



Universidad Técnica Federico Santa María.
Departamento de Física.

Reducción Dimensional Afín: Un Enfoque Kaluza-Klein sin Métrica Preexistente

Jefferson Vaca

Tutor: Oscar Castillo-Felisola

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los
requisitos para el grado del Doctorado en Ciencias, mención física,
de la Universidad Técnica Federico Santa María.

11 de enero de 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: ___ Reducción Dimensional Afín: Un Enfoque Kaluza-Klein sin Métrica Preexistente ___

Nombre del candidato(a): _____ Jefferson Alfonso Vaca Santana _____

Carrera / Grado: _____ Doctor en Ciencias, mención Física _____

Campus: ___ Casa central _____ Departamento: _____ Física _____

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, _____ Oscar Castillo-Felisola _____, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 8/Enero/2026

Firma: _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 23/12/2025

Firma: _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

THESIS TITLE:

Reducción Dimensional Afín: Un Enfoque Kaluza-Klein sin Métrica
Preexistente

AUTHOR:

Jefferson Vaca

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado del Doctorado en Ciencias, mención física, de la Universidad Técnica Federico Santa María.

EXAMINATION COMMITTEE:

Oscar Castillo-Felisola (Consultor)

Antonio Cárcamo (USM)

Alfonso Zerwekh (USM)

Aureliano Skirzewski (Consultor)

11 de enero de 2026

A mi Familia

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



Índice general

Prefacio	1
1. Elementos de geometría diferencial para teorías de conexión afín	3
1.1. Curvas en \mathbb{R}^3	4
1.2. Superficies en \mathbb{R}^3 : Hacia la Idea de Subvariedad y Conexión	6
1.3. Variedades Diferenciables y Tensores	9
1.3.1. Tensores de Curvatura y Torsión de la Conexión	15
2. Fundamentos Físicos: De la Gravitación Clásica al Enfoque Afín de la Unificación	19
2.1. El Paradigma Establecido: La Geometría Riemanniana de Einstein	19
2.2. La Gravedad en la Encrucijada: Limitaciones y Alternativas Axiomáticas	25
2.3. La Vía de los Primeros Principios: Hacia un Fundamento Puramente Afín	31
2.4. Objetivos de la Tesis: Unificación Geométrica en un Marco Afín	36
3. Reinterpretación Geométrica de Kaluza-Klein desde la Estructura de Fibrado	39
3.1. El Formalismo de Fibrados: Un Marco Superior para la Reducción Afín	39
3.2. Fundamentos Geométricos del Fibrado Principal	40
3.3. Conexión de Ehresmann	42
3.4. Descomposición Dimensional y Bases Adaptadas	45
3.5. Descomposición de la Métrica	49
3.6. Campo Electromagnético como Objeto Geométrico	51
3.7. La No-Integrabilidad de la Distribución Horizontal	52
3.8. Consecuencias Globales: Holonomía y Cuantización Topológica	57
4. Reducción dimensional de la conexión afín	61
4.1. Conexión Afín G-Invariante y Estrategia de Descomposición	61
4.2. Definición Sistemática de los Campos Reducidos	64
4.3. Cálculo de la Conexión Inducida en el Espacio Base	66
4.4. Componentes de los Levantamientos Horizontales y Campos Reducidos	70
4.5. Invariancia de Gauge de los Campos Reducidos	73
4.6. Ansatz de la Conexión Afín	75
4.7. Reducción dimensional de soluciones de vacío en gravedad afín.	76

5. Conclusiones	85
5.1. Síntesis y Discusión de Resultados	85
5.2. Proyecciones y Líneas Futuras de Investigación	86
5.3. Conclusiones Finales	87
A. Notación y Convenciones	89
A.1. Índices y Convenio de Suma	89
A.2. Símbolos de Álgebra Lineal y Geometría	89
A.3. Espacios, Variedades y Operaciones de Conjuntos	90
A.4. Tensores y Campos Tensoriales	90
A.5. Operadores y Símbolos Específicos	90
A.6. Operadores Diferenciales y Conexiones	91
A.7. Derivada Covariante de Tensores Generales	91
A.8. Otros Símbolos Específicos de la Tesis	92
B. Temas Complementarios	93
B.1. Geometría de Curvas: Conexión Intrínseca y Extrínseca	93
B.2. Integrabilidad de la Proyección de una Distribución	95
B.2.1. Campos Vectoriales π -Relacionados y Proyección del Corchete	95
B.2.2. Integrabilidad de la Distribución Proyectada	96
Bibliografía	107

Prefacio

La reducción dimensional ha desempeñado un papel central en la física teórica como herramienta para la unificación de fuerzas y la formulación de teorías fundamentales. Un ejemplo paradigmático es la teoría de Kaluza-Klein, donde se propone que la gravitación y el electromagnetismo pueden unificarse mediante la extensión del espacio-tiempo a una quinta dimensión compacta. Esta idea tuvo un impacto duradero, sentando las bases para enfoques posteriores como la teoría de cuerdas.

Más allá de su valor como herramienta de unificación, la reducción dimensional permite reinterpretar campos gauge y simetrías como manifestaciones geométricas de un espacio de mayor dimensión. Esta técnica es ampliamente utilizada en teorías modernas de campos y gravedad, y su correcta formulación es crucial para entender cómo emergen las interacciones efectivas en espacios de menor dimensión.

Sin embargo, la gran mayoría de estos enfoques suponen la existencia de una métrica en el espacio total, lo cual restringe su aplicabilidad a teorías donde esta es un objeto fundamental. Esto presenta un desafío conceptual en contextos donde se desea explorar teorías puramente afines, como la original de Eddington o desarrollos más recientes como la gravedad polinomial afín, en las que la conexión, y no la métrica, es el objeto primario. Generalizar el procedimiento de reducción dimensional para estos marcos es, por tanto, una necesidad teórica.

Este trabajo de tesis aborda directamente dicho problema. Su objetivo es desarrollar, por primera vez, un formalismo de reducción dimensional de Kaluza-Klein construido sobre una base puramente afín. Para lograrlo, se recurre a la geometría de fibrados principales y a la conexión de Ehresmann, herramientas matemáticas que permiten una descomposición coherente del espacio sin necesidad de una métrica. En este contexto, la conexión afín se establece como el único dato fundamental, y se vuelve posible formular una reducción dimensional consistente basada exclusivamente en sus propiedades.

Este enfoque tiene también implicancias para la comprensión de foliaciones. La conexión de Ehresmann permite interpretar la reducción como una partición local del espacio total en hojas. En el caso particular en que la distribución horizontal sea integrable, el formalismo resultante se asemeja al de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), utilizado en relatividad general para el análisis hamiltoniano del espacio-tiempo, lo que sugiere una posible vía para generalizar métodos canónicos a contextos puramente afines.

Este trabajo de tesis aborda directamente dicho problema. Su objetivo es desarrollar un formalismo de reducción dimensional aplicable a teorías afines, utilizando la estructura de fibrados principales y la conexión de Ehresmann. Dentro de este marco, se define una descomposición explícita de vectores, tensores y la propia conexión. Se introduce una definición geométrica del campo electromagnético, y se demuestra que, bajo condiciones geométricas ra-

zonables, las ecuaciones de campo inducidas en el espacio reducido corresponden al sistema de Einstein-Maxwell para campos puramente radiativos.

Este documento está organizado para guiar al lector desde los conceptos fundamentales hasta los resultados originales de la investigación. El Chapter 1 establece las bases matemáticas de la geometría diferencial, poniendo énfasis en la conexión afín como estructura primaria. El Chapter 2 presenta la motivación física, contextualiza el problema y define los objetivos de la tesis. El Chapter 3 introduce las herramientas avanzadas de la geometría de fibrados principales y la conexión de Ehresmann, aplicándolas inmediatamente para reinterpretar geoméricamente el modelo de Kaluza-Klein y mostrar cómo emerge el campo electromagnético de la estructura del fibrado. El Chapter 4 constituye el núcleo técnico, donde se desarrolla el *ansatz* para la descomposición de la conexión afín y se derivan las ecuaciones de campo efectivas en el espacio reducido. Finalmente, el Chapter 5 sintetiza y discute los resultados, analiza sus implicaciones—incluyendo la recuperación del sistema Einstein-Maxwell para campos radiativos— y delinea las futuras líneas de investigación.

Elementos de geometría diferencial para teorías de conexión afín

La geometría diferencial es una rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de las variedades diferenciables mediante el uso de herramientas del cálculo diferencial. Su relevancia en la física teórica es innegable, manifestándose en la formulación de teorías de campo que describen la gravitación y la unificación de fuerzas fundamentales. Un ejemplo paradigmático es la Relatividad General de Einstein, donde la gravitación se interpreta como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, un concepto inherentemente geométrico [1, 2]. Para una introducción rigurosa a los fundamentos de las variedades diferenciables, se recomienda consultar a autores como Spivak [3], Do Carmo [4] o Lee [5].

Tradicionalmente, la aplicación de la geometría diferencial en física ha estado intrínsecamente ligada al concepto de métrica, un tensor que define distancias, ángulos y volúmenes, e identifica el potencial gravitatorio en Relatividad General. No obstante, ha crecido el interés en formalismos geométricos donde la estructura métrica no es fundamental, sino que emerge o es subsidiaria de elementos más primitivos, como las conexiones afines. Pioneros como Schouten [6], Weyl [7], Eddington [8], Castillo-Felisola *et al.* [9] y el propio Einstein [10] exploraron estas geometrías no métricas o puramente afines, sentando las bases para enfoques alternativos a la descripción de la interacción fundamental.

En contraste con las presentaciones estándar, que postulan la métrica como objeto primordial, este trabajo se fundamenta en la conexión afín como el elemento geométrico primario. Este enfoque no solo se alinea con la propuesta original de esta tesis, sino que también permite explorar las propiedades intrínsecas del espacio-tiempo sin la presuposición de una métrica.

Comenzaremos con una revisión intuitiva de curvas y superficies en espacios euclidianos, que servirán para introducir la tangencia, curvatura y derivada covariante. Progresaremos hacia la formalización de variedades diferenciables y tensores, para luego centrarnos en las conexiones afines, su torsión y curvatura, y su relación (o ausencia de ella) con un tensor métrico. Resultará crucial la distinción, analizada en profundidad por Schouten [6], entre geodésicas (definidas por una métrica) y curvas autoparalelas (definidas por una conexión). Dicha diferencia es clave para comprender la naturaleza de nuestro modelo y su divergencia conceptual de las teorías convencionales. Los conceptos de haces principales y conexiones de Ehresmann [11–13], herramientas indispensables para la formulación de nuestra teoría Kaluza-Klein afín, serán abordados en detalle en el Capítulo 3.

El doble objetivo de esta introducción es, por un lado, proporcionar al lector una base conceptual y notacional sólida para las secciones subsiguientes; y por otro, justificar la elección de la geometría afín como el marco idóneo para una teoría unificada de interacciones fundamentales donde la métrica no es un ingrediente inicial, sino una posible consecuencia de la

dinámica subyacente. Este enfoque constituye el punto de partida del aporte original de esta tesis: la formulación de una teoría de Kaluza–Klein cuya estructura geométrica fundamental es puramente afín, la cual se desarrollará en detalle en capítulos posteriores. La viabilidad y los resultados preliminares de esta perspectiva han sido explorados en [9].

1.1. Curvas en \mathbb{R}^3

Para construir la intuición necesaria para la geometría de variedades, comenzamos nuestro estudio en el contexto familiar del espacio euclidiano tridimensional, \mathbb{R}^3 . Aquí, los conceptos de dirección, curvatura y orientación pueden ser visualizados directamente, sirviendo como arquetipos para las estructuras más abstractas que definiremos posteriormente.

Parametrizaciones, Vectores Tangentes y Curvatura

Una curva diferenciable en \mathbb{R}^3 se describe formalmente como una aplicación $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una función vectorial de clase al menos C^2 . El parámetro t recorre el intervalo I , trazando los puntos de la curva en el espacio.

El *vector tangente* a la curva en el punto $\gamma(t)$ es el vector velocidad, definido por la primera derivada:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \quad (1.1)$$

Este vector indica la dirección instantánea del movimiento a lo largo de la curva. Una curva se denomina *regular* si su vector tangente nunca se anula, es decir, $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ para todo $t \in I$.

Para estudiar las propiedades geométricas intrínsecas de una curva, es conveniente utilizar una parametrización “natural” que no dependa de la velocidad con que se recorre. Esta es la *parametrización por longitud de arco*, s , definida por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \quad (1.2)$$

Al reparametrizar la curva en términos de s , el nuevo vector tangente, $T(s) = \frac{d\gamma}{ds}$, tiene magnitud unitaria, $\|T(s)\| = 1$.

Con esta parametrización natural, la *curvatura*, denotada por $\kappa(s)$, se define como la magnitud de la derivada del vector tangente unitario:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \quad (1.3)$$

La curvatura es una medida escalar no negativa que cuantifica la rapidez con la que la curva se desvía de su línea tangente en un punto dado. Una línea recta tiene $\kappa = 0$, mientras que un círculo de radio R tiene una curvatura constante $\kappa = 1/R$ [4, 14]. Esta cantidad, obtenida a través de una segunda derivada, es nuestro primer ejemplo de una "derivación geométrica": una operación de cálculo que revela una propiedad fundamental de la forma del objeto geométrico.

Triedro de Frenet, Bases Adaptadas y la Noción de Conexión

Si la curvatura $\kappa(s)$ no es cero, podemos construir un sistema de referencia ortonormal que se mueve junto con la curva. Esta base adaptada, conocida como el **triedro de Frenet-Serret**, proporciona una descripción completa de la geometría local de la curva. La base consta de tres vectores unitarios y mutuamente ortogonales [3, 4, 15]:

1. Vector Tangente Unitario, $T(s)$: Ya definido como $T(s) = \dot{\gamma}(s)$.
2. Vector Normal Principal, $N(s)$: Se define como $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{dT}{ds}$.
3. Vector Binormal, $B(s)$: Se define mediante el producto vectorial $B(s) = T(s) \times N(s)$.

La evolución de esta base móvil a lo largo de la curva está descrita por las *ecuaciones de Frenet-Serret*. Escritas componente a componente, estas son:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa(s)N(s) \quad (1.4)$$

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (1.5)$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau(s)N(s) \quad (1.6)$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas de manera más compacta en forma matricial:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Estas ecuaciones introducen la *torsión* $\tau(s)$ y, junto con la curvatura $\kappa(s)$, capturan toda la información geométrica intrínseca de la curva, tal como lo establece el Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas [4].

El triedro de Frenet-Serret es el ejemplo prototípico de lo que en este trabajo denominaremos una *base adaptada*: un sistema de referencia local (o marco móvil) que se construye para ajustarse a la geometría del objeto de estudio. Esta idea será fundamental más adelante, cuando construyamos bases adaptadas a la estructura de un fibrado en el Capítulo 3.

La estructura de las ecuaciones de Frenet-Serret es la primera manifestación de una **conexión**, un concepto que define una regla para derivar campos vectoriales a lo largo de curvas [16]. Para ver la correspondencia explícita con la regla general de una conexión en una base, $\partial_{\hat{e}_\mu} \hat{e}_\nu = \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho} \hat{e}_\rho$, podemos hacer una identificación directa. En nuestro caso, el espacio ambiente \mathbb{R}^3 es nuestro espacio total $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^3$. La base adaptada $\{T, N, B\}$ es una base de este espacio ambiente, definida en los puntos de la curva, por lo que la indexamos como $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Como solo derivamos en una dirección (a lo largo de $T = \hat{e}_1$), el primer índice covariante de la conexión, μ , queda fijo en $\mu = 1$. Las ecuaciones de Frenet-Serret revelan entonces los componentes explícitos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_1^{\rho}{}_{\nu}$. Por ejemplo, la ecuación $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ se traduce en $\partial_{\hat{e}_1} \hat{e}_1 = \kappa \hat{e}_2$, lo que implica que el coeficiente no nulo es $\hat{\Gamma}_1^2{}_{1} = \kappa$. Un análisis análogo para las demás ecuaciones muestra que la curvatura y la torsión son, literalmente, los componentes de

la conexión del espacio ambiente expresada en la base adaptada. Este es el vínculo fundamental que generalizaremos en las siguientes secciones, donde la *conexión afín* se definirá formalmente como el objeto central de nuestra investigación. (Para una discusión más detallada sobre la naturaleza intrínseca y extrínseca de la conexión en este ejemplo y la resolución de la aparente dualidad, véase el Apéndice B.1).

1.2. Superficies en \mathbb{R}^3 : Hacia la Idea de Subvariedad y Conexión

Habiendo explorado las propiedades fundamentales de las curvas, el siguiente paso natural en nuestro desarrollo de la intuición geométrica es el estudio de las superficies inmersas en el espacio euclidiano tridimensional, \mathbb{R}^3 . Las superficies, como variedades bidimensionales, nos ofrecen un contexto más rico para introducir conceptos cruciales como el espacio tangente en un punto, las formas fundamentales (que codifican la métrica inducida y la curvatura extrínseca), la distinción entre curvatura intrínseca y extrínseca, y una primera aproximación a la derivada covariante para campos vectoriales definidos sobre la superficie. El análisis de estas estructuras no solo es fundamental por sí mismo, sino que también introduce las nociones de geometría extrínseca que serán indispensables para la comprensión de las estructuras fibradas que se abordarán en detalle en el Capítulo 3.

Con este objetivo en mente, consideramos el espacio euclidiano tridimensional como nuestro *espacio total*, denotado provisionalmente como $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^3$. Una *superficie*, que denotaremos como $\tilde{\mathcal{M}}$, dentro de este espacio se define como la imagen de una aplicación diferenciable

$$\hat{r} : U \rightarrow \hat{\mathcal{M}} \tag{1.8}$$

donde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subconjunto abierto y conexo [4, 14, 17]. Esta aplicación, cuando satisface las condiciones de regularidad y suavidad que se detallarán, define una *inmersión* de U en $\hat{\mathcal{M}}$. La imagen, $\tilde{\mathcal{M}} = \hat{r}(U)$, es la entidad geométrica que estudiamos. Si (u, v) son las coordenadas en U , la aplicación se escribe como $\hat{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Para que esta aplicación defina una superficie regular, se deben cumplir las siguientes condiciones [4, 5]:

1. Suavidad (Diferenciabilidad): La aplicación r debe ser *suave*, es decir, poseer derivadas continuas de orden suficientemente alto para todas las operaciones geométricas subsiguientes (como el cálculo de curvaturas).
2. Regularidad (Condición de Rango Pleno): En cada punto $(u, v) \in U$, los vectores tangentes parciales

$$\begin{aligned} \hat{r}_u(u, v) &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial u}(u, v) \\ \hat{r}_v(u, v) &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

deben ser linealmente independientes. Esta condición asegura que la superficie $\tilde{\mathcal{M}}$ tenga un plano tangente bien definido en cada uno de sus puntos.

El par (u, v) constituye un sistema de coordenadas locales sobre la porción de superficie $\tilde{\mathcal{M}} = \hat{r}(U)$.

Vectores Tangentes y Normales

Consideremos una superficie $\tilde{\mathcal{M}}$ parametrizada por $\hat{r}(u, v)$ como se definió en la Ecuación (1.8). Los vectores tangentes parciales, que denotaremos como $\hat{\partial}_u = \hat{r}_u$ y $\hat{\partial}_v = \hat{r}_v$ (esta notación será justificada en el siguiente capítulo), juegan un papel crucial.

$$\hat{\partial}_u(u, v) = \frac{\partial \hat{r}}{\partial u}(u, v) \quad (1.9)$$

$$\hat{\partial}_v(u, v) = \frac{\partial \hat{r}}{\partial v}(u, v) \quad (1.10)$$

Estos dos vectores, evaluados en un punto (u, v) del dominio de parametrización, son tangentes a las curvas coordenadas que yacen sobre la superficie $\tilde{\mathcal{M}}$ y pasan por el punto $p = \hat{r}(u, v)$.

La condición de regularidad de la superficie asegura que $\hat{\partial}_u$ y $\hat{\partial}_v$ son linealmente independientes en cada punto. Por lo tanto, estos dos vectores forman una base para un plano bidimensional en el espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Este plano se denomina el *plano tangente* a la superficie $\tilde{\mathcal{M}}$ en el punto p , y se denota como $T_p\tilde{\mathcal{M}}$. Un vector $w \in \mathbb{R}^3$ es un *vector tangente* a $\tilde{\mathcal{M}}$ en p si es una combinación lineal de los vectores de la base:

$$\tilde{X} = c_u \hat{\partial}_u + c_v \hat{\partial}_v, \quad \text{donde } c_u, c_v \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

El conjunto de todos estos vectores tangentes en p constituye el espacio vectorial $T_p\tilde{\mathcal{M}}$, isomorfo a \mathbb{R}^2 . En adelante, utilizaremos la notación con tilde (e.g., \tilde{X}) para denotar objetos geométricos que pertenecen a la superficie inmersa $\tilde{\mathcal{M}}$, distinguiéndolos de los objetos del espacio ambiente.

Dado que el plano tangente $T_p\tilde{\mathcal{M}}$ es un subespacio bidimensional de \mathbb{R}^3 , existe una dirección única (salvo signo) ortogonal a él. El *vector normal unitario* a la superficie $\tilde{\mathcal{M}}$ en el punto p se define como:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\hat{\partial}_u \times \hat{\partial}_v}{\|\hat{\partial}_u \times \hat{\partial}_v\|} \quad (1.12)$$

Este vector \hat{n} es fundamental para definir la orientación de la superficie y para estudiar su curvatura extrínseca, como veremos en la siguiente sección. La elección del orden en el producto vectorial (e.g., $\partial_u \times \partial_v$ en lugar de $\partial_v \times \partial_u$) determina una de las dos posibles orientaciones de la normal.

Métrica: Primera forma fundamental

Una vez establecido el plano tangente en cada punto de la superficie $\tilde{\mathcal{M}}$, el siguiente paso es dotarnos de herramientas para realizar mediciones geométricas sobre ella. La idea central de la geometría de subvariedades es usar la estructura del espacio ambiente para definir una en la superficie [4, 14, 17]. En el espacio euclidiano $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^3$, la herramienta fundamental para ello es el producto escalar, que formalizamos como un tensor métrico \hat{g} .

Para restringir esta capacidad de medición a la superficie, se define la *Primera Forma Fundamental*, que es el *tensor métrico inducido* \tilde{g} sobre $\tilde{\mathcal{M}}$ [4]. Este es una función $\tilde{g}_p : T_p\tilde{\mathcal{M}} \times T_p\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ que hereda su capacidad de medición directamente de la métrica ambiente \hat{g} [3], según la relación fundamental:

$$\tilde{g}_p(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \hat{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad (1.13)$$

donde \tilde{X} e \tilde{Y} son dos vectores cualesquiera tangentes a la superficie en el punto p . La importancia de \tilde{g} radica en que encapsula toda la *geometría intrínseca* de la superficie: permite medir la longitud de arco de curvas trazadas sobre ella y calcular el ángulo entre vectores tangentes [4, 17].

Mientras que \tilde{g} describe la geometría *sobre* la superficie, la forma en que esta se curva *dentro* del espacio ambiente será descrita por la Segunda Forma Fundamental. Este segundo objeto, que captura la *geometría extrínseca*, surgirá de manera natural en la siguiente sección, cuando abordemos el desafío de definir una operación de derivada que sea intrínseca a la superficie.

Curvatura y segunda forma fundamental

Una vez definidas la métrica y la derivada en una superficie, podemos analizar su curvatura. Esta se puede clasificar en dos tipos conceptualmente diferentes: extrínseca e intrínseca. La *curvatura extrínseca* describe cómo la superficie se curva dentro del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$, una propiedad que depende de su inmersión. Por otro lado, la *curvatura intrínseca* se refiere a aquella que puede ser medida enteramente sobre la superficie, sin referencia al espacio que la contiene. En esta sección abordaremos ambas, comenzando por el análisis de la curvatura extrínseca, cuyo estudio se inicia con la variación del vector normal a la superficie, \hat{n} , formalizada a través del *Mapa de Gauss*, $\mathcal{G} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow S^2$.

La variación de este mapa de un punto a otro se cuantifica mediante su diferencial, $d\mathcal{G}_p$, que representa la mejor aproximación lineal al cambio del mapa de Gauss alrededor de un punto p . Este diferencial da lugar al *mapa de Weingarten* o *operador de forma*, usualmente definido como $W = -d\mathcal{G}_p$, cuya acción es $W(\tilde{X}) = -\partial_{\tilde{X}}\hat{n}$. Sin embargo, para alinear la notación con la generalización que se presentará en el Capítulo 5 (ver Sección 5.3), definiremos nuestro operador $\tilde{\beta}$ mediante la acción explícita:

$$\tilde{\beta}(\tilde{X}) = P(\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\hat{n}) \quad (1.14)$$

Aquí, P es el operador de proyección sobre el plano tangente. Aunque en este caso particular $\partial_{\tilde{X}}\hat{n}$ ya es un vector tangente (haciendo P formalmente redundante), mantenemos el proyector para enfatizar la estructura que se generalizará a contextos donde la proyección no es trivial, especialmente en ausencia de una métrica. Este operador $\tilde{\beta}$ es fundamental porque su acción sobre \tilde{X} revela cómo se curva la normal, y por ende la superficie. De hecho, sus valores propios, denotados k_1 y k_2 , son las *curvaturas principales*, que miden la máxima y mínima curvatura normal en el punto.

Ahora, conectaremos este operador con la *Segunda Forma Fundamental*, el tensor $\tilde{h}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ que definimos en la sección anterior como la componente normal de la aceleración: $\tilde{h}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \hat{g}(\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \hat{n})$. Para hallar la relación, diferenciamos la condición de ortogonalidad $\hat{g}(\tilde{Y}, \hat{n}) = 0$ respecto a \tilde{X} :

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \hat{n}) + \hat{g}(\tilde{Y}, \hat{\nabla}_{\tilde{X}}\hat{n}) = 0 \quad (1.15)$$

El primer término es $\tilde{h}(\tilde{X}, \tilde{Y})$, y en el segundo podemos sustituir $\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\hat{n}$ por nuestra definición de $\tilde{\beta}(\tilde{X})$. Al reordenar, la ecuación nos revela la relación fundamental, prestando especial atención al signo:

$$\tilde{h}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\tilde{g}(\tilde{\beta}(\tilde{X}), \tilde{Y}) \quad (1.16)$$

Esta relación es una característica propia de la geometría Riemanniana que estamos usando como modelo. En efecto, ambos, $\tilde{\beta}$ y \tilde{h} , describen la curvatura extrínseca, aunque desde perspectivas conceptualmente distintas; es la presencia de la métrica \tilde{g} la que permite identificarlos de esta manera.

En contraste, la *curvatura intrínseca* está contenida en el *Tensor de Curvatura de Riemann* de la superficie, \tilde{R} . Definido a partir de la conexión inducida $\tilde{\nabla}$, su acción sobre los vectores tangentes es:

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}\tilde{Z} \quad (1.17)$$

Para una superficie, esta información se reduce a la *curvatura Gaussiana*, K . El *Theorema Egregium* de Gauss afirma que esta K , que resulta ser el determinante del operador de forma ($K = \det(\tilde{\beta})$), depende únicamente de la métrica intrínseca \tilde{g} .

Este resultado es clave para entender que la curvatura puede ser una propiedad inherente de un espacio, lo que nos permite ahora abandonar el andamiaje de las superficies y proceder a definir de manera abstracta los objetos centrales de nuestro estudio.

1.3. Variedades Diferenciables y Tensores

El estudio detallado de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 nos ha proporcionado la intuición geométrica necesaria sobre conceptos como coordenadas locales, métrica y curvatura. Sin embargo, estos ejemplos estaban “inmersos” en un espacio euclidiano ambiente. Nuestro objetivo ahora es dar un salto conceptual y definir una noción de “espacio” D -dimensional de manera intrínseca, sin referencia a un espacio contenedor. Estos objetos, llamados *variedades diferenciables*, formarán el escenario matemático sobre el cual se construyen las teorías físicas modernas, incluyendo la Relatividad General y la propuesta de esta tesis. La clave será su propiedad de ser localmente euclidianas y la suavidad con que se “pegan” sus distintas regiones mediante funciones de transición.

Para esto se define un conjunto de abiertos vecindad o localidades denominado topología. En donde, la intersección de dos vecindades es una vecindades, la unión arbitraria de vecindades es una vecindad y tanto el espacio completo como el vacío es vecindad

Los conceptos que se desarrollan en esta sección son fundamentales para comprender la geometría de los fibrados y la conexión de Ehresmann que se abordarán en el Capítulo 3, así como para el desarrollo técnico de la reducción dimensional de la conexión afín en el Capítulo 4.

Estructura de Variedad Diferenciable

Intuitivamente, una *variedad topológica* \mathcal{M} de dimensión D es un espacio que, al examinarlo en una vecindad suficientemente pequeña de cualquiera de sus puntos, se asemeja al espacio euclidiano \mathbb{R}^D . Esta “ semejanza local ” se formaliza mediante el concepto de *carta* (o sistema de coordenadas local). Una carta sobre \mathcal{M} es un par (U, r) , donde U es un subconjunto abierto de \mathcal{M} y r es un homeomorfismo (una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua) que mapea U a un subconjunto abierto $r(U) \subseteq \mathbb{R}^D$. La función r asigna a cada punto $p \in U$ un conjunto de D números reales, $(x^0(p), \dots, x^d(p))$ con $d = D - 1$, que son las *coordenadas locales* de p en la carta (U, r) [5, 12].

Para describir completamente la variedad \mathcal{M} , usualmente se necesita una colección de cartas $\{(U_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que la unión de todos los abiertos U_α cubra \mathcal{M} , es decir, $\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathcal{M}$ (ver Apéndice A para la notación de unión). Tal colección se denomina un *atlas* para \mathcal{M} [3, 17]. Si dos cartas (U_α, r_α) y (U_β, r_β) de un atlas se solapan, es decir, si su intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacía, podemos considerar el *mapa de transición* (o función de cambio de coordenadas) desde las coordenadas proporcionadas por r_β a las proporcionadas por r_α . Este mapa es la composición $r_\alpha \circ r_\beta^{-1}$, y está definido sobre el subconjunto abierto $r_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^D$, tomando valores en el subconjunto abierto $r_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^D$.

Una variedad topológica \mathcal{M} se dice que es una *variedad diferenciable* (o suave) si posee un atlas tal que todos estos mapas de transición son funciones suaves (infinitamente diferenciables, C^∞). Esta condición de suavidad en las transiciones es fundamental, pues asegura que las nociones del cálculo diferencial (como la derivación) pueden ser definidas consistentemente sobre \mathcal{M} , independientemente de la elección particular de la carta [2, 11]. Formalmente, una estructura diferenciable se define a través de un atlas maximal, pero para nuestros propósitos, la existencia de un atlas diferenciable es suficiente.

Con esta estructura, podemos definir qué es una función suave sobre la variedad. Una función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es *suave* (o diferenciable) en un punto $p \in \mathcal{M}$ si, para alguna carta (U, r) con $p \in U$, la composición $f \circ r^{-1} : r(U) \rightarrow \mathbb{R}$ (que es una función de \mathbb{R}^D a \mathbb{R}) es suave en el sentido usual del cálculo. Si esto es válido para todo punto $p \in \mathcal{M}$, decimos que f es una función suave sobre \mathcal{M} [3].

Esta noción se extiende a aplicaciones $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre dos variedades diferenciables, las cuales son suaves si su representación en cartas locales es suave. Cuando una aplicación de este tipo es además un homeomorfismo cuya inversa también es suave, se denomina **difeomorfismo**. Si existe un difeomorfismo entre dos variedades, estas se consideran **difeomorfas** y, para todos los efectos de la geometría diferencial, son indistinguibles [5].

Espacio Tangente y Tensores

Para definir magnitudes como vectores en una variedad diferenciable \mathcal{M} de manera que respeten su estructura suave, generalizaremos la idea de derivada direccional. Recordemos que al estudiar superficies 1.2, los vectores tangentes como $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ surgían naturalmente de las derivadas parciales de la parametrización $r(u, v)$. Estos vectores no solo definen el plano tangente, sino que también pueden interpretarse como operadores que miden la tasa de cambio de funciones a lo largo de las direcciones coordenadas sobre la superficie. De forma más general, en \mathbb{R}^n , una derivada direccional es un operador que, aplicado a una función escalar diferenciable, produce un número real (su tasa de cambio en una dirección dada). Es fundamental reconocer que el conjunto de todas estas posibles derivadas direccionales en un punto de \mathbb{R}^n forma un espacio vectorial, que es isomorfo (“totalmente análogo”, en el sentido de compartir la misma estructura de espacio vectorial) al propio \mathbb{R}^n [17]. Esta perspectiva, donde los vectores son vistos como operadores de derivación, es la que ahora generalizaremos para definir los vectores tangentes en una variedad diferenciable abstracta.

De forma análoga, en una variedad diferenciable \mathcal{M} , se define un *vector tangente* V en un punto $p \in \mathcal{M}$ como un operador, denominado *derivación*, que actúa sobre el conjunto de funciones suaves $C^\infty(\mathcal{M})$ (funciones $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$) y produce un número real [5, 12]. Específicamente, $V_p : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface, para $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

1. Linealidad: $V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g)$
2. Regla de Leibniz: $V_p(fg) = f(p)V_p(g) + g(p)V_p(f)$

El conjunto de todos estos vectores tangentes (derivaciones) en un punto p forma un espacio vectorial real, denominado el *espacio tangente* a \mathcal{M} en p , y se denota $T_p\mathcal{M}$ [1, 3]. Este espacio es la generalización directa del plano tangente que estudiamos para superficies.

Dada una carta (U, r) con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) alrededor de p , los operadores de derivada parcial con respecto a estas coordenadas, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$, forman una base para $T_p\mathcal{M}$ [2]. Estos operadores base son la generalización directa de los vectores tangentes como $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ que encontramos en el estudio de superficies parametrizadas 1.2, donde las “coordenadas” eran u y v . Cada uno de estos operadores base, $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, actúa sobre una función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ de la siguiente manera: para calcular $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p(f)$, primero se expresa la función f en términos de las coordenadas locales usando la carta, obteniendo la función $(f \circ r^{-1})$ que opera sobre las coordenadas $y = (y^1, \dots, y^n)$ en \mathbb{R}^n . Luego, se calcula la derivada parcial usual de esta función respecto a la coordenada y^i en \mathbb{R}^n , y finalmente, se evalúa el resultado en el punto $y = r(p)$, que son las coordenadas euclidianas correspondientes al punto $p \in \mathcal{M}$ donde se aplica la derivación. Este proceso se resume formalmente como:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p(f) = \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ r^{-1})(y)\bigg|_{y=r(p)} \quad (1.18)$$

Así, cualquier vector tangente $V \in T_p\mathcal{M}$ se expresa de manera única como $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, donde V^i son las componentes de V en esta base. En adelante, se utilizará el *convenio de suma de Einstein* (ver Apéndice A).

Una vez definidos los espacios tangentes, es natural preguntarse cómo una aplicación suave entre variedades afecta a los vectores tangentes. Dada una aplicación suave $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre dos variedades, esta induce una aplicación lineal entre sus espacios tangentes en cada punto, denominada la *aplicación tangente* o *pushforward* de π . Se denota como $\pi_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\pi(p)}\mathcal{N}$, y su acción sobre un vector $V \in T_p\mathcal{M}$ se define a través de su efecto sobre una función suave arbitraria $f \in C^\infty(\mathcal{N})$:

$$(\pi_*(V))(f) = V(f \circ \pi). \quad (1.19)$$

En una base de coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en \mathcal{M} y $\{y^\alpha\}$ en \mathcal{N} , las componentes del vector transformado $W = \pi_*(V)$ son $W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$, donde $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ son las entradas de la matriz Jacobiana de la aplicación π .

El espacio dual a $T_p\mathcal{M}$ es el *espacio cotangente*, $T_p^*\mathcal{M}$. Sus elementos son los *covectores* (o *1-formas*) en p , que son funcionales lineales $\omega : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. La base dual a $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\}$ es $\{dx^i\big|_p\}$, definida por la relación $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p) = \delta_j^i$, donde δ_j^i es la delta de Kronecker [12, 17].

Un *tensor de tipo* (k, l) en $p \in \mathcal{M}$ es una aplicación multilinear T_p que toma k covectores de $T_p^*\mathcal{M}$ y l vectores de $T_p\mathcal{M}$ y devuelve un número real [1, 2]:

$$T_p : \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times \dots \times T_p^*\mathcal{M}}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times \dots \times T_p\mathcal{M}}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.20)$$

Para construir tensores de rango superior a partir de los de rango inferior, se utiliza el *producto tensorial* (\otimes). Por ejemplo, el producto tensorial de un vector $V \in T_p\mathcal{M}$ y un covector $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ es un tensor de tipo (1,1), denotado $V \otimes \omega$, cuya acción sobre un covector $\alpha \in T_p^*\mathcal{M}$ y un vector $W \in T_p\mathcal{M}$ es [3]:

$$(V \otimes \omega)(\alpha, W) = \alpha(V)\omega(W) \quad (1.21)$$

De forma similar se define el producto tensorial entre otros tipos de tensores.

Un *campo tensorial* T de tipo (k, l) sobre \mathcal{M} es una asignación suave que a cada punto $p \in \mathcal{M}$ le asocia un tensor T_p de tipo (k, l) en ese punto. El conjunto de todos los campos tensoriales suaves de tipo (k, l) sobre \mathcal{M} se denota $C^\infty(\mathcal{M}; T_l^k\mathcal{M})$, donde $T_l^k\mathcal{M}$ es el fibrado tensorial correspondiente (ver Apéndice A) [5]. En una base de coordenadas locales, un campo tensorial T se expresa como:

$$T = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \quad (1.22)$$

donde $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$ son funciones suaves de las coordenadas, denominadas las componentes del campo tensorial T .

Otro concepto fundamental en el estudio de variedades diferenciables es el *conmutador de Lie* (o corchete de Lie). Dados dos campos vectoriales $X, Y \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, su conmutador de Lie, denotado $[X, Y]$, es también un campo vectorial. Se define por su acción sobre cualquier función escalar suave $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ de la siguiente manera [5, 12]:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (1.23)$$

En una base de coordenadas, las componentes de $[X, Y]$ son $[X, Y]^\lambda = X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - Y^\mu \partial_\mu X^\lambda$. El conmutador de Lie es antisimétrico, es decir, $[X, Y] = -[Y, X]$, y satisface la identidad de Jacobi. Geométricamente, mide la no conmutatividad de los flujos generados por los campos vectoriales X e Y .

En una base de coordenadas, las componentes de $[X, Y]$ son $[X, Y]^\lambda = X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - Y^\mu \partial_\mu X^\lambda$. El conmutador de Lie es antisimétrico, es decir, $[X, Y] = -[Y, X]$, y satisface la **identidad de Jacobi**. Para tres campos vectoriales cualesquiera X, Y, Z , esta identidad fundamental se expresa como: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. Geométricamente, el conmutador de Lie mide la no conmutatividad de los flujos generados por los campos vectoriales X e Y .

A partir del conmutador de Lie, se define la *derivada de Lie* de un campo vectorial Y con respecto a un campo vectorial X , denotada $\mathcal{L}_X Y$, como:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (1.24)$$

La derivada de Lie se puede extender para actuar sobre cualquier tipo de campo tensorial T . Para una función escalar f , $\mathcal{L}_X f = X(f)$. Para un campo tensorial general, $\mathcal{L}_X T$ es un campo tensorial del mismo tipo que T , y esta operación satisface la regla de Leibniz con respecto al producto tensorial y conmuta con las contracciones [1]. La derivada de Lie mide la tasa de cambio de un campo tensorial a lo largo del flujo generado por el campo vectorial X .

Si bien la derivada de Lie es una operación de derivación intrínseca a la variedad (no depende de una conexión) y siempre produce un tensor del mismo tipo, no es la generalización de la derivada covariante que buscamos para todos los propósitos. Por ejemplo, la derivada de

Lie depende de la elección de un campo vectorial X para definir la “dirección” de la derivada de una manera global a través de su flujo. No nos permite definir de forma natural el transporte paralelo de un tensor a lo largo de una curva arbitraria (donde solo tenemos un vector tangente en cada punto, no un campo vectorial extendido). Además, su interpretación como “tasa de cambio” está ligada al arrastre por el flujo de X , que no siempre es la noción de cambio que se requiere en física (por ejemplo, al describir cómo un campo varía respecto a una estructura geométrica fija). Por estas razones, aunque la derivada de Lie es una herramienta geométrica indispensable, se requiere una estructura adicional, la conexión afín, para definir una noción más general de diferenciación covariante y transporte paralelo, como se discutirá en la siguiente sección.

Definición de Conexión y Derivada Covariante

Así como la derivada covariante $\tilde{\nabla}_X Y$ en una superficie generalizó la idea de derivada direccional de manera que el resultado fuese un vector tangente, buscamos ahora una operación $\nabla_X Y$ en una variedad abstracta \mathcal{M} con propiedades análogas. Siguiendo nuestro enfoque de tratar la conexión como la estructura primaria, ahora la definiremos formalmente como un objeto independiente, sin referencia alguna a una métrica. Es bien sabido que la simple derivada parcial de las componentes de un campo vectorial en una carta local, $\partial_m Y^n$, no se transforma como las componentes de un tensor bajo un cambio de coordenadas. Esto se debe a que la derivada parcial no considera cómo varían los vectores base de la propia carta de un punto a otro de la variedad. Para definir una derivada “verdadera” (es decir, un objeto geométrico independiente de las coordenadas), necesitamos introducir la conexión afín.

Una *conexión afín* (o simplemente *conexión*) sobre \mathcal{M} es una aplicación ∇ que toma dos campos vectoriales $X, Y \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ y produce un nuevo campo vectorial $\nabla_X Y \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, denominado la *derivada covariante* de Y en la dirección de X , que satisface las siguientes propiedades para todo $X, Y, Z \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $a, b \in \mathbb{R}$ [1, 5, 12]:

1. $C^\infty(\mathcal{M})$ -linealidad en el primer argumento: $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. \mathbb{R} -linealidad en el segundo argumento: $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$.
3. Regla de Leibniz en el segundo argumento: $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$, donde Xf es la derivada de la función f en la dirección del campo vectorial X .

En una base de campos vectoriales $\{e_a\}$ (que puede ser una base coordenada $\{\partial_m\}$ o una base más general, no coordenada), la acción de la derivada covariante sobre los vectores base define los *coeficientes de conexión*, $\Gamma_a^c{}_b$, mediante la relación:

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_a^c{}_b e_c \quad (1.25)$$

Cuando la base es una base de coordenadas, $e_m = \partial_m$, estos coeficientes $\Gamma_m^l{}_n$ son los usuales símbolos de Christoffel (generalizados). La derivada covariante de un campo vectorial $Y = Y^b e_b$ en la dirección de $X = X^a e_a$ tiene componentes:

$$(\nabla_X Y)^c = X^a (e_a(Y^c) + \Gamma_a^c{}_b Y^b) \quad (1.26)$$

donde $e_a(Y^c)$ denota la derivada de la componente Y^c en la dirección del vector base e_a . Si la base es coordenada, $e_m(Y^l) \rightarrow \partial_m Y^l$. A menudo se define el operador ∇_m tal que $(\nabla_X Y)^l = X^m \nabla_m Y^l$, donde, para una base coordenada:

$$\nabla_m Y^l = \partial_m Y^l + \Gamma_m^l{}_n Y^n \quad (1.27)$$

Los coeficientes de conexión no se transforman como las componentes de un tensor bajo cambios de base.

La derivada covariante se extiende de manera única para actuar sobre campos tensoriales de cualquier tipo (k, l) , $T \in C^\infty(\mathcal{M}; T_l^k \mathcal{M})$, exigiendo que:

- $\nabla_X f = Xf$ para funciones escalares $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.
- ∇_X obedezca la regla de Leibniz para el producto tensorial: $\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S)$.
- ∇_X conmute con todas las contracciones de índices.

Para una 1-forma $\omega \in C^\infty(\mathcal{M}; T^* \mathcal{M})$, esto implica que la derivada covariante de sus componentes ω_n es [17]:

$$\nabla_m \omega_n = \partial_m \omega_n - \Gamma_m^l{}_n \omega_l \quad (1.28)$$

De manera análoga, para un campo tensorial general T con componentes $T^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l}$, su derivada covariante $\nabla_p T^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l}$ se construye aplicando la regla de Leibniz, resultando en la derivada parcial de las componentes más una suma de términos con los coeficientes de conexión Γ por cada índice del tensor. La expresión explícita para esta derivada covariante general se detalla en el Apéndice A.

Con la definición de la conexión afín ∇ y su acción sobre campos tensoriales a través de la derivada covariante, hemos sentado las bases para el análisis diferencial intrínseco en una variedad, independientemente de cualquier estructura métrica. Los conceptos y la notación introducidos aquí, como los coeficientes de conexión $\Gamma_m^l{}_n$ y la derivada covariante de componentes (e.g., Ecuaciones (1.27) y (1.28)), serán fundamentales en el desarrollo subsiguiente. Se recomienda al lector consultar el Apéndice A para un resumen de las convenciones notacionales, y las referencias [1, 3, 5, 12] para un tratamiento más exhaustivo de las conexiones afines.

Transporte Paralelo y Curvas Autoparalelas

Una de las funciones primordiales de una conexión afín ∇ es definir una noción de “constancia” para los campos vectoriales a lo largo de una trayectoria, un concepto conocido como *transporte paralelo*, procedemos a definir dos tensores que son intrínsecos a ella y caracterizan su estructura geométrica fundamental. Es crucial subrayar que, en este marco, la curvatura y la torsión son propiedades de la **conexión en sí misma**, no de una métrica subyacente. Para ello, primero consideramos una *curva diferenciable* en la variedad \mathcal{M} como una aplicación suave $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ desde un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ (donde $t \in I$ es el parámetro de la curva). Esta definición es análoga a la de curvas en \mathbb{R}^3 estudiada en la Sección 1.1 [3, 5]. El *vector tangente* a la curva en un punto $\gamma(t)$, denotado $\dot{\gamma}(t)$, se entiende como el operador de derivación que actúa sobre cualquier función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ como $\dot{\gamma}(t)(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t}$ [5, 12]. Si en una carta local

(U, r) con coordenadas $\{x^m\}$, la curva tiene la representación $x^m(t) = (x^m \circ \gamma)(t)$, entonces las componentes de $\dot{\gamma}(t)$ en la base $\{\partial_m|_{\gamma(t)}\}$ son $\frac{dx^m}{dt}$.

Un campo vectorial $V(t)$ definido a lo largo de la curva γ (es decir, $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ para cada $t \in I$) se dice que es *transportado paralelamente* a lo largo de γ si su derivada covariante en la dirección del vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ es cero en todos los puntos de la curva [1, 5, 17]:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}V(t) = 0 \quad (1.29)$$

En el sistema de coordenadas locales $\{x^m\}$, si las componentes del vector tangente son $\frac{dx^m}{dt}$ y las de $V(t)$ son $V^n(t)$, la ecuación de transporte paralelo para las componentes de V se escribe como [2]:

$$\frac{dV^l}{dt} + \Gamma_{m \ n}^l \frac{dx^m}{dt} V^n = 0 \quad (1.30)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria, dados un vector inicial $V(t_0)$ en un punto $\gamma(t_0)$ de la curva y la propia curva, determina de manera única el vector $V(t)$ en cualquier otro punto $\gamma(t)$.

Un concepto íntimamente relacionado es el de las *curvas autoparalelas*. Una curva $\gamma(t)$ es una *curva autoparalela* si su vector de aceleración covariante, $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)$, es siempre paralelo a su propio vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ [12]. Esto se expresa matemáticamente como:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\dot{\gamma}(t) \quad (1.31)$$

donde $\alpha(t)$ es una función escalar que depende, en general, de la parametrización t de la curva. Se puede demostrar que siempre es posible reparametrizar una curva autoparalela utilizando un parámetro especial, s , denominado *parámetro afín*, de tal manera que la función de proporcionalidad $\alpha(s)$ se anula [1]. Con esta parametrización afín, la condición para que una curva sea autoparalela se simplifica a:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\dot{\gamma}(s) = 0 \quad (1.32)$$

Escrita en componentes, donde las coordenadas de la curva parametrizada por s son $x^m(s)$, esta es la célebre ecuación:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma_{m \ n}^l \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0 \quad (1.33)$$

Estas curvas representan las trayectorias “más rectas posibles” que se pueden trazar en una variedad dotada de una conexión afín. Es fundamental destacar que las curvas autoparalelas están definidas exclusivamente por la conexión ∇ y no dependen de ninguna estructura métrica. En el caso de que la variedad también posea una métrica y la conexión sea la de Levi-Civita, entonces las curvas autoparalelas coincidirán con las geodésicas métricas. Sin embargo, en el contexto puramente afín de esta tesis, donde no se presupone una métrica, el concepto de “longitud” no está definido a priori, y las curvas autoparalelas son las únicas trayectorias privilegiadas dictadas por la conexión [6].

1.3.1. Tensores de Curvatura y Torsión de la Conexión

Una vez establecida la conexión afín ∇ y su rol en la diferenciación covariante y el transporte paralelo, procedemos a definir dos tensores que son intrínsecos a ella y caracterizan su estructura geométrica fundamental: el tensor de Torsión y el tensor de Curvatura de Riemann.

El primer tensor que caracteriza una conexión afín ∇ es el *tensor de Torsión*, T . Si bien el término “torsión” también describe la no planaridad de una curva en \mathbb{R}^3 (Sección 1.1), el tensor de Torsión de una conexión es un objeto distinto que mide la asimetría intrínseca de la propia conexión. Se define para dos campos vectoriales $X, Y \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ como:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.34)$$

donde $[X, Y]$ es el conmutador de Lie de los campos vectoriales (definido en la Subsección 1.3). Geométricamente, el tensor de torsión mide el grado en que los “paralelogramos infinitesimales”, construidos mediante el transporte paralelo de sus lados según ∇ , no logran cerrarse [1, 12]. En una base de coordenadas $\{\partial_\mu\}$, donde el conmutador de Lie de los vectores base se anula (i.e., $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$), las componentes del tensor de torsión, $T_\mu^\lambda{}_\nu$ (definidas tal que $(T(\partial_\mu, \partial_\nu))^\lambda = T_\mu^\lambda{}_\nu$), son:

$$T_\mu^\lambda{}_\nu = \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu - \Gamma_\nu^\lambda{}_\mu \quad (1.35)$$

Una conexión se denomina *libre de torsión* o *simétrica* si su tensor de torsión es idénticamente nulo, $T = 0$. En una base más general no coordinada $\{e_a\}$, donde $[e_a, e_b] = f_{ab}^c e_c$ (siendo f_{ab}^c los coeficientes de anholonomía), las componentes de la torsión serían $T_a^\lambda{}_b = \Gamma_a^\lambda{}_b - \Gamma_b^\lambda{}_a - f_{ab}^\lambda$.

El segundo tensor fundamental que emerge de la conexión afín es el *tensor de Curvatura de Riemann*, R . Este tensor generaliza la noción de curvatura intrínseca que encontramos en superficies, donde la curvatura Gaussiana K surgía del tensor \tilde{R} de la conexión inducida $\tilde{\nabla}$ (Subsección 1.2). De forma análoga, el tensor R de la conexión ∇ mide cómo los vectores cambian al ser transportados paralelamente alrededor de bucles infinitesimales, o equivalentemente, cuantifica la no conmutatividad de las derivadas covariantes segundas. Se define por su acción sobre tres campos vectoriales $X, Y, Z \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ como [1, 5]:

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.36)$$

En una base de coordenadas $\{\partial_\mu\}$, las componentes del tensor de curvatura de Riemann, denotadas $R_{nm}^l{}_k$ (definidas tal que $R(\partial_n, \partial_m)\partial_k = R_{nm}^l{}_k \partial_l$), se expresan en términos de los coeficientes de conexión como:

$$R_{nm}^l{}_k = \partial_n \Gamma_m^l{}_k - \partial_m \Gamma_n^l{}_k + \Gamma_n^l{}_e \Gamma_m^e{}_k - \Gamma_m^l{}_e \Gamma_n^e{}_k \quad (1.37)$$

La expresión de estas componentes en una base no coordinada es más compleja, ya que involucraría los coeficientes de anholonomía.

Es fundamental destacar que tanto el tensor de Torsión como el tensor de Curvatura de Riemann son propiedades intrínsecas de la conexión afín ∇ . Su definición y existencia no dependen de ninguna estructura métrica sobre la variedad. La interpretación completa de cómo el tensor de curvatura se relaciona con curvaturas medibles en subespacios específicos (como la curvatura seccional en geometría Riemanniana) generalmente requiere la introducción de una métrica, un concepto que se discutirá en la Sección 1.3.1

El Tensor Métrico y su Relación con la Conexión

Hasta ahora, hemos explorado la estructura de las variedades diferenciables y hemos introducido la conexión afín ∇ como un objeto geométrico fundamental, capaz de definir la diferenciación covariante de campos tensoriales sin referencia a ninguna estructura métrica. Este

enfoque puramente afín es central para la propuesta de esta tesis. Sin embargo, en muchas teorías físicas, y notablemente en la Relatividad General, otro campo tensorial juega un papel protagónico: el *tensor métrico*. La introducción de un tensor métrico g dota a la variedad de una estructura geométrica adicional que permite definir nociones de longitud, distancia, ángulo y volumen, dando lugar a lo que se conoce como geometría (pseudo-)Riemanniana. Aunque en nuestro desarrollo la métrica no es un concepto primario, es indispensable entender su definición, sus propiedades y, crucialmente, cómo se relaciona (o no) con una conexión afín general, para así poder contrastar el enfoque de esta tesis con los paradigmas más convencionales.

Definición y Propiedades del Tensor Métrico

Un *tensor métrico* g sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} de dimensión D es un campo tensorial de tipo (0,2) que es *simétrico* (i.e., $g(X, Y) = g(Y, X)$) para todo par de campos vectoriales X, Y , o en componentes $g_{mn} = g_{nm}$) y *no degenerado* (si $g(X, Y) = 0$ para todo Y , entonces $X = 0$, lo que implica que la matriz (g_{mn}) es invertible) [1, 12].

1. **Simetría:** Para cualesquiera dos campos vectoriales $X, Y \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, se cumple que $g(X, Y) = g(Y, X)$. En componentes, en una base de coordenadas $\{\partial_m\}$, esto se traduce a $g_{mn} = g_{nm}$.
2. **No degeneración:** Para un campo vectorial X , si $g(X, Y) = 0$ para todo campo vectorial Y , entonces necesariamente $X = 0$. Esto implica que la matriz de componentes (g_{mn}) es invertible.

La función primordial del tensor métrico es permitir mediciones geométricas. La *longitud* (o norma al cuadrado) de un vector $V \in T_p\mathcal{M}$ se define como $\|V\|^2 = g(V, V) = g_{mn}V^mV^n$. El *ángulo* θ entre dos vectores V y W en $T_p\mathcal{M}$ (si la métrica es Riemanniana) se define mediante $g(V, W) = \|V\| \cdot \|W\| \cos\theta$. La *longitud de arco* de una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ viene dada por la integral $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))|} dt$ [5, 17].

La no degeneración del tensor métrico asegura la existencia de un *tensor métrico inverso*, g^{-1} , un campo tensorial de tipo (2,0) con componentes g^{mn} tales que $g^{ml}g_{ln} = \delta_n^m$, donde δ_n^m es la delta de Kronecker. El tensor métrico y su inverso se utilizan para *subir y bajar índices*, estableciendo un isomorfismo canónico entre los espacios tangente y cotangente en cada punto: $V_m = g_{mn}V^n$ y $V^m = g^{mn}V_n$ [2]. La *signatura* de la métrica (el número de valores propios positivos, negativos y nulos de la matriz g_{mn}) determina la naturaleza de la geometría; por ejemplo, una signatura Riemanniana o Lorentziana.

Compatibilidad Métrica de la Conexión

Como se ha enfatizado, la conexión afín ∇ y el tensor métrico g son, a priori, estructuras geométricas independientes que pueden coexistir en una variedad \mathcal{M} . La relación entre ellas se cuantifica a través de la derivada covariante del tensor métrico. Se define el *tensor de no-metricidad*, Q , como el resultado de esta operación [6]:

$$Q_{pmn} \equiv \nabla_p g_{mn} = \partial_p g_{mn} - \Gamma_p^l{}_m g_{ln} - \Gamma_p^l{}_n g_{ml} \quad (1.38)$$

Este tensor mide, punto a punto, el grado en que la conexión no preserva la estructura métrica.

Con este objeto, la condición de compatibilidad se vuelve muy clara. Se dice que una conexión ∇ es *compatible con la métrica* g (o que g es *preservada* por ∇) si su tensor de no-metricidad es idénticamente nulo:

$$Q_{pmn} = 0 \quad (1.39)$$

La compatibilidad métrica tiene una interpretación geométrica importante: el producto escalar entre dos vectores se mantiene constante si ambos son transportados paralelamente a lo largo de una curva.

La Conexión de Levi-Civita

En una variedad (pseudo-)Riemanniana (\mathcal{M}, g) , el *Teorema Fundamental de la Geometría (Pseudo-)Riemanniana* establece que existe una *única* conexión afín ∇ que satisface dos condiciones simultáneamente [1, 5, 12]:

1. Es compatible con la métrica: $\nabla g = 0$ (es decir, $Q_{pmn} = 0$).
2. Es libre de torsión: $T(X, Y) = 0$ (es decir, $T_m^l{}_n = 0$, lo que implica $\Gamma_m^l{}_n = \Gamma_n^l{}_m$).

Esta conexión única se denomina la *conexión de Levi-Civita*. Sus coeficientes, los *símbolos de Christoffel*, que denotaremos $\Gamma_m^l{}_n(g)$, están determinados por la métrica:

$$\Gamma_m^l{}_n(g) = \frac{1}{2}g^{lk}(\partial_m g_{nk} + \partial_n g_{mk} - \partial_k g_{mn}) \quad (1.40)$$

En una variedad Riemanniana, la *curvatura seccional* $K(X, Y) = g(R(X, Y)Y, X)$ ofrece una interpretación geométrica del tensor de curvatura de Riemann $R_{nm}{}^l{}_k$ [5, 12]. La existencia de la conexión de Levi-Civita y conceptos como la curvatura seccional dependen enteramente de la previa elección de un tensor métrico g , lo que contrasta con el enfoque de esta tesis.

Geodésicas Métricas vs. Curvas Autoparalelas Afines

Previamente definimos las *curvas autoparalelas* de una conexión afín ∇ por la ecuación:

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_m^l{}_n \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0$$

Estas curvas están definidas únicamente por ∇ . Por otro lado, las *geodésicas métricas* de una variedad (\mathcal{M}, g) son curvas que extremizan la longitud y cumplen:

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_m^l{}_n(g) \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0 \quad (1.41)$$

donde $\Gamma_m^l{}_n(g)$ son los símbolos de Christoffel de la métrica g . Si la conexión ∇ es la de Levi-Civita, ambos conceptos coinciden. Sin embargo, para una conexión afín general, sus curvas autoparalelas no tienen por qué coincidir con las geodésicas de ninguna métrica, una distinción analizada por Schouten [6] y que es fundamental para las teorías puramente afines.

Concluye así nuestra revisión de los elementos de la geometría diferencial. En este capítulo, partiendo de la intuición de curvas y superficies, se ha construido el formalismo de variedades y tensores, poniendo especial énfasis en la conexión afín como estructura primaria. A partir de ella se definieron la derivada covariante, el transporte paralelo, la torsión y la curvatura, para luego contrastar este enfoque con la geometría Riemanniana convencional mediante la introducción del tensor métrico, diferenciando entre curvas autoparalelas y geodésicas. Este arsenal de herramientas nos prepara ahora para abordar el núcleo de esta tesis, explorando en el siguiente capítulo los *Fundamentos Físicos* que motivan una teoría de Kaluza-Klein puramente afín y la necesidad de trascender el paradigma métrico tradicional.

Fundamentos Físicos: De la Gravitación Clásica al Enfoque Afín de la Unificación

Este capítulo establece el marco físico y conceptual que motiva y justifica la propuesta central de esta tesis: la formulación de una teoría de Kaluza-Klein sobre una base puramente afín. El recorrido no será una simple revisión histórica, sino un análisis crítico guiado por un *principio rector*: la búsqueda del *minimalismo axiomático* en la construcción de teorías geométricas de la gravedad.

Comenzaremos por deconstruir el paradigma de la Relatividad General para identificar su jerarquía axiomática fundamental. A continuación, utilizaremos sus limitaciones conceptuales y empíricas como justificación para explorar el vasto panorama de las teorías de gravedad modificada. Este análisis, estructurado según el grado en que estas teorías flexibilizan los axiomas de Einstein, nos permitirá situar el enfoque puramente afín no como una alternativa más, sino como la conclusión lógica de una búsqueda de los primeros principios de la unificación geométrica.

2.1. El Paradigma Establecido: La Geometría Riemanniana de Einstein

La transición desde la física clásica a la Relatividad General representa un cambio de paradigma fundamental, impulsado por la necesidad de resolver las profundas inconsistencias del modelo newtoniano. La teoría de Newton, concebida como una fuerza de acción a distancia en un espacio y tiempo absolutos, enfrentaba no solo fallos empíricos insalvables, como la precesión anómala del perihelio de Mercurio, sino también una incompatibilidad teórica directa con la Relatividad Especial de Einstein.

Esta sección reconstruirá la evolución conceptual que dio origen a la nueva teoría. Se analizarán los dos pilares físicos sobre los que Einstein la erigió: el *Principio de Equivalencia*, que redefine la naturaleza de la gravedad, y el *Principio de Covarianza General*, que establece el lenguaje matemático para describirla. Finalmente, se mostrará cómo estos principios culminan de forma natural en una descripción puramente geométrica de la gravitación, cuyas leyes dinámicas son las célebres Ecuaciones de Campo de Einstein. El marco geométrico resultante, conocido como el *paradigma Riemanniano*, servirá como el fundamento establecido, cuyas limitaciones y las diversas propuestas para superarlas serán el tema de las secciones posteriores.

La Gravitación Newtoniana: Un Modelo de Fuerza y sus Limitaciones

Newton propuso la primera teoría de gravitación. Esta teoría explica de forma satisfactoria el movimiento de casi todos los planetas y el motivo por el cual la los objetos en la tierra caen al suelo, entre otros fenómenos.

Sin embargo, observaciones precisas mostraron que la órbita de mercurio no coincidía con las predicciones realizadas por la teoría de Newton, pues el perihelio de mercurio rota ligeramente cada órbita. Por otro lado, la teoría de gravitación de Newton es compatible con las transformaciones de Galileo, mientras que Lorentz encontró que la electrodinámica descrita por las ecuaciones de Maxwell sigue transformaciones diferentes. De manera paralela, Michelson y Morley muestran experimentalmente que la velocidad de la luz es constante en todo sistema de referencia. Tomando este resultado como postulado Einstein formula la teoría de la Relatividad Especial y encuentra una explicación física a las transformaciones descubiertas por Lorentz.

La teoría de la gravitación de Isaac Newton, formulada en el siglo XVII, establece el primer marco matemático exitoso para describir la atracción entre cuerpos masivos, presentándola como una fuerza de acción a distancia que opera en un escenario de espacio y tiempo absolutos. En este paradigma, el espacio se modela como el espacio euclidiano tridimensional, \mathbb{R}^3 , y las trayectorias de los cuerpos son curvas diferenciables, como las introducidas en la Sección 1.1, parametrizadas por un tiempo universal, t . La fuerza gravitacional, \mathbf{F}_g , que un cuerpo de masa fuente M ejerce sobre una partícula de prueba de masa gravitacional m_g , viene dada por la célebre ley de gravitación universal [18]:

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{M m_g}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, r es la distancia escalar que separa los centros de masa de los cuerpos, y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta desde la masa fuente hacia la partícula de prueba.

Al combinar la ley de fuerza de la Ecuación 2.1 con la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$, donde m_i es la masa inercial de la partícula, se obtiene una expresión para la aceleración de la partícula en el campo gravitatorio:

$$\mathbf{a} = - \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

Una observación empírica fundamental es que esta aceleración es la misma para todos los cuerpos en un mismo punto, sin importar su masa o composición. Para que esto sea cierto, la ecuación nos obliga a que el cociente entre la masa gravitacional y la masa inercial sea una constante universal. Este hecho se conoce como el *principio de equivalencia débil*. Eligiendo un sistema de unidades apropiado, esta constante se fija en la unidad, lo que nos lleva a la profunda igualdad:

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \quad (2.3)$$

En el marco newtoniano, esta equivalencia es un hecho experimental crucial pero teóricamente accidental, cuya justificación profunda será la piedra angular de las modernas teorías geométricas de la gravitación, incluyendo la Relatividad General [19].

De manera análoga, la teoría puede formularse en el lenguaje de campos mediante el potencial gravitatorio ϕ . La fuerza que siente la partícula de prueba se expresa como $\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \phi$,

y el campo potencial es generado por la densidad de masa fuente, ρ_g , a través de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho_g \quad (2.4)$$

Aquí se hace evidente la sutileza: la masa que aparece en la ecuación de Poisson (la masa fuente, ρ_g) y la masa que responde al campo en la ley de fuerza (m_g) son, por definición, masas gravitacionales. El *principio de equivalencia débil*, expresado en la Ecuación 2.3, es el puente que conecta todo el sistema, al postular que esta masa gravitacional es, a su vez, equivalente a la masa inercial (m_i) que se resiste a la aceleración en la segunda ley de Newton.

A pesar de su formidable éxito, el paradigma newtoniano adolecía de profundas inconsistencias y fallas. Teóricamente, su naturaleza de acción a distancia implicaba una propagación instantánea de la interacción, en conflicto directo con los postulados de la Relatividad Especial. Observacionalmente, la teoría fallaba en predecir con total precisión la precesión anómala del perihelio de Mercurio [20]. Estas limitaciones señalaban inequívocamente que la gravitación de Newton, si bien era una excelente aproximación, no era una teoría fundamental.

La Geometría desarrollada por Riemann describe una forma de conectar cada punto al siguiente de forma que localmente siempre sea Minkowski. De forma simple, se puede pensar, como la tierra de forma local en cada ciudad, parece ser plana y se conecta punto a punto. Pero la tierra de forma global, es una esfera con su respectiva curvatura. Con éste tipo de analogías Einstein formula que el espacio puede tener curvatura.

Principios Fundamentales de la Relatividad General

Frente a la incompatibilidad de las transformaciones de Galileo en la teoría de gravedad de Newton y las Transformaciones de Lorentz de la relatividad especial surgió la necesidad de crear una teoría en la cual la relatividad especial y la gravedad coexistan. En la formulación de Newton se asume la equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial. En base a esto, Einstein realiza una serie de experimentos mentales en los cuales un sistema local sometido a un campo gravitacional en caída libre es equivalente un sistema inercial sin gravedad. Éste principio es conocido como principio de Equivalencia. Además, esto implica que todos sistemas localmente, en algún marco de referencia siguen las leyes de la relatividad especial.

El salto conceptual desde la gravedad newtoniana hacia un modelo geométrico se apoya en dos principios de una profundidad física extraordinaria: el Principio de Equivalencia y el Principio de Covarianza General. Estos postulados, en conjunto, no solo corrigen las deficiencias del marco clásico, sino que dictan la estructura matemática que debe tener una teoría relativista de la gravitación.

El punto de partida es la promoción del *principio de equivalencia débil*, discutido en la sección anterior, a un postulado central. Este principio se extiende a lo que se conoce como el *principio de equivalencia de Einstein*. La idea, elegantemente capturada en el experimento mental del observador en un ascensor en caída libre [2], es que no existe experimento local (no gravitacional) alguno que un observador pueda realizar para determinar si se encuentra en un estado de reposo en un campo gravitatorio o en un estado de aceleración uniforme en un espacio sin gravedad. La profunda implicación es que la gravedad, como fuerza, puede ser anulada.^{en} una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo al elegir un sistema de referencia en caída libre [21]. A tal sistema se le denomina *sistema de referencia localmente inercial*. El

principio de equivalencia de Einstein afirma entonces que, en cualquier sistema de referencia localmente inercial, las leyes de la física no gravitacional deben adoptar la misma forma que tienen en la Relatividad Especial.

Minkowski muestra matemáticamente que la teoría de la relatividad especial puede ser descrita en un espacio vectorial de cuatro dimensiones dotado de una aplicación bi-lineal definida negativa. Actualmente éste espacio es conocido como el espacio de Minkowski. De ésta forma, todos los sistemas de referencia en algún sistema de referencia localmente Descritos por un espacio de Minkowski.

Esta afirmación física tiene una consecuencia matemática directa y demostrable. Como se establece en el Capítulo 1, los coeficientes de la conexión afín, o símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$ en una teoría métrica, no son tensores y sus valores dependen del sistema de coordenadas elegido. Es posible demostrar que para cualquier punto p en la variedad espaciotemporal, se puede encontrar una transformación de coordenadas tal que los símbolos de Christoffel se anulen en ese punto, es decir, $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}(p) = 0$ [1]. Dado que la ecuación geodésica (la trayectoria de una partícula en caída libre) está gobernada por estos coeficientes, en un sistema de referencia localmente inercial la ecuación de movimiento se reduce a $\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} = 0$, que es la ecuación de una línea recta en el espacio-tiempo de Minkowski. Así, la existencia de un sistema de referencia localmente inercial, donde la gravedad parece desaparecer, está garantizada matemáticamente.

Sin embargo, esta anulación de la gravedad es estrictamente local. Si bien podemos hacer que los símbolos de Christoffel se anulen en un punto, sus derivadas parciales ($\partial_{\sigma}\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$) no se anularán en general. Como vimos en la Sección 1.3.1, el tensor de curvatura de Riemann $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ se construye precisamente a partir de estas derivadas. Esta curvatura remanente, que no puede ser eliminada por ninguna elección de coordenadas, es la verdadera firma invariante del campo gravitatorio [22]. Físicamente, se manifiesta como los *efectos de marea*: la fuerza diferencial que sienten dos partículas de prueba cercanas en caída libre y que tiende a separarlas o acercarlas. La gravedad, por tanto, se identifica con la curvatura del espacio-tiempo. Para completar, se postula el *principio de equivalencia fuerte*, que extiende el principio de equivalencia de Einstein para incluir las leyes de la física gravitacional misma, afirmando que incluso la energía de auto-gravitación de un cuerpo se comporta de la misma manera en un campo gravitatorio, un postulado que distingue a la Relatividad General de otras teorías métricas y que ha sido sometido a rigurosas pruebas experimentales [23].

El segundo pilar es el *principio de covarianza general*. Dado que la gravedad se manifiesta como la curvatura de la variedad y solo podemos construir sistemas inerciales de manera local, no existe un sistema de coordenadas global privilegiado. Por lo tanto, se debe exigir que las leyes de la física sean válidas y mantengan su forma en cualquier sistema de coordenadas que se elija. Como se estableció en la Sección 1.3, la única manera de garantizar esta independencia del sistema de referencia es formulando las leyes físicas como ecuaciones que involucran exclusivamente tensores. El uso del cálculo tensorial y de la derivada covariante, presentados en el Capítulo 1, deja de ser una opción matemática para convertirse en una necesidad impuesta por el principio físico de la covarianza.

En síntesis, el Principio de Equivalencia nos obliga a describir la gravedad como la geometría de una variedad diferenciable que es localmente minkowskiana, mientras que el Principio de Covarianza General nos exige utilizar el lenguaje de los tensores para describir la física en dicha variedad. Juntos, estos principios establecen de forma ineludible el escenario de la Relatividad General: una teoría de la gravitación como la dinámica de la geometría de una variedad pseudo-

Riemanniana.

Deducción Heurística de las Ecuaciones de Campo de Einstein

Los principios de equivalencia y covarianza general, abordados en la Sección 2.1, imponen un marco geométrico para la gravedad, pero no especifican la dinámica del espacio-tiempo. Para derivar las ecuaciones de campo —la ley que vincula la geometría con su contenido de materia y energía—, se puede emplear una deducción heurística inspirada en la de Weinberg [24]. Este método parte de la exigencia de recuperar la gravedad newtoniana en el límite apropiado [1]. En este trabajo se adopta la signatura métrica $(+, -, -, -)$. El punto de partida es la ecuación geodésica, que describe la trayectoria de una partícula de prueba parametrizada por su tiempo propio τ .

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

Esta ecuación constituye la implementación matemática del Principio de Equivalencia. Al elegir el tiempo propio τ como parámetro afín, se describe la física desde la perspectiva de un observador en caída libre. Como se argumentó en la Sección 2.1, para dicho observador existe un sistema de referencia localmente inercial donde los efectos de la gravedad se anulan. Matemáticamente, esto corresponde a la anulación de los símbolos de Christoffel ($\Gamma_{\mu}^{\rho\nu} = 0$), con lo que la Ecuación 2.5 se reduce a $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$. La partícula, por tanto, no experimenta aceleración, manifestando así la "desaparición" de la fuerza gravitatoria en su marco local.

Para conectar esta descripción geométrica con la física clásica, se analiza el límite newtoniano de la Ecuación 2.5. Este procedimiento requiere dos condiciones: un campo gravitacional débil y estático ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) y partículas con velocidades no relativistas ($v \ll c$). Bajo estas condiciones, la componente temporal de la cuadrivelocidad es dominante ($U^0 \gg U^i$), por lo que la suma $\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} U^\sigma U^\nu$ puede aproximarse por su término principal, que contiene dos factores de U^0 . Dado que para velocidades lentas el tiempo propio y el coordenado son casi idénticos ($d\tau \approx dt$), se tiene que $(U^0)^2 = (c \frac{dt}{d\tau})^2 \approx c^2$. La aceleración predicha por la Relatividad General para las componentes espaciales resulta ser:

$$a_{\text{GR}}^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_0^{i0} c^2 \quad (2.6)$$

El siguiente paso consiste en calcular el símbolo de Christoffel Γ_0^{i0} bajo estas mismas condiciones. La definición formal, aplicada a un campo estático donde las derivadas temporales de la métrica se anulan, conduce a:

$$\Gamma_0^{i0} = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_0 g_{j0} + \partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}) \approx -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00}$$

En un campo débil y con la signatura $(+, -, -, -)$, se aproxima $g^{ij} \approx \eta^{ij} = -\delta^{ij}$. El símbolo de Christoffel se simplifica entonces a:

$$\Gamma_0^{i0} \approx -\frac{1}{2} (-\delta^{ij}) \partial_j g_{00} = \frac{1}{2} \partial^i g_{00}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión para \mathbf{a}_{GR} , y usando la definición $g_{00} \approx 1 + h_{00}$, se obtiene una expresión para la aceleración en este límite.

$$a_{\text{GR}}^i \approx -\left(\frac{1}{2} \partial^i g_{00}\right) c^2$$

En notación sin índices:

$$a_{\text{GR}} \approx -\frac{c^2}{2}\nabla g_{00} \approx -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00} \quad (2.7)$$

Al imponer que esta aceleración coincida con la de la teoría de Newton, $a_{\text{Newton}} = -\nabla\phi$, se establece la igualdad $-\frac{c^2}{2}\nabla h_{00} = -\nabla\phi$. De esta comparación se extrae la relación fundamental entre la perturbación métrica y el potencial newtoniano¹:

$$h_{00} \approx \frac{2\phi}{c^2} \quad (2.8)$$

Este vínculo es la clave para geometrizar la ecuación de campo de Newton. Al sustituir la perturbación h_{00} por su definición en términos de la componente métrica, $h_{00} = g_{00} - 1$, la Ecuación 2.8 se transforma en $g_{00} - 1 \approx \frac{2\phi}{c^2}$. Tomando el Laplaciano en ambos lados y utilizando la ecuación de Poisson, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ (Ec. 2.4), se obtiene:

$$\nabla^2(g_{00} - 1) \approx \frac{2}{c^2}\nabla^2\phi = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \quad (2.9)$$

Dado que el Laplaciano de una constante es cero, la expresión se simplifica a $\nabla^2 g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho$.

Para generalizar esta ecuación, se introduce la fuente relativista de campo. En el límite no relativista, se tiene la relación $T_{00} \approx \rho c^2$, lo que permite escribir $\rho \approx T_{00}/c^2$ [1]. Al sustituir esta densidad en la expresión anterior, se llega a una ecuación de campo aproximada para la componente g_{00} :

$$\nabla^2 g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \quad (2.10)$$

El Principio de Covarianza General exige que esta sea la aproximación de una ecuación tensorial completa. Se postula entonces la forma $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. La derivación anterior permite identificar la constante de acoplamiento de Einstein como $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. El tensor de Einstein es el único objeto geométrico que cumple con los requisitos físicos necesarios [2], lo que conduce a la forma final de las Ecuaciones de Campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Estas ecuaciones son la culminación de la Relatividad General: la distribución de materia y energía (lado derecho) dicta la curvatura de la geometría del espacio-tiempo (lado izquierdo).

Es útil analizar las Ecuaciones de Campo en escenarios específicos. El caso fundamental es el vacío, definido por $T_{\mu\nu} = 0$, donde las ecuaciones se reducen a $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Una situación de particular interés es el vacío sin constante cosmológica ($\Lambda = 0$), donde la condición se simplifica a $R_{\mu\nu} = 0$. Los espacio-tiempos que satisfacen esta última condición se denominan Ricci-planos y describen soluciones como los agujeros negros de Schwarzschild y Kerr.

Para el caso general no vacío, es conveniente expresar las ecuaciones en su forma de "traza revertida", que relaciona directamente el tensor de Ricci con las fuentes:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

¹Esta relación de signo es una consecuencia directa de la signatura $(+, -, -, -)$. Para la signatura de relatividad $(-, +, +, +)$, la relación se invierte, resultando en $h_{00} \approx -2\phi/c^2$.

Cabe destacar que esta deducción no es única. Las ecuaciones pueden obtenerse de manera más formal a partir del principio de acción de Einstein-Hilbert [25], o demostrarse como las ecuaciones de segundo orden más generales posibles mediante el teorema de Lovelock [26], además del arduo camino original de Einstein [27]. La convergencia de estos múltiples enfoques subraya su robustez y carácter fundamental.

Del Éxito del Paradigma a sus Límites de Validez

Las Ecuaciones de Campo de Einstein representan la culminación de la física gravitacional clásica y un pilar de la física moderna. Su éxito ha sido verificado con una precisión extraordinaria en su dominio de validez: el de campos gravitacionales desde la escala de laboratorio hasta la del sistema solar [23].

Sin embargo, el progreso científico exige someter toda teoría a sus regímenes más extremos: las inmensas *escalas cosmológicas* del universo y las *singularidades de curvatura infinita*, donde los efectos cuánticos se vuelven ineludibles [28]. Es precisamente en estas fronteras donde el paradigma estándar, a pesar de su robustez, revela profundas fisuras.

Estas anomalías, que se detallarán a continuación, no invalidan la Relatividad General en su dominio, sino que actúan como la principal justificación para la pregunta central de este capítulo: ¿la solución a estas fisuras reside en nueva física de partículas, o en una revisión de los *fundamentos axiomáticos* de la propia geometría?

2.2. La Gravedad en la Encrucijada: Limitaciones y Alternativas Axiomáticas

La Relatividad General, cuyas ecuaciones de campo se establecieron en la Sección 2.1, constituye el paradigma estándar de la gravitación [1]. No obstante, su éxito se ve desafiado por fisuras a escalas cosmológicas, que exigen un sector oscuro para ser explicadas [29], y por dilemas teóricos fundamentales como la cuantización de la gravedad y la existencia de singularidades [28]. Esta situación ha motivado la intensa búsqueda de teorías de gravedad modificada. Esta sección examina dicha encrucijada, estableciendo el contexto para la propuesta central de esta tesis: una reformulación de la unificación geométrica en un marco puramente afín.

Las Fisuras del Paradigma Estándar: ¿Por qué Modificar la Gravedad?

La Relatividad General de Einstein, a pesar de su estatus como pilar de la física moderna y su éxito en describir la gravitación a escalas del sistema solar [23], revela profundas fisuras cuando se la confronta con el universo en sus escalas más grandes y en sus regímenes de más alta energía. Estas tensiones, de naturaleza tanto empírica como teórica, no solo exponen la posible incompletitud de la teoría, sino que constituyen la principal justificación para la exploración de la gravedad modificada.

Desde el punto de vista observacional, el desafío más notorio surge del modelo cosmológico estándar, Λ CDM. Para ser consistente con un vasto cúmulo de observaciones, que van desde el fondo cósmico de microondas hasta la distribución de galaxias, el modelo requiere que el

95 % del contenido energético del cosmos sea de naturaleza desconocida [30,31]. La componente dominante, la “energía oscura”, se introduce para explicar la expansión acelerada del universo. Si bien la constante cosmológica, Λ , es la candidata más simple, su existencia abre uno de los abismos más profundos de la física teórica: el problema de la constante cosmológica. El valor teórico de la energía del vacío, calculado desde la teoría cuántica de campos, excede el valor observado en 60 a 120 órdenes de magnitud, una discrepancia tan extrema que sugiere un error fundamental en nuestra comprensión de la interacción entre gravedad y el vacío cuántico [24,32].

A esta crisis teórica se suma una creciente crisis observacional: la «tensión de Hubble». Existe una diferencia estadísticamente significativa, a nivel de 5σ , entre las mediciones de la tasa de expansión actual del universo (H_0) derivadas del universo temprano y las obtenidas mediante mediciones directas en el universo tardío, lo que podría indicar la necesidad de nueva física más allá de Λ CDM [33]. La otra componente del sector oscuro, la «materia oscura», es igualmente problemática. Se postula para explicar las curvas de rotación de las galaxias, la dinámica de los cúmulos galácticos y la formación de la estructura a gran escala, fenómenos que la materia visible no puede justificar bajo las leyes de la RG [31]. Sin embargo, el Modelo Estándar de Física de Partículas carece de cualquier candidato viable para esta sustancia. Más allá de su desconocida naturaleza, el paradigma de la materia oscura fría (Cold Dark Matter) enfrenta fallos sistemáticos a escalas galácticas, tales como el «problema de cúspide-núcleo», el «problema de los satélites faltantes» y el problema de ser «demasiado grande para fallar» [24,34].

Paralelamente a estos desafíos empíricos, la Relatividad General sufre de limitaciones teóricas intrínsecas que señalan su propia incompletitud. Los teoremas de singularidad de Penrose y Hawking demuestran que, bajo condiciones muy generales, la RG predice inevitablemente la existencia de singularidades espaciotemporales, regiones de curvatura y densidad infinitas donde la propia teoría deja de ser válida [2,35]. La singularidad inicial del Big Bang y las que se ocultan dentro de los agujeros negros no se interpretan como fenómenos físicos reales, sino como la prueba de que la RG debe ser reemplazada por una teoría más fundamental de gravedad cuántica en regímenes de alta energía.

Esta necesaria unificación con la mecánica cuántica constituye el desafío teórico más profundo. Cuando se intenta cuantizar la gravedad mediante las técnicas estándar de la teoría cuántica de campos, la teoría resultante es perturbativamente no renormalizable, produciendo infinitos incontrollables que eliminan su poder predictivo a altas energías [24,36]. Si bien es crucial señalar que este problema podría ser un artefacto del enfoque perturbativo, y que existe la posibilidad de que la gravedad sea no perturbativamente consistente bajo el escenario de *Seguridad Asintótica*, esta sigue siendo una conjetura activa. Por tanto, la incompatibilidad fundamental entre la descripción clásica de la gravedad y el mundo cuántico sigue siendo el problema abierto más importante de la física teórica.

La confluencia de estos desafíos presenta a la física fundamental una encrucijada con dos vías de solución principales. La primera vía de investigación consiste en preservar la Relatividad General como la teoría correcta de la gravedad, postulando que la solución a estas anomalías reside en la física de partículas y la mecánica cuántica. En esta visión, la materia oscura está compuesta por nuevas partículas aún no descubiertas, la energía oscura es un nuevo campo escalar o una propiedad aún no comprendida del vacío cuántico, y las singularidades serán resueltas por una teoría cuántica de la gravedad que modifique la física a la escala de Planck sin alterar la dinámica de Einstein a bajas energías. Esta vía enfoca el esfuerzo en expandir el

lado de la materia ($T_{\mu\nu}$) de las ecuaciones de campo.

La segunda vía propone que el Modelo Estándar de Partículas es esencialmente correcto y que son las propias leyes de la gravedad —el lado geométrico ($G_{\mu\nu}$) de las ecuaciones— las que deben ser modificadas. En este paradigma, los fenómenos del sector oscuro no son evidencia de partículas exóticas, sino las primeras manifestaciones de una nueva dinámica gravitacional que se desvía de la de Einstein a escalas donde aún no ha sido puesta a prueba de forma precisa. Lejos de ser mutuamente excluyentes, ambas aproximaciones son programas de investigación activos y necesarios. Dentro de este contexto, esta tesis opta por explorar la segunda vía. El objetivo es investigar las consecuencias de alterar los fundamentos mismos de la geometría gravitacional, una línea de investigación que, como se argumentará, ofrece un marco prometedor para la unificación teórica. Habiendo justificado por qué la modificación de la gravedad es una línea plausible y prometedora, la siguiente sección se dedicará a explorar el panorama de las principales estrategias que se han propuesto para este fin.

Panorama de Alternativas según su Jerarquía Axiomática

Para analizar sistemáticamente las alternativas a la Relatividad General, las clasificaremos de acuerdo al *criterio de la jerarquía axiomática*. Este enfoque nos permite organizar las teorías de gravedad modificada en función del nivel de profundidad en el que alteran los postulados fundamentales de la geometría de Einstein.

Modificaciones dentro del Paradigma Riemanniano

El camino más explorado para modificar la gravedad consiste en generalizar la acción de Einstein-Hilbert. La clase de teorías más simple y estudiada es la gravedad $f(R)$, donde la densidad lagrangiana, el escalar de Ricci R , se reemplaza por una función arbitraria $f(R)$ [28, 36]. Históricamente, esta idea fue propuesta por Starobinsky como un mecanismo para impulsar la inflación en el universo temprano [37], y más recientemente ha sido ampliamente investigada como una posible explicación para la energía oscura [28, 36]. Estas teorías son equivalentes a una clase de teorías escalar-tensor, en las que un nuevo grado de libertad escalar media la interacción gravitacional [36, 38]. La teoría de Brans-Dicke es el arquetipo de este enfoque, al introducir un campo escalar ϕ que determina el valor de la constante gravitacional, con el objetivo original de incorporar de manera más completa el Principio de Mach en un marco relativista [38, 39]. El marco de las teorías escalar-tensor puede generalizarse hasta su forma más amplia que todavía produce ecuaciones de campo de segundo orden, conocida como teoría de Horndeski [40], que incluye como subclase a las teorías de Galileon [41]. Este marco es teóricamente robusto, ya que evita las inestabilidades fantasmales de tipo Ostrogradsky —patologías teóricas que suelen manifestarse como estados con energía no acotada por debajo, violando la estabilidad del sistema— que afectan a muchas teorías con ecuaciones de movimiento de orden superior [24, 42]. Otra vía de extensión es incluir invariantes de curvatura de orden superior, como el término de Gauss-Bonnet G . Aunque en cuatro dimensiones G es un término topológico que no afecta a la dinámica [26], teorías como la gravedad $f(G)$ se vuelven dinámicas y han sido estudiadas en el contexto de la inflación y la energía oscura, en parte por su conexión con la teoría de cuerdas [43].

Alteraciones de Simetrías Fundamentales

Un segundo conjunto de estrategias de modificación se aventura a alterar o romper simetrías fundamentales de la Relatividad General. Las teorías de gravedad masiva proponen que el gravitón, el mediador de la fuerza gravitacional, posee una masa muy pequeña pero no nula. La construcción de una teoría consistente para un gravitón masivo fue resuelta por la teoría de de Rham-Gabadadze-Tolley [44], que proporciona una formulación libre de fantasmas y que puede generar la aceleración cósmica [45, 46]. Una formulación no lineal de la gravedad masiva se encuentra en las teorías bimétricas, que postulan la existencia de dos métricas dinámicas que interactúan entre sí [47, 48]. Otras propuestas abandonan un pilar aún más fundamental: la invariancia de Lorentz. La gravedad de Hořava-Lifshitz, por ejemplo, postula un espaciotiempo con una escala anisotrópica entre el tiempo y el espacio a altas energías, con el objetivo principal de construir una teoría de la gravedad cuántica que sea renormalizable [49, 50]. De manera similar, la teoría Einstein-Ether introduce un campo vectorial de tipo tiempo privilegiado, el "éter", que rompe la invariancia de Lorentz local y permite parametrizar posibles desviaciones de la Relatividad General [51].

Flexibilizando la Jerarquía Axiomática: Geometrías no Riemannianas

Frente a desafíos observacionales específicos, han surgido paradigmas que, aunque a menudo carecen de una formulación fundamental completa desde el inicio, gozan de un éxito fenomenológico notable. El ejemplo más prominente es la Dinámica Newtoniana Modificada, propuesta para explicar las curvas de rotación de las galaxias sin recurrir a la materia oscura, postulando una modificación de la ley de Newton para aceleraciones muy bajas [52, 53]. Dotar a la Dinámica Newtoniana Modificada de una base relativista ha sido un desafío considerable; la Gravedad Tensor-Vector-Escalar fue el primer intento completo [54, 55], aunque posteriormente fue descartado, lo que ha motivado el desarrollo de nuevas formulaciones [56]. Otro enfoque, motivado por la física de altas energías, es el de las teorías de mundobrana, como el modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati, que postula que nuestro universo de cuatro dimensiones es una "brana" inmersa en un espacio de mayor dimensión, lo que permite que la gravedad se "filtre" a las dimensiones extra a escalas cosmológicas [57, 58].

Finalmente, la línea de investigación más profunda, y la más relevante para esta tesis, es aquella que cuestiona la propia base geométrica de la Relatividad General. En el marco más general, conocido como gravedad métrico-afín, se postula que la métrica y la conexión son campos dinámicos fundamentalmente independientes [59–62]. Esto permite que el espaciotiempo posea no solo curvatura, sino también torsión y no-metricidad como fenómenos físicos [59, 62]. Otros enfoques, como el programa axiomático de Ehlers, Pirani y Schild, buscan reconstruir la geometría desde principios observacionales aún más básicos, cuestionando si la estructura de Weyl o de Riemann es una consecuencia inevitable de la cinemática de la luz y la materia en caída libre [63–65]. Estas ideas abren la puerta a geometrías alternativas, como la de la teoría de Einstein-Cartan, que extiende la Relatividad General para incluir la torsión, la cual es generada por el espín intrínseco de la materia y podría resolver el problema de las singularidades [66, 67]. De manera análoga, el Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General describe la gravedad no a través de la curvatura, sino de la torsión en un espaciotiempo de curvatura nula, y su generalización, la gravedad $f(T)$, da lugar a una nueva teoría con ecuaciones de

segundo orden [68, 69]. De forma similar, el Equivalente Teleparalelo Simétrico de la Relatividad General utiliza la no-metricidad como el mediador fundamental [70], y sus extensiones $f(Q)$ ofrecen otro marco teóricamente robusto para la cosmología [69, 71]. Estos enfoques, que tratan la conexión como una entidad más fundamental, sientan las bases para la exploración de teorías puramente afines.

Cualquier teoría de gravedad modificada debe, no obstante, superar una prueba crucial: ser indistinguible de la Relatividad General en los regímenes donde esta ha sido verificada con extraordinaria precisión. Muchas de las teorías mencionadas predicen una "quinta fuerza" que, si no es suprimida, entraría en conflicto con las observaciones en el sistema solar [72]. Esto ha llevado al desarrollo de *mecanismos de apantallamiento* (*screening mechanisms*), cuyo propósito es ocultar las modificaciones a la gravedad en entornos de alta densidad [73]. La teoría de Camaleón es un ejemplo paradigmático, donde se introduce un campo escalar cuya masa efectiva depende de la densidad de materia local: en regiones densas como la Tierra, el campo se vuelve masivo y su interacción de corto alcance, mientras que en los vacíos del cosmos, es ligero y puede mediar efectos a gran escala [74–76]. Este tipo de mecanismos son un componente esencial y un área activa de investigación para la viabilidad de la mayoría de los modelos de gravedad modificada.

El Paradigma Kaluza–Klein

La búsqueda de la unificación es, quizás, el motor más persistente de la física teórica. Tras el éxito de la Relatividad General al geometrizar la gravedad, una pregunta se volvió ineludible: ¿podrían las otras fuerzas de la naturaleza ser también manifestaciones de la geometría? En 1921, Theodor Kaluza ofreció una respuesta revolucionaria: propuso que el electromagnetismo podría unificarse con la gravedad si el universo poseyera una quinta dimensión espacial [77]. Completada por Oskar Klein en 1926 con la idea cuántica de una dimensión *compactificada* [78], esta noción sentó las bases del paradigma Kaluza–Klein.

El pilar de la formulación canónica es un *ansatz métrico* en un espaciotiempo de cinco dimensiones, $\widehat{\mathcal{M}}$. Se postula que la métrica pentadimensional, $\hat{g}_{\mu\nu}$, se descompone según la estructura de un fibrado. En una carta adaptada $\{x^i, x^5\}$, la métrica toma la siguiente forma general [79]:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ij} + \phi^2 A_i A_j & \phi^2 A_i \\ \phi^2 A_j & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde g_{ij} es la métrica del espaciotiempo de cuatro dimensiones, A_i es un campo vectorial que se identificará con el potencial electromagnético, y ϕ es un campo escalar conocido como el *dilatón*.

Una suposición fundamental del paradigma es cómo tratar la dependencia de la quinta dimensión. En un tratamiento completo, cualquier campo en 5D, como $\Phi(x, x^5)$, puede ser expandido en una serie de Fourier a lo largo de la coordenada compactificada x^5 de radio L [80, 81]:

$$\Phi(x, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) e^{inx^5/L}. \quad (2.14)$$

La ecuación de ondas para un campo sin masa en 5D, $\hat{\square}\Phi = (\square_4 + \partial_5^2)\Phi = 0$, se descompone

entonces en una torre infinita de ecuaciones en 4D:

$$(\square_4 - \frac{n^2}{L^2})\Phi^{(n)}(x) = 0. \quad (2.15)$$

Esta expresión revela que el modo $n = 0$ (independiente de x^5) es un campo sin masa en 4D, mientras que todos los modos $n \neq 0$ se comportan como partículas con una masa $m_n = |n|/L$, formando una *torre de Kaluza-Klein*. El enfoque estándar, tanto el original de Kaluza como el moderno, consiste en aplicar la *condición de cilindro*, $\partial_5\Phi = 0$, lo que equivale a un truncamiento consistente de la teoría al retener únicamente el sector sin masa ($n = 0$) [77, 82].

Siguiendo este principio y el enfoque original de Kaluza, las ecuaciones de campo se derivan directamente del tensor de Ricci pentadimensional, $\hat{R}_{\mu\nu}$, imponiendo la condición de vacío $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$. Al calcular los símbolos de Christoffel para la métrica (2.13) y luego construir el tensor de Ricci, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en 4D [79]:

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij}(g) - \frac{\phi^2}{2}F_{ik}F_j^k - \frac{1}{\phi}\nabla_i\nabla_j\phi = 0, \quad (2.16)$$

$$\hat{R}_{i5} = \frac{1}{2}\nabla^j(\phi^2 F_{ji}) - \frac{1}{\phi}(\partial^j\phi)(\frac{\phi^2}{2}F_{ji}) = 0, \quad (2.17)$$

$$\hat{R}_{55} = \frac{\phi^2}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{\phi}\square\phi = 0. \quad (2.18)$$

Este sistema revela la emergencia del acoplamiento entre la gravedad (Ecuación (2.16)), el electromagnetismo (Ecuación (2.17)) y la dinámica del dilatón (Ecuación (2.18)) a partir de la geometría del vacío en cinco dimensiones.

Las simetrías de la teoría 4D resultante son un residuo de la covarianza general en 5D. Una transformación de coordenadas infinitesimal, $\delta x^\mu = -\xi^\mu$, preserva la forma del ansatz solo si el parámetro tiene la forma particular $\xi^\mu(x, x^5) = (\xi^i(x), c \cdot x^5 + \lambda(x))$ [81]. El parámetro local $\xi^i(x)$ genera los difeomorfismos del espaciotiempo base, mientras que $\lambda(x)$ genera las transformaciones de gauge $U(1)$ para el potencial vectorial, $\delta A_i = \partial_i\lambda$. El parámetro constante c , por su parte, se relaciona con una simetría global. La combinación de esta transformación con la simetría de reescalado global de la métrica en 5D induce en los campos 4D las transformaciones detalladas en [80].

En la derivación moderna a partir de una acción, el *formalismo de vielbein* es una herramienta central. Se introduce una base local ortonormal (el **vielbein** o base móvil) \hat{e}_μ^A que trivializa la métrica, $\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu^A\hat{e}_\nu^B\eta_{AB}$. Para el ansatz (2.13), una elección conveniente de vielbein es [80, 81]:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^a &= \phi^\alpha e_i^a, \\ \hat{e}_\mu^z dx^\mu &= \phi^\beta(dx^5 + A_i dx^i), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde e_i^a es el vielbein de la métrica 4D g_{ij} y las constantes α, β se eligen para normalizar canónicamente la acción. Este enfoque, cuya existencia y propósito están intrínsecamente ligados a la estructura métrica, contrasta marcadamente con el de la base adaptada afín que se desarrollará en capítulos posteriores.

La influencia del paradigma Kaluza-Klein ha sido profunda, transformándose en el arquetipo de las teorías de gauge modernas y un pilar en teorías de altas energías como la teoría de cuerdas

y la Teoría M [82–86]. Fenomenológicamente, la búsqueda de los modos masivos predichos por modelos de dimensiones extra es un objetivo activo en experimentos de vanguardia [87–89]. No obstante, la ausencia de evidencia experimental de dichos estados consolida el truncamiento al sector sin masa, impuesto por la condición de cilindro, como la aproximación más viable. La idea de geometrización ha encontrado también un eco en la matemática, al ofrecer una de las primeras realizaciones físicas del concepto de *fibrado principal* [12, 90, 91], e inspirando desarrollos en áreas como la geometría no conmutativa [92, 93] y la materia condensada [94–98]. De igual forma, ha permeado discusiones en termodinámica, sistemas complejos y la filosofía de la ciencia [99–104].

Sin embargo, y este es el punto crucial que da origen a esta tesis, toda esta vasta estructura intelectual se ha construido sobre una única y fundamental suposición: la existencia de una *estructura métrica* a priori en el espacio de mayor dimensión. Es este axioma el que vamos a desafiar. El propósito de este trabajo es deconstruir el paradigma para reconstruirlo sobre una base lógicamente anterior y más fundamental: la *conexión afín*. Exploraremos las consecuencias de iniciar el viaje de la unificación dimensional sin presuponer una métrica, para descubrir qué nueva física y qué nueva geometría emergen de la estructura afín pura.

2.3. La Vía de los Primeros Principios: Hacia un Fundamento Puramente Afín

Tras haber explorado el panorama de las teorías de gravedad modificada en la Sección 2.2, desde extensiones de la acción de Einstein-Hilbert hasta el paradigma de unificación de Kaluza-Klein, emerge una vía de investigación que se distingue por su radicalidad conceptual. En lugar de modificar la dinámica sobre una geometría Riemanniana preestablecida, este enfoque cuestiona el propio fundamento axiomático de la Relatividad General: la primacía del tensor métrico. Esta sección argumentará que un retorno a los primeros principios físicos y geométricos revela que la conexión afín, como estructura que define el transporte paralelo y, por tanto, la inercia, puede considerarse lógicamente anterior a la métrica, que define la estructura causal y las distancias. Se deconstruirá la jerarquía geométrica convencional para posicionar el enfoque puramente afín no como una alternativa más, sino como el fundamento más elemental desde el cual una teoría gravitacional puede ser construida. Este análisis establecerá la base conceptual para la propuesta central de esta tesis: la formulación de una teoría de Kaluza-Klein sobre esta estructura puramente afín, un programa que busca la unificación desde un punto de partida lógicamente más fundamental que el asumido históricamente.

La Jerarquía de la Estructura Geométrica

En la formulación estándar de la Relatividad General, la arquitectura geométrica se construye sobre una jerarquía rígida y bien definida, tal como se detalló en la Subsección 1.3.1. El objeto primordial es el *tensor métrico*, $g_{\mu\nu}$, que se postula como el único campo fundamental. A partir de él, y solo de él, se deriva una conexión única (la *conexión de Levi-Civita*) al imponer dos condiciones axiomáticas: la *compatibilidad métrica* (el transporte paralelo preserva las longitudes y ángulos, $\nabla g = 0$) y la *ausencia de torsión* (la conexión es simétrica en sus índices inferiores, $T = 0$) [1]. En este paradigma, la conexión no es una entidad independiente, sino

una cantidad derivada, estableciendo la secuencia conceptual canónica: Métrica \rightarrow Conexión \rightarrow Curvatura.

Sin embargo, esta jerarquía, aunque exitosa, no es una necesidad lógica. El *programa axiomático de Ehlers, Pirani y Schild* ofrece una deconstrucción fundamental de este postulado [63,65]. Partiendo de primitivos físicos (las trayectorias de la luz y de las partículas en caída libre), este programa demuestra cómo la geometría se puede construir en capas. De las partículas en caída libre emerge una *estructura proyectiva*, que es el conjunto de todas las trayectorias inerciales no parametrizadas (las “líneas rectas” del espaciotiempo). Esta estructura define qué es el movimiento inercial, pero sin ninguna noción de tiempo o distancia a lo largo de dichas trayectorias. Por otro lado, de las trayectorias de la luz emerge una *estructura conforme*, que fija la estructura causal. La geometría de Riemann, con su tensor métrico, no es el punto de partida, sino el punto de llegada de este proceso, y solo tras imponer una condición de compatibilidad que entrelaza la estructura inercial con la causal [64]. Esto revela que el estatus axiomático de la métrica puede ser cuestionado.

Una generalización directa se encuentra en el marco de la *gravedad métrico-afín*, donde la métrica $g_{\mu\nu}$ y la conexión $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$ se tratan como campos físicos fundamentalmente independientes y dinámicos [59,61]. Al liberar la conexión de las restricciones de la Relatividad General, el espaciotiempo puede poseer no solo curvatura, sino también *torsión* y *no-metricidad* como fenómenos físicos genuinos. La Relatividad General se recupera entonces como el caso altamente restrictivo en el que la torsión y la no-metricidad se anulan por postulado. Este marco demuestra que la dependencia de la conexión respecto a la métrica es una elección, no una imposición de la consistencia matemática.

Llevando esta deconstrucción a su conclusión lógica, se puede postular un fundamento aún más elemental. Si la conexión puede ser independiente, quizás es la única estructura verdaderamente primordial. Este es el principio del *paradigma puramente afín*, donde la conexión es el único campo geométrico fundamental [8,105,106]. En esta visión, la métrica pierde por completo su estatus axiomático y, si existe, debe ser un *objeto emergente* que surge de la propia dinámica del campo de conexión. Esta inversión de la jerarquía (Conexión \rightarrow Dinámica \rightarrow Métrica) redefine la naturaleza de la gravedad. Ya no es una “curvatura del espaciotiempo medible”, sino una manifestación de la estructura inercial del universo, una idea que se alinea de manera profunda con la intuición original del Principio de Equivalencia.

El Principio de Equivalencia en un Universo sin Métrica

El Principio de Equivalencia, en su formulación estándar, se presenta como la piedra angular que conecta la física inercial con la geometría métrica. Sin embargo, su esencia física reside en una propiedad geométrica más profunda y fundamental. El núcleo del principio es la capacidad de “anular” localmente el campo gravitatorio al adoptar un sistema de referencia en caída libre [21]. Matemáticamente, esta anulación corresponde a la existencia de un sistema de coordenadas en el que los coeficientes de la conexión se anulan en un punto ($\Gamma'_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}(p) = 0$), de modo que la ecuación de movimiento se reduce a la de una línea recta [1]. Es crucial notar que esta construcción es una propiedad inherente a cualquier conexión afín, independientemente de la existencia de una métrica. Por tanto, el Principio de Equivalencia no postula una geometría métrica, sino una afín.

En este marco, las trayectorias de las partículas de prueba en caída libre no se describen

como *geodésicas* —un concepto que requiere una métrica para definir una longitud extremal—, sino como *curvas autoparalelas*. Estas son las trayectorias “más rectas” posibles, definidas exclusivamente por la conexión a través de la ecuación $\nabla_u u = 0$, donde u es el vector tangente a la curva [6].

En esta sección, se demuestra formalmente la existencia de un sistema de coordenadas local a lo largo de una curva autoparalela en el cual los coeficientes de la conexión afín se anulan. Este sistema, conocido como coordenadas de Fermi-Walker, generaliza el concepto de coordenadas de Fermi a variedades con una conexión afín arbitraria, sin requerir la estructura de una métrica [1].

Considérese una variedad diferenciable suave \mathcal{M} de dimensión D , dotada de una conexión afín ∇ que se asume libre de torsión. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ una curva suave parametrizada por un parámetro afín $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$. El vector tangente a la curva es $u(\lambda) = d\gamma/d\lambda$, el cual satisface la ecuación de la autoparalela: $\nabla_u u = 0$. Para construir el sistema de coordenadas, primero definimos un marco de referencia móvil $\{E_{(\alpha)}(\lambda)\}_{\alpha=0}^{D-1}$ a lo largo de γ , definido por el transporte paralelo:

$$\nabla_u E_{(\alpha)} = 0, \quad \text{con la condición inicial} \quad E_{(\alpha)}(0) = e_{(\alpha)}, \quad (2.20)$$

donde $\{e_{(\alpha)}\}$ es una base en $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ tal que $e_{(0)} = u(0)$. El sistema de coordenadas (x^μ) en un entorno tubular U de γ se define a través del mapeo $\Phi(x^0, \dots, x^d) = \exp_{\gamma(x^0)}(x^i E_{(i)}(x^0))$, donde $\exp_p(v)$ es el mapa exponencial afín. Se puede demostrar que los vectores base de este sistema, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, evaluados sobre la curva γ , coinciden con el marco móvil: $\partial_0|_\gamma = E_{(0)}$ y $\partial_i|_\gamma = E_{(i)}$.

Evaluando los coeficientes de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sobre la curva de referencia utilizando la definición $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda$, se encuentra que todos se anulan:

- $\nabla_{\partial_0} \partial_0|_\gamma = \nabla_u u = 0 \implies \Gamma_0^{\lambda 0}|_\gamma = 0$.
- $\nabla_{\partial_0} \partial_i|_\gamma = \nabla_u E_{(i)} = 0 \implies \Gamma_0^{\lambda i}|_\gamma = 0$.
- La construcción asegura que para un λ fijo, las coordenadas espaciales son Coordenadas Normales Afines, lo que implica $\Gamma_i^{\lambda j}|_\gamma = 0$.

Así, se demuestra que $\Gamma_\mu^{\lambda \nu}|_\gamma = 0$. Una expansión en serie de Taylor de la conexión en la vecindad de la curva revela cómo la curvatura impide extender esta condición de “planitud” de forma no local fuera de la curva:

$$\Gamma_\mu^{\lambda \nu}(x) = -\frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu}{}^\lambda|_\gamma x^\alpha + \mathcal{O}(x^2), \quad (2.21)$$

donde x^α son las coordenadas transversales. Esta expresión muestra que el tensor de curvatura de Riemann es la obstrucción fundamental para extender un sistema inercial más allá de la trayectoria de referencia.

Este enfoque obliga a redefinir la noción misma de aceleración. En una teoría métrica, la aceleración se define cinemáticamente como la derivada covariante del vector velocidad respecto al tiempo propio ($a^\mu = Du^\mu/d\tau$), pero el tiempo propio $d\tau$ es una cantidad definida por la métrica y no está disponible a priori. En el enfoque puramente afín, la redefinición es más profunda. La condición de autoparalelismo, $\nabla_u u = 0$, define la trayectoria de caída libre, que se considera por postulado como un movimiento inercial y no acelerado. En consecuencia, la

aceleración a^μ se identifica directamente con la desviación de esta condición, es decir, $a^\mu \equiv (\nabla_u u)^\mu$. Un objeto está acelerado si y solo si $\nabla_u u \neq 0$, lo que ocurre únicamente bajo la influencia de fuerzas no gravitacionales.

Es pertinente considerar el rol de la *torsión* en este contexto. La torsión, definida como la parte antisimétrica de la conexión, es un campo tensorial que no puede ser eliminado por una transformación de coordenadas [6, 59]. Su presencia introduce un “giro” en la geometría, pero no invalida la definición de movimiento inercial para partículas de prueba sin estructura interna, ya que la ecuación de las autoparalelas depende exclusivamente de la parte simétrica de la conexión [105]. Se espera, por tanto, que la torsión influya en la dinámica de partículas con espín, pero no altere el concepto fundamental de trayectoria inercial [66].

Finalmente, una descripción física completa debe incorporar la estructura causal y permitir mediciones. En el paradigma puramente afín, la métrica no se postula, sino que debe *emerger* como una consecuencia de la dinámica. Las ecuaciones de campo de la teoría deben dictar una relación algebraica entre la curvatura y un campo tensorial de rango dos, simétrico y no degenerado, que puede ser identificado como la métrica efectiva, $g_{\mu\nu}$ [8, 105]. Dado que la métrica es un objeto emergente, la conexión fundamental ∇ no tiene por qué ser compatible con ella, lo que implica que el tensor de no-metricidad, $Q_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu}$, podría ser no nulo en general. Es esta métrica emergente la que define los conos de luz y la que es experimentada por la materia, reconciliando así la primacía de la conexión para la inercia con la necesidad de una métrica para la causalidad y la medida.

Dinámica sin Métrica: Principios de la Gravedad Puramente Afín

Una vez establecida la viabilidad conceptual de una geometría puramente afín y su compatibilidad con el Principio de Equivalencia, el desafío fundamental se traslada al ámbito de la dinámica. Los principios de acción canónicos, como el de Einstein-Hilbert, son explícitamente métricos. En un marco puramente afín, la pregunta ineludible es: ¿cómo se puede formular un principio de acción para la conexión afín, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, que sea covariante general sin presuponer una estructura métrica? [107]. La respuesta reside en construir una densidad lagrangiana a partir de los únicos objetos disponibles: la propia conexión y sus derivadas, encapsuladas en el tensor de curvatura de Riemann, $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, y el tensor de torsión, $T^\lambda_{\mu\nu}$ [108].

Los intentos pioneros por resolver este problema sentaron las bases del paradigma. Sir Arthur Eddington, en 1923, propuso la primera teoría de gravedad puramente afín coherente, postulando la conexión afín simétrica, $\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$, como el campo fundamental [8]. Su *acción de Eddington*, posiblemente la más simple que se puede construir, es proporcional a la raíz cuadrada del determinante del tensor de Ricci [109]:

$$\mathcal{L}_{\text{Edd}} = \lambda \sqrt{|\det(R_{(\mu\nu)})|}.$$

La variación de esta acción respecto a la conexión conduce a un resultado notable: las ecuaciones de campo son equivalentes a las de la Relatividad General en el vacío con una constante cosmológica que emerge como una constante de integración [107, 110]. A pesar de su elegancia, la teoría de Eddington no lograba incorporar la materia de una manera físicamente significativa [111, 112]. Posteriormente, Erwin Schrödinger generalizó el formalismo al permitir que la conexión afín fuese no simétrica, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \neq \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ [113, 114], con la esperanza de unificar la gravedad y el electromagnetismo, aunque esta identificación directa resultó ser inconsistente [115].

En la era moderna, esta línea de investigación ha sido continuada por autores como Kijowski, Poplawski [105, 116, 117], Azri [118] y Castillo-Felisola [9, 108], entre otros. Todos estos marcos comparten el objetivo de construir la dinámica gravitacional sin postular una métrica, lo que requiere un nuevo enfoque geométrico. Dentro de este panorama, el enfoque que esta tesis adopta es el modelo de *Gravedad Afín Polinomial*. Este marco se distingue por una serie de características teóricas ventajosas que lo posicionan como una alternativa robusta. Su principio fundacional es construir la acción más general posible a partir de todos los invariantes polinomiales formados por la conexión y sus derivadas, compatibles con la invarianza bajo difeomorfismos [108]. De esta construcción sistemática emanan sus principales bondades [9]:

- *Renormalizabilidad por contaje de potencias*: Todas sus constantes de acoplamiento son adimensionales, una propiedad altamente deseable desde la perspectiva de la gravedad cuántica y que la diferencia fundamentalmente de la Relatividad General [107].
- *Rigidez del modelo*: A diferencia de las teorías métricas, donde se pueden añadir infinitos términos de orden superior, el número de términos permitidos en la acción afín polinomial es finito, lo que limita la arbitrariedad y aumenta su poder predictivo [119].
- *Naturaleza de la constante cosmológica*: Similar a la teoría de Eddington, la constante cosmológica no es un parámetro que se introduce en la acción, sino que puede aparecer como una constante de integración en el espacio de soluciones.
- *Equivalencia con la Relatividad General*: Se ha demostrado que el conjunto de soluciones de vacío del modelo incluye todas las variedades de Einstein, lo que garantiza que es una genuina generalización de la Relatividad General [108].

Las ecuaciones de campo en el sector sin torsión de este modelo, en ciertos límites, conducen a la condición de que el tensor de Ricci sea un *tensor de Codazzi*, expresado como $\nabla_{[\lambda} R_{\mu]\nu} = 0$. Esta es una generalización de las ecuaciones de Einstein, y es crucial notar que el conjunto de soluciones de la Gravedad Afín Polinomial incluye todas las variedades de Einstein [108]. En particular, admite la condición de vacío Ricci-plano,

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.22}$$

. Este hecho es de suma importancia, pues sitúa al paradigma puramente afín en línea directa con los enfoques unificadores originales: no solo recupera las ecuaciones de Einstein en el vacío y es compatible con la acción de Eddington, sino que además comparte el mismo punto de partida que la formulación original de Kaluza-Klein, la cual, como se discutió, se basó en la anulación del tensor de Ricci pentadimensional y no en un principio de acción.

El paradigma puramente afín se completa, entonces, con el principio de *emergencia de la métrica*. Las ecuaciones de campo, obtenidas al variar la acción afín, establecen una relación funcional que, en el espacio de soluciones, puede definir algebraicamente un campo tensorial de rango dos. Si la dinámica de la conexión dicta que dicho campo es simétrico y no degenerado, este se identifica consistentemente como la métrica efectiva del espaciotiempo, $g_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ [8, 105, 108]. Es esta métrica emergente, a menudo construida a partir del tensor de Ricci [9], la que define la estructura causal y a la que se acoplan los campos de materia, reconciliando así el fundamento afín de la inercia con la necesidad de una estructura métrica para la física que experimentan los observadores.

CUADRO 2.1: *Comparación de Jerarquías Axiomáticas en Reducciones Dimensionales de tipo Kaluza-Klein.*

Enfoque	Objeto(s) Geométrico(s) Clave(s)	¿Métrica Preexistente en $\hat{\mathcal{M}}$?	Origen del Campo Electromagnético	Consecuencias Clave
Riemanniano (KK Clásico)	Métrica pseudo-Riemanniana \hat{g}_{MN}	Sí	Componentes mixtos $\hat{g}_{\mu 5}$ interpretados como A_μ	Emerge una dinámica Einstein-Maxwell junto a un campo escalar (dilatón). La conexión es siempre una cantidad derivada de la métrica.
Métrico-Afín / Einstein-Cartan	Métrica \hat{g}_{MN} y Conexión $\hat{\Gamma}$ independientes	Sí	Campo EM usual + torsión acoplada a espín (en EC)	La dinámica incluye torsión y no-metricidad como grados de libertad. En el modelo EC estándar, la torsión no se propaga en el vacío.
Teleparalelismo KK (f(T))	Tétrada \hat{e}_M^A y conexión de Weitzenböck	Sí (implícita en la tétrada)	Parte torsional asociada a la dirección compacta	La dinámica es equivalente a RG más una corrección tipo Brans-Dicke. La torsión está completamente determinada por la tétrada.
Teleparalelo Simétrico (f(Q))	Campo de No-metricidad \hat{Q} (implica métrica y conexión)	Sí	Descomposición de los campos que definen \hat{Q}	Es una subclase restringida de la Gravedad Métrico-Afín, forzada a tener curvatura y torsión nulas por definición.
Afín Puro (Tesis)	Conexión afín $\hat{\Gamma}_{MNP}$	No	No-integrabilidad de la distribución horizontal	Emerge una dinámica Einstein-Maxwell para campos puramente radiativos ($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$). La métrica es un objeto secundario y emergente.

2.4. Objetivos de la Tesis: Unificación Geométrica en un Marco Afín

Habiendo establecido la viabilidad y las motivaciones para explorar una descripción de la gravedad fundamentada en una estructura puramente afín, esta tesis se posiciona en la intersección de dos paradigmas históricos: la unificación geométrica de Kaluza-Klein y la primacía de la conexión sobre la métrica. El objetivo central de este trabajo es, por tanto, desarrollar por primera vez un formalismo de reducción dimensional de Kaluza-Klein aplicable a teorías donde la conexión afín es el único objeto geométrico fundamental. A continuación, se detallan la propuesta específica que articula esta síntesis y las preguntas de investigación que definen el alcance de este trabajo.

La Síntesis Propuesta: Kaluza-Klein en una Geometría Afín

El núcleo de esta tesis es la formulación sistemática de una teoría de Kaluza-Klein en un marco puramente afín, sin presuponer la existencia de una estructura métrica en el espacio de mayor dimensión, $\hat{\mathcal{M}}$. Esta propuesta invierte la jerarquía geométrica tradicional: en lugar de derivar la conexión a partir de una métrica postulada, se considera a la conexión afín como el campo primario del espaciotiempo.

Para materializar esta síntesis, el formalismo se basa enteramente en la geometría de los fibrados principales y el uso de la conexión de Ehresmann. Esta estructura permite descomponer de manera coherente los objetos geométricos —tensores, vectores y la propia conexión— en componentes definidos sobre el espacio base \mathcal{M} . La consecuencia conceptual de este enfoque es que la métrica deja de ser un axioma para convertirse en un posible objeto emergente, una estructura que surge dinámicamente a partir de la propia estructura afín.

Preguntas de Investigación y Alcance

Para llevar a cabo la síntesis propuesta, este trabajo abordará y dará respuesta a las siguientes preguntas de investigación fundamentales:

- ¿Cómo se puede formular un procedimiento sistemático de reducción dimensional para campos tensoriales en un espacio puramente afín, derivando un *ansatz* completo para la descomposición de la conexión?
- ¿Cuál es la interpretación geométrica del campo electromagnético en esta teoría sin métrica, y qué relación guarda su existencia con la no-integrabilidad de la distribución horizontal del fibrado?
- ¿Cuáles son las ecuaciones de campo efectivas que gobiernan la dinámica en el espacio-tiempo reducido, partiendo de soluciones de vacío en la dimensión superior?
- ¿Bajo qué condiciones físicas y geométricas —como la ausencia de torsión y normalizaciones adecuadas— la teoría afín reducida reproduce un sistema análogo a las ecuaciones de Einstein-Maxwell?

El alcance de esta tesis se centrará en el desarrollo del formalismo y el análisis de sus soluciones en el vacío. Se establecerá el *ansatz* de la conexión, se derivarán las ecuaciones de campo efectivas y se demostrará su correspondencia con las ecuaciones de Einstein-Maxwell para campos puramente radiativos. La aplicación de este formalismo a modelos específicos de gravedad polinomial afín, el acoplamiento con otras formas de materia y la cuantización de la teoría se proponen como líneas de investigación futuras.

Reinterpretación Geométrica de Kaluza-Klein desde la Estructura de Fibrado

Habiendo establecido en los capítulos anteriores la necesidad de un formalismo de reducción dimensional que no presuponga una estructura métrica preexistente, este capítulo desarrolla las herramientas geométricas precisas para abordar dicho desafío: la teoría de fibrados principales y la conexión de Ehresmann. Este marco matemático no solo ofrece una descripción rigurosa de espacios con dimensiones adicionales, sino que, crucialmente, permite descomponer la estructura geométrica local en componentes de base y fibra sin depender de una métrica. Comenzaremos por detallar los fundamentos de esta estructura, definiendo los conceptos de espacio total, base, fibra, acción de grupo y proyección. Posteriormente, introduciremos la conexión de Ehresmann como el elemento clave que formaliza la separación entre direcciones horizontales y verticales, estableciendo los operadores de proyección y levantamiento necesarios para relacionar objetos tensoriales entre el espacio total y el espacio base. Equipados con este formalismo, procederemos a aplicarlo directamente al contexto de la teoría de Kaluza-Klein. Demostraremos cómo la descomposición métrica estándar emerge como un caso particular dentro de este marco más general y, lo que es más importante, revelaremos la profunda conexión geométrica entre el campo electromagnético y la no-integrabilidad de la distribución horizontal. Esta reinterpretación geométrica, posibilitada por el lenguaje de fibrados, sienta las bases para la formulación puramente afín de la teoría que se desarrollará en capítulos posteriores.

3.1. El Formalismo de Fibrados: Un Marco Superior para la Reducción Afín

Habiendo establecido en los capítulos anteriores la necesidad de un formalismo de reducción dimensional que no presuponga una estructura métrica, en este capítulo se presentarán las herramientas geométricas que permiten abordar dicho problema. La vía natural es a través de la geometría de los fibrados principales y el uso de la conexión de Ehresmann [11, 12]. Esta estructura matemática posibilita una descomposición local del espacio total en componentes de base y fibra de manera consistente, sin la necesidad de una métrica.

Es importante señalar que, en este trabajo, distinguiremos entre dos nociones de conexión con roles conceptualmente distintos: la *conexión de Ehresmann*, que determina la estructura horizontal-vertical del fibrado, y la *conexión afín*, que gobierna el transporte paralelo y la dinámica geométrica. Aunque ambas aparecen en la formulación de Kaluza-Klein y en el

desarrollo afín posterior, su naturaleza y función son independientes.

En este marco, la conexión afín se convierte en el único dato fundamental, y se puede formular un esquema de reducción dimensional consistente basado puramente en sus propiedades. Este capítulo se dedicará, por tanto, a definir formalmente estas herramientas y a aplicarlas en la construcción de bases adaptadas y en la descomposición de los objetos geométricos relevantes.

Antes de construir la estructura del fibrado principal, es conveniente precisar los conceptos que le dan vida. El primero es el de un *grupo de Lie* G , que es una variedad diferenciable dotada a su vez de una estructura de grupo, con la condición de que las operaciones de grupo sean aplicaciones suaves [11]. El ejemplo paradigmático es el grupo $U(1)$, que geoméricamente corresponde a la circunferencia unidad (S^1).

El segundo concepto es la *acción de grupo* (a derecha). En este formalismo, la acción asocia a cada elemento $g \in G$ un difeomorfismo único $R_g : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$. Para que esta familia de transformaciones constituya una acción válida, debe ser compatible con la estructura algebraica del grupo. Dicha compatibilidad se garantiza mediante dos axiomas: primero, la aplicación asociada al elemento identidad es la propia aplicación identidad, $R_e = \text{id}$; segundo, la composición de transformaciones respeta el producto del grupo, cumpliendo la regla $R_{gh}(p) = R_h(R_g(p))$ para todo $p \in \widehat{\mathcal{M}}$ y $g, h \in G$.

Un ejemplo revelador es la acción del grupo de rotaciones $U(1)$ sobre una esfera S^2 . Cada elemento de $U(1)$ se asocia a un difeomorfismo que rota la esfera un ángulo fijo alrededor de un eje. Las *órbitas* de esta acción —los conjuntos de puntos generados al actuar con todo el grupo sobre un punto inicial— son los paralelos de la esfera. Si se excluyen los polos (puntos fijos), la esfera se descompone en una familia de fibras circulares, adquiriendo la estructura de un fibrado sobre un intervalo. Topológicamente, esta estructura es un cilindro, $S^1 \times I$, lo que permite visualizar cómo una dimensión “extra” (el círculo S^1) se acopla a cada punto de un espacio de dimensión inferior.

3.2. Fundamentos Geométricos del Fibrado Principal

En esta sección, se presentan los fundamentos geométricos que sustentan el modelo de reducción dimensional, basados en la teoría de fibrados principales y la conexión de Ehresmann. Se adopta una notación inspirada en la formulación de la teoría de Kaluza-Klein, destacando el papel crucial de las proyecciones en la estructura del fibrado, como se discute en [9].

En el modelo clásico de Kaluza-Klein [13, 120], el espacio-tiempo se describe como un fibrado principal, es decir, una cuádrupla $(\widehat{\mathcal{M}}, \mathcal{M}, G, \pi)$, donde:

- $\widehat{\mathcal{M}}$ es una variedad diferenciable llamada *espacio total*.
- \mathcal{M} es una variedad diferenciable llamada *base*.
- G es un grupo de Lie que actúa a la derecha sobre $\widehat{\mathcal{M}}$ mediante difeomorfismos $R_g : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ con $g \in G$.
- G es un grupo de Lie que actúa a la derecha sobre $\widehat{\mathcal{M}}$ mediante una familia de difeomorfismos $R_g : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$.

- $\pi : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ es un mapa suave, llamado proyector, que satisface:
 - $\pi(R_g(p)) = \pi(p)$ para todo $p \in \widehat{\mathcal{M}}$ y $g \in G$ (la acción preserva las fibras).
 - La acción es *libre*, es decir, si $R_g(p) = p$, entonces $g = e$.
 - La acción es *transitiva en las fibras*, es decir, si $\pi(p) = \pi(q)$, entonces existe $g \in G$ tal que $q = R_g(p)$.

Localmente, para cada abierto $U \subset \mathcal{M}$, se tiene que $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. La acción libre y transitiva asegura una correspondencia biunívoca entre los puntos de cada fibra y los elementos del grupo G . La proyección π induce una aplicación entre los espacios tangentes $T_p\widehat{\mathcal{M}}$ y $T_{\pi(p)}\mathcal{M}$, llamada la aplicación diferencial (o *pushforward* de π) y se denota por π_* .

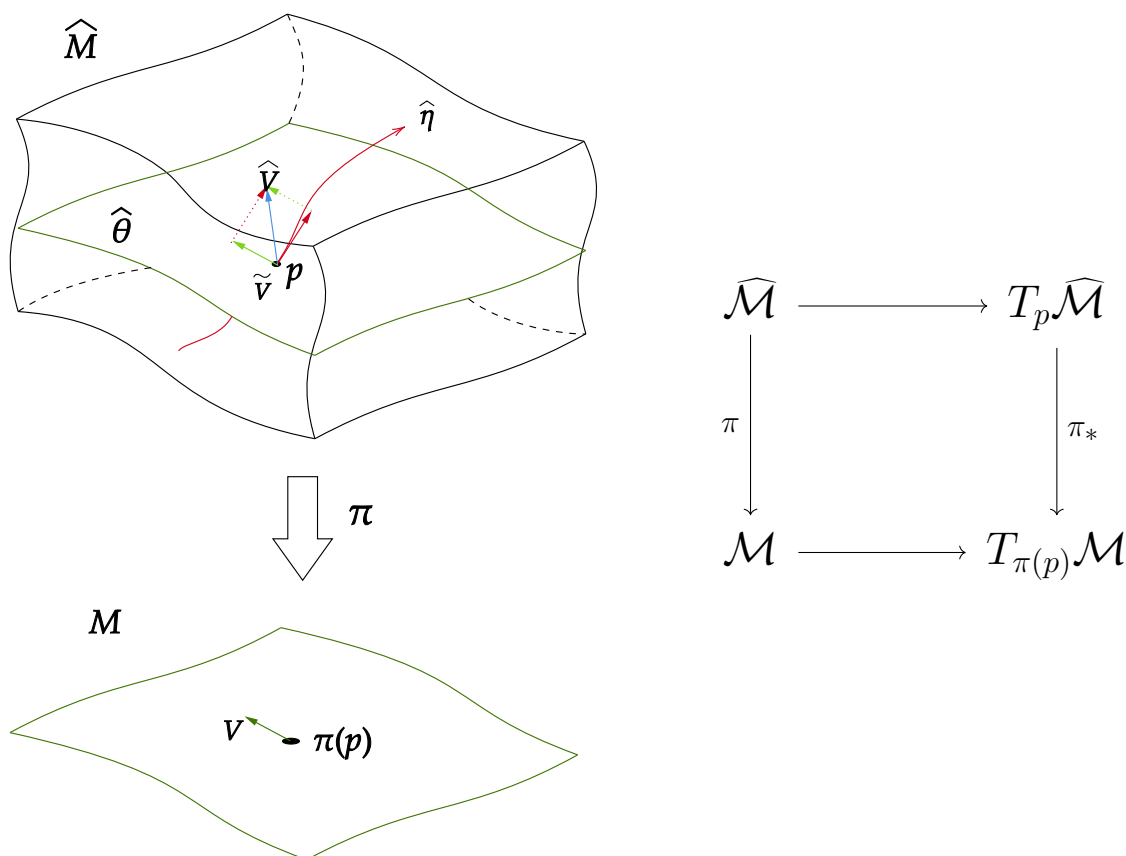


FIGURA 3.1: Diagrama conmutativo del fibrado. La figura ilustra localmente la estructura de un fibrado principal. El espacio total $\widehat{\mathcal{M}}$ se proyecta (π) sobre el espacio base \mathcal{M} . Un vector $\hat{v} \in T_p\widehat{\mathcal{M}}$ se descompone en una componente horizontal \tilde{v} y una vertical (tangente a la fibra, $\hat{\eta}$). Bajo la aplicación tangente π_* , tanto \hat{v} como su parte horizontal \tilde{v} se proyectan al mismo vector $v \in T_{\pi(p)}\mathcal{M}$.

La estructura del fibrado asegura que el diagrama en la Fig. 3.1 conmuta. Dado que la conmutatividad es válida punto a punto de manera continua, omitimos la referencia explícita a los puntos en los espacios tangentes.

Inspirados por el diagrama conmutativo en la Fig. 3.1, donde la proyección π actúa de $\widehat{\mathcal{M}}$ a \mathcal{M} , y siguiendo la convención general en geometría diferencial de usar el subíndice $*$ para denotar el *pushforward* [12, 13], así como la notación usual en Kaluza-Klein que distingue entre cantidades en el espacio total (con *sombrero*) y en el espacio base (sin *sombrero*), definimos el operador de **proyección hacia abajo** (\downarrow_*) como el *pushforward* de la proyección ($\downarrow_* = \pi_*$):

$$\downarrow_* (\widehat{v}) = v, \quad (3.1)$$

donde $\widehat{v} \in T\widehat{\mathcal{M}}$ y $v \in T\mathcal{M}$. Además, definimos la aplicación de **co-levantamiento** \uparrow^* : $T^*\mathcal{M} \rightarrow T^*\widehat{\mathcal{M}}$ tal que, para un covector $L \in T^*\mathcal{M}$, su levantamiento $\widetilde{L} \in T^*\widehat{\mathcal{M}}$ se define por la relación $\widetilde{L}(\widehat{v}) = L(\downarrow_* (\widehat{v}))$, como sigue:

$$\uparrow^* (L) = \widetilde{L}. \quad (3.2)$$

3.3. Conexión de Ehresmann

Para llevar a cabo una reducción dimensional, es útil identificar de manera local una estructura que permita distinguir direcciones análogas a las del espacio base dentro del espacio total. Debido a la naturaleza local de la representación, aunque en el fibrado no existe, en general, una separación intrínseca entre «base» y «fibra», es posible asociar de forma análoga al espacio base un subespacio del espacio tangente total. Esto permite descomponer el espacio tangente en dos subespacios complementarios: uno vertical y otro horizontal, como se puede observar en la Fig. 3.1. Esta idea fue formalizada por Ehresmann mediante la introducción de una *conexión de Ehresmann*, definida como una distribución horizontal $H_p\widehat{\mathcal{M}} \subset T_p\widehat{\mathcal{M}}$ que satisface las siguientes propiedades [12, 13]:

- $T_p\widehat{\mathcal{M}} = H_p\widehat{\mathcal{M}} \oplus V_p\widehat{\mathcal{M}}$, donde $V_p\widehat{\mathcal{M}} = \ker(\downarrow_*)$ es el subespacio vertical y $H_p\widehat{\mathcal{M}}$ se denomina *subespacio horizontal*.
- La distribución horizontal es invariante bajo la acción de G , es decir, para todo $p \in \widehat{\mathcal{M}}$ y $g \in G$, se tiene:

$$(R_g)_*(H_p\widehat{\mathcal{M}}) = H_{R_g(p)}\widehat{\mathcal{M}}.$$

Esta descomposición local del espacio tangente es análoga a las foliaciones temporales o espaciales en geometría Riemanniana. Dado que no se exige una estructura adicional sobre el fibrado, esta descomposición no siempre se extiende globalmente, ni siquiera a un entorno del punto. El teorema de Frobenius establece que la integrabilidad de esta distribución y, por lo tanto, la existencia de la subvariedad correspondiente, no está garantizada en general [17].

Alternativamente, la conexión puede definirse a través de una **forma de conexión**, que es una 1-forma en $\widehat{\mathcal{M}}$ con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Formalmente, la forma de conexión $\widehat{\theta}$ es un campo tensorial, $\widehat{\theta} \in \Omega^1(\widehat{\mathcal{M}}, \mathfrak{g})$. Esto significa que en cada punto $p \in \widehat{\mathcal{M}}$, su valor $\widehat{\theta}_p$ es una aplicación lineal que mapea vectores del espacio tangente a elementos del álgebra de Lie:

$$\widehat{\theta}_p : T_p\widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathfrak{g}. \quad (3.3)$$

En el contexto de Kaluza-Klein, la conexión de Ehresmann permite separar localmente cada «hoja» del foliado, identificando así el espacio base dentro del espacio total. En el modelo

clásico, la fibra es isomorfa a $U(1)$, por lo que $\dim(\mathcal{M}) = \dim(\widehat{\mathcal{M}}) - 1$. En nuestro caso, al ser G uniparamétrico, su álgebra de Lie es isomorfa a los números reales, $\mathfrak{g} \cong_{\text{loc}} \mathbb{R}$. En consecuencia, la forma de conexión $\hat{\theta}$ se puede tratar efectivamente como un campo de covectores reales en $\widehat{\mathcal{M}}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $\hat{\theta}(X) = 0$ para todo vector X horizontal. En esta aproximación, el espacio horizontal es el núcleo de $\hat{\theta}$.
- $\hat{\theta}(\hat{\eta}) = 1$, donde $\hat{\eta}$ es el campo vectorial fundamental asociado a \mathfrak{g} . Esto se conoce como la primera condición de normalización.
- La 1-forma es G -equivariante. En el caso en que G es uniparamétrico, esta condición se expresa como:

$$\mathcal{L}_{\hat{\eta}}\hat{\theta} = 0,$$

lo que indica que $\hat{\eta}$ es independiente de la dirección de la fibra.

Conviene enfatizar que la conexión de Ehresmann introducida en este contexto no debe confundirse con la conexión afín utilizada en geometría diferencial para definir el transporte paralelo. Ambas estructuras cumplen funciones conceptualmente distintas dentro del formalismo. La conexión afín, que denotaremos por $\widehat{\nabla}$, actúa sobre campos tensoriales en el espacio total $\widehat{\mathcal{M}}$ y permite definir la derivada covariante y el transporte de vectores a lo largo de curvas. En cambio, la conexión de Ehresmann, representada por la 1-forma $\hat{\theta}$, no opera sobre tensores, sino que determina la descomposición local del espacio tangente en subespacios horizontales y verticales, especificando cómo el espacio total se proyecta sobre la base del fibrado. Su curvatura, asociada a la distribución horizontal $H\widehat{\mathcal{M}}$, no describe torsión ni transporte, sino la *no-integrabilidad* de dicha distribución, es decir, la imposibilidad de construir subvariedades horizontales que la contengan completamente.

Estas dos nociones —conexión afín y conexión de Ehresmann— son independientes, aunque en el contexto de Kaluza–Klein y en el desarrollo afín posterior aparecen de manera complementaria: la conexión de Ehresmann fija la estructura geométrica del fibrado, mientras que la conexión afín introduce la dinámica del transporte compatible con esa estructura.

Un campo vectorial $\tilde{v} \in C^\infty(T\widehat{\mathcal{M}})$ es un *levantamiento horizontal* de un campo $v \in C^\infty(T\mathcal{M})$ si se satisface que:

$$\downarrow(\tilde{v}) = v \quad \text{y} \quad \hat{\theta}(\tilde{v}) = 0. \quad (3.4)$$

Denotamos el operador que asigna al vector $v \in T\mathcal{M}$ su levantamiento $\tilde{v} \in C^\infty(T\widehat{\mathcal{M}})$ como \uparrow_* , es decir:

$$\uparrow_*(v) = \tilde{v}. \quad (3.5)$$

En la notación de Kaluza–Klein, los objetos con un «sombrero» (como \hat{v}) se refieren a entidades en el espacio de mayor dimensión, mientras que los objetos sin sombrero (como v) viven en el espacio de menor dimensión. Introducimos la notación con «tilde» (como \tilde{v}) para denotar objetos del espacio de menor dimensión, pero dentro del espacio de mayor dimensión. El operador \uparrow_* establece un isomorfismo punto a punto entre el espacio tangente de la base y el subespacio horizontal del espacio total:

$$T_{\pi(p)}\mathcal{M} \cong H_p\widehat{\mathcal{M}} \subset T_p\widehat{\mathcal{M}}.$$

Este isomorfismo, inducido por las aplicaciones de «subida» y «bajada», permite relacionar localmente el espacio base con el espacio total. Además, el levantamiento horizontal permite asignar a cada covector $\hat{L} \in T^*\hat{\mathcal{M}}$ un covector $L \in T^*\mathcal{M}$ tal que $L(v) = \hat{L}(\uparrow_*(v))$. Esta relación define un operador de proyección en el espacio cotangente, que llamaremos *co-proyección hacia abajo*:

$$\downarrow^*(\hat{L}) = L. \quad (3.6)$$

La acción de los operadores \downarrow_* y \downarrow^* se puede resumir en un único operador \downarrow que actúa sobre tensores de cualquier tipo y, notacionalmente, «quita el sombrero».

Una vez establecida la conexión de Ehresmann, es posible definir con rigor los operadores que relacionan los objetos tensoriales entre el espacio total y el espacio base. Un campo vectorial $\tilde{v} \in C^\infty(T\hat{\mathcal{M}})$ es un **levantamiento horizontal** de un campo $v \in C^\infty(T\mathcal{M})$ si satisface las condiciones $\downarrow_*(\tilde{v}) = v$ y $\hat{\theta}(\tilde{v}) = 0$. Esto nos permite definir formalmente el operador de levantamiento \uparrow_* mediante la asignación $\uparrow_*(v) = \tilde{v}$.

Estos operadores fundamentales se generalizan para actuar sobre campos tensoriales de tipo (k, l) arbitrarios. El operador de proyección \downarrow mapea un campo tensorial del espacio total a uno en el espacio base:

$$\downarrow: C^\infty(\hat{\mathcal{M}}; T_l^k \hat{\mathcal{M}}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}; T_l^k \mathcal{M}). \quad (3.7)$$

La acción del tensor resultante $T_p = (\downarrow \hat{T})_p$ se define a través del levantamiento de sus argumentos, quitar hat:

$$T_p(\omega^1, \dots; v_1, \dots) = \hat{T}_{\hat{p}}(\uparrow \omega^1, \dots; \uparrow v_1, \dots), \quad \forall \hat{p} \in \pi^{-1}(p). \quad (3.8)$$

La acción de los operadores \uparrow_* y \uparrow^* se puede resumir en un único operador \uparrow que actúa sobre tensores de cualquier tipo y, notacionalmente, «coloca tilde».

$$\uparrow: C^\infty(\mathcal{M}; T_l^k \mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\hat{\mathcal{M}}; T_l^k \hat{\mathcal{M}}), \quad (3.9)$$

definiendo la acción de $\tilde{T}_{\hat{p}} = (\uparrow T)_{\hat{p}}$ a través de la proyección de sus argumentos:

$$\tilde{T}_{\hat{p}}(\hat{\omega}^1, \dots; \hat{v}_1, \dots) := T_{\pi(\hat{p})}(\downarrow \hat{\omega}^1, \dots; \downarrow \hat{v}_1, \dots). \quad (3.10)$$

A partir de estos, se define el **operador de proyección horizontal** P como la composición:

$$P = \uparrow \circ \downarrow. \quad (3.11)$$

Por simplicidad, nos referiremos a la acción de P sobre un tensor \hat{T} como la operación de «poner tilde», es decir, $\tilde{T} = P(\hat{T})$. Este formalismo nos permite distinguir tres tipos de objetos, los cuales se resumen en la Tabla 3.1.

En este contexto, distinguimos tres tipos de objetos: objetos con sombrero (inherentes al espacio total $\hat{\mathcal{M}}$), objetos sin sombrero (inherentes al espacio reducido \mathcal{M}) y objetos con tilde (levantamientos horizontales en $\hat{\mathcal{M}}$ de objetos en \mathcal{M}). Estas distinciones son locales.

Tipo de Objeto	Notación	Descripción
Espacio Total	\hat{T}	Tensor en $\hat{\mathcal{M}}$ sin ninguna suposición .
Espacio Reducido	T	Tensor en \mathcal{M} analogo a \hat{T} .
Levantamiento Horizontal	\tilde{T}	Tensor en $H \subset \hat{\mathcal{M}}$ análogo a T

 CUADRO 3.1: *Caption*

Por ejemplo, para un tensor covariante de tipo $\binom{0}{2}$, como un campo tensorial métrico g , se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{P} & \\
 \hat{g} : T\hat{\mathcal{M}} \times T\hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R} & & \tilde{g} = \uparrow g : T\hat{\mathcal{M}} \times T\hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R} \\
 (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) & & (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \tilde{g}(\hat{x}, \hat{y}) = g(x, y) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 g = \downarrow \hat{g} : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} & & \\
 (x, y) \mapsto g(x, y) = \hat{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) & &
 \end{array} \tag{3.12}$$

3.4. Descomposición Dimensional y Bases Adaptadas

Desde la perspectiva de un observador restringido a D dimensiones, los tensores \hat{T} y \tilde{T} son indistinguibles, ya que ambos se proyectan al mismo objeto en el espacio base:

$$T = \downarrow (\hat{T}) = \downarrow (\tilde{T}). \tag{3.13}$$

Sin embargo, los tensores \hat{T} y \tilde{T} no son necesariamente iguales en $\hat{\mathcal{M}}$, pues su diferencia yace en el núcleo del proyector, $\hat{T} - \tilde{T} \in \ker(\downarrow)$. Para retener toda la información geométrica durante la reducción, es necesario descomponer cada objeto del espacio total en un conjunto de campos definidos en el espacio base.

Para un campo vectorial $\hat{v} \in T\hat{\mathcal{M}}$, esta descomposición es inmediata:

$$\hat{v} = \tilde{v} + \hat{\theta}(\hat{v})\hat{\eta}. \tag{3.14}$$

Así, la información de \hat{v} se codifica de forma única en el par de objetos del espacio base: el vector proyectado $v = \downarrow (\hat{v})$ y el campo escalar $\hat{\theta}(\hat{v})$. A continuación, se desarrolla el procedimiento análogo para los covectores, aplicando rigurosamente las definiciones de los operadores ya presentados.

El análisis para los covectores se fundamenta en las relaciones que los operadores de proyección y levantamiento, introducidos en la Section 3.2, imponen entre los objetos \hat{L} (total), L (base) y \tilde{L} (levantado).

Primero, la definición del operador de co-proyección \downarrow^* establece cómo se obtiene el covector base L a partir de \widehat{L} :

$$L(v) = \widehat{L}(\tilde{v}), \quad (3.15)$$

donde $\tilde{v} = \uparrow_*(v)$. De forma independiente, el operador de co-levantamiento \uparrow^* define al covector levantado \widetilde{L} como el objeto en $T^*\widehat{\mathcal{M}}$ que replica la acción de L sobre el subespacio horizontal:

$$\widetilde{L}(\tilde{v}) = L(v). \quad (3.16)$$

La comparación directa de las Ecuaciones (3.15) y (3.16) conduce a una identidad fundamental:

$$\widehat{L}(\tilde{v}) = \widetilde{L}(\tilde{v}). \quad (3.17)$$

Esta igualdad demuestra que los covectores \widehat{L} y \widetilde{L} son funcionalmente idénticos cuando actúan sobre vectores puramente horizontales. Su diferencia, por tanto, debe residir en su comportamiento ante componentes verticales.

De hecho, se puede demostrar que \widetilde{L} es un covector intrínsecamente horizontal. Por definición, su acción sobre un vector arbitrario \widehat{v} es $\widetilde{L}(\widehat{v}) = L(\downarrow_*(\widehat{v})) = L(v)$. Al combinar esto con la Ecuación (3.16), se obtiene la importante propiedad:

$$\widetilde{L}(\widehat{v}) = \widetilde{L}(\tilde{v}). \quad (3.18)$$

Esto significa que el resultado de la acción de \widetilde{L} sobre cualquier vector depende únicamente de su parte horizontal. Como consecuencia directa, \widetilde{L} se anula sobre cualquier vector puramente vertical: $\widetilde{L}(\widehat{\eta}) = 0$, ya que la parte horizontal de $\widehat{\eta}$ es nula.

Con estas propiedades establecidas, derivamos la fórmula de descomposición. El procedimiento comienza al considerar la acción de \widehat{L} sobre un vector genérico \widehat{v} , cuya descomposición se da en la Ecuación (3.14). Aplicando la linealidad del covector, se obtiene:

$$\begin{aligned} \widehat{L}(\widehat{v}) &= \widehat{L}(\tilde{v} + \widehat{\theta}(\widehat{v})\widehat{\eta}) \\ &= \widehat{L}(\tilde{v}) + \widehat{\theta}(\widehat{v})\widehat{L}(\widehat{\eta}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando la identidad de la Ecuación (3.17) en el primer término, y la propiedad de que $\widetilde{L}(\tilde{v}) = \widetilde{L}(\widehat{v})$, podemos reescribir la expresión como:

$$\widehat{L}(\widehat{v}) = \widetilde{L}(\widehat{v}) + \widehat{L}(\widehat{\eta})\widehat{\theta}(\widehat{v}). \quad (3.20)$$

El lado derecho puede interpretarse como la acción de una suma de dos covectores sobre \widehat{v} , es decir, $(\widetilde{L} + \widehat{L}(\widehat{\eta})\widehat{\theta})(\widehat{v})$. Dado que esta igualdad es válida para cualquier \widehat{v} , se concluye que los operadores son idénticos. Esto nos lleva a la fórmula final de descomposición para un covector arbitrario:

$$\widehat{L} = \widetilde{L} + \widehat{L}(\widehat{\eta})\widehat{\theta}. \quad (3.21)$$

Esta expresión es fundamental, pues muestra explícitamente cómo cualquier covector \widehat{L} se separa en su *parte horizontal* \widetilde{L} y su *parte vertical*, la cual es proporcional a la forma de conexión $\widehat{\theta}$ con el escalar $\widehat{L}(\widehat{\eta})$ como coeficiente. De manera análoga a la descomposición de vectores, esta derivación demuestra que la información del covector \widehat{L} se preserva completamente en el espacio base en el par análogo: $(L, \widehat{L}(\widehat{\eta}))$.

El principio de descomponer un objeto del espacio total en un conjunto de tensores de rango inferior definidos en el espacio base es la estrategia computacional que guiará el resto de este trabajo. Será la herramienta clave para abordar el objeto más complejo y central de esta tesis: la conexión afín $\hat{\Gamma}$. En el Chapter 4, aplicaremos esta misma lógica para derivar el *ansatz* de la conexión, lo cual nos permitirá, a su vez, calcular la curvatura del espacio reducido y derivar las ecuaciones de campo efectivas.

Este principio se extiende de forma directa: un tensor de rango n en el espacio total se descompondrá en un conjunto de tensores en el espacio base de todos los rangos posibles de 0 a n . La siguiente tabla resume esta descomposición sistemática.

Rango del tensor original	Componentes en el espacio reducido	Polinomio $(D+1)^n$
$n = 1$	1 1-tensor + 1 0-tensor	$1D^1 + 1D^0$
$n = 2$	1 2-tensor + 2 1-tensores + 1 0-tensor	$1D^2 + 2D^1 + 1D^0$
$n = 3$	1 3-tensor + 3 2-tensores + 3 1-tensores + 1 0-tensor	$1D^3 + 3D^2 + 3D^1 + 1D^0$

CUADRO 3.2: Descomposición de tensores al reducir de $\hat{D} = D+1$ a D dimensiones. La notación en la columna Polinomio resalta la correspondencia entre los coeficientes (número de tensores de un tipo) y las potencias (rango de dichos tensores en el espacio base de dimensión D).

Para poder aplicar estas descomposiciones en la práctica, es necesario establecer un formalismo de componentes. Sea $\hat{\mathcal{B}}_p = \{\hat{e}_\mu(p)\}$ una sección suave del fibrado de bases $F(T\hat{\mathcal{M}})$. Siempre es posible reordenar esta base de modo que los primeros D vectores tengan una proyección no nula, induciendo así una base única $\mathcal{B} = \{e_i\}$ en $T\mathcal{M}$ dada por $e_i = \downarrow(\hat{e}_i)$ para $i = 0, \dots, d = D - 1$.

A partir de la base \mathcal{B} , se construye una **base adaptada** a la estructura del fibrado, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\hat{E}_\mu\}$. Esta se define combinando el levantamiento horizontal de la base e_i con el campo vectorial fundamental $\hat{\eta}$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\hat{E}_0, \dots, \hat{E}_D\} := \{\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_d, \hat{\eta}\},$$

y su respectiva base dual es $\tilde{\mathcal{B}}^* = \{\hat{E}^\mu\}$. En esta base, un vector \hat{v} se escribe como $\hat{v} = \tilde{v}^i \tilde{e}_i + \tilde{v}^D \hat{\eta}$, donde $\tilde{v}^D = \hat{\theta}(\hat{v})$ y las componentes horizontales coinciden con las del vector proyectado, $\tilde{v}^i = v^i$.

Derivación de la Transformación de Bases Duales

La relación entre la base arbitraria $\hat{\mathcal{B}}$ y la adaptada $\tilde{\mathcal{B}}$ constituye un cambio de base. Para los vectores base, esta relación se escribe como:

$$\hat{e}_i = \hat{E}_i + \hat{\theta}_i \hat{E}_D \quad (3.22)$$

$$\hat{e}_D = \tilde{B}^j \hat{E}_j + \phi \hat{E}_D, \quad (3.23)$$

donde $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}(\hat{e}_i)$, \tilde{B}^j son las componentes horizontales de \hat{e}_D , y $\phi = \hat{\theta}(\hat{e}_D)$. A continuación, derivamos explícitamente la transformación para las bases duales. Buscamos los coeficientes \hat{Q}_μ^ρ de la transformación $\hat{E}^\rho = \hat{Q}_\mu^\rho \hat{e}^\mu$. Para ello, utilizamos la condición de dualidad $\hat{E}^\rho(\hat{E}_\nu) = \delta_\nu^\rho$ y la aplicamos a los vectores de la base $\{\hat{e}_\nu\}$.

La acción de \hat{E}^ρ sobre \hat{e}_ν nos da los coeficientes buscados:

$$\hat{E}^\rho(\hat{e}_\nu) = (\hat{Q}_\mu^\rho \hat{e}^\mu)(\hat{e}_\nu) = \hat{Q}_\mu^\rho \delta_\nu^\mu = \hat{Q}_\nu^\rho.$$

Calculamos esta misma acción usando la descomposición de \hat{e}_ν .

Caso 1: Componentes Horizontales ($\rho = k$). Para $\rho = k \in \{0, \dots, d\}$, la 1-forma \hat{E}^k se anula sobre el vector vertical $\hat{E}_D = \hat{\eta}$.

- Actuando sobre \hat{e}_j (con $j \in \{0, \dots, d\}$):

$$\hat{Q}_j^k = \hat{E}^k(\hat{e}_j) = \hat{E}^k(\hat{E}_j + \hat{\theta}_j \hat{E}_D) = \hat{E}^k(\hat{E}_j) + \hat{\theta}_j \hat{E}^k(\hat{E}_D) = \delta_j^k + 0 = \delta_j^k.$$

- Actuando sobre \hat{e}_D :

$$\hat{Q}_D^k = \hat{E}^k(\hat{e}_D) = \hat{E}^k(\tilde{B}^j \hat{E}_j + \phi \hat{E}_D) = \tilde{B}^j \hat{E}^k(\hat{E}_j) + \phi \hat{E}^k(\hat{E}_D) = \tilde{B}^j \delta_j^k + 0 = \tilde{B}^k.$$

Con estos coeficientes, la 1-forma \hat{E}^k es:

$$\hat{E}^k = \hat{Q}_j^k \hat{e}^j + \hat{Q}_D^k \hat{e}^D = \delta_j^k \hat{e}^j + \tilde{B}^k \hat{e}^D = \hat{e}^k + \tilde{B}^k \hat{e}^D.$$

Caso 2: Componente Vertical ($\rho = D$). La 1-forma \hat{E}^D es, por definición, la forma de conexión $\hat{\theta}$.

- Actuando sobre \hat{e}_j (con $j \in \{0, \dots, d\}$):

$$\hat{Q}_j^D = \hat{E}^D(\hat{e}_j) = \hat{\theta}(\hat{e}_j) = \hat{\theta}_j.$$

- Actuando sobre \hat{e}_D :

$$\hat{Q}_D^D = \hat{E}^D(\hat{e}_D) = \hat{\theta}(\hat{e}_D) = \phi.$$

Así, la 1-forma \hat{E}^D se reconstruye como:

$$\hat{E}^D = \hat{Q}_j^D \hat{e}^j + \hat{Q}_D^D \hat{e}^D = \hat{\theta}_j \hat{e}^j + \phi \hat{e}^D.$$

Resumen de las Transformaciones de Base

La relación completa entre los campos de base de $\hat{\mathcal{B}}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$, y sus duales $\hat{\mathcal{B}}^*$ y $\tilde{\mathcal{B}}^*$ está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= \hat{E}_i + \hat{\theta}_i \hat{E}_D, & \hat{e}_D &= \tilde{B}^i \hat{E}_i + \phi \hat{E}_D, \\ \hat{E}^k &= \hat{e}^k + \tilde{B}^k \hat{e}^D, & \hat{E}^D &= \hat{\theta}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Este sistema de ecuaciones es un resultado central. Demuestra cómo la estructura del fibrado se manifiesta como una transformación de base puramente algebraica, sin depender de una métrica. Estas relaciones serán la herramienta fundamental para el siguiente capítulo.

Una vez establecido el formalismo general de los fibrados principales y la conexión de Ehresmann, junto con las herramientas para descomponer objetos tensoriales y definir bases adaptadas independientemente de una métrica, estamos en posición de aplicar esta maquinaria geométrica para reinterpretar la teoría de Kaluza-Klein. El objetivo es ir más allá de la formulación métrica tradicional y explorar cómo emergen los campos físicos, en particular el electromagnetismo, directamente de la estructura del fibrado. En las siguientes secciones, analizaremos primero cómo se recupera la descomposición métrica usual como un caso particular dentro de este marco, para luego centrarnos en la identificación geométrica fundamental del campo electromagnético con la no-integrabilidad de la distribución horizontal, una piedra angular de la visión afín de la unificación. El objetivo no es simplemente reproducir un resultado clásico, sino reinterpretarlo desde una perspectiva que nos permita discernir qué elementos de la teoría son verdaderamente fundamentales y cuáles dependen de la estructura métrica preestablecida.

Este análisis constituye un puente conceptual hacia la generalización puramente afín en el Chapter 4. Al aplicar nuestro formalismo al caso métrico, demostraremos cómo emerge una definición del campo electromagnético de naturaleza puramente geométrica, cuya existencia está ligada a la estructura del fibrado y no a la métrica misma. Este resultado es la clave que nos permitirá, en el siguiente capítulo, prescindir por completo de la métrica como axioma y reconstruir la teoría sobre una base afín.

Comenzaremos por analizar la descomposición del tensor métrico para identificar el origen del potencial vectorial. Posteriormente, demostraremos que la presencia de un campo electromagnético no trivial está intrínsecamente ligada a la no-integrabilidad de la distribución horizontal, sentando así las bases conceptuales para el desarrollo principal de esta tesis.

3.5. Descomposición de la Métrica

En esta sección, se reproduce la descomposición métrica estándar de Kaluza-Klein con el propósito de reinterpretarla a través del formalismo de fibrados. Antes de abandonar por completo la estructura métrica, la utilizaremos como un andamiaje para identificar cómo emerge el potencial electromagnético. Demostraremos que, aunque en el enfoque canónico la métrica es el punto de partida, es posible extraer una definición del campo electromagnético que resulta ser puramente geométrica. Este resultado será fundamental para justificar su preservación en el formalismo afín que se desarrollará posteriormente.

Consideremos, por tanto, que el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ está dotado de un campo tensorial métrico \hat{g} . De acuerdo con la estrategia de descomposición presentada en la Table 3.2, este tensor de rango dos en $\hat{\mathcal{M}}$ se descompone en un conjunto de campos definidos sobre el espacio base \mathcal{M} . Aplicando las proyecciones inducidas por la estructura del fibrado, obtenemos:

- Un tensor de rango dos: la *métrica inducida* en el espacio base, $g = \downarrow \hat{g}$.
- Dos covectores, definidos por $\hat{\alpha}_1(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x}, \hat{\eta})$ y $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{\eta}, \hat{x})$. Dada la simetría del tensor métrico, ambos son idénticos: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}$.

- Un campo escalar, definido por el módulo del campo fundamental: $\hat{\phi}^2 = \hat{g}(\hat{\eta}, \hat{\eta})$.

Para proceder con la reconstrucción del *ansatz* de Kaluza–Klein, se introduce una suposición física clave: se postula que el subespacio vertical $V\hat{\mathcal{M}}$ es ortogonal al subespacio horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$ en cada punto.

En el enfoque habitual, la ortogonalidad entre los subespacios vertical y horizontal se impone sobre una métrica previamente dada. En cambio, desde la perspectiva del fibrado, la jerarquía se invierte: es la estructura del fibrado la que restringe las métricas admisibles, exigiendo que la métrica sea compatible con la descomposición horizontal–vertical definida por la conexión. De este modo, la condición $\hat{g}(\tilde{x}, \hat{\eta}) = 0$ no debe entenderse como una suposición sobre la conexión, sino como una *adaptación de la métrica* a la geometría del fibrado. Bajo esta reinterpretación, la relación $\hat{\alpha} = \hat{\phi}^2 \hat{\theta}$ expresa cómo la métrica se ajusta a la estructura de conexión preexistente, en lugar de determinarla.

Con esta condición de compatibilidad, podemos descomponer la acción de la métrica \hat{g} sobre dos vectores arbitrarios \hat{x} e \hat{y} utilizando su descomposición horizontal–vertical (Ecuación 3.14):

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{g}(\tilde{x} + \hat{\theta}(\hat{x})\hat{\eta}, \tilde{y} + \hat{\theta}(\hat{y})\hat{\eta}) \\ &= \hat{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \hat{g}(\tilde{x}, \hat{\theta}(\hat{y})\hat{\eta}) + \hat{g}(\hat{\theta}(\hat{x})\hat{\eta}, \tilde{y}) + \hat{g}(\hat{\theta}(\hat{x})\hat{\eta}, \hat{\theta}(\hat{y})\hat{\eta}) \\ &= \hat{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \hat{\theta}(\hat{x})\hat{\theta}(\hat{y})\hat{g}(\hat{\eta}, \hat{\eta}) \\ &= \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \hat{\theta}(\hat{x})\hat{\theta}(\hat{y})\hat{\phi}^2 \end{aligned}$$

En notación tensorial, esta descomposición se escribe de forma compacta como:

$$\hat{g} = \tilde{g} + \hat{\phi}^2(\hat{\theta} \otimes \hat{\theta}) \quad (3.25)$$

Finalmente, al expresar la métrica en una base $\mathcal{B} = \{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_D = \hat{\eta}\}$, se recupera la descomposición en bloques explícita:

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{g}_{ij} & \hat{g}_{iD} \\ \hline \hat{g}_{Dj} & \hat{g}_{DD} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{g}_{ij} + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \hat{\phi}^2 & \hat{\theta}_i \hat{\phi}^2 \\ \hline \hat{\theta}_j \hat{\phi}^2 & \hat{\phi}^2 \end{array} \right) \quad (3.26)$$

Este resultado demuestra que el formalismo de fibrados reproduce de manera natural la estructura métrica postulada en la teoría original. La relación $\hat{\alpha} = \hat{\phi}^2 \hat{\theta}$ revela que, aunque la forma de conexión $\hat{\theta}$ es conceptualmente independiente, en una teoría métrica queda fijada por la propia métrica y la elección del campo $\hat{\eta}$ al suponer la ortogonalidad del subespacio horizontal y la fibra.

Para simplificar los cálculos posteriores y facilitar la comparación con la literatura estándar, adoptaremos una elección de base y normalización particular. En la Section 3.4, se mostró que la relación entre una base arbitraria $\{\hat{e}_\mu\}$ y una adaptada $\{\hat{E}_\mu\}$ depende de los coeficientes \tilde{B}^i y ϕ . A partir de ahora, trabajaremos en un marco donde la base ha sido elegida de tal manera que:

$$\tilde{B}^i = 0 \quad \text{y} \quad \phi = 1. \quad (3.27)$$

Esta elección, que corresponde a alinear el último vector de la base no adaptada con el campo fundamental, $\hat{e}_D = \hat{\eta}$, constituye una condición de fijación de “gauge” que simplifica enormemente el álgebra sin pérdida de generalidad en los resultados físicos. Como veremos a continuación, es precisamente la flexibilidad en la elección de la base lo que dará lugar a la simetría de gauge del electromagnetismo.

3.6. Campo Electromagnético como Objeto Geométrico

En la descomposición métrica se identificó que las componentes mixtas \hat{g}_{iD} desempeñan el papel del potencial electromagnético. Sin embargo, esa lectura depende de la presencia de una métrica. El objetivo de esta sección es releer dicho resultado desde una perspectiva puramente geométrica: mostrar que el potencial y su regla de transformación emergen de la estructura del fibrado y de la base adaptada, sin recurrir a una métrica.

En el contexto de Kaluza-Klein, el *potencial vectorial* en el espacio base se define a partir de las componentes de la forma de conexión:

$$A = \hat{\theta}_i e^i \quad (3.28)$$

cuyo levantamiento horizontal es $\tilde{A} = \hat{\theta}_i \tilde{e}^i$. Como se derivó en la Equation (3.24), la base dual adaptada satisface la relación $\hat{E}^D = \hat{\theta}_i \hat{e}^i + \hat{e}^D$, lo que nos permite introducir la siguiente definición geométrica:

$$\tilde{A} = \hat{E}^D - \hat{e}^D. \quad (3.29)$$

Esta identidad expresa el levantamiento del potencial como la diferencia entre la 1-forma vertical intrínseca al fibrado (\hat{E}^D) y la 1-forma vertical de la base coordenada (\hat{e}^D). En componentes, $\tilde{A}_i = \hat{\theta}_i = A_i$ y $\tilde{A}_D = 0$, por lo que \tilde{A} es un objeto puramente horizontal.

Es importante notar que mientras las componentes espaciales coinciden, $\tilde{A}_i = \hat{\theta}_i = A_i$, la componente vertical es nula, $\tilde{A}_D = 0$, en contraste con $\hat{\theta}_D = 1$. Esta definición interpreta el campo electromagnético como la diferencia entre la estructura vertical intrínseca del fibrado y la base coordenada de un observador.

Un punto clave de esta sección es que la *transformación de gauge* se deduce al exigir que un cambio de coordenadas en el espacio total $\tilde{\mathcal{M}}$ preserve la forma de la base adaptada. Supongamos que la variedad tiene una carta local x^μ con base coordenada $\hat{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$. Si cambiamos a coordenadas $x'^\mu(x^i, x^D)$ con base $\hat{e}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \partial'_\mu$, el cambio de base está dado por la regla de la cadena:

$$\hat{e}_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \hat{e}'_\nu. \quad (3.30)$$

Para el caso $\mu = D$, la única manera de mantener (3.27) (esto es, $\hat{e}_D = \hat{e}'_D = \hat{\eta}$) es exigir

$$\frac{\partial x'^D}{\partial x^D} = 1, \quad \frac{\partial x'^j}{\partial x^D} = 0,$$

lo que, al integrar, nos da el cambio de coordenadas adaptado más general:

$$x'^j = x'^j(x^i), \quad x'^D = x^D + \lambda(x^i). \quad (3.31)$$

La base dual $\{\hat{e}^\mu = dx^\mu\}$ se transforma de manera contraria:

$$\hat{e}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \hat{e}^\nu. \quad (3.32)$$

Considerando, por simplicidad, el caso $x'^j = x^j$, las componentes de la nueva base dual son:

$$\hat{e}'^j = \hat{e}^j, \quad (3.33)$$

$$\hat{e}'^D = \frac{\partial(x^D + \lambda)}{\partial x^i} \hat{e}^i + \frac{\partial(x^D + \lambda)}{\partial x^D} \hat{e}^D = (\partial_i \lambda) \hat{e}^i + \hat{e}^D. \quad (3.34)$$

Exigiendo que la definición (3.29) conserve su forma en el nuevo sistema de coordenadas, $\tilde{A}' = \hat{E}'^D - \hat{e}'^D$, y notando que \hat{E}^D es invariante, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}' &= \hat{E}^D - \hat{e}'^D \\
 &= \hat{E}^D - (\hat{e}^D + (\partial_i \lambda) \hat{e}^i) \\
 &= (\hat{E}^D - \hat{e}^D) - (\partial_i \lambda) \hat{e}^i \\
 \tilde{A}' &= \tilde{A} - (\partial_i \lambda) \hat{e}^i.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Esta relación entre las 1-formas conduce directamente a la transformación de gauge abeliana para las componentes del potencial vectorial:

$$A'_i = A_i + \partial_i \lambda. \tag{3.36}$$

Es fundamental subrayar que esta regla no ha sido postulada; ha sido *deducida* como la condición de consistencia que preserva la estructura de la base adaptada frente a un corrimiento en la coordenada de la fibra, $x'^D = x^D + \lambda(x^i)$. En consecuencia, la invariancia de calibre emerge como una propiedad geométrica intrínseca del fibrado.

Esta demostración no requiere de una estructura métrica. La definición del campo electromagnético se fundamenta únicamente en la Ecuación (3.29), que lo establece como una medida de la discrepancia entre la base del observador, $\text{gen}\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d\}$, y el subespacio horizontal. En particular, el potencial vector electromagnético emerge directamente de la estructura geométrica del fibrado, donde esta diferencia captura la conexión entre los vectores base y el espacio horizontal. Esta formulación geométrica proporciona una interpretación natural de las transformaciones de gauge y resalta que la definición del campo electromagnético no depende de una métrica a priori, sino más bien de la estructura del fibrado subyacente.

Este resultado es coherente con la interpretación geométrica moderna, donde la existencia de un campo de gauge no trivial se identifica con la *no-integrabilidad* de la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$. Como se demostrará explícitamente a continuación, el conmutador de dos campos vectoriales horizontales no es, en general, horizontal, sino que posee una componente vertical proporcional al tensor de campo electromagnético F_{ij} . La curvatura asociada a la conexión de Ehresmann, que cuantifica este fenómeno, puede expresarse formalmente como una 2-forma [12], pero en el enfoque de esta tesis se manifiesta de manera más directa a través del álgebra de los campos vectoriales.

Conceptualmente, el procedimiento aquí desarrollado invierte el orden lógico de la teoría de conexiones estándar. En lugar de postular una sección local para definir el potencial como su *pullback* [121, 122], es la base adaptada, inducida por la propia geometría de Kaluza-Klein, la que define implícitamente dicha sección. Este enfoque, derivado de la descomposición del espacio total, reproduce de forma independiente el resultado general, reforzando la tesis central de este trabajo: la estructura gauge es un rasgo intrínseco del fibrado subyacente y, por ello, puede trasladarse sin pérdida al formalismo puramente afín que se desarrollará en los siguientes capítulos.

3.7. La No-Integrabilidad de la Distribución Horizontal

En esta sección se establece la conexión fundamental entre la existencia de un campo electromagnético no trivial y la geometría del fibrado principal. Se demostrará que el tensor

de campo electromagnético, F_{ij} , constituye una medida directa de la no integrabilidad de la distribución horizontal. Este resultado, derivado del cálculo explícito del corchete de Lie entre campos vectoriales horizontales, eleva al electromagnetismo a la categoría de manifestación puramente geométrica de la estructura del espacio-tiempo ampliado.

El marco matemático para este análisis es el Teorema de Frobenius. Este establece que, dado un conjunto de campos vectoriales suaves $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ que definen una distribución de subespacios tangentes en una variedad M , existe una subvariedad integral $N \subset M$ (tal que $T_p N = D(p)$ para todo $p \in N$) si, y solo si, la distribución es *involutiva*. Esta condición significa que el corchete de Lie de cualesquiera dos campos de la distribución permanece dentro de la propia distribución:

$$[X_i, X_j] \in \text{span}\{X_1, X_2, \dots, X_k\}, \quad \forall i, j.$$

En el contexto de la estructura fibrada, la distribución horizontal $H\widehat{\mathcal{M}}$ es el núcleo de la forma de conexión $\hat{\theta}$ y está generada por la base de campos horizontales $\{\hat{E}_i\}$. Por tanto, la condición de integrabilidad de Frobenius para $H\widehat{\mathcal{M}}$ se expresa formalmente como:

$$\hat{\theta}([\hat{E}_i, \hat{E}_j]) = 0, \quad \forall i, j. \quad (3.37)$$

El punto de partida para el análisis es la relación entre los vectores de una base local $\{\hat{e}_\mu\}$ y los de la base adaptada $\{\hat{E}_\mu\}$, establecida en la Section 3.4:

$$\hat{e}_i = \hat{E}_i + A_i \hat{\eta}, \quad (3.38)$$

donde $A_i = \hat{\theta}(\hat{e}_i)$. Si se asume que $\{\hat{e}_\mu\}$ son campos vectoriales coordinados, una consecuencia directa de ser una base coordinada su corchete de Lie se anula: $[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = 0$. Expresando este corchete nulo en términos de la base adaptada, se obtiene una restricción fundamental:

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{E}_i + A_i \hat{\eta}, \hat{E}_j + A_j \hat{\eta}] = [\hat{E}_i, \hat{E}_j] + [\hat{E}_i, A_j \hat{\eta}] + [A_i \hat{\eta}, \hat{E}_j] + [A_i \hat{\eta}, A_j \hat{\eta}] \\ &= [\hat{E}_i, \hat{E}_j] + A_j [\hat{E}_i, \hat{\eta}] + (\hat{E}_i A_j) \hat{\eta} - A_i [\hat{E}_j, \hat{\eta}] - (\hat{E}_j A_i) \hat{\eta}, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la regla de Leibniz $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$. Al reordenar, se aísla el conmutador de los campos horizontales:

$$[\hat{E}_i, \hat{E}_j] = A_j [\hat{E}_i, \hat{\eta}] - A_i [\hat{E}_j, \hat{\eta}] - (\hat{E}_i A_j - \hat{E}_j A_i) \hat{\eta}. \quad (3.39)$$

Esta expresión es general. Para evaluarla explícitamente, es necesario introducir una carta local en el espacio total $\widehat{\mathcal{M}}$ con coordenadas (\hat{x}^i, \hat{x}^D) , donde \hat{x}^D parametriza la fibra. En esta carta, los campos vectoriales coordinados son $\hat{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu}$ y el campo vertical es $\hat{\eta} = \hat{\partial}_D$. La conexión de Ehresmann define el levantamiento horizontal de los vectores base del espacio reducido, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, mediante la relación $\hat{E}_i = \hat{\partial}_i - A_i \hat{\partial}_D$.

Es importante subrayar la distinción entre las derivadas parciales como operadores y los campos vectoriales coordinados. Aunque $\hat{\partial}_i$ y \hat{E}_i son objetos distintos en $T\widehat{\mathcal{M}}$, ambos se proyectan al mismo campo vectorial en $T\mathcal{M}$, como se estableció en el Chapter 3:

$$\downarrow \hat{e}_i = \downarrow \hat{\partial}_i = \downarrow \hat{E}_i = \partial_i.$$

Esta igualdad, lejos de ser una simple convención notacional, captura una relación geométrica fundamental y a menudo es fuente de confusión. Su correcta interpretación es clave: la acción de los operadores \hat{E}_i y $\hat{\partial}_i$ sobre una función $f(x^j)$ levantada desde la base (es decir, independiente de \hat{x}^D) es idéntica. La G -equivarianza de la conexión ($\mathcal{L}_{\hat{\eta}}\hat{\theta} = 0$) implica la *condición de cilindro*, $\partial_D A_i = 0$, asegurando que las componentes de la conexión $A_i = A_i(x^j)$ son precisamente de este tipo. Esta hipótesis, característica de una conexión *transitiva*, legitima el uso de ∂_i (sin gorro) para la acción de los operadores horizontales sobre los campos relevantes.

Con estas consideraciones, la Ecuación (3.39) se simplifica drásticamente. Primero, la condición de cilindro anula el corchete entre los campos horizontales y el vertical:

$$[\hat{E}_i, \hat{\eta}] = [\hat{\partial}_i - A_i \hat{\partial}_D, \hat{\partial}_D] = -(\partial_D A_i) \hat{\partial}_D = 0.$$

Segundo, la acción de \hat{E}_i sobre A_j se reduce a la derivada parcial en la base:

$$\hat{E}_i A_j = (\hat{\partial}_i - A_i \hat{\partial}_D) A_j(x^k) = \partial_i A_j.$$

Sustituyendo estos resultados, se obtiene la relación geométrica fundamental:

$$[\hat{E}_i, \hat{E}_j] = -(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \hat{\eta} = -F_{ij} \hat{\eta}, \quad (3.40)$$

donde se ha definido el tensor de campo electromagnético $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Esta ecuación muestra que el corchete de dos campos horizontales es un campo puramente vertical, con una magnitud determinada por F_{ij} . Al aplicar la forma de conexión $\hat{\theta}$ a ambos lados y usar la normalización $\hat{\theta}(\hat{\eta}) = 1$, se llega a la identificación del campo electromagnético como la medida de la no integrabilidad:

$$F_{ij} = -\hat{\theta}([\hat{E}_i, \hat{E}_j]). \quad (3.41)$$

Esta expresión revela que el campo electromagnético F_{ij} es, geoméricamente, la medida de la componente vertical del conmutador de los campos horizontales.

La conexión con la integrabilidad de la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$ es ahora inmediata. Como se estableció, el teorema de Frobenius exige que, para que $H\hat{\mathcal{M}}$ sea integrable, el corchete de cualesquiera dos campos horizontales debe permanecer en $H\hat{\mathcal{M}}$. Esto equivale a la condición $\hat{\theta}([\hat{E}_i, \hat{E}_j]) = 0$. Combinando esta condición con la Ecuación (3.41), se concluye directamente:

$$F_{ij} = 0 \quad \iff \quad \text{La distribución horizontal } H\hat{\mathcal{M}} \text{ es integrable.}$$

Por lo tanto, la existencia de un campo electromagnético no trivial ($F_{ij} \neq 0$) es matemáticamente inseparable de la no-integrabilidad de la distribución horizontal.

Para construir una intuición física sobre este resultado geométrico, consideremos un análogo explícito en \mathbb{R}^3 . Supongamos que el espacio total es $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z) , y definimos una distribución horizontal \mathcal{H} generada por los campos vectoriales $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$. El teorema de Frobenius [5, 12] establece que \mathcal{H} es integrable si y solo si el corchete de Lie de sus campos generadores permanece en la distribución. Al calcularlo, obtenemos:

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z}.$$

El resultado, $\frac{\partial}{\partial z}$, no pertenece a \mathcal{H} (no es combinación lineal de X e Y), por lo que la distribución no es integrable. Geométricamente, esto significa que un paralelogramo infinitesimal construido siguiendo los flujos de X e Y no se cierra: existe una “brecha” vertical en la dirección z , como se ilustra en la Figura 3.2.

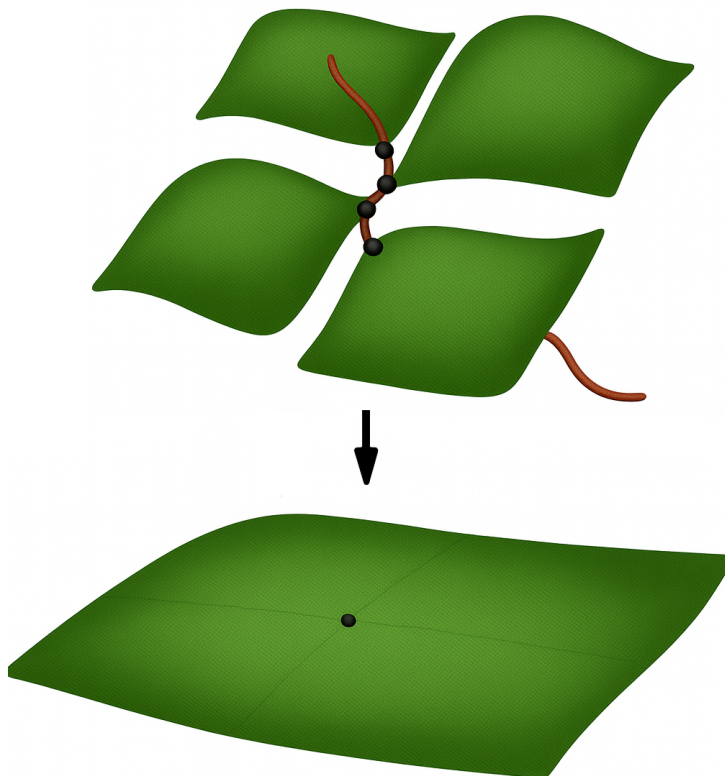


FIGURA 3.2: Ilustración de una distribución horizontal no-integrable. Al intentar construir una superficie tangente a la distribución (las hojas verdes), un camino cerrado en el espacio base (proyección en el plano inferior) no se traduce en un camino cerrado en el espacio total. La desviación vertical entre el punto de inicio y el de finalización es una medida de la no-integrabilidad, análoga al campo electromagnético.

Esta construcción es el análogo directo de la estructura Kaluza-Klein afín. El plano (x, y) representa el espacio base \mathcal{M} , mientras que la dirección z corresponde a la fibra vertical generada por $\hat{\eta}$. La Ecuación (3.40), $[\hat{E}_i, \hat{E}_j] = -F_{ij}\hat{\eta}$, es la generalización directa de nuestro resultado $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$. La “brecha” vertical, que impide que las “hojas” horizontales se unan suavemente para formar una subvariedad integrable, es precisamente la manifestación geométrica del campo electromagnético. La no-integrabilidad no es una mera curiosidad matemática, sino el origen geométrico intrínseco del campo de gauge.

Este hallazgo, que generaliza resultados conocidos en contextos métricos [123], culmina la reinterpretación geométrica del electromagnetismo dentro de este formalismo puramente afín. En plena consonancia con el espíritu original de Kaluza-Klein [77–79], el campo F_{ij} deja de ser una entidad física postulada *sobre* la geometría para revelarse como una medida *de* la geometría:

cuantifica la obstrucción a la descomposición local del espacio total como un producto directo. La física del electromagnetismo emerge, así, como una propiedad intrínseca de la estructura del fibrado principal, sin necesidad de recurrir a una métrica preexistente.

Este hallazgo, que generaliza resultados conocidos en contextos métricos [123], culmina la reinterpretación geométrica del electromagnetismo dentro de este formalismo puramente afín. En plena consonancia con el espíritu original de Kaluza-Klein [77–79], el campo F_{ij} deja de ser una entidad física postulada *sobre* la geometría para revelarse como una medida *de* la geometría: cuantifica la obstrucción a la descomposición local del espacio total como un producto directo. La física del electromagnetismo emerge, así, como una propiedad intrínseca de la estructura del fibrado principal, sin necesidad de recurrir a una métrica preexistente. Este resultado pone de manifiesto la ventaja fundamental del formalismo de fibrados principales y conexión de Ehresmann adoptado en esta tesis, especialmente en contraste con enfoques alternativos basados en la *inmersión* de una subvariedad de cuatro dimensiones \mathcal{M} dentro de un espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ preexistente. En dichos enfoques de inmersión, la distribución \mathcal{T} que define las direcciones “tangentes” a \mathcal{M} (identificada usualmente como el complemento ortogonal a la dirección extra) debe ser integrable para que la subvariedad \mathcal{M} esté bien definida geoméricamente. Sin embargo, como se ha demostrado [123], esta distribución \mathcal{T} falla en ser integrable precisamente cuando el campo electromagnético F_{ij} es no nulo. Esto conduce a una inconsistencia conceptual severa: la subvariedad \mathcal{M} que se postula como el escenario de la física cuadrimensional deja de existir, en sentido estricto, bajo las mismas condiciones que la teoría pretende describir (la presencia de electromagnetismo) [123].

El formalismo de fibrados resuelve esta paradoja de manera natural e intrínseca. Aquí, el espacio base \mathcal{M} es la estructura fundamental, y el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ se construye sobre él. La distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$, definida por la conexión de Ehresmann $\hat{\theta}$ sin recurrir a una métrica, juega el rol análogo a \mathcal{T} . Su no-integrabilidad, $\hat{\theta}([\hat{E}_i, \hat{E}_j]) = -F_{ij} \neq 0$, no invalida la existencia de \mathcal{M} , sino que *define* geoméricamente el campo electromagnético F_{ij} . La consistencia matemática del espacio base está asegurada porque su fibrado tangente, $T\mathcal{M}$, es isomorfo a la *proyección* de la distribución horizontal, $T\mathcal{M} \cong \pi_*(H\hat{\mathcal{M}})$. Como se demuestra formalmente en el Apéndice B.2, aunque $H\hat{\mathcal{M}}$ no sea integrable debido a componentes verticales (identificadas con F_{ij}), su proyección sobre \mathcal{M} siempre resulta en una distribución integrable (en este caso, el propio $T\mathcal{M}$, que es trivialmente integrable).

En conclusión, el enfoque basado en fibrados principales no solo es inherentemente compatible con una descripción puramente afín al independizarse de una métrica para definir la estructura horizontal/vertical, sino que proporciona el único marco conceptualmente coherente donde la no-integrabilidad asociada al campo de gauge no destruye la estructura del espacio-tiempo base, sino que emerge como una propiedad geométrica fundamental de la unificación dimensional.

En resumen, este capítulo ha establecido el lenguaje riguroso de los fibrados principales y la conexión de Ehresmann como el marco adecuado para abordar la reducción dimensional en teorías geométricas, particularmente aquellas de naturaleza puramente afín. Se demostró cómo este formalismo no solo reproduce la descomposición métrica estándar de Kaluza-Klein bajo supuestos específicos, sino que, fundamentalmente, revela el origen geométrico intrínseco del campo electromagnético, identificándolo con la no-integrabilidad de la distribución horizontal. Esta reinterpretación, independiente de una métrica preexistente, valida el enfoque de fibrados como conceptualmente superior para los objetivos de esta tesis y proporciona la base geométrica

necesaria para el siguiente paso crucial: la descomposición sistemática de la propia conexión afín en el espacio total, que se abordará en el Chapter 4.

3.8. Consecuencias Globales: Holonomía y Cuantización Topológica

En la sección 3.7 se ha establecido que el tensor de campo electromagnético F_{ij} es la medida de la “obstrucción local” a la integrabilidad de la distribución horizontal. Es decir, F_{ij} cuantifica el fallo de los paralelogramos infinitesimales para cerrarse en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ [12, 124]. Daremos ahora un paso fundamental al analizar las consecuencias “globales” de esta estructura, lo que nos permitirá conectar la geometría del fibrado con el concepto físico de la cuantización de la carga.

El análisis se centrará en el concepto de holonomía de la conexión de Ehresmann $\hat{\theta}$ [12, 122]. La holonomía describe el “desplazamiento” vertical acumulado que experimenta un observador al completar un camino cerrado C en el espacio base \mathcal{M} , mientras se mueve siempre de forma “horizontal” (paralela a la base) en $\hat{\mathcal{M}}$. Recordemos que \mathcal{M} es el espacio-tiempo base, por lo que C es un bucle cerrado en el espacio-tiempo ($\gamma(0) = \gamma(1)$).

Consideremos la curva cerrada C en \mathcal{M} , parametrizada por $t \in [0, 1]$. Su levantamiento horizontal $\hat{\gamma}(t)$ en $\hat{\mathcal{M}}$ es la única curva tal que se proyecta sobre C ($\pi(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t)$) y su vector tangente $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ es horizontal en cada punto, es decir, pertenece al núcleo de la forma de conexión $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta}(\dot{\hat{\gamma}}(t)) = 0 \quad (3.42)$$

Esta ecuación define la trayectoria a seguir en el espacio total.

Para analizar esta condición, usamos coordenadas locales $\{x^i, x^D\}$ donde i indexa las coordenadas base y D la coordenada de la fibra. La forma de conexión se escribe localmente $\hat{\theta} = dx^D + A_i dx^i$, donde $A_i(x^k)$ son las componentes del potencial vectorial en la base. El vector tangente es $\dot{\hat{\gamma}}(t) = \frac{dx^i}{dt} \partial_i + \frac{dx^D}{dt} \partial_D$. Aplicando $\hat{\theta}$ a $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\dot{\hat{\gamma}}(t)) &= (dx^D + A_j dx^j) \left(\frac{dx^i}{dt} \partial_i + \frac{dx^D}{dt} \partial_D \right) \\ &= \frac{dx^D}{dt} + A_j \delta_i^j \frac{dx^i}{dt} \quad (\text{Usando } dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu) \\ &= \frac{dx^D}{dt} + A_i \frac{dx^i}{dt} \end{aligned}$$

Imponiendo la condición de horizontalidad (3.42), llegamos a la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la coordenada de la fibra x^D a lo largo del levantamiento horizontal:

$$\frac{dx^D}{dt} + A_i(x^k(t)) \frac{dx^i}{dt} = 0 \quad (3.43)$$

La holonomía es el cambio neto en la coordenada vertical, $\Delta x^D = x^D(1) - x^D(0)$, tras recorrer el bucle completo C de $t = 0$ a $t = 1$. Integramos la Ecuación (3.43) a lo largo de este intervalo:

$$\int_0^1 \frac{dx^D}{dt} dt + \int_0^1 A_i(x^k(t)) \frac{dx^i}{dt} dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo al primer término:

$$\int_0^1 \frac{dx^D}{dt} dt = x^D(1) - x^D(0) = \Delta x^D$$

El segundo término es, por definición, la integral de línea del campo vectorial A (representado por sus componentes A_i) a lo largo de la curva cerrada C en el espacio base \mathcal{M} :

$$\int_0^1 A_i(x^k(t)) \frac{dx^i}{dt} dt = \oint_C A_i dx^i$$

Sustituyendo ambos resultados en la ecuación integrada, obtenemos la expresión para la holonomía [12, 125]:

$$\Delta x^D = - \oint_C A_i dx^i \quad (3.44)$$

Si esta integral de línea no es nula, el levantamiento horizontal de la curva cerrada C no se cierra en $\hat{\mathcal{M}}$. Esta “brecha” vertical es la manifestación global e integrada de la curvatura local F_{ij} .

Introducimos la hipótesis clave de Kaluza-Klein: la dimensión extra asociada a la coordenada x^D no es infinita, sino compacta, con la topología de un círculo S^1 (grupo $G = U(1)$) [78, 82]. Esto implica una periodicidad: existe un período L tal que los puntos x^D y $x^D + L$ son físicamente indistinguibles:

$$x^D \sim x^D + L$$

Para que la teoría sea consistente, el punto final del levantamiento horizontal, $\hat{\gamma}(1)$, debe corresponder al mismo estado físico que el punto inicial, $\hat{\gamma}(0)$. Como ambos se proyectan sobre el mismo punto $\gamma(0) = \gamma(1)$ en la base, su única diferencia posible es el desfase vertical Δx^D . La identificación periódica exige que este desfase sea un múltiplo entero del período [126, 127]:

$$\Delta x^D = nL, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.45)$$

Igualando las Ecuaciones (3.44) y (3.45), obtenemos una condición de cuantización directamente sobre la integral de línea del potencial A a lo largo de cualquier bucle cerrado C en el espacio-tiempo base [127]:

$$\oint_C A_i dx^i = -nL \quad (3.46)$$

Ahora utilizamos el Teorema de Stokes en su forma tensorial [124, 128]. Este teorema relaciona la integral de línea de A sobre la curva cerrada C (que es el borde 1D) con la integral de flujo del tensor $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ sobre cualquier superficie abierta S (que es una subvariedad 2D) en \mathcal{M} cuyo borde sea precisamente C ($\partial S = C$):

$$\oint_C A_i dx^i = \int_S (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dS^{ij} = \int_S F_{ij} dS^{ij} \quad (3.47)$$

Aquí, dS^{ij} es el elemento de área tensorial de la superficie S .

Combinando la cuantización de la integral de línea (3.46) con el Teorema de Stokes (3.47), llegamos a la conclusión principal [121, 126, 127]:

$$\int_S F_{ij} dS^{ij} = -nL \quad (3.48)$$

Esta ecuación es el resultado matemático riguroso. Establece que el flujo del tensor de campo F a través de cualquier superficie abierta S que tenga a C como borde está cuantizado en múltiplos enteros de $-L$. El entero n es un invariante topológico (conocido como el número de Chern del fibrado [12, 128]).

Es crucial entender la topología subyacente. El Teorema de Stokes (3.47) se aplica a una superficie S con borde C . Una propiedad matemática fundamental, a veces resumida como «el borde de un borde es vacío», establece que $\partial(\partial S) = \partial C = \emptyset$ (para una discusión sobre la homología y el operador de borde, ver por ejemplo [12]). Esto implica que la superficie S considerada aquí, al tener un borde no vacío C , no puede ser ella misma el borde de una región tridimensional V , ya que el borde de V (∂V) sería una superficie cerrada sin borde. Esta distinción topológica subraya que no podemos aplicar directamente el Teorema de la Divergencia (Gauss) partiendo de esta S específica, y que la interpretación debe centrarse en la relación entre S y su borde C .

Con esta precisión topológica en mente, retomamos el resultado matemático riguroso obtenido al combinar la cuantización de la holonomía (3.46) con el Teorema de Stokes (3.47). La Ecuación (3.48) establece que el flujo del tensor de campo F a través de cualquier superficie abierta S que tenga a C como borde está cuantizado en múltiplos enteros de $-L$. Para comprender mejor las implicaciones físicas de esta cuantización del flujo sobre superficies abiertas, consideremos dos ejemplos ilustrativos de la superficie S en un espacio-tiempo base \mathcal{M} de 4 dimensiones (coordenadas t, x, y, z , índices 0, 1, 2, 3).

En el primer caso, imaginemos que la curva cerrada C es un bucle espacial, por ejemplo, un círculo en el plano xy en un instante fijo $t = t_0$. La superficie S más simple cuyo borde es C es el disco plano contenido dentro de ese círculo, también en $t = t_0$. En esta situación, el elemento de área dS^{ij} solo tiene componentes espaciales dS^{kl} ($k, l = 1, 2, 3$), y la integral $\int_S F_{ij} dS^{ij}$ se reduce a $\int_S F_{kl} dS^{kl}$. Esta integral representa (salvo constantes) el flujo magnético Φ_B que atraviesa la superficie abierta S . La ecuación de cuantización (3.48) se convierte en:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \propto -nL$$

La interpretación es que el flujo magnético que atraviesa cualquier superficie espacial abierta S delimitada por el bucle C debe estar cuantizado. Si $n \neq 0$, hay un flujo magnético neto constante a través de cualquier superficie que tape el bucle. El hecho de que este flujo sea independiente de la superficie S (para un C fijo) es la característica distintiva de un campo generado por una fuente neta aislada (tipo monopolo) que está siendo enlazada topológicamente por la curva C [127]. La cuantización $n \in \mathbb{Z}$ indica que esta fuente topológica, análoga a una carga magnética, debe tener una fuerza discreta determinada por n y L .

En el segundo caso, consideremos que C es un bucle cerrado en el espacio-tiempo, por ejemplo, el borde de un rectángulo S en el plano xt . Aquí, el elemento de área dS^{ij} tiene componentes espacio-temporales, como dS^{0k} , y la integral $\int_S F_{ij} dS^{ij}$ involucra componentes de F como F_{0k} , relacionadas con el campo eléctrico \mathbf{E} . La ecuación de cuantización (3.48) se convierte en:

$$\int_S F_{ij} dS^{ij} = -nL \quad (\text{con } dS^{ij} \text{ espacio-temporal})$$

La interpretación es que la cuantización impone una restricción global sobre la integral del tensor de campo electromagnético F_{ij} sobre áreas abiertas S en el espacio-tiempo, cuando el

borde C de esa área enlaza la fuente topológica n . Esto no modifica las ecuaciones diferenciales homogéneas de Maxwell (lejos de la fuente), sino que actúa como una condición de consistencia integral que las soluciones globales deben satisfacer. Las únicas configuraciones de campo F_{ij} permitidas en esta geometría Kaluza-Klein son aquellas cuyas integrales sobre estas superficies S específicas toman valores discretos proporcionales a nL , reflejando una restricción topológica sobre la dinámica integrada de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Es interesante notar la analogía matemática entre este resultado y el efecto Aharonov-Bohm en mecánica cuántica [125, 126]. En dicho efecto, la integral de línea del potencial A a lo largo de una trayectoria cerrada determina una fase cuántica, y su relación con el flujo $\int F$ a través del Teorema de Stokes también conduce a condiciones de cuantización de flujo (proporcionales a \hbar/q) cuando se exige la unicidad de la función de onda. Sin embargo, es crucial subrayar que el origen físico de la cuantización aquí obtenida (3.48) es fundamentalmente distinto: no surge de la mecánica cuántica, sino de la consistencia clásica de la holonomía en una fibra topológicamente compacta, siendo la constante fundamental el período L de la dimensión extra, asociado a una carga topológica n .

En resumen, la estructura del fibrado principal $U(1)$ de Kaluza-Klein, combinada con la conexión de Ehresmann $\hat{\theta}$, conduce a través de la holonomía y el Teorema de Stokes a una condición de cuantización (3.48) sobre el flujo del campo F_{ij} a través de superficies abiertas. Esta cuantización, cuyo origen es puramente topológico y geométrico, se interpreta físicamente como la existencia de fuentes topológicas (análogas a monopolos magnéticos cuantizados) enlazadas por bucles en el espacio-tiempo base, imponiendo restricciones globales sobre las configuraciones permitidas del campo electromagnético. Notablemente, esta conclusión se obtiene sin recurrir a una métrica preexistente, destacando el poder del enfoque afín y topológico [90, 122].

Reducción dimensional de la conexión afín

Habiendo establecido en el capítulo anterior el marco geométrico de los fibrados principales y la conexión de Ehresmann como el lenguaje idóneo para la unificación dimensional, y tras revelar el origen geométrico del campo electromagnético como una manifestación de la no-integrabilidad de la distribución horizontal, nos adentramos ahora en el desarrollo técnico que constituye el núcleo original de esta tesis. Este capítulo aborda el desafío central: construir un formalismo de reducción dimensional sistemático directamente sobre la conexión afín $\hat{\nabla}$, considerada como el único objeto geométrico fundamental del espacio-tiempo de mayor dimensión $\hat{\mathcal{M}}$, sin presuponer ninguna estructura métrica preexistente. Esta aproximación invierte la jerarquía habitual de Kaluza-Klein y de la propia Relatividad General.

El primer objetivo crucial será derivar un *ansatz* completo para la descomposición de $\hat{\nabla}$. Dicho *ansatz* debe expresar de manera biunívoca los coeficientes de la conexión $\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ en $\hat{\mathcal{M}}$ en términos de un conjunto covariante de campos (una conexión inducida y varios campos tensoriales) definidos exclusivamente sobre el espacio base \mathcal{M} , respetando la simetría G-invariante de la conexión, condición esencial para la consistencia del fibrado. Equipados con esta herramienta fundamental, procederemos a calcular la curvatura efectiva resultante en la dimensión inferior, centrándonos en el tensor de Ricci $\hat{R}_{\mu\kappa}$.

Finalmente, analizaremos las ecuaciones de campo que emergen al considerar soluciones de vacío ($\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$) bajo condiciones geométricas físicas razonables, como la ausencia de torsión y normalizaciones específicas inspiradas en la geometría de subvariedades. Demostraremos cómo la dinámica puramente afín en $\hat{\mathcal{M}}$ induce, en \mathcal{M} , un sistema acoplado que describe la interacción gravitacional y electromagnética, culminando notablemente en la recuperación del sistema Einstein-Maxwell para campos puramente radiativos. Este resultado no solo valida el formalismo, sino que refuerza de manera contundente la perspectiva, central en este trabajo, de la métrica como un concepto secundario y emergente, derivado de la dinámica afín subyacente.

4.1. Conexión Afín G-Invariante y Estrategia de Descomposición

En esta sección establecemos la condición fundamental que debe satisfacer la conexión afín $\hat{\nabla}$ definida sobre el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ para ser compatible con la simetría del fibrado principal, inducida por la acción del grupo de Lie uniparamétrico G . Exigimos que la conexión sea G -

invariante, lo cual significa que conmuta con la acción del grupo R_g :

$$(R_g)_*(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}) = \hat{\nabla}_{(R_g)_*\hat{X}}((R_g)_*\hat{Y}), \quad (4.1)$$

para todo $g \in G$ y para todo par de campos vectoriales $\hat{X}, \hat{Y} \in C^\infty(T\hat{\mathcal{M}})$ [12, 90]. Esta condición expresa que derivar un campo y luego “empujarlo” por la acción R_g equivale a “empujar” los campos primero y luego derivarlos con la conexión. Esta formulación refleja la compatibilidad entre la conexión afín y la simetría del fibrado. Geométricamente, la estructura de transporte paralelo definida por $\hat{\nabla}$ es la misma en todos los puntos de una misma órbita del grupo.

Para obtener la versión *infinitesimal* de esta condición, procedemos en varios pasos detallados a continuación:

- 1. Acción uniparamétrica del grupo. Sea $g(t) = \exp(t\xi)$ una curva en G tal que $g(0) = e$ (el elemento identidad), donde ξ es un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} . Definimos el flujo de difeomorfismos asociado a esta curva mediante $\phi_t = R_{g(t)}$. El campo vectorial fundamental $\hat{\eta}$ asociado al generador ξ se define en cada punto $p \in \hat{\mathcal{M}}$ como el vector tangente a la órbita de p bajo la acción de G :

$$\hat{\eta}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p). \quad (4.2)$$

Por construcción, ϕ_t es precisamente el flujo generado por el campo vectorial $\hat{\eta}$.

- 2. Reescritura de la invariancia en términos del flujo. La condición de G -invariancia (4.1) se puede expresar utilizando el flujo ϕ_t como:

$$(\phi_t)_*(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}) = \hat{\nabla}_{(\phi_t)_*\hat{X}}((\phi_t)_*\hat{Y}) \quad \forall t. \quad (4.3)$$

Esta igualdad indica que la conexión $\hat{\nabla}$ es preservada por el flujo ϕ_t generado por el campo fundamental $\hat{\eta}$.

- 3. Diferenciación con respecto al parámetro t . Tomamos la derivada de (4.3) con respecto a t y la evaluamos en $t = 0$. Por la definición de la derivada de Lie (ver Sección 1.3), para cualquier campo tensorial T se cumple [1, 12]:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t)_*T = \mathcal{L}_{\hat{\eta}}T. \quad (4.4)$$

Aplicando esta identidad al lado izquierdo de (4.3), donde $T = \hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}$ es un campo vectorial, obtenemos:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t)_*(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}) = \mathcal{L}_{\hat{\eta}}(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{Y}). \quad (4.5)$$

- 4. Derivada del lado derecho. En el lado derecho de (4.3), la dependencia en t aparece sólo a través de los argumentos de la conexión, $\hat{X}_t = (\phi_t)_*\hat{X}$ y $\hat{Y}_t = (\phi_t)_*\hat{Y}$. Aplicando la

regla de la derivada para una función compuesta (considerando $\hat{\nabla}$ como una aplicación bilineal en sus argumentos vectoriales), y evaluando en $t = 0$ (donde $\hat{X}_0 = \hat{X}$ y $\hat{Y}_0 = \hat{Y}$):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \hat{\nabla}_{(\phi_t)_*\hat{X}}((\phi_t)_*\hat{Y}) = \hat{\nabla}_{\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \hat{X}_t} \hat{Y}_0 + \hat{\nabla}_{\hat{X}_0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \hat{Y}_t \right) \quad (4.6)$$

$$= \hat{\nabla}_{\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t)_*\hat{X}} \hat{Y} + \hat{\nabla}_{\hat{X}} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t)_*\hat{Y} \right) \quad (4.7)$$

$$= \hat{\nabla}_{\mathcal{L}_{\hat{\eta}}\hat{X}} \hat{Y} + \hat{\nabla}_{\hat{X}} (\mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{Y}), \quad (4.8)$$

donde en el último paso usamos nuevamente la definición de la derivada de Lie (4.4).

- 5. Igualando las derivadas en $t = 0$. Como (4.3) es válida para todo t , sus derivadas en $t = 0$ deben ser iguales. Por lo tanto, igualando los resultados de los pasos 3 y 4, se obtiene la identidad fundamental que relaciona la derivada de Lie con la conexión afín:

$$\mathcal{L}_{\hat{\eta}}(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y}) = \hat{\nabla}_{\mathcal{L}_{\hat{\eta}}\hat{X}} \hat{Y} + \hat{\nabla}_{\hat{X}} (\mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{Y}). \quad (4.9)$$

Esta identidad (4.9) es la forma infinitesimal de la condición de G-invariancia y permite derivar la condición de cilindro de forma directa.

Para demostrarlo, se trabaja en una carta local adaptada $\{x^\mu\} = \{x^i, x^D\}$ donde el campo fundamental es simplemente $\hat{\eta} = \partial_D = \frac{\partial}{\partial x^D}$. En una base coordenada, el conmutador de Lie de los vectores base se anula:

$$\mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\mu = \mathcal{L}_{\partial_D} \partial_\mu = [\partial_D, \partial_\mu] = 0, \quad \text{para todo } \mu.$$

Se aplica entonces la identidad de invarianza (4.9) directamente a los vectores de la base coordenada $\hat{X} = \partial_\mu$ e $\hat{Y} = \partial_\nu$.

El lado derecho de la ecuación (4.9) se anula trivialmente:

$$\hat{\nabla}_{\mathcal{L}_{\partial_D} \partial_\mu} \partial_\nu + \hat{\nabla}_{\partial_\mu} (\mathcal{L}_{\partial_D} \partial_\nu) = \hat{\nabla}_0 \partial_\nu + \hat{\nabla}_{\partial_\mu} (0) = 0.$$

El lado izquierdo, por consiguiente, también debe ser cero:

$$\mathcal{L}_{\hat{\eta}}(\hat{\nabla}_{\partial_\mu} \partial_\nu) = \mathcal{L}_{\partial_D}(\hat{\nabla}_{\partial_\mu} \partial_\nu) = 0.$$

Utilizando la definición de los coeficientes de conexión en esta base, $\hat{\nabla}_{\partial_\mu} \partial_\nu = \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu} \partial_\rho$, se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\partial_D} (\hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu} \partial_\rho) = 0.$$

Al aplicar la regla de Leibniz para la derivada de Lie sobre el campo vectorial $\hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu} \partial_\rho$, donde $\hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}$ son las componentes escalares:

$$(\mathcal{L}_{\partial_D} \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}) \partial_\rho + \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu} (\mathcal{L}_{\partial_D} \partial_\rho) = 0.$$

El primer término corresponde a la derivada parcial de la función componente, $\mathcal{L}_{\partial_D} \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu} = \partial_D \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}$, mientras que el segundo término se anula, ya que $\mathcal{L}_{\partial_D} \partial_\rho = 0$. La ecuación se reduce a:

$$(\partial_D \hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}) \partial_\rho = 0.$$

Dado que los vectores base $\{\partial_\rho\}$ son linealmente independientes, la única solución es que sus coeficientes sean nulos:

$$\partial_D \hat{\Gamma}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = 0. \quad (4.10)$$

Esta ecuación, análoga a la “condición de cilindro” en la teoría métrica de Kaluza-Klein [77,82], implica que los coeficientes de la conexión afín son constantes a lo largo de las órbitas de la acción de G . Geométricamente, asegura que la conexión “desciende” de forma bien definida al espacio cociente $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}/G$, siendo la manifestación explícita de la G -invariancia.

Como consecuencia directa, los tensores de Torsión y Curvatura, al estar construidos algebraicamente a partir de $\hat{\Gamma}$ y sus derivadas (las cuales conmutan con ∂_D), también serán G -invariantes: $\partial_D T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = 0$ y $\partial_D R_{\sigma\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = 0$. Físicamente, esto asegura que la ecuación de las curvas autoparalelas (las trayectorias “más rectas” definidas por la conexión),

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \hat{\Gamma}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

es invariante bajo traslaciones en la coordenada x^D , dado que los coeficientes $\hat{\Gamma}$ no dependen de ella.

4.2. Definición Sistemática de los Campos Reducidos

Habiendo establecido la condición de G -invariancia (4.10) para la conexión afín $\hat{\nabla}$, la cual asegura $\partial_D \hat{\Gamma}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = 0$, procedemos a descomponerla completamente en términos de objetos definidos en el espacio base \mathcal{M} . Un conteo de grados de libertad revela la necesidad de esta descomposición: mientras que la conexión total $\hat{\nabla}$ en $D + 1$ dimensiones posee $(D + 1)^3$ componentes independientes, una conexión ∇ inducida en D dimensiones solo cuenta con D^3 componentes. Los $(D + 1)^3 - D^3 = 3D^2 + 3D + 1$ grados de libertad restantes deben codificarse en campos adicionales. Tal como anticipa la estructura polinomial general (ver Tabla 3.2), estos corresponden precisamente a siete campos tensoriales definidos sobre \mathcal{M} : tres de rango 2 (h, β, γ), tres de rango 1 (τ, w, σ) y uno de rango 0 (ψ).

Esta sección define conceptualmente estos ocho campos —la conexión inducida ∇ y los siete tensores mencionados— a partir de la acción de $\hat{\nabla}$ sobre la base adaptada $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_i, \hat{\eta}\}$, utilizando las proyecciones horizontal (\downarrow) y vertical ($\hat{\theta}$).

A continuación, agrupamos las definiciones conceptuales de estos campos según la operación fundamental de $\hat{\nabla}$ que les da origen: Habiendo calculado los coeficientes $\Gamma_i{}^k{}_j$ de la conexión inducida ∇ en la sección anterior, ahora procedemos a definir los siete campos tensoriales restantes que, junto con ∇ , codifican la información completa de la conexión G -invariante $\hat{\nabla}$ del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$. Siguiendo la estrategia delineada al final de la Sección 4.1, estos campos surgen naturalmente al analizar sistemáticamente la acción de la derivada covariante $\hat{\nabla}$ sobre las combinaciones posibles de vectores de la base adaptada $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_d, \hat{\eta}\}$ y proyectar los resultados sobre las direcciones horizontal y vertical utilizando los operadores \downarrow y $\hat{\theta}$, respectivamente .

1. *Acción sobre dos vectores horizontales* $\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$: Esta operación describe cómo varían los campos horizontales al moverse en direcciones horizontales.

- Su proyección horizontal definió la *conexión inducida* ∇ (Eq. (4.18)):

$$\nabla_X Y = \downarrow (\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}).$$

- Su proyección vertical define el *tensor* h , un campo tensorial de tipo (0,2) en \mathcal{M} :

$$h(X, Y) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}). \quad (4.11)$$

Este tensor mide la “falla” del subespacio horizontal en ser autoparalelo bajo $\hat{\nabla}$. Geométricamente, actúa de forma análoga a la segunda forma fundamental en geometría de superficies (ver Sección 1.2), cuantificando una noción de curvatura extrínseca de las “hojas” horizontales respecto a la dirección de la fibra.

2. *Acción sobre un vector vertical y uno horizontal* $\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \hat{\eta}$: Describe cómo cambia la dirección de la fibra al moverse a lo largo de direcciones horizontales en el espacio base.

- Su proyección horizontal define el *tensor* β , un campo tensorial de tipo (1,1) en \mathcal{M} :

$$\beta(X) = \downarrow (\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \hat{\eta}). \quad (4.12)$$

Este tensor mide la componente horizontal de la variación del campo vertical $\hat{\eta}$, interpretándose como una medida de cómo se “inclina” o “gira” la fibra respecto a la distribución horizontal al desplazarse por la base.

- Su proyección vertical define la *1-forma* τ en \mathcal{M} :

$$\tau(X) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \hat{\eta}). \quad (4.13)$$

Esta 1-forma mide la componente vertical de la variación de $\hat{\eta}$, relacionada con un posible “estiramiento” o “compresión” de la fibra a lo largo de direcciones horizontales.

3. *Acción sobre un vector horizontal y uno vertical* $\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X}$: Describe cómo cambian los campos horizontales al moverse a lo largo de la dirección de la fibra. Es importante notar que $\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X}$ no es, en general, un campo tensorial en X porque $\hat{\nabla}$ no es $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal en su primer argumento cuando este no es un campo vectorial completo. Para obtener un objeto tensorial, debemos corregir por la variación debida al flujo de $\hat{\eta}$.

- Su proyección horizontal, corregida por la derivada de Lie, define el *tensor* γ , un campo tensorial de tipo (1,1) en \mathcal{M} :

$$\gamma(X) = \downarrow (\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X} - \mathcal{L}_{\hat{\eta}} \tilde{X}). \quad (4.14)$$

La resta del término de Lie $\mathcal{L}_{\hat{\eta}} \tilde{X} = [\hat{\eta}, \tilde{X}]$ asegura que $\gamma(fX) = f\gamma(X)$, garantizando la tensorialidad. γ mide la variación covariante intrínseca de los campos horizontales al moverse a lo largo de la fibra.

- Su proyección vertical define la *1-forma* w en \mathcal{M} :

$$w(X) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X}). \quad (4.15)$$

Esta 1-forma captura la componente vertical de la derivada covariante de \tilde{X} a lo largo de la fibra.

4. *Acción sobre dos vectores verticales* $\hat{\nabla}_{\hat{\eta}}\hat{\eta}$: Describe la “auto-aceleración” covariante de la dirección de la fibra.

- Su proyección horizontal define el *vector* σ en \mathcal{M} :

$$\sigma = \downarrow(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}}\hat{\eta}). \quad (4.16)$$

Representa la componente de la auto-aceleración que “se sale” de la fibra hacia las direcciones de la base .

- Su proyección vertical define el *escalar* ψ en \mathcal{M} :

$$\psi = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}}\hat{\eta}). \quad (4.17)$$

Mide la componente de la auto-aceleración que permanece a lo largo de la propia fibra .

Se han definido así conceptualmente los ocho campos —la conexión inducida ∇ y los siete campos tensoriales $h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi$ — que emergen de la descomposición sistemática de la conexión G-invariante $\hat{\nabla}$ según la estructura del fibrado. Es fundamental destacar que, a diferencia de ∇ , los campos $h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi$ son tensores genuinos definidos sobre el espacio base \mathcal{M} .

Esta naturaleza tensorial permite aplicarles el operador de levantamiento horizontal (\uparrow), obteniendo sus correspondientes representaciones $\tilde{T} = \uparrow T$ como campos tensoriales en $\hat{\mathcal{M}}$ que residen exclusivamente en la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$. Dicha propiedad es clave para el cálculo explícito de sus componentes en términos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}$. El procedimiento consiste en relacionar la definición geométrica de cada tensor T (p. ej., $\beta(X) = \downarrow(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{\eta})$) con su levantamiento horizontal \tilde{T} a través de la identidad $\tilde{T} = P(\hat{T}_{\text{geom}})$, donde $P = \uparrow \circ \downarrow$ es el proyector horizontal y \hat{T}_{geom} es la expresión geométrica en $\hat{\mathcal{M}}$ que define a T (en el ejemplo, $\hat{T}_{\text{geom}} = \hat{\nabla}_{\hat{X}}\hat{\eta}$).

El cálculo detallado de estas componentes para todos los campos reducidos, utilizando el formalismo de bases adaptadas y los proyectores, se abordará en la sección subsiguiente. Este cálculo no solo verificará que los ocho objetos capturan toda la información contenida en $\hat{\nabla}$, sino que también establecerá el sistema de ecuaciones cuya inversión conducirá al *ansatz* completo que reconstruye la conexión total $\hat{\Gamma}$ a partir de los campos definidos en \mathcal{M} .

4.3. Cálculo de la Conexión Inducida en el Espacio Base

Habiendo definido conceptualmente los ocho campos geométricos que surgen de la descomposición de la conexión afín $\hat{\nabla}$ en la sección precedente, procedemos ahora a calcular explícitamente las componentes del primero y más fundamental de ellos: la *conexión inducida* ∇ sobre el espacio base \mathcal{M} . Recordemos que ∇ se definió a partir de la acción de $\hat{\nabla}$ sobre campos horizontales, proyectando el resultado de vuelta al espacio base mediante el operador \downarrow (definido en la Ecuación (3.1)):

$$\begin{aligned} \nabla : C^\infty(T\mathcal{M}) \times C^\infty(T\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(T\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y = \downarrow(\hat{\nabla}_{\hat{X}}\tilde{Y}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aquí, $\tilde{X} = \uparrow X$ e $\tilde{Y} = \uparrow Y$ son los levantamientos horizontales de los campos $X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M})$, definidos por la conexión de Ehresmann $\hat{\theta}$. Esta definición es análoga a la utilizada en geometría de superficies para definir la conexión inducida [3, 4] y asegura que ∇ hereda las propiedades formales de una conexión afín. Es crucial notar que ∇ no se obtiene por un simple levantamiento o proyección de $\hat{\nabla}$ como si fuera un tensor local, sino a través de esta definición específica que involucra la acción sobre los levantamientos horizontales.

Procedemos ahora a calcular explícitamente sus componentes, los coeficientes de conexión $\Gamma_i^k{}_j$, en términos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_\mu{}^\rho{}_\nu$ de la conexión G-invariante $\hat{\nabla}$. Existen dos enfoques equivalentes para realizar este cálculo, los cuales detallamos a continuación.

Método 1: Proyección Directa de la Derivada Covariante

Este método se basa directamente en la definición de ∇ y en cómo se relacionan los covectores y vectores entre el espacio base y el espacio total. Partimos de la definición de los coeficientes de conexión en la base $\{e_i\}$ del espacio base \mathcal{M} :

$$\Gamma_i^k{}_j = e^k(\nabla_{e_i} e_j), \quad (4.19)$$

donde $\{e^k\}$ es la base dual a $\{e_j\}$. Usando la definición (4.18), tenemos $\nabla_{e_i} e_j = \downarrow(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j)$, donde $\tilde{e}_i = \uparrow e_i$ es el levantamiento horizontal. Ahora, utilizamos la propiedad fundamental que relaciona la acción de un covector base e^k con su levantamiento $\tilde{e}^k = \uparrow e^k$: para cualquier vector $V \in T\mathcal{M}$, $e^k(V) = \tilde{e}^k(\uparrow V)$. Aplicado a nuestro caso, donde $\uparrow V = \uparrow(\downarrow(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j)) = P(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^k{}_j &= \tilde{e}^k \left(\uparrow \left(\downarrow(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j) \right) \right) \\ &= \tilde{e}^k \left(P(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j) \right) \quad (\text{Usando } P = \uparrow \circ \downarrow, \text{ Eq. (3.11)}) \\ &= \tilde{e}^k \left(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j - \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j) \hat{\eta} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde P es el proyector horizontal. Recordando que los levantamientos \tilde{e}^k son, por definición, horizontales ($\hat{\theta}(\tilde{e}^k) = 0$), también son ortogonales al vector vertical $\hat{\eta}$ según la estructura de la base adaptada dual $\tilde{\mathcal{B}}^* = \{\hat{E}^\mu\} = \{\tilde{e}^0, \dots, \tilde{e}^d, \hat{\theta}\}$. Específicamente, $\tilde{e}^k(\hat{\eta}) = \hat{E}^k(\hat{E}_D) = \delta_D^k = 0$ ya que $k \in \{0, \dots, d\}$. Por lo tanto, el término proporcional a $\hat{\eta}$ se anula al aplicar \tilde{e}^k :

$$\Gamma_i^k{}_j = \tilde{e}^k \left(\hat{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j \right). \quad (4.21)$$

Ahora, expresamos los levantamientos horizontales \tilde{e}_i en términos de una base $\{\hat{e}_\mu\}$ que satisface la condición (3.27) ($\hat{e}_D = \hat{\eta}$). De la Ecuación (3.24), tenemos $\tilde{e}_i = \hat{E}_i = \hat{e}_i - \hat{\theta}_i \hat{E}_D = \hat{e}_i - \hat{\theta}_i \hat{\eta}$, donde $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}(\hat{e}_i)$ son las componentes de $\hat{\theta}$ en esta base. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^k{}_j &= \tilde{e}^k \left(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i - \hat{\theta}_i \hat{\eta}} (\hat{e}_j - \hat{\theta}_j \hat{\eta}) \right) \\ &= \tilde{e}^k \left(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i} \hat{e}_j - \hat{\nabla}_{\hat{e}_i} (\hat{\theta}_j \hat{\eta}) - \hat{\nabla}_{\hat{\theta}_i \hat{\eta}} \hat{e}_j + \hat{\nabla}_{\hat{\theta}_i \hat{\eta}} (\hat{\theta}_j \hat{\eta}) \right) \\ &= \tilde{e}^k \left(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i} \hat{e}_j - (\hat{e}_i \hat{\theta}_j) \hat{\eta} - \hat{\theta}_j \hat{\nabla}_{\hat{e}_i} \hat{\eta} \right. \\ &\quad \left. - (\hat{\eta} \hat{\theta}_i) \hat{e}_j + \hat{\theta}_i \hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{e}_j + \hat{\theta}_i (\hat{\eta} \hat{\theta}_j) \hat{\eta} - \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta} \right), \end{aligned}$$

donde se aplicaron la linealidad y la regla de Leibniz para la derivada covariante $\hat{\nabla}$. La condición de G-equivarianza de la forma de conexión, $\mathcal{L}_{\hat{\eta}}\hat{\theta} = 0$, implica en la base adaptada ($\hat{\eta} = \partial_D$) que $\partial_D\hat{\theta}_i = 0$. Por tanto, las derivadas $\hat{\eta}(\hat{\theta}_i)$ y $\hat{\eta}(\hat{\theta}_j)$ se anulan, eliminando los términos $(\hat{\eta}\hat{\theta}_i)\hat{e}_j$ y $\hat{\theta}_i(\hat{\eta}\hat{\theta}_j)\hat{\eta}$.

Al aplicar el covector $\tilde{e}^k = \hat{E}^k$, que es horizontal por construcción ($\tilde{e}^k(\hat{\eta}) = 0$), el término $(\hat{e}_i\hat{\theta}_j)\hat{\eta}$ también se anula. Los términos restantes involucran la derivada covariante de los vectores base \hat{e}_ν , definida por los coeficientes de conexión $\hat{\nabla}_{\hat{e}_\mu}\hat{e}_\nu = \hat{\Gamma}_{\mu\rho\nu}\hat{e}_\rho$. Para evaluar su contracción con \tilde{e}^k , calculamos $\tilde{e}^k(\hat{e}_\rho)$ utilizando la relación entre bases (3.24) ($\hat{e}_\rho = \hat{E}_\rho + \hat{\theta}_\rho\hat{E}_D$) para $\rho \neq D$ y $\hat{e}_D = \hat{E}_D$ y la dualidad ($\hat{E}^k(\hat{E}_\sigma) = \delta_\sigma^k$, $\hat{E}^k(\hat{E}_D) = \delta_D^k$):

$$\tilde{e}^k(\hat{e}_\rho) = \hat{E}^k(\hat{E}_\rho + \hat{\theta}_\rho\hat{E}_D) = \delta_\rho^k + \hat{\theta}_\rho\delta_D^k.$$

Dado que $k \neq D$ (pues k indexa las direcciones del espacio base), $\delta_D^k = 0$, resultando en la simplificación crucial:

$$\tilde{e}^k(\hat{e}_\rho) = \delta_\rho^k.$$

Esta relación indica que \tilde{e}^k selecciona directamente la componente k al actuar sobre los vectores \hat{e}_ρ . Con esto:

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^k{}_j &= \hat{\Gamma}_{i\rho j}\delta_\rho^k - \hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{i\rho D}\delta_\rho^k - \hat{\theta}_i\hat{\Gamma}_{D\rho j}\delta_\rho^k + \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{D\rho D}\delta_\rho^k \\ &= \hat{\Gamma}_{i^k j} - \hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{i^k D} - \hat{\theta}_i\hat{\Gamma}_{D^k j} + \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{D^k D}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Este resultado expresa los coeficientes de la conexión inducida ∇ en términos de los coeficientes de la conexión total $\hat{\nabla}$ y las componentes de la forma de conexión $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_i^k{}_j &= \tilde{e}^k(\hat{\Gamma}_{i\rho j}\hat{e}_\rho) - \hat{\theta}_j\tilde{e}^k(\hat{\Gamma}_{i\rho D}\hat{e}_\rho) - \hat{\theta}_i\tilde{e}^k(\hat{\Gamma}_{D\rho j}\hat{e}_\rho) + \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\tilde{e}^k(\hat{\Gamma}_{D\rho D}\hat{e}_\rho) \\ &= \hat{\Gamma}_{i\rho j}\delta_\rho^k - \hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{i\rho D}\delta_\rho^k - \hat{\theta}_i\hat{\Gamma}_{D\rho j}\delta_\rho^k + \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{D\rho D}\delta_\rho^k \\ &= \hat{\Gamma}_{i^k j} - \hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{i^k D} - \hat{\theta}_i\hat{\Gamma}_{D^k j} + \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\hat{\Gamma}_{D^k D}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Este resultado expresa los coeficientes de la conexión inducida ∇ en términos de los coeficientes de la conexión total $\hat{\nabla}$ y las componentes de la forma de conexión $\hat{\theta}$.

Método 2: Proyección de las 1-Formas de Conexión

Un enfoque alternativo, conceptualmente útil, consiste en reinterpretar la conexión $\hat{\nabla}$ a través del conjunto de 1-formas $\hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu = \hat{\Gamma}_{\mu\rho\nu}^\kappa\hat{e}^\mu$, donde los índices κ, ν actúan como etiquetas. Cada $\hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu$ es una 1-forma en $\hat{\mathcal{M}}$. Podemos proyectar estas 1-formas al espacio base usando el operador \downarrow^* (definido en (3.2)) y luego usar los proyectores horizontales $\hat{P}^\kappa{}_\nu$ (cuya forma explícita es $\hat{P}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \hat{\eta}^\mu\hat{\theta}_\nu$, Ecuación (3.11)) para seleccionar las componentes relevantes para la conexión inducida $\Gamma^k{}_j$ en el espacio base:

$$\Gamma^k{}_j = \hat{P}^k{}_\kappa\hat{P}^\nu{}_j\downarrow^*\hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu. \quad (4.24)$$

Para obtener los coeficientes $\Gamma_i^k{}_j$, aplicamos la 1-forma $\Gamma^k{}_j$ al vector base e_i :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_i^k{}_j &= \Gamma^k{}_j(e_i) \\
 &= \left(\hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j \downarrow^* \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu \right) (e_i) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j (\downarrow^* \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu)(e_i) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu(\uparrow e_i) \quad (\text{Por definición de } \downarrow^* \text{ y } \uparrow) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu(\tilde{e}_i) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j (\hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu \hat{e}^\lambda)(\tilde{e}_i) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu \hat{e}^\lambda(\tilde{e}_i).
 \end{aligned}$$

Ahora, evaluamos la acción de la base dual \hat{e}^λ sobre el levantamiento $\tilde{e}_i = \hat{e}_i - \hat{\theta}_i \hat{\eta}$. Asumiendo nuevamente la base $\{\hat{e}_\mu\}$ con $\hat{e}_D = \hat{\eta}$, tenemos $\hat{e}^\lambda(\hat{e}_i) = \delta_i^\lambda$ y $\hat{e}^\lambda(\hat{\eta}) = \hat{e}^\lambda(\hat{e}_D) = \delta_D^\lambda$. Por lo tanto:

$$\hat{e}^\lambda(\tilde{e}_i) = \hat{e}^\lambda(\hat{e}_i - \hat{\theta}_i \hat{\eta}) = \delta_i^\lambda - \hat{\theta}_i \delta_D^\lambda.$$

Sustituyendo esto en la expresión para $\Gamma_i^k{}_j$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_i^k{}_j &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j \hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu (\delta_i^\lambda - \hat{\theta}_i \delta_D^\lambda) \\
 &= \hat{P}^k{}_\kappa \hat{P}^\nu{}_j (\hat{\Gamma}^\kappa{}_\nu - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^\kappa{}_\nu).
 \end{aligned}$$

Finalmente, usamos la forma explícita de los proyectores. Dado que los índices k, j pertenecen al espacio base, $\hat{\eta}^k = 0$ y $\hat{\theta}_j$ (interpretado como $\hat{\theta}(\tilde{e}_j)$) es cero por definición de levantamiento horizontal. Sin embargo, los proyectores aquí actúan sobre los índices κ, ν que recorren todo el espacio total. Aplicando $\hat{P}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \hat{\eta}^\mu \hat{\theta}_\nu$ con $\hat{\eta}^\mu = \delta_D^\mu$ y $\hat{\theta}_\nu = \delta_D^\nu$ (en la base adaptada, que usamos implícitamente al proyectar índices):

$$\Gamma_i^k{}_j = (\delta_\kappa^k - \delta_D^k \hat{\theta}_\kappa) (\delta_j^\nu - \delta_D^\nu \hat{\theta}_j) (\hat{\Gamma}_i^\kappa{}_\nu - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^\kappa{}_\nu) \quad (4.25)$$

$$= (\delta_\kappa^k) (\delta_j^\nu - \delta_D^\nu \hat{\theta}_j) (\hat{\Gamma}_i^\kappa{}_\nu - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^\kappa{}_\nu) \quad (\text{ya que } k \neq D) \quad (4.26)$$

$$= (\delta_j^\nu - \delta_D^\nu \hat{\theta}_j) (\hat{\Gamma}_i^k{}_\nu - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_\nu) \quad (4.27)$$

$$= (\hat{\Gamma}_i^k{}_j - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_j) - \hat{\theta}_j (\hat{\Gamma}_i^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_D) \quad (4.28)$$

$$= \hat{\Gamma}_i^k{}_j - \hat{\theta}_j \hat{\Gamma}_i^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_j + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \hat{\Gamma}_D^k{}_D. \quad (4.29)$$

El resultado obtenido en esta Ecuación (4.29) coincide exactamente con la Ecuación (4.23), confirmando la equivalencia de ambos métodos. Las dos proporciona las componentes explícitas $\Gamma_i^k{}_j$ de la conexión inducida ∇ en el espacio base \mathcal{M} . Este cálculo representa el primer paso para expresar la conexión total $\hat{\nabla}$ en términos de objetos definidos en la dimensión inferior.

No obstante, como se argumentó mediante el conteo de grados de libertad (Sección 4.2), la conexión inducida ∇ no agota la estructura geométrica de $\hat{\nabla}$. Es necesario determinar también las componentes de los siete campos tensoriales restantes $(h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi)$, cuyas definiciones conceptuales se establecieron previamente.

Dado que estos siete campos son tensores bien definidos en \mathcal{M} , sus componentes pueden calcularse aplicando el operador de levantamiento horizontal (\uparrow) a sus definiciones geométricas y proyectando el resultado en una base adaptada. Este procedimiento, que se detallará en la sección siguiente, completará la descomposición explícita de $\hat{\nabla}$ y permitirá construir el *ansatz* inverso.

4.4. Componentes de los Levantamientos Horizontales y Campos Reducidos

Tras haber calculado las componentes $\Gamma_i^k{}_j$ de la conexión inducida en la sección anterior, el siguiente paso es determinar las componentes explícitas de los siete campos tensoriales restantes $(h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi)$, definidos conceptualmente en la Sección 4.2. El procedimiento metodológico para establecer la relación entre estos campos, definidos en \mathcal{M} , y los coeficientes $\hat{\Gamma}_\mu{}^\rho{}_\nu$ de la conexión en $\hat{\mathcal{M}}$, se fundamenta en el cálculo intermedio de sus respectivos *levantamientos horizontales* $(\tilde{h}, \tilde{\beta}, \dots, \tilde{\psi})$.

Estos levantamientos horizontales, denotados genéricamente como $\tilde{T} = \uparrow T$, son campos tensoriales definidos en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ que, por construcción, residen en la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$. Al operar enteramente dentro de $\hat{\mathcal{M}}$, sus componentes pueden expresarse directamente en términos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_\mu{}^\rho{}_\nu$. Esto se logra aplicando el proyector horizontal $P = \uparrow \circ \downarrow$ a las expresiones geométricas que definen a cada campo T , como se anticipó metodológicamente al final de la Sección 4.2.

Esta sección detalla dicho cálculo, presentando las componentes de los levantamientos horizontales $\tilde{h}_{ij}, \tilde{\beta}^k{}_i, \dots, \tilde{\psi}$ evaluadas en una base adaptada. Un resultado crucial es que, debido a la G-invariancia de la conexión $\hat{\nabla}$ (manifestada en la condición de cilindro $\partial_D \hat{\Gamma}_\mu{}^\rho{}_\nu = 0$), las componentes calculadas para los levantamientos \tilde{T} resultan ser independientes de la coordenada de la fibra. En consecuencia, estas componentes coinciden punto a punto con las componentes de los campos tensoriales originales $h_{ij}, \beta^k{}_i, \dots, \psi$ definidos en el espacio base \mathcal{M} . Este procedimiento establece la relación explícita buscada y completa el sistema de ecuaciones que vincula la conexión total $\hat{\Gamma}$ con el conjunto completo de campos reducidos.

A continuación, se expresan los levantamientos horizontales \tilde{T} de los objetos geométricos definidos sobre la base \mathcal{M} en términos de cantidades del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$, utilizando inicialmente una base arbitraria $\{\hat{e}_\mu\}$. El operador de levantamiento horizontal \uparrow es la herramienta central. Las definiciones conceptuales de los campos $\beta, \gamma, h, \tau, \sigma, w, \psi$ (Ecuaciones (4.11) a (4.17)) involucran la aplicación del operador de proyección \downarrow o $\hat{\theta}$ a expresiones construidas con $\hat{\nabla}$. Por lo tanto, el levantamiento horizontal \tilde{T} se obtiene aplicando el proyector horizontal $\hat{P} = \uparrow \circ \downarrow$ a dichas expresiones geométricas, tal como se definió en la Ecuación (3.11).

En el caso particular de campos vectoriales y respecto a una base arbitraria $\{\hat{e}_\mu\}$, las componentes del proyector horizontal, $P^\mu{}_\nu = \hat{e}^\mu P \hat{e}_\nu$, toman la forma explícita:

$$\hat{P}^\mu{}_\nu = \hat{\delta}^\mu{}_\nu - \hat{\eta}^\mu \hat{\theta}_\nu. \quad (4.30)$$

Presentamos detalladamente el cálculo de las componentes del tensor $\tilde{\gamma}$, definido por $\tilde{\gamma}(\hat{X}) = \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{X} - \mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{X})$. En una base coordenada $\{\hat{e}_\mu\}$, la componente $\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu$ se obtiene proyectando el resultado sobre \hat{e}_μ :

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{e}^\mu \left(\hat{P} \left(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} (\hat{P}^\rho{}_\nu \hat{e}_\rho) - \mathcal{L}_{\hat{\eta}} (\hat{P}^\rho{}_\nu \hat{e}_\rho) \right) \right).$$

Aplicamos la regla de Leibniz para la derivada covariante y la derivada de Lie a los términos que involucran $\hat{P}^\rho{}_\nu$. Recordando que $\mathcal{L}_{\hat{\eta}} (\hat{P}^\rho{}_\nu) = \hat{\eta}^\lambda \partial_\lambda \hat{P}^\rho{}_\nu$ (ya que $\hat{P}^\rho{}_\nu$ son componentes escalares y $\hat{\eta}$ es un campo vectorial), obtenemos:

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{e}^\mu \left(\hat{P} \left((\hat{\eta}^\lambda \partial_\lambda \hat{P}^\rho{}_\nu) \hat{e}_\rho + \hat{P}^\rho{}_\nu \hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho - (\hat{\eta}^\lambda \partial_\lambda \hat{P}^\rho{}_\nu) \hat{e}_\rho - \hat{P}^\rho{}_\nu \mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho \right) \right).$$

Los primeros y terceros términos dentro del paréntesis se cancelan. La expresión se simplifica a:

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{e}^\mu \left(\hat{P} \left(\hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho - \mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho \right) \right) \right).$$

Utilizamos las relaciones conocidas: $\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho = \hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma \hat{e}_\sigma$ y $\mathcal{L}_{\hat{\eta}} \hat{e}_\rho = -\partial_\rho \hat{\eta}^\sigma \hat{e}_\sigma$. Sustituyendo estas en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^\mu{}_\nu &= \hat{e}^\mu \left(\hat{P} \left(\hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma \hat{e}_\sigma - (-\partial_\rho \hat{\eta}^\sigma \hat{e}_\sigma) \right) \right) \right) \\ &= \hat{e}^\mu \left(\hat{P} \left(\hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \partial_\rho \hat{\eta}^\sigma \right) \hat{e}_\sigma \right) \right). \end{aligned}$$

Aplicando el proyector \hat{P} (cuyas componentes son $\hat{P}^\mu{}_\sigma$) al vector resultante, obtenemos:

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{P}^\mu{}_\sigma \hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \partial_\rho \hat{\eta}^\sigma \right).$$

Para expresar este resultado en términos de la derivada covariante de $\hat{\eta}^\sigma$, utilizamos la identidad $\partial_\rho \hat{\eta}^\sigma = \hat{\nabla}_\rho \hat{\eta}^\sigma - \hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\rho\lambda}^\sigma$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^\mu{}_\nu &= \hat{P}^\mu{}_\sigma \hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + (\hat{\nabla}_\rho \hat{\eta}^\sigma - \hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{\rho\lambda}^\sigma) \right) \\ &= \hat{P}^\mu{}_\sigma \hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda (\hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\rho\lambda}^\sigma) + \hat{\nabla}_\rho \hat{\eta}^\sigma \right). \end{aligned}$$

Finalmente, reconociendo que $\hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\rho\lambda}^\sigma = 2\hat{\Gamma}_{[\lambda\rho]}^\sigma = \hat{T}_{\lambda\rho}^\sigma$ (donde \hat{T} es el tensor de torsión), la expresión para $\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu$ es:

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{P}^\mu{}_\sigma \hat{P}^\rho{}_\nu \left(\hat{\eta}^\lambda \hat{T}_{\lambda\rho}^\sigma + \hat{\nabla}_\rho \hat{\eta}^\sigma \right).$$

Alternativamente, usando la notación de antisimetrización para la conexión:

$$\tilde{\gamma}^\mu{}_\nu = \hat{P}^\mu{}_\sigma \hat{P}^\rho{}_\nu \left(2\hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{[\lambda\rho]}^\sigma + \hat{\nabla}_\rho \hat{\eta}^\sigma \right).$$

A continuación, calculamos la expresión auxiliar $\theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda))$. Esta aparece recurrentemente y su desglose es instructivo. Primero, aplicamos la regla de Leibniz para la derivada covariante sobre el producto $\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda$:

$$\theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda)) = \theta \left((\partial_\beta \hat{P}^\lambda{}_\nu) \hat{e}_\lambda + \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta} \hat{e}_\lambda \right).$$

Sustituimos la expresión para la derivada del proyector, $\partial_\beta \hat{P}^\lambda{}_\nu = -\partial_\beta (\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda)$, y la definición de la derivada covariante de un vector base, $\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta} \hat{e}_\lambda = \hat{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu \hat{e}_\mu$. Al aplicar la 1-forma $\hat{\theta}$ (que anula términos horizontales y devuelve $\hat{\theta}(\hat{e}_\mu) = \hat{\theta}_\mu$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda)) &= \theta \left(-(\partial_\beta (\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda)) \hat{e}_\lambda + \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu \hat{e}_\mu \right) \\ &= -(\partial_\beta (\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda)) \hat{\theta}_\lambda + \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu \hat{\theta}_\mu. \end{aligned}$$

Ahora, expandimos explícitamente el proyector $\hat{P}^\lambda{}_\nu = \delta^\lambda{}_\nu - \hat{\eta}^\lambda \hat{\theta}_\nu$ en el segundo término:

$$\begin{aligned} \theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda)) &= -(\partial_\beta (\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda)) \hat{\theta}_\lambda + (\delta^\lambda{}_\nu - \hat{\eta}^\lambda \hat{\theta}_\nu) \hat{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu \hat{\theta}_\mu \\ &= -(\partial_\beta (\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda)) \hat{\theta}_\lambda + \hat{\Gamma}_{\beta\nu}^\mu \hat{\theta}_\mu - \hat{\eta}^\lambda \hat{\theta}_\nu \hat{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu \hat{\theta}_\mu. \end{aligned}$$

Para revelar la estructura de una derivada covariante, es útil multiplicar el segundo término de esta última expresión por la unidad, escrita de forma conveniente como $1 = \hat{\eta}^\sigma \hat{\theta}_\sigma$. Este paso, junto con un reetiquetado de los índices mudos y una reorganización, permite factorizar el término común $-\hat{\theta}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda)) &= -(\partial_\beta(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda))\hat{\theta}_\lambda + \hat{\Gamma}_{\beta^\mu \nu} \hat{\theta}_\mu (\hat{\eta}^\sigma \hat{\theta}_\sigma) - \hat{\eta}^\lambda \hat{\theta}_\nu \hat{\Gamma}_{\beta^\mu \lambda} \hat{\theta}_\mu \\ &= -\hat{\theta}_\lambda \left(\partial_\beta(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda) + \hat{\Gamma}_{\beta^\lambda \sigma}(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\sigma) - \hat{\Gamma}_{\beta^\sigma \nu}(\hat{\theta}_\sigma \hat{\eta}^\lambda) \right). \end{aligned}$$

Esta expresión corresponde precisamente a la derivada covariante del objeto $\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda$:

$$\theta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta}(\hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda)) = -\hat{\theta}_\lambda \widehat{\nabla}_\beta(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda). \quad (4.31)$$

Con estos resultados, procedemos a encontrar las componentes locales de los objetos geométricos en la siguiente tabla.

$\tilde{\beta}(\hat{X}) = \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{\eta})$	$\begin{aligned} \tilde{\beta}^\nu{}_\mu &= \tilde{e}^\nu \tilde{\beta}(\hat{e}_\mu) \\ &= \tilde{e}^\nu \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{P}^\mu \hat{e}_\mu} \hat{\eta}) \\ &= \hat{P}^\lambda{}_\mu \tilde{e}^\nu \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\lambda} \hat{\eta}) \\ &= \hat{P}^\lambda{}_\mu \hat{P}^\nu{}_\alpha \widehat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\alpha \end{aligned}$
$\tilde{\tau}(\hat{X}) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{\eta})$	$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\mu &= \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{P}^\lambda \hat{e}_\mu} \hat{\eta}) \\ &= \hat{P}^\lambda{}_\mu \hat{\theta}(\hat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\nu \hat{e}_\nu) \\ &= \hat{P}^\lambda{}_\mu \hat{\theta}_\nu \widehat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\nu \end{aligned}$
$\tilde{w}(\hat{X}) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \tilde{X})$	$\begin{aligned} \tilde{w}_\nu &= \hat{\eta}^\beta \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta} \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda) \\ &= -\hat{\eta}^\beta \hat{\theta}_\lambda \widehat{\nabla}_\beta(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda) \end{aligned}$
$\tilde{h}(\hat{X}, \hat{Y}) = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \tilde{Y})$	$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \tilde{h}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) \\ &= \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{P}^\beta \hat{e}_\mu} \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda) \\ &= \hat{P}^\beta{}_\mu \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{e}_\beta} \hat{P}^\lambda{}_\nu \hat{e}_\lambda) \\ &= -\hat{P}^\beta{}_\mu \hat{\theta}_\lambda \widehat{\nabla}_\beta(\hat{\theta}_\nu \hat{\eta}^\lambda) \end{aligned}$
$\tilde{\psi} = \hat{\theta}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta})$	$\tilde{\psi} = \hat{\eta}^\lambda \hat{\theta}_\alpha \widehat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\alpha$
$\tilde{\sigma} = \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta})$	$\tilde{\sigma}^\mu = \hat{P}^\mu{}_\beta \hat{\eta}^\lambda \widehat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\beta$
$\tilde{\gamma}(\hat{X}) = \hat{P}(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \tilde{X} - \mathcal{L}_{\hat{\eta}} \tilde{X})$	$\tilde{\gamma}^\nu{}_\mu = \tilde{\beta}^\nu{}_\mu + 2\hat{P}^\nu{}_\beta \hat{P}^\alpha{}_\mu \hat{\eta}^\lambda \hat{\Gamma}_{[\lambda\alpha]}^\beta$

CUADRO 4.1: Componentes tensoriales de los objetos levantados horizontalmente, en función de $\widehat{\nabla}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\theta}$ y el proyector P .

Estas fórmulas generales pueden ser evaluadas en una base específica para obtener expresiones más concretas. A partir de ahora, trabajaremos directamente en la base que satisface la condición (3.27), es decir, donde $\hat{\eta}^\nu = \delta_D^\nu$ y $\hat{\theta}_D = 1$. Para ilustrar el procedimiento, consideremos el campo β . La fórmula general de la tabla, $\tilde{\beta}_\mu^\nu = \hat{P}_\mu^\lambda \hat{P}_\alpha^\nu \hat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\alpha$, bajo estas condiciones se reduce, tras un breve cálculo, a la forma de componentes:

$$\tilde{\beta}^k{}_i = \hat{\Gamma}_i^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_D. \quad (4.32)$$

Aplicando este mismo procedimiento a los otros campos, se obtiene el conjunto completo de componentes.

En la tabla 4.1 se muestran cómo los objetos definidos originalmente sobre \mathcal{M} pueden reexpresarse completamente en función de cantidades del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$, preservando la estructura del fibrado y haciendo explícita la acción de la conexión afín $\hat{\nabla}$.

Ahora se puede directamente colocar en la base específica con la condición usual (3.27) es decir $\hat{\eta}^\nu = \delta_D^\nu$ y $\hat{\theta}_D = 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^k{}_i &= \hat{\Gamma}_i^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_D, \\ \tilde{\gamma}^k{}_j &= \hat{\Gamma}_D^k{}_j - \hat{\theta}_j \hat{\Gamma}_D^k{}_D, \\ \tilde{h}_{ij} &= \hat{\Gamma}_i^D{}_j - \partial_i \hat{\theta}_j + \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_i^k{}_j - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^D{}_j - \hat{\theta}_j \hat{\Gamma}_i^D{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \hat{\Gamma}_D^D{}_D \\ &\quad - \hat{\theta}_i \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_j + \hat{\theta}_j \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_i^k{}_D + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_D, \\ \tilde{\psi} &= \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_D + \hat{\Gamma}_D^D{}_D, \\ \tilde{\tau}_i &= \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_i^k{}_D + \hat{\Gamma}_i^D{}_D - \hat{\theta}_i (\hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_D + \hat{\Gamma}_D^D{}_D), \\ \tilde{w}_j &= \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_j + \hat{\Gamma}_D^D{}_j - \hat{\theta}_j (\hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_D^k{}_D + \hat{\Gamma}_D^D{}_D), \\ \tilde{\sigma}^k &= \hat{\Gamma}_D^k{}_D. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Las Ecuaciones (4.33), junto con la expresión para $\Gamma_i^k{}_j$ obtenida en la Ecuación (4.22), completan el cálculo de las componentes de los ocho campos reducidos en términos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_\mu^\rho{}_\nu$ de la conexión en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$. Es importante reiterar que, debido a la G-invariancia de la conexión $\hat{\nabla}$, las componentes aquí calculadas para los levantamientos horizontales \tilde{T} coinciden con las de los campos tensoriales T definidos en el espacio base \mathcal{M} .

Este sistema de ecuaciones establece de manera explícita la correspondencia entre la estructura geométrica afín del espacio total y el conjunto de campos $(\nabla, h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi)$ en el espacio base. Habiendo obtenido esta relación directa, el siguiente paso es invertirla para obtener el *ansatz* completo, es decir, la expresión que reconstruye $\hat{\Gamma}_\mu^\rho{}_\nu$ a partir de los campos reducidos, lo cual se abordará en la sección subsiguiente.

4.5. Invariancia de Gauge de los Campos Reducidos

Un aspecto fundamental para la consistencia del formalismo de reducción dimensional es asegurar que los campos definidos en el espacio base \mathcal{M} sean independientes de la elección de coordenadas en la fibra, es decir, que sean invariantes bajo transformaciones de gauge locales. Los ocho campos emergentes —la conexión inducida ∇ y los siete campos tensoriales

$(h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi)$ — se construyen a partir de la conexión afín $\hat{\nabla}$, el campo fundamental $\hat{\eta}$ y la forma de conexión $\hat{\theta}$ en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$.

En la Sección 4.1 se estableció que la conexión $\hat{\nabla}$ es G-invariante, una propiedad que comparte con $\hat{\eta}$ y $\hat{\theta}$. Esta invarianza bajo la acción del grupo G asegura que los campos reducidos descienden de manera bien definida al espacio cociente $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}/G$.

En esta sección, demostramos explícitamente que estos campos son, además, invariantes bajo las transformaciones de gauge locales, que corresponden a corrimientos en la coordenada de la fibra de la forma $x'^D = x^D + \lambda(x^i)$. Para fijar las ideas, se utilizará el tensor β como caso paradigmático; el análisis para los demás campos tensoriales sigue un razonamiento análogo.

La invarianza de β se puede inferir directamente de su definición geométrica y tensorial. Conceptualmente, β se define como la proyección horizontal de la derivada covariante del campo fundamental en una dirección horizontal:

$$\beta(X) = \downarrow_* \left(\hat{\nabla}_{\tilde{X}} \hat{\eta} \right), \quad (4.34)$$

donde $\tilde{X} = \uparrow X$ es el levantamiento horizontal de un vector X en la base. En la base adaptada, su forma tensorial explícita, derivada en la Tabla 4.1, es:

$$\tilde{\beta}^\nu{}_\mu = \hat{P}^\lambda{}_\mu \hat{P}^\nu{}_\alpha \hat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\alpha, \quad (4.35)$$

donde $\hat{P}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \hat{\eta}^\mu \hat{\theta}_\nu$ es el proyector horizontal.

Una transformación de gauge local $x'^D = x^D + \lambda(x^i)$ induce un cambio en la base coordenada y, consecuentemente, en las componentes de la derivada covariante. El término $\hat{\nabla}_\lambda \hat{\eta}^\alpha$ se transforma añadiendo un término proporcional a $\partial_\lambda \lambda$ y $\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta}$. Crucialmente, $\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta}$ es un vector que, por definición, se descompone en una parte horizontal (σ) y una parte vertical ($\psi \hat{\eta}$).

Cualquier término vertical inducido por la transformación de gauge será de la forma $f(x) \hat{\eta}^\alpha$. Al aplicar el proyector horizontal $\hat{P}^\nu{}_\alpha$ a esta expresión, dicho término es aniquilado:

$$\hat{P}^\nu{}_\alpha (f(x) \hat{\eta}^\alpha) = (\delta^\nu{}_\alpha - \hat{\eta}^\nu \hat{\theta}_\alpha) (f(x) \hat{\eta}^\alpha) = f(x) \hat{\eta}^\nu - f(x) \hat{\eta}^\nu (\hat{\theta}_\alpha \hat{\eta}^\alpha) = 0, \quad (4.36)$$

dado que $\hat{\theta}_\alpha \hat{\eta}^\alpha = \hat{\theta}(\hat{\eta}) = 1$. Por lo tanto, la estructura misma de la Ecuación (4.35), al involucrar el proyector \hat{P} , asegura que β (y todos los demás campos horizontales) es manifiestamente invariante bajo transformaciones de gauge.

Esta invarianza puede verificarse de manera explícita mediante un cálculo directo en la base adaptada, utilizando la expresión de $\tilde{\beta}$ en componentes derivada en la Ecuación (4.32):

$$\tilde{\beta}^k{}_i = \hat{\Gamma}_i{}^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D{}^k{}_D. \quad (4.32)$$

Bajo la transformación de gauge $x'^D = x^D + \lambda(x^i)$, y asumiendo $x'^j = x^j$, las componentes de la conexión y de la 1-forma $\hat{\theta}$ se transforman según las reglas de cambio de coordenadas. Estas transformaciones son:

$$\hat{\theta}'_i = \hat{\theta}_i - \partial_i \lambda, \quad (4.37)$$

$$\hat{\Gamma}'_D{}^k{}_D = \hat{\Gamma}_D{}^k{}_D, \quad (4.38)$$

$$\hat{\Gamma}'_i{}^k{}_D = \hat{\Gamma}_i{}^k{}_D - (\partial_i \lambda) \hat{\Gamma}_D{}^k{}_D. \quad (4.39)$$

La Ecuación (4.37) se deduce de la transformación del potencial $\tilde{A}' = \tilde{A} - (\partial_i \lambda) \hat{e}^i$ y la identificación $A_i = \hat{\theta}_i$. Las Ecuaciones (4.38) y (4.39) resultan de la transformación de los coeficientes de conexión bajo este cambio de base.

Sustituyendo estas reglas de transformación en la definición de $\tilde{\beta}'^k{}_i$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'^k{}_i &= \hat{\Gamma}'^k{}_D - \hat{\theta}'_i \hat{\Gamma}'^k{}_D \\
&= \left(\hat{\Gamma}_i^k{}_D - (\partial_i \lambda) \hat{\Gamma}_D^k{}_D \right) - \left(\hat{\theta}_i - \partial_i \lambda \right) \left(\hat{\Gamma}_D^k{}_D \right) \\
&= \hat{\Gamma}_i^k{}_D - (\partial_i \lambda) \hat{\Gamma}_D^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_D + (\partial_i \lambda) \hat{\Gamma}_D^k{}_D \\
&= \hat{\Gamma}_i^k{}_D - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}_D^k{}_D \\
&= \tilde{\beta}^k{}_i.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

La cancelación de los términos dependientes de $\partial_i \lambda$ es exacta, demostrando explícitamente la invariancia de gauge de las componentes de β .

Los enfoques geométrico, tensorial y de componentes convergen en el mismo resultado: los campos reducidos $(h, \beta, \gamma, \sigma, \tau, w, \psi)$ son G-invariantes y no se transforman bajo cambios de gauge locales. Esto confirma que son objetos tensoriales bien definidos en el espacio base \mathcal{M} , permitiendo que la física descrita en la dimensión inferior sea independiente de la elección de coordenadas en la fibra.

4.6. Ansatz de la Conexión Afín

Habiendo obtenido en las secciones 4.3 y 4.4 las expresiones explícitas para las componentes de la conexión inducida $\nabla (\Gamma_i^k{}_j)$ y los siete campos tensoriales restantes $(h_{ij}, \beta^k{}_i, \gamma^k{}_j, \sigma^k, \tau_i, w_j, \psi)$ en términos de los coeficientes $\hat{\Gamma}_\mu^\rho{}_\nu$ de la conexión G-invariante del espacio total (Ecuaciones (4.22) y (4.33)), se ha establecido un sistema completo que describe la descomposición de $\hat{\nabla}$.

El paso final y crucial es invertir este sistema para expresar los coeficientes originales $\hat{\Gamma}_\mu^\rho{}_\nu$ en $\hat{\mathcal{M}}$ exclusivamente en términos de los ocho campos definidos en el espacio base \mathcal{M} . Esta expresión inversa se denomina el *ansatz* de la conexión afín y representa la reconstrucción de la estructura geométrica total a partir de sus componentes reducidas.

Es instructivo verificar cómo algunos componentes clave del *ansatz* emergen directamente de las definiciones geométricas. Por ejemplo, utilizando la relación $\hat{e}^D = \hat{\theta} - \tilde{A}$ (Ecuación (3.29)) y las definiciones de ψ y σ (Ecuaciones (4.17) y (4.16)), se puede derivar la componente totalmente vertical:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_D^D{}_D &= \hat{e}^D (\widehat{\nabla}_{\hat{e}_D} \hat{e}_D) = (\hat{\theta} - \tilde{A}) (\widehat{\nabla}_{\hat{e}_D} \hat{e}_D) \\
&= \hat{\theta} (\widehat{\nabla}_{\hat{e}_D} \hat{e}_D) - \tilde{A} (\widehat{\nabla}_{\hat{e}_D} \hat{e}_D) \\
&= \psi - A_k \downarrow (\widehat{\nabla}_{\hat{e}_D} \hat{e}_D)^k = \psi - A_k \sigma^k \\
&= \psi - \hat{\theta}_k \sigma^k.
\end{aligned}$$

Este cálculo ilustra cómo la estructura del *ansatz* está intrínsecamente ligada a las definiciones previas.

La inversión completa del sistema (4.22) y (4.33) conduce al *ansatz* explícito para la conexión afín $\hat{\Gamma}$ en la base adaptada:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_i^k{}_j &= \Gamma_i^k{}_j + \hat{\theta}_j \beta^k{}_i + \hat{\theta}_i \gamma^k{}_j + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_D^k{}_j &= \gamma^k{}_j + \hat{\theta}_j \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_i^D{}_j &= h_{ij} + \hat{\theta}_i w_j + \hat{\theta}_j \tau_i + \partial_i \hat{\theta}_j + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \psi - \hat{\theta}_k \hat{\Gamma}_i^k{}_j, \\
 \hat{\Gamma}_i^k{}_D &= \beta^k{}_i + \hat{\theta}_i \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_D^k{}_D &= \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_i^D{}_D &= \tau_i + \hat{\theta}_i \psi - \hat{\theta}_k \beta^k{}_i - \hat{\theta}_i \hat{\theta}_k \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_D^D{}_j &= w_j + \hat{\theta}_j \psi - \hat{\theta}_k \gamma^k{}_j - \hat{\theta}_j \hat{\theta}_k \sigma^k, \\
 \hat{\Gamma}_D^D{}_D &= \psi - \hat{\theta}_i \sigma^i.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Este *ansatz* (Eq. (4.41)) constituye el resultado central de la descomposición dimensional afín, estableciendo una correspondencia biunívoca entre la conexión $\hat{\Gamma}$ del espacio total y el conjunto de ocho campos geométricos definidos en el espacio base \mathcal{M} . Representa, por tanto, la herramienta fundamental que permitirá, en las secciones subsiguientes, calcular la curvatura efectiva en el espacio reducido y derivar las ecuaciones de campo resultantes, análisis que se abordará en detalle en la sección 4.7.

4.7. Reducción dimensional de soluciones de vacío en gravedad afín.

En la sección anterior, hemos desarrollado un *ansatz* que generaliza la descomposición de la conexión en la teoría de Kaluza–Klein para el caso de una conexión afín sin métrica (4.41). En esta sección, nuestro objetivo es utilizar este *ansatz* para calcular explícitamente el tensor de curvatura de Riemann y el tensor de Ricci. Esto nos permitirá analizar cómo la curvatura del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ se relaciona con las componentes de la conexión en el espacio base \mathcal{M} y las direcciones de la fibra, proporcionando una visión más profunda de la geometría de la reducción dimensional en teorías afines. El análisis se centrará en las soluciones de vacío, $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$. Esta condición no solo define el vacío en Relatividad General [1], sino que fue el punto de partida original de Kaluza [77] y es central en la formulación clásica de Kaluza-Klein [79]. Además, es relevante en teorías puramente afines como la de Eddington [8], lo que subraya su importancia fundamental en diversos marcos teóricos de la gravedad.

El tensor de curvatura de Riemann, denotado como $\hat{R}_{\nu\mu}{}^\lambda{}_\kappa$, es una medida fundamental de la curvatura en una variedad. En términos de la conexión afín $\hat{\Gamma}$ y utilizando una notación donde el primer índice inferior indica la derivada respecto a esa coordenada, sus componentes se definen como [1, 12]:

$$\hat{R}_{\nu\mu}{}^\lambda{}_\kappa = \hat{\partial}_\nu \hat{\Gamma}_\mu{}^\lambda{}_\kappa - \hat{\partial}_\mu \hat{\Gamma}_\nu{}^\lambda{}_\kappa + \hat{\Gamma}_\nu{}^\lambda{}_\eta \hat{\Gamma}_\mu{}^\eta{}_\kappa - \hat{\Gamma}_\mu{}^\lambda{}_\eta \hat{\Gamma}_\nu{}^\eta{}_\kappa \tag{4.42}$$

donde $\hat{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\nu}$. Este tensor cuantifica cómo los vectores cambian al ser transportados paralelamente alrededor de lazos infinitesimales en $\hat{\mathcal{M}}$, y su cálculo es esencial para entender la geometría del espacio-tiempo en el contexto de la teoría de Kaluza-Klein afín. El tensor de

Ricci del espacio total se obtiene al contraer el tensor de curvatura de Riemann [1]. Utilizaremos la notación caligráfica $\hat{R}_{\mu\kappa}$ para esta definición fundamental:

$$\hat{R}_{\mu\kappa} = \hat{R}_{\nu\mu}{}^{\nu}{}_{\kappa} \quad (4.43)$$

En el modelo original de Kaluza-Klein, las ecuaciones de campo relevantes eran precisamente la anulación del tensor de Ricci ($\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$) en un espacio-tiempo de cinco dimensiones [77, 79]. Dicho modelo puramente gravitacional produce una teoría efectiva en cuatro dimensiones que consiste en Relatividad General acoplada a un potencial electromagnético y un campo escalar (el dilatón) [79]. Es interesante notar que la condición de tensor de Ricci nulo también es relevante en otras teorías gravitacionales, incluyendo los modelos afines pioneros de Einstein [129] y Eddington [8], e incluso en supergravedad [80].

Posteriormente, al referirnos a las componentes calculadas del tensor de Ricci (posiblemente ya proyectadas o simplificadas), usaremos la notación estándar $\hat{R}_{\mu\kappa}$ o R_{ij} según corresponda, manteniendo así la distinción respecto al cálculo intrínseco R_{ij} vs. la proyección $\downarrow \hat{R}_{ij}$.

Este tensor es de gran importancia, ya que, en la Relatividad General, está directamente relacionado con la distribución de materia y energía a través de las ecuaciones de campo de Einstein [2]. En nuestro contexto afín, nos proporciona información crucial sobre la traza de la curvatura $\hat{\mathcal{M}}$. Como se destacó, la condición de vacío (usando la notación estándar para las componentes calculadas) $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$ será central en nuestro análisis. En teorías afines de la gravedad, como las mencionadas de Einstein y Eddington, donde la conexión es la variable fundamental, las soluciones de vacío $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$ juegan un papel importante. En estas teorías, la ausencia de una métrica a priori implica que conceptos como la distancia y el ángulo no son fundamentales, y la gravedad se manifiesta a través de la forma en que los vectores se transportan paralelamente [8, 105].

El cálculo explícito de la descomposición del tensor de Ricci (4.43) se llevó a cabo siguiendo estos pasos, utilizando el software de álgebra computacional Cadabra [130, 131] para manejar la complejidad algebraica:

- **Descomposición de Índices:** Los índices griegos del tensor de Riemann $\hat{R}_{\nu\mu}{}^{\lambda}{}_{\kappa}$ se separaron sistemáticamente para distinguir entre componentes en el espacio base \mathcal{M} (índices latinos i, j, \dots) y la dirección de la fibra (índice D). Por ejemplo, una contracción genérica se descompone como $\hat{A}_{\nu}\hat{B}^{\nu} = \hat{A}_i\hat{B}^i + \hat{A}_D\hat{B}^D$. Esto permitió reescribir las contracciones y sumas en la definición del tensor de Ricci (4.43) de forma explícita.
- **Sustitución del Ansatz:** El ansatz para la conexión afín (4.41) se sustituyó en la expresión descompuesta del tensor de Ricci. Como resultado, $\hat{R}_{\mu\kappa}$ quedó completamente expresado en términos de la conexión inducida $\Gamma_i{}^k{}_j$ y los siete campos tensoriales $(\beta, \gamma, h, \tau, w, \sigma, \psi)$ definidos en la Sección 4.6, junto con sus derivadas covariantes ∇ (respecto a Γ) y parciales ∂ . Se utilizó la propiedad $\hat{\partial}_i f = \partial_i f$ para funciones f que no dependen de la coordenada extra x^D , como es el caso de los campos reducidos debido a la condición de cilindro (4.10).
- **Reagrupamiento de Términos:** Los numerosos términos resultantes se reagruparon para identificar explícitamente el tensor de Ricci R_{ij} asociado a la conexión inducida Γ

en el espacio base \mathcal{M} . Este se define a partir del tensor de Riemann intrínseco $R_{nm}{}^l{}_k$:

$$R_{nm}{}^l{}_k = \partial_n \Gamma_m{}^l{}_k - \partial_m \Gamma_n{}^l{}_k + \Gamma_n{}^l{}_e \Gamma_m{}^e{}_k - \Gamma_m{}^l{}_e \Gamma_n{}^e{}_k, \quad R_{ik} = R_{ni}{}^n{}_k. \quad (4.44)$$

Es crucial notar que R_{ij} (calculado intrínsecamente en \mathcal{M}) no es, en general, igual a la simple proyección $R_{ij} = \downarrow \hat{R}_{ij}$ del tensor de Ricci total. Proyectar la curvatura total mediante el operador \downarrow (3.7) no equivale a calcular la curvatura intrínseca de la conexión Γ (4.44). La derivada covariante ∇ asociada a Γ actúa sobre un vector V^j como:

$$\nabla_i V^j = \partial_i V^j + \Gamma_i{}^j{}_k V^k. \quad (4.45)$$

Este algoritmo produce la descomposición explícita del tensor de Ricci del espacio total $\hat{R}_{\mu\kappa}$ en términos de los objetos geométricos definidos en el espacio base \mathcal{M} , cuyas componentes se presentan a continuación.

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= R_{ij} - \nabla_i w_j + A_i \nabla_k \gamma^k{}_j + A_j \nabla_k \beta^k{}_i - A_j \nabla_i \beta^k{}_k - A_j \nabla_i \psi \\ &\quad - \beta^k{}_i h_{kj} + \beta^k{}_k h_{ij} + \gamma^k{}_j \nabla_k A_i - \gamma^k{}_j \nabla_i A_k - \gamma^k{}_j h_{ik} + \psi h_{ij} \\ &\quad - \tau_i w_j + A_i A_j \nabla_k \sigma^k + A_i \beta^k{}_k w_j - A_i \sigma^k h_{kj} + 2A_j \Gamma_{[k}{}^l{}_i] \beta^k{}_l \\ &\quad - A_j \beta^k{}_i \tau_k + A_j \beta^k{}_i w_k + A_j \beta^k{}_k \tau_i + A_j \nabla_k A_i \sigma^k - A_j \nabla_i A_k \sigma^k - A_j \sigma^k h_{ik} \\ &\quad + 2A_k \Gamma_{[l}{}^k{}_i] \gamma^l{}_j + A_i A_j \beta^k{}_k \psi - A_i A_j \beta^k{}_l \gamma^l{}_k - A_i A_j \sigma^k \tau_k - 2A_j A_k \Gamma_{[i}{}^k{}_l] \sigma^l \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{DD} &= \nabla_i \sigma^i + A_i \beta^j{}_j \sigma^i + A_i \gamma^i{}_j \sigma^j + A_i A_j \sigma^i \sigma^j + \beta^i{}_i \psi - \beta^i{}_i A_j \sigma^j \\ &\quad + A_i \sigma^i \psi - 2A_i \sigma^i A_j \sigma^j - \gamma^i{}_j \beta^j{}_i - \gamma^i{}_j A_i \sigma^j - A_i \sigma^j \beta^i{}_j - \sigma^i \tau_i \\ &\quad - \sigma^i A_i \psi + \sigma^i A_k \beta^k{}_i + \sigma^i A_i A_k \sigma^k \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{iD} &= \nabla_j \beta^j{}_i - \nabla_i \beta^j{}_j - \nabla_i \psi + A_i \nabla_j \sigma^j - 2\Gamma_{[i}{}^j{}_k] \beta^k{}_j - \beta^j{}_i \tau_j \\ &\quad + \beta^j{}_i w_j + \beta^j{}_j \tau_i + \nabla_j A_i \sigma^j - \nabla_i A_j \sigma^j - \sigma^j h_{ij} + A_i \beta^j{}_j \psi \\ &\quad - A_i \beta^j{}_k \gamma^k{}_j - A_i \sigma^j \tau_j - 2A_j \Gamma_{[i}{}^j{}_k] \sigma^k \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Dj} &= \nabla_i \gamma^i{}_j + A_j \nabla_i \sigma^i + \beta^i{}_i w_j - \sigma^i h_{ij} \\ &\quad + A_j \beta^i{}_i \psi - A_j \beta^i{}_k \gamma^k{}_i - A_j \sigma^i \tau_i \end{aligned} \quad (4.49)$$

Para simplificar estas expresiones recordemos que el fibrado se descompone localmente como suma directa del subespacio vertical $V\widehat{\mathcal{M}} = \text{gen}\{\hat{\eta}\}$ y el subespacio horizontal $H\widehat{\mathcal{M}} = \text{ker}\{\hat{\theta}\}$. Esta descomposición es estable bajo las siguientes transformaciones de escala:

$$\hat{\eta} \rightarrow \phi_1 \hat{\eta}, \quad (4.50)$$

$$\hat{\theta} \rightarrow \phi_2 \hat{\theta}. \quad (4.51)$$

En efecto, escalar $\hat{\eta}$ no cambia el subespacio vertical generado, y escalar $\hat{\theta}$ no cambia su núcleo, es decir, el subespacio horizontal. Sin embargo, la cantidad $\hat{\theta}(\hat{\eta})$ cambia como $\phi_1\phi_2\hat{\theta}(\hat{\eta})$. Por lo tanto, al imponer la condición de normalización

$$\hat{\theta}(\hat{\eta}) = 1,$$

estamos fijando la combinación $\phi_1\phi_2 = 1$, lo cual elimina un grado de libertad. Aún queda otro grado de libertad de escala que podemos aprovechar para imponer una segunda condición de normalización.

Para motivar esta segunda condición, recordamos que en la geometría de subvariedades riemannianas existen dos formas equivalentes de definir la segunda forma fundamental:

1. Mide cuánto se proyecta la derivada covariante de un vector sobre la dirección normal.
2. Mide cómo varía la dirección del espacio normal (o su espacio ortogonal) al desplazarse tangencialmente.

En nuestro caso, el tensor h , definido por

$$h_{ij} = \hat{\theta}(\widehat{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j),$$

mide cuánto se proyecta la derivada en la dirección de la fibra, aunque esta no sea necesariamente normal. Por otro lado, la cantidad $-P^\beta_j\widehat{\nabla}_i\hat{\theta}_\beta$ mide cómo varía la dirección del espacio horizontal al desplazarse tangencialmente.

Entonces por analogía entre espacio horizontal con el ortogonal podemos exigir que se cumpla:

$$h_{ij} = -\hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\widehat{\nabla}_\beta(\hat{\theta}_j\hat{\eta}^\lambda) = -\hat{P}^\beta_i\widehat{\nabla}_\beta\hat{\theta}_j. \quad (4.52)$$

Esta definicioin es analoga a la que sugiere Nozicka [132].

Lo cual implica $\hat{\theta}_j\hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\widehat{\nabla}_\beta\hat{\eta}^\lambda = 0$ como queremos que se cumpla para todo $\hat{\theta}_j$ debemos imponer .

$$\tilde{\tau}_i = \hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\widehat{\nabla}_\beta\hat{\eta}^\lambda = 0 \quad (4.53)$$

Que define la segunda condición de normalización analoga a la de shouten. consideremos

$$\hat{\eta} \rightarrow \phi\hat{\eta}, \quad (4.54)$$

$$\hat{\theta} \rightarrow \phi^{-1}\hat{\theta}. \quad (4.55)$$

Entonces

$$\hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\widehat{\nabla}_\beta(\phi\hat{\eta}^\lambda) = 0 \quad (4.56)$$

Expandiendo la derivada covariante y aplicando la forma del proyector:

$$0 = \hat{P}^\beta_i\widehat{\nabla}_\beta\phi + \phi\hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\widehat{\nabla}_\beta\hat{\eta}^\lambda \quad (4.57)$$

$$= \hat{P}^\beta_i\partial_\beta\phi + \phi\hat{P}^\beta_i\hat{\theta}_\lambda\left(\partial_\beta\hat{\eta}^\lambda + \hat{\Gamma}_\beta^\lambda{}_\sigma\hat{\eta}^\sigma\right) \quad (4.58)$$

Usando que $\hat{\eta}^\lambda = \delta^\lambda_D$, $\hat{\theta}_\lambda = \delta^D_\lambda$, y el proyector $\hat{P}^\beta_i = \delta^\beta_i - \delta^\beta_D \hat{\theta}_i$, se obtiene:

$$0 = (\delta^\beta_i - \delta^\beta_D \hat{\theta}_i) \partial_\beta \phi + \phi (\delta^\beta_i - \delta^\beta_D \hat{\theta}_i) (\partial_\beta \hat{\eta}^D + \hat{\Gamma}^\beta_D) \quad (4.59)$$

$$= \partial_i \phi - \hat{\theta}_i \partial_D \phi + \phi (\hat{\Gamma}^D_i - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}^D_D) \quad (4.60)$$

Si imponemos que $\partial_D \phi = 0$ la ecuación se reduce a:

$$\partial_i \log \phi = \hat{\Gamma}^D_i - \hat{\theta}_i \hat{\Gamma}^D_D \quad (4.61)$$

como $\partial_D = \hat{\Gamma}^\lambda_\mu$ y $\partial_D \hat{\theta}_j = 0$ el sistema tiene solución.

En conclusión, solo requerimos una condición de normalización, fijando apropiadamente la escala ϕ , para imponer la condición $\tau = 0$.

Para simplificar las expresiones obtenidas para el tensor de Ricci, adoptaremos las siguientes consideraciones geométricas y físicas:

- *Conexión sin torsión.* Consideramos que la conexión afín $\hat{\nabla}$ en el espacio total es libre de torsión [133], es decir, su tensor de torsión se anula, lo que implica la simetría de los coeficientes en una base coordenada:

$$\hat{\Gamma}^\nu_\mu \lambda = \hat{\Gamma}^\nu_\lambda \mu. \quad (4.62)$$

Como se deriva de las definiciones en la Tabla 4.1 (comparando $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ en (4.33) y considerando (4.31) para $\tilde{\tau}$ y \tilde{w}), esta condición impone las siguientes relaciones entre los campos reducidos:

$$\beta^i_j = \gamma^i_j, \quad (4.63)$$

$$\tau_i = w_i. \quad (4.64)$$

- *Fibra autoparalela.* Se postula que las fibras del fibrado (las trayectorias generadas por $\hat{\eta}$) son curvas autoparalelas (1.33) respecto a la conexión $\hat{\nabla}$. Como $\hat{\eta}$ es tangente a la fibra, su aceleración covariante debe ser proporcional a sí misma:

$$\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta} = \alpha(\hat{x}) \hat{\eta}. \quad (4.65)$$

Al aplicar el proyector horizontal P (3.11), que anula la componente vertical, se obtiene directamente que el campo vectorial σ (4.16) debe ser nulo:

$$P(\hat{\nabla}_{\hat{\eta}} \hat{\eta}) = P(\alpha \hat{\eta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0. \quad (4.66)$$

- *Segunda condición de normalización.* Imponemos explícitamente la segunda condición de normalización (4.52), es decir, que el covector τ se anule:

$$\tau_i = 0. \quad (4.67)$$

Debido a la condición de torsión nula (4.64), esto implica inmediatamente que el covector w también se anula:

$$w_i = 0. \quad (4.68)$$

- *Tensor de Ricci simétrico en el espacio base.* Exigimos que el tensor de Ricci R_{ij} (4.44), asociado a la conexión inducida Γ en la variedad base \mathcal{M} , sea simétrico:

$$R_{ij} = R_{ji}. \quad (4.69)$$

Esta condición no es universal para cualquier conexión afín, pero es una propiedad fundamental de la conexión de Levi-Civita en geometría Riemanniana. Imponerla aquí es equivalente a restringir la conexión inducida Γ a ser una **conexión equiafne** [6].

Con estas cuatro consideraciones (4.63, 4.66, 4.68, 4.7), las componentes del tensor de Ricci $\hat{R}_{\mu\kappa}$ en el espacio total se simplifican considerablemente, como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= 0 = R_{ij} + A_i \nabla_k \beta^k_j + A_j \nabla_k \beta^k_i - A_j \nabla_i \beta^k_k - A_j \nabla_i \psi - \beta^k_i h_{kj} + \beta^k_j \nabla_k A_i \\ &\quad - \beta^k_j \nabla_i A_k - \beta^k_j h_{ik} + \beta^k_k h_{ij} + \psi h_{ij} + A_i A_j \beta^k_k \psi - A_i A_j \beta^k_l \beta^l_k \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\hat{R}_{Dj} = 0 = \nabla_i \beta^i_j + A_j \beta^i_i \psi - A_j \beta^i_k \beta^k_i \quad (4.71)$$

$$\hat{R}_{iD} = 0 = \nabla_j \beta^j_i - \nabla_i \beta^j_j - \nabla_i \psi + A_i \beta^j_j \psi - A_i \beta^j_k \beta^k_j \quad (4.72)$$

$$\hat{R}_{DD} = 0 = \beta^i_i \psi - \beta^i_j \beta^j_i \quad (4.73)$$

Sustituyendo (4.73) en (4.71), se obtiene:

$$\nabla_i \beta^i_j = 0, \quad (4.74)$$

y reemplazando (4.74) y (4.71) en (4.72), se concluye que:

$$\beta^i_i + \psi = c_1, \quad (4.75)$$

donde c_1 es una constante.

A continuación, calculamos la parte antisimétrica de (4.70). Utilizando los resultados anteriores y sustituyendo (4.73) y (4.74), obtenemos:

$$(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) c_1 = 0. \quad (4.76)$$

Recordemos que el tensor de campo electromagnético, como se discutió en la sección 3.5, se define como:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i. \quad (4.77)$$

Para que (4.76) permita un campo electromagnético no trivial, es necesario imponer $c_1 = 0$, lo que implica:

$$\beta^i{}_i = -\psi, \quad (4.78)$$

y, en consecuencia, la ecuación (4.73) se transforma en:

$$\beta^i{}_j \beta^j{}_i = -\psi^2. \quad (4.79)$$

Por otro lado, recordando que según la ecuación (4.33) separamos la parte simétrica y antisimétrica de h_{ij} como:

$$h_{[ij]} = H_{ij} - \frac{1}{2}F_{ij}, \quad (4.80)$$

donde H_{ij} es un tensor simétrico, al calcular la parte simétrica de (4.70) y utilizando los resultados anteriores, obtenemos:

$$R_{ij} = \beta^k{}_{(i} F_{j)k} + 2\beta^k{}_{(i} H_{j)k}. \quad (4.81)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (4.74), (4.78), (4.79) y (4.81) constituyen el sistema de campo resultante para la teoría reducida, derivado de $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$ bajo las condiciones simplificadoras adoptadas (conexión sin torsión, fibra autoparalela, $\tau_i = 0$ y R_{ij} simétrico).

Un aspecto fundamental de este sistema puramente afín es que, si bien el tensor

$$F_{ij} = 2\nabla_{[i} A_{j]} \quad (4.82)$$

(relacionado algebraicamente con h_{ij}) está presente, las ecuaciones no le proporcionan una dinámica propia análoga a las ecuaciones de Maxwell.

Surge entonces la pregunta crucial: ¿puede este marco afín reproducir la interacción gravitacional-electromagnética conocida, al menos en algún límite o bajo ciertas condiciones? Para investigarlo, y para comprender mejor el rol físico de los campos tensoriales $\beta^k{}_i$ y

$$H_{ij} = h_{(ij)} \quad (4.83)$$

que emergen de la descomposición de la conexión, resulta instructivo comparar nuestro sistema con la formulación métrica estándar de Kaluza-Klein [79]. En particular, examinaremos qué forma adopta $\beta^k{}_i$ cuando la conexión $\hat{\Gamma}$ es la de Levi-Civita (1.40) asociada a la métrica \hat{g} (2.13).

Calculando $\beta^k{}_i$ a partir de su definición (4.32) usando la conexión de Levi-Civita (1.40) para la métrica KK (2.13), se obtiene la expresión general [79]:

$$\beta^k{}_i = g^{kj} \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \frac{1}{2} A^k \partial_i \phi + \frac{1}{2} A_i g^{kj} \partial_j \phi. \quad (4.84)$$

donde $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, ϕ es el campo dilatón y g^{kj} es la inversa de la métrica g_{ij} del espacio base. En el caso simplificado donde el dilatón es constante ($\partial_i \phi = 0$), esta relación se reduce a

$$\beta^k{}_i = g^{kj} \frac{\phi^2}{2} F_{ij}. \quad (4.85)$$

Esta forma específica, $\beta \propto g^{-1} F$, es la que sugiere la analogía métrica.

Ahora, volvamos a nuestro sistema afín (4.74)–(4.81) y exploremos la hipótesis de consistencia: ¿qué sucede si la dinámica de la conexión afín $\hat{\Gamma}$ selecciona soluciones donde

$$\beta^k{}_i = \alpha g^{kl} F_{li} \quad (4.86)$$

Aquí, α es una constante de proporcionalidad y g_{ij} es una métrica que tentativamente identificamos con el tensor simétrico H_{ij} emergente de nuestra teoría (o su inversa g^{ij} con H^{ij}). Veamos las consecuencias de esta hipótesis sobre las ecuaciones afines.

Primero, la ecuación (4.74), $\nabla_i \beta^i{}_j = 0$, se transforma en $\nabla_i (\alpha g^{ik} F_{kj}) = 0$. Si la conexión ∇ (asociada a Γ) resulta ser compatible con la métrica g_{ij} identificada ($\nabla_k g_{ij} = 0$) y α es constante, recuperamos la ecuación de Maxwell homogénea:

$$\nabla_i F^{ij} = 0. \quad (4.87)$$

Segundo, la hipótesis (4.86) implica que la traza $\beta^i{}_i = \alpha g^{ij} F_{ji}$ es idénticamente nula, debido a la simetría de g^{ij} y la antisimetría de F_{ji} . Al sustituir esto en la ecuación afín (4.78) ($\beta^i{}_i = -\psi$), se deduce necesariamente que $\psi = 0$.

Tercero, con $\psi = 0$, la ecuación afín (4.79) ($\beta^i{}_j \beta^j{}_i = -\psi^2$) exige que $\beta^i{}_j \beta^j{}_i = 0$. Sustituyendo la hipótesis (4.86) en esta condición:

$$(\alpha g^{ik} F_{kj})(\alpha g^{jl} F_{li}) = \alpha^2 F^k{}_j F^j{}_k = 0 \Rightarrow F_{lm} F^{lm} = 0. \quad (4.88)$$

Esta es precisamente la condición que define campos electromagnéticos puramente radiativos.

$$F^j{}_i F^i{}_j = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) = 0, \quad (4.89)$$

donde c es la velocidad de la luz. Esta condición se cumple siempre que no existan fuentes ($j_i = 0$) y se verifiquen las condiciones de radiación de Sommerfeld. Es decir, únicamente se admiten soluciones radiativas.

Es crucial notar que esta condición no se asumió, sino que emerge como una consecuencia necesaria para que la hipótesis $\beta \propto g^{-1}F$ sea compatible con el sistema de ecuaciones afín original $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$ (bajo las simplificaciones previas).

Finalmente, analizamos la ecuación para R_{ij} , (4.81). Como la hipótesis (4.86) implica que $\beta_{ij} = g_{ik} \beta^k{}_j = \alpha F_{ij}$ es antisimétrico, y estamos identificando $g_{ij} = H_{ij}$ (simétrico), el término $2 \beta^k ({}^k H_j)_k = \beta_{ji} + \beta_{ij}$ se anula idénticamente. Por lo tanto, la ecuación (4.81) se reduce a

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \beta^k ({}^k F_j)_k = \beta^k{}_i F_{jk} + \beta^k{}_j F_{ik} \\ &= \alpha (F^k{}_i F_{jk} + F^k{}_j F_{ik}) \\ &= 2\alpha F_{ik} F_j{}^k. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Esta ecuación tiene exactamente la forma $R_{ij} = \kappa T_{ij}^{\text{EM(rad)}}$, donde $T_{ij}^{\text{EM(rad)}} = F_{ik} F_j{}^k$ es el tensor energía-momento para campos radiativos y $\kappa = 2\alpha$.

Los resultados anteriores son reveladores: muestran que si la dinámica intrínseca de la conexión afín $\hat{\Gamma}$ (a través de $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$) admite soluciones donde el tensor emergente $\beta^k{}_i$ toma la forma específica (4.86) —una forma sugerida por la física métrica conocida—, entonces el sistema completo de ecuaciones afines se reduce consistentemente al sistema de Einstein–Maxwell

(4.90), (4.87), exclusivamente para campos electromagnéticos radiativos (4.88). La constante de proporcionalidad α queda fijada a $\kappa/2$, relacionando la estructura afín con la constante gravitacional.

Es fundamental reiterar en este punto la filosofía subyacente de este trabajo: la teoría fundamental es puramente afín, definida únicamente por la conexión $\hat{\Gamma}$. Esta conexión, a través de la ecuación de las autoparalelas (1.33), define intrínsecamente las trayectorias "más rectas" posibles en el espacio-tiempo $\hat{\mathcal{M}}$, independientemente de cualquier noción de distancia o medida. Podemos visualizar estas autoparalelas como líneas "pintadas" sobre la variedad; su existencia y forma dependen solo de $\hat{\Gamma}$. La pregunta sobre la "métrica" surge al intentar *medir* distancias a lo largo de estas líneas o ángulos entre ellas, es decir, al buscar una regla compatible con la estructura afín.

De la descomposición de $\hat{\Gamma}$ emerge naturalmente un tensor simétrico $H_{ij} = h_{(ij)}$, presentándose como un candidato plausible para desempeñar el rol de tensor métrico g_{ij} en el espacio base \mathcal{M} [105, 108]. Sin embargo, es crucial subrayar que esta identificación no es axiomática ni necesariamente única. H_{ij} es un tensor simétrico disponible construido a partir de $\hat{\Gamma}$, pero la teoría afín, en principio, no privilegia una única forma de definir distancias. Podrían existir otras construcciones tensoriales simétricas a partir de la conexión o su curvatura que también podrían postularse como candidatas a métrica.

La validación de H_{ij} como la métrica física g_{ij} relevante proviene de una condición de consistencia externa: ¿Permite esta identificación recuperar la física conocida en algún límite? Solo si la dinámica dictada por las ecuaciones de campo afines (4.74)-(4.81), al postular la relación $\beta \propto H^{-1}F$ (4.86), conduce a un sistema reconocible como Einstein-Maxwell, podemos interpretar *a posteriori* que H_{ij} actúa consistentemente como la métrica g_{ij} en ese sector de soluciones. La métrica, por tanto, emerge como una propiedad efectiva de ciertas soluciones cuya forma específica (H_{ij}) se valida por su compatibilidad con la física observada (electrodinámica), no como un postulado fundamental e incuestionable de la teoría afín misma. La condición $\beta^i_i = 0$, consecuencia necesaria, es invariante bajo transformaciones de Weyl $g'_{ij} = \Omega^2 g_{ij}$ [7], lo que sugiere que quizás la estructura emergente más fundamental sea una clase conforme de métricas, siendo H_{ij} un representante particular seleccionado por la dinámica o condiciones adicionales.

En consecuencia, hemos demostrado que, bajo las condiciones de normalización y torsión nula, la reducción dimensional afín de $\hat{R}_{\mu\kappa} = 0$ puede, de hecho, reproducir la estructura del sistema de Einstein-Maxwell, pero lo hace de forma natural y restrictiva, seleccionando únicamente el sector de campos puramente radiativos. Esto subraya el carácter fundamental de la conexión afín y posiciona a la métrica como una estructura emergente y condicionada por la dinámica subyacente.

Conclusiones

Habiendo culminado en el capítulo anterior el desarrollo técnico del formalismo de reducción dimensional puramente afín y la derivación de las ecuaciones de campo efectivas, este capítulo final se dedica a trascender el cálculo para explorar el significado y las consecuencias de los resultados obtenidos. El recorrido comenzará con una síntesis de los hallazgos principales, seguida de una discusión sobre su interpretación geométrica y física, con especial énfasis en la naturaleza emergente de la estructura métrica. Posteriormente, se explorarán las proyecciones del trabajo, delineando las futuras líneas de investigación que este formalismo inaugura. El objetivo es, por tanto, consolidar el aporte original de esta tesis, situando sus resultados en un contexto más amplio y destacando su potencial para futuras investigaciones en el campo de la gravedad afín y la unificación geométrica.

5.1. Síntesis y Discusión de Resultados

El desarrollo matemático presentado en los capítulos anteriores culmina en un conjunto de resultados que validan la propuesta central de esta tesis: la viabilidad de una teoría de Kaluza-Klein en un marco puramente afín. El logro técnico fundamental ha sido la construcción de un formalismo de reducción dimensional sistemático, fundamentado en la geometría de fibrados principales y la conexión de Ehresmann [11–13], que opera sin presuponer una estructura métrica. La pieza central de este andamiaje es el *ansatz* de la conexión afín, derivado en la Ecuación (4.41), el cual establece una correspondencia biunívoca entre la conexión del espacio total $\hat{\mathcal{M}}$ y un conjunto de campos tensoriales definidos en el espacio base \mathcal{M} . Este formalismo permitió calcular de manera explícita el tensor de Ricci reducido y, con ello, derivar las ecuaciones de campo efectivas que gobiernan la dinámica en la dimensión inferior.

Más allá del desarrollo técnico, este trabajo ofrece una profunda reinterpretación geométrica de los campos físicos. Uno de los resultados más significativos es que el campo electromagnético emerge no como un campo postulado, sino como una consecuencia inevitable de la estructura del fibrado. Específicamente, se ha demostrado que su existencia está intrínsecamente ligada a la no-integrabilidad de la distribución horizontal. Esta conclusión, que generaliza resultados previos en la literatura, eleva al electromagnetismo a la categoría de manifestación geométrica. Además, al imponer un conjunto de condiciones geométricas físicamente razonables —una conexión sin torsión, fibras autoparalelas y una normalización adecuada—, se demostró que las ecuaciones de campo de la teoría reducida corresponden precisamente al sistema de Einstein-Maxwell para campos puramente radiativos [1, 79]. La condición radiativa, $F^j{}_i F^i{}_j = 0$, no es impuesta externamente, sino que surge como una condición de consistencia del propio sistema de ecuaciones afín.

Quizás la consecuencia conceptual más importante de este formalismo es la inversión del rol jerárquico de la métrica. En las teorías gravitacionales estándar, la métrica es un axioma fundamental del espaciotiempo [1, 2]. En el presente trabajo, en cambio, se ha mostrado que la necesidad de una estructura métrica aparece de manera natural y secundaria, como un requisito para dotar de dinámica a los campos emergentes. En particular, el tensor simétrico $H_{ij} = h_{(ij)}$, que surge de la descomposición de la conexión, se presenta como el candidato natural para ser identificado como la métrica efectiva del espacio base. Este resultado respalda con fuerza la hipótesis de que el espaciotiempo puede ser fundamentalmente afín, una idea explorada originalmente por pioneros como Eddington [8] y Schrödinger [114], y desarrollada en formalismos modernos [105, 108].

5.2. Proyecciones y Líneas Futuras de Investigación

El formalismo desarrollado en esta tesis no solo resuelve las preguntas de investigación planteadas, sino que también establece una base sólida para explorar nuevas fronteras en el campo de la gravedad afín y la unificación geométrica. Las implicaciones de este trabajo se extienden más allá del modelo específico analizado, abriendo diversas y prometedoras líneas de investigación para el futuro. A continuación, se detallan las más directas y significativas.

Análogos Hamiltonianos y el Límite Integrable

Uno de los resultados centrales de este trabajo es la identificación del campo electromagnético con la no-integrabilidad de la distribución horizontal. Esto suscita naturalmente la pregunta sobre la interpretación física del caso opuesto: cuando la distribución es integrable. En este límite, el formalismo presenta una notable analogía con la foliación del espaciotiempo en hipersuperficies transversales, característica del formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), utilizado en relatividad general para el análisis hamiltoniano del espaciotiempo . [134].

Esta correspondencia es conceptualmente profunda y sugiere una posible vía para extender los métodos canónicos a los marcos puramente afines. Explorar sistemáticamente dicha analogía para desarrollar un formalismo hamiltoniano aplicable a teorías como la Gravedad Polinomial Afín permitiría abordar el estudio de cantidades conservadas, como la energía y el momento, en el contexto de geometrías no métricas, un problema de considerable dificultad teórica.

Aplicación a Teorías de Gravedad Afín

Más allá de ser un modelo de unificación autocontenido, el formalismo de Kaluza-Klein afín desarrollado aquí constituye una poderosa herramienta metodológica. Una de sus aplicaciones más prometedoras es su uso como un mecanismo para acoplar campos de materia de manera geométrica a teorías de gravedad puramente afines, como la Gravedad Polinomial Afín [9, 108].

Históricamente, un desafío para las teorías afines ha sido la incorporación consistente de la materia. El mecanismo Kaluza-Klein ofrece una vía natural para introducir campos de gauge, análogos al electromagnetismo, que surgen de la propia geometría del fibrado. Esta línea de investigación se centraría en aplicar el ‘ansatz’ de la conexión para estudiar cómo la dinámica de una teoría afín específica en la dimensión superior induce en el espacio base no solo la

gravedad, sino también interacciones de gauge que pueden acoplarse a la materia. Esto podría conducir a la generación de nuevas soluciones y a una mayor comprensión de la fenomenología de estos modelos.

Extensiones del Modelo: Torsión y Dinámica Completa

La derivación de un sistema análogo a Einstein-Maxwell en este trabajo se basó en un conjunto de condiciones geométricas simplificadoras, como la ausencia de torsión en la conexión del espacio total y la condición de que las fibras sean autoparalelas. Una tercera e ineludible línea de investigación consiste en relajar estas condiciones para explorar la dinámica completa y más general de la teoría.

El estudio de una conexión con torsión no nula es de particular interés. El formalismo desarrollado permite calcular sistemáticamente los campos de torsión inducidos en el espacio base y sus ecuaciones de campo, abriendo la puerta a una teoría de Kaluza-Klein afín de tipo Einstein-Cartan, donde el espín de la materia podría jugar un rol dinámico. Asimismo, investigar las consecuencias de relajar la condición de fibra autoparalela ($\sigma \neq 0$) y la segunda condición de normalización ($\tau \neq 0$) permitiría explorar el papel físico de la totalidad de los campos emergentes, conduciendo a una teoría efectiva potencialmente más rica y con una fenomenología aún por descubrir.

5.3. Conclusiones Finales

En esta tesis, se ha presentado el desarrollo sistemático y la validación de una teoría de Kaluza-Klein en un marco puramente afín. Utilizando exclusivamente la geometría de fibrados principales y la conexión de Ehresmann, se construyó un formalismo que permite la reducción dimensional sin presuponer una estructura métrica. Se demostró que, bajo condiciones geométricas bien definidas, este andamiaje no solo reinterpreta el campo electromagnético como una manifestación de la no-integrabilidad del fibrado, sino que sus ecuaciones de campo efectivas reproducen el sistema de Einstein-Maxwell para campos radiativos [9]. El resultado más profundo de esta investigación es, por tanto, la evidencia de que la métrica no necesita ser un axioma fundamental del espaciotiempo. En cambio, puede ser entendida como un objeto emergente que surge de una estructura geométrica más elemental: la conexión afín.

Notación y Convenciones

Este apéndice tiene como objetivo servir de referencia rápida y unificada para toda la notación matemática y las convenciones de estilo utilizadas a lo largo de la tesis.

A.1. Índices y Convenio de Suma

- **Tipos de Índices:**
 - Índices griegos (μ, ν, ρ, \dots): Utilizados para coordenadas y componentes tensoriales en el espacio-tiempo total de \hat{D} dimensiones (generalmente de 0 a $\hat{d} = \hat{D} - 1$).
 - Índices latinos (i, j, k, \dots): Utilizados para coordenadas y componentes tensoriales en el espacio-tiempo base de D dimensiones (generalmente de 0 a $d = D - 1$).
- **Posición de Índices:**
 - Superíndices: Indican componentes contravariantes (asociadas a vectores).
 - Subíndices: Indican componentes covariantes (asociadas a covectores o 1-formas).
- **Convenio de Suma de Einstein:** Se asumirá la suma implícita sobre cualquier índice que aparezca una vez como superíndice y una vez como subíndice en un mismo término. Por ejemplo, $V^i W_i$ implica $\sum_i V^i W_i$. Esta convención es fundamental y se utilizará consistentemente.
- **Espaciado de Índices:** Se asegurará un espaciado visual claro entre cada índice para todos los objetos con múltiples índices (tensores, coeficientes de conexión, etc.), respetando la estructura posicional, como en $\hat{\Gamma}_{\mu}^{\rho\nu}$.

A.2. Símbolos de Álgebra Lineal y Geometría

- **Kernel o Núcleo (ker):** $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.
- **Suma Directa (\oplus):** Denota la suma directa de subespacios vectoriales.
- **Span o Espacio Generado (span):** $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \{\sum_{i=1}^k c_i v_i \mid c_i \in \mathbb{R}\}$.
- **Composición de Aplicaciones (\circ):** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

A.3. Espacios, Variedades y Operaciones de Conjuntos

A.4. Tensores y Campos Tensoriales

- **Espacio Tangente** en $p \in \mathcal{M}$: $T_p\mathcal{M}$.
- **Espacio Cotangente** en $p \in \mathcal{M}$: $T_p^*\mathcal{M}$.
- **Fibrado Tangente**: $T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$.
- **Fibrado Cotangente**: $T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}$.
- **Fibrado Tensorial de tipo (p, q)** : Se denotará como $T_q^p\mathcal{M}$. Este fibrado se construye como $(T\mathcal{M})^{\otimes p} \otimes (T^*\mathcal{M})^{\otimes q}$.
- **Campos Vectoriales (tipo $(1,0)$)**: Pertenecen a $C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ o, equivalentemente, $C^\infty(\mathcal{M}; T_0^1\mathcal{M})$.
- **Campos de 1-Formas (tipo $(0,1)$)**: Pertenecen a $C^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M})$ o, equivalentemente, $C^\infty(\mathcal{M}; T_1^0\mathcal{M})$.
- **Campos Tensoriales de tipo (p, q)** : Pertenecen a $C^\infty(\mathcal{M}; T_q^p\mathcal{M})$.
- **Componentes de un Tensor**: Un tensor $T \in C^\infty(\mathcal{M}; T_q^p\mathcal{M})$ se expresará en una base de coordenadas locales como $T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$.
- **Isomorfismo / Difeomorfismo (\cong)**: Denota un isomorfismo (para grupos o esp. vectoriales) o un difeomorfismo (para variedades).

A.5. Operadores y Símbolos Específicos

- \hat{g} : Métrica en el espacio ambiente o total.
- \tilde{g} : Métrica inducida en una subvariedad.
- \tilde{h} : Segunda forma fundamental de una subvariedad.
- $\tilde{\beta}$: Operador de forma (mapa de Weingarten) de una subvariedad; también, tensor análogo en la descomposición de Kaluza-Klein afín.
- $\partial_X Y$: Derivada (direccional o de Lie, según contexto) del campo Y respecto al campo X .
- $\tilde{\nabla}_X Y$: Derivada covariante en la superficie/subvariedad.
- $\hat{\nabla}_X \hat{Y}$: Conexión afín en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$.

A.6. Operadores Diferenciales y Conexiones

- $\partial_\mu f$: Derivada parcial de una función f respecto a la coordenada x^μ .
- $\partial_X Y$: Derivada (direccional o de Lie, según contexto especificado en el texto) del campo Y respecto al campo X .
- $[X, Y]$: Conmutador de Lie de los campos vectoriales X e Y . Definido por su acción sobre una función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ como $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.
- $\mathcal{L}_X T$: Derivada de Lie del campo tensorial T con respecto al campo vectorial X . Para un campo vectorial Y , $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.
- $\tilde{\nabla}_X Y$: Derivada covariante en una superficie/subvariedad $\tilde{\mathcal{M}}$ inducida por el espacio ambiente.
- ∇ : Símbolo genérico para una conexión afín.
- $\nabla_X Y$: Derivada covariante del campo vectorial Y con respecto al campo vectorial X asociada a ∇ .
- $\nabla_\mu Y^\lambda$: Componentes de la derivada covariante de un campo vectorial Y en una base de coordenadas: $\nabla_\mu Y^\lambda = \partial_\mu Y^\lambda + \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu Y^\nu$.
- $\nabla_\mu \omega_\nu$: Componentes de la derivada covariante de una 1-forma ω : $\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu \omega_\lambda$.
- $\Gamma_\mu^\lambda{}_\nu$: Coeficientes de la conexión afín (símbolos de Christoffel generalizados) en una base de coordenadas $\{\partial_\mu\}$, definidos por $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_\mu^\lambda{}_\nu \partial_\lambda$.
- $\hat{\nabla}_X \hat{Y}$: Conexión afín en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$.
- $\hat{\Gamma}_\mu^\rho{}_\nu$: Coeficientes de la conexión afín en el espacio total $\hat{\mathcal{M}}$.

A.7. Derivada Covariante de Tensores Generales

La derivada covariante ∇_σ de un campo tensorial $T \in C^\infty(\mathcal{M}; T_l^k \mathcal{M})$ con componentes $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$ en una base de coordenadas se calcula como:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} &= \partial_\sigma T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \\ &\quad + \Gamma_\sigma^{i_1}{}_\alpha T^{\alpha i_2 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} + \dots + \Gamma_\sigma^{i_k}{}_\alpha T^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha}_{j_1 \dots j_l} \\ &\quad - \Gamma_\sigma^\alpha{}_{j_1} T^{i_1 \dots i_k}_{\alpha j_2 \dots j_l} - \dots - \Gamma_\sigma^\alpha{}_{j_l} T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Esta expresión incluye un término con el coeficiente de conexión Γ por cada índice del tensor: con signo positivo para los índices contravariantes y con signo negativo para los índices covariantes.

A.8. Otros Símbolos Específicos de la Tesis

- \hat{g} : Métrica en el espacio ambiente o total.
- \tilde{g} : Métrica inducida en una subvariedad.
- \tilde{h} : Segunda forma fundamental de una subvariedad.
- $\tilde{\beta}$: Operador de forma (mapa de Weingarten) de una subvariedad; también, tensor análogo en la descomposición de Kaluza-Klein afín.

Temas Complementarios

B.1. Geometría de Curvas: Conexión Intrínseca y Extrínseca

La relación entre la forma de una curva y el concepto de conexión afín se comprende mejor al analizarla desde dos perspectivas. La aparente paradoja sobre la naturaleza 'intrínseca' de la curvatura se resuelve al diferenciar con precisión los distintos niveles de análisis.

Perspectiva 1: La Curva como Variedad Intrínseca Unidimensional

En este enfoque, consideramos la curva como un objeto geométrico aislado, una variedad diferenciable unidimensional que solo posee longitud.

Desde un punto de vista puramente intrínseco, la geometría local es simple: en cualquier punto, solo existe una dirección fundamental, la tangente a la propia curva, representada por el vector tangente unitario T . La conexión afín intrínseca, ∇ , describiría cómo cambia este vector T al moverse a lo largo de la única dirección disponible en la variedad. Dado que no hay dimensiones adicionales 'dentro' de la variedad unidimensional hacia las cuales el vector T pueda 'girar' o 'cambiar su dirección' de manera no trivial, su derivada covariante respecto a sí mismo es nula:

$$\nabla_T T = 0 \tag{B.1}$$

Esto significa que el único coeficiente de conexión intrínseco relevante para la curva, considerada como variedad 1D, que podría escribirse (usando la longitud de arco s como coordenada) como Γ_s^s , es cero. En conclusión, desde esta perspectiva estrictamente intrínseca, la conexión afín de una curva como variedad 1D es trivial ($\Gamma = 0$), lo que implica que la curva es 'plana' en el sentido intrínseco de que su tensor de curvatura de Riemann es nulo.

Perspectiva 2: La Curva como Subvariedad Inmersa en el Espacio Ambiente \mathbb{R}^3 : Un Enfoque Extrínseco

La riqueza geométrica de una curva –su capacidad de doblarse y torcerse– se manifiesta cuando la consideramos inmersa en un espacio de mayor dimensión, como \mathbb{R}^3 . Esta perspectiva es, por definición, extrínseca. Sin embargo, es en este contexto donde podemos definir propiedades que son invariantes bajo traslaciones y rotaciones rígidas en el espacio ambiente, tradicionalmente consideradas como intrínsecas a la *forma* de la curva. Estas propiedades son la curvatura (κ) y la torsión (τ).

Las ecuaciones de Frenet-Serret actúan como el puente conceptual al describir cómo cambia el triedro de Frenet $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{T, N, B\}$ –una base ortonormal móvil del espacio ambiente \mathbb{R}^3 adaptada a la curva– a lo largo de esta. La derivada de estos vectores base a lo largo de la curva (es decir, en la dirección $\hat{e}_1 = T$) sigue la estructura general de una conexión del espacio ambiente $\hat{\nabla}$, expresada en esta base:

$$\frac{d\hat{e}_\nu}{ds} = \hat{\nabla}_{\hat{e}_1} \hat{e}_\nu = \sum_{\rho=1}^3 \hat{\Gamma}_1^{\rho\nu} \hat{e}_\rho \quad (\text{B.2})$$

Aquí, los $\hat{\Gamma}_1^{\rho\nu}$ son los coeficientes de la conexión euclidiana del espacio ambiente \mathbb{R}^3 (que es plana en coordenadas cartesianas), pero expresados en la base móvil y adaptada de Frenet. Estos coeficientes se identifican directamente con la curvatura y la torsión:

- Para la derivada de $T = \hat{e}_1$: $\frac{dT}{ds} = \kappa N$. Los coeficientes no nulos son: $\hat{\Gamma}_1^{21} = \kappa$.
- Para la derivada de $N = \hat{e}_2$: $\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$. Los coeficientes no nulos son: $\hat{\Gamma}_1^{12} = -\kappa$, $\hat{\Gamma}_1^{32} = \tau$.
- Para la derivada de $B = \hat{e}_3$: $\frac{dB}{ds} = -\tau N$. Los coeficientes no nulos son: $\hat{\Gamma}_1^{23} = -\tau$.

Sustituyendo estos coeficientes, se recuperan las conocidas ecuaciones de Frenet-Serret.

Síntesis: La Resolución de la Dualidad Terminológica

La aparente contradicción se resuelve al reconocer los dos niveles de análisis y la terminología precisa:

1. **Intrínseco a la Variedad (Nivel 1):** La conexión de una curva, vista como su propio universo unidimensional, es trivial. Su tensor de curvatura de Riemann es nulo, lo que la hace 'plana' en este sentido estricto. No puede curvarse 'dentro de sí misma'.
2. **Manifestación Extrínseca (Nivel 2, vía Inmersión):** Al estudiar la curva inmersa en \mathbb{R}^3 (un enfoque fundamentalmente extrínseco), emergen la curvatura κ y la torsión τ . Estas cantidades, aunque a menudo denominadas 'intrínsecas a la forma' de la curva, son en realidad los componentes de la conexión del espacio ambiente (que es plana globalmente) cuando se expresan en una base adaptada a la curva. Su nulidad refleja cómo la curva se desvía de una línea recta *dentro del espacio ambiente*, y no una curvatura intrínseca de la variedad unidimensional.

En resumen, las ecuaciones de Frenet-Serret son la manifestación explícita de cómo la conexión afín del espacio ambiente (plana en coordenadas cartesianas) se utiliza para cuantificar las propiedades geométricas extrínsecas de una curva inmersa. Los coeficientes de conexión $\hat{\Gamma}_1^{\rho\nu}$ no son todos cero porque, aunque la conexión euclidiana es trivial en coordenadas cartesianas, su expresión en el marco de referencia móvil, que se tuerce y gira junto a la curva, revela estas cantidades geométricas.

B.2. Integrabilidad de la Proyección de una Distribución

En este capítulo, se establece que la existencia de un campo electromagnético no trivial es equivalente a la no-integrabilidad de la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$. Este apéndice presenta una demostración formal de un resultado más general: si una distribución \hat{D} en el espacio total falla en ser integrable (involutiva) solo por componentes verticales, entonces su distribución proyectada sobre el espacio base, $D = \pi_*(\hat{D})$, sí es integrable [135]. En el caso particular en que la distribución D tenga la máxima dimensión posible (codimensión 1), esta integrabilidad implica la existencia de una foliación.

La demostración se fundamenta en el concepto de campos vectoriales relacionados por una aplicación, una herramienta estándar en geometría diferencial [5, 12].

B.2.1. Campos Vectoriales π -Relacionados y Proyección del Corchete

Dada la proyección del fibrado $\pi : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$, se dice que un campo vectorial $\hat{X} \in C^\infty(T\hat{\mathcal{M}})$ es π -relacionado con un campo vectorial $X \in C^\infty(T\mathcal{M})$ si la proyección de \hat{X} coincide con X en los puntos correspondientes. Formalmente, la aplicación tangente de π mapea \hat{X} a X :

$$\pi_*(\hat{X}_p) = X_{\pi(p)}, \quad \forall p \in \hat{\mathcal{M}}. \quad (\text{B.3})$$

En el contexto de un fibrado principal, un campo vectorial \hat{X} en el espacio total que es invariante bajo la acción del grupo G (un campo proyectable) siempre se π -relaciona con un campo vectorial X bien definido en la base.

Una propiedad fundamental de los campos proyectables es cómo interactúan con las funciones. Si $g \in C^\infty(\mathcal{M})$, entonces la acción de \hat{X} sobre la función levantada $g \circ \pi$ se relaciona con la acción de X sobre g mediante:

$$\hat{X}(g \circ \pi) = (X(g)) \circ \pi. \quad (\text{B.4})$$

Esta propiedad es crucial para demostrar la compatibilidad del corchete de Lie con la proyección.

Lema (Proyección del Corchete de Lie): *Si el campo vectorial $\hat{X}_1 \in C^\infty(T\hat{\mathcal{M}})$ es π -relacionado con $X_1 \in C^\infty(T\mathcal{M})$ y \hat{X}_2 es π -relacionado con X_2 , entonces su corchete de Lie $[\hat{X}_1, \hat{X}_2]$ es π -relacionado con el corchete de sus proyecciones, $[X_1, X_2]$ [5, 12]. Es decir:*

$$\pi_*([\hat{X}_1, \hat{X}_2]) = [\pi_*(\hat{X}_1), \pi_*(\hat{X}_2)] = [X_1, X_2]. \quad (\text{B.5})$$

Demostración del Lema Para demostrar la igualdad de los campos vectoriales, probamos que actúan de la misma manera sobre una función arbitraria $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Por la definición de la aplicación tangente (pushforward), la acción del campo $\pi_*(\hat{V})$ sobre f es la única función $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $g \circ \pi = V(f \circ \pi)$.

Sea $V = [\hat{X}_1, \hat{X}_2]$. Debemos calcular $V(f \circ \pi) = [\hat{X}_1, \hat{X}_2](f \circ \pi)$.

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1, \hat{X}_2](f \circ \pi) &= \hat{X}_1(\hat{X}_2(f \circ \pi)) - \hat{X}_2(\hat{X}_1(f \circ \pi)) && (\text{Def. Corchete}) \\ &= \hat{X}_1((X_2(f)) \circ \pi) - \hat{X}_2((X_1(f)) \circ \pi) && (\text{Usando (B.4) en } f) \end{aligned}$$

Ahora, $g_1 = X_1(f)$ y $g_2 = X_2(f)$ son nuevas funciones en $C^\infty(\mathcal{M})$. Aplicamos la propiedad (B.4) nuevamente a g_1 y g_2 :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1, \hat{X}_2](f \circ \pi) &= (X_1(g_2)) \circ \pi - (X_2(g_1)) \circ \pi \\ &= (X_1(X_2(f))) \circ \pi - (X_2(X_1(f))) \circ \pi \\ &= (X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))) \circ \pi \\ &= ([X_1, X_2](f)) \circ \pi \end{aligned} \quad (\text{Def. Corchete en } \mathcal{M})$$

Hemos demostrado que $[\hat{X}_1, \hat{X}_2](f \circ \pi) = ([X_1, X_2](f)) \circ \pi$. Comparando con la definición del pushforward, $g \circ \pi = V(f \circ \pi)$, identificamos $g = [X_1, X_2](f)$. Por lo tanto, $(\pi_*([\hat{X}_1, \hat{X}_2]))(f) = [X_1, X_2](f)$. Dado que esto es válido para toda f , los campos vectoriales son idénticos.

B.2.2. Integrabilidad de la Distribución Proyectada

Con esta herramienta, podemos enunciar y demostrar el teorema de interés.

Teorema: *Sea $\pi : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ una submersión (como un fibrado principal) y sea $\hat{D} \subset T\hat{\mathcal{M}}$ una distribución proyectable (e.g., G -invariante). Si el corchete de Lie de dos campos vectoriales cualesquiera \hat{X}, \hat{Y} con valores en \hat{D} difiere de un campo en \hat{D} a lo sumo por una componente vertical (i.e., $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{Z}_{\hat{D}} + \hat{Z}_{\mathcal{V}}$ con $\hat{Z}_{\hat{D}} \in \hat{D}$ y $\hat{Z}_{\mathcal{V}} \in V\hat{\mathcal{M}}$), entonces la distribución proyectada $D = \pi_*(\hat{D}) \subset T\mathcal{M}$ es involutiva y, por el Teorema de Frobenius, integrable.*

Para demostrar que D es involutiva, debemos probar que para dos campos vectoriales cualesquiera X, Y cuyos valores están en D , su corchete de Lie $[X, Y]$ también tiene sus valores en D .

Dado que \hat{D} es una distribución proyectable, para cualquier campo X en la base cuyos valores están en D , existe (localmente) un campo \hat{X} en el espacio total cuyos valores están en \hat{D} que es π -relacionado con X , tal que $\pi_*(\hat{X}) = X$. De manera análoga, existe un campo \hat{Y} con valores en \hat{D} tal que $\pi_*(\hat{Y}) = Y$.

Aplicando el lema (B.5), sabemos que el corchete de sus proyecciones está dado por la proyección de su corchete:

$$[X, Y] = \pi_*([\hat{X}, \hat{Y}]). \quad (\text{B.6})$$

Por hipótesis, el corchete $[\hat{X}, \hat{Y}]$ puede descomponerse como:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{Z}_{\hat{D}} + \hat{Z}_{\mathcal{V}}, \quad (\text{B.7})$$

donde $\hat{Z}_{\hat{D}}$ es un campo vectorial con valores en \hat{D} y $\hat{Z}_{\mathcal{V}}$ es un campo vectorial con valores en la distribución vertical $V\hat{\mathcal{M}} = \ker(\pi_*)$.

Finalmente, aplicamos la proyección π_* a esta expresión. Por la linealidad de π_* y la definición de la distribución vertical, la componente vertical se anula:

$$[X, Y] = \pi_*(\hat{Z}_{\hat{D}} + \hat{Z}_{\mathcal{V}}) = \pi_*(\hat{Z}_{\hat{D}}) + \pi_*(\hat{Z}_{\mathcal{V}}) = \pi_*(\hat{Z}_{\hat{D}}) + 0. \quad (\text{B.8})$$

Como $\hat{Z}_{\hat{D}}$ es un campo vectorial con valores en la distribución \hat{D} , su proyección $\pi_*(\hat{Z}_{\hat{D}})$ es, por definición, un campo vectorial con valores en la distribución proyectada D . Por lo tanto, $[X, Y]$ es un campo vectorial con valores en D .

Dado que el corchete de dos campos cualesquiera en D permanece en D , la distribución es involutiva. Por el Teorema de Frobenius [5, 17], D es integrable. Esto significa que a través de cada punto de \mathcal{M} pasa una única subvariedad integral maximal tangente a D . Si la dimensión de D es k , estas subvariedades son de dimensión k . En el caso de que $k = \dim(\mathcal{M}) - 1$, estas subvariedades forman una foliación de codimensión 1 de \mathcal{M} .

Este resultado formaliza la intuición geométrica de la teoría de Kaluza-Klein. La hipótesis de que el “fallo de cierre” de la distribución horizontal $H\hat{\mathcal{M}}$ sea puramente vertical (i.e., $[\hat{E}_i, \hat{E}_j] = -F_{ij}\hat{\eta}$) es precisamente la condición del teorema para $\hat{D} = H\hat{\mathcal{M}}$. Al proyectar, la componente vertical, que se identifica con el campo electromagnético, se anula, dejando una distribución integrable $D = T\mathcal{M}$ en el espacio base (que es trivialmente integrable). La curvatura de una conexión de Ehresmann se interpreta de forma análoga como la componente vertical del corchete de campos horizontales [122].

Bibliografía

- [1] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [3] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*. Publish Or Perish, Houston, Texas, 2nd ed., 1979.
- [4] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [5] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, NY, 2nd ed., 2012.
- [6] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus: An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications*. Springer, Berlin, 2nd ed., 1954.
- [7] H. Weyl, “Geometrie und physik,” *Die Naturwissenschaften* **9** no. 1, (1921) 1–7.
- [8] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1924.
- [9] O. Castillo-Felisola, B. Grez, M. Morocho-López, J. Perdiguero, A. Skirzewski, J. Vaca-Santana, and N. Zambra-Gómez, “Polynomial affine model of gravity: After 10 years,” *Universe* **11** no. 3, (2025) 102.
- [10] A. Einstein, “Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus,” *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1928** (1928) 217–221.
- [11] J. M. Lee, *Smooth manifolds*. Springer, 2003.
- [12] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [13] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, manifolds and physics*, vol. 1 & 2. North-Holland, 1989.
- [14] T. Shifrin, *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*. Springer, Athens, GA, 2016. Corrected 3rd printing.

- [15] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Ginn and Company, Boston, MA, 1909.
- [16] J. N. Clelland, *From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames*, vol. 178 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [17] B. F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.
- [18] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd ed., 2002.
- [19] R. DiSalle, *Understanding Space-Time: The Philosophical Development of Physics from Newton to Einstein*. Cambridge University Press, 2006.
- [20] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [21] A. Einstein, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen," *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* **4** (1907) 411–462.
- [22] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [23] C. M. Will, "The confrontation between general relativity and experiment," *Living Reviews in Relativity* **21** no.~1, (2018) 4.
- [24] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, first edition ed., 1972.
- [25] D. Hilbert, "Die Grundlagen der Physik," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1915** (1915) 395–407.
- [26] D. Lovelock, "The einstein tensor and its generalizations," *Journal of Mathematical Physics* **12** no. 3, (1971) 498–501.
- [27] A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation," *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1915** (1915) 844–847.
- [28] S. Capozziello and M. De Laurentis, "Extended Theories of Gravity," *Phys. Rept.* **509** (2011) 167–321, [arXiv:1108.6266](https://arxiv.org/abs/1108.6266) [gr-qc].
- [29] M. Ishak, "Testing General Relativity in Cosmology," *Living Rev. Rel.* **22** no.~1, (2019) 1, [arXiv:1806.10122](https://arxiv.org/abs/1806.10122) [astro-ph.CO].
- [30] **Particle Data Group** Collaboration, C. Patrignani *et al.*, "Review of Particle Physics," *Chin. Phys. C* **40** no.~10, (2016) 100001.

-
- [31] G. Bertone and D. Hooper, “History of dark matter,” *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 045002, [arXiv:1605.04909](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [32] J. Martin, “Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (but were afraid to ask),” *Comptes Rendus Physique* **13** (2012) 566–665, [arXiv:1205.3365](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [33] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, S. Gariazzo, A. Melchiorri, R. C. Nunes, and S. Vagnozzi, “In the Realm of the Hubble Tension—a Review of Solutions,” *Class. Quant. Grav.* **38** no.~15, (2021) 153001, [arXiv:2103.01183](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [34] M. Lopez-Corredoira and P. Kroupa, “Small-scale challenges to the Λ CDM model: a review,” *Int. J. Mod. Phys. D* **26** no.~05, (2017) 1730007, [arXiv:1701.08720](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [35] J. M. M. Senovilla, “The 1965 Penrose singularity theorem,” *J. Gen. Rel. Grav.* **47** no.~1, (2015) 1818, [arXiv:1410.5226](#) [[gr-qc](#)].
- [36] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$ theories of gravity,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, [arXiv:0805.1726](#) [[gr-qc](#)].
- [37] A. A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Physics Letters B* **91** no. 1, (1980) 99–102.
- [38] V. Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, vol. 139. Springer Science and Business Media, 2004.
- [39] C. H. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Physical Review* **124** no. 3, (1961) 925.
- [40] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *International Journal of Theoretical Physics* **10** (1974) 363–384.
- [41] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, “Galileon as a local modification of gravity,” *Physical Review D* **79** no. 6, (2009) 064036.
- [42] T. Kobayashi, “Horndeski theory and beyond: a review,” *Reports on Progress in Physics* **82** no. 8, (2019) 086901.
- [43] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Modified gauss-bonnet theory of gravity,” *Physics Letters B* **631** no. 1-2, (2005) 1–6.
- [44] C. De Rham, G. Gabadadze, and A. J. Tolley, “Resummation of massive gravity,” *Physical review letters* **106** no. 23, (2011) 231101.
- [45] K. Hinterbichler, “Theoretical aspects of massive gravity,” *Reviews of Modern Physics* **84** no. 2, (2012) 671.

- [46] C. De Rham, “Massive gravity and the cosmological constant,” *Comptes Rendus. Physique* **24** no. S1, (2023) 1–33.
- [47] S. F. Hassan and R. A. Rosen, “Bimetric gravity as a theory of massive gravitons,” *Journal of High Energy Physics* **2011** no. 9, (2011) 1–55.
- [48] A. Schmidt-May and M. von Strauss, “A review of bimetric theory,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **49** no. 18, (2015) 183001.
- [49] P. Horava, “Quantum gravity at a lifshitz point,” *Physical Review D* **79** no. 8, (2009) 084008.
- [50] T. P. Sotiriou, “Hořava-lifshitz gravity: a status report,” *Journal of Physics: Conference Series* **283** no. 1, (2011) 012034.
- [51] T. Jacobson and D. Mattingly, “Gravity with a dynamical preferred frame,” *Physical Review D* **64** no. 2, (2001) 024028.
- [52] M. Milgrom, “A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis,” *The Astrophysical Journal* **270** (1983) 365–370.
- [53] B. Famaey and S. S. McGaugh, “Modified newtonian dynamics (mond): a review,” *Living reviews in relativity* **15** no. 1, (2012) 1–179.
- [54] J. D. Bekenstein, “Relativistic gravitation theory for the mond paradigm,” *Physical Review D* **70** no. 8, (2004) 083509.
- [55] J. Bekenstein, “Relativistic mond as an alternative to the dark matter paradigm,” *Nuclear Physics A* **827** (2009) 555c–560c.
- [56] C. Skordis and T. Złośnik, “New relativistic theory for modified newtonian dynamics,” *Physical Review Letters* **127** no. 16, (2021) 161302.
- [57] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4d gravity on a brane in 5d minkowski space,” *Physics letters B* **485** no. 1-3, (2000) 208–214.
- [58] A. Lue, “The dgp model of gravity,” *Physics Reports* **423** no. 1-2, (2006) 1–48.
- [59] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman, “Metric-affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance,” *Phys. Rept.* **258** (1995) 1–171, [arXiv:gr-qc/9402012](#) [gr-qc].
- [60] D. Iosifidis, *Metric-Affine Gravity and Cosmology/Aspects of Torsion and non-Metricity in Gravity Theories*. PhD thesis, Aristotle University of Thessaloniki, 2019. [arXiv:1902.09643](#) [gr-qc].
- [61] V. Vitagliano, T. P. Sotiriou, and S. Liberati, “The dynamics of metric-affine gravity,” *Annals Phys.* **326** (2011) 1259–1273, [arXiv:1008.0171](#) [gr-qc].

-
- [62] A. Delhom, D. Iosifidis, A. Jimenez-Cano, and A. J. Latorre, “Cubic metric-affine gravity,” *Phys. Rev. D* **111** no.~8, (2025) 084058, [arXiv:2401.02989 \[gr-qc\]](#).
- [63] J. Ehlers, F. A. E. Pirani, and A. Schild, “The geometry of free fall and light propagation,” in *General Relativity, papers in honour of J. L. Synge*, L. O’Raifeartaigh, ed., pp. 63–84. Clarendon Press, Oxford, 1972.
- [64] A. Trautman, “Editorial note to: J. Ehlers, F. A. E. Pirani and A. Schild, The geometry of free fall and light propagation,” *Gen. Rel. Grav.* **44** (2012) 1581–1586.
- [65] S. Capozziello, M. De Laurentis, L. Fatibene, and M. Francaviglia, “The physical foundations for the geometric structure of relativistic theories of gravitation. From General Relativity to Extended Theories of Gravity through Ehlers-Pirani-Schild approach,” *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **9** (2012) 1250072, [arXiv:1202.5699 \[gr-qc\]](#).
- [66] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, “General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects,” *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 393–416.
- [67] N. Poplawski, “Einstein–cartan gravity and the multiverse,” *Universe* **9** no. 2, (2023) 91.
- [68] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, “f(t) teleparallel gravity and cosmology,” *Reports on Progress in Physics* **79** no. 10, (2016) 106901.
- [69] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud, and E. Di Valentino, “Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology,” *Rept. Prog. Phys.* **86** no.~2, (2023) 026901, [arXiv:2106.13793 \[gr-qc\]](#).
- [70] J. M. Nester and H.-J. Yo, “Symmetric teleparallel general relativity,” *Chin. J. Phys.* **37** (1999) 113–118, [arXiv:gr-qc/9809049](#).
- [71] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, and T. S. Koivisto, “Coincident General Relativity,” *Phys. Rev. D* **98** no.~4, (2018) 044048, [arXiv:1710.03116 \[gr-qc\]](#).
- [72] K. Koyama, “Cosmological Tests of Modified Gravity,” *Rept. Prog. Phys.* **79** no.~4, (2016) 046902, [arXiv:1504.04623 \[astro-ph.CO\]](#).
- [73] J. Khoury, “Chameleon theories of modified gravity,” *Comptes Rendus Physique* **14** no. 9-10, (2013) 779–787.
- [74] J. Khoury and A. Weltman, “Chameleon cosmology,” *Physical Review D* **69** no. 4, (2004) 044026.
- [75] J. Khoury and A. Weltman, “Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space,” *Physical review letters* **93** no. 17, (2004) 171104.
- [76] C. Burrage, E. J. Copeland, and P. Millington, “Constraining chameleon gravity with the sun,” *Physical Review D* **98** no. 2, (2018) 024022.

- [77] T. Kaluza, “Zum Unitätsproblem der Physik,” *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin (Math. Phys.)* **1921** (1921) 966–972.
- [78] O. Klein, “Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie,” *Zeitschrift für Physik* **37** no. 12, (1926) 895–906.
- [79] J. M. Overduin and P. S. Wesson, “Kaluza-Klein gravity,” *Phys. Rept.* **283** (1997) 303–378, [gr-qc/9805018](#).
- [80] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, and C. N. Pope, “Kaluza-Klein Supergravity,” *Phys. Rept.* **130** (1986) 1–147.
- [81] C. N. Pope, “Lectures on Kaluza-Klein Theory,” Lecture notes, Texas A&M University, 2002. <https://people.tamu.edu/~c-pope/ihplec.pdf>.
- [82] T. Appelquist, A. Chodos, and P. G. O. Freund, eds., *Modern Kaluza-Klein Theories*, vol. 65 of *Frontiers in Physics*. Addison-Wesley, 1987.
- [83] E. Witten, “Search for a realistic Kaluza-Klein theory,” *Nucl. Phys. B* **186** (1981) 412–428.
- [84] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1 and 2. Cambridge University Press, 1998.
- [85] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory*, vol. 1 and 2. Cambridge University Press, 1987.
- [86] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [87] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263–272, [hep-ph/9803315](#).
- [88] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [hep-ph/9905221](#).
- [89] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett. B* **436** (1998) 257–263, [hep-ph/9804398](#).
- [90] D. Bleeker, *Gauge Theory and Variational Principles*. Global Analysis, Pure and Applied. Addison-Wesley, 1981.
- [91] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, “Non-Abelian gauge fields as Nambu-Goldstone fields,” *Phys. Rev. D* **12** (1975) 1711–1720.
- [92] A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [93] A. H. Chamseddine, A. Connes, and M. Marcolli, “Gravity and the standard model with neutrino mixing,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **11** (2007) 991–1089, [hep-th/0610241](#).

-
- [94] O. Boada, A. Celi, J. I. Latorre, and M. Lewenstein, “Quantum Simulation of an Extra Dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2021) 133001.
- [95] T. Ozawa and H. M. Price, “Topological photonics,” *Rev. Mod. Phys.* **91** (2019) 015006.
- [96] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter, Vol. 2: Stresses and Dislocations*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [97] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 3045–3067.
- [98] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “Topological insulators and superconductors,” *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 1057–1110.
- [99] G. Ruppeiner, “Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory,” *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 605–659.
- [100] J. E. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, “Geometrization of thermodynamics,” *Turkish Journal of Physics* **30** no. 5, (2006) 459–468.
- [101] D. Krioukov, F. Papadopoulos, M. Kitsak, A. Vahdat, and M. Boguñá, “Hyperbolic geometry of complex networks,” *Phys. Rev. E* **82** (2010) 036106.
- [102] R. Dawid, *String Theory and the Scientific Method*. Cambridge University Press, 2013.
- [103] S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory*. Pantheon Books, 1993.
- [104] M. Morrison, *Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures*. Cambridge University Press, 2000.
- [105] N. J. Poplawski, “On the nonsymmetric purely affine gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **22** no.~36, (2007) 2701–2720, [arXiv:0706.0397 \[gr-qc\]](#).
- [106] E. Schrödinger, “The final affine field laws. I,” *Proc. R. Irish Acad. A* **51** (1947) 163–171.
- [107] B. Knorr and C. Ripken, “Scattering Amplitudes in Affine Gravity,” *Phys. Rev. D* **103** no.~10, (2021) 104041, [arXiv:2012.05144 \[hep-th\]](#).
- [108] O. Castillo-Felisola and A. Skirzewski, “A polynomial model of purely affine gravity,” *Rev. Mex. Fis.* **61** no. 6, (2015) 421–433, [arXiv:1410.6183 \[gr-qc\]](#).
- [109] M. Y. Kalmykov and P. I. Pronin, “The new models of an ‘affine’ theory of gravity,” [arXiv:1003.0782 \[gr-qc\]](#).
- [110] M. Martellini, “Is the kijowski-tulczjew “purely affine” theory of gravitation a power-counting renormalizable theory?” *Phys. Rev. D* **29** (1984) 2746–2754.
- [111] J. M. Schuller and M. N. R. Wohlfarth, “On Constructing Purely Affine Theories with Matter,” *J. Phys. Conf. Ser.* **845** no.~1, (2016) 012015, [arXiv:1607.04250 \[gr-qc\]](#).
-

- [112] D. A. Demir, “Riemann-improved eddington gravity,” *Physical Review D* **90** (2014) 064017.
- [113] E. Schrödinger, “The final affine field laws i,” in *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 51, pp. 163–171, JSTOR. 1945.
- [114] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1950.
- [115] H. F. M. Goenner, “On the History of Unified Field Theories,” *Living Reviews in Relativity* **17** no.~1, (2014) 5.
- [116] N. J. Popławski, “Gravitation, electromagnetism and cosmological constant in purely affine gravity,” *Foundations of Physics* **39** no. 3, (2009) 307–330.
- [117] N. J. Poplawski, “F(R) gravity in purely affine formulation,” *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 135008, [arXiv:1201.2188 \[gr-qc\]](#).
- [118] H. Azri, “Separate einstein-eddington spaces and the cosmological constant,” *Annalen der Physik* **530** no. 5, (2018) 1700234, [1501.06177](#).
- [119] J. Perdiguero Gárate, O. Castillo-Felisola, A. Skirzewski, M. Al-Atrash, A. Al-Awaideh, A. Al-Badawi, M. Al-Masaeed, and Q. Al-Masaeed, “Polynomial affine gravity in 3+1 dimensions,” *Universe* **8** no. 12, (2022) 652.
- [120] D. Betounes, “Mathematical aspects of kaluza-klein gravity,” *jgp* **51** no.~2, (2004) 139–165.
- [121] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, “Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry,” *Phys. Rept.* **66** (1980) 213–393.
- [122] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*. Interscience Publishers, New York, 1963.
- [123] L.-X. Li, “A note on Kaluza-Klein theory,” *Class. Quant. Grav.* **40** (2023) 195019.
- [124] T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [125] J. C. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*, vol. 4. World Scientific, 1994.
- [126] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields,” *Physical Review D* **12** no. 12, (1975) 3845.
- [127] P. A. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **133** no. 821, (1931) 60–72.
- [128] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*. Academic Press, 1983.

-
- [129] A. Einstein, “Zur affinen Feldtheorie,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* **1923** (1923) 137–140.
- [130] K. Peeters, “A field-theory motivated approach to symbolic computer algebra,” *Comput. Phys. Commun.* **176** (2007) 550–558, [cs/0608005](#).
- [131] K. Peeters, “Cadabra2: A field-theory motivated symbolic computer algebra system,” *J. Open Source Softw.* **3** no.~32, (2018) 1118.
- [132] F. Nožička, “Le vecteur affine et la déformation dans un espace à connexion affine,” *Čas. Mat. Fys.* **75** (1950) 179–195.
- [133] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*. IOP Publishing, Bristol, 2002.
- [134] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “The dynamics of general relativity,” in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, L. Witten, ed., pp. 227–265. Wiley, New York, 1962.
- [135] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, vol. 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1983.