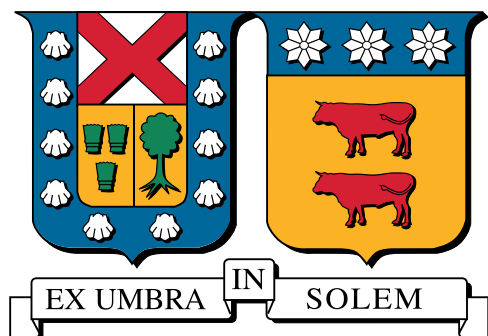


# Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Obras Civiles



## Simulación de aneurismas aórticos abdominales con el método de elementos finitos

Memoria de titulación presentada por  
**Pedro Aníbal Paillalef Cerda**

Como requisito para optar a los títulos de  
Ingeniero Civil  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Profesor guía  
Vivian Aranda

Marzo 2022

*A mi madre*

# Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Técnica Federico Santa María y en especial al departamento de postgrados por la beca de arancel y financiamiento durante mi etapa como estudiante, estoy muy agradecido.

Al departamento de Obras Civiles, donde el cuerpo docente me entregó muchos conocimientos y consejos durante mi etapa de pregrado y postgrado, gracias.

A la Profesora Vivian Aranda, de quien fui su alumno, ayudante y tesista, por varios años. Siendo una ayuda fundamental para entrar al programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil y por entregarme todo su apoyo y consejo, en el desarrollo de este trabajo.

A los profesores, Alelí Osorio, Raúl Flores por aprobar la inscripción del presente trabajo.

A los profesores, Álvaro Ossandón y Luis Zamorano, quienes conformaron la comisión y proporcionaron comentarios para mejorar el trabajo.

Al Profesor Gabriel García, quien fue Jefe de Carrera. Por su profesionalismo y interés en entregar sus conocimientos a cada uno de los estudiantes.

Al Profesor Marcos Valdebenito, por su compromiso en enseñar y por orientarme en sus ramos, cada vez que lo necesité.

Al Profesor Alberto Kresse, por su excelente profesionalismo y disposición en ayudarme en mi práctica profesional.

A los Profesores: Nelson Cifuentes, Sebastian Calzadillas, David Zambrano y Juan Guadalupe, entre otros. quienes fueron mis profesores del área de matemática y física, por su compromiso y buena disposición. Aprovecho de mencionar al profesor Luis Rosales del departamento de Física, que nunca tuvo problemas en resolver mis dudas, apesar que no era alumno suyo.

A mi Madre, quien me ha acompañado en toda mi etapa de estudiante con su apoyo incondicional. Siendo un pilar fundamental en mi vida y estando presente en los momentos buenos y en los malos, siempre con su bendición y oración. A mi Padre, por su constante presencia y preocupación.

No puedo terminar los agradecimientos sin recordar a mi amigo Tomás Orellana († Diciembre 2017), quien fue mi ayudante en varios ramos y que siempre estará en mi memoria.

Tal vez, decir gracias resulte poco para expresar lo que siento dentro de mi corazón, pero estaré eternamente agradecido de las personas mencionadas anteriormente.

# Resumen

El sistema cardiovascular es un sistema cerrado, donde las venas llevan la sangre al corazón, y las arterias transportan la sangre oxigenada desde el corazón, hacia el resto del cuerpo. La aorta es la arteria más grande del cuerpo humano (2 [cm] de diámetro aproximadamente) y tiene la misión de transportar la sangre oxigenada recién salida del corazón. Con el transcurso del tiempo, la aorta se puede dilatar y cuando la dilatación supera los 5 [cm] se conoce como un aneurisma aórtico. El tratamiento consiste en insertar una prótesis endovascular para restringir el flujo sanguíneo en la zona debilitada, este tratamiento ha demostrado ser eficaz pero puede fallar, por consiguiente, el paciente debe tener controles médicos, cuya frecuencia es determinada por el especialista. Este trabajo presentará tres modelos de aneurismas aórticos abdominales, donde cada uno tendrá una simulación sin prótesis y otra con prótesis, con el objetivo de estudiar la velocidad y la presión, con fines académicos. Cada modelo tendrá distinta geometría y estarán sometidos a las mismas condiciones de borde. Para estudiar el flujo sanguíneo en la aorta, se utilizarán las ecuaciones de la mecánica de fluidos, en específico la ecuación de conservación de masa y la ecuación de Navier-Stokes (en régimen laminar), considerando que la sangre es incompresible, homogénea y newtoniana, siendo este último un supuesto muy importante. Para resolver estas ecuaciones se usará el método de elementos finitos, el cual consiste en resolver las ecuaciones pasando del espacio continuo a uno discreto. El desarrollo algebraico del método permitirá encontrar matrices que no varían en el tiempo. Posteriormente, la teoría y las matrices serán utilizadas para el desarrollo de un código, que recibirá como entrada la matriz de nodos, matriz de conectividad y las condiciones de borde, éstas son velocidad en la entrada (uniforme) y presión en la salida (dos ciclos de 1 [S]). La matriz de nodos y la matriz de conectividad, serán entregadas por un programa de código abierto que tiene la ventaja de modificar datos del mallado, por ejemplo: dimensión media de cada elemento, refinado localizado, cambiar la cantidad de nodos del elemento, etc. Luego de hacer los mallados, se procede a realizar la simulación, obteniendo los valores de velocidad y presión, además, los tiempos de simulación son pequeños considerando la cantidad de elementos y de instantes de tiempo. Pasando a los resultados obtenidos, existe poca diferencia al comparar los tres modelos sin prótesis, por lo tanto, la geometría de los aneurismas influye relativamente poco, pero en las simulaciones con prótesis se tienen diferencias considerables, la velocidad aumenta dentro de la prótesis y disminuye fuera de esta, mostrando que se cumple el objetivo. Por otro lado, el factor más relevante en la velocidad es la longitud de la prótesis, porque se generan zonas de alta velocidad en el espacio entre la prótesis y la pared arterial. Además, se hablará sobre la inestabilidad que tiene la presión y como se reduce utilizando otros métodos. Los resultados entregados por el código deben ser validados, para esto se utiliza la ecuación analítica del flujo debido a un gradiente de presión, y otros estudios de aneurismas aórticos abdominales. Finalmente, se espera que este trabajo sirva como base para nuevas investigaciones científicas y para el desarrollo académico.

# Glosario

Los símbolos utilizados en este trabajo se presentan junto a su respectiva definición.

## Símbolos Alfabéticos Árabes

$A$  Área del sistema

$A^*$  Parámetro de presión

$B$  Vector dentro del método de punto fijo tipo  $WX = B$

$B_{sis}$  Propiedad arbitraria del sistema

$b$  Propiedad específica por unidad de masa

$[C]$  Matriz convectiva del sistema

$c_x$  Matriz convectiva en la dirección x

$c_y$  Matriz convectiva en la dirección y

$D$  Diámetro de la aorta

$D_a$  Diámetro aneurisma

$D_p$  Diferencia porcentual

$E$  Número de elementos del mallado

$\vec{F}$  Campo vectorial

$\{\vec{F}\}$  Vector fuerzas de cuerpo del sistema

$\vec{f}_b$  Fuerzas de cuerpo

$f$  Función arbitraria para integración numérica

$g_{x,y}$  Aceleración inercial

$H$  Transformación del espacio real al relativo

$J$  Matriz jacobiana

$j_o$  Número de bessel

$[K]$  Matriz difusiva del sistema

$[\tilde{K}]$  Matriz resultante de la combinación de:  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$ , para instante actual

$[\tilde{K}_{a,b}]$  Submatriz con  $a=c,d$  y  $b=c,d$ . Donde  $c$  es conocido y  $d$  desconocido

$[\hat{K}]$  Matriz resultante de la combinación de:  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$ , para instante anterior

$[\tilde{K}_{a,b}]$  Submatriz con  $a=c,d$  y  $b=c,d$ . Donde  $c$  es conocido y  $d$  desconocido

$l$	Iteración
$L_a$	Longitud aorta
$L_s$	Longitud saco aneurismal
$L_{pre}$	Longitud aguas arriba del saco aneurismal
$L_{pos}$	Longitud aguas abajo del saco aneurismal
$M_{sis}$	Masa del sistema
$m$	Masa del elemento
$[M]$	Matriz de masa del sistema
$m$	Matriz de masa del elemento
$n$	Instante de tiempo
$\hat{n}$	Vector unitario normal a la superficie
$N_c$	Nodos conocidos
$N_d$	Nodos desconocidos
$N_p$	Nodos presión del mallado
$N_t$	Nodos totales
$N_v$	Nodos velocidad del mallado
$n_{x,y}$	Componente horizontal y vertical de $\hat{n}$
$\vec{P}$	Momento lineal
$P$	Presión en la ecuación de Navier Stokes
$p_o$	Presión en la salida de la aorta
$P_i$	Puntos de estudio dentro del modelo
$p$	Presión en el método de elementos finitos
$r$	Eje horizontal del espacio relativo.
$R_i$	Radio inferior saco aneurismal
$R_s$	Radio superior saco aneurismal
$S$	Superficie
$S^{i,j}$	Componentes de la matriz difusiva con $i=1,2$ y $j=0,1,2$
$s$	Eje vertical del espacio relativo.
$T_c$	Periodo del pulso cardiaco
$T_s$	Tiempo de simulación

$t$	Variable tiempo
$t_i$	Instante de tiempo de estudio con $i=1,\dots,6$
$U$	Región con superficie $S$
$u_o$	Velocidad en la entrada de la aorta
$u_{i,j}$	Componente horizontal y vertical, del vector velocidad $\vec{u}$
$\vec{u}_r$	Velocidad relativa
$V$	Volumen del sistema
$u$	Componente horizontal de $\vec{u}$
$v$	Componente vertical de $\vec{u}$
$W$	Matriz genérica para método de punto fijo $WX = B$
$[W]$	Matriz de la transformación $H$
$W_{ij}$	Componentes de la matriz $[W]$
$w$	Frecuencia angular
$w_{i,j}$	Función peso para integración numérica
$X$	Vector incógnitas método de punto fijo
$x$	Eje horizontal del espacio real
$x_i$	Coordenada horizontal de los nodos del elemento $i=1,2,\dots,6$
$y$	Eje vertical del espacio real
$y_i$	Coordenada vertical de los nodos del elemento $i=1,2,\dots,6$

### **Símbolos Alfabéticos griegos y paréntesis**

$\alpha$	Parámetro de la arteria
$\epsilon$	Tolerancia en el método de punto fijo
$\zeta_{1,2}$	Coordenada horizontal para integración con método de punto fijo
$\eta_{1,2}$	Coordenada vertical para integración con método de punto fijo
$\delta_{ij}$	Función delta de kronecker
$\delta t$	Intervalo de tiempo
$\mu$	Viscosidad del fluido
$\theta$	Parámetro de diferencias finitas
$\nu$	Viscosidad cinemática del fluido
$\rho$	Densidad del fluido

$\Sigma$	Superficie en $\mathbb{R}^3$
$\tilde{\sigma}$	tensor de esfuerzos
$\sigma$	Esfuerzos normales
$\tau$	Esfuerzos de corte
$\phi_j$	Funciones de interpolación de primer orden
$\psi_i$	Funciones de interpolación de segundo orden
$\Gamma$	Curva de contorno región
$\Gamma_1$	Contorno aneurisma
$\Gamma_2$	Contorno superior prótesis endovascular
$\Gamma_3$	Contorno inferior prótesis endovascular
$\Phi$	Base del espacio discreto $\Omega'$
$\Omega$	Espacio continuo
$\Omega'$	Espacio discreto
$\{\Delta\}$	Vector con las variables u,v,p
$\{\dot{\Delta}\}$	Vector con las derivadas de: u,v,p
$\nabla$	Operador gradiente
$  $	Operador determinante de un vector
$[ ]$	Matriz asociada a cantidad adjunta
$\{ \}$	Vector asociado a cantidad adjunta

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	I
Resumen . . . . .	II
Glosario . . . . .	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Objetivo General . . . . .	4
1.3. Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>2. Antecedentes Biológicos</b>	<b>5</b>
2.1. Sistema cardiovascular . . . . .	5
2.2. Válvulas del corazón . . . . .	6
2.3. Vasos sanguíneos . . . . .	6
2.4. Ciclo cardíaco . . . . .	7
2.5. Reología de la sangre . . . . .	8
<b>3. Ecuaciones de Gobierno</b>	<b>10</b>
3.1. Tensor de esfuerzos en fluidos . . . . .	10
3.2. Teorema del transporte de Reynolds . . . . .	11
3.3. Ecuación de conservación de masa . . . . .	12
3.4. Ecuación de conservación del momento lineal . . . . .	12
<b>4. Método de Elementos Finitos</b>	<b>14</b>
4.1. Teoría del método . . . . .	14
4.2. Elementos isoparamétricos . . . . .	17
4.3. Formulación débil . . . . .	19
4.4. Formulación matricial . . . . .	21
4.5. Cálculo de matrices . . . . .	22
4.5.1. Matriz de masa . . . . .	22
4.5.2. Matriz difusiva . . . . .	23
4.6. Resolución sistema con método de punto fijo . . . . .	25
<b>5. Algoritmo</b>	<b>26</b>
5.1. Estructura del algoritmo . . . . .	26
5.2. Funciones . . . . .	27
<b>6. Estabilidad numérica</b>	<b>28</b>
6.1. Método de Petrov-Galerkin . . . . .	28
6.2. Método de compresibilidad artificial . . . . .	29
6.3. Comparación . . . . .	29

<b>7. Resultados y análisis</b>	<b>31</b>
7.1. Antecedentes de los modelos . . . . .	31
7.2. Modelo 1 . . . . .	34
7.2.1. Sin prótesis . . . . .	34
7.2.2. Con prótesis . . . . .	40
7.2.3. Comparación . . . . .	45
7.3. Modelo 2 . . . . .	47
7.3.1. Sin prótesis . . . . .	48
7.3.2. Con prótesis . . . . .	51
7.3.3. Comparación . . . . .	53
7.4. Modelo 3 . . . . .	55
7.4.1. Sin prótesis . . . . .	56
7.4.2. Con prótesis . . . . .	58
7.4.3. Perfil de velocidad en la salida . . . . .	60
<b>8. Validación y comentarios</b>	<b>62</b>
8.1. Validación con otros problemas y estudios . . . . .	62
8.1.1. Flujo debido a gradiente de presión . . . . .	62
8.1.2. Comparación con otros modelos de AAA . . . . .	63
8.2. Comentarios de otros estudios . . . . .	65
<b>9. Conclusiones</b>	<b>69</b>
9.1. Posibles líneas de investigación . . . . .	71
<b>Referencias</b>	<b>72</b>
<b>Anexos</b>	<b>73</b>
<b>A. Código modelo base Sublime text</b>	<b>75</b>
<b>B. Código Matriz de masa</b>	<b>77</b>
<b>C. Modelo 2</b>	<b>79</b>
C.1. Tablas de magnitud velocidad para instantes desfasados . . . . .	79
C.2. Diferencia porcentual modelo 2 sin prótesis . . . . .	80
C.3. Tablas de magnitud velocidad para instantes desfasados . . . . .	80
C.4. Diferencia porcentual modelo 2 con prótesis . . . . .	81
<b>D. Principios Matemáticos y Numéricos</b>	<b>82</b>
D.1. Teorema de Stokes . . . . .	82
D.2. Teorema de la divergencia . . . . .	82
D.3. Integración Numérica . . . . .	82
D.4. Método de punto fijo . . . . .	83
<b>E. Confección mallado</b>	<b>84</b>
E.1. Gmsh versión 4.7.1 . . . . .	84
E.2. Sublime text . . . . .	86

# Lista de figuras

2.1.	Sistema cardiovascular . . . . .	5
2.2.	Válvulas . . . . .	6
2.3.	Aneurisma abdominal . . . . .	7
2.4.	Ciclo cardiaco . . . . .	7
2.5.	Ciclo cardiaco . . . . .	8
3.1.	Esfuerzos de un elemento infinitesimal de fluido. . . . .	10
3.2.	Sistema, volumen de control y superficie de control. . . . .	11
4.1.	Dominio continuo $\Omega$ y dominio discreto $\Omega'$ . . . . .	14
4.2.	Espacio $\Omega$ , subespacio $\Omega'$ y base $\Phi$ . . . . .	15
4.3.	Elemento genérico: (a) Primer orden y (b) Segundo orden. . . . .	16
4.4.	Elemento en espacio real y en espacio relativo . . . . .	17
4.5.	Elemento triangular con: (a) lados rectos y (b) lados curvos . . . . .	18
4.6.	Mallado de la región sus bordes $\Gamma_i$ . . . . .	20
5.1.	Esquema del algoritmo de resolución . . . . .	26
5.2.	Esquema algoritmo para funciones . . . . .	27
6.1.	Presión en la entrada, calculada con: Galerkin, Compresibilidad y Petrov-Galerkin	30
7.1.	Pulsos cardiacos con seis instantes: (a) Velocidad en la entrada y (b) Presión en la salida . . . . .	31
7.2.	Puntos de estudio sobre un modelo genérico y condiciones de borde. . . . .	32
7.3.	Geometría del modelo 1: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm]).	34
7.4.	Magnitud velocidad normalizada para modelo 1 sin prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S]. . . . .	35
7.5.	Modelo 1 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	36
7.6.	Ampliación saco aneurismal modelo 1 sin prótesis. . . . .	36
7.7.	Componente horizontal $u$ , modelo 1 sin prótesis: (a) $u_1, u_2$ y $u_3$ , (b) $u_3, u_6$ y $u_7$ y (c) $u_2$ y $u_4$ . . . . .	37
7.8.	Diferencia porcentua para modelo 1 sin prótesis. . . . .	38
7.9.	Presión en modelo 1 sin protesis. . . . .	39
7.10.	Magnitud velocidad normalizada para modelo 1 con prótesis en: (a) 1.26[S], (b) 1.27 [S], (c) 1.30[S], (d) 1.35 [S], (e) 1.44 [S] y (f) 1.5[S]. . . . .	40
7.11.	Modelo 1 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	41

7.12. Ampliación saco aneurismal modelo 1 con prótesis. . . . .	41
7.13. velocidad horizontal $u$ , modelo 1 con prótesis: (a) $u_1, u_2$ y $u_3$ , (b) $u_3, u_6$ y $u_7$ y (c) $u_2$ y $u_4$ . . . . .	42
7.14. Diferencia temporal modelo 1 con prótesis . . . . .	43
7.15. Presión en modelo 1 con prótesis . . . . .	44
7.16. Velocidad en la entrada, magnitud velocidad máxima simulación sin prótesis y magnitud velocidad máxima simulación con prótesis, para modelo 1. . . . .	45
7.17. Componente horizontal para modelo 1 . . . . .	46
7.18. Geometría del modelo 2: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm])	47
7.19. Magnitud velocidad normalizada para modelo 2 sin prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S]. . . . .	48
7.20. Modelo 2 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de veloci- dad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	49
7.21. Ampliación saco aneurismal modelo 1 sin prótesis. . . . .	49
7.22. Componente horizontal para modelo 2 sin prótesis: (a) $u_1, u_3$ y $u_5$ , (b) $u_3, u_6$ y $u_7$ y (c) $u_2$ y $u_4$ . . . . .	50
7.23. Magnitud velocidad normalizada para modelo 2 con prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S]. . . . .	51
7.24. Modelo 2 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Mag- nitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	52
7.25. Ampliación saco aneurismal modelo 2 con prótesis. . . . .	52
7.26. Componente horizontal $u$ , modelo 2 con prótesis: (a) $u_1, u_2$ y $u_5$ , (b) $u_3, u_6$ y $u_7$ y (c) $u_2$ y $u_4$ . . . . .	53
7.27. Velocidad en la entrada, magnitud velocidad máxima simulación sin prótesis y magnitud velocidad máxima simulación con prótesis, para modelo 2. . . . .	53
7.28. Componente horizontal para modelo 2 . . . . .	54
7.29. Geometría del modelo 3: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm]).	55
7.30. Magnitud velocidad normalizada para modelo 3 sin prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S]. . . . .	56
7.31. Modelo 3 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de veloci- dad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	57
7.32. Ampliación saco aneurismal modelo 3 sin prótesis. . . . .	57
7.33. Magnitud velocidad normalizada para modelo 3 con prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50 [S]. . . . .	58
7.34. Modelo 3 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión ,(c) Mag- nitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida. . . . .	59
7.35. Ampliación saco aneurismal modelo 3 con prótesis. . . . .	59
7.36. Perfil de velocidad en la salida para los seis instantes de tiempo. . . . .	60
7.37. Campo de velocidades en $x=0.3$ [m], para los tiempos: 1.255[S], 1.355[S], 1.405 [S], 1.505 [S], 1.605 [S], 1.705 [S], 1.805 [S], 1.905 [S] y 2.0[S]. . . . .	61
8.1. Flujo debido a gradiente de presión. . . . .	62

8.2.	Perfil de velocidad con fórmula analítica y con el método de elementos finitos. . . . .	63
8.3.	Velocidades en aneurisma aórtico abdominal en $T=1.295$ [S]: (a) Modelo presentado por (Lin, S., et al., 2017) y (b) Modelo 1 sin prótesis (figura 7.6). . . . .	64
8.4.	Perfil de velocidad para distintos ángulos . . . . .	65
8.5.	Perfil de velocidad para toda la simulación. . . . .	65
8.6.	Flujo debido al deslizamiento de una tapa. . . . .	66
8.7.	Módulo de velocidad normalizada para: (a) $R_e=1$ y(b) $R_e=100$ . . . . .	67
8.8.	Módulo de velocidad para: (a) $R_e=1$ y (b) $R_e=100$ . . . . .	68
C.1.	Diferencia porcentual modelo 2 sin prótesis. . . . .	80
C.2.	Diferencia porcentual modelo 2 con prótesis. . . . .	81
D.1.	Distinca cantidad de subdominos para integración numérica. . . . .	83
E.1.	Interfaz de geometría de <i>Gmsh</i> . . . . .	84
E.2.	Interfaz de mallado de <i>Gmsh</i> . . . . .	85
E.3.	Mallado en <i>Gmsh</i> : (a) primer orden y (b) segundo orden . . . . .	85
E.4.	Parte de la interfaz vitural de <i>Sublime text</i> . . . . .	86
E.5.	Esquema para trabajar con <i>Sublime text</i> . . . . .	87

# Lista de Tablas

7.1. Puntos de estudio . . . . .	32
7.2. Nodos y tiempo de simulación para modelo 1 . . . . .	34
7.3. Magnitud de velocidad modelo 1 sin prótesis, para puntos de estudios en el 1 <sup>er</sup> periodo. . . . .	37
7.4. Magnitud de velocidad modelo 1 sin prótesis, para puntos de estudios en el 2 <sup>do</sup> periodo. . . . .	38
7.5. Magnitud de velocidad modelo 1 con prótesis, para puntos de estudios en el 1 <sup>er</sup> periodo. . . . .	42
7.6. Magnitud de velocidad modelo 1 con prótesis, para puntos de estudios en el 2 <sup>do</sup> periodo. . . . .	43
7.7. Nodos y tiempo de simulación para modelo 2 . . . . .	47
7.8. Nodos y tiempo de simulación para modelo 3 . . . . .	55
8.1. Velocidad flujo debido a gradiente de presión y resultado con el método de elementos finitos . . . . .	63
8.2. Simulaciones de flujo debido a deslizamiento tapa (Getnet, E., et al., 2018) . . .	67
8.3. Magnitud de velocidad con código propio y Ansys, para número de Reynolds 1 y 100. . . . .	68
C.1. Magnitud de velocidad modelo 2 sin prótesis, para puntos de estudio en el 1 <sup>er</sup> .	79
C.2. Magnitud de velocidad modelo 2 sin prótesis, para puntos de estudio en el 2 <sup>do</sup> .	79
D.1. Nodos, centroides y pesos. . . . .	83

# Capítulo 1

## Introducción

Una de las principales motivaciones de este estudio es comprender la mecánica de fluidos en los fenómenos de transporte en sistemas biológicos. En particular, en este caso el flujo en el sistema cardiovascular, el que está conformado por el corazón, órgano muscular que bombea sangre a través de una red cerrada de vasos sanguíneos. Los vasos sanguíneos que transportan la sangre oxigenada desde el corazón se denominan arterias y los vasos sanguíneos que llevan sangre al corazón se denominan venas. La arteria principal es la aorta, cuya longitud aproximada es de 30 [cm] y cubre casi la totalidad del tronco, y se encuentra subdividida en tres zonas, aorta ascendente, arco aórtico y aorta descendente, de aproximadamente 18 [cm] (Hamilton, W., et al., 1976), y a su vez la aorta descendente presenta dos zonas, la aorta torácica y aorta abdominal. Un aumento de la pared aórtica es conocido como un aneurisma aórtico, es más común que esto ocurra en la aorta abdominal y esta anomalía se define como aneurisma aórtico abdominal (AAA). Debido a esta dilatación, la aorta podría romperse provocando la muerte de la persona (Vilalta, G., et al., 2011), por este motivo, cuando este fenómeno ocurre, y el diámetro del aneurisma sobrepasa los 5 [cm], se instala una prótesis endovascular cuya función es eludir el área de la aorta debilitada por el aneurisma para evitar que se rompa (Bautista, S., et al., 2012).

A la fecha la mayoría de los estudios del fenómeno de aneurisma aórtico abdominal se han basado en investigaciones experimentales y modelaciones utilizando software comerciales. Las ecuaciones diferenciales que permiten modelar este problema son complejas de resolver ya que la presión y el flujo varían con el tiempo durante el período de relajación y contracción del corazón (Scotti, C., et al., 2008), y por ello generar un programa que pueda hacer simulaciones variando la geometría del modelo, es una buena herramienta para aprender como aplicar el método de elementos finitos y además, ser una base para próximos estudios.

Este trabajo consiste en estudiar el método de elementos finitos e implementarlo en un código, para realizar simulaciones del fenómeno de aneurisma aórtico abdominal. El modelo diseñado es bidimensional y la sangre se considera como un fluido newtoniano, homogéneo e incompresible (Fukushima, T., et al., 1988). La viscosidad de la sangre depende de sus células (glóbulos rojos, blancos, plaquetas, etc), tamaño del vaso sanguíneo, velocidad, etc., para el flujo en la aorta el comportamiento es no newtoniano (Yilmaz, F., et al., 2008).

El principal supuesto de este trabajo es considerar que la viscosidad es constante e igual a  $0.0034 [Pa \cdot S]$  (Soulis, J., et al., 2011). Se deja para futuros trabajos considerar la sangre como fluido no newtoniano, en este caso, se podría utilizar lo propuesto por (Reddy, J., 2015), que consiste en asumir que la viscosidad no varía dentro del elemento.

Los modelos están inspirados por (Fukushima, T., et al., 1988), donde se harán modificaciones

en la geometría y se implementarán pulsos de velocidad y presión, en la entrada y en la salida respectivamente (Scotti, C., et al., 2008). Las simulaciones que se realizarán corresponden a modelos de AAA, con y sin prótesis endovascular, con distintos parámetros geométricos.

En el capítulo 2 veremos los antecedentes biológicos que nos permiten un entendimiento profundo del fenómeno en estudio. En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones de gobierno que rigen el problema, que se resolverá con el método de elementos finitos. En el capítulo 4 se trata del método de elementos finitos, pasando por la teoría, formulación débil, formulación matricial y la forma de resolver el sistema. En el capítulo 5 se verá el algoritmo de resolución. El capítulo 6, tratará sobre dos métodos de estabilidad. En el capítulo 7 se mostrarán los resultados de tres modelos, donde cada uno presenta una simulación sin prótesis y otra con prótesis. En el capítulo 8 se presentará la validación de los resultados y una comparación del método de elementos finitos respecto a otros estudios y finalmente, el capítulo 9 tendrá las conclusiones finales de este trabajo y las posibles líneas de investigación.

## 1.1. Estado del arte

Actualmente, se utilizan métodos numéricos (elementos finitos o volúmenes finitos) en los programas obteniendo resultados confiables y rápidos, pero en ocasiones contar con una licencia para un programa comercial puede ser muy costoso. Por este motivo, aplicar un método numérico es útil para potenciar nuevos trabajos, enfocado principalmente en la programación.

En la práctica existe el método de diferencias finitas y de volúmenes finitos, el primero puede tener una gran precisión pero tiene un gran gasto computacional, el segundo es muy popular y se basa en las propiedades físicas de conservación (Jiajan, W., 2010), pero en este trabajo se utilizará el método de elementos finitos por su fácil implementación y porque, tiene un desarrollo teórico muy amplio permitiendo incorporar otras cosas como: cambiar el orden a la función de forma, cambiar la función de forma, probar términos de estabilidad, etc.

Respecto al problema biológico, los aneurismas aórticos abdominales se tratan introduciendo una prótesis y esto ha demostrado ser suficiente para evitar la ruptura, aunque puede fallar pero es poco probable.

A continuación, se presentan los estudios implicados mayoritariamente en este trabajo:

1. Fukushima, T., et al. (1988): Realizan un modelo de aneurisma aórtico abdominal en un laboratorio donde utilizan pulsos de velocidad y presión, ambos en la entrada. Los resultados son comparados con los obtenidos con el método de elementos finitos.
2. Palmaz, J., et al. (1995): Uno de los primeros estudios donde se analizó el comportamiento de la prótesis endovascular en perros. Concluyen que el material PTFE es el indicado para tratar los aneurismas aórticos abdominales.
3. Pierce., G. (1998): Patente prótesis endovascular, donde se muestra el proceso de instalación y cada una de sus partes (p. ej: ganchos, tubo, etc.). El diámetro de la prótesis será ligeramente menor que el diámetro de la aorta, por lo tanto, se tendrá flujo dentro de la zona debilitada.
4. Hall, A., et al. (2000): Estudio de aneurisma aórtico abdominal, en 243 pacientes para intentar estimar la tensión de ruptura. Proponen una fórmula para la tensión de la aorta, usando como datos: presión arterial media, radio aneurisma y espesor pared aórtica.

5. Lin, Z., et al. (2004): Analiza el desempeño de la prótesis endovascular respecto a las presiones, para pacientes con hipertensión. Utiliza el programa Ansys para hacer las simulaciones.
6. Scotti, C., et al. (2008): En este trabajo se presenta un análisis de la interacción fluido estructura, es decir, entre la sangre y la aorta. Además, en este trabajo se incorporan los pulsos de velocidad en la entrada y presión en la salida, que corresponden a los utilizados en las siguientes publicaciones porque representan de mejor manera el flujo en la aorta.
7. Yilmaz, F., et al.(2008): Trata sobre la reología de la sangre, la viscosidad (modelo newtoniano y modelo no newtoniano), presenta fórmulas de viscosidad tanto independientes del tiempo como dependientes, entre otras cosas.
8. Jiajan, W. (2010): Artículo del método de elementos finitos, donde desarrollan la teoría y proponen el precalculo matricial para ahorrar tiempo de cálculo pero las matrices presentan errores.
9. García, M. (2010): Consiste en usar la ecografía abdominal para detectar aneurismas aórticos abdominales, en tres varones mayores de 65 años (población de riesgo), los cuales presentaba síntomas como: dolor abdominal, náuseas, etc.
10. Soulis, J., et al. (2011): Se realizan simulaciones con el programa KRATOS que usa el método de elementos finitos, pero se incluye un análisis no newtoniano de la sangre, proponiendo varios modelos (Casson, Carreau, entre otros).
11. Vilalta, G., et al. (2011): Propone cuantificar la probabilidad de ruptura del aneurisma mediante coeficientes de ponderación para cada factor de riesgo (p. ej: tasa de deformación, asimetría, tasa de crecimiento, entre otros.).
12. Bautista, S., et al. (2012): Información médica de los aneurismas aórticos abdominales, pasando por la epidemiología, etiología, cuadro clínico, etc. Además, de acá se extraen las dimensiones de los modelos.
13. Casula, E. (2012): Este estudio presenta la utilización de la tomografía computacional (TC), la cual permite hacer radiología del aneurisma y así, diagnosticar mejor esta enfermedad. Además, la imagen mostró que la sangre fluye dentro del saco, a pesar de estar la prótesis endovascular.
14. Getnet, E., et al. (2018): Presenta el desarrollo con el método de elementos finitos pero utilizando elementos rectangulares y la ecuación de Navier-Stokes en régimen permanente.
15. Laza, J., et al. (2019): Estudio de 67 pacientes con aneurismas aórticos abdominales, donde se trata de analizar y concluir, el efecto de los factores de riesgo (p ej: tabaquismo, hipertensión,etc.). Finalmente, se concluye que es muy difícil decidir cual es el factor más relevante, por lo tanto, se recomienda analizar cada caso.

Dicho lo anterior, este trabajo busca ser un aporte para el estado del arte en el ámbito académico, desarrollando el método de elementos finitos e implementarlo en un código para realizar simulaciones de aneurismas aórticos abdominales con los supuestos de régimen laminar y fluido newtoniano. Bajo estos supuestos, se analizará el comportamiento de la prótesis

## 1.2. Objetivo General

Estudiar el método de elementos finitos y elaborar un código, para realizar simulaciones de aneurismas aórticos abdominales con fines didácticos, bajo los supuestos de régimen laminar y fluido newtoniano. Además, estudiar el funcionamiento de la prótesis endovascular

## 1.3. Objetivos Específicos

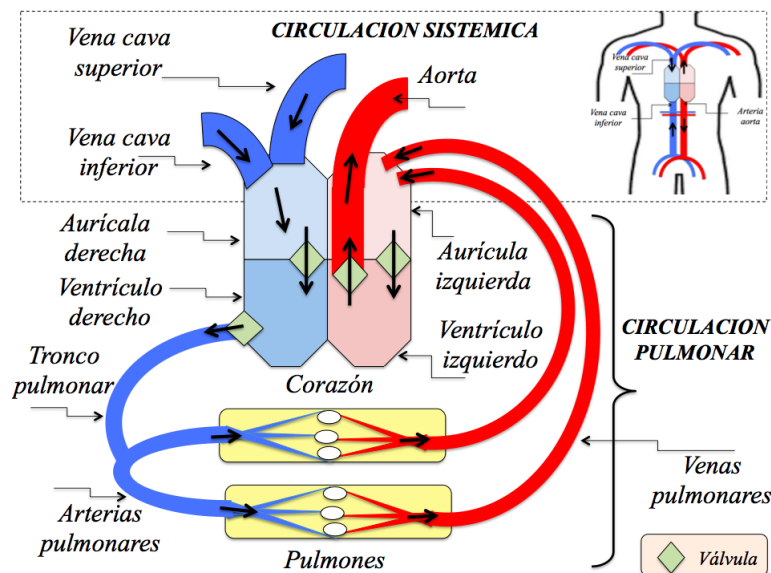
- Construir un modelo utilizando el método de elementos finitos que permita solucionar las ecuaciones que gobiernan el flujo sanguíneo (considerando régimen laminar y fluido newtoniano) dentro de un aneurisma aórtico y analizar el comportamiento de la velocidad y la presión del fenómeno sin y con prótesis.
- Validar el modelo con estudios encontrados en la literatura.

# Capítulo 2

## Antecedentes Biológicos

### 2.1. Sistema cardiovascular

El sistema cardiovascular es un sistema cerrado, formado por el corazón que es un órgano muscular que bombea sangre a través de una red de vasos sanguíneos. El corazón tiene dimensiones aproximadas de 12 [cm] de largo, 9 [cm] de ancho y 6 [cm] de profundidad (Hamilton, W., et al., 1976), y se subdivide en cuatro cámaras; aurículas derecha e izquierda y ventrículos derecho e izquierdo. Desde el ventrículo derecho, la sangre es bombeada para ingresar al tronco pulmonar y luego se divide en las arterias pulmonares, pasando a través de los pulmones respectivos, donde la sangre se oxigena y regresa por las venas pulmonares a la aurícula izquierda, completando así la circulación pulmonar o menor. Desde la aurícula izquierda, la sangre fluye hacia el ventrículo izquierdo, desde donde es bombeada la sangre oxigenada a través de la aorta y sus ramas hacia todas las partes del cuerpo excepto los pulmones y, regresando la sangre no oxigenada al corazón, a través de la vena cava superior y vena cava inferior, donde ingresa a la aurícula derecha, completando así la circulación sistémica o mayor, como se muestra en la figura 2.1.



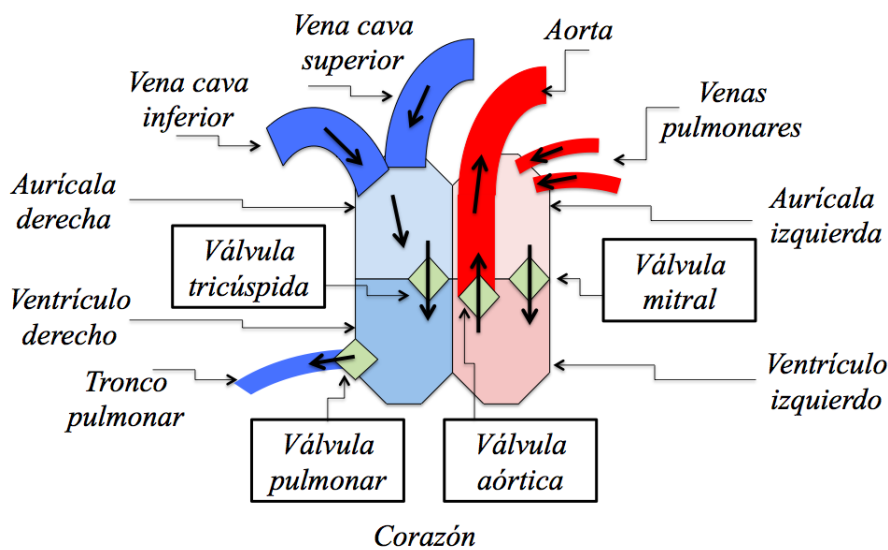
**Figura 2.1:** Sistema cardiovascular

Fuente: Vivian Aranda N.

La conexión entre la circulación pulmonar y sistémica se efectúa en el corazón por el paso de sangre de la aurícula derecha al ventrículo derecho y de la aurícula izquierda al ventrículo izquierdo.

## 2.2. Válvulas del corazón

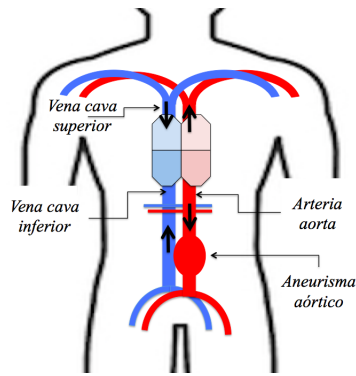
Las principales válvulas en el corazón son la válvula tricúspida, la válvula pulmonar, la válvula mitral y la válvula aórtica. Las válvulas tricúspida y mitral, se caracterizan por su función como válvulas aurículoventriculares. Siguiendo el flujo sanguíneo desde la aurícula derecha, encontramos la válvula tricúspide que permite el paso de la sangre no oxigenada desde la aurícula derecha al ventrículo derecho, figura 2.2, pero no en sentido inverso. Luego la válvula pulmonar permite el flujo de la sangre que se bombea desde el ventrículo derecho al tronco pulmonar. Una vez que la sangre oxigenada llega a la aurícula izquierda a través de las venas pulmonares, la válvula mitral permite el flujo de la sangre oxigenada desde la aurícula izquierda al ventrículo izquierdo. Finalmente, la válvula aórtica permite el flujo de la sangre oxigenada que se bombea desde el ventrículo izquierdo a la aorta.



**Figura 2.2:** Válvulas  
Fuente: Vivian Aranda N.

## 2.3. Vasos sanguíneos

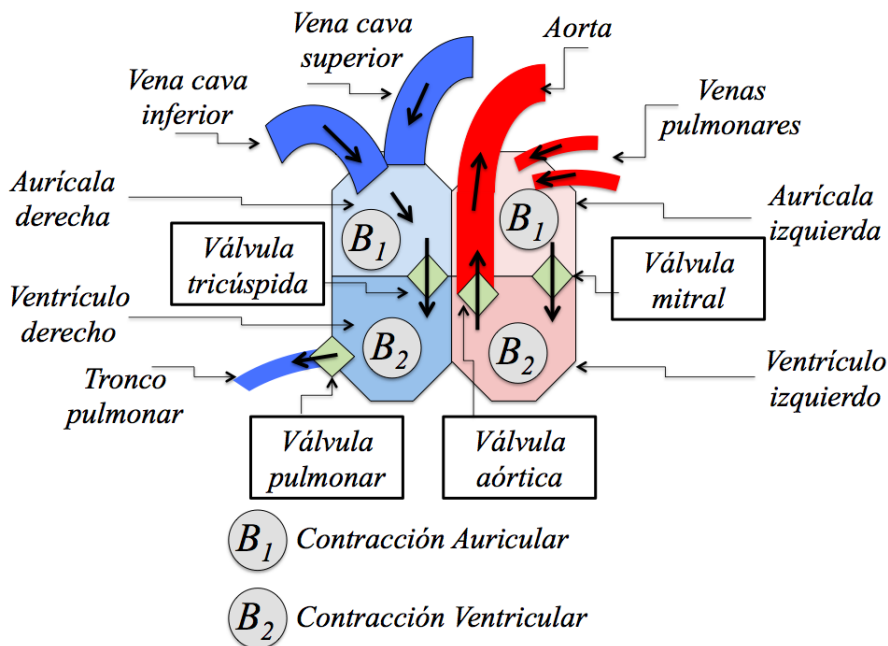
Los vasos sanguíneos que transportan la sangre oxigenada desde el corazón se denominan arterias y los vasos sanguíneos que llevan sangre al corazón se denominan venas. La arteria principal es la aorta, cuya longitud aproximada es de 30 [cm] y cubre casi la totalidad del tronco, y se encuentre subdividida en tres zonas, aorta ascendente, arco aórtico y aorta descendente, de aproximadamente 18 [cm] (Hamilton, W., et al., 1976), y a su vez la aorta descendente presenta dos zonas, la aorta torácica y aorta abdominal. El diámetro de la aorta abdominal varía entre mujeres y hombres, y este diámetro aproximado, considerado como normal según los datos de radiología vascular, oscila entre 1.9 [cm] y 2.3 [cm] respectivamente. Un aumento de la pared aórtica es conocido como un aneurisma aórtico, es más común que esto ocurra en la aorta abdominal y esta anomalía se define como AAA. Debido a esta dilatación, la aorta podría romperse provocando la muerte de la persona, por este motivo, cuando este fenómeno ocurre, y el diámetro del aneurisma sobrepasa los 5 [cm], se instala una prótesis endovascular cuya función es eludir el área de la aorta debilitada por el aneurisma para evitar que se rompa. La figura 2.3, muestra un bosquejo del sistema cardiovascular y un aneurisma aórtico abdominal.



**Figura 2.3:** Aneurisma abdominal  
Fuente: Vivian Aranda N.

## 2.4. Ciclo cardíaco

El músculo cardíaco, se dice que está en sístole cuando se contrae, y en diástole cuando se relaja. Los ventrículos y las aurículas no se contraen al mismo tiempo. Las aurículas se contraen primero, llenando los ventrículos relajados y luego se relajan mientras los ventrículos se contraen, figura 2.4. Durante la contracción de los ventrículos, las válvulas auriculoventriculares, tricúspide y mitral, se cierran y la sangre debe fluir hacia el tronco pulmonar y la aorta respectivamente. Al final de la contracción ventricular, tanto las aurículas como los ventrículos se relajan durante un breve período de tiempo. La alternancia de sístole y diástole en secuencia regular constituye el ciclo cardíaco.

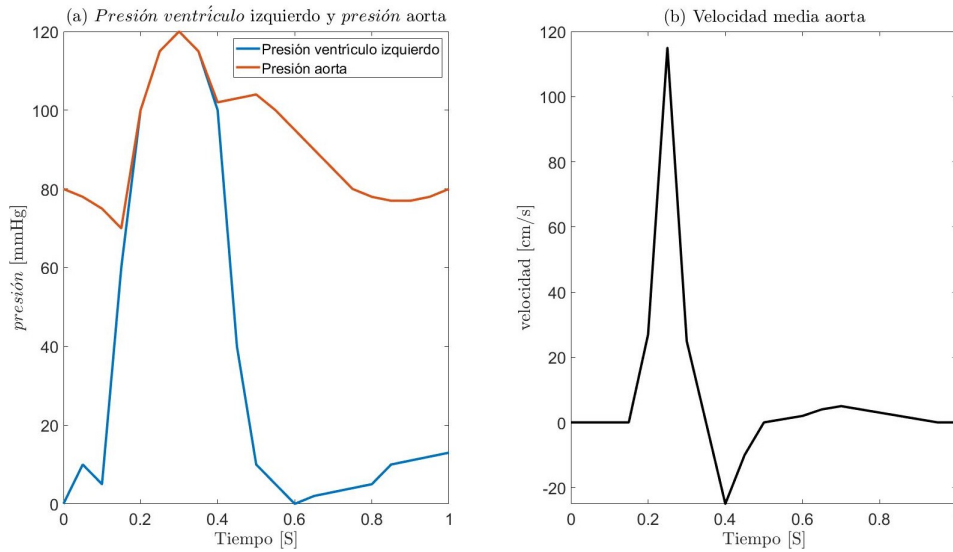


**Figura 2.4:** Ciclo cardíaco  
Fuente: Vivian Aranda N.

Las válvulas cardíacas evitan el reflujo de sangre. El resultado es que la presión y el flujo varían con el tiempo durante el período de relajación y contracción del corazón.

En resumen, el flujo sanguíneo se divide en dos fases: sístole,  $B_2$ , durante la cual se bombea sangre desde el corazón y diástole,  $B_1$ , durante la cual no se bombea sangre desde el corazón y

los ventrículos se llenan de sangre. A medida que el corazón se contrae, la presión del ventrículo izquierdo aumenta rápidamente de aproximadamente 5 [mmHg] a 120 [mmHg] en aproximadamente 0,2 [S]. La presión aórtica suele oscilar entre 80 [mmHg] y 120 [mmHg], ver figura 2.5.



**Figura 2.5:** Ciclo cardiaco

Fuente: Figura modificada de Truskey, G., et al., 2004.

Cuando la presión ventricular excede la presión aórtica, la válvula aórtica se abre y la sangre fluye hacia la aorta. El flujo aórtico alcanza un máximo cuando la derivada de la presión local comienza a disminuir antes del punto de máxima presión. A medida que la presión disminuye, la válvula comienza a cerrarse. La velocidad aórtica es aproximadamente cero hasta que el ventrículo izquierdo comienza a contraerse nuevamente. Por tanto, la aorta mantiene una presión relativamente alta, incluso cuando no hay flujo.

## 2.5. Reología de la sangre

La sangre es un fluido muy complejo de estudiar, porque está constituida por partículas en suspensión cuya morfología cambia constantemente (Donne, D., et al., 2003). Tiene una parte líquida llamada plasma (compuesta de agua, sales, proteínas y constituye  $\sim 55\%$  del total) y una parte sólida, compuesta por: glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas (Giles, R., et al., 2010). A continuación, se describirá brevemente la parte sólida:

- Glóbulos rojos ( $\sim 41\%$ ): Producidos desde la médula ósea y tienen la función de transportar el oxígeno desde los pulmones hacia el resto del cuerpo (Giles, R., et al., 2010).
- Glóbulos blancos ( $\sim 4\%$ ): Son parte del sistema inmunitario, es decir, ayudan a proteger el organismo de bacterias, virus, etc (Moreno, L., 2010).
- Plaquetas ( $\sim 1\%$ ): Tienen la función de coagular la sangre cuando sea necesario, por ejemplo, en la ruptura de un vaso formarán un coágulo para evitar que la sangre salga (Moreno, L., 2010).

La sangre se comporta como un fluido no newtoniano, es decir, su viscosidad depende principalmente de la deformación cortante (Jiajan, W., et al., 2010). Se han propuesto muchos modelos matemáticos para estimar la viscosidad como: Power-law, Carreau, Casson, entre otros.

En este trabajo, se tienen condiciones de velocidad y presión variables en el tiempo, con mayor razón considerar un comportamiento no newtoniano de la sangre sería el camino más correcto. Sin embargo, se considerará la viscosidad constante e igual a  $0.0034[Pa \cdot S]$  (Soulis, J., et al., 2011), porque este trabajo tiene fines académicos y se deja la posibilidad, de continuarlo con nuevas consideraciones.



Para una mejor visualización la expresión 3.1, se reescribe en su forma matricial separando los tres esfuerzos descritos anteriormente. Esta formulación será para un flujo bidimensional porque los modelos que se presentan en este trabajo, están en dos dimensiones.

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \frac{2\mu}{3} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Más adelante, se verá la ecuación de conservación del momento lineal donde será necesario calcular el gradiente del tensor 3.1. A continuación, se realizará este cálculo utilizando notación de índices:

$$\nabla \tilde{\sigma} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \quad (3.4)$$

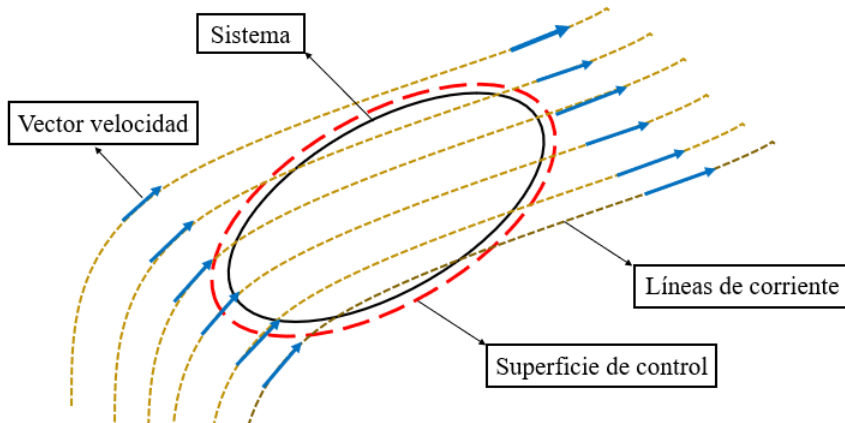
$$= -\frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Con la ecuación anterior, el gradiente del tensor se reescribe en su forma definitiva de la siguiente forma:

$$\nabla \tilde{\sigma} = \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (3.6)$$

## 3.2. Teorema del transporte de Reynolds

El teorema del transporte de Reynolds es una expresión matemática que permite relacionar cantidades Eulerianas con cantidades Lagrangianas. Esto permite identificar un sistema finito y evaluar la razón de cambio de cualquier propiedad o característica de este sistema, examinando el flujo a través de un volumen de control,  $V_c$  y su respectiva superficie de control,  $A_c$ , como muestra la figura 3.2. Se diseña el sistema como una masa de fluidos que instantáneamente ocupa el volumen de control y por lo tanto, un diferente sistema ocupa el volumen de control en cada instante.



**Figura 3.2:** Sistema, volumen de control y superficie de control.

Fuente:Elaboración propia.

Es posible calcular la razón de cambio de una propiedad arbitraria de este sistema,  $B_{sis}$ , la cual puede ser, masa, momento, energía o cualquier otra propiedad, la propiedad  $B_{sis}$  puede no ser uniformemente distribuida a través del sistema. Se define  $b$  como la propiedad específica por

unidad de masa. La cantidad total de  $B_{sis}$  en el sistema, donde  $M_{sis}$  es la masa del sistema y  $V_{sis}$  es el volumen del sistema, está definida por:

$$B_{sis} = \int_{M_{sis}} b dM = \int_{V_{sis}} \rho b dV \quad (3.7)$$

Finalmente el teorema del transporte de Reynolds, donde  $\vec{u}_r$  corresponde a la velocidad relativa y  $\hat{n}$  al vector unitario normal a la superficie de control, se expresa como:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho b dV + \oint_{A_c} \rho b (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{V_{sis}} \rho b dV \right) = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho b dV + \oint_{A_c} \rho b (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.9)$$

### 3.3. Ecuación de conservación de masa

Esta ecuación se deduce de 3.9, considerando que la propiedad intensiva  $b$  es constante e igual a 1. Dicho lo anterior se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{V_{sis}} \rho dV \right) = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{A_c} \rho (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.10)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{V_c} \rho dV \right) + \oint_{A_c} \rho (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.11)$$

La masa del sistema no desaparece, por lo tanto, por lo tanto el lado derecho de la ecuación 3.11 es igual a cero. Por otro lado, aplicando el teorema de la divergencia D.2, es posible cambiar la integral de área de 3.11, por una integral volumétrica obteniendo lo siguiente:

$$0 = \int_{V_c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV \quad (3.12)$$

Como se observa en la expresión anterior, se cambió la velocidad relativa por simplemente la velocidad porque el volumen de control es rígido y fijo, esto último implica que los sistemas absolutos y relativos son iguales. Finalmente, se obtiene la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.13)$$

Para los modelos de este trabajo, la densidad  $\rho$  se considera constante, por lo tanto, el operador  $\nabla$  no la afecta. Dicho lo anterior se obtiene la primera ecuación de gobierno:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.14)$$

### 3.4. Ecuación de conservación del momento lineal

El procedimiento para deducir esta ecuación, es similar al caso de la conservación de masa, pero en este caso la propiedad extensiva es el momento lineal y por consiguiente, la velocidad es la propiedad intensiva.

$$B_{sis} = \vec{P} = m \vec{u} \quad b = \vec{u} \quad (3.15)$$

Al reemplazar lo anterior en 3.9, se obtendrá la derivada temporal del momento lineal, que corresponde a la fuerza resultante que afecta al elemento infinitesimal de fluido.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \right) + \oint_{A_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.16)$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \right) + \oint_{A_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (3.17)$$

Notar que la fuerza neta, se descompone en las fuerzas de cuerpo y los esfuerzos.

$$\int_{V_c} \rho \vec{f}_b dV + \oint_{A_c} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} dA = \frac{d}{dt} \left( \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \right) + \oint_{A_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (3.18)$$

Utilizando el teorema de la divergencia D.2, se reescribe la ecuación anterior sólo con integrales de volumen.

$$\int_{V_c} (\rho \vec{f}_b + \nabla \vec{\sigma}) dV = \int_{V_c} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla (\rho \vec{u} \vec{u}) \right) dV \quad (3.19)$$

Como ambas integrales están definidas sobre el mismo dominio, es posible igual los términos internos y continuar desarrollando la ecuación anterior.

$$\rho \vec{f}_b + \nabla \vec{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla (\rho \vec{u} \vec{u}) \quad (3.20)$$

$$\rho \vec{f}_b + \nabla \vec{\sigma} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \rho \nabla \vec{u} + \vec{u} \vec{u} \nabla \rho + \rho \vec{u} \nabla \vec{u} \quad (3.21)$$

$$\rho \vec{f}_b + \nabla \vec{\sigma} = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \rho \nabla \vec{u} + \vec{u} \vec{u} \nabla \rho + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \nabla \vec{u} \quad (3.22)$$

$$\rho \vec{f}_b + \nabla \vec{\sigma} = \underbrace{\vec{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla \rho \right)}_0 + \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) \quad (3.23)$$

De la expresión anterior, se observa que aparece la ecuación de conservación de masa, por lo tanto, ese término se anula. Reemplazando la ecuación 3.6, en esta ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3\rho} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (3.24)$$

Finalmente, considerando el fluido como incompresible y multiplicando por la densidad  $\rho$  la ecuación anterior se transforma en:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.25)$$

Expandiendo esta ecuación, se obtienen la segunda y la tercera ecuación de gobierno:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g_x = 0 \quad (3.26)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g_y = 0 \quad (3.27)$$

# Capítulo 4

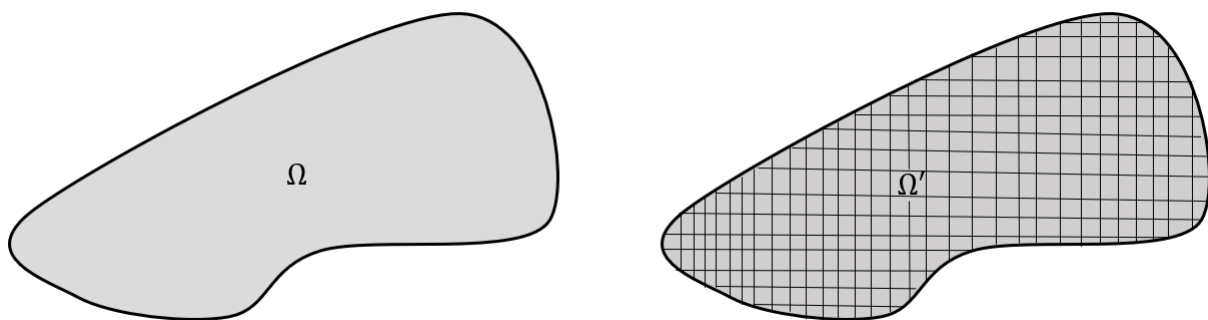
## Método de Elementos Finitos

Este capítulo tratará el método de elementos finitos, pasando por la teoría, formulación débil, formulación matricial y la forma para resolver el sistema usando el método de Galerkin (Reddy., 2015).

### 4.1. Teoría del método

En algunos problemas es posible determinar la solución de manera algebraica, pero en la gran mayoría no es posible debido a la complejidad matemática. Para resolver estos problemas se utilizan métodos numéricos para determinar una solución aproximada. El método de elementos finitos, es conocido por resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales, de forma numérica en un subespacio discreto.

Este método es muy utilizado por distintos programas de simulación porque tiene la ventaja de encontrar soluciones aproximadas, reduciendo el consumo de datos. Como se mencionó anteriormente, este método encuentra soluciones dentro de un subespacio discreto, en la siguiente figura se muestra un dominio continuo y uno discreto, para un problema ficticio:



**Figura 4.1:** Dominio continuo  $\Omega$  y dominio discreto  $\Omega'$

Fuente: Elaboración propia

Cómo se observa en la figura 4.1., el dominio discreto  $\Omega'$  posee elementos triangulares y rectangulares. Para este trabajo se utilizarán elementos triangulares (con lados rectos) por los siguientes motivos:

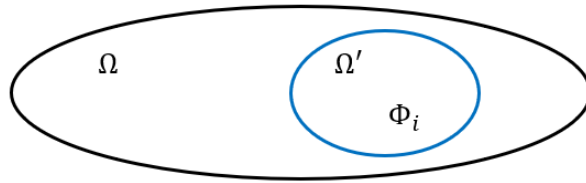
- Pueden cubrir mejor la superficie que los elementos rectangulares, lo que permite tener una diferencia menor entre los dominios  $\Omega$  y  $\Omega'$

- Como los elementos tendrán lados rectos, es posible hacer un trabajo algebraico más refinado, los detalles de esta ventaja se verán en la sección de elementos isoparamétricos.

Retomando la teoría del método, como se mencionó anteriormente, se buscan soluciones aproximadas dentro de un subespacio discreto  $\Omega'$ , pero es muy importante mencionar que está contenido dentro de  $\Omega$ . Dicho esto se tiene que:

$$\Omega' \subset \Omega \quad (4.1)$$

Por otro lado, para trabajar dentro de  $\Omega'$ , es necesario contar con una base  $\Phi$ . La siguiente figura muestra la situación:



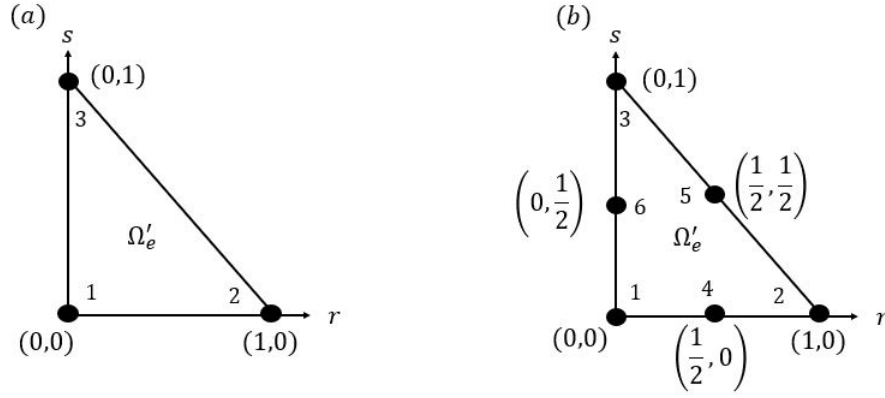
**Figura 4.2:** Espacio  $\Omega$ , subespacio  $\Omega'$  y base  $\Phi$   
Fuente: Elaboración propia.

La base  $\Phi$ , cumple la función de aproximar la variable dentro del elemento mediante una superposición (Chung, T., 2002). Para explicar el procedimiento, se utilizarán las variables  $u$ ,  $v$  y  $p$ , que corresponden a la componente horizontal de la velocidad y a la presión, respectivamente. Dicho esto se tiene lo siguiente:

$$u^e(x_i, y_i) \approx \sum_{i=1}^6 \psi_i(x, y) u_i(x, y, t) \quad v^e(x_i, y_i) \approx \sum_{i=1}^6 \psi_i(x, y) v_i(x, y, t) \quad p^e(x_i, y_i) \approx \sum_{j=1}^3 \phi_j(x, y) p_j(x, y, t) \quad (4.2)$$

Donde  $\phi_j$  y  $\psi_i$ , corresponden a las funciones de forma de primer y segundo orden. Notar que estas funciones corresponden a la base  $\Phi$ . Las variables  $u_i$ ,  $v_i$  y  $p_i$ , son dependientes del tiempo. Por otro lado, los subíndices  $i, j$  varían dependiendo del orden de la función de forma (p. ej.:  $i=1, \dots, 6$  para segundo orden y  $j=1, \dots, 3$  para primer orden). Es muy importante que la función de forma para la velocidad tenga un orden superior a la función de presión. (Zienkiewicz, O., et al., 1967).

En este trabajo, las funciones de forma serán las funciones de Lagrange (Chung, T., 2002). Para calcular estas funciones, es necesario tener las coordenadas de los nodos, pero como se mencionó anteriormente, al usar elementos triangulares con lados rectos, se puede trabajar mejor el álgebra. Dicho lo anterior, las funciones de interpolación  $\phi_j$  y  $\psi_i$ , se calculan para un elemento genérico dentro de un espacio relativo  $(r, s)$ . En la siguiente figura se muestra el elemento de primer y segundo orden, dentro del espacio relativo mencionado anteriormente:



**Figura 4.3:** Elemento genérico: (a) Primer orden y (b) Segundo orden.  
Fuente: Elaboración propia

Se observa en la figura anterior, las coordenadas de los nodos y la numeración de estos. Esto último es muy importante, la numeración de los nodos debe ser antihorario, porque de no ser así todos los cálculos tendrán los signos opuestos.

Continuando con el cálculo de las funciones  $\phi_j$  y  $\psi_i$ , se hace la siguiente operación ( $s_i$  y  $r_i$ , son las coordenadas de los nodos):

$$\phi_j = (1 \ r \ s) \begin{bmatrix} 1 & r_1 & s_1 \\ 1 & r_2 & s_2 \\ 1 & r_3 & s_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad \psi_i = (1 \ r \ s \ r^2 \ s^2 \ rs) \begin{bmatrix} 1 & r_1 & s_1 & r_1^2 & s_1^2 & r_1 s_1 \\ 1 & r_2 & s_2 & r_2^2 & s_2^2 & r_2 s_2 \\ 1 & r_3 & s_3 & r_3^2 & s_3^2 & r_3 s_3 \\ 1 & r_4 & s_4 & r_4^2 & s_4^2 & r_4 s_4 \\ 1 & r_5 & s_5 & r_5^2 & s_5^2 & r_5 s_5 \\ 1 & r_6 & s_6 & r_6^2 & s_6^2 & r_6 s_6 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.3)$$

Obteniéndose:

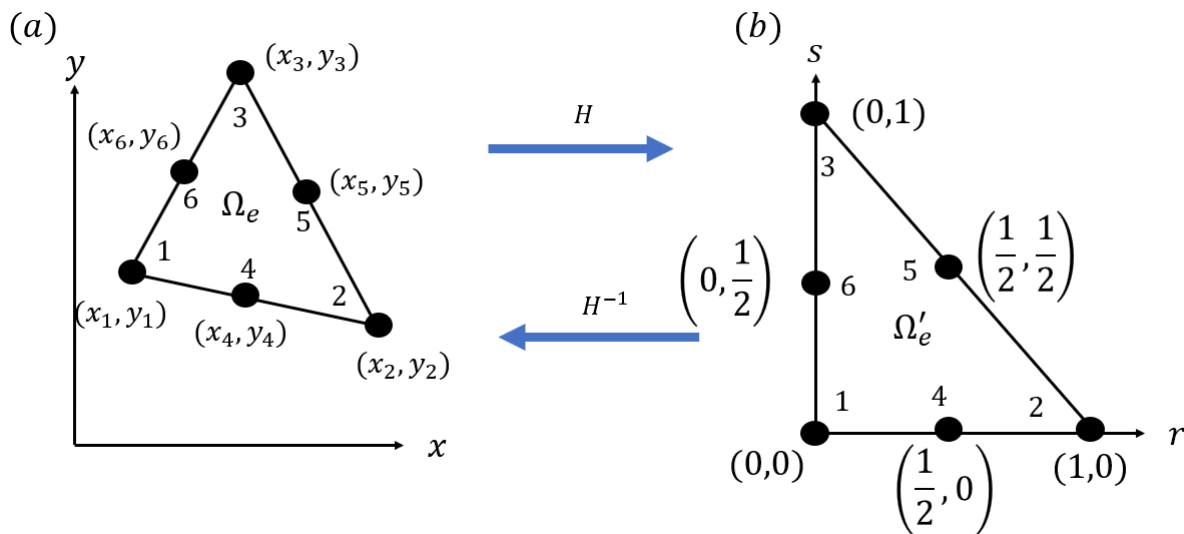
$$\phi_j = \begin{cases} 1 - r - s \\ r \\ s \end{cases} \quad \psi_i = \begin{cases} 1 - 3r - 3s + 2r^2 + 2s^2 + 4rs \\ -r + 2r^2 \\ -s + 2s^2 \\ 4r - 2r^2 - 4rs \\ 4rs \\ 4s - 4s^2 - 4rs \end{cases} \quad (4.4)$$

Las funciones presentadas en 4.4, se pueden encontrar en la literatura por ejemplo en (Reddy, J., 2015). Por otro lado, lo presentado anteriormente sirve para aproximar las variables pero el proceso es distinto en una ecuación. En la siguiente sección se verá como encontrar la formulación débil de las ecuaciones de gobierno.

## 4.2. Elementos isoparamétricos

En esta sección, se presentarán los elementos isoparamétricos, los cuales son necesarios para utilizar las funciones de interpolación 4.4, recordar que fueron definidas sobre un elemento triangular genérico.

Recordar, que en la sección anterior, se muestra la ecuación de gobierno aplicada sobre cada elemento finito, integrado sobre su respectiva área  $\Omega_e$ . Como es necesario integrar y según el mallado de la región, los triángulos no estarán ordenados de forma que faciliten su integración, es más eficiente aplicar una transformación de espacio. En la siguiente figura se muestra lo mencionado:



**Figura 4.4:** Elemento en espacio real y en espacio relativo

Fuente: Elaboración propia.

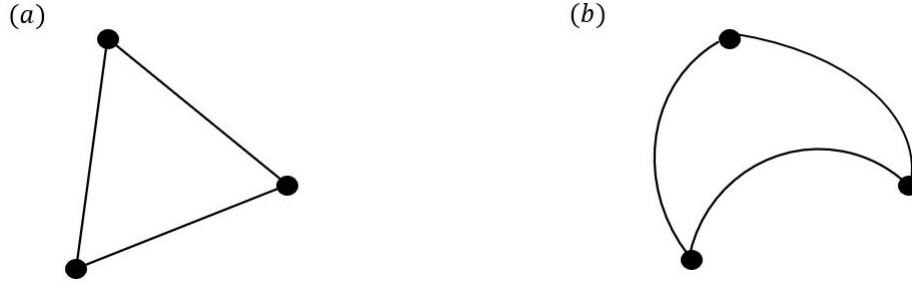
El elemento en el espacio relativo es un triángulo rectángulo de lado 1 y debido a la forma que tiene, facilita el proceso de integración. Para trabajar sobre este espacio, es necesario conocer el operador  $H$  que permite transformar las coordenadas del espacio real al relativo. A continuación, se muestra la expresión necesaria:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Como se integrará en el espacio relativo, es necesario despejar la expresión anterior para llevar el resultado al espacio real.

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.6)$$

Antes de continuar, es muy importante mencionar que esta expresión es válida para elementos triangulares cuyos lados son rectos (mencionado anteriormente) porque la posición de los nodos que no estén en los bordes, está relacionada de manera geométrica. Para aclarar mejor esto, se presenta la siguiente figura con dos tipos de elementos triangulares:



**Figura 4.5:** Elemento triangular con: (a) lados rectos y (b) lados curvos  
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4.5 (a), se observa un elemento triangular con lados rectos cuya transformación es equivalente para  $3, 6, \dots, n_e$  nodos. Por otro lado, la figura 4.5 (b), los nodos que no estén en los bordes no se pueden calcular de manera geométrica.

Retomando la formulación débil, en las ecuaciones: 4.23, 4.24 y 4.25, se observan derivadas espaciales y temporales (la derivada temporal se trabajará en la siguiente sesión). Para calcular las derivadas espaciales se utiliza la matriz jacobiana, con el objetivo llevar las funciones de interpolación  $\psi$  y  $\phi$  al espacio relativo (Zienkiewicz, O., et al., 1967):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Como la formulación débil está en el subespacio discreto  $\Omega'$ , las derivadas se deben trasladar. Para esto, la expresión anterior se debe despejar y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Para continuar con el desarrollo, es necesario expandir la ecuación 4.8, pero la inversa de la matriz jacobiana pasará a llamarse  $[W]$  para facilitar el álgebra. Expandiendo la ecuación 4.8, se obtienen dos ecuaciones para  $\partial/\partial x$  y  $\partial/\partial y$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = W_{1,1} \frac{\partial \psi}{\partial r} + W_{1,2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = W_{2,1} \frac{\partial \psi}{\partial r} + W_{2,2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (4.10)$$

Para calcular  $[W]$ , se deriva la ecuación 4.5 y se invierte.

$$[W] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.11)$$

La expresión anterior, depende únicamente de la posición de los vértices del elemento, lo que representa una reducción en los tiempos de cálculo porque más adelante se verá que todas las matrices (masa, difusión, etc) se pueden calcular como una combinación lineal utilizando los

coeficientes de la matriz  $[W]$ .

Finalmente, para integrar en el espacio relativo el diferencial de área  $d\Omega_e$ , este se reemplaza por  $|J|d\Omega'_e$ , donde  $|J|$  corresponde al determinante del jacobiano:

$$|J| = \left( \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right) \quad (4.12)$$

### 4.3. Formulación débil

La formulación débil, se conoce como el resultado de aplicar el método de elementos finitos en una ecuación, para definirla en un espacio discreto. A continuación, se reescriben las ecuaciones 3.14, 3.26 y 3.27:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g_x = 0 \quad (4.13)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g_y = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

La ecuación anterior, se multiplica por las funciones de interpolación descritas en 4.4 y se integran sobre el dominio discreto  $\Omega'$ . Se tiene lo siguiente:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g_x = 0 \quad \left| \cdot \int_{\Omega'} \psi_i d\Omega' \right. \quad (4.16)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g_y = 0 \quad \left| \cdot \int_{\Omega'} \psi_i d\Omega' \right. \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left| \cdot \int_{\Omega'} \phi_j d\Omega' \right. \quad (4.18)$$

Para trabajar sobre las derivadas de segundo orden se aplica el teorema de Stokes D.1. Dicho lo anterior, estos términos se reemplazan por los siguiente:

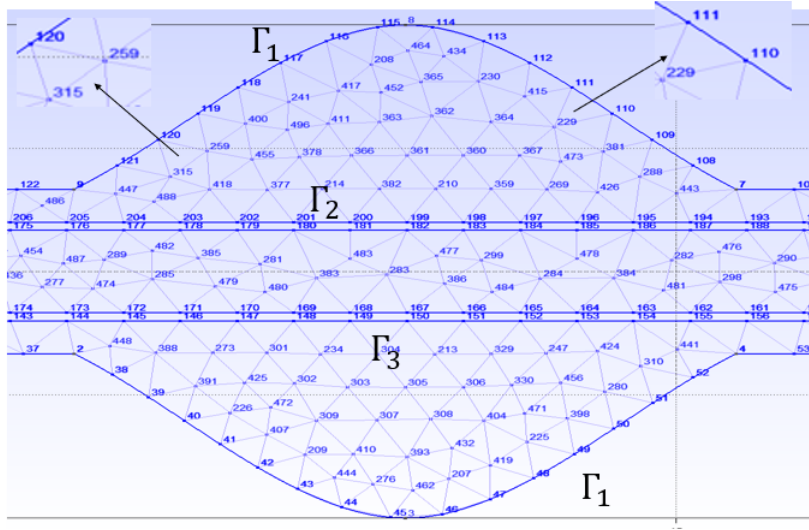
$$\int_{\Omega_e} \mu \psi_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} d\Omega_e = \mu \left[ \int_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial u_j}{\partial x} \hat{n}_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} d\Omega_e \right] \quad (4.19)$$

$$\int_{\Omega_e} \mu \psi_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} d\Omega_e = \mu \left[ \int_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial u_j}{\partial y} \hat{n}_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} d\Omega_e \right] \quad (4.20)$$

$$\int_{\Omega_e} \mu \psi_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} d\Omega_e = \mu \left[ \int_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial v_j}{\partial x} \hat{n}_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} d\Omega_e \right] \quad (4.21)$$

$$\int_{\Omega_e} \mu \psi_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} d\Omega_e = \mu \left[ \int_{\Gamma} \phi_i \frac{\partial v_j}{\partial y} \hat{n}_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial v_j}{\partial y} d\Omega_e \right] \quad (4.22)$$

Donde  $\Gamma$ , corresponde al borde de la región, por lo tanto, esta integral aplica sobre los elementos cuyos contornos estén sobre el perímetro de la región. En la siguiente figura se muestra lo dicho anteriormente:



**Figura 4.6:** Mallado de la región sus bordes  $\Gamma_i$   
Fuente: Elaboración propia

De la figura 4.6, el elemento compuesto por los nodos: 111, 229 y 110, uno de sus lados coincide con el perímetro de la región  $\Gamma_1$ , por otro lado, el elemento compuesto por los nodos: 120, 315 y 259, no tiene ningún lado que coincida. Cabe mencionar que  $\Gamma_1$  corresponde a los borde de la arteria,  $\Gamma_2$  es la parte superior de la prótesis y  $\Gamma_3$  es la parte inferior.

Por otro lado, estas integrales de línea corresponden a las condiciones de Neumann (derivadas en los bordes) y se calculan cuando se conoce el valor, pero en modelo de este trabajo no se conocen, por lo tanto, son nulas. Finalmente, la formulación débil está constituida por las siguientes ecuaciones:

$$\rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e u_j + \rho \int_{\Omega_e} \left\{ \psi_i \psi_j u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \psi_i \psi_j v_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e u_j + \int_{\Omega_e} \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} d\Omega_e p_j + \mu \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e u_j = \rho g_x \int_{\Omega_e} \psi_i d\Omega_e \quad (4.23)$$

$$\rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e v_j + \rho \int_{\Omega_e} \left\{ \psi_i \psi_j u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \psi_i \psi_j v_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e v_j + \int_{\Omega_e} \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} d\Omega_e p_j + \mu \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e v_j = \rho g_y \int_{\Omega_e} \psi_i d\Omega_e \quad (4.24)$$

$$\int_{\Omega_e} \psi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega_e u_j + \int_{\Omega_e} \psi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega_e v_j = 0 \quad (4.25)$$

## 4.4. Formulación matricial

Las ecuaciones: 4.23, 4.24 y 4.25, se agrupan en las siguientes matrices y vectores. Más adelante se definirá cada uno.

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [C] &= \begin{bmatrix} C_x + C_y & 0 & 0 \\ 0 & C_x + C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} S^{11} + S^{22} & 0 & (S^{10})' \\ 0 & S^{11} + S^{22} & (S^{20})' \\ S^{10} & S^{20} & 0 \end{bmatrix} & \{\Delta\} &= \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \end{Bmatrix} \\
 & & \{\dot{\Delta}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{p}_j \end{Bmatrix} & \{F\} &= \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Donde  $[M]$  es la matriz de masa,  $[C]$  matriz convectiva,  $[K]$  matriz difusiva,  $\{\Delta\}$  es el vector con las variables,  $\{\dot{\Delta}\}$  la derivada del vector variables y finalmente,  $\{F\}$  al vector con las fuerzas de cuerpo. A continuación, se definen los términos del conjunto 4.26:

$$\begin{aligned}
 m &= \rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e & c_x &= \rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
 c_y &= \rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & S^{11} &= \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} d\Omega_e \\
 S^{22} &= \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} d\Omega_e & S^{10} &= \int_{\Omega_e} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} d\Omega_e \\
 S^{20} &= \int_{\Omega_e} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} d\Omega_e & f_x &= \rho g_x \int_{\Omega_e} \psi_i d\Omega_e \\
 f_y &= \rho g_y \int_{\Omega_e} \psi_i d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

En la siguiente sección, se presentará el desarrollo del anterior conjunto.

Retomando, el sistema matricial se escribe utilizando las matrices definidas previamente:

$$[M] \{\dot{\Delta}\} + ([K] + [C]) \{\Delta\} = \{F\} \tag{4.28}$$

El problema que presenta la expresión anterior es la derivada temporal, para esto es necesario utilizar una aproximación como muestra la siguiente expresión:

$$\{\dot{\Delta}\} = \frac{\{\Delta\}^{n+1} - \{\Delta\}^n}{\delta t} = (1 - \theta) H(\{\Delta\}^n) + \theta H(\{\Delta\}^{n+1}) \tag{4.29}$$

Donde  $n$  corresponde al instante anterior,  $n + 1$  es el instante actual,  $\delta t$  al intervalo de tiempo entre instantes,  $\theta$  a un porcentaje (para este trabajo se utilizó  $\theta = 0.5$ , que corresponde al método de Crank-Nicolson) y finalmente,  $H$  es la función que se obtiene de despejar  $\{\dot{\Delta}\}$  de 4.28, la siguiente expresión muestra esta función:

$$\{\dot{\Delta}\} = H(\Delta) = [M]^{-1} \{F - ([K] + [C]) \{\Delta\}\} \tag{4.30}$$

Utilizando las dos expresiones anteriores, se realiza el siguiente proceso algebraico para separar  $\{\Delta\}^{n+1}$  y  $\{\Delta\}^n$ :

$$\frac{\{\Delta\}^{n+1} - \{\Delta\}^n}{\delta t} = (1 - \theta) [M]^{-1} \{F^n - ([K] + [C]) \{\Delta\}^n\} + \theta [M]^{-1} \{F^{n+1} - ([K] + [C]) \{\Delta\}^{n+1}\} \quad (4.31)$$

$$[M] (\{\Delta\}^{n+1} - \{\Delta\}^n) = (1 - \theta)\delta t \{F^n - ([K] + [C]) \{\Delta\}^n\} + \theta\delta t \{F^{n+1} - ([K] + [C]) \{\Delta\}^{n+1}\} \quad (4.32)$$

Agrupando los términos de  $n + 1$  y  $n$ , se llega a lo siguiente:

$$[\hat{K}] \{\Delta\}^{n+1} = [\tilde{K}] \{\Delta\}^n + \tilde{F}_{n,n+1} \quad (4.33)$$

A continuación, se definen  $[\hat{K}]$ ,  $[\tilde{K}]$  y  $\tilde{F}_{n,n+1}$ :

$$[\hat{K}] = ([M] + \theta\delta t([K] + [C])) \quad (4.34)$$

$$[\tilde{K}] = ([M] - (1 - \theta)\delta t([K] + [C])) \quad (4.35)$$

$$\left\{ \tilde{F} \right\}_{n,n+1} = (1 - \theta)\delta t \{F\}_n + \theta\delta t \{F\}_{n+1} \quad (4.36)$$

## 4.5. Cálculo de matrices

En esta sección, se presentarán los cálculos de 4.27, porque estas matrices son fundamentales para el proceso de programación, ya que, permiten optimar el algoritmo (más detalles se verá en el capítulo 7)

### 4.5.1. Matriz de masa

Para la matriz de masa  $[M]$ , se debe calcular el coeficiente  $m$ .

$$m = \rho \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e = \rho \int_{\Omega'_e} \psi_i \psi_j |J| d\Omega'_e \quad (4.37)$$

Integrando cada término se obtiene la siguiente matriz de 6x6:

$$m = \rho \det(J) \begin{bmatrix} 0.033 & -0.006 & -0.006 & 0.000 & -0.022 & 0.000 \\ -0.006 & 0.033 & -0.006 & 0.000 & 0.000 & -0.022 \\ -0.006 & -0.006 & 0.033 & -0.022 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.022 & 0.178 & 0.089 & 0.089 \\ -0.022 & 0.000 & 0.000 & 0.089 & 0.178 & 0.089 \\ 0.000 & -0.022 & 0.000 & 0.089 & 0.089 & 0.178 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Se observa que la matriz anterior es simétrica.

### 4.5.2. Matriz difusiva

Para el caso de la matriz difusiva  $[K]$  se debe calcular los términos:  $S^{11}$ ,  $S^{22}$ ,  $S^{10}$  y  $S^{20}$ . Para el primer término se tiene:

$$\begin{aligned}
S^{11} &= \mu \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right\} d\Omega_e \\
&= \mu \det(J) \int_{\Omega'_e} \left( W_{1,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + W_{1,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \right) \left( W_{1,1} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + W_{1,2} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right) \\
&= \mu \det(J) \int_{\Omega'_e} \left( \underbrace{W_{1,1}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r}}_{M_1} + \underbrace{W_{1,1} W_{1,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial s}}_{M_2} + \underbrace{W_{1,2} W_{1,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial r}}_{M_3} + \underbrace{W_{1,2}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s}}_{M_4} \right) d\Omega'_e
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Observando la expresión anterior, se tienen las matrices:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ . Las cuales se calculan por separado:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.167 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & 0.500 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.667 & -0.667 & 0.000 & 1.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.333 & -1.333 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.333 & 1.333 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.000 & 0.167 & 0.000 & 0.000 & -0.667 \\ 0.167 & 0.000 & -0.167 & -0.667 & 0.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.667 & 0.000 & 0.000 & 0.667 & -0.667 & 0.667 \\ 0.000 & 0.000 & 0.667 & -0.667 & 0.667 & -0.667 \\ 0.000 & 0.000 & -0.667 & 0.667 & -0.667 & 0.667 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.167 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & -0.167 & 0.000 & 0.000 & 0.667 & -0.667 \\ 0.000 & -0.667 & 0.000 & 0.667 & -0.667 & 0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 0.000 & -0.667 & 0.667 & -0.667 \\ -0.667 & 0.000 & 0.000 & 0.667 & -0.667 & 0.667 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.000 & 0.167 & 0.000 & 0.000 & -0.667 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & 0.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & -0.667 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.333 & -1.333 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.333 & 1.333 & 0.000 \\ -0.667 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & 0.000 & 1.333 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Destacar que  $M_4$  es la traspuesta de  $M_3$ . Por otro lado, expandiendo el segundo termino se tiene lo siguiente::

$$\begin{aligned}
S^{22} &= \mu \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} d\Omega_e \\
&= \mu \det(J) \int_{\Omega'_e} \left( W_{2,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + W_{2,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \right) \left( W_{2,1} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + W_{2,2} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right) \\
&= \mu \det(J) \int_{\Omega'_e} \left( \underbrace{W_{2,1}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r}}_{M_1} + \underbrace{W_{2,1} W_{2,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial s}}_{M_2} + \underbrace{W_{2,2} W_{2,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial r}}_{M_3} + \underbrace{W_{2,2}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s}}_{M_4} \right) d\Omega'_e
\end{aligned} \tag{4.44}$$

El siguiente término  $S^{10}$ , se trabaja de la misma forma:

$$S^{10} = \int_{\Omega_e} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} d\Omega_e = \int_{\Omega'_e} \left( W_{1,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + W_{1,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \right) \phi_j \det(J) d\Omega_e \tag{4.45}$$

Expandiendo esta ecuación se obtiene:

$$S^{10} = W_{1,1} \det(J) \underbrace{\int_{\Omega'_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \phi_j d\Omega'_e}_{M_5} + W_{1,2} \det(J) \underbrace{\int_{\Omega'_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \phi_j d\Omega'_e}_{M_6} \tag{4.46}$$

Nuevamente, se encuentran matrices que puede ser calculadas previamente en este caso son:  $M_5$  y  $M_6$ . A continuación, se presentan estas matrices:

$$M_5 = \begin{bmatrix} -0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.167 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & -0.167 & 0.000 \\ 0.167 & 0.167 & 0.333 \\ -0.167 & -0.167 & -0.333 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} -0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.167 \\ -0.167 & -0.333 & -0.167 \\ 0.167 & 0.333 & 0.167 \\ 0.167 & 0.000 & -0.167 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

El último término  $S^{20}$  se calcula de igual forma:

$$S^{20} = \int_{\Omega_e} \phi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial y} d\Omega_e = \int_{\Omega'_e} \left( W_{2,1} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + W_{2,2} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \right) \phi_j \det(J) d\Omega_e \tag{4.49}$$

Finalmente, se tiene:

$$S^{20} = W_{2,1} \det(J) \underbrace{\int_{\Omega'_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \phi_j d\Omega'_e}_{M_5} + W_{2,2} \det(J) \underbrace{\int_{\Omega'_e} \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \phi_j d\Omega'_e}_{M_6} \tag{4.50}$$

Como se puede observar en esta ecuación, aparecen las matrices  $M_5$  y  $M_6$  anteriormente calculadas.

## 4.6. Resolución sistema con método de punto fijo

Este método funciona de forma directa, es decir, comienza con una semilla para determinar una solución y posteriormente, se verifica la tolerancia.

Aplicando este método la ecuación 4.33, se reescribe de la siguiente forma (Reddy, J., 2015):

$$[\hat{K}] \{\Delta\}_{l+1}^{n+1} = [\tilde{K}] \{\Delta\}_l^n + \tilde{F}_{n,n+1} \quad (4.51)$$

Donde  $l+1$  corresponde a la siguiente semilla y  $l$ , a la actual. Es decir, se inicia el ciclo con  $\{\Delta\}_l^n$  para determinar  $\{\Delta\}_{l+1}^{n+1}$ . El ciclo termina cuando el resultado converge o cuando se excede el límite de iteraciones definido, en este caso el resultado será divergente. Finalmente, se define una tolerancia de  $0.001[m/S]$  y  $1[Pa]$ , para las velocidades y la presión respectivamente.

Para concluir esta sección, es necesario incluir las condiciones de borde en la ecuación 4.51. Para esto se incorporan los subíndices  $c$  para nodo conocido y  $d$  para nodo desconocido. Dicho esto se tiene:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{cc} & \hat{K}_{cd} \\ \hat{K}_{dc} & \hat{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_c \\ \Delta_d \end{Bmatrix}_{l+1}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{cc} & \tilde{K}_{cd} \\ \tilde{K}_{dc} & \tilde{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_c \\ \Delta_d \end{Bmatrix}_l^n + \begin{Bmatrix} \tilde{F}_c \\ \tilde{F}_d \end{Bmatrix}_{n,n+1} \quad (4.52)$$

Del sistema anterior, los valores a determinar son  $\{\Delta_c\}_{l+1}^{n+1}$ , por lo tanto, se despeja el vector y se obtiene lo siguiente:

$$[\hat{K}_{dd}] \{\Delta_d\}_{l+1}^{n+1} = [\tilde{K}_{dc}] \{\Delta_c\}_l^n + [\tilde{K}_{dd}] \{\Delta_d\}_l^n - [\hat{K}_{dc}] \{\Delta_c\}_{l+1}^{n+1} + \{\tilde{F}_d\}_{n,n+1} \quad (4.53)$$

La ecuación anterior corresponde al sistema que se resolverá. Cabe mencionar que al trabajar algebraicamente el sistema 4.52, se obtendrán dos expresiones para calcular  $\{\Delta_c\}_{l+1}^{n+1}$ , siendo posible usar cualquiera de las dos.

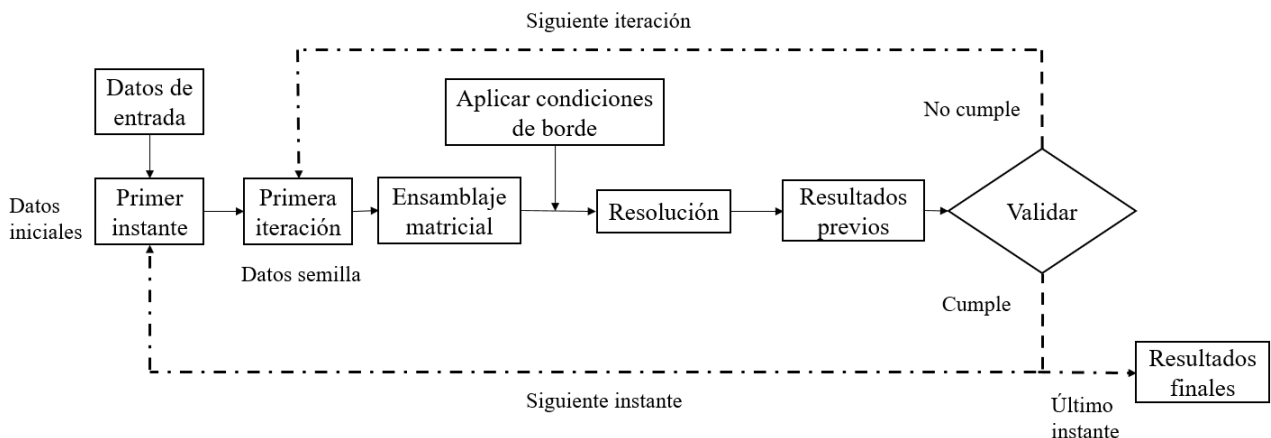
# Capítulo 5

## Algoritmo

En este capítulo se presentará el algoritmo utilizado para realizar las simulaciones. Este se implementará en Matlab R2020b (en anexo B, se tiene el código para la función de masa)

### 5.1. Estructura del algoritmo

La estructura que tiene el algoritmo, se explicará con el siguiente esquema:



**Figura 5.1:** Esquema del algoritmo de resolución

Fuente: Elaboración propia

Para comprender el esquema, a continuación se define cada celda:

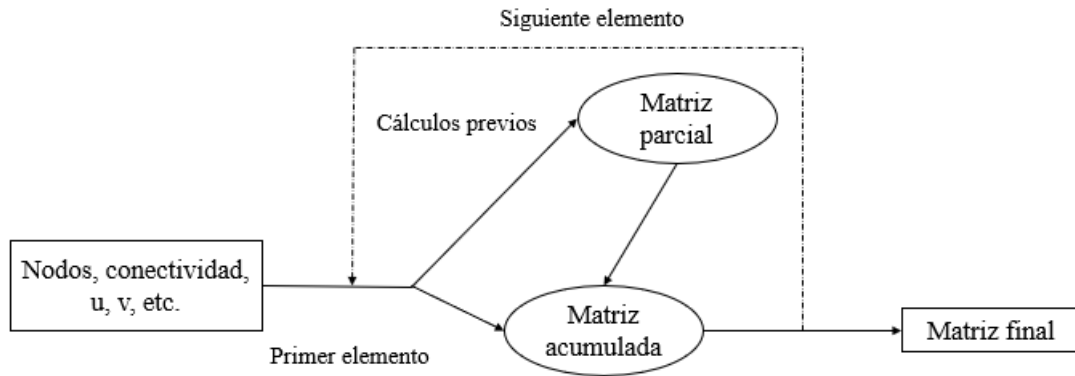
- Datos de entrada: Elementos del mallado (matriz de nodos, matriz de conectividad), condiciones de borde (velocidad uniforme en la entrada y presión en la salida) y datos físicos (Densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ , etc.).
- Primer instante: Una vez recibidas las condiciones, se da inicio al bucle en  $t = 0[s]$ . Cuando el resultado cumpla con el criterio de convergencia, se modifica el instante de tiempo  $t = t + \Delta t$ .
- Primera iteración: Con los datos del instante anterior (para el primer instante se tendrá  $u, v = 0[m/S]$  y  $p = 80[mmHg]$ ), se calculan las matrices del elemento en  $l$  y con los valores semilla, se calculan las matrices en  $l + 1$  (ver 4.6).
- Ensamblaje matricial: Las matrices del elemento se introducen dentro de una sola matriz, utilizando la matriz de conectividad para las posiciones.

- Aplicar condiciones de borde: Teniendo todas las matrices, se deben separar para sólo calcular los valores desconocidos.
- Resolución: Para resolver el sistema se utiliza la descomposición LU para invertir la matriz (también se podría utilizar gmres).
- Resultados previos: Los valores obtenidos  $\{\Delta_d\}_{l+1}^{n+1}$  se compara con  $\{\Delta_d\}_{l+1}^n$  bajo la tolerancia de  $0.001[m/S]$  y  $1[Pa]$  para la velocidad y la presión respectivamente. En caso de no cumplir con la tolerancia, se realiza una nueva iteración tomando como valor semilla  $\{\Delta_d\}_{l+1}^{n+1}$ . Por otro lado, se cumplir con la tolerancia el algoritmo avanza al siguiente instante de tiempo  $t = t + \Delta t$  (se almacena este resultado).

## 5.2. Funciones

El procedimiento de calculo de la matriz de masa  $[M]$  y la matriz difusiva  $[K]$ , se hace más eficiente utilizando el procedimiento presentado en el capítulo 5. La matriz convectiva  $[C]$  al ser no es lineal, es imposible reducir los tiempos de calculo.

El algoritmo empleado en las funciones, se presenta en el siguiente esquema:



**Figura 5.2:** Esquema algoritmo para funciones  
Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la figura anterior, cada cálculo matricial se realiza por elemento, a diferencia de la figura 5.1, donde se realiza por iteración.

Al trabajar por elemento, se extrae cada nodo de la matriz de conectividad y se busca el valor respectivo en la matriz de nodos utilizando el comando *find()*, porque al incorporar curvas en el programa *gmsh*, modifica la numeración de los nodos en esta posición.

La matriz acumulada, corresponde a la sumatoria de todas las demás y es muy importante utilizar el comando *sparse()*, porque la matriz tiene muchos valores 0 y es posible almacenar los valores no nulos junto a su posición en un formato tipo celda (ver anexo B). Cabe mencionar que utilizar el comando no afecta a la operatoria con matrices.

Volviendo con la figura 5.2, para obtener la matriz parcial, es necesario realizar los cálculos previos respectivos, por ejemplo: calcular jacobiano, evaluar los términos de la matriz convectiva, etc.

# Capítulo 6

## Estabilidad numérica

En este capítulo, se presentan dos métodos de estabilización, los cuales son: Petrov-Galerkin y compresibilidad artificial.

### 6.1. Método de Petrov-Galerkin

Este método consiste en agregar un término a las funciones de forma, es decir se tendrá lo siguiente (Sampaio, P., et al., 1992):

$$N_i = \phi_i + \frac{\Delta t}{2}(u, v) \cdot \nabla \phi_i - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 \phi_i \quad (6.1)$$

Donde  $N_i$  es la función de forma,  $\phi_i$  polinomio de Lagrange (Chung., 2002),  $(u, v)$  son las componentes de la velocidad,  $\mu$  es la viscosidad y  $\rho$  es la densidad del fluido. El término  $\nabla t$  se define como:

$$\Delta t = \alpha_0 h / |u, v| \quad (6.2)$$

Con  $\alpha_0 = \coth(R_e/2) - 2/R_e$ ,  $R_e$  es el número de Reynolds,  $h$  es el tamaño medio del elemento y  $|u, v|$  es el módulo de la velocidad. Considerando un  $R_e$  es 1810,  $\alpha_0$  es aproximadamente 1.

Dicho lo anterior, las ecuaciones (4.13) y (4.14), se modifican de la siguiente manera:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g_x = 0 \quad \left| \cdot \int_{\Omega'} \left( \psi_i + \frac{\Delta t}{2}(u, v) \cdot \nabla \psi_i - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 \psi_i \right) d\Omega' \right. \quad (6.3)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g_y = 0 \quad \left| \cdot \int_{\Omega'} \left( \psi_i + \frac{\Delta t}{2}(u, v) \cdot \nabla \psi_i - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 \psi_i \right) d\Omega' \right. \quad (6.4)$$

El método de Galerkin presentado en el capítulo 4, tiene la particularidad de poder desarrollarse y encontrar matrices que no cambian en cada iteración (excepto los términos convectivos), por lo tanto, se puede calcular previamente. El método de Petrov-Galerkin, tiene un término que cambia en cada iteración que es  $(u, v) \cdot \nabla \phi_i$ , por lo tanto, el consumo de datos será mayor. Finalmente, se debe seguir el mismo procedimiento para obtener la formulación matricial.

## 6.2. Método de compresibilidad artificial

Este método, incorpora la velocidad de propagación de la onda, la cual se calcula usando la formula de Korteweg (Abreu, J., et al., 1995):

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}}{\sqrt{1 - \frac{KD}{Ee}}} \quad (6.5)$$

Donde  $\kappa$  es el módulo de compresibilidad,  $\rho$  densidad,  $D$  diámetro,  $E$  módulo de young de la tubería y  $e$  es el espesor. La aorta, tiene propiedades elásticas, por lo tanto, se puede deformar pero en simulaciones en tiempo reducido se puede considerar como rígida (Canciello, G., et al., 2020). Dicho esto, la velocidad de propagación es lo siguiente:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \quad (6.6)$$

El módulo de compresibilidad  $\kappa$  es 2.2 [GPa] según (Habidi, R., et al ., 2017) y  $\rho$  1060[kg/m<sup>3</sup>] (Vitello, D., et al., 2015). Dicho esto la velocidad de propagación es 1441[m/s].

Continuando con el método, la velocidad de propagación se incorpora en la ecuación de continuidad 3.13, de la siguiente manera (considerando densidad variable y flujo bidimensional):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.8)$$

Esta modificación, solo agrega una matriz en el método de Galerkin presentado en el capítulo 4 y siguiente el mismo procedimiento se obtiene lo siguiente:

$$m_p = \frac{1}{c^2} \int \phi_i \phi_j d\Omega' = \frac{A^2}{12c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Finalmente, se tiene una nueva matriz de masa:

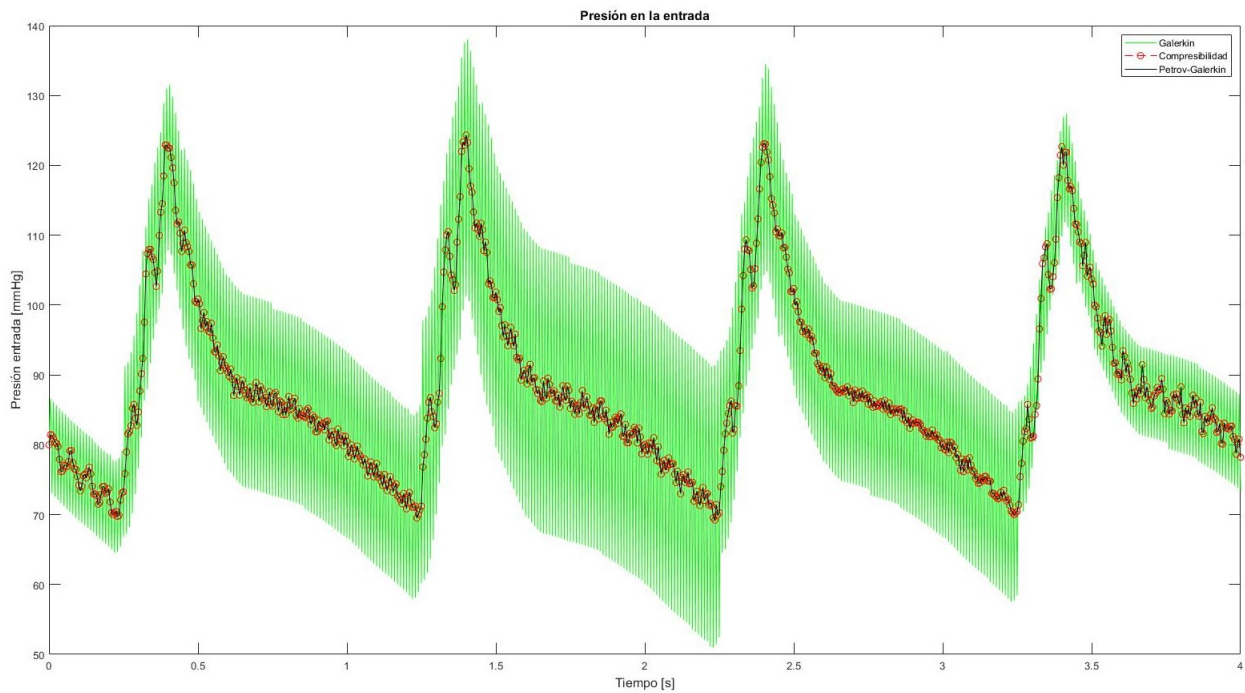
$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

A diferencia del método de Petrov-Galerkin, este tendrá un menor consumo de datos porque la matriz se calcula previamente.

## 6.3. Comparación

En esta sección, se compararán los método de: Galerkin, Petrov-Galerkin y compresibilidad artificial, para definir cual será el utilizado en los cálculos posteriores.

La variable que presenta inestabilidad es la presión, para esto se presenta su valor en la entrada de la aorta (más detalles en el capítulo siguiente):



**Figura 6.1:** Presión en la entrada, calculada con: Galerkin, Compresibilidad y Petrov-Galerkin  
Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la figura 6.1, el método de galerkin presenta gran inestabilidad, mientras que Petrov-Galerkin y el método de compresibilidad se observa una reducción considerablemente de esta. Dicho lo anterior, se puede usar cualquiera de estos dos, para este trabajo se utilizará el método de compresibilidad porque tiene un menor tiempo de simulación  $T_s$  (Galerkin 3.4[min], Compresibilidad 4.94[min] y Petrov-Galerkin 12.61[min]).

Finalmente, en los tres método la velocidad es estable y varían muy poco entre sí (orden  $10^{-5}$  [m/s] como máximo en cualquier punto). Por lo tanto, se puede utilizar el método de compresibilidad artificial sin problemas.

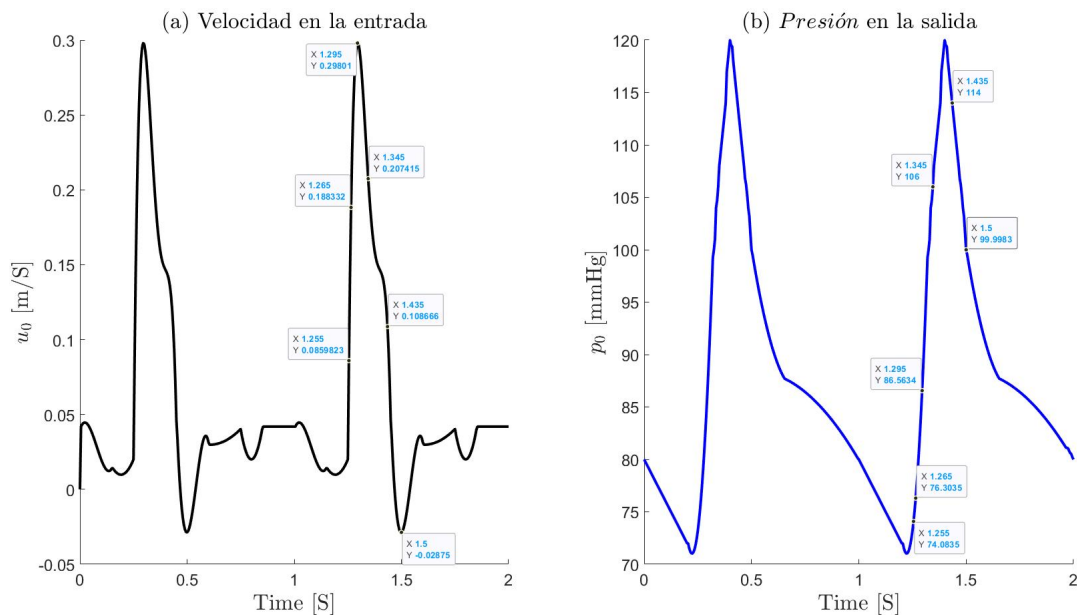
# Capítulo 7

## Resultados y análisis

En este capítulo, se mostrarán los resultados de tres modelos (usando el método de compresibilidad artificial 6.2), donde cada uno presenta una simulación sin prótesis y otra con prótesis. Primero se presentarán los antecedentes involucrados en cada simulación, dentro de los cuales se destacan: instantes de tiempo de interés y puntos de estudio dentro del modelo. Los modelos 1 y 2, tendrán una estructura similar pero el modelo 3, presentará el perfil de velocidad en la salida, porque tiene una mayor cantidad de nodos que los dos primeros

### 7.1. Antecedentes de los modelos

Antes de presentar los tres modelos, es necesario comenzar con las condiciones de borde que corresponden a: velocidad en la entrada y presión en la salida. Además, se seleccionan seis instantes de estudio para análisis posteriores. En la siguiente figura se muestra lo mencionado.



**Figura 7.1:** Pulsos cardiacos con seis instantes: (a) Velocidad en la entrada y (b) Presión en la salida

Fuente: Figura modificada de Scotti, C., et al., 2008

Tomando la velocidad máxima de la figura 7.1 (a),  $0.3[m/s]$  y considerando la arteria recta, el número de Reynolds es 1870 que corresponde a régimen laminar, por lo tanto, las ecuaciones

de gobierno presentadas en el capítulo 3, estarían modelando sin problemas. Es importante mencionar que en la zona del saco aneurismal, el flujo podría cambiar a régimen de transición.

Se seleccionan seis instantes de tiempo en el segundo ciclo, para evitar la influencia que tienen las condiciones iniciales. Sin embargo, se hará un análisis comparativo con los instantes del 1<sup>er</sup> ciclo, para estudiar como varía la magnitud de la velocidad en instantes desfasados en un periodo  $T_c = 1[S]$ .

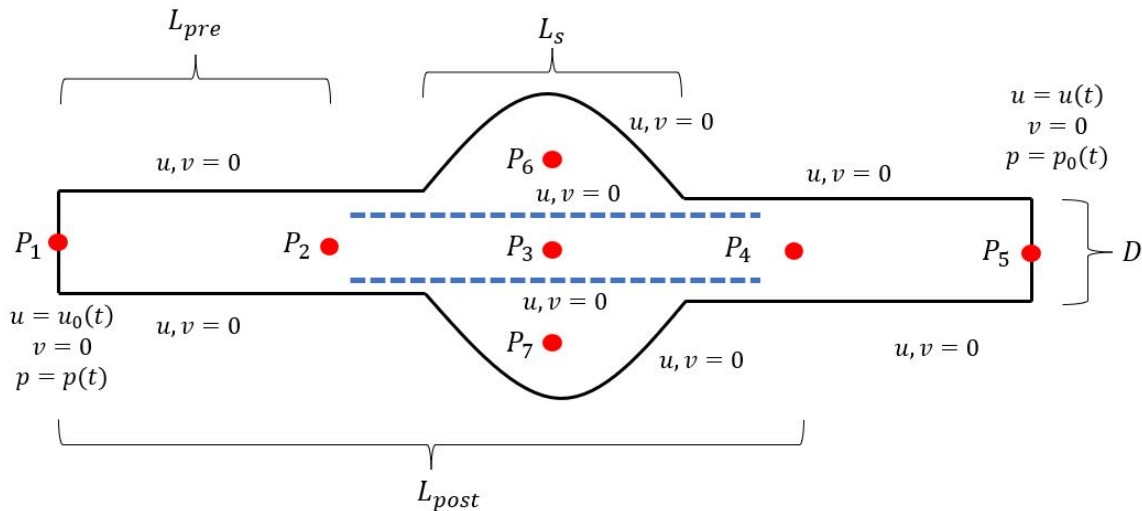
Por otro lado, para cada simulación se estudiarán seis puntos específicos dentro del modelo, para realizar un análisis espacial. A continuación, se preseta una tabla con dichos puntos.

**Tabla 7.1:** Puntos de estudio

Punto	Coordenadas (x,y)	Descripción
1	$(0, D/2)$	Punto medio de la entrada
2	$(L_{pre}, D/2)$	Poco antes de la prótesis
3	$(L_{pre} + 0.5L_s, D/2)$	Zona central del saco aneurismal
4	$(L_{post}, D/2)$	Poco después de la prótesis
5	$(L_a, D/2)$	Punto final de la aorta
6	$(L_{pre} + 0.5L_s, D + 0.5R_s)$	Mitad parte superior del saco aneurismal
7	$(L_{pre} + 0.5L_s, D - 0.5R_s)$	Mitad parte inferior del saco aneurismal

Donde,  $D$  es el diámetro de la aorta,  $L_{pre}$  es la distancia previa a la prótesis,  $L_s$  es la longitud del saco aneurismal,  $L_{post}$  es la distancia posterior a la prótesis,  $R_s$  es el radio superior del saco aneurismal y finalmente,  $R_i$  es el radio inferior.

Para ubicar los puntos de estudio, se muestra la siguiente figura de un modelo genérico, además, se agregan las condiciones de borde.



**Figura 7.2:** Puntos de estudio sobre un modelo genérico y condiciones de borde.

Fuente: Elaboración propia.

La selección de estos puntos es necesaria para hacer un análisis del comportamiento de algún parámetro (p. ej.: magnitud velocidad, campo de velocidades, etc.). Los puntos  $P_1$  y  $P_5$ , son importantes para comparar el flujo entrante y saliente, como las condiciones de borde varían

en el tiempo, el caudal será distinto en la entrada como en la salida.

En el caso del AAA sin prótesis, el punto  $P_2$  se encuentra antes de una expansión de la aorta y el punto  $P_4$  después de una contracción de la aorta. Para el caso del AAA con prótesis, el punto  $P_2$  y el punto  $P_4$  corresponden a la entrada y salida de la prótesis, respectivamente.

Los puntos  $P_3$ ,  $P_6$  y  $P_7$ , serán útiles para estudiar las velocidades dentro del saco aneurismal y ver los cambios que provoca la prótesis endovascular. Se espera una menor diferencia en los modelos sin prótesis.

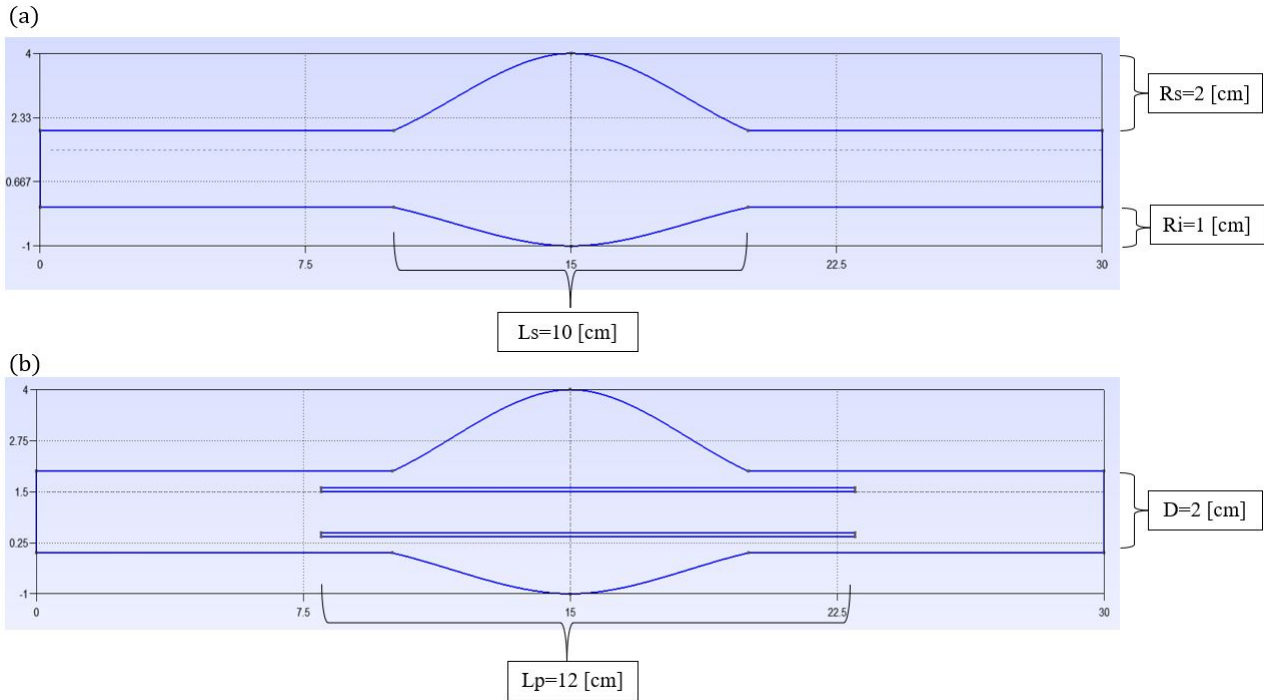
Los puntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  y  $P_5$ , se encuentran distribuidos a lo largo de la longitud total del modelo, pero todos en el punto medio de la aorta,  $D/2$ .

Todos los modelos tienen una longitud de aorta  $L_a = 30[cm]$  y un diámetro de aorta de  $D = 2[cm]$  siguiendo con lo presentado por (Fukushima, T., et al., 1988). No se realizarán simulaciones variando los datos anteriores porque se abarcaría un espectro demasiado amplio y se espera concluir que la geometría influye de forma predecible.

Finalmente, según lo presentado por (Casula, E., et al., 2012), el flujo de sangre entra en la zona del saco, por lo tanto, todos los modelos con prótesis tendrán un pequeño espacio ( $0.005 [m]$ ) para que ocurra lo anterior y sea más realista el análisis. Para terminar, el espesor de la prótesis es de  $0.001 [m]$  según (Pierce, G., 1998)

## 7.2. Modelo 1

El primer modelo presenta un diámetro de aneurisma  $D_a = 5[cm]$  y en la siguiente figura se muestra la geometría, con las longitudes de interés.



**Figura 7.3:** Geometría del modelo 1: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm]).  
Fuente: Elaboración propia

Este primer modelo corresponde aún aneurisma asimétrico, es decir, tiene radio superior e inferior distintos. Esto permitirá observar las diferencias en las zonas mencionadas anteriormente. Por otro lado, es importante mencionar que los modelos que tengan prótesis tendrán mayor cantidad de nodos dentro del mallado, provocando un aumento en los tiempos de simulación  $T_s$ , en la siguiente tabla se muestran los datos del modelo 1 con y sin prótesis.

**Tabla 7.2:** Nodos y tiempo de simulación para modelo 1

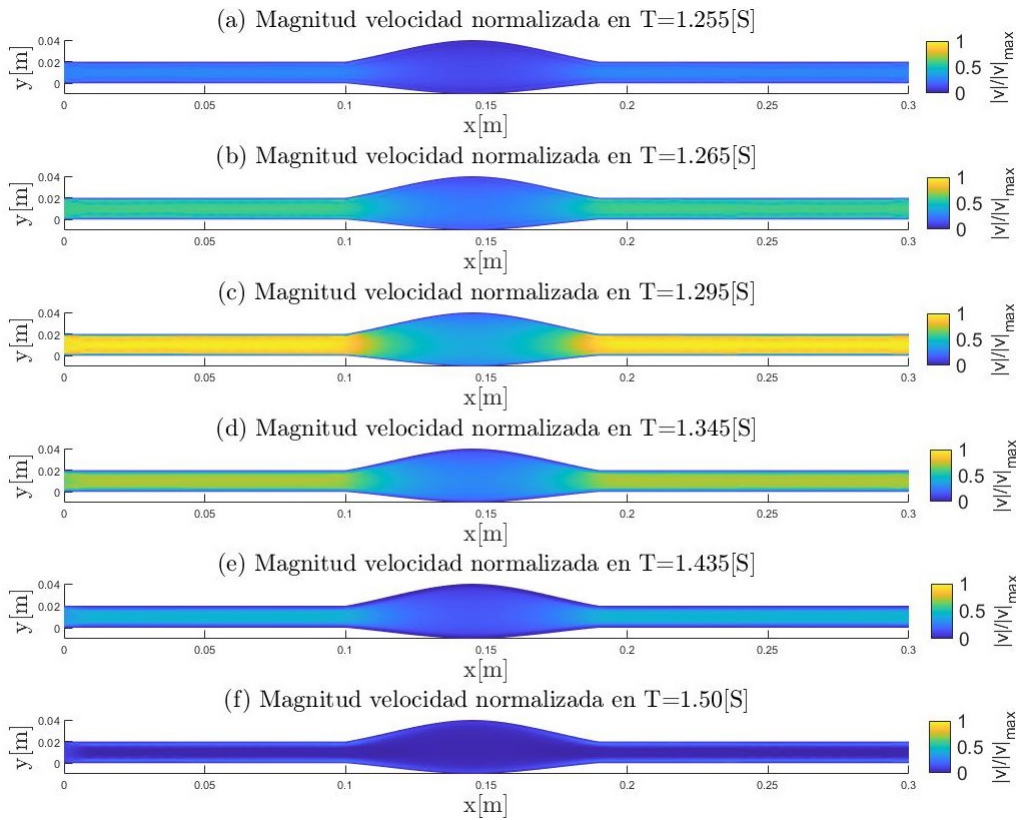
Modelo 1	$N_v$	$N_p$	$E$	$N_t$	$N_c$	$N_d$	$T_s$ [min]
Sin prótesis	1666	450	767	3782	522	3260	4.94
Con prótesis	1885	529	826	4299	934	3365	5.85

Donde  $N_v$  representa los nodos para la velocidad,  $N_p$  representa los nodos para la presión,  $E$  es el número de elementos,  $N_t$  los nodos totales,  $N_c$  los nodos cuyos valores son desconocidos y  $N_d$  los nodos desconocidos.

### 7.2.1. Sin prótesis

Para esta simulación la máxima magnitud de velocidad  $|\vec{u}_{max}|$  es de  $0.324[m/S]$ . La primera figura que se presentará es la magnitud velocidad normalizada por el valor máximo (presentado anteriormente), para que los resultados estén entre  $[0,1]$  facilitando el análisis. Dicho lo anterior,

se presenta la magnitud de velocidad normalizada para los seis instantes de tiempo mencionados en los antecedentes:



**Figura 7.4:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 1 sin prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S].

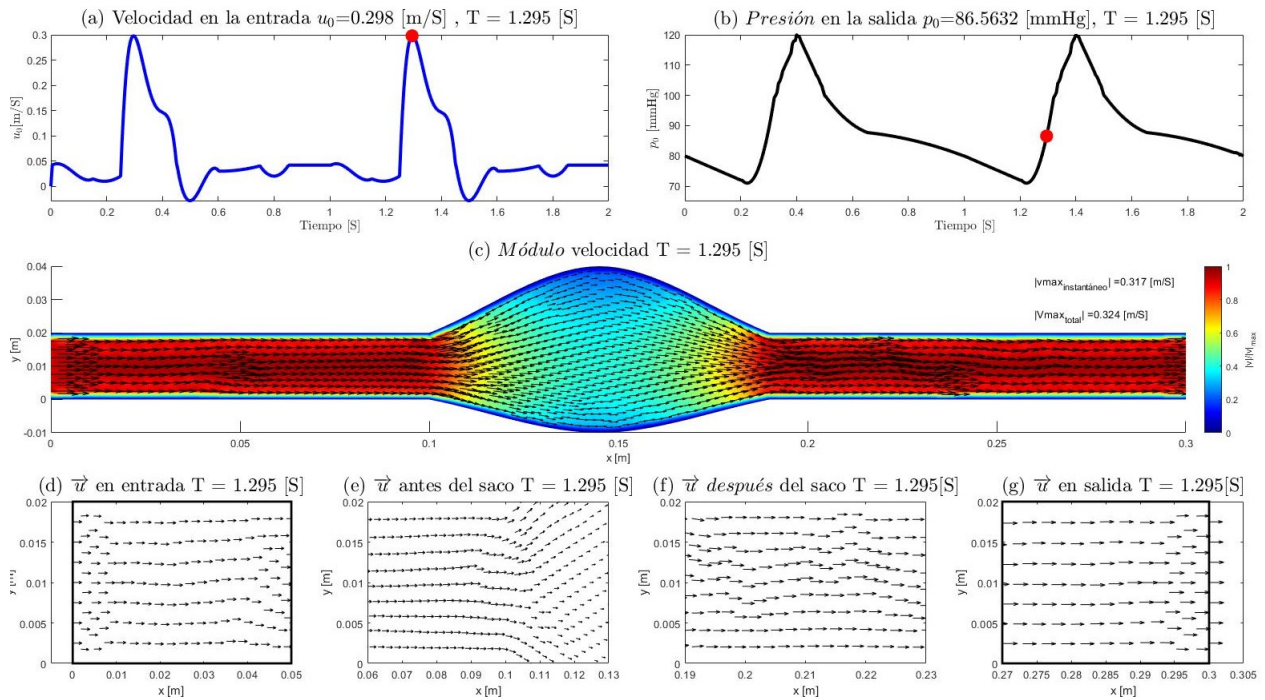
Fuente: Elaboración propia

Para las figuras 7.4 (a) y (b), se observa un cambio en la coloración provocado por el aumento de la velocidad en la entrada (ver figura 7.1 (a)). En la figura 7.4 (c) la velocidad llega a su máximo valor ( $0.298[m/S]$ ) y posteriormente, comienza a disminuir como reflejan las figuras 7.4 (d) y (e).

En  $t = 1.5[S]$ , la figura 7.4 (f) no muestra que la velocidad cambia de sentido, porque se está graficando la magnitud de la velocidad normalizada que nunca será negativa. Esta figura, muestra la coloración más oscura porque la velocidad negativa máxima ( $-0.0288[m/S]$ ) es mucho menor en módulo que velocidades positivas, esto se ve reflejado en la figura 7.1 (a). Sin embargo, en figuras posteriores se mostrará el campo de velocidades, donde será posible ver el cambio de sentido.

Las velocidades más altas se generan antes y después del saco aneurismal, en este la magnitud de la velocidad es menor porque presenta una mayor área de circulación, para este modelo el diámetro de la aorta aumenta de 2 [cm] a 5 [cm], como se observa en la figura 7.3.

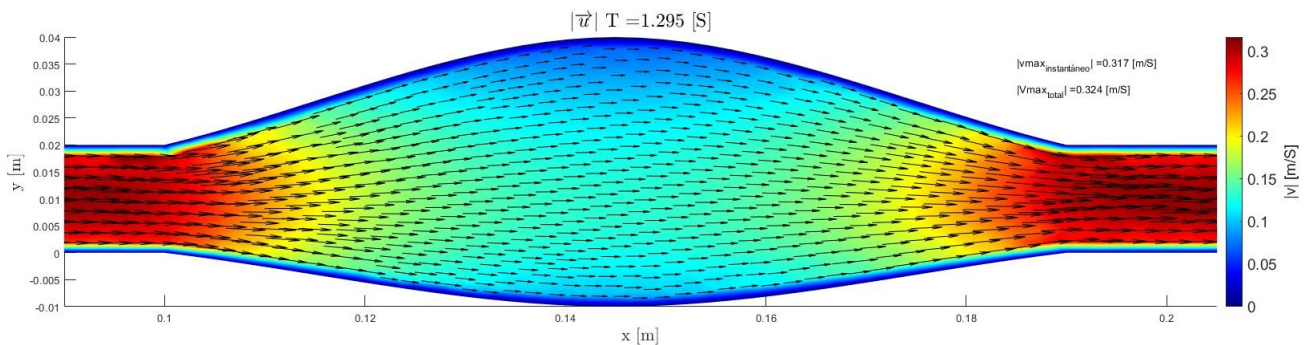
Para hacer un análisis más completo de la velocidad (módulo y dirección), se presenta la siguiente figura.



**Figura 7.5:** Modelo 1 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

La figura 7.5 (a) y (b), muestran los pulsos con el valor de  $u_0$  y  $p_0$  en 1.295 [S], notar el desfase entre la velocidad en la entrada y la presión en la salida. Por otro lado, en la figura 7.5 (c), muestra la magnitud de la velocidad (no confundir con la figura 7.4, magnitud de velocidad normalizada), con una tonalidad rojiza antes y después del saco aneurismal, con una disminución en la velocidad dentro de este. Finalmente, la figura 7.5 (d), (e), (f) y (g), muestran el campo de velocidades, es importante para observar la dirección que tiene el flujo en: (d) entrada el perfil es uniforme, (e) se observa una expansión, en (f) una contracción y en (g) un perfil prácticamente uniforme. Esto último se provoca porque al aumentar la velocidad en la entrada se requiere de longitud mayor a 30 [cm] y más tiempo en esta condición para desarrollarse (perfil parabólico).

En la siguiente figura, se muestra una ampliación del saco aneurismal para apreciar de mejor manera la coloración y el campo de velocidades:

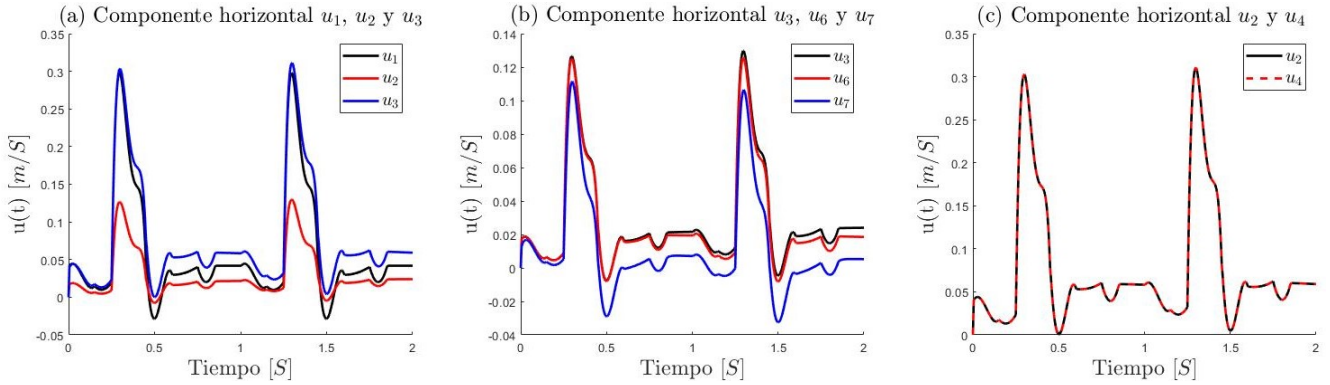


**Figura 7.6:** Ampliación saco aneurismal modelo 1 sin prótesis.  
fuente: Elaboración propia

Claramente, el tamaño del vector debe ser consistente con la coloración. En la figura anterior, se aprecia que la velocidad es mayor antes y después del saco, observándose que el tamaño del

vector es consistente.

A continuación, se presentan los resultados de la componente horizontal de la velocidad  $u$  en las seis posiciones de interés descritas en los antecedentes:



**Figura 7.7:** Componente horizontal  $u$ , modelo 1 sin prótesis: (a)  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , (b)  $u_3$ ,  $u_6$  y  $u_7$  y (c)  $u_2$  y  $u_4$

Respecto a la figura 7.7 (a), existe poca diferencia en la velocidad en la entrada como en la salida de la aorta, por otro lado, la velocidad horizontal disminuye en el punto central del saco aneurismal por el aumento del área mencionado anteriormente. En la zona del saco, la figura 7.7 (b), muestra poca diferencia pero se aprecia que la menor velocidad se genera en la zona inferior. Finalmente, la figura 7.7 (c), muestra que la velocidad antes y después, del saco se mantiene sin cambios visibles.

Por otro lado, para estudiar la influencia que tiene las condiciones iniciales en la simulación, se presentan las siguientes tablas para comparar las magnitudes de la velocidad en tiempos desfasados en un periodo, recordar que el periodo de los pulsos es de 1 [S].

**Tabla 7.3:** Magnitud de velocidad modelo 1 sin prótesis, para puntos de estudios en el 1<sup>er</sup> periodo.

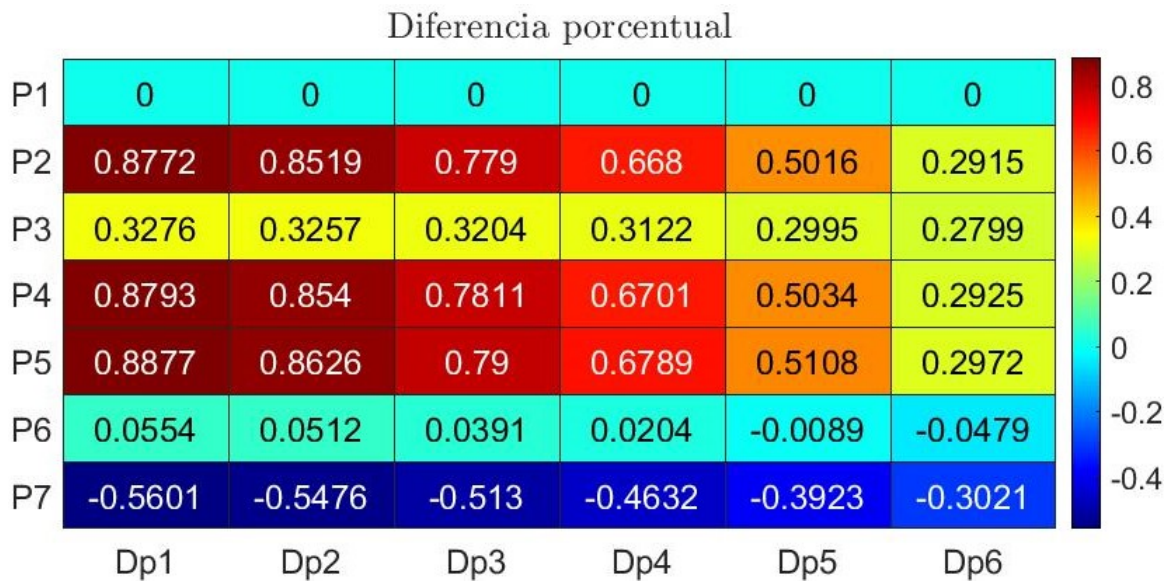
Punto \ T[S]	0.255	0.265	0.295	0.345	0.435	0.6
$P_1$	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
$P_2$	0.0873	0.1873	0.3017	0.2273	0.1379	0.0546
$P_3$	0.0365	0.0793	0.1265	0.0907	0.0506	0.0168
$P_4$	0.0873	0.1873	0.3020	0.2276	0.1378	0.0546
$P_5$	0.0863	0.1865	0.3026	0.2270	0.1378	0.0546
$P_6$	0.0359	0.0783	0.1250	0.0893	0.0497	0.0160
$P_7$	0.0259	0.0620	0.1107	0.0764	0.0271	-0.0003

Del mismo modo, se presenta la tabla con los resultados en el 2<sup>do</sup> periodo:

**Tabla 7.4:** Magnitud de velocidad modelo 1 sin prótesis, para puntos de estudios en el 2<sup>do</sup> periodo.

Punto \ T[S]	1.255	1.265	1.295	1.345	1.435	1.6
$P_1$	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
$P_2$	0.0960	0.1958	0.3095	0.2340	0.1429	0.0575
$P_3$	0.0397	0.0826	0.1297	0.0938	0.0536	0.0196
$P_4$	0.0961	0.1959	0.3098	0.2343	0.1429	0.0575
$P_5$	0.0952	0.1952	0.3105	0.2338	0.1429	0.0575
$P_6$	0.0364	0.0788	0.1254	0.0895	0.0496	0.0156
$P_7$	0.0203	0.0565	0.1056	0.0718	0.0232	-0.0033

Al comparar las magnitudes de las velocidades de las tablas 7.3 y 7.4, en el punto  $P_1$  no muestra diferencia porque es condición de borde y esta no cambia al desfasarse en un periodo. Para hacer un mejor análisis, se muestra la siguiente figura con la diferencia porcentual ( $D_p = (|\vec{u}(x)|_{ciclo2} - |\vec{u}(x)|_{ciclo1}) \cdot 100\%$ ), considerando los resultados del 1<sup>er</sup> ciclo como base para ver si aumentan o disminuyen en el 2<sup>do</sup>.



**Figura 7.8:** Diferencia porcentua para modelo 1 sin prótesis.

Fuente: Elaboración propia

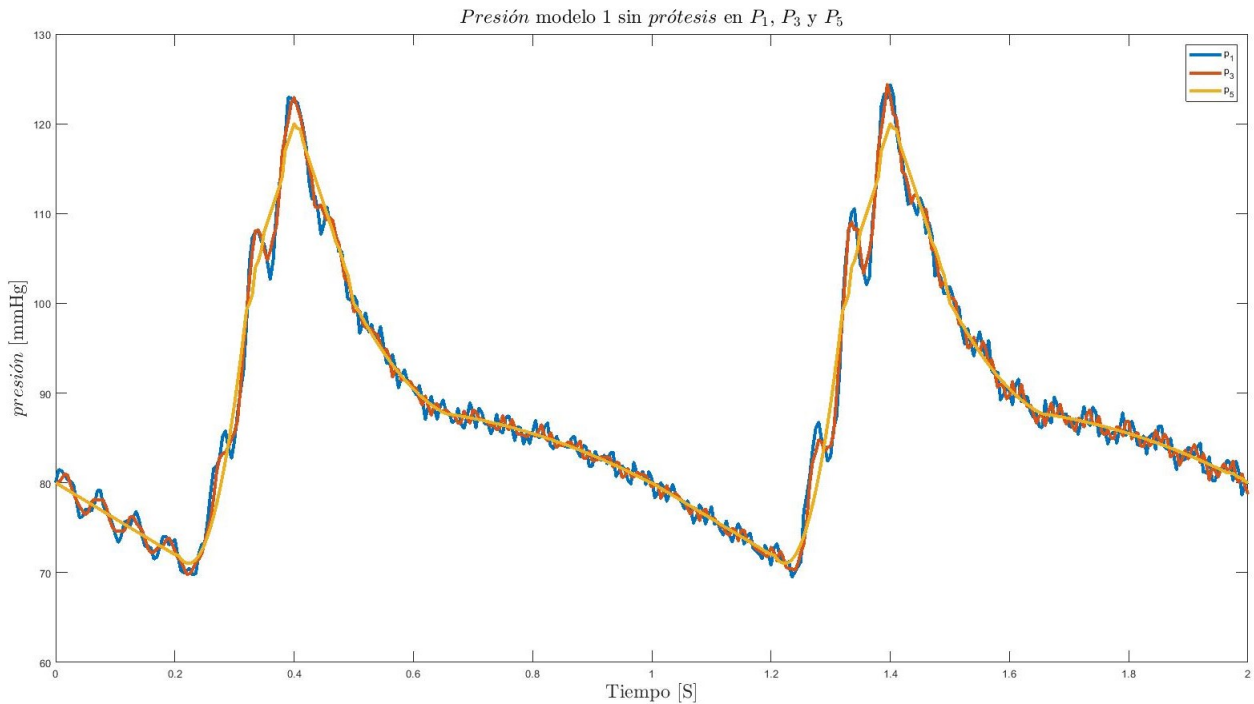
Respecto a la figura anterior, se obseva la nula diferencia en  $P_1$ , debido a que corresponde a una condición de borde. Por otro lado,  $P_2$  y  $P_4$ , muestran un crecimiento parejo en cada diferencia porcentual, debido a que se encuentran en la misma coordenada vertical y además, como esta simulación no tiene prótesis, no se aprecia la perturbación que esta provoca aguas arriba como aguas abajo.

En el  $P_3$ , se observa un decrecimiento estable y en la última diferencia temporal  $D_{p6}$ , se tiene el menor crecimiento y recordar que en este instante, la velocidad llega a su valor negativo máximo.

Para el punto final  $P_5$ , el menor aumento coincide con la velocidad mínima, esto es consistente porque la velocidad en la entrada debe recorrer la longitud de la aorta  $L_a$ , por lo tanto, los efectos tendrán retraso. Por otro lado, para las primeras tres diferencias porcentuales corresponde a las máximas respecto a los demás puntos.

Los puntos  $P_6$  y  $P_7$ , muestran la menor tasa de crecimiento y de reducción, siendo mayor en  $P_7$ . Lo anterior es consistente porque en esta simulación  $R_i$  es menor que  $R_s$ .

Para concluir con los resultados del modelo 1 sin prótesis, se presenta la siguiente figura con la presión entre tres posiciones:  $P_1$ ,  $P_3$  y  $P_5$ .

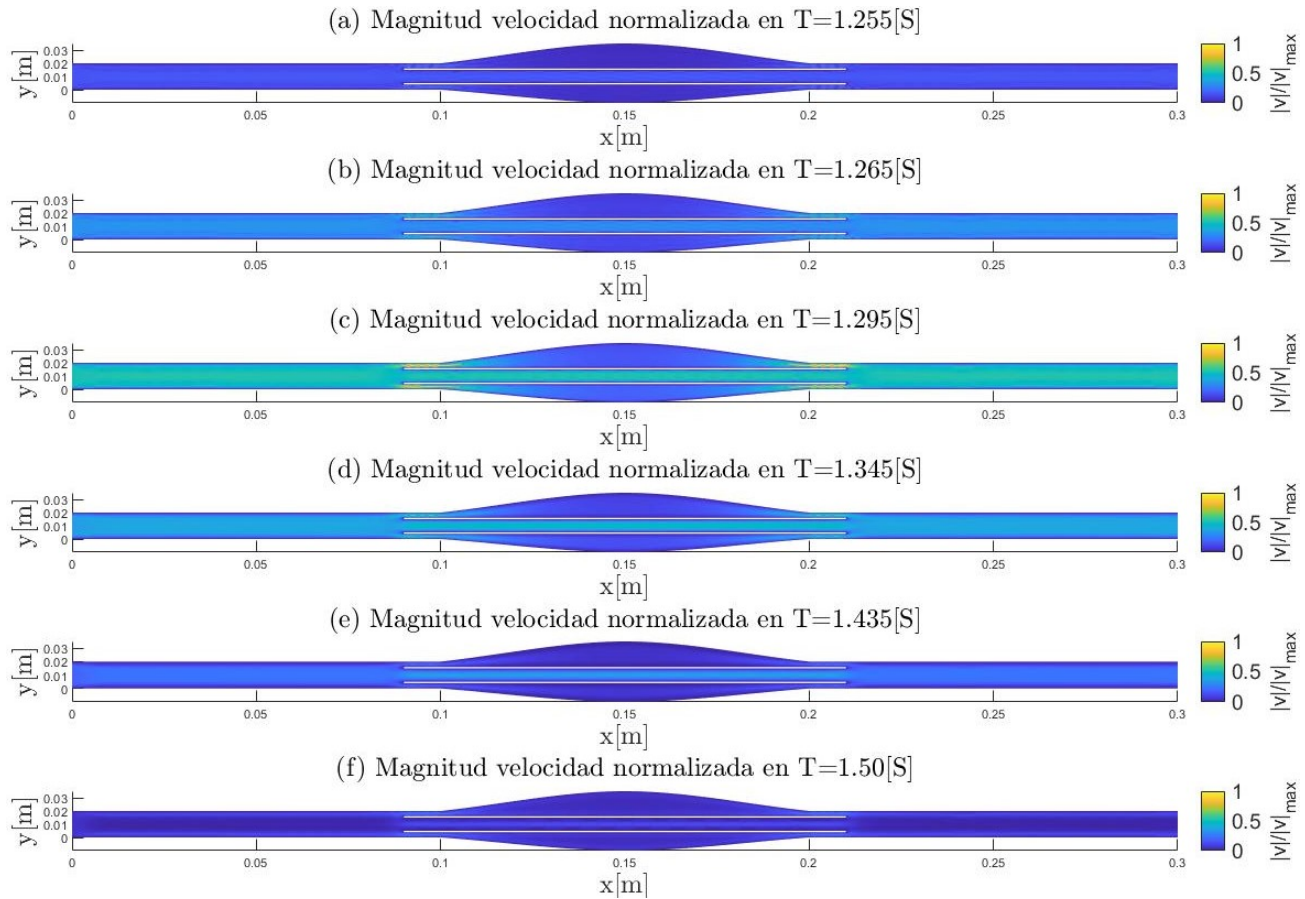


**Figura 7.9:** Presión en modelo 1 sin prótesis.  
Fuente: Elaboración propia

La figura 7.9, muestra un comportamiento inestable en la presión pero controlado (comparado con la figura 6.1, usando el método de Galerkin), se puede concluir que la presión a lo largo de la aorta (30[cm]), se mantiene con poca variación.

### 7.2.2. Con prótesis

En esta simulación la magnitud de velocidad máxima  $|\vec{u}_{max}|$  es de  $0.594[m/S]$  y realizando el mismo procedimiento que en la simulación sin prótesis, se presetan las figuras de magnitud de velocidad normalizada, para los mismos instantes de tiempo.

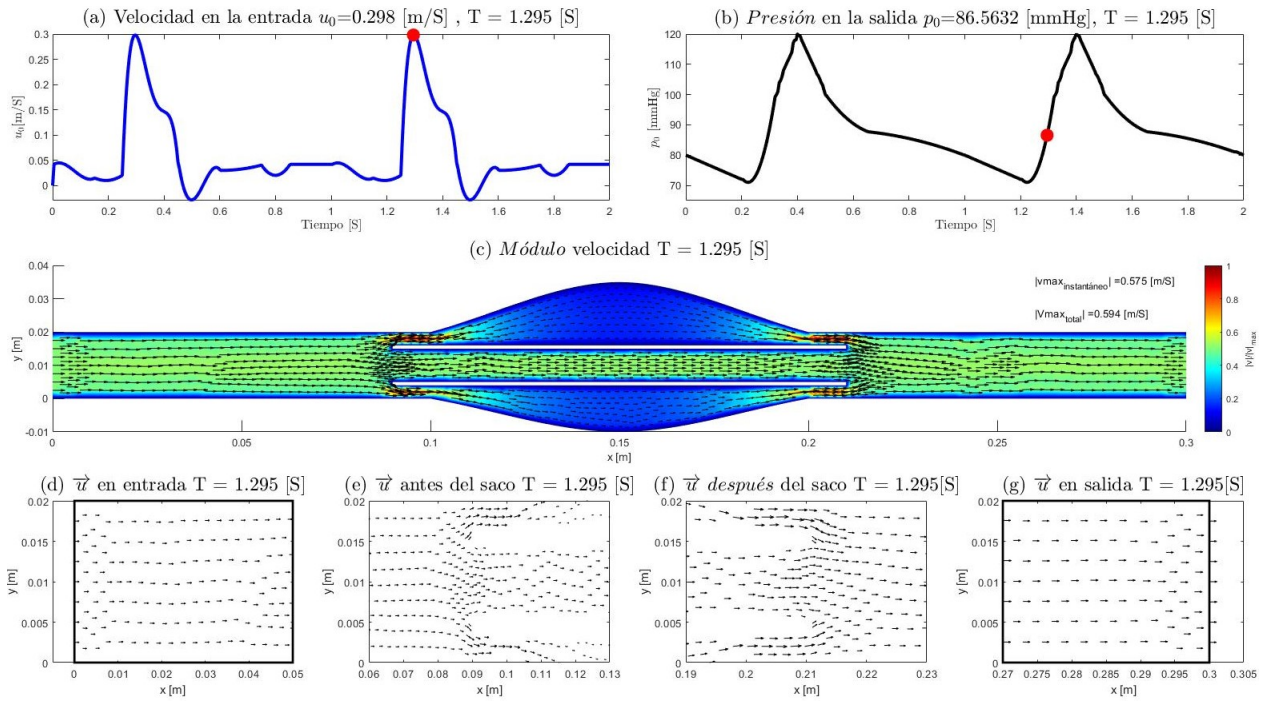


**Figura 7.10:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 1 con prótesis en: (a) 1.26[S], (b) 1.27 [S], (c) 1.30[S], (d) 1.35 [S], (e) 1.44 [S] y (f) 1.5[S].

Fuente: Elaboración propia

Observando la figura 7.10, se aprecia que aumento en la velocidad en (a) y (b), similar al obtenido en la figura 7.4. Pero la principal diferencia radica en que la velocidad máxima se genera en el área de entre la pared aórtica y la prótesis, esto se aprecia de mejor manera en la figura 7.10 (c), donde alcanza la magnitud de 1 con coloración amarilla. Por otro lado, no se observa una diferencia considerable en la magnitud para las zonas superior e inferior del saco aneurismal (esto se verá reflejado en la figura 7.13 (b)). Finalmente, la prótesis logra disminuir la velocidad dentro saco aneurismal pero provoca mayores velocidades en las zonas de menor área de circulación.

Siguiendo el orden presentado en la simulación sin prótesis, se presenta la siguiente figura para analizar la magnitud de la velocidad con su respectiva dirección.

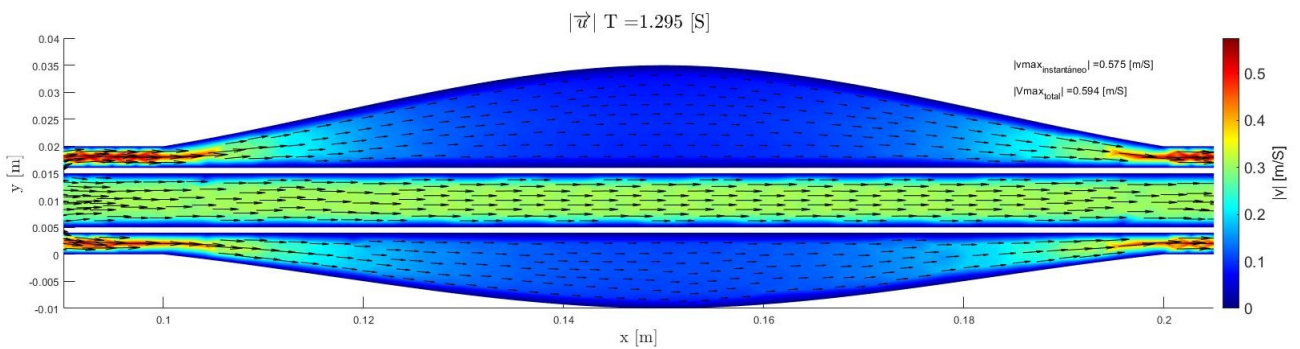


**Figura 7.11:** Modelo 1 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

La figura 7.11 (a) y (b), muestran los valores de  $u_0$  y  $p_0$ , para el instante de estudio, al igual que en la simulación sin prótesis. Por otro lado, la figura 7.11 (c), muestra que las máximas velocidades están en el espacio prótesis/pared arterial, donde se aprecia la coloración roja. En la zona del saco aneurismal la velocidad es menor y mayor dentro de la prótesis.

Las figuras 7.11 (e) y (f), muestran como se ve afectado el vector velocidad por la prótesis. Apesar que el espesor de la prótesis es pequeño, se genera una zona de velocidad elavada. Finalmente, las figuras 7.11 (d) y (g), muestra un comportamiento predecible y comparando con la simulación sin prótesis, el vector velocidad se ve más pequeño, debido a una mayor magnitud de la velocidad.

Para apreciar mejor la zona del saco aneurismal, se presenta la siguiente figura:

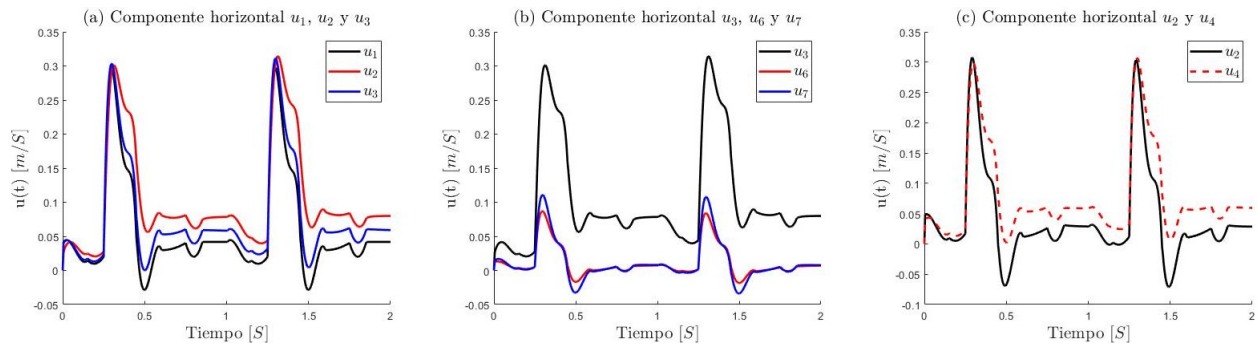


**Figura 7.12:** Ampliación saco aneurismal modelo 1 con prótesis.

Observando la figura anterior, se observa la coloración roja en las zonas de mayor velocidad, azul en la zona superior e inferior del saco aneurismal y una magnitud mayor dentro de la

prótesis.

A continuación, se presentan los gráficos de velocidad horizontal para los seis puntos de estudio, descritos anteriormente.



**Figura 7.13:** velocidad horizontal  $u$ , modelo 1 con prótesis: (a)  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , (b)  $u_3$ ,  $u_6$  y  $u_7$  y (c)  $u_2$  y  $u_4$

Respecto a la figura 7.13 (a), las tres velocidades tienen un comportamiento parecido en términos de forma, aunque la velocidad en la zona central es mayor en todo instante, esto es consistente con lo observado en las figuras 7.10 (a)-(f), porque dentro de la prótesis el área de circulación disminuye. Por otro lado, la figura 7.22 (b), muestra que la velocidad dentro de la prótesis es mayor que en la zona superior e inferior y además, se observa poca diferencia entre estas. Finalmente, la figura 7.22 (c) muestra que la velocidad en la salida de la prótesis es mayor.

Por otro lado, se procederá a comparar la magnitud de la velocidad, en los puntos de estudio para los seis instantes de tiempo desfasados en un periodo. Las siguientes tablas muestran la magnitud de la velocidad:

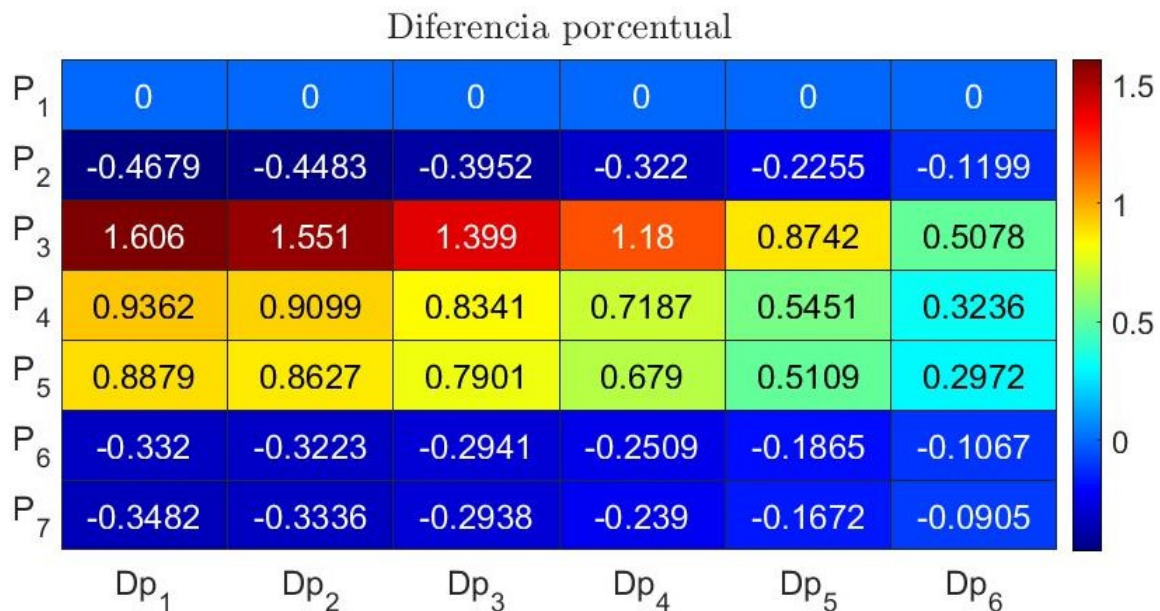
**Tabla 7.5:** Magnitud de velocidad modelo 1 con prótesis, para puntos de estudios en el 1<sup>er</sup> periodo.

Punto \ T[S]	0.255	0.265	0.295	0.345	0.435	0.6
$P_1$	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
$P_2$	0.0930	0.2064	0.3071	0.1787	0.0666	0.0134
$P_3$	0.0700	0.1490	0.2847	0.2738	0.2065	0.0818
$P_4$	0.0859	0.1844	0.2979	0.2250	0.1377	0.0551
$P_5$	0.0863	0.1865	0.3026	0.2270	0.1378	0.0546
$P_6$	0.0249	0.0554	0.0871	0.0594	0.0262	0.0003
$P_7$	0.0271	0.0646	0.1107	0.0714	0.0220	-0.0015

**Tabla 7.6:** Magnitud de velocidad modelo 1 con prótesis, para puntos de estudios en el 2<sup>do</sup> periodo.

Punto\T[S]	1.255	1.265	1.295	1.345	1.435	1.6
$P_1$	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
$P_2$	0.0883	0.2019	0.3031	0.1755	0.0644	0.0122
$P_3$	0.0860	0.1645	0.2986	0.2856	0.2153	0.0869
$P_4$	0.0952	0.1935	0.3063	0.2322	0.1431	0.0584
$P_5$	0.0952	0.1952	0.3105	0.2338	0.1429	0.0576
$P_6$	0.0216	0.0522	0.0841	0.0569	0.0243	-0.0007
$P_7$	0.0236	0.0612	0.1078	0.0690	0.0203	-0.0024

Como no se observan diferencias notorias al comparar las tablas 7.5 y 7.6, se presenta la siguiente figura con la diferencia porcentual, de igual forma que en la simulación sin prótesis.



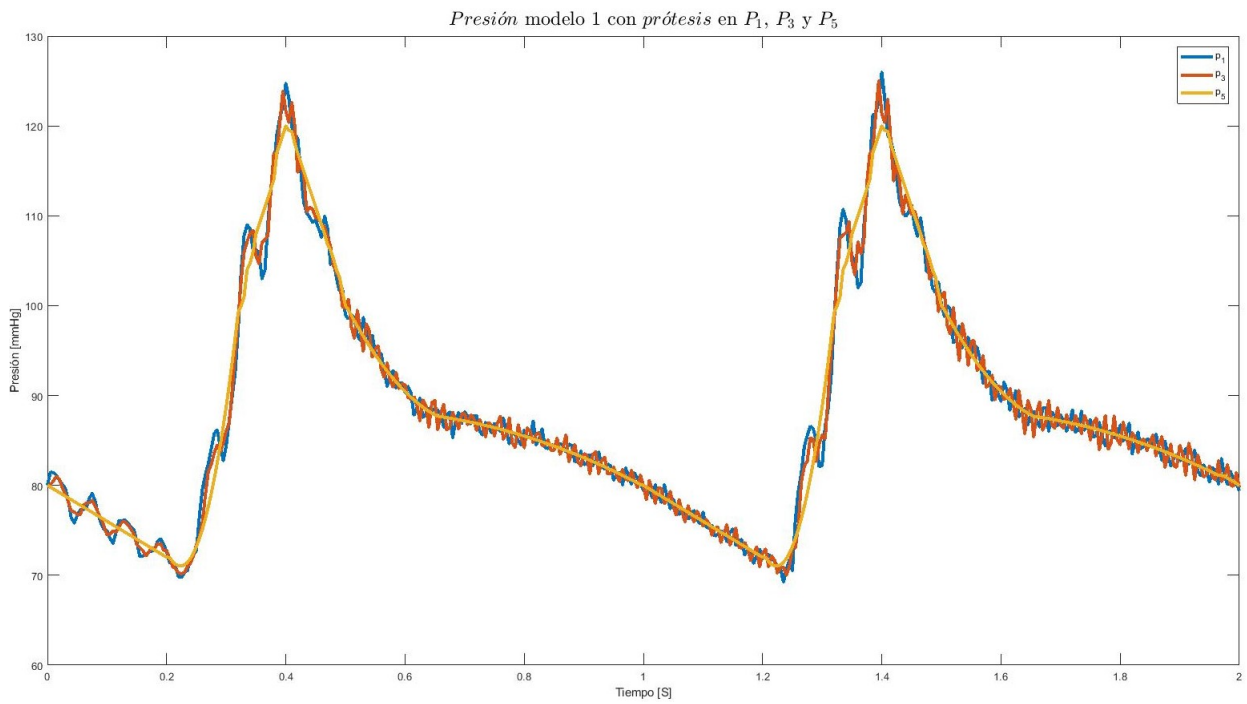
**Figura 7.14:** Diferencia temporal modelo 1 con prótesis

Como primera observación, el punto  $P_2$  muestra decrecimiento en los seis instantes del 2<sup>do</sup> periodo, a diferencia del modelo sin prótesis (ver figura 7.8), donde siempre se obtuvo un crecimiento. Del mismo modo, el punto  $P_3$ , muestra el mayor aumento entre periodos.

Los puntos  $P_4$  y  $P_5$ , muestran un crecimiento estable y son similares a los obtenidos en la simulación sin prótesis (ver figura 7.8).

Los puntos  $P_6$  y  $P_7$ , muestran decrecimiento para los seis instantes, lo que demuestra que la prótesis logra disminuir las velocidades dentro del saco aneurismal.

Para terminar con esta sección, se presenta la siguiente figura con la presión en las tres posiciones, al igual que en la simulación sin prótesis.



**Figura 7.15:** Presión en modelo 1 con prótesis

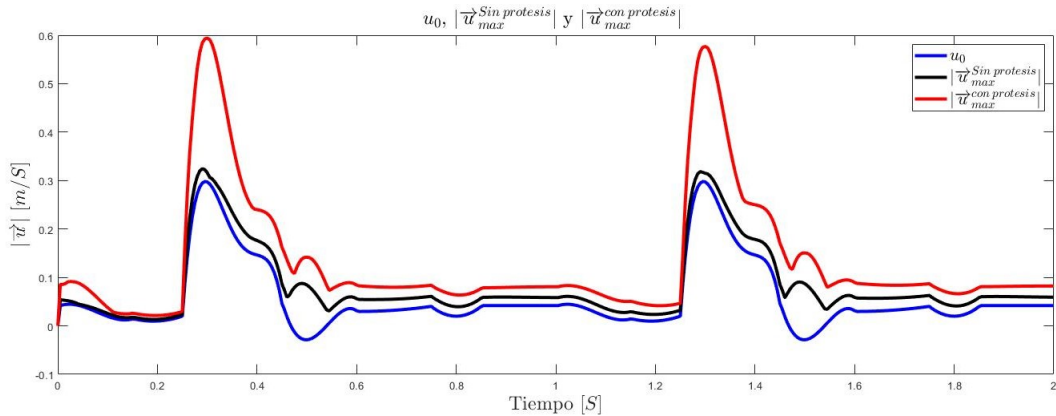
La figura 7.15, muestra nuevamente un comportamiento inestable, muy similar a la simulación anterior (ver figura 7.9). Además, no se observa que la prótesis genere un aumento en  $P_3$

Para los siguientes modelos no se presentarán las presiones porque se obtuvieron resultados similares.

### 7.2.3. Comparación

En esta sección, se presentará una comparación entre ambas simulaciones usando figuras y tablas.

La primera comparación será con las magnitudes de la velocidad máxima, en la siguiente figura se muestra lo dicho:



**Figura 7.16:** Velocidad en la entrada, magnitud velocidad máxima simulación sin prótesis y magnitud velocidad máxima simulación con prótesis, para modelo 1.

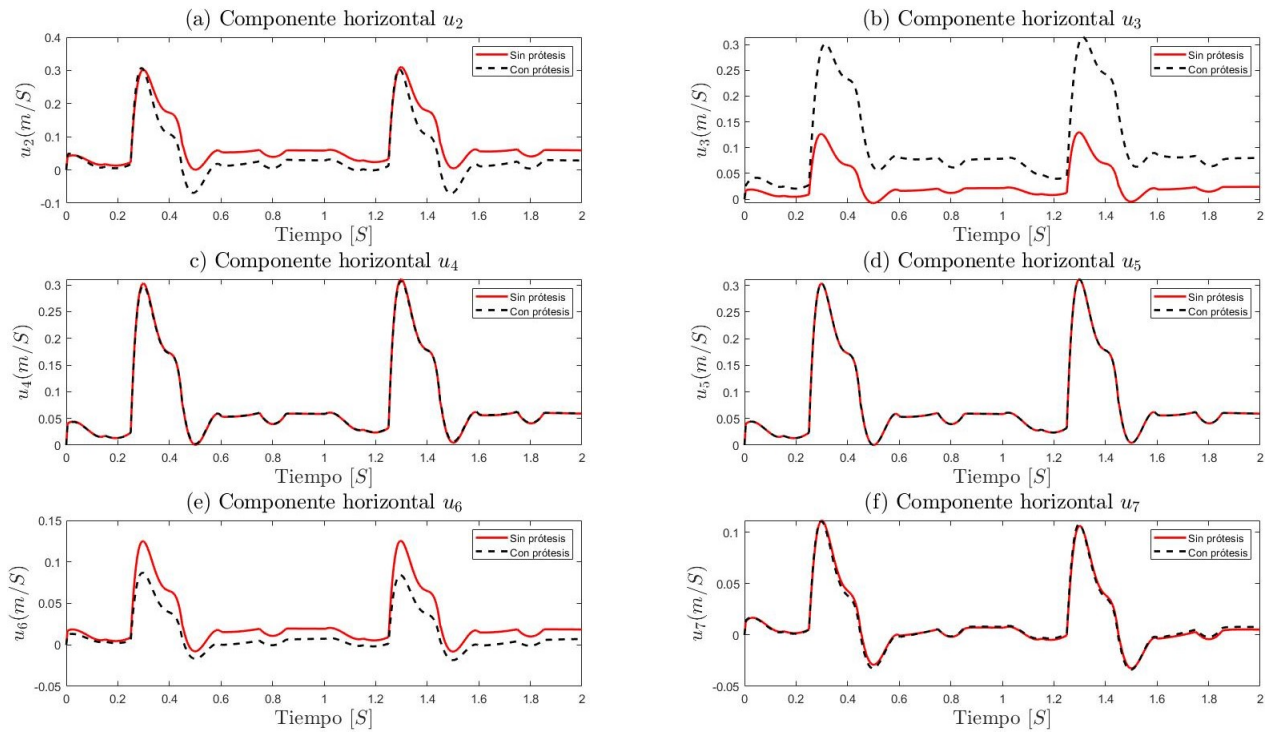
Fuente: Elaboración propia

Cabe mencionar que esta comparación no involucra la ubicación de las magnitudes máximas pero recordar que la magnitud máxima está antes y después del saco aneurismal para modelos sin prótesis y en el espacio entre la aorta y la prótesis, para simulaciones con prótesis endovasculares (ver figuras 7.4 y 7.10).

Observando la figura anterior, se tienen mayores magnitudes de velocidad en la simulación con prótesis, lo cual es consistente con resultados anteriores. Respecto a los modelos sin prótesis, la magnitud de la velocidad es muy similar a la velocidad horizontal, lo cual tiene sentido con la figura 7.4, donde no se observa diferencias considerables en las velocidades antes y después del saco aneurismal, lo que implica que la velocidad dentro estas zonas no varía mucho respecto a la condición de borde. Es importante aclarar que se graficó el módulo de la velocidad, por lo tanto, este dato nunca será negativo provocando que ambas magnitudes tengan un comportamiento cóncavo en la zona de velocidad negativa.

Por otro lado, en la simulación con prótesis, se observa que la magnitud de velocidad aumenta bruscamente en los primeros instantes respecto a la velocidad en la entrada y en el segundo ciclo ya no sucede eso. Finalmente, se observa que la magnitud de velocidad máxima disminuye en el 2<sup>do</sup> ciclo en el modelo con prótesis (0.295[S] con 1.295 [S]).

La siguiente comparación será con los puntos de estudio presentados en los antecedentes. La siguiente figura muestra la componente horizontal de la velocidad para ambas simulaciones:



**Figura 7.17:** Componente horizontal para modelo 1  
Fuente: Elaboración propia

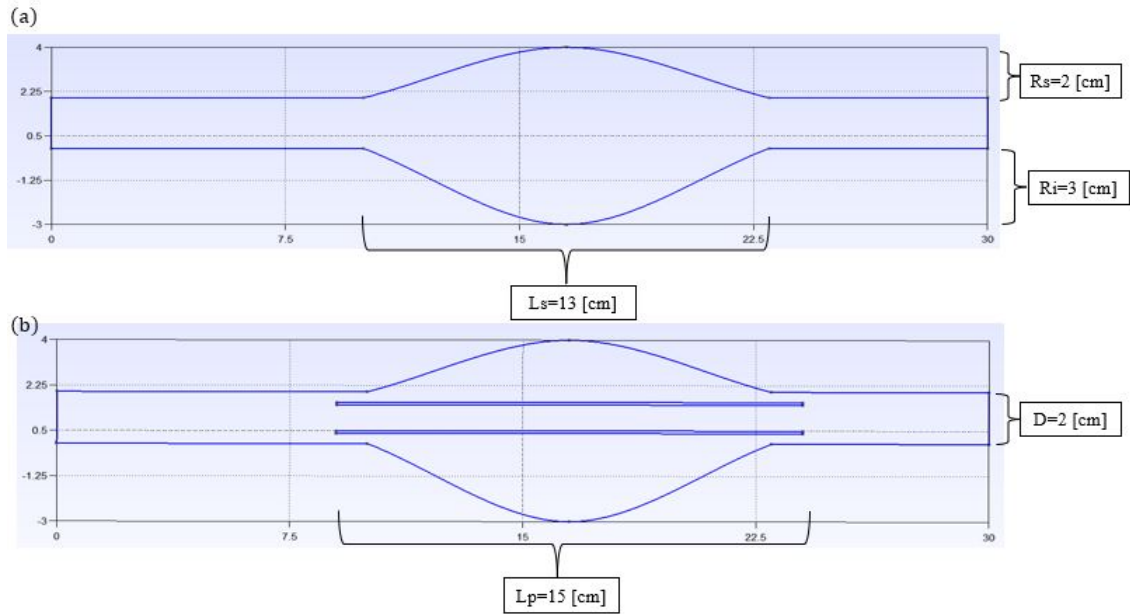
Se observa que en la figura 7.17 (a), la componente horizontal de la velocidad es menor en el modelo con prótesis debido a la expansión. En la zona media de la prótesis figura 7.17 (b), se observa el aumento que tiene la velocidad dentro de la prótesis.

Para los puntos  $P4$  y  $P5$ , no se tienen diferencias ya que, en el primero el área de circulación es la misma y en el segundo, la velocidad en la salida no debería ser muy diferente en ambas simulaciones, ya que, la prótesis no es un obstáculo que impida el flujo en la horizontal, solo está para disminuir el flujo en la zona superior e inferior del saco aneurismal.

Respecto a la figura 7.17 (e), la componente horizontal es menor en la simulación con prótesis, siendo consistente con los resultados anteriores. Por otro lado, en la figura 7.17 (f), se aprecia una leve diferencia entre ambas simulaciones, esto es provocado porque  $R_i$  es pequeño, por lo que, la prótesis no afecta como debería en esta zona.

### 7.3. Modelo 2

En este modelo, el diámetro del aneurisma aumento a 7 [cm] y en la siguiente figura se muestra la geometría:



**Figura 7.18:** Geometría del modelo 2: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm])

Fuente: Elaboración propia

El modelo que se observa en la figura anterior corresponde a un aneurisma asimétrico al igual que el modelo 1 (ver 7.3), pero tiene dimensiones más grandes para observar los cambios que provoca la geometría en la simulación. En la siguiente tabla se muestra la información previa del modelo y los tiempos de simulación:

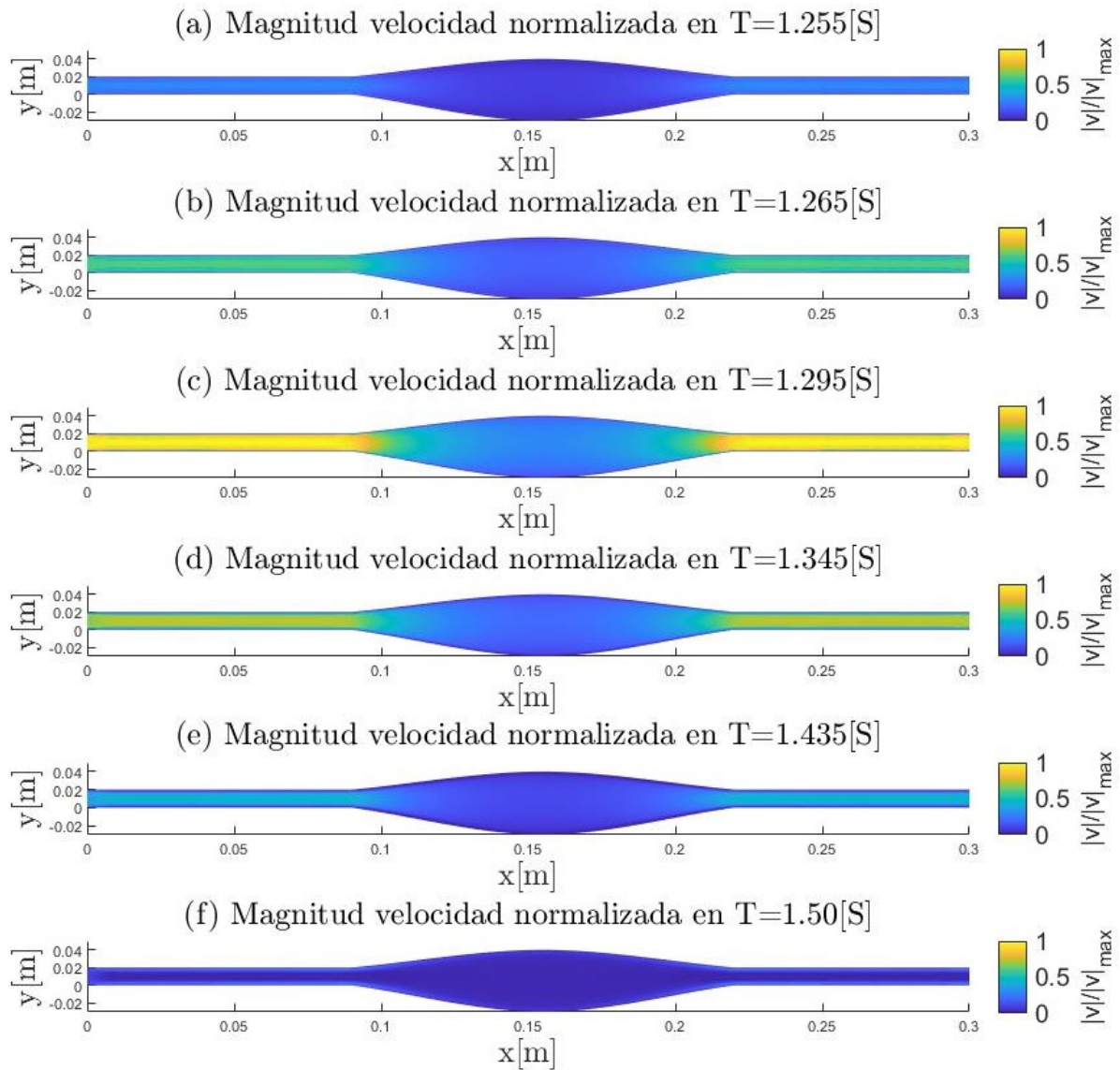
**Tabla 7.7:** Nodos y tiempo de simulación para modelo 2

Modelo 2	$N_v$	$N_p$	E	$N_t$	$N_c$	$N_d$	$T_s$ [min]
Sin prótesis	2230	592	1047	5052	538	4514	10.99
Con prótesis	2492	689	1113	5673	1066	4607	12.45

Comparando con los datos del modelo 1 (ver tabla 7.2), se observa un aumento en los nodos y elementos, lo que provoca un aumento en los tiempos de simulación. Por otro lado, la simulación sin prótesis tiene menos nodos que la simulación con prótesis.

### 7.3.1. Sin prótesis

La magnitud de la velocidad máxima  $|\vec{u}_{max}|$  en esta simulación fue de  $0.315[m/S]$  y haciendo el mismo procedo de normalización, se presenta la magnitud de velocidad normalizada para los seis instantes de tiempo:



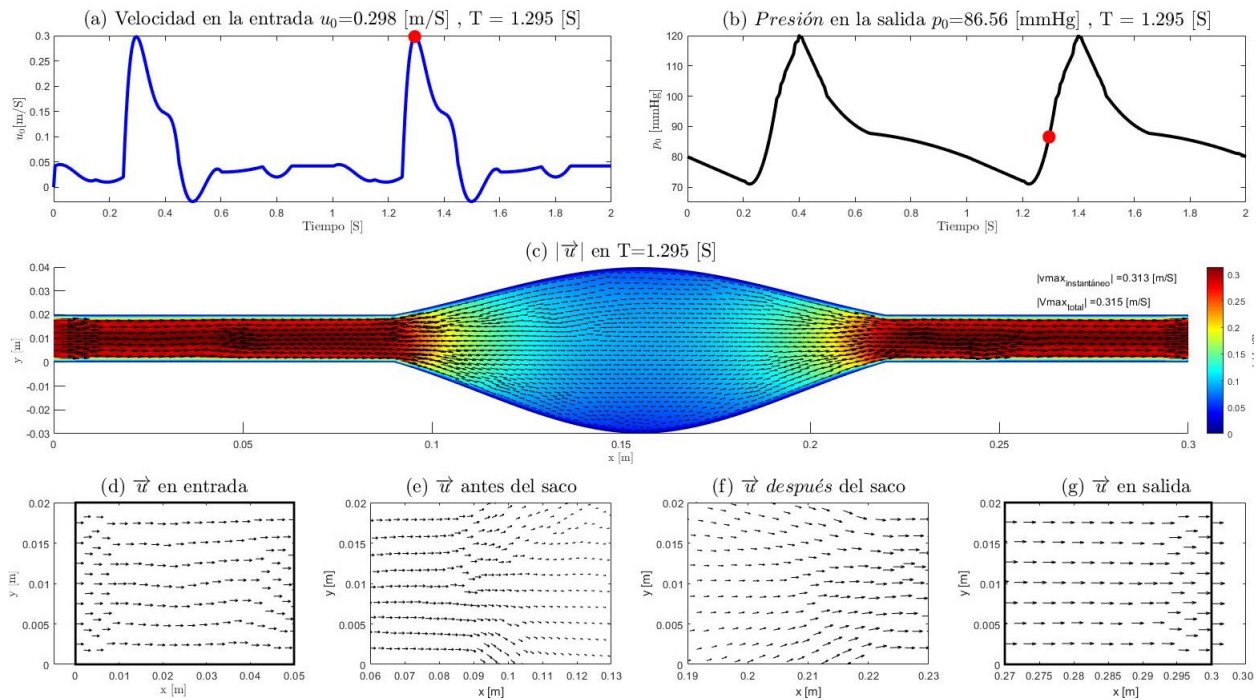
**Figura 7.19:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 2 sin prótesis en: (a)  $1.255[S]$ , (b)  $1.265[S]$ , (c)  $1.295[S]$ , (d)  $1.345[S]$ , (e)  $1.435[S]$  y (f)  $1.50[S]$ .

Fuente: Elaboración propia.

Las figuras 7.19 (a) y (b), muestran un aumento en la magnitud de la velocidad normalizada que es provocado por el aumento de la velocidad en la entrada. Por otro lado, en  $T=1.295[S]$  la figura 7.19 (c), muestra la mayor magnitud.

Luego, las figuras 7.19 (d), (e) y (f), muestran el decrecimiento en la velocidad, siendo consistente con los pulsos (ver figura 7.1).

Cabe mencionar que en la figura 7.19, no es posible apreciar el efecto que tiene un radio inferior mayor que el superior. Para poder estudiar de mejor manera, se presenta la siguiente figura con la magnitud de la velocidad con su respectivo vector.



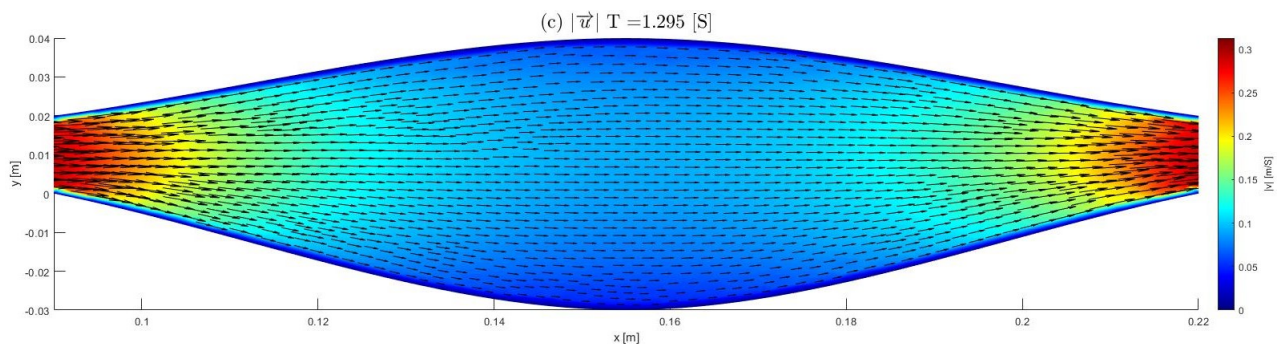
**Figura 7.20:** Modelo 2 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

Fuente: Elaboración propia.

La figura anterior, tiene los pulsos con el instante de estudio, Por otro lado, 7.20 (c), muestra que la velocidad es mayor antes y después del saco aneurismal, este comportamiento se cumple para los modelos sin prótesis.

Respecto al campo de velocidad de las figuras 7.19 (d), (e), (f) y (g), presentan el mismo comportamiento observado en el modelo 1 sin prótesis.

Finalmente, se presenta una ampliación del saco aneurismal para observar mejor los detalles.

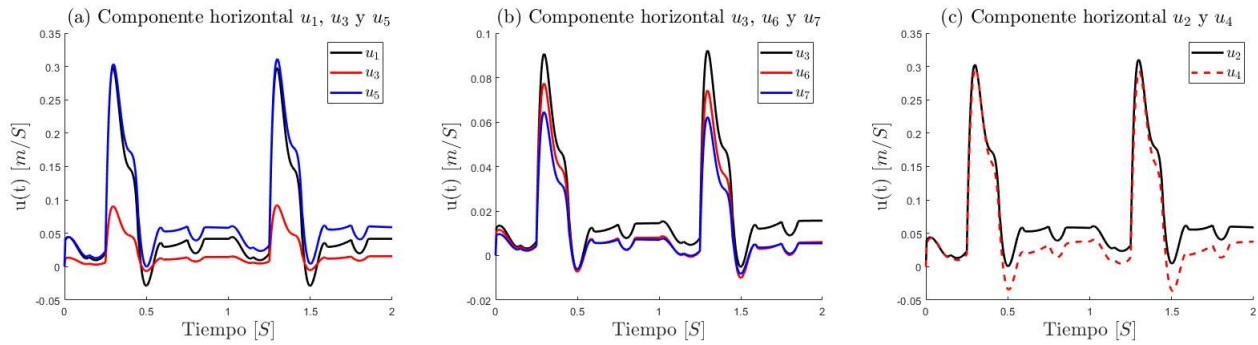


**Figura 7.21:** Ampliación saco aneurismal modelo 1 sin prótesis.

Fuente: Elaboración propia

Como se mencionó anteriormente, al realizar una ampliación de la zona del saco aneurismal, se puede observar que la velocidad es menor en la parte inferior de este, esto es consistente, ya que,  $R_i$  es mayor que  $R_s$ .

Seguindo con el análisis, se presenta la siguiente figura con la componente horizontal de la velocidad para los puntos de estudios.



**Figura 7.22:** Componente horizontal para modelo 2 sin prótesis: (a)  $u_1$ ,  $u_3$  y  $u_5$ , (b)  $u_3$ ,  $u_6$  y  $u_7$  y (c)  $u_2$  y  $u_4$ .

Fuente: Elaboración propia

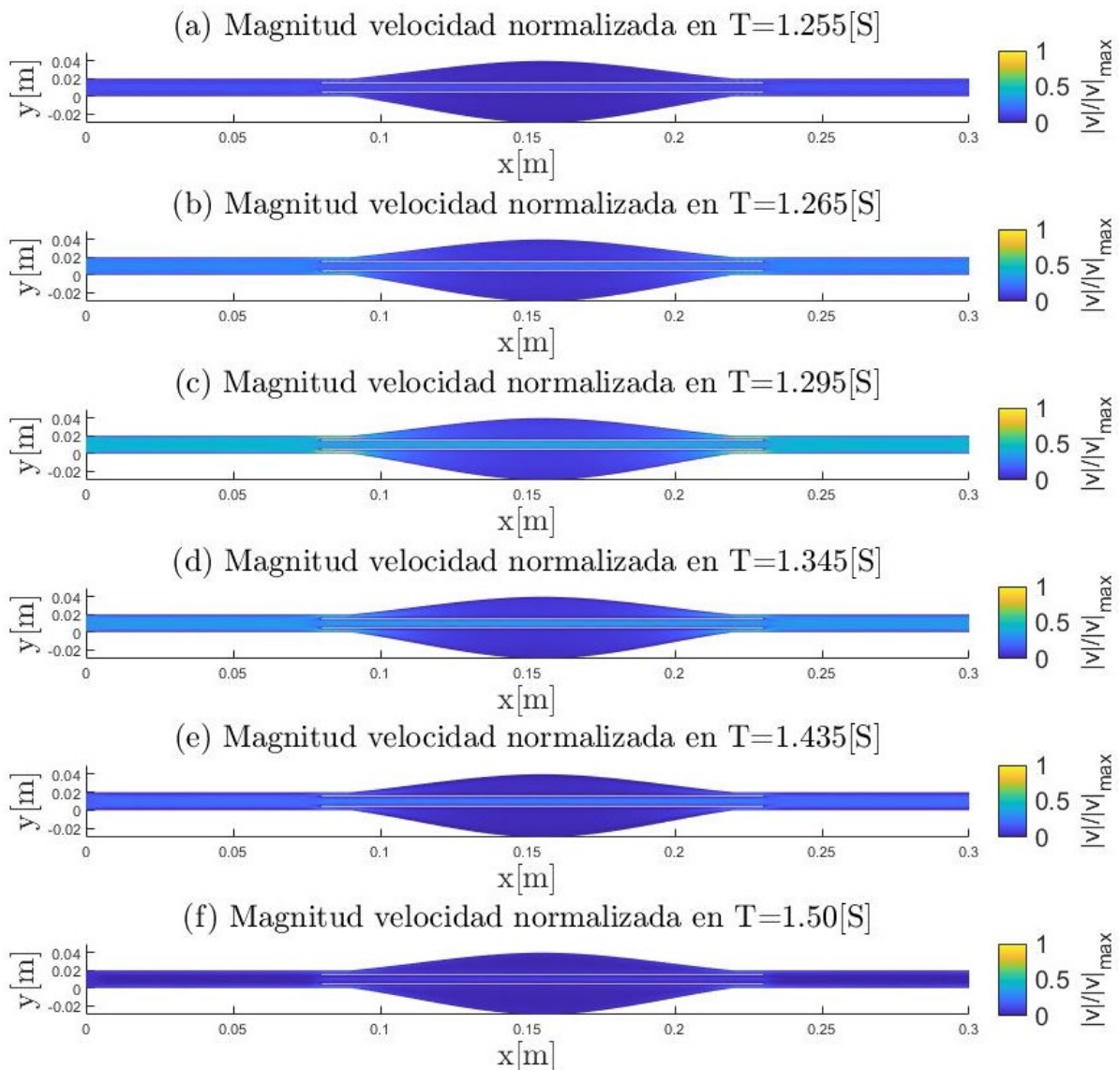
En la figura 7.22 (a), se observa poca diferencia en la velocidad para la entrada y la salida. Por otro lado, esta misma figura muestra una disminución de la velocidad en la zona media  $P_3$ , lo cual, es consistente por el aumento en área de flujo.

La figura 7.22 (b), muestra un comportamiento parecido en términos de forma, pero se aprecia que la mayor velocidad está en  $P_3$ . además, la componente horizontal es menor en  $P_7$  porque  $R_i$  es mayor que  $R_s$ , como se mencionó anteriormente.

Las tablas para la magnitud de la velocidad se dejan en el anexo C.1 porque presenta el mismo comportamiento que en el modelo 1. Por consiguiente, la diferencia porcentual se traslada al anexo C.4.

### 7.3.2. Con prótesis

Para esta simulación la magnitud de velocidad máxima es de  $0.689 [m/S]$  y haciendo el mismo procedimiento realizado anteriormente, se presenta la magnitud de la velocidad normalizada en los cinco instantes de tiempo:

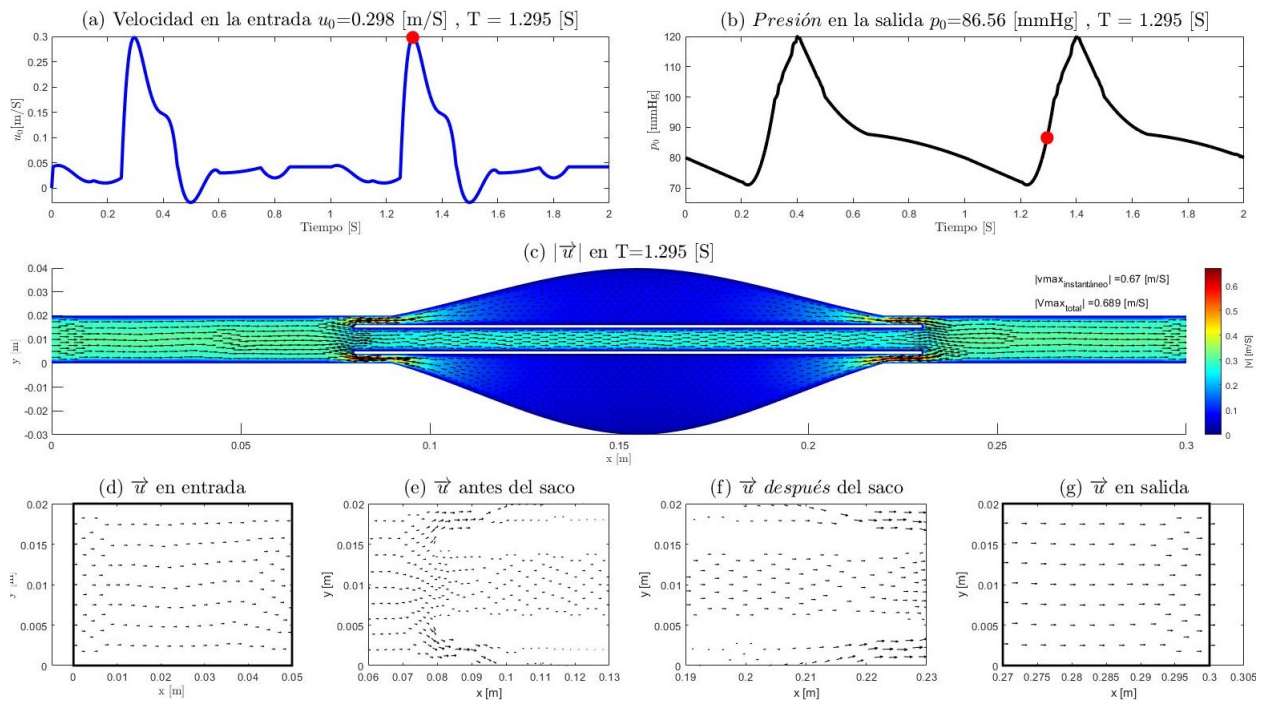


**Figura 7.23:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 2 con prótesis en: (a)  $1.255[S]$ , (b)  $1.265 [S]$ , (c)  $1.295[S]$ , (d)  $1.345 [S]$ , (e)  $1.435 [S]$  y (f)  $1.50[S]$ .

Fuente: Elaboración propia.

La figura anterior muestra el aumento en la coloración de (a)-(b) y en  $1.295 [S]$ , se tiene la mayor coloración que es provocada por la velocidad máxima. Los instantes siguientes muestran una la disminución de la velocidad, similar a lo observado en el modelo 1 con prótesis.

Del mismo modo, para estudiar la velocidad (magnitud y dirección), se presenta la siguiente figura:

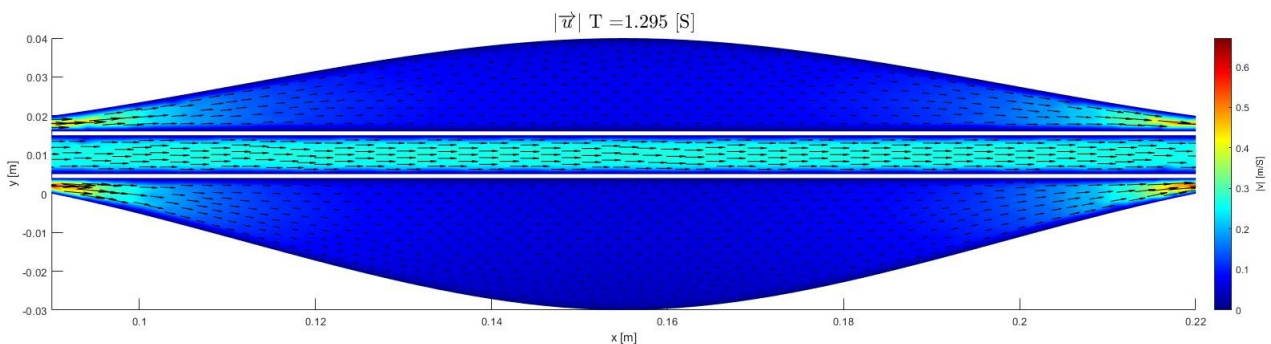


**Figura 7.24:** Modelo 2 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

Fuente: Elaboración propia.

Del mismo modo, que en las simulaciones previas, se presenta los pulsos de velocidad y presión, con sus respectivos valores. Se tiene que la mayor velocidad en la zona del saco aneurismal, se genera dentro de la prótesis, al igual que en las simulaciones con prótesis.

Se presenta una ampliación del saco aneurismal para observar mejor el comportamiento de la velocidad.



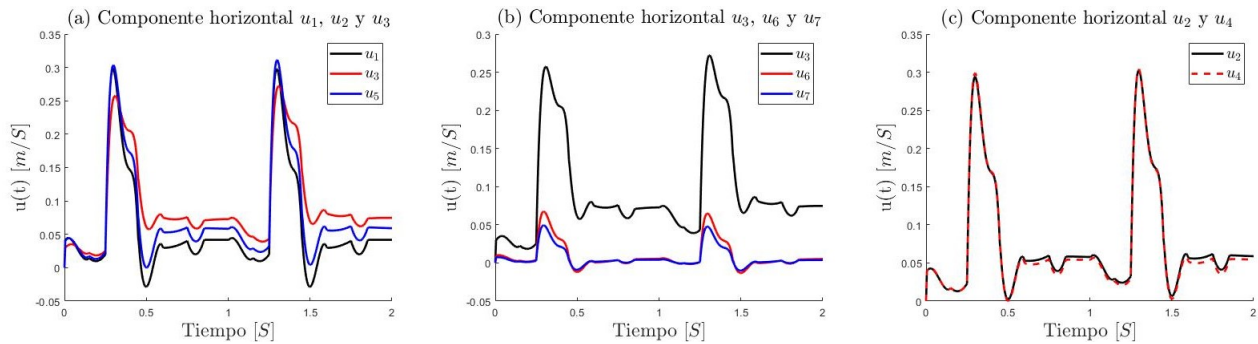
**Figura 7.25:** Ampliación saco aneurismal modelo 2 con prótesis.

Fuente: Elaboración propia

Respecto de la figura anterior, se aprecia el aumento del módulo al comienzo y al final del saco, provocado por la disminución del área de flujo. Por otro lado, la velocidad en la zona superior e inferior es menor y dentro de la prótesis es mayor.

Las tablas para comparar las velocidades entre periodos están en el anexo C.3. Además, la diferencia porcentual correspondiente, se encuentra en el anexo C.4.

La siguiente figura que se presenta corresponde a la componente horizontal  $u$ , en los puntos de estudio:



**Figura 7.26:** Componente horizontal  $u$ , modelo 2 con prótesis: (a)  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_5$ , (b)  $u_3$ ,  $u_6$  y  $u_7$  y (c)  $u_2$  y  $u_4$ .

Fuente: Elaboración propia

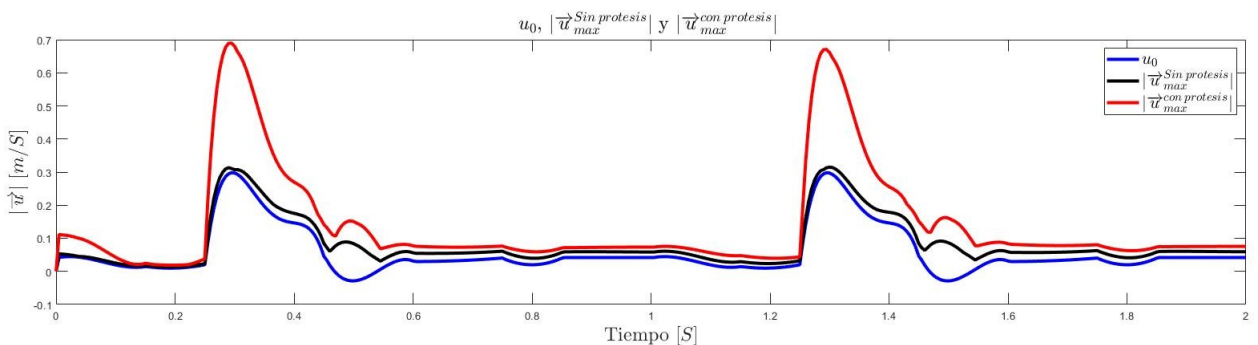
Respecto a la figura 7.26 (a), se tiene una componente horizontal muy similar en la entrada respecto a la salida y una menor velocidad en la zona media, en los instantes donde la velocidad aumento pero al final de ambos periodos la velocidad en este punto es mayor.

Para la figura 7.26 (b), se tiene un comportamiento totalmente esperable donde la mayor velocidad será en la zona de la prótesis y menor en la zona del saco, tanto superior como inferior.

En el caso de la figura 7.26 (c), no se tienen diferencias significativas.

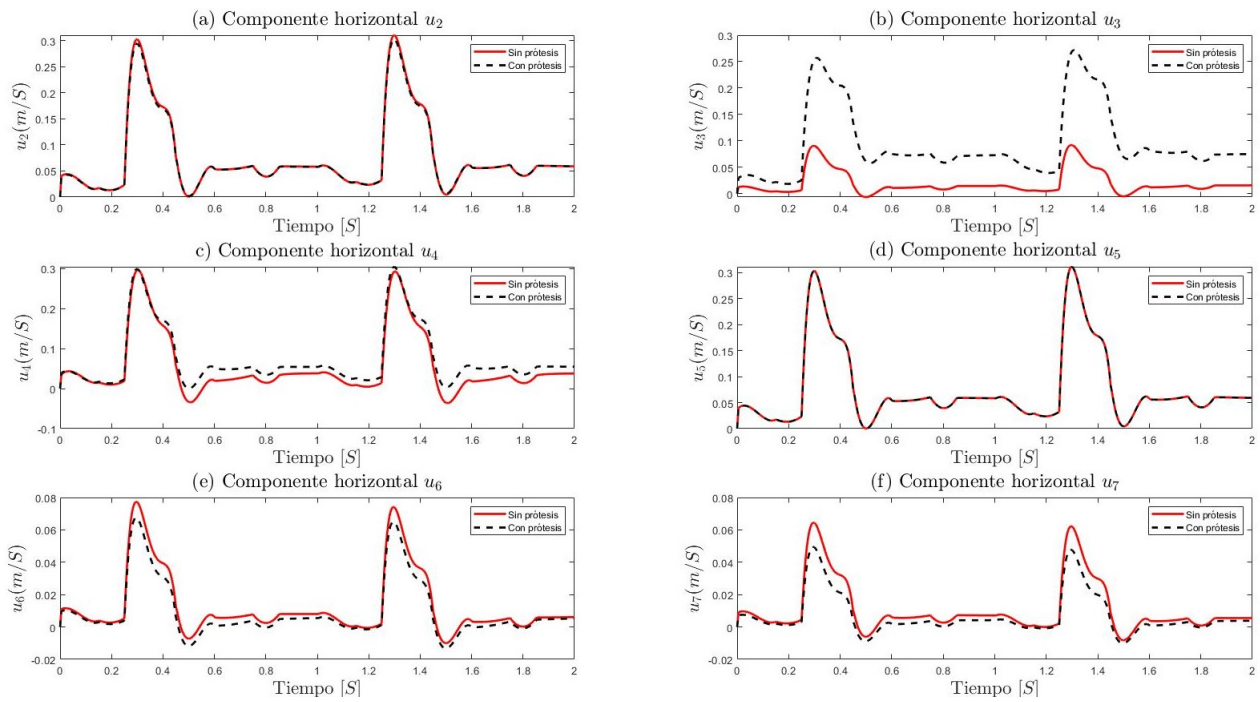
### 7.3.3. Comparación

Siguiendo el análisis de la simulación anterior, se comparará los resultados del modelo 2. Como primera comparación, se estudiará las magnitudes de la velocidad máximas.



**Figura 7.27:** Velocidad en la entrada, magnitud velocidad máxima simulación sin prótesis y magnitud velocidad máxima simulación con prótesis, para modelo 2.

La figura 7.27 muestra el mismo comportamiento obtenido que la comparación anterior. Recordar que al graficar la magnitud nunca será negativa, por lo tanto, tanto en la simulación con prótesis como sin prótesis se observa un cambio en la concavidad cuando la velocidad en la entrada es negativa.



**Figura 7.28:** Componente horizontal para modelo 2  
Fuente: Elaboración propia

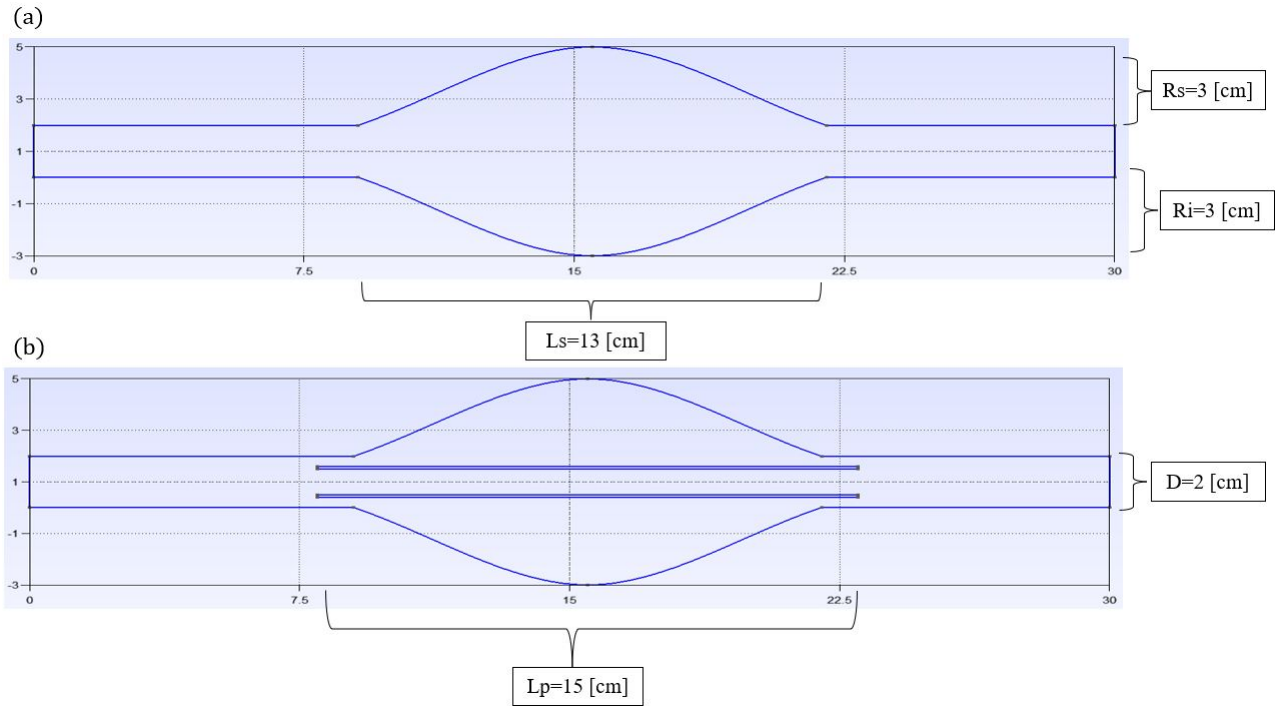
En la figura 7.28 (a) y (d), no se observa diferencia entre ambos modelos. Para la figura 7.28 (b), se aprecia claramente que en el modelo sin prótesis la componente horizontal es mayor.

En la figura 7.28 (c),(e) y (f), se tienen diferencias muy pequeñas. En (c), la componente es mayor en el modelo con prótesis debido a tener una contracción más brucha debido a la existencia de la prótesis. Para (e) y (f), la componente horizontal es mayor en el modelo sin prótesis, debido a que esta debe restringir la circulación en la zona del saco aneurismal.

## 7.4. Modelo 3

Este último modelo, cuenta con un mayor refinado respecto a los anteriores para estudiar de mejor manera el campo de velocidades, en especial para la entrada y la salida.

Este aneurisma es simétrico con radio superior e inferior de 3 [cm] y una longitud del saco aneurismal de 13 [cm]. Estas dimensiones corresponde a las máximas según (Bautista, S., et al. 2012).



**Figura 7.29:** Geometría del modelo 3: (a) Sin prótesis y (b) Con prótesis (dimensiones en [cm]).

Fuente: Elaboración propia

En la figura anterior, se observa la geometría del modelo siendo este el modelo con las dimensiones más grandes. Se espera tener una coloración más opaca en la zona del saco aneurismal porque es el mayor diámetro (8[cm]).

Siguiendo la estructura de los modelos anteriores, se presenta una tabla con: nodos, elementos, tiempo de simulación ( $T_s$ ), etc:

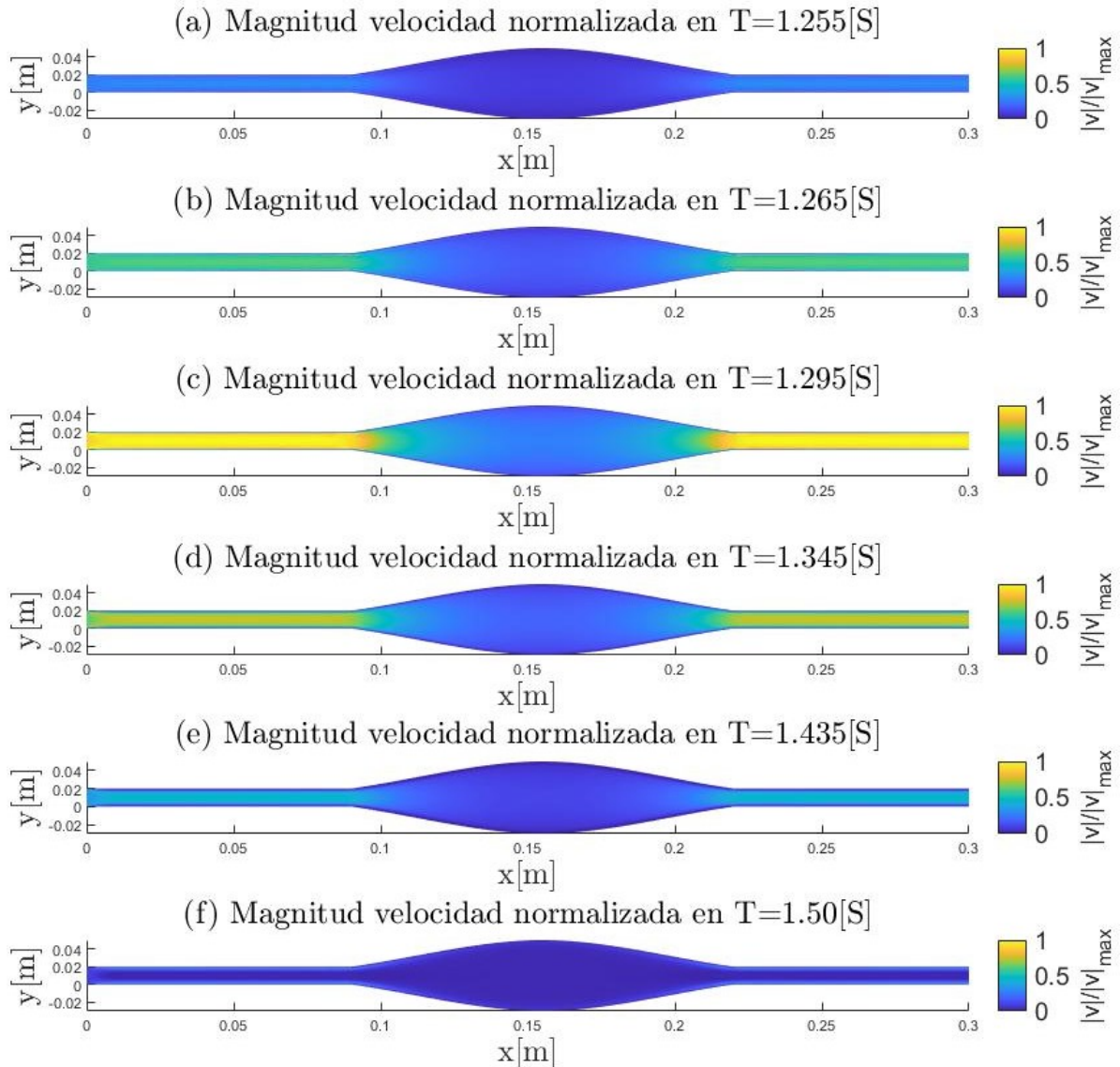
**Tabla 7.8:** Nodos y tiempo de simulación para modelo 3

Modelo 3	$N_v$	$N_p$	E	$N_t$	$N_c$	$N_d$	$T_s$ [min]
Sin prótesis	8229	2136	3960	18594	2468	16126	330.23
Con prótesis	8439	2220	4000	19098	2689	16409	410.42

Para este modelo, se tiene un aumento considerable en la cantidad de elementos, provocando que aumenten los nodos y por consiguiente, se tiene un aumento considerable en el tiempo de simulación. Respecto a este último, se tiene una diferencia de 80.19[Mi] entre la simulación con prótesis y la sin prótesis, recordar que esto ocurrió en los modelos anteriores.

### 7.4.1. Sin prótesis

En esta simulación, la máxima magnitud de velocidad es de 0.336 [m/S], siendo la mayor de los tres modelos. A continuación, se presenta la magnitud para los seis instantes de tiempo de interés:

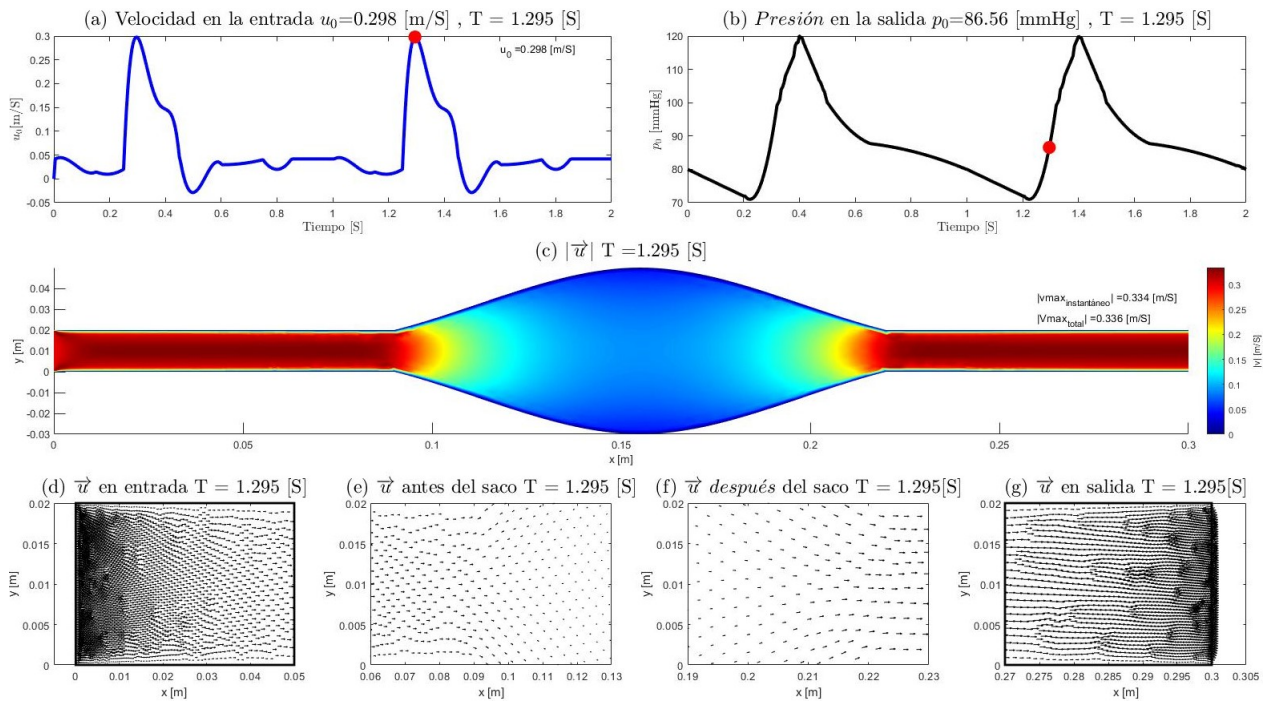


**Figura 7.30:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 3 sin prótesis en: (a) 1.255[S], (b) 1.265 [S], (c) 1.295[S], (d) 1.345 [S], (e) 1.435 [S] y (f) 1.50[S].

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 7.30 (a) y (b), se tiene el aumento en la coloración provocado por el incremento en la velocidad. Nuevamente, se tiene la máxima magnitud en  $T = 1.295[S]$  como se puede observar en la figura 7.30 (c). Por otro lado, las figuras 7.30 (e) y (f), muestran la disminución, en la coloración

Siguiendo con el análisis de los resultados, a continuación, se presentan los pulsos cardiacos, la magnitud de la velocidad (sin vectores) y los campos de velocidad en las cuatro regiones (siguiendo con lo presentado en los anteriores modelos).



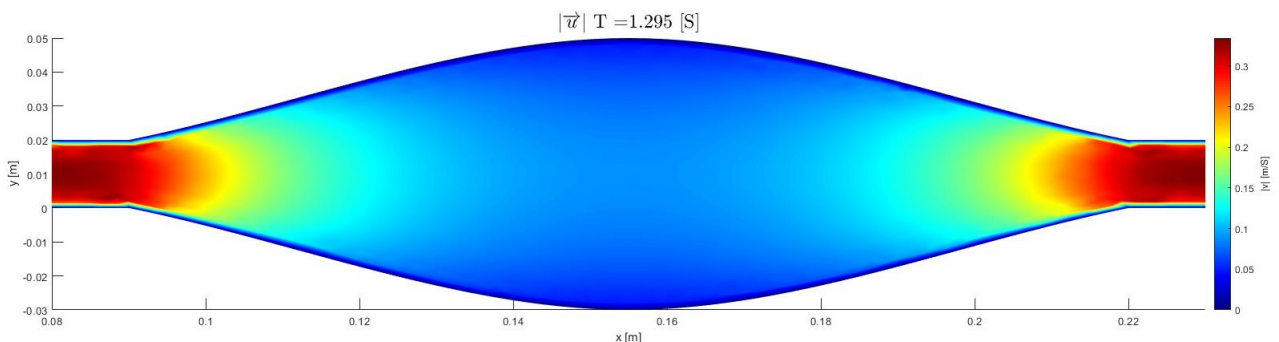
**Figura 7.31:** Modelo 3 sin prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

A diferencia de los modelos anteriores, el modelo 3 al tener una mayor cantidad de nodos, el vector de velocidad se tuvo que escalar para mejorar la visualización. Por este mismo motivo la figura 7.31 (c) no lleva el vector.

Observando la figura 7.31 (c), se puede apreciar la degradación en la parte inicial del saco aneurismal y el respectivo aumento en la zona final de este. Del mismo modo se puede ver la simetría en esta misma figura.

Debido a la disminución del vector, las figuras 7.31 (d)-(g) no son tan claras como las anteriores. Para compensar esto, más adelante se mostrará el perfil de velocidades en la salida, obteniendo unas curvas propias de un flujo de estas características.

Continuando con el análisis, se presenta una ampliación del saco aneurismal en la siguiente figura:



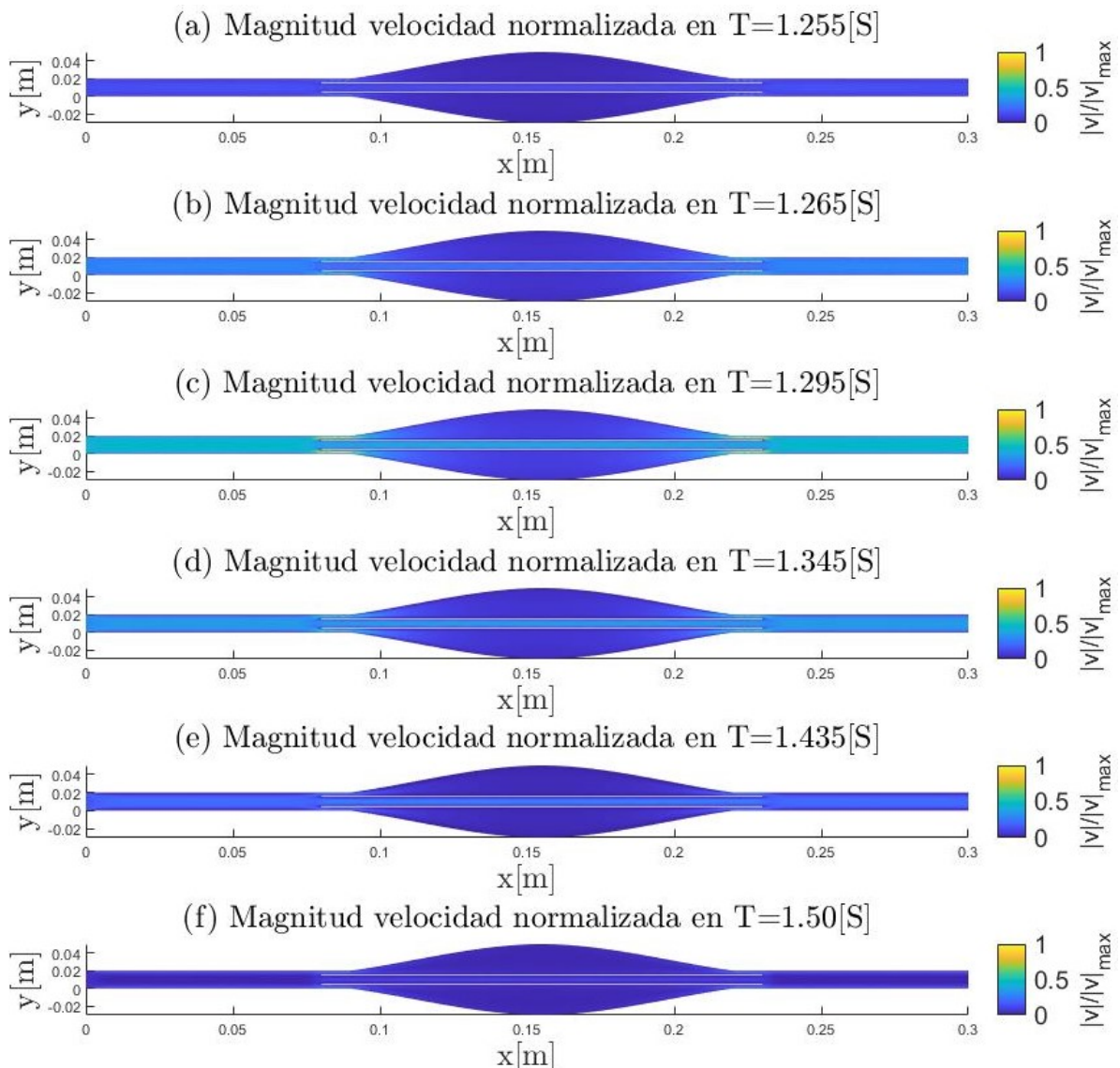
**Figura 7.32:** Ampliación saco aneurismal modelo 3 sin prótesis.  
fuente: Elaboración propia

En la figura anterior, se puede apreciar de mejor manera la simetría y el comportamiento en la

magnitud de la velocidad dentro del saco aneurismal. Además, como no presenta los vector se puede ver la coloración roja más intensa en la zona media ( $D/2$ ).

### 7.4.2. Con prótesis

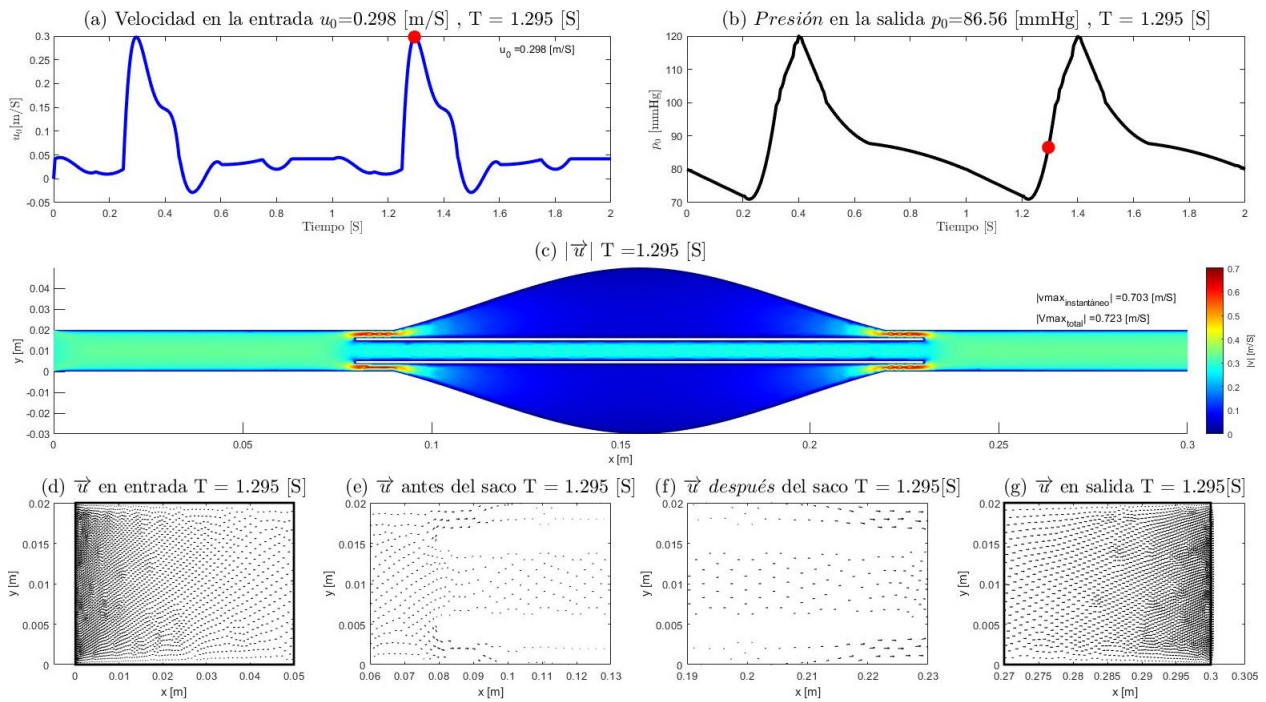
Para esta última simulación la magnitud de la velocidad máxima fue de  $0.723 \text{ [m/S]}$  y haciendo el mismo procedimiento se tiene la magnitud de la velocidad normalizada:



**Figura 7.33:** Magnitud velocidad normalizada para modelo 3 con prótesis en: (a)  $1.255 \text{ [S]}$ , (b)  $1.265 \text{ [S]}$ , (c)  $1.295 \text{ [S]}$ , (d)  $1.345 \text{ [S]}$ , (e)  $1.435 \text{ [S]}$  y (f)  $1.50 \text{ [S]}$ .

Fuente: Elaboración propia.

Observando la figura 7.33 (a)-(f), se tiene el mismo comportamiento de la simulaciones con prótesis presentas anteriormente. A continuación, se presenta el conjunto de figuras 7.34, para analizar la magnitud de la velocidad con su dirección:

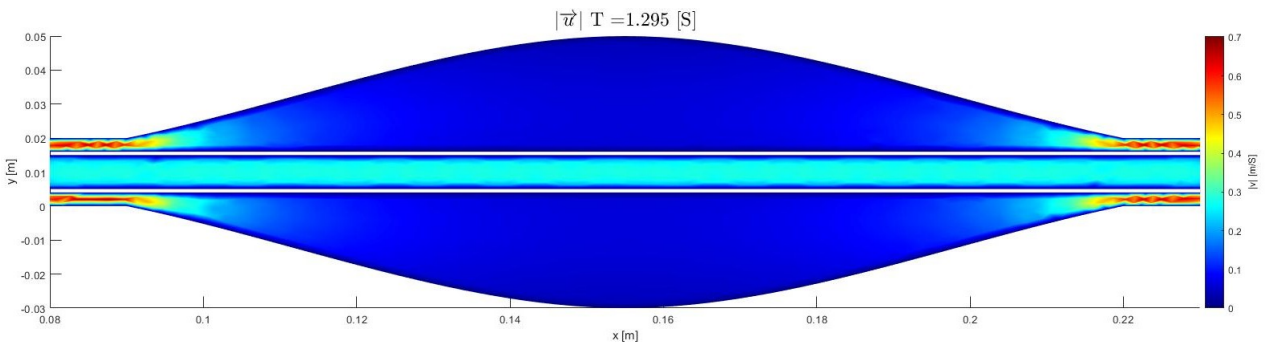


**Figura 7.34:** Modelo 3 con prótesis: (a) Pulso de velocidad, (b) Pulso de presión, (c) Magnitud velocidad [m/S], (d) Campo de velocidad en la entrada, (e) Campo de velocidad antes del saco, (f) Campo de velocidad después del saco y (g) Campo de velocidades en la salida.

De igual forma, el vector de velocidad se tuvo que escalar para no afectar la visibilidad.

En la figura 7.34 (c), se aprecia tonalidad roja más extendida que en las simulaciones con prótesis vistas anteriormente. Lo anterior se justifica porque la longitud de la prótesis es mucho más extensa que el saco aneurismal, por lo tanto, la región de mayor velocidad será mayor.

Para ver mejor lo dicho anteriormente, se presenta una ampliación del saco aneurismal:

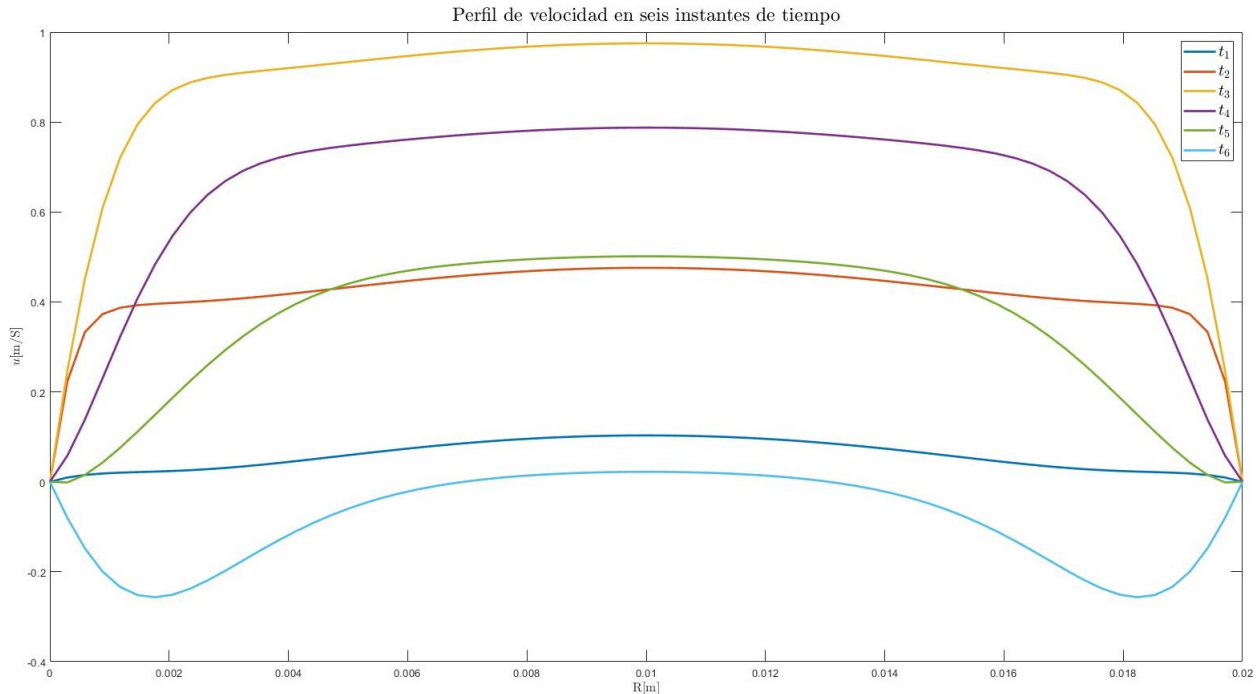


**Figura 7.35:** Ampliación del saco aneurismal modelo 3 con prótesis.  
fuente: Elaboración propia

Respecto a la figura 7.35, se puede apreciar de mejor forma la zona de alta velocidad (espacio más pequeño entre la arteria y la prótesis). Además, es posible observar la simetría en la magnitud de la velocidad.

### 7.4.3. Perfil de velocidad en la salida

Como la comparación entre los modelos con y sin prótesis, es muy similar en los modelos 1 y 2, para el modelo 3 se realizará un estudio del perfil de velocidades aguas abajo de la prótesis. Cabe mencionar que el perfil de velocidad en la salida, no se ve afectado por la presencia de la prótesis.

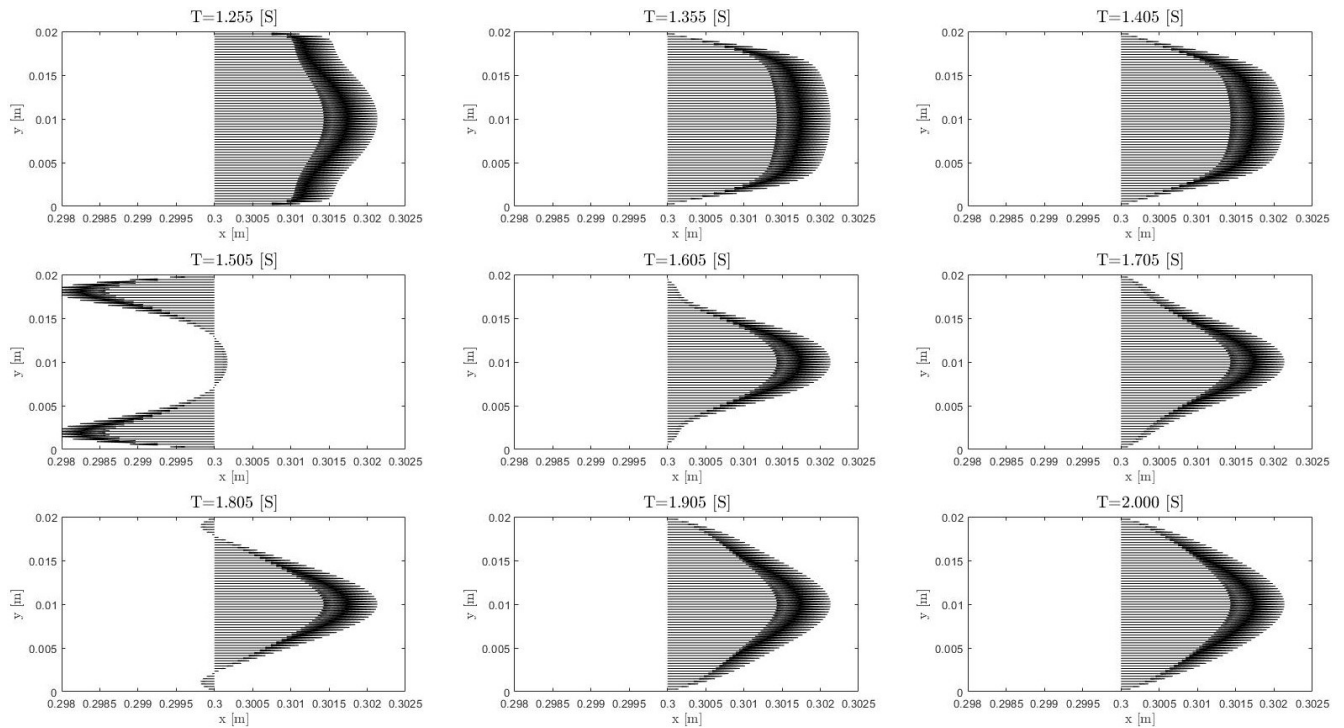


**Figura 7.36:** Perfil de velocidad en la salida para los seis instantes de tiempo.  
Fuente: Elaboración propia

En la figura 7.36, el perfil de  $t_1$  corresponde al menor, ya que, en este instante la velocidad recién comienza a aumentar (ver figura 7.1). Posteriormente, en  $t_2$  se observa el aumento en la velocidad y en  $t_3$ , se tiene el perfil más grande siendo consistente con la velocidad en la entrada máxima. Además, en  $t_2$  y  $t_3$  se observa que el perfil no se alcanza a desarrollar.

Para  $t_4$  y  $t_5$  se aprecia la dismunición, pero en  $t_6$  se tiene un perfil de velocidad completamente negativo y además, la velocidad máxima se genera cerca de los borde de la arteria. Este perfil no es común encontrarlo en la teoría de mecánica de fluidos, pero en estudios de flujo en arterias si es posible que se produzca.

La siguiente figura muestra el perfil de velocidad para nueve instantes de tiempo, entre  $T = 1.55[S]$  y  $T = 2.00[S]$ .



**Figura 7.37:** Campo de velocidades en  $x=0.3$  [m], para los tiempos: 1.255[S], 1.355[S], 1.405 [S], 1.505 [S], 1.605 [S], 1.705 [S], 1.805 [S], 1.905 [S] y 2.0[S].

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la figura 7.37, el perfil de velocidad en la salida varía en cada instante. Entre 1.255 [S] y 1.405 [S], se tiene que la velocidad va aumentando y en 1.505 [S], el perfil toma una forma donde la velocidad es mayor cerca de los bordes (esto se puede ver en la figura 7.36). Además, este comportamiento es consistente con la velocidad en la entrada, ya que, en este instante es negativa.

Entre 1.605 [S] y 1.705 [S], se aprecia que el flujo tiene a desarrollarse con una parábola más pronunciada. Posteriormente, en 1.805[S], se tiene un perfil con velocidades negativas cerca de los bordes pero no mayores que en 1.505[S], esto ocurre porque la velocidad en la entrada disminuye pero sigue siendo positiva (ver figura 7.1 (a))

Entre 1.905 [S] y 2.000[S] el perfil de velocidad no presenta diferencias porque la velocidad en la entrada, para ambos instantes no varía.

# Capítulo 8

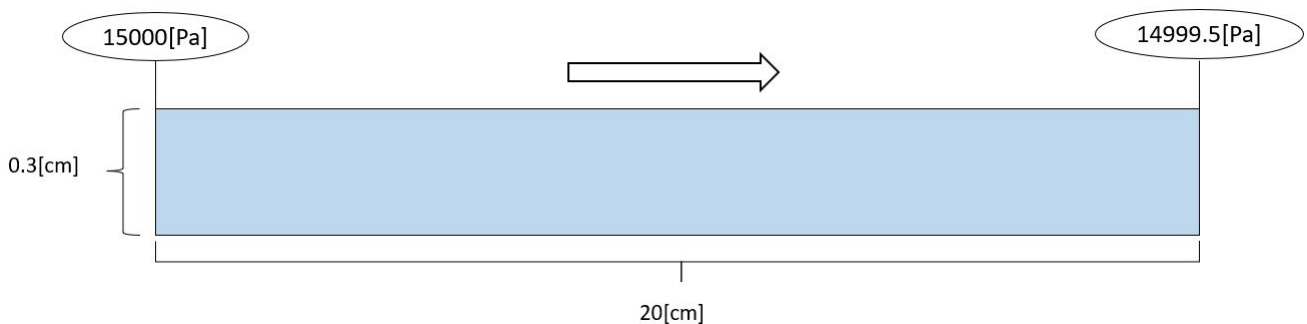
## Validación y comentarios

En este capítulo, se hará una validación del algoritmo usando un problema clásico de la mecánica de fluidos y otros estudios de aneurismas aórticos abdominales. Finalmente, se presentará una sección comparando la teoría y los tiempos de simulación de otros estudios.

### 8.1. Validación con otros problemas y estudios

#### 8.1.1. Flujo debido a gradiente de presión

Este corresponde al problema más básico de la mecánica de fluidos, donde el flujo a través de un tubo, se provoca por el gradiente de presión existente. En la siguiente figura se muestra este problema :



**Figura 8.1:** Flujo debido a gradiente de presión.

Fuente: Elaboración propia

El modelo presentado en la figura 8.1, muestra la dirección de flujo y los parámetros usados, por ejemplo: presión entrada y salida, diámetro y longitud. Además, se usó una densidad de  $1000 [m/S^3]$  y una viscosidad de  $0.001 [Pa \cdot S]$ .

Este problema se puede resolver simplificando la ecuación de Navier-Stokes y llegando a una ecuación diferencial de segundo orden. A continuación se muestra esta ecuación:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (8.1)$$

Resolviendo la ecuación 8.1, aplicando las condiciones de borde (velocidad nula en los bordes) y aplicando los datos presentados anteriormente, se obtiene la ecuación del perfil de velocidad para el flujo debido a gradiente de presión:

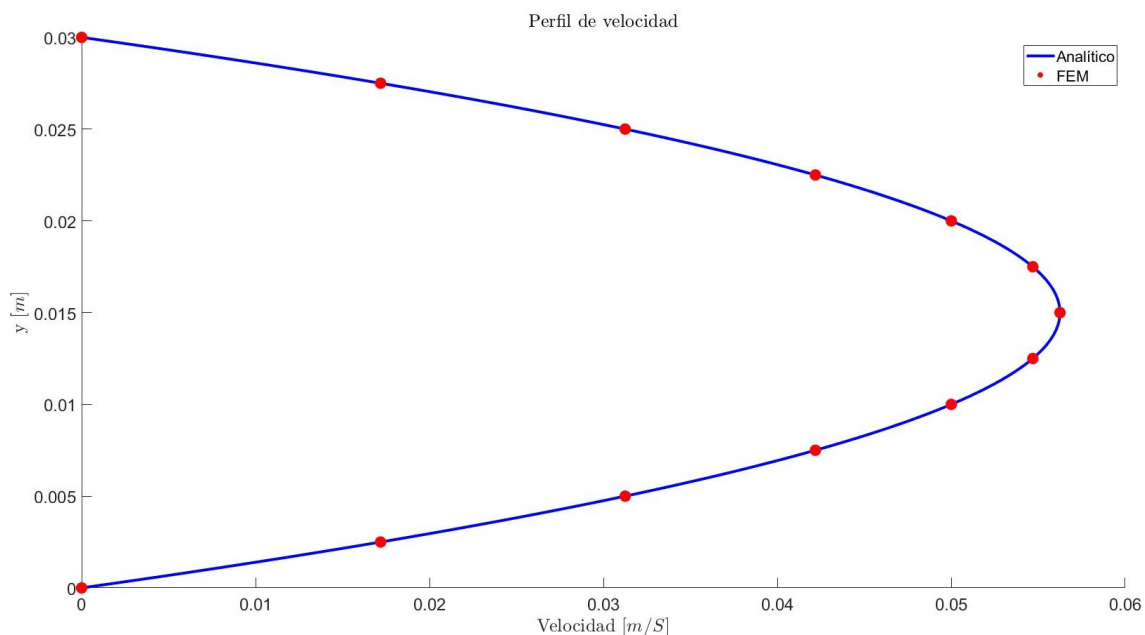
$$u(y) = -50y^2 + 1.5y \quad (8.2)$$

Donde  $y$  corresponde a la profundidad. A continuación, se presenta una tabla con los resultados usando la ecuación 8.2, y el algoritmo del método de elementos finitos.

**Tabla 8.1:** Velocidad flujo debido a gradiente de presión y resultado con el método de elementos finitos

$y$	$u(\text{analítico})$	$u(\text{FEM})$	Error %
0.0025	0.0172	0.0172	0.00650
0.005	0.0313	0.0313	0.00704
0.0075	0.0422	0.0422	0.00720
0.01	0.0500	0.0500	0.00754
0.0125	0.0547	0.0547	0.00755
0.015	0.0563	0.0563	0.00771
0.0175	0.0547	0.0547	0.00758
0.02	0.0500	0.0500	0.00758
0.0225	0.0422	0.0422	0.00731
0.025	0.0313	0.0313	0.00717
0.0275	0.0172	0.0172	0.00681

De la tabla 8.1, se observa el resultado obtenido con el método de elementos finitos ( $u(\text{FEM})$ ) no presenta diferencias visibles al compararlo con el resultado de la ecuación 8.2 y esto se puede corroborar al ver la columna con el error porcentual, donde se tiene error de orden  $10^{-3}$ , el cual es muy pequeño considerando el orden de magnitud de la velocidad ( $10^{-2}$  [m/S]). A continuación, se presenta la siguiente figura con el perfil de velocidad analítico y el perfil obtenido con el método de elementos finitos.



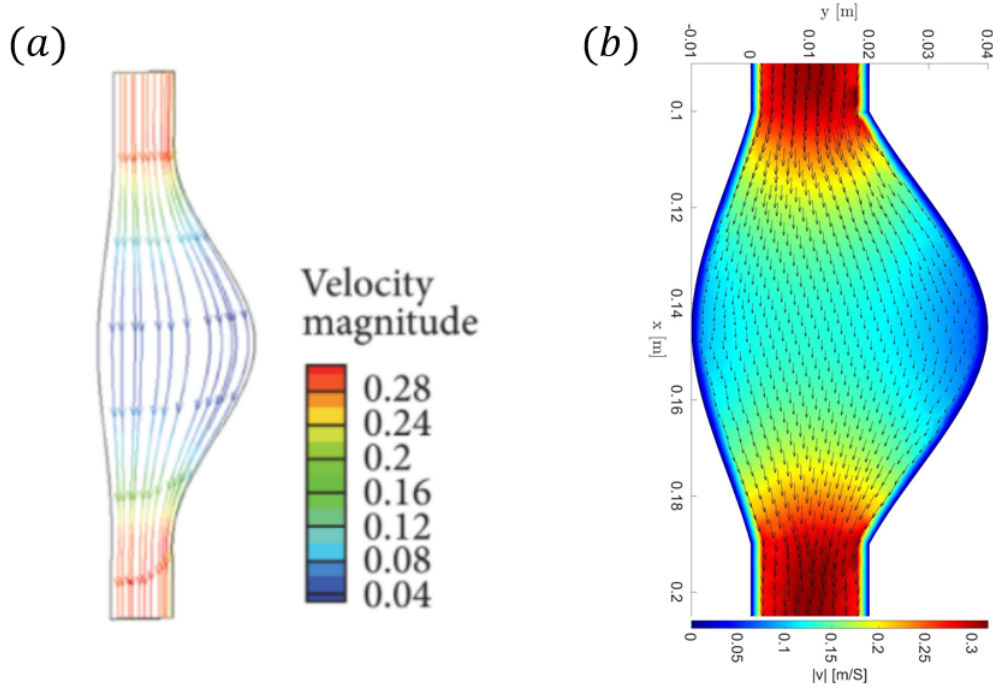
**Figura 8.2:** Perfil de velocidad con fórmula analítica y con el método de elementos finitos.  
Fuente: Elaboración propia

como se puede observar en la figura 8.2, la diferencia entre ambos es muy pequeña.

### 8.1.2. Comparación con otros modelos de AAA

Para validar los resultados, se realizó una comparación con los resultados de otros estudios, observando: Magnitudes, comportamiento, perfiles, entre otros.

Dentro de los resultados de otros estudios, se encuentra el presentado por (Lin, S., et al., 2017). A continuación, se presenta una figura con las velocidades en un aneurisma aórtico abdominal, del estudio mencionado anteriormente y del modelo 1 sin prótesis:



**Figura 8.3:** Velocidades en aneurisma aórtico abdominal en  $T=1.295$  [S]: (a) Modelo presentado por (Lin, S., et al., 2017) y (b) Modelo 1 sin prótesis (figura 7.6).

Fuente: Elaboración propia

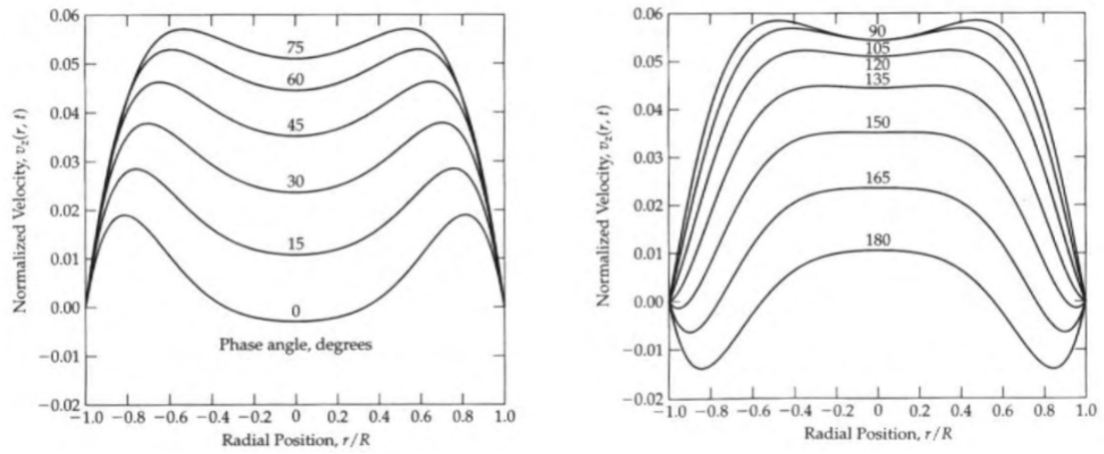
En este estudio, se realizó una interacción fluido estructura incorporando propiedades elásticas de la pared aórtica, utilizando los mismos pulsos de velocidad presetados por (Scotti, C., et al., 2008), pero sin incorporar la prótesis endovascular. La magnitud de la velocidad observada en la figura 8.3 (a) y (b), son consistentes entre sí.

Por otro lado, (Truskey, G., et al., 2004) introdujo una expresión para estimar el perfil de velocidad considerando un comportamiento oscilatorio de presiones (como el obtenido en las figuras 7.9 y 7.15). La ecuación es la siguiente:

$$u = \frac{A^*}{i\omega\rho} \left( 1 - \frac{J_o(i^{3/2}\alpha r/R)}{J_o(i^{3/2}\alpha)} \right) e^{i\omega t} \quad (8.3)$$

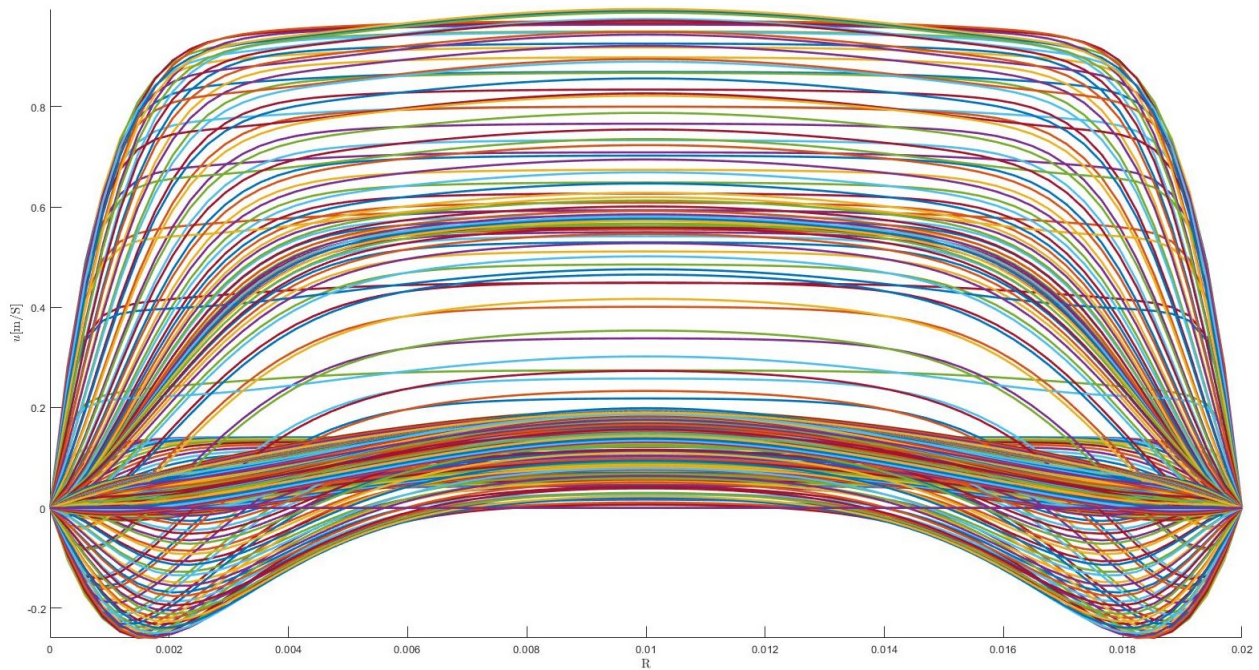
De la ecuación 8.3,  $A^*$  corresponde a una constante relacionada con la presión,  $i$  es  $\sqrt{-1}$ ,  $\rho$  densidad,  $j_o$  corresponde al número de Bessel,  $\alpha$  es un parámetro característico de la arteria (3.37 para aorta abdominal),  $r/R$  es la razón del radio para hacer el perfil entre  $[-1,1]$  y finalmente,  $\omega$  corresponde a la frecuencia angular. Claramente, esta expresión es compleja, pero el resultado de velocidad corresponde a la parte real.

Al probar distintos ángulos se obtienen perfiles de velocidad como los siguientes:



**Figura 8.4:** Perfil de velocidad para distintos ángulos  
Fuente: Transport phenomena in biological systems.

La figura 8.4, muestra varios perfiles (normalizados por la velocidad máxima) modificando el ángulo y al comparar esta figura con perfiles obtenidos en 7.36 y 7.37, las similitudes son evidentes. Finalmente, se presenta el perfil de velocidad en la salida para toda la simulación:



**Figura 8.5:** Perfil de velocidad para toda la simulación.  
Fuente: Elaboración propia.

En esta figura se puede apreciar que el perfil de velocidad está acotado entre un máximo y un mínimo.

## 8.2. Comentarios de otros estudios

Como se mencionó en el estado del arte 1.1, el estudio de (Jiajan, W., 2010) presenta la idea de precalcular las matrices para ahorrar tiempo, pero han sido calculadas de forma errónea. A

continuación, se presenta la matriz de masa calculada en este artículo:

$$m = \rho \int_{\Omega'} \psi_i \psi_j dA = \frac{2\rho A}{360} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 12 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 1 & 3 & 3 \\ 48 & 48 & 16 & 32 & 16 & 16 \\ 16 & 48 & 48 & 16 & 32 & 16 \\ 48 & 16 & 48 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

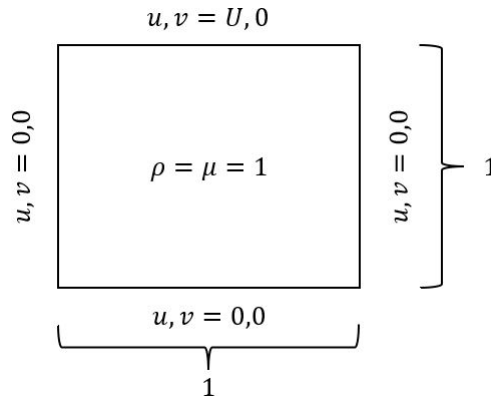
Donde  $A$  es el área del elemento y  $\rho$  la densidad. Al observar esta ecuación 8.4, se tiene una inconsistencia geométrica, ya que, esta matriz debería ser simétrica. Esta matriz fue calculada en el capítulo de elementos finitos y se presenta nuevamente para poder observar las diferencias con 8.4

$$m = \rho \det(J) \begin{bmatrix} 0.033 & -0.006 & -0.006 & 0.000 & -0.022 & 0.000 \\ -0.006 & 0.033 & -0.006 & 0.000 & 0.000 & -0.022 \\ -0.006 & -0.006 & 0.033 & -0.022 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.022 & 0.178 & 0.089 & 0.089 \\ -0.022 & 0.000 & 0.000 & 0.089 & 0.178 & 0.089 \\ 0.000 & -0.022 & 0.000 & 0.089 & 0.089 & 0.178 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

El determinante del jacobiano  $\det(J)$  corresponde a  $A/2$  (Chung, T., 2002).

Respecto a los tiempos de simulación presentados por (Scotti, C., et al 2008) en promedio se necesitaron 40 [hr], mientras que el tiempo de simulación máximo de este trabajo fue de 410.42 [min]. De todas formas, es completamente entendible que el tiempo de simulación sea mayor porque el modelo era mucho más complejo, de todas formas si el objetivo es analizar velocidades y presiones, este trabajo es una buena opción para obtener resultados de forma rápida y consistente.

Por otro lado, el algoritmo puede ser implementado en otros problemas de la mecánica de fluidos, como el flujo a través de una cavidad (lid-driven cavity flow), el cual consiste en un recipiente unitario con una velocidad en la parte superior, la siguiente figura muestra el modelo:



**Figura 8.6:** Flujo debido al deslizamiento de una tapa.

Fuente: Elaboración propia

Donde las variables  $\rho$ ,  $\mu$  y las dimensiones son 1, excepto la velocidad de la tapa  $U$  que puede cambiar dependiente del número de Reynolds  $R_e$  que necesite el autor.

Este problema ha sido resuelto desde hace mucho tiempo, pero el método presentado por (Getnet, E., et al., 2018) muestra el desarrollo de un algoritmo con el método de elementos finitos, usando elementos rectangulares con una cantidad de nodos promedio de 440 y mostrando los tiempos de simulación en la siguiente tabla:

**Tabla 8.2:** Simulaciones de flujo debido a deslizamiento tapa (Getnet, E., et al., 2018)

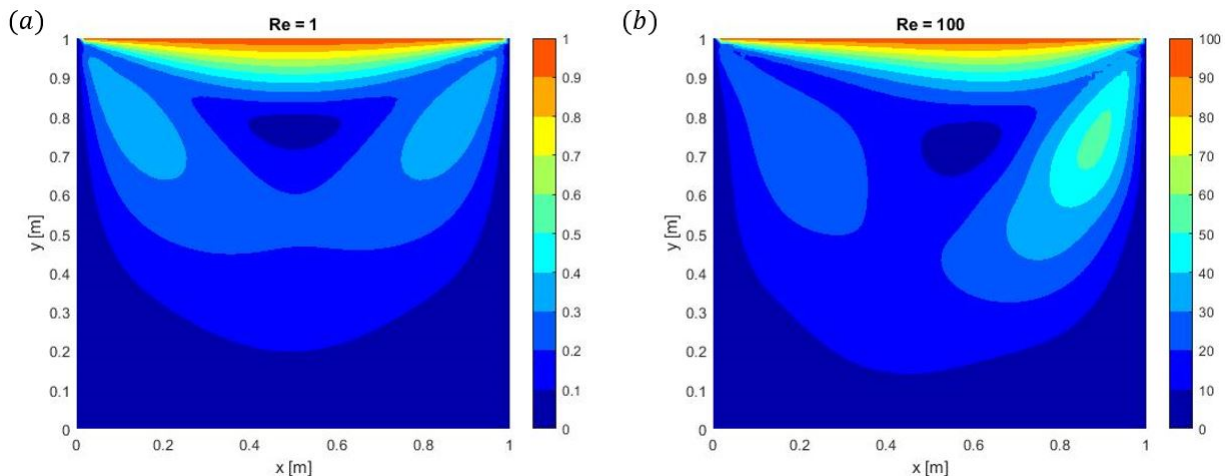
Re	1	10	50	100	200	500	1000
Número iteraciones	21	22	26	29	35	47	147
Tiempo de iteración [S]	4.04	4.14	4.72	5.26	6.21	7.62	21.06

Observando la tabla 8.2, se aprecia claramente el reducido tiempo de iteración, cabe mencionar que esta simulación fue realizada en régimen permanente, por lo tanto, no tiene derivadas temporales.

Este mismo problema fue resuelto con el algoritmo presentado en este trabajo, con un modelo de 882 nodos y partiendo del reposo, el flujo tarda en estabilizarse en promedio 6[S] y con tiempos de simulación medios de 10[*min*].

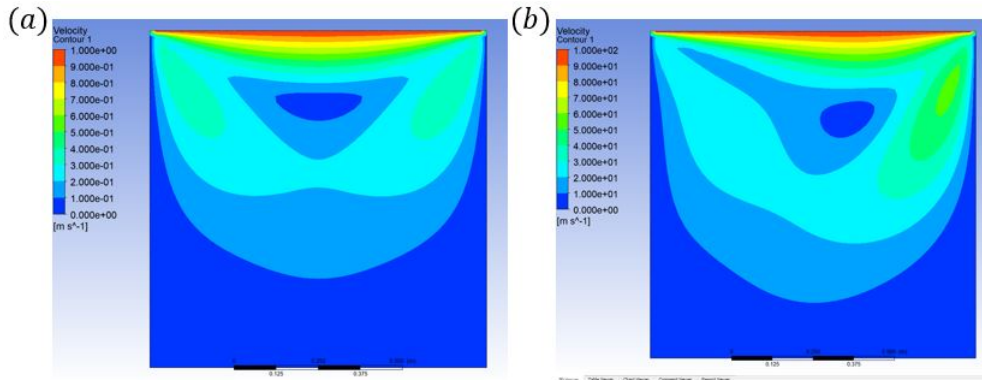
El algoritmo presentado por (Getnet, E., et al., 2018) es válido para hacer cálculos en régimen permanente, pero no serviría para hacer simulaciones en el tiempo. Por otro lado, el algoritmo presentado en este trabajo demuestra que puede adaptarse a otros problemas de la mecánica de fluidos.

A continuación, se presentan figuras para dos valores de velocidad (como todos los datos tiene valor unitario, el número de Reynolds es la velocidad)



**Figura 8.7:** Módulo de velocidad normalizada para: (a)  $R_e=1$  y (b)  $R_e=100$   
Fuente: Elaboración propia

Como se puede ver en la figura 8.7, el valor de la velocidad afecta de manera considerable, por ejemplo en la figura 8.7 (a), se tiene un comportamiento más simétrico, lo cual es consistente con los demás valores (densidad, dimensiones, viscosidad, etc.). Para terminar, se presentan las figuras simuladas con el programa ANSYS, con  $R_e=1$  y  $R_e=100$ :



**Figura 8.8:** Módulo de velocidad para: (a)  $Re=1$  y (b)  $Re=100$

Al comparar las figuras 8.7 con 8.8, se tiene mucha semejanza en el comportamiento de la velocidad. De todas formas, se seleccionan tres puntos para comparar la magnitud de la velocidad.

**Tabla 8.3:** Magnitud de velocidad con código propio y Ansys, para número de Reynolds 1 y 100.

Nodos			Re=1		Re=100	
Punto	x	y	$ u _{propio}$	$ u _{ansys}$	$ u _{propio}$	$ u _{ansys}$
1	0.33	0.63	0.2641	0.2638	32.462	32.431
2	0.45	0.88	0.3437	0.3441	31.623	31.619
3	0.875	0.8	0.4563	0.4574	42.812	42.821

Haciendo unos cálculos para  $Re=1$ , se tienen diferencias del orden de  $10^{-4}$ , mientras que para  $Re=100$  orden  $10^{-2}$ , en este la diferencia es mayor por la velocidad. Para finalizar, el tiempo de simulación al utilizar Ansys es mucho menor que el utilizado por el código propio, siendo esto una desventaja de no usar un programa comercial.

# Capítulo 9

## Conclusiones

Antes de comenzar con las conclusiones, es necesario recalcar nuevamente que los resultados obtenidos están limitados por dos supuestos muy importantes, que son: régimen laminar y fluido newtoniano. Por lo tanto, se espera que este trabajo sirva como base para futuros estudios, donde se incorporen estos supuestos para hacer simulaciones más cercanas a la realidad.

Como primera conclusión, el objetivo general de este trabajo se construir un modelo con el método de elementos finitos se cumplió para hacer simulaciones se cumplió, según lo presentado en el capítulo 8, donde se observó que el método funciona bien para los problemas del flujo debido a gradiente de presión y en términos, de comportamiento y magnitud, para una simulación de un aneurisma presentado por (Lin, S., et al., 2017).

Por otro lado, los objetivos específicos era estudiar la velocidad y la presión para modelos sin prótesis, esto fue logrado por lo expuesto en el capítulo 7. Además, validar los resultados con otros modelo, como se mencionó en el párrafo anterior, los resultados para esos dos problemas cualitativamente y cuantitativamente, están bien. Pero el perfil de velocidad en la salida, donde se obtiene velocidades más grandes en los bordes, sólo se comparó con cualitativamente con los presentado por (Truskey, G., et al., 2004), donde son problemas con distintas condiciones pero muestran un comportamiento similar. Finalmente, se deja esta observación para futuras investigaciones.

El método de elementos finitos es una herramienta muy útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, como se puede ver en el desarrollo de este trabajo, donde las ecuaciones: 3.14, 3.26 y 3.27, se pueden transformar en el sistema no lineal 4.28 y finalmente, al usar el método de punto fijo, el sistema pasa a ser lineal.

Al utilizar elementos triangulares con lados rectos, es posible desarrollar más el método y así, calcular matrices para usarlas dentro del algoritmo, obteniendo tiempos de simulación  $T_s$  reducidos como se puede observar en las tablas: 7.2, 7.7 y 7.8. Donde esta última presenta la simulación más extensa por tener más nodos.

Como se mencionó en el sección 7.1, la geometría que tiene la arteria no afecta de forma significativa en los resultados. Por ejemplo, la magnitud de la velocidad mínima en los modelos sin prótesis es de 0.315 [m/s] y la máxima es de 0.336 [m/s], haciendo un cálculo porcentual muy básico, solo existe una diferencia de 6.25 %. Por otro lado, en el caso de las simulaciones con prótesis el valor mínimo es de 0.594 [m/s] y el máximo es de 0.723 [m/s], haciendo el mismo cálculo, la diferencia porcentual entre ambos es de 17.84 %. Claramente, al incorporar la prótesis se tiene diferencias más significativas, por lo tanto, la geometría afecta poco.

Continuando con la geometría, ningún modelo sin prótesis presenta una gran diferencia en la magnitud de la velocidad (0.324 [m/s], 0.315 [m/s] y 0.335 [m/s], para cada modelo), lo que implica que la geometría del aneurisma no provoca grandes cambios. Por otro lado, en los modelos con prótesis se tienen diferencias considerables (0.594 [m/s], 0.689 [m/s] y 0.723[m/s]), esto es provocado por la longitud de la prótesis, es decir, que tan extensa es respecto a la longitud del saco aneurismal.

En los modelos sin prótesis, las velocidades más altas se producen antes y después del aneurisma, ya que, el área es menor, esto se puede apreciar en las figuras: 7.5, 7.11 y 7.31. Al incorporar la prótesis, las velocidades mayores se producen al inicio y al final de la prótesis, en el estrecho espacio que queda entre la prótesis y la pared de la aorta, como muestran las figuras: 7.11, 7.24 y 7.34.

Respecto a los puntos de estudio presentados en la sección 7.1, para los modelos con y sin prótesis, se tiene que la velocidad en la salida (en  $P_5$ ) no es igual a la velocidad en la entrada (p. ej.: figura 7.26), lo cual es consistente porque al tener condiciones de borde variables en el tiempo, el caudal cambia constantemente. Además, la velocidad en la zona media ( $u_3$ ) es menor en los modelos sin prótesis y mayor en los modelos con prótesis.

Para los modelos con prótesis la velocidad  $u_3$ , es mucho mayor que en la zona del saco ( $u_6$  y  $u_7$ ). Lo anterior, se puede ver en la figura 7.26 y para el caso sin prótesis, existe una diferencia menos considerable en  $u_3$ ,  $u_6$  y  $u_7$ .

El estudio del perfil de velocidad en la salida, muestra perfiles de velocidad, donde la forma parabólica clásica no se siempre se produce. Por ejemplo, cuando existe el cambio de sentido, se tiene un perfil donde la velocidad más elevada se produce cerca de los bordes y menor en la zona media. En la figura 7.36, se observa que la velocidad en la entrada puede ocasionar que el flujo no se alcance a desarrollar aguas abajo.

Complementando lo anterior, en la figura 7.37 se tiene el perfil de velocidad en la salida para nueve instantes de tiempo, donde se puede observar como cambia la forma, por ejemplo, cuando la velocidad en la entrada llega al máximo, el perfil no se alcanza a desarrollar. Por otro lado, cuando cambia el sentido, se tiene un perfil con velocidad más elevada cerca de los bordes y menor en la zona media.

Al comparar los resultados obtenidos con otros estudios, se tiene consistencia como se puede observar al comparar la figura 8.3 con 7.6, donde se tiene el mismo orden de magnitud. Además, los perfiles de velocidad presentados por (Truskey, G., et al., 2004), tiene el mismo comportamiento con los presentados en las figuras: 7.36 y 8.5.

Finalmente, fue posible demostrar mediante una simulación con el método de elementos finitos que instalar una prótesis endovascular logra reducir la velocidad dentro del saco aneurismal pero es importante considerar que debido a esta se generan zonas de alta velocidad. Por otro lado, la presión presenta inestabilidades pero muy reducidas utilizando el método de compresibilidad artificial 6.2 y la prótesis endovascular no genera mucha diferencia entre las figuras: 7.9 y 7.15.

Cambiando de tema, utilizar un código propio para hacer simulaciones conlleva mucho trabajo considerando que un programa comercial es más fácil de usar, aun que no sea gratis la licencia.

Las ventajas de usar un programa propio, son una libertad de presentar los resultados como uno desee (pudiendo usar varios tipo de gráfico, hacer videos, etc), también es posible hacer varias simulaciones y almacenar los resultados para hacer comparaciones más rápido. Por otro lado, hacer un código propio tiene una gran extensión en líneas lo que dificulta su revisión para buscar posibles errores, además, en términos del tiempo de simulación  $T_s$ , siempre un programa comercial tendrá un tiempo menor, sobre todo si está en C++.

## 9.1. Posibles líneas de investigación

En el ámbito de la simulación, siempre será posible incorporar nuevas cosas para hacer modelos más cercanos a la realidad. Por ejemplo, se pueden hacer un trabajo similar al presentado, pero considerando que el caudal sanguíneo se va distribuyendo antes de llegar a la zona del aneurismal, pero esto significaría que los resultados presentado en este trabajo estarían ligeramente sobredimensionados respecto a la realidad. De todas formas, para el estudio del desempeño de la prótesis, siempre será más conservador hacer estudios en situaciones que excedan la realidad.

Por otro lado, es posible hacer simulaciones considerando la sangre como un fluido no newtoniano, es decir, la viscosidad no es constante y pasa a ser una función de la deformación cortante. Para esto, se puede utilizar los modelos no newtonianos de: Casson, Power-law, entre otros. Donde cada uno tiene una formulación potencial y están limitados, porque en zonas donde la velocidad sea nula (p. ej: un borde), se indefine la viscosidad. Para finalizar este nuevo enfoque, sería muy interesante presentar un perfil de viscosidad en la arteria, donde la mayor viscosidad estará en los contornos.

Volviendo al método de elementos finitos, este trabajo tiene un desarrollo más acabado del álgebra, presentando matrices elementales para primer y segundo orden. Lo anterior, es extrapolable para orden superior en caso de ser necesario. El proceso algebraico puede ser aplicado en otros problemas de la mecánica de fluidos, como por ejemplo: flujo a través de una cavidad, flujo en el tallo de una planta, etc. El primer problema fue resuelto con el algoritmo presentado, obteniendo resultados consistentes con la literatura.

Siguiendo con el método de elementos finitos, este trabajo no necesitó emplear otros métodos de estabilización, por ejemplo el método de PSPG, GLS, entre otros., donde las funciones de forma se modifican, considerando parámetros del flujo para evitar problemas de inestabilidad. Finalmente, en ese caso se tendría nuevas matrices elementales.

Hacer todo el desarrollo con el método de elementos finitos pero considerando régimen turbulento porque en la zona del saco, podría cambiar a régimen de transición y no sería extraño que el número de Reynolds esté cerca de los 4000. Además, se podría utilizar el método de volúmenes finitos.

Para finalizar, sería una potencial línea de estudio hacer un análisis fluido/estructura. Donde se incorporarían propiedades elásticas de la arteria y hacer una simulación, más extendida para intentar cuantificar el desgaste que sufre la arteria en el tiempo. Este estudio puede llegar a ser muy desafiante, no sólo por la matemática empleada sino por el gran consumo de datos que requeriría. Sería muy útil seguir el desarrollo algebraico de esta tesis para intentar reducir los tiempos de simulación, lo más posible.

# Referencias

- Abreu, J., Cabrera, E., Iglesias, P and Izquierdo, J. (1995). EL GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS DE IMPULSIÓN. COMENTARIOS A LAS EXPRESIONES DE MENDI-LUCE. DOI:10.4995/ia.1995.2676
- Bautista, S., Gúzman, O., Sandoval, F. (2012). Aneurisma aórtico abdominal. Revista médica MD. Volumen (3)4: 204-210pp
- Scotti, C.M., Jimenez. J., Muluk. S.C and Finol. E.A. (2008). Wall stress and Flow dynamics in abdominal aortic aneurysms: finite element analisis vs. fluid-structure interaction. DOI: 10.1080/10255840701827412
- Canciello, G., Mancusi, C., Izzo, R., Morisco, C., Strisciuglio, T., Barbato, E., Trimarco, B., De Luca, N., De Simone, G and Losi, M. (2020). Determinants of aortic root dilatation over time in patients with essential hypertension: The Campania Salute Network. European Journal of Preventive Cardiology, Volume 28, Issue 13, November 2021, Pages 1508–1514, <https://doi.org/10.1177/2047487320931630>
- Casula, E., Lonjedo, E., Cerverón, M., Ruiz, A and Gómez, J. (2012). Revisión de aneurisma de aorta abdominal: hallazgos en la tomografía computarizada multidetector pre y postratamiento. Radiología. 2014;56(1):16-26.
- D. Donne I., R. Rossi, D. Giustarini, A. Milzani, R. Colombo. (2003) Protein Carbonyl Groups as Biomarkers of Oxidative Stress, Clinical Chemical Acta (2003), 23-38.
- García, M., Díaz, F., Solana, M and García, A. (2010). Diagnóstico de aneurisma de aorta abdominal mediante ecografía abdominal en atención primaria. DOI:10.1016/j.semerg.2010.02.010
- Chung, T. (2002). Computational fluid dynamics. first edition. ISBN 978-0-521-76969-3
- Fukushima, T., Matsuzawa, T and Homma. T. (1988). Visualization and Finite Element Analysis of Pulsatile Flow in Models of the Abdominal Aortic Aneurysm. Biorheology, 26; 109-130, 1989.
- Hamilton, W., Yoffey, J., Joseph, J., Glenister, T., Coupland, R., Le Gros, W., McMinn, R., Scotthorne, R., Sinclair, D. (1976). Textbook of human anatomy. ISBN 978-1-349-06486-1.
- Hall, A., Busse, E., MacCarville, J and Burgess, J. (2000). Aortic Wall Tension as a Predictive Factor for Abdominal Aortic Aneurysm Rupture: Improving the Selection of patients for abdominal Aortic Aneurysm Repair. DOI: 10.1007/s100169910027
- Shengmao, Lin., Xinwei, Han., Yonghua, Bi., Siyeong Ju., and Linxia Gu2. (2017). Fluid-Structure Interaction in Abdominal Aortic Aneurysm: Effect of Modeling Techniques.

Caracterización de un grupo de pacientes con aneurisma de la aorta abdominal. ISSN: 1990-7990 / RNPS: 2008

- Soulis, J., Lampri, O., Fytanidis, D and Giannoglou, G. (2011). Relative Residence Time and Oscillatory Shear Index of Non-Newtonian Flow Models in Aorta. DOI:10.1109/iwbe.2011.6079011
- Laza, J., Linares, L., Montano, A., Romero, L y Armenteros, A. (2019). Characterization of a group of patients with abdominal aortic aneurysm. ISSN: 1990-7990 / RNPS: 2008
- Moreno, L. (2010) Experimentos reológicos y modelado estructural de un fluido biológico (sangre humana), México, Facultad de Química- UNAM.
- Palmaz, J., Tio, F., Laborde, J., Clem, M., Rivera, F., Murphy, K and Encarnación, C. (1995). Use of Stents Covered with Polytetra- fluoroethylene in Experimental Abdominal Aortic Aneurysm1. JVIR 1995; 6:879-885.
- Pierce, G. (1998). Prothesis for endovascular repair of abdominal aortic aneurysms. Patent number: 6,152,956
- Truskey, G., Yuan, F. and Katz, D. (2004). Transport phenomena in biological systems. ISBN 0-13-042204-5.
- Reddy, J. (2015). An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Second Edition. ISBN 978-0-19-964175-8.
- Vilalta, G., Nieto, F., Pérez, M and Vaquero, C. (2011). Enfoque biomecánico para la predicción de ruptura de aneurismas de aorta abdominal. Cirugía de la Aorta Abdominal y sus Ramas (pp.117-131) Publisher: Médicos S.A.Editors: Carlos Vaquero.
- Vitello, D., Ripper, R., Fettiplace, M., Weinberg, G and Vitello, J. (2015). Blood Density Is Nearly Equal to Water Density: A Validation Study of the Gravimetric Method of Measuring Intraoperative Blood Loss. doi: 10.1155/2015/152730
- Yilmaz, F and Gundogdu, M. (2008). A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions. Korea-Australia Rheology Journal. Vol. 20, No. 4, December 2008 pp. 197-211
- Zienkiewicz, O., Taylor, R. and Nithiarasu, P. (2005). The Finite Element Method for Fluid Dynamics. Sixth edition. ISBN 0-7506-6322-7.

# Anexos

# Anexos A

## Código modelo base Sublime text

```
L1=9;//Longitud antes del Saco aneurismal
r1=3;//radio máximo inferior
r2=3;//radio máximo superior
a=2;//Espesor de la Aorta
L=13;//Longitud del Saco Aneurismal
ra=0.5;//Radio de la protesis
```

```
b=a/2;//Mitad aorta
s=L1+(L*0.5);//No tocar
s1=L1+L;//No tocar
e=0.1;// Espesor de la protesis
```

```
L3=8;//donde comienza la protesis
L4=15;//Longitud protesis
L5=L3+L4;
```

```
//+ puntos
p1=newp;Point(p1)={0,0,0,0.1};
p2=newp;Point(p2)={L1,0,0,0.7};
p3=newp;Point(p3)={s,-r1,0,1};
p4=newp;Point(p4)={s1,0,0,0.8};
p5=newp;Point(p5)={30,0,0,0.1};

p6=newp;Point(p6)={30,a,0,0.1};
p7=newp;Point(p7)={s1,a,0,0.8};
p8=newp;Point(p8)={s,a+r2,0,1};
p9=newp;Point(p9)={L1,a,0,0.8};
p10=newp;Point(p10)={0,a,0,0.1};

p11=newp;Point(p11)={L3,ra+b,0,0.8};
p12=newp;Point(p12)={L5,ra+b,0,0.8};
p13=newp;Point(p13)={L5,ra+b+e,0,0.8};
p14=newp;Point(p14)={L3,ra+b+e,0,0.8};

p15=newp;Point(p15)={L3,b-ra-e,0,0.8};
p16=newp;Point(p16)={L5,b-ra-e,0,0.8};
```

```

p17=newp;Point(p17)={L5,-ra+b,0,0.8};
p18=newp;Point(p18)={L3,-ra+b,0,0.8};
//

//+ lineas
l1=newl; Line(l1)={p1,p2};
l2=newl; Spline(l2)={p2,p3,p4};
l3=newl; Line(l3)={p4,p5};
l4=newl; Line(l4)={p5,p6};

l5=newl; Line(l5)={p6,p7};
l6=newl; Spline(l6)={p7,p8,p9};
l7=newl; Line(l7)={p9,p10};
l8=newl; Line(l8)={p10,p1};

l9=newl; Line(l9)={p18,p15};
l10=newl;Line(l10)={p15,p16};
l11=newl;Line(l11)={p16,p17};
l12=newl;Line(l12)={p17,p18};

l13=newl;Line(l13)={p14,p11};
l14=newl;Line(l14)={p11,p12};
l15=newl;Line(l15)={p12,p13};
l16=newl;Line(l16)={p13,p14};

//+ LOOPS
c1=newl1;Curve Loop(c1)={l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8};
c2=newl1;Curve Loop(c2)={l9,l10,l11,l12};
c3=newl1;Curve Loop(c3)={l13,l14,l15,l16};

//+Plano de superficie
s1=news; Plane Surface(s1)={c1,c2,c3};

```

# Anexos B

## Código Matriz de masa

```
function [masaf]=mij(nodos,conectividad,rho)
n=size(conectividad,1);
nodoss=size(nodos,1);
masaf=sparse(zeros(nodoss,nodoss));
for i=1:n
    masa=sparse(zeros(nodoss,nodoss));
    P1= find(nodos(:,1)== conectividad(i,1));
    P2= find(nodos(:,1)== conectividad(i,2));
    P3= find(nodos(:,1)== conectividad(i,3));
    P4= find(nodos(:,1)== conectividad(i,4));
    P5= find(nodos(:,1)== conectividad(i,5));
    P6= find(nodos(:,1)== conectividad(i,6));
    %%%%%%%%%%%%%%% JACOBIANO
    xasd=[nodos(P1,2) nodos(P2,2) nodos(P3,2)];
    yasd=[nodos(P1,3) nodos(P2,3) nodos(P3,3)];

    j_qlo=[xasd(2)-xasd(1) yasd(2)-yasd(1);
           xasd(3)-xasd(1) yasd(3)-yasd(1)];

    j_det=det(j_qlo);

    w=j_det*[0.033 -0.006 -0.006 0.000 -0.022 0.000;
             -0.006 0.033 -0.006 0.000 0.000 -0.022;
             -0.006 -0.006 0.033 -0.022 0.000 0.000;
             0.000 0.000 -0.022 0.178 0.089 0.089;
             -0.022 0.000 0.000 0.089 0.178 0.089;
             0.000 -0.022 0.000 0.089 0.089 0.178];

    m1=w;
    %%%%fila 1
    masa(P1,P1)= m1(1,1);
    masa(P1,P2)= m1(1,2);
    masa(P1,P3)= m1(1,3);
    masa(P1,P4)= m1(1,4);
    masa(P1,P5)= m1(1,5);
    masa(P1,P6)= m1(1,6);
    %%%%fila2
    masa(P2,P1)= m1(2,1);
```

```

masa(P2,P2)= m1(2,2);
masa(P2,P3)= m1(2,3);
masa(P2,P4)= m1(2,4);
masa(P2,P5)= m1(2,5);
masa(P2,P6)= m1(2,6);
%%%%%fila3
masa(P3,P1)= m1(3,1);
masa(P3,P2)= m1(3,2);
masa(P3,P3)= m1(3,3);
masa(P3,P4)= m1(3,4);
masa(P3,P5)= m1(3,5);
masa(P3,P6)= m1(3,6);
%%%%%fila4
masa(P4,P1)= m1(4,1);
masa(P4,P2)= m1(4,2);
masa(P4,P3)= m1(4,3);
masa(P4,P4)= m1(4,4);
masa(P4,P5)= m1(4,5);
masa(P4,P6)= m1(4,6);
%%%%%fila5
masa(P5,P1)= m1(5,1);
masa(P5,P2)= m1(5,2);
masa(P5,P3)= m1(5,3);
masa(P5,P4)= m1(5,4);
masa(P5,P5)= m1(5,5);
masa(P5,P6)= m1(5,6);
%%%%%fila6
masa(P6,P1)= m1(6,1);
masa(P6,P2)= m1(6,2);
masa(P6,P3)= m1(6,3);
masa(P6,P4)= m1(6,4);
masa(P6,P5)= m1(6,5);
masa(P6,P6)= m1(6,6);

masaf=masaf+masa;
end
masaf=masaf*rho;
end

```

# Anexos C

## Modelo 2

### C.1. Tablas de magnitud velocidad para instantes desfasados

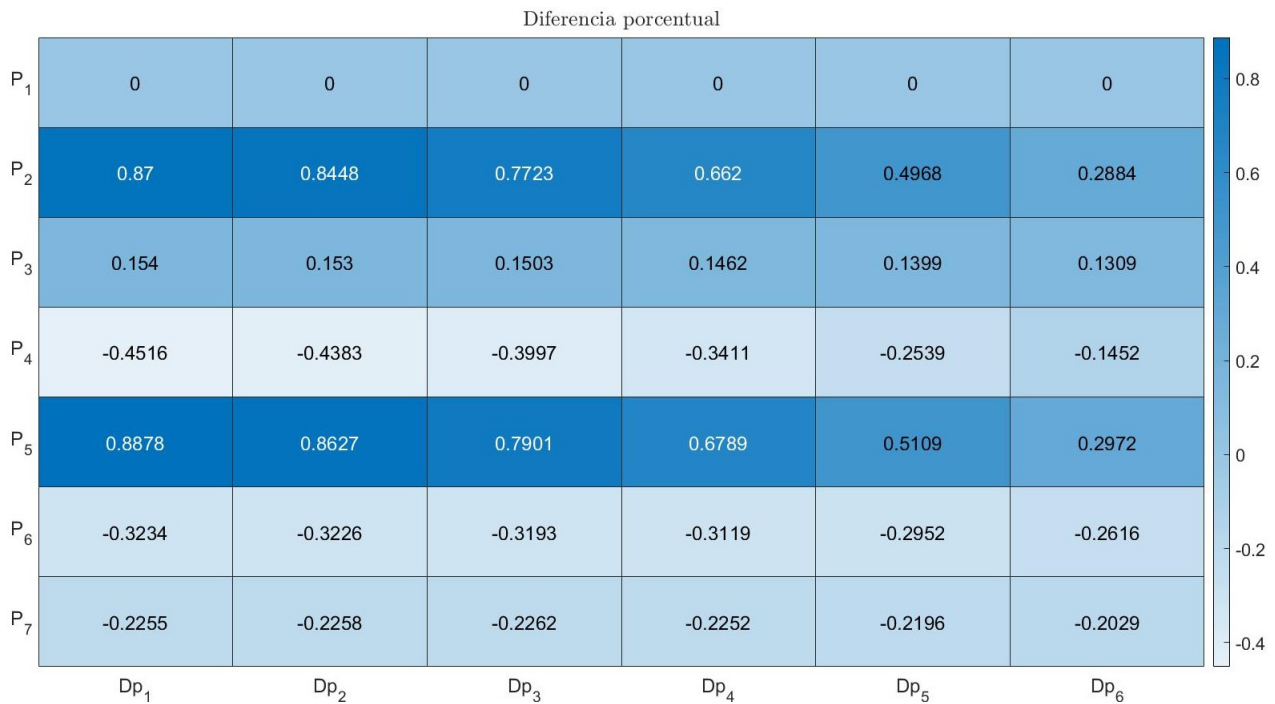
**Tabla C.1:** Magnitud de velocidad modelo 2 sin prótesis, para puntos de estudio en el 1<sup>er</sup>

Punto/T[S]	0.255	0.265	0.295	0.345	0.435	0.6
P1	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
P2	0.0872	0.1871	0.3017	0.2275	0.1380	0.0545
P3	0.0262	0.0570	0.0907	0.0644	0.0352	0.0112
P4	0.0743	0.1674	0.2931	0.2282	0.1169	0.0200
P5	0.0863	0.1865	0.3026	0.2271	0.1378	0.0546
P6	0.0226	0.0493	0.0774	0.0545	0.0293	0.0062
P7	0.0187	0.0409	0.0645	0.0452	0.0239	0.0061

**Tabla C.2:** Magnitud de velocidad modelo 2 sin prótesis, para puntos de estudio en el 2<sup>do</sup>

Punto/T[S]	1.255	1.265	1.295	1.345	1.435	1.6
P1	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
P2	0.0959	0.1956	0.3094	0.2341	0.1430	0.0574
P3	0.0277	0.0585	0.0922	0.0659	0.0366	0.0125
P4	0.0698	0.1630	0.2891	0.2248	0.1143	0.0185
P5	0.0952	0.1951	0.3105	0.2338	0.1429	0.0576
P6	0.0193	0.0460	0.0742	0.0514	0.0264	0.0036
P7	0.0165	0.0386	0.0623	0.0429	0.0217	0.0040

## C.2. Diferencia porcentual modelo 2 sin prótesis



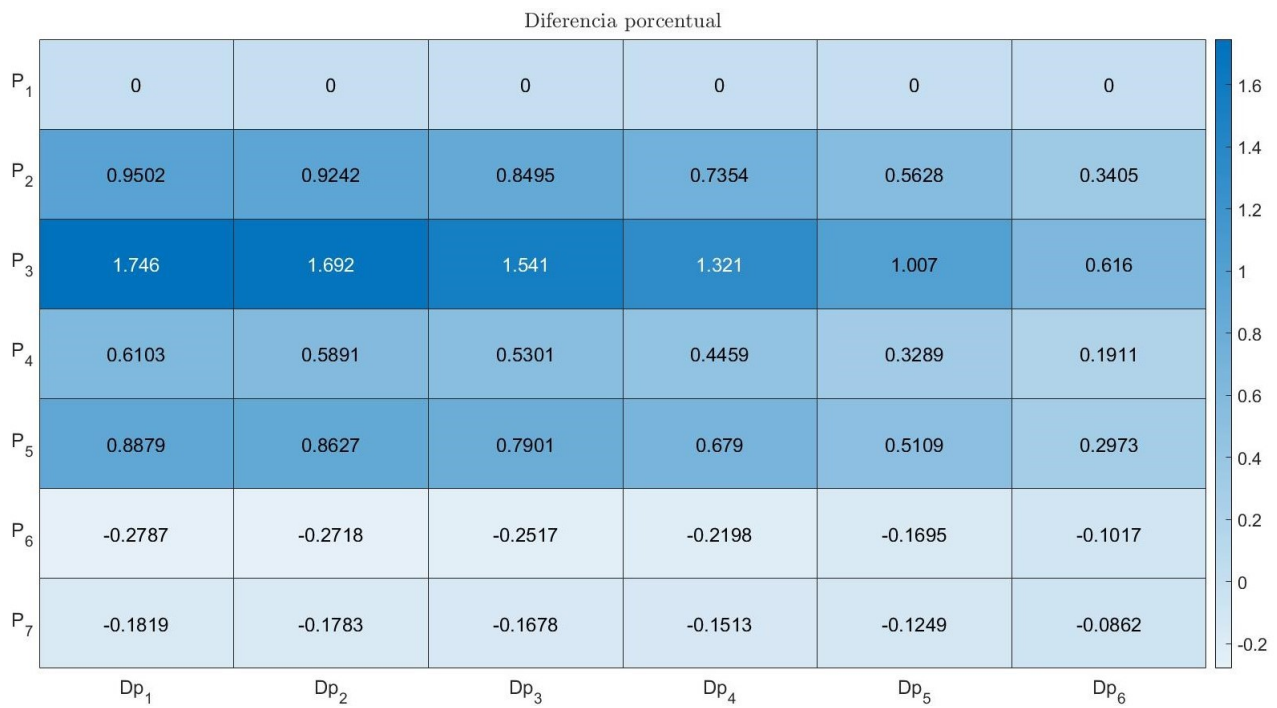
**Figura C.1:** Diferencia porcentual modelo 2 sin prótesis.  
Fuente: Elaboración propia

## C.3. Tablas de magnitud velocidad para instantes desfasados

Punto/T[S]	0.255	0.265	0.295	0.345	0.435	0.6
P1	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
P2	0.0848	0.1819	0.2935	0.2211	0.1349	0.0543
P3	0.0730	0.1484	0.2499	0.2314	0.1804	0.0760
P4	0.0842	0.1822	0.2980	0.2229	0.1365	0.0510
P5	0.0863	0.1865	0.3026	0.2271	0.1378	0.0546
P6	0.0193	0.0430	0.0676	0.0457	0.0211	0.0011
P7	0.0143	0.0317	0.0495	0.0326	0.0143	0.0019

Punto/T[S]	1.255	1.265	1.295	1.345	1.435	1.6
P1	0.0860	0.1883	0.2980	0.2074	0.1087	0.0313
P2	0.0943	0.1912	0.3020	0.2285	0.1406	0.0577
P3	0.0905	0.1653	0.2653	0.2446	0.1905	0.0822
P4	0.0903	0.1881	0.3033	0.2273	0.1398	0.0529
P5	0.0952	0.1951	0.3105	0.2338	0.1429	0.0576
P6	0.0165	0.0403	0.0651	0.0435	0.0194	0.0001
P7	0.0125	0.0299	0.0478	0.0311	0.0131	0.0011

## C.4. Diferencia porcentual modelo 2 con prótesis



**Figura C.2:** Diferencia porcentual modelo 2 con prótesis.  
Fuente: Elaboración propia.

# Anexos D

## Principios Matemáticos y Numéricos

Este capítulo presentará las herramientas necesarias para comprender el proceso matemático, utilizano en los capítulos siguientes.

### D.1. Teorema de Stokes

Corresponde a un teorema del cálculo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  que relaciona una integral rotacional de un campo vectorial, sobre una superficie con una integral de línea sobre el contorno de dicha superficie. Sea  $\Sigma$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  cuyo borde es  $\partial\Sigma$  y  $\vec{F}$  un campo vectorial con derivadas parciales continuas dentro de la región.

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma \quad (\text{D.1})$$

Como los modelos son bidimensionales, la ecuación D.1 se trabaja en  $\mathbb{R}^2$ , conociéndose como el teorema de Green.

### D.2. Teorema de la divergencia

También conocido como el teorema de Gauss, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie con la divergencia del campo en el volumen. Sea  $U$  una región con superficie  $S$  y  $\vec{F}$  un campo continuamente diferenciables en  $U$ , se define el teorema de la divergencia como:

$$\iint_{\partial U} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \nabla \cdot \vec{F} \, dU \quad (\text{D.2})$$

En mecánica de fluidos la ecuación D.2, se utiliza para llegar a definir una de las ecuaciones de gobierno que se verá en el capítulo siguiente.

### D.3. Integración Numérica

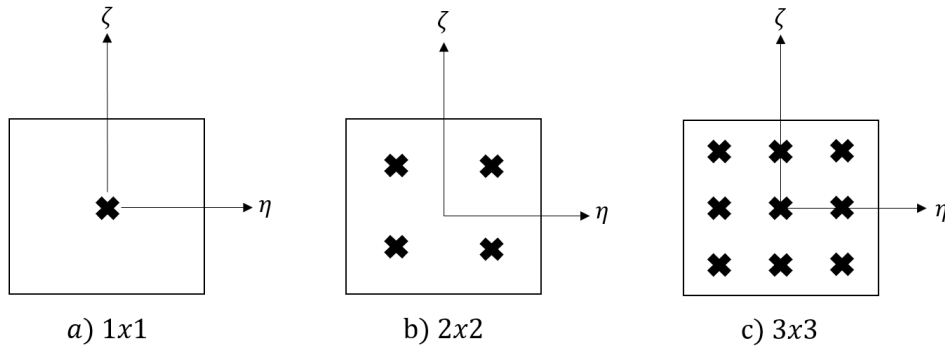
Para terminar las soluciones con el método de elementos finitos es necesario calcular varias integrales, cuyo valor va cambiando en cada iteración, por lo tanto si se utiliza la integración numérica es posible reducir el consumo de datos.

Existen muchos métodos de integración numérica pero en este trabajo se utilizará cuadratura de Gauss, que consiste en calcular en aproximar la integral como la sumatoria de la función

por una peso ( $w_i$  y  $w_j$ ):

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i w_j f(\zeta_i, \eta_j) \quad (\text{D.3})$$

De la ecuación D.3,  $n$  y  $m$  corresponden al número de subdominios, por lo tanto entre mayor sean la aproximación será más exacta, en la siguiente imagen se muestra un elemento rectangular con distintos subdominios.



**Figura D.1:** Distinta cantidad de subdominios para integración numérica.  
Fuente:Elaboración propia.

En la siguiente tabla se muestran los respectivos valores para la figura D.1:

**Tabla D.1:** Nodos, centroides y pesos.

n	$\pm\zeta_i$	$\pm\eta_i$	$w_{i,j}$	
1	0.0		2.0	
2	0.58		1.2	
3	0.0	0.78	0.55	0.88

## D.4. Método de punto fijo

Corresponde a un método iterativo directo, donde la solución se modifica en cada iteración hasta que cumpla con cierta tolerancia. Un ejemplo de ecuación que resuelve es la siguiente:

$$W (X^{r-1}) X^r = B^{r-1} \quad (\text{D.4})$$

Notar que en la ecuación D.4,  $r$  corresponde a la iteración siguiente y  $r - 1$  al valor anterior. El proceso se detiene cuando se cumple la tolerancia impuesta  $\epsilon$ :

$$\frac{X^{(r)} - X^{(r-1)}}{X^{(r)}} \leq \epsilon \quad (\text{D.5})$$

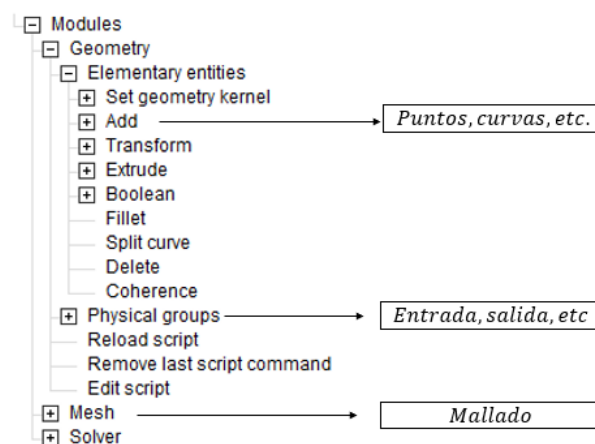
# Anexos E

## Confección mallado

Debido a la geometría de los modelos, crear un algoritmo capaz de realizar los mallado es demasiado complejo y existen programas de código abierto capaces de hacerlo. En este capítulo, se verán dos programas que se utilizarán para hacer los mallados, el primero es *Gmsh* y el segundo *Sublime Text*.

### E.1. Gmsh versión 4.7.1

Corresponde a un generador de mallas que consta de tres módulos: Geometría, mallado y algoritmo de resolución, aunque en este trabajo solo se usarán los dos primeros. En la siguiente figura se muestra parte de la interfaz virtual de *Gmsh*.

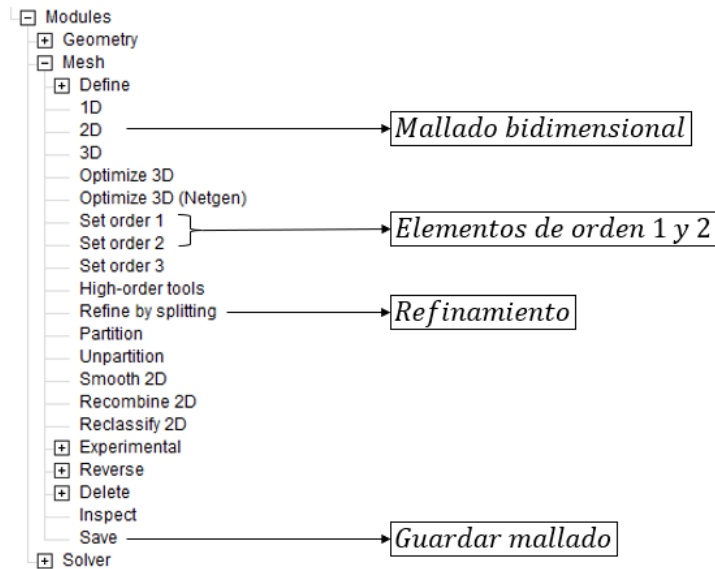


**Figura E.1:** Interfaz de geometría de *Gmsh*.

Fuente: Elaboración propia

En la figura E.1., se observa una amplia variedad de opciones dentro de los módulos descritos anteriormente. Principalmente, de acá se agregan: nodos, curvas y grupos físicos, estos últimos son muy útiles para identificar dentro de los resultados, nodos que pertenezcan a un borde en específico, por ejemplo: entrada, salida, borde superior e inferiores, etc.

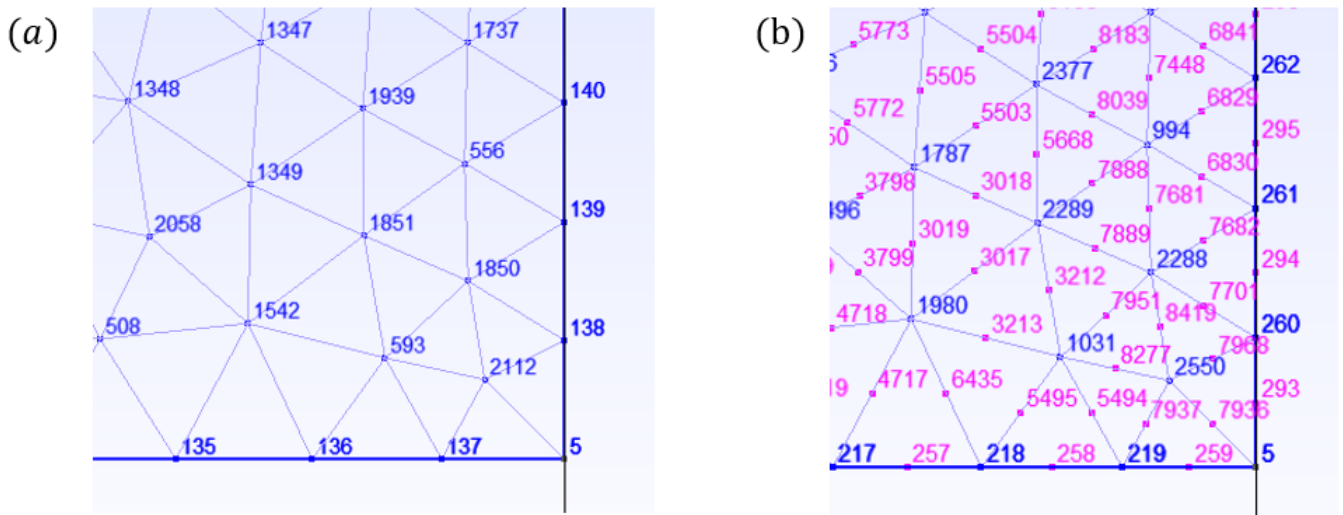
Una vez definido lo anterior, se procede a realizar el mallado, por defecto *Gmsh* usa elementos triangulares de tamaño unitario (es posible modificar el refinamiento dentro de la interfaz, pero es mejor usar *Sublime Text* para un refinado localizado). Cabe mencionar que los nodos de cada elemento estarán en sentido antihorario, siendo consistente con el capítulo de elementos finitos. En la siguiente imagen se muestra la interfaz de mallado:



**Figura E.2:** Interfaz de mallado de *Gmsh*.  
Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la figura E.2., se debe seleccionar la opción de mallado bidimensional, los elementos de orden 1 o 2 y guardar el mallado. Una vez guardado el mallado, se generará un archivo *.tex* con los nodos, conectividad, entre otros.

En el capítulo 4, se hablo sobre el orden para las funciones, en la siguiente figura se muestra una ampliación del mallado:



**Figura E.3:** Mallado en *Gmsh*: (a) primer orden y (b) segundo orden  
Fuente: Elaboración propia

Observando la figura anterior, *Gmsh* realiza los mallados de forma que los elementos comparten nodos o caras (los vértices del elemento solo se juntan con otros) y no hay elementos con ángulos obtusos (mayor a 90), ya que estos perjudican los cálculos (Gabaldón, F., 2007). Finalmente, *Gmsh* puede incorporar elementos de mayor orden (orden 3,4, etc.).

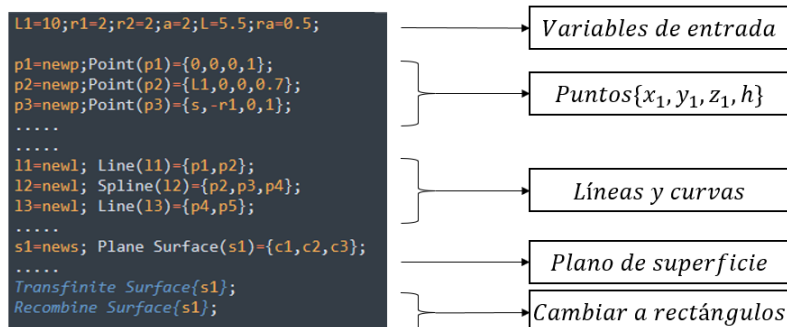
## E.2. Sublime text

Corresponde a un editor de texto, es decir, permite trabajar sobre otros programas (en este caso *Gmsh*) modificando las coordenadas de los puntos o longitudes (radios, diámetros, etc.).

Las funciones utilizadas de *Sublime Text*, son las siguientes:

- Variables: Es posible definir valores que modifiquen las posiciones de los nodos, por ejemplo, la longitud del saco aneurismal, el diámetro de la aorta, etc.
- Nodos: Corresponde a un vector de cuatro términos donde los tres primeros son las coordenadas  $x, y, z$  y el último corresponde al nivel refinamiento en el nodo.
- Curvas: Compuestas por la unión de dos o más nodos, en este caso se usan rectas (horizontal y vertical) y curvas splines (para la curva del saco aneurismal).
- Plano de superficie: Corresponde a definir la región para el mallado, es importante este paso porque *Gmsh* puede realizar mallados en zonas no deseadas.
- Grupo físico: Se utilizar para identificar los nodos que pertenezcan a un borde en específico, por ejemplo saber cuales están en la entrada o salida del flujo, etc.

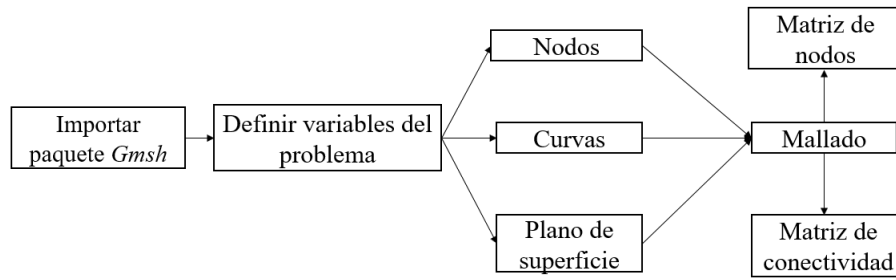
En la figura E.4 se muestra parte de la interfaz de *Sublime text*, cabe mencionar que se utiliza *new* para crear nuevos elementos, como puntos, líneas, superficie etc.



**Figura E.4:** Parte de la interfaz vitural de *Sublime text*.

Fuente: Elaboración propia

El primer paso para empezar a trabajar con *Sublime Text*, es importar la librería de *Gmsh*. Una vez hecho esto puede comenzar a trabajar, el siguiente esquema muestra el procedimiento a seguir.



**Figura E.5:** Esquema para trabajar con *Sublime text*.  
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, el beneficio de usar *Sublime text*, es poder definir una modelo genérico que al modificar alguna variable, los cambios se vean reflejados en *Gmsh*, sin necesidad de cambiar nada en este último. En el anexo A, se deja el código del modelo genérico.