



Universidad Técnica Federico Santa María.
Departamento de Física.

Análisis del espectro de emisión de la evaporación de un agujero negro de Schwarzschild

Miguel Ángel Figueroa Villegas

Tutor: Dr. Claudio Dib

Co-tutor: Dr. Oscar Castillo-Felisola

Trabajo de tesis para el grado de Magíster en Ciencias,
mención física, de la Universidad Técnica Federico Santa
María.

16 de junio, 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título; Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Análisis del espectro de emisión de la evaporación de un agujero negro de Schwarzschild

Nombre del candidato(a): Miguel Ángel Figueroa Villegas

Carrera / Grado: Magíster en Ciencias mención Física

Campus: Casa Central Valparaíso ; **Departamento:** Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Claudio Omar Dib Venturelli, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

6 meses; 12 meses; 2 años; 3 años; 5 años; 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 26/07/2025

; Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 26/07/2025

; Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE EMISIÓN DE LA
EVAPORACIÓN DE UN AGUJERO NEGRO DE
SCHWARZSCHILD

AUTOR:

MIGUEL ÁNGEL FIGUEROA VILLEGAS

Trabajo de tesis para el grado de Magíster en Ciencias,
mención física, de la Universidad Técnica Federico
Santa María.

COMISIÓN EXAMINADORA:

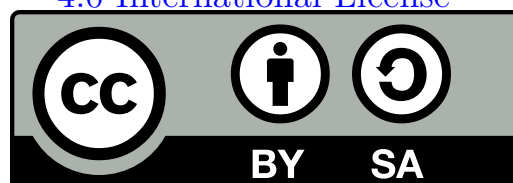
Dr. Claudio Dib (USM)

Dr. Oscar Castillo-Felisola (USM)

Dr. José Villanueva (UV)

Dr. Alfonso Zerwekh (USM)

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



Índice general

1. Introducción	1
2. Fundamentos teóricos	3
2.1. Preliminares	3
2.2. Aproximación de cuerpo negro	5
2.3. Teoría cuántica de campos	8
2.3.1. Conceptos básicos de teoría de campos	8
2.3.2. Extensión a espacios curvos	11
3. Derivación	17
3.1. Modelo	17
3.1.1. Propagación del campo	18
3.1.2. Creación de partículas y número de ocupación	22
3.2. Factores de cuerpo gris	24
3.2.1. Modos normales en geometría de Schwarzschild	24
3.2.2. Ondas en geometría de Schwarzschild	26
3.2.3. Metodología	28
3.3. Distribución de probabilidad	30
4. Resultados y análisis	35
4.1. Factores de cuerpo gris	36
4.1.1. Campo escalar real	36
4.1.2. Campo vectorial	38
4.1.3. Otras especies	41
4.2. Tasas de emisión	42
4.3. Análisis semiclásico	44
4.4. Análisis de la termodinámica de agujeros negros	51
5. Conclusiones y Discusión	55
A. Cálculo de coeficientes de Bogoliubov	57

B. Campo vectorial	63
Bibliografía	70

Índice de figuras

2.1.	Diagrama del flujo de energía desde el interior de un cuerpo negro hacia una apertura de área A (área gris oscura) desde un ángulo de incidencia θ con respecto al eje perpendicular al plano. El flujo que atraviesa la apertura en un tiempo dt es igual a la energía contenida en el cilindro de base A y altura $c \cos \theta dt$	6
3.1.	Diagrama de Penrose del colapso gravitacional de un cascarón esférico en un espacio-tiempo de Vaidya.	19
3.2.	Diagrama del colapso gravitacional de un cascarón esférico en un espacio-tiempo de Vaidya. El rayo entrante desde $v = v_0 \in \mathcal{I}^-$ representa al cascarón esférico. Por otro lado, el rayo entrante desde $v = v_{\text{in}} \in \mathcal{I}^-$ representa el origen de un rayo saliente con $u = u_{\text{out}}$ en \mathcal{I}^+	21
3.3.	Potencial efectivo $V_l(r)$ de un campo escalar dado por la ecuación (3.30) en función de la coordenada radial en unidades de radio de Schwarzschild, r_s	26
3.4.	Modos (a) UP e (b) IN representando la dispersión según las condiciones de borde aplicadas en la aproximación de un agujero negro eterno.	27
3.5.	Modos (a) DOWN y (b) OUT representando la dispersión según las condiciones de borde aplicadas en la aproximación de un agujero negro eterno.	28
4.1.	(a) Factores de cuerpo gris $\Gamma_l(\omega)$ en función de la frecuencia angular ω en unidades de $r_s^{-1}c$ para los primeros modos de un campo escalar. (b) Sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de ω para los mismos modos.	37
4.2.	Sección transversal de absorción total en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω	38
4.3.	Potencial efectivo $V_l(r)$ para un campo vectorial sin masa dado por la ecuación (4.7) en función de la coordenada radial en unidades de radio de Schwarzschild, r_s	39

4.4.	(a) Factores de cuerpo gris $\Gamma_l(\omega)$ en función de la frecuencia angular ω en unidades de $r_s^{-1}c$ para el caso de un campo vectorial sin masa. (b) Sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de ω para los mismos modos. (c) Sección transversal total en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω	40
4.5.	Sección transversal total (sumada sobre todos los modos con momento angular definido) de partículas no masivas en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω	41
4.6.	Tasa de emisión espectral de partículas sin masa en función de la frecuencia angular en unidades de $r_s^{-1}c$. Se incluye emisión espectral de un cuerpo negro a misma temperatura T_H con área superficial igual al área del horizonte de eventos.	42
4.7.	Diagrama del problema clásico de captura gravitacional en un agujero negro de Schwarzschild (círculo negro) para (a) partículas paralelamente incidentes desde el infinito y (b) la misma trayectoria con inversión temporal. La circunferencia punteada representa la esfera de fotones de radio $r_{int} = 3r_s/2$	45
4.8.	Diagrama de un flujo de partículas sobre un plano perpendicular a su dirección de movimiento con valores discretos del parámetro de impacto $b_l(k)$, ec. 4.15, y el área del anillo circular que forma entre modos contiguos al impactar en el plano.	46
4.9.	(a) Factores de cuerpo gris y (b) sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω para la aproximación semiclásica considerando un potencial efectivo análogo al campo vectorial sin masa. (c) Sección transversal de absorción para el método semiclásico en comparación con resultado de campo vectorial sin masa.	50
A.1.	Contorno de integración de $I(\omega)$ sobre el plano complejo de x para $\omega > 0$ y $\omega < 0$	59

Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la física moderna es la reconciliación entre las teorías microscópicas, descritas por la teoría cuántica de campos, y la teoría a grandes escalas, descrita por la relatividad general. Si bien ambas teorías han sido extremadamente exitosas en sus respectivos dominios, la falta de testeos experimentales que arrojen luz sobre su naturaleza en conjunto ha obstaculizado su unificación. En este contexto, el fenómeno de radiación de Hawking en agujeros negros ha resultado ser particularmente atractivo, ya que constituye uno de los pocos escenarios en que la interacción entre estos dos marcos teóricos ha de ser manifiesta.

Según el descubrimiento de Bekenstein y Hawking, los agujeros negros emiten toda clase de partículas debido a efectos cuánticos en el horizonte de eventos y tienen una temperatura que, para el caso de agujeros negros de Schwarzschild, es inversamente proporcional a su masa. De este modo, los agujeros negros se evaporan a una tasa creciente, debido a que al radiar, pierden masa y aumentan aún más su temperatura. Por este motivo, se predice que las etapas finales del proceso de evaporación están descritas por una explosión de rayos gamma. Ahora bien, aunque los agujeros negros han sido confirmados experimentalmente y la relatividad general permite que éstos posean cualquier masa, la evolución estelar establece una cota mínima en su masa de unas cuantas masas solares, lo que implica que los agujeros negros astrofísicos que hoy conocemos poseen una temperatura muy baja como para ser detectada y como para haber alcanzado etapas avanzadas en su evaporación. En consecuencia, los agujeros negros primordiales han sido propuestos como candidatos viables para su eventual detección.

Los agujeros negros primordiales son agujeros negros hipotéticos que se habrían formado en etapas tempranas del universo y que tendrían un rango de masas que va desde la masa de Planck hasta aproximadamente 10^5 masas solares. De este modo, ciertos agujeros negros primordiales formados en el universo temprano podrían estar culminando su proceso de evaporación en la actualidad, generando el burst de partículas de alta energía. Las propiedades de este burst dependen en gran parte del modelo de la física de partículas aplicado. Luego, la confirmación de la evaporación de agujeros negros no sólo representaría un acercamiento hacia la unificación de la teoría cuántica de campos y la relatividad general, sino también sobre el universo temprano y la física de altas energías.

A pesar de las propiedades termodinámicas de los agujeros negros, el espectro observado por un observador distante difiere del de un cuerpo negro ideal a causa de los denominados factores de cuerpo gris. Estos factores se originan debido a la retrodispersión ocasionada por el potencial gravitacional o centrífugo y dependen tanto de la frecuencia como de la especie o tipo de partícula emitida. En consecuencia, su consideración es necesaria para obtener el espectro resultante y para estudiar fuentes actuales de rayos gamma que puedan tener un origen debido a este fenómeno. No obstante, la presencia de dichos factores plantea interrogantes sobre la verdadera naturaleza térmica del espectro y del mismo agujero negro.

En este trabajo investigaremos el espectro de emisión en el proceso de evaporación de un agujero negro de Schwarzschild siguiendo el formalismo de la teoría cuántica de campos en espacios curvos. Analizaremos los factores de cuerpo gris que dan a lugar a las desviaciones con respecto a un cuerpo negro y estudiaremos los efectos en el espectro de diferentes especies no masivas, con particular énfasis a partículas escalares y vectoriales. Adicionalmente, mediante un análisis semiclásico, se estudiará el rol de los efectos dispersivos en la determinación del espectro térmico y se determinará el tamaño efectivo como fuente emisora. Esta tesis se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos de la radiación de Hawking y la teoría cuántica de campos en espacios curvos. En el capítulo 3 se desglosa la derivación del espectro de emisión y la metodología para obtener los factores de cuerpo gris. En el capítulo 4 se presenta los resultados y el análisis para el caso de partículas escalares y vectoriales sin masa, y se examinan otras especies. Finalmente, en el capítulo 5 se expone las conclusiones y el trabajo futuro.

2.1. Preliminares

Los agujeros negros son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en las que se presentan regiones del espacio-tiempo donde el campo gravitacional es tan intenso que nada, ni siquiera la luz, puede escapar. Independiente del proceso en el cual se hayan formado, los agujeros negros asintóticamente planos y estacionarios, que son soluciones a la relatividad general clásica, están únicamente caracterizados por su masa M , el momento angular J y su carga eléctrica Q [1,2]. Esta propiedad se conoce como el teorema de no pelo. La solución más sencilla que describe a un agujero negro sin rotación ni carga eléctrica se conoce como agujero negro de Schwarzschild, cuyo elemento de línea es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz y M es la masa del agujero negro. El radio

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.2)$$

se denomina el radio de Schwarzschild. La superficie $r = r_s$ se denomina el horizonte de eventos e indica el borde de la región del agujero negro y la superficie del pasado de la que es imposible escapar al infinito. El tamaño del agujero negro es medido por el área del horizonte de eventos, $A = 4\pi r_s^2$.

Para cualquier agujero negro, caracterizado por M , J y Q , se satisfacen los siguientes principios:

- Ley cero: La gravedad superficial κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte.
- Primera ley: Para un agujero negro estacionario con masa M , momento angular J y carga Q , cualquier perturbación está dada por (unidades naturales):

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (2.3)$$

donde Ω es la velocidad angular del agujero negro y Φ es el potencial electrostático en el horizonte.

- Segunda ley: El área del horizonte de eventos de un agujero negro no decrece [3]:

$$\delta A \geq 0. \quad (2.4)$$

- Tercera ley: Es imposible reducir, por cualquier procedimiento, la gravedad superficial κ a cero en un número finito de pasos.

Estas se conocen como las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros [4].

Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros son análogas a las leyes de la termodinámica. La correspondencia es completa si se identifica:

$$E \longleftrightarrow M, \quad S \longleftrightarrow A \quad \text{y} \quad T \longleftrightarrow \kappa. \quad (2.5)$$

El primero en establecer esta analogía fue Bekenstein [5] al proponer que la entropía es proporcional al área del agujero negro:

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A. \quad (2.6)$$

donde \hbar es la constante de Planck y k_B es la constante de Boltzmann. Además, propuso que la segunda ley de la termodinámica se mantiene para la entropía del agujero negro, S_{AN} , y la entropía de la materia fuera del agujero negro, S_m :

$$\delta S \equiv \delta(S_{AN} + S_m) \geq 0. \quad (2.7)$$

La validez física de la descripción termodinámica, más que simple analogía, quedó establecida con la radiación de Hawking [6, 7]. En consecuencia, se pudo determinar que los agujeros negros tienen una temperatura:

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi ck_B}, \quad (2.8)$$

que para agujeros negros de Schwarzschild es

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}. \quad (2.9)$$

A continuación, se considerará exclusivamente el caso de agujeros negros de Schwarzschild.

2.2. Aproximación de cuerpo negro

Los agujeros negros tienen una temperatura T_H establecida por su masa o tamaño. Luego, se puede suponer que su emisión está determinada por la ley de Kirchhoff de la radiación térmica [8]:

$$Q(\omega, T) = A(\omega, T)Q_{CN}(\omega, T), \quad (2.10)$$

donde $Q(\omega, T)$ es la emisión espectral por unidad de área del radiador térmico, $Q_{CN}(\omega, T)$ es la emisión espectral por unidad de área de un cuerpo negro y $A(\omega, T)$ es la absortividad espectral. Como primera aproximación, supondremos que adicionalmente los agujeros negros son cuerpos negros, $A(\omega, T) = 1$.

Un cuerpo negro puede representarse como una caja caliente de luz en equilibrio térmico, donde las ondas electromagnéticas tienen frecuencias discretas debido a las condiciones de borde en las paredes de la cavidad:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{L}|\vec{n}|c, \quad (2.11)$$

con $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un 3-vector de números enteros. La densidad de estados a una frecuencia angular ω viene dada según

$$g(\omega_n) = 4\pi g_i \left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \omega_n^2,$$

donde g_i es el número de grados de libertad. Por otro lado, la energía media asociada a cada modo viene dada por el número medio de ocupación:

$$\langle E_n \rangle = \hbar\omega \langle n_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega_n}{\exp(\hbar\omega_n\beta) \mp 1}, \quad (2.12)$$

donde $\beta = 1/k_B T_H$ y en el denominador el signo “-” corresponde a bosones y “+” a fermiones.

El interior de la cavidad puede verse un como gas de bosones o fermiones en equilibrio térmico. Así, ya que un cuerpo negro emite toda la radiación que absorbe, la salida espectral de una cavidad muy grande puede determinarse por el flujo de energía sobre una pequeña apertura.

La densidad de energía espectral en el límite $L \gg 1$, viene dado por la energía total en todos los modos disponibles a frecuencia angular ω , dividida por el volumen del sistema:

$$u(\omega) = \frac{g_i}{2\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega\beta) \mp 1}. \quad (2.13)$$

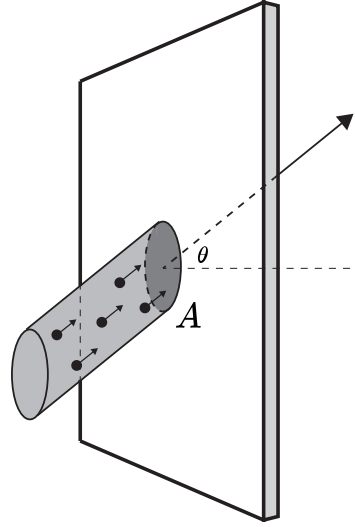


FIGURA 2.1: Diagrama del flujo de energía desde el interior de un cuerpo negro hacia una apertura de área A (área gris oscura) desde un ángulo de incidencia θ con respecto al eje perpendicular al plano. El flujo que atraviesa la apertura en un tiempo dt es igual a la energía contenida en el cilindro de base A y altura $c \cos \theta dt$.

Considerando una pequeña apertura de área A , el flujo de energía incide desde todas las direcciones debido a la isotropía del sistema. El flujo espectral sobre esta área en una dirección definida θ viene dado por la proporción moviéndose en esa dirección, $d\Omega/4\pi$, y la proyección que incide perpendicularmente sobre la superficie, $u(\omega)c \cos \theta$:

$$dQ(\omega, \theta) = \frac{d\Omega}{4\pi} u(\omega) c \cos \theta. \quad (2.14)$$

Integrando sobre todas las direcciones de incidencia, se obtiene que la emisión espectral por unidad de área A viene dada por:

$$Q(\omega) = \frac{c}{4} u(\omega) = \frac{g_i}{8\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{\exp(\hbar \omega \beta) \mp 1}. \quad (2.15)$$

Esta cantidad refleja la potencia emitida por unidad de área, por lo que para una superficie esférica de radio R la potencia total emitida o la emisión espectral de todo el cuerpo viene dado por

$$P_i = (4\pi R^2) \int_0^\infty d\omega g_i \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^2 c^2 \exp(\hbar \omega \beta) \mp 1}, \quad (2.16)$$

lo cual, para el caso de fotones con $g_i = 2$, sigue la ley de Stefan–Boltzmann:

$$P = (4\pi R^2) \sigma T_H^4, \quad (2.17)$$

con $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15c^2 h^3$ y la ley de Wien:

$$\lambda_{max} T_H = 2,898 \cdot 10^{-3} [mK] \quad (2.18)$$

con $\lambda = 2\pi c / \omega$.

Para un agujero negro, tanto la temperatura como su radio dependen de su masa, por lo que la potencia emitida o emisión espectral está completamente determinada por M . Reemplazando R por el radio de Schwarzschild, ec. (2.2), y T_H por la temperatura de Hawking, ec. (2.9), y considerando que solo emite radiación electromagnética, entonces:

$$P_{EM} = \left(\frac{c^6}{15360\pi G^2} \right) \frac{1}{M^2} = 3,5 \cdot 10^{32} \frac{1}{M^2} \left[\frac{J}{s} \right] \quad (2.19)$$

$$= 8,8 \cdot 10^{-29} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \left[\frac{J}{s} \right], \quad (2.20)$$

donde M_\odot es la masa solar. A partir de la conservación de la energía, la potencia emitida es igual a la tasa de evaporación o pérdida de masa:

$$P = -\frac{d(Mc^2)}{dt}. \quad (2.21)$$

con lo cual:

$$\frac{dM_{EM}}{dt} = - \left(\frac{c^4}{15360\pi G^2} \right) \frac{1}{M^2}. \quad (2.22)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, si en un tiempo t_0 el agujero negro tiene una masa M_0 , entonces suponiendo una evaporación cuasi-estacionaria, la masa $M(t)$ del agujero negro en un tiempo t está dado por:

$$M(t) = (M_0^3 - 3\alpha(t - t_0))^{1/3} \quad (2.23)$$

donde

$$\alpha = \frac{c^4}{15360\pi G^2} = 3,9 \cdot 10^{15} \left[\frac{kg^3}{s} \right]. \quad (2.24)$$

Para tener una estimación del proceso de evaporación consideremos un agujero negro con una masa igual a la masa solar. El radio de Schwarzschild para este

agujero negro es de aproximadamente $3[km]$ y su temperatura es del orden de $6 \cdot 10^{-8}[K]$. En base a esto, la potencia emitida (2.20) es aproximadamente 55 órdenes de magnitud menor con respecto al sol, por lo que su tasa de emisión es muy pequeña. Suponiendo que un agujero negro fue formado con esta masa, entonces a partir de la ecuación (2.23) el tiempo necesario para que un agujero negro se evapore por completo es de:

$$\Delta t = 6,8 \cdot 10^{74}[s], \quad (2.25)$$

cerca de 57 órdenes de magnitud mayor que la edad del universo. En consecuencia, para agujeros negros con masas del orden de la masa solar, la evaporación por radiación de Hawking resulta tan insignificante que supera con creces la sensibilidad de los detectores actuales.

2.3. Teoría cuántica de campos

Una idea extendida para explicar la radiación de Hawking es a través de la creación de pares virtuales cerca del horizonte de eventos, donde las partículas con energía positiva alcanzan a escapar de la atracción gravitacional, mientras que partículas de energía negativa caen hacia al agujero negro [7]. Aunque esta idea es bastante ilustrativa, la descripción completa del fenómeno involucra el uso de la teoría cuántica de campos en espacios curvos. Cabe señalar que la radiación de Hawking ha sido derivada de múltiples maneras, muchas de ellas usando un cuadro simple de la mecánica cuántica sobre un agujero negro eterno. No obstante, desde un punto de vista riguroso, la creación de partículas requiere el proceso de formación de un agujero negro en un tiempo finito del pasado, a causa de un colapso gravitacional.

La teoría cuántica de campos en espacios curvos es una generalización de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de Minkowski. En este formalismo, se estudia la propagación de los campos cuánticos sobre el fondo gravitacional clásico y curvo, sin cuantizar. A continuación, presentaremos los aspectos fundamentales que permiten efectuar la cuantización en agujeros negros y sentar las bases de la derivación de la radiación de Hawking. Para una comprensión más completa de estos conceptos, remitimos al lector a los libros de Toms y Parker [9] y Navarro-Salas y Fabbri [10]. En lo que sigue, trabajaremos en unidades naturales $c = \hbar = G = k_B = 1$.

2.3.1. Conceptos básicos de teoría de campos

Asumamos que un sistema está descrito por una acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)), \quad (2.26)$$

donde $x = (t, \vec{x})$ son las coordenadas de Minkowski y $\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))$ es la densidad lagrangiana dependiente del campo y sus derivadas. A partir de esta densidad lagrangiana, se define el momento conjugado del campo como:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi(x))}, \quad (2.27)$$

donde $\partial_0 = \partial/\partial t$.

El principio de mínima acción conlleva, luego de variar el campo $\phi(x)$, a las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (2.28)$$

donde la coordenada repetida μ representa la convención de suma de Einstein.

Adicionalmente, postulamos que:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] &= [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ es la función delta de Dirac. La dependencia en t se incluye para señalar que los campos, ahora operadores, dependen del tiempo de acuerdo al cuadro de Heisenberg.

Consideremos el caso de un campo escalar real libre $\phi(x)$ sin masa, con densidad lagrangiana:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi}), \quad (2.30)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ es la métrica de Minkowski. La ecuación de Euler–Lagrange (2.28) conlleva a

$$\square \hat{\phi}(x) = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2) \hat{\phi}(x) = 0, \quad (2.31)$$

lo cual se conoce como la ecuación de Klein–Gordon.

Si dos soluciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ satisfacen la ecuación de Klein–Gordon, entonces el producto escalar

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= i \int dV_x \{ f_1^*(\vec{x}, t) \partial_0 f_2(\vec{x}, t) - (\partial_0 f_1^*(\vec{x}, t)) f_2(\vec{x}, t) \} \\ &= i \int dV_x f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

es conservado y satisface las propiedades

$$(f_1, f_2)^* = (f_2, f_1) = -(f_1^*, f_2^*). \quad (2.33)$$

En adelante, el superíndice asterisco, f^* , indica el complejo conjugado de f . Usaremos este símbolo de ahora en adelante.

Un set completo ortonormal de soluciones a la ecuación (2.31) viene dado por:

$$g_{\vec{k}}(x) = (2\pi)^{-3/2}(2\omega_k)^{-1/2} \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)], \quad (2.34)$$

donde $\omega_k = |\vec{k}|$. Estas soluciones son ortonormales en el sentido de que satisfacen:

$$(g_{\vec{k}}, g_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad \text{y} \quad (g_{\vec{k}}, g_{\vec{k}'}^*) = 0. \quad (2.35)$$

Los modos (2.34) se denominan modos de frecuencia positiva respecto al tiempo global inercial t . Esto significa que:

$$i \frac{\partial}{\partial t} g_{\vec{k}}(x) = \omega g_{\vec{k}}(x) \quad (2.36)$$

para $\omega > 0$.

Expandiendo el campo $\hat{\phi}(x)$ en estos modos, tenemos que:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3k \left(\hat{a}(\vec{k}) g_{\vec{k}}(x) + \hat{a}(\vec{k})^\dagger g_{\vec{k}}^*(x) \right). \quad (2.37)$$

Dado que $g_{\vec{k}}(x)$ y $\hat{\phi}(x)$ satisfacen la ecuación de Euler–Lagrange (2.31), encontramos que los operadores $\hat{a}(\vec{k})$ y $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ están dados por:

$$\hat{a}(\vec{k}) = (g_{\vec{k}}, \hat{\phi}) \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger(\vec{k}) = -(g_{\vec{k}}^*, \hat{\phi}), \quad (2.38)$$

independiente de t . A partir de las relaciones de conmutación (2.29) y el producto escalar (2.32), se sigue que:

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= [i \int dV_x (g_{\vec{k}}^* \hat{\pi} - i\omega_k g_{\vec{k}}^* \hat{\phi}), -i \int dV'_x (g_{\vec{k}'} \hat{\pi}^\dagger + i\omega_{k'} g_{\vec{k}'} \hat{\phi}^\dagger)] \\ &= -i (\omega_{k'} + \omega_k) \int dV_x dV'_x g_{\vec{k}}^* g_{\vec{k}'} i \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= [i \int dV_x (g_{\vec{k}}^* \hat{\pi} - i\omega_k g_{\vec{k}}^* \hat{\phi}), i \int dV'_x (g_{\vec{k}'}^* \hat{\pi} - i\omega_{k'} g_{\vec{k}'}^* \hat{\phi})] \\ &= \int dV_x dV'_x (i\omega_{k'} g_{\vec{k}}^* g_{\vec{k}'}^* [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')] + i\omega_k g_{\vec{k}}^* g_{\vec{k}'}^* [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo cual son análogos a los operadores creación y aniquilación en un oscilador armónico.

Etiquetando los modos mediante j , el operador:

$$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \quad (2.39)$$

es el operador número en un modo j , cuyos autovalores son enteros no negativos. El estado que no contiene cuantos se define como el estado vacío $|0\rangle$ que cumple:

$$\hat{a}_j |0\rangle = 0 \quad \text{para todo } j, \quad (2.40)$$

con normalización $\langle 0|0\rangle = 1$. Los estados obtenidos actuando el operador creación $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ en el vacío, generan los estados de multipartículas:

$$|n_1(j_1), n_2(j_2), \dots\rangle \equiv (n_1!n_2!\dots)^{-1/2} (\hat{a}_{j_1}^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_{j_2}^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle, \quad (2.41)$$

que contienen n_1 cuantos en modo j_1 , n_2 en modo j_2 , etc. Esta representación del estado de Hilbert, que forman autoestados simultáneos del operador número \hat{N}_j , se denomina la representación de Fock.

2.3.2. Extensión a espacios curvos

Cuando el espacio-tiempo no es el de un espacio-tiempo de Minkowski, es necesario generalizar los pasos realizados en la construcción de la teoría cuántica campos dada en la sección anterior. El primer paso es considerar la acción total, incluyendo la materia y su influencia gravitacional al curvar el espacio-tiempo. La acción de la gravedad está dada por la acción de Einstein–Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.42)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$, R es el escalar de Ricci y Λ es la constante cosmológica. Así, la acción total del sistema es:

$$S_{tot} = S_{EH} + S_m. \quad (2.43)$$

donde S_m es la acción de la materia. Ambas partes de la acción dependen de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$, pero solo S_m depende de los campos $\phi(x)$ que describen a la materia y a las partículas. En lo que sigue, consideraremos exclusivamente un acoplamiento mínimo.

Las ecuaciones de campo para la métrica y los campos son obtenidos aplicando el principio variacional a la acción:

$$\frac{\delta S_{tot}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta S_{tot}}{\delta \phi} = 0, \quad (2.44)$$

lo que para la parte gravitacional se reduce a las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento asociado a la materia:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.46)$$

Para describir este sistema, es necesario resolver las ecuaciones de movimiento simultáneamente para la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ y el campo $\phi(x)$. Para nuestro propósito, sólo consideraremos perturbaciones del campo a primer orden en torno a $\phi = 0$. Como resultado, ya que el tensor de energía momento es de segundo orden, la ecuación de Einstein (2.45) se reduce a las ecuaciones de vacío. Así, $g_{\mu\nu}(x)$ es considerado como un campo externo de fondo no cuantizado.

La acción para la parte de los campos que describen la materia se construye de forma que sea invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Luego, reemplazamos las derivadas ordinarias ∂_μ por derivadas covariantes ∇_μ , la métrica $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ y consideramos el elemento de volumen invariante, reemplazando d^3x por $d^3x\sqrt{-g}$. Esto es consistente con el principio de equivalencia y el principio de covariancia.

Suponiendo que la acción es un extremo, la acción bajo variaciones de ϕ está dada por

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int_{4\text{-vol}} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \delta(\nabla_\mu \phi) \right) \\ &= \int_{4\text{-vol}} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta\phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$+ \int_{4\text{-vol}} d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \right) \delta\phi \right). \quad (2.48)$$

Así, aplicando el teorema de Gauss en el contexto de espacio-tiempos curvos:

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha A^\alpha = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n_\alpha A^\alpha \quad (2.49)$$

con A^α un vector arbitrario y donde $h_{\mu\nu}$ es la métrica inducida en el borde $\partial\mathcal{M}$ y n_α es la normal unitaria en $\partial\mathcal{M}$, obtenemos las ecuaciones de Euler–Lagrange en espacios curvos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \phi)} = 0, \quad (2.50)$$

donde se ha considerado que las variaciones del campo $\delta\phi$ se anulan en el borde y son arbitrarios.

Bajo la prescripción aplicada, la acción del campo escalar para espacio-tiempos curvos, está dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \hat{\phi} \nabla_\nu \hat{\phi} \right). \quad (2.51)$$

Luego, la ecuación de Euler–Lagrange (2.50) para un campo escalar se reduce a

$$\square \hat{\phi}(x) = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \hat{\phi}(x) = 0. \quad (2.52)$$

Si dos soluciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ satisfacen esta ecuación de Klein–Gordon generalizada, entonces el producto escalar conservado (2.32) para el espacio-tiempo curvo es generalizado a:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= i \int d^3x |g|^{1/2} g^{0\nu} (f_1^*(\vec{x}, t) \partial_\nu f_2(\vec{x}, t) - (\partial_\nu f_1^*(\vec{x}, t)) f_2(\vec{x}, t)) \\ &\equiv i \int d^3x |g|^{1/2} g^{0\nu} f_1^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_\nu f_2(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

con las mismas propiedades (2.33):

$$(f_1, f_2)^* = (f_2, f_1) = -(f_1^*, f_2^*).$$

Si bien es posible formar una base de soluciones a las ecuaciones de movimiento (2.50) ortonormales con respecto a este producto escalar generalizado, la solución más general que describe al campo $\hat{\phi}(x)$ en espacio-tiempos dinámicos no permite, por lo general, separar las soluciones de frecuencia positiva y negativa en todo instante del tiempo como en el caso de un espacio-tiempo de Minkowski, (2.37) [9]. Puesto que en un espacio-tiempo plano la expansión del campo permite seleccionar los operadores creación y aniquilación, y con ello, el estado vacío sobre el que se genera el espacio de Fock, esto implica que el estado vacío no es (globalmente) único y por tanto da a lugar a conceptos inequivalentes de los estados con un número definido de partículas, (2.41) [10, 11]. La ausencia de la noción única de vacío es la principal diferencia con el caso de un espacio-tiempo plano, y es el origen de la creación de partículas en ciertos espacio-tiempos curvos. Sin embargo, al considerar espacio-tiempos estacionarios esta ambigüedad queda resuelta, al igual que la selección de modos de frecuencia positiva.

Supongamos que existen dos regiones estacionarias. Si $f_\omega^{\text{in}}(x)$ es una solución de frecuencia positiva normalizada, entonces el campo $\hat{\phi}(x)$ puede expandirse según

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega \left(\hat{a}_\omega^{\text{in}} f_\omega^{\text{in}}(x) + \hat{a}_\omega^{\text{in}\dagger} f_\omega^{\text{in}*}(x) \right). \quad (2.54)$$

Escogiendo alternativamente la otra región estacionaria, si f_ω^{out} es una solución de frecuencia positiva normalizada, entonces $\hat{\phi}(x)$ puede expandirse de igual manera como:

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega \left(\hat{a}_\omega^{\text{out}} f_\omega^{\text{out}}(x) + \hat{a}_\omega^{\text{out}\dagger} f_\omega^{\text{out}*}(x) \right). \quad (2.55)$$

Los operadores \hat{a}_ω y \hat{a}_ω^\dagger correspondientes, verifican las relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad (2.56)$$

con i y j denotando etiquetas generales de los modos.

Dado que los modos f_ω^{in} y f_ω^{out} son completos, es posible expandir en la base de su contraparte:

$$f_\omega^{\text{out}}(x) = \int d\omega' \left(\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{\text{in}}(x) + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{\text{in}*}(x) \right). \quad (2.57)$$

Estas relaciones son las transformaciones de Bogoliubov y los coeficientes $\alpha_{\omega\omega'}$ y $\beta_{\omega\omega'}$ son denominados como coeficientes de Bogoliubov. En base a esta expansión, tenemos que:

$$\alpha_{\omega\omega'} = (f_{\omega'}^{\text{in}}, f_\omega^{\text{out}}) \quad \text{y} \quad \beta_{\omega\omega'} = -(f_{\omega'}^{\text{in}*}, f_\omega^{\text{out}}). \quad (2.58)$$

Estas relaciones permiten además relacionar los operadores. Mediante las relaciones de ortonormalidad de los modos y la expansión del campo $\hat{\phi}(x)$, (2.55) obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega^{\text{out}} &= (f_\omega^{\text{out}}, \hat{\phi}) = \int d\omega' \left(\alpha_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^{\text{in}} - \beta_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^{\text{in}\dagger} \right) \\ \hat{a}_\omega^{\text{out}\dagger} &= -(f_\omega^{\text{out}*}, \hat{\phi}) = \int d\omega' \left(\beta_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'}^{\text{in}} + \alpha_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'}^{\text{in}\dagger} \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Relaciones inversas de f_ω^{in} y los operadores $\hat{a}_\omega^{\text{in}}$ y $\hat{a}_\omega^{\text{in}\dagger}$ pueden obtenerse siguiendo las mismas definiciones.

En base a las expansiones (2.54) y (2.55), los estados vacíos son definidos según

$$\hat{a}_\omega^{\text{in}} |0_{\text{in}}\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_\omega^{\text{out}} |0_{\text{out}}\rangle = 0, \quad (2.60)$$

para todo ω . De este modo, si calculamos el operador número de una región estacionaria, $\hat{N}_\omega^{\text{out}} = \hat{a}_\omega^{\text{out}\dagger} \hat{a}_\omega^{\text{out}}$, con respecto al estado vacío de la otra, $|0_{\text{in}}\rangle$, tenemos a partir de (2.59):

$$\langle 0_{\text{in}} | \hat{N}_\omega^{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle = \langle 0_{\text{in}} | \hat{a}_\omega^{\text{out}\dagger} \hat{a}_\omega^{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (2.61)$$

Luego, si uno de los coeficientes de Bogoliubov $\beta_{\omega\omega'}$ es no nulo, entonces el contenido de partículas del estado vacío $|0_{\text{in}}\rangle$ es diferente de cero con respecto a la base de Fock formada a partir de $|0_{\text{out}}\rangle$.

Finalmente, ya que tanto los operadores $\hat{a}_{\omega}^{\text{out}}$ como $\hat{a}_{\omega}^{\text{in}}$ satisfacen las relaciones de conmutación (2.56), y están relacionados por (2.59), tenemos entonces que los coeficientes de Bogoliubov satisfacen:

$$\int d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1. \quad (2.62)$$

Nótese que si los operadores satisfacen reglas de anticonmutación, entonces en (2.62) hay un cambio de signo sobre el argumento de la integral. Esta relación será relevante para calcular la cantidad de partículas creadas desde el vacío de Minkowski en el espacio-tiempo de un agujero negro.

En este capítulo se calcula el espectro de emisión de un agujero negro de Schwarzschild, siguiendo la derivación original utilizada por Stephen Hawking. La estrategia consiste en estudiar la propagación del campo en el espacio-tiempo de fondo de un cuerpo en colapso gravitacional. Para ello, se emplea una versión simplificada de la dinámica del espacio-tiempo.

3.1. Modelo

La formación de un agujero negro, debido al colapso gravitacional, puede separarse en tres etapas:

- (1) Etapa de materia diluida y baja densidad: El espacio-tiempo presenta pequeñas fluctuaciones respecto al espacio-tiempo de Minkowski y los modos son aproximadamente los de la ec. (2.34). El estado vacío, $|0_{in}\rangle$ está bien definido.
- (2) Colapso: luego de un largo periodo de tiempo, la materia empieza a acumularse por efectos gravitacionales hasta colapsar en un agujero negro. Esta fase implica un espacio-tiempo dinámico y por lo general, no posee una manera natural de definir el vacío.
- (3) Formación del agujero negro: luego de la formación y los procesos de relajación, se obtiene una configuración estacionaria descrita por el espacio-tiempo de Schwarzschild. El estado vacío, $|0_{out}\rangle$ puede definirse según la región asintóticamente plana, lejos del horizonte de eventos.

La creación de partículas se entiende como una consecuencia directa de la dinámica del espacio-tiempo: la diferencia entre los estados $|0_{in}\rangle$ y $|0_{out}\rangle$ conduce a que un observador en la región asintóticamente plana interprete el estado inicial como un estado de multi-partículas en su base de Fock. Por simplicidad, se asume un colapso esférico. Luego, en virtud del teorema de Birkhoff, la solución externa al cuerpo en colapso está descrita por la métrica de Schwarzschild.

Una de las soluciones a las ecuaciones de Einstein que describe estas etapas es el espacio-tiempo de Vaidya, cuyo elemento de línea en coordenadas de Eddington–

Finkelstein (v, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(v)}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2, \quad \text{con} \quad M(v) = M\theta(v - v_0), \quad (3.1)$$

donde M es la masa final del agujero negro, y su densidad de energía está dada por:

$$T_{vv} = \frac{L(v)}{4\pi r^2}, \quad \text{donde} \quad L(v) = M\delta(v - v_0). \quad (3.2)$$

Esta métrica describe el colapso gravitacional mediante un cascarón esférico que se dirige radialmente desde el infinito al origen a la velocidad de la luz a partir de un tiempo $v = v_0$. La coordenada v se denomina coordenada avanzada de Eddington-Finkelstein, la cual se relaciona con las coordenadas de Schwarzschild según

$$v = \begin{cases} t + r, & \text{para } v < v_0 \\ t + r^*, & \text{para } v > v_0, \end{cases}$$

con $r^* = r + 2M \ln(r/2M - 1)$. Luego, $v < v_0$ representa la etapa (1) de un espacio-tiempo plano, $v = v_0$ la etapa (2) del colapso y $v > v_0$ la etapa (3) de un espacio-tiempo de Schwarzschild, Fig. 3.1.

A continuación, utilizando esta descripción del espacio-tiempo y el límite óptico geométrico analizamos la propagación del campo sobre las distintas etapas.

3.1.1. Propagación del campo

En coordenadas (t, r, θ, ϕ) , los modos normales del campo $\phi(x)$ en un espacio-tiempo de Minkowski corresponden a las ondas planas vistas en el capítulo anterior, ec. (2.34). Dada la simetría esférica, es conveniente describir estos modos en ondas parciales. Por simplicidad, si consideramos solo ondas planas en la dirección \hat{z} , los modos están descritos por:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_l^0(\theta), \quad \text{con} \quad j_l(kr) \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{e^{-ikr} e^{il\frac{\pi}{2}} - e^{ikr} e^{-il\frac{\pi}{2}}}{2ikr}, \quad (3.3)$$

siendo $j_l(kr)$ las funciones esféricas de Bessel.

En un espacio-tiempo que describe un colapso gravitacional, los modos están determinados por las condiciones en el pasado, \mathcal{I}^- —el borde asintóticamente plano del espacio-tiempo desde el punto de vista conformal—, o el futuro, $\Sigma =$

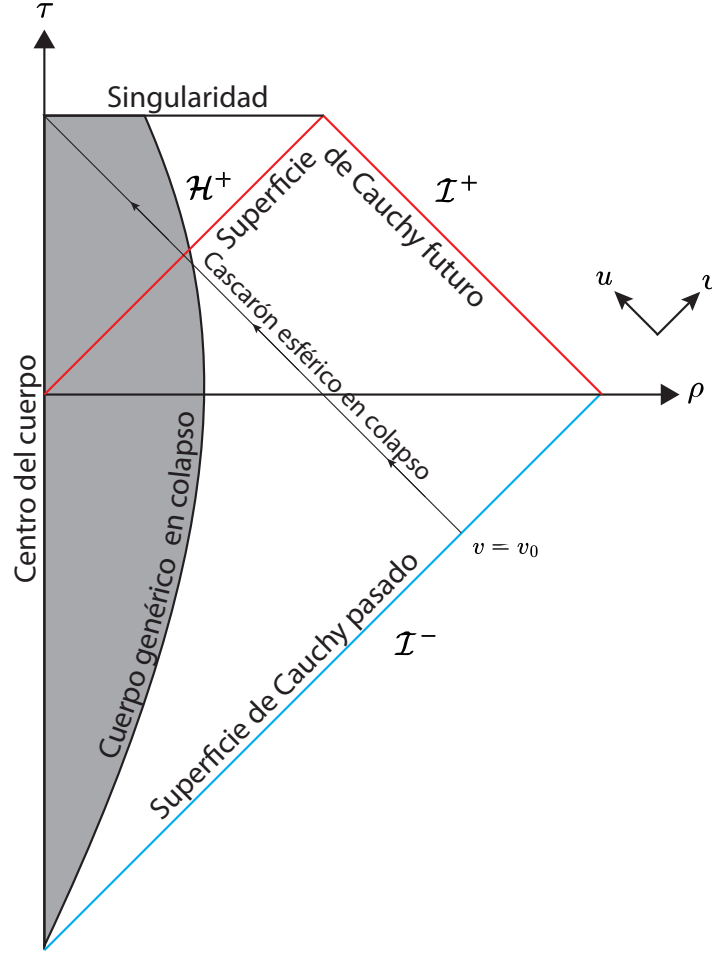


FIGURA 3.1: Diagrama de Penrose del colapso gravitacional de un cascarón esférico en un espacio-tiempo de Vaidya.

$\mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$, donde \mathcal{I}^+ es el infinito nulo futuro y \mathcal{H}^+ es el horizonte de eventos. Luego, el campo puede expandirse como

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega' \left(\hat{a}_{\omega'lm} f_{\omega'lm} + \hat{a}_{\omega'lm}^\dagger f_{\omega'lm}^* \right) \quad (3.4)$$

en \mathcal{I}^- , donde

$$f_{\omega'lm} \sim \frac{e^{-i\omega'v}}{r} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.5)$$

con v la coordenada nula avanzada, representa ondas entrantes, o bien,

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega \left(p_{\omega lm} \hat{b}_{\omega lm} + p_{\omega lm}^* \hat{b}_{\omega lm}^\dagger + q_{\omega lm} \hat{c}_{\omega lm} + q_{\omega lm}^* \hat{c}_{\omega lm}^\dagger \right). \quad (3.6)$$

en $\Sigma = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$. Aquí p_ω corresponde a soluciones salientes de frecuencia positiva

en la región asintóticamente plana \mathcal{I}^+ (nulo en \mathcal{H}^+) de la forma:

$$p_{\omega lm} \sim \frac{e^{-i\omega u}}{r} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.7)$$

donde u es la coordenada nula retardada, $u = t - r^*$, y q_ω son un set de soluciones entrantes al horizonte (nulas en \mathcal{I}^-) con norma de Klein–Gordon positiva. De esta manera, \hat{a}_ω^\dagger y \hat{a}_ω corresponden a los operadores creación y aniquilación en \mathcal{I}^- y $(\hat{b}_\omega^\dagger, \hat{b}_\omega)$ junto a $(\hat{c}_\omega^\dagger, \hat{c}_\omega)$ son operadores creación y destrucción en \mathcal{I}^+ y \mathcal{H}^+ , respectivamente. A continuación omitiremos los índices (l, m) para simplificar la notación.

Dado que f_ω y f_ω^* forman un set completo ortonormal en \mathcal{I}^- , los modos p_ω y q_ω pueden trazarse atrás en el tiempo y escribirse como combinación en esa base. Suponiendo todos los modos ya normalizados, entonces:

$$p_\omega = \int d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*) \quad \text{y} \quad q_\omega = \int d\omega' (\gamma_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \eta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*), \quad (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= (f_{\omega'}, p_\omega) & \beta_{\omega\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, p_\omega) \\ \gamma_{\omega\omega'} &= (f_{\omega'}, q_\omega) & \eta_{\omega\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, q_\omega) \end{aligned}$$

son los coeficientes de Bogoliubov. Nótese que para realizar esta expansión es necesario reescribir los modos en términos de los parámetros afines correspondientes. Para ello, aplicaremos el límite óptico geométrico.

En base a la Fig. 3.2, trazando hacia atrás en el tiempo, los modos salientes p_ω atraviesan el cascarón esférico en un cierto radio $r = R_0$ (sobre la hipersuperficie $v = v_0$) y llegan al origen para reflejarse hasta llegar a \mathcal{I}^- . De esta manera, de las definiciones de las coordenadas nulas, se satisface en el cascarón:

$$\begin{aligned} u_{\text{in}} &= v_0 - 2R_0, \quad \text{desde dentro del cascarón, y} \\ u_{\text{out}} &= v - 2r^* \Big|_{r=R_0} = v_0 - 2R_0 - 4M \ln \frac{R_0 - 2M}{2M}, \quad \text{desde fuera del cascarón.} \end{aligned}$$

Notando además que un rayo entrante desde \mathcal{I}^- llega al origen, $r = 0$, en $t_0 = v_{\text{in}}$ y se transforma en un rayo saliente con coordenada retardada del mismo valor, $u_{\text{in}} = v_{\text{in}} (= t_0 - r|_{r=0}$ en origen), tenemos al combinar ambas ecuaciones la relación entre los parámetros afines de p_ω y $f_{\omega'}$:

$$u_{\text{out}} = v_{\text{in}} - 4M \ln \frac{v_H - v_{\text{in}}}{4M}, \quad v < v_H, \quad (3.9)$$

donde $v_H = v_0 - 4M$. Nótese que $v_{\text{in}} = v_H \in \mathcal{I}^-$, es el rayo que cruza el cascarón esférico en $R_0 = 2M$, en la formación del agujero negro. Por otro lado, los modos

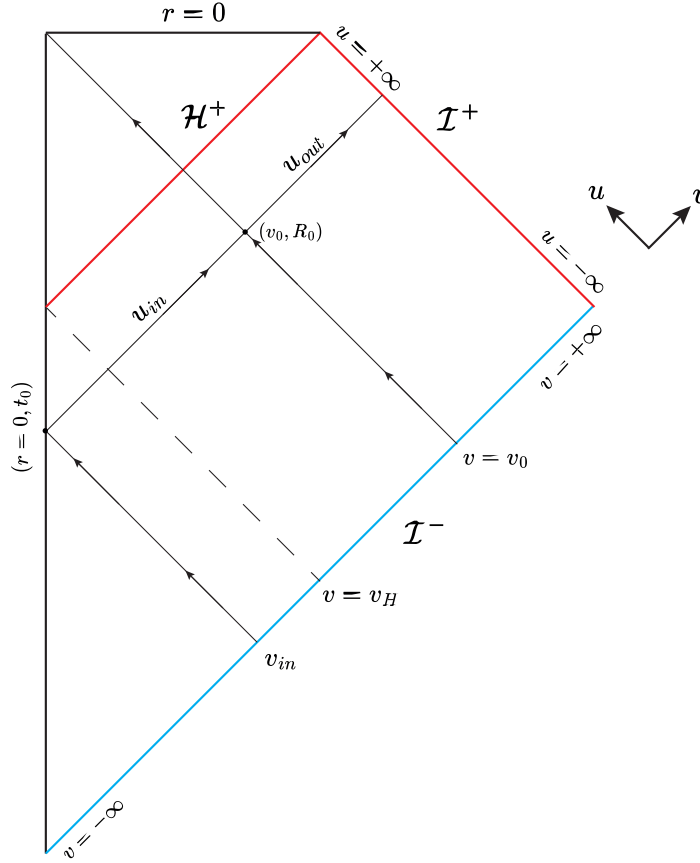


FIGURA 3.2: Diagrama del colapso gravitacional de un cascarón esférico en un espacio-tiempo de Vaidya. El rayo entrante desde $v = v_0 \in \mathcal{I}^-$ representa al cascarón esférico. Por otro lado, el rayo entrante desde $v = v_{in} \in \mathcal{I}^-$ representa el origen de un rayo saliente con $u = u_{out}$ en \mathcal{I}^+ .

entrantes con $v > v_H$ corresponden a los modos que cruzan el horizonte, q_ω , y no alcanzan el infinito nulo futuro. Luego, tenemos que:

$$p_\omega \Big|_{\mathcal{I}^-} \sim \frac{e^{i\omega u_{out}}}{r} = \frac{e^{i\omega(v-4M \ln \frac{v_H-v}{4M})}}{r}. \quad (3.10)$$

Analizando el comportamiento en las regiones límites de $-\infty < v < v_H$ tenemos que aquellos modos que alcanzan primero \mathcal{I}^+ ($u_{out} \rightarrow -\infty$) siguen siendo modos de frecuencia positiva con respecto al tiempo inercial en \mathcal{I}^- :

$$p_\omega \underset{v \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{e^{i\omega u_{out}}}{r} = \frac{e^{i\omega v}}{r}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, los modos con $v \rightarrow v_H$ ($u_{out} \rightarrow +\infty$):

$$p_\omega \underset{v \rightarrow v_H}{\sim} \frac{e^{i\omega u_{out}}}{r} = \frac{e^{i\omega(v_H-4M \ln \frac{v_H-v}{4M})}}{r}. \quad (3.12)$$

son, presumiblemente, mezclas de modos $f_{\omega'}$ y $f_{\omega'}^*$.

Fuera del régimen del límite óptico geométrico, los modos que se propagan a través del espacio-tiempo son dispersados. Si consideramos esto y propagamos nuevamente atrás en el tiempo p_ω desde \mathcal{I}^+ , entonces una parte $p_\omega^{(1)}$ es dispersada en la región estática de la geometría de Schwarzschild y alcanza \mathcal{I}^- con $v > v_0$ con la misma frecuencia ω , por lo que no hay mezclas de frecuencias positivas y negativas. Por otro lado, sólo una fracción del modo original, $p_\omega^{(2)}$, atraviesa el cuerpo en colapso. Luego, tenemos en \mathcal{I}^- :

$$p_\omega = p_\omega^{(1)} + p_\omega^{(2)} \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned} p_\omega^{(1)} &= \alpha_{\omega\omega'}^{(1)} f_{\omega'} \\ p_\omega^{(2)} &= \int d\omega' \left(\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^{(2)} f_{\omega'}^* \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

No obstante, los modos $p_\omega^{(2)}$ que atraviesan el cuerpo en los últimos instantes de la formación del horizonte son sujetos a un fuerte corrimiento al azul (visto en inversión temporal). Esto significa que estos modos tienen frecuencias altas en las etapas (1) y (2), por lo cual la dispersión del espacio-tiempo es débil y el cuerpo en colapso es “transparente”. En consecuencia, el límite óptico geométrico sigue siendo válido en ambas etapas (junto a la expresión (3.12)) y por lo tanto, es independiente de los detalles del colapso.

Debido a que p_ω define los operadores creación y aniquilación de un observador en el futuro nulo infinito, el valor de expectación del número de partículas del estado inicial vacío, $|0_{\text{in}}\rangle$, está dado por

$$\langle 0_{\text{in}} | \hat{N}_\omega^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{\text{in}} \rangle = \langle 0_{\text{in}} | \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega | 0_{\text{in}} \rangle \quad (3.15)$$

donde b_ω es una combinación de operadores creación y aniquilación en \mathcal{I}^- :

$$\begin{aligned} \hat{b}_\omega &= (p_\omega, \phi) = \int d\omega' \left(\alpha_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right) \\ \hat{b}_\omega^\dagger &= -(p_\omega^*, \phi) = \int d\omega' \left(\beta_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'} + \alpha_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.2. Creación de partículas y número de ocupación

Reemplazando la expresión (3.16) en el valor de expectación se obtiene

$$\langle 0_{\text{in}} | \hat{N}_\omega^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{\text{in}} \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2. \quad (3.17)$$

Por otro lado, ya que

$$(p_\omega, p_\omega) = (p_\omega^{(1)}, p_\omega^{(1)}) + (p_\omega^{(2)}, p_\omega^{(2)}) = 1,$$

y de (3.14):

$$(p_\omega^{(2)}, p_\omega^{(2)}) = \int_0^\infty d\omega' \left(|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 \right) \equiv \Gamma_\omega \leq 1, \quad (3.18)$$

donde Γ_ω es la fracción de p_ω que entra al cuerpo en colapso, entonces basta con obtener la relación entre $\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}$ y $\beta_{\omega\omega'}^{(2)}$ para obtener el valor de la integral, (3.17) y (3.18). A continuación omitiremos el superíndice para hacer referencia a los modos que atraviesan el cuerpo en colapso.

Como se ha mencionado anteriormente, solo los modos con $v \rightarrow v_H$ son modos con mezclas de frecuencia positiva y negativa. Definiendo así, el set de paquete de ondas completo y ortonormal:

$$p_{jn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i \omega n}{\varepsilon}} p_\omega, \quad (3.19)$$

con $j \geq 0$ y n entero, formaremos paquetes de ondas con v cercano a v_H . Estos paquetes de onda están centrados en $u_{out} = 2\pi n/\varepsilon$ con ancho $2\pi/\varepsilon$, por lo que el espectro en tiempos tardíos ($u \rightarrow \infty$) de \mathcal{I}^+ estará determinado por $\varepsilon \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$. Bajo esta definición, los nuevos modos y el valor de expectación en tiempo tardíos de \mathcal{I}^+ serán:

$$p_{jn} = \int d\omega (\alpha_{jn,\omega} f_\omega + \beta_{jn,\omega} f_\omega^*), \quad (3.20)$$

y

$$\langle 0_{in} | \hat{N}_{jn}^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{in} \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{jn,\omega'}|^2. \quad (3.21)$$

respectivamente.

Según hemos mencionado, toda la dinámica de los campos está completamente determinada por estos coeficientes. A partir de la ecuación (2.58) extendida a paquetes de ondas, tenemos por definición:

$$\begin{aligned} \beta_{jn,\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, p_{jn}) \\ &= -i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega (f_{\omega'} \partial_v p_{jn} - p_{jn} \partial_v f_{\omega'}) \\ &= 2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega p_{jn} \partial_v f_{\omega'} \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_{jn,\omega'} &= (f_{\omega'}, p_{jn}) \\ &= i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega (f_{\omega'}^* \partial_v p_{jn} - p_{jn} \partial_v f_{\omega'}^*) \\ &= -2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega p_{jn} \partial_v f_{\omega'}^* \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde se ha integrado por partes en v en ambas expresiones.

El cálculo de ambos coeficientes es directo y puede verse en el apéndice A. Como resultado final se obtiene que, para paquetes de ondas con $n \rightarrow \infty$ centrados en $\omega = \omega_j$, los coeficientes de Bogoliubov se relacionan según

$$\alpha_{jn,\omega'} = -e^{4\pi M\omega_j} e^{2i\omega'v_H} \beta_{jn,\omega'}. \quad (3.24)$$

De manera que el valor de expectación del número de partículas es

$$\langle 0_{\text{in}} | N_{jn}^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{\text{in}} \rangle \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\Gamma_{\omega_j}}{\exp(8\pi M\omega_j) - 1}. \quad (3.25)$$

Este es el resultado principal derivado por Hawking: Un agujero negro emite partículas con temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \quad (3.26)$$

en unidades naturales. Debido a que en el límite óptico geométrico ($\Gamma_{\omega_j} = 1$) el valor de expectación corresponde a la distribución de un cuerpo negro, Γ_{ω_j} se denomina factor de cuerpo gris.

3.2. Factores de cuerpo gris

En la sección anterior derivamos la distribución del número de partículas mediante la forma asintótica de los modos salientes. A continuación revisaremos con mayor detalle los modos normales en el espacio-tiempo de Schwarzschild e indicaremos la metodología de obtención de los factores de cuerpo gris.

3.2.1. Modos normales en geometría de Schwarzschild

La ecuación de movimiento de un campo escalar real sin masa está dado por la ecuación de Klein–Gordon

$$\square\Psi = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \Psi(x) = 0. \quad (3.27)$$

Realizando la separación de variables

$$\Psi_{\omega lm}(\vec{r}, t) = \frac{\psi(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.28)$$

donde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos, la ecuación diferencial para la parte radial puede reescribirse según:

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} + (k^2 - V_l(r)) \right) \psi(r^*) = 0, \quad (3.29)$$

donde $k = \omega$ y

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right). \quad (3.30)$$

es el potencial efectivo.

La ecuación (3.29) corresponde a una ecuación de onda tipo Schrödinger en función de la coordenada tortuga o coordenada radial de Regge-Wheeler,

$$r^* = r + 2M \ln \frac{r - 2M}{2M}, \quad (3.31)$$

con un potencial tipo barrera. Como se puede ver en la Fig. 3.3, el potencial efectivo se anula en el horizonte ($r^* \rightarrow -\infty$) y en el infinito ($r^* \rightarrow \infty$), con lo cual las soluciones en ambos límites corresponden a ondas esféricas en términos de r^* .

La ecuación diferencial tipo Schrödinger puede interpretarse de la misma manera que en el problema de dispersión inelástico de ondas parciales, donde la coordenada radial (en espacio-tiempo plano) se extiende a $r < 0$ con el objeto de definir con un potencial efectivo la pérdida de energía en otros grados de libertad [12]. Esto permite definir un cambio de fase complejo que modela la pérdida de flujo entrante debido a la filtración hacia la región extendida. Aunque este procedimiento es fenomenológico en el contexto de mecánica cuántica, en este escenario representa una dispersión en una región completamente física en función de r^* que se extiende de $-\infty$ (horizonte) a $+\infty$ (región asintóticamente plana). Así, el potencial $V(r)$ de la ec. (3.30), representa una interacción finita localizada entre ambas regiones en torno al origen $r^* = 0$.

El factor de cuerpo gris se define como la probabilidad de transmisión sobre la barrera o potencial, ec. (3.30). Por lo tanto, dependen del momento angular l y la frecuencia angular ω . Además, se encuentran relacionados a la sección transversal de absorción

$$\sigma_{abs}(\omega) = \frac{\pi c^2}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \Gamma_l(\omega). \quad (3.32)$$

Observemos que esta cantidad se obtiene de la dispersión de ondas planas, ec. (3.3), y es proporcional a la suma de las probabilidades de transmisión de cada modo:

$$\sum_{l,m} \Gamma_l(\omega) = \sum_l (2l+1) \Gamma_l(\omega). \quad (3.33)$$

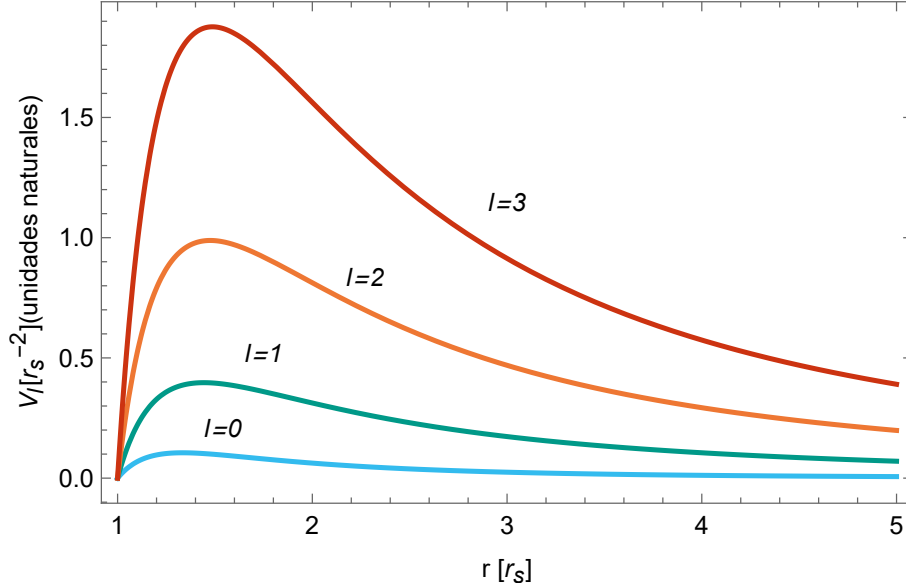


FIGURA 3.3: Potencial efectivo $V_l(r)$ de un campo escalar dado por la ecuación (3.30) en función de la coordenada radial en unidades de radio de Schwarzschild, r_s .

3.2.2. Ondas en geometría de Schwarzschild

Para resolver la ecuación diferencial es necesario imponer las condiciones de borde. Nótese que en los modos de interés p_ω , con $u \rightarrow \infty$, hemos mostrado que los modos cruzan el cascarón en $R_0 \approx 2M$, cuando el espacio-tiempo en la región exterior casi se ha establecido. Luego, consideraremos como buena aproximación que las ondas emergen desde el horizonte, de la misma manera que en un agujero negro eterno.

Imponiendo modos puramente salientes en \mathcal{I}^+ tenemos asintóticamente:

$$\psi_{\omega,l}^{\text{up}} \sim \begin{cases} A_l^{\text{out}}(\omega)e^{i\omega r^*} + A_l^{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega r^*} & , \quad r^* \rightarrow -\infty, \\ e^{i\omega r^*} & , \quad r^* \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.34)$$

donde A^{in} es el coeficiente de incidencia desde el horizonte en el pasado y A^{out} es el coeficiente de salida en el horizonte futuro, como se indica en la Fig. 3.4.a.

Ya que el wronskiano $W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$ de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (3.29) es constante, es directo demostrar a partir de definir

$$t_l(\omega) = \frac{1}{A_l^{\text{out}}(\omega)} \quad \text{y} \quad r_l(\omega) = \frac{A_l^{\text{in}}(\omega)}{A_l^{\text{out}}(\omega)} \quad (3.35)$$

y evaluar el wronskiano en la regiones asintóticas, $r^* \rightarrow \pm\infty$, que los coeficientes satisfacen

$$|t_l(\omega)|^2 + |r_l(\omega)|^2 = 1. \quad (3.36)$$

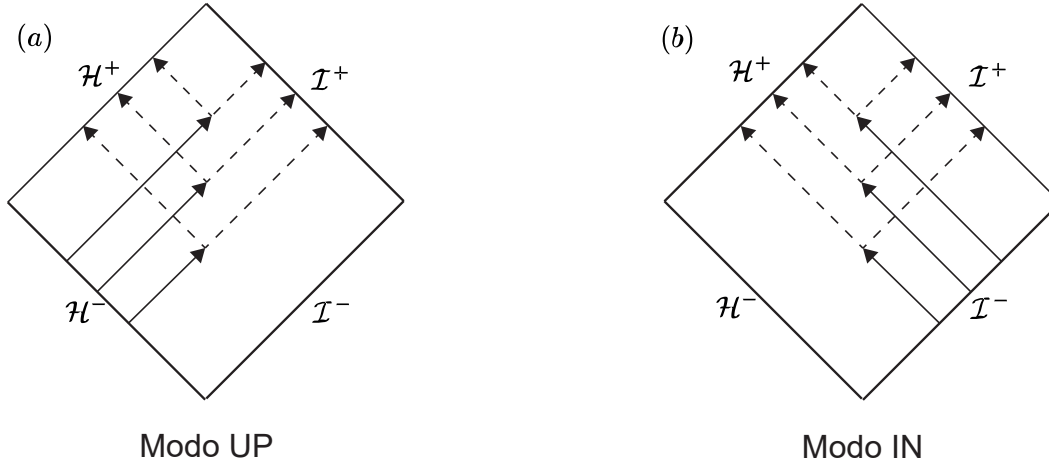


FIGURA 3.4: Modos (a) UP e (b) IN representando la dispersión según las condiciones de borde aplicadas en la aproximación de un agujero negro eterno.

Otra configuración físicamente relevante es la dispersión de ondas incidentes desde el infinito, la cual produce ondas puramente entrantes en el horizonte \mathcal{H}^+ , Fig. 3.4.b:

$$\psi_{\omega,l}^{\text{in}} \sim \begin{cases} B_l^{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega r^*} + B_l^{\text{out}}(\omega)e^{i\omega r^*} & , \quad r^* \rightarrow +\infty, \\ e^{-i\omega r^*} & , \quad r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.37)$$

Del mismo análisis, definiendo

$$T_l(\omega) = \frac{1}{B_l^{\text{in}}(\omega)} \quad \text{y} \quad R_l(\omega) = \frac{B_l^{\text{out}}(\omega)}{B_l^{\text{in}}(\omega)} \quad (3.38)$$

se encuentra que los coeficientes T_l y R_l satisfacen:

$$|T_l(\omega)|^2 + |R_l(\omega)|^2 = 1. \quad (3.39)$$

Definimos adicionalmente como soluciones linealmente independientes a $\psi_{\omega,l}^{\text{out}}$ y $\psi_{\omega,l}^{\text{down}}$ los modos

$$\psi_{\omega,l}^{\text{down}} \equiv (\psi_{\omega,l}^{\text{up}})^* \quad \text{y} \quad \psi_{\omega,l}^{\text{out}} \equiv (\psi_{\omega,l}^{\text{in}})^*. \quad (3.40)$$

Los modos $\psi_{\omega,l}^{\text{down}}$ y $\psi_{\omega,l}^{\text{out}}$ se muestran en la Fig. 3.5. Ya que estos modos no poseen data en \mathcal{I}^+ y \mathcal{H}^+ , respectivamente, pueden expandirse en términos de q_ω y p_ω tratados en las secciones anteriores.

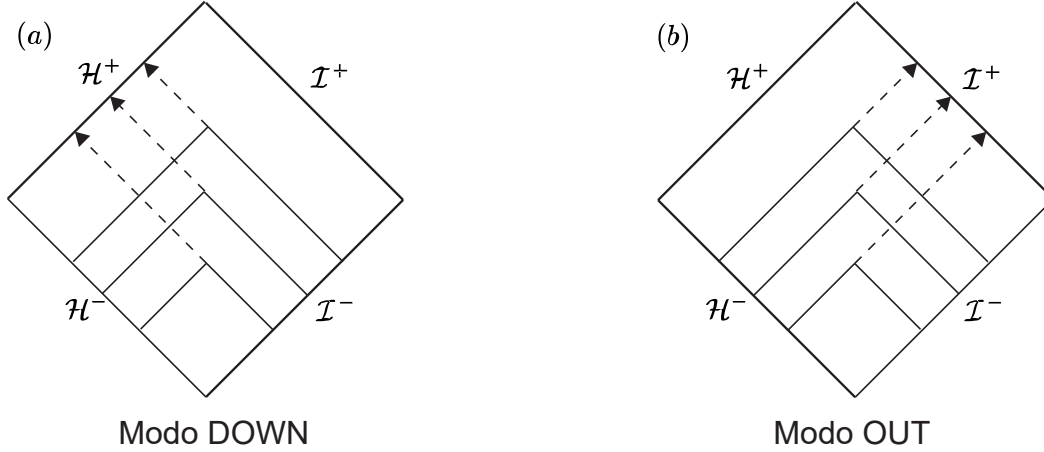


FIGURA 3.5: Modos (a) DOWN y (b) OUT representando la dispersión según las condiciones de borde aplicadas en la aproximación de un agujero negro eterno.

Adicionalmente, aplicando las propiedades del wronskiano entre todas estas soluciones, se tiene que

$$\begin{aligned} T_l(\omega) &= t_l(\omega) \\ T_l(\omega)r_l^*(\omega) &= -R_l(\omega)t_l^*(\omega) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Es decir, la fracción de la onda que no es retrodispersada es la misma para ondas originadas desde el horizonte de eventos o desde el infinito.

3.2.3. Metodología

Dada la equivalencia anterior, estudiemos la probabilidad de transmisión para la dispersión de ondas desde el infinito. Reescribiendo la ecuación de movimiento (3.27) con $x = kr$ y $x_s = kr_s$ para la separación de variables:

$$\Psi_{\omega lm}(\vec{r}, t) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (3.42)$$

se obtiene para la parte radial la ecuación diferencial

$$x(x - x_s)^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + (x - x_s)(2x - x_s) \frac{dR}{dx} + (x^3 + (x - x_s)l(l + 1))R(x) = 0. \quad (3.43)$$

En esta forma, las soluciones físicas tienen un comportamiento asintótico [13]

$$R_l \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} i^l \frac{\sqrt{4\pi(2l + 1)}}{2ix} e^{i\delta_l - il\frac{\pi}{2}} \left[e^{-i(x+x_s \ln(x-x_s))} - (-1)^l S_l e^{i(x+x_s \ln(x-x_s))} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (3.44)$$

$$R_l \underset{x \rightarrow x_s}{\sim} g_l(x_s)(x - x_s)^{-ix_s} + \mathcal{O}((x - x_s)).$$

donde S_l es la amplitud de retrodispersión, δ_l es el cambio de fase y $g_l(x_s)$ solo depende de l y x_s .

Matemáticamente es conveniente definir una nueva solución radial $\varphi_l(r)$ con $g_l = 1$, la cual difiere de R_l únicamente en normalización. Definiendo $\mathcal{F}_{l(+)}$ y $\mathcal{F}_{l(-)}$ como aquellas soluciones de onda puramente entrantes y salientes en el infinito, entonces

$$\varphi_l(x, x_s) = f_l^{(-)}(x_s)\mathcal{F}_{l(+)}(x, x_s) + f_l^{(+)}(x_s)\mathcal{F}_{l(-)}(x, x_s). \quad (3.45)$$

Luego, los coeficientes están determinados por

$$\begin{aligned} f_l^{(+)}(x_s) &= \frac{x(x-x_s)}{2i} W [F_{l(+)}(x, x_s), \varphi_l(x, x_s)] \\ f_l^{(-)}(x_s) &= -\frac{x(x-x_s)}{2i} W [F_{l(-)}(x, x_s), \varphi_l(x, x_s)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Estas relaciones se obtienen directamente a partir del wronskiano correspondiente a la ecuación diferencial:

$$W(x) = \frac{W_0}{x(x-x_s)}. \quad (3.47)$$

con W_0 constante. En particular, evaluando $W[\varphi, \varphi^*]$ en $x \rightarrow x_s$

$$W[\varphi, \varphi^*] = \frac{2ix_s}{(x-x_s)} \longrightarrow W_0 = 2ix_s^2. \quad (3.48)$$

y $x \rightarrow \infty$:

$$W[\varphi, \varphi^*] = |f_l^{(-)}|^2 W[\mathcal{F}_{l(+)}, F_{l(+)}^*] + |f_l^{(+)}|^2 W[\mathcal{F}_{l(-)}, F_{l(-)}^*] \quad (3.49)$$

$$= |f_l^{(-)}(x_s)|^2 \frac{2i}{x(x-x_s)} + |f_l^{(+)}(x_s)|^2 \frac{2i}{x(x-x_s)} \quad (3.50)$$

se obtiene la relación de conservación

$$1 - \frac{|f_l^{(+)}|^2}{|f_l^{(-)}|^2} = \frac{x_s^2}{|f_l^{(-)}|^2}. \quad (3.51)$$

De esta forma, considerando

$$S_l(x_s) \equiv e^{2i\delta_l} = -\frac{f_l^{(+)}(x_s)}{f_l^{(-)}(x_s)} \quad (3.52)$$

se obtiene el factor de cuerpo gris:

$$\Gamma_l(\omega) = 1 - |S_l|^2 = \frac{x_s^2}{|f_l^{(-)}|^2}. \quad (3.53)$$

Ya que $f_l^{(-)}$ está dado por la ec. (3.46), resolveremos numéricamente para $\varphi_l(x, x_s)$ y evaluaremos en un punto finito $x = x_0 \gg x_s$, lejos de la zona de influencia del potencial. Utilizaremos como buena aproximación $F_{l^{(-)}}$ dado por el comportamiento asintótico (3.44) y lo reemplazaremos en la definición del wronskiano

$$W[f_1, f_2] = f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x). \quad (3.54)$$

3.3. Distribución de probabilidad

En la derivación anterior hemos considerado solo el número promedio de partículas creadas por un agujero negro. A continuación, derivaremos la distribución de probabilidad (bosones) mediante la expansión del estado vacío inicial en términos de la base de Fock en $\Sigma = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$:

$$|0_{\text{in}}\rangle = \prod_{\omega\omega'} \sum_{nm} C_{nm}^{(\omega)} |n_\omega\rangle_{\mathcal{I}^-} |m_{\omega'}\rangle_{\mathcal{H}^+}. \quad (3.55)$$

Consideraremos primero el límite óptico geométrico y posteriormente incluiremos la dispersión ondulatoria en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

De las expansiones del campo, (3.4) y (3.6):

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega' \left(\hat{a}_{\omega'} f_{\omega'} + \hat{a}_{\omega'}^\dagger f_{\omega'}^* \right)$$

y

$$\hat{\phi}(x) = \int d\omega \left(p_\omega \hat{b}_\omega + p_\omega^* \hat{b}_\omega^\dagger + q_\omega \hat{c}_\omega + q_\omega^* \hat{c}_\omega^\dagger \right).$$

tenemos que el operador aniquilación en \mathcal{I}^- , $\hat{a}_\omega = (f_\omega, \hat{\phi})$, puede expresarse como combinación de los operadores de los operadores en $\Sigma = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$,

$$\hat{a}_{\omega'} = \int d\omega \left(\alpha_{\omega\omega'} \hat{b}_\omega - \beta_{\omega\omega'}^* \hat{b}_\omega^\dagger + \gamma_{\omega\omega'} \hat{c}_\omega - \eta_{\omega\omega'}^* \hat{c}_\omega^\dagger \right) \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= (f_{\omega'}, p_\omega) & \beta_{\omega\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, p_\omega) \\ \gamma_{\omega\omega'} &= (f_{\omega'}, q_\omega) & \eta_{\omega\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, q_\omega) \end{aligned}$$

son los coeficientes de Bogoliubov. El cálculo de los coeficientes se puede realizar de la misma manera que en la sección 3.1.2 mediante paquetes de onda. Ya que según la ec. (3.24)

$$\alpha_{jn, \omega'} = -e^{4\pi M \omega_j} e^{2i\omega' v_H} \beta_{jn, \omega'},$$

bastará con obtener las demás coeficientes.

Notemos que en la derivación de la distribución de partículas no hemos especificado los modos q_ω y es que, debido a que considera parte del colapso, no existe manera de definir un vector traslación temporal global en el horizonte, lo que resulta en una ambigüedad al definir los modos de frecuencia positiva. No obstante, aún es posible definir un set completo con norma positiva. En particular, para efectos de simplificar el cálculo, se define: [10, 14]:

$$q_\omega = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{v-v_H}{4M}))}}{r} \Theta(v - v_H). \quad (3.57)$$

De este modo, del producto de Klein–Gordon, los coeficientes de Bogoliubov están dados por:

$$\gamma_{\omega\omega'} = -2i \int d^3x \sqrt{-g} g^{0\nu} (q_\omega \partial_\nu f_{\omega'}^*) \quad (3.58)$$

$$= -2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega \left(-\frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{v-v_H}{4M}))}}{r} \right) \frac{i\omega'}{4\pi\sqrt{\omega'}} \frac{e^{i\omega'v}}{r} \Theta(v - v_H) \quad (3.59)$$

y

$$\eta_{\omega\omega'} = 2i \int d^3x \sqrt{-g} g^{0\nu} (q_\omega \partial_\nu f_{\omega'}) \quad (3.60)$$

$$= 2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega \left(-\frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{v-v_H}{4M}))}}{r} \right) \frac{-i\omega'}{4\pi\sqrt{\omega'}} \frac{e^{-i\omega'v}}{r} \Theta(v - v_H). \quad (3.61)$$

Así, con el cambio de variable $x = v - v_H$, se tienen las relaciones (véase Apéndice A):

$$\gamma_{\omega\omega'} = -e^{4\pi M\omega} \beta_{\omega\omega'}^* \quad \text{y} \quad \eta_{\omega\omega'} = -e^{-4\pi M\omega} \alpha_{\omega\omega'}^*. \quad (3.62)$$

Puesto que el estado vacío $|0_{in}\rangle$ se define como el estado que es aniquilado por \hat{a}_ω con cualquier frecuencia ω :

$$\hat{a}_\omega |0_{in}\rangle = 0, \quad \forall \omega, \quad (3.63)$$

usando (3.56) y (3.55), es posible determinar el estado vacío en la base de Fock en tiempo tardíos.

Alternativamente, notemos que de expresar nuevamente los operadores creación y destrucción como combinación de \hat{a}_ω y \hat{a}_ω^\dagger :

$$\begin{aligned} \hat{b}_\omega &= \int d\omega' \left(\alpha_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right), & \hat{b}_\omega^\dagger &= \int d\omega' \left(\beta_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'} + \alpha_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right), \\ \hat{c}_\omega &= \int d\omega' \left(\gamma_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'} - \eta_{\omega\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right), & \hat{c}_\omega^\dagger &= \int d\omega' \left(\eta_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'} + \gamma_{\omega\omega'} \hat{a}_{\omega'}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

el estado vacío es aniquilado por

$$\begin{aligned} (\hat{b}_\omega - e^{-4\pi M\omega} \hat{c}_\omega^\dagger) |0_{\text{in}}\rangle &= 0 \quad \text{y} \\ (\hat{c}_\omega - e^{-4\pi M\omega} \hat{b}_\omega^\dagger) |0_{\text{in}}\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde hemos usado relaciones (3.62). Los operadores en paréntesis, corresponden a una transformación unitaria de un operador squeezed (comprimido) [15, 16]:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{b}_\omega \hat{S}(\zeta) &= \hat{b}_\omega - e^{-4\pi M\omega} \hat{c}_\omega^\dagger \\ \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{c}_\omega \hat{S}(\zeta) &= \hat{c}_\omega - e^{-4\pi M\omega} \hat{b}_\omega^\dagger \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde $\zeta = \ln(1 + e^{-4\pi M\omega})$ y

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta^* \hat{b}_\omega \hat{c}_\omega - \zeta \hat{b}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega^\dagger)} \quad (3.67)$$

o bien,

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\exp(-4\pi M\omega) \hat{b}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega^\dagger} e^{\ln(1 - \exp(8\pi M\omega)) \frac{1}{2} (\hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega + \hat{c}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega + 1)} e^{-\exp(-4\pi M\omega) \hat{b}_\omega \hat{c}_\omega}. \quad (3.68)$$

Luego, ya que los operadores \hat{b}_ω y \hat{c}_ω son operadores que aniquilan el vacío en \mathcal{I}^+ y \mathcal{H}^+ , respectivamente, tenemos a partir de la ecuación (3.65):

$$\begin{aligned} \hat{b}_\omega (\hat{S}(\zeta) |0_{\text{in}}\rangle) &= 0 \quad \forall \omega \quad \rightarrow \quad \hat{S}(\zeta) |0_{\text{in}}\rangle = |0\rangle_{\mathcal{I}^+} \\ \hat{c}_\omega (\hat{S}(\zeta) |0_{\text{in}}\rangle) &= 0 \quad \forall \omega \quad \rightarrow \quad \hat{S}(\zeta) |0_{\text{in}}\rangle = |0\rangle_{\mathcal{H}^+}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

i.e. las proyecciones de los vacíos $|0\rangle_{\mathcal{I}^-}$ y $|0\rangle_{\mathcal{I}^+}$. Luego, ya que el vacío en tiempos tardíos se construye como el producto tensorial de los vacíos en \mathcal{I}^+ y \mathcal{H}^+ :

$$|0_{\text{out}}\rangle = |0\rangle_{\mathcal{I}^+} \otimes |0\rangle_{\mathcal{H}^+}, \quad (3.70)$$

la expansión de $|0_{\text{in}}\rangle$ en la base de Fock de $\Sigma = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$ está dada por:

$$\begin{aligned} |0_{\text{in}}\rangle &= \hat{S}^\dagger(\zeta) |0_{\text{out}}\rangle = \prod_{\omega} (1 - e^{-8\pi M\omega})^{1/2} \exp\left(\sum_{\omega} e^{-4\pi M\omega} \hat{b}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega^\dagger\right) \\ &= \prod_{\omega} (1 - e^{-8\pi M\omega})^{1/2} \sum_n e^{-4\pi M\omega n} |n_\omega\rangle_{\mathcal{I}^+} \otimes |n_\omega\rangle_{\mathcal{H}^+}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Luego, el estado vacío inicial describe la creación de múltiples pares de partículas correlacionadas en las que una de estas entra al agujero negro justo después de su formación, mientras que la otra escapa al infinito. Cabe señalar que, estrictamente, sólo para este último se tiene una interpretación física de partícula inequívoca [17]. Por otro lado, se sigue que la probabilidad de encontrar n partículas (bosones) en un modo ω es:

$$P(n) = (1 - \exp(-8\pi M\omega)) \exp(-8\pi M\omega n). \quad (3.72)$$

Luego, ya que solo las partículas salientes son observadas en \mathcal{I}^+ , la probabilidad de observar partículas en el infinito en un modo ω (en la aproximación del límite óptico geométrico) es idéntica a la distribución térmica de un cuerpo negro a temperatura $T = T_H$, ec. (3.26) [14].

Hasta el momento hemos omitido la retrodispersión ocasionada por el potencial efectivo. Para incluirlo notemos que de la sección 3.2.1 los últimos modos en salir desde el cuerpo en colapso son dispersados en la región de Schwarzschild:

$$\psi_\omega^{up} = t(\omega)p_\omega + r(\omega)q_\omega, \quad (3.73)$$

con lo cual parte es transmitida al infinito y otra parte es retrodispersada al horizonte de eventos. Esto modifica la distribución térmica y la expansión del estado vacío $|0_{\text{in}}\rangle$ mediante:

$$|n_\omega\rangle_{\mathcal{I}^+} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n!}} (t(\omega)\hat{b}_\omega^\dagger + r(\omega)\hat{c}_\omega^\dagger)^n |0\rangle_{\mathcal{I}^+} \otimes |0\rangle_{\mathcal{H}^+}. \quad (3.74)$$

Retomaremos posteriormente este resultado en nuestro análisis del espectro de un agujero negro de Schwarzschild.

Resultados y análisis

En el capítulo anterior hemos derivado la distribución del número promedio de partículas escalares emitidas, ec. (3.25), incluyendo las desviaciones determinadas por el factor de cuerpo gris, $\Gamma_l(\omega)$. La generalización a otras especies es directa y sigue el mismo procedimiento. En particular, la principal diferencia ocurre para el caso de fermiones en el signo del denominador número de ocupación, ec. (3.25), a causa de las relaciones de anticonmutación y las ecuaciones que satisfacen los coeficientes de Bogoliubov, (2.62) y (3.18). En base a lo anterior, la tasa de emisión de una partícula de especie i , spin s_i y grados de libertad g_i , en un tiempo dt y frecuencias $[\omega, \omega + d\omega]$ está dado por (recuperando unidades) [18, 19]

$$\frac{d^2 N_i}{d\omega dt} = \frac{g_i}{2\pi} \frac{\sum_l (2l+1) \Gamma_l^{(i)}(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_H} - (-1)^{2s_i}}. \quad (4.1)$$

El numerador de la expresión anterior está íntimamente relacionado con la sección transversal de absorción:

$$\sigma^{(i)}(\omega) = \frac{\pi c^2}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \Gamma_l^{(i)}(\omega), \quad (4.2)$$

la cual determina la cantidad de partículas que llegan al infinito sobre todo el ángulo sólido con respecto al flujo de energía emitido. De esta expresión, definimos la sección transversal parcial como

$$\sigma_l^{(i)}(\omega) \equiv \frac{\pi c^2}{\omega^2} (2l+1) \Gamma_l^{(i)}(\omega) \quad \text{donde} \quad \sigma^{(i)}(\omega) = \sum_l \sigma_l^{(i)}(\omega). \quad (4.3)$$

La potencia emitida total o luminosidad de un agujero negro está dada por la potencia emitida por cada especie:

$$P_{tot}(M) = \sum_i \int_0^{\infty} d\omega \frac{g_i}{2\pi c^2} \sigma^{(i)}(\omega) \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T_H} - (-1)^{2s_i}}. \quad (4.4)$$

Así, la tasa de pérdida de masa viene dado por:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{c^2} P_{tot}(M) \quad (4.5)$$

A continuación mostraremos los resultados obtenidos para los factores de cuerpo gris y las tasas de emisión de cada especie. Haremos particular énfasis en el caso escalar y vectorial (fotones). Posteriormente analizaremos el comportamiento realizando una aproximación semiclásica, la cual nos permitirá interpretar la relevancia de los factores de cuerpo gris en el espectro térmico de agujeros negros. Finalmente analizaremos los efectos de la dispersión en la expansión del estado $|0_{in}\rangle$ en la base de Fock de un observador situado en el infinito.

4.1. Factores de cuerpo gris

4.1.1. Campo escalar real

En la Fig. 4.1.a presentamos los resultados numéricos del factor de cuerpo gris, ec. (3.53), en función de la frecuencia angular en unidades $[r_s^{-1}c]$, donde r_s es el radio de Schwarzschild y c es la velocidad de la luz, para los primeros cinco modos de momento angular l . Como se puede observar, las curvas presentan un comportamiento creciente, aumentando desde un valor nulo hasta alcanzar asintóticamente la unidad. Además, se observa que el factor de cuerpo gris alcanza valores cercanos al máximo a menor energía mientras menor sea el momento angular l , en intervalos de aproximadamente $\Delta\omega = 0,5[r_s^{-1}c]$. Este comportamiento se puede entender debido a que las partículas menos energéticas no son capaces de superar la barrera de potencial efectiva de la ecuación diferencial tipo Schrödinger, la cual aumenta con el número cuántico l , Fig. 3.3. Destacamos que a bajas energías, el único modo que se transmite significativamente hasta un observador en el infinito es el término monopolar ($l = 0$). No obstante, incluso para este modo, que representa una radiación isotrópica, la probabilidad de transmisión tiende a cero con $\omega \rightarrow 0$. Por otro lado, debido a que la frecuencia angular está en términos del radio de Schwarzschild, las curvas de los coeficientes de cuerpo gris son invariantes ante reescalamientos del tamaño del agujero negro y por tanto, se mantienen las mismas curvas independiente de la temperatura y el estado en el proceso de evaporación.

En la Fig. 4.1.b presentamos la sección transversal de absorción parcial, σ_l , en unidades de $[r_s^2]$ para los primeros cinco modos. Como se puede observar, cada sección transversal de absorción alcanza un máximo resonante y decae a cero en el límite de altas energías. De igual manera que en el caso del factor de cuerpo gris, los máximos de σ_l ocurren en intervalos $\Delta\omega = 0,5[r_s^{-1}c^{-1}]$, aproximadamente, entre curvas con $\Delta l = 1$. Obsérvese que tanto el decaimiento a altas energías como la disminución del máximo de σ_l a medida que aumenta l se debe al factor ω^{-2} en la expresión de la sección transversal de absorción, ec. (4.2). Por otro lado, en el límite de bajas energías, el único modo con sección transversal parcial no nula corresponde al modo $l = 0$.

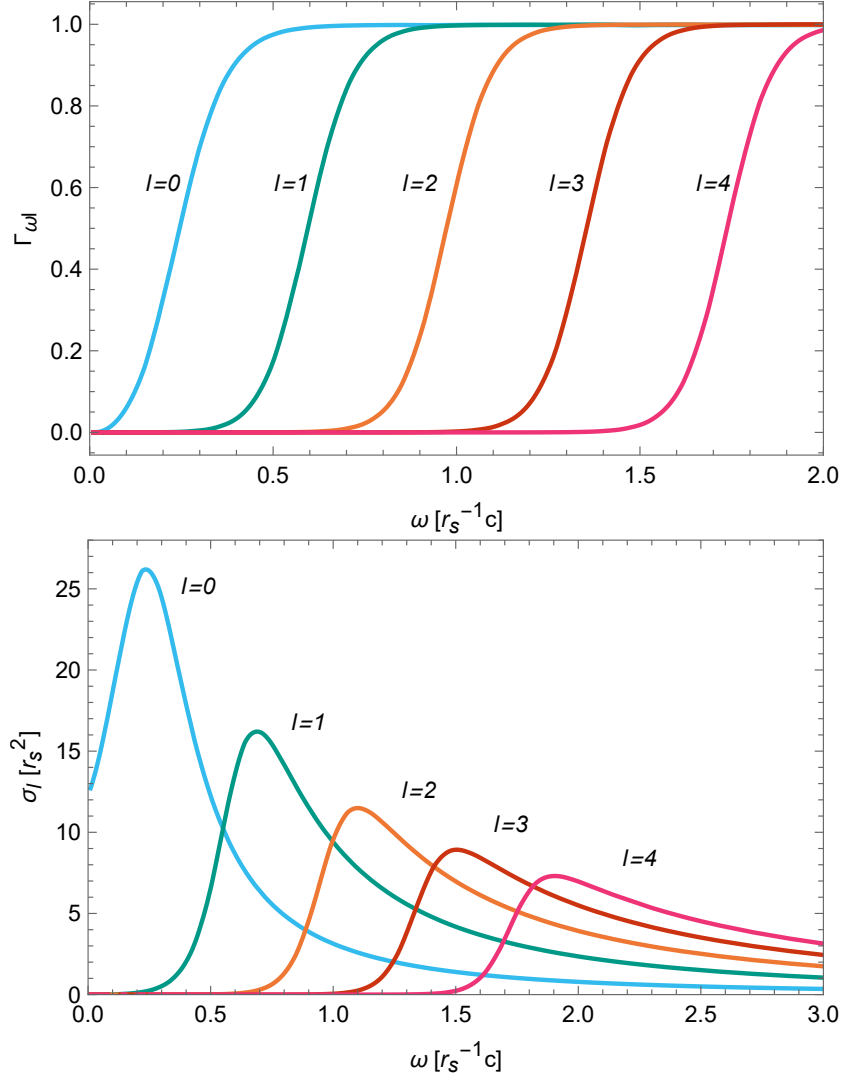


FIGURA 4.1: (a) Factores de cuerpo gris $\Gamma_l(\omega)$ en función de la frecuencia angular ω en unidades de $r_s^{-1}c$ para los primeros modos de un campo escalar. (b) Sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de ω para los mismos modos.

La sección transversal total σ , se muestra en la Fig. 4.2. A partir de la figura, se aprecia que a medida que aumenta la energía, la sección transversal total se incrementa a partir del área del agujero negro (representado por la línea roja punteada) y oscila en torno a la sección eficaz de captura clásica $\sigma_c = (27\pi/4)r_s^2$ (línea azul punteada). Se atribuye el comportamiento oscilatorio a los efectos de la difracción y a la contribución de nuevos modos en la sección transversal parcial. Asimismo, la convergencia en el límite de altas energías se atribuye al decaimiento de σ_l y a la contribución significativa de sólo un número finito de modos a una frecuencia dada, Fig. 4.1.

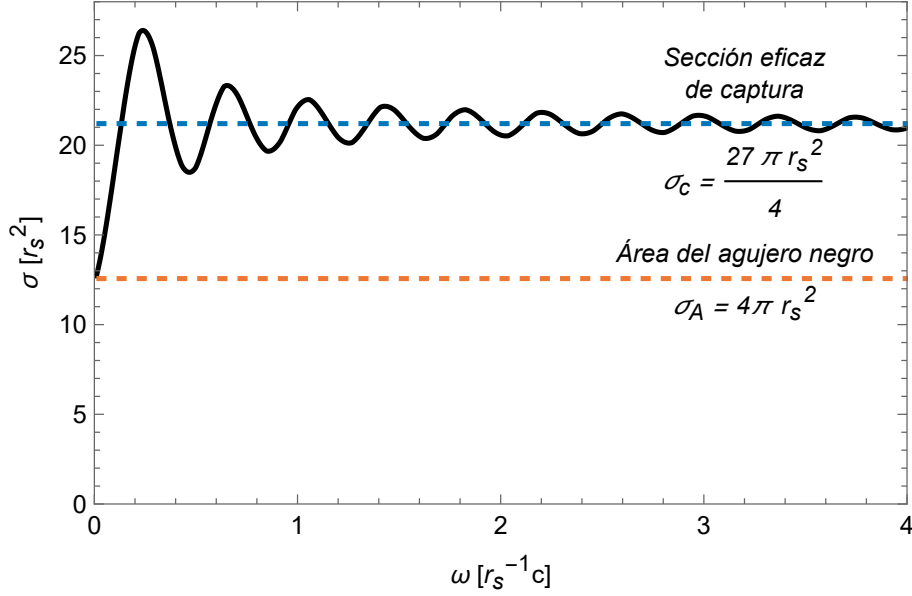


FIGURA 4.2: Sección transversal de absorción total en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω .

4.1.2. Campo vectorial

En el caso de un campo vectorial, la dispersión en una geometría de Schwarzschild está determinado por las ecuaciones de movimiento [20–22]:

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.6)$$

donde $F^{\mu\nu} = \nabla^{\mu} A^{\nu} - \nabla^{\nu} A^{\mu}$ es el tensor de campo electromagnético y A^{μ} es el potencial electromagnético. Utilizando un gauge de Coulomb, es directo demostrar que los componentes satisfacen una ecuación diferencial radial tipo Schrödinger con potencial (apéndice B):

$$V_l^{EM}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2}\right), \quad (4.7)$$

para ambas polarizaciones. Las probabilidades de transmisión, i.e. los factores de cuerpo gris, son por lo tanto independientes de la polarización y pueden obtenerse siguiendo la metodología de la sección 3.2.3, al imponer soluciones que asintóticamente correspondan a ondas planas polarizadas. Esto implica que en la expansión multipolar de una onda plana en dirección \hat{z} en armónicos esféricos vectoriales sólo aparecen modos con $l \geq 1$ y $m = \pm 1$, como consecuencia a la helicidad impuesta por el espín no nulo. En la Fig. 4.3 se muestra el potencial efectivo en función de r de este campo vectorial sin masa.

La Fig. 4.4.a muestra los factores de cuerpo gris, Γ_l , en función de ω en unidades $[r_s^{-1}c]$ para los primeros cuatro modos de un campo vectorial y una de las

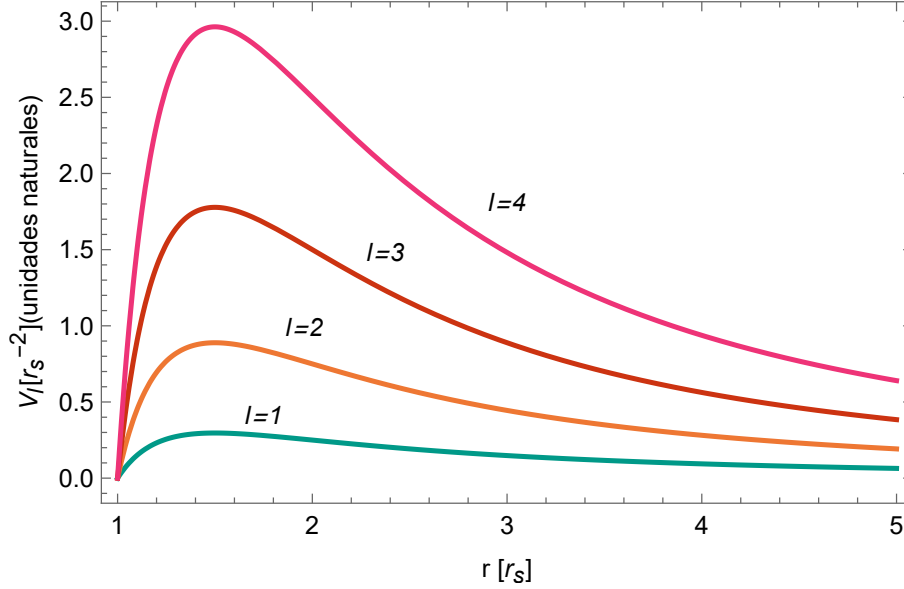


FIGURA 4.3: Potencial efectivo $V_l(r)$ para un campo vectorial sin masa dado por la ecuación (4.7) en función de la coordenada radial en unidades de radio de Schwarzschild, r_s .

polarizaciones. Como se puede apreciar, las curvas presentan el mismo comportamiento creciente que en el caso escalar, convergiendo asintóticamente a la unidad a altas energías. Además, observamos un ligero desplazamiento en las frecuencias donde se incrementa significativamente el factor de cuerpo gris, en comparación al caso anterior. Esto se origina debido a la ausencia del término independiente de l en el potencial vectorial efectivo, ec. (4.7), o bien, al cambio en las barreras de potencial, Fig. 3.3 y 4.3. Destacamos que debido a la ausencia del modo monopolar ($l = 0$) en la expansión de ondas planas polarizadas, la transmisión de los modos es despreciable en el régimen de bajas energías. Luego, casi todas las ondas “emitidas” en este régimen son reabsorbidas por el agujero negro.

La sección transversal parcial para un campo vectorial sin masa se muestra en la Fig. 4.4.b. Nuevamente, se observa un incremento en σ_l hasta alcanzar un máximo resonante, seguido de un decaimiento asintótico a altas energías. Comparando con el caso escalar, se puede apreciar que las frecuencias resonantes presentan un corrimiento hacia más bajas energías y que además, se alcanza un mayor valor en la sección transversal parcial en comparación a los mismos modos de momento angular l . Fig. 4.4.c muestra la sección transversal de absorción total, dado por la suma de todas las secciones transversales parciales. A diferencia del caso escalar, esta cantidad se incrementa desde cero hasta oscilar en torno al mismo valor de la sección eficaz de captura, σ_c , como resultado de la ausencia del modo monopolar. Por consiguiente, la sección transversal de un campo vectorial sin masa se encuentra suprimida en el régimen de bajas energías.

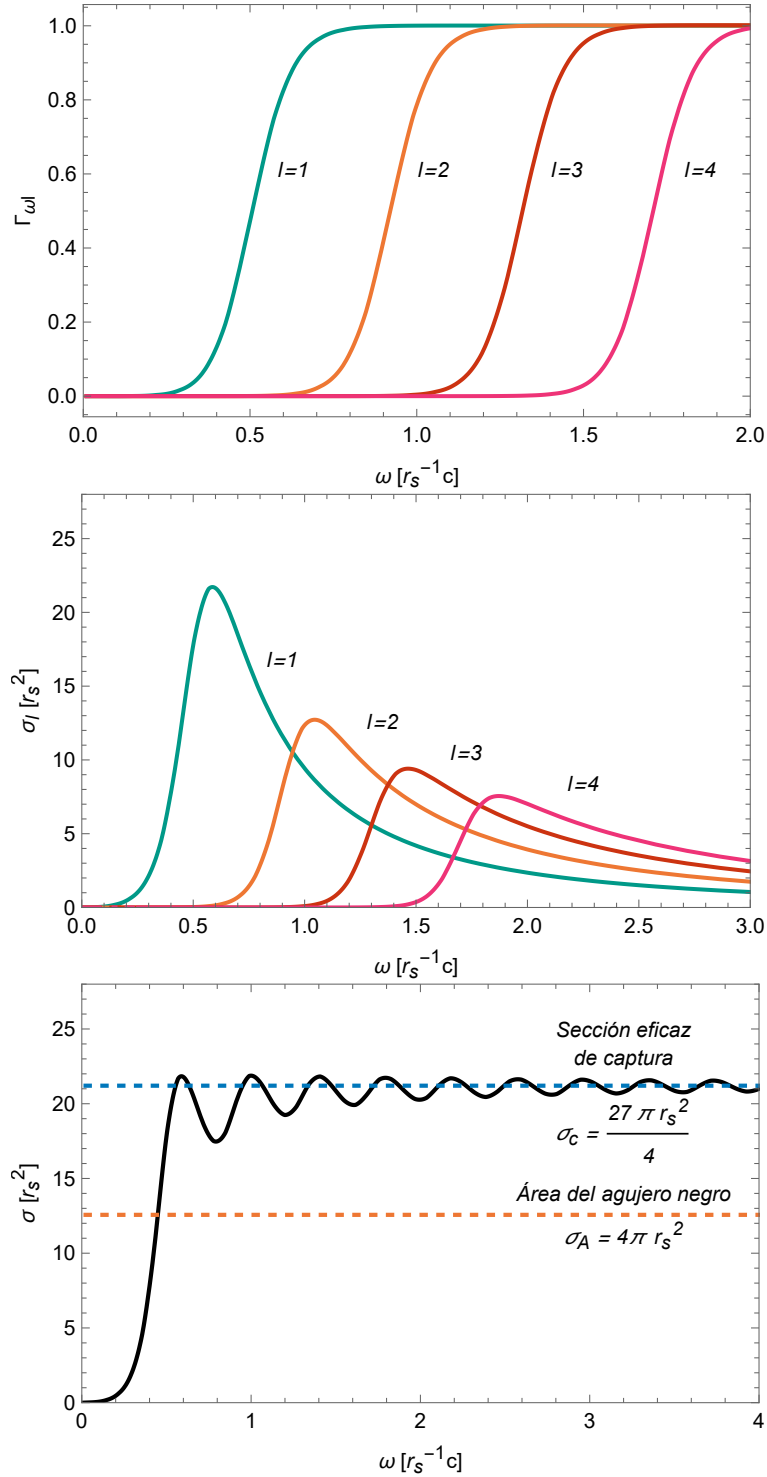


FIGURA 4.4: (a) Factores de cuerpo gris $\Gamma_l(\omega)$ en función de la frecuencia angular ω en unidades de $r_s^{-1}c$ para el caso de un campo vectorial sin masa. (b) Sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de ω para los mismos modos. (c) Sección transversal total en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω .

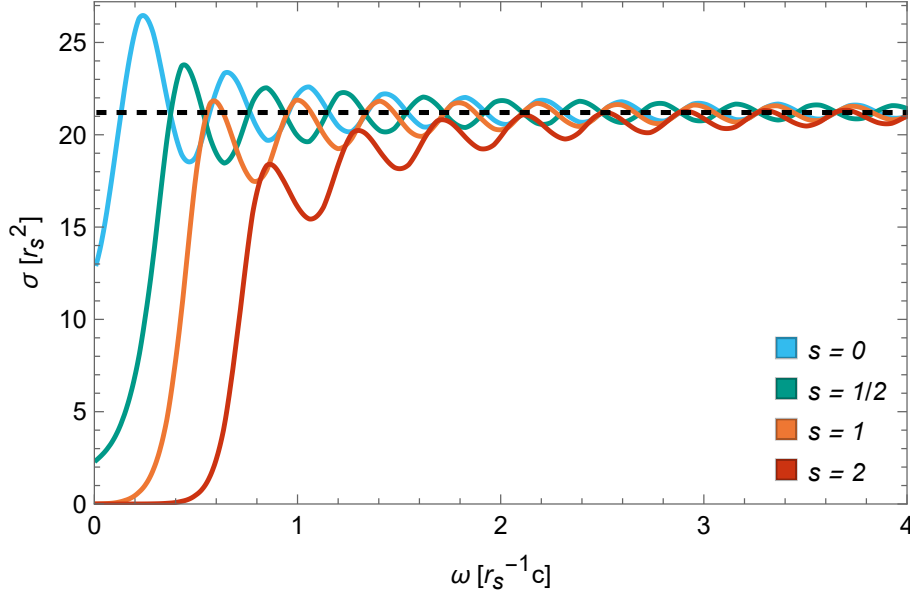


FIGURA 4.5: Sección transversal total (sumada sobre todos los modos con momento angular definido) de partículas no masivas en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω .

4.1.3. Otras especies

La dispersión de estas y otras especies de partículas (sin masa) en un espacio-tiempo de Schwarzschild ya han sido estudiadas por otros autores previamente [19, 23–27]. En general, se encuentra que todas las ecuaciones de movimiento se reducen a ecuaciones tipo Schrödinger con potenciales efectivos modificados. En particular, para el caso bosónico se tiene que el potencial efectivo viene dado por [28]:

$$V_l^{(s)}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_s}{r^3}(1 - s^2)\right), \quad (4.8)$$

donde s es el espín. Con el propósito de comparar entre especies, presentamos en la Fig. 4.5 la sección transversal de absorción total (omitiendo factor de degeneración) para especies sin masa con $s = \{0, 1/2, 1, 2\}$, siguiendo la metodología vista en la sección 3.2.3. Como podemos observar, todas las curvas presentan el comportamiento oscilatorio determinado por las contribuciones de las secciones transversales parciales, alcanzando en el límite de altas energías la sección eficaz de captura. Por otro lado, para el límite de bajas energías, la sección transversal se ve suprimida para partículas con espín superior. Esto se debe, tal como en caso de fotones, a la helicidad de las partículas y a la ausencia de modos con $l < s$ en la expansión multipolar de las soluciones polarizadas. Por lo tanto, esta supresión aumenta a mayor número de espín.

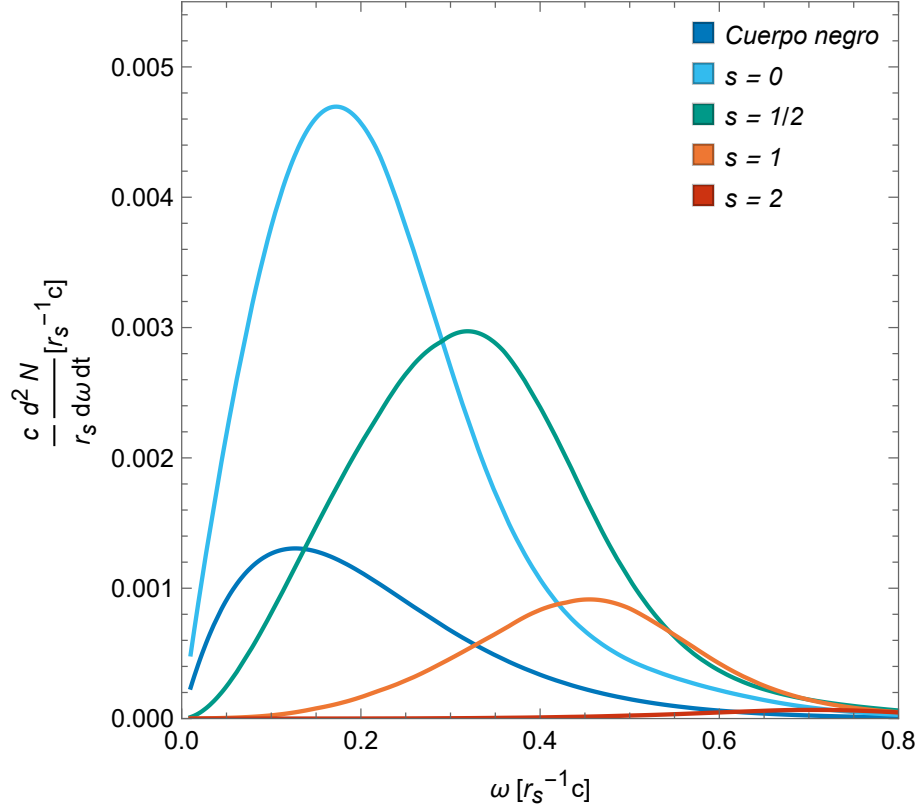


FIGURA 4.6: Tasa de emisión espectral de partículas sin masa en función de la frecuencia angular en unidades de $r_s^{-1}c$. Se incluye emisión espectral de un cuerpo negro a misma temperatura T_H con área superficial igual al área del horizonte de eventos.

4.2. Tasas de emisión

Los resultados previos muestran que las partículas emitidas con frecuencia angular $\omega \sim r_s^{-1}c$ (o longitudes de onda comparables al radio de Schwarzschild, $\lambda \sim r_s$), son prácticamente reabsorbidas en su totalidad por el agujero negro. No obstante, la distribución estadística indica que la mayoría del número de partículas creadas se encuentra precisamente en este rango de frecuencias ($\omega \sim k_B T_H \sim r_s^{-1}c$). Luego, el espectro de emisión en este régimen diferirá ampliamente en comparación al espectro de una cavidad de un cuerpo negro (de largo $L \gg 1$) con la misma temperatura.

En la Fig. 4.6 se muestra la tasa de emisión espectral para las distintas especies. De acuerdo con lo presentado, se puede observar una fuerte dependencia del espectro a la naturaleza de las partículas, como consecuencia del fenómeno de retrodispersión y de la ausencia de modos con $l < s$. Para valores de espín superior s , se encuentra que el espectro presenta un corrimiento hacia el ultravioleta y un menor pico en la tasa de emisión debido al menor número de partículas

emitidas a altas frecuencias, aún cuando el número de grados de libertad es mayor. Señalamos que las desviaciones en relación al espectro de una cavidad de un cuerpo negro (de largo $L \gg 1$), permitirían identificar la evaporación de un agujero negro con respecto a otros fenómenos del cosmos. No obstante, debido a que un agujero negro emite toda clase de partículas, es necesario considerar las modificaciones a este espectro debido al decaimiento de partículas inestables.

La diferencia en las tasas de emisión implica que unas especies contribuyen en mayor o menor medida a la evaporación de un agujero negro. En base a los resultados anteriores, se tiene que la potencia de emisión de cada especie viene dado por:

$$P_i = \begin{cases} 3,2 \cdot 10^{-28} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \left[\frac{J}{s}\right], & \text{para } s = 0 \\ 3,5 \cdot 10^{-28} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \left[\frac{J}{s}\right], & \text{para } s = 1/2 \\ 1,4 \cdot 10^{-28} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \left[\frac{J}{s}\right], & \text{para } s = 1 \\ 1,7 \cdot 10^{-29} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \left[\frac{J}{s}\right], & \text{para } s = 2 \end{cases} \quad (4.9)$$

con M_\odot la masa solar. Determinar la potencia total emitida por un agujero negro resulta esencialmente complejo, ya que depende del modelo teórico de la física de partículas aplicado. Estimaciones en base al modelo estándar bajo la aproximación ultrarelativista pueden encontrarse en [18]. Si bien el orden de la potencia de emisión es comparable a los resultados encontrados, cabe señalar que para partículas masivas la ausencia de la invariancia de gauge para $s = 1$ y $s = 2$, ha de reincorporar los modos $l < s$ para algunas polarizaciones. Esto sugiere que parte de la tasa de emisión y la potencia emitida ha de incrementarse a bajas energías, y por tanto, su tasa de evaporación. Por otro lado, comparando la potencia de emisión de fotones y la potencia de emisión en la aproximación de cuerpo negro, (2.20), encontramos que la potencia de emisión de éste último es un orden de magnitud menor. Comparando la expresión de cada especie,

$$P_i = \int d\omega \frac{g_i}{2\pi^2 c^2} \sigma^{(i)} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - (-1)^{2s_i}} \quad (4.10)$$

con la de un cuerpo negro a la misma temperatura, ec. (2.16), podemos notar que el área superficial de emisión es $A(\omega) = 4\sigma$. Si bien este depende de la frecuencia angular ω , en el límite de altas energías esta área corresponde al área superficial:

$$A \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 4\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s\right)^2. \quad (4.11)$$

Es decir, el área de una esfera dado por el parámetro de impacto crítico. De este modo, la potencia de emisión es mayor aún cuando hayan efectos dispersivos, ya

que el área de emisión es en realidad mayor que el área del horizonte de eventos. Observemos que en este límite donde la sección transversal es constante se tiene precisamente el espectro térmico de un cuerpo negro. Esto sugiere que los efectos dispersivos no son ajenos a la termodinámica del agujero negro, aún cuando a bajas energías originan desviaciones importantes en el espectro. A continuación analizaremos este aspecto.

4.3. Análisis semiclásico

De acuerdo con lo presentado, los factores de cuerpo gris son fundamentales en la determinación del espectro, la potencia emitida y el área superficial de emisión. Ahora bien, a causa de la comparativa con un cuerpo negro, (4.10), es más eficiente analizar el comportamiento de la sección transversal de absorción. Para comprender el porqué éste converge a la sección eficaz de captura, notemos que para fotones, el potencial efectivo (4.3) coincide formalmente con el potencial que se obtiene de analizar la ecuación de la geodésica en un espacio-tiempo de Schwarzschild [29, 30]:

$$c^2 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{c^2 L^2}{r^2} \quad (4.12)$$

donde E y L son las cantidades conservadas de energía y momento angular (clásicas), respectivamente, y λ es el parámetro afín. Luego, ya que toda partícula con energía E y momento angular L que cae desde el infinito al agujero negro puede recorrer la misma trayectoria invertida (si se origina en la afueras del horizonte), encontramos que las partículas emitidas de un agujero negro deben tener exactamente los mismos parámetros. Esto es, un parámetro de impacto menor al parámetro de impacto crítico en el problema clásico de captura gravitacional, Fig. 4.7:

$$b(E, L) \equiv \frac{|\vec{L}|}{|\vec{p}|} < b_{crit} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_s \quad (4.13)$$

donde $E = |\vec{p}|c$. En otras palabras, un observador en el infinito ve brillar un objeto con área transversal:

$$\sigma = \pi b_{crit}^2 = \frac{27}{4} \pi r_s^2, \quad (4.14)$$

la cual es la sección eficaz de captura. Esto es consistente con el tamaño efectivo de esta fuente emisora, (4.11).

En la derivación de la radiación de Hawking el carácter térmico del espectro observado se debe principalmente a la elección de la base ortonormal de modos

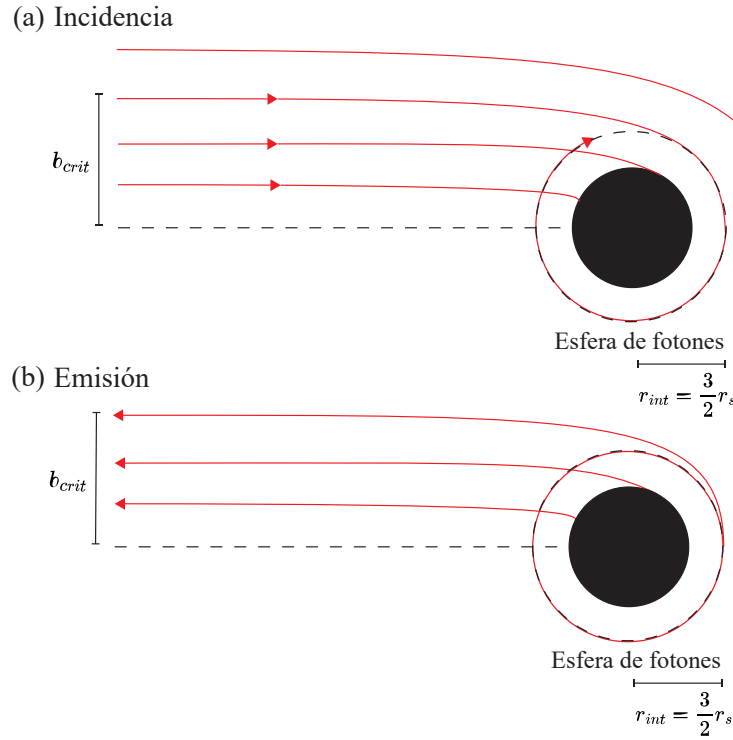


FIGURA 4.7: Diagrama del problema clásico de captura gravitacional en un agujero negro de Schwarzschild (círculo negro) para (a) partículas paralelamente incidentes desde el infinito y (b) la misma trayectoria con inversión temporal. La circunferencia punteada representa la esfera de fotones de radio $r_{int} = 3r_s/2$.

de frecuencia positiva definida en \mathcal{I}^+ . Este resultado resalta el carácter local de las mediciones realizadas por un observador en el infinito: la detección de un flujo de partículas desde el agujero negro (según su base de Fock) y la potencia de emisión sobre el área transversal que ve brillar, le permite medir las propiedades, como la irradiancia y temperatura, de este cuerpo.

Si bien la interpretación clásica reproduce correctamente la sección transversal de absorción en el límite óptico geométrico, la descripción completa del fenómeno de reabsorción requiere considerar los efectos ondulatorios y la cuantización del momento angular. Ahora bien, definiendo el parámetro de impacto semiclásico [12, 31]:

$$b_l(k) \equiv \frac{|\vec{L}|}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar\sqrt{l(l+1)}}{\hbar k}, \quad (4.15)$$

es posible reproducir el mismo análisis en dispersión de ondas esféricas. Esta cantidad se justifica ya que indica el punto sobre el cual la energía del modo se iguala al potencial centrífugo en un espacio-tiempo plano, dando una noción

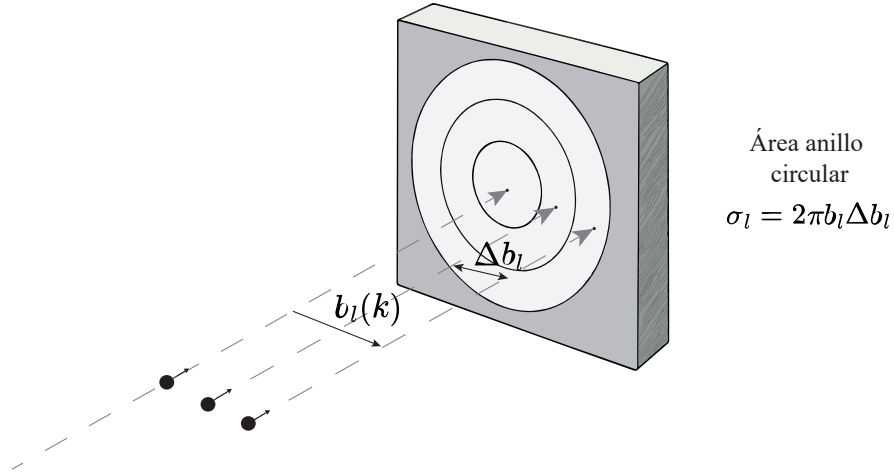


FIGURA 4.8: Diagrama de un flujo de partículas sobre un plano perpendicular a su dirección de movimiento con valores discretos del parámetro de impacto $b_l(k)$, ec. 4.15, y el área del anillo circular que forma entre modos contiguos al impactar en el plano.

de hasta donde logran penetrar la propagación de las ondas. En efecto, esto puede verse directamente del análisis de la región oscilatoria y amortiguada de la ecuación diferencial de la parte radial de las soluciones (en coordenadas esféricas) de dicha geometría:

$$\frac{d^2 j_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dj_l}{dr} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) j_l = 0, \quad (4.16)$$

donde $k = \omega/c$, y que corresponden, evidentemente, a la ecuación diferencial que satisfacen las funciones esféricas de Bessel.

Vale notar que en este enfoque semiclásico la sección transversal de estos modos corresponden a anillos circulares dados por un radio promedio b_l y un ancho $\Delta b_l = b_{l+1}(k) - b_l(k)$ que representa la diferencia entre el parámetro de impacto de dos modos contiguos ($\Delta l = 1$). Así, el área de impacto de este modo es:

$$\sigma_l = 2\pi b_l \Delta b_l. \quad (4.17)$$

Luego, considerando $l \gg 1$, donde

$$b_l \approx \frac{1}{k} \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad \text{y} \quad \Delta b_l = \frac{1}{k}, \quad (4.18)$$

en base a la ec. (4.15), encontramos que reproducen consistentemente la parte incidente de la sección transversal de absorción utilizado en la dispersión ondu-

latoria, ec. (4.3):

$$\sigma \approx \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1). \quad (4.19)$$

De este modo, en analogía a la dispersión clásica, la expansión multipolar de una onda plana $\sim e^{ip_\mu x^\mu}$, representa la descomposición de un flujo continuo de partículas sobre un plano en partículas que inciden a distancias discretas $b_l(k)$ con respecto al centro, como se puede apreciar en la Fig. 4.8.

En la teoría de dispersión, el análisis mediante ondas parciales es particularmente útil en interacciones con un potencial localizado:

$$V(r) = 0, \quad \text{para cierto radio } r \gg r_{int}. \quad (4.20)$$

ya que, en concordancia al análisis anterior, se puede inferir que solo aquellos modos con un parámetro de impacto menor a la zona de influencia del potencial, r_{int} , serán afectados.

A partir de la ecuación diferencial tipo Schrödinger del campo vectorial sin masa,

$$\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \left(k^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r^*) = 0 \quad (4.21)$$

se tiene que la región de interacción r_{int} para la dispersión en un espacio-tiempo de Schwarzschild está dada por la localización del máximo del potencial efectivo (o el punto donde la ecuación diferencial pasa de un régimen oscilatorio a uno amortiguado). Así se obtiene que la región de interacción viene dado por:

$$r_{int} = \frac{3}{2} r_s, \quad (4.22)$$

el cual es el radio de la esfera de fotones. Notemos que desde el punto de vista semiclásico, los únicos modos que se verán absorbidos (o expelidos) por la presencia del agujero negro, serán entonces aquellos modos con parámetro de impacto menor a:

$$b_l(k) = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} < r_{int} \left(1 - \frac{r_s}{r_{int}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_s, \quad (4.23)$$

similar a la dispersión clásica. Cabe señalar que esta aproximación es equivalente a definir de manera determinista si las partículas interactúan o no con el objeto que las dispersa, por lo que desprecia los efectos ondulatorios y el tunelamiento en la barrera.

Bajo esta aproximación, existe un valor máximo de momento angular, l_{max} , que satisface la desigualdad. Así, la sección transversal de absorción vendrá dada

por la suma de todas las secciones transversales de los modos que logran ser absorbidos (en el caso de incidencia desde el infinito):

$$\begin{aligned}\sigma_{abs}^{(SC)} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \Theta \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \right) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l^{l_{max}} (2l+1) = \frac{\pi}{k^2} (l_{max} + 1)^2,\end{aligned}\quad (4.24)$$

donde

$$\begin{aligned}l_{max} &= \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right)^2}}{2} \right\rfloor, \\ &= \left\lfloor \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right)^2}} - \frac{1}{2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right)^2} \right) \right\rfloor\end{aligned}\quad (4.25)$$

según la ec. (4.23).

En base al cálculo anterior, reconocemos además el factor de cuerpo gris en la aproximación semiclásica:

$$\Gamma_l(k) = \Theta \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} \right), \quad (4.26)$$

lo cual describe la probabilidad de transmisión clásica. Es decir, si la partícula escapa o no, según excede el umbral energético impuesto por la barrera de potencial.

Definiendo δ con $0 < \delta < 1$ como la diferencia con el valor entero en l_{max} y considerando $k \gg (3\sqrt{3}/2)r_s$, entonces la sección transversal en el límite de altas energías viene dado según:

$$\sigma_{abs}^{(SC)} = \frac{\pi}{k^2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right)^2 \left(1 + \frac{\delta}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s k \right)} \right)^2, \quad (4.27)$$

lo que indica, en concordancia a nuestros resultados previos, que la sección transversal de absorción oscila en torno a la sección eficaz de captura. Luego, desde el punto de vista semiclásico, si un agujero negro emite partículas en todas direcciones y en todas las energías disponibles, entonces un observador en el infinito ve brillar un cuerpo de un área transversal dado aproximadamente por la sección eficaz de captura, pero con partículas que inciden en valores discretos del parámetro de impacto, formando anillos iluminados dentro de esta área. Obsérvese que la cantidad de anillos es mayor si se detectan partículas más energéticas.

Adicionalmente, a partir de la ec. (4.27), notemos que estos efectos, causados por la discretización del momento angular, son apreciables mientras las longitudes de onda ($\lambda = 2\pi/k$) de las partículas emitidas sean del orden del parámetro de impacto crítico, o bien, sean partículas con energías:

$$E = \hbar kc \sim \hbar c \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s \right)^{-1} \approx 2,5 \cdot 10^{-11} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) [eV] \quad (4.28)$$

donde M_\odot es la masa solar. Para un agujero negro con una masa solar estas energías son muy pequeñas y, en la práctica, indetectables. No obstante, como hemos mencionado, este es justamente el rango de energías en el cual opera la radiación de Hawking:

$$E \sim k_B T_H = \frac{\hbar c}{4\pi r_s} \sim 5,2 \cdot 10^{-12} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) [eV]. \quad (4.29)$$

En otras palabras, el fenómeno de evaporación de agujeros negros, ocurre en un régimen donde la naturaleza ondulatoria de las partículas y la discretización del momento angular es siempre relevante, ya sea para agujeros negros astrofísicos, como para agujeros negros primordiales muy pequeños.

Para otras especies el análisis es análogo, puesto que en el límite $l \gg 1$ el potencial centrífugo domina en los potenciales efectivos de cada teoría, ec. (4.8). Modificaciones al parámetro de impacto crítico en los modos de menor momento angular se pueden estimar calculando la región de interacción del potencial. Para estos se encuentra que todos los modos tienden al parámetro de impacto crítico en el límite antes mencionado.

La comparación de los factores de cuerpo gris en la aproximación semiclásica con los resultados obtenidos en la dispersión de los modos se muestran en la Fig. 4.9.a. En esta figura, las funciones escalón (curvas coloreadas) indican el umbral energético a partir del cual las partículas logran alcanzar el infinito, en consecuencia a la naturaleza determinista de la aproximación. Por otro lado, las curvas punteadas indican la probabilidad de transmisión de los modos emergentes desde el horizonte, vistos en la sección 4.1.2. Luego, la diferencia entre ambas curvas se explica debido a que estos últimos, por efecto túnel, incluso a energías menores a los de la barrera de potencial, logran transmitirse parcialmente hasta el infinito, lo que suaviza la transición a una transmisión completa. Cabe señalar que la ausencia del término monopolar ocurre, como ya hemos explicado, únicamente debido a la estructura del campo. En particular, desde el punto de vista clásico, esto equivale a afirmar que un agujero negro no puede emitir partículas isotrópicamente, o bien, partículas radialmente salientes sobre toda su superficie.

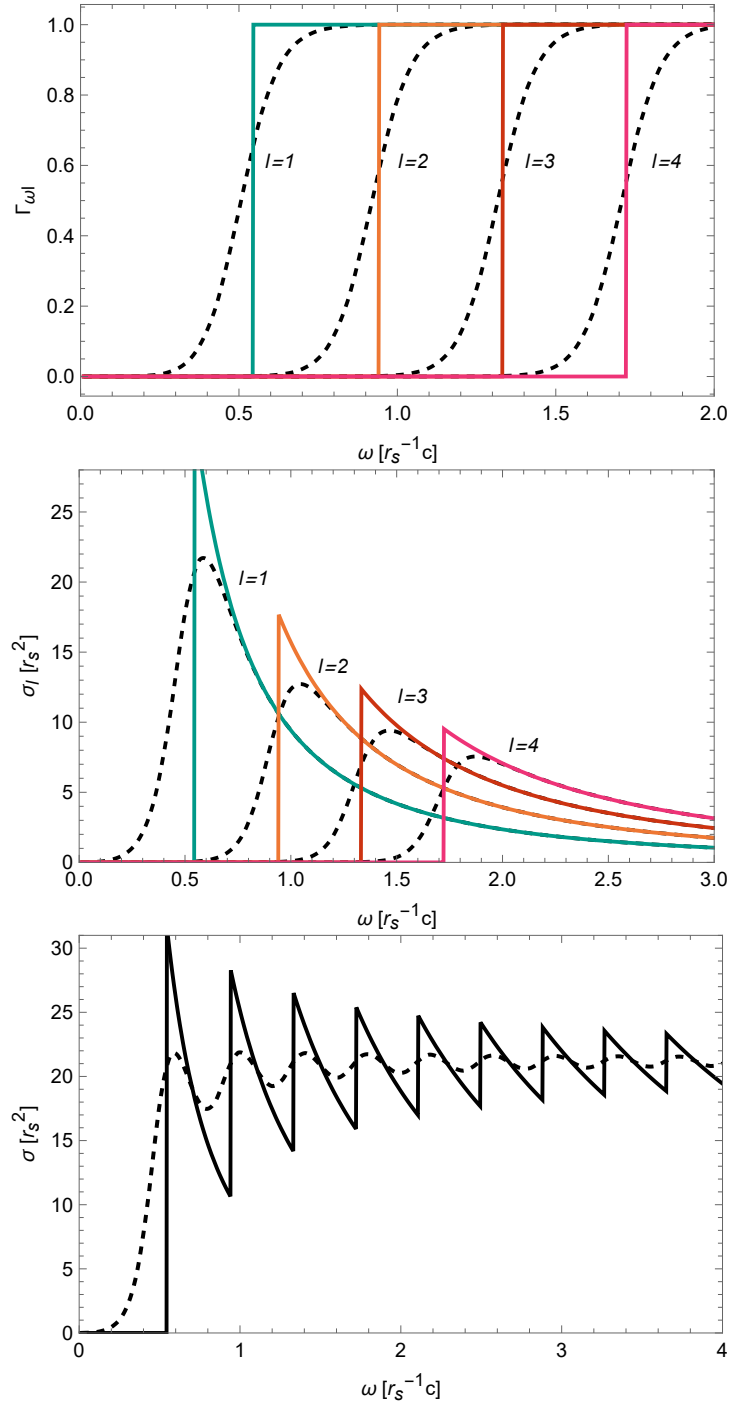


FIGURA 4.9: (a) Factores de cuerpo gris y (b) sección transversal parcial en unidades de r_s^2 en función de la frecuencia angular ω para la aproximación semiclásica considerando un potencial efectivo análogo al campo vectorial sin masa. (c) Sección transversal de absorción para el método semiclásico en comparación con resultado de campo vectorial sin masa.

En la Fig. 4.9.b se muestra la sección transversal parcial σ_l . Obsérvese que el máximo de resonancia es mayor que en el caso de dispersión del campo. Por

otro lado, la diferencia entre ambas curvas ocurre en torno a las frecuencias resonantes, principalmente debido a que en la dispersión ondulatoria parte de la onda incidente sigue siendo reflejada a estas energías. Fuera de ese régimen, se aprecia cómo ambas curvas convergen.

En la Fig. 4.9.c mostramos la sección transversal total dada por la expresión (4.24). En la aproximación semiclásica, encontramos que la sección transversal se incrementa abruptamente de cero para después oscilar en torno a la sección eficaz de captura, tal como hemos descrito en la ec. (4.27). Cabe señalar que las oscilaciones son más grandes en comparación a los resultados de la dispersión de los modos. No obstante, reproduce en general el comportamiento ya observado.

4.4. Análisis de la termodinámica de agujeros negros

Hasta la fecha, los factores de cuerpo gris han sido considerados como correcciones al espectro de radiación de cuerpo negro que inicialmente se emana desde el horizonte de eventos. Ahora bien, como ya hemos podido observar, su incorporación resulta ineludible en la comprensión completa del fenómeno. Luego, es natural cuestionar si éste juega un rol más trascendental en el espectro térmico del agujero negro. Contrario a lo previsto, veremos que este es esencialmente el caso y que, de hecho, los agujeros negros emiten en un espectro aproximadamente térmico sólo a través de los efectos dispersivos.

En nuestra derivación, la creación de partículas a partir de un espacio-tiempo en colapso radica en la expansión de los modos de frecuencia positiva en \mathcal{I}^+ como combinación de los modos de frecuencia positiva y negativa en \mathcal{I}^- . En particular, en comparación con la descripción microscópica de un cuerpo negro, esto equivale a decir que los autoestados del sistema aislado ya no son autoestados del sistema completo (del átomo más el campo electromagnético, en esta analogía), lo que implica que las probabilidades de transición no son nulas y, por consiguiente, que se emite radiación espontáneamente. Ahora bien, en un cuerpo negro, modelado como una caja caliente de tamaño L en equilibrio térmico, la derivación del espectro se determina a partir del conteo de los modos vibracionales del campo electromagnético y del número de ocupación promedio en cada modo. No obstante, para un agujero negro, no es tan evidente cuáles son estos modos vibracionales, ni cómo pueden ser contados o discretizados. Sin embargo, sabemos que solo un número finito de modos superan el “umbral de transmisión” al infinito, por lo que cabe preguntarse si estos son aquellos modos “vibracionales” y si reflejan consistentemente las mismas propiedades.

Bajo la suposición anterior, observemos que de la aproximación semiclásica, (4.19), si todos los modos normales tienen la misma probabilidad de ocupación, el número de modos a una cierta energía, $N(\omega)$, viene dado por la sección transversal

de absorción (que incluye todos los modos que radían) dividida por la sección transversal del primer (y único) modo, $\sigma_{l=0} = \pi/k^2$. Así, la cantidad de modos a una frecuencia angular fija, viene dado por:

$$N(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi c^2} \sigma_{tot}^{(abs)} = \sum_l (2l + 1) \Gamma_{\omega l}, \quad (4.30)$$

donde el factor $(2l + 1)$ representa el peso de la degeneración $m = \{-l, \dots, l\}$. Luego, es posible notar que tanto la tasa de emisión de un agujero negro, (4.1), como la tasa de emisión de un cuerpo negro a temperatura T_H , ec. (2.16), son fundamentalmente la misma expresión, de manera consistente a lo formulado.

Por otro lado, en el análisis semiclásico, hemos señalado que el espectro de emisión está dominado por partículas con energía del orden de $E \sim k_B T_H$, comparables a la separación energética entre modos disponibles, o bien, vectores de onda

$$\Delta k = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s \right)^{-1}. \quad (4.31)$$

Esto equivale a decir, luego de comparar con el salto entre los modos de una cavidad de cuerpo negro ($\Delta k = 2\pi/L$, según la ec. (4.31)), que la emisión del agujero negro se asemeja al de una cavidad muy pequeña de tamaño:

$$L = 2\pi b_{crit}. \quad (4.32)$$

De esta forma, ya que el límite $L \gg 1$ (o de un continuo de estados) no se satisface, tanto la ley de desplazamiento de Wien y la ley de Stefan–Boltzmann no son aplicables a agujeros negros, lo que explica junto a la prohibición de modos con $l < s$ las diferencias observadas en el espectro de emisión y la potencia emitida entre diferentes especies.

Finalmente, para justificar que la dispersión da a lugar al espectro térmico, analicemos la distribución de probabilidad de bosones (incluyendo los factores de cuerpo gris) mediante la expansión del estado vacío inicial en la base de Fock asociada a tiempos tardíos, (3.71):

$$|0_{in}\rangle = \prod_{\omega} (1 - e^{-8\pi M\omega})^{1/2} \sum_n e^{-4\pi M\omega n} |n_{\omega}^{up}\rangle \otimes |n_{\omega}^{in}\rangle. \quad (4.33)$$

donde

$$|n_{\omega}^{up}\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(t_l(\omega) b_{\omega lm}^{\dagger} + r_l(\omega) c_{\omega lm}^{\dagger} \right)^n |0\rangle_{\mathcal{I}^+} \otimes |0\rangle_{\mathcal{H}^+}. \quad (4.34)$$

En esta última ecuación hemos recuperado las etiquetas l y m de los operadores creación y aniquilación, (3.6).

En la sección 3.3 ya hemos señalado que la creación de partículas, en el límite óptico geométrico, sigue una distribución térmica de un cuerpo negro y que se forman pares de partículas correlacionadas entre las que escapan al infinito y las que caen al horizonte de eventos. Luego, si para los modos que llegan al infinito se mantiene esta distribución, entonces podemos afirmar que los modos y su ocupación son equivalentes a los de un cuerpo negro. Ahora, para obtener la distribución de probabilidad sólo es necesario calcular la matriz densidad asociada a $|0_{\text{in}}\rangle$. De este modo, a partir del valor de expectación de cualquier operador en \mathcal{I}^+ , $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{I}^+} \otimes \hat{I}_{\mathcal{H}^+}$ [10, 32]:

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{in}} | \hat{\mathcal{O}} | 0_{\text{in}} \rangle &= \prod_{\omega lm} (1 - e^{-8\pi M\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-8\pi M\omega n} \cdot \\ &\quad \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k}^2 k!(n-k)! \Gamma_{\omega l}^k (1 - \Gamma_{\omega l})^{n-k} \langle k_{\omega lm}^{(\mathcal{I}^+)} | \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{I}^+} | k_{\omega lm}^{(\mathcal{I}^+)} \rangle \right) \quad (4.35) \\ &= \prod_{\omega lm} (1 - e^{-8\pi M\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Gamma_{\omega l} e^{-8\pi M\omega})^n}{(1 - (1 - \Gamma_{\omega l}) e^{-8\pi M\omega})^{n+1}} \langle n_{\omega lm}^{(\mathcal{I}^+)} | \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{I}^+} | n_{\omega lm}^{(\mathcal{I}^+)} \rangle, \end{aligned}$$

tenemos de $\langle 0_{\text{in}} | \hat{\mathcal{O}} | 0_{\text{in}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{O}})$, donde $\hat{\rho}$ es la matriz densidad:

$$\hat{\rho} = \prod_{\omega lm} \sum_{n=0}^{\infty} P_{\omega lm}(n) |n_{\omega lm}\rangle_{\mathcal{I}^+} \langle n_{\omega lm}|_{\mathcal{I}^+}, \quad (4.36)$$

que la distribución de probabilidad de encontrar n partículas en un modo (ωlm) viene dado según:

$$P_{\omega lm}(n) = (1 - e^{-8\pi M\omega}) \frac{(\Gamma_{\omega l} e^{-8\pi M\omega})^n}{(1 - (1 - \Gamma_{\omega l}) e^{-8\pi M\omega})^{n+1}}. \quad (4.37)$$

Esta distribución de probabilidad difiere de la distribución de un cuerpo negro. No obstante, para aquellos estados (ωlm) con $\Gamma_{\omega l} = 1$ (en la aproximación semiclásica), la expresión (4.37) se reduce a:

$$P_{\omega lm}(n) = (1 - \exp(-8\pi M\omega)) \exp(-8\pi M\omega n), \quad (4.38)$$

en correspondencia a una distribución térmica.

En consecuencia, tenemos que los modos normales del campo son análogos a los modos vibracionales de un cuerpo negro a temperatura T_H y que los factores $\Gamma_{\omega l}$ no representan las desviaciones con respecto al espectro de emisión de un cuerpo negro, si no que modulan precisamente los modos “disponibles” a frecuencias ω dadas. Cabe señalar, que la ecuación (4.38) es estrictamente válida solo en la aproximación semiclásica, donde $\Gamma_{\omega l}$ indica el umbral de energía necesario

para su emisión hasta el infinito. No obstante, es notable que tanto el enfoque clásico como el cuántico-ondulatorio son necesarios para la identificación de una distribución térmica, ya que sólo este último explica el estado mixto medido en \mathcal{I}^+ mediante la correlación entre partículas que escapan y las que caen al agujero negro. El análisis anterior tiene fuertes implicancias en el carácter térmico de agujeros negros, ya que establece que las propiedades térmicas se extienden fuera del horizonte y que los efectos dispersivos son, naturalmente, parte del mecanismo que da a lugar a la emisión térmica.

Conclusiones y Discusión

En este trabajo hemos estudiado el fenómeno de evaporación de agujeros negros de Schwarzschild a través del formalismo de la teoría cuántica de campos en espacios curvos. Aplicando un modelo simplificado de un colapso gravitacional en un espacio-tiempo de Vaidya, hemos obtenido la tasa de emisión de partículas con respecto a un observador situado en las lejanías del horizonte de eventos y hemos calculado los factores de cuerpo gris asociados a la dispersión de ondas en la geometría curva. Para este último, se ha analizado en detalle el caso del campo escalar y el de un campo vectorial, ambos sin masa, y examinado el caso de otras especies estudiados por otros autores. En general, ya que a bajas energías la mayoría de los modos normales se ven retrodispersados y que las configuraciones con valor de momento angular $l < s$ (con s el número de espín) no están físicamente permitidos, encontramos que la tasa de emisión espectral se ve fuertemente suprimida y desplazada hacia más altas energías mientras mayor sea el número de espín de la especie emitida.

A partir de los resultados y la comparación con la tasa de emisión de un cuerpo negro, pudimos determinar que la radiación de Hawking ocurre a través de un cuerpo esférico de radio dado por el parámetro de impacto crítico, mayor que el radio de Schwarzschild del agujero negro. Adicionalmente, pudimos concluir que el espectro de emisión, bajo una aproximación semiclásica, es térmico y que contrario a lo previsto, la retrodispersión sobre el espacio-tiempo forma parte intrínseca en su determinación. No obstante, debido a que las energías típicas de los cuantos emitidos, $E \sim k_B T_H$, son comparables al espaciado energético entre los modos disponibles o bien, el agujero negro es demasiado pequeño en comparación a la longitud de onda térmica, el espectro de emisión difiere con el espectro térmico usual de un cuerpo negro descrito por una cavidad muy grande, $L \gg 1$. Esto implica que la ley de desplazamiento de Wien y la ley de Stefan–Boltzmann no son aplicables en agujeros negros, y que solo los primeros modos permitidos de momento angular l tienen un número alto de ocupación, lo que explica las diferencias en las tasas de emisión y la potencia emitida entre distintas especies. Si bien, en este trabajo solo hemos tratado el caso de partículas sin masa, esto sugiere que para los casos masivos de espín $s = 1$ y $s = 2$, la tasa de emisión pueda ser significativamente mayor, debido a la ausencia de la invariancia de gauge y a la “reaparición” del modo longitudinal con proyección

en $l = 0$. No obstante, también es de esperar que los efectos de la dispersión se vean modificados junto al tamaño efectivo de esta fuente emisora. Este aspecto será estudiado en trabajos futuros.

Es preciso reconocer que el espectro estudiado en este trabajo debe considerarse como una primera aproximación al fenómeno de evaporación de agujeros negros. A pesar de ello, resulta notable que el uso de la teoría cuántica de campos en espacios curvos, una teoría semiclásica, reproduzca exactamente un espectro térmico cuando la dispersión es tratada clásicamente. Con ello en mente, sería oportuno profundizar en el estudio de los efectos de la retroreacción en los factores de cuerpo gris y su incidencia en la distribución de probabilidad, evaluando si estas desviaciones aumentan o no significativamente. Asimismo, plantea importantes interrogantes en cómo una descripción microscópica explicaría este fenómeno y en el rol que desempeñan los modos normales disponibles.

Cálculo de coeficientes de Bogoliubov

En este apéndice seguimos la derivación encontrada de Navarro-Salas y Fabbri [10] sobre la expansión de los modos asintóticamente salientes en un espacio-tiempo de Schwarzschild en la base de modos de frecuencia positiva y negativa de un espacio-tiempo de Minkowski.

Consideremos el set completo ortonormal de paquete de ondas centrado en ω :

$$p_{jn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i \omega n}{\varepsilon}} p_{\omega}, \quad (\text{A.1})$$

con $j \geq 0$ y n entero, centrados en $u_{out} = 2\pi n/\varepsilon$ y ancho $2\pi/\varepsilon$. Así, los últimos modos salientes en un espacio-tiempo de Schwarzschild están determinados por el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$. Expandiendo en el conjunto completo dado por los modos normales f_{ω} y f_{ω}^* de un espacio-tiempo de Minkowski, se define:

$$p_{jn} = \int d\omega (\alpha_{jn,\omega} f_{\omega} + \beta_{jn,\omega} f_{\omega}^*), \quad (\text{A.2})$$

donde $\alpha_{jn,\omega'} = (f_{\omega}, p_{jn})$ y $\beta_{jn,\omega'} = -(f_{\omega}^*, p_{jn})$ son los coeficientes de Bogoliubov. De esta forma, la transformación de los operadores \hat{b}_{ω} y $\hat{b}_{\omega}^{\dagger}$ viene dado según

$$\begin{aligned} \hat{b}_{jn} &= \int d\omega' (\alpha_{jn,\omega'}^* \hat{a}_{\omega'} - \beta_{jn,\omega'}^* \hat{a}_{\omega'}^{\dagger}), \\ \hat{b}_{jn}^{\dagger} &= \int d\omega' (\beta_{jn,\omega'} \hat{a}_{\omega'} + \alpha_{jn,\omega'} \hat{a}_{\omega'}^{\dagger}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Luego, el valor de expectación del número de partículas en \mathcal{I}^+ para el estado vacío inicial está determinado por

$$\langle 0_{in} | \hat{N}_{jn}^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | \hat{b}_{jn}^{\dagger} \hat{b}_{jn} | in \rangle = \int_0^{\infty} d\omega' |\beta_{jn,\omega'}|^2. \quad (\text{A.4})$$

De forma que el número medio de partículas en un modo (jn) es distinto a cero si los coeficientes β_{jn} son no nulos. En otras palabras, si el operador aniquilación en \mathcal{I}^+ es mezcla de operadores creación y destrucción en \mathcal{I}^- .

Según hemos mencionado, toda la dinámica de los campos está determinada por estos coeficientes. A partir de la definición de los coeficientes de bogoliubov

extendida a paquetes de ondas, tenemos por definición

$$\begin{aligned}
\beta_{jn,\omega'} &= -(f_{\omega'}^*, p_{jn}) \\
&= -i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega (f_{\omega'} \partial_v p_{jn} - p_{jn} \partial_v f_{\omega'}) \\
&= 2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega p_{jn} \partial_v f_{\omega'}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

donde se ha integrado por partes en v en la tercera línea. Integrando sobre \mathcal{I}^- con $-\infty < v < +\infty$ y reemplazando los modos normalizados:

$$\begin{aligned}
\beta_{jn,\omega} &= 2i \int_{-\infty}^{+\infty} dv 4\pi r^2 \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i n \omega}{\varepsilon}} \left(\frac{-1}{4\pi\sqrt{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{v_H - v}{4M}))} \theta(v_H - v) \right) \frac{-i\omega'}{4\pi\sqrt{\omega'}} \frac{e^{-i\omega'v}}{r}.
\end{aligned}$$

Definiendo $x = v_H - v$ entonces:

$$\begin{aligned}
\beta_{jn,\omega} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty dx \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i n \omega}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{x}{4M})) + i\omega'x - i\omega'v_H} \\
&= \frac{-1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} e^{-i(\omega_j + \omega')v_H} \int_0^\infty dx e^{i\omega'x} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{i\omega(\frac{2\pi n}{\varepsilon} + 4M \ln \frac{x}{4M})} \\
&= \frac{-1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} e^{-i(\omega_j + \omega')v_H} \int_0^\infty dx e^{i\omega'x} \frac{e^{i\omega(\frac{2\pi n}{\varepsilon} + 4M \ln \frac{4M}{x})}}{i(\frac{2\pi n}{\varepsilon} + 4M \ln \frac{4M}{x})} \Bigg|_{\omega=j\varepsilon}^{\omega=(j+1)\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En la segunda línea hemos utilizado el hecho de que el paquete de ondas está centrado en torno a ω_j y por tanto, hemos separado los términos que varían significativamente e integrado sobre el intervalo. Definiendo

$$L_n(x) \equiv \frac{2\pi n}{\varepsilon} + 4M \ln \frac{x}{4M}$$

se obtiene equivalentemente

$$\beta_{jn,\omega} = \frac{-1}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} e^{-i(\omega_j + \omega')v_H} \int_0^\infty dx e^{i\omega'x + i\omega_j L_n(x)} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(x)}{2}\right)}{L_n(x)}. \tag{A.6}$$

En vez de evaluar esta integral, relacionemos $\alpha_{jn,\omega'}$ con $\beta_{jn,\omega'}$ y apliquemos la condición de los coeficientes de Bogoliubov, (3.18):

$$\int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{jn,\omega'}|^2 - |\beta_{jn,\omega'}|^2) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\equiv} \Gamma(\omega_j) \tag{A.7}$$

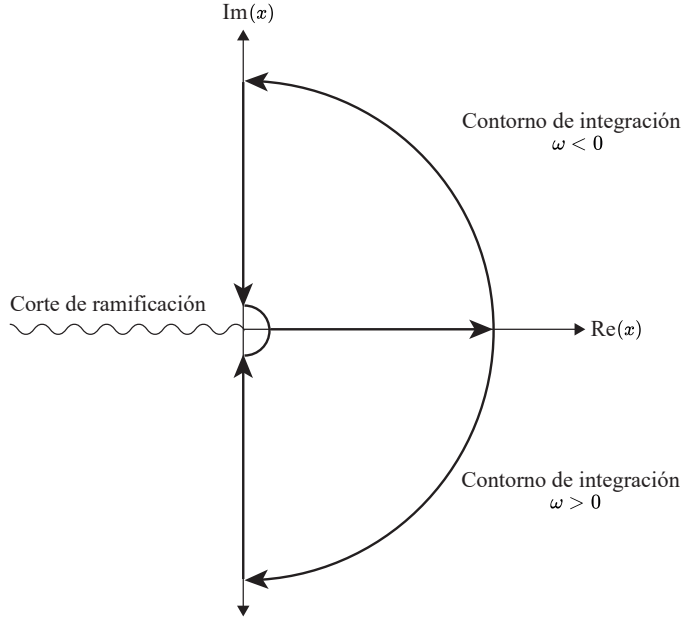


FIGURA A.1: Contorno de integración de $I(\omega)$ sobre el plano complejo de x para $\omega > 0$ y $\omega < 0$.

Así:

$$\begin{aligned}
\alpha_{jn,\omega'} &= (f_{\omega'}, p_{jn}) \\
&= i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega (f_{\omega'}^* \partial_v p_{jn} - p_{jn} \partial_v f_{\omega'}^*) \\
&= -2i \int_{\mathcal{I}^-} dv r^2 d\Omega p_{jn} \partial_v f_{\omega'}^*.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Evaluando los modos, entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha_{jn,\omega'} &= -2i \int_{-\infty}^{+\infty} dv 4\pi r^2 \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i n \omega}{\varepsilon}} \left(\frac{-1}{4\pi\sqrt{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{v_H - v}{4M}))} \theta(v_H - v) \right) \frac{i\omega'}{4\pi\sqrt{\omega'}} \frac{e^{i\omega'v}}{r} \\
&= \frac{-1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty dx \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{\frac{2\pi i n \omega}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln(\frac{x}{4M})) - i\omega'x + i\omega'v_H} \\
&= \frac{-1}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} e^{-i(\omega_j - \omega')v_H} \int_0^\infty dx e^{-i\omega'x + i\omega_j L_n(x)} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(x)}{2}\right)}{L_n(x)}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\alpha_{jn,\omega'}$ y $\beta_{jn,\omega'}$ están relacionados por $\omega' \rightarrow -\omega'$ bajo el argumento de la exponencial. Para relacionar ambas integrales consideremos la integral de

contorno en x en el plano complejo con el corte de ramificación de $\ln(x)$ en el eje x negativo, como se puede observar en la Fig. A.1. Definiendo

$$I(\omega') = \int_0^\infty dx e^{-i\omega'x + i\omega_j L_n(x)} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(x)}{2}\right)}{L_n(x)} \quad (\text{A.9})$$

se tiene que, para $\omega' < 0$, la integral sobre el semicírculo $|x| \rightarrow \infty$ en el primer cuadrante converge a cero. Luego, aplicando el teorema de residuos:

$$\begin{aligned} I(\omega' < 0) &= - \int_{i\infty}^0 dx e^{-i\omega'x + i\omega_j L_n(x)} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(x)}{2}\right)}{L_n(x)} \\ &\stackrel{z=-ix}{=} i \int_0^\infty dz e^{\omega'z} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(iz)}{2}\right)}{L_n(iz)} e^{i\omega_j L_n(iz)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para $\omega > 0$ sobre el semicírculo en el cuarto cuadrante, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} I(\omega' > 0) &= - \int_{-i\infty}^0 dx e^{-i\omega'x + i\omega_j L_n(x)} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(x)}{2}\right)}{L_n(x)} \\ &\stackrel{z=ix}{=} -i \int_0^\infty dz e^{-\omega'z} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(-iz)}{2}\right)}{L_n(-iz)} e^{i\omega_j L_n(-iz)}. \end{aligned}$$

En resumen

$$\begin{aligned} I(\omega' < 0) &= ie^{-2M\pi\omega_j} e^{\frac{2\pi i n \omega_j}{\varepsilon}} \int_0^\infty dz e^{\omega'z + i4M \ln\left(\frac{z}{4M}\right)\omega_j} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(iz)}{2}\right)}{L_n(iz)} \\ I(\omega' > 0) &= -ie^{2M\pi\omega_j} e^{\frac{2\pi i n \omega_j}{\varepsilon}} \int_0^\infty dz e^{-\omega'z + i4M \ln\left(\frac{z}{4M}\right)\omega_j} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon L_n(-iz)}{2}\right)}{L_n(-iz)}. \end{aligned}$$

Luego, ya que

$$L_n(iz) = \frac{2\pi n}{\varepsilon} + 4M \ln \frac{z}{4M} + 4M \left(\frac{i\pi}{2}\right) = L_n(-iz) - 4M\pi i,$$

y

$$\varepsilon L(iz) \approx \varepsilon L(-iz)$$

encontramos finalmente que

$$I(\omega' > 0) = -e^{4\pi M\omega_j} I(\omega' < 0),$$

con lo cual

$$\alpha_{jn,\omega'} = -e^{4\pi M\omega_j} e^{2i\omega'v_H} \beta_{jn,\omega'}. \quad (\text{A.10})$$

Reemplazando en la condición de los coeficientes de Bogoliubov (A.7), se tiene finalmente que el valor de expectación del estado vacío inicial en \mathcal{I}^+ está dado por

$$\langle 0_{in} | \hat{N}_{jn}^{(\mathcal{I}^+)} | 0_{in} \rangle \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \int_0^\infty d\omega' |\beta_{jn,\omega'}|^2 = \frac{\Gamma(\omega_j)}{\exp(8\pi M\omega_j) - 1}. \quad (\text{A.11})$$

Campo vectorial

La densidad de lagrangiano del campo electromagnético en un espacio-tiempo de Schwarzschild es:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (\text{B.1})$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético. Luego, las ecuaciones de movimiento, (2.50), son:

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.2})$$

En términos del potencial electromagnético A_{μ} , las ecuaciones (B.2) adquieren la forma:

$$\square A_{\alpha} - \nabla_{\alpha}(\nabla_{\mu} A^{\mu}) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Definiendo:

$$\hat{L}A \equiv \partial_{\mu}(g^{\mu\beta} \partial_{\beta} A) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} g^{\lambda\beta} \partial_{\beta} A \quad (\text{B.4})$$

como el operador D'Alembertiano para escalares, entonces (B.3) viene dado por [20]:

$$LA_0 = \frac{2M}{r^2} (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \partial_0 \nabla_{\mu} A^{\mu} \quad (\text{B.5})$$

$$LA_1 = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) A_1 - \frac{2 \cos \theta}{r r^2 \sin \theta} A_2 + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \partial_0 A_0 \\ + \frac{2M}{r^2} \partial_1 A_1 - \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r^2} \partial_2 A_2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_3 A_3 \right) + \partial_1 \nabla_{\mu} A^{\mu}$$

$$LA_2 = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_2 + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) \\ - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_3 A_3 + \partial_2 \nabla_{\mu} A^{\mu} \quad (\text{B.6})$$

$$LA_3 = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) \quad (\text{B.7})$$

$$+ \partial_3 \nabla_{\mu} A^{\mu} \quad (\text{B.8})$$

Para seleccionar los grados físicos de libertad, fijamos el gauge $A_0 = 0$, junto a la libertad residual

$$\nabla_\mu A^\mu + \frac{2M}{r^2} A_1 = 0. \quad (\text{B.9})$$

Así, las dos polarizaciones físicas en un espacio-tiempo de Schwarzschild son [21, 22]:

$$\begin{aligned} A^{(I)} &= \left(0, \sqrt{\frac{l(l+1)}{2\omega}} \frac{1}{\omega} \frac{\psi(r)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi), \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\sqrt{2\omega l(l+1)}} \frac{1}{\omega} \partial_r \psi \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, \right. \\ &\quad \left. \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\sqrt{2\omega l(l+1)}} \frac{1}{\omega} \partial_r \psi \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \right) e^{-i\omega t} \\ A^{(II)} &= \left(0, 0, \frac{\psi(r)}{\sqrt{2\omega l(l+1)}} Y_\theta^{lm}, \frac{\psi(r)}{\sqrt{2\omega l(l+1)}} Y_\phi^{lm} \right) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde [33, 34]

$$Y_\theta^{lm} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \quad \text{y} \quad Y_\phi^{lm} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m \quad (\text{B.11})$$

y $\psi(r)$ satisface la ecuación diferencial

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi(r^*) = 0. \quad (\text{B.12})$$

Suponiendo dos soluciones $A_{(1)}$ y $A_{(2)}$ a la ecuación de movimiento (B.3), entonces el siguiente producto escalar es conservado

$$(A_{(1)}, A_{(2)}) = i \int d^3x \sqrt{-g} g_{0\mu} \left(\bar{A}_\nu^{(1)} \Pi_{(2)}^{\mu\nu} - A_\nu^{(2)} \bar{\Pi}_{(1)}^{\mu\nu} \right), \quad (\text{B.13})$$

donde la barra significa el complejo conjugado y

$$\Pi_{(i)}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} \Big|_{A_{(i)}}. \quad (\text{B.14})$$

Con esta noción de norma y ortogonalidad, se tienen que, asintóticamente, las soluciones con polarizaciones circulares de un espacio-tiempo plano se pueden escribir según

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) e^{ikz-i\omega t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l>0} i \left(i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \right) (A_\mu^{I(l,1)} + A_\mu^{II(l,1)}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) e^{ikz-i\omega t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l>0} i \left(i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \right) (-A_\mu^{I(l,-1)} + A_\mu^{II(l,-1)}). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Nótese que debido a la helicidad sólo se presentan modos normales con $l > 0$.

Para el cálculo de la sección transversal de absorción, sólo debemos considerar la dispersión de ondas planas polarizadas incidentes desde el infinito. Aplicando en la ecuación diferencial (B.12) la metodología vista en la sección 3.2.3 se obtiene entonces [21, 35]

$$\sigma_{abs}^{(tot)} = 2 \left(\frac{\pi c^2}{\omega^2} \sum_{l>0} (2l + 1) \Gamma_l(\omega) \right), \quad (\text{B.16})$$

ya que el cambio de fase de las dos polarizaciones físicas a causa de la dispersión son iguales.

Bibliografía

- [1] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes*. IMPERIAL COLLEGE PRESS, 2005. <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/p409>.
<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/p409>.
- [2] V. P. Frolov and I. D. Novikov, eds., *Black hole physics: Basic concepts and new developments*. Springer Dordrecht, 1998.
- [3] S. W. Hawking, “Black holes in general relativity,” *Communications in Mathematical Physics* **25** no.~2, (Jun, 1972) 152–166.
<https://doi.org/10.1007/BF01877517>.
- [4] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The four laws of black hole mechanics,” *Communications in Mathematical Physics* **31** no.~2, (Jun, 1973) 161–170. <https://doi.org/10.1007/BF01645742>.
- [5] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (Apr, 1973) 2333–2346. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- [6] S. W. Hawking, “Black hole explosions?” *Nature* **248** no.~5443, (Mar, 1974) 30–31. <https://doi.org/10.1038/248030a0>.
- [7] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics* **43** no.~3, (Aug, 1975) 199–220.
<https://doi.org/10.1007/BF02345020>.
- [8] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Classical theoretical physics. Springer-Verlag, 1995.
- [9] L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [10] A. Fabbri and J. Navarro-Salas, *Modeling black hole evaporation*. World Scientific, Singapore, 2005.

- [11] F. D. Belgiorno, S. L. Cacciatori, and D. Faccio, *Hawking Radiation: From Astrophysical Black Holes to Analogous Systems in Lab*. WSP, Singapur, 2019.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume 2: Angular Momentum, Spin, and Approximation Methods*. Wiley, 2019.
- [13] N. Sanchez, “Absorption and emission spectra of a schwarzschild black hole,” *Phys. Rev. D* **18** (Aug, 1978) 1030–1036.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.1030>.
- [14] L. Parker, “Probability distribution of particles created by a black hole,” *Phys. Rev. D* **12** (Sep, 1975) 1519–1525.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.1519>.
- [15] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [16] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.
- [17] R. M. Wald, “On particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics* **45** no. 1, (Feb, 1975) 9–34.
<https://doi.org/10.1007/BF01609863>.
- [18] T. Ukwatta, D. Stump, J. Linnemann, J. MacGibbon, S. Marinelli, T. Yapici, and K. Tollefson, “Primordial black holes: Observational characteristics of the final evaporation,” *Astroparticle Physics* **80** (2016) 90–114. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092765051630041X>.
- [19] A. Cheek, L. Heurtier, Y. F. Perez-Gonzalez, and J. Turner, “Primordial black hole evaporation and dark matter production. i. solely hawking radiation,” *Phys. Rev. D* **105** (Jan, 2022) 015022.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.015022>.
- [20] G. Cognola and P. Lecca, “Electromagnetic fields in schwarzschild and reissner-nordström geometry: Quantum corrections to the black hole entropy,” *Phys. Rev. D* **57** (Jan, 1998) 1108–1111.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.1108>.
- [21] L. C. B. Crispino, S. R. Dolan, and E. S. Oliveira, “Electromagnetic wave scattering by schwarzschild black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **102** (Jun, 2009) 231103. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.231103>.

-
- [22] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, “Quantization of the electromagnetic field outside static black holes and its application to low-energy phenomena,” *Phys. Rev. D* **63** (May, 2001) 124008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.124008>.
- [23] H. T. Cho, “Dirac quasinormal modes in schwarzschild black hole spacetimes,” *Physical Review D* **68** no.~2, (2003) 024003. <https://app.dimensions.ai/details/publication/pub.1060705460>. <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0303078>.
- [24] C. A. Sporea, “Scattering of massless fermions by schwarzschild and reissner-nordström black holes*,” *Chinese Physics C* **41** no.~12, (Dec, 2017) 123101. <https://dx.doi.org/10.1088/1674-1137/41/12/123101>.
- [25] D. N. Page, “Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole,” *Phys. Rev. D* **13** (Jan, 1976) 198–206. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.198>.
- [26] D. N. Page, “Particle emission rates from a black hole. ii. massless particles from a rotating hole,” *Physical Review D* **14** no.~12, (1976) 3260–3273. <https://app.dimensions.ai/details/publication/pub.1060684431>.
- [27] D. N. Page, “Particle emission rates from a black hole. iii. charged leptons from a nonrotating hole,” *Physical Review D* **16** no.~8, (1977) 2402–2411. <https://app.dimensions.ai/details/publication/pub.1060685233>.
- [28] B. Raffaelli, “A scattering approach to some aspects of the schwarzschild black hole,” *Journal of High Energy Physics* **2013** no.~1, (Jan, 2013) 188. [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2013\)188](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2013)188).
- [29] T. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2005. <https://books.google.cl/books?id=zsAiT15hTLMC>.
- [30] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [31] B. S. DeWitt, “Quantum field theory in curved spacetime,” *Physics Reports* **19** no.~6, (1975) 295–357. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157375900514>.
- [32] L. Alberte, R. Brustein, A. Khmelnitsky, and A. J. M. Medved, “Density matrix of black hole radiation,” *Journal of High Energy Physics* **2015** no.~8, (Aug, 2015) 15. [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2015\)015](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)015).
-

- [33] R. G. Barrera, G. A. Estevez, and J. Giraldo, “Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics,” *European Journal of Physics* **6** no.~4, (Oct, 1985) 287.
<https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/6/4/014>.
- [34] B. Carrascal, G. A. Estevez, P. Lee, and V. Lorenzo, “Vector spherical harmonics and their application to classical electrodynamics,” *European Journal of Physics* **12** no.~4, (Jul, 1991) 184.
<https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/12/4/007>.
- [35] T. C. Mo and C. H. Papas, “Scalar debye potentials for electromagnetic fields in spherical gravity and spherical media. i,” *Phys. Rev. D* **6** (Oct, 1972) 2071–2076.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.6.2071>.