{1}{2S^2} [S'^2 - 2SS''] + \frac{S'}{2S} \frac{(NH)'}{NH} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{d}{dx} \left[\Omega^{\frac{D-2}{2}} \frac{df}{dx} \right] = -2\eta^2 k \Omega^{\frac{D-2}{2}}; \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{S^{D/2}}{\sqrt{NH}} \frac{d}{dr} \left(\frac{N}{S} \right) \right] = -2k\sqrt{NH} S^{\frac{D-4}{2}} \quad (\text{A.36})$$

$$2\kappa V = -\frac{D-2}{2\eta^2 \Omega^{D/2}} [\Omega^{\frac{D-4}{2}} (f\Omega)']'; \quad 2\kappa V = -\frac{D-2}{2S^{\frac{D-2}{2}} \sqrt{NH}} \frac{d}{dr} \left(\frac{S^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{NH}} \frac{dN}{dr} \right) \quad (\text{A.37})$$

y para el campo escalar

$$\partial_x [\Omega^{\frac{D-4}{2}} f \phi'] = \eta^2 \Omega^{D/2} \frac{\partial V}{\partial \phi}; \quad \partial_r \left(S^{\frac{D-2}{2}} \phi' \sqrt{\frac{N}{H}} \right) = \sqrt{NH} S^{\frac{D-2}{2}} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (\text{A.38})$$

Apéndice B

Tensor de stress Brown-York

Los términos de borde de la acción, son lo únicos que contribuyen al cuasilocal stress tensor de Brown-York definido en [29]

$$\tau^{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h_{ab}} . \quad (\text{B.1})$$

Para dimensiones $D = 3, 4, 5$ son necesarios sólo dos contratérminos gravitacionales. Nombraremos Ψ a los contratérminos del campo escalar, los cuales dependen explícitamente de las condiciones de borde del campo escalar

$$I_{GH} + I_g + I_\phi = \frac{1}{\kappa} \int d^n x \sqrt{-h} K - \frac{1}{\kappa} \int d^n x \sqrt{-h} \left[\frac{n-1}{l} + \frac{l\mathcal{R}}{2(n-2)} \right] - \int d^n x \sqrt{-h} \Psi . \quad (\text{B.2})$$

Variando esta acción, tenemos

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} \left(K_{ab} - h_{ab} K + \frac{n-1}{l} h_{ab} - \frac{l}{n-2} G_{ab} \right) - h_{ab} [\Psi] . \quad (\text{B.3})$$

Sea la foliación time-like $r = R = \text{constant}$

$$h_{ab} dx^a dx^b = -N(R) dt^2 + S(R) d\Sigma_k^2 , \quad (\text{B.4})$$

en donde se define el tensor de Einstein G_{ab} , que se calcula de las expresiones dadas en (A.20)

$$G_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}h_{ab}, \quad G_{tt} = \frac{(n-2)(n-1)kN}{2S}, \quad G_{ij} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2}k\nu_{ij}. \quad (\text{B.5})$$

Entonces las componentes del stress tensor, en las coordenadas (t, r, Σ_k) , las cuales se expanden al rededor del borde $r_b = \infty$, son¹

$$\tau_{tt} = -\frac{(n-1)}{\kappa} \left[\frac{NS'}{2S\sqrt{H}} - \frac{N}{l} \left(1 + \frac{l^2k}{2S} \right) \right] + N[\Psi], \quad (\text{B.6})$$

$$\tau_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\kappa} \left[\frac{S}{2\sqrt{H}} \left(\frac{N'}{N} + \frac{S'}{S}(n-2) \right) - \frac{(n-1)S}{l} - \frac{lk(n-3)}{2} \right] - \nu_{ij}S[\Psi], \quad (\text{B.7})$$

donde ν_{ij} son las componentes de la sección transversal $d\Sigma_k^2$.

Para calcular la energía se considera que la métrica del borde puede ser localmente escrita en la forma ADM:

$$h_{ab}dx^a dx^b = -L^2 dt^2 + \sigma_{ij}(dy^i + L^i dt)(dy^j + L^j dt), \quad (\text{B.8})$$

donde L y L^i son las funciones lapso y shift respectivamente, y^i son las coordenadas intrínsecas en una hiper-superficie Σ . La geometría del borde tiene una isometría generada por el vector de Killing $\xi^a = (\partial_t)^a$ para el cual la carga conservada es la energía gravitacional:

$$E = Q_{\frac{\partial}{\partial t}} = \oint_{\Sigma} d^{D-2}y \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b = \left(\oint_{\Sigma} d^2y \sqrt{\nu} \right) \frac{S^{\frac{D-2}{2}} \tau_{tt}}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma_{k,n-1} S^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{N}} \tau_{tt}, \quad (\text{B.9})$$

para la métrica estacionaria, $L^i = 0$, $L^2 = N$, donde la integral esta asociada con la superficie $t = \text{constante}$, cuya métrica inducida es

$$\sigma_{ij} dx^i dx^j = S d\Sigma_k^2. \quad (\text{B.10})$$

El vector normal $u^a = (\partial_t)^a / \sqrt{-g_{tt}}$.

¹Estos términos son suficientes para dimensiones $D = 3, 4, 5, 6, 7$.

Es igualmente útil tener las expresiones de las componentes del tensor holográfico en las coordenadas $(t, x, \Sigma_{k,n-1})$

$$\tau_{tt} = -\frac{(n-1)}{\kappa} \left[\frac{f^{3/2}\Omega'}{2\eta\sqrt{\Omega}} - \frac{\Omega f}{l} \left(1 + \frac{l^2 k}{2\Omega} \right) \right] + \frac{\Omega f}{\kappa} [\Psi], \quad (\text{B.11})$$

$$\tau_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\kappa} \left[\frac{(\Omega f)'}{2\eta\sqrt{\Omega f}} + \frac{(n-2)}{2\eta} \frac{\Omega' \sqrt{f}}{\sqrt{\Omega}} - \frac{(n-1)\Omega}{l} - \frac{lk(n-3)}{2} \right] - \frac{\nu_{ij}\Omega}{\kappa} [\Psi]. \quad (\text{B.12})$$

Y la energía

$$E = Q_{\frac{\partial}{\partial t}} = \oint_{\Sigma} d^{D-2}y \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b = \frac{\sigma_{k,n-1} \Omega^{\frac{D-2}{2}}}{\sqrt{\Omega f}} \tau_{tt}, \quad (\text{B.13})$$

Apéndice C

Cálculo del potencial on-shell

En esta parte mostraré algunos detalles del cálculo no-trivial del potencial para el agujero negro con pelo, con sección transversal plana $k = 0$. Para el caso esférico $k = 1$ el procedimiento (pero más tedioso) y resultado es el mismo.

$$\begin{aligned}
 \eta^2 V(\phi) &= -\frac{f\Omega''}{\eta^2\Omega^2} - \frac{f'\Omega'}{\eta^2\Omega^2} & (C.1) \\
 \eta^2 V(\phi) &= -\frac{1}{x^{2\nu-2}\nu^4} \left[\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{x^{2+\nu}-1}{2+\nu} + \frac{x^{2-\nu}-1}{2+\nu} - x^2 + 1 \right) \right] \left[\frac{x^{\nu-1}(\nu-1)^2\nu^2 - x^{\nu-1}(\nu-1)\nu^2}{x^2(x^\nu-1)^2\eta^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4x^{2\nu-1}(\nu-1)\nu^3 + 2x^{2\nu-1}\nu^4}{(x^\nu-1)^4\eta^2 x^2} + \frac{2x^{2\nu-1}\nu^3 - 4x^{2\nu-1}(\nu-1)\nu^3}{x^2\eta^2(x^\nu-1)^3} \right] (x^\nu-1)^4\eta^4 \\
 &\quad - \frac{1}{2x^{2\nu-2}\nu^4} \left(\frac{x^{\nu-1}(\nu-1)\nu^2}{x\eta^2(x^\nu-1)^2} - \frac{2x^{2\nu-1}\nu^3}{x\eta^2(x^\nu-1)^3} \right) (x^{1+\nu} + x^{1-\nu} - 2x) \\
 V(\phi) &= -\frac{f(x)\nu^2}{x^{2\nu-2}\nu^4} \left(\frac{x^{3\nu-3}\nu^2 + 4x^{2\nu-3}\nu^2 + x^{\nu-3}\nu^2 + 3x^{3\nu-3}\nu - 3x^{\nu-3}\nu}{(x^\nu-1)^4\eta^2} \right) (x^\nu-1)^4\eta^2 \\
 &\quad - \frac{f(x)\nu^2}{x^{2\nu-2}\nu^4} \left(\frac{2x^{3\nu-3} - 4x^{2\nu-3} + 2x^{\nu-3}}{(x^\nu-1)^4\eta^2} \right) (x^\nu-1)^4\eta^2 \\
 &\quad - \frac{\alpha\eta^4(x^\nu-1)^4}{2x^{2\nu-2}\nu^4} \left(-\frac{\nu^2}{\eta^2(x^\nu-1)^3} \right) \left(x^{2\nu-2}(\nu+1) + x^{\nu-2}(\nu-1) \right) (x^{1+\nu} + x^{1-\nu} - 2x) \\
 V(\phi) &= -\frac{f(x)x^{-\nu}}{x\nu^2} \left(x^{2\nu}(\nu+1)(\nu+2) + 4x^\nu(\nu^2-1) + (\nu-1)(\nu-2) \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha(x^\nu-1)}{2\nu^2 x^{\nu-1}} \frac{x^{2\nu-2}}{x^{\nu-1}} \left(x^{1+\nu} + x^{1-\nu} - 2x \right) \left(x^{-\nu}(\nu-1) + (\nu+1) \right) \\
 V(\phi) &= -\frac{f(x)}{2x\nu^2} \left(2x^\nu(\nu+1)(\nu+2) + 8(\nu^2-1) + 2x^{-\nu}(\nu-1)(\nu-2) \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha}{2\nu^2 x^{\nu-1}} (x^\nu-1) \left(1 + \nu + x^{-\nu}(\nu-1) \right) (1 + x^{2\nu} - 2x^\nu) \\
 V(\phi) &= -\frac{f(x)}{2x\nu^2} \left(2x^\nu(\nu+1)(\nu+2) + 8(\nu^2-1) + 2x^{-\nu}(\nu-1)(\nu-2) \right) \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2\nu^2 x^{\nu-1}} (x^\nu-1)^2 \left(2 - x^\nu(\nu+1) + x^{-\nu}(\nu-1) \right)
 \end{aligned}$$

Donde $f(x) = f(e^{l\nu\phi})$ es la función métrica, y es posible simplificar aún más

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= -\frac{e^{-l\nu\phi}}{2\nu^2} \left[\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{e^{(2+\nu)l\nu\phi} - 1}{2 + \nu} + \frac{e^{(2-\nu)l\nu\phi} - 1}{2 - \nu} - x^2 + 1 \right) \right] \left[8(\nu^2 - 1) \right. \\
 &\quad \left. + 2(\nu + 1)(\nu + 2)e^{\nu l\nu\phi} + \right. \\
 &\quad \left. 2(\nu - 1)(\nu - 2)e^{-\nu l\nu\phi} \right] - \frac{\alpha e^{l\nu\phi}}{2\nu^2} \left(\exp \frac{\nu l\nu\phi}{2} - \exp -\frac{\nu l\nu\phi}{2} \right)^2 \left[2 - e^{\nu l\nu\phi}(\nu + 1) + e^{-\nu l\nu\phi}(\nu - 1) \right] \\
 V(\phi) &= -\frac{(\nu^2 - 4)}{l^2\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} e^{-\phi l\nu(\nu+1)} + \frac{\nu + 1}{\nu - 2} e^{\phi l\nu(\nu-1)} + 4\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} e^{-\phi l\nu} \right] \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2\nu^2} \left[\frac{e^{(\nu+2)l\nu\phi}}{2 + \nu} - \frac{e^{(2-\nu)l\nu\phi}}{\nu - 2} - e^{2l\nu\phi} + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 4} \right] \left[4(\nu^2 - 1)e^{-l\nu\phi} + (\nu + 1)(\nu + 2)e^{(\nu-1)l\nu\phi} + \right. \\
 &\quad \left. (\nu - 1)(\nu - 2)e^{-(\nu+1)l\nu\phi} \right] \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2\nu^2} (e^{\nu l\nu\phi} - 2 + e^{-\nu l\nu\phi}) [2e^{l\nu\phi} - e^{(\nu+1)l\nu\phi}(\nu + 1) + e^{(1-\nu)l\nu\phi}(\nu - 1)] \\
 V(\phi) &= V_\Lambda(\phi) - \frac{\alpha}{2(\nu^2 - 4)} \left[\nu^2 (e^{l\nu\phi(\nu-1)} - e^{l\nu\phi(\nu+1)} - e^{l\nu\phi(\nu-1)} + e^{-l\nu\phi(\nu+1)} + 4e^{-l\nu\phi} - 4e^{l\nu\phi}) + \right. \\
 &\quad \left. 3\nu (e^{\phi l\nu(\nu-1)} + e^{\phi l\nu(\nu+1)} - e^{-\phi l\nu(\nu-1)} - e^{-\phi l\nu(\nu+1)}) \right. \\
 &\quad \left. + 2(e^{\phi l\nu(\nu-1)} - e^{\phi l\nu(\nu+1)} - e^{-\phi l\nu(\nu-1)} + e^{-\phi l\nu(\nu+1)}) - 4e^{-l\nu\phi} + 4e^{l\nu\phi} \right] \\
 V(\phi) &= V_\Lambda(\phi) - \frac{\alpha}{2(\nu^2 - 4)} \left[(2\nu^2 + 6\nu + 4) \sinh \phi l\nu(\nu - 1) - (2\nu^2 - 6\nu + 4) \sinh \phi l\nu(\nu + 1) \right. \\
 &\quad \left. + 8(1 - \nu^2) \sinh \phi l\nu \right] \\
 V(\phi) &= \frac{\Lambda(\nu^2 - 4)}{3\nu^2} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} e^{-\phi l\nu(\nu+1)} + \frac{\nu + 1}{\nu - 2} e^{\phi l\nu(\nu-1)} + 4\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} e^{-\phi l\nu} \right] \\
 &\quad + \alpha \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 2} \sinh \phi l\nu(\nu + 1) - \frac{\nu + 1}{\nu - 2} \sinh \phi l\nu(\nu - 1) + 4\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - 4} \sinh l\nu\phi \right]
 \end{aligned}$$

Como puede verse, este potencial no depende de η la constante de integración. Esta desaparece a medida que uno va simplificando. Entonces la teoría queda definida por los parámetros Λ, α, ν, G . Donde Λ es la constante cosmológica, α es un nuevo parámetro de la teoría, ν es el parámetro hairy y G es la constante de Newton.

Apéndice D

Formas diferenciales

Una forma diferencial de orden r o r -forma, es un tensor totalmente antisimétrico del tipo $(0, r)$ el cual se define en el espacio contangente $T^*\mathcal{M}$ de la variedad \mathcal{M} de dimensión D .

El producto cuña (que es una base para las 2-formas) se define como,

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (\text{D.1})$$

La base de un espacio vectorial de las p -formas diferenciales, denotado por $\Lambda^p(\mathcal{M})$.

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} dx^{\sigma(\mu_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(\mu_p)}, \quad (\text{D.2})$$

donde σ denota la permutación de índices. Entonces, sea la forma $H \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ que puede ser escrita en la base

$$H = \frac{1}{p!} H_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{D.3})$$

Por ejemplo, el campo gauge del electromagnetismo es una 1-forma,

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (\text{D.4})$$

El tensor de fuerza del campo electromagnético es es una 2-forma,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (\text{D.5})$$

La derivada exterior $d = dx^\mu \wedge \partial_\mu$ es un operador que mapea $d : \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{M})$. Se puede mostrar para el campo electromagnético que el tensor de fuerza F es la derivada exterior del campo gauge, $F = dA$.

El dual de Hodge definida en la variedad \mathcal{M} (de dimensión D) equipada con la métrica $g_{\mu\nu}$ es el mapeo $\star : \Lambda(\mathcal{M})^p \rightarrow \Lambda(\mathcal{M})^{D-p}$. El dual de Hodge actuando sobre la base de las formas diferenciales es,

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{\sqrt{-g}}{(D-p)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}. \quad (\text{D.6})$$

Donde $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D}$ es la densidad de Levi-Civita, tal que $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} = (+1, -1, 0)$ dependiendo de las permutaciones. Finalmente, el elemento de volumen se puede expresar como,

$$dV = d^D x \sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{D!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}. \quad (\text{D.7})$$

Bibliografía

- [1] A. Anabalón, D. Astefanesei and D. Choque, “On the thermodynamics of hairy black holes,” *Phys. Lett. B* **743**, 154 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.02.024 [arXiv:1501.04252 [hep-th]].
- [2] A. Anabalón, D. Astefanesei, D. Choque and C. Martinez, “Trace Anomaly and Counterterms in Designer Gravity,” *JHEP* **1603**, 117 (2016) doi:10.1007/JHEP03(2016)117 [arXiv:1511.08759 [hep-th]].
- [3] A. Anabalón, D. Astefanesei and D. Choque, “Hairy AdS Solitons,” *Phys. Lett. B* **762**, 80 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.08.049 [arXiv:1606.07870 [hep-th]].
- [4] A. Anabalón, “Exact Hairy Black Holes,” *Springer Proc. Phys.* **157**, 3 (2014) doi:10.1007/978-3-319-06761-21 [arXiv:1211.2765 [gr-qc]].
- [5] A. Aceña, A. Anabalón, D. Astefanesei and R. Mann, “Hairy planar black holes in higher dimensions,” *JHEP* **1401**, 153 (2014) doi:10.1007/JHEP01(2014)153 [arXiv:1311.6065 [hep-th]].
- [6] A. Anabalón and D. Astefanesei, “Black holes in ω -defomed gauged $N = 8$ supergravity,” *Phys. Lett. B* **732**, 137 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.03.035 [arXiv:1311.7459 [hep-th]].
- [7] A. Sen, “Black hole entropy function and the attractor mechanism in higher derivative gravity,” *JHEP* **0509**, 038 (2005) doi:10.1088/1126-6708/2005/09/038 [hep-th/0506177].
- [8] D. Astefanesei, K. Goldstein, R. P. Jena, A. Sen and S. P. Trivedi, “Rotating

- attractors,” JHEP **0610**, 058 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/10/058 [hep-th/0606244].
- [9] J. E. McClintock, R. Shafee, R. Narayan, R. A. Remillard, S. W. Davis and L. X. Li, “The Spin of the Near-Extreme Kerr Black Hole GRS 1915+105,” *Astrophys. J.* **652**, 518 (2006) doi:10.1086/508457 [astro-ph/0606076].
- [10] G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions,” *Nucl. Phys.* B72 (1974) 461.
- [11] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] [hep-th/9711200].
- [12] J. Maldacena, “The Gauge/gravity duality,” arXiv:1106.6073 [hep-th].
- [13] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].
- [14] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) [hep-th/9803131].
- [15] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [16] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [hep-th/9905111].
- [17] G. W. Gibbons and K. Maeda, “Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields,” *Nucl. Phys.* B298 (1988) 741.
- [18] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, and A. Strominger, “Charged black holes in string theory,” *Phys. Rev. D*43 (1991) 3140–3143
- [19] R. Runi, J. A. Wheeler, *Introducing the Black Hole*, *Physics Today* 24 (1971)

-
- [20] T. Hertog and K. Maeda, “Black holes with scalar hair and asymptotics in $N = 8$ supergravity,” JHEP **0407**, 051 (2004) [hep-th/0404261].
- [21] M. Heusler, “A No hair theorem for selfgravitating nonlinear sigma models,” J. Math. Phys. **33**, 3497 (1992). doi:10.1063/1.529899
- [22] D. Sudarsky and J. A. Gonzalez, “On black hole scalar hair in asymptotically anti-de Sitter space-times,” Phys. Rev. D **67** (2003) 024038 [gr-qc/0207069].
- [23] T. Hertog, “Towards a Novel no-hair Theorem for Black Holes,” Phys. Rev. D **74**, 084008 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.084008 [gr-qc/0608075].
- [24] A. Acena, A. Anabalón and D. Astefanesei, “Exact hairy black brane solutions in AdS_5 and holographic RG flows,” Phys. Rev. D **87**, no. 12, 124033 (2013) [arXiv:1211.6126 [hep-th]].
- [25] A. Anabalón, D. Astefanesei and R. Mann, “Exact asymptotically flat charged hairy black holes with a dilaton potential,” JHEP **1310**, 184 (2013) [arXiv:1308.1693 [hep-th]].
- [26] V. Balasubramanian and P. Kraus, “A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity,” Commun. Math. Phys. **208**, 413 (1999) doi:10.1007/s002200050764 [hep-th/9902121].
- [27] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, “String theory and classical absorption by three-branes,” Nucl. Phys. B **499**, 217 (1997) [hep-th/9703040].
- [28] S. S. Gubser and I. R. Klebanov, “Absorption by branes and Schwinger terms in the world volume theory,” Phys. Lett. B **413**, 41 (1997) [hep-th/9708005].
- [29] J. D. Brown and J. W. York, Jr., “Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action,” Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993) [gr-qc/9209012].
- [30] R. C. Myers, “Stress tensors and Casimir energies in the AdS / CFT correspondence,” Phys. Rev. D **60** (1999) 046002 [hep-th/9903203].

-
- [31] S. Hollands, A. Ishibashi and D. Marolf, “Comparison between various notions of conserved charges in asymptotically AdS-spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **22**, 2881 (2005) [hep-th/0503045].
- [32] A. Anabalón, D. Astefanesei and C. Martínez, “Mass of asymptotically anti-de Sitter hairy spacetimes,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 4, 041501 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.041501 [arXiv:1407.3296 [hep-th]].
- [33] T. Regge and C. Teitelboim, “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity,” *Annals Phys.* **88**, 286 (1974).
- [34] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Asymptotic behavior and Hamiltonian analysis of anti-de Sitter gravity coupled to scalar fields,” *Annals Phys.* **322**, 824 (2007) [hep-th/0603185].
- [35] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Black holes and asymptotics of 2+1 gravity coupled to a scalar field,” *Phys. Rev. D* **65**, 104007 (2002) [hep-th/0201170].
- [36] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Asymptotically anti-de Sitter spacetimes and scalar fields with a logarithmic branch,” *Phys. Rev. D* **70**, 044034 (2004) [hep-th/0404236].
- [37] G. Barnich, “Conserved charges in gravitational theories: Contribution from scalar fields,” gr-qc/0211031.
- [38] J. Gegenberg, C. Martínez and R. Troncoso, “A Finite action for three-dimensional gravity with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **67**, 084007 (2003) [hep-th/0301190].
- [39] M. Bañados and S. Theisen, “Scale invariant hairy black holes,” *Phys. Rev. D* **72**, 064019 (2005) [hep-th/0506025].
- [40] A. J. Amsel and D. Marolf, “Energy Bounds in Designer Gravity,” *Phys. Rev. D* **74**, 064006 (2006) [Erratum-ibid. *D* **75**, 029901 (2007)] [hep-th/0605101].

-
- [41] T. Hertog and G. T. Horowitz, “Designer gravity and field theory effective potentials,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 221301 (2005) doi:10.1103/PhysRevLett.94.221301 [hep-th/0412169].
- [42] E. Witten, “Multitrace operators, boundary conditions, and AdS / CFT correspondence,” hep-th/0112258.
- [43] R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, “Surface terms as counterterms in the AdS / CFT correspondence,” *Phys. Rev. D* **60**, 104001 (1999) [hep-th/9903238].
- [44] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, “Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity,” *Phys. Lett. B* **115** (1982) 197; P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, “Stability in Gauged Extended Supergravity,” *Annals Phys.* **144** (1982) 249.
- [45] A. Ishibashi and R. M. Wald, “Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 3. Anti-de Sitter space-time,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 2981 [hep-th/0402184].
- [46] V. Balasubramanian, P. Kraus and A. E. Lawrence, “Bulk versus boundary dynamics in anti-de Sitter space-time,” *Phys. Rev. D* **59**, 046003 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.59.046003 [hep-th/9805171].
- [47] V. Balasubramanian, P. Kraus, A. E. Lawrence and S. P. Trivedi, “Holographic probes of anti-de Sitter space-times,” *Phys. Rev. D* **59**, 104021 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.59.104021 [hep-th/9808017].
- [48] H. Lü, Y. Pang and C. N. Pope, “AdS Dyonic Black Hole and its Thermodynamics,” *JHEP* **1311**, 033 (2013) doi:10.1007/JHEP11(2013)033 [arXiv:1307.6243 [hep-th]].
- [49] H. Lu, C. N. Pope and Q. Wen, “Thermodynamics of AdS Black Holes in Einstein-Scalar Gravity,” *JHEP* **1503**, 165 (2015) doi:10.1007/JHEP03(2015)165 [arXiv:1408.1514 [hep-th]].

- [50] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **70**, 084035 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.084035 [hep-th/0406111].
- [51] A. Ashtekar and S. Das, “Asymptotically Anti-de Sitter space-times: Conserved quantities,” *Class. Quant. Grav.* **17**, L17 (2000) [hep-th/9911230]; A. Ashtekar and A. Magnon, “Asymptotically anti-de Sitter space-times,” *Class. Quant. Grav.* **1** (1984) L39.
- [52] A. Guarino, “On new maximal supergravity and its BPS domain-walls,” *JHEP* **1402**, 026 (2014) doi:10.1007/JHEP02(2014)026 [arXiv:1311.0785 [hep-th]].
- [53] J. Tarrío and O. Varela, “Electric/magnetic duality and RG flows in AdS_4/CFT_3 ,” *JHEP* **1401**, 071 (2014) Addendum: [*JHEP* **1512**, 068 (2015)] doi:10.1007/JHEP01(2014)071, 10.1007/JHEP12(2015)068 [arXiv:1311.2933 [hep-th]].
- [54] T. Hertog and G. T. Horowitz, “Towards a big crunch dual,” *JHEP* **0407**, 073 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/07/073 [hep-th/0406134].
- [55] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, “Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence,” *Commun. Math. Phys.* **217**, 595 (2001) doi:10.1007/s002200100381 [hep-th/0002230].
- [56] M. Bianchi, D. Z. Freedman and K. Skenderis, “Holographic renormalization,” *Nucl. Phys. B* **631**, 159 (2002) doi:10.1016/S0550-3213(02)00179-7 [hep-th/0112119].
- [57] K. Skenderis, “Lecture notes on holographic renormalization,” *Class. Quant. Grav.* **19**, 5849 (2002) doi:10.1088/0264-9381/19/22/306 [hep-th/0209067].
- [58] D. Astefanesei and E. Radu, “Quasilocal formalism and black ring thermodynamics,” *Phys. Rev. D* **73**, 044014 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.044014 [hep-th/0509144].

-
- [59] R. B. Mann and D. Marolf, “Holographic renormalization of asymptotically flat spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **23**, 2927 (2006) doi:10.1088/0264-9381/23/9/010 [hep-th/0511096].
- [60] R. B. Mann, D. Marolf and A. Virmani, “Covariant Counterterms and Conserved Charges in Asymptotically Flat Spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **23**, 6357 (2006) doi:10.1088/0264-9381/23/22/017 [gr-qc/0607041].
- [61] D. Astefanesei, R. B. Mann and C. Stelea, “Note on counterterms in asymptotically flat spacetimes,” *Phys. Rev. D* **75**, 024007 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.024007 [hep-th/0608037].
- [62] D. Marolf, “Asymptotic flatness, little string theory, and holography,” *JHEP* **0703**, 122 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/03/122 [hep-th/0612012].
- [63] D. Astefanesei, M. J. Rodriguez and S. Theisen, “Quasilocal equilibrium condition for black ring,” *JHEP* **0912**, 040 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/12/040 [arXiv:0909.0008 [hep-th]].
- [64] D. Astefanesei, R. B. Mann, M. J. Rodriguez and C. Stelea, “Quasilocal formalism and thermodynamics of asymptotically flat black objects,” *Class. Quant. Grav.* **27**, 165004 (2010) doi:10.1088/0264-9381/27/16/165004 [arXiv:0909.3852 [hep-th]].
- [65] D. Astefanesei, M. J. Rodriguez and S. Theisen, “Thermodynamic instability of doubly spinning black objects,” *JHEP* **1008**, 046 (2010) doi:10.1007/JHEP08(2010)046 [arXiv:1003.2421 [hep-th]].
- [66] V. Balasubramanian, J. de Boer and D. Minic, “Mass, entropy and holography in asymptotically de Sitter spaces,” *Phys. Rev. D* **65**, 123508 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.123508 [hep-th/0110108].
- [67] A. M. Ghezelbash and R. B. Mann, “Action, mass and entropy of Schwarzschild-de Sitter black holes and the de Sitter / CFT correspondence,” *JHEP* **0201**, 005 (2002) doi:10.1088/1126-6708/2002/01/005 [hep-th/0111217].

-
- [68] A. M. Ghezelbash, D. Ida, R. B. Mann and T. Shiromizu, “Slicing and brane dependence of the (A)dS / CFT correspondence,” *Phys. Lett. B* **535**, 315 (2002) doi:10.1016/S0370-2693(02)01773-2 [hep-th/0201004].
- [69] D. Astefanesei, R. B. Mann and E. Radu, “Reissner-Nordstrom-de Sitter black hole, planar coordinates and dS / CFT,” *JHEP* **0401**, 029 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/01/029 [hep-th/0310273].
- [70] K. Skenderis, “Asymptotically Anti-de Sitter space-times and their stress energy tensor,” *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 740 (2001) doi:10.1142/S0217751X0100386X [hep-th/0010138].
- [71] I. Papadimitriou, “Multi-Trace Deformations in AdS/CFT: Exploring the Vacuum Structure of the Deformed CFT,” *JHEP* **0705**, 075 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/05/075 [hep-th/0703152].
- [72] A. Sen, “Entropy function for heterotic black holes,” *JHEP* **0603**, 008 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/03/008 [hep-th/0508042].
- [73] A. Sen, “Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates,” *Gen. Rel. Grav.* **40**, 2249 (2008) doi:10.1007/s10714-008-0626-4 [arXiv:0708.1270 [hep-th]].
- [74] D. Astefanesei, H. Nastase, H. Yavartanoo and S. Yun, “Moduli flow and non-supersymmetric AdS attractors,” *JHEP* **0804**, 074 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/04/074 [arXiv:0711.0036 [hep-th]].
- [75] D. Astefanesei, N. Banerjee and S. Dutta, “(Un)attractor black holes in higher derivative AdS gravity,” *JHEP* **0811**, 070 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/11/070 [arXiv:0806.1334 [hep-th]].
- [76] J. F. Morales and H. Samtleben, “Entropy function and attractors for AdS black holes,” *JHEP* **0610**, 074 (2006) [hep-th/0608044].
- [77] D. Astefanesei, N. Banerjee and S. Dutta, “Moduli and electromagnetic black brane holography,” *JHEP* **1102**, 021 (2011) [arXiv:1008.3852 [hep-th]].

-
- [78] D. Astefanesei, N. Banerjee and S. Dutta, “Near horizon data and physical charges of extremal AdS black holes,” Nucl. Phys. B **853**, 63 (2011) [arXiv:1104.4121 [hep-th]].
- [79] J. D. Bekenstein, “Transcendence of the law of baryon-number conservation in black hole physics,” Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 452.
- [80] J. D. Bekenstein, “Nonexistence of baryon number for black holes. ii,” Phys. Rev. D **5** (1972) 2403.
- [81] D. Sudarsky, “A Simple proof of a no hair theorem in Einstein Higgs theory,” Class. Quant. Grav. **12** (1995) 579.
- [82] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, “Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review,” Int. J. Mod. Phys. D **24**, no. 09, 1542014 (2015) doi:10.1142/S0218271815420146 [arXiv:1504.08209 [gr-qc]].
- [83] T. Torii, K. Maeda and M. Narita, “Scalar hair on the black hole in asymptotically anti-de Sitter space-time,” Phys. Rev. D **64** (2001) 044007.
- [84] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “A New Class of Exact Hairy Black Hole Solutions,” Gen. Rel. Grav. **43** (2011) 163 [arXiv:0911.1711 [hep-th]].
- [85] P. A. González, E. Papantonopoulos, J. Saavedra and Y. Vásquez, “Four-Dimensional Asymptotically AdS Black Holes with Scalar Hair,” JHEP **1312** (2013) 021 [arXiv:1309.2161 [gr-qc]].
- [86] X. H. Feng, H. Lu and Q. Wen, “Scalar Hairy Black Holes in General Dimensions,” Phys. Rev. D **89**, 044014 (2014) [arXiv:1312.5374 [hep-th]].
- [87] A. Anabalón, F. Canfora, A. Giacomini and J. Oliva, “Black Holes with Primary Hair in gauged N=8 Supergravity,” JHEP **1206**, 010 (2012) doi:10.1007/JHEP06(2012)010 [arXiv:1203.6627 [hep-th]].
- [88] A. Anabalón, “Exact Black Holes and Universality in the Backreaction of non-linear Sigma Models with a potential in (A)dS4,” JHEP **1206**, 127 (2012) doi:10.1007/JHEP06(2012)127 [arXiv:1204.2720 [hep-th]].

-
- [89] A. Anabalón, D. Astefanesei and J. Oliva, “Hairy Black Hole Stability in AdS, Quantum Mechanics on the Half-Line and Holography,” JHEP **1510**, 068 (2015) doi:10.1007/JHEP10(2015)068 [arXiv:1507.05520 [hep-th]].
- [90] D. Astefanesei and E. Radu, “Boson stars with negative cosmological constant,” Nucl. Phys. B **665**, 594 (2003) [gr-qc/0309131].
- [91] P. Bizon and A. Rostworowski, “On weakly turbulent instability of anti-de Sitter space,” Phys. Rev. Lett. **107**, 031102 (2011) [arXiv:1104.3702 [gr-qc]].
- [92] A. Buchel, S. L. Liebling and L. Lehner, “Boson stars in AdS spacetime,” Phys. Rev. D **87**, no. 12, 123006 (2013) [arXiv:1304.4166 [gr-qc]].
- [93] D. Astefanesei and E. Radu, “Rotating boson stars in (2+1)-dimensions,” Phys. Lett. B **587**, 7 (2004) [gr-qc/0310135].
- [94] A. Buchel, “AdS boson stars in string theory,” arXiv:1510.08415 [hep-th].
- [95] A. Anabalón and D. Astefanesei, “On attractor mechanism of AdS_4 black holes,” Phys. Lett. B **727**, 568 (2013) [arXiv:1309.5863 [hep-th]].
- [96] W. Xu and D. C. Zou, “(2 + 1)-dimensional charged black holes with scalar hair in Einstein-Power-Maxwell Theory,” arXiv:1408.1998 [hep-th].
- [97] Q. Wen, “Strategy to Construct Exact Solutions in Einstein-Scalar Gravities,” Phys. Rev. D **92**, no. 10, 104002 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104002 [arXiv:1501.02829 [hep-th]].
- [98] X. Zhang and H. Lu, “Critical Behavior in a Massless Scalar Field Collapse with Self-interaction Potential,” arXiv:1410.8337 [gr-qc].
- [99] X. Zhang and H. Lu, “Exact Black Hole Formation in Asymptotically (A)dS and Flat Spacetimes,” Phys. Lett. B **736** (2014) 455 [arXiv:1403.6874 [hep-th]].
- [100] M. Henningson and K. Skenderis, “The Holographic Weyl anomaly,” JHEP **9807**, 023 (1998) [hep-th/9806087].

-
- [101] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, “Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence,” *Commun. Math. Phys.* **217**, 595 (2001) [hep-th/0002230].
- [102] I. Papadimitriou and K. Skenderis, “AdS / CFT correspondence and geometry,” hep-th/0404176.
- [103] G. Giribet, A. Goya and J. Oliva, “The different phases of hairy black holes in AdS₅ space,” arXiv:1501.00184 [hep-th].
- [104] J. D. Brown, E. A. Martinez and J. W. York, “Rotating Black Holes, Complex Geometry, And Thermodynamics,” *Annals N. Y. Acad. Sci.* **631**, 225 (1991).
- [105] S. W. Hawking and D. Page, “Thermodynamics Of Black Holes In Anti-de Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
- [106] G. T. Horowitz and R. C. Myers, “The AdS / CFT correspondence and a new positive energy conjecture for general relativity,” *Phys. Rev. D* **59**, 026005 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.59.026005 [hep-th/9808079].
- [107] Y. Brihaye, B. Hartmann and S. Tojiev, “AdS solitons with conformal scalar hair,” *Phys. Rev. D* **88**, 104006 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.104006 [arXiv:1307.6241 [gr-qc]].
- [108] N. Ogawa and T. Takayanagi, “Higher Derivative Corrections to Holographic Entanglement Entropy for AdS Solitons,” *JHEP* **1110**, 147 (2011) doi:10.1007/JHEP10(2011)147 [arXiv:1107.4363 [hep-th]].
- [109] H. q. Shi and D. f. Zeng, “Geodesic Motions in AdS Soliton Background Space-time,” arXiv:1603.08624 [hep-th].
- [110] B. Kleihaus, J. Kunz, E. Radu and B. Subagyo, “Axially symmetric static scalar solitons and black holes with scalar hair,” *Phys. Lett. B* **725**, 489 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.07.051
- [111] Y. Brihaye, B. Hartmann and S. Tojiev, “Formation of scalar hair on Gauss-Bonnet solitons and black holes,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 2, 024040 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.024040 [arXiv:1210.2268 [gr-qc]].

-
- [112] I. Smoliński, “Symmetry inheritance of scalar fields,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 14, 145010 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/14/145010 [arXiv:1501.04967 [gr-qc]].
- [113] M. Cadoni, S. Mignemi and M. Serra, “Black brane solutions and their solitonic extremal limit in Einstein-scalar gravity,” *Phys. Rev. D* **85**, 086001 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.086001 [arXiv:1111.6581 [hep-th]].
- [114] Z. Y. Fan and H. Lu, “Static and Dynamic Hairy Planar Black Holes,” *Phys. Rev. D* **92**, no. 6, 064008 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.064008 [arXiv:1505.03557 [hep-th]].
- [115] Z. Y. Fan and B. Chen, “Exact formation of hairy planar black holes,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 8, 084013 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.084013 [arXiv:1512.09145 [hep-th]].
- [116] E. Woolgar, “The rigid Horowitz-Myers conjecture,” arXiv:1602.06197 [math.DG].
- [117] G. J. Galloway, S. Surya and E. Woolgar, “A Uniqueness theorem for the AdS soliton,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101102 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.101102 [hep-th/0108170].
- [118] G. J. Galloway, S. Surya and E. Woolgar, “On the geometry and mass of static, asymptotically AdS space-times, and the uniqueness of the AdS soliton,” *Commun. Math. Phys.* **241**, 1 (2003) doi:10.1007/s00220-003-0912-7 [hep-th/0204081].
- [119] S. Surya, K. Schleich and D. M. Witt, “Phase transitions for flat AdS black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5231 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.86.5231 [hep-th/0101134].
- [120] G. Dall’Ágata, G. Inverso and M. Trigiante, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 201301 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.109.201301 [arXiv:1209.0760 [hep-th]].
- [121] A. Anabalón, D. Astefanesei and R. Mann, “Holographic equation of state in fluid/gravity duality,” arXiv:1604.05595 [hep-th].

-
- [122] C. Herdeiro and E. Radu, “Construction and physical properties of Kerr black holes with scalar hair,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 14, 144001 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/14/144001 [arXiv:1501.04319 [gr-qc]].
- [123] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, “Kerr black holes with scalar hair,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 221101 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.112.221101 [arXiv:1403.2757 [gr-qc]].
- [124] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, “Holography, thermodynamics and fluctuations of charged AdS black holes,” *Phys. Rev. D* **60**, 104026 (1999) [hep-th/9904197].