



Termodinámica extendida para agujeros negros con campo escalar

Paulina Cabrera

Departamento de Física, Universidad Técnica Federico Santa María
Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Tesis para optar al grado de
Doctor en ciencias físicas

Valparaíso, Chile, 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Termodinámica extendida para agujeros negros con campo escalar

Nombre del candidato(a): Paulina Cabrera Ramírez

Carrera / Grado: Doctorado en Ciencias Físicas

Campus: Casa Central Valparaíso

Departamento: Departamento de Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Dumitru Astefanesei, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente

DEJO CONSTANCIA que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 13 de abril de 2026

Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 13 de abril de 2026

Firma: 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Comité Examinador

Las siguientes personas han formado parte del comité examinador de esta tesis. La decisión del Comité examinador se toma por mayoría de votos.

Supervisor: Dr. Dumitru Astefanesei,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Examinador Interno: Dr. Ayan Mukhopadhyay,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Examinador Interno: Dr. Joel Saavedra,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Examinador Externo: Dr. Andrés Anabalón,
Universidad de Concepción.

Contenidos

Comité Examinador	ii
Notación	vi
1 Introducción	1
2 Agujeros negros con campo escalar	4
2.1 Acción y principio variacional	4
2.1.1 Variación respecto a la métrica	5
2.1.2 Término de borde	5
2.1.3 Campos de materia	8
2.1.4 Variación total de la acción	9
2.2 Agujeros negros con campo escalar	9
2.2.1 Soluciones de agujeros negros con campo escalar	10
2.2.2 Método de contratérminos	15
2.3 Cantidades conservadas	16
3 Termodinámica extendida de agujeros negros	18
3.1 Termodinámica de agujeros negros	18
3.2 Relación cuántico-estadístico	20
3.2.1 Función de partición en gravedad	20
3.2.2 Ensembles termodinámicos	22

3.2.3	Temperatura de Hawking	24
3.3	Estabilidad termodinámica global	26
3.3.1	Estabilidad termodinámica en el ensemble gran canónico	26
3.3.2	Estabilidad termodinámica en el ensemble canónico	27
3.4	Termodinámica de agujeros negros en espacio de fase extendido	28
3.4.1	Constante cosmológica como variable termodinámica	29
3.4.2	Termodinámica de agujeros negros en espacio de fase extendido	29
3.4.3	Fórmula de Smarr	31
4	Criticalidad agujeros negros con pelo	32
4.1	Criticalidad de agujeros negros con pelo: caso general	32
4.1.1	Termodinámica en espacio de fase extendido	32
4.1.2	Acción euclídea y la termodinámica usual	35
4.2	Fórmula de Smarr y desigualdad isoperimétrica inversa	38
4.3	Termodinámica extendida	40
4.3.1	Ensemble canónico	40
4.3.2	Ensemble gran canónico	46
4.3.3	Transiciones de fase tipo <i>novel</i>	49
5	Conclusiones	56
	Referencias	57
	Apéndices	65
	Apéndice A Demostraciones de utilidad	66
A.1	Hipersuperficies	66
A.1.1	Métrica inducida	66
A.1.2	Vector normal	67
A.1.3	Métrica transversa	67

A.1.4	Curvatura extrínseca	67
A.1.5	Teorema de la divergencia	68
A.2	Generalización de la fórmula de Smarr para agujeros negros con pelo	68
Apéndice B	Criticalidad agujero negro con pelo, caso $\sigma = \infty$	70
B.1	Termodinámica extendida	70
B.1.1	Ensemble canónico: carga eléctrica fija	72
B.1.2	Ensemble gran canónico: potencial conjugado fijo	73
B.2	Comportamiento de fase novedoso	75
Apéndice C	Criticalidad agujero negro de Reissner-Nordström	78
C.1	Termodinámica del agujero negro RN-AdS	79
C.1.1	Cantidades termodinámicas	79
C.2	Criticalidad en el ensemble canónico: Transiciones de fase tipo Van der Waals	81
C.2.1	Ecuación de estado	81
C.2.2	Estabilidad global y energía libre	83
C.2.3	Relación criticalidad de Van der Waals	84
C.3	Criticalidad en el ensemble gran canónico: Transiciones de fase de tipo Hawking-Page	86
C.3.1	Ecuación de estado	86
C.3.2	Estabilidad global y energía libre	86

Notación

C.1 Tabla comparativa exponentes críticos	85
---	----

A lo largo de este trabajo, se utilizarán unidades naturales,

$$G = c = \hbar = k = 1,$$

donde G es la constante de gravitación universal, c es la rapidez de la luz en el vacío, \hbar es la constante de Planck reducida y k es la constante de Boltzmann, de tal forma que $\kappa = 8\pi$. Además, usamos la signatura $(-, +, +, +)$ para la métrica.

Capítulo 1

Introducción

John Michell propuso en 1784 la idea de estrellas cuya velocidad de escape excediera la velocidad de la luz, únicamente con las nociones Newtonianas disponibles en la época. Aunque conceptualmente notable, esta propuesta no tuvo mayor impacto entre sus contemporáneos y permaneció esencialmente olvidada durante más de un siglo. No fue sino hasta el desarrollo de la relatividad general por Albert Einstein en 1915 que resurgió esta idea con un fundamento teórico más sólido, cuando Karl Schwarzschild, apenas un año después, encontró la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein, describiendo la geometría de un espacio-tiempo esféricamente simétrico que presenta una singularidad y un horizonte de eventos, que separa causalmente el interior del exterior del objeto.

El descubrimiento de la radiación de Hawking reveló que los agujeros negros emiten radiación térmica y poseen una temperatura y una entropía asociadas al área de su horizonte, consolidando la idea de que estos objetos son genuinos sistemas termodinámicos, propiedad cuyo origen es geométrico.

Uno de los rasgos más característicos de los agujeros negros clásicos es su aparente simplicidad. En relatividad general con campos electromagnéticos, los teoremas de unicidad establecen que las soluciones estacionarias y asintóticamente planas están completamente caracterizadas por un conjunto reducido de parámetros macroscópicos: la masa M , la carga eléctrica Q y el momento angular J , independientemente de los detalles microscópicos del proceso de colapso gravitacional que les dio origen. Esta idea se sintetiza en la conocida expresión de que “los agujeros negros no tienen pelo”. Sin embargo, se ha demostrado que bajo ciertas condiciones estos teoremas pueden ser evadidos, dando lugar a soluciones con campos adicionales no triviales, entre ellos campos escalares.

Existe un permanente interés en comprender el rol de los campos escalares en sistemas gravitacionales, en particular en espacios asintóticamente anti-de Sitter (AdS). En

este contexto, los campos escalares pueden condensar y dar lugar a estrellas de bosones (objetos compactos y regulares sin horizonte) [1, 2, 3], así como a soluciones de agujeros negros con estructura más rica que las soluciones clásicas, incluyendo configuraciones con un único vector de Killing [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Los agujeros negros con pelo escalar desempeñan además un papel central en el marco de la dualidad *AdS/CFT* [10], al permitir explorar propiedades no perturbativas de teorías de campos con dual holográfico [11, 12]. De forma notable, se ha mostrado recientemente que la autointeracción del campo escalar puede ser relevante incluso en espacios asintóticamente planos, afectando la estabilidad termodinámica y dinámica de agujeros negros [13, 14, 15].

En esta tesis se estudia una familia general de soluciones exactas de agujeros negros cargados con pelo escalar en AdS_4 , descritas por una acción de tipo Einstein–Maxwell–escalar con un potencial escalar autointeractuante:

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - U(\phi) \right], \quad (1.1)$$

con γ dicta la intensidad del acoplamiento entre el campo escalar y el campo electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y $U(\phi)$ describe la autointeracción no trivial del campo escalar. Estas soluciones pueden embeberse consistentemente en modelos de supergravedad con términos de Fayet–Iliopoulos diónicos [16, 17]. Soluciones relacionadas, térmica y dinámicamente estables, existen incluso en espacio plano [13, 15, 14]. La autointeracción del campo escalar modifica de manera sustantiva la estructura del espacio *AdS* efectivo, actuando como una “caja” gravitacional que sugiere la aparición de nuevos fenómenos termodinámicos y posibles fases holográficas no triviales [18].

La termodinámica de agujeros negros en espacios *AdS* adquiere una estructura particularmente rica cuando se considera el espacio de fases extendido, en el cual la constante cosmológica se promueve a una variable termodinámica identificada como la presión del sistema [19, 20, 21, 22]. En este formalismo, conocido como *black hole chemistry* [23, 24], la variable conjugada se interpreta como un volumen termodinámico, y la inclusión de la constante cosmológica resulta esencial para la consistencia de la fórmula de Smarr, incluso cuando se mantiene fija [25, 26]. Un resultado pionero en este marco fue el descubrimiento de una interesante analogía entre las transiciones de fase de primer orden para agujeros negros de Reissner–Nordström–AdS (*RN-AdS*) y las transiciones de fase para fluidos de Van der Waals.

La incorporación de un campo escalar altera de forma significativa el comportamiento termodinámico de los agujeros negros cargados en AdS. En contraste con la solución *RN* sin pelo, la presencia de campo escalar da lugar a fenómenos críticos adicionales tanto en el ensemble canónico como en el gran canónico. El objetivo de esta tesis es

analizar la termodinámica extendida de esta familia general de agujeros negros cargados con pelo escalar, comparando explícitamente sus propiedades con las de la solución Reissner–Nordström–AdS, que se recupera como un límite continuo del modelo.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se introduce el marco teórico y se describen las soluciones de agujeros negros con pelo escalar que serán objeto de estudio. En el Capítulo 3 se revisa la termodinámica de agujeros negros, tanto en su formulación estándar como en el espacio de fases extendido. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan y analizan los resultados principales relativos a la criticalidad y a las transiciones de fase de la familia general de agujeros negros considerada.

Capítulo 2

Agujeros negros con campo escalar

2.1 Acción y principio variacional

Con el objetivo de establecer un principio variacional en el contexto gravitacional que permita derivar las ecuaciones de Einstein, introducimos la acción de Einstein-Hilbert.

$$I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

donde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci, o escalar de curvatura y g es el determinante de la métrica. La acción (2.1) es la expresión escalar más simple y no trivial que se puede construir como un invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, que depende de la métrica $g_{\mu\nu}$ y de sus derivadas hasta segundo orden.

La acción gravitacional total tomará la forma

$$I = I_{EH} + I_{GH} + I_m, \quad (2.2)$$

donde I_{GH} es un término de borde de Gibbons-Hawking, necesario para que el principio variacional esté bien definido, y I_m representa la contribución de la materia. Específicamente,

$$I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K - \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_m, \quad (2.3)$$

donde el segundo término corresponde al término de Gibbons-Hawking, en el cual K es la traza de la curvatura extrínseca, y h es el determinante de la métrica inducida en el borde $\partial\mathcal{M}$. Y por otro lado, \mathcal{L}_m representa la densidad lagrangiana para la materia.

2.1.1 Variación respecto a la métrica

Al variar el término de Einstein-Hilbert respecto al campo tensorial de métrico $g^{\mu\nu}$, se obtiene

$$\delta I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x [R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})]. \quad (2.4)$$

Para desarrollar el primer término del lado derecho de (2.4), debemos expresar la variación $\delta\sqrt{-g}$ en función de la variación del determinante de la métrica δg . Esto se logra mediante el corolario que se desprende de la fórmula de Jacobi para una matriz arbitraria A , es decir, $\ln(\det(A)) = \text{Tr}(\ln(A))$. Variando esta expresión se obtiene

$$\frac{1}{\det(A)}\delta(\det(A)) = \text{Tr}(A^{-1}\delta A), \quad (2.5)$$

Aplicando esta fórmula a la matriz A con elementos $g_{\mu\nu}$, cuyo determinante es $\det(A) = g$, obtenemos que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Finalmente, utilizando este resultado en (2.4), la variación del término de Einstein-Hilbert se reescribe de la siguiente manera

$$\delta I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

donde el tensor de Einstein se ha definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.8)$$

En la expresión (2.7), el primer término contribuye a las ecuaciones de movimiento, mientras que el segundo representa un término de borde. Este último puede anularse mediante el término de Gibbons-Hawking, que se discutirá en la siguiente sección.

2.1.2 Término de borde

Contribución al borde del término de Einstein-Hilbert

Para tratar el término de borde en (2.7), que definiremos como

$$\delta I_B \equiv \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

consideramos la variación del tensor de Ricci . En términos de la variaciones de las conexiones de Christoffel, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & (\partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \delta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha) \\ & - (\partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Esta expresión se puede simplificar reescribiendo (2.10) en función de las derivadas covariantes

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha), \quad (2.11)$$

donde este último resultado se conoce como la identidad de Palatini. Continuamos desarrollando el término de borde (2.9), que se puede expresar como una derivada total de la forma

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha [g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - g^{\mu\alpha} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu)], \quad (2.12)$$

con el objetivo de expresarlo como una divergencia para hacer explícita su naturaleza de término de borde. Para obtener este resultado, hemos usado la condición de compatibilidad métrica. Además, queremos expresar (2.12) en términos de la variación del campo métrico $g_{\mu\nu}$. Para ello, consideramos la variación de la relación entre conexión y métrica

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}], \quad (2.13)$$

donde hemos empleado la condición

$$\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad (2.14)$$

la cual impone que la métrica permanezca fija en el borde, permitiendo así aplicar el principio variacional. Esto implica que la métrica inducida en el borde $h_{\mu\nu}$ también permanece fija, de modo que sólo las variaciones de las derivadas de la métrica contribuyen al término de borde. De esta forma, utilizando (2.13), el término (2.9) se reduce a

$$\delta I_B = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha [g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu})], \quad (2.15)$$

el cual, mediante el teorema de la divergencia (A.8), se puede expresar como una integral de superficie:

$$\delta I_B = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\beta g^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

Reescribiendo $g^{\mu\nu}$ en función de la métrica transversa, según (A.4), se obtiene

$$\delta I_B = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\beta (h^{\mu\nu} + \epsilon n^\mu n^\nu) (\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}). \quad (2.17)$$

Se puede apreciar que en la expresión (2.17), la contracción entre los términos $n^\beta n^\mu n^\nu$ y $(\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu})$ se anula debido a la simetría en los índices μ y β . Considerando la interpretación de la métrica transversa como proyector, $h^{\mu\nu} \partial_\mu \delta g_{\beta\nu}$ representa la variación del cambio de la métrica sobre el borde, que también se anula por la condición (2.14). Por lo tanto, solamente contribuye el término

$$\delta I_B = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde $n^\beta \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}$ representa la variación del cambio de la métrica en la dirección normal a la hipersuperficie o borde, que es precisamente la componente que debe sobrevivir.

Con esto, la variación del término Einstein-Hilbert (2.7) queda como

$$\delta I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta \delta g_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Término de Gibbons-Hawking

El propósito del término de Gibbons-Hawking es cancelar el término de borde que surge al variar la acción de Einstein-Hilbert, como veremos a continuación. La variación del término de Gibbons-Hawking se expresa como:

$$\delta I_{GH} = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \delta K, \quad (2.20)$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca en la hipersuperficie, que está definida por

$$K = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = h^{\mu\nu} (\partial_\mu n_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha n_\alpha). \quad (2.21)$$

Utilizando la variación de la conexión (2.13), la variación de K es

$$\delta K = -n_\alpha h^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2} n_\alpha h^{\mu\nu} \delta [g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})], \quad (2.22)$$

donde hemos considerado que $h_{\mu\nu}$ es constante en el borde y que el vector normal n_ν no depende de la métrica. De los términos presentes en (2.22), sólo sobrevive el que involucra la derivada en la dirección normal a la hipersuperficie

$$\delta K = \frac{1}{2} n_\alpha h^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la variación del término de Gibbons-Hawking (2.20) resulta en

$$\delta I_{GH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Por lo que, combinando los resultados de las variaciones (2.18) y (2.24), concluimos que

$$\delta I_B + \delta I_{GH} = 0, \quad (2.25)$$

lo que implica que el término de Gibbons-Hawking efectivamente cancela la contribución en el borde que surge al variar la acción de Einstein-Hilbert. De este modo, bajo las condiciones de borde impuestas (2.14), el término de Gibbons-Hawking asegura ecuaciones de movimiento bien definidas, evitando contribuciones no deseadas en el borde.

2.1.3 Campos de materia

Consideramos la variación de la acción para la materia

$$\delta I_m = - \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \mathcal{L}_m = - \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

donde la densidad lagrangiana \mathcal{L}_m depende de la métrica y puede depender de otros campos. Así, la variación (2.26) se expresa como

$$\delta I_m = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

donde hemos introducido el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.28)$$

$T_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico de rango 2. En sus componentes se codifica el flujo y densidad de energía y momento para una distribución de materia en cada punto en el espacio-tiempo. Satisface además la condición:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.29)$$

que es la expresión tensorial para la conservación de energía y momento. Esta ecuación generaliza la ecuación de continuidad para un fluido en movimiento a través de un campo gravitacional.

2.1.4 Variación total de la acción

Anteriormente hemos derivado las contribuciones individuales a la variación de la acción provenientes de los términos gravitacional, de borde y materia, que aportan de la siguiente forma:

$$\delta I = \delta I_{EH} + \delta I_{GH} + \delta I_m, \quad (2.30)$$

Cada uno de estos términos está dado por las ecuaciones (2.19), (2.24) y (2.27), respectivamente. Con lo que la variación total (2.30), se expresa finalmente como:

$$\delta I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.31)$$

Aquí verificamos que el término de borde que aparece al variar el término de Einstein-Hilbert se anula exactamente con la variación del término de Gibbons-Hawking.

La ecuación de movimiento para el campo gravitacional es aquella que extremiza la acción, cuya variación se presentó en (2.31). Dichas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

las cuales se reducen a $G_{\mu\nu} = 0$ en el vacío cuando $T_{\mu\nu} = 0$. El tensor $T_{\mu\nu}$ describe cómo la materia y la energía afectan la curvatura del espacio-tiempo y actúa como fuente de las ecuaciones de campo de Einstein. La ecuación (2.32) describe un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden para $g_{\mu\nu}$, con 10 componentes independientes. De estas, 4 están restringidas por las condiciones de ligadura $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ¹, lo que deja 6 ecuaciones independientes que describen la dinámica del espacio-tiempo.

2.2 Agujeros negros con campo escalar

Los agujeros negros se caracterizan por su simplicidad, determinados únicamente por un conjunto reducido de parámetros. Los teoremas de unicidad establecen que la solución estacionaria, regular y asintóticamente plana más general de las Ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío está dada por la métrica de Kerr-Newman. Eso significa que el estado final, producto del colapso gravitacional de campos de materia, como por ejemplo una estrella, queda únicamente determinado por su masa, momento angular y carga eléctrica, independiente de su composición original.

¹La condición (2.29) es una consecuencia directa de $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, que se desprende de las identidades de Bianchi contraídas para el tensor de Riemann.

Esta visión fue consolidada en el trabajo de Ruffini y Wheeler [27], de donde surge la célebre afirmación de que “los agujeros negros no tienen pelo”. Esta idea dio origen a los teoremas de no pelo, cuya formulación moderna establece las condiciones bajo las cuales no pueden existir grados de libertad independientes adicionales asociados a campos de materia. Véase [28] para una revisión de estos teoremas y los mecanismos que permiten su evasión para obtener agujeros negros con pelo, ya sea primario, cuando introduce una nueva carga conservada asociada al campo escalar, o secundario cuando no introduce una carga adicional.

En este trabajo se estudiará una solución de agujero negro Einstein-Maxwell-Dilatón asintóticamente Anti-de Sitter, construidas en [29]. Dicha solución pertenece a una familia de soluciones exactas con campo escalar que incorporan de manera completa la *backreaction* del campo de escalar sobre la geometría. Esta familia de soluciones fue desarrollada sistemáticamente en una serie de trabajos previos [30, 31, 32]. En el artículo preliminar solamente se asume el ansatz para la métrica y la teoría que especifica los acoplamientos, lo que permite integrar las ecuaciones de movimiento y obtener soluciones analíticas con campo escalar no trivial. Posteriormente, este mecanismo se extendió para incluir campos de gauge y, finalmente una constante cosmológica, dando lugar a las las soluciones asintóticamente AdS con campo escalar que constituyen el objeto de estudio de esta tesis.

2.2.1 Soluciones de agujeros negros con campo escalar

A continuación presentaremos y revisaremos las soluciones de agujero negro con pelo mencionadas. [29], acción Einstein-Maxwell-Dilatón en AdS campo escalar no minimamente acoplado

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - U(\phi) \right], \quad (2.33)$$

con $\gamma \equiv \left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Maxwell, y el potencial está dado por

$$U(\phi) = \frac{2\alpha}{\sigma^2} \left[\frac{\sigma-1}{\sigma+2} \sinh\left(\frac{\sigma+1}{l_\sigma}\phi\right) - \frac{\sigma+1}{\sigma-2} \sinh\left(\frac{\sigma-1}{l_\sigma}\phi\right) + \frac{4\sigma^2-4}{\sigma^2-4} \sinh\left(\frac{\phi}{l_\sigma}\right) \right] \\ + \frac{\sigma^2-4}{3\sigma^2} \left[\frac{\sigma-1}{\sigma+2} \exp\left(-\frac{\sigma+1}{l_\sigma}\phi\right) + \frac{\sigma+1}{\sigma-2} \exp\left(\frac{\sigma-1}{l_\sigma}\phi\right) + \frac{4\sigma^2-4}{\sigma^2-4} \exp\left(-\frac{\phi}{l_\sigma}\right) \right] \Lambda, \quad (2.34)$$

Representa una familia de soluciones, donde cada solución está definida por un valor de σ . Las ecuaciones de movimiento se pueden calcular variando (2.33)

$$\delta I[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[\sqrt{-g} \left(R - e^{\gamma\phi} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right) \right] \quad (2.35)$$

Variación de la acción con respecto a la métrica

Salvo por un término de borde, la variación con respecto a la métrica es

$$\delta I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\sqrt{-g} \left(G_{\mu\nu} - 2e^{\gamma\phi} F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \delta g^{\mu\nu} - \left(e^{\gamma\phi} F^2 + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + U(\phi) \right) \delta \sqrt{-g} \right] \quad (2.36)$$

donde el primer término se calculó en 2.1. Con (2.6), la expresión anterior queda como

$$\delta I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[G_{\mu\nu} - 2e^{\gamma\phi} F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \left(e^{\gamma\phi} F^2 + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + U(\phi) \right) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Variación de la acción respecto campo gauge

A partir de (2.35) y redefiniendo índices, la variación respecto a A_μ es la siguiente

$$\begin{aligned} \delta I[A_\nu] &= -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} e^{\gamma\phi} \delta(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta}) = -\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\frac{2}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \end{aligned} \quad (2.38)$$

Haciendo una integración, nos lleva a

$$\delta I[A_\nu] = \frac{2}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu}) \delta A_\nu - \frac{2}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \delta A_\nu) \quad (2.39)$$

Se puede apreciar que el segundo es un término de borde. Aplicando sobre él, el teorema de la divergencia (A.8)

$$\delta I[A_\nu] = \frac{2}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu}) \delta A_\nu - \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n_\mu e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \delta A_\nu, \quad (2.40)$$

donde n_μ es el vector unitario normal al borde $\partial\mathcal{M}$, y h_{ij} es la métrica inducida en el borde.

Variación de la acción respecto al campo escalar

La variación respecto a ϕ es la siguiente

$$\begin{aligned}\delta I[\phi] &= -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta \left(e^{\gamma\phi} F^2 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + U(\phi) \right) \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(e^{\gamma\phi} F^2 \gamma \delta\phi + g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \delta\phi + \frac{dU(\phi)}{d\phi} \delta\phi \right)\end{aligned}\quad (2.41)$$

Integrando por partes el término intermedio,

$$\delta I[\phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \sqrt{-g} \left(\gamma e^{\gamma\phi} F^2 + \frac{dU(\phi)}{d\phi} \right) \right] \delta\phi - \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta\phi)\quad (2.42)$$

El término de borde de la expresión anterior se anula al exigir que campo escalar se anule también en la región asintótica. Con las propiedades $\partial_\mu (\sqrt{-g} u^\mu) = \sqrt{-g} \nabla_\mu u^\mu$ y $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$, es directo ver que

$$\delta I[\phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(\square\phi - \gamma e^{\gamma\phi} F^2 + \frac{dU(\phi)}{d\phi} \right) \delta\phi\quad (2.43)$$

Las ecuaciones de movimiento se desprenden de (2.37), (2.40), (2.43) y para la que se obtiene de (2.43), se le calcula la traza de (se obtiene $R = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2$). Reemplaza de vuelta en y se obtiene la versión simplificada Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} U(\phi) - T_{\mu\nu}^{\text{EM}} &= 0, \\ \square\phi - \gamma e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{dU(\phi)}{d\phi} &= 0, \\ \nabla_\mu (e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu}) &= 0,\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde $T_{\mu\nu}^{\text{EM}} = 2e^{\gamma\phi} (F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2)$ es el tensor energía-momento para el campo electromagnético. La ecuación para ϕ es una versión simplificada que se obtiene al calcular la traza de la ecuación original. De allí se obtiene $R = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2$, lo cual se reemplaza de vuelta en la ecuación para ϕ .

La solución de las ecuaciones de movimiento, dado el potencial (4.3), son

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x) dt^2 + \frac{\eta^2}{f(x)} dx^2 + d\Sigma^2 \right],\quad (2.45)$$

$$A_\mu = \frac{q}{\sigma} \left(-\frac{1}{x^\sigma} + \frac{1}{x_+^\sigma} \right) \delta_\mu^t,\quad (2.46)$$

$$\phi = l_\sigma \ln(x)\quad (2.47)$$

donde η y q son las constantes de integración, que estarán relacionadas con las cargas conservadas (aunque dicha relación no es tan directa), y $d\Sigma \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Aquí, como en [33], se definió el potencial de gauge $A_\mu = \left(-\frac{q}{\sigma x^\sigma} + C\right) \delta_\mu^t$, tal que, $A_t(x_+) = 0$. Puesto que no hay una constante de integración asociada al campo escalar, entonces se clasifica como “pelo secundario” (no tiene asociada una carga conservada).

La función de la métrica y el factor conforme, son respectivamente:

$$f(x) = \frac{1}{\ell^2} + \alpha \left[\frac{1}{\sigma^2 - 4} - \frac{x^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{x^{-\sigma}}{\sigma - 2} - \frac{x^\sigma}{\sigma + 2} \right) \right] + \frac{x}{\Omega(x)} \left[1 - \frac{2q^2(x^\sigma - 1)}{\sigma(\sigma - 1)x^\sigma} \right], \quad (2.48)$$

$$\Omega(x) = \frac{\sigma^2 x^{\sigma-1}}{\eta^2 (x^\sigma - 1)^2}.$$

El borde del espacio-tiempo se encuentra ubicado en $x \rightarrow 1$, en donde el dilatón se anula. En este límite, la coordenada x se relaciona con la coordenada canónica r a través de

$$\Omega(x) \rightarrow r^2 \quad (2.49)$$

De la solución (2.47), se aprecia que $x \in [0, \infty[$ para que ϕ sea un campo real. Sin embargo, dentro del rango de posibles valores para la coordenada x coexisten dos espacio-tiempos desconectados, la rama positiva y la rama negativa .

Rama negativa

Una de las soluciones para x , despejada de (2.49) es la que define la rama negativa

$$x = 1 - \frac{1}{\eta r} + \frac{\sigma^2 - 1}{24\eta^3 r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (2.50)$$

que reemplazada en la solución para el campo dilatón (2.47), se obtiene el comportamiento asintótico

$$\phi(r) = -\frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\eta r} - \frac{\sigma^2 - 1}{2\eta^2 r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (2.51)$$

que es consistente con $\phi(x) = l_\sigma \ln x < 0$ para $0 < x < 1$.

Además,

- La singularidad se encuentra en $x = 0$
- El borde del espacio-tiempo se encuentra en $x = 1$

Rama positiva

De la misma forma, la otra solución de (2.49) es

$$x = 1 + \frac{1}{\eta r} - \frac{\sigma^2 - 1}{24\eta^3 r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (2.52)$$

que define la rama positiva, y el comportamiento asintótico del campo escalar

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\eta r} - \frac{\sigma^2 - 1}{2\eta^2 r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (2.53)$$

que es consistente con $\phi(x) = l_\sigma \ln x > 0$ para $x > 1$.

Y además,

- La singularidad se encuentra en $x \rightarrow \infty$
- El borde del espacio-tiempo se encuentra en $x = 1$

En este trabajo enfocaremos nuestro análisis solamente en la rama positiva.

Carga eléctrica

La carga eléctrica se calcula a través de la ley de Gauss

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_\infty} e^\gamma \star F, \quad (2.54)$$

donde $\star F = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} dx^\sigma \wedge dx^\rho$. Con la solución (2.46), se aprecia que las componentes no nulas de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ son $F_{tx} = -F_{xt} = -\frac{q}{x^{\sigma+1}}$. Así, el dual de F es

$$\star F = \sqrt{-g} \epsilon_{tx\theta\varphi} F^{tx} d\theta \wedge d\varphi = -\frac{q \sin \theta}{\eta x^{\sigma+1}} d\theta \wedge d\varphi. \quad (2.55)$$

Y se puede integrar, junto con $e^{\gamma\phi} = x^{\sigma+1}$, para obtener, salvo por un signo global, el valor de la carga eléctrica.

$$Q = \frac{q}{\eta} \quad (2.56)$$

2.2.2 Método de contratérminos

La renormalización holográfica mediante contratérminos, desarrollada por Balasubramanian y Kraus [34, 35], consiste en un método sistemático para eliminar las divergencias ultravioletas que surgen en la acción de la gravedad en espacios asintóticamente Anti-de Sitter (AdS). Este enfoque aprovecha la estructura del espacio-tiempo AdS , expandiendo la métrica cerca del borde asintótico y añadiendo términos locales no dinámicos, que serían los contratérminos, a la acción de bulk, cuya forma se determina por invariancia de gauge y simetría conforme, de modo que cancelen exactamente las divergencias en la acción on-shell y en las cargas conservadas. Así, se obtiene una acción renormalizada finita que permite calcular cantidades conservadas y cantidades termodinámicas bien definidas, como el potencial termodinámico y la entropía. Desarrollado

La acción renormalizada esta compuesta por la acción del *bulk* I_{bulk} , contiene términos de borde para asegurar un principio variacional bien definido I_{bound} y contiene también contratérminos para eliminar las divergencias en la acción, en nuestro caso necesitamos un contratérmino I_g , que elimina las divergencias provenientes de la gravedad y un contratérmino que elimina las divergencias que provienen del campo escalar, es decir,

$$I = I_{\text{bulk}} + I_{\text{bound}} + I_g + I_\phi \quad (2.57)$$

Términos de borde

El término de borde gravitacional es el término de Gibbos-Hawking, introducido en 2.1

$$I_{GH} = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K. \quad (2.58)$$

Para el campo gauge, bajo ciertas condiciones se introduce un término de borde I_A . Así, $I_{\text{bound}} = I_{GH} + I_A$.

Contratérminos

El contratérmino gravitatorio que se debe agregar a la acción en espacios asintóticamente AdS , se encontró en [34] y corresponde a

$$I_g = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{2}{\ell} + \frac{\ell\mathcal{R}}{2} \right], \quad (2.59)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci asociado a la métrica inducida en el borde.

El contratérmino dilatónico se obtuvo en [36], y se puede escribir como

$$I_g = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{\phi^2}{2\ell} + \frac{W(a)}{\ell a^3} \phi^3 \right], \quad (2.60)$$

donde a y b son los términos a orden dominante y subdominante en la expansión del campo escalar en función de la coordenada canónica

$$\phi = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (2.61)$$

recordando que el cambio de variable está dado por $\Omega(x) = r^2$. El campo $\phi = (\sigma - 1) \ln(x)$ expandido en torno a la coordenada r queda como

$$\phi = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\eta r} - \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\eta^2 r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (2.62)$$

Por lo que, se puede identificar

$$a = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\eta}, \quad (2.63)$$

$$W(a) = -\frac{a^3}{6\sqrt{\sigma^2 - 1}},$$

al comparar (2.61) y (2.62) Así, la acción (2.57) es aquella que se debe considerar para el cálculo de cantidades conservadas y termodinámicas. Del cálculo de dichas cantidades se obtienen valores finitos, este método es efectivo en eliminar las divergencias en la acción sin necesidad de usar un espacio de referencia.

2.3 Cantidades conservadas

Una forma particularmente útil de definir cantidades conservadas en teorías gravitacionales es mediante el formalismo cuasilocal desarrollado por Brown y York [37], basado en un análisis de tipo Hamilton–Jacobi. En este enfoque, el Hamiltoniano del sistema se interpreta como la razón de cambio de la acción con respecto al tiempo definido en el borde del espaciotiempo. De manera natural, la energía se generaliza a un tensor de estrés superficial definido en el borde,

$$\tau_{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h^{ab}}, \quad (2.64)$$

donde h_{ab} es la métrica inducida en el borde $\partial\mathcal{M}$. Este tensor contiene información de la dinámica del sistema. La proyección de τ_{ab} en la dirección normal a la hipersuperficie $t = \text{cte}$ entrega la densidad de energía superficial ε

$$\varepsilon = n_a n_b \tau^{ab}. \quad (2.65)$$

El vector normal a la superficie $t = \text{cte}$ es

$$n_a = \frac{\delta_a^t}{\sqrt{-g^{tt}}} = \sqrt{\Omega f} \delta_a^t \quad (2.66)$$

La carga conservada asociada a la simetría de traslaciones temporales, generada por un vector de Killing ξ^b , se obtiene integrando esta densidad sobre una sección espacial cerrada del borde,

$$E = \oint_{s_\infty^2} d^2x \sqrt{\Sigma} n^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (2.67)$$

$\Sigma = \Omega(x_b) \sin^2 \theta$ es el determinante de la métrica inducida en la 2-esfera $ds^2 = \Omega(x_b) d\Sigma^2$.

Capítulo 3

Termodinámica extendida de agujeros negros

3.1 Termodinámica de agujeros negros

Uno de los grandes desafíos de la física teórica radica en formular una teoría cuántica consistente de la gravitación. Si bien ambas teorías son altamente exitosas en sus dominios, su unificación continúa siendo una cuestión abierta en física teórica. En este contexto, la termodinámica de agujeros negros emerge como una teoría efectiva que ofrece una descripción macroscópica de los grados de libertad subyacentes, que deberían originarse a partir de una aún desconocida teoría cuántica de la gravedad.

Las propiedades geométricas de los agujeros negros, tales como el área del horizonte o la gravedad de superficie, obedecen cuatro leyes mecánicas cuya estructura refleja una notable analogía con las leyes de la termodinámica clásica [38]. Este paralelismo adquirió una interpretación física concreta tras el resultado de Hawking, quien demostró que los procesos cuánticos en el horizonte producen radiación térmica [39]. Desde entonces, los agujeros negros se entienden como sistemas termodinámicos.

A continuación se presentan las cuatro leyes de la mecánica y termodinámica de agujeros negros, formuladas como expresiones equivalentes de un mismo fenómeno físico. Una descripción más detallada puede encontrarse en [40].

Ley cero

- **Mecánica:** La gravedad de superficie κ se interpreta como la fuerza requerida por un observador en el infinito para mantener una partícula de masa unitaria estacionaria en el horizonte de eventos. La ley cero establece κ es uniforme en la superficie del horizonte.
- **Termodinámica:** La temperatura en el horizonte está bien definida y es proporcional a la gravedad de superficie, según la expresión

$$T = \frac{1}{2\pi}\kappa. \quad (3.1)$$

Primera ley

- **Mecánica:** Para un agujero negro estacionario caracterizado por una masa M , momento angular J , carga eléctrica Q y área del horizonte A , la variación infinitesimal entre estados estacionarios satisface

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (3.2)$$

donde Ω es la rapidez angular del horizonte y Φ el potencial electrostático.

- **Termodinámica:** La expresión (3.2) adopta la forma análoga a la primera ley de la termodinámica

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (3.3)$$

Segunda ley

- **Mecánica:** El teorema de enfoque de congruencia de geodésicas de Raychaudhuri establece que el área total del horizonte nunca disminuye en procesos clásicos físicos,

$$dA \geq 0 \quad (3.4)$$

- **Termodinámica:** A partir de la primera ley, se puede identificar la entropía con el área del horizonte como

$$S = \frac{A}{4}. \quad (3.5)$$

Con esto, la segunda ley implica que la entropía de un agujero negro no decrece. Aunque la radiación de Hawking puede disminuir el área del horizonte, la segunda

ley generalizada garantiza que la entropía total del sistema, compuesto por agujero negro más radiación satisface

$$dS_{BH} + dS_{rad} \geq 0. \quad (3.6)$$

Tercera ley

- **Mecánica:** Si el tensor de energía-momento está acotado y satisface la condición débil de energía, entonces la gravedad de superficie κ no puede hacerse nula mediante un proceso físico en un tiempo finito.
- **Termodinámica:** Lo anterior aplica de igual forma a la temperatura del agujero negro, lo que impide la obtención de agujeros negros extremos mediante procesos físicos regulares.

3.2 Relación cuántico-estadístico

Un enfoque alternativo para estudiar el comportamiento termodinámico de un sistema es a través de la mecánica estadística, la cual establece un vínculo entre la dinámica microscópica y las propiedades macroscópicas observables. De este modo, la termodinámica surge como una descripción efectiva derivada de principios más fundamentales.

Aunque una descripción completa de los fenómenos termodinámicos en sistemas gravitacionales requeriría una teoría cuántica consistente de la gravedad, es posible aplicar estos métodos mediante una aproximación semiclásica. Este procedimiento, desarrollado por Gibbons y Hawking [41], permite establecer una relación entre la acción euclídea *on-shell* y un potencial termodinámico.

3.2.1 Función de partición en gravedad

La función de partición es una cantidad fundamental en mecánica estadística, pues a partir de ella se puede extraer toda la información termodinámica del sistema (Véase el apéndice B). En el contexto caso gravitacional, esta función se puede calcular mediante el formalismo de integrales de camino, que proporciona una expresión para la amplitud de transición entre una configuración inicial de campo ϕ_1 en un tiempo t_1 y una configuración final ϕ_2 en un tiempo t_2

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]}, \quad (3.7)$$

donde la integral funcional $\int \mathcal{D}\phi$ denota la suma sobre todas las posibles configuraciones del campo ϕ . Sin embargo, la evaluación de la acción $I[\phi]$ para una métrica de agujero negro es problemática debido a las singularidades que puede presentar su geometría. Gibbons y Hawking [41] propusieron resolver este inconveniente mediante la rotación de Wick, definida por

$$t \rightarrow -i\tau, \quad (3.8)$$

que introduce un tiempo imaginario τ .

Si consideramos el lado izquierdo de la ecuación (3.7), tomando $t_1 = 0$ y $t_2 = t$ y restringiéndonos al caso en que las configuraciones de campo inicial y final coinciden, $\phi_2 = \phi_1$, la amplitud puede expresarse en términos del operador de evolución temporal como

$$\langle \phi_1, t | \phi_1, 0 \rangle = \langle \phi_1 | e^{-it\hat{H}} | \phi_1 \rangle, \quad (3.9)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema. Al aplicar la rotación de Wick (3.8), la amplitud (3.9) adopta la forma

$$\langle \phi_1, t | \phi_1, 0 \rangle = \text{Tr} \left(e^{-\beta\hat{H}} \right) = Z, \quad (3.10)$$

con la identificación

$$\beta \equiv \frac{1}{T} = \tau. \quad (3.11)$$

La expresión (3.10) corresponde entonces a la función de partición Z en el ensemble canónico.

A su vez, la acción que aparece en el lado derecho de (3.7) tiene la forma

$$I[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}[g, \phi], \quad (3.12)$$

y depende de la métrica g y otros campos representados por ϕ . La rotación de Wick (3.8) transforma esta acción desde la sección lorentziana hacia la sección euclídea, donde el elemento de volumen $d^4x = dt d^3x$ se convierte en id^4x , y la métrica cambia su signatura a una positiva definida. En consecuencia, la acción euclídea I^E es regular y se define tal que

$$I[g, \phi] \rightarrow iI^E[g, \phi]. \quad (3.13)$$

De esta forma, la integral de camino (3.7), junto con (3.9), adopta la forma euclídea

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}g e^{-I^E[\phi, g]}. \quad (3.14)$$

¹En unidades no naturales, $\beta \equiv 1/k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann.

En el régimen semiclásico se aplica la aproximación WKB (o de punto silla), que consiste en expandir I^E en torno a la configuración que minimiza esta acción.

A primer orden, la función de partición está dominada por el valor de la acción evaluada en la solución clásica de las ecuaciones de movimiento:

$$Z \simeq e^{-I^E[g,\phi]}. \quad (3.15)$$

$I^E[g, \phi]$ corresponde a la acción euclídea *on-shell*, que debe considerarse en su forma renormalizada, incluyendo términos de borde y contratérminos necesarios para eliminar las divergencias que surgen en el límite asintótico.

Veremos a continuación cómo la acción euclídea proporciona una vía directa para calcular los potenciales termodinámicos de sistemas gravitacionales.

3.2.2 Ensembles termodinámicos

En teorías de gravedad acopladas a un campo de gauge, la elección del ensemble termodinámico está determinada por las condiciones de borde impuestas sobre los campos dinámicos. Desde un punto de vista físico, esto equivale a especificar el tipo de reservorio con el cual el agujero negro se encuentra en equilibrio. En particular, es posible considerar un sistema a temperatura y carga eléctrica fijas (T, Q) , o bien a temperatura y potencial eléctrico fijos (T, Φ) , lo cual define dos tipos de ensemble.

Esta distinción se hace evidente al examinar la primera ley de agujeros negros (3.3). En analogía con la mecánica estadística convencional, el potencial eléctrico Φ , conjugado a la carga Q , se puede interpretar como un potencial químico. Lo cual, deja de manifiesto que fijar Q define el ensemble canónico, mientras que fijar Φ define el ensemble gran canónico. A continuación se explica cómo estas elecciones se implementan a nivel de la acción Euclídea, a través de la imposición de condiciones de borde apropiadas, siguiendo [42, 43].

Ensemble gran canónico (potencial eléctrico Φ fijo)

Consideremos la acción del agujero negro con campo escalar que estudiaremos a lo largo de esta tesis (2.33), cuya variación conduce, entre otros términos, a la siguiente contribución de borde debido al campo de gauge

$$\delta I = \dots - \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n_\mu e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu} \delta A_\nu, \quad (3.16)$$

obtenida en (2.40), donde h es el determinante de la métrica inducida en el borde y n_μ es el vector normal a dicha superficie. Los términos omitidos en (3.16), incluyen aquellos que dan origen a las ecuaciones de movimiento, junto con términos de borde gravitacionales y dilatónicos.

Este principio variacional estará bien definido y entregará las ecuaciones de movimiento sólo si se impone la siguiente condición de borde:

$$\delta A_\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \quad (3.17)$$

Dicha condición equivale a fijar el potencial eléctrico Φ en el borde, definido como la diferencia de potencial entre el horizonte y el infinito. Por lo tanto, esta elección de condiciones de borde caracteriza al ensemble gran canónico.

Así, la función de partición (3.15) depende de la temperatura y potencial eléctrico $Z(T, \Phi)$. Y el potencial termodinámico que se encuentra a partir de la función de partición asociado a este ensemble es la energía libre de Gibbs

$$\mathcal{G} = M - TS - \Phi Q \quad (3.18)$$

A partir de la relación entre el potencial termodinámico y la función de partición $\mathcal{G} = -\beta^{-1} \ln Z$, junto con la relación entre función de partición y acción Euclídea (3.15), se obtiene la siguiente relación fundamental entre la acción euclídea y el potencial termodinámico:

$$I^E = \beta\mathcal{G}. \quad (3.19)$$

Esta es la llamada relación cuántico-estadístico.

Ensemble canónico (carga eléctrica Q fija)

El ensemble canónico corresponde, en cambio, a fijar la carga eléctrica Q . Esto se implementa, imponiendo la siguiente condición sobre el dual del tensor de Maxwell en su forma diferencial

$$\delta(e^{\gamma\phi} \star F)|_{\partial\mathcal{M}} = 0 \quad (3.20)$$

Para que la acción, cuya variación está dada por (3.16), admita esta condición de borde, es necesario agregar un término de borde adicional para el el campo de gauge

$$I_A = \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} e^{\gamma\phi} n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu. \quad (3.21)$$

La variación de este término es

$$\delta I_A = \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \delta(e^{\gamma\phi} \sqrt{-h} n_\mu F^{\mu\nu}) A_\nu + \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} e^{\gamma\phi} n_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu, \quad (3.22)$$

que por un lado cancelar exactamente la contribución en el borde que es proporcional a δA_ν en la acción original, y por otro lado, contribuye con el término borde

$$\delta I = \dots + \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \delta(e^{\gamma\phi} \sqrt{-h} n_\mu F^{\mu\nu}) A_\nu, \quad (3.23)$$

que se anula para la condición impuesta (3.20), y así, la variación total de la acción queda bien definida también es este ensemble ².

Así, el término de borde asociado al campo de gauge que debe incluirse en la acción total está dado por con la condición de borde impuesta, y el término de borde general que debe incluir en la acción total (2.57) es

$$I_A = \begin{cases} 0, & \text{Ensemble gran canónico, } \delta(A_\mu)|_{\partial\mathcal{M}} = 0 \\ \frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} e^{\gamma\phi} n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu, & \text{Ensemble canónico, } \delta(e^{\gamma\phi} \star F)|_{\partial\mathcal{M}} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Para el ensemble canónico, la función de partición (3.15) dependerá de la temperatura y carga eléctrica $Z(T, Q)$, que en general difiere de $Z(T, \Phi)$. Ahora, el potencial termodinámico que corresponde al ensemble canónico es la energía libre de Helmholtz

$$\mathcal{F} = M - TS \quad (3.25)$$

De igual forma, con $\mathcal{F} = -\beta^{-1} \ln Z$, junto con la función de partición (3.15), se obtiene la relación cuántico-estadístico para el ensemble canónico:

$$I^E = \beta \mathcal{F}. \quad (3.26)$$

Cabe destacar que la energía libre de Helmholtz y Gibbs se relacionan a través de la transformación de Legendre $\mathcal{F}(T, Q) = \mathcal{G}(T, \Phi) + \Phi Q$.

3.2.3 Temperatura de Hawking

El mismo procedimiento empleado para obtener la función de partición resulta también útil para deducir una expresión geométrica para la temperatura de Hawking, consistente

²Con la definición $\star F = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} dx^\sigma \wedge dx^\rho$ y $\sqrt{-g} \delta_\mu^x = \sqrt{-h} n_\mu$ se puede apreciar que las condiciones $\delta(e^{\gamma\phi} \sqrt{-h} n_\mu F^{\mu\nu})|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ y $\delta(e^{\gamma\phi} \star F)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ son equivalentes

con la temperatura obtenida a partir de la gravedad de superficie κ en el horizonte del agujero negro.

Consideremos una métrica estática y esféricamente simétrica de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.27)$$

Cerca del horizonte del agujero negro r_+ , definido por la condición $f(r_+) = 0$, se puede realizar el cambio de variable

$$f(r) \simeq f'(r_+)(r - r_+) \equiv R^2, \quad (3.28)$$

y aplicar la rotación de Wick temporal (3.8). La métrica (3.27) adopta entonces la forma euclídea

$$ds^2 = R^2d\tau^2 + \frac{4}{f'(r_+)^2}dR^2 + \dots, \quad (3.29)$$

la cual posee la estructura de un espacio plano en coordenadas polares, salvo por un factor conforme. Explícitamente,

$$ds^2 = \frac{4}{f'(r)^2} [R^2d\Theta^2 + dR^2 + \dots], \quad (3.30)$$

si se introduce la coordenada angular

$$\Theta \equiv \frac{f'(r_+)}{2}\tau, \quad (3.31)$$

De la transformación (3.28) se deduce que el origen de la coordenada radial R coincide con el horizonte. Para evitar una singularidad cónica en el horizonte $R = 0$, se debe imponer una periodicidad sobre la coordenada angular tal que $\Theta \in [0, 2\pi]$. En consecuencia, la coordenada euclídea τ es también periódica, con periodo

$$\beta = \frac{4\pi}{f'(r_+)}, \quad (3.32)$$

donde hemos usado la relación de β con la temperatura y el tiempo euclídeo a través de (3.11). Entonces, la periodicidad (3.32) se interpreta como la inversa de la temperatura del agujero negro $T = 1/\beta$,

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_+}. \quad (3.33)$$

Esta temperatura es uniforme sobre el horizonte, en concordancia con la ley cero de la termodinámica de agujeros negros.

3.3 Estabilidad termodinámica global

La estabilidad termodinámica de un sistema se caracteriza por la tendencia al equilibrio como respuesta frente a las fluctuaciones de sus parámetros termodinámicos. En el contexto de agujeros negros, los criterios de estabilidad pueden formularse como consecuencia directa de:

- La primera ley de la termodinámica: $dM = TdS + \Phi dQ$
- La segunda ley de la termodinámica: $dS \geq 0$

Es importante distinguir entre estabilidad global y estabilidad local. La estabilidad local, pero está asociada a un máximo local de la entropía y describe la respuesta del sistema frente a pequeñas perturbaciones en los parámetros termodinámicos en torno al equilibrio. No entraremos en detalles sobre este punto, pues no es central para el análisis de transiciones de fase que realizamos en este trabajo. Basta con mencionar que es bien sabido que agujeros negros más simples en espacios asintóticamente planos, como Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr son localmente inestables desde el punto de vista termodinámico [44, 45, 46], en el sentido que pequeñas fluctuaciones termodinámicas los puede llevar a evaporarse o crecer indefinidamente. En contraste, los agujeros negros en espacios asintóticamente Anti-de Sitter pueden alcanzar estabilidad térmica gracias al efecto confinante del fondo AdS. Un resultado relevante para el presente trabajo, es que la versión asintóticamente plana de los agujeros negros con campo escalar expuestos en la sección 2.2.1 presenta estabilidad local termodinámica, como se mostró en [13, 15]. Este comportamiento podría estar relacionado con las propiedades de la autointeracción del campo escalar, que decae en el infinito espacial, pero actúa de manera efectiva “caja” cerca del horizonte.

En lo que sigue nos enfocaremos en los criterios de estabilidad termodinámica global, asociada al máximo global de la entropía. De estos criterios depende la aparición y la naturaleza de las transiciones de fase. A continuación, derivaremos dichos criterios para cada ensemble termodinámico, siguiendo el enfoque presentado en [47].

3.3.1 Estabilidad termodinámica en el ensemble gran canónico

Consideremos un sistema en equilibrio con un reservorio a temperatura T y potencial eléctrico Φ . En este ensemble se permite un intercambio tanto de masa ($dM \neq 0$) como de carga eléctrica ($dQ \neq 0$) entre el sistema y el reservorio, asumiendo que este último

es lo suficientemente grande para no ver afectado su equilibrio debido al intercambio. Comenzamos aplicando la primera ley de la termodinámica al reservorio

$$dM_r = TdS_r - \Phi dQ_r, \quad (3.34)$$

donde M_r , S_r y Q_r , son respectivamente su masa, entropía y carga eléctrica. La conservación de masa y carga para el conjunto formado por el sistema y el reservorio implica

$$\begin{aligned} dM_r &= -dM, \\ dQ_r &= -dQ. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se favorecerá aquel proceso que satisface la segunda ley de la termodinámica aplicada al conjunto sistema más reservorio:

$$dS + dS_r \geq 0 \quad (3.36)$$

Usando las expresiones (3.34) y (3.35) se obtiene

$$dS + \frac{1}{T}(-dM + \Phi dQ) \geq 0. \quad (3.37)$$

Lo cual es equivalente a

$$d\mathcal{G} \leq 0, \quad (3.38)$$

donde $\mathcal{G} = M - TS - \Phi Q$ es la energía libre de Gibbs. Por lo tanto, en el ensemble gran canónico, el estado termodinámicamente estable es aquel que minimiza la energía libre de Gibbs a temperatura y potencial eléctrico fijos. En particular, si existen dos fases tales que $\mathcal{G}_1(T, \Phi) < \mathcal{G}_2(T, \Phi)$, entonces la fase 1 es globalmente estable, mientras que la fase 2 es inestable.

3.3.2 Estabilidad termodinámica en el ensemble canónico

Consideremos ahora un sistema en equilibrio termodinámico con un reservorio a temperatura T y carga eléctrica Q fijas. En este caso, el sistema puede intercambiar masa ($dM \neq 0$) y potencial eléctrico ($d\Phi \neq 0$). Dado que la carga eléctrica en este ensemble está fija ($dQ = 0$), la primera ley para reservorio se reduce a la siguiente expresión, usando (3.35),

$$dS_r = \frac{dM_r}{T} = -\frac{dM}{T}. \quad (3.39)$$

Entonces, la segunda ley para el sistema completo implica

$$dS + dS_r = dS - \frac{dM}{T} \geq 0. \quad (3.40)$$

Lo que se puede reescribir como

$$d\mathcal{F} \leq 0, \quad (3.41)$$

donde $\mathcal{F} = M - TS$ es la energía libre de Helmholtz. Por consiguiente, en el ensemble canónico, la fase termodinámicamente estable es aquella que minimiza la energía libre de Helmholtz a temperatura y carga eléctrica fijas.

Finalmente, una transición de fase se manifiesta como una discontinuidad en las derivadas del potencial termodinámico relevante. En particular, si bajo los criterios de estabilidad global se produce una discontinuidad en la n -ésima derivada de \mathcal{G} (en el ensemble gran canónico) o de \mathcal{F} (en el ensemble canónico), entonces el sistema experimenta una transición de fase de o

3.4 Termodinámica de agujeros negros en espacio de fase extendido

Pese a que la termodinámica de agujeros negros suele estudiarse en espacios asintóticamente planos, estas soluciones con dichas condiciones de borde no suelen ser localmente estables en el sentido termodinámico [44] (Las condiciones precisas de estabilidad se discutirán en la sección 3.3). Una forma de estabilizar estos agujeros negros consiste en introducir una constante cosmológica negativa, de modo que su geometría sea asintóticamente Anti-de Sitter (*AdS*).

Cuando se incluye una constante cosmológica, la literatura indica que el tratamiento termodinámico estándar debe modificarse mediante una extensión del espacio de fase. Esta formulación ampliada permite capturar fenómenos que no aparecen en el esquema tradicional, tales como transiciones de fase tipo Van der Waals, puntos triples, transiciones de fase reentrantes, etc [24]. A continuación se presentará cómo se realiza esta extensión.

Al comparar la primera ley de la termodinámica de agujeros negros (3.3) con la primera ley de la termodinámica estándar, se aprecia una analogía parcial debido a la ausencia de un término equivalente al trabajo mecánico PdV en sistemas no gravitacionales. Lo cual motiva la pregunta que surge de forma natural: ¿Existe una correcta noción de presión y volumen en el contexto gravitatorio? La incorporación de estas cantidades resulta conceptualmente no trivial, pues no poseen una interpretación geométrica directa [25].

La clave está en que una constante cosmológica negativa Λ contribuye al tensor energía-momento como una presión de vacío. Esto permite definir

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (3.42)$$

de modo que P juega el rol del término faltante en la primera ley. Promover Λ a una variable termodinámica constituye el paso fundamental en esta construcción, lo que permite formular una primera ley extendida para agujeros negros. En la siguiente subsección se presenta el fundamento teórico que respalda esta interpretación.

3.4.1 Constante cosmológica como variable termodinámica

La idea de tratar Λ como cantidad dinámica, en lugar de un parámetro universal fijo, fue planteada por [48, 49]. La motivación proviene de resultados en supergravedad [50, 51], donde un campo gauge totalmente antisimétrico acoplado a gravedad genera una constante cosmológica efectiva como constante de integración en las ecuaciones de movimiento.

Sin embargo, este mecanismo no es exclusivo de supergravedad, y se generaliza en [52], donde se desarrolla una formulación completamente covariante en la que $\Lambda(x)$ se introduce explícitamente como un campo dinámico dentro de la acción y su valor constante emerge como consecuencia de las ecuaciones de movimiento. Para ello se introduce un campo auxiliar vectorial \mathcal{F}^μ , puramente gauge salvo por un modo cero global, canónicamente conjugado a la constante cosmológica $\Lambda(x)$, que puede ser tratada como variable dinámica.

La acción propuesta es

$$S = \int d^4x [\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + 2\Lambda\partial_\mu\mathcal{F}^\mu], \quad (3.43)$$

que al extremizarla con respecto a los campos $g_{\mu\nu}(x)$, $\Lambda(x)$ y $F^\mu(x)$, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento respectivamente

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu\mathcal{F}^\mu - \sqrt{-g} &= 0, \\ \partial_\mu\Lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En esta formulación, Λ aparece como un campo dinámico en la acción, pero su carácter constante se obtiene como resultado de las ecuaciones de movimiento, resolviendo la dificultad conceptual de variar Λ a nivel de la acción, mientras se recuperan las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica.

3.4.2 Termodinámica de agujeros negros en espacio de fase extendido

En [26] se obtuvo, mediante un enfoque geométrico, la forma explícita de la primera ley extendida para agujeros negros en presencia de constante cosmológica, dicha generalización

se expresa como

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ + VdP. \quad (3.45)$$

Esta expresión muestra que la masa del agujero negro M no corresponde a la energía interna del sistema, sino a su entalpía. En termodinámica convencional, la entalpía M se relaciona con la energía interna U a través de la transformada de Legendre

$$M = U + PV, \quad (3.46)$$

y se interpreta como la energía interna U más la energía PV requerida para colocar el agujero negro en un entorno con constante cosmológica negativa.

Por otro lado, la variable conjugada de la presión termodinámica (3.42), es el volumen termodinámico y se define como

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,J,Q}. \quad (3.47)$$

Este volumen fue interpretado en [53] con un sentido estrictamente termodinámico, pues no representa un volumen geométrico delimitado por el horizonte.

En algunos casos simples, como por ejemplo el caso del volumen termodinámico para un agujero negro de Reissner-Nordstöm-AdS

$$V = \frac{4}{3}\pi r_+^3, \quad (3.48)$$

pareciera coincidir con un volumen geométrico asociado a una esfera de radio del horizonte de eventos r_+ , pero recordemos que la coordenada radial se vuelve tipo tiempo dentro del horizonte, por lo que esta interpretación no es física.

Para agujeros negros más complejos en presencia de rotación o campos escalares, el volumen termodinámico difiere incluso de esa identificación ingenua, lo que remarca su carácter puramente termodinámico.

Desigualdad isoperimétrica inversa

En geometría euclidiana, la desigualdad isoperimétrica establece que, para un dominio conexo de volumen V y área A , la relación

$$\mathcal{R} = \left(\frac{(d-1)V}{\omega_{d-2}} \right)^{\frac{1}{d-1}} \left(\frac{\omega_{d-2}}{A} \right)^{\frac{1}{d-2}} \quad (3.49)$$

satisface $\mathcal{R} \leq 1$, donde la igualdad se cumple para la esfera. Aquí,

$$\omega_d = \frac{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \quad (3.50)$$

es el volumen de la esfera d -esfera unitaria.

Motivados por esta relación geométrica, en [54] estudiaron si el volumen termodinámico de un agujero negro AdS podía satisfacer alguna propiedad similar. Encontraron que los agujeros negros con horizonte compacto satisfacen la desigualdad isoperimétrica inversa:

$$\mathcal{R} \geq 1. \quad (3.51)$$

Esta desigualdad se interpreta como que, para un volumen termodinámico V dado, la entropía del agujero negro se encuentra acotado superiormente por la del agujero negro de Schwarzschild-AdS, que satura la igualdad $\mathcal{R} = 1$

Posteriormente, en [55], se mostró que existen agujeros negros AdS no compactos (denominados agujeros negros super-entrópicos) que violan esta desigualdad. Esto indica que su validez no es universal, sino que constituye una conjetura aplicable a ciertas familias de agujeros negros con horizonte compacto.

3.4.3 Fórmula de Smarr

Una robusta motivación para interpretar la constante cosmológica como presión termodinámica (3.42) surge de la estructura de la fórmula de Smarr. Para agujeros negros en espacios asintóticamente planos, esta relación se escribe como

$$M = 2TS + 2\Omega J + \Phi Q, \quad (3.52)$$

la cual fue deducida por [56] en contexto de agujeros negros a partir de argumentos de homogeneidad y escalamiento dimensional. Esta fórmula es análoga a la relación de Gibbs-Duhem en termodinámica convencional.

Sin embargo, cuando $\Lambda \neq 0$, la expresión (3.52) no se satisface, ya que la constante cosmológica introduce una escala adicional cuya contribución debe considerarse en el análisis de escala.

Al identificar (3.42), y permitir su contribución en la primera ley, la fórmula de Smarr adquiere la forma extendida [26, 24]

$$M = 2TS + 2\Omega J + \Phi Q - 2VP. \quad (3.53)$$

De tal forma que la incorporación del término VdP en la primera ley no es arbitraria, sino que es necesario para asegurar la consistencia entre la primera ley y la fórmula de Smarr.

Capítulo 4

Criticalidad agujeros negros con pelo

4.1 Criticalidad de agujeros negros con pelo: caso general

4.1.1 Termodinámica en espacio de fase extendido

En esta sección, investigaremos la termodinámica y comportamiento crítico de la clase general de soluciones para el cual el campo escalar contiene un parámetro extra, σ , que controla tanto el acoplamiento entre el campo escalar y el campo de gauge, como la autointeracción del potencial del campo escalar. La acción es

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - U(\phi) \right], \quad (4.1)$$

donde

$$\gamma \equiv \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

y el potencial del campo escalar es

$$U(\phi) = \frac{2\alpha}{\sigma^2} \left[\frac{\sigma - 1}{\sigma + 2} \sinh \left(\frac{\sigma + 1}{l_\sigma} \phi \right) - \frac{\sigma + 1}{\sigma - 2} \sinh \left(\frac{\sigma - 1}{l_\sigma} \phi \right) + \frac{4\sigma^2 - 4}{\sigma^2 - 4} \sinh \left(\frac{\phi}{l_\sigma} \right) \right] \\ + \frac{\sigma^2 - 4}{3\sigma^2} \left[\frac{\sigma - 1}{\sigma + 2} \exp \left(-\frac{\sigma + 1}{l_\sigma} \phi \right) + \frac{\sigma + 1}{\sigma - 2} \exp \left(\frac{\sigma - 1}{l_\sigma} \phi \right) + \frac{4\sigma^2 - 4}{\sigma^2 - 4} \exp \left(-\frac{\phi}{l_\sigma} \right) \right] \Lambda, \quad (4.3)$$

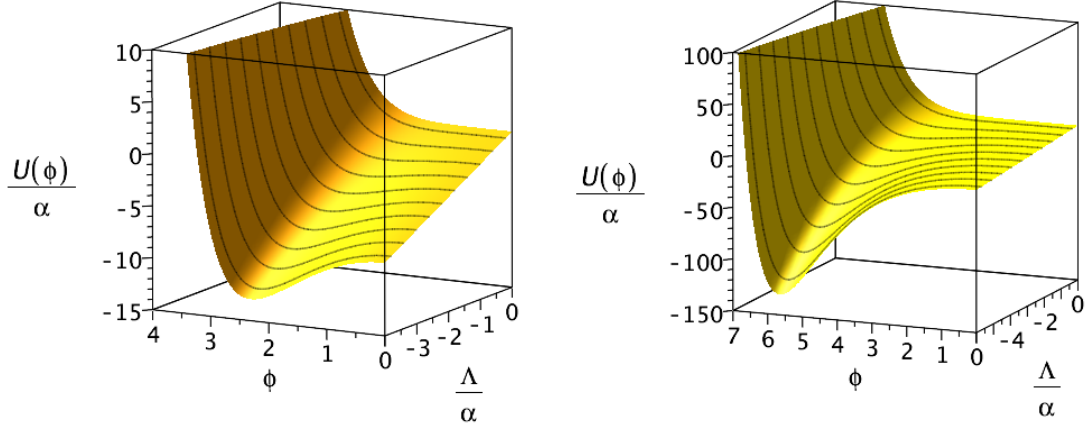


Figure 4.1: The scalar field potential $U(\phi)$ vs ϕ . Left-hand panel: $\sigma = \sqrt{3}$. Right-hand panel $\sigma = 3$. $\alpha > 0$.

donde $l_\sigma \equiv \sqrt{\sigma^2 - 1}$. Nos referimos al parámetro σ como el "parámetro" de pelo en el sentido que se recupera el agujero negro RN-AdS usual para el valor específico de $\sigma = -1$. Cuando $\sigma \leq -1$, el acoplamiento del exponente es $0 \leq \gamma < 1$. Estamos interesados en el caso $\sigma > 1$ en donde el acoplamiento es más fuerte, $\gamma > 1$, y así la contribución del campo escalar se vuelve no trivial en su capacidad de introducir cambios relevantes en las propiedades termodinámicas que proponemos explorar. El límite $\sigma = 1$ corresponde al agujero negro de Schwarzschild y el límite $\sigma \rightarrow \infty$ en particular se analizará en el Apéndice B.

Para ϕ pequeño, el potencial decae de acuerdo con el límite asintótico AdS

$$U(\phi) = -\frac{6}{\ell^2} - \frac{\phi^2}{\ell^2} - \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma^2 - 3}{\sigma^2 - 1} \right) \frac{\phi^4}{\ell^2} + \mathcal{O}(\phi^5) \quad (4.4)$$

donde $\Lambda = -3\ell^2$. Como se muestra en Fig. 4.1, el potencial está acotado por debajo y tiene un mínimo global para un valor finito de ϕ , para cualquier valor de Λ , si $\sigma > 1$ y $\alpha > 0$. Asumiremos $\sigma > 1$ y $\alpha > 0$ de ahora en adelante.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} U(\phi) - T_{\mu\nu}^{\text{EM}} &= 0, \\ \square \phi - \gamma e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{dU(\phi)}{d\phi} &= 0, \\ \nabla_\mu (e^{\gamma\phi} F^{\mu\nu}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $T_{\mu\nu}^{\text{EM}} = 2e^{\gamma\phi}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2)$ es el tensor energía-momento para el campo electromagnético. La solución de las ecuaciones de movimiento, dado el potencial (4.3), es

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2}{f(x)}dx^2 + d\Sigma^2 \right], \\ A_{\mu} &= \frac{q}{\sigma} \left(-\frac{1}{x^{\sigma}} + \frac{1}{x_{+}^{\sigma}} \right) \delta_{\mu}^t, \\ \phi &= l_{\phi} \ln(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde η y q son las constantes de integración relacionadas con las cargas conservadas, es decir, la masa y carga eléctrica de los agujeros negros (campo escalar es “pelo secundario”, pues no tiene asociada una carga conservada) y $d\Sigma \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Las funciones métricas $f(x)$ y $\Omega(x)$ son

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\ell^2} + \alpha \left[\frac{1}{\sigma^2 - 4} - \frac{x^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{x^{-\sigma}}{\sigma - 2} - \frac{x^{\sigma}}{\sigma + 2} \right) \right] + \frac{x}{\Omega(x)} \left[1 - \frac{2q^2(x^{\sigma} - 1)}{\sigma(\sigma - 1)x^{\sigma}} \right], \\ \Omega(x) &= \frac{\sigma^2 x^{\sigma-1}}{\eta^2 (x^{\sigma} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El horizonte del agujero negro está localizado en $x = x_{+}$, donde $f(x_{+}) = 0$. No hay pérdida de generalidad en asumir $\eta \geq 0$. La coordenada canónica radial está dada por el cambio de variable $r^2 = \Omega(x)$. En la región asintótica ($x \rightarrow 1$)

$$x = 1 + \frac{1}{\eta r} - \frac{\sigma^2 - 1}{24} \left(\frac{1}{\eta^3 r^3} - \frac{1}{\eta^4 r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}) \right). \quad (4.8)$$

Ya que la masa del potencial del campo escalar es $m^2 = -2\ell^{-2}$, debería esperarse que el campo escalar decaiga como $\phi(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})$. Resulta que, en efecto, $A = l_{\sigma}\eta^{-1}$ y $B = -\frac{1}{2}l_{\sigma}\eta^{-2}$. So, en este caso, el campo escalar obedece condiciones de borde mixtas ya que ambos modos A y B no se anulan. Es conveniente introducir una función $W = W(A)$ que relaciona ambos A y $B = B(A)$ a través de $B(A) \equiv \frac{dW(A)}{dA}$. Se sigue de forma directa, que

$$W(A) = -\frac{A^3}{6l_{\sigma}}. \quad (4.9)$$

Esta expresión para $W(A)$ es relevante para el cálculo de de la contribución a la acción euclídea on-shell proveniente del campo escalar.

4.1.2 Acción euclídea y la termodinámica usual

Aquí usaremos contratérminos consistetes con las condiciones de borde mixtas del campo escalar [57, 36] para calcular la acción Euclídea on Shell. Hacemos el cálculo usando la condición de borde $\partial A_\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ para el campo de gauge. Una vez que la acción está regularizada, usamos el formalismo de Brown-York (2.3) para calcular la el tensor de estés superficial y la energía conservada. Finalmente, verificamos que la primera ley de la termodinámica de agujeros negros y la relación cuántico-estadístico. Debemos enfatizar que el parámetro del pelo σ se mantiene arbitrario y este análisis es más general que el presentado en [58].

La acción regularizada completa I^E en la sección euclídea está compuesta respectivamente por el término de *bulk* I_{bulk}^E , dado por la ecuación (2.33), el término de borde de Gibbons–Hawking I_{GH}^E , el contratérmino gravitacional para espacios asintóticamente AdS I_g^E y el término de borde asociado al campo escalar I_ϕ^E , que fueron presentados en la sección 2.2.2 ¹. Dicha acción se expresa como

$$I^E = I_{\text{bulk}}^E - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{\ell} + \frac{\ell\mathcal{R}}{2} \right) + \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{\phi^2}{2\ell} + \frac{W(A)}{\ell A^3} \phi^3 \right], \quad (4.10)$$

donde $\mathcal{R} = 2/\Omega(x_b)$ es el escalar de Ricci para la foliación $x = x_b = \text{cte}$, donde b se refiere al borde, y h_{ab} es la métrica inducida en el borde $\partial\mathcal{M}$. Al final del cálculo se toma el límite correspondiente al borde asintótico $x_B \rightarrow 1$.

Procedemos calculando cada uno de los términos (4.10) por separado. Usando las ecuaciones de movimiento, el término del *bulk* reducirse a la expresión

$$I_{\text{bulk}}^E = -\frac{\beta}{4\eta} \left[f(x_b)\Omega(x_b) - 2\eta^2 \int_{x_+}^{x_b} \Omega(x) dx \right]. \quad (4.11)$$

Al expandir este resultado en potencias de $(x_b - 1)$, se obtiene una contribución finita, de orden $(x_b - 1)^0$ junto con términos divergentes, de orden $(x_b - 1)^{-3}$.

$$I_{\text{bulk}}^E = \beta \left[\frac{1}{4\eta} + \frac{\alpha}{6\eta^3} - \frac{q^2}{\eta(\sigma - 1)} + \frac{\sigma(x_+^\sigma + 1)}{4\eta(x_+^\sigma - 1)} - \frac{\sigma^2 - 1}{48\eta^3\ell^2} \right] + \frac{\beta}{2\eta^3\ell^2(x_b - 1)^3} + \mathcal{O}(x_b - 1). \quad (4.12)$$

¹Notar que las componentes de la acción total, mostradas en capítulos previos están en la sección Lorentziana, por lo que difieren por un signo respecto a la acción en la sección Euclídea.

Los siguientes corresponden a terminos de borde. Por lo que se calcularán sobre la hipersuperficie $x = x_b$, cuyo elemento de línea está dado por $h_{ab}dx^a dx^b = \Omega(x)[-f(x)dt^2 + d\Sigma]$.

Para el cálculo del término de Gibbons–Hawking se requiere conocer el tensor de curvatura extrínseca y su traza, respectivamente

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{\Omega'}{2\eta} \sqrt{\frac{f}{\Omega}} \left[\frac{(f\Omega)'}{\Omega'} \delta_a^t \delta_b^t - \delta_a^\theta \delta_b^\theta - \sin^2 \theta \delta_a^\phi \delta_b^\phi \right], \\ K &= -\frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{f}{\Omega}} \left(\frac{f'}{f} + \frac{3\Omega'}{\Omega} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde, la prima denota derivada con respecto a x . Y para su calculo debemos recordar la definición de la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu$ y su proyección sobre la hipersuperficie $x = \text{cte}$ $K_{ab} = \left(\frac{dx^\mu}{dy^a} \right) \left(\frac{dx^\nu}{dy^b} \right) K_{\mu\nu}$. El vector unitario ortogonal a dicha superficie está dado por $n_\mu = -\frac{\delta_\mu^r}{\sqrt{g^{rr}}}$.

Con esto, el término de Gibbons-hawking

$$\begin{aligned} I_{GH}^E &= \beta \left[\frac{3q^2}{2\eta(\sigma-1)} - \frac{3}{4\eta} - \frac{\alpha}{4\eta^3} + \frac{\sigma^2-1}{16\eta^3\ell^2} \right] + \frac{3\beta}{2\eta^3\ell^2(x_b-1)^3} - \frac{\beta}{\eta(x_b-1)} \\ &+ \mathcal{O}(x_b-1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por otro lado, el contratérmino gravitacional es

$$\begin{aligned} I_g^E &= \beta \left[\frac{1}{2\eta} + \frac{\alpha}{6\eta^3} - \frac{q^2}{\eta(\sigma-1)} + \frac{\sigma^2-1}{8\eta^3\ell^2} \right] + \frac{\beta}{\eta^3\ell^2(x_b-1)^3} + \frac{\beta(8\eta^2\ell^2 - \sigma^2 + 1)}{8\eta^3\ell^2(x_b-1)} \\ &+ \mathcal{O}(x_b-1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Y para el contratérmino del campo escalar, consideramos la expresión (4.9) para obtener

$$I_\phi^E = \frac{\beta(\sigma^2-1)}{6\eta^3\ell^2} + \frac{\beta(\sigma^2-1)}{8\eta^3\ell^2(x_b-1)} + \mathcal{O}(x_b-1) \quad (4.16)$$

Se puede apreciar que al sumar todas las contribuciones, los términos divergentes $\propto (x_b-1)^{-1}$ y $\propto (x_b-1)^{-3}$ se cancelan entre sí en el límite $x_B \rightarrow 1$, dando origen a un resultado finito

$$I^E = I_{\text{bulk}}^E + I_{GH}^E + I_g^E + I_\phi^E = \beta \left[\frac{1}{4\eta} + \frac{\alpha}{12\eta^3} - \frac{q^2}{\eta(\sigma-1)} + \frac{\sigma+1+(\sigma-1)x_+^\sigma}{4\eta(x_+^\sigma-1)} \right]. \quad (4.17)$$

Se mostrará explícitamente que la acción total I^E satisface la relación cuántico-estadística. Pero antes, es necesario calcular las cantidades termodinámicas para este agujero negro.

La energía conservada E se puede calcular a partir del formalismo de Brown-York (2.3), que entrega el tensor de estrés en el borde τ_{ab} . Para la acción completa (4.10)

$$\tau_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h^{ab}} = -\frac{1}{\kappa} \left(K_{ab} - h_{ab} K + \frac{2}{\ell} h_{ab} - \ell G_{ab} \right) - \frac{h_{ab}}{2\kappa\ell} \left[\frac{\phi^2}{2} + \frac{W(A)}{A^3} \phi^3 \right], \quad (4.18)$$

y recordando que, según el formalismo de Brown-York, la energía conervada (2.67) es

$$E = \oint_{s^2_\infty} d^2x \sqrt{\Sigma} n^a \tau_{ab} \xi^b, \quad (4.19)$$

donde $\Sigma = \Omega^2(x_b) \sin^2 \theta$ es el determinante de la métrica en la 2-esfera $ds^2_\Sigma = \Omega(x_b) d\Sigma$, $\xi^a = \delta^a_t$ es el vector de Killing tipo tiempo y n_a , el vector unitario normal a $t = \text{cte}$, dado por

$$n_a = \frac{\delta_a^t}{\sqrt{-g^{tt}}} = \sqrt{\Omega f} \delta_a^t. \quad (4.20)$$

Para el cálculo explícito de la energía conservada, sólo contribuirá con un término no nulo en la energía aquel término de τ_{tt} que es dominante en la expansión de potencias de $(x_b - 1)$. Esto es,

$$\tau_{tt} = \frac{1}{4\pi\ell} \left(\frac{q^2}{\sigma - 1} - \frac{\alpha + 3\eta^2}{6\eta^2} \right) (x_b - 1) + \mathcal{O}\{(x_b - 1)^2\}. \quad (4.21)$$

Con este resultado, la energía conservada es

$$E = \frac{q^2}{\eta(\sigma - 1)} - \frac{\alpha + 3\eta^2}{6\eta^3}. \quad (4.22)$$

Las restantes cantidades termodinámicas se obtienen de manera estándar. La carga eléctrica Q se calcula mediante la ley de Gauss evaluada en el borde,

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_{s^2_\infty} e^{\gamma\phi} \star F = \frac{q}{\eta}, \quad (4.23)$$

$$\Phi = \frac{q}{\sigma x_+^\sigma} (x_+^\sigma - 1).$$

y su potencial conjugado Φ se define como la diferencia del potencial entre el horizonte y el infinito, es decir, $\Phi \equiv A_t(x = x_+) - A_t(x = 1)$. La entropía de Hawking–Bekenstein se obtiene a partir del área del horizonte de eventos $S = A/4$, donde $A = 4\pi\Omega(x)$ es el área del horizonte de eventos, y la temperatura de Hawking T ,

$$S = \frac{\pi\sigma^2 x_+^{\sigma-1}}{\eta^2 (x_+^\sigma - 1)^2}, \quad (4.24)$$

$$T = -\frac{f'(x_+)}{4\pi\eta} = \frac{3E}{2S} - \frac{x_+^{-\frac{\sigma-1}{2}}}{4\sigma\sqrt{\pi S}} \left[\frac{4\pi\sigma Q^2}{x_+ S} + x_+^\sigma (\sigma - 1) + \sigma + 1 \right],$$

se determina exigiendo la regularidad de la métrica euclidiana, eliminando la singularidad cónica en el horizonte (3.33). Se puede verificar que la primera ley de la termodinámica de agujeros negros estándar $dE = TdS + \Phi dQ$ se satisface. Finalmente, se comprueba que la acción euclidiana regularizada (4.10), en cuyo cálculo se obtiene (4.17), satisface la relación cuántico-estadístico,

$$\frac{I^E}{\beta} = E - TS - \Phi Q \equiv \mathcal{G}(T, \Phi). \quad (4.25)$$

Se identifica \mathcal{G} como el potencial termodinámico del ensamble gran canónico. La primera ley se puede reescribir como $d\mathcal{G} = -SdT - Qd\Phi$, de donde se desprende que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T, \Phi)$.

4.2 Fórmula de Smarr y desigualdad isoperimétrica inversa

Ahora consideraremos el espacio de fase extendido, donde la constante cosmológica representa la presión de un fluido perfecto de densidad $\rho = -P$ con $P = -\Lambda/(8\pi)$. La primera ley extendida recordemos que es

$$dE = TdS + VdP + \Phi dQ, \quad (4.26)$$

donde V es el volumen termodinámico, que está dado por

$$V \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial P} \right)_{Q,S} = \frac{2\pi\sigma^2}{3\eta^3} \frac{(\sigma+1)x_+^{2(\sigma-1)} + (\sigma-1)x_+^{\sigma-2}}{(x_+^\sigma - 1)^3} \quad (4.27)$$

Las cantidades termodinámicas involucradas en la primera ley satisfacen del agujero negro están relacionadas a través de la fórmula de Smarr, que se puede obtener a partir de argumentos de escalamiento dimensional, que se demostró en e la sección A.2 del apéndice A, para la solución de agujero negro con campo escalar que hemos estudiado. En este caso, la teoría tiene dos constantes dimensionales, Λ y α , además de las variables termodinámicas estándar (E, T, S, Q, Φ) , por lo que la fórmula de Smarr incorpora un par extra de variables termodinámicas conjugadas, PV y $\alpha\mathcal{B}$,

$$E = 2TS + \Phi Q - 2PV - 2\alpha\mathcal{B}, \quad (4.28)$$

donde $\mathcal{B} \equiv (\partial E / \partial \alpha)_{S,Q,P}$ mide cómo cambia E respecto a variaciones de α . Esto sugiere que la primera ley debería poder extender para incorporar el par extra de cantidades termodinámicas como

$$dE = TdS + VdP + \Phi dQ + \mathcal{B}d\alpha, \quad (4.29)$$

una vez conociendo la interpretación física concreta del parámetro α . Sin embargo, en este trabajo trataremos α como una constante fija, y de esta forma, su variable conjugada, \mathcal{B} no será relevante para nuestro análisis.

Por otro lado, usando (4.8), el volumen termodinámico V se puede expandir en potencias de r_+ como, $V = 4\pi r_+^3/3 + \mathcal{O}(r_+)$. En otras palabras, la contribución dominante es el volumen Euclídeo, como se espera del hecho de que para agujeros negros grandes, el campo escalar y su auto-interacción son despreciables en el horizonte. En general, vimos que el volumen termodinámico V satisface la desigualdad isoperimétrica inversa

$$\mathcal{R} \equiv \left[\frac{(d-1)V}{\omega_{d-2}} \right]^{\frac{1}{d-1}} \left(\frac{\omega_{d-2}}{A} \right)^{\frac{1}{d-2}} \geq 1, \quad (4.30)$$

donde d es el número de dimensiones del espacio-tiempo, ω_{d-2} es el área de la sección transversal unitaria, y A es el área del horizonte de eventos del agujero negro. En nuestro caso, con $d = 4$ y $\omega_2 = 4\pi$, se obtiene

$$\mathcal{R}_\sigma(x_+) = x_+^{-\frac{1}{6}(\sigma+1)} \left[\frac{\sigma+1}{2\sigma} x_+^\sigma + \frac{\sigma-1}{2\sigma} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.31)$$

que es la expresión general para la razón \mathcal{R} . A partir de las siguientes observaciones

$$\begin{aligned} \lim_{x_+ \rightarrow 1} \mathcal{R}_\sigma(x_+) &= 1, \\ \lim_{x_+ \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\sigma(x_+) &\rightarrow \infty, \\ \frac{d\mathcal{R}_\sigma(x_+)}{dx_+} &= \frac{2^{\frac{2}{3}} x_+^{-\frac{1}{6}\sigma - \frac{7}{6}} (x_+^\sigma - 1)(\sigma - 1)}{12\sigma^{\frac{1}{3}} [x_+^\sigma(\sigma + 1) + \sigma - 1]^{\frac{2}{3}}} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

es directo ver que la desigualdad (4.30) se satisface, esto es $\mathcal{R}_\sigma(x_+) \geq 1$. La interpretación física es que para un volumen termodinámico fijo, el agujero negro cargado con pelo en AdS porta menos entropía que su contraparte $RN-AdS$, para el cual $\mathcal{R} = 1$. Lo cual se espera, pues la entropía restante, es portada en el campo escalar (grados de libertad del “pelo”) fuera del horizonte de eventos.

En lo que sigue, se reescalarán todas las variables en términos de la constante positiva fija α

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \frac{\eta}{\alpha}, & P &\rightarrow \frac{P}{\alpha}, & T &\rightarrow \frac{T}{\alpha}, \\ S &\rightarrow \alpha S, & Q &\rightarrow \sqrt{\alpha} Q, & M &\rightarrow \sqrt{\alpha} M, & V &\rightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} V \end{aligned} \quad (4.33)$$

tal que todas las variables termodinámicas sean adimensionales; por consiguiente, α no aparece explícitamente.

4.3 Termodinámica extendida

Con todas las cantidades termodinámicas computadas, ya se puede estudiar su termodinámica. El parámetro pelo σ introduce nuevo fenómeno de transiciones de fase reentrantes, además de transiciones de fase tipo *novel*. Se describirá cada una de ellas en detalle en la siguiente subsección.

4.3.1 Ensemble canónico

Potencial termodinámico

Comenzamos considerando la termodinámica en el espacio de fase extendido, manteniendo fija la carga eléctrica del agujero negro. La condición de borde apropiada para el campo de gauge en este ensamble corresponde a fijar la carga eléctrica en el borde $\delta(e^{\gamma\phi} \star F)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. El potencial termodinámico relevante en este ensamble es $\mathcal{F}(T, Q) = E - TS$ y se puede obtener a través de la transformación de Legendre del potencial termodinámico del ensamble gran canónico (4.25). Esto es equivalente a añadir el término de borde

$$I_A^E = -\frac{2}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} e^{\gamma\phi} n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu = \beta Q\Phi \quad (4.34)$$

en la acción euclídea, de modo que el potencial termodinámico resultante a temperatura y carga fija está dado por $\mathcal{F}(T, Q) = \beta^{-1} \tilde{I}^E = M - TS$, where $\tilde{I}^E = I^E + I_A^E$.

Ecuación de estado

Las variables termodinámicas calculadas en la sección anterior son de utilidad para estudiar la ecuación de estado $P(v, T)$ del sistema, que puede expresarse de forma paramétrica a través de la ecuación para la temperatura,

$$T = \frac{1}{4\pi\eta^3\Omega(x_+)} \left[\frac{2\eta^4[(\sigma+2)x_+^\sigma + 2\sigma - 2]Q^2}{\sigma(\sigma-1)x_+^\sigma} - 1 \right] - \frac{(\sigma+2)x_+^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} + (\sigma-2)x_+^{-\frac{1}{2}(\sigma-1)}}{4\pi\sigma\sqrt{\Omega(x_+)}} \quad (4.35)$$

y el volumen específico

$$v \equiv \frac{3V}{2S} = \frac{x_+^\sigma(\sigma+1) + \sigma - 1}{\eta(x_+^\sigma - 1)x_+} \quad (4.36)$$

donde $\eta = \eta(x_+, P, Q)$ se puede resolver de la ecuación del horizonte $f(x_+) = 0$ y se obtiene

$$\frac{2Q^2 x_+^{2-2\sigma} (x_+^\sigma - 1)^3 \eta^4}{\sigma^3 (\sigma - 1)} - \frac{(x_+^\sigma - 1)^2 \eta^2}{\sigma^2 x_+^{\sigma-2}} + \frac{x_+^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{x_+^{-\sigma}}{\sigma - 2} - \frac{x_+^\sigma}{\sigma + 2} \right) - \frac{1}{\sigma^2 - 4} - \frac{8\pi P}{3} = 0 \quad (4.37)$$

Estas tres ecuaciones (4.35), (4.36) y (4.37) representan la ecuación de estado $P(v, T)$ en forma paramétrica.

Para agujeros negros grandes, la ecuación de estado adopta la misma forma que la del agujero negro *RN-AdS* (Ver Apéndice C), es decir, $T = Pv + 1/(2\pi v) - 2Q^2/(\pi v^3) + \mathcal{O}(v^{-5})$, lo cual es válido independiente del valor del parámetro de pelo σ . Esto se debe a que, en dicho régimen, el campo escalar y su auto-interacción se vuelven despreciables cerca del horizonte, pues las correcciones inducidas por el campo escalar son subdominantes.

En contraste, estas contribuciones debido al campo escalar y auto-interacción adquieren relevancia en el caso de agujeros negros pequeños e intermedios, lo cual enriquece aun más su comportamiento termodinámico. Aparecen más que tipo VdW(estudiaremos), analizaremos en detalle. La ocurrencia de transiciones de fase depende de dos valores para la carga eléctrica: Q_{\min} y Q_0 . Para ilustrar, tomemos un valor concreto del parámetro del pelo, por ejemplo, $\sigma = 2$, para el cual $Q_{\min} \approx 2.622$ y $Q_0 \approx 2.712$. En la figura 4.2, se ilustran las ecuaciones de estado para tres valores representativos de Q . Para valores pequeños de la carga eléctrica, $Q < Q_{\min}$ (panel izquierdo en la Figura 4.2), las distintas isothermas exhiben un patrón similar: comienzan desde un mínimo valor de v en $P = 0$ y luego, mientras v incrementa, P alcanza un máximo y después decrece a medida que v sigue aumentando. Para valores intermedios, $Q_{\min} \leq Q \leq Q_0$ (panel central en la Figura 4.2), el comportamiento es dependiente de la temperatura, como es visto en el segundo gráfico de la Fig. 4.2. Dentro de este intervalo, dos puntos críticos aparecen. El punto crítico a mayor presión corresponde a una transición de fase de Van der Waals estándar, y para temperaturas justo bajo esto, hay un una transición de fase estándar de primer orden entre agujeros negros grande/pequeño. El punto crítico a presión más baja corresponde a una nueva cualidad cuya naturaleza será clarificada posteriormente. Para temperaturas más bajas ya no se distinguen dos fases. Finalmente, para $Q > Q_0$ (panel derecho en Figura 4.2), el comportamiento se vuelve del mismo tipo que para la solución de Reissner-Nordström-AdS (*RN-AdS*), con solamente un punto crítico. Debemos notar que uno de los puntos críticos en la región $Q_{\min} < Q < Q_0$ de “doble criticalidad” corresponde a una transición entre dos fases inestables, y por lo tanto no representa interés físico. Los puntos críticos, denotados como (P_c, v_c, T_c) satisfacen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_{T_c, Q} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)_{T_c, Q} = 0 \quad (4.38)$$

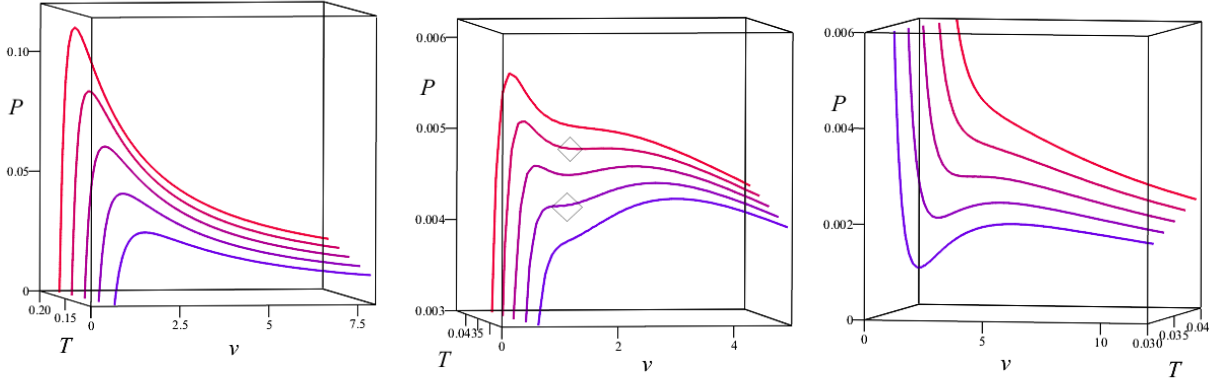


Figure 4.2: Ecuación de estado para $Q = 1.50$ (panel izquierdo), $Q = 2.65$ (central) y $Q = 2.90$ (panel derecho), para la teoría con $\sigma = 2$. Para $Q_{min} < Q < Q_0$, se observan dos puntos críticos.

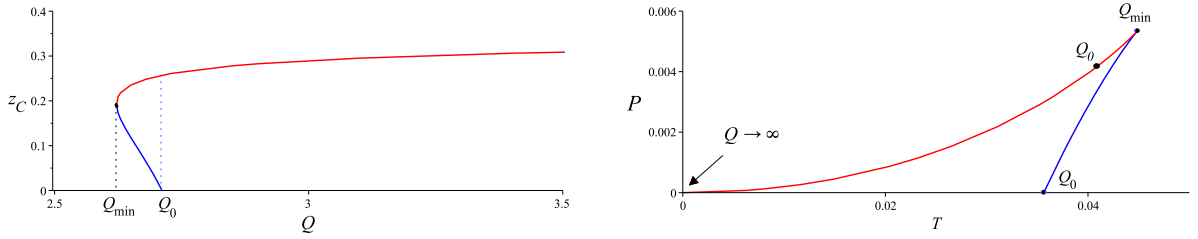


Figure 4.3: Izquierda: $z_C \equiv P_c v_c / T_c$ vs Q . Note que $z_C < 3/8$, con $z_C \rightarrow 3/8$ cuando $Q \rightarrow \infty$. Derecha: Trayectoria de los puntos críticos en el plano $P - T$, parametrizado por Q . Ambos para $\sigma = 2$

El único punto crítico para $Q > Q_0$ está caracterizado por el factor de compresibilidad crítico $z_c \equiv P_c v_c / T_c$ el cual, en el límite $Q \rightarrow \infty$ se acerca a $3/8$, como es esperado. Este punto crítico tipo *RN-AdS* se extiende a $Q = Q_{min}$, donde ambos puntos críticos coinciden. Esto se muestra en el primer gráfico en Fig. 4.3, donde se observa la doble criticalidad dentro del rango $Q_{min} \leq Q \leq Q_0$. Mientras la carga eléctrica cambia continuamente, los puntos críticos trazan una trayectoria en el plano $P - T$, como se muestra en el segundo gráfico en Fig. 4.3. También es posible notar que ambos puntos críticos se fusionan en $T_c \approx 0.0448$ y $P_c \approx 0.0053$ cuando $Q \rightarrow Q_{min}$.

Ahora estudiamos el comportamiento de fase a través del potencial termodinámico (ref). Para $Q < Q_{min}$, ningún comportamiento crítico toma lugar (se puede ver en el primer

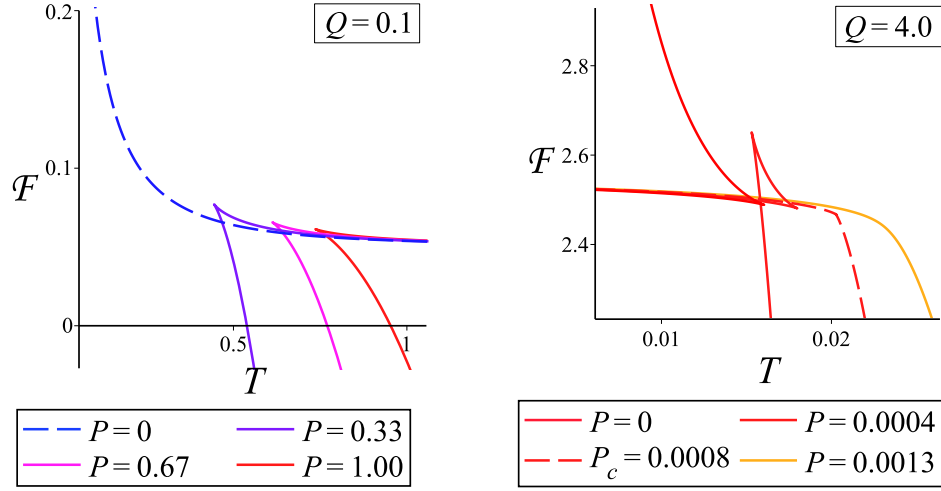
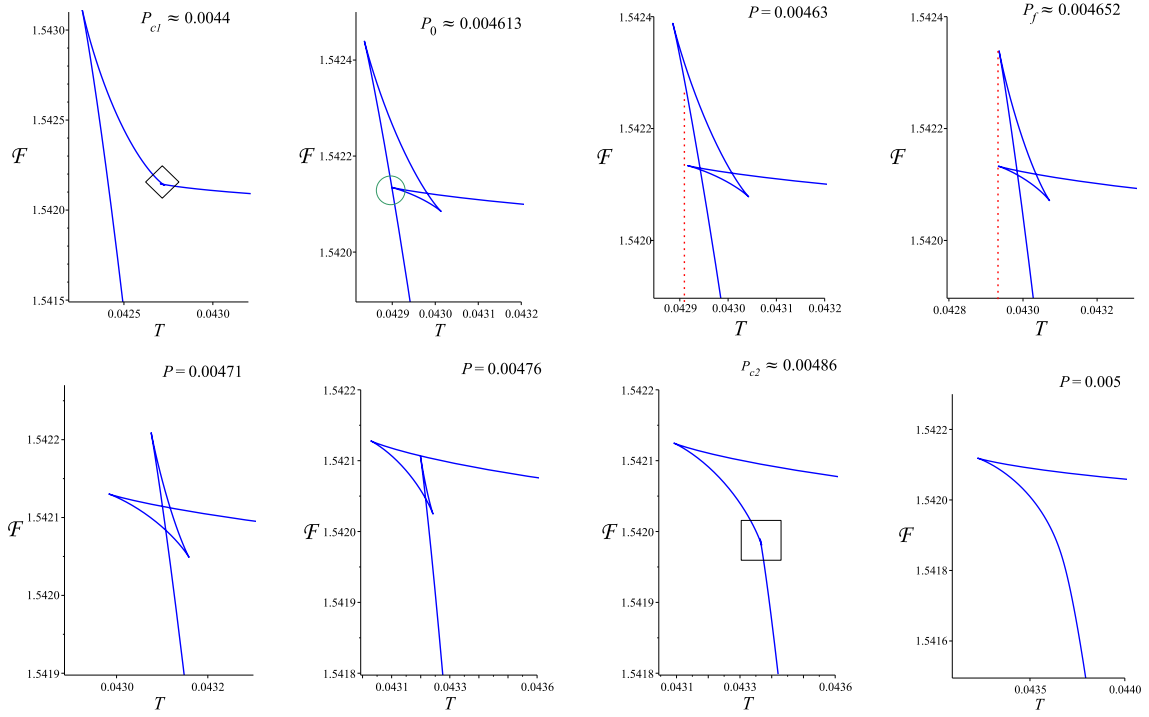


Figure 4.4: Diagramas de energía libre como función de la temperatura para $\sigma = 2$. Panel izquierdo: \mathcal{F} vs T para $Q = 0.10$ ($< Q_{min}$) para el cual no hay comportamiento crítico. Panel derecho: Aquí consideramos $Q = 4$ ($> Q_0$) para el cual el comportamiento crítico es similar a al del agujero negro $RN-AdS$.

gráfico en Fig. 4.4) y, para $Q > Q_0$, el comportamiento es más bien similar al agujero negro de RN-AdS, con un punto crítico y una transición de fase pequeño-grande de primer orden, como se muestra en el segundo gráfico en Fig. 4.4. Las cumbres a la izquierda en los casos $Q < Q_0$ y también $Q_{min} < Q < Q_0$ son indicativos del hecho que estos agujeros negros no tienen horizonte interno y por ende, no existe límite extremal. Dentro de este rango de doble criticalidad, $Q_{min} < Q < Q_0$, la situación es mucho más interesante. En Fig. 4.5, se muestra una serie de instantáneas para un rango relevante de P para $Q = 2.65$. En P_{c1} aparece el primer punto crítico, después del cual una *swallowtail* “invertida” emerge. Esta *swallowtail* no significa una transición de fase, pues todos los puntos en ella están sobre el mínimo global de la energía libre. Sin embargo, mientras la presión aumenta aún más, la *swallowtail* invertida se mueve hacia la izquierda y, eventualmente, en P_0 interseca la parte inferior de la curva, es decir, la rama de agujeros negros grandes y estables, como se muestra en Fig. 4.5 con la intersección marcada por un círculo verde. Para altas presiones, tenemos la transición de fase de primer orden grande-pequeño estándar que toma lugar hasta $P = P_{c2}$. Además de eso, se observa una transición de fase de orden cero, desde un agujero negro pequeño hasta uno grande, caracterizado por un salto discontinuo en la energía libre \mathcal{F} , como en su primera derivada respecto a la temperatura $(\partial\mathcal{F}/\partial T)_P$, como se muestra por la línea roja punteada en Fig. 4.5(c). Esta transición de fase comienza en $P = P_0$ y se extiende hasta $P = P_f$, cuando las temperaturas de la parte izquierda de las


 Figure 4.5: \mathcal{F} vs T , $Q = 2.65$, para valores crecientes de P .

swallowtails coinciden, como se muestra en Fig. 4.5(d). Más allá de eso, se mueve aún más a la izquierda, dejando una segunda *swallowtail* (la estándar). La cúspide superior de la *swallowtail* estándar descende a medida que la presión sigue aumentando hasta intersectar la parte superior de la *swallowtail* invertida, mostrada en Fig. 4.5(f), después de que aquella invertida desaparece. La estándar continúa encogiéndose mientras la presión aumenta hasta que, en el segundo punto crítico $P = P_{c2} \approx 0.0049$, la *swallowtail* estándar también desaparece (Fig. 4.5(g)). No hay comportamiento crítico para $P > P_{c2}$. La situación está mejor ilustrada en Fig. 4.6, donde las líneas de coexistencia para las transiciones de fase correspondientes han sido representadas. Vemos que, para $P_f > P > P_0$, hay dos líneas de coexistencia y, dentro de este rango de presiones, tenemos transiciones de fase reentrante de agujeros negros grandes a pequeños a grandes a medida que la temperatura decrece continuamente. Este fenómeno de “comportamiento reentrante”, es una característica nueva comparada con el comportamiento en la teoría que corresponde a $\sigma = \infty$. Cabe destacar que la aparición de estas transiciones reentrantes no requiere tratar a la constante cosmológica Λ como una variable termodinámica, ya que estas transiciones ocurren al variar la temperatura. Por ende, basta con fijar la carga Q dentro del intervalo adecuado

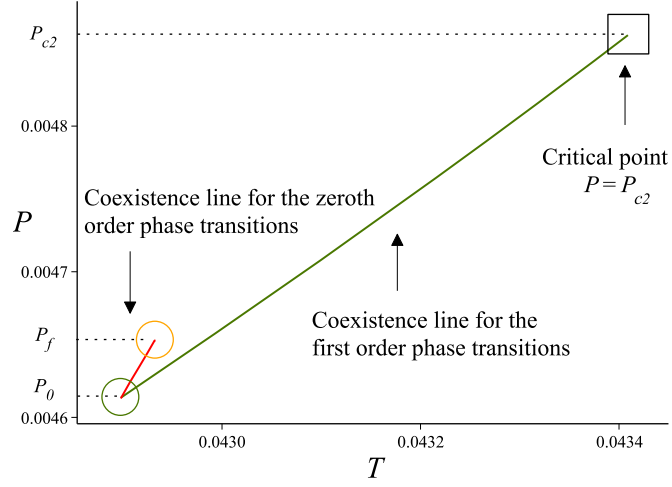


Figure 4.6: Coexistence lines for zeroth order phase transitions and first order phase transitions. They meet at the large/small/large triple point at $P = P_0$.

($Q_{\min} < Q < Q_0$) y estudiar los valores (fijos) de P para los cuales la transición de fase reentrante ocurre. Para el caso particular $Q = 2.65$ en la teoría $\sigma = 2$, el comportamiento de fase reentrante existe, de forma aproximada, en el intervalo $4.61 \cdot 10^{-3} < P < 4.65 \cdot 10^{-3}$. Estos valores fueron obtenidos resolviendo numéricamente las condiciones para el punto crítico: $(\partial P / \partial v)_{T,Q} = 0$ y $(\partial^2 P / \partial v^2)_{T,Q} = 0$.

En resumen, el ensamble canónico exhibe una estructura de fases notablemente rica, incluyendo doble criticidad y transiciones de fase reentrantes, como consecuencia directa de la presencia del campo escalar auto-interactuante. Estas características no están presentes en el caso sin pelo escalar y reflejan el impacto profundo que el campo de materia tiene sobre la termodinámica del agujero negro.

4.3.2 Ensemble gran canónico

Potencial termodinámico

Las expresiones paramétricas para la ecuación de estado en este ensemble (a Φ constante) son

$$P = \frac{3}{8\pi\sigma^2} \left[\frac{x_+^{2-\sigma}}{\sigma-2} - \frac{x_+^{\sigma+2}}{\sigma+2} + x_+^2 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2-4} + \frac{\mathcal{X}_1^2}{x_+^{3\sigma-4}v^2} \left(\frac{\mathcal{X}_2 - 2\sigma + 2}{\mathcal{X}_2 - 3\sigma} \frac{2\sigma\Phi^2}{\sigma-1} - 1 \right) \right], \quad (4.39)$$

$$T = \frac{x_+}{4\pi\sigma} \left[-\frac{(x_+^\sigma - 1)^3}{\sigma\mathcal{X}_1} v + \frac{2\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}{(\sigma-1)x_+^{\sigma-2}(x_+^\sigma - 1)} \frac{\Phi^2}{v} - \frac{\mathcal{X}_1(\mathcal{X}_2 - \sigma)}{\sigma x_+^{2\sigma-2}v} \right], \quad (4.40)$$

$$v \equiv \frac{3V}{2S} = \frac{x_+^\sigma(\sigma+1) + \sigma - 1}{\eta(x_+^\sigma - 1)x_+}, \quad (4.41)$$

donde $\mathcal{X}_1 \equiv (\sigma+1)x_+^{2\sigma-2} + (\sigma-1)x_+^{\sigma-2}$ y $\mathcal{X}_2 \equiv (\sigma+2)x_+^\sigma + 2\sigma - 2$ han sido definidos por simplicidad.

En este ensemble, el valor de Φ determina de una forma notable el comportamiento termodinámico de los agujeros negros. Para $\Phi < \Phi_c \equiv \sqrt{(\sigma-1)/(2\sigma)}$, las condiciones de criticalidad (4.38) no se satisfacen, lo que significa que no hay puntos críticos. Para $\Phi_c < \Phi < \Phi_0(\sigma)$, hay sólo un punto crítico. La dependencia de Φ_0 en σ se muestra en Fig. 4.7. Es preciso notar que $\Phi_0(\sigma) < 1/\sqrt{2}$. Para $\Phi_0 < \Phi < 1/\sqrt{2}$, hay tres puntos críticos. Para $1/\sqrt{2} < \Phi < 1$, hay dos puntos críticos, y para $\Phi > 1$, hay un punto crítico.

Este pletórico comportamiento está representado en in Fig. 4.8 para distintos valores de Φ . Podemos observar del panel superior izquierdo que para un valor pequeño del potencial, específicamente $\Phi < \sqrt{(\sigma-1)/(2\sigma)}$, no hay transiciones de fase, pero una vez que el potencial alcanza el valor $\Phi = \sqrt{(\sigma-1)/(2\sigma)}$ vemos un nuevo tipo de criticalidad, en donde los máximos y mínimos locales de $P(v)$ coinciden, pero $P(v)$ no es univaluado, y sobre el punto crítico, ni $P(v)$ tampoco $v(P)$ son funciones univaluadas. Para valores grandes del potencial, es decir, $\Phi > \sqrt{(\sigma-1)/(2\sigma)}$ una transición de fase *novel* se hace presente (mostrado en el panel superior central), cuyo comportamiento discutiremos en la siguiente sección. A medida que Φ alcanza el siguiente umbral en $\Phi = 1/\sqrt{2}$, dos nuevos puntos críticos aparecen a muy bajas presiones, mostrados en el recuadro del panel superior derecho de Fig. 4.8; este es el comportamiento reentrante mostrado en el diagrama central de Fig. 4.2. Sobre este rango de valores de Φ , mientras la temperatura incrementa, tendremos el comportamiento reentrante discutido en la subsección previa, seguido de una transición de fase *novel* del mismo tipo para $\sqrt{(\sigma-1)/(2\sigma)} < \Phi < 1/\sqrt{2}$. Cuando Φ se hace mayor que $1/\sqrt{2}$, el punto crítico intermedio desaparece, y sólo el más pequeño (que

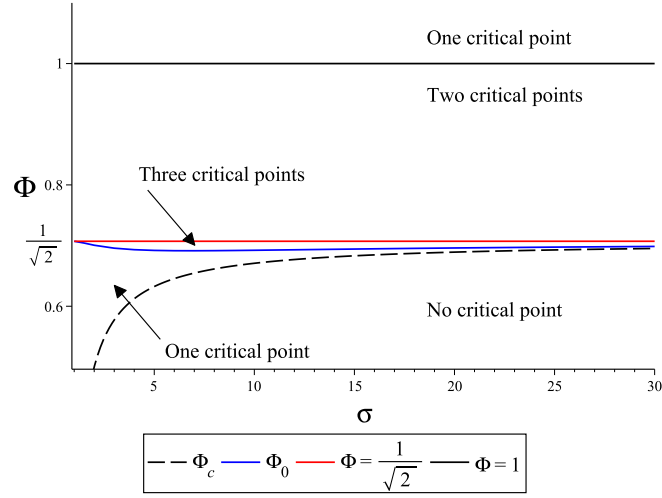


Figure 4.7: El número de puntos críticos depende del valor de Φ . Los valores de las cotas Φ_c y Φ_0 dependen de σ .

corresponde al caso Van der Waals estándar) y el más grande (que corresponde al caso *novel*) sobreviven. Para $\Phi > 1$ el punto crítico tipo Van der Waals se desvanece, y sólo queda el que corresponde al caso *novel*.

Para elucidar la naturaleza de los puntos críticos, estudiaremos el potencial termodinámico como función de la temperatura. De forma paramétrica, la energía libre está dada por

$$\mathcal{G} = \frac{1}{12\eta^3} - \frac{\sigma}{4\eta(x_+^\sigma - 1)^2} \left[x_+^{2\sigma} \left(1 - \frac{2\sigma\Phi^2}{\sigma - 1} \right) - 1 \right], \quad (4.42)$$

$$T = \frac{x_+}{4\pi\eta\sigma} \left[-\frac{(x_+^\sigma - 1)^2}{\sigma x_+^\sigma} + \frac{2\eta^2 \mathcal{X}_2 \Phi^2}{\sigma - 1} - \frac{\eta^2 (\mathcal{X}_2 - \sigma)(x_+^\sigma - 1)}{\sigma x_+^\sigma} \right], \quad (4.43)$$

donde

$$\eta = \sqrt{\frac{2\sigma^2(\sigma - 1)x_+^{\sigma-2}}{(x_+^\sigma - 1)[\mathcal{X}_2 - \sigma x_+^\sigma(3 - 4\Phi^2)]} \left[\frac{8\pi P}{3} + \frac{1}{\sigma^2 - 4} - \frac{x_+^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{x_+^{-\sigma}}{\sigma - 2} - \frac{x_+^\sigma}{\sigma + 2} \right) \right]} \quad (4.44)$$

con \mathcal{X}_2 definido después de (4.41). Estudiando el potencial termodinámico, encontramos que para casi todos los comportamientos críticos observados en los diagramas $P - v$ (Fig. 4.8), tienen asociados una *swallowtail* estándar, típica una transición de fase de primer orden agujeros negros grandes a pequeños entre fases estables $\mathcal{G} - T$. Sin embargo, esta *swallowtail* no representa una transición de fase tipo Van der Waals, sino un comportamiento de fase más novedoso, tipo *novel*, que discutiremos más detalladamente en la

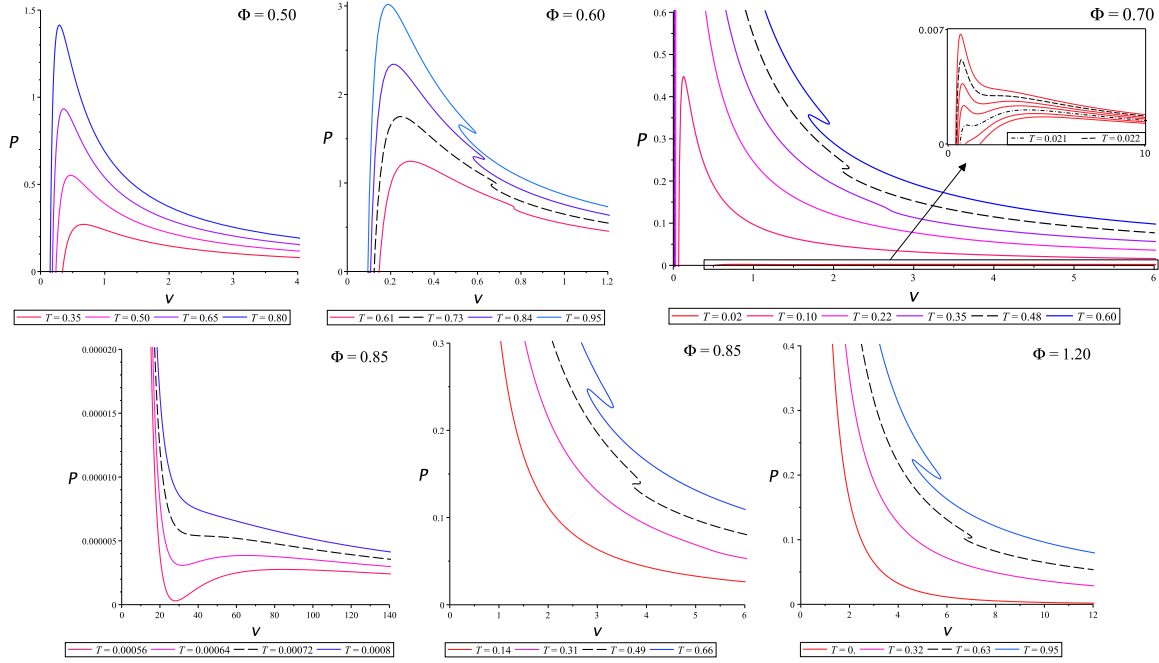


Figure 4.8: Ecuación de estado $P - v$ para cinco valores característicos del potencial conjugado Φ , en el modelo $\sigma = 3$. Los paneles muestran los casos: $\Phi = 0.25 < \Phi_c$, $\Phi_c < \Phi = 0.60 < \Phi_0$, $\Phi_0 < \Phi = 0.70 < 1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2} < \Phi = 0.85 < 1$, $\Phi > 1$, respectivamente. Las líneas discontinúas corresponden a cada isoterma crítica.

siguiente subsección. La única excepción ocurre en el intervalo $\Phi_0 < \Phi < 1/\sqrt{2}$, donde hay una transición de fase reentrante además del comportamiento *novel*. Todas las distintas situaciones se representan en la Figura 4.9 y el caso excepcional, que ocurre para $\Phi_0 < \Phi < 1/\sqrt{2}$ está representado en la Figura 4.10. Para este caso, hay una transición de fase reentrante en el sentido de que hay un rango (de valores fijos de) P para el cual el sistema puede ir de agujeros negros grandes a pequeños en la dirección de temperatura decreciente.

Una cantidad adimensional que entrega información acerca de las propiedades críticas es el “factor de compresibilidad crítica”

$$z_c \equiv \frac{P_c v_c}{T_c} \quad (4.45)$$

Tanto para un fluido de Van der Waals fluid como para el agujero negro $RN-AdS$, el factor z_c resulta ser exactamente $3/8$. A diferencia de los exponentes críticos, que se espera que sean universales, es sabido que z_c difiere para diferentes sustancias en la química común

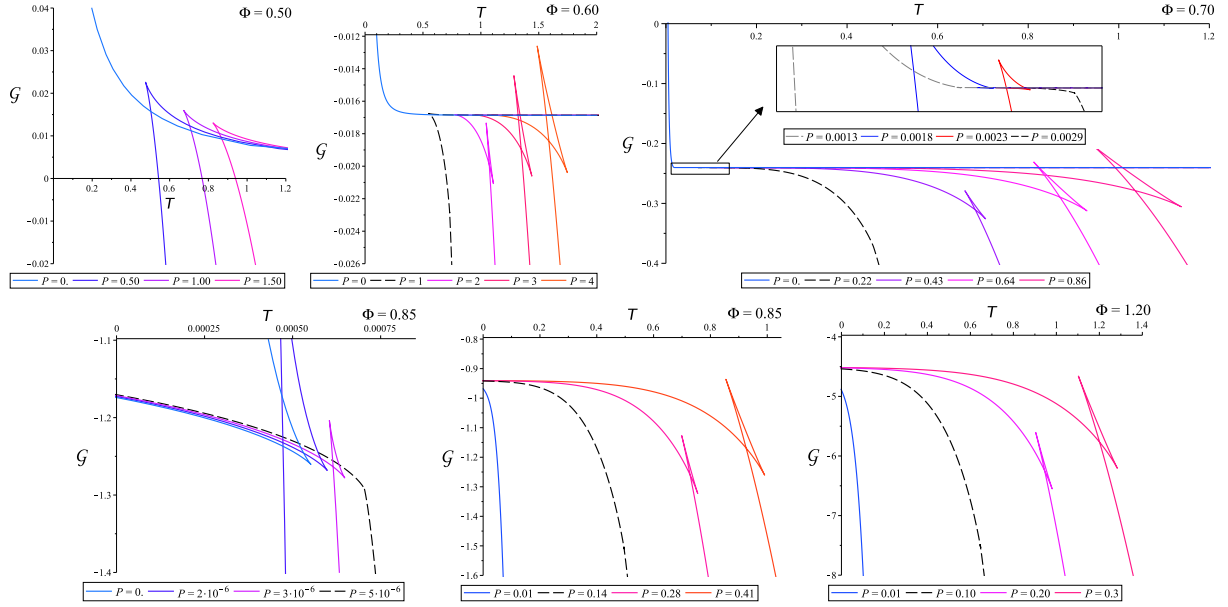


Figure 4.9: Diagrama \mathcal{G} vs T para distintos valores de Φ en el modelo $\sigma = 3$. Se muestran los siguientes casos: $\Phi = 0.50 < \Phi_c$, $\Phi_c < \Phi = 0.60 < \Phi_0$, $\Phi_0 < \Phi = 0.70 < 1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2} < \Phi = 0.85 < 1$, $\Phi > 1$, respectivamente. Las líneas discontinúas corresponden a la isobárica crítica. Estos diagramas son consistentes con la ecuación de estado representada en Fig. 4.8

[59, 60, 61]. En este caso, la compresibilidad crítica depende de Φ , y se muestra en la Figura 4.11, para $\sigma = 3$. la dependencia de z_c en Φ indica que el potencial conjugado juega el rol de “parámetro de fluido” que caracteriza la naturaleza de la teoría de campos conforme dual. Además, en la Figura 4.11, se han ilustrado las presiones críticas para el rango completo de Φ . Notice that in the limit $\Phi \rightarrow \Phi_c^+$, $P \rightarrow \infty$, and in the other hand, in the limit $\Phi \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0.0768$.

4.3.3 Transiciones de fase tipo *novel*

Varias de las transiciones de fase que aparecen tanto en el ensble canónico como gran canónico poseen características un tanto inusuales. Uno de ellos se aprecia en los diagramas de energía libre, que muestran *swallowtails* cuyo tamaño aumenta al incrementartar la presión, como en el diagrama situado más a la derecha en Fig. B.1, en los dos diagramas ubicados más a la derecha de la Fig. B.3, y en el segundo y cuarto diagrama de Fig. 4.9. Este fenómeno ha sido registrado previamente en gravedad de Lovelock [62], y ha

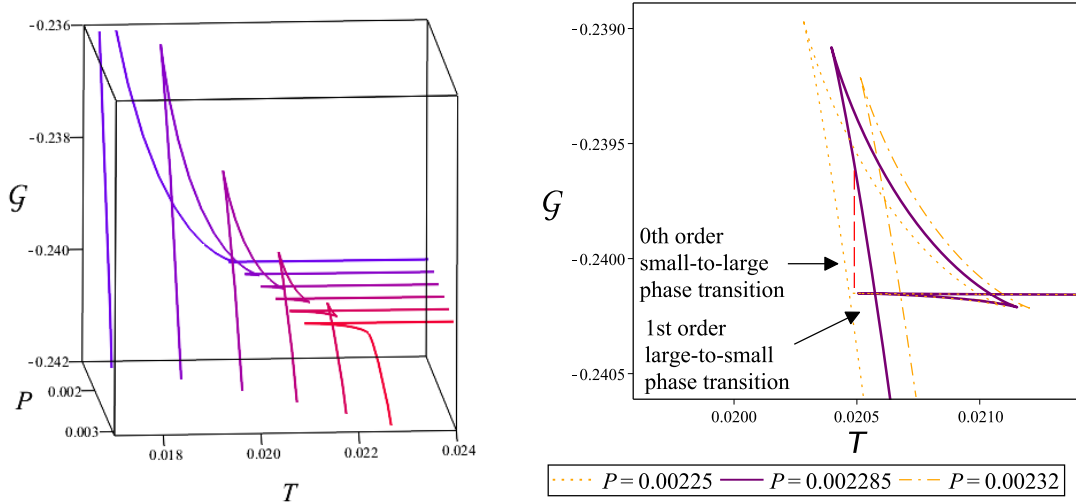


Figure 4.10: Diagrama $\mathcal{G} - T$ para el caso especial $\Phi_c < \Phi < \Phi_0$. Tomamos $\Phi = 0.70$ en el modelo $\sigma = 3$. Hay tres curvas isobáricas críticas, donde se muestra sólo el comportamiento de fase reentrante. A medida que la presión aumenta desde valores pequeños, aparece una *swallowtail* invertida. Luego, el brazo que representa agujeros negros grandes y estables intersecta la *swallowtail* incertida y se forma una segunda *swallowtail* estándar. Allí es donde ocurre la transición de fase reentrante, como lo muestra el segundo panel.

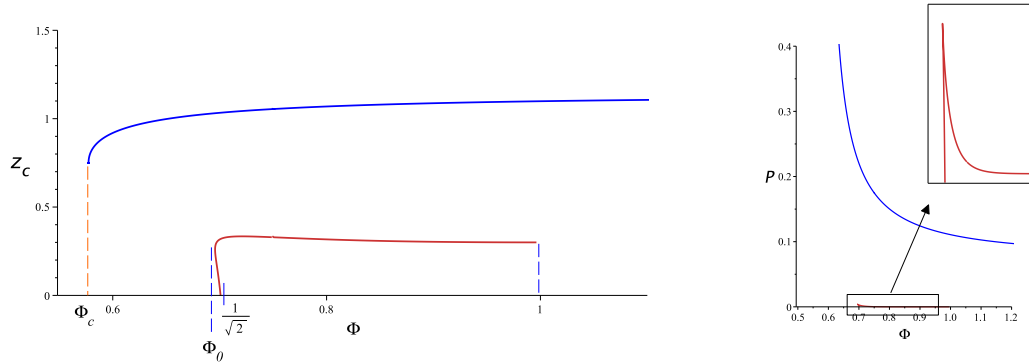


Figure 4.11: Panel izquierdo: Factor de compresibilidad crítica z_c vs Φ , para $\sigma = 3$, donde $\Phi_c \approx 0.5774$, $\Phi_0 \approx 0.6957$. Panel derecho: Presión crítica vs Φ .

sidio denominado como transición de fase de Van der Waals inversa. Esta transición de fase se refiere a una situación en la cual la condensación de agujeros negros grandes en pequeños ocurre a temperaturas y presiones cada vez mayores por sobre el punto crítico, en lugar de ocurrir para valores decrecientes de esas cantidades, como sucede en el caso

estándar [24]. Un ejemplo de esto último para la clase de agujeros negros con pelo que estamos considerando se muestra en el diagrama central de la Fig.F5, donde se aprecia el comportamiento reentrante en el panel derecho de la Fig.F6.

Dichas características inusuales no se restringen sólo a lo anterior mencionado, sino que además en algunos casos ocurre algo sustancialmente distinto, lo cual se puede apreciar en los siguientes diagramas $P - v$: El tercer panel de la Fig.F1, de los dos últimos paneles de la Fig. F2, y de los paneles de la Fig.F8, salvo los dos primeros. A este tipo de transiciones de fase las hemos *novel* debido a su carácter novedoso, y tienen lugar a una temperatura T_{c_2} , tal que existe una “temperatura subcrítica” $T_{sc} (< T_{c_2})$ para la cual,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{T_{sc}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial P^2}\right)_{T_{sc}} = 0. \quad (4.46)$$

Para $T \leq T_{sc}$, la presión P es una función univaluada del volumen específico v , mientras que para $T > T_{sc}$ existe una región en v donde P es una función multivaluada (triple).

Para poner un ejemplo concreto, fijamos $\Phi = 0.85$ y $\sigma = 3$, y nos enfocamos en el caso $1/\sqrt{2} < \Phi < 1$ en el ensamble gran canónico, para la cual existen dos puntos críticos. Estos puntos críticos están dados por

$$\begin{aligned} c_1 : & \quad (P = 5.13 \cdot 10^{-6}, v = 42.67, T = 7.09 \cdot 10^{-4}), \\ c_2 : & \quad (P = 0.1347, v = 3.8361, T = 0.4789). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Este caso es particularmente interesante porque el punto crítico c_1 , que ocurre a baja presión, es similar al de Van der Waals, mientras que el segundo punto crítico, c_2 , que ocurre a mayor presión, no tiene un análogo en los sistemas termodinámicos comunes. En la Fig. 4.12 se muestran en detalle las isothermas críticas para este caso. Cerca del punto crítico c_1 se observa un comportamiento estándar tipo Van der Waals (panel izquierdo), pero en torno al punto crítico c_2 la presión es multivaluada: para un estado (T, v) dado, existen como máximo, tres valores posibles de P , como se aprecia claramente en el panel derecho de la Fig. 4.12. Con el fin de comprender la distinción entre estos dos tipos de transiciones de fase, comenzaremos analizando la transición de fase asociada al punto crítico más familiar c_1 . En la Fig. 4.13 se muestran los diagramas $\mathcal{G} - T$, $\mathcal{G} - v$ y $\mathcal{G} - P$ para dicha transición de fase. A partir del diagrama $\mathcal{G} - T$, se observa que la transición de fase de primer orden de agujeros negros grandes a pequeños es discontinua en la entropía $S = -(\partial\mathcal{G}/\partial T)_P$ en la dirección de temperaturas decrecientes. También es discontinua en el volumen termodinámico $V = (\partial\mathcal{G}/\partial P)_T$ en la dirección del aumento de la presión. Del diagrama, lo cual es de esperar y se puede observar del diagrama $\mathcal{G} - P$. Esencialmente, para un ensamble de agujeros negros grandes, a medida que el volumen termodinámico

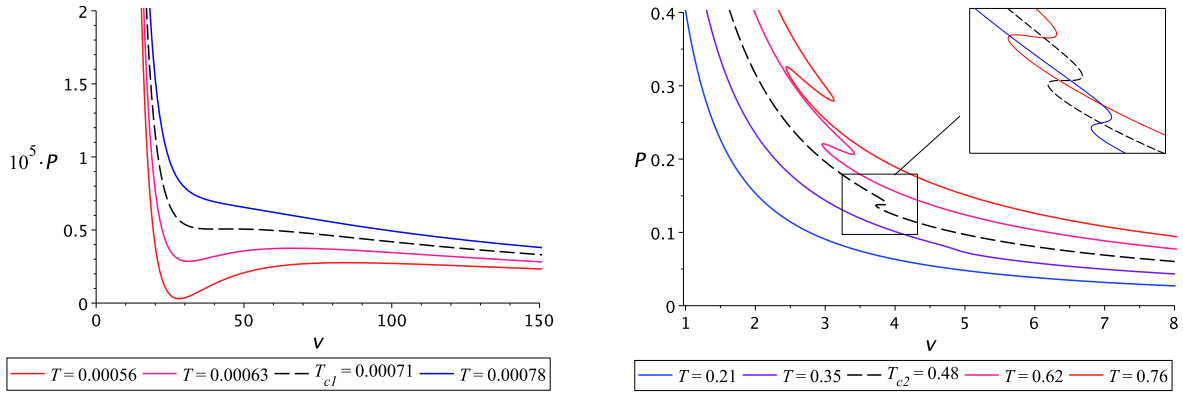


Figure 4.12: Ecuación de estado para $\Phi = 0.85$ ($\sigma = 3$). Hay dos isotermas críticas (líneas discontinuas negras), una que corresponde al punto crítico c_1 (izquierda), y la otra corresponde al punto crítico c_2 (derecha).

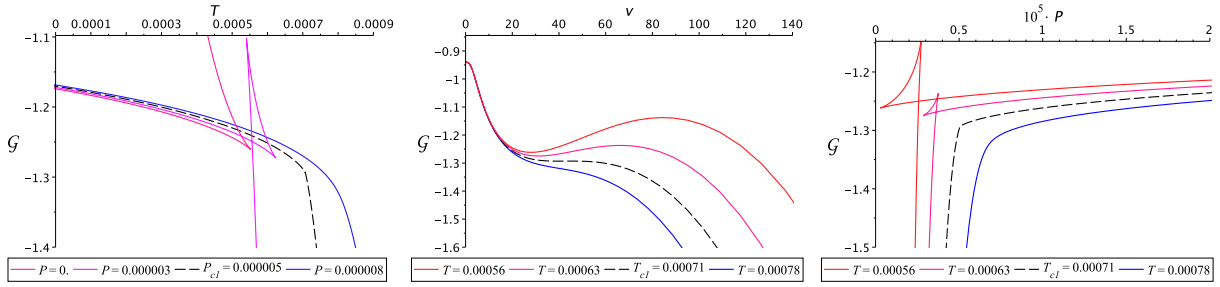


Figure 4.13: Diagramas $\mathcal{G} - T$, $\mathcal{G} - v$ y $\mathcal{G} - P$ para el punto crítico c_1 . La transición de fase de primer orden es discontinua en $S = -(\partial\mathcal{G}/\partial T)_P$ y $V = (\partial\mathcal{G}/\partial P)_T$.

disminuye, la presión aumenta, hasta alcanzar un punto en el cual comienza la “condensación”, en donde los agujeros negros grandes se se convierten en pequeños sin un aumento adicional de la presión ni de la energía libre, como se observa claramente en el panel central de la Fig. 4.13. La presión a la cual esto ocurre está determinada por la ley de áreas iguales de Maxwell. Al disminuir aún más el volumen, cada vez más agujeros negros grandes del ensamble se condensan en pequeños, hasta que el ensamble completo está constituido por agujeros negros pequeños. Si el volumen continúa disminuyendo, la presión aumenta de manera significativa, ya que una condensación adicional es imposible. La situación es completamente análoga a la de un gas que se condensa en un líquido a temperatura fija cuando el volumen del sistema disminuye.

Consideremos ahora el segundo punto crítico c_2 , cuyos diagramas correspondientes se

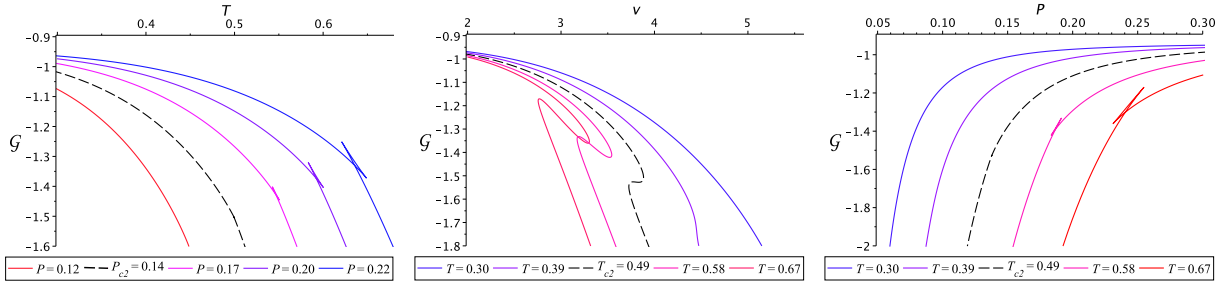


Figure 4.14: Diagramas $\mathcal{G} - T$, $\mathcal{G} - v$ y $\mathcal{G} - P$ para el punto crítico c_2 . La transición de fase de primer orden es discontinua en $S = -(\partial\mathcal{G}/\partial T)_P$ y $V = (\partial\mathcal{G}/\partial P)_T$, como en el caso previo.

muestran en la Fig. 4.14. Aquí, las *swallowtails* en los planos $\mathcal{G} - T$ y $\mathcal{G} - P$ exhiben un comportamiento opuesto al del caso anterior, creciendo a medida que aumenta la presión P (diagrama izquierdo) y a medida que aumenta la temperatura T (diagrama derecho). El panel central es particularmente ilustrativo: se observa que ni $\mathcal{G}(v)$ ni $v(\mathcal{G})$ son funciones univaluadas para temperaturas sobre T_{c_2} . Para estas temperaturas, la transición de primer orden corresponde a lo que parece ser una forma de “condensación inversa”, en la cual los agujeros negros con menor volumen específico se condensan en agujeros negros con mayor volumen específico.

Este comportamiento puede entenderse considerando la ecuación de estado y su correspondiente diagrama $\mathcal{G} - P$, ambos mostrados en la Fig. 4.15, con $T = 1.62$. Para este valor de T , la transición ocurre cuando $P = 1$, correspondiente al punto de intersección de la *swallowtail*. Las flechas indican la transición *novel* desde agujeros negros de volumen específico grande hacia agujeros negros de volumen específico pequeño. Consideremos el sistema en el punto A, correspondiente a un agujero negro grande con energía libre negativa. A medida que el volumen específico v disminuye, tanto la energía libre como la presión aumentan hasta alcanzar el punto B. En este punto el sistema experimenta una “condensación inversa”, desplazándose de B a D, y luego a F a presión P constante, con agujeros negros de pequeño volumen v condensándose en otros de mayor v (panel izquierdo). Todo esto ocurre en la intersección de la *swallowtail* (panel derecho). Posteriormente, el sistema se encuentra en el punto F, correspondiente a un valor mayor de v . La ecuación de estado indica entonces que, al aumentar P , luego de la transición de fase, v volverá a disminuir (y la energía libre aumentará). El efecto neto es una transición de primer orden de pequeño a grande volumen específico, a pesar de que, de forma global, el aumento de presión corresponde a una disminución de v . Nótese que los puntos C y E corresponden a las cúspides de la *swallowtail*; y al no corresponder a mínimos globales de la energía libre, el sistema

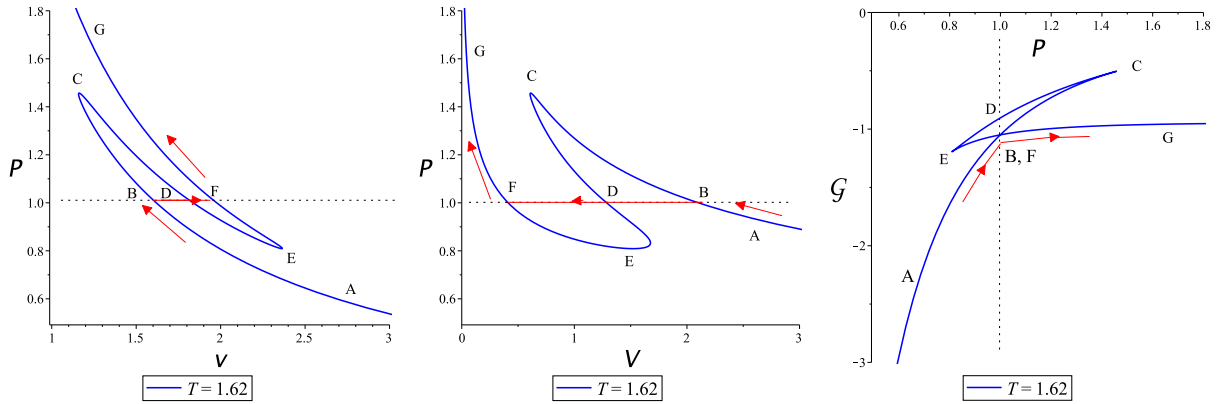


Figure 4.15: Ecuación de estado $P - v$, $P - V$, y el diagrama de energía libre $\mathcal{G} - P$ para $\Phi = 0.85$ y $T = 1.62$ en el modelo $\sigma = 3$. La trayectoria a través de los puntos relevantes es comparada punto a punto para la transición de fase que ocurre a $P \approx 1$. El punto A corresponde a la fase v grande y V grande. El punto B (y F) corresponde al punto de intersección de la *swallowtail*. Los puntos C y E corresponden respectivamente a los máximos y mínimos locales de $P(v)$ y $P(V)$. El punto G corresponde a la fase v pequeño y V pequeño.

efectivamente no transita por estos puntos.

Enfatizamos que la “condensación inversa” es una propiedad del volumen específico v ; pues el volumen termodinámico V disminuye en la transición de primer orden, como se aprecia en el panel central de la Fig. 4.15. Obsérvese que la ley de áreas iguales puede aplicarse aquí, a pesar de que P no es una función univaluada de V .

Esta forma peculiar de transición ocurre porque ni v ni V son funciones monótonamente crecientes del tamaño del horizonte $1/x_+$, como se muestra en la Fig. 4.16. Una inspección de los paneles central y derecho permite distinguir qué es lo que marca la diferencia en el comportamiento de ambos volúmenes: el valor del volumen en el punto B, donde ocurre la transición es menor que el máximo local en el caso de $v(1/x_+)$, pero mayor que el máximo local en el caso de $V(1/x_+)$. En consecuencia, durante la transición el volumen termodinámico V y el radio del horizonte del agujero negro disminuyen de manera consistente, como se observa en el panel izquierdo, mientras que el volumen específico aumenta. Durante la condensación, el agujero negro se hace más pequeño en tamaño, pero mayor en volumen específico, como se muestra en el panel central. Aunque pueda parecer contraintuitivo que V disminuya mientras v aumenta, esto ocurre porque la entropía decrece de manera considerable, y por lo tanto $v = 3V/(2S)$ presenta un máximo local mayor.

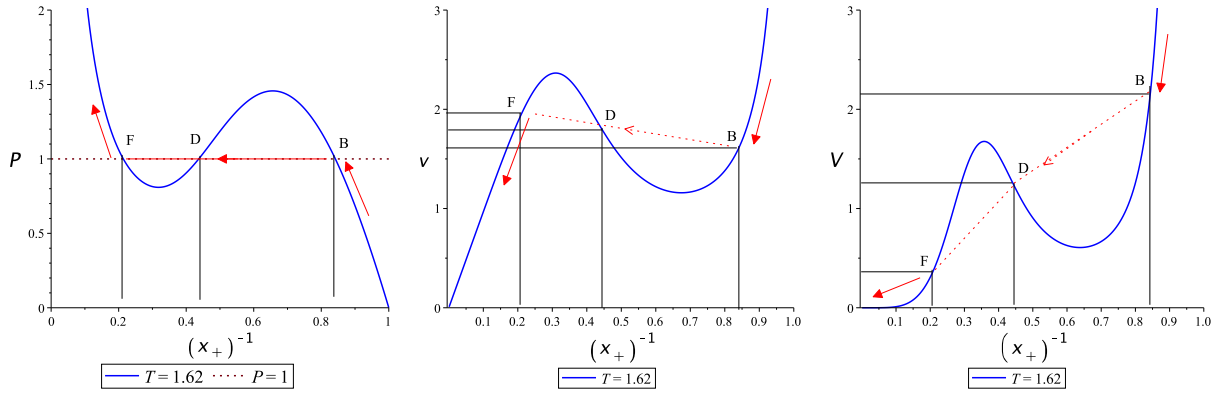


Figure 4.16: $P - x_+^{-1}$, $v - x_+^{-1}$ y $V - x_+^{-1}$ para $T = 1.62$ y $\Phi = 0.85$, en el modelo $\sigma = 3$. El límite $x_+^{-1} \rightarrow 1$ corresponde al límite de agujeros negros grandes.

El caso $\sigma \rightarrow \infty$ también exhibe un comportamiento similar, aunque presenta algunas características particulares que se discuten en el Apéndice B.

Capítulo 5

Conclusiones

Referencias

- [1] Dumitru Astefanesei and Eugen Radu. Boson stars with negative cosmological constant. *Nucl. Phys. B*, 665:594–622, 2003.
- [2] Dumitru Astefanesei and Eugen Radu. Rotating boson stars in (2+1)-dimensions. *Phys. Lett. B*, 587:7–15, 2004.
- [3] Alex Buchel, Steven L. Liebling, and Luis Lehner. Boson stars in AdS spacetime. *Phys. Rev. D*, 87(12):123006, 2013.
- [4] Oscar J. C. Dias, Gary T. Horowitz, and Jorge E. Santos. Black holes with only one Killing field. *JHEP*, 07:115, 2011.
- [5] Sean Stotyn, Miok Park, Paul McGrath, and Robert B. Mann. Black Holes and Boson Stars with One Killing Field in Arbitrary Odd Dimensions. *Phys. Rev. D*, 85:044036, 2012.
- [6] Sean Stotyn and Robert B. Mann. Another Mass Gap in the BTZ Geometry? *J. Phys. A*, 45:374025, 2012.
- [7] Laura J. Henderson, Robert B. Mann, and Sean Stotyn. Gauss-Bonnet Boson Stars with a Single Killing Vector. *Phys. Rev. D*, 91(2):024009, 2015.
- [8] Yves Brihaye, Carlos Herdeiro, and Eugen Radu. Myers–Perry black holes with scalar hair and a mass gap. *Phys. Lett. B*, 739:1–7, 2014.
- [9] Carlos Herdeiro, Jutta Kunz, Eugen Radu, and Bintoro Subagyo. Myers–Perry black holes with scalar hair and a mass gap: Unequal spins. *Phys. Lett. B*, 748:30–36, 2015.
- [10] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.

- [11] Horatiu Nastase. *String Theory Methods for Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 9 2017.
- [12] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/gravity duality: Foundations and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 4 2015.
- [13] Dumitru Astefanesei, David Choque, Francisco Gómez, and Raúl Rojas. Thermodynamically stable asymptotically flat hairy black holes with a dilaton potential. *JHEP*, 03:205, 2019.
- [14] Dumitru Astefanesei, Jose Luis Blázquez-Salcedo, Carlos Herdeiro, Eugen Radu, and Nicolas Sanchis-Gual. Dynamically and thermodynamically stable black holes in Einstein-Maxwell-dilaton gravity. *JHEP*, 07:063, 2020.
- [15] Dumitru Astefanesei, Jose Luis Blázquez-Salcedo, Francisco Gómez, and Raúl Rojas. Thermodynamically stable asymptotically flat hairy black holes with a dilaton potential: the general case. *JHEP*, 02:233, 2021.
- [16] Andrés Anabalón, Dumitru Astefanesei, Antonio Gallerati, and Mario Trigiante. Hairy Black Holes and Duality in an Extended Supergravity Model. *JHEP*, 04:058, 2018.
- [17] Andres Anabalón, Dumitru Astefanesei, Antonio Gallerati, and Mario Trigiante. New non-extremal and BPS hairy black holes in gauged $\mathcal{N} = 2$ and $\mathcal{N} = 8$ supergravity. *JHEP*, 04:047, 2021.
- [18] Christos Charmousis, Blaise Gouteraux, Bom Soo Kim, Elias Kiritsis, and Rene Meyer. Effective Holographic Theories for low-temperature condensed matter systems. *JHEP*, 11:151, 2010.
- [19] M. Henneaux and C. Teitelboim. Asymptotically anti-De Sitter Spaces. *Commun. Math. Phys.*, 98:391–424, 1985.
- [20] Jolien D. E. Creighton and Robert B. Mann. Quasilocal thermodynamics of dilaton gravity coupled to gauge fields. *Phys. Rev. D*, 52:4569–4587, 1995.
- [21] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Smarr Formula and an Extended First Law for Lovelock Gravity. *Class. Quant. Grav.*, 27:235014, 2010.
- [22] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Mass and Free Energy of Lovelock Black Holes. *Class. Quant. Grav.*, 28:195022, 2011.

- [23] David Kubiznak and Robert B. Mann. Black hole chemistry. *Can. J. Phys.*, 93(9):999–1002, 2015.
- [24] David Kubiznak, Robert B. Mann, and Mae Teo. Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda. *Class. Quant. Grav.*, 34(6):063001, 2017.
- [25] Brian P. Dolan. *Where Is the PdV in the First Law of Black Hole Thermodynamics?*, chapter N/A, page N/A. INTECH, 2012.
- [26] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes. *Class. Quant. Grav.*, 26:195011, 2009.
- [27] Remo Ruffini and John A. Wheeler. Introducing the black hole. *Phys. Today*, 24(1):30, 1971.
- [28] Carlos A. R. Herdeiro and Eugen Radu. Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24(09):1542014, 2015.
- [29] Andrés Anabalón and Dumitru Astefanesei. On attractor mechanism of AdS_4 black holes. *Phys. Lett. B*, 727:568–572, 2013.
- [30] Andres Anabalon. Exact Black Holes and Universality in the Backreaction of non-linear Sigma Models with a potential in (A)dS4. *JHEP*, 06:127, 2012.
- [31] Andres Anabalon and Julio Oliva. Exact Hairy Black Holes and their Modification to the Universal Law of Gravitation. *Phys. Rev. D*, 86:107501, 2012.
- [32] Andres Anabalon, Dumitru Astefanesei, and Robert Mann. Exact asymptotically flat charged hairy black holes with a dilaton potential. *JHEP*, 10:184, 2013.
- [33] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Holography, thermodynamics and fluctuations of charged AdS black holes. *Phys. Rev. D*, 60:104026, 1999.
- [34] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity. *Commun. Math. Phys.*, 208:413–428, 1999.
- [35] Per Kraus, Finn Larsen, and Ruud Siebelink. The gravitational action in asymptotically AdS and flat space-times. *Nucl. Phys. B*, 563:259–278, 1999.
- [36] Andres Anabalon, Dumitru Astefanesei, David Choque, and Cristian Martinez. Trace Anomaly and Counterterms in Designer Gravity. *JHEP*, 03:117, 2016.

- [37] J. David Brown and James W. York, Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, 47:1407–1419, 1993.
- [38] James M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [39] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975. [Erratum: *Commun. Math. Phys.* 46, 206 (1976)].
- [40] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 12 2009.
- [41] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, 1977.
- [42] Harry W. Braden, J. David Brown, Bernard F. Whiting, and James W. York, Jr. Charged black hole in a grand canonical ensemble. *Phys. Rev. D*, 42:3376–3385, 1990.
- [43] S. W. Hawking and Simon F. Ross. Duality between electric and magnetic black holes. *Phys. Rev. D*, 52:5865–5876, 1995.
- [44] S. W. Hawking. Black Holes and Thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13:191–197, 1976.
- [45] Ricardo Monteiro, Malcolm J. Perry, and Jorge E. Santos. Thermodynamic instability of rotating black holes. *Phys. Rev. D*, 80:024041, 2009.
- [46] Oscar J. C. Dias, Pau Figueras, Ricardo Monteiro, Harvey S. Reall, and Jorge E. Santos. An instability of higher-dimensional rotating black holes. *JHEP*, 05:076, 2010.
- [47] Ricardo Monteiro. Classical and thermodynamic stability of black holes. Other thesis, University of Cambridge, 6 2010.
- [48] M. Henneaux and C. Teitelboim. THE COSMOLOGICAL CONSTANT AS A CANONICAL VARIABLE. *Phys. Lett. B*, 143:415–420, 1984.
- [49] C. Teitelboim. THE COSMOLOGICAL CONSTANT AS A THERMODYNAMIC BLACK HOLE PARAMETER. *Phys. Lett. B*, 158:293–297, 1985.
- [50] Antonio Aurilia, H. Nicolai, and P. K. Townsend. Hidden Constants: The Theta Parameter of QCD and the Cosmological Constant of N=8 Supergravity. *Nucl. Phys. B*, 176:509–522, 1980.

- [51] Peter G. O. Freund and Mark A. Rubin. Dynamics of Dimensional Reduction. *Phys. Lett. B*, 97:233–235, 1980.
- [52] M. Henneaux and C. Teitelboim. The Cosmological Constant and General Covariance. *Phys. Lett. B*, 222:195–199, 1989.
- [53] Brian P. Dolan. The cosmological constant and the black hole equation of state. *Class. Quant. Grav.*, 28:125020, 2011.
- [54] M. Cvetič, G. W. Gibbons, D. Kubiznak, and C. N. Pope. Black Hole Enthalpy and an Entropy Inequality for the Thermodynamic Volume. *Phys. Rev. D*, 84:024037, 2011.
- [55] Robie A. Hennigar, David Kubizňák, and Robert B. Mann. Entropy Inequality Violations from Ultraspinning Black Holes. *Phys. Rev. Lett.*, 115(3):031101, 2015.
- [56] Larry Smarr. Mass formula for Kerr black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 30:71–73, 1973. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 30, 521–521 (1973)].
- [57] Donald Marolf and Simon F. Ross. Boundary Conditions and New Dualities: Vector Fields in AdS/CFT. *JHEP*, 11:085, 2006.
- [58] Dumitru Astefanesei, Paulina Cabrera, Robert B. Mann, and Raúl Rojas. Reentrant phase transitions in Einstein-Maxwell-scalar black holes. *Phys. Rev. D*, 105(4):046021, 2022.
- [59] Ryuzo Abe. Critical compressibility factor of two-dimensional lattice gas. *Progress of Theoretical Physics*, 81(5):990–996, 05 1989.
- [60] V L Kulinskii. The critical compressibility factor of fluids from the global isomorphism approach. *The Journal of chemical physics*, 139 18:184119, 2013.
- [61] Qi Wei and Dudley Herschbach. Isomorphism in fluid phase diagrams: Kulinskii transformations related to the acentric factor. *The Journal of Physical Chemistry C*, 117:22438–22444, 06 2013.
- [62] Antonia M. Frassino, David Kubiznak, Robert B. Mann, and Fil Simovic. Multiple Reentrant Phase Transitions and Triple Points in Lovelock Thermodynamics. *JHEP*, 09:080, 2014.
- [63] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40:1997–2027, 2008.

- [64] Arthur Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Phys. Rev.*, 113:934–936, 1959.
- [65] S. W. Hawking and Don N. Page. Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space. *Commun. Math. Phys.*, 87:577, 1983.
- [66] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:505–532, 1998.
- [67] A. Z. Petrov. The Classification of spaces defining gravitational fields. *Gen. Rel. Grav.*, 32:1661–1663, 2000.
- [68] Andres Anabalón and Hideki Maeda. New Charged Black Holes with Conformal Scalar Hair. *Phys. Rev. D*, 81:041501, 2010.
- [69] Dumitru Astefanesei, Paulina Cabrera, Robert B. Mann, and Raúl Rojas. Extended phase space thermodynamics for hairy black holes. *Phys. Rev. D*, 108(10):104047, 2023.
- [70] Thomas Hertog and Gary T. Horowitz. Designer gravity and field theory effective potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 94:221301, 2005.
- [71] Andres Anabalón, Dumitru Astefanesei, and Cristian Martínez. Mass of asymptotically anti-de Sitter hairy spacetimes. *Phys. Rev. D*, 91(4):041501, 2015.
- [72] Dumitru Astefanesei, Robert B. Mann, and Raúl Rojas. Hairy Black Hole Chemistry. *JHEP*, 11:043, 2019.
- [73] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 7 1988.
- [74] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 1: 25th Anniversary Edition*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 11 2012.
- [75] Mirjam Cvetič, M. J. Duff, P. Hoxha, James T. Liu, Hong Lu, J. X. Lu, R. Martínez-Acosta, C. N. Pope, H. Sati, and Tuan A. Tran. Embedding AdS black holes in ten-dimensions and eleven-dimensions. *Nucl. Phys. B*, 558:96–126, 1999.
- [76] Xing-Hui Feng, H. Lu, and Qiang Wen. Scalar Hairy Black Holes in General Dimensions. *Phys. Rev. D*, 89(4):044014, 2014.

- [77] Andrés Aceña, Andrés Anabalón, Dumitru Astefanesei, and Robert Mann. Hairy planar black holes in higher dimensions. *JHEP*, 01:153, 2014.
- [78] Andres Anabalón and Dumitru Astefanesei. Black holes in ω -deformed gauged $N=8$ supergravity. *Phys. Lett. B*, 732:137–141, 2014.
- [79] Fabrizio Canfora, Julio Oliva, and Marcelo Oyarzo. New BPS solitons in $\mathcal{N} = 4$ gauged supergravity and black holes in Einstein-Yang-Mills-dilaton theory. *JHEP*, 02:057, 2022.
- [80] Andres Acena, Andres Anabalón, and Dumitru Astefanesei. Exact hairy black brane solutions in AdS_5 and holographic RG flows. *Phys. Rev. D*, 87(12):124033, 2013.
- [81] Laura Andrianopoli, Antonio Gallerati, and Mario Trigiante. On Extremal Limits and Duality Orbits of Stationary Black Holes. *JHEP*, 01:053, 2014.
- [82] Antonio Gallerati. Constructing black hole solutions in supergravity theories. *Int. J. Mod. Phys. A*, 34(35):1930017, 2020.
- [83] Andrés Anabalón, Dumitru Astefanesei, Antonio Gallerati, and Mario Trigiante. Instability of supersymmetric black holes via quantum phase transitions. *JHEP*, 11:116, 2021.
- [84] A. Anabalón, D. Astefanesei, D. Choque, A. Gallerati, and M. Trigiante. Exact holographic RG flows in extended SUGRA. *JHEP*, 04:053, 2021.
- [85] Antonio Gallerati. New Black Hole Solutions in $N = 2$ and $N = 8$ Gauged Supergravity. *Universe*, 7(6):187, 2021.
- [86] David Kubiznak and Robert B. Mann. P-V criticality of charged AdS black holes. *JHEP*, 07:033, 2012.
- [87] Sharmila Gunasekaran, Robert B. Mann, and David Kubiznak. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization. *JHEP*, 11:110, 2012.
- [88] Andrés Anabalón, Antonio Gallerati, Simon Ross, and Mario Trigiante. Supersymmetric solitons in gauged $\mathcal{N} = 8$ supergravity. *JHEP*, 02:055, 2023.
- [89] Dumitru Astefanesei, Romina Ballesteros, David Choque, and Raúl Rojas. Scalar charges and the first law of black hole thermodynamics. *Phys. Lett. B*, 782:47–54, 2018.

- [90] T. Narayanan and Anil Kumar. Reentrant phase transitions in multicomponent liquid mixtures. *Physics Reports*, 249(3):135–218, 1994.
- [91] Gregg Fenton, Dennis Grady, and Tracy J. Vogler. Modeling thermodynamic compression states in distended materials and mixtures. *Procedia Engineering*, 58:724–731, 2013. Proceedings of the 12th Hypervelocity Impact Symposium.
- [92] M. J. Duff and James T. Liu. Anti-de Sitter black holes in gauged $N = 8$ supergravity. *Nucl. Phys. B*, 554:237–253, 1999.
- [93] David Tong. Lectures on statistical physics, May 2012.
- [94] Natacha Altamirano, David Kubiznak, Robert B. Mann, and Zeinab Sherkatghanad. Thermodynamics of rotating black holes and black rings: phase transitions and thermodynamic volume. *Galaxies*, 2:89–159, 2014.
- [95] Clifford V. Johnson. Instability of super-entropic black holes in extended thermodynamics. *Mod. Phys. Lett. A*, 35(13):2050098, 2020.
- [96] Wan Cong and Robert B. Mann. Thermodynamic Instabilities of Generalized Exotic BTZ Black Holes. *JHEP*, 11:004, 2019.
- [97] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Charged AdS black holes and catastrophic holography. *Phys. Rev. D*, 60:064018, 1999.
- [98] Subir Sachdev. Universal low temperature theory of charged black holes with AdS_2 horizons. *J. Math. Phys.*, 60(5):052303, 2019.
- [99] A. Ashtekar and A. Magnon. Asymptotically anti-de Sitter space-times. *Class. Quant. Grav.*, 1:L39–L44, 1984.
- [100] Abhay Ashtekar and Saurya Das. Asymptotically Anti-de Sitter space-times: Conserved quantities. *Class. Quant. Grav.*, 17:L17–L30, 2000.

Apéndices

Apéndice A

Demostraciones de utilidad

A.1 Hipersuperficies

A.1.1 Métrica inducida

Consideremos una variedad \mathcal{M} . Una hipersuperficie Σ es una subvariedad perteneciente a esta. Un caso particular de interés es el borde de la variedad, que se denota como $\partial\mathcal{M}$.

Si denotamos a las coordenadas en la variedad como x^μ y como y^a a las coordenadas en la hipersuperficie, el elemento de línea en la hipersuperficie viene dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} dy^a dy^b = h_{ab} dy^a dy^b, \quad (\text{A.1})$$

de lo cual se desprende que la métrica inducida en la hipersuperficie es:

$$h_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Esta expresión tiene la forma de un simple cambio de coordenadas para la métrica. Sin embargo, es preciso notar que las coordenadas $\{y^a\}$ viven en la hipersuperficie, por ende, la métrica inducida h_{ab} también. De ahí que la métrica inducida se expresa con índices latinos, pues posee una dimensión menos que $g_{\mu\nu}$.

A.1.2 Vector normal

Dada la ecuación que describe la hipersuperficie $f(x^\mu) = 0$, se puede construir un vector unitario normal a la hipersuperficie tomando el gradiente $\partial_\mu f$,

$$n_\mu = \frac{\epsilon \partial_\mu f}{\sqrt{|\partial_\alpha f \partial_\beta f g^{\alpha\beta}|}}, \quad (\text{A.3})$$

el cual se ha definido tal que su norma $n_\alpha n^\alpha = \epsilon = \pm 1$ toma el valores $+1$ cuando n_μ es tipo espacio (y por ende, Σ es tipo tiempo) y -1 cuando n_μ es tipo tiempo (y por ende, Σ es tipo espacio).

A.1.3 Métrica transversa

La métrica transversa, también conocida como proyector se define como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu. \quad (\text{A.4})$$

La métrica transversa contiene toda la información de la métrica inducida en la superficie, pero a diferencia de ésta última, tiene la misma dimensión que la métrica de todo el espacio $g_{\mu\nu}$. La ec. (A.4) indica que a $g_{\mu\nu}$ se le sustren los elementos que no pertenecen a la hipersuperficie. Así, la métrica transversa actúa como un “proyector”, anulando las componentes de cualquier tensor que se encuentren fuera de la hipersuperficie.

Para visualizar esta propiedad, calculamos el producto interno $n_\alpha n_\beta h^{\alpha\beta}$ utilizando la métrica transversa (A.4).

$$n_\alpha n_\beta h^{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta n^\alpha n^\beta = n_\alpha n^\alpha - \epsilon^2 n_\alpha n^\alpha = 0. \quad (\text{A.5})$$

Esto muestra que, aunque la norma $n_\alpha n^\alpha$ no es necesariamente nula en el espacio completo, lo es cuando se calcula con la métrica transversa, ya que n_μ no tiene componente en la hipersuperficie.

A.1.4 Curvatura extrínseca

La curvatura extrínseca se mide a través del tensor $K_{\mu\nu}$, que se define como

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu \quad (\text{A.6})$$

Y nos dice cómo cambia el vector normal a lo largo de la hipersuperficie.

A.1.5 Teorema de la divergencia

Hemos aprendido que el teorema de la divergencia (Gauss) en geometría Euclídea está dado por:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{A.7})$$

Mientras que su análogo en relatividad se expresa como:

$$\int_{\mathcal{M}} (\nabla_\alpha A^\alpha) \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial\mathcal{M}} A^\alpha d\Sigma_\alpha \quad (\text{A.8})$$

Con $d\Sigma_\alpha = \epsilon n_\alpha \sqrt{-h} d^3x$. Vemos que son equivalentes.

A.2 Generalización de la fórmula de Smarr para agujeros negros con pelo

La fórmula de Smarr es una aplicación de la fórmula de Euler para funciones homogéneas. Que la función $f(x, y, \dots, z)$ sea homogénea, implica que se cumple

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y, \dots, \lambda^r z) = \lambda^s f(x, y, \dots, z). \quad (\text{A.9})$$

Si se realiza el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} X &\equiv \lambda^p x, \\ Y &\equiv \lambda^q y, \\ Z &\equiv \lambda^r z, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y se deriva (A.9) con respecto a λ

$$\frac{\partial f(X, Y, \dots, Z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(X, Y, \dots, Z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(X, Y, \dots, Z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} = s \lambda^{s-1} f(x, y, \dots, z), \quad (\text{A.11})$$

se obtiene la siguiente expresión, haciendo uso de (A.9) en el lado izquierdo de (A.11),

$$\lambda^s \left[\frac{\partial f(x, y, \dots, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(x, y, \dots, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(x, y, \dots, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right] = s \lambda^{s-1} f(x, y, \dots, z). \quad (\text{A.12})$$

O bien,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \partial \lambda = \frac{s}{\lambda} f. \quad (\text{A.13})$$

En este punto hemos omitido la dependencia de $f = f(x, y, z)$, pues ya no es necesario hacer la diferencia con $f(X, Y, \dots, Z)$. Luego de calcular las derivadas en (A.13),

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{px}{\lambda}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{qy}{\lambda}, \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \frac{rz}{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Se obtiene finalmente la relación

$$px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} = sf. \quad (\text{A.15})$$

Asumiendo que la masa es una función homogénea $M(S, Q, P, \alpha)$ y usando las relaciones de escalamiento:

- M escala como ℓ^{D-3}
- S escala como ℓ^{D-2}
- Q escala como ℓ^{D-3}
- P escala como ℓ^{-2}
- α escala como ℓ^{-2} ¹

junto con la primera ley $dM = TdS + \Phi dQ + VdP + \mathcal{B}d\alpha$, que consistente la con la siguiente generalización de la fórmula de Smarr

$$(D-3)M = (D-2)TS + (D-3)\Phi Q - 2PV - 2\mathcal{B}\alpha. \quad (\text{A.16})$$

En 4 dimensiones ($D = 4$),

$$M = 2TS + \Phi Q - 2PV - 2\mathcal{B}\alpha. \quad (\text{A.17})$$

¹Ver potencial [2.34](#)

Apéndice B

Criticalidad agujero negro con pelo, caso $\sigma = \infty$

B.1 Termodinámica extendida

En esta sección revisamos la termodinámica de la solución exacta de agujero negro cargado con pelo, asintóticamente AdS , encontrada en [29], correspondiente al límite $\gamma \rightarrow 1$ (cuando el parámetro de pelo $\sigma \rightarrow \infty$), para un acoplamiento constante en el exponente entre el campo escalar ϕ y el invariante de Maxwell $F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, como se muestra en la acción gravitacional que se presenta más abajo. Este análisis se realiza en el espacio de fase extendido, donde la constante cosmológica (negativa) Λ se interpreta como un término de presión, lo que nos permite explorar el comportamiento termodinámico de todo el conjunto de teorías AdS . Utilizamos este ejemplo como punto de partida para el análisis completo de toda la familia de soluciones que se estudiará en la sección siguiente.

Consideremos la teoría de Einstein–Maxwell–escalar descrita por la acción

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - U(\phi) - e^\phi F^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el campo de gauge y A_μ el potencial de gauge, ϕ es el campo escalar (dilatón) y $(\partial\phi)^2 \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. Adoptamos un sistema de unidades en el cual los valores numéricos de las constantes fundamentales se fijan a la unidad: $G = 1$, $c = 1$ (de modo que $\kappa = 8\pi$), $\hbar = 1$ y, para el sector electromagnético, fijamos $\mu_0 = 4\pi$.

Se sabe que esta teoría admite una solución exacta esféricamente simétrica para el

siguiente potencial del campo escalar

$$U(\phi) = 2\alpha (2\phi + \phi \cosh \phi - 3 \sinh \phi) + \frac{2\Lambda}{3} (\cosh \phi + 2) \quad (\text{B.2})$$

donde α es un parámetro dimensional arbitrario que tiene su origen en SUGRA [16, 17], y $\Lambda \equiv -3/\ell^2$ es la constante cosmológica, con ℓ el radio de AdS . El potencial auto-interactuante (B.2), para valores pequeños de ϕ , decae como $U(\phi) = -6/\ell^2 - \phi^2/\ell^2 + \mathcal{O}(\phi^4)$, como se espera para una asintótica AdS , y la solución de las ecuaciones de movimiento correspondientes es

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{x^2 f(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \\ A_\mu &= \left(-\frac{q}{x} + c \right) \delta_\mu^t, \\ \phi &= \ln(x), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde,

$$f(x) = \alpha \left(\frac{x^2 - 1}{2x} - \ln x \right) + \frac{1}{\Omega(x)} \left(1 - 2q^2 \frac{x - 1}{x} \right) - \frac{\Lambda}{3}, \quad \Omega(x) = \frac{x}{\eta^2 (x - 1)^2} \quad (\text{B.4})$$

son las funciones métricas, η y q son las dos constantes de integración, y c en el campo de gauge es una constante aditiva que se utilizará para fijar el gauge $A_t(x_+) = 0$, donde x_+ es la ubicación del horizonte del agujero negro, definida por $f(x_+) = 0$. La coordenada radial x toma valores en el rango $1 < x \leq \infty$, donde $x = \infty$ corresponde a la singularidad central y $x \rightarrow 1$ al borde¹. La relación con la coordenada canónica (tipo Schwarzschild), al menos cerca del borde, está dada por $r = \sqrt{\Omega(x)}$.

Para esta solución, la energía conservada E , la temperatura de Hawking T , la entropía de Hawking–Bekenstein S , la carga eléctrica Q y su potencial conjugado Φ , la presión P y el volumen termodinámico V están dados por [29]

$$E = \frac{q^2}{\eta} - \frac{\alpha}{12\eta^3}, \quad T = -\frac{x_+ f'(x_+)}{4\pi\eta} = \frac{(x_+ - 1)^2}{8\pi\eta x_+} \left[-\alpha - 2\eta^2 \left(\frac{x_+ + 1}{x_+ - 1} \right) + 4\eta^2 q^2 \left(\frac{x_+ + 2}{x_+} \right) \right] \quad (\text{B.5})$$

$$S = \frac{\pi x_+}{\eta^2 (x_+ - 1)^2}, \quad \Phi = \frac{q(x_+ - 1)}{x_+}, \quad Q = \frac{q}{\eta}, \quad P = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad V = \frac{2\pi x_+ (x_+ + 1)}{3\eta^3 (x_+ - 1)^3} \quad (\text{B.6})$$

¹Esta es conocida como la “rama positiva” de las soluciones. Existe también una rama negativa, que no se estudia en este trabajo.

y satisfacen la primera ley extendida $dE = TdS + \Phi dQ + VdP$.

Con el fin de trabajar con cantidades adimensionales, en el resto de esta sección consideraremos las variables termodinámicas reescaladas,

$$\eta \rightarrow \sqrt{\alpha}\eta, \quad E \rightarrow \frac{E}{\sqrt{\alpha}}, \quad T \rightarrow \sqrt{\alpha}T, \quad S \rightarrow \frac{S}{\alpha}, \quad Q \rightarrow \frac{Q}{\sqrt{\alpha}}, \quad P \rightarrow \alpha P, \quad V \rightarrow \alpha^{-\frac{3}{2}}V \quad (\text{B.7})$$

This makes explicit the assumption that $\alpha > 0$.

B.1.1 Ensemble canónico: carga eléctrica fija

El ensemble con T y Q fijos se obtiene imponiendo la condición de borde $\delta(e^\phi \star F)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. La acción Euclídea total I^E debe incluir el término de borde no nulo para el campo de gauge $I_A = (2/\kappa) \int d^3x \sqrt{-h} e^\phi n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu$. Esta acción satisface la relación cuántico-estadística $\beta^{-1} \tilde{I}^E = \mathcal{F}(T, Q) = E - TS$ [72].

Comenzamos con la ecuación de estado, dada de manera paramétrica por las expresiones

$$P = \frac{3(x_+ + 1)^2}{8\pi x_+} \left[\frac{2(x_+ + 1)^2 Q^2}{x_+(x_+ - 1)v^4} - \frac{1}{v^2} - \frac{x_+^2 - 1 - 2x_+ \ln x_+}{2(x_+ + 1)^2} \right], \quad (\text{B.8})$$

$$T = \frac{(x_+ + 1)^2}{4\pi x_+} \left[\frac{2(x_+ + 1)(x_+ + 2) Q^2}{(x_+ - 1)x_+ v^3} - \frac{1}{v} - \frac{v(x_+ - 1)^3}{2(x_+ + 1)^3} \right].$$

donde $v \equiv 3V/2S$ es el volumen específico, que mide el volumen termodinámico por grado de libertad [87]. Se puede mostrar de manera directa que, en el límite $x_+ \rightarrow 1$, estas expresiones se reducen a la ecuación de estado de $RN-AdS$, $P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} + \mathcal{O}(v^{-5})$ como es de esperarse. En el límite opuesto, $x_+ \rightarrow \infty$, se obtiene

$$v = \frac{1}{\eta} + 2\eta r_+^2 + \mathcal{O}(r_+^4), \quad \eta(r_+ \rightarrow 0) = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)^{1/2}}{2Q} \quad (\text{B.9})$$

donde $r_+ \equiv \sqrt{\Omega(x_+)}$. Esto indica que, en el límite $x_+ \rightarrow \infty$ ($S \rightarrow 0$), el volumen específico tiende a un valor constante, es decir, $V \propto S$.

Los puntos críticos en este ensemble satisfacen las condiciones

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_c, Q} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_c, Q} = 0 \quad (\text{B.10})$$

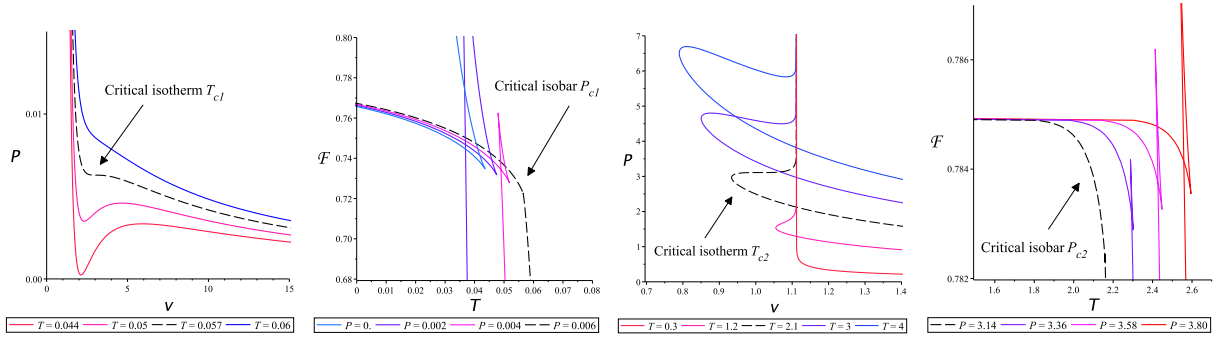


Figure B.1: Ecuación de estado y diagrama $\mathcal{F} - T$ diagram en el ensemble canónico para $Q = 1$. Los paneles izquierdo (derecho) muestran el comportamiento cerca del primer(segundo) punto crítico. Las Isobáricas/isotermas críticas están dadas por líneas discontinuas

para distintas temperaturas críticas. Encontramos dos soluciones a estas ecuaciones, correspondientes a dos puntos críticos, para todo valor fijo $|Q| > 0$.

En la Fig. B.1 se muestran los diagramas de la ecuación de estado $P - v$ (a T fija) y de la energía libre $\mathcal{F} - T$ (a P fija) para $Q = 1$. El primer punto crítico (c_1) recuerda la criticidad de $RN-AdS$, mientras que el segundo punto crítico (c_2) presenta nuevas características debidos al campo escalar. Este último es particularmente novedoso. Por debajo de la temperatura crítica T_{c2} , $v(P)$ es una función monovaluada, mientras que por encima de esta temperatura es multivaluada; el punto crítico corresponde al punto en el cual el máximo y el mínimo locales de $P(v)$ coinciden, como se muestra mediante la línea discontinua en el segundo panel desde la derecha en la Fig. B.1.

De acuerdo con los diagramas $\mathcal{F} - T$, ambos puntos críticos están asociados a transiciones de fase de primer orden entre fases térmicamente estables, lo cual se desprende del hecho de que, para las fases coexistentes, $C_Q \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_Q = -T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} \right)_Q > 0$.

B.1.2 Ensemble gran canónico: potencial conjugado fijo

El ensemble termodinámico con T y Φ fijos es compatible con la condición de borde $\delta A_\mu|_{\partial \mathcal{M}} = 0$. La acción evaluada en la sección euclídea, I^E , satisface la relación cuántico-estadística $\beta^{-1} I^E = \mathcal{G}(T, \Phi) = E - TS - \Phi Q$ [72], donde $\beta = T^{-1}$ es la periodicidad en el tiempo euclídeo y \mathcal{G} es el potencial termodinámico del ensemble gran canónico.

Consideremos primero la ecuación de estado $P - T - v$. De forma paramétrica se tiene

$$\begin{aligned} P(v, x_+) &= \frac{3(x_+ + 1)^2 \Phi^2}{4\pi(x_+ - 1)v^2} + \frac{3(x_+ + 1)^2}{8\pi x_+} \left[\frac{2x_+ \ln x_+ - x_+^2 + 1}{2(x_+ + 1)^2} - \frac{1}{v^2} \right], \\ T(v, x_+) &= \frac{(x_+ + 1)(x_+ + 2)\Phi^2}{2\pi(x_+ - 1)v} - \frac{(x_+ - 1)^3}{4\pi x_+(x_+ + 1)v} \left[\left(\frac{x_+ + 1}{x_+ - 1} \right)^3 + \frac{1}{2}v^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde $1 < x_+ \leq \infty$. Es inmediato mostrar que, en el límite de agujeros negros grandes $x_+ \rightarrow 1$, la ecuación de estado se reduce a la ecuación de estado de $RN-AdS$, esto es, $P = T/v + (\Phi^2 - 1)/(2\pi v^2) + \mathcal{O}(1/v^3)$, como se espera.

Aunque no existen fenómenos críticos para el agujero negro $RN-AdS$ en el ensemble gran canónico, la situación aquí es más interesante. Anteriormente se había reportado un punto crítico en este ensemble [72], y al investigar con mayor detalle este caso, encontramos a lo más dos puntos críticos, cada uno de los cuales satisface las condiciones

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_{T_c, \Phi} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)_{T_c, \Phi} = 0 \quad (\text{B.12})$$

a distintas temperaturas críticas T_c . Las ecuaciones en (B.12) tienen dos soluciones si $1/\sqrt{2} < \Phi < 1$, una solución si $\Phi > 1$, y ninguna solución si $\Phi < 1/\sqrt{2}$. Esto se ilustra en la Fig. B.2, donde se muestran estas tres situaciones. Se observa que existen dos tipos de isothermas críticas para valores intermedios de Φ . Una corresponde al caso estándar de Van der Waals, donde la curva $P - v$ presenta un punto de inflexión. La otra posee las mismas características novedosas que en el ensemble canónico, correspondientes a la coincidencia del máximo y el mínimo locales de $P(v)$. Este punto novedoso es el único punto crítico para valores grandes de $\Phi > 1$.

La existencia de isothermas críticas es indicativa de transiciones de fase, las cuales examinamos estudiando el potencial termodinámico $\mathcal{G} = E - TS - \Phi Q$. En la Fig. B.3 se muestra el potencial termodinámico para las tres situaciones. Es notable que todos los puntos críticos estén asociados con transiciones de fase de primer orden entre fases térmicamente estables, de grandes a pequeños agujeros negros. Las transiciones de Hawking-Page phase transitions² (en las que el agujero negro con pelo decae hacia AdS térmico) sólo ocurre para $\Phi < 1/\sqrt{2}$.

²Las dos fases involucradas en las transiciones de Hawking-Page de primer orden deberían ser un agujero negro grande y el estado fundamental de la teoría. El hecho de que las soluciones puedan ser embebidas en supergravedad es una condición suficiente para la existencia de un estado fundamental estable de la teoría. Si bien la construcción explícita del estado fundamental queda fuera del alcance de este trabajo, señalamos la referencia [88], donde se construyen soluciones exactas de solitones con pelo en supergravedad.

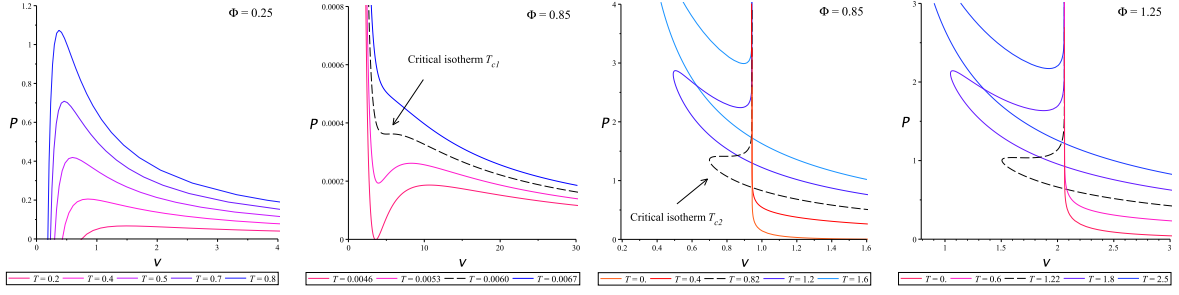


Figure B.2: Ecuación de estado. El panel izquierdo, para $\Phi = 0.25 < 1/\sqrt{2}$, no muestra criticalidad. Los paneles centrales, para $1/\sqrt{2} < \Phi = 0.85 < 1$, muestran dos isotérmicas críticas distintas, T_{c1} y $T_{c2} > T_{c1}$, dadas por las líneas discontinuas. El panel derecho, para $\Phi = 1.25$, muestra una isoterma crítica, también dada por una línea discontinua

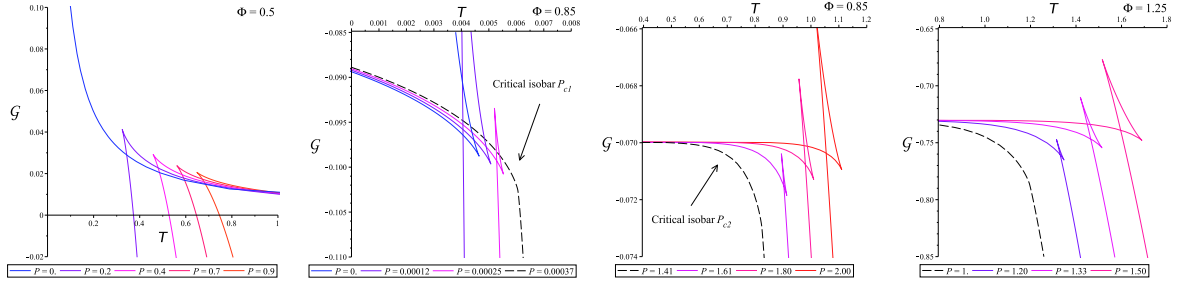


Figure B.3: Diagramas $\mathcal{G} - T$. El panel izquierdo, para $\Phi = 0.5 < 1/\sqrt{2}$, no muestra criticalidad, pero exhibe una transición de fase tipo Hawking-Page-type a $\mathcal{G} = 0$. Los paneles intermedios, para $1/\sqrt{2} < \Phi = 0.85 < 1$, show muestran dos isobáricas críticas diferentes, P_{c1} y $P_{c2} > P_{c1}$, dadas por las líneas discontinuas. El panel derecho, para $\Phi = 1.25$, la línea discontinua muestra la isobárica crítica.

B.2 Comportamiento de fase novedoso

Para $\sigma = \infty$, siempre que $\Phi > 1/\sqrt{2}$ (valores de Φ para los cuales el sistema exhibe fenómenos críticos), el volumen específico

$$v = \sqrt{2}\sqrt{2\Phi^2 - 1} - \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}\pi\sqrt{2\Phi^2 - 1}T - 8\Phi^2 + 3)}{\sqrt{2\Phi^2 - 1}x_+} + \mathcal{O}(x_+^{-2}) \quad (\text{B.13})$$

tiende a un valor constante cuando $x_+ \rightarrow \infty$. En consecuencia, la ecuación de estado desarrolla una rama caracterizada por una línea casi completamente vertical en el plano

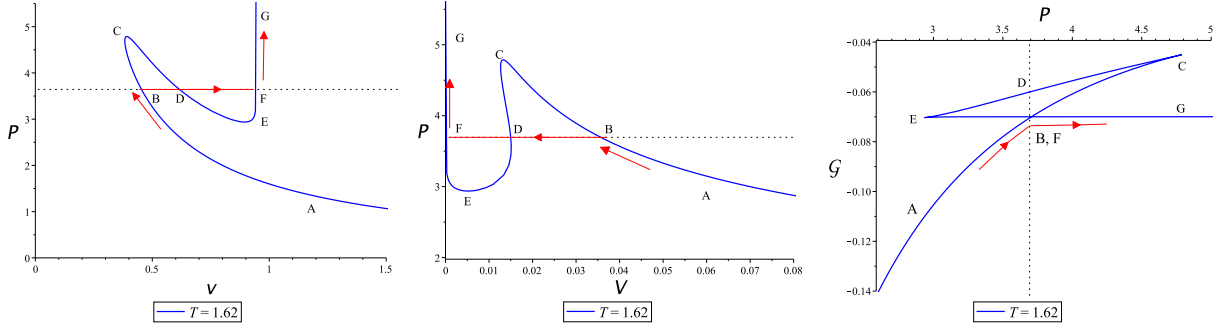


Figure B.4: Ecuación de estado $P - v$, $P - V$ y su correspondiente diagrama $\mathcal{G} - P$ para $\Phi = 0.85$, $T = 1.62$ en el modelo $\sigma = \infty$. Para esta isoterma, la transición de fase ocurre a $P \approx 3.7$.

$P - v$. Una forma de entender esto es notar que, en el límite de agujeros negros muy pequeños, la entropía y el volumen termodinámico se vuelven proporcionales. En efecto, ambos decrecen al mismo orden en x_+ ,

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi(2\Phi^2 - 1)}{x_+} + \mathcal{O}(x_+^{-2}), \\ V &= \frac{4\sqrt{2}\pi(2\Phi^2 - 1)^{3/2}}{3x_+} + \mathcal{O}(x_+^{-2}). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Otra manera de observar esta proporcionalidad es escribiendo $x_+ = 1/(\eta^2 r_+^2) + 2 - \eta^2 r_+^2 + \mathcal{O}(r_+^4)$, expresión obtenida a partir de $\Omega(x_+) = r_+^2$ en el límite $x_+ \rightarrow \infty$, e insertándola en la expresión para V dada en (B.6). La entropía es simplemente $S = \pi r_+^2$ y el volumen resulta ser

$$V = \frac{2\pi r_+^2}{3\eta} + \mathcal{O}(r_+^4) \quad (\text{B.15})$$

En cualquier caso, se obtiene $V/S = 2/(3\eta)$, donde $\eta(x_+ \rightarrow \infty) = 1/(\sqrt{2}\sqrt{2\Phi^2 - 1})$ puede obtenerse directamente tomando el límite $x_+ \rightarrow \infty$ en la expresión para η deducida de la ecuación del horizonte $f(x_+) = 0$. La ecuación de estado cerca del segundo punto crítico y el diagrama $\mathcal{G} - P$ se muestran en la Fig. B.4 para $\Phi = 0.85$. Para este valor de Φ , $v(x_+ \rightarrow \infty) \approx 0.9434$. Más allá del hecho de que el volumen específico tiende a un valor constante en el límite $x_+ \rightarrow \infty$, la transición de fase sigue las mismas características generales que en el caso de σ finito.

Por completitud, se han graficado $P - (x_+)^{-1}$, $v - (x_+)^{-1}$ y $V - (x_+)^{-1}$. Una diferencia sutil en este caso, en comparación con el caso de σ finito, se observa en el segundo panel de

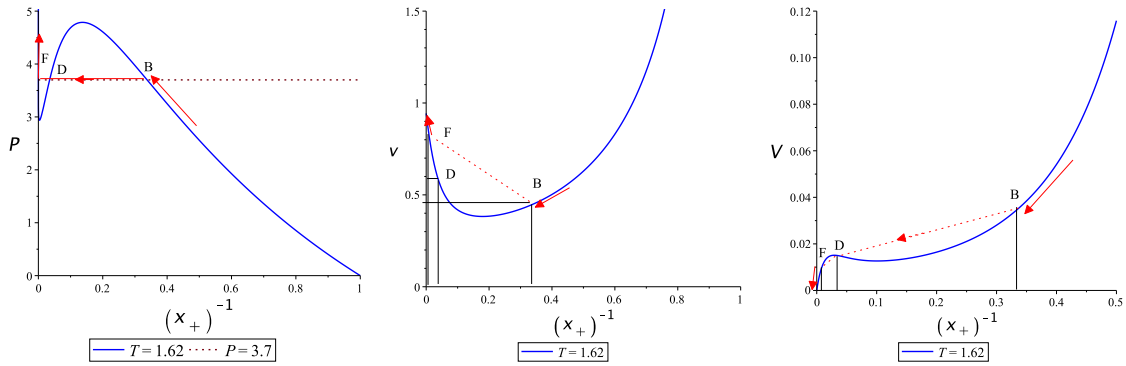


Figure B.5: $P - x_+^{-1}$, $v - x_+^{-1}$ y $V - x_+^{-1}$ para $T = 1.62$ y $\Phi = 0.85$, en el modelo $\sigma = 3$. El límite $x_+^{-1} \rightarrow 1$ corresponde a el límite de agujeros negros grandes.

la Fig. B.5. Una vez que se lleva a cabo la transición de fase, desde B hasta F, el volumen específico v aún aumenta ligeramente al pasar de F a G. De (B.13) se sigue que, en el límite $x_+ \rightarrow \infty$, $(\partial v / \partial x_+)_T$ es positivo sólo si

$$T > \frac{8\Phi^2 - 3}{2\sqrt{2}\pi\sqrt{2\Phi^2 - 1}} \quad (\text{B.16})$$

Para $\Phi = 0.85$, esta desigualdad se traduce en $T > 0.47$, lo cual se cumple dado que $T_{c2} \approx 0.82 > 0.47$. Por lo tanto, la transición de fase de primer orden asociada al segundo punto crítico c_2 presenta la particularidad de que, en la fase de pequeña $-S$, v aumenta levemente a medida que S disminuye, en contraste con el caso de σ finito.

Apéndice C

Criticalidad agujero negro de Reissner-Nordström

Este apéndice cumple un objetivo doble. Por una parte se presentará la criticalidad del agujero de Reissner-Nordström (RN) en el formalismo de la termodinámica extendida, que constituye la línea base de nuestro trabajo, pues nos interesa estudiar cómo se modifica el comportamiento de esta solución sin pelo cuando se agrega un campo escalar. La solución RN-AdS se recupera de manera continua en el límite en que el parámetro de pelo toma el valor $\sigma = 1$.

Por otra parte, este apéndice cumple un rol ilustrativo, ya que permite introducir y entender las transiciones de fase a través de dos ejemplos que encontraremos en agujeros negros cargados AdS: transiciones de fase tipo Van der Waals y transiciones de fase de Hawking-Page. Estos tipos de fenómenos críticos aparecerán, junto con otros comportamientos más novedosos, cuando se incluye el campo escalar, como se mostrarán en los resultados de este trabajo.

Haremos una revisión del trabajo de Kubizňák y Mann [86], en donde encontraron que las transiciones de fase en el agujero negro cargado AdS son similares a las de un fluido de Van der Waals.

El modelo de Van der Waals generaliza el gas ideal al considerar una interacción efectiva entre las partículas y su volumen finito mediante los parámetros a y b , respectivamente. Se caracteriza por su ecuación de estado

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = kT, \quad (\text{C.1})$$

donde P , v y T son la presión, volumen específico y temperatura del fluido. y k es la constante de Boltzmann. Una característica notable de este sistema es la presencia de una

transición de fase entre estados líquido y gaseoso. Para una discusión más detallada de su criticalidad, véase el capítulo 5 de [93].

C.1 Termodinámica del agujero negro RN-AdS

En el límite $\sigma = -1$ (o equivalentemente, $\gamma = 0$), la acción (2.33) se reduce a la acción de Einstein–Maxwell con constante cosmológica negativa, que describe el agujero negro *RN-AdS*:

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - F^2 - 2\Lambda). \quad (\text{C.2})$$

Al extremizar esta acción respecto al campo métrico y el potencial electromagnético, se desprenden las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) &= 2 \left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \right), \\ \nabla_{\mu}F^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Una solución estática y esféricamente simétrica para este sistema es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Sigma^2, \\ A_{\mu} &= \left(\frac{Q}{r} + C \right) \delta_{\mu}^t, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

con $d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, y C es una constante de integración. La función métrica $f(r)$ está dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (\text{C.5})$$

donde los parámetros M y Q representan, respectivamente, la masa y carga eléctrica del agujero negro.

C.1.1 Cantidades termodinámicas

Para analizar la criticalidad del agujero negro *RN-AdS* en el espacio de fase extendido, lo primero es calcular sus cantidades termodinámicas, que se obtienen de forma directa, como se muestra a continuación.

Presión termodinámica

En el formalismo de espacio de fases extendido, la constante cosmológica negativa se interpreta como la presión termodinámica,

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (\text{C.6})$$

Masa

La masa M se obtiene a partir de la ecuación del horizonte $f(r_+) = 0$, donde r_+ es el radio del horizonte exterior.

$$M = \frac{r_+}{2} - \frac{\Lambda r_+^3}{6} + \frac{Q^2}{2r_+} \quad (\text{C.7})$$

Temperatura

La temperatura de Hawking está relacionada con la periodicidad tiempo euclídeo, y se calcula exigiendo la ausencia de singularidad cónica en $r = r_+$ (Ver subsección 3.2.3). Esto es,

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_+} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_+} - \Lambda r_+ - \frac{Q^2}{r_+^3} \right). \quad (\text{C.8})$$

Entropía

La entropía viene dada por un cuarto del área del horizonte $A = 4\pi r_+^2$,

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_+^2. \quad (\text{C.9})$$

Potencial termodinámico

La cantidad termodinámica conjugada a la carga eléctrica corresponde a la diferencia del potencial electrostático entre horizonte y el infinito, es decir, $\Phi = A_t(r_+) - A_t(\infty)$,

$$\Phi = \frac{Q}{r_+}. \quad (\text{C.10})$$

Volumen termodinámico

El volumen termodinámico se define como

$$V \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{s,Q} = \frac{4}{3} \pi r_+^3 \quad (\text{C.11})$$

A partir del análisis dimensional introducido en [86], se define el volumen específico como

$$v \equiv \frac{3V}{2S} = 2r_+, \quad (\text{C.12})$$

cuya expresión se generalizó en [94] y se interpreta como el volumen termodinámico dividido por los grados de libertad asociados al horizonte.

Finalmente, se puede demostrar que las cantidades termodinámicas calculadas satisfacen tanto la primera ley de la termodinámica

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP, \quad (\text{C.13})$$

como la fórmula de Smarr

$$M = 2TS + 2\Omega J + \Phi Q. \quad (\text{C.14})$$

C.2 Criticalidad en el ensemble canónico: Transiciones de fase tipo Van der Waals

C.2.1 Ecuación de estado

La ecuación de estado es una relación entre las variables termodinámicas del sistema, y en general, se puede expresar de la forma $P(v, T)$. Para el agujero negro RN-AdS en el ensemble canónico, la ecuación de estado se obtiene a partir de la expresión para la temperatura (C.8), junto con (C.6) y (C.12).

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} \quad (\text{C.15})$$

Esta ecuación depende del parámetro Q . La Fig. C.1 representa la ecuación de estado a través de la gráfica P v/s T para distintas temperaturas. El panel izquierdo muestra la ecuación de estado (C.15) para el agujero negro $RN-AdS$, mientras que el panel derecho muestra, a modo comparativo, la ecuación de estado (C.1) para el fluido de VdW .

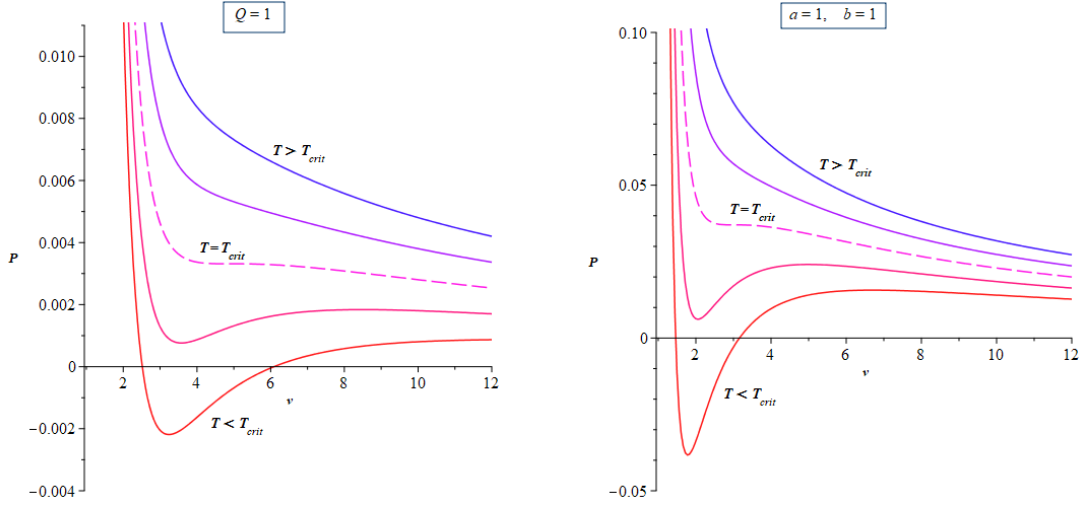


Figure C.1: Ecuaciones de estado para $RN-AdS$ con $Q = 1$ (izquierda) y para el fluido de VdW , con parámetros $a = b = 1$ (derecha).

Se observa que para temperaturas suficientemente altas, el término dominante es $\frac{T}{v}$, por lo que las isothermas son monótonamente decrecientes, reproduciendo el comportamiento de un gas ideal. En cambio, para temperaturas por debajo de un valor crítico aparece una región oscilatoria en la que, para cierto valor de P , existen tres valores posibles de v . La rama que corresponde al volumen intermedio es inestable, pues $(\frac{\partial P}{\partial v})_T < 0$, mientras que las otras dos ramas corresponden a fases termodinámicas distintas. La temperatura umbral a partir de la cual surge este comportamiento se denomina temperatura crítica y está indicada por una línea discontinua en los gráficos de la Figura C.1. Este fenómeno crítico ocurre en el punto de inflexión que yace sobre la isoterma crítica, llamado punto crítico (P_c, v_c, T_c) y se caracteriza por cumplir las condiciones

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_T = 0, \quad (\text{C.16})$$

La ecuación de estado (C.15) presenta un punto crítico, que se localiza en

$$\begin{aligned} v_c &= 2\sqrt{6}Q, \\ T_c &= \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \\ P_c &= \frac{1}{96\pi Q^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

La caracterización completa sobre las transiciones de fase que ocurren para $T > T_c$, requiere el análisis de la energía libre, que se discute a continuación.

C.2.2 Estabilidad global y energía libre

En el ensemble canónico, es decir, a Q fijo, el potencial termodinámico relevante en este ensemble es la energía libre,

$$\mathcal{F} = M - TS = \frac{1}{4} \left[r_+ + \frac{\Lambda r_+^3}{3} + \frac{3Q^2}{r_+} \right]. \quad (\text{C.18})$$

Este resultado puede verificarse alternativamente mediante el cálculo de la acción euclídea *on shell*, a través de la relación

$$I^E = \beta \mathcal{F}, \quad (\text{C.19})$$

donde β es el periodo del tiempo euclídeo, y cabe destacar que en este ensemble se debe incluir el termino de borde apropiado para el campo de gauge $I_A = \frac{2}{\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu$.

La presencia de transiciones de fase se aprecia en la Fig. C.2, donde se muestra \mathcal{F} en función de T para distintos valores de la presión. Para $P < P_c$, aparecen las estructuras características de transiciones de fase de primer orden, conocidas como *swallowtails* (colas de golondrina). La línea discontinua corresponde a la presión crítica, presión a la cual la *swallowtail* se origina.

Cada rama de la *swallowtail* representa una fase distinta del sistema. Según el criterio de estabilidad global discutido en la Sección 3.3, la fase que es físicamente preferida es aquella que minimiza la energía libre \mathcal{F} . Esto se ilustra de forma clara en el panel derecho de la Fig. C.2: al aumentar la temperatura desde $T = 0$, la energía libre varía según el recorrido de las flechas en la figura, pues esos son los valores mínimos de la energía libre \mathcal{F} para cada T . En el punto donde se intersectan ambas ramas ocurre una transición de fase de primer orden, puesto que en dicho punto \mathcal{F} presenta una discontinuidad en su primera derivada. Las distintas fases corresponden a agujeros negros grandes y agujeros negros pequeños, según la relación

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_P = -S, \quad (\text{C.20})$$

lo cual nos dice que la pendiente de la curva $\mathcal{F}(T)$ está determinada por la entropía del agujero negro. En este contexto, las distintas inclinaciones permiten identificar las fases de agujeros negros pequeños y grandes, tal como se indica en la figura.

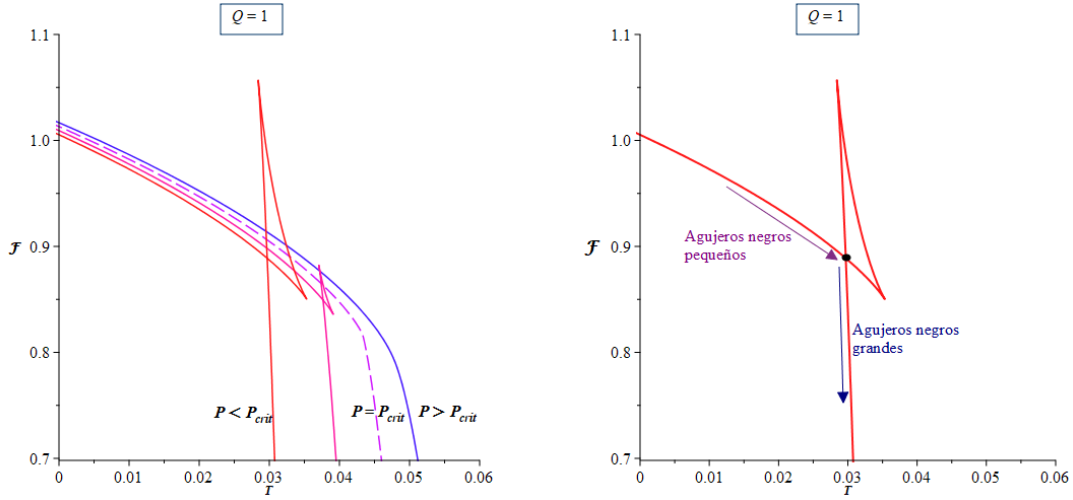


Figure C.2: Energía libre vs temperatura para el caso $Q = 1$.

C.2.3 Relación criticalidad de Van der Waals

Existe una semejanza entre los puntos críticos de agujero negro $RN-AdS$ y el fluido de Van der Waals. La primera similitud que salta a la vista entre estos sistemas es el paralelismo entre sus ecuaciones de estado, como se aprecia en Fig. C.1. Sin embargo, para establecer la equivalencia en la criticalidad entre ambos sistemas, es necesario analizar en mayor detalle las propiedades del punto crítico.

Para el fluido de van der Waals, cuya ecuación de estado está dada por (C.1), el punto crítico está determinado por

$$\begin{aligned} v_c &= 3b, \\ T_c &= \frac{8a}{27kb}, \\ P_c &= \frac{a}{27b^2}. \end{aligned} \quad (C.21)$$

Al comparar estos valores con los obtenidos para $RN-AdS$ (C.17), se observa que el punto crítico del agujero negro se reproduce exactamente si los parámetros del fluido se identifican como $a = \frac{3}{4\pi}$ y $b = \frac{2\sqrt{6}Q}{3}$.

Por otro lado, el factor de compresibilidad crítica, definido como la siguiente razón entre cantidades termodinámicas críticas

$$z_c = \frac{P_c v_c}{T_c}, \quad (C.22)$$

toma el siguiente valor tanto para el punto crítico de Van der Waals, como para el de Reissner-Nordström-*AdS*

$$z_c = \frac{3}{8}. \quad (\text{C.23})$$

Este resultado es notable por dos razones. En primer lugar, z_c no depende de los parámetros del sistema (a y b en el caso *VdW*, Q en el caso *RN-AdS*), lo que refleja su carácter universal. Es decir, todos los fluidos de Van der Waals (y los agujeros negros *RN-AdS*) presentan el mismo comportamiento en el punto crítico, independiente de sus parámetros. En segundo lugar, el valor coincide exactamente en ambos casos.

Los exponentes críticos gobiernan el comportamiento de ciertas cantidades cerca de los puntos críticos. En la tabla C.1 se presenta la definición de cada exponente crítico, junto con sus valores comparativos para los casos *RN-AdS* y *VdW*. El hecho de que también los

Exponente crítico	Valor para punto crítico
α : gobierna el comportamiento del calor específico a v cte. $C_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right _v \propto \left \frac{T-T_c}{T_c} \right ^{-\alpha}$	Van der Waals: $\alpha = 0$ Reissner-Nordström: $\alpha = 0$
β : Describe el comportamiento del parámetro de orden η $\eta = v_{\text{fase1}} - v_{\text{fase2}} \propto \left \frac{T-T_c}{T_c} \right ^{\beta}$	Van der Waals: $\beta = \frac{1}{2}$ Reissner-Nordström: $\beta = \frac{1}{2}$
γ : Determina el comportamiento de la compresibilidad isotérmica. $\kappa_T = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right _T \propto \left \frac{T-T_c}{T_c} \right ^{-\gamma}$	Van der Waals: $\gamma = 1$ Reissner-Nordström: $\gamma = 1$
δ : Gobierna el comportamiento de la isoterma crítica. $ P - P_c \propto v - v_c ^\delta$	Van der Waals: $\delta = 3$ Reissner-Nordström: $\delta = 3$

Table C.1: Tabla comparativa exponentes críticos

exponentes críticos coincidan para ambos sistemas, confirma que la transición de fase del agujero negro *RN-AdS* pertenece a la misma clase de universalidad que el fluido de Van der Waals en aproximación de campo medio.

C.3 Criticalidad en el ensemble gran canónico: Transiciones de fase de tipo Hawking-Page

C.3.1 Ecuación de estado

En el ensemble gran canónico, se fija el potencial eléctrico Φ . En este caso, la ecuación de estado toma la forma

$$P = \frac{T}{v} + \frac{\Phi^2 - 1}{2\pi v^2}. \quad (\text{C.24})$$

En este ensemble se aprecia de forma más clara cómo el valor de Φ determina el comportamiento termodinámico del agujero negro, dependiendo del signo que tome el segundo término del lado derecho de la ecuación de estado (C.24). Para $\Phi = 1$, (C.24) se reduce a la ecuación de estado de un gas ideal. Si $|\Phi| > 1$, el segundo término en la ecuación de estado es positivo, lo cual mantiene el comportamiento cualitativo tipo gas ideal, como se muestra en el panel derecho de Fig. C.3. Mientras que para $|\Phi| < 1$, el segundo término en (C.24) cambia signo. Esta contribución se vuelve relevante para valores pequeños de v , modificando así la forma de las isothermas en ese régimen, como se observa en el panel izquierdo de la figura C.3. Aunque las curvas difieren según el valor del potencial Φ , su estructura no exhibe la característica oscilación asociada a las transiciones de fase tipo Van der Waals. Y en efecto, puede verificarse que la ecuación de estado (C.24) no admite puntos críticos al aplicar la condición (C.16). No obstante, en la siguiente subsección se mostrará otro tipo de transición de fase que ocurre para $|\Phi| < 1$.

C.3.2 Estabilidad global y energía libre

EL potencial termodinámico relevante en el ensemble gran canónico, donde el potencial eléctrico Φ se mantiene fijo, es

$$\mathcal{G} = M - TS - \Phi Q = \frac{1}{4} \left[r_+ + \frac{\Lambda r_+^3}{3} - \frac{Q^2}{r_+} \right]. \quad (\text{C.25})$$

Esta expresión puede obtenerse de manera equivalente a partir de la acción euclídea *on shell*, mediante la relación

$$I^E = \beta \mathcal{G}, \quad (\text{C.26})$$

donde β es el periodo del tiempo euclídeo, y la acción I^E en este ensemble no requiere un término de borde adicional para el campo de gauge.

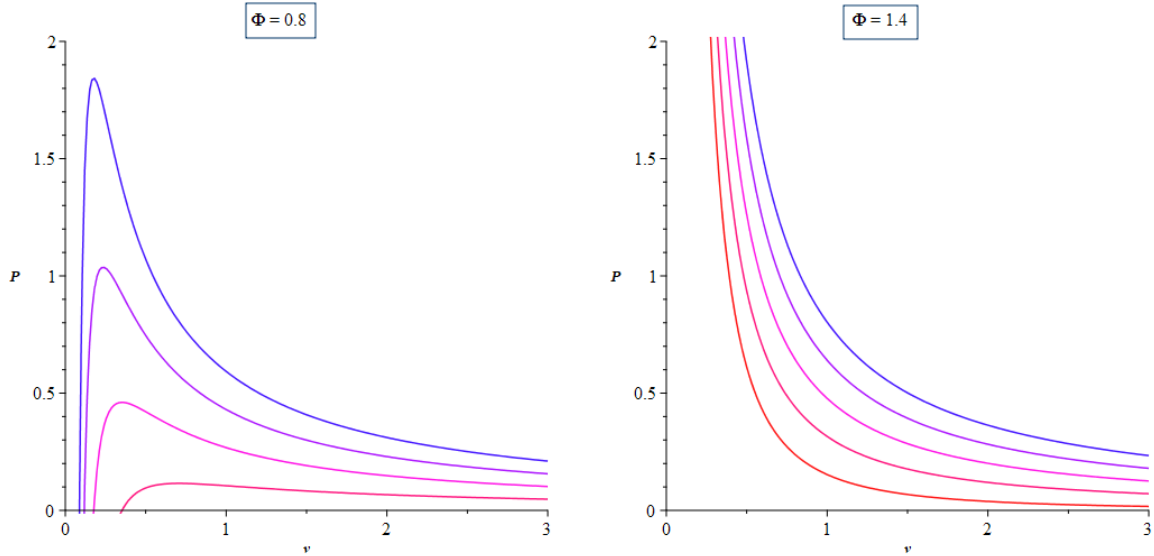


Figure C.3: Ecuación de estado agujero negro $RN-AdS$, ensemble gran canónico. Panel derecho: $\Phi = 0.8$, panel izquierdo: $\Phi = 1.4$.

La energía libre como función de la temperatura se muestra en la figura C.4 para distintos valores de presión, y en cada imagen se ilustran comparativamente el comportamiento de la energía libre para los posibles casos $|\Phi| < 1$ y $|\Phi| > 1$.

Para $\Phi = 1.4$ (panel derecho) la energía libre es negativa y monótonamente decreciente en todo el rango considerado, lo que supone un caso trivial. En cambio, para $\Phi = 0.8$ (panel izquierdo), la energía libre exhibe el comportamiento característico de una transición de fase de Hawking–Page, reportada originalmente en [65] para el caso Schwarzschild– AdS . Se trata de una transición de fase de primer orden entre el agujero negro y la radiación térmica en el espacio AdS .

En este régimen de potencial termodinámico, aparecen dos ramas de soluciones de agujero negro, correspondientes a agujeros negros pequeños, de energía libre $\mathcal{G}_{\text{pequeño}}$ y agujeros negros grandes, con energía libre $\mathcal{G}_{\text{grande}}$. Se observa que los agujeros negros grandes son globalmente estables frente a los agujeros negros pequeños, puesto que $\mathcal{G}_{\text{grande}} \leq \mathcal{G}_{\text{pequeño}}$ en todo el rango, donde la igualdad sólo se cumple en el punto cúspide de la curva isobárica (siempre que $P > 0$). Sin embargo, cuando $\mathcal{G}_{\text{grande}} > 0$, estos agujeros negros son globalmente inestables frente a la radiación térmica, cuya energía libre se caracteriza por $\mathcal{G}_{\text{rad}} = 0$. Siendo los agujeros negros grandes preferidos ante la radiación solamente cuando $\mathcal{G}_{\text{grande}} < 0$, pudiendo decaer a radiación térmica cuando la temperatura disminuye a cierta temperatura crítica, a la cual ocurre el cambio de signo de la energía libre.

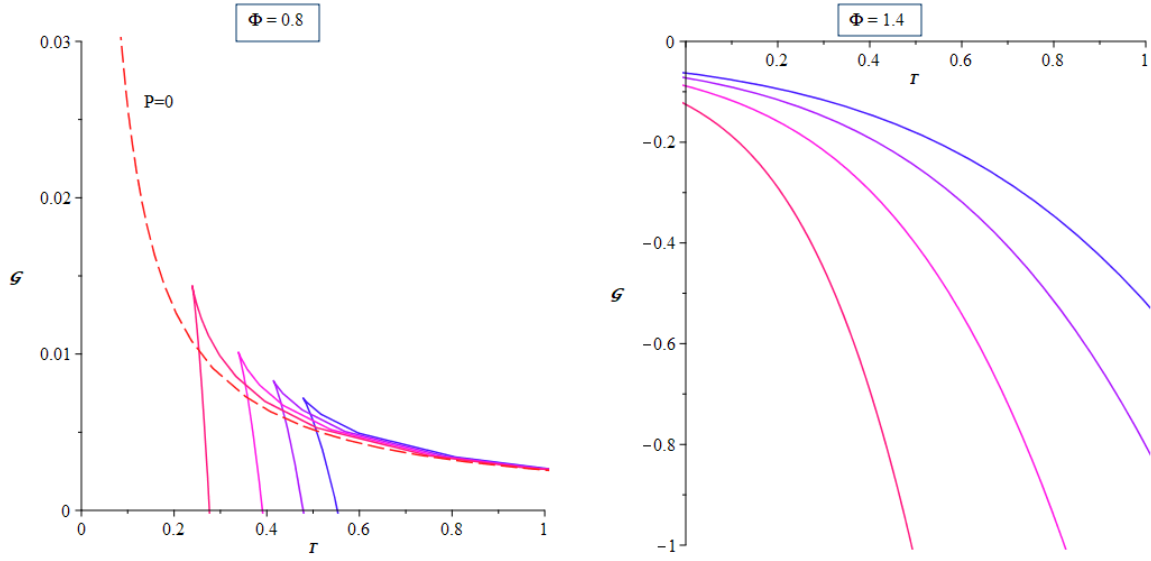


Figure C.4: Energía libre \mathcal{G} v/s T para el ensemble gran canónico. Panel izquierdo: $\Phi = 0.8$, panel derecho: $\Phi = 1.4$

Finalmente, cabe destacar que en el ensemble canónico no existe una transición de fase de tipo Hawking–Page para agujeros negros cargados. La razón es que no existe una solución de vacío cargada eléctricamente, por lo que el agujero negro no puede decaer a radiación térmica manteniendo la carga eléctrica Q fija.