UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática
Valparaíso-Chile

Sobre algunos problemas de control de ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior

Tesis presentada por:

Felipe Antonio Asbún Torres

Como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática

Director de Tesis:

Nicolás Carreño Godoy

Febrero, 2026

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☑ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Sobre algunos problemas de control de ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior

Nombre del candidato(a): Felipe Antonio Asbún Torres

Carrera / Grado: Magíster en Ciencias, Mención Matemática

Campus: Valparaíso **Departamento:** Departamento de Matemáticas

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Nicolás Antonio Carreño Godoy, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☑ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por **(marcar una opción)**:

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: ____03/03/26____________ **Firma:** ________________________________

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: ____03/03/26____________ **Firma:** ________________________________

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

Sobre algunos problemas de control de ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior.

AUTOR: Felipe Antonio Asbún Torres

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes	Institución
Nicolás Carreño,	Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.
Maurício C. Santos,	Universidade Federal da Paraíba, Brasil.
Alberto Mercado,	Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Valparaíso, diciembre 2025.

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es estudiar algunos problemas de control para ecuaciones parabólicas en derivadas parciales de cuarto orden en dimensión espacial superior a uno mediante el uso de estimaciones de Carleman. Estas estimaciones permiten establecer la observabilidad de un sistema adjunto asociado al problema de control, lo que entrega el resultado de controlabilidad deseado. En particular, se estudiaron dos tipos de problemas de control.

En primer lugar, se estudia la existencia de controles insensibilizantes para este tipo de ecuaciones. Considere el siguiente sistema para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$,

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$, f es un término de fuente, a, B, D son potenciales y v es un control distribuido que actúa en un dominio de control $\omega \subset \Omega$. El principal objetivo es demostrar la existencia de controles v que insensibilicen a un funcional de observación $\Phi(y)$, el cual mide al estado del sistema, frente a pequeñas perturbaciones sobre los datos iniciales del problema, representadas por $\tau\hat{y}_0$. En particular, se analizan los siguientes funcionales:

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla y|^2 \, dx\, dt, \\ \Phi_2(y) &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla^2 y|^2 \, dx\, dt, \\ \Phi_3(y) &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\Delta y|^2 \, dx\, dt. \end{aligned}$$

Mediante la combinación de dos estimaciones de Carleman para el problema adjunto, se establecieron resultados de existencia de estos controles bajo los funcionales propuestos. Además, se estableció la no existencia de controles insensibilizantes bajo la presencia de potenciales poco regulares del problema.

En segundo lugar, se aborda un problema de control multiobjetivo bajo una estrategia jerárquica. Considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0,\ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde f es un control distribuido, llamado líder, mientras que los controles v_1, v_2 son controles frontera, denominados seguidores. El objetivo es establecer la controlabilidad a trayectorias del sistema bajo un esquema Stackelberg-Nash, donde los controles seguidores buscan que la solución se aproxime a ciertos objetivos locales en un equilibrio no cooperativo, mientras que el líder actúa con el fin de que el estado del sistema alcance una trayectoria objetivo en tiempo finito. Para ello, se combinaron tres estimaciones de Carleman sobre el sistema adjunto asociado bajo supuestos específicos sobre los conjuntos de observación.

Abstract

The main objective of this thesis is to study some control problems for fourth-order parabolic partial differential equations in spatial dimensions higher than one using Carleman estimates. These estimates allow to establish the observability of an adjoint system associated with the control problem, which yields the desired controllability result. In particular, two types of control problems were studied.

First, the existence of insensitizing controls for this type of equations is studied. Consider the following system for $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$.

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{in } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$, f is a source term, a, B, D are potentials, and v is a distributed control acting in a control domain $\omega \subset \Omega$. The main goal is to prove the existence of controls v that insensitize an observation functional $\Phi(y)$, which measures the system state, against small perturbations of the initial data of the problem, represented by $\tau\hat{y}_0$. In particular, the following functionals are analysed:

$$\Phi_1(y) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla y|^2 \, dx\, dt,$$
$$\Phi_2(y) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla^2 y|^2 \, dx\, dt,$$
$$\Phi_3(y) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\Delta y|^2 \, dx\, dt.$$

By combining two Carleman estimates for the adjoint problem, existence results for these controls were established under the proposed functionals. Furthermore, the non-existence of insensitizing controls was established in the presence of low-regularity potentials in the problem.

Second, a multi-objective control problem is addressed under a hierarchical strategy. Consider the following problem:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{in } Q, \\ y = 0, \ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{on } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where f is a distributed control, called the leader, while the controls v_1, v_2 are boundary controls, termed followers. The objective is to establish the trajectory controllability of

the system under a Stackelberg-Nash scheme, where the followers aim to steer the solution towards certain local targets in a non-cooperative equilibrium, while the leader acts so that the system state reaches a target trajectory in a finite time. To this end, three Carleman estimates were combined for the associated adjoint system under specific assumptions regarding the observation sets.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, mi padre y mi hermano, los que me han dado su apoyo incondicional y a quienes debo todo lo que soy. Agradezco también a mis dos tías y a mi tío, los que también me han apoyado a su manera, a mis abuelas, que aún me acompañan en esta etapa, y mis abuelos, que seguro nos protegen desde el cielo.

Agradezco también a mis profesores, con quienes he tenido asignaturas que he disfrutado mucho durante el pregrado, y quiero agradecer especialmente a mi profesor guía Nicolás Carreño, quien siempre tuvo una excelente disposición a enseñar a sus alumnos con una cercanía y didáctica excepcional. Por sobretodo, le agradezco que me haya abierto las puertas a la investigación en matemáticas y que siempre tuvo una gran paciencia y disposición para explicarme y ayudarme en sacar este trabajo adelante.

Quiero agradecer a mis amigos del pregrado: Ignacio, Tomás, Wolfgang y Renata, con quienes disfruté de tardes de estudio y conversación, así como buenas sesiones de juego. Finalmente, quiero agradecer a María José, que me ha acompañado este último año para sacar este trabajo adelante, y de quien he aprendido más sobre la vida.

Dedicado a mi familia

...

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Un *sistema de control* es un sistema en evolución, en el cual se puede influir a través de ciertos *controles*. En términos generales, un sistema de control se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y, u), \tag{1.1.1}$$

donde y es el estado del sistema, el cual es una función del tiempo $y : [0, T] \to \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, correspondiente al conjunto de posibles estados del sistema. A su vez, u es llamado el *control*, el cual es una función $u : [0, T] \to \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es también un espacio de Banach, correspondiente al conjunto de controles admisibles. En general, se pedirá también que el sistema esté bien puesto para cada control u.

La Teoría de Control se encarga de estudiar esta clase de problemas, buscando respuestas a ciertas preguntas que nos podemos hacer. Por ejemplo, dada cualquier condición inicial y_0, ¿es posible dirigir al sistema a cualquier otro estado posible? De no ser así, ¿existirá una clase de estados a los cuales podemos dirigir el sistema? ¿Se puede realizar el proceso de control en un tiempo arbitrario? Estas son preguntas clásicas en la teoría de control, y existe una extensa literatura estudiando diversos casos. No obstante, la respuesta a estas preguntas depende fuertemente de la naturaleza de la ecuación estudiada. Por ejemplo, en los sistemas no lineales, las propiedades de controlabilidad suelen ser solo locales, esto es, el punto de inicio debe estar cerca del punto final. Por otro lado, las ecuaciones parabólicas poseen efectos regularizantes que les impiden alcanzar estados finales arbitrarios.

De hecho, la relevancia de los problemas de control se extiende incluso a problemas de la vida cotidiana. Considérese, por ejemplo, el problema de aclimatar una habitación, y usted dispone de un dispositivo para influir en la temperatura de la habitación, como un aire acondicionado. Entonces, su objetivo es lograr una cierta distribución de temperatura deseada en un tiempo $T > 0$. Este es un modelo muy sencillo cuya formulación matemática está bien estudiada con las herramientas que proporciona la Teoría de Control.

En la presente tesis se trabajará con ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior a uno. Este tipo de ecuaciones surge también en aplicaciones reales. Por ejemplo, en [22], los autores modelan el crecimiento epitaxial de películas finas a escala nanométrica, modelado por la ecuación

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y - \nabla \cdot f(\nabla y) = g & \text{en } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial \Delta y}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

donde $\Omega = (0, L)^2$, $L > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y $g \in L^2(Q)$. En este contexto, y representa la altura de una película a escala, el término $\Delta^2 y$ es un término de difusión superficial impulsado por capilaridad y g denota el flujo de deposición de material.

En [19] los autores estudiaron el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_t + \nabla \cdot \left(|\nabla \Delta u|^{p(x)-2} \nabla \Delta u \right) = f(x, u) & \text{en } Q, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

donde f es un término de fuente no lineal y p es una función continua tal que $1 < p(x) < \infty$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Estos modelos también surgen de problemas físicos, como en dinámica de fluidos electrorreológicos o en procesamiento de imágenes. Por ejemplo, en [27] se utiliza esta clase de modelos para eliminar el ruido de imágenes médicas. De hecho, en el caso $p = 2$, se recupera la ecuación de Cahn-Hilliard.

En ambos casos se usan modelos de cuarto orden, lo que motiva a estudiar este tipo de ecuaciones. En particular, esta tesis abordará dos tipos de problemas de control para ecuaciones parabólicas de cuarto orden: control insensibilizante y control jerárquico.

En primer lugar, los problemas de control insensibilizante, como su nombre indica, consisten en la búsqueda de controles que hagan que cierto funcional de observación que mide a la solución de la ecuación sea insensible frente a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales del problema. Este tipo de problemas fue introducido por Jacques-Louis Lions, motivado por las dificultades existentes en la determinación de los datos de un problema aplicado.

En segundo lugar, los problemas de control jerárquico son, básicamente, problemas multiobjetivo, donde tenemos varios controles actuando a la vez en la ecuación con, posiblemente, objetivos distintos. En este trabajo se estudiará una clase particular de este tipo de problemas, donde los controles siguen una estrategia denominada Stackelberg-Nash. En esta, ciertos controles toman el rol de *líderes*, los cuales buscan llevar al estado del sistema a una cierta condición final en tiempo $T > 0$, mientras que otros controles asumen el rol de *seguidores*, los que buscan que la solución minimice su distancia respecto a ciertos objetivos locales, supeditados a la acción del control líder en la solución.

Capítulo 2

Marco teórico

El presente capítulo tiene como fin establecer los fundamentos teóricos necesarios para comprender la controlabilidad de ecuaciones parabólicas de cuarto orden. Para ello, se realizará una revisión de los conceptos fundamentales de la Teoría de Control, desde sistemas en dimensión finita hasta aquellos en dimensión infinita, correspondientes al estudio de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs).

En particular, se utilizará la ecuación del calor como ejemplo ilustrativo para introducir nociones básicas de controlabilidad en ecuaciones parabólicas. Esto caso busca ilustrar el procedimiento general al momento de demostrar un resultado de controlabilidad para estas ecuaciones. Además, se verá el rol fundamental que desempeñan las *Desigualdades de Carleman* para demostrar estos resultados.

Finalmente, se enunciarán las herramientas fundamentales que se utilizarán para el desarrollo de los teoremas centrales de esta tesis.

2.1. Controlabilidad en dimensión finita

Primero, se estudiará la controlabilidad para el caso finito. Considérese, para $N \in \mathbb{N}$, el siguiente sistema lineal autónomo de control:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \quad \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es la *condición inicial* del sistema y $u \in L^2(0,T)^M$ es un *control* que actúa en el sistema, con $0 < M \leq N$. Además, suponga $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $B \in \mathbb{R}^{N\times M}$. A continuación, se recuerdan las definiciones de *controlabilidad* y de *conjunto de accesibilidad*.

Definición 2.1.1. *Se denotará por* $R(x_0, T)$ *al conjunto de puntos accesibles por el sistema a partir de la condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *en tiempo* $T > 0$*, el cual se define como:*

$$R(x_0, T) = \left\{x_1 = x_u(T);\ u \in L^2(0,T)^M\right\},$$

donde x_u *es la solución de* (2.1.1) *asociada a un control* u*.*

Definición 2.1.2. *Se dirá que el sistema* (2.1.1) *es controlable en tiempo* $T > 0$ *si para toda condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^N$*, se tiene que* $R(x_0, T) = \mathbb{R}^N$*. Esto es, para todo* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$*, existe un control* $u \in L^2(0,T)^M$ *tal que la solución* x *del sistema* (2.1.1) *asociado a* $x(0) = x_0$ *y* u *cumple que* $x(T) = x_1$*.*

El siguiente teorema es central en la teoría de control de sistemas dinámicos autónomos, puesto que nos entrega una caracterización de la controlabilidad del sistema (2.1.1) mediante el siguiente criterio de Kalman.

Teorema 2.1.1. *El sistema* (2.1.1) *es controlable en tiempo* $T > 0$ *si y sólo si el par* (A, B) *verifica*

$$\textit{rango}(B, AB, A^2B, \ldots, A^{N-1}B) = N.$$

Otra forma de mostrar la controlabilidad exacta del problema es a través de un método de dualidad. Para ello, considere el siguiente sistema adjunto (2.1.1):

$$\begin{cases} -\varphi_t + A^*\varphi = 0 & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

con $\varphi_T \in \mathbb{R}^N$. El siguiente teorema caracteriza la controlabilidad exacta del sistema (2.1.1) verificando que se satisface cierta desigualdad, llamada *desigualdad de observabilidad*:

Teorema 2.1.2. *El sistema* (2.1.1) *es controlable en tiempo* $T > 0$ *si y sólo si existe una constante* $C > 0$ *independiente de* φ *de modo que*

$$\|\varphi(0)\|^2_{\mathbb{R}^N} \leq C \int_0^T |B^*\varphi|^2 \, dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^N,$$

donde φ *es la solución del sistema* (2.1.2)*.*

Esta forma de proceder suele llamarse *"Hilbert Uniqueness Method"*, introducido por Jacques-Louis Lions, donde trasladamos la propiedad de controlabilidad de (2.1.1) a la observabilidad de un problema asociado (2.1.2). Este método es bastante utilizado en la literatura, puesto que también es utilizable en sistemas de dimensión infinita.

No obstante, las propiedades de controlabilidad en dimensión infinita son más complicadas. Por ejemplo, las ecuaciones parabólicas en derivadas parciales, como la ecuación del calor, no son controlables de forma exacta, debido al efecto regularizante intrínseco de sus operadores.

2.2. Controlabilidad en dimensión infinita

De ahora en adelante, se supondrá sque

- H y U son espacios de Hilbert.
- $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador no acotado.
- $B : U \to H$ es un operador acotado.

y considérese el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = Bu(t) \quad \text{para } 0 \le t \le T, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

con $y_0 \in H$. Se quiere establecer la controlabilidad nula del problema (2.2.1), esto es, encontrar un control $u \in L^2(0, T; U)$ tal que $y(T) = 0$. Para ello, se empleará el método HUM (*Hilbert Uniqueness Method*), el cual requiere introducir el siguiente sistema adjunto aociado a (2.2.1):

$$\begin{cases} -\varphi'(t) + A^*\varphi(t) = 0 \quad \text{para } 0 \le t \le T, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

donde A^* es el operador adjunto a A. A partir de la estructura de estos sistemas, se puede deducir la siguiente identidad:

$$(y_0, \varphi(0))_H + \int_0^T (u(t), B^*\varphi(t))_U \, dt = (y(T), \varphi_T)_H, \quad \forall \varphi_T \in H. \tag{2.2.3}$$

Nótese que si u es control tal que

$$\int_0^T (u(t), B^*\varphi(t))_U \, dt + (y_0, \varphi(0))_H = 0 \quad \forall \varphi_T \in H, \tag{2.2.4}$$

entonces $(y(T), \varphi_T)_H = 0$, $\forall \varphi_T \in H$. En consecuencia, se obtendría que $y(T) = 0$. Así, para que se satisfaga la propiedad (2.2.4), se introduce el siguiente funcional:

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_U^2 \, dt + (y_0, \varphi(0))_H. \tag{2.2.5}$$

Nótese que (2.2.5) satisface que

$$DJ(\hat{\varphi}_T)(\varphi_T) = \int_0^T (B^*\hat{\varphi}(t), B^*\varphi(t))_U \, dt + (y_0, \varphi(0))_H.$$

Si $\hat{\varphi}_T$ es un valor óptimo para J, entonces su derivada de Fréchet en dicho valor se debe anular. Esto es,

$$\int_0^T (B^*\hat{\varphi}(t), B^*\varphi(t))_U \, dt + (y_0, \varphi(0))_H = 0 \quad \forall \varphi_T \in H.$$

Definiendo $\hat{u} = B^*\hat{\varphi}$, se tendrá la condición (2.2.4), por lo que $y(T) = 0$ tomando tal control. La existencia de este minimizador $\hat{\varphi}$ estará garantizada si J satisface las siguientes propiedades:

- $J : H \to \mathbb{R}$ sea continuo.
- J sea convexo.
- Exista $C > 0$ tal que para todo $\varphi_T \in H$, la solución φ de (2.2.2) verifique la siguiente desigualdad:
$$\|\varphi(0)\|_H^2 \leq C \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_U^2 \, dt, \tag{2.2.6}$$
lo que asegurará la coercividad del funcional J. Esta condición suele llamarse *desigualdad de observabilidad*.

Además, nótese que el control $\hat{u}$ cumple

$$\|\hat{u}\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|y_0\|_H,$$

cuya cota se obtiene a partir de (2.2.3) y (2.2.6).

En la práctica, el principal desafío al estudiar la controlabilidad de un problema corresponde a demostrar o refutar la veracidad de (2.2.6). Para ello, una de las herramientas más potentes y ampliamente utilizadas son las *Desigualdades de Carleman*. Estas corresponden a estimaciones de energía (pesadas) de la solución de una ecuación en términos de observaciones locales y de los datos del problema, siguiendo una estructura similar a (2.2.6). Estas desigualdades constituyen una vía robusta para demostrar las desigualdades de observabilidad.

A continuación, nos interesará estudiar un problema típico de control, correspondiente a la controlabilidad a trayectorias de la ecuación del calor. Este es un clásico ejemplo de controlabilidad para ecuaciones parabólicas, donde las desigualdades de Carleman jugarán un rol esencial.

2.3. Controlabilidad de la ecuación del calor

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio abierto de clase C^2 y $\omega \subset\subset \Omega$ un subdominio abierto y no vacío denominado *dominio de control*. Considérese la ecuación

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = u\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q := \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma := \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

donde $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial y $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ es el control.

Haciendo una analogía con el introducido previamente, aquí $A = -\Delta$, $B : v \mapsto v\mathbf{1}_\omega$, $H = L^2(\Omega)$ y $U = L^2(\omega \times (0,T))$. Para ecuacione parabólicas, se suele considerar la siguiente noción de control:

Definición 2.3.1. *Se dirá que* (2.3.1) *es controlable a trayectorias en tiempo* $T > 0$ *si, para todo* $y_0 \in L^2(\Omega)$*, existe un control* $u \in L^2(\omega\times(0,T))$ *tal que la solución* $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C([0,T],L^2(\Omega))$ *satisface que*

$$y(\cdot,T) = \overline{y}(\cdot,T) \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\overline{y}$ *es la solución del sistema no controlado asociado a una condición inicial* $\overline{y}_0 \in L^2(\Omega)$.

Observación 2.3.1. *Debido a la linealidad del sistema* (2.3.1)*, la controlabilidad a trayectorias es equivalente a la controlabilidad nula.*

Teorema 2.3.1. *El sistema* (2.3.1) *es controlable a cero para todo* $y_0 \in L^2(\Omega)$*. Es decir, existe un control* $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ *tal que* $y(\cdot,T) = 0$.

La demostración del Teorema 2.3.1 utiliza el método HUM, trasladando el problema a la observabilidad dle siguiente problema adjunto:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot,T) = \varphi_T & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Lema 2.3.1 (Desigualdad de Observabilidad)**.** *Existe una constante* $C > 0$ *tal que la solución del sistema* (2.3.2) *satisface la siguiente desigualdad de observabilidad:*

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt.$$

El Lema 2.3.1 garantiza la coercividad del siguiente funcional

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx\, dt + \int_\Omega y_0\, \varphi(x,0)\, dx.$$

el cual además es continuo y estrictamente convexo. En consecuencia, J admite un único mínimo $\hat{\varphi}_T$, de modo que $\hat{u} = \hat{\varphi}\mathbf{1}_\omega$ es un control tal que $y(\cdot,T) = 0$, para $\hat{\varphi}$ solución del sistema (2.3.2) con condición inicial $\hat{\varphi}_T$.

Para obtener la estimación del Lema (2.3.1), se recurre a una desigualdad de Carleman. Para introducirla, será necesario contar con la siguiente función:

Lema 2.3.2 (Véase [14])**.** *Sea $\omega_0 \subset\subset \Omega$ un conjunto abierto no vacío. Entonces, existe $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\eta > 0 \;\; en \;\; \Omega, \quad \eta \equiv 0 \;\; en \;\; \partial\Omega, \quad |\nabla\eta| > 0 \;\; en \;\; \Omega\backslash\omega_0.$$

A partir de η, se definen las siguientes funciones de peso para $m > 1$ y $\lambda > 0$:

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda m\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)}, \quad \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m\|\eta\|_\infty+\eta(x))}}{t(T-t)}, \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{2.3.3}$$

En [14] se demuestra la siguiente desigualdad de Carleman:

Lema 2.3.3. *Sea $q_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q)$. Considere el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} q_t - \Delta q = f & en \; Q, \\ q = 0 & sobre \; \Sigma, \\ q(\cdot,T) = q_0 & en \; \Omega. \end{cases}$$

Existe $C_1 = C_1(\Omega,\omega)$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1(\Omega,\omega)$ y $s \geq C(\Omega,\omega)(T+T^2)$,

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\alpha}\left(s^{-1}\xi^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2) + s\lambda^2\xi|\nabla q|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|q|^2\right) \\ &\leq C_1\left(\iint_{\omega\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\, dx\, dt + \iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dx\, dt\right). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Observación 2.3.2. *Para demostrar que esta estimación de Carleman efectivamente implica la desigualdad de observabilidad* (2.3.1)*, nótese que*

- $e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq e^{-2C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}$ *en* $\Omega \times \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right)$.
- $e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq e^{-C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}$ *en* $\Omega \times (0,T)$.

- *Toda solución φ de (2.3.2) verifica*

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.$$

Con esto se puede deducir la siguiente desigualdad:

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{Ce^{\frac{C}{T}}}{T}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\, dx\, dt.$$

El Lema (2.3.3) se puede probar siguiendo los siguientes pasos

- **Cambio de Variables:**

  Dados $\omega_0 \subset\subset \omega' \subset\subset \omega$, se define

  $$\psi = e^{-s\alpha}q,$$

  de modo que ψ satisface la siguiente identidad:

  $$M_1\psi + M_2\psi = e^{-s\alpha}f, \tag{2.3.5}$$

  con

  $$\begin{aligned} M_1\psi &= -2s\lambda^2\xi|\nabla\eta|^2\psi - 2s\lambda\xi\nabla\eta\cdot\nabla\psi + \psi_t,\\ M_2\psi &= s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\eta|^2\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi. \end{aligned}$$

  Con ello,

  $$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + 2\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q)} = \|e^{-s\alpha}f\|^2_{L^2(Q)},$$

  de modo que se quiere estimar el conmutador $\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q)}$.

- **Cálculo de $\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q)}$**

  Tras múltiples integraciones por partes, se pueden obtener la siguientes estimaciones para $s \geq C(\Omega,\omega)(T+T^2)$ y $\lambda \geq C(\Omega,\omega)$.

  - $\langle M_1\psi, (M_2\psi)_1\rangle_{L^2(Q)} \geq C\iint_Q s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt - C\iint_{\omega'\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt,$

  - $$\begin{aligned}\langle M_1\psi, (M_2\psi)_2\rangle_{L^2(Q)} \geq{}& C\iint_Q s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt - C\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2|\psi|^2\, dx\, dt\\ &- C\iint_{\omega'\times(0,T)} s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt,\end{aligned}$$

- $\langle M_1\psi, (M_2\psi)_3\rangle_{L^2(Q)} \geq -C \iint_Q s^3\lambda^2\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt,$

deduciéndose lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + \iint_Q \left(s\lambda^2\xi|\psi|^2\, dx\, dt + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt\right)\\
&\leq C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dx\, dt + \iint_{\omega'\times(0,T)} s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3 e^{-2s\alpha}|\psi|^2\, dx\, dt\right).
\end{aligned}$$

- **Conclusión:**

  Para añadir los términos $|\Delta\psi|^2$ y $|\psi_t|^2$, se utiliza la ecuación (2.3.5), de modo que

  - $\displaystyle\iint_Q s^{-1}\xi^{-1}|\psi_t|^2\, dx\, dt \leq C\left(\iint_Q s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt + \iint_Q s\lambda^4\xi|\psi|^2\, dx\, dt + \|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)}\right),$

  - $\displaystyle\iint_Q s^{-1}\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dx\, dt \leq C\left(\iint_Q s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt + \iint_Q sT^2\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)}\right).$

  Finalmente, para acotar el término local de $\nabla\psi$, se utiliza una función cut-off $\theta \in C_c^\infty(\omega)$ tal que $\theta \equiv 1$ en ω', $0 \leq \theta \leq 1$. Tras varias integraciones por partes, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega'\times(0,T)} s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt &\leq \iint_{\omega\times(0,T)} \theta s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt\\
&\leq \varepsilon \iint_{\omega\times(0,T)} s^{-1}\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dx\, dt\\
&\quad + C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt + \iint_{\omega\times(0,T)} s\lambda^4\xi|\psi|^2\, dx\, dt\right)
\end{aligned}$$

  Así, se deduce la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^{-1}\xi^{-1}\left(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2\right)\, dx\, dt + \iint_Q s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\, dx\, dt + \iint_Q s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt\\
&\leq \left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dx\, dt + \iint_{\omega\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\, dx\, dt\right).
\end{aligned}$$

  Finalmente, se concluye volviendo a la variable original q.

2.4. La ecuación parabólica de cuarto orden

De ahora en adelante, considérese $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$ un dominio abierto con borde $\partial\Omega$ regular, $\omega \subset\subset \Omega$ un subdominio abierto y no vacío, y $T > 0$. Se denotará por $Q := \Omega \times (0,T)$

y $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$. Considérese el siguiente sistema de control:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y = v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

con $y_0 \in L^2(\Omega)$ la condición inicial y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ el control.

2.4.1. Existencia y regularidad de soluciones

En el desarrollo de esta tesis se trabajará con sistemas parabólicos de cuarto orden. Por ello, será necesario contar con resultados de existencia y regularidad de soluciones para este tipo de ecuaciones.

Proposición 2.4.1. *Sean $F \in L^2(Q)$ y $z_0 \in H_0^2(\Omega)$. Considere el problema*

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az + B\cdot\nabla z + D : \nabla^2 z = F & \text{en } Q, \\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

donde $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$. Entonces, existe una única solución $z \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)) \cap C(0,T;H^2(\Omega))$. Además, existe $C>0$ tal que

$$\|z\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|z\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} + \|z\|_{C^0(0,T;H^2(\Omega))} \le e^{C\overline{K}}\left(\|F\|_{L^2(Q)} + \|z_0\|_{H^2(\Omega)}\right),$$

donde

$$\overline{K} = 1 + T\left(\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^{\frac{4}{3}} + \|D\|_\infty^2\right) + \|a\|_\infty^2 + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2.$$

Demostración. Multiplicando (2.4.2) por z e integrando en Ω, se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |z|^2 + \int_\Omega |\Delta z|^2 + \int_\Omega \left(a|z|^2 + B\cdot\nabla z\, z + D:\nabla^2 z\, z\right) = \int_\Omega Fz.$$

Nótese las siguientes estimaciones:

- $$\left|\int_\Omega a|z|^2\right| \le \|a\|_\infty \|z\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

- $$\left|\int_\Omega B\cdot\nabla z\, z\right| \le \|B\|_\infty \|z\|_{H^1(\Omega)}\|z\|_{L^2(\Omega)} \le \|B\|_\infty \|z\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\|z\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 + C\|B\|_\infty^{\frac{4}{3}}\|z\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

- $$\left|\int_\Omega D:\nabla^2 z\, z\right| \leq \|D\|_\infty \|z\|_{H^2(\Omega)}\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\|z\|^2_{H^2(\Omega)} + C\|D\|^2_\infty \|z\|^2_{L^2(\Omega)},$$

- $$\left|\int_\Omega F z\right| \leq \varepsilon\|z\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|F\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Además, nótese que existe $C_p(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H^2_0(\Omega)$,

$$\|z\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega)\int_\Omega |\Delta u|^2.$$

Por lo tanto, para $0 < \varepsilon < C_p$,

$$\partial_t\|z\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|F\|^2_{L^2(\Omega)} + (\|a\|_\infty + \|B\|^{\frac{4}{3}}_\infty + \|D\|^2_\infty)\|z\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.4.3}$$

Denote $K_1 = \|a\|_\infty + \|B\|^{\frac{4}{3}}_\infty + \|D\|^2_\infty$. De (2.4.3), se deduce que

$$\partial_t\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - CK_1\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|F(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Luego, usando el multiplicador $e^{-CK_1 t}$, se tiene lo siguiente

$$\partial_t\left(e^{-CK_1 t}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\|F(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando en $(0,t)$, se deduce la siguiente cota uniforme:

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{C(1+K_1 T)}\left(\|F\|^2_{L^2(Q)} + \|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.4.4}$$

Así, usando (2.4.3) y (2.4.4), se cumple que

$$\|z\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq e^{C(1+K_1 T)}\left(\|F\|^2_{L^2(Q)} + \|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.4.5}$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (2.4.2) por $\Delta^2 z$ e integrando por partes, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta z|^2 + \int_\Omega |\Delta^2 z|^2 + \int_\Omega \left(az\,\Delta^2 z + B\cdot\nabla z\,\Delta^2 z + D:\nabla^2 z\,\Delta^2 z\right) = \int_\Omega F\,\Delta^2 z.$$

Usando las siguientes estimaciones,

- $$\left|\int_\Omega az\,\Delta^2 z\right| \leq C\|a\|^2_\infty\|z\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\Delta^2 z\|^2_{L^2(\Omega)},$$

- $$\left|\int_\Omega B\cdot\nabla z\,\Delta^2 z\right|\leq C\|B\|_\infty^2\|z\|_{H^1(\Omega)}^2+\varepsilon\|\Delta^2 z\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

- $$\left|\int_\Omega D:\nabla^2 z\,\Delta^2 z\right|\leq C\|D\|_\infty^2\|z\|_{H^2(\Omega)}^2+\varepsilon\|\Delta^2 z\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

- $$\left|\int_\Omega F\,\Delta^2 z\right|\leq C\|F\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\|\Delta^2 z\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

y denotando $K_2=\|a\|_\infty^2+\|B\|_\infty^2+\|D\|_\infty^2$, se deduce, para $0<\varepsilon<1$,

$$\partial_t\|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta^2 z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leq CK_2\|z\|_{H^2(\Omega)}^2. \tag{2.4.6}$$

Integrando (2.4.6) en $(0,t)$ y usando (2.4.4) se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\|\Delta^2 z\|_{L^2(Q)}^2&\leq CK_2\|z\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2\\&\leq e^{C(1+K_1T+K_2)}\left(\|F\|_{L^2(Q)}^2+\|z_0\|_{H^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Multiplicando la ecuación por z_t, se deduce también la siguiente desigualdad:

$$\|z_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leq C\left(\|\Delta^2 z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+K_2\|z\|_{H^2(\Omega)}^2+\|F\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

Usando (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7) en la anterior desigualdad e integrando en $(0,T)$, se deduce la siguiente cota,

$$\|z\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2\leq e^{C(1+K_1T+K_2)}\left(\|F\|_{L^2(Q)}^2+\|z_0\|_{H^2(\Omega)}^2\right). \tag{2.4.8}$$

Usando regularidad elíptica junto con (2.4.5) y (2.4.8), también se tiene que

$$\begin{aligned}\|z\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))}^2&\leq C\left(\|z_t\|_{L^2(Q)}^2+\|F\|_{L^2(Q)}^2+K_2\|z\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2\right)\\&\leq e^{C(1+K_1T+K_2)}\left(\|F\|_{L^2(Q)}^2+\|z_0\|_{H^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Además (véase [25]),

$$\|z\|_{C^0(0,T;H^2(\Omega))}^2\leq C\left(\|z\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2+\|z\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))}^2\right) \tag{2.4.10}$$

Así, de (2.4.8), (2.4.9) y (2.4.10) se concluye el resultado deseado. □

Observación 2.4.1. *La Proposición* (2.4.1) *también es válida si se consideran las condiciones de borde* $z=\Delta z=0$.

2.5. Desigualdad de Carleman para la ecuación parabólica de cuarto orden

En esta sección, enunciaremos algunas desigualdades de Carleman disponibles para ecuaciones parabólicas de cuarto orden. Partiremos haciendo una revisión de los resultados disponibles en una dimensión, con el fin de compararlos con los disponibles en dimensión superior a uno.

2.5.1. Desigualdad de Carleman en una dimensión

Considérese la siguiente ecuación de Kuramoto-Sivashinsky:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} + \lambda u_{xx} = f & \text{en } Q := (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{en } (0,T), \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{en } (0,T), \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{en } (0,L), \end{cases} \tag{2.5.1}$$

donde $f \in L^2(Q)$. Para establecer la desigualdad de Carleman, considérese $\omega_0 \subset\subset (0,L)$ y $\eta \in C^4([0,L])$ tal que

$$\eta > 0 \ \text{ en } \Omega, \quad \eta(0) = \eta(L) = 0, \quad |\eta'(x)| > 0 \quad \forall x \in [0,L]\backslash\overline{\omega_0}.$$

Para $\lambda > 0$ y $m \in \mathbb{R}^+$, se definen

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_{L^\infty(0,L)}}}{t^m(T-t)^m} - \xi(x,t), \quad \xi(x,t) = \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_{L^\infty(0,L)}+\lambda\eta(x)}}{t^m(T-t)^m}, \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Proposición 2.5.1 (Véase [15, 30, 11])**.** *Sean $\omega_0 \subset\subset \omega$, $m \geq 1/3$ y $\lambda_0 \geq 1$. Existe $C(L,\omega) > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y $s \geq C(T^m + T^{2m})$,*

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\big(s^7\lambda^8\xi^7|u|^2 + s^5\lambda^6\xi^5|u_x|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|u_{xx}|^2 + s\lambda^2\xi|u_{xxx}|^2$$
$$+ s^{-1}\xi^{-1}(|u_t|^2 + |u_{xxxx}|^2)\big)\,dx\,dt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|u|^2\,dx\,dt + \iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dx\,dt,$$

para toda solución u de (2.5.1)*.*

La primera estimación de Carleman obtenida para ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión uno fue en [10] con $m = 1$, estableciendo un resultado de controlabilidad local a trayectorias para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky con controles frontera de la forma:

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} + y y_x = 0 & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty),\\ y(0,t) = h_1(t), \quad y(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,+\infty),\\ y_x(0,t) = h_2(t), \quad y_x(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,+\infty), \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y h_1, h_2 son controles frontera.

Luego, en [30] se estableció una estimación de Carleman con observación interior, mostrando un resultado de controlabilidad nula para el problema semilineal de una ecuación parabólica de cuarto orden, de la forma:

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + f(y) = h\mathbf{1}_\omega & \text{en } (0,1)\times(0,+\infty),\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,+\infty),\\ y_x(0,t) = y_x(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,+\infty),\\ y(0,\cdot) = y_0, & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{2.5.2}$$

con $y_0 \in L^2(0,1)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función globalmente Lipschitz. Posteriormente, esta estimación fue mejorada en [15], estableciendo la existencia de controles insensibilizantes cuando f es una no linealidad superlineal.

En [11] se estableció la estimación de Carleman presentada en la Proposición 2.5.1. En este artículo se estableció un resultado de controlabilidad nula para una ecuación de Kuramoto-Sivashinsky estabilizada del estilo:

$$\begin{cases} u_t + \gamma u_{xxxx} + u_{xxx} + a u_{xx} + u u_x = v_x + h\mathbf{1}_\omega & \text{en } (0,1)\times(0,T),\\ v_t - \Gamma v_{xx} + c v_x = u_x & \text{en } (0,1)\times(0,T),\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,T),\\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,T),\\ v(0,t) = v(1,t) = 0 & \text{para } t\in(0,T),\\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & \text{en } x\in(0,1), \end{cases}$$

donde $a, \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}$. En particular, establecieron la existencia de controles h tales que $u(\cdot,T) = v(\cdot,T) = 0$.

Esta estimación fue utilizada posteriormente en [8, 9] para mostrar la controlabilidad jerárquica de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky usando una estrategia Stackelberg-Nash con líder distribuido y seguidores distribuidos y frontera, respectivamente.

También, en [6], estudiaron la controlabilidad a trayectorias de la ecuación de

Kuramoto-Sivashinsky en un sistema de la forma:

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + y_{xxx} + ay_{xx} + yy_x = z_x & \text{en } (0,L)\times(0,T), \\ z_t - \Gamma z_{xx} + cz_x = y_x + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } (0,L)\times(0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, & \text{para } t\in(0,T), \\ y_x(0,t) = y_x(L,t) = 0 & \text{para } t\in(0,T), \\ y(x,0) = y_0(x), \quad z(x,0) = z_0(x) & \text{para } x\in(0,L), \end{cases}$$

donde $a, \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}$. Nótese que el resultado se obtuvo a través de la acción de un control actuando sólo en la ecuación del calor.

Finalmente, en [7] se estudió el costo de controlar a cero una ecuación parabólica de cuarto orden a través de controles frontera, bajo la presencia de coeficientes de difusión y transporte.

2.5.2. Desigualdad de Carleman en dimensión superior a uno con condiciones de frontera homogéneas

Considérese la siguiente ecuación de cuarto orden en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$:

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi = f & \text{en } Q := \Omega\times(0,T), \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{para } \Sigma := \partial\Omega\times(0,T), \\ \varphi(\cdot,T) = \varphi_T & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.5.3}$$

donde $f \in L^2(Q)$. Para establecer la desigualdad de Carleman, considérese $\omega_0 \subset\subset \Omega$ y $\eta \in C^4(\overline{\Omega})$ tal que

$$\eta > 0 \ \text{ en } \Omega, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\nabla\eta| > 0 \ \text{ en } \Omega\backslash\overline{\omega_0}.$$

Para $\lambda > 0$, defina las siguientes funciones de peso:

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^{1/2}(T-t)^{1/2}}, \quad \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty+\eta(x))}}{t^{1/2}(T-t)^{1/2}}, \quad \forall (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{2.5.4}$$

los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$|\alpha_t| + |\xi_t| \leq CT\xi^3, \quad \xi^{-1} \leq \frac{T}{2}, \quad \nabla\xi = -\nabla\alpha = \lambda\xi\nabla\eta. \tag{2.5.5}$$

Proposición 2.5.2 ([18])**.** *Sea $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $\omega_0 \subset\subset \omega$. Entonces existe $C = C(\Omega,\omega) > 0$ tal que*

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\Big(s^6\lambda^8\xi^6|\varphi|^2 + s^4\lambda^6\xi^4|\nabla\varphi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\Delta\varphi|^2 + s^2\lambda^4\xi^2|\nabla^2\varphi|^2 + s\lambda^2\xi|\nabla\Delta\varphi|^2$$
$$+ s^{-1}\xi^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta^2\varphi|^2)\Big) \leq C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\right)$$

para todo $\lambda \geq C$, $s \geq C(T^{1/2}+T)$ y φ solución de (2.5.3).

Observación 2.5.1. *La proposición 2.5.2 también es válida para las condiciones de borde* $\varphi = \Delta\varphi = 0$.

También será de utilidad el siguiente resultado, el cual extiende la estimación de la proposición 2.5.2,

Corolario 2.5.1. *Sea* $\omega \subset\subset \Omega$ *tal que* $\omega_0 \subset\subset \omega$ *y* $r \in \mathbb{R}$*. Entonces existe* $C = C(\Omega, \omega, r) > 0$ *tal que*

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\Big(s^{6+r}\lambda^{8+r}\xi^{6+r}|\varphi|^2 + s^{4+r}\lambda^{6+r}\xi^4|\nabla\varphi|^2 + s^{3+r}\lambda^{4+r}\xi^{3+r}|\Delta\varphi|^2 + s^{2+r}\lambda^{4+r}\xi^{2+r}|\nabla^2\varphi|^2$$
$$+ s^{1+r}\lambda^{2+r}\xi^{1+r}|\nabla\Delta\varphi|^2 + s^{-1+r}\lambda^r\xi^{-1+r}(|\varphi_t|^2 + |\Delta^2\varphi|^2)\Big)$$
$$\leq C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} s^{7+r}\lambda^{8+r}\xi^{7+r}e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q s^r\lambda^r\xi^r e^{-2s\alpha}|f|^2\right)$$

para todo $\lambda \geq C$, $s \geq C(T^{1/2} + T)$ *y* φ *solución de* (2.5.3).

Observación 2.5.2. *El corolario 2.5.1 es una consecuencia directa de la proposición 2.5.2. Por completitud, su demostración se encuentra en el* ***Apéndice E****.*

La proposición 2.5.2 es la primera desigualdad de Carleman mostrada para ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior. En este artículo además se demostró la controlabilidad nula del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y = v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

con $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ es el control. Cabe señalar que, aunque se obtuvo este resultado mediante estimaciones de Carleman, la controlabilidad nula del problema (2.5.6) ya había sido probada previamente por [29] empleando técnicas espectrales.

2.5.3. Desigualdad de Carleman en dimensión superior a uno con condiciones de frontera no homogéneas

Considérese la siguiente ecuación de cuarto orden en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$:

$$\begin{cases} -q_t + \Delta^2 q + aq - \nabla\cdot(Bq) + \nabla^2 : (Dq) + \tilde{B}\cdot\nabla q + \tilde{D} : \nabla^2 q = F_0 + \nabla\cdot F_1 + \nabla^2 : \hat{F} & \text{en } Q, \\ q = f_0,\ \frac{\partial q}{\partial n} = \tilde{f} & \text{sobre } \Sigma, \\ q(\cdot, T) = q_T & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.5.7}$$

donde $q_0 \in H^{-2}(\Omega)$, $F_0 \in L^2(Q)$, $F_1 \in L^2(Q)^N$, $\hat{F} \in L^2(Q)^{N\times N}$, $f_0 \in L^2(\Sigma)$, $\tilde{f} \in L^2(\Sigma)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$, $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$, $\tilde{B} \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$, $\tilde{D} \in L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$.

Proposición 2.5.3. *Considérense los pesos definidos en (2.5.4) y supóngase que $\omega_0 \subset\subset \omega$. Entonces, existe $C = C(\Omega, \omega, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty, \|\tilde{B}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty})}, \|\tilde{D}\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty})})$ tal que:*

$$\begin{aligned} \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 \leq C\Big(&\iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2 \\ &+ \iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2 + \iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2 \\ &+ \iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi^5 e^{-2s\alpha}|\tilde{f}|^2 + \iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi^7 e^{-2s\alpha}|f_0|^2\Big) \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

para todo $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^{1/2}+T)$. Si además $f_0 = \tilde{f} = 0$, entonces se verifica la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} &\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2 + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \\ &\qquad \leq C\Big(\iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2 \\ &\qquad + \iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2 + \iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2\Big). \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Observación 2.5.3. *La Proposición 2.5.3 fue mostrada originalmente en [20] cuando $a = B^i = D^{ij} = 0$, $i,j \in \{1,\dots,N\}$, y sin considerar el caso con condiciones de borde homogéneas. La demostración de la extensión a estos casos se encuentra en el* ***Apéndice A***.

Observación 2.5.4. *Las estimaciones anteriores también son válidas para las condiciones de borde $q = f_0$, $\Delta q = \tilde{f}$. En tal caso, se debe cambiar el penúltimo término del lado derecho de (2.5.8) por*

$$\iint_\Sigma s^3\lambda^3\xi^3 e^{-2s\alpha}|\tilde{f}|^2\, d\sigma\, dt.$$

En [20] se estudió el siguiente problema de cuarto orden semilineal:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + f_1(y,\nabla y,\nabla^2 y)\mathbf{1}_{\{f_2\equiv 0\}} + f_2(y,\nabla y,\nabla^2 y,\nabla^3 y) = v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q,\\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde f_1, f_2 son funciones localmente Lipschitz. En este artículo, se estableció la controlabilidad nula de este sistema usando la Proposición 2.5.3. Posteriormente, en [23] se estableció un resultado de controlabilidad nula para la siguiente ecuación

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + a_0 y + B\cdot\nabla y + D:\nabla^2 y = F(y,\nabla y,\nabla^2 y) + v\mathbf{1}_\omega + g & \text{en } Q,\\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $a, B^i, D^{i,j} \in L^\infty(Q)$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ es el control, $g \in L^2(Q)$ y $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitz. En [24], los autores también establecieron un resultado de controlabilidad jerárquica para una ecuación de la forma:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u + F(u,\nabla u) = f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} + v_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{en } Q,\\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

cuando F es una función localmente Lipschitz.

Finalmente, el siguiente lema técnico será de gran utilidad para recuperar términos de orden inferior:

Lema 2.5.1 ([12])**.** *Sean $r \in \mathbb{R}$ y $\omega_0 \subset\subset \omega'$. Existe $C(r,\Omega,\omega',\eta) > 0$ tal que para todo $T > 0$ y $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$,*

$$\iint_Q s^2\lambda^2\xi^{r+2}e^{-2s\alpha}|u|^2 \le C\left(\iint_Q \xi^r e^{-2s\alpha}|\nabla u|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^2\lambda^2\xi^{r+2}e^{-2s\alpha}|u|^2\right).$$

2.6. Resultados previos de control insensibilizante

En [21] se presentaron varios resultados de control insensibilizante para ecuaciones parabólicas de cuarto orden en dimensión superior bajo distintos funcionales de observación. A continuación se detallan los resultados obtenidos.

Considérese $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \ge 2$, un dominio abierto y regular, y sean $\omega, \mathcal{O} \subset\subset \Omega$ subdominios abiertos y no vacíos. Se denotará por $Q := \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Considérese el siguiente sistema de control,

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + f(y,\nabla y,\nabla^2 y) = \zeta + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q,\\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ y(\cdot,0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial, $\zeta \in L^2(Q)$ es un término de fuente, $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ es el control, y $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times N},\mathbb{R})$ es una función globalmente Lipschitz. Por otro lado, $\tau \in \mathbb{R}$, $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ son variables desconocidas con τ pequeño y $\|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, los cuales representan una perturbación desconocida frente a los datos iniciales.

El objetivo consiste en determinar la existencia de controles insensibilizantes para los funcionales de observación:

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y|^2\,dx\,dt, \quad \Phi_2(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla y|^2\,dx\,dt.$$

Definición 2.6.1. *Sean $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $\zeta \in L^2(Q)$. Se dice que el control v insensibiliza a Φ_i $(i = 1, 2)$, si*

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(y(x,t;v,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega),\ \|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1 \tag{2.6.1}$$

Se define el siguiente espacio:

$$L^{2,\gamma}(Q) = \left\{ g \in L^2(Q) : \iint_Q e^{\frac{\gamma}{\sqrt{t}}} |g|^2 \, dx\, dt < +\infty \right\}, \quad \gamma > 0.$$

Teorema 2.6.1 ([21])**.** *Supóngase que $y_0 = 0$, $f(0,0,0) = 0$ y $\omega \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$. Entonces, existe una constante $C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, f)$ tal que para todo $\zeta \in L^{2,C}(Q)$, existe un control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ que satisface la condición de insensibilización* (2.6.1)*. Más aún, el control v satisface la estimación:*

$$\|v\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \le e^C \left(\iint_Q e^{\frac{C}{\sqrt{t}}} |\zeta|^2 \, dx\, dt \right)^{1/2}$$

donde

$$C = \tilde{C}(\Omega, \omega) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T}} + (1+T) \left(1 + \|f\|^2_{W^{1,\infty}} \right) \right)$$

Para el resultado sobre Φ_2, se supondrá que f satisface

$$f(y, \nabla y, \nabla^2 y) = ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y,$$

donde

$$a \in L^\infty(0,T), \quad B \in L^\infty(0,T)^N, \quad D \in L^\infty(0,T)^{N \times N}$$

Sin embargo, en [21] se demuestra también un resultado negativo relativo a Φ_2. Para ello, considere el siguiente sistema acoplado:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y + V \cdot \nabla \Delta y = v \mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ -u_t + \Delta^2 u + au - \nabla \cdot (Bu) + \nabla^2 : (Du) - \nabla \Delta (Vu) = \nabla \cdot (\nabla y \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ y = \Delta y = 0, \quad u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = y_0, \quad u(\cdot, T) = u_T & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.6.2}$$

donde $y_0, u_T \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B, V \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N \times N}$.

Definición 2.6.2. *Decimos que el sistema* (2.6.2) *es aproximadamente controlable si para todo $\varepsilon > 0$, existe $v_\varepsilon \in L^2(Q)$ tal que la correspondiente solución $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de* (2.6.2) *satisface*

$$\|u_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$$

Para ello, se suele emplear un argumento de dualidad, de modo que la controlabilidad aproximada del sistema (2.6.2) es equivalente a lo siguiente: para todo $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, la solución (φ, ψ) del sistema

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi + a\varphi - \nabla \cdot (B\varphi) + \nabla^2 : (D\varphi) - \nabla\Delta(V\psi) = \nabla \cdot (\nabla\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi + \Delta^2\varphi + a\psi + B \cdot \nabla\psi + D : \nabla^2\psi + V \cdot \nabla\Delta\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \Delta\varphi = 0, \quad \psi = \Delta\psi = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \varphi(\cdot, T) = 0, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.6.3}$$

satisface el siguiente *Principio de Continuación Única*:

$$\varphi = 0 \text{ en } \omega \times (0, T) \Longrightarrow \varphi = \psi = 0 \text{ en } Q \tag{2.6.4}$$

En [21] se prueba siguiente resultado:

Lema 2.6.1. *Sea $N \in \{1, 2\}$ y $T > 0$. Entonces, existen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, acotado y conexo, $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B, V \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$ tales que la solución (φ, ψ) de* (2.6.3) *no satisface el Principio de Continuación Única* (2.6.4) *para cualquier $\omega \subset\subset \Omega$.*

A partir de este lema, deducen el siguiente teorema:

Teorema 2.6.2. *Sea $N \in \{1, 2\}$ y $T > 0$. Entonces, existen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, acotado y conexo, $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B, V \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$ tales que para cualquier abierto no vacío $\omega \subset\subset \Omega$, el sistema* (2.6.2) *no es aproximadamente controlable.*

2.7. Resultados previos de controlabilidad jerárquica

El primer artículo de controlabilidad jerárquica exacta a trayectorias es [3], donde se estableció esta propiedad para una ecuación de la forma:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} + v^1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + v^2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.7.1}$$

donde $a \in L^\infty(Q)$, F es una función localmente Lipschitz e $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial, $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ es el control líder, definido sobre el *dominio de control principal* $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, y $v^1 \in L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$, $v^2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$ son los controles seguidores, definidos en los *dominios de control secundarios* $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \subset\subset \Omega$. Dados los subdominios $\mathcal{O}_{1,d}$, $\mathcal{O}_{2,d} \subset\subset \Omega$ abiertos, denominados *conjuntos de observación*, y los objetivos locales $y_{i,d} \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))$ $(i = 1,2)$, considere los siguientes funcionales:

$$J_i(f; , v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |y - y_{i,d}|^2 \, dx \, dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times(0,T)} |v^i|^2 \, dx \, dt, \quad i = 1, 2.$$

En este tipo de problemas, se busca aplicar una estrategia Stackelberg-Nash, descrito de la siguiente forma:

1. Dada la acción del control líder f, los seguidores v^1, v^2 buscan un *Equilibrio de Nash* para los funcionales de costo J_i, $i = 1, 2$. Esto es,

$$J_1(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^1} J_1(f; \hat{v}^1, v^2), \quad J_2(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^2} J_2(f; v^1, \hat{v}^2).$$

2. Considere $\overline{y}$ una trayectoria no controlada de (2.7.1), esto es, una solución del sistema $f = v^1 = v^2 = 0$. Una vez identificado el equilibrio de Nash, se busca un líder f tal que

$$y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T) \ \text{ en } \ \Omega.$$

De este modo, mientras los seguidores minimizan localmente la desviación respecto a sus objetivos $y_{i,d}$, el líder busca controlar *globalmente* la ecuación.

En este artículo, se trabajó sobre el supuesto que $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}$. Posteriormente, en [2] se extendió el caso de estudio a cuando $\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}$ estudiando el caso lineal ($F \equiv 0$). Finalmente, en [1] estudiaron los siguientes dos casos:

1. Considere el sistema

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = \rho_1 v^1 + \rho_2 v^2 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.7.2}$$

donde f es el control líder, actuando de forma distribuida, y v^1, v^2 son controles seguidores que actúan en la frontera. Además, $\rho_i \in C^2(\partial\Omega)$ tales que

$$0 < \rho_i \leq 1 \text{ en } S_i, \quad \rho_i = 0 \text{ en } \partial\Omega \backslash S_i.$$

Considere también los siguientes funcionales de costo

$$J_i(f; , v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |y - y_{i,d}|^2 \, dx \, dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{S_i \times(0,T)} |v^i|^2 \, dx \, dt, \quad i = 1, 2.$$

2. Considere el sistema

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + ap = F(p) + u^1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + u^2 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{en } Q, \\ p = \rho g & \text{sobre } \Sigma, \\ p(\cdot, 0) = p_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.7.3}$$

donde g es el control líder, que actúa en la frontera y u^1, u^2 son controles seguidores, actuando de forma distribuida. Además, $\rho \in C^2(\partial\Omega)$ tal que

$$0 < \rho \leq 1 \text{ en } S, \quad \rho = 0 \text{ en } \partial\Omega \backslash S.$$

Considere también los siguientes funcionales de costo

$$K_i(g; , u^1, u^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |p - \zeta_{i,d}|^2 \, dx \, dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |u^i|^2 \, dx \, dt, \quad i = 1, 2.$$

Se establecieron los siguientes resultados:

Teorema 2.7.1. *Supóngase que $\mathcal{O}_{i,d} \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$, $i = 1, 2$ y $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Se asumirá que se tienen una de las siguientes condiciones:*

$$(\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} \text{ y } \xi_{1,d} = \xi_{2,d}) \ \text{ o } \ (\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}).$$

Sea $\overline{y}$ una solución no controlada de (2.7.2) con condición inicial $\overline{y}_0 \in L^2(\Omega)$. Si μ_i/α_i ($i = 1, 2$) es suficientemente grande, entonces existe una función $\varsigma = \varsigma(t)$ que explota en $t = T$ tal que, si $\overline{y}$ cumple

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \varsigma^2 |\overline{y} - \xi_{i,d}|^2 \, dx \, dt < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

entonces para todo $y_0 \in L^2(\Omega)$, existen controles $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ con su respectivo cuasi-equilibrio de Nash (v^1, v^2) tal que la correspondiente solución de (2.7.2) satisface $y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$.

Teorema 2.7.2. *Supóngase que $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$,*

$$S \subset \overline{\mathcal{O}}_i \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{O}}_i \cap \overline{\mathcal{O}}_{j,d} = \varnothing, \ i, j = 1, 2,$$

y μ_i/α_i suficientemente grandes de modo que existe $\overline{\varsigma} = \overline{\varsigma}(t)$ que explota en $t = T$ tal que, si $\zeta_{i,d} \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))$ son tal que

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \overline{\varsigma}^2 |\overline{p} - \zeta_{i,d}|^2 \, dx \, dt < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Sea $\overline{p}$ solución no controlada de (2.7.3) *con condición inicial* $\overline{p}_0 \in L^2(\Omega)$. *Si* μ_i/α_i $(i = 1, 2)$ *es suficientemente grande, entonces existe una función* $\varsigma = \varsigma(t)$ *que explota en* $t = T$ *tal que, si* $\overline{y}$ *cumple*

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \varsigma^2|\overline{p} - \zeta_{i,d}|^2 \, dx\, dt < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

entonces existe $\forall p_0 \in L^2(\Omega)$, *existen controles* $g \in H^{1/4}(0, T; L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \cap L^2(0, T; H^{1/2}(\mathcal{O} \times (0, T))$ *con su respectivo quasi-equilibrio de Nash* (u^1, u^2) *tal que la correspondiente solución de* (2.7.3) *satisface* $p(\cdot, T) = \overline{p}(\cdot, T)$.

Finalmente, en [24] establecieron un resultado de controlabilidad jerárquica similar a los anteriores para la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u + F(u, \nabla u) = f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} + v_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{en } Q, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ es el control líder, (v_1, v_2) son los controles seguidores y $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz.

Capítulo 3

Control Insensibilizante

De ahora en adelante, considérese $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio abierto, acotado y conexo con $N \geq 2$ y con borde $\partial\Omega$ regular. También tome $\omega, \mathcal{O} \subset\subset \Omega$ subdominios abiertos y no vacíos, denominados *dominio de control* y *dominio de observación* respectivamente, $T > 0$. Se denotará por $Q := \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$. Considérese la siguiente ecuación de cuarto orden,

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial, $f \in L^2(Q)$ es un término de fuente, $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ es el control, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$, $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$. Por otro lado, $\tau \in \mathbb{R}$, $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ son variables desconocidas del problema, con τ pequeño y $\|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, las cuales representan una perturbación sobre las condiciones iniciales del sistema.

El objetivo en esta sección es establecer resultados de control insensibilizante para esta ecuación para los siguientes funcionales:

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla y|^2 \, dx\, dt, \tag{3.0.2}$$

$$\Phi_2(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla^2 y|^2 \, dx\, dt, \quad \Phi_3(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\Delta y|^2 \, dx\, dt. \tag{3.0.3}$$

Se considerará la siguiente noción de insensibilización para estos funcionales.

Definición 3.0.1. *Sea $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(Q)$. Se dirá que el control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ insensibiliza al funcional Φ_i $(i = 1,2,3)$, si y sólo si*

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(y(x,t;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega),\ \|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1. \tag{3.0.4}$$

Así, en este capítulo se establecerán tanto resultados positivos como negativos acerca de la existencia de controles insensibilizantes para el sistema (3.0.1). Para ello, la herramienta principal a usar serán las desigualdades de Carleman provistas en las proposiciones 2.5.2 y 2.5.3.

3.1. Controles Insensibilizantes para Φ_1

En esta sección, se estudiará la existencia de controles insensibilizantes para el funcional Φ_1.

De ahora en adelante, se considerarán las siguientes funciones de peso:

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^m(T-t)^m}, \quad \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}}{t^m(T-t)^m} \tag{3.1.1}$$

donde $m \geq \frac{1}{2}$, $k \geq 2m$ y $\eta \in C^4(\overline{\Omega})$ tal que $\eta|_{\partial\Omega} = 0$, $|\nabla\eta| > \delta > 0$ en $\Omega\backslash\overline{\omega_0}$ y $\eta > 0$ en Ω, para $\omega_0 \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$. Se puede probar que las proposiciones (2.5.2) y (2.5.3) también se cumplen con estos pesos. Además, se denotará por

$$\alpha^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) = \alpha|_\Sigma, \quad \xi_*(x,t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \xi(x,t) = \xi|_\Sigma,$$

las cuales además satisfacen las siguientes propiedades:

$$|\alpha_t| + |\xi_t| \leq CT\xi^{1+\frac{1}{m}}, \quad \nabla\xi = -\nabla\alpha = \lambda\xi\nabla\eta. \tag{3.1.2}$$

Teorema 3.1.1. *Supóngase que $y_0 = 0$, $\omega \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$ y a, B^i, $D^{ij} \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;C^4(\overline{\Omega}))$, para todo $i,j \in \{1,\ldots,N\}$. Entonces, existe $M > 0$ tal que para todo f que cumple:*

$$\iint_Q e^{\frac{M}{t}}|f|^2\,dx\,dt < +\infty$$

existe un control $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ que insensibiliza el funcional Φ_1.

Primero, se verá que el problema de insensibilizar (3.0.2) según (3.0.4) es equivalente a la controlabilidad nula de un problema particular:

Proposición 3.1.1. *Se denotará por $z(x,t) = y(x,t)|_{\tau=0}$. Entonces, se cumple que*

$$\frac{\partial\Phi_1(y(x,t;v,\tau))}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = -\int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x)\,dx,$$

donde (z,q) es la solución del problema

$$
\begin{cases}
z_t + \Delta^2 z + az + B\cdot\nabla z + D : \nabla^2 z = f + v\mathbf{1}_\omega & en\ Q,\\
-q_t + \Delta^2 q + aq - \nabla\cdot(Bq) + \nabla^2 : (Dq) = \nabla\cdot(\nabla z\mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & en\ Q,\\
z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0, \quad q = \frac{\partial q}{\partial n} = 0 & sobre\ \Sigma,\\
z(\cdot,0) = y_0, \quad q(\cdot,T) = 0 & en\ \Omega.
\end{cases}
\tag{3.1.3}
$$

En consecuencia, buscar un control v de modo que se satisfaga la condición (3.0.4) es equivalente a buscar v tal que

$$q(x,0) = 0, \quad \forall x\in\Omega.$$

Demostración. Nótese que, para todo $h\in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$,

$$D_y\Phi_1(y)(h) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \nabla y\cdot\nabla h$$

Denotando $y_\tau = \frac{\partial y}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}$, el cual es solución de

$$
\begin{cases}
y_{\tau,t} + \Delta^2 y_\tau + ay_\tau + B\cdot\nabla y_\tau + D : \nabla^2 y_\tau = 0 & \text{en } Q,\\
y_\tau = \frac{\partial y_\tau}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\
y_\tau(\cdot,0) = \hat{y}_0 & \text{en } \Omega.
\end{cases}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}(y(x,t;\tau,v))\Big|_{\tau=0} &= D_y\Phi_1(y)(y_\tau)\\
&= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \nabla y(x,t;\tau=0,v)\cdot\nabla y_\tau(x,t)\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Denotando $z = y|_{\tau=0}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \nabla z\cdot\nabla y_\tau\\
&= -\iint_Q \nabla\cdot(\nabla z\mathbf{1}_{\mathcal{O}})y_\tau\\
&= -\iint_Q \left(-q_t + \Delta^2 q + aq - \nabla\cdot(Bq) + \nabla^2 : (Dq)\right)y_\tau\\
&= -\iint_Q q\left(y_{\tau,t} + \Delta^2 y_\tau + ay_\tau + B\cdot\nabla y_\tau + D : \nabla^2 y_\tau\right) + \int_\Omega q(\cdot,T)y_\tau(\cdot,T) - \int_\Omega q(\cdot,0)y_\tau(\cdot,0)\\
&= -\int_\Omega q(\cdot,0)\hat{y}_0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x)\,dx = 0\ \ \forall\hat{y}_0\in L^2(\Omega)$$

Así, $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ es control tal que $q(x,0) = 0$ $\forall x \in \Omega$ si y sólo si v insensibiliza al funcional Φ_1. $\square$

Se usará *Hilbert Uniqueness Method* para encontrar dicho control: considere (φ, ψ) soluciones de

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi + a\varphi - \nabla\cdot(B\varphi) + \nabla^2 : (D\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D : \nabla^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot,T) = 0, \quad \psi(\cdot,0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

correspondiente al problema adjunto a (3.1.3). Dada la estructura de los sistemas, se satisface la siguiente identidad:

$$\iint_Q f\varphi + \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi = \int_\Omega q(\cdot,0)\psi_0 - \int_\Omega y_0\varphi(\cdot,0) \quad \forall\psi_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.1.5}$$

Además, se supondrá que $y_0 = 0$ (véase [13] para más información acerca de esta hipótesis). Por lo tanto, de (3.1.5) se puede deducir el siguiente resultado:

Proposición 3.1.2. *$v \in L^2(\omega \times (0,T))$ es control a cero de (3.1.3) si y sólo si*

$$\iint_Q f\varphi + \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi = 0 \quad \forall\psi_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.1.6}$$

Así, considérese el siguiente funcional:

$$J(\psi_0) = \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx\, dt + \iint_Q f\varphi \, dx\, dt \quad \forall\psi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde, para cada ψ_0, (φ,ψ) es solución del sistema (3.1.4). Nótese que si $\hat{\psi}_0 \in L^2(\Omega)$ es un minimizador de J, entonces se tendrá que

$$DJ(\hat{\psi}_0)(\psi_0) = \iint_{\omega\times(0,T)} \tilde{\varphi}\varphi + \iint_Q f\varphi = 0 \quad \forall\psi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde $\hat{\varphi}$ y φ son soluciones de (3.1.4) asociados a $\hat{\psi}_0$ y ψ_0 respectivamente. Por lo tanto, tomando $\hat{v} = \hat{\varphi}|_\omega$, este control hace que se cumpla (3.1.6), siendo entonces un control insensibilizante para Φ_1. Dado que J es continuo y convexo, basta con probar que es coercivo para asegurar la existencia del tal óptimo, por lo que basta con probar la siguiente desigualdad:

$$\iint_Q e^{-\frac{M}{t^m}}|\varphi|^2 \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2, \tag{3.1.7}$$

Para ciertos $m, M, C > 0$. En efecto, si se satisface (3.1.7), entonces

$$\begin{aligned} J(\psi_0) &\geq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} - \left\|e^{\frac{M}{2t^m}}f\right\|_{L^2(Q)} \left\|e^{-\frac{M}{2t^m}}\varphi\right\|_{L^2(Q)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} - C\left\|e^{\frac{M}{2t^m}}f\right\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \xrightarrow[\|\psi_0\|\to+\infty]{} +\infty \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

3.1.1. Demostración de una desigualdad de Carleman para el problema adjunto

Con el fin de demostrar (3.1.7), se probará el siguiente lema:

Lema 3.1.1. *Supóngase que* $a, B^i, D^{ij} \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; C^4(\overline{\Omega}))$*,* $i,j \in \{1,\ldots,N\}$*, y* $m \geq 1$*,. Entonces, dado* $\varpi \subset\subset \Omega$ *abierto no vacío, existe una constante* $C > 0$ *tal que la solución* ψ *de* (3.1.4) *cumple*

$$\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)} + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \tag{3.1.9}$$

$$+ \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \leq C\iint_{\varpi\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2$$

para todo $\lambda \geq C(a,B,D)$ *y* $s \geq C(T^m + T^{2m})$*.*

Demostración. Suponga que $\psi_0 \in H^4(\Omega)$. Denote $\overline{\psi} = \nabla\nabla\Delta\psi$, solución del problema

$$\begin{cases} \overline{\psi}_t + \Delta^2\overline{\psi} + \nabla\nabla\Delta(a\psi + B\cdot\nabla\psi + D:\nabla^2\psi) = 0 & \text{en } Q, \\ \overline{\psi}(\cdot,0) = \nabla\nabla\Delta\psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

el cual posee condiciones de borde no homogéneas. Nótese que

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\Delta(a\psi) &= \nabla^2(\Delta a\psi) + \nabla(2\nabla^2 a\cdot\nabla\psi) + 2\nabla a\cdot\nabla^3\psi \\ &\quad + 2\nabla^2 a\cdot\nabla^2\psi + \nabla^2 a\Delta\psi + 2\nabla a\nabla\Delta\psi + a\overline{\psi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\Delta(B\cdot\nabla\psi) &= \nabla^2(\Delta B\cdot\nabla\psi) + \nabla(2\nabla^2 B:\nabla^2\psi) + 2\nabla^2 B:\nabla^3\psi \\ &\quad + 2\nabla B\cdot\nabla^4\psi + \nabla^2 B\cdot\nabla\Delta\psi + 2\nabla B\cdot\overline{\psi} + B\cdot\nabla\overline{\psi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\Delta(D:\nabla^2\psi) &= \nabla^2(\Delta D:\nabla^2\psi) + \nabla(2\nabla^2 D \therefore \nabla\nabla\nabla\psi) + 2\nabla^2 D\therefore\nabla^4\psi \\ &\quad + 2\nabla D\therefore\nabla^5\psi + \nabla^2 D:\overline{\psi} + 2\nabla D:\nabla\overline{\psi} + D:\nabla^2\overline{\psi}.\end{aligned}$$

Con esto, el sistema (3.1.10) se puede reescribir en sus componentes $l,m \in \{1,\ldots,N\}$ de la siguiente forma:

$$\overline{\psi}_{lm} + \Delta^2\overline{\psi}_{lm} + a\overline{\psi}_{lm} + B\cdot\nabla\overline{\psi}_{lm} + D:\nabla^2\overline{\psi}_{lm} = (f_0)_{lm} + \sum_{i=1}^N \partial_i(f_1^i)_{lm} + \sum_{i,j=1}^N \partial_{ij}(f_2^{ij})_{lm}, \tag{3.1.11}$$

donde

$$(f_0)_{lm} = -\Big(2\nabla a\cdot\nabla^3\psi + 2\nabla^2 a\cdot\nabla^2\psi + \nabla^2 a\Delta\psi + 2\nabla a\nabla\Delta\psi$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\nabla^2 B : \nabla^3\psi + +2\nabla B \cdot \nabla^4\psi + \nabla^2 B \cdot \nabla\Delta\psi \\
&+ 2\nabla^2 D \therefore \nabla^4\psi + 2\nabla D \therefore \nabla^5\psi\Big)_{lm},
\end{aligned}
$$

$$
(f_1)_{lm} = -\Big(2\nabla^2 B : \nabla^2\psi + 2\nabla^2 D \therefore \nabla\nabla\nabla\psi\Big)_m e_l,
$$

$$
(f_2)_{lm} = -\Delta D : \nabla^2\psi \; e_l \otimes e_m,
$$

donde e_l es el $l-$ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^N$. Para justificar la posibilidad de obtener derivadas de ψ superiores a las de cuarto orden, se puede probar que (vea el **Apéndice B**),

$$
\psi \in H^1(0,T;H_0^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^6(\Omega))
$$

Aplicando el Teorema 2.5.3 a $\overline{\psi}$, se tiene que, para $\omega_0 \subset\subset \omega' \subset\subset \omega$,

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim& \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 + \iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5 e^{-2s\alpha^*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta\psi}{\partial n}\right|^2 \\
&+ \iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7 e^{-2s\alpha^*}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Usando el Lema 2.5.1 con $r = 6$ y $u = \nabla\Delta\psi$,

$$
\iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2
$$

Asimismo, usando el Lema 2.5.1 con $r = 6$ y $u = \Delta\psi$,

$$
\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \lesssim \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2
$$

Además, como $\psi|_\Sigma = 0$, también se puede agregar la norma $\|s^5\lambda^6\xi_*^5 e^{-s\alpha_*}\psi\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$, de modo de obtener:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&+ \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&+ \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + \iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5 e^{-2s\alpha^*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta\psi}{\partial n}\right|^2 + \iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7 e^{-2s\alpha^*}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2
\end{aligned}
\tag{3.1.12}
$$

Ahora, considérese $\tilde{\psi} = \rho(t)\psi$ con $\rho(t) = s^4\lambda^6\xi_*^{4-\frac{1}{m}}e^{-s\alpha^*}$, solución del problema

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_t + \Delta^2\tilde{\psi} + a\tilde{\psi} + B\cdot\nabla\tilde{\psi} + D:\nabla^2\tilde{\psi} = \rho'\psi & \text{en } Q, \\ \tilde{\psi} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{\psi}(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Como $\rho'(t)\psi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$, aplicando el resultado (B.6), se tiene que

$$\int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^6(\Omega)}^2 \lesssim \int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Así, podemos agregar este término al lado izquierdo de (3.1.12). A su vez, usando desigualdades de interpolación entre H^2 y H^6, también se pueden agregar los siguientes términos:

$$\begin{gathered} \int_0^T s^{\frac{19}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{19}{2}-\frac{1}{2m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^3(\Omega)}^2, \\ \int_0^T s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^4(\Omega)}^2, \\ \int_0^T s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^5(\Omega)}^2. \end{gathered}$$

Además, por desigualdad de traza,

$$\iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7e^{-2s\alpha^*}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \iint_Q s^7\lambda^7\xi_*^7e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^5(\Omega)}^2,$$

y

$$\iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5e^{-2s\alpha^*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta\psi}{\partial n}\right|^2 \lesssim \iint_Q s^5\lambda^5\xi_*^5e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^6(\Omega)}^2.$$

Por lo que si $8-\frac{2}{m}\geq 5$ y $\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}\geq 7$ (lo que se cumple si $m\geq 1$), entonces se pueden absorber estos términos de borde.

Ahora, se quieren estimar los términos locales del lado derecho de (3.1.12). Para ello, considere $\theta\in C_c^\infty(\omega_1)$ con $\omega' \subset\subset \omega_1 \subset\subset \overline{\omega}$ tal que $\theta\equiv 1$ en ω', $0\leq\theta\leq 1$.

$$\begin{aligned} &\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \leq \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \\ &= -\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^2\psi\nabla\Delta\psi + \frac{1}{2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\nabla(\theta\xi^7e^{-2s\alpha})\cdot\nabla\left(|\nabla\Delta\psi|^2\right) \\ &= -\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^2\psi\nabla\Delta\psi - \frac{1}{2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\Delta(\theta\xi^7e^{-2s\alpha})|\nabla\Delta\psi|^2 \end{aligned}$$

Acotando estos términos:

$$\left|\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^2\psi\nabla\Delta\psi\right| \leq \varepsilon\iint_Q s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^5(\Omega)}^2$$

$$+ C \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^{\frac{11}{2}} \lambda^4 \xi^{\frac{11}{2}+\frac{3}{2m}} e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2,$$

y

$$\left| \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8 \Delta(\theta\xi^7 e^{-2s\alpha}) |\nabla\Delta\psi|^2 \right| \lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9 \lambda^{10} \xi^9 e^{-2s\alpha} |\nabla\Delta\psi|^2,$$

teniéndose entonces que

$$\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha} |\nabla\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \varepsilon \iint_Q s^{\frac{17}{2}} \lambda^{12} \xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}} e^{-2s\alpha^*} \|\psi\|^2_{H^5(\Omega)}$$
$$+ \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2.$$

Ahora, considere $\tilde{\theta} \in C_c^\infty(\omega_2)$ con $\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \overline{\omega}$ tal que $\tilde{\theta} \equiv 1$ en ω_1 y $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$. Nótese que $\theta \leq \tilde{\theta}$ y que

$$\iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha} |\nabla\Delta\psi|^2 \leq \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2 \leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2 \\
&= -\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} \Delta^2\psi\Delta\psi - \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10} \nabla\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right) \cdot \nabla\left(|\Delta\psi|^2\right) \\
&= -\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} \Delta^2\psi\Delta\psi + \frac{1}{2} \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10} \Delta\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right) |\Delta\psi|^2.
\end{aligned}$$

Acotando estos términos:

$$\left| \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} \Delta^2\psi\Delta\psi \right| \leq \varepsilon \int_0^T s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}} e^{-2s\alpha^*} \|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}$$
$$+ C \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^8\xi^{9+\frac{1}{m}} e^{-8s\alpha+6s\alpha^*} |\Delta\psi|^2,$$

y

$$\left| \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10} \Delta\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right) |\Delta\psi|^2 \right| \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11} e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\Delta\psi|^2,$$

por ello,

$$\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*} |\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}} e^{-2s\alpha^*} \|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}$$
$$+ \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11} e^{-8s\alpha+6s\alpha^*} |\Delta\psi|^2.$$

Con todo lo anterior, de (3.1.12) se deduce lo siguiente:

$$
\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)}+\int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)}+\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2
$$
$$
+\iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2+\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2\leq C\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2
$$

□

3.1.2. Demostración de la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto

De ahora en adelante, se denotará

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(\psi):=&\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)}+\int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)}+\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2\\
&+\iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2+\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Ahora, se procederá a demostrar la desigualdad de observabilidad (3.1.7). Para ello, tome $\omega_1\subset\subset\omega_2\subset\subset\omega\cap\mathcal{O}$ y defina $\theta\in C_c^\infty(\omega_2)$ tal que

$$
\theta\equiv 1 \text{ en } \omega_1,\quad 0\leq\theta\leq 1 \text{ en } \omega_2.
$$

Como

$$
-\varphi_t+\Delta^2\varphi+a\varphi-\nabla\cdot(B\varphi)+\nabla^2:(D\varphi)=\Delta\psi\quad \text{ en } \mathcal{O},
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2\\
&\leq\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}\Delta\psi\left(-\varphi_t+\Delta^2\varphi+a\varphi-\nabla\cdot(B\varphi)+\nabla^2:(D\varphi)\right).
\end{aligned}
$$

Denote $u=s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}$. Integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta u\Delta\psi\left(-\varphi_t+\Delta^2\varphi+a\varphi-\nabla\cdot(B\varphi)+\nabla^2:(D\varphi)\right) \qquad (3.1.13)\\
&=\iint_{\omega_2\times(0,T)}\varphi\left(\partial_t(\theta u\Delta\psi)+\Delta^2(\theta u\Delta\psi)+a\theta u\Delta\psi+B\cdot\nabla(\theta u\Delta\psi)+D:\nabla^2(\theta u\Delta\psi)\right).
\end{aligned}
$$

Nótese que

$$
\iint_{\omega_2\times(0,T)}\varphi\partial_t(\theta u\Delta\psi)=\iint_{\omega_2\times(0,T)}\partial_t(\theta u)\Delta\psi\varphi+\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta u\Delta\psi_t\varphi,
$$

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\Delta^2(\theta u\Delta\psi) = &\iint_{\omega_2\times(0,T)} \Delta^2(\theta u)\Delta\psi\varphi + 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla\Delta(\theta u)\cdot\nabla\Delta\psi\varphi\\ &+ 2\iint_{\omega_2\times(0,T)} \Delta(\theta u)\Delta^2\psi\varphi + 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla^2(\theta u) : \nabla^2\Delta\psi\\ &+ 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla(\theta u)\cdot\nabla\Delta^2\psi + \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u\Delta^3\psi,\end{aligned}$$

$$\iint_{\omega_2\times(0,T)} B\cdot\nabla(\theta u\Delta\psi)\varphi = \iint_{\omega_2\times(0,T)} B\cdot\nabla(\theta u)\Delta\psi\varphi + \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u B\cdot\nabla\Delta\psi\varphi$$

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_2\times(0,T)} D : \nabla^2(\theta u\Delta\psi)\varphi = &\iint_{\omega_2\times(0,T)} D : \nabla^2(\theta u)\Delta\psi\varphi + 2\iint_{\omega_2\times(0,T)} D\nabla(\theta u)\nabla\Delta\psi\varphi\\ &+ \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u D : \nabla^2\Delta\psi\varphi.\end{aligned}$$

Nótese que, por la ecuación que satisface ψ,

$$\begin{aligned}&\partial_t(\Delta\psi) + \Delta^2(\Delta\psi) + a\Delta\psi + B\cdot\nabla\Delta\psi + D : \nabla^2\Delta\psi\\ &= -\Delta a\psi - 2\nabla a\cdot\nabla\psi - \Delta B\cdot\nabla\psi - 2\nabla B : \nabla^2\psi - \Delta D : \nabla^2\psi - 2\nabla D \therefore \nabla^3\psi.\end{aligned}$$

Así, de (3.1.13), se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}&\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2 \qquad (3.1.14)\\ &\leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\Big(-\theta u\Delta a\psi - \theta u(2\nabla a - \Delta B)\cdot\nabla\psi - \theta u(2\nabla B - \Delta D) : \nabla^2\psi - \theta u\nabla D \therefore \nabla^3\psi\\ &+ \theta u B\cdot\nabla\Delta\psi + \theta u D : \nabla^2\Delta\psi + B\cdot\nabla(\theta u)\Delta\psi + D\nabla(\theta u)\nabla\Delta\psi + \nabla(\theta u)\cdot\nabla\Delta^2\psi + D : \nabla^2(\theta u)\Delta\psi\\ &+ 2\Delta(\theta u)\Delta^2\psi + 4\nabla^2(\theta u) : \nabla^2\Delta\psi + 4\nabla\Delta(\theta u)\cdot\nabla\Delta\psi + \partial_t(\theta u)\Delta\psi + \Delta^2(\theta u)\Delta\psi\Big).\end{aligned}$$

Denote I_i, $i\in\{1,\ldots,15\}$ a los anteriores términos del lado derecho respectivamente. Nótese que por (3.1.1) y (3.1.2), u satisface lo siguiente

$$\begin{aligned}|\partial^n u| &\leq C s^{11+n}\lambda^{12+n}\xi^{11+n}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*},\\ |\partial_t u| &\leq C s^{12+\frac{1}{m}}\lambda^{12}\xi^{12+\frac{1}{m}}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*},\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$|I_1| \leq \varepsilon\|\Delta a\|_\infty^2 \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}|\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \quad (3.1.15)$$

$$|I_2| \le \varepsilon(\|\nabla a\|_\infty^2 + \|\Delta B\|_\infty^2) \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}|\nabla\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.16}$$

$$|I_3| \le \varepsilon(\|\nabla B\|_\infty^2 + \|\Delta D\|_\infty^2) \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}|\nabla^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.17}$$

$$|I_4| \le \varepsilon\|\nabla D\|_\infty^2 \iint_Q s^{\frac{19}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{19}{2}-\frac{1}{2m}} e^{-2s\alpha^*}|\nabla^3\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{\frac{25}{2}}\lambda^{12}\xi^{\frac{25}{2}+\frac{1}{2m}}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.18}$$

$$|I_5| \le \varepsilon\|B\|_\infty^2 \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.19}$$

$$|I_6| \le \varepsilon\|D\|_\infty^2 \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{16}\lambda^{16}\xi^{16}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.20}$$

$$|I_7| \le \varepsilon\|B\|_\infty^2 \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.21}$$

$$|I_8| \le \varepsilon\|D\|_\infty^2 \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{16}\lambda^{16}\xi^{16}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.22}$$

$$|I_9| \le \varepsilon \iint_Q s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}} e^{-2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi| + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{\frac{31}{2}}\lambda^{14}\xi^{\frac{31}{2}+\frac{3}{2m}}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.23}$$

$$|I_{10}| \le \varepsilon\|D\|_\infty^2 \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{16}\lambda^{16}\xi^{16}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.24}$$

$$|I_{11}| \le \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}} e^{-2s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{17}\lambda^{16}\xi^{17+\frac{2}{m}}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.25}$$

$$|I_{12}| \leq \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.26}$$

$$|I_{13}| \leq \varepsilon \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.27}$$

$$|I_{14}| \leq \varepsilon \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{14+\frac{2}{m}}\lambda^{12}\xi^{14+\frac{2}{m}}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.1.28}$$

$$|I_{15}| \leq \varepsilon \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.1.29}$$

Como $-14s\alpha + 12s\alpha^* \leq -16s\alpha + 14s\alpha^*$ y $m \geq 1$, de (2.5.8) y (3.1.15)-(3.1.29):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\psi) &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2 \leq \sum_{i=1}^{15}|I_i| \\ &\leq C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2 + \varepsilon\mathcal{I}(\psi).\end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathcal{I}(\psi) \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2 \tag{3.1.30}$$

En particular, será de interés la siguiente desigualdad que se puede obtener de (3.1.30):

$$\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}|\nabla\psi|^2 \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.1.31}$$

También, aplicando la Proposición 2.5.3 a φ con $\omega = \omega_1$, se tendrá que

$$\begin{aligned}&\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-3s\alpha}|\nabla\varphi|^2 + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-3s\alpha}|\nabla^2\varphi|^2 \\ &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-3s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q s^2\lambda^2\xi^2e^{-3s\alpha}|\nabla\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}|^2.\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

Usando (3.1.31) en (3.1.32), en particular se tiene que para $\lambda \geq \frac{\ln 2}{\|\eta\|_\infty}$ (vea el **Apéndice D**),

$$\begin{aligned}\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi|^2 &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-3s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}|\nabla\psi|^2 \\ &\lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2.\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Se deducirá la desigualdad de observabilidad a partir de (3.1.33). Para ello, considere

$$m_0 = \min_{x\in\Omega}\left(e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}\right), \quad M_0 = \max_{x\in\Omega}\left(e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}\right), \tag{3.1.34}$$

y note que $\dfrac{1}{t^m(T-t)^m} \geq \left(\dfrac{T}{2}\right)^{-2m}$. Entonces, para $t \in (0, T/2)$,

$$\begin{aligned} e^{-3s\alpha}s^6\lambda^8\xi^6 &\geq e^{-3s\alpha^*}\left(\frac{T}{2}\right)^{-12m} \\ &= e^{-\frac{3sM_0}{(Tt)^m}}e^{-\frac{3sM_0}{(T(T-t))^m}}\left(\frac{T}{2}\right)^{-12m} \\ &\geq 2^{12m}T^{-12m}e^{-\frac{3\cdot 2^m sM_0}{T^{2m}}}e^{-\frac{3sM_0}{(Tt)^m}}. \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Denote

$$M(T,s,\lambda) = \frac{3sM_0}{T^m}, \quad C_1(T,s,\lambda) = 2^{12m}T^{-12m}e^{-\frac{3\cdot 2^m sM_0}{T^{2m}}},$$

de modo que

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi| \lesssim C_1(T,s,\lambda)\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.1.36}$$

Por otro lado, por el Corolario C.1 (vea **Apéndice C**),

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 &\leq \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega|\varphi|^2 \\ &\lesssim \int_{\frac{T}{2}}^T\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\frac{T}{2}}^T\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

Por lo tanto, de (3.1.36) y (3.1.37), se deduce la siguiente desigualdad:

$$\iint_Q e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 \lesssim \iint_{\omega\times(0,T)}s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.1.38}$$

Finalmente, basta con acotar superiormente el término del lado derecho de (3.1.38). Para ello, nótese que

$$s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*} \leq s^{20}\lambda^{20}\frac{e^{20(k+1)\lambda\|\eta\|_\infty}}{t^{20m}(T-t)^{20m}}e^{-16s\alpha_*(t)+14s\alpha^*(t)},$$

donde $\alpha_*(t) = \text{mín}_{x\in\Omega}\,\alpha(x,t) = \frac{m_0}{t^m(T-t)^m}$.

Defina

$$F(t) = e^{-16s\alpha_*(t)+14s\alpha^*(t)}t^{-20m}(T-t)^{-20m},$$

cuya derivada es

$$F'(t) = (20 - 14s\alpha^* + 16s\alpha_*)\, mt^{-20m-1}(T-t)^{-20m-1}(2t-T)e^{-16s\alpha_*+14s\alpha^*}.$$

Nótese que, para $\lambda > \frac{\ln 7}{\|\eta\|_\infty}$, se tiene que $16s\alpha_* \geq 14s\alpha^*$. Así, el único punto crítico de F, que corresponde a su máximo, es $t = \frac{T}{2}$. En consecuencia,

$$s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*} \leq 2^{40m}T^{-40m}s^{20}\lambda^{20}e^{20(k+1)\lambda\|\eta\|_\infty-16\cdot 2^{2m}T^{-2m}m_0+14\cdot 2^{2m}T^{-2m}M_0}. \quad (3.1.39)$$

Por tanto, usando (3.1.38) y (3.1.39), se deduce que existe $C_2 = C_2(\Omega,\omega,T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty,\|D\|_\infty,s,\lambda) > 0$ tal que

$$\int_Q e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 \leq C_2\int_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2.$$

Fijando los valores de λ y s, se obtiene la desigualdad deseada

$$\int_Q e^{-\frac{M}{t^m}}|\varphi|^2 \lesssim \int_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2.$$

3.1.3. Un resultado negativo para la controlabilidad nula del problema en cascada

Finalmente, se mostrará un resultado negativo para el problema (3.0.1) cuando se considera el funcional Φ_1 y potenciales poco regulares (L^∞), similar al obtenido por [21] (Lema 2.6.1)

Lema 3.1.2. *Sean $N \in \{1,2\}$ y $T > 0$. Entonces, existe un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y conexo, $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, $a, B^i, D^{ij} \in L^\infty(Q)$, con $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ tales que las soluciones (φ,ψ) de*

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi + a\varphi - \nabla\cdot(B\varphi) + \nabla^2 : (D\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \textit{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D:\nabla^2\psi = 0 & \textit{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T,\cdot) = 0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0(\cdot) & \textit{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.1.40)$$

no satisfacen Principio de Continuación Única (3.1.41) *para todo abierto* $\omega \subset\subset \Omega$*. Esto es,*

$$\varphi = 0 \text{ en } \omega \times (0,T) \;\Rightarrow\; \psi = \varphi = 0 \text{ en } Q \tag{3.1.41}$$

Demostración. Considere $N = 1$. Se construirá un ejemplo de una solución estacionaria de la ecuación parabólica del sistema con potenciales que se anulen en el conjunto de observación $\mathcal{O}$. Para ello, considere $\Omega = (0, 2\pi)$, $\mathcal{O} = \left(\arccos(\frac{1}{4}), 2\pi - \arccos(\frac{1}{4})\right)$ y los potenciales

$$a(x) = \begin{cases} 4 & \text{en } \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}, \\ 0 & \text{en } \mathcal{O}, \end{cases}, \qquad B \equiv 0, \qquad D(x) = \begin{cases} 5 & \text{en } \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}, \\ 0 & \text{en } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Entonces

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{8}{9}(\cos(x) - \cos(2x)) & \text{en } \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}, \\ 1 & \text{en } \mathcal{O}, \end{cases}$$

es solución del problema elíptico

$$\begin{cases} \psi'''' + a\psi + B\psi' + D\psi'' = 0 & \text{en } \Omega = (0, 2\pi), \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0, \\ \psi(2\pi) = \psi'(2\pi) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, tomando $\psi_0 = \psi(x)$, se tiene que $(0, \tilde{\psi})$ es solución del problema (3.1.4) donde $\tilde{\psi} = \psi(x)$ es solución estacionaria del problema parabólico correspondiente, cumpliéndose que $\varphi \equiv 0$ y $\psi \neq 0$ en Q.

Ahora, considere el caso $N = 2$. Tome $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < e^{-4\pi}\}$. Considere los potenciales

$$a(x, y) = \begin{cases} \frac{29}{(x^2+y^2)^2} & \text{en } \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}, \\ 0 & \text{en } \mathcal{O}, \end{cases}, \qquad B \equiv 0, \qquad \lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{-6}{x^2+y^2} & \text{en } \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}, \\ 0 & \text{en } \mathcal{O}, \end{cases}$$

con $D(x) = \lambda(x) I_2$. Se construirán soluciones radiales de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi + a\psi + B \cdot \nabla \psi + D : \nabla^2 \psi = 0 & \text{en } \Omega, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.42}$$

Utilizando coordenadas polares (r, θ), podemos transformar esta ecuación a una unidimensional:

$$\begin{cases} r^4 \psi_{rrrr} + 2r^3 \psi_{rrr} + (\tilde{\lambda} - 1) r^2 \psi_{rr} + r\psi_r + \tilde{a}\psi = 0 & \text{en } (0, 1), \\ \psi(1) = \psi_r(1) = 0, \end{cases}$$

donde $\tilde{\lambda} = r^2 \lambda$ y $\tilde{a} = r^4 a$. Para $r > e^{-2\pi}$, esta ecuación tiene soluciones de la forma

$$\psi(r) = c_1 r^{1+\sqrt{5}} \sin(\ln r) + c_2 r^{1+\sqrt{5}} \cos(\ln r) + c_3 r^{1-\sqrt{5}} \sin(\ln r) + c_4 r^{1-\sqrt{5}} \cos(\ln r),$$

cuya derivada es

$$\psi'(r) = r^{\sqrt{5}} \sin(\ln r)((1+\sqrt{5})c_1 - c_2) + r^{\sqrt{5}} \cos(\ln r)(c_1 + (1+\sqrt{5})c_2)$$
$$+ r^{-\sqrt{5}} \sin(\ln r)((1-\sqrt{5})c_3 - c_4) + r^{-\sqrt{5}} \cos(\ln r)(c_3 + (1-\sqrt{5})c_4).$$

Note que tomando $c_1 = 1+\sqrt{5}$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1+\sqrt{5}$, $c_4 = 1$ tenemos que $\psi(1) = 0$ puesto que $c_2 + c_4 = 0$ y

$$\psi'(r) = (7+2\sqrt{5})r^{\sqrt{5}} \sin(\ln r) + (2\sqrt{5}-7)r^{-\sqrt{5}} \sin(\ln r),$$

por lo que $\psi'(1) = 0$. Además, $\psi'(e^{-2\pi}) = 0$, con

$$\begin{aligned} \psi(e^{-2\pi}) &= -e^{-2\pi(1+\sqrt{5})} + e^{-2\pi(1-\sqrt{5})} \\ &= e^{-2\pi}\left(e^{2\sqrt{5}\pi} - e^{-2\sqrt{5}\pi}\right) \\ &= 2e^{-2\pi}\sinh(2\sqrt{5}\pi) \end{aligned}$$

por lo tanto, en coordenadas cartesianas, la función

$$\psi(x,y) = \begin{cases} (1+\sqrt{5})(x^2+y^2)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sin\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) - (x^2+y^2)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) & \\ -(1-\sqrt{5})(x^2+y^2)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \sin\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) & (x,y) \in \Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}, \\ & \\ 2e^{-2\pi}\sinh(2\sqrt{5}\pi) & (x,y) \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

es solución de la ecuación (3.1.42). En consecuencia, tomando $\psi_0 = \psi(x)$, se tiene que $(0, \tilde{\psi})$ es solución del problema (3.1.4) donde $\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x)$ es solución estacionaria del problema parabólico correspondiente, cumpliéndose que $\varphi \equiv 0$ pero $\psi \neq 0$ en Q. $\square$

Como consecuencia del lema 3.1.2, se obtiene el siguiente teorema

Teorema 3.1.2. *Sea $N \in \{1,2\}$. Entonces, existen un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un conjunto abierto y no vacío $\Omega \subset\subset \Omega$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$ tales que para cualquier abierto $\omega \subset\subset \Omega$, el sistema* (3.1.3) *no es aproximadamente controlable.*

3.2. Controles Insensibilizantes para Φ_2 y Φ_3

En esta sección se estudiará la existencia de controles insensibilizantes para los funcionales Φ_2 y Φ_3. Se considerarán los mismos pesos descritos en (3.1.1). En este caso, se considerará el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

El objetivo de esta parte es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1. *Suponga que $y_0 = 0$ y $\omega \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$. Entonces, existe $M > 0$ tal que para todo f que cumple:*

$$\iint_Q e^{\frac{M}{t}} |f|^2 \, dx \, dt < +\infty$$

existe un control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ que insensibiliza al funcional Φ_i, $i = 2, 3$.

Procederemos de una forma similar a la sección anterior. Así, veremos primero la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1. *Considere $z(x,t) = y(x,t)|_{\tau=0}$. Se tiene que*

$$\frac{\partial \Phi_i(y(x,t;v,\tau))}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = -\int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x) \, dx, \quad i = 2, 3,$$

donde (z, q) es la solución del problema

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z = f + v\mathbf{1}_\omega & en\ Q, \\ -q_t + \Delta^2 q = \nabla^2 : (\nabla^2 z \mathbf{1}_\mathcal{O}) & en\ Q, \\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0, \quad q = \frac{\partial q}{\partial n} = 0 & sobre\ \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = y_0, \quad q(\cdot, T) = 0 & en\ \Omega, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

si $i = 2$, o bien

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z = f + v\mathbf{1}_\omega & en\ Q, \\ -q_t + \Delta^2 q = \Delta(\Delta z \mathbf{1}_\mathcal{O}) & en\ Q, \\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0, \quad q = \frac{\partial q}{\partial n} = 0 & sobre\ \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = y_0, \quad q(\cdot, T) = 0 & en\ \Omega, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

si $i = 3$. En consecuencia, buscar un control v tal que satisfaga la condición (3.0.4) *es equivalente a buscar v tal que*

$$q(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Demostración. Se hará la demostración sólo para Φ_2. La demostración para Φ_3 es análoga. Primero, note que para todo $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$,

$$D_y \Phi_2(y)(v) = \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} \nabla^2 y : \nabla^2 v \, dx \, dt$$

Denote $y_\tau = \frac{\partial y}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}$, solución de

$$\begin{cases} y_{\tau,t} + \Delta^2 y_\tau = 0 & \text{en } Q, \\ y_\tau = \frac{\partial y_\tau}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\tau(\cdot,0) = \hat{y}_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}(y(x,t;\tau,v))\Big|_{\tau=0} &= D_y\Phi_1(y)(y_\tau) \\ &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \nabla^2 y(x,t;\tau=0,v) : \nabla^2 y_\tau(x,t)\, dx\, dt \end{aligned}$$

Denotando $z = y|_{\tau=0}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \nabla^2 z : \nabla^2 y_\tau \\ &= -\iint_Q \nabla^2 : (\nabla^2 z \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) y_\tau \\ &= -\iint_Q \left(-q_t + \Delta^2 q\right) y_\tau \\ &= -\iint_Q q\left(y_{\tau,t} + \Delta^2 y_\tau\right) + \int_\Omega q(\cdot,T) y_\tau(\cdot,T) - \int_\Omega q(\cdot,0) y_\tau(\cdot,0) \\ &= -\int_\Omega q(\cdot,0)\hat{y}_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x)\, dx = 0 \ \ \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$$

Así, $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ es control tal que $q(x,0) = 0\ \forall x \in \Omega$ si y sólo si v insensibiliza al funcional Φ_2. □

Nuevamente, se usará *Hilbert Uniqueness Method* para encontrar dicho control. Considere (φ,ψ) solución del problema adjunto a (3.2.1)

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi = \nabla^2 : (\nabla^2\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot,T) = 0, \quad \psi(\cdot,0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

si $i = 2$, o bien, el adjunto a (3.2.2)

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi = \Delta(\Delta\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot,T) = 0, \quad \psi(\cdot,0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

si $i=3$. En efecto, (para $i=2$)

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (z_t+\Delta^2 z)\varphi + \iint_Q (-q_t+\Delta^2 q)\psi\\
&= \iint_Q (-\varphi_t+\Delta^2\varphi)z + \int_\Omega z(\cdot,T)\varphi(\cdot,T) - \int_\Omega y_0\varphi(\cdot,0)\\
&+ \iint_Q (\psi_t+\Delta^2\psi)q - \int_\Omega q(\cdot,T)\psi(\cdot,T) + \int_\Omega q(\cdot,0)\psi_0\\
&= \iint_Q f\varphi + \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi + \iint_Q \nabla^2\psi : \nabla^2 z\mathbf{1}_{\mathcal{O}}
\end{aligned}$$

Entonces, usando esta igualdad junto con la ecuación,

$$\iint_Q f\varphi + \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi = \int_\Omega q(\cdot,0)\psi_0 - \int_\Omega y_0\varphi(\cdot,0) \quad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega) \tag{3.2.5}$$

Se considerará $y_0 = 0$ (vea [13]). Por lo tanto, de (3.2.5) se puede deducir el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ *es control a cero de* (3.2.1) *(o* (3.2.2)*) si y sólo si*

$$\iint_Q f\varphi + \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi = 0 \quad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.2.6}$$

Considere entonces el siguiente funcional:

$$J(\psi_0) = \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt + \iint_Q f\varphi\,dx\,dt \quad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde, para cada ψ_0, (φ,ψ) son solución del sistema (3.2.3) (o (3.2.4)). Note que si $\hat{\psi}_0 \in L^2(\Omega)$ es óptimo de J, entonces se tendrá que

$$DJ(\hat{\psi}_0)(\psi_0) = \iint_{\omega\times(0,T)} \tilde{\varphi}\varphi + \iint_Q f\varphi = 0 \quad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde $\hat{\varphi}$ y φ son soluciones de (3.2.3) (o (3.2.4)) asociados a $\hat{\psi}_0$ y ψ_0 respectivamente. Por lo tanto, tomando $\hat{v} = \hat{\varphi}|_\omega$, este control hace que se cumpla (3.2.6), siendo entonces un control insensibilizante para Φ_2 (o Φ_3). Dado que Φ_2 (Φ_3) es continuo y convexo, basta con probar que es coercivo para asegurar la existencia del tal óptimo, por lo que basta con probar la siguiente desigualdad:

$$\iint_Q e^{-\frac{M}{t^m}}|\varphi|^2 \le C\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2. \tag{3.2.7}$$

Para ciertos $m, M, C > 0$. En efecto, si se satisface (3.2.7), entonces

$$\begin{aligned}
J(\psi_0) &\ge \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} - \left\| e^{\frac{M}{2t^m}} f\right\|_{L^2(Q)} \left\| e^{-\frac{M}{2t^m}}\varphi\right\|_{L^2(Q)} \qquad (3.2.8)\\
&\ge \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} - C\left\| e^{\frac{M}{2t^m}} f\right\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \xrightarrow[\|\psi_0\|\to+\infty]{} +\infty.
\end{aligned}$$

3.2.1. Demostración de una desigualdad de Carleman para el problema adjunto

Con el fin de demostrar (3.2.7), se probará el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *Suponga que* $m \geq 1$,. *Entonces, dado* $\overline{\omega} \subset\subset \Omega$ *abierto no vacío, existe una constante* $C > 0$ *tal que la solución* ψ *de* (3.2.3) *cumple*

$$\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^4(\Omega)} + \int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)} + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2$$
$$+ \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 \leq C\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2, \tag{3.2.9}$$

para todo $\lambda \geq C$ *y* $s \geq C(T^m + T^{2m})$.

Demostración. Suponga que $\psi_0 \in H^6(\Omega)$. Denote $\overline{\psi} = \nabla\nabla\Delta^2\psi$, solución del problema

$$\begin{cases} \overline{\psi}_t + \Delta^2\overline{\psi} = 0 & \text{en } Q, \\ \overline{\psi}(\cdot,0) = \nabla\nabla\Delta^2\psi_0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

el cual posee condiciones de borde no homogéneas. Aplicando el teorema 2.5.3 a $\overline{\psi}$ sobre $\omega_0 \subset\subset \omega' \subset\subset \overline{\omega}$, se tiene que

$$\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 \lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2$$
$$+ \iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5e^{-2s\alpha_*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta^2\psi}{\partial n}\right|^2 + \iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7e^{-2s\alpha_*}\left|\nabla\nabla\Delta^2\psi\right|^2.$$

Usando (2.5.1) con $r = 6$ y $u = \nabla\Delta\psi$,

$$\iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2.$$

Asimismo, usando (2.5.1) con $r = 6$ y $u = \Delta^2\psi$,

$$\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 \lesssim \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2.$$

Además, de la regularidad elíptica del problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se puede agregar al lado izquierdo el término

$$\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}.$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2+\iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2+\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2\\
&+\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}\\
&\lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2+\iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 \qquad (3.2.10)\\
&+\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2+\iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5 e^{-2s\alpha_*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta^2\psi}{\partial n}\right|^2\\
&+\iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7 e^{-2s\alpha_*}\left|\nabla\nabla\Delta^2\psi\right|^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tome $\tilde{\psi}=s^4\lambda^6\xi_*^{4-\frac{1}{m}}e^{-s\alpha^*}\psi$, el cual satisface el problema

$$\begin{cases}\tilde{\psi}_t+\Delta^2\tilde{\psi}=\rho'\psi & \text{en } Q,\\ \tilde{\psi}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial n}=0 & \text{sobre } \Sigma,\\ \tilde{\psi}(\cdot,0)=0 & \text{en } \Omega.\end{cases}$$

Como $\rho'\psi\in L^2(0,T;H^4(\Omega))$, se tiene que (vea el **Apéndice B**)

$$\int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)}\lesssim\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}$$

Usando desigualdades de interpolación entre H^4 y H^8, también se pueden agregar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T s^{\frac{19}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{19}{2}-\frac{1}{2m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^5(\Omega)},\\
&\int_0^T s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)},\\
&\int_0^T s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}}e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^7(\Omega)},
\end{aligned}$$

y por desigualdades de traza

$$\iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi_*^7 e^{-2s\alpha^*}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2\lesssim\iint_Q s^7\lambda^7\xi_*^7e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^7(\Omega)},$$

y

$$\iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5e^{-2s\alpha^*}\left|\frac{\partial\nabla\nabla\Delta^2\psi}{\partial n}\right|^2\lesssim\iint_Q s^5\lambda^5\xi_*^5e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)}.$$

Por lo que, si $8 - \frac{2}{m} \geq 5$ y $\frac{17}{2} - \frac{3}{2m} \geq 7$ (lo que se cumple si $m \geq 1$), entonces se pueden absorber estos términos de borde. De este modo, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 \\
&+ \int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)} + \int_0^T s^8\lambda^{10}\xi_*^{8-\frac{2}{m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)} \\
&\lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 \\
&+ \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Ahora, se quieren estimar los términos locales del lado derecho de (3.2.11). Para ello, considere $\theta \in C_c^\infty(\omega_1)$ con $\omega' \subset\subset \omega_1 \subset\subset \overline{\omega}$ tal que $\theta \equiv 1$ en ω', $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 \leq \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 \\
&= -\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^3\psi\nabla\Delta^2\psi + \frac{1}{2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\nabla(\theta\xi^7 e^{-2s\alpha})\cdot\nabla\left(|\nabla\Delta^2\psi|^2\right) \\
&= -\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^3\psi\nabla\Delta^2\psi - \frac{1}{2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\Delta(\theta\xi^7 e^{-2s\alpha})|\nabla\Delta^2\psi|^2.
\end{aligned}$$

Acotando estos términos:

$$\begin{aligned}
\left|\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}\nabla\Delta^3\psi\nabla\Delta^2\psi\right| &\leq \varepsilon\iint_Q s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^7(\Omega)} \\
&+ C\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^{\frac{11}{2}}\lambda^4\xi^{\frac{11}{2}+\frac{3}{2m}} e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2,
\end{aligned}$$

y

$$\left|\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\Delta(\theta\xi^7 e^{-2s\alpha})|\nabla\Delta^2\psi|^2\right| \lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla^2\Delta\psi|^2 &\lesssim \varepsilon\iint_Q s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^7(\Omega)} \\
&+ \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2.
\end{aligned}$$

Ahora, considere $\tilde{\theta} \in C_c^\infty(\omega_2)$ con $\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \overline{\omega}$ tal que $\tilde{\theta} \equiv 1$ en ω_1 y $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$. Nótese que $\theta \leq \tilde{\theta}$ y que

$$\iint_{\omega'\times(0,T)} s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 \leq \iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2 \leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2\\
&= -\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\Delta^3\psi\Delta^2\psi - \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10}\nabla\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right)\cdot\nabla\left(|\Delta^2\psi|^2\right)\\
&= -\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\Delta^3\psi\Delta^2\psi + \frac{1}{2}\iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10}\Delta\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right)|\Delta^2\psi|^2,
\end{aligned}
$$

acotando estos términos:

$$
\begin{aligned}
\left|\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\Delta^3\psi\Delta^2\psi\right| &\leq \varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)}\\
&\quad + C\iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^9\lambda^8\xi^{9+\frac{1}{m}} e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2,
\end{aligned}
$$

y

$$
\left|\iint_{\omega_2\times(0,T)} s^9\lambda^{10}\Delta\left(\tilde{\theta}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}\right)|\Delta^2\psi|^2\right| \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11} e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2.
$$

Por ello,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\omega_1\times(0,T)} \theta s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-4s\alpha+2s\alpha^*}|\nabla\Delta^2\psi|^2 &\lesssim \varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^6(\Omega)}\\
&\quad + \iint_{\omega_2\times(0,T)} \tilde{\theta} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11} e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Con todo lo anterior y de (3.2.11), se deduce lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^4(\Omega)} + \int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)} + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2\\
&+ \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 \leq C\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11} e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2
\end{aligned}
$$

□

3.2.2. Demostración de la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto

De ahora en adelante, se denotará

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(\psi) :=& \int_0^T s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|_{H^4(\Omega)} + \int_0^T s^8\lambda^{12}\xi_*^{8-\frac{2}{m}} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^8(\Omega)} + \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2\\
&+ \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Ahora, se procederá a demostrar la desigualdad de observabilidad (3.2.7). Para ello, tome $\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \omega \cap \mathcal{O}$ y defina $\theta \in C_c^\infty(\omega_2)$ tal que

$$\theta \equiv 1 \text{ en } \omega_1, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ en } \omega_2.$$

Nótese que

$$-\varphi_t + \Delta^2\varphi = \Delta^2\psi \quad \text{ en } \mathcal{O}.$$

Nótese también que esta igualdad se tiene tanto para Φ_2 como para Φ_3. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2 \\
&\leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}\Delta^2\psi\left(-\varphi_t + \Delta^2\varphi\right).
\end{aligned}$$

Denote $u = s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}$. Integrando por partes,

$$\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u\Delta^2\psi\left(-\varphi_t + \Delta^2\varphi\right) = \iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\left(\partial_t(\theta u\Delta^2\psi) + \Delta^2(\theta u\Delta^2\psi)\right). \tag{3.2.12}$$

Nótese que

$$\iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\partial_t(\theta u\Delta^2\psi) = \iint_{\omega_2\times(0,T)} \partial_t(\theta u)\Delta^2\psi\varphi + \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u\Delta^2\psi_t\varphi,$$

y

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\Delta^2(\theta u\Delta^2\psi) = &\iint_{\omega_2\times(0,T)} \Delta^2(\theta u)\Delta^2\psi\varphi + 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla\Delta(\theta u)\cdot\nabla\Delta^2\psi\varphi \\
&+ 2\iint_{\omega_2\times(0,T)} \Delta(\theta u)\Delta^3\psi\varphi + 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla^2(\theta u) : \nabla^2\Delta^2\psi \\
&+ 4\iint_{\omega_2\times(0,T)} \nabla(\theta u)\cdot\nabla\Delta^3\psi + \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta u\Delta^4\psi.
\end{aligned}$$

Por la ecuación que satisface ψ, se cumple que

$$\partial_t(\Delta^2\psi) + \Delta^2(\Delta^2\psi) = 0.$$

Por lo tanto, de (3.2.12), se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta\psi|^2 \qquad (3.2.13)\\
&\leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} \varphi\Big(4\nabla(\theta u)\cdot\nabla\Delta^3\psi + 4\nabla^2(\theta u) : \nabla^2\Delta^2\psi + 2\Delta(\theta u)\Delta^3\psi
\end{aligned}$$

$$+ 4\nabla\Delta(\theta u)\cdot\nabla\Delta^2\psi + \Delta^2(\theta u)\Delta^2\psi + \partial_t(\theta u)\Delta^2\psi\Big). \tag{3.2.14}$$

Denote I_i, $i \in \{1, \dots, 6\}$ a los anteriores términos del lado derecho respectivamente. Nótese que por (3.1.1) y (3.1.2), u satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} |\partial^n u| &\le C s^{11+n}\lambda^{12+n}\xi^{11+n}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}, \\ |\partial_t u| &\le C s^{12+\frac{1}{m}}\lambda^{12}\xi^{12+\frac{1}{m}}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}, \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$|I_1| \le \varepsilon \iint_Q s^{\frac{17}{2}}\lambda^{12}\xi_*^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2m}}e^{-2s\alpha^*}|\nabla\Delta^3\psi| + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{\frac{31}{2}}\lambda^{14}\xi^{\frac{31}{2}+\frac{3}{2m}}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.2.15}$$

$$|I_2| \le \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.2.16}$$

$$|I_3| \le \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{12}\xi_*^{9-\frac{1}{m}}e^{-2s\alpha^*}|\Delta^3\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{17}\lambda^{16}\xi^{17+\frac{2}{m}}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.2.17}$$

$$|I_4| \le \varepsilon \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.2.18}$$

$$|I_5| \le \varepsilon \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2, \tag{3.2.19}$$

$$|I_6| \le \varepsilon \iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi^{10} e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{14+\frac{2}{m}}\lambda^{12}\xi^{14+\frac{2}{m}}e^{-14s\alpha+12s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.2.20}$$

Como $-14s\alpha + 12s\alpha^* \le -16s\alpha + 14s\alpha^*$ y $m \ge 1$, de (2.5.8) y (3.2.15)-(3.2.20):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\psi) &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{11}\lambda^{12}\xi^{11}e^{-8s\alpha+6s\alpha^*}|\Delta^2\psi|^2 \le \sum_{i=1}^{6}|I_i| \\ &\le C\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2 + \varepsilon\mathcal{I}(\psi) \end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathcal{I}(\psi) \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.2.21}$$

En particular, será de interés la siguiente desigualdad que se puede obtener de (3.2.21):

$$\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}|\Delta\psi|^2 \lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.2.22}$$

También, aplicando la Proposición 2.5.3 a φ con $\omega=\omega_1$, se tendrá que

$$\begin{aligned}&\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi|^2+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-3s\alpha}|\nabla\varphi|^2+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-3s\alpha}|\nabla^2\varphi|^2\\ &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-3s\alpha}|\varphi|^2+\iint_Q s^4\lambda^4\xi^4e^{-3s\alpha}|\Delta\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}|^2.\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Usando (3.2.22) en (3.2.23), en particular se tiene que para $\lambda\geq\frac{\ln 2}{\|\eta\|_\infty}$,

$$\begin{aligned}\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi|^2 &\lesssim \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-3s\alpha}|\varphi|^2+\iint_Q s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10}e^{-2s\alpha^*}|\Delta\psi|^2\\ &\lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2.\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Se deducirá la desigualdad de observabilidad a partir de (3.2.24). Para ello, considere

$$m_0=\min_{x\in\Omega}\left(e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty}-e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}\right),\quad M_0=\max_{x\in\Omega}\left(e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty}-e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}\right), \tag{3.2.25}$$

y note que $\dfrac{1}{t^m(T-t)^m}\geq\left(\dfrac{T}{2}\right)^{-2m}$. Entonces, para $t\in(0,T/2)$,

$$\begin{aligned}e^{-3s\alpha}s^6\lambda^8\xi^6 &\geq e^{-3s\alpha^*}\left(\frac{T}{2}\right)^{-12m}\\ &= e^{-\frac{3sM_0}{(Tt)^m}}e^{-\frac{3sM_0}{(T(T-t))^m}}\left(\frac{T}{2}\right)^{-12m}\\ &\geq 2^{12m}T^{-12m}e^{-\frac{3\cdot 2^m sM_0}{T^{2m}}}e^{-\frac{3sM_0}{(Tt)^m}}.\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Denote

$$M(T,s,\lambda)=\frac{3sM_0}{T^m},\quad C_1(T,s,\lambda)=2^{12m}T^{-12m}\frac{3\cdot 2^m sM_0}{T^{2m}},$$

de modo que

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2\lesssim\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-3s\alpha}|\varphi|\lesssim C_1(T,s,\lambda)\iint_{\omega_2\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2. \tag{3.2.27}$$

Por otro lado, por el corolario C.1 (vea **Apéndice C**),

$$\int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2\leq\int_{\frac{T}{2}}^T|\varphi|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_{\frac{T}{2}}^{T} \|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \int_{0}^{T} s^{10}\lambda^{12}\xi_*^{10} e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\lesssim \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{20}\xi^{20} e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2.
\end{aligned} \tag{3.2.28}
$$

Por lo tanto, de (3.2.27) y (3.2.28), se deduce la siguiente desigualdad:

$$
\iint_Q e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 \lesssim \iint_{\omega\times(0,T)} s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*}|\varphi|^2 \tag{3.2.29}
$$

Finalmente, basta acotar superiormente el término del lado derecho de (3.2.29). Note que

$$
s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*} \leq s^{20}\lambda^{20}\frac{e^{20(k+1)\lambda\|\eta\|_\infty}}{t^{20m}(T-t)^{20m}}e^{-16s\alpha_*(t)+14s\alpha^*(t)},
$$

donde $\alpha_*(t) = \text{mín}_{x\in\Omega}\,\alpha(x,t) = \frac{m_0}{t^m(T-t)^m}$.

Defina

$$
F(t) = e^{-16s\alpha_*(t)+14s\alpha^*(t)}t^{-20m}(T-t)^{-20m},
$$

cuya derivada es

$$
F'(t) = (20 - 14s\alpha^* + 16s\alpha_*)\, mt^{-20m-1}(T-t)^{-20m-1}(2t-T)e^{-16s\alpha_*+14s\alpha^*}.
$$

Note que, para $\lambda > \frac{\ln 7}{\|\eta\|_\infty}$, se tiene que $16s\alpha_* \geq 14s\alpha^*$ (vea el **Apéndice D**), por lo que el único punto crítico de F, que corresponde a su máximo, es $t = \frac{T}{2}$. Esto es,

$$
s^{20}\lambda^{20}\xi^{20}e^{-16s\alpha+14s\alpha^*} \leq 2^{40m}T^{-40m}s^{20}\lambda^{20}e^{20(k+1)\lambda\|\eta\|_\infty - 16\cdot 2^{2m}T^{-2m}m_0 + 14\cdot 2^{2m}T^{-2m}M_0}. \tag{3.2.30}
$$

Por tanto, usando (3.2.29) y (3.2.30), se deduce que existe $C_2 = C_2(\Omega,\omega,T,s,\lambda) > 0$ tal que

$$
\int_Q e^{-\frac{M(T,s,\lambda)}{t^m}}|\varphi|^2 \leq C_2\int_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2. \tag{3.2.31}
$$

Fijando los valores de λ y s, se obtiene la desigualdad deseada

$$
\int_Q e^{-\frac{M}{t^m}}|\varphi|^2 \lesssim \int_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2.
$$

3.2.3. Un resultado negativo para la controlabilidad nula del problema en cascada

De forma similar al caso en que el funcional de observación es Φ_1, también se tiene un resultado negativo acerca controlabilidad del problema (3.2.1) y (3.2.2).

Lema 3.2.2. *Sea $N \in \{1,2\}$ y $T > 0$. Entonces, existe un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y conexo, $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, $\psi_0 \in L^2(\Omega)$, $a, B^i, D^{ij} \in L^\infty(Q)$, con $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ tales que las soluciones (φ,ψ) de*

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi + a\varphi - \nabla\cdot(B\varphi) + \nabla^2 : (D\varphi) = R(\psi) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D : \nabla^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T,\cdot) = 0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0(\cdot) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.2.32}$$

donde

$$R(\psi) = \nabla^2 : (\nabla^2\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}) \quad \text{ó} \quad R(\psi) = \Delta(\Delta\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}),$$

no satisface Principio de Continuación Única (3.2.33) *para todo abierto $\omega \subset\subset \Omega$. Esto es,*

$$\varphi = 0 \text{ en } \omega\times(0,T) \;\Rightarrow\; \psi = \varphi = 0 \text{ en } Q. \tag{3.2.33}$$

Demostración. La demostración es equivalente a la mostrada en el lema 3.1.2 usando los mismos contraejemplos. □

Como consecuencia del lema 3.2.2, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2. *Sea $N \in \{1,2\}$. Considere el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az + B\cdot\nabla z + D : \nabla^2 z = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ -q_t + \Delta^2 q + aq - \nabla\cdot(Bq) + \nabla^2 : (Dq) = R(z) & \text{en } Q, \\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0, \quad q = \frac{\partial q}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = 0, \quad q(\cdot,T) = 0 & \text{en } Q, \end{cases} \tag{3.2.34}$$

donde

$$R(z) = \nabla^2 : (\nabla^2 z\mathbf{1}_{\mathcal{O}}) \quad \text{ó} \quad R(z) = \Delta(\Delta\mathbf{1}_{\mathcal{O}}).$$

Entonces, existen un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un conjunto abierto y no vacío $\Omega \subset\subset \Omega$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $D \in L^\infty(Q)^{N\times N}$ tales que para cualquier abierto $\omega \subset\subset \Omega$, el sistema (3.2.34) *no es aproximadamente controlable.*

Capítulo 4

Control Jerárquico

De ahora en adelante, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio abierto, acotado y conexo con $N \geq 2$ y con borde $\partial\Omega$ regular. También, tome $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$ y $S_1, S_2 \subset\subset \partial\Omega$ subconjuntos abiertos, llamados *dominio principal de control* y *dominios secundarios de control* respectivamente, y $T > 0$. Se denotará $Q := \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Considere el siguiente problema multi-objetivo:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0, \ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

donde $y = y(x, t)$ es el estado, $a \in L^\infty(Q)$, $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ es una función globalmente Lipschitz e $y_0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial. Por otro lado, $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ es el control *líder*, mientras que $v_i \in L^2(S_i \times (0, T))$ $(i = 1, 2)$, son los controles *seguidores.* Además, $\rho_1, \rho_2 \in C^4(\partial\Omega)$ son funciones tales que

$$0 < \rho_i \leq 1 \text{ en } S_i, \quad \rho_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \backslash \overline{S_i}, \quad i = 1, 2$$

El objetivo es analizar la controlabilidad exacta a trayectorias del sistema (4.0.1) utilizando técnicas de controlabilidad jerárquica. Más en particular, se usará la estrategia *Stackelberg-Nash*, que combina técnicas de optimización del tipo Stackelberg, junto con optimización no-cooperativa del tipo Nash.

Para ello, considere $\mathcal{O}_{1,d}$, $\mathcal{O}_{2,d} \subset \Omega$ dos conjuntos abiertos no vacíos denominados *dominios de observación*, junto con los funcionales

$$J_i(f; v_1, v_2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |y - \xi_{i,d}|^2 \, dx \, dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{S_i \times (0,T)} |v_i|^2 \, d\sigma \, dt, \quad i = 1, 2 \tag{4.0.2}$$

donde los *objetivos locales* $\xi_{i,d} \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))$ son dados y $\alpha_i, \mu_i > 0$ son constantes.

Se seguirá la siguiente estrategia:

1. Suponga que el líder f ya hizo una elección. Los seguidores v_1, v_2 satisfacer lo siguiente:

$$J_1(f; v_1, v_2) = \min_{\hat{v}_1} J_1(f; \hat{v}_1, v_2), \quad J_2(f; v_1, v_2) = \min_{\hat{v}_2} J_1(f; v_1, \hat{v}_2) \tag{4.0.3}$$

   Si v_1, v_2 satisfacen (4.0.3), decimos que (v_1, v_2) es un *equilibrio de Nash* para los funcionales J_i, $i = 1, 2$, asociado al líder f.

2. Considere una trayectoria no controlada de (4.0.1), esto es, una función $\overline{y} = \overline{y}(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} \overline{y}_t + \Delta^2 \overline{y} + a\overline{y} = F(\overline{y}) & \text{en } Q \\ y = 0, \ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = \overline{y}_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{4.0.4}$$

   Una vez identificado el equilibrio de Nash (v_1, v_2) para cada f, se busca un control $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que

$$y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$$

Para el caso semilineal, se usará la siguiente noción de equilibrio:

Definición 4.0.1. *Se dirá que el par (v_1, v_2) es un cuasi-equilibrio de Nash para los funcionales J_i asociado al líder f si y sólo si*

$$D_{v_i} J_i(f; v_1, v_2) \cdot \hat{v}_i = 0, \quad \forall \hat{v}_i \in L^2(S_i \times (0, T))$$

Observación 4.0.1. *Cuando los funcionales J_i son continuamente diferenciables y convexos, las nociones de equilibrio y cuasi-equilibrio de Nash coinciden. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso lineal $(F \equiv 0)$ para los funcionales de costo definidos en* (4.0.2).

El objetivo principal de este capítulo es mostrar los siguientes resultados:

Teorema 4.0.1. *Suponga que $\mathcal{O}_{i,d} \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, $F \equiv 0$, y que al menos una de las siguientes condiciones se satisface:*

$$(\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} \ \text{y} \ \xi_{1,d} = \xi_{2,d}) \quad \text{ó} \quad \mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O} \tag{4.0.5}$$

Si $\frac{\mu_i}{\alpha_i}$, $i = 1, 2$ es suficientemente grande, existe $\zeta = \zeta(t)$ que explota en $t = T$ tal que si $\overline{y}$ es solución de (4.0.4) *asociado a un estado inicial $\overline{y}_0 \in L^2(\Omega)$, y*

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \zeta^2 |\overline{y} - \xi_{i,d}|^2 \, dx \, dt < +\infty, \quad i = 1, 2$$

entonces existen controles $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ con su equilibrio de Nash asociado (v_1, v_2) tal que la solución de (4.0.1) *satisface que $y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$.*

Teorema 4.0.2. *Suponga que* $\mathcal{O}_{i,d}$ *y* μ_i, α_i *son como en el Teorema 4.0.1 y que* $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. *Considere* $\overline{y}$ *solución de* (4.0.4) *con condición inicial* $\overline{y}_0 \in L^2(\Omega)$. *Existe* $\zeta = \zeta(t)$ *que explota en* $t = T$ *tal que* $\forall y_0 \in L^2(\Omega)$, *existen controles* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *con su cuasi-equilibrio de Nash* (v_1, v_2) *de modo que la solución* (4.0.1) *cumple* $y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$.

Antes de continuar, note que con el cambio $z = y - \overline{y}$, el cual es solución del problema

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az = F(\overline{y} + z) - F(\overline{y}) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ z = 0, \ \frac{\partial z}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = z_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $z_0 = y_0 - \overline{y}_0$, ahora se buscará un líder f tal que $z(\cdot, T) = 0$. Además, los funcionales de costo J_i se escriben de la siguiente forma en términos de z:

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |z - z_{i,d}|^2 \, dx \, dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{S_i \times (0,T)} |v_i|^2 \, d\sigma \, dt, \quad i = 1, 2,$$

donde $z_{i,d} = \xi_{i,d} - \overline{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}$.

Además, de ahora en adelante, considere los siguientes espacios:

$$W(Q) = \left\{ u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) : \ u_t \in L^2(0,T; H^{-2}(\Omega) \right\}, \tag{4.0.6}$$

con la norma

$$\|u\|_{W(Q)} = \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}},$$

y los espacios de interpolación

$$H^{r,s}(Q) = L^2(0,T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T; L^2(\Omega)),$$

para $r, s \geq 0$ equipados con la norma

$$\|u\|_{H^{r,s}(Q)} = \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;H^r(\Omega))} + \|u\|^2_{H^s(0,T;L^2(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Análogamente se considerarán sus contrapartes en borde $H^{r,s}(\Sigma) = L^2(0,T; H^r(\partial\Omega)) \cap H^s(0,T; L^2(\partial\Omega))$. (Véase [25, 26])

4.1. El caso lineal

En esta sección, se estudiará el caso lineal del problema (4.0.1). Esto es, considere $F \equiv 0$.

4.1.1. Existencia de equilibrios de Nash

El objetivo de esta sección es mostrar el siguiente resultado:

Proposición 4.1.1. *Existe $M > 0$ tal que si*

$$\frac{\mu_i}{\alpha_i} > M, \tag{4.1.1}$$

entonces, para cada $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, existe un único equilibrio de Nash (v_1, v_2) para los funcionales J_1 y J_2 asociado al líder f.

Sea $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$. Considere los espacios

$$\mathcal{H}_i = L^2(S_i \times (0,T)), \quad i = 1,2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Note que los funcionales J_i son convexos, por lo que (v_1, v_2) es equilibrio de Nash si y sólo si

$$\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (z - z_{i,d})\hat{w}_i \, dx\, dt + \mu_i \iint_{S_i\times(0,T)} v_i \hat{v}_i \, dx\, dt = 0, \quad \forall \hat{v}_i \in \mathcal{H}_i, \ i = 1,2, \tag{4.1.2}$$

donde $\hat{w}_i$ es solución asociada a $\hat{v}_i$ del problema

$$\begin{cases} \hat{w}_{i,t} + \Delta^2 \hat{w}_i + a\hat{w}_i = 0 & \text{en } Q, \\ \hat{w}_i = 0, \ \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial n} = \rho_i \hat{v}_i & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{w}_i(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Se define $L_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow L^2(Q)$ como el operador solución del sistema (4.1.3), $i = 1,2$. Esto es, aquel operador que cumple $L_i \hat{v}_i = \hat{w}_i \ \forall \hat{v}_i \in L^2(S_i \times (0,T))$. Con esto, note que z se descompone de la siguiente forma:

$$z = L_1 v_1 + L_2 v_2 + \overline{z},$$

donde $\overline{z}$ es solución del problema

$$\begin{cases} \overline{z}_t + \Delta^2 \overline{z} + a\overline{z} = f \mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \overline{z} = 0, \ \frac{\partial \overline{z}}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{z}(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Con esto, se puede desarrollar (4.1.2) de la siguiente forma:

$$\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (L_1 v_1 + L_2 v_2 + \overline{z} - z_{i,d}) L_i \hat{v}_i \, dx\, dt + \mu_i \iint_{S_i\times(0,T)} v_i \hat{v}_i \, dx\, dt = 0$$

$$\alpha_i \iint_{S_i\times(0,T)} L_i^* \left((L_1 v_1 + L_2 v_2 + \overline{z} - z_{i,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} \right) \hat{v}_i \, d\sigma\, dt + \mu_i \iint_{S_i\times(0,T)} v_i \hat{v}_i \, dx\, dt = 0$$

$$\iint_{S_i\times(0,T)} L_i^*\left((L_1v_1+L_2v_2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)\hat{v}_i\, d\sigma\, dt+\frac{\mu_i}{\alpha_i}\iint_{S_i\times(0,T)} v_i\hat{v}_i\, dx\, dt=\iint_{S_i\times(0,T)} L_i^*\left((z_{i,d}-\overline{z})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)\hat{v}_i\, d\sigma\, dt$$

donde $L_i^* : L^2(Q) \longrightarrow \mathcal{H}_i$ es el operador adjunto a L_i, $i=1,2$. Por lo tanto, (4.1.2) es equivalente a

$$L_i^*\left((L_1v_1+L_2v_2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)+\frac{\mu_i}{\alpha_i}v_i=L_i^*\left((z_{i,d}-\overline{z})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)\quad \text{en } \mathcal{H}_i,\ i=1,2. \tag{4.1.5}$$

Defina el operador $\mathbb{L}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ dado por

$$\mathbb{L}(v_1,v_2)=\left(L_1^*\left((L_1v_1+L_2v_2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}\right)+\frac{\mu_1}{\alpha_1}v_1, L_2^*\left((L_1v_1+L_2v_2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}\right)+\frac{\mu_2}{\alpha_2}v_2\right)\quad \forall(v_1,v_2)\in\mathcal{H},$$

con esto, el sistema (4.1.5) es equivalente a

$$\mathcal{A}\big((v_1,v_2),(\hat{v}_1,\hat{v}_2)\big):=\Big(\mathbb{L}(v_1,v_2),(\hat{v}_1,\hat{v}_2)\Big)_{\mathcal{H}}=\ell(\hat{v}_1,\hat{v}_2)\quad\forall(\hat{v}_1,\hat{v}_2)\in\mathcal{H}, \tag{4.1.6}$$

donde

$$\ell(\hat{v}_1,\hat{v}_2)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{S_i\times(0,T)} L_i^*\left((z_{i,d}-\overline{z})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)\hat{v}_i\, d\sigma\, dt.$$

Dada la continuidad de los operadores L_i, L_i^*, $i=1,2$, los funcionales $\mathcal{A}$, ℓ son continuos. Luego, si $\mathcal{A}$ es coercivo, entonces, por Teorema de Lax-Milgram, (4.1.6) posee solución única $(\overline{v}_1,\overline{v}_2)\in\mathcal{H}$.

Demostración de la Proposición 4.1.1. Como se mencionó previamente, basta con probar la coercividad del funcional $\mathcal{A}$. Para ello, vea que

$$\begin{aligned}
\Big(\mathbb{L}(v_1,v_2),(v_1,v_2)\Big)_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^{2}\left(\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}(L_1v_1+L_2v_2)L_iv_i\, dx\, dt+\frac{\mu_i}{\alpha_i}\iint_{S_i\times(0,T)}|v_i|^2\, d\sigma\, dt\right)\\
&= \left\|L_1v_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|L_2v_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\sum_{i=1}^{2}\iint_Q(L_1v_1+L_2v_2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}\, dx\, dt+\sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\|v_i\|^2_{\mathcal{H}_i}\\
&\geq \left\|L_1v_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|L_2v_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}\right\|^2_{L^2(Q)}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i}{\alpha_i}\|v_i\|^2_{\mathcal{H}_i}\\
&-\|L_1v_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}\|_{L^2(Q)}\|L_2v_2\|_{L^2(Q)}-\|L_1v_1\|_{L^2(Q)}\|L_2v_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}\|_{L^2(Q)}\\
&\geq\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}-\frac{1}{4}\|L_1\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,L^2(Q))}\right)\|v_1\|^2_{\mathcal{H}_1}+\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}-\frac{1}{4}\|L_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,L^2(Q))}\right)\|v_2\|^2_{\mathcal{H}_2}
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando

$$\frac{\mu_i}{\alpha_i}>\frac{1}{4}\max\left\{\|L_1\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,L^2(Q))},\|L_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,L^2(Q))}\right\}=:M$$

se deduce el resultado. □

4.1.2. Sobre la observabilidad del problema y el sistema de optimalidad

Considere los estados adjuntos ϕ_i dados por

$$\begin{cases} -\phi_{i,t} + \Delta^2\phi_i + a\phi_i = \alpha_i(z - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi_i(\cdot, T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

de modo que al usar el multiplicador $\hat{w}_i$ se obtiene, vía integraciones por partes,

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \alpha_i(z - z_{i,d})\hat{w}_i\, dx\, dt = -\iint_{S_i\times(0,T)} \rho_i \Delta\phi_i \hat{v}_i, \quad i = 1, 2.$$

Considerando (v_1, v_2) equilibrio de Nash, recuerde que se debe satisfacer (4.1.2), por lo que

$$\mu_i \iint_{S_i\times(0,T)} v_i\hat{v}_i = \iint_{S_i\times(0,T)} \rho_i\Delta\phi_i\hat{v}_i, \quad \forall \hat{v}_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 1, 2.$$

Así, se puede obtener una caracterización del equilibrio de Nash (v_1, v_2) en términos de (ϕ_1, ϕ_2), dado por

$$v_i = \frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\phi_i \quad \text{en } \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.1.7}$$

Por lo tanto, el sistema de control se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az = f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ -\phi_{i,t} + \Delta^2\phi_i + a\phi_i = \alpha_i(z - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ z = 0,\ \frac{\partial z}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\phi_i, \quad \phi_i = 0,\ \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = z_0, \quad \phi_i(\cdot, T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

cuyo sistema adjunto está dado por

$$\begin{cases} -\psi_t + \Delta^2\psi + a\psi = \sum_{i=1}^2 \alpha_i\gamma_i\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ \gamma_{i,t} + \Delta^2\gamma_i + a\gamma_i = 0 & \text{en } Q, \\ \psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \gamma_i = 0,\ \frac{\partial\gamma_i}{\partial n} = \frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi, & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(\cdot, T) = \psi_T, \quad \gamma_i(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.1.9}$$

el cual induce la igualdad:

$$\int_\Omega \psi_T\, z(\cdot, T) = \int_\Omega \psi(\cdot, 0)\, z_0 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \gamma_i\, z_{i,d}\,, \quad \forall \psi_T \in L^2(\Omega).$$

Así, se tendrá la controlabilidad nula del problema si y sólo si

$$\int_\Omega \psi(\cdot, 0)\, z_0 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \gamma_i\, z_{i,d} = 0\,, \quad \forall \psi_T \in L^2(\Omega). \tag{4.1.10}$$

Definiendo el funcional

$$\mathcal{J}(\psi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 \, dx\, dt + \int_\Omega \psi(\cdot,0) z_0 - \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \alpha_i z_{i,d}\gamma_i,$$

$\mathcal{J}$ tendrá único mínimo $\hat{\psi}_T \in L^2(\Omega)$ si y sólo si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \zeta^{-2}|\gamma_i|^2 \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2, \tag{4.1.11}$$

donde $\zeta = \zeta(t)$ es un peso que explota en $t = T$. En cuyo caso, $\hat{\psi}_T$ hace que

$$\int_\Omega \psi(\cdot,0)\, z_0 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{\psi}\psi - \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \gamma_i\, z_{i,d} = 0\,, \quad \forall \psi_T \in L^2(\Omega) \tag{4.1.12}$$

donde $\hat{\psi}$ es solución de (4.1.9) con condición inicial $\hat{\psi}_T$, y $(\psi, \gamma_1, \gamma_2)$ la correspondiente solución de (4.1.9) con condición inicial ψ_T. De (4.1.12), se deduce que $f = \hat{\psi}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ es un control que hace que $z(\cdot,T) = 0$.

Observación 4.1.1. *De* (4.1.12) *evaluada en* $\psi_T = \hat{\psi}_T$ *y* (4.1.11), *se tiene que*

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} &\leq \|\hat{\psi}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left\|\zeta z_{i,d}\right\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} \left\|\zeta^{-1}\gamma_i\right\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))} \\ &\leq C\left(\|f\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\|z\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \sum_{i=1}^{2}\left(\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \zeta^2|z_{i,d}|^2\, dx\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\left(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \zeta^2|z_{i,d}|^2\, dx\, dt\right).$$

Es decir, la norma del control está acotada por la condición inicial z_0 *y los objetivos locales* $z_{i,d}$.

Antes de continuar, se mostrará un resultado de existencia y regularidad de soluciones para el sistema (4.1.8), el cual será de utilidad más adelante.

Proposición 4.1.2. *Suponga* $f \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$, $z_0 \in L^2(\Omega)$, $z_{i,d} \in L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))$ *dados. Si* $\frac{\mu_i}{\alpha_i}$ *es suficientemente grande,* $i = 1, 2$, *entonces* (4.1.8) *posee única solución* $(z, \phi_1, \phi_2) \in W(Q) \times [H^{4,1}(Q)]^2$.

Demostración. Para cada $\tilde{z} \in L^2(Q)$, considere el sistema

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az = f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ -\phi_{i,t} + \Delta^2 \phi_i + a\phi_i = \alpha_i(\tilde{z} - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ z = 0, \ \frac{\partial z}{\partial n} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\mu_i}\rho_i \Delta\phi_i, \quad \phi_i = 0, \ \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z_0, \quad \phi_i(\cdot,T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.13}$$

Nótese que, por la Proposición 2.4.1, $\phi_i \in L^2(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $i=1,2$, y satisfacen que

$$\|\phi_i\|^2_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} + \|\phi_{i,t}\|^2_{L^2(Q)} \leq C\alpha_i^2 \|\tilde{z} - z_{i,d}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}. \tag{4.1.14}$$

Por otro lado, de [26, p. 9], existe $C>0$ tal que

$$\|\rho_i \Delta\phi_i\|^2_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{8}}(\Sigma)} \leq C\left(\|\phi_i\|^2_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} + \|\phi_{i,t}\|^2_{L^2(Q)}\right),$$

y de [26, p 83–84], $z \in W(Q)$ es tal que

$$\begin{aligned} &\|z\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|z_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \\ &\leq C\left(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\mu_i^2}\|\rho_i\Delta\phi_i\|^2_{H^{\frac{3}{2},\frac{3}{8}}(\Sigma)}\right). \end{aligned}$$

En consecuencia, se deduce que

$$\begin{aligned} &\|z\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|z_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \\ &\leq C\left(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i^2}{\mu_i^2}\|\tilde{z} - z_{i,d}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\right). \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

En particular,

$$\|z\|^2_{L^2(Q)} \leq C\left(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + K\max_{i=1,2}\|\tilde{z} - z_{i,d}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\right), \tag{4.1.16}$$

donde $K = \max_{i=1,2}\frac{\alpha_i^2}{\mu_i^2}$.

Considere el mapeo $\Lambda : L^2(Q) \to L^2(Q)$ tal que $\Lambda(\tilde{z}) := z$ para cada $\tilde{z}$, donde (z,ϕ_1,ϕ_2) es solución de (4.1.13). Por el desarrollo previo, Λ está bien definido. Además, dados $\tilde{z}^1, \tilde{z}^2 \in L^2(Q)$, $Z = z^1 - z^2 = \Lambda(\tilde{z}^1) - \Lambda(\tilde{z}^2)$, $\Phi_i = \phi_i^1 - \phi_i^2$, nótese que (Z,Φ_1,Φ_2) satisfacen el sistema

$$\begin{cases} Z_t + \Delta^2 Z + aZ = 0 & \text{en } Q, \\ -\Phi_{i,t} + \Delta^2 \Phi_i + a\Phi_i = \alpha_i(\tilde{z}^1 - \tilde{z}^2)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ Z = 0, \ \frac{\partial Z}{\partial n} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\mu_i}\rho_i \Delta\Phi_i, \quad \Phi_i = 0, \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ Z(\cdot,0) = 0, \quad \Phi_i(\cdot,T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

En consecuencia, aplicando (4.1.16) al sistema (4.1.17), se cumple lo siguiente

$$\|\Lambda(\tilde{z}^1) - \Lambda(\tilde{z}^2)\|^2_{L^2(Q)} \leq CK\|\tilde{z}^1 - \tilde{z}^2\|^2_{L^2(Q)}.$$

Por lo que el operador Λ el Lipschitz-continuo. Además, si $\frac{\mu_i}{\alpha_i}$ es suficientemente grande, entonces Λ es una contracción, por lo que posee un único punto fijo $\Lambda(z) = z$. Así, el sistema (4.1.8) posee única solución $(z, \phi_1, \phi_2) \in W(Q) \cap [H^{4,1}(Q)]^2$. □

Observación 4.1.2. *Como consecuencia de la Proposición 4.1.2 y de* (4.1.7)*, si* (v_1, v_2) *es un equilibrio de Nash para* J_1, J_2*, dado que* $\phi_i \in H^{4,1}(Q)$*, entonces*

$$v_i \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{8}}(\Sigma), \quad i = 1, 2.$$

Además, como consecuencia de (4.1.15)*, si* $\frac{\mu_i}{\alpha_i}$ *es suficientemente grande, fijando* $z_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $z_{i,d} \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))$ $(i = 1, 2)$*, se cumple que*

$$\|z\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|z_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C\left(1 + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\right), \tag{4.1.18}$$

para una constante $C > 0$*.*

El siguiente resultado entrega la controlabilidad deseada para el problema lineal:

Proposición 4.1.3. *Suponga que* $\mathcal{O}_{i,d} \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$*,* $i = 1, 2$*.*

1. *Suponga que se tiene el primer supuesto de* (4.0.5)*, es decir,*

$$\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} \quad \text{y} \quad \xi_{1,d} = \xi_{2,d}.$$

Existe una constante $C > 0$ *y una función peso* $\zeta = \zeta(t)$ *tal que, si*

$$\iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} \zeta^2|z_{i,d}|^2 \, dx\, dt < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

para todo $\psi_T \in L^2(\Omega)$*, entonces la solución* $(\psi, \gamma_1, \gamma_2)$ *de* (4.1.9) *satisface*

$$\|\psi(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} \zeta^{-2}|\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2|^2 \, dx\, dt \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 \, dx\, dt. \tag{4.1.19}$$

2. *Ahora, suponga que el segundo supuesto de* (4.0.5) *se cumple, es decir,*

$$\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}.$$

Entonces,

$$\|\psi(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \zeta^{-2}|\gamma_i|^2 \, dx\, dt \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 \, dx\, dt. \tag{4.1.20}$$

Esta proposición se demostrará en las siguientes subsecciones, estudiando los casos establecidos. Para ello, se buscará establecer estimaciones de Carleman para las soluciones de (4.1.9).

Estimaciones de Carleman sobre el sistema adjunto

Antes de estudiar los casos planteados, se demostrará el siguiente resultado técnico:

Lema 4.1.1. *Sea $\omega \subset\subset \tilde{\omega} \subset\subset \mathcal{A} \subset \Omega$. Suponga que (ψ, g) satisfacen lo siguiente:*

$$\begin{cases} -\psi_t + \Delta^2\psi + a\psi = g\mathbf{1}_{\mathcal{A}} & en\ Q, \\ g_t + \Delta^2 g + ag = 0 & en\ Q, \end{cases} \tag{4.1.21}$$

Entonces, existe una constante $C(\omega, \tilde{\omega}, \Omega) > 0$ tal que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|g|^2 \leq \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2$$
$$+ C \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\xi^{10} e^{-2s\alpha}\Big(s^6\lambda^6\xi^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4\xi^4|\nabla\psi|^2 + s^2\lambda^2\xi^2(|\Delta\psi|^2 + |\nabla^2\psi|^2) + |\nabla\Delta\psi|^2\Big).$$

Demostración. Sea $\theta \in C_c^\infty(\tilde{\omega})$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, con $\theta \equiv 1$ en ω.

$$\begin{aligned} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^7 e^{-2s\alpha}|g|^2 &\leq \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \theta\xi^7 e^{-2s\alpha}|g|^2 \\ &= \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \theta\xi^7 e^{-2s\alpha} g(-\psi_t + \Delta^2\psi + a\psi). \end{aligned}$$

Integrando por partes y denotando $u = \theta\xi^7 e^{-2s\alpha}$, se tiene que, por un lado,

$$\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} ug(-\psi_t) = \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \partial_t(u)g\psi + \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} ug_t\psi.$$

Se denotará J_1 y J_2 a estas integrales respectivamente. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} ug\Delta^2\psi &= \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \Delta^2(ug)\psi \\ &= \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \Delta^2 ug\psi + 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla\Delta u\cdot\nabla g\psi + 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \Delta u\Delta g\psi \\ &\quad + 4\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla^2 u : \nabla^2 g\psi + 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla u\cdot\nabla\Delta g\psi + \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} u\Delta^2 g\psi, \end{aligned}$$

y se denotará por I_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$ a estos términos respectivamente. Finalmente, se denotará

$$K = \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} aug\psi.$$

Como $g_t + \Delta^2 g + ag = 0$, se cumple que

$$J_2 + I_6 + K = 0.$$

Por otra parte, integrando nuevamente por partes, se tiene que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -2I_1 - \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla\Delta u \cdot \nabla\psi g, \\
I_3 &= 2I_1 + 4\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla\Delta u \cdot \nabla\psi g + 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \Delta u \Delta\psi g, \\
I_4 &= 4I_1 + 8\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla\Delta u \cdot \nabla\psi g + 4\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla^2 u : \nabla^2\psi g, \\
I_5 &= -2I_3 - 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla\Delta u \cdot \nabla\psi g - 4\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla^2 u : \nabla^2\psi g \\
&\quad - 2\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \nabla u \cdot \nabla\Delta\psi g.
\end{aligned}
$$

Se tienen entonces las siguientes cotas:

$$
|J_1| \le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^{3+\frac{2}{m}}\xi^{10+\frac{2}{m}} e^{-2s\alpha}|\psi|^2,
$$

$$
|I_1| \le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^9\lambda^8\xi^{16} e^{-2s\alpha}|\psi|^2,
$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^9\lambda^8\xi^{16} e^{-2s\alpha}|\psi|^2 \\
&\quad + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^7\lambda^6\xi^{14} e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^9\lambda^8\xi^{16} e^{-2s\alpha}|\psi|^2 \\
&\quad + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^7\lambda^6\xi^{14} e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^5\lambda^4\xi^{12} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^9\lambda^8\xi^{16} e^{-2s\alpha}|\psi|^2 \\
&\quad + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^7\lambda^6\xi^{14} e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^5\lambda^4\xi^{12} e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_5| &\le \varepsilon \iint_{\mathcal{A}\times(0,T)} s^{-1}\xi^6 e^{-2s\alpha}|g|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^9\lambda^8\xi^{16} e^{-2s\alpha}|\psi|^2 \\
&\quad + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^7\lambda^6\xi^{14} e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + C\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^5\lambda^4\xi^{12} e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2
\end{aligned}
$$

$$+ C \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^5\lambda^4\xi^{12}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 + C \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^3\lambda^2\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2.$$

Sumando estas cotas se deduce el resultado deseado. □

Caso 1: $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}$ y $\xi_{1,d} = \xi_{2,d}$

En este caso, se denotará $\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{1,d}$ y $h = \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_2$. Se demostrará el siguiente resultado:

Proposición 4.1.4. *Suponga que $\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}$ y $\xi_{1,d} = \xi_{2,d}$. Considere $\mathcal{I}(\psi)$ como en el lema 4.1.2. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}(\psi) + \iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|h|^2 \leq C \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{25}\lambda^{22}\xi^{25}e^{-2s\alpha}|\psi|^2,$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^m + T^{2m})$.

Para ello, será de utilidad contar con el siguiente lema:

Lema 4.1.2. *Sea $h = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$. Denote*

$$\mathcal{I}(\psi) := \iint_Q e^{-2s\alpha}\Big(s^{12}\lambda^{14}\xi^{12}|\psi|^2 + s^{10}\lambda^{12}\xi^{10}|\nabla\psi|^2 + s^9\lambda^{10}\xi^9|\Delta\psi|^2 + s^8\lambda^{10}\xi^8|\nabla^2\psi|^2 + s^7\lambda^8\xi^7|\nabla\Delta\psi|^2 + s^5\lambda^6\xi^5|\Delta^2\psi|^2\Big).$$

Entonces, existe $C > 0$ tal que para todo $\lambda \geq C$, $s \geq C(T + T^{1/2})$,

$$\mathcal{I}(\psi) \leq C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} s^{13}\lambda^{14}\xi^{13}e^{-2s\alpha}|\psi|^2 + \iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^6\xi^6e^{-2s\alpha}|h|^2\right)$$

Demostración. El resultado es consecuencia directa del Corolario 2.5.1 aplicado a ψ solución de (4.1.9) con $r = 6$. □

Demostración de la Proposición 4.1.4. Suponga que $\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}$ y $\xi_{1,d} = \xi_{2,d}$. Considere $h = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$, de modo que se tiene el siguiente sistema adjunto:

$$\begin{cases} -\psi_t + \Delta^2\psi + a\psi = h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{en } Q, \\ h_t + \Delta^2 h + ah = 0 & \text{en } Q, \\ \psi = 0, \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad h = 0, \ \frac{\partial h}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(\cdot,T) = \psi_T, \quad h(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.22}$$

Aplicando el teorema 2.5.3 a h, se tiene lo siguiente:

$$\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|h|^2 \lesssim \iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|h|^2 + \sum_{i=1}^{2}\iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi_*^5 e^{-2s\alpha^*}\left|\frac{\alpha_i}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi\right|^2.$$

Denote $\boldsymbol{\mu} = \text{mín}\{\mu_1,\mu_2\}$. Usando desigualdades de traza en la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|h|^2 &\lesssim \iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|h|^2\\ &\quad + \frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\left(\int_0^T s^4\lambda^4\xi_*^4 e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)} + \int_0^T s^6\lambda^6\xi_*^6 e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^T s^6\lambda^6\xi_*^6 e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \lesssim \frac{1}{s^2}I(\psi), \quad \text{y} \quad \int_0^T s^4\lambda^4\xi_*^4 e^{-2s\alpha^*}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)} \lesssim \frac{1}{s^3}I(\psi),$$

por lo que

$$\iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|h|^2 \lesssim \iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|h|^2 + \frac{1}{\boldsymbol{\mu}s^2}\mathcal{I}(\psi). \tag{4.1.23}$$

Combinando (4.1.2) y (4.1.23) junto con el lema 4.1.1 con $\mathcal{A} = \mathcal{O}_d$ y $g = h$, se deduce la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|h|^2 + \mathcal{I}(\psi) &\lesssim \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\xi^{10}e^{-2s\alpha}\Big(s^6\lambda^6\xi^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4\xi^4|\nabla\psi|^2\\ &\quad + s^2\lambda^2\xi^2(|\Delta\psi|^2 + |\nabla^2\psi|^2) + |\nabla\Delta\psi|^2\Big).\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Denote A_i, $i\in\{1,2,3,4,5\}$ a los términos del lado derecho de (4.1.24). Tome $\theta \in C_c^\infty(\overline{\omega})$, $0\le\theta\le 1$, $\theta\equiv 1$ en $\tilde{\omega}$. Entonces,

$$A_1 \le \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{16}\lambda^{16}\xi^{16}e^{-2s\alpha}|\psi|^2, \tag{4.1.25}$$

$$\begin{aligned}A_2 &\le \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 \\ &= -\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}\text{div}\left(\theta\xi^{14}e^{-2s\alpha}\nabla\psi\right)\psi\\ &= -\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}\nabla\left(\theta\xi^{14}e^{-2s\alpha}\right)\cdot\nabla\psi\psi - \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-2s\alpha}\Delta\psi\psi\\ &= \frac{1}{2}\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}\Delta\left(\theta\xi^{14}e^{-2s\alpha}\right)|\psi|^2 - \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-2s\alpha}\Delta\psi\psi\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

$$\lesssim \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{16}\lambda^{16}\xi^{16}e^{-2s\alpha}|\psi|^2 + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{19}\lambda^{18}\xi^{19}e^{-2s\alpha}|\psi|^2,$$

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \\
&= \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}\Delta\left(\theta\xi^{12}e^{-2s\alpha}\Delta\psi\right)\psi \\
&\lesssim \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi||\psi| + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{13}\lambda^{13}\xi^{13}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi||\psi| \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi||\psi| \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 + \varepsilon \iint_Q s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{19}\lambda^{18}\xi^{19}e^{-2s\alpha}|\psi|^2,
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &\leq \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 \\
&= \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}\nabla^2 : \left(\theta\xi^{12}e^{-2s\alpha}\nabla^2\psi\right)\psi \\
&\lesssim \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}\xi^{14}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi||\psi| + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{13}\lambda^{13}\xi^{13}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi||\psi| \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}\xi^{12}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi||\psi| \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^8\lambda^{10}\xi^8 e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 + \varepsilon \iint_Q s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{20}\lambda^{18}\xi^{20}e^{-2s\alpha}|\psi|^2,
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &\leq \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}\xi^{10}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&= -\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\mathrm{div}\left(\theta\xi^{10}e^{-2s\alpha}\nabla\Delta\psi\right)\Delta\psi \\
&= -\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\nabla\left(\theta\xi^{10}e^{-2s\alpha}\right)\nabla\Delta\psi\Delta\psi - \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}\xi^{10}e^{-2s\alpha}\Delta^2\psi\Delta\psi \\
&= \frac{1}{2}\iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\Delta\left(\theta\xi^{10}e^{-2s\alpha}\right)|\Delta\psi|^2 - \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}\xi^{10}e^{-2s\alpha}\Delta^2\psi\Delta\psi \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{15}\lambda^{14}\xi^{15}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{15}\lambda^{14}\Delta\left(\theta\xi^{15}e^{-2s\alpha}\Delta\psi\right)\psi \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{17}\lambda^{16}\xi^{17}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi||\psi| + \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{16}\lambda^{15}\xi^{16}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi||\psi| \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{15}\lambda^{14}\xi^{15}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi||\psi| \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^5\lambda^6\xi^5 e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 + \varepsilon\iint_Q s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 + \varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{10}\xi^9 e^{-2s\alpha}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \\
&+ \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{25}\lambda^{22}\xi^{25}e^{-2s\alpha}|\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Combinando las desigualdades (4.1.25)-(4.1.29) en (4.1.24), se deduce la estimación:

$$
\mathcal{I}(\psi) + \iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|h|^2 \lesssim \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} \theta s^{25}\lambda^{22}\xi^{25}e^{-2s\alpha}|\psi|^2. \tag{4.1.30}
$$

□

Finalmente, a partir de la Proposición 4.1.4, se deducirá el resultado para el **Caso 1** la Proposición 4.1.3.

Para añadir la condición inicial de ψ, considere los nuevos pesos

$$
\overline{\alpha}(x,t) = \frac{e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}}{\ell(t)^m}, \quad \overline{\xi}(x,t) = \frac{e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty+\eta(x))}}{\ell(t)^m}, \tag{4.1.31}
$$

con

$$
\ell(t) = \begin{cases} \frac{T^2}{4} & t\in\left[0,\frac{T}{2}\right], \\ t(T-t) & t\in\left[\frac{T}{2},T\right]. \end{cases}
$$

Primero, note que ψ satisface la siguiente desigualdad:

$$
\begin{aligned}
&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(0,T)} + \|\Delta\psi\|^2_{L^2(0,T/2;\,L^2(\Omega))} \\
&\qquad \lesssim \|\psi\|^2_{L^2(0,3T/4;\,L^2(\Omega))} + \frac{1}{T}\|\psi\|^2_{L^2(T/2,3T/4;\,L^2(\Omega))} + \|h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}\|^2_{L^2(0,3T/4;\,L^2(\Omega))^2}.
\end{aligned} \tag{4.1.32}
$$

Esta desigualdad la podemos obtener tomando $\rho\in C^1(0,T)$ tal que

$$
\rho\equiv 1 \text{ en } \left[0,\frac{T}{2}\right], \quad \rho\equiv 0 \text{ en } \left[\frac{3T}{4},T\right], \quad |\rho'|\leq\frac{C}{T}, \tag{4.1.33}
$$

luego, $\rho\psi$ satisface la ecuación

$$
-(\rho\psi)_t + \Delta^2(\rho\psi) + a(\rho\psi) = -\rho'\psi + h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}.
$$

Multiplicando la ecuación por $\rho\psi$ e integrando en $\Omega \times (0,T)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\psi(\cdot,0)|^2 + \iint_Q |\rho\Delta\psi|^2 &= -\iint_Q a|\rho\psi|^2 - \iint_Q \rho'\rho|\psi|^2 + \iint_Q \rho h\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} \\ &= -\iint_Q a|\rho\psi|^2 - \frac{1}{2}\iint_Q \partial_t(|\rho|^2)|\psi|^2 + \iint_Q \rho h\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}.\end{aligned}$$

Finalmente, usando (4.1.33), se deduce (4.1.32).

Como consecuencia de la definición de los nuevos pesos, (4.1.32) implica la siguiente desigualdad en $\Omega \times \left(0, \frac{T}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_{\Omega\times(0,\frac{T}{2})} e^{-2s\overline{\alpha}} s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}|\psi|^2 + \iint_{\Omega\times(0,\frac{T}{2})} e^{-2s\overline{\alpha}} s^{9}\lambda^{12}(\overline{\xi})^{9}|\Delta\psi|^2 \\ &\leq C\Bigg(\iint_{\Omega\times(0,\frac{3T}{4})} s^6\lambda^8(\overline{\xi})^6 e^{-2s\overline{\alpha}}|h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 + \iint_{\Omega\times(0,\frac{3T}{4})} s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2 \\ &+ \frac{1}{T}\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},\frac{3T}{4})} s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2\Bigg),\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

y como $\alpha = \overline{\alpha}$ y $\xi = \overline{\xi}$ en $\Omega \times \left(\frac{T}{2}, T\right)$, se cumple lo siguiente,

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)} s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2 + \iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)} s^{9}\lambda^{12}(\overline{\xi})^{9}e^{-2s\overline{\alpha}}|\Delta\psi|^2 \lesssim \mathcal{I}(\psi). \tag{4.1.35}$$

Usando la desigualdad (4.1.30), se tiene que

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)} s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2 + \iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)} s^{9}\lambda^{12}(\overline{\xi})^{9}e^{-2s\overline{\alpha}}|\Delta\psi|^2 \\ &\lesssim \iint_{\overline{\omega}\times(0,T)} s^{25}\lambda^{22}\xi^{25}e^{-2s\alpha}|\psi|^2.\end{aligned}$$

Combinando todo lo anterior, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2 + \iint_Q s^{9}\lambda^{12}(\overline{\xi})^{9}e^{-2s\overline{\alpha}}|\Delta\psi|^2 \\ &\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{25}\lambda^{22}(\overline{\xi})^{25}e^{-2s\overline{\alpha}}|\psi|^2.\end{aligned}$$

Finalmente, argumentando como en el capítulo 3, se deduce la desigualdad (4.1.11)

Caso 2: $\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}$

Suponga que $\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}$. En este caso, se necesitará de dos funciones peso para poder estimar las tres variables $(\psi, \gamma_1, \gamma_2)$. Para ello, considere $\mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}$ y $\omega_1, \omega_2 \subset\subset \mathcal{O}_0$ tales que

$$\omega_1 \subset\subset \mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \quad \text{y} \quad \omega_2 \subset\subset \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}.$$

y tome $\omega_0^i \subset\subset \omega_i$ y $\eta^1, \eta^2 \in C^4(\overline{\Omega})$ tales que

$$\begin{cases} \eta^i > 0 \text{ en } \Omega, & \eta^i = 0 \text{ en } \Gamma \qquad |\nabla \eta^i| > 0 \text{ en } \Omega \backslash \overline{\omega_0^i} \quad i = 1,2 \\ \eta^1 = \eta^2 \text{ en } \Omega \backslash \mathcal{O}_0, & \|\eta^1\|_\infty = \|\eta^2\|_\infty, \end{cases} \tag{4.1.36}$$

con sus respectivos pesos α^i, γ^i (véase [2] para la existencia de estos pesos). Se demostrará el siguiente resultado:

Proposición 4.1.5. *Suponga que $\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} &\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12} e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \sum_{i=1}^{2} \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2 \\ &\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23} e^{-8s\hat{\alpha}_1 + 6s\alpha^{1*}}|\psi|^2, \end{aligned}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T^m + T^{2m})$.

Se dividirá el estudio de este caso a 3 escenarios:

(a) $\Big(\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O}\Big) \cap \Big(\mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}\Big) = \varnothing$

(b) $\Big(\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O}\Big) \cap \Big(\mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}\Big) \neq \varnothing$ y $\Big(\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O}\Big) \backslash \Big(\mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}\Big) \neq \varnothing$

(c) $\Big(\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O}\Big) \cap \Big(\mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}\Big) \neq \varnothing$ y $\Big(\mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}\Big) \backslash \Big(\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O}\Big) \neq \varnothing$

Los casos (b) y (c) se pueden tratar de forma equivalente, por lo que sólo se estudiarán los casos (a) y (b). Para ello, la idea es obtener una desigualdad para ψ que no vea dentro del conjunto $\mathcal{O}$ y aplicar estimaciones de Carleman a γ_1 y γ_2 utilizando los pesos η^1 y η^2 respectivamente, usando sus propiedades para combinar todas las desigualdades.

Considérese $\Lambda \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\Lambda \equiv 0$ en $\mathcal{O}_0$ y $\Lambda \equiv 1$ en $\Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}$. Nótese que $\Lambda\psi$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -(\Lambda\psi)_t + \Delta^2(\Lambda\psi) + a(\Lambda\psi) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Lambda \gamma_i \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} + R(\psi) & \text{in } \Omega, \\ \Lambda\psi = \frac{\partial(\Lambda\psi)}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

donde

$$R(\psi) := 4\nabla\Delta(\nabla\Lambda\psi) - 4\nabla^2 : (\nabla^2\Lambda\psi) - 2\Delta(\Delta\Lambda\psi) + 4\nabla\cdot(\nabla\Delta\Lambda\psi) - \Delta^2\Lambda\psi.$$

Usando el Teorema 2.5.3 sobre $\Lambda\psi$, se tiene que

$$\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12} e^{-2s\alpha^1}|\Lambda\psi|^2 \lesssim \cancelto{0}{\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^{13}\lambda^{14}(\xi^1)^{13} e^{-2s\alpha^1}|\Lambda\psi|^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\iint_Q s^6\lambda^6(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}\left(|\Lambda\gamma_1|^2+|\Lambda\gamma_2|^2+|\Delta^2\Lambda\psi|^2\right)\\
&+\iint_Q s^8\lambda^8(\xi^1)^8 e^{-2s\alpha^1}|\nabla\Delta\Lambda\psi|^2+\iint_Q s^{10}\lambda^{10}(\xi^1)^{10}e^{-2s\alpha^1}\left(|\Delta\Lambda\psi|^2+|\nabla^2\Lambda\psi|^2\right)\\
&+\iint_Q s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\nabla\Lambda\psi|^2 \qquad (4.1.37)\\
&\lesssim \iint_Q s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\\
&+\iint_Q s^6\lambda^6(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}\left(|\Lambda\gamma_1|^2+|\Lambda\gamma_2|^2\right).
\end{aligned}
$$

Dada la definición de Λ, nótese que

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 &= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\iint_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\Lambda\psi|^2\\
&\le \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\iint_Q s^{12}\lambda^{12}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\Lambda\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Esto es

$$
\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2-\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\le\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\Lambda\psi|^2. \tag{4.1.38}
$$

Juntando (4.1.37) y (4.1.38)

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 &\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\frac{1}{\lambda^2}\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\\
&+\iint_Q s^6\lambda^6(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}\left(|\Lambda\gamma_1|^2+|\Lambda\gamma_2|^2\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para λ suficientemente grande, se tiene que

$$
\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\lesssim\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\iint_Q s^6\lambda^6(\xi^1)^6e^{-2s\alpha^1}\left(|\Lambda\gamma_1|^2+|\Lambda\gamma_2|^2\right). \tag{4.1.39}
$$

Como $\eta^1=\eta^2$ en $\Omega\backslash\mathcal{O}_0$ y $\Lambda\equiv 0$ en $\mathcal{O}_0$, se cumple que

$$
\iint_Q s^6\lambda^6(\xi^1)^6e^{-2s\alpha^1}\left(|\Lambda\gamma_1|^2+|\Lambda\gamma_2|^2\right)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega\backslash\mathcal{O}_0\times(0,T)} s^6\lambda^6(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\Lambda\gamma_i|^2
$$

Por lo tanto, (4.1.39) se ve de la siguiente forma:

$$
\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\lesssim\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega\backslash\mathcal{O}_0\times(0,T)} s^6\lambda^6(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\Lambda\gamma_i|^2. \tag{4.1.40}
$$

Además, como $|\Lambda| \leq 1$, para λ suficientemente grande se cumple que

$$\iint_{\Omega\setminus\mathcal{O}_0\times(0,T)} s^6\lambda^6(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\Lambda\gamma_i|^2 \leq \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2. \tag{4.1.41}$$

Esta cota será utilizada para tratar los casos (a), (b) y (c).

(a) Suponga que $\Big(\mathcal{O}_{1,d}\cap\mathcal{O}\Big)\cap\Big(\mathcal{O}_{2,d}\cap\mathcal{O}\Big) = \varnothing$. En este caso, se pueden tomar $\omega_1\cap\mathcal{O}_{2,d} = \varnothing$ y $\omega_2 \cap \mathcal{O}_{1,d} = \varnothing$. Usando el Teorema 2.5.3 en γ_1, $(i = 1, 2)$, se tiene que

$$\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2 \lesssim \iint_\Sigma s^5\lambda^5(\xi^i_*)^5 e^{-2s\alpha^{i*}}\left|\frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi\right|^2 + \iint_{\omega_i\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^i)^7 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2. \tag{4.1.42}$$

Considere $\tilde{\omega}_i$ tal que $\omega_i \subset\subset \tilde{\omega}_i \subset\subset \mathcal{O}_{i,d}\cap\mathcal{O}$. Nótese que

$$\begin{cases} -\psi_t + \Delta^2\psi + a\psi = \alpha_i\gamma_i\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } \tilde{\omega}_i\times(0,T), \\ \gamma_{i,t} + \Delta^2\gamma_i + a\gamma_i = 0 & \text{en } \tilde{\omega}_i\times(0,T). \end{cases}$$

De forma similar al **Caso 1**, se deduce la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} &\iint_{\omega_i\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^i)^7 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2 \lesssim \varepsilon\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2 \\ &+ \iint_{\tilde{\omega}_i\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10} e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2 \\ &+ s^2\lambda^2(\xi^i)^2(|\Delta\psi|^2 + |\nabla^2\psi|^2) + |\nabla\Delta\psi|^2\big). \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

En consecuencia, usando (4.1.40), (4.1.42), (4.1.43) y (4.1.41) junto con desigualdades de traza, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12} e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \sum_{i=1}^2\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2 \lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12} e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 \\ &+ \frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^4\lambda^4(\xi^1_*)^4 e^{-2s\alpha^{i*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} + \frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^6\lambda^6(\xi^1_*)^6 e^{-2s\alpha^{i*}}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^2\iint_{\tilde{\omega}_i\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10} e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2 \\ &+ s^2\lambda^2(\xi^i)^2(|\Delta\psi|^2 + |\nabla^2\psi|^2) + |\nabla\Delta\psi|^2\big). \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Para abordar los términos de orden mayor del lado derecho de (4.1.44), se agregará una norma H^4 de ψ al lado izquierdo. Para ello, considere

$$\overline{\psi} = \rho(t)\psi, \quad \overline{\gamma}_i = \rho(t)\gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

con $\rho(t)=(\xi_*^1)^3 e^{-2s\alpha^{i*}}$ que cumplen el sistema

$$\begin{cases} -\overline{\psi}_t+\Delta^2\overline{\psi}+a\overline{\psi}=-\rho'\psi+\alpha_1\overline{\gamma}_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}+\alpha_2\overline{\gamma}_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } Q,\\ \overline{\gamma}_{i,t}+\Delta^2\overline{\gamma}_i+a\overline{\gamma}_i=\rho'\gamma_i & \text{en } Q,\\ \overline{\psi}=\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}=0,\quad \overline{\gamma}_i=0,\ \frac{\partial\overline{\gamma}_i}{\partial n}=\frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\overline{\psi} & \text{sobre } \Sigma,\\ \overline{\psi}(\cdot,T)=0,\quad \overline{\gamma}(\cdot,0)=0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.45}$$

Aplicando resultados clásicos de regularidad al sistema (4.1.45), se obtiene lo siguiente:

$$\|\rho\psi\|^2_{L^2(0,T;H^4(\Omega))}\lesssim\|\rho'\psi\|^2_{L^2(Q)}+\sum_{i=1}^2\alpha_i^2\|\rho\gamma_i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}.$$

Como $m\geq\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\int_0^T(\xi_*^1)^6e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}&\lesssim\int_0^T(\xi_*^1)^{8+\frac{2}{m}}e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^2\alpha_i^2\int_0^T(\xi_*^i)^6e^{-2s\alpha^{i*}}\|\gamma_i\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\lesssim\iint_Q(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^2\iint_Q(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2.\end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned}&\int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}+\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^2\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2\\ &\lesssim\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^4\lambda^4(\xi_*^1)^4e^{-2s\alpha^{i*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \qquad (4.1.46)\\ &+\frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^6\lambda^6(\xi_*^1)^6e^{-2s\alpha^{i*}}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)}+\sum_{i=1}^2\iint_{\tilde{\omega}_i\times(0,T)}s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2\\ &+s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2+s^2\lambda^2(\xi^i)^2(|\Delta\psi|^2+|\nabla^2\psi|^2)+|\nabla\Delta\psi|^2\big).\end{aligned}$$

Utilizando desigualdades de interpolación, se pueden agregar los siguientes términos al lado izquierdo de (4.1.46):

$$\begin{gathered}\int_0^T s^{\frac{21}{2}}\lambda^{\frac{25}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{21}{2}}e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)},\\ \int_0^T s^9\lambda^{11}(\xi_*^1)^9e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)},\\ \int_0^T s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{15}{2}}e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)}.\end{gathered}\tag{4.1.47}$$

Por lo tanto, el segundo y el tercer término de (4.1.46) se pueden absorber por (4.1.47). Así, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)}+\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^2\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2$$

$$+\int_0^T s^{\frac{21}{2}}\lambda^{\frac{25}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{21}{2}}e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2+\int_0^T s^9\lambda^{11}(\xi_*^1)^9e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2+\int_0^T s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{15}{2}}e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|_{H^3(\Omega)}^2$$
$$\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2$$
$$+s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2+s^2\lambda^2(\xi^i)^2(|\Delta\psi|^2+|\nabla^2\psi|^2)+|\nabla\Delta\psi|^2\big), \tag{4.1.48}$$

donde $\overline{\tilde\omega_1\cap\tilde\omega_2}\subset\subset\tilde\omega$. Ahora, tome $\hat\omega$ tal que $\tilde\omega\subset\subset\hat\omega\subset\subset\mathcal{O}$ y $\theta\in C_c^\infty(\hat\omega)$ tal que $0\le\theta\le 1$, $\theta\equiv 1$ en $\tilde\omega$. Entonces,

$$A_1^i=\iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{16}\lambda^{16}(\xi^i)^{16}e^{-2s\alpha^i}|\psi|^2\le\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{16}\lambda^{16}(\xi^i)^{16}e^{-2s\alpha^i}|\psi|^2$$
$$\lesssim\varepsilon\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\psi|^2+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{20}\lambda^{18}(\xi^i)^{18}e^{-2s\alpha^i}|\psi|^2,$$

$$A_2^i=\iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\psi|^2\le\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\psi|^2$$
$$=-\iint_{\hat\omega\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}\mathrm{div}\left(\theta(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}\nabla\psi\right)\psi$$
$$=-\iint_{\hat\omega\times(0,T)} s^{14}\lambda^{14}\nabla\left(\theta(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}\right)\cdot\nabla\psi\psi-\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}\Delta\psi\psi$$
$$\lesssim\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{15}\lambda^{15}(\xi^i)^{15}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\psi||\psi|+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}|\Delta\psi||\psi|$$
$$\lesssim\varepsilon\iint_Q s^{\frac{21}{2}}\lambda^{\frac{25}{2}}(\xi_*^i)^{\frac{21}{2}}e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla\psi|^2+\varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{11}(\xi_*^i)^9e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2$$
$$+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{\frac{39}{2}}\lambda^{\frac{35}{2}}(\xi^i)^{\frac{39}{2}}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\psi|^2,|$$

$$A_3^i=\iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\Delta\psi|^2\le\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\Delta\psi|^2$$
$$=\iint_{\hat\omega\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}\Delta\left(\theta(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}\Delta\psi\right)\psi$$
$$\lesssim\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\Delta^2\psi||\psi|+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{13}\lambda^{13}(\xi^i)^{13}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\Delta\psi||\psi|$$
$$+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}|\Delta\psi||\psi|$$
$$\lesssim\varepsilon\iint_Q s^6\lambda^8(\xi_*^i)^6e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi|^2+\varepsilon\iint_Q s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi_*^i)^{\frac{15}{2}}e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla\Delta\psi|^2$$
$$+\varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{11}(\xi_*^i)^9e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2+\iint_{\hat\omega\times(0,T)}\theta s^{19}\lambda^{17}(\xi^i)^{19}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\psi|^2,$$

$$
\begin{aligned}
A_4^i &= \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\nabla^2\psi|^2 \leq \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\nabla^2\psi|^2 \\
&= \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{12}\nabla^2 : \left(\theta(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}\nabla^2\psi\right)\psi \\
&\lesssim \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\Delta^2\psi||\psi| + \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{13}\lambda^{13}(\xi^i)^{13}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\Delta\psi||\psi| \\
&+ \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{14}(\xi^i)^{14}e^{-2s\alpha^i}|\nabla^2\psi||\psi| \\
&\lesssim \varepsilon\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i_*)^6e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi^i_*)^{\frac{15}{2}}e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&+ \varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{11}(\xi^i_*)^9e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla^2\psi|^2 + \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} s^{19}\lambda^{17}(\xi^i)^{19}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\psi|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_5^i &= \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\Delta\psi|^2 \leq \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&= -\iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\mathrm{div}\left(\theta(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\nabla\Delta\psi\right)\Delta\psi \\
&= \frac{1}{2}\iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}\Delta\left(\theta(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\right)|\Delta\psi|^2 - \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\Delta^2\psi\Delta\psi \\
&\lesssim \underbrace{\iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{12}\lambda^{12}(\xi^i)^{12}e^{-2s\alpha^i}|\Delta\psi|^2}_{A_3^i} + \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}|\Delta^2\psi||\Delta\psi| \\
&\lesssim A_3^i + \varepsilon\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i_*)^6e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi|^2 + \underbrace{\iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{12}(\xi^i)^{14}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2}_{B_5^i} \\
&\lesssim \varepsilon\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i_*)^6e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi^i_*)^{\frac{15}{2}}e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla\Delta\psi|^2 \\
&+ \varepsilon\iint_Q s^9\lambda^{11}(\xi^i_*)^9e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2 + \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{23}\lambda^{17}(\xi^i)^{23}e^{-8s\alpha^i+6s\alpha^{i*}}|\psi|^2
\end{aligned}
$$

,

$$
\begin{aligned}
B_5^i &= \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{12}(\xi^i)^{14}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2 \\
&= \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} s^{14}\lambda^{12}\Delta\left(\theta(\xi^i)^{14}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}\Delta\psi\right)\psi \\
&\lesssim \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{14}\lambda^{12}(\xi^i)^{14}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi||\psi| + \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{15}\lambda^{13}(\xi^i)^{15}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\nabla\Delta\psi||\psi| \\
&+ \iint_{\hat{\omega}\times(0,T)} \theta s^{16}\lambda^{14}(\xi^i)^{16}e^{-4s\alpha^i+2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi||\psi|
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi_*^i)^6 e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta^2\psi|^2 + \varepsilon \iint_Q s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi_*^i)^{\frac{15}{2}} e^{-2s\alpha^{i*}}|\nabla\Delta\psi|^2$$
$$+ \varepsilon \iint_Q s^9\lambda^{11}(\xi_*^i)^9 e^{-2s\alpha^{i*}}|\Delta\psi|^2 + \iint_{\hat\omega\times(0,T)} \theta s^{23}\lambda^{17}(\xi^i)^{23} e^{-8s\alpha^i+6s\alpha^{i*}}|\psi|^2.$$

Todo esto permite concluir que

$$\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2$$
$$\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat\alpha^1+6s\alpha^{1*}}|\psi|^2.$$

donde $\hat\alpha^1(t) = \max_{x\in\Omega}\alpha^1(x,t)$.

(b) Ahora, suponga que $\Big(\mathcal{O}_{1,d}\cap\mathcal{O}\Big)\cap\Big(\mathcal{O}_{2,d}\cap\mathcal{O}\Big)\neq\varnothing$ y $\Big(\mathcal{O}_{1,d}\cap\mathcal{O}\Big)\backslash\Big(\mathcal{O}_{2,d}\cap\mathcal{O}\Big)\neq\varnothing$. En este caso, podemos tomar $\omega_1\cap\mathcal{O}_{2,d}=\varnothing$ y $\omega_2\subset\subset\mathcal{O}_{1,d}$. Considere, $h=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2$. Entonces, la tupla (ψ,γ_1,h) satisface el sistema

$$\begin{cases} -\psi_t+\Delta^2\psi+a\psi = \alpha_1\gamma_1(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}-\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}) + h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } Q,\\ \gamma_{1,t}+\Delta^2\gamma_1+a\gamma_1=0 & \text{en } Q,\\ h_t+\Delta^2 h+ah=0 & \text{en } Q,\\ \psi=\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\quad \gamma_1=0,\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial n}=\frac{1}{\mu_1}\rho_1\Delta\psi,\quad h=0,\ \frac{\partial h}{\partial n}=\sum_{i=1}^2\frac{\alpha_i}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi & \text{sobre } \Sigma,\\ \psi(\cdot,T)=\psi_T,\ \gamma_1(\cdot,0)=0,\ h(\cdot,0)=0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando el teorema 2.5.3 a γ_1 y h, de modo que

$$\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 \lesssim \iint_\Sigma s^5\lambda^5(\xi_*^1)^5e^{-2s\alpha^{1*}}\left|\frac{1}{\mu_1}\rho_1\Delta\psi\right|^2 + \iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^1)^7e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2, \tag{4.1.49}$$

y

$$\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6e^{-2s\alpha^2}|h|^2 \lesssim \sum_{i=1}^2\iint_\Sigma s^5\lambda^5(\xi_*^i)^5e^{-2s\alpha^{i*}}\left|\frac{\alpha_i}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi\right|^2 + \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^2)^7e^{-2s\alpha^2}|h|^2. \tag{4.1.50}$$

Tomando $\tilde\omega_i$ de modo que $\omega_1\subset\subset\tilde\omega_1\subset\subset\mathcal{O}_{1,d}\backslash\overline{\mathcal{O}_{2,d}}$ y $\omega_2\subset\subset\tilde\omega_2\subset\subset\mathcal{O}_{2,d}$, localmente se satisface lo siguiente:

$$\begin{cases} -\psi_t+\Delta^2\psi+a\psi=\alpha_1\gamma_1 & \text{en } \tilde\omega_1\times(0,T),\\ -\psi_t+\Delta^2\psi+a\psi=h & \text{en } \tilde\omega_2\times(0,T),\\ \gamma_{1,t}+\Delta^2\gamma_1+a\gamma_1=0 & \text{en } \tilde\omega_1\times(0,T),\\ h_t+\Delta^2h+ah=0 & \text{en } \tilde\omega_2\times(0,T). \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega_1\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^i)^7 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \iint_{\omega_2\times(0,T)} s^7\lambda^8(\xi^2)^7 e^{-2s\alpha^2}|h|^2\\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^2}|h|^2 \qquad (4.1.51)\\
&+\sum_{i=1}^2 \iint_{\tilde\omega_i\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2\\
&+ s^2\lambda^2(\xi^i)^2(|\Delta\psi|^2+|\nabla^2\psi|^2) + |\nabla\Delta\psi|^2\big).
\end{aligned}$$

Utilizando (4.1.41), para λ suficientemente grande, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \iint_{\Omega\setminus\mathcal{O}_0\times(0,T)} s^6\lambda^6(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\Lambda\gamma_i|^2 &\lesssim \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_2|^2\\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \varepsilon \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^1}|h|^2, \qquad (4.1.52)
\end{aligned}$$

donde se usó que $|\gamma_2|^2 \le \frac{1}{\alpha_2^2}|h|^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}|\gamma_1|^2$. Con esto, (4.1.40), (4.1.51) y (4.1.52), además de $\overline{\omega_1\cup\omega_2} \subset\subset \tilde\omega \subset\subset \mathcal{O}$ implican que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^2}|h|^2\\
&\lesssim \sum_{i=1}^2 \iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2 \qquad (4.1.53)\\
&+ s^2\lambda^2(\xi^i)^2\left(|\Delta\psi|^2+|\nabla^2\psi|^2\right) + |\nabla\Delta\psi|^2\big) + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\\
&+ \frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^4\lambda^4(\xi^1_*)^4 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)} + \frac{1}{\boldsymbol{\mu}}\int_0^T s^6\lambda^6(\xi^1_*)^6 e^{-2s\alpha^{2*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Del mismo modo que en el caso anterior, se agregará una norma H^4 de ψ al lado izquierdo de la desigualdad. Para ello, considere

$$\overline{\psi} = \rho\psi, \quad \overline{\gamma}_1 = \rho\gamma_1, \quad \overline{h} = \rho h,$$

con $\rho(t) = e^{-s\alpha^{i*}}(\xi^i_*)^{2-\frac{1}{m}}$, los que satisfacen

$$\begin{cases}
-\overline{\psi}_t + \Delta^2\overline{\psi} + a\overline{\psi} = -\rho'\psi + \alpha_1\overline{\gamma}_1(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} - \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}) + \overline{h}\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} & \text{en } Q,\\
\overline{\gamma}_{1,t} + \Delta^2\overline{\gamma}_1 + a\overline{\gamma}_1 = \rho'\gamma_1 & \text{en } Q,\\
\overline{h}_t + \Delta^2\overline{h} + a\overline{h} = \rho' h & \text{en } Q,\\
\overline{\psi} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n} = 0, \quad \overline{\gamma}_1 = 0,\ \frac{\partial\overline{\gamma}_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_1}\rho_1\Delta\overline{\psi}, \quad \overline{h} = 0,\ \frac{\partial\overline{h}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{\mu_i}\rho_i\Delta\overline{\psi} & \text{sobre } \Sigma,\\
\overline{\psi}(\cdot,T) = 0, \quad \overline{\gamma}_1(\cdot,0) = 0, \quad \overline{h}(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega.
\end{cases}$$

En consecuencia,

$$\int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)} \lesssim \int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^{8+\frac{2}{m}} e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\gamma_1\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6 e^{-2s\alpha^{1*}}\|h\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Junto con desigualdades de interpolación, que permiten añadir las siguientes normas:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T s^{\frac{21}{2}}\lambda^{\frac{25}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{21}{2}} e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)},\\
&\int_0^T s^9\lambda^{11}(\xi_*^1)^9 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)},\\
&\int_0^T s^{\frac{15}{2}}\lambda^{\frac{19}{2}}(\xi_*^1)^{\frac{15}{2}} e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)},
\end{aligned} \tag{4.1.54}$$

se pueden absorber los últimos dos términos del lado derecho de (4.1.53), de modo que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \int_0^T s^6\lambda^8(\xi_*^1)^6 e^{-2s\alpha^{1*}}\|\psi\|^2_{H^4(\Omega)} + \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2\\
&+ \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^2}|h|^2 \lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2\\
&+ \sum_{i=1}^2 \iint_{\tilde\omega\times(0,T)} s^{10}\lambda^{10}(\xi^i)^{10}e^{-2s\alpha^i}\big(s^6\lambda^6(\xi^i)^6|\psi|^2 + s^4\lambda^4(\xi^i)^4|\nabla\psi|^2\\
&+ s^2\lambda^2(\xi^i)^2\left(|\Delta\psi|^2+|\nabla^2\psi|^2\right) + |\nabla\Delta\psi|^2\big).
\end{aligned} \tag{4.1.55}$$

Realizando el mismo procedimiento que en (a), se pueden absorber los términos de mayores derivadas de ψ del lado derecho, de modo que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^1)^6 e^{-2s\alpha^1}|\gamma_1|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8(\xi^2)^6 e^{-2s\alpha^2}|h|^2\\
&\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat\alpha_1+6s\alpha^{1*}}|\psi|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.56}$$

Usando que $\gamma_2 = \frac{1}{\alpha_2}h - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\gamma_1$, podemos incluir una norma de γ_2 al lado izquierdo de (4.1.56), de modo que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2 + \sum_{i=1}^2\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6 e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2\\
&\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat\alpha_1+6s\alpha^{1*}}|\psi|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.57}$$

Finalmente, para añadir la condición inicial de ψ, considere los nuevos pesos

$$\overline{\alpha}^i(x,t) = \frac{e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta^i\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta^i\|_\infty+\eta^i(x))}}{\ell(t)^m}, \quad \overline{\xi}^i(x,t) = \frac{e^{\lambda(k\|\eta^i\|_\infty+\eta^i(x))}}{\ell(t)^m}, \quad i=1,2, \tag{4.1.58}$$

con

$$\ell(t)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{T^2}{4} & t\in\left[0,\frac{T}{2}\right],\\ t(T-t) & t\in\left[\frac{T}{2},T\right].\end{array}\right.$$

Primero, recuerde que ψ satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(0,T)}+\|\Delta\psi\|^2_{L^2(0,T/2;\,L^2(\Omega))}\\&\qquad\lesssim\|\psi\|^2_{L^2(0,3T/4;\,L^2(\Omega))}+\frac{1}{T}\|\psi\|^2_{L^2(T/2,3T/4;\,L^2(\Omega))}+\|h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}\|^2_{L^2(0,3T/4;\,L^2(\Omega))^2}.\end{aligned}\tag{4.1.59}$$

Como consecuencia de la definición de los nuevos pesos, (4.1.59) implica la siguiente desigualdad en $\Omega\times\left(0,\frac{T}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\iint_{\Omega\times(0,\frac{T}{2})}e^{-2s\overline{\alpha}^1}s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}|\psi|^2+\iint_{\Omega\times(0,\frac{T}{2})}e^{-2s\overline{\alpha}^1}s^9\lambda^{11}(\overline{\xi}^1_*)^9|\Delta\psi|^2\\&\leq C\Bigg(\iint_{\Omega\times(0,\frac{3T}{4})}s^6\lambda^8(\overline{\xi}^1)^6e^{-2s\overline{\alpha}^2}|\alpha_1\gamma_1(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}-\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})|^2+\iint_{\Omega\times(0,\frac{3T}{4})}s^6\lambda^8(\overline{\xi}^2)^6e^{-2s\overline{\alpha}^2}|h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}|^2\\&+\iint_{\Omega\times(0,\frac{3T}{4})}s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2+\frac{1}{T}\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},\frac{3T}{4})}s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2\Bigg).\end{aligned}\tag{4.1.60}$$

y como $\alpha=\overline{\alpha}$ y $\xi=\overline{\xi}$ en $\Omega\times\left(\frac{T}{2},T\right)$, se cumple lo siguiente,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2+\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}s^9\lambda^{11}(\overline{\xi}^1_*)^9e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\Delta\psi|^2\\&\lesssim\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\xi^1)^{12}e^{-2s\alpha^1}|\psi|^2+\int_0^T s^9\lambda^{11}(\xi^1_*)^9e^{-2s\alpha^{1^*}}\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

usando la desigualdad (4.1.56), se tiene que

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi})^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2+\iint_{\Omega\times(\frac{T}{2},T)}s^9\lambda^{12}(\overline{\xi}^1)^9e^{-2s\overline{\alpha}}|\Delta\psi|^2\\&\lesssim\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat{\alpha}_1+6s\alpha^{1^*}}|\psi|^2.\end{aligned}\tag{4.1.61}$$

Luego, juntando las desigualdades (4.1.60) y (4.1.61) y usando nuevamente (4.1.56), se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2+\iint_Q s^9\lambda^{11}(\overline{\xi}^1_*)^9e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\Delta\psi|^2\\&\lesssim\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat{\alpha}_1+6s\alpha^{1^*}}|\psi|^2.\end{aligned}$$

Así, usando también (4.1.57), se concluye la siguiente desigualdad:

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\iint_Q s^{12}\lambda^{14}(\overline{\xi}^1)^{12}e^{-2s\overline{\alpha}^1}|\psi|^2+\sum_{i=1}^2\iint_Q s^6\lambda^8(\xi^i)^6e^{-2s\alpha^i}|\gamma_i|^2$$

$$\lesssim \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} s^{23}\lambda^{18}(\xi^1)^{23}e^{-8s\hat{\alpha}_1+6s\alpha^{1^*}}|\psi|^2.$$

Finalmente, argumentando como en el capítulo 3, se deduce la desigualdad (4.1.11)

4.2. El caso semilineal

Ahora, considere $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. En esta sección se demostrará el teorema (4.0.2), usando argumentos clásicos de punto fijo como los descritos en [3, 1, 24, 4].

4.2.1. Caracterización de cuasi-equilibrios de Nash y el sistema de optimalidad

Recordemos que, con el cambio $z = y - \overline{y}$, se trabajará sobre el sistema

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az = G(x,t;z)z + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ z = 0,\ \frac{\partial z}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$G(x,t;z) = \int_0^1 F'(\overline{y} + \tau z)\, d\tau.$$

Dada la definición 4.0.1 y la forma de los funcionales (4.0.2), se tiene que (v_1, v_2) es un cuasi-equilibrio de Nash si y sólo si

$$\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (z - z_{i,d})\hat{w}_i\, dx\, dt + \mu_i \iint_{S_i\times(0,T)} v_i\hat{v}_i\, d\sigma\, dt = 0, \quad \forall \hat{v}_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 1,2 \tag{4.2.1}$$

donde $\hat{w}_i$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \hat{w}_{i,t} + \Delta^2 \hat{w}_i + a\hat{w}_i = F'(\overline{y} + z)\hat{w}_i & \text{en } Q, \\ \hat{w}_i = 0,\ \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial n} = \rho_i v_i & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{w}_i(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

cuyo sistema adjunto es

$$\begin{cases} -\phi_{i,t} + \Delta^2 \phi_i + a\phi_i = F'(\overline{y} + z)\phi_i + \alpha_i(z - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ \phi_i = 0,\ \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi_i(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Por (4.2.1), se deduce entonces que

$$\iint_{S_i\times(0,T)} (-\rho_i\Delta\phi_i + \mu_i v_i)\,\hat{v}_i\,d\sigma\,dt = 0, \quad \forall \hat{v}_i \in \mathcal{H}_i$$

por lo que los seguidores quedan caracterizados de la siguiente forma:

$$v_i = \frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\phi_i, \quad i = 1, 2.$$

En consecuencia, el sistema de optimalidad es el siguiente:

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + az = G(z)z + f^z\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ -\phi_{i,t} + \Delta^2\phi_i + a\phi_i = F'(\overline{y}+z)\phi_i + \alpha_i(z - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ z = 0,\ \frac{\partial z}{\partial n} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\phi_i, \quad \phi_i = 0\ \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z_0, \quad \phi(\cdot,T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Para realizar el argumento de punto fijo, considere, para cada $z \in L^2(Q)$, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} w^z_t + \Delta^2 w^z + aw^z = G(z)w^z + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ -\phi^z_{i,t} + \Delta^2\phi^z_i + a\phi^z_i = F'(\overline{y}+z)\phi^z_i + \alpha_i(w^z - z_{i,d})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ w^z = 0,\ \frac{\partial w^z}{\partial n} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\phi^z_i, \quad \phi^z_i = 0\ \frac{\partial\phi^z_i}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w^z(\cdot,0) = z_0, \quad \phi^z_i(\cdot,T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Argumentando como en la Proposición 4.1.2 y de la observación 4.1.18, se deduce que existe $C > 0$ tal que

$$\|w^z\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|w^z_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \le C\left(1 + \|f^z\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\right). \tag{4.2.4}$$

Además, como $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, existe $\mathcal{M} > 0$ tal que

$$|G(x,t,s)| + |F'(s)| \le \mathcal{M}, \tag{4.2.5}$$

por lo que, para cada $z \in L^2(Q)$, $G(z)$, $F'(\overline{y}+z) \in L^\infty(Q)$.

Por otro lado, el sistema adjunto a (4.2.3) es el siguiente

$$\begin{cases} -\psi^z_t + \Delta^2\psi^z + a\psi^z = G(z)\psi^z + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\gamma^z_i\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{en } Q, \\ \gamma^z_{i,t} + \Delta^2\gamma^z_i + a\gamma^z_i = F'(\overline{y}+z)\gamma^z_i & \text{en } Q, \\ \psi^z = 0,\ \frac{\partial\psi^z}{\partial n} = 0, \quad \gamma^z_i = 0\ \frac{\partial\gamma^z_i}{\partial n} = \frac{1}{\mu_i}\rho_i\Delta\psi^z & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi^z(\cdot,T) = \psi_T, \quad \gamma^z_i(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

bajo la identidad

$$\int_\Omega \psi_T w^z(\cdot,T) = \int_\Omega \psi^z(\cdot,0) z_0 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi^z - \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \alpha_i z_{i,d} \gamma_i^z.$$

En consecuencia, se obtendrá la controlabilidad nula del problema (4.2.3) si y sólo si

$$\int_\Omega \psi^z(\cdot,0) z_0 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi^z - \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \alpha_i z_{i,d} \gamma_i^z = 0, \quad \forall \psi_T \in L^2(\Omega).$$

Del mismo modo que en el caso lineal, se tendrá la igualdad anterior si se satisface la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\|\psi^z(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \zeta^{-2} |\gamma_i^z|^2 \, dx\, dt \le C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi^z|^2 \, dx\, dt. \tag{4.2.7}$$

Gracias a la Proposición 4.1.3, la desigualdad (4.2.7) se satisface y, por la observación 4.1.1, existe $R > 0$ tal que

$$\|f^z\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \le R, \tag{4.2.8}$$

donde f^z es un control tal que $w^z(\cdot,T) = 0$.

Para finalizar, considere el mapeo $\Lambda : L^2(Q) \to L^2(Q)$ tal que $\Lambda(z) = w^z$ para cada $z \in L^2(\Omega)$. Nótese que, debido a (4.2.5) y que w^z depende continuamente de z, Λ es un mapeo continuo.

$$K = \left\{ u \in W(Q) : \|u\|^2_{W(Q)} \le C(1 + R^2) \right\}$$

Por *Teorema de Compacidad de Aubin-Lions*, K es un conjunto compacto y convexo de $L^2(Q)$, de modo que $\Lambda : K \to K$ es un mapeo continuo. En consecuencia, por *Teorema de Punto Fijo de Schauder*, Λ posee un punto fijo $\Lambda(z) = z$. Por lo tanto, el sistema (4.2.2) es controlable a cero en tiempo T.

Capítulo 5

Conclusiones y discusión

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo, así como posibles trabajos futuros.

5.1. Control Insensibilizante

En este capítulo se extendieron los resultados obtenidos por K. Kassab en [21]. En particular, se abordó el siguiente problema:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay + B \cdot \nabla y + D : \nabla^2 y = f + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Se establecieron resultados de existencia de controles v insensibilizantes para funcionales de observación de primer y segundo orden respecto al estado del sistema, representados por

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla y|^2 \, dx \, dt, \tag{5.1.2}$$

$$\Phi_2(y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\nabla^2 y|^2 \, dx \, dt, \tag{5.1.3}$$

$$\Phi_3(y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\Delta y|^2 \, dx \, dt. \tag{5.1.4}$$

Por un lado, en el Teorema 3.1.1 se demostró la propiedad insensibilizante para Φ_1 cuando los potenciales del problema (5.1.1) son suficientemente regulares. Por otro lado, el Teorema 3.2.1 establece también la existencia de dichos controles para Φ_2 y Φ_3. La estrategia para la demostración de estos teoremas se basa en el uso de desigualdades de Carleman para obtener la controlabilidad nula de un problema en cascada, cuya propiedad es equivalente a la insensibilización del sistema (5.1.1).

Finalmente, se presentaron los Teoremas 3.1.2 y 3.2.2, donde se estableció la no existencia de controles insensibilizantes para el sistema (5.1.1) cuando los potenciales no satisfacen las condiciones de regularidad suficientes.

Una variación interesante del problema presentado y que podría formar parte de un trabajo futuro es considerar la acción de controles frontera en la ecuación (5.1.1), o también considerar funcionales de observación definidos sobre una sección del borde del dominio. Sin embargo, incluso para la ecuación del calor, parece difícil aplicar exactamente las mismas técnicas presentadas en esta tesis. Esto pues usar el acoplamiento de las ecuaciones del sistema en cascada parece ser más complicado que en el caso distribuido.

5.2. Control Jerárquico

En este capítulo se abordó un caso alternativo al estudiado por You y Li en [24], teniendo como base los trabajos de Araruna et al. [3, 2, 1]. Se analizó el siguiente problema:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y = 0,\ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

con el objetivo de establecer la existencia de controles f, v_1, v_2 que siguen una estrategia Stackelberg-Nash bajo la controlabilidad a trayectorias del problema.

Se obtuvieron dos principales resultados. El Teorema 4.0.1 establece la existencia de estos controles para el caso lineal ($F = 0$) de (5.2.1), utilizando estimaciones de Carleman sobre los estados adjuntos de un sistema acoplado. Posteriormente, el Teorema 4.0.2 extiende este resultado para el caso semilineal cuando F es una función globalmente Lipschitz mediante un argumento de punto fijo.

Vale la pena señalar que se estudió la posibilidad de incluir controles seguidores en la condición Dirichlet:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + f\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y = \rho_1 v_1,\ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_2 v_2 & \text{sobre } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Sin embargo, bajo el método utilizado, se identificó una limitación técnica con las desigualdades de Carleman disponibles 2.5.2 y 2.5.3. En particular, esta dificultad aparece por la diferencia entre los pesos de la norma L^2 (s^6) y los pesos de la observación (s^7) en la desigualdad. Esto contrasta con el caso unidimensional, donde los pesos presentes en estos términos son los mismos (s^7). De hecho, el problema (4.1.45) en el caso unidimensional ya está estudiado en [8, 9], donde se establece este resultado de controlabilidad jerárquica para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

Finalmente, se quiere estudiar el siguiente problema con líderes frontera y seguidores distribuidos:

$$\begin{cases} y_t + \Delta^2 y + ay = F(y) + v_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{en } Q \\ y = \rho_1 f_1, \ \frac{\partial y}{\partial n} = \rho_2 f_2 & \text{sobre } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Para abordar este problema siguiendo una estrategia Stackelberg-Nash, será necesario disponer de una nueva desigualdad de Carleman con observaciones frontera, análoga a la del Teorema 2.5.2. Este es aún un problema abierto que será abordado en un trabajo futuro.

5.3. Comentarios finales

Adicionalmente a los resultados obtenidos, se desarrolló una generalización de la estimación de Carleman no homogéneo establecido por K. Kassab en [20]. También se recopiló y mejoró el resultado obtenido por You y Li en [23].

En trabajos futuros se buscará establecer una desigualdad de Carleman con observaciones frontera para una ecuación parabólica de cuarto orden en dimensión espacial superior a uno, análoga al resultado obtenido por Guerrero y Kassab en [18]. Una estimación de este tipo es de alta relevancia en el área, con aplicaciones tanto en problemas de control como en problemas inversos, sobretodo en sistemas de ecuaciones que involucren ecuaciones parabólicas de cuarto orden con controles frontera.

Finalmente, resulta también de interés extender el estudio a problemas de control bajo otras condiciones de borde. Por ejemplo, un caso relevante por su aplicación física es aquel con condiciones $\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial \Delta y}{\partial n} = 0$, como en el problema de crecimiento epitaxial (1.1.2). Bajo nuestro conocimiento, este aún permanece abierto y es difícil de abordar, como se menciona en [18].

Apéndice A

En esta sección se presenta la demostración de la Proposición 2.5.3, siguiendo las ideas presentadas en [20, 23].

Considere los pesos definidos en (2.5.4). Para la demostración, se requerirá del siguiente lema:

Lema A.1 (Lema 2.10 Kassab [20])**.** *Sean $\mu > 0, \gamma \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $g \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_{\partial\Omega} e^{2s\alpha}\xi^{-\gamma}|g|^2 \lesssim \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\int_\Omega s\lambda\xi^{-\gamma+1}e^{2s\alpha}|g|^2 + \mu\int_\Omega s^{-1}\lambda^{-1}\xi^{-\gamma-1}e^{2s\alpha}|\nabla g|$$

Demostración. Primero, considere $\tilde{B} = 0$ y $\tilde{D} = 0$. Vea a q como solución por transposición. Esto es, considere $q \in L^2(Q)$ como el único elemento que satisface

$$\begin{aligned}&\iint_Q \left(w_t + \Delta^2 w + aw + B\cdot\nabla w + D : \nabla^2 w\right) q \\ &= \iint_Q F_0 w + \iint_Q F_1\cdot\nabla w + \iint_Q \hat{F} : \nabla^2 w + \iint_\Sigma f_0 \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + \iint_\Sigma \tilde{f}\Delta w + \int_\Omega q(\cdot,T)w(\cdot,T)\end{aligned} \tag{A.1}$$

para w solución fuerte del problema

$$\begin{cases} w_t + \Delta^2 w + aw + B\cdot\nabla w + D : \nabla^2 w = s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}q - v\mathbf{1}_{\omega'} & \text{en } Q,\\ w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ w(0,\cdot) = 0 & \text{en } \Omega,\end{cases}$$

Se busca un control $v \in L^2(\omega' \times (0,T))$ tal que $w(\cdot,T) = 0$. Para ello, defina $E_0 = \left\{z \in C^\infty(\overline{Q}) :\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0,\ \text{ in } \Sigma\right\}$,

$$\begin{aligned} Pz &= z_t + \Delta^2 z + az - \nabla\cdot(Bz) + \nabla^2 : (Dz)\\ P^* z &= -z_t + \Delta^2 z + az + B\cdot\nabla z + D : \nabla^2 z\end{aligned}$$

y la forma bilineal

$$\kappa(q_1,q_2)=\int_Q e^{-2s\alpha}P(q_1)P(q_2)+\int_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}q_1q_2$$

junto con

$$\ell(q_2)=\int_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}qq_2$$

para $q_1,q_2\in E=\overline{E_0}^{\kappa(\cdot,\cdot)^{1/2}}$. Note que $\kappa(\cdot,\cdot)^{1/2}$ efectivamente es una norma en E gracias a la desigualdad de Carleman de la proposición 2.5.2. Luego, por Teorema de Lax-Milgram, existe un único $\hat{q}\in E$ tal que

$$\kappa(\hat{q},q_2)=\ell(q_2)\quad \forall q_2\in E$$

Tomando $w=e^{-2s\alpha}P(\hat{q})$ y $v=-s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}\hat{q}\mathbf{1}_{\omega'}$, tenemos que el par (w,h) es solución del problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} w_t+\Delta^2w+aw+B\cdot\nabla w+D:\nabla^2w=s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}q-v\mathbf{1}_{\omega'} & \text{en } Q,\\ w=\frac{\partial w}{\partial n}=0 & \text{sobre } \Sigma,\\ w(0,\cdot)=0\to w(T,\cdot)=0 & \text{en } \Omega, \end{cases}\tag{A.2}$$

satisfaciéndose que

$$\iint_Q P^*(w)q_2=\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}qq_2+\iint_{\omega'\times(0,T)} vq_2\quad \forall q_2\in E$$

Evaluando en $q_2=\hat{q}$ y usando la continuidad de ℓ, se puede deducir la siguiente desigualdad:

$$\iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2+\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2\lesssim\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2\tag{A.3}$$

Usando el multiplicador $s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}w$ en $(A.2)_1$, se tendrá la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{-2s\alpha}\Delta^2ww=&-\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}ww_t-\iint_Q as^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|w|^2\\ &+\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}\nabla\cdot(Bw)w-\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}\nabla^2:(Dw)w\\ &+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2qw-\iint_{\omega\times(0,T)} s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}vw\end{aligned}\tag{A.4}$$

Nótese las siguientes cotas:

1.

$$\begin{aligned}\left|\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}ww_t\right|&=\left|-\frac{1}{2}\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\partial_t(\xi^{-4}e^{2s\alpha})|w|^2\right|\\ &\lesssim\iint_Q s^{-3+\frac{1}{m}}\lambda^{-4}\xi^{-3+\frac{1}{m}}e^{2s\alpha}|w|^2\end{aligned}$$

2.

$$\left|\iint_Q as^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|w|^2\right| \leq \|a\|_\infty \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|w|^2$$

3.

$$\begin{aligned}\left|\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}B\cdot\nabla ww\right| &\lesssim \|B\|_\infty \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla w||w| \\ &\lesssim \|B\|_\infty \left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|w|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\left|\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}D\nabla^2 ww\right| &\lesssim \|D\|_\infty \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w||w| \\ &\lesssim \|D\|_\infty \left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|w|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2\right)\end{aligned}$$

5.

$$\left|\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 wq\right| \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|w|^2$$

6.

$$\left|\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}vw\right| \lesssim \iint_Q s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2 + \iint_Q s^{-1}\lambda^{-1}e^{2s\alpha}|w|^2$$

y que

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}\Delta^2 ww &= \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\Delta\left(\xi^{-4}e^{2s\alpha}w\right)\Delta w \\ &= \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + 2\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\nabla(\xi^{-4}e^{2s\alpha})\nabla w\Delta w \\ &+ \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\Delta(\xi^{-4}e^{2s\alpha})w\Delta w\end{aligned} \tag{A.5}$$

Usando (A.3)-(A.5), se puede deducir la siguiente cota para Δw:

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 &\lesssim \iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2 + \iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\ &+ \varepsilon\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2 \\ &+ \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2\end{aligned}$$

Usando además que

$$\iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \lesssim \iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2$$

y tomando ε pequeño, se obtiene la cota

$$\iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2$$

Usando la equivalencia de normas $\|z\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta z\|^2_{L^2(\Omega)}$ con $z = s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{s\alpha}w \in H^2_0(\Omega)$, todo lo anterior implica que

$$\begin{aligned}&\iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2 + \iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\ &+ \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2 + \iint_Q s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2\end{aligned} \tag{A.6}$$

Para estimar los términos de borde de (A.1), se usará el lema A.1, de modo que

$$\iint_\Sigma s^{-7}\lambda^{-7}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 \lesssim \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta w|^2$$

$$\iint_\Sigma s^{-5}\lambda^{-5}\xi^{-5}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 \lesssim \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2$$

Por lo que se necesitarán cotas para los términos del lado derecho de las desigualdades anteriores. Para ello, se usará el multiplicador $s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}w_t$ en $(\text{A.2})_1$, teniéndose la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 = &-\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{-2s\alpha}\Delta^2 w w_t - \iint_Q a s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}w w_t \\ &- \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}B\cdot\nabla w w_t - \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}D : \nabla^2 w w_t \\ &+ \iint_Q s^{-2}\xi^{-2}q w_t - \iint_{\omega\times(0,T)} s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}v w_t\end{aligned} \tag{A.7}$$

Nótese las siguientes cotas:

1.

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}w_t\Delta^2 w &= \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\Delta(\xi^{-8}e^{2s\alpha}w_t)\Delta w \\ &= \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\Delta(\xi^{-8}e^{2s\alpha})w_t\Delta w + 2\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\nabla(\xi^{-8}e^{2s\alpha})\nabla w_t\Delta w \\ &+ \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta w_t\Delta w\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\Delta(\xi^{-8}e^{2s\alpha})w_t\Delta w - 2\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\nabla(\xi^{-8}e^{2s\alpha})\nabla\Delta w w_t \\
&- \frac{1}{2}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\partial_t(\xi^{-8}e^{2s\alpha})|\Delta w|^2 \\
&\lesssim \varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 \\
&+ \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

2.

$$
\left|\iint_Q a s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}ww_t\right| \lesssim \|a\|_\infty \left(\varepsilon\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w|^2\right) \tag{A.9}
$$

3.

$$
\left|\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}B\cdot\nabla w w_t\right| \lesssim \|B\|_\infty \left(\varepsilon\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) \tag{A.10}
$$

4.

$$
\left|\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}D:\nabla^2 w w_t\right| \lesssim \|D\|_\infty \left(\varepsilon\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2\right) \tag{A.11}
$$

5.

$$
\left|\iint_Q s^{-2}\xi^{-2}qw_t\right| \lesssim \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^{-10}\lambda^{-8}\xi^{-10}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \tag{A.12}
$$

6.

$$
\left|\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}vw_t\right| \lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2 + \iint_Q s^{-9}\lambda^{-8}\xi^{-9}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \tag{A.13}
$$

y tomando ε pequeño y s, λ grandes, de (A.7)-(A.13) se obitiene la siguiente desigualdad

$$
\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \lesssim \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 + \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 \tag{A.14}
$$

Por otro lado, usando el multiplicador $-s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w$ se tiene lo siguiente

$$
\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{-2s\alpha}\Delta^2 w\Delta w = -\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w w_t - \iint_Q a s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}w\Delta w \tag{A.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha} B\cdot\nabla w\Delta w - \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha} D:\nabla^2 w\Delta w\\
&+ \iint_Q \lambda^2 q\Delta w - \iint_{\omega\times(0,T)} s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha} v\Delta w
\end{aligned}
$$

Se usarán ahora las siguientes cotas:

1. $$\left|\iint_Q -s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w w_t\right| \lesssim \varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2$$

2. $$\left|\iint_Q -as^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w w\right| \lesssim \|a\|_\infty \left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w|^2\right)$$

3. $$\left|\iint_Q -s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w B\cdot\nabla w\right| \lesssim \|B\|_\infty \left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right)$$

4. $$\left|\iint_Q -s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w D:\nabla^2 w\right| \lesssim \|D\|_\infty \left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2\right)$$

junto con

$$
\begin{aligned}
\iint_Q -s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w\Delta^2 w &= \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\nabla(\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w)\nabla\Delta w - \iint_\Sigma s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w\frac{\partial\Delta w}{\partial n}\\
&= \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\nabla(\xi^{-6}e^{2s\alpha})\Delta w\nabla\Delta w\\
&- \iint_\Sigma s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w\frac{\partial\Delta w}{\partial n}
\end{aligned}
$$

y que

$$
\begin{aligned}
\left|\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\nabla(\xi^{-6}e^{2s\alpha})\Delta w\nabla\Delta w\right| &\lesssim \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2\\
\left|-\iint_\Sigma s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}\Delta w\frac{\partial\Delta w}{\partial n}\right| &\lesssim \iint_\Sigma s^{-5}\lambda^{-5}\xi^{-5}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \varepsilon\iint_\Sigma s^{-7}\lambda^{-7}\xi^{-7}|\nabla\Delta w|^2
\end{aligned}
$$

se obtiene la siguiente cota

$$\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 \lesssim \varepsilon\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2$$

$$+\varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta w|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2$$

tomando ε pequeño y usando la cota obtenida previamente sobre el término con w_t (A.14), se tendrá que

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 + \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 &\lesssim \varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta w|^2 \\ &+ \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2\end{aligned}$$

Así, solo basta obtener una cota sobre las cuartas derivadas para deducir el resultado. Para ello, considere $z = s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{s\alpha}w$, y el problema elíptico

$$\begin{cases} \zeta = \Delta^2 z \\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Por regularidad elíptica, se cumple que

$$\|\zeta\|^2_{L^2(Q)} \geq \|z\|^2_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} \tag{A.16}$$

donde

$$\begin{aligned}\zeta &= s^{-4}\lambda^{-4}\Delta^2(\xi^{-4}e^{s\alpha})w + 4s^{-4}\lambda^{-4}\nabla\Delta(\xi^{-4}es\alpha)\nabla w \\ &+ 2s^{-4}\lambda^{-4}\Delta(\xi^{-4}e^{s\alpha})\Delta w + 4s^{-4}\lambda^{-4}\nabla^2(\xi^{-4}e^{s\alpha}) : \nabla^2 w \\ &+ 4s^{-4}\lambda^{-4}\nabla(\xi^{-4}e^{s\alpha})\nabla\Delta w + s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{s\alpha}\Delta^2 w\end{aligned}$$

por lo que usando todas las cotas previamente obtenidas, podemos deducir de (A.16) que

$$\begin{aligned}\|s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{s\alpha}w\|^2_{L^2(H^4)} &\lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 \\ &+ \varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta w|^2\end{aligned}$$

Usando el multiplicador $s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w$ en $(A.2)_1$, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{-2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 &= -\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w w_t - \iint_Q as^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w w \\ &- \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}B\cdot\nabla w\Delta^2 w - \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}D : \nabla^2 w\Delta^2 w \\ &+ \iint_Q s^{-2}\xi^{-2}q\Delta^2 w - \iint_{\omega\times(0,T)} s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}v\Delta^2 w\end{aligned} \tag{A.17}$$

Junto con las cotas:

1.

$$\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w w_t \lesssim \varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \tag{A.18}$$

2.

$$\iint_Q a s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w w \lesssim \|a\|_\infty \left(\varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w|^2\right) \tag{A.19}$$

3.

$$\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w B\cdot\nabla w \lesssim \|B\|_\infty \left(\varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) \tag{A.20}$$

4.

$$\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\Delta^2 w D:\nabla^2 w \lesssim \|D\|_\infty \left(\varepsilon \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2\right) \tag{A.21}$$

5 .

$$\iint_Q s^{-2}\xi^{-2}q\Delta^2 w \lesssim \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^{-10}\lambda^{-8}\xi^{-10}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 \tag{A.22}$$

6.

$$\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}v\Delta^2 w \lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{-2s\alpha}|v|^2 + \iint_Q s^{-9}\lambda^{-8}\xi^{-9}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 \tag{A.23}$$

Tomando ε pequeño y s, λ grandes, de (A.17)-(A.23) se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\Delta^2 w|^2 &\lesssim \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \qquad \text{(A.24)}\\ &\lesssim \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 + \varepsilon\iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|\nabla\nabla\Delta w|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ε pequeño,

$$\|s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{s\alpha}w\|^2_{L^2(H^4)} \lesssim \iint_Q s^{6}\lambda^{8}\xi^{6}e^{-2s\alpha}|q|^2 \tag{A.25}$$

En resumen, de (A.3), (A.6), (A.14), (A.24) y (A.25), se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2 + \iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + \iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}\|w\|_{H^2}^2 \\
&+ \iint_Q s^{-6}\lambda^{-6}\xi^{-6}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}\|w\|_{H^4}^2 + \iint_Q s^{-8}\lambda^{-8}\xi^{-8}e^{2s\alpha}|w_t|^2 \\
&+ \iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2 + \iint_\Sigma s^{-5}\lambda^{-5}\xi^{-5}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2 + \iint_\Sigma s^{-7}\lambda^{-7}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2 \\
&\leq C(\|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty) \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

Utilizando w en (A.1),

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2 &= \iint_{\omega'\times(0,T)} qh + \iint_Q F_0 w + \iint_Q F_1\cdot\nabla w + \iint_Q \hat{F} : \nabla^2 w + \iint_\Sigma f_0\frac{\partial\Delta w}{\partial n} + \iint_Q \tilde{f}\Delta w \\
&\leq \left(\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|q|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\omega'\times(0,T)} s^{-7}\lambda^{-8}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_Q e^{2s\alpha}|w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\iint_Q s^2\lambda^2\xi^2e^{-2s\alpha}|F_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_Q s^{-2}\lambda^{-2}\xi^{-2}e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\iint_Q s^4\lambda^4\xi^4e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_Q s^{-4}\lambda^{-4}\xi^{-4}e^{2s\alpha}|\nabla^2 w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi^7e^{-2s\alpha}|f_0|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_\Sigma s^{-7}\lambda^{-7}\xi^{-7}e^{2s\alpha}|\nabla\Delta w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi^5e^{-2s\alpha}|\tilde{f}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_\Sigma s^{-5}\lambda^{-5}\xi^{-5}e^{2s\alpha}|\Delta w|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

y usando la cota obtenida (A.26), se deduce la desigualdad deseada:

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2 \leq C\Bigg(&\iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2 \\
&+ \iint_Q s^2\lambda^2\xi^2e^{-2s\alpha}|F_1|^2 + \iint_Q s^4\lambda^4\xi^4e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2 \\
&+ \iint_\Sigma s^5\lambda^5\xi^5e^{-2s\alpha}|\tilde{f}|^2 + \iint_\Sigma s^7\lambda^7\xi^7e^{-2s\alpha}|f_0|^2\Bigg)
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

donde $C = C(\Omega, \omega', \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty)$.

De ahora en adelante, suponga que $\tilde{f} = f_0 = 0$. Use el multiplicador la ecuación (2.5.7) por $s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}q$, de modo que se obtiene la siguiente igualdad:

$$
\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}q\Delta^2 q = \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}qq_t + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2F_0 q \tag{A.28}
$$

$$
-\iint_Q s^2\lambda^4\nabla(\xi^2 e^{-2s\alpha}q)\cdot F_1+\iint_Q s^2\lambda^4\nabla^2(\xi^2 e^{-2s\alpha}q):\hat{F}
$$
$$
-\iint_Q \big(aq-\nabla\cdot(Bq)+\nabla^2:(Dq)\big)\, s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}q
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}qq_t &= \frac{1}{2}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}\partial_t|q|^2\\
&= \iint_Q s^2\lambda^4\xi\xi_t e^{-2s\alpha}|q|^2-\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2\alpha_t e^{-2s\alpha}|q|^2
\end{aligned}
$$

por lo que, usando (2.5.5),

$$
\left|\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}qq_t\right|\lesssim\iint_Q s^4\lambda^4\xi^5 e^{-2s\alpha}|q|^2 \tag{A.29}
$$

Además, para el resto de los términos del lado derecho,

$$
\left|\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}F_0 q\right|\lesssim\iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2+\iint_Q s^4\lambda^8\xi^4 e^{-2s\alpha}|q|^2 \tag{A.30}
$$

$$
\left|-\iint_Q s^2\lambda 4\nabla(\xi^2 e^{-2s\alpha}q)\cdot F_1\right|\lesssim\iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2+\iint_Q s^4\lambda^8\xi^4 e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^2\lambda^6\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 \tag{A.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\iint_Q s^2\lambda^4\nabla^2(\xi^2 e^{-2s\alpha}q):\hat{F}\right| &\lesssim \left|\iint_Q s^2\lambda^4\nabla^2(\xi^2 e^{-2s\alpha}):\hat{F}q\right|+\left|\iint_Q s^2\lambda^4\hat{F}(\nabla(\xi^2 e^{-2s\alpha}))(\nabla q)\right|\\
&\quad+\left|\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}\nabla^2 q:\hat{F}\right| \qquad\qquad (A.32)\\
&\lesssim \iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2+\iint_Q s^4\lambda^8\xi^4 e^{-2s\alpha}|q|^2\\
&\quad+\iint_Q s^2\lambda^6\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\iint_Q \lambda^4 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2
\end{aligned}
$$

$$
\left|\iint_Q as^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|q|^2\right|\lesssim\|a\|_\infty\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|q|^2 \tag{A.33}
$$

$$
\left|\iint_Q s^2\lambda^4\nabla(\xi^2 e^{-2s\alpha}q)\cdot Bq\right|\lesssim\|B\|_\infty\left(\iint_Q s^3\lambda^5\xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2\right) \tag{A.34}
$$

$$\left|\iint_Q s^2\lambda^4\nabla^2\left(\xi^2e^{-2s\alpha}q\right):Dq\right|\lesssim\|D\|_\infty\left(\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\iint_Q \lambda^2e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2\right) \tag{A.35}$$

Y para el término del lado izquierdo,

$$\begin{aligned}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}q\Delta^2 q&=\iint_Q s^2\lambda^4\Delta(\xi^2e^{-2s\alpha}q)\Delta q\\&=\iint_Q s^2\lambda^4\Delta(\xi^2e^{-2s\alpha})q\Delta q+2\iint_Q s^2\lambda^4\nabla(\xi^2e^{-2s\alpha})\cdot\nabla q\Delta q+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\lesssim&\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta^2 q||q|+\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2\\&+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\varepsilon\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\end{aligned} \tag{A.36}$$

Así, usando (A.28) y (A.36) junto con (A.29), (A.30), (A.31), (A.32), (A.33), (A.34) y (A.35), deducimos que para $\varepsilon>0$ pequeño,

$$\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\lesssim\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\iint_Q \lambda^4e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q| \tag{A.37}$$

Considere ahora $\tilde q=s\lambda^2\xi e^{-s\alpha}q$. Note que

$$\begin{aligned}\partial_{ij}\tilde q=&\,s\lambda^4\xi e{-}s\alpha\,\partial_i\eta\,\partial_j\eta\,q+3s^2\lambda^4\xi^2e^{-s\alpha}\,\partial_i\eta\,\partial_j\eta\,q+s\lambda^3\xi e^{-s\alpha}\,\partial_i\eta\,\partial_j q+s\lambda^3\xi e^{-s\alpha}\,\partial_{ij}\eta\,q\\&+s^3\lambda^4\xi^3e^{-s\alpha}\,\partial_i\eta\,\partial_j\eta\,q+s^2\lambda^3\xi^2e^{-s\alpha}\,\partial_i\eta\,\partial_j q+s^2\lambda^3\xi^2e^{-s\alpha}\partial_{ij}\eta\,q\\&+s\lambda^3\xi e^{-s\alpha}\partial_i q\,\partial_j\eta+s^2\lambda^3\xi^2e^{-s\alpha}\partial_i q\,\partial_j\eta+s\lambda^2\xi e^{-s\alpha}\partial_{ij}q\end{aligned}$$

en particular, $\tilde q$ satisface la siguiente ecuación elíptica:

$$\begin{cases}\Delta\tilde q&=\big(s\lambda^4\xi|\nabla\eta|^2+3s^2\lambda^4\xi^2|\nabla\eta|^2+s^3\lambda^4\xi^3|\nabla\eta|^2+s\lambda^3\xi\Delta\eta+s^2\lambda^3\xi^2\Delta\eta\big)e^{-s\alpha}q\\&\quad+\big(2s\lambda^3\xi+2s^2\lambda^3\xi^2e^{-s\alpha}\big)e^{-s\alpha}\nabla\eta\cdot\nabla q+s\lambda^2\xi e^{-s\alpha}\Delta q\qquad\qquad ,\Omega\\ \tilde q&=0\qquad\qquad ,\partial\Omega\end{cases}$$

Por lo que, por regularidad elíptica,

$$\iint_Q\sum_{i,j=1}^N|\partial_{ij}\tilde q|^2\lesssim\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2 \tag{A.38}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \sum_{i,j=1}^{N} |\partial_{ij}\tilde{q}|^2 = \iint_Q \Big(& s^2\lambda^8\xi^2|\nabla\eta|^4 + 6s^3\lambda^8\xi^3|\nabla\eta|^4 + 11s^4\lambda^8\xi^4|\nabla\eta|^4 + 6s^5\lambda^8\xi^5|\nabla\eta|^2 + s^6\lambda^8\xi^6|\nabla\eta|^4 \\
& + 2s^2\lambda^7\xi^2\nabla^2\eta\nabla\eta\nabla\eta + 8s^3\lambda^7\xi^3\nabla^2\eta\nabla\eta\nabla\eta + 8s^4\lambda^7\xi^4\nabla^2\eta\nabla\eta\nabla\eta + 2s^5\lambda^7\xi^5\nabla^2\eta\nabla\eta\nabla\eta \\
& + s^2\lambda^6\xi^2|\nabla^2\eta|^2 + 2s^3\lambda^6\xi^3|\nabla^2\eta|^2 + s^4\lambda^6\xi^4|\nabla^2\eta|^2\Big) e^{-2s\alpha}|q|^2 \\
& + \iint_Q \Big(2s^2\lambda^6\xi^2|\nabla\eta|^2 + 4s^3\lambda^6\xi^3|\nabla\eta|^2 + 2s^4\lambda^6\xi^4|\nabla\eta|^2\Big) e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 \\
& + \iint_Q \Big(2s^2\lambda^6\xi^2 + 4s^3\lambda^6\xi^3 + 2s^4\lambda^6\xi^4\Big) e^{-2s\alpha}|\nabla\eta\cdot\nabla q|^2 \\
& + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \\
& + \iint_Q \Big(4s^2\lambda^7\xi^4|\nabla\eta|^2 + 16s^3\lambda^7\xi^3|\nabla\eta|^2 + 16s^4\lambda^7\xi^4|\nabla\eta|^2 + 4s^5\lambda^7\xi^5|\nabla\eta|^2\Big) e^{-2s\alpha}\nabla\eta\cdot\nabla q\, q \\
& + \iint_Q \Big(4s^2\lambda^6\xi^2 + 8s^3\lambda^6\xi^3 + 4s^4\lambda^6\xi^4\Big) e^{-2s\alpha}\nabla^2\eta\nabla\eta\nabla q\, q \\
& + \iint_Q \Big(2s^2\lambda^6\xi^2 + 6s^3\lambda^6\xi^3 + 2s^4\lambda^6\xi^4\Big) e^{-2s\alpha}\nabla^2 q\nabla\eta\nabla\eta\, q \\
& + \iint_Q \Big(2s^2\lambda^5\xi^2 + 2s^3\lambda^5\xi^3\Big) e^{-2s\alpha}\nabla^2\eta : \nabla^2 q\, q \\
& + \iint_Q \Big(4s^2\lambda^5\xi^2 + 4s^3\lambda^5\xi^3\Big) e^{-2s\alpha}\nabla^2 q\nabla q\nabla\eta
\end{aligned}
$$

De donde podemos deducir que

$$
\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \lesssim \iint_Q |\nabla^2\tilde{q}|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 \quad \text{(A.39)}
$$

A consecuencia de (A.38) y (A.39),

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \lambda^4 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 &= \frac{1}{s^2}\iint_Q s^2\lambda^4 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \\
&\lesssim \frac{1}{s^2}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \qquad \text{(A.40)} \\
&\lesssim \Big(\iint_Q |\nabla^2\tilde{q}|^2 + \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2\Big) \\
&\lesssim \frac{1}{s^2}\Big(\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 + \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\Big)
\end{aligned}
$$

por lo que, para s suficientemente grande, podemos deducir de (A.37) y (A.40) que

$$
\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2 \lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 \qquad \text{(A.41)}
$$

$$+\iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2+\iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2+\iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2$$

Usando (A.41) en (A.39), se tiene además que

$$\begin{aligned}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2 q|^2 \lesssim{}& \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2\\ &+\iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2+\iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2+\iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2\end{aligned}\tag{A.42}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2 &= \frac{1}{2}\iint_Q s^4\lambda^6\Delta(\xi^4 e^{-2s\alpha})|q|^2-\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}\Delta q q\\ &\lesssim \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2+\varepsilon\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\end{aligned}\tag{A.43}$$

Así, agrupando (A.41), (A.42) y (A.43), y usando (A.27), deducimos que

$$\begin{aligned}&\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2+\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}(|\Delta q|^2+|\nabla^2 q|^2)\\ &\qquad\lesssim \iint_{\omega'\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|q|^2+\iint_Q e^{-2s\alpha}|F_0|^2\\ &\qquad+\iint_Q s^2\lambda^2\xi^2 e^{-2s\alpha}|F_1|^2+\iint_Q s^4\lambda^4\xi^4 e^{-2s\alpha}|\hat{F}|^2\end{aligned}\tag{A.44}$$

obteniendo la desigualdad deseada.

Ahora, si $\tilde{B},\tilde{D}\neq 0$, note que, en tal caso, el sistema que satisface w se ve de la siguiente forma:

$$\begin{cases} w_t+\Delta^2 w+aw+B\cdot\nabla w+D:\nabla^2 w-\nabla\cdot(\tilde{B}w)+\nabla^2:(\tilde{D}w)=s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}q-v\mathbf{1}_{\omega'} & \text{en } Q,\\ w=\frac{\partial w}{\partial n}=0 & \text{sobre } \Sigma,\\ w(0,\cdot)=0 & \text{en } \Omega,\end{cases}$$

Dada la regularidad que poseen $\tilde{B}$ y $\tilde{D}$, tenemos que

$$-\nabla\cdot(\tilde{B}w)=-\nabla\cdot\tilde{B}w-\tilde{B}\cdot\nabla w$$

y

$$\nabla^2:(\tilde{D}w)=\nabla^2:\tilde{D}w+2(\nabla\cdot\tilde{D})\cdot\nabla w+\tilde{D}:\nabla^2 w$$

por lo que, definiendo

$$\begin{aligned}\overline{a}&=a-\nabla\cdot\tilde{B}+\nabla^2:D\in L^\infty(Q),\\ \overline{B}&=B-\tilde{B}+2(\nabla\cdot\tilde{D})\in L^\infty(Q),\end{aligned}$$

$$\overline{D} = D - \tilde{D} \in L^\infty(Q)$$

se tiene el siguiente sistema para w:

$$\begin{cases} w_t + \Delta^2 w + \overline{a} w + \overline{B} \cdot \nabla w + \overline{D} : \nabla^2 w = s^6 \lambda^8 \xi^6 e^{-2s\alpha} q - v \mathbf{1}_{\omega'} & \text{en } Q, \\ w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0, \cdot) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Así, podemos repetir el argumento anterior con este sistema para obtener el resultado deseado.

$\square$

Apéndice B

En este apéndice, se justificará la regularidad de ψ en (3.1.4). En este apéndice, se considerará que ψ satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \psi_t + \Delta^2\psi + a\psi + B \cdot \nabla\psi + D : \nabla^2\psi = f & \text{en } Q, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

con $\psi_0 \in H^4(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$ con $f(\cdot,0) \in L^2(\Omega)$ y $a, B^i, D^{ij} \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;C^2(\overline{\Omega}))$, $i,j \in \{1,\ldots,N\}$. Para ello, considere los siguientes teoremas:

Teorema B.1 (Wloka ([28], Teorema 27.2))**.** *Sea $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ una tripleta de Gelfand. Considere la ecuación parabólica en V dada por*

$$\frac{dy(t)}{dt} + L(t)y(t) = f(t), \quad t \in (0,T) \tag{B.2}$$

con condición inicial $y(0) = y_0$ y donde $L : H^k(0,T;V) \to H^k(0,T;V')$ es el operador representante de una forma bilineal $a(t;\psi,\varphi)$ tal que

(a) $a(t;\psi,\varphi)$ es medible en $[0,T]$ para todo $\psi,\varphi \in V$ fijos.

(b) Existe una constante $c > 0$ independiente de t tal que

$$|a(t;\psi,\varphi)| \leq c\|\psi\|_V\|\varphi\|_V \quad \forall t \in [0,T], \forall\psi,\varphi \in V$$

(c) Existen reales $k_0, \alpha \geq 0$ independientes de t y ψ tales que

$$a(t;\psi,\psi) + k_0\|\psi\|_H^2 \geq \alpha\|\psi\|_V^2, \quad \forall t \in [0,T], \forall\psi \in V$$

(d) Dados $\psi,\varphi \in V$, suponga $a(t;\psi,\varphi)$ k-veces diferenciable respecto $t \in [0,T]$ tal que

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}a(t;\psi,\varphi)\right| \leq c\|\psi\|_V\|\varphi\|_V, \quad j = 0,\ldots,k$$

con c independiente de t.

Más aún, sea $f \in H^k(0,T;V')$ *y, si*

$k=0$*:* $y_0 \in H$

$k \geq 1$*:* $y_0 \in V$*,* $f(0) - L(0)y_0 \in V, \ldots, \in V, \quad f^{(k-1)}(0) - L(0)f^{(k-2)}(0) \in H$

Entonces, la solución y *de* (B.2) *satisface*

$$y \in H^k(0,T;V), \quad \textit{and} \quad \frac{d^{k+1}y(t)}{dt^{k+1}} \in L^2(0,T;V')$$

Teorema B.2 (Wloka ([28], Teorema 26.1))**.** *Suponga que se satisfacen las hipótesis* $(a),(b),(c)$ *del teorema B.1. Entonces, si* $T < +\infty$*, el problema* (B.2) *posee una única solución* y *que depende continuamente respecto* f *e* y_0*, en el sentido*

$$\|y\|^2_{H^1(0,T;V)} \lesssim \|y_0\|^2_H + \int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\, dt \tag{B.3}$$

Teorema B.3 (Gazzola F, et. al. ([16], Teorema 2.20))**.** *Sea* $1 < p < +\infty$ *y* $k \geq 2m$ *y asuma* $\partial\Omega \in C^k$*. Considere la ecuación elíptica*

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u + \mathcal{A}(x;D)u = f & \textit{in } \Omega \\ B_j(x,D) = h_j & \textit{in } \partial\Omega,\ j=1,\ldots,m \end{cases} \tag{B.4}$$

donde

$$\mathcal{A}(x;D)u = \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \alpha_\beta(x) D^\beta u, \quad B_j(x,D)u = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u \quad \textit{donde } |m_j| \leq 2m-1$$

y B_j *satisfacen cierta condición de compatibilidad (Definición 2.9 [16]). Suponga que*

$$\begin{cases} \alpha_\beta \in C^{k-2m}(\overline{\Omega}) & \textit{para todo } |\beta| \leq 2m-1 \\ b_{j,\alpha} \in C^{k-m_j}(\partial\Omega) & \textit{para todo } j=1,\ldots,m,\ |\alpha| \leq m_j \end{cases}$$

Entonces, para todo $f \in W^{k-2m,p}(\Omega)$ *y todo* $h_j \in W^{k-m_j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$*, con* $j = 1,\ldots,m$*, el problema* (B.4) *admite una única solución fuerte* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*. Más aún, existe* $C = C(\Omega,k,m,\mathcal{A},B_j) > 0$ *independiente de* f *y* h_j *tal que*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{W^{k-2m,p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|h_j\|_{W^{k-m_j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \right)$$

Tal constante depende de Ω *sólo respecto a su medida* $|\Omega|$ *y las normas* C^k *de los mapeos locales que definen el borde* $\partial\Omega$*. Si* $k > 2m + \frac{N}{p}$*, entonces* u *es una solución clásica.*

Se probarán las hipótesis necesarias de estos teoremas para justificar que

$$\psi \in L^2(0,T;H^6(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega))$$

Bajo la notación del teorema B.1, tomaremos $V = H_0^2(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $k = 1$ y

$$L(t)\psi = \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D : \nabla^2\psi$$

el cual es el operador representante de la forma bilineal

$$a(t;\psi,\varphi) = \int_\Omega \Delta\psi\Delta\varphi + \int_\Omega a\psi\varphi + \int_\Omega B\cdot\nabla\psi\varphi + \int_\Omega D : \nabla^2\psi\varphi$$

la que es bilineal y continua, puesto que

$$a(t;\psi,\varphi) \leq C(\|a\|_{L^\infty(Q)}, \|B\|_{L^\infty(Q)}, \|D\|_{L^\infty(Q)})\|\psi\|_{H^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$$

y además, dado que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega a|\varphi|^2\right| &\leq \|a\|_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\left|\int_\Omega B\cdot\nabla\varphi\varphi\right| &\leq \|B\|_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|B\|_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|^{1/2}_{H^2(\Omega)}\|\varphi\|^{3/2}_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\varepsilon\|B\|^{4/3}_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)} \\
\left|\int_\Omega D : \nabla^2\varphi\varphi\right| &\leq \|D\|_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\varepsilon\|D\|^2_{L^\infty(Q)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

con esto, como existe $\lambda > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |\Delta\varphi|^2 \geq \lambda\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}$, se tiene

$$a(t;\varphi,\varphi) + k_0\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq (\lambda - 2\varepsilon)\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}$$

así, tomando $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$, $k_0 = \|a\|_{L^\infty(Q)} + C_\varepsilon\|B\|^{4/3}_{L^\infty(Q)} + C_\varepsilon\|D\|^2_{L^\infty(Q)}$ y $\alpha = \lambda - 2\varepsilon$, se tiene que

$$a(t;\varphi,\varphi) + k_0\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}$$

es decir, $a(t;\cdot,\cdot)$ es coerciva en el sentido (c) del teorema B.1. Por último, dados $\psi,\varphi \in H_0^2(\Omega)$ fijos,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}a(t;\psi,\varphi)\right| &= \left|\int_\Omega a_t\psi\varphi + \int_\Omega B_t\cdot\nabla\psi\,\varphi + \int_\Omega D_t : \nabla^2\psi\,\varphi\right| \\
&\leq \left(\|a\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|B\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|D\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))}\right)\|\psi\|_{H^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Así, $a(t;\cdot,\cdot)$ satisface las hipótesis (a), (b), (c), (d) del teorema B.1, por lo que podemos afirmar que $\psi \in H^1(0,T;H_0^2(\Omega))$. Además, aplicando el teorema B.2,

$$\|\psi\|^2_{H^1(0,T;H^2(\Omega))} \lesssim \|f\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \tag{B.5}$$

Estudiando el problema elíptico que satisface ψ:

$$\begin{cases} \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D:\nabla^2\psi = f - \psi_t & \text{en } \Omega, \\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Dado que $a(t), B^i(t), D^{ij}(t) \in C^2(\overline{\Omega})$, $i,j \in \{1,\ldots,N\}$, por el teorema B.3 se cumple:

$$\|\psi(t)\|^2_{H^6(\Omega)} \lesssim \|f(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\psi_t(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \tag{B.6}$$

Además, usando el multiplicador ψ en (B.1), se puede deducir la siguiente cota:

$$\|\psi\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C(\|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty)\left(\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \tag{B.7}$$

Combinando (B.5), (B.6) y (B.7), tenemos que

$$\|\psi\|^2_{L^2(0,T;H^6(\Omega))} + \|\psi\|^2_{H^1(0,T;H^2(\Omega))} \lesssim \|f\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\psi_0\|^2_{H^4(\Omega)}$$

probando la regularidad deseada.

Reiterando el argumento con $V = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;V')$, se puede probar la siguiente desigualdad:

$$\|\psi\|^2_{L^2(0,T;H^8(\Omega))} + \|\psi\|^2_{H^1(0,T;H^4(\Omega))} \lesssim \|f\|^2_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} + \|\psi_0\|^2_{H^6(\Omega)}$$

Apéndice C

En este apéndice, se probarán estimaciones de energía necesarias para demostrar la desigualdad de observabilidad (3.1.7) y (3.2.7). Para ello, los siguientes sistemas

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi + a\varphi - \nabla\cdot(B\varphi) + \nabla^2 : (D\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\psi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + D : \nabla^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) = 0, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

y

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi = \nabla^2 : (\nabla^2\psi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}) & \text{en } Q, \\ \psi_t + \Delta^2\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) = 0, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{C.2}$$

Los siguientes resultados son referentes al sistema (C.1).

Lema C.1. *Denotemos*

$$E(\psi; t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi(t)|^2\, dx, \quad V(\psi; t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta\psi(t)|^2\, dx$$

Se tiene lo siguiente:

1. *Si* (φ, ψ) *son solución de* (3.1.4)*, entonces existe* $C = C(\Omega, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty) > 0$ *tal que para todo* $t_1 \geq t_2$*, con* $t_1, t_2 \in [0, T]$*,*

$$E(\psi; t_2) \leq e^{-C(t_2 - t_1)} E(\psi; t_1), \quad V(\psi; t_2) \leq e^{-C(t_2 - t_1)} V(\psi; t_1) \tag{C.3}$$

Además, existen $K_\varepsilon, \varepsilon > 0$ *tales que*

$$E'(\varphi; t) + K_\varepsilon E(\varphi; t) \geq -\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla\psi(t)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \tag{C.4}$$

2. si (φ, ψ) son solución de (C.2)*, entonces para todo $t_1 \geq t_2$, con $t_1, t_2 \in [0, T]$,*

$$E(\psi; t_2) \leq E(\psi; t_1), \quad V(\psi; t_2) \leq V(\psi; t_1) \tag{C.5}$$

Además, existe $\varepsilon > 0$ tales que

$$E'(\varphi; t) \geq -\frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla^2 \psi(t)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \tag{C.6}$$

Demostración. Considere (φ, ψ) solución de (C.1). Denote $E(t) = E(\psi; t)$, $V(t) = V(\psi; t)$. Usando el multiplicador ψ en (C.1) e integrando por partes:

$$E'(t) + \int_\Omega |\Delta\psi|^2 = -\int_\Omega a|\psi|^2 - \int_\Omega B \cdot \nabla\psi\psi - \int_\Omega D : \nabla^2\psi\psi$$
$$E'(t) + \int_\Omega |\Delta\psi|^2 \leq 2\|a\|_\infty E(t) + 2\|B\|_\infty \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} E(t)^{1/2} + 2\|D\|_\infty \|\nabla^2\psi\|_{L^2(\Omega)} E(t)^{1/2}$$

Recuerde que, como $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\int_\Omega |\Delta\psi|^2 \geq \lambda \|\psi\|^2_{H^2(\Omega)}$. Usando esto junto con Desigualdad de Young, se tiene que

$$E'(t) - \left(\lambda - \varepsilon(\|B\|^2_\infty + \|D\|^2_\infty)\right) \|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_\varepsilon(\|a\|_\infty) E(t)$$

Así, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se deduce que existe una constante $C = C(\Omega, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty) > 0$ tal que

$$E'(t) - CE(t) \leq 0$$

De donde se deduce la desigualdad deseada integrando en (t_1, t_2). A su vez, usando el multiplicador $\Delta^2\psi$ en (C.1), se puede deducir que

$$V'(t) + \int_\Omega |\Delta^2\psi|^2 \leq \varepsilon \left(\|a\|^2_\infty + \|B\|^2_\infty + \|D\|^2_\infty\right) \|\Delta^2\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda C_\varepsilon V(t)$$

por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se puede concluir que existe una constante $C = C(\Omega, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty) > 0$ tal que

$$V'(t) - CV(t) \leq 0$$

Ahora, denote $W(t) = E(\varphi; t)$. Usando el multiplicador φ en (C.1),

$$-W'(t) + \int_\Omega |\Delta\varphi|^2 = -\int_\Omega a|\varphi|^2 - \int_\Omega B \cdot \nabla\varphi\varphi - \int_\Omega D : \nabla^2\varphi\varphi - \int_{\mathcal{O}} \nabla\psi \cdot \nabla\varphi$$
$$-W'(t) + \int_\Omega |\Delta\varphi|^2 \leq (2\|a\|_\infty + C_\varepsilon) W(t) + \left(\varepsilon\|B\|^2_\infty + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \varepsilon\|D\|^2_\infty \|\nabla^2\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

Denotando $K_\varepsilon = 2\|a\|_\infty + C_\varepsilon > 0$ y tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de lo anterior se deduce que

$$W'(t) + K_\varepsilon W(t) \geq -\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

Ahora, considere (φ, ψ) solución de (C.2). Se usará la misma notación E, V, W mencionada previamente. Usando el multiplicador ψ en (C.2) e integrando por partes,

$$E'(t) + \int_\Omega |\Delta\psi|^2 = 0$$

por lo que

$$E'(t) \leq 0$$

en consecuencia, E es decreciente, por lo que se satisface (C.3) con $C = 0$. Asimismo, usando el multiplicador $\Delta^2\psi$, se puede deducir el mismo resultado para V. Por otro lado, usando el multiplicador φ en (C.2),

$$\begin{aligned} -W(t) + \int_\Omega |\Delta\varphi|^2 &= -\int_\Omega \nabla^2\psi : \nabla^2\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla^2\psi\|^2_{L^2(\mathcal{O})} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla^2\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se deduce que

$$W'(t) \geq -\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla^2\psi\|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

$\square$

Como consecuencia del lema anterior, se tiene el siguiente resultado, que será útil para demostrar las desigualdades de observabilidad.

Corolario C.1. *1. La solución (φ, ψ) de la ecuación* (C.1) *satisface las siguientes estimaciones de energía: para $t \in \left(0, \frac{3T}{4}\right)$,*

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^{T} \int_\Omega |\psi(t)|^2 \, dx \, dt \leq e^{\frac{CT}{4}} \int_t^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\psi(t)|^2 \, dx \, dt,$$

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^{T} \int_\Omega |\Delta\psi(t)|^2 \, dx \, dt \leq e^{\frac{CT}{4}} \int_t^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\Delta\psi(t)|^2 \, dx \, dt$$

Además, se cumple la siguiente cota: existe $C(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty, \|D\|_\infty) > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$,

$$\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 \, dx \leq C \int_t^T \|\nabla\psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds$$

En particular,

$$\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 \, dx \leq C \int_t^T \|\psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds + C \int_t^T \|\Delta\psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \tag{C.7}$$

2. La solución (φ, ψ) *de la ecuación* (C.2) *satisface las siguientes estimaciones de energía: para* $t \in \left(0, \frac{3T}{4}\right)$,

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^{T} \int_{\Omega} |\psi(t)|^2 \, dx \, dt \leq \int_{t}^{\frac{3T}{4}} \int_{\Omega} |\psi(t)|^2 \, dx \, dt,$$

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^{T} \int_{\Omega} |\Delta\psi(t)|^2 \, dx \, dt \leq \int_{t}^{\frac{3T}{4}} \int_{\Omega} |\Delta\psi(t)|^2 \, dx \, dt$$

Además, se cumple la siguiente cota: existe $C(\Omega, T) > 0$ *tal que para todo* $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} |\varphi(x,t)|^2 \, dx \leq C \int_{t}^{T} \|\nabla^2 \psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds$$

En particular,

$$\int_{\Omega} |\varphi(x,t)|^2 \, dx \leq C \int_{t}^{T} \|\Delta \psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \tag{C.8}$$

Demostración. Considere (φ, ψ) solución de (C.1). Tome $t_1 = t \in (0, 3T/4)$ y $t_2 = t + \frac{T}{4}$, se cumple que

$$E\left(t + \frac{T}{4}\right) \leq e^{\frac{CT}{4}} E(t)$$

Integrando en $\left(t, \frac{3T}{4}\right)$, se tiene que

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^{T} E(t) \, dt \leq e^{\frac{CT}{4}} \int_{t}^{\frac{3T}{4}} E(t) \, dt$$

obteniéndose el resultado. El desarrollo para obtener la desigualdad sobre $\Delta\psi$ es análogo, usando $V(t)$ en lugar de $E(t)$.

Por otro lado, de (C.4), integrando entre $t_1 = t$, $t_2 = T$, se puede deducir que

$$e^{K_\varepsilon t} W(t) \, ds \leq \int_{t}^{T} \frac{e^{K_\varepsilon s}}{2\varepsilon} \|\nabla \psi(s)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \, ds$$

entonces,

$$\begin{aligned} W(t) &\lesssim \int_{t}^{T} \frac{e^{K_\varepsilon (s-t)}}{2\varepsilon} \|\nabla \psi(s)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \, ds \\ &\lesssim \frac{e^{K_\varepsilon T}}{2\varepsilon} \int_{t}^{T} \|\nabla \psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \end{aligned}$$

deduciendo la cota pedida. Finalmente, como existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla \psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

se tiene que

$$W(t) \lesssim \int_t^T \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_t^T \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Ahora, considere (φ, ψ) solución de (C.2). Del mismo modo, tome $t = t \in (0, 3T/4)$ y $t_2 = t + \frac{T}{4}$. Entonces, se cumple que

$$E\left(t + \frac{T}{4}\right) \leq E(t)$$

Integrando en $\left(t, \frac{3T}{4}\right)$, se tiene que

$$\int_{t+\frac{T}{4}}^T E(t)\, dt \leq \int_t^{\frac{3T}{4}} E(t)\, dt$$

El resultado sobre $\Delta\psi$ es análogo usando $V(t)$ en lugar de $E(t)$.

Por otro lado, de (C.6) integrando entre $t_1 = t$ y $t_2 = T$, se puede deducir que

$$W(t) \lesssim \int_t^T \frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla^2 \psi(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2\, ds$$

deduciendo la cota pedida. Finalmente, como existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla^2\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

se tiene que

$$W(t) \lesssim \int_t^T \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

□

Apéndice D

Dado $\beta > 1$, en este apéndice se estudiará cuándo $\alpha^* \leq \beta\alpha$ para el peso (3.1.2), el cual se recordará que es de la forma:

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda k\left(\frac{m+1}{m}\right)\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^m(T-t)^m}.$$

Esto es, analizar para qué valores $t \in (0,T)$ se cumple que

$$\frac{e^{\lambda k\|\eta\|_\infty}}{t^m(T-t)^m}\left((\beta-1)e^{\lambda\frac{k}{m}\|\eta\|_\infty} - \beta e^{\lambda\|\eta(x)\|_\infty} + 1\right) \geq 0$$

Como $k \geq 2m$, basta con estudiar el siguiente problema:

$$(\beta-1)p^2 - \beta p + 1 \geq 0, \quad p > 0$$

donde $p = e^{\lambda\|\eta\|_\infty}$. Este polinomio tiene como raíces

$$p_\pm = \frac{\beta \pm (\beta-2)}{2(\beta-1)}$$

es decir,

$$p_- = \frac{1}{\beta-1}, \quad p_+ = 1.$$

Por lo que basta con pedir que

$$p \geq \text{máx}\{p_-, p_+\}$$

esto es,

$$\lambda \geq \frac{\ln\left(\text{mín}\left\{1, \frac{1}{\beta-1}\right\}\right)}{\|\eta\|_\infty}$$

Por ejemplo, para $\beta = \frac{3}{2}$, sería necesario pedir que

$$\lambda \geq \frac{\ln 2}{\|\eta\|_\infty}$$

Apéndice E

Esta sección está dedicada a demostrar el Corolario 2.5.1 y el Lema 4.1.2.

Demostración. Suponga ψ solución del problema

$$\begin{cases} -\psi_t + \Delta^2\psi = f & \text{en } Q, \\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(\cdot, T) = \psi_T & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y tome, para $n \in \mathbb{R}$ $\varphi = \xi^n \psi$. Note que φ es solución de

$$\begin{cases} -\varphi_t + \Delta^2\varphi = \xi^n f - n\xi^{-1}(\xi)_t\varphi + \Delta^2(\xi^n)\psi + 4\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi & \\ +2\Delta(\xi^n)\Delta\psi + 4\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi + 4\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi & \text{en } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

esto pues,

$$\nabla\varphi = \nabla(\xi^n)\psi + \xi^n\nabla\psi$$

$$\Delta\varphi = \Delta(\xi^n)\psi + 2\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi + \xi^n\Delta\psi$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla^2(\xi^n)\psi + 2\nabla(\xi^n)\nabla\psi + \xi^n\nabla^2\psi$$

$$\begin{aligned} \nabla\Delta\varphi = {} & \nabla\Delta(\xi^n)\psi + \Delta(\xi^n)\nabla\psi + 2\nabla^2(\xi^n)\cdot\nabla\psi \\ & + 2\nabla^2\psi\cdot\nabla(\xi^n) + \nabla(\xi^n)\Delta\psi + \xi^n\nabla\Delta\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2\varphi = {} & \Delta^2(\xi^n)\psi + 4\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi + 4\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi \\ & + 2\Delta(\xi^n)\Delta\psi + 4\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi + \xi^n\Delta^2\psi \end{aligned}$$

$$\varphi_t = n\xi^{-1}\xi_t\varphi + \xi^n\psi_t$$

Nótense entonces las siguientes descomposiciones,

$$|\nabla\varphi|^2 = |\nabla(\xi^n)|^2|\psi|^2 + \xi^{2n}|\nabla\psi|^2 + 2\xi^n\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi\psi \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}|\Delta\varphi|^2 &= |\Delta(\xi^n)|^2|\psi|^2 + 4|\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi|^2 + \xi^{2n}|\Delta\psi|^2 \\ &\quad + 4\Delta(\xi^n)\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi\psi + 2\xi^n\Delta(\xi^n)\Delta\psi\psi + 4\xi^n\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi\Delta\psi\end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}|\nabla^2\varphi|^2 &= |\nabla^2(\xi^n)|^2|\psi|^2 + 4|\nabla(\xi^n)|^2|\nabla\psi|^2 + \xi^{2n}|\nabla^2\psi|^2 \\ &\quad + 4\nabla^2(\xi^n)\nabla(\xi^n)\nabla\psi\psi + 2\xi^n\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi\psi + 4\xi^n\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\nabla\psi\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$\begin{aligned}|\nabla\Delta\varphi|^2 &= |\nabla\Delta(\xi^n)|^2|\psi|^2 + |\Delta(\xi^n)||\nabla\psi|^2 + 4|\nabla^2(\xi^n)\nabla\psi|^2 \\ &\quad + 4|\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)|^2 + |\nabla(\xi^n)|^2|\Delta\psi|^2 + \xi^{2n}|\nabla\Delta\psi|^2 \\ &\quad + 2\Delta(\xi^n)\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\psi + 4\nabla^2(\xi^n)\nabla\Delta(\xi^n)\nabla\psi\psi + 4\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\nabla\Delta(\xi^n)\psi \\ &\quad + 2\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla(\xi^n)\Delta\psi\psi + 2\xi^n\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi\psi + 4\Delta(\xi^n)\nabla^2(\xi^n)\nabla\psi\nabla\psi \\ &\quad + 4\Delta(\xi^n)\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\nabla\psi + 2\Delta(\xi^n)\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\psi\Delta\psi + 2\xi^n\Delta(\xi^n)\nabla\Delta\psi\cdot\nabla\psi \\ &\quad + 8(\nabla^2(\xi^n)\nabla\psi)\cdot(\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)) + 4\nabla^2(\xi^n)\nabla(\xi^n)\nabla\psi\Delta\psi + 4\xi^n\nabla^2(\xi^n)\nabla\psi\nabla\Delta\psi \\ &\quad + 4\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\nabla(\xi^n)\Delta\psi + 2\xi^n\nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\nabla\Delta\psi + 2\xi^n\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi\Delta\psi\end{aligned} \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned}|\Delta^2\varphi|^2 &= |\Delta^2(\xi^n)|^2|\psi|^2 + 16|\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi|^2 + 16|\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi|^2 \\ &\quad + 4|\Delta(\xi^n)|^2|\Delta\psi|^2 + 16|\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi|^2 + \xi^{2n}|\Delta^2\psi|^2 \\ &\quad + 8\Delta^2(\xi^n)\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\psi + 8\Delta^2(\xi^n)\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi\psi + 4\Delta^2(\xi^n)\Delta(\xi^n)\Delta\psi\psi \\ &\quad + 8\Delta^2(\xi^n)\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi\psi + 2\Delta^2(\xi^n)\xi^n\Delta^2\psi\psi + 32\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi \\ &\quad + 16\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\Delta(\xi^n)\Delta\psi + 32\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi + 8\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi\xi^n\Delta^2\psi \\ &\quad + 16\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi\Delta(\xi^n)\Delta\psi + 32\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi + 8\nabla^2(\xi^n) : \nabla^2\psi\xi^n\Delta^2\psi \\ &\quad + 16\Delta(\xi^n)\Delta\psi\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi + 4\Delta(\xi^n)\Delta\psi\xi^n\Delta^2\psi + 8\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi\xi^n\Delta^2\psi\end{aligned} \tag{E.5}$$

$$|\varphi_t|^2 = n^2\xi^{-2}|\xi_t|^2|\varphi|^2 + \xi^{2n}|\psi_t|^2 + 2n\xi^{n-1}\xi_t\varphi\psi_t \tag{E.6}$$

Luego, aplicando el teorema 2.5.2 a φ, se tiene

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\Big(s^6\lambda^8\xi^6|\varphi|^2 + s^4\lambda^6\xi^4|\nabla\varphi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\Delta\varphi|^2 \tag{E.7}$$

$$+ s^2\lambda^4\xi^2|\nabla^2\varphi|^2 + s\lambda^2\xi|\nabla\Delta\varphi|^2 + s^{-1}\xi^{-1}(|\Delta^2\varphi|^2 + |\varphi_t|^2)\Big)$$
$$\leq \iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^7 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}\big|\xi^n f - n\xi^{-1}\xi_t\varphi$$
$$+ \Delta^2(\xi^n)\psi + 4\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi + 2\Delta(\xi^n)\Delta\psi + 4\nabla^2(\xi^n):\nabla^2\psi + 4\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi\big|^2$$

De (E.1)-(E.5), se puede deducir que

$$\iint_Q s^6\lambda^8\xi^{6+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2 = \iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q s^4\lambda^6\xi^{4+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 \lesssim{}& \iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla\varphi|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^{5+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^3\lambda^6\xi^{3+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2\end{aligned} \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q s^3\lambda^4\xi^{3+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \lesssim{}& \iint_Q s^3\lambda^4\xi^3 e^{-2s\alpha}|\Delta\varphi|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^{5+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^{\frac{7}{2}}\lambda^6\xi^{\frac{7}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + \iint_Q s^{\frac{5}{2}}\lambda^4\xi^{\frac{5}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2\end{aligned} \tag{E.10}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^{2+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 \lesssim{}& \iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2\varphi|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^{5+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^3\lambda^6\xi^{3+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + \iint_Q s\lambda^4\xi^{1+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q s\lambda^2\xi^{1+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim{}& \iint_Q s\lambda^2\xi e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\varphi|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^{5+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^3\lambda^6\xi^{3+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + \iint_Q s^{\frac{3}{2}}\lambda^4\xi^{\frac{3}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^{\frac{3}{2}}\lambda^4\xi^{\frac{3}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 + \iint_Q s^{\frac{1}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{1}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}\iint_Q s^{-1}\xi^{-1+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2 \lesssim{}& \iint_Q s^{-1}\lambda^{-1}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\varphi|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^{5+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2\\ &+ \iint_Q s^3\lambda^6\xi^{3+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 + \iint_Q s\lambda^4\xi^{1+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2\\ &+ \iint_Q s\lambda^4\xi^{1+2n}e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 + \iint_Q \lambda^2 e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2\end{aligned} \tag{E.13}$$

$$+\iint_Q s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}+2n}e^{-2s\alpha}|\Delta^2\psi|^2$$

$$\iint_Q s^{-1}\xi^{-1+2n}e^{-2s\alpha}|\psi_t|^2 \lesssim \iint_Q s^{-1}\xi^{-1}e^{-2s\alpha}|\varphi_t|^2 + \iint_Q s^5\lambda^8\xi^5 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 + \iint_Q s^{-5}\lambda^{-8}\xi^{-3+2n}e^{-2s\alpha}|\psi_t|^2 \tag{E.14}$$

y, por otro lado,

$$\iint_Q \xi^{-2}(\xi_t)^2 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 \lesssim \iint_Q s^2\xi^4 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 \lesssim \frac{1}{s^4\lambda^8}\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 \tag{E.15}$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|\Delta^2(\xi^n)|^2|\psi|^2 \lesssim \frac{1}{s^6}\iint_Q s^6\lambda^8\xi^6 e^{-2s\alpha}|\psi|^2 \tag{E.16}$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta(\xi^n)\cdot\nabla\psi|^2 \lesssim \frac{1}{s^4}\iint_Q s^4\lambda^6\xi^4 e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 \tag{E.17}$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|\Delta(\xi^n)|^2|\Delta\psi|^2 \lesssim \frac{1}{s^3}\iint_Q s^3\lambda^4\xi^3 e^{-2s\alpha}|\Delta\psi|^2 \tag{E.18}$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|\nabla^2(\xi^n):\nabla^2\psi|^2 \lesssim \frac{1}{s^2}\iint_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{-2s\alpha}|\nabla^2\psi|^2 \tag{E.19}$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|\nabla(\xi^n)\cdot\nabla\Delta\psi|^2 \lesssim \frac{1}{s}\iint_Q s\lambda^2\xi e^{-2s\alpha}|\nabla\Delta\psi|^2 \tag{E.20}$$

Así, de (E.7) y de las estimaciones (E.1)-(E.20), se deduce que para $\lambda \geq C$, $s \geq C(T+T^{1/2})$,

$$\begin{aligned}&\iint_Q e^{-2s\alpha}\Big(s^6\lambda^8\xi^{6+2n}|\psi|^2 + s^4\lambda^6\xi^{4+2n}|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^{3+2n}|\Delta\psi|^2\\ &+ s^2\lambda^4\xi^{2+2n}|\nabla^2\psi|^2 + s\lambda^2\xi^{1+2n}|\nabla\Delta\psi|^2 + s^{-1}\xi^{-1+2n}(|\Delta^2\psi|^2+|\psi_t|^2)\Big)\\ &\leq \iint_{\omega\times(0,T)} s^7\lambda^8\xi^{7+2n}e^{-2s\alpha}|\psi|^2 + \iint_Q \xi^{2n}e^{-2s\alpha}|f|^2\end{aligned} \tag{E.21}$$

Finalmente, el corolario 2.5.1 se deduce de la desigualdad anterior tomando $r = 2n$ y multiplicando por $s^r\lambda^r$. □

Bibliografía

[1] F. D. Araruna, E. Fernández-Cara, and L. C. da Silva. Hierarchical exact controllability of semilinear parabolic equations with distributed and boundary controls. *Communications in Contemporary Mathematics*, 22(07):1950034, 2020.

[2] F.D. Araruna, E. Fernández-Cara, S. Guerrero, and M.C. Santos. New results on the stackelberg–nash exact control of linear parabolic equations. *Systems & Control Letters*, 104:78–85, 2017.

[3] F.D. Araruna, E. Fernández-Cara, and M.C. Santos. Stackelberg–nash exact controllability for linear and semilinear parabolic equations. *ESAIM: COCV*, 21(3):835–856, 2015.

[4] O. Bodart and C. Fabre. Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat-equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 195(3):658–683, 1995.

[5] Olivier Bodart, Manuel González-Burgos, and Rosario Pérez-García. Insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity. *Comptes Rendus Mathematique*, 335(8):677–682, 2002.

[6] Nicolás Carreño and Eduardo Cerpa. Local controllability of the stabilized kuramoto–sivashinsky system by a single control acting on the heat equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 106(4):670–694, 2016.

[7] Nicolás Carreño and Patricio Guzmán. On the cost of null controllability of a fourth-order parabolic equation. *Journal of Differential Equations*, 261(11):6485–6520, 2016.

[8] Nicolás Carreño and Maurício C. Santos. Stackelberg-nash exact controllability for the kuramoto-sivashinsky equation. *Journal of Differential Equations*, 266:6068–6108, 2019.

[9] Nicolás Carreño and Maurício C. Santos. Stackelberg-nash exact controllability for the kuramoto-sivashinsky equation with boundary and distributed controls. *Journal of Differential Equations*, 343:1–63, 2023.

[10] Eduardo Cerpa and Alberto Mercado. Local exact controllability to the trajectories of the 1-d kuramoto–sivashinsky equation. *Journal of Differential Equations*, 250(4):2024–2044, 2011.

[11] Eduardo Cerpa, Alberto Mercado, and Ademir F. Pazoto. Null controllability of the stabilized kuramoto–sivashinsky system with one distributed control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53(3):1543–1568, 2015.

[12] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Null controllability of the n-dimensional stokes system with n-1 scalar controls. *Journal of Differential Equations*, 246(7):2908–2921, 2009.

[13] Luz de Teresa. Insensitizing controls for a semilinear heat equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(1-2):39–72, 2000.

[14] A.V. Fursikov and O.Y. Imanuvilov. *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Notes Series - Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center. Seoul National University, 1996.

[15] Peng Gao. Insensitizing controls for the cahn-hilliard type equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 35:1–22, 07 2014.

[16] Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau, and Guido Sweers. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.

[17] Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau, and Guido Sweers. *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, volume 1991 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.

[18] S. Guerrero and K. Kassab. Carleman estimate and null controllability of a fourth order parabolic equation in dimension $n \geq 2$. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 121:135–161, 2019.

[19] Bin Guo and Wenjie Gao. Study of weak solutions for a fourth-order parabolic equation with variable exponent of nonlinearity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 62:909–926, 2011.

[20] K. Kassab. Null controllability of semi-linear fourth order parabolic equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 136:279–312, 2020.

[21] Karim Kassab. *Sur la contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques d'ordre quatre.* PhD thesis, Sorbonne Université, 2021.

[22] Belinda B. King, Oliver Stein, and Michael Winkler. A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(2):459–490, 2003.

[23] Fang Li and Bo You. Global carleman estimates for a fourth order parabolic equation and application to null controllability. *Mathematical Control and Related Fields*, 2025.

[24] Fang Li and Bo You. Hierarchical exact controllability of the fourth-order parabolic equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, 27(10):2550024, 2025.

[25] J-L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, volume 1. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1972.

[26] J-L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, volume 2. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1972.

[27] M. Lysaker, A. Lundervold, and Xue-Cheng Tai. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(12):1579–1590, 2003.

[28] J. Wloka. *Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 1987.

[29] Hang Yu. Null controllability for a fourth order parabolic equation. *Science in China Series F: Information Sciences*, 52, 2009.

[30] Zhongcheng Zhou. Observability estimate and null controllability for one-dimensional fourth order parabolic equation. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16, 12 2012.