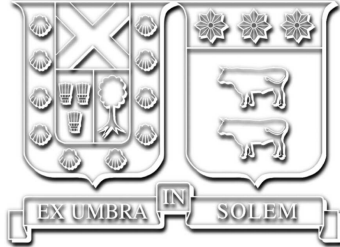


Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Valparaíso, Chile



Co-optimización de expansión de generación y transmisión en sistemas eléctricos con alta penetración de energías renovables de fuente variable

CARLOS EDUARDO VERGARA BRANJE

2024

Requisito parcial para obtener el grado de:
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:
Dr. Esteban Gil Sagás (UTFSM)

Valparaíso, Enero 2024.

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Valparaíso, Chile



Co-optimización de expansión de generación y transmisión en sistemas eléctricos con alta penetración de energías renovables de fuente variable

CARLOS EDUARDO VERGARA BRANJE

2023

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la institución.

“Vivimos en una sociedad profundamente dependiente de la ciencia y la tecnología y en la que nadie sabe nada de estos temas. Ello constituye una fórmula segura para el desastre.”
— Carl Sagan

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que de alguna forma fueron parte de este trabajo.

En primer lugar quisiera agradecer a mi profesor guía de tesis, el Dr. Esteban Gil Sagás. A pesar de que ha pasado un tiempo de mis años de estudiante, recuerdo con mucho afecto su invaluable guía, apoyo y estímulo a desarrollar mis habilidades como investigador e ingeniero.

También quiero agradecer a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) y el proyecto basal FB0008, *Advanced Center for Electrical and Electronic Engineering* (AC3E), que por medio de los proyectos Fondecyt 1231892 y Fondef ID22I10341 colaboraron en el desarrollo de este trabajo.

A mi pareja Nicolle, por su apoyo, preocupación e incentivo hacia mí para finalizar este trabajo.

Muchas gracias a mis padres Marcelo e Ingrid, quienes han sido mi apoyo y motivación principal desde que inicié mis estudios de ingeniería. Este trabajo se lo dedico a ellos.

Índice de Contenidos

Índice de Contenidos	I
Índice de Figuras	IV
Índice de Tablas	V
Resumen	1
Abstract	3
1. Introducción	4
1.1. Motivación	4
1.2. Hipótesis	6
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo principal	6
1.3.2. Objetivos específicos	7
1.4. Aporte del trabajo	7
1.5. Estructura del Documento	7
2. Estado del Arte	9
2.1. Planificación de un sistema eléctrico	9
2.1.1. Planificación de expansión de generación	9
2.1.2. Planificación de expansión de transmisión	10
2.1.3. Co-optimización de expansión de generación y transmisión	11
2.1.4. Coordinación hidrotérmica	12
2.1.5. Planificación de programación de operación	13
2.2. Estrategias de representación del corto plazo en estudios de largo plazo .	13
2.3. Métodos de descomposición en problemas de optimización de sistemas eléctricos	15
2.4. Direcciones futuras y necesidades de investigación	16
3. Formulación Matemática	17
3.1. Nomenclatura	17
Conjuntos	17
Parámetros	18
Variables	19
3.2. Formulación extensiva	19
3.2.1. Función objetivo	19
3.2.2. Restricciones de Inversión	20

Inversión en generadores	20
Inversión en transmisión	20
3.2.3. Restricciones de Operación	20
Balance nodal de energía	20
Restricción de reserva	20
Límites de generación y reserva	20
Estados operativos de generadores térmicos	21
Rampas de toma/rechazo de carga	21
Flujo por las líneas o transformadores	21
Restricciones angulares	21
3.3. Formulación dinámica	22
4. Descomposición Anidada	23
4.1. Fundamentos e idea del algoritmo	23
4.2. Descripción del algoritmo	23
4.3. Resumen del algoritmo	25
4.4. Tipos de cortes	26
4.4.1. Bender's cuts	27
4.4.2. Integer Optimality cuts	27
4.4.3. Lagrangian cuts	28
4.4.4. Strengthened Bender's cuts	28
5. Metodología	30
5.1. Caso 1: comparación con formulación extensiva	30
5.2. Caso 2: comparación de familia de cortes	30
5.3. Caso 3: desempeño de patrones de cortes	31
5.4. Comentarios	31
6. Experimentos Computacionales	32
6.1. Caso 1: comparación con formulación extensiva	32
6.1.1. Sistema IEEE de 6 nodos	32
6.1.2. Sistema IEEE de 24 nodos	33
6.1.3. Análisis	34
6.2. Caso 2: comparación de familia de cortes	34
6.2.1. Sistema IEEE de 6 nodos	34
6.2.2. Sistema IEEE de 24 nodos	35
6.2.3. Análisis	36
6.3. Caso 3: desempeño de patrones de cortes	37
6.3.1. Sistema IEEE de 6 nodos	37
6.3.2. Sistema IEEE de 24 nodos	39
6.3.3. Análisis	41
7. Conclusiones y Trabajo Futuro	42
Apéndices	44
A. Resumen ejecutivo	44

B. Sistemas de prueba	55
B.1. Sistema IEEE 6 nodos	55
B.1.1. Datos generación	55
B.1.2. Datos transmisión	56
B.1.3. Datos demanda	56
B.2. Sistema IEEE 24 nodos	57
B.2.1. Datos generación	57
B.2.2. Datos transmisión	58
B.2.3. Datos demanda	59
B.3. Otros datos	59
Bibliografía	61

Índice de Figuras

6.1.	Evolución de convergencia cortes (B) y (SB) para caso de estudio 2, sistema IEEE 6 nodos.	35
6.2.	Evolución de convergencia cortes (B) y (SB) para caso de estudio 2, sistema IEEE 24 nodos.	36
6.3.	Evolución de convergencia de patrones de cortes propuestos para caso de estudio 3, sistema IEEE 6 nodos.	38
6.4.	Tiempos de resolución de patrones de cortes para caso de estudio 3, sistema IEEE 6 nodos.	38
6.5.	Evolución de convergencia de patrones de cortes propuestos para caso de estudio 3, sistema IEEE 24 nodos.	40
6.6.	Tiempos de resolución de patrones de cortes para caso de estudio 3, sistema IEEE 24 nodos.	41
B.1.	Perfiles solares [pu].	59
B.2.	Perfiles eólicos [pu].	60
B.3.	Perfil de demanda media unitaria [pu].	60

Índice de Tablas

4.1.	Cumplimiento de condiciones de convergencia. (B), (I), (L) y (SB) denotan Bender's, Integer Optimality, Lagrangian y Strength Bender's	29
6.1.	Resultados de desempeño de cortes. Caso 1, sistema IEEE 6 nodos. *Valores en los cuales se estabiliza el gap.	32
6.2.	Resultados de desempeño de cortes. Caso 1, sistema IEEE 24 nodos. *Valores en los cuales se estabiliza el gap.	33
6.3.	Resultados de desempeño de patrones de cortes. Caso 3, sistema IEEE 6 nodos.	37
6.4.	Resultados de desempeño de patrones de cortes. Caso 3, sistema IEEE 24 nodos.	39
B.1.	Parque generador térmico, sistema IEEE 6 nodos.	55
B.2.	Parque generador ERFV, sistema IEEE 6 nodos.	56
B.3.	Líneas de transmisión, sistema IEEE 6 nodos.	56
B.4.	Ponderación de demanda por nodo, sistema IEEE 6 nodos.	56
B.5.	Demanda por año [GWh], sistema IEEE 6 nodos.	56
B.6.	Parque generador térmico, sistema IEEE 24 nodos.	57
B.7.	Parque generador ERFV, sistema IEEE 24 nodos.	58
B.8.	Líneas de transmisión, sistema IEEE 24 nodos.	58
B.9.	Ponderación de demanda por nodo, sistema IEEE 24 nodos.	59
B.10.	Demanda por año [GWh], sistema IEEE 24 nodos.	59

Nomenclatura.

<i>ERFV</i>	:	Energías Renovables de Fuentes Variables.
<i>SEN</i>	:	Sistema Eléctrico Nacional.
<i>ISO</i>	:	Independent System Operator.
<i>CEN</i>	:	Coordinador Eléctrico Nacional.
<i>RL</i>	:	Relajación Lagrangiana.
<i>CSP</i>	:	Concentrated Solar Power.
<i>UC</i>	:	Unit Commitment.
<i>LOLE</i>	:	Lost of Load Expectation.
<i>LOLP</i>	:	Lost of Load Probability.
<i>ELCC</i>	:	Effective Load Carrying Capacity.
<i>GCEP</i>	:	Generation Capacity Expansion Planning.
<i>SDDP</i>	:	Stochastic Dynamic Dual Programming.
<i>CUC</i>	:	Clustered Unit Commitment.
<i>SDDiP</i>	:	Stochastic Dynamic Dual Integer Programming.
<i>MILP</i>	:	Mixed Integer Linear Programming.
<i>DP</i>	:	Dynamic Problem.
<i>UB</i>	:	Upper Bound.
<i>LB</i>	:	Lower Bound.
<i>(B)</i>	:	Bender's cuts.
<i>(I)</i>	:	Integer Optimality cuts.
<i>(SB)</i>	:	Strengthened Bender's cuts.

Resumen

En este trabajo se desarrolla un algoritmo de descomposición anidada para el problema de co-optimización de expansión de capacidad de generación y transmisión en sistemas eléctricos de potencia. La relevancia de este trabajo es revisar la aplicabilidad y desempeño una metodología de descomposición que en los últimos años ha tomado relevancia ya que ha permitido abordar de manera eficiente y rápida problemas de optimización de tipo entero-mixtos de gran magnitud.

Para probar el desempeño del algoritmo y configuraciones posibles en la aplicación de “cortes”, se analizaron tres casos de estudio, que se aplicaron a sistemas de prueba IEEE de 6 y 24 nodos.

El primer caso de estudio tiene como objetivo hacer una comparación del desempeño del algoritmo de descomposición anidada con la metodología tradicional (programación lineal-entera mixta con formulación extensiva). Particularmente, se analizaron diferencias en los tiempos de resolución y convergencia, considerando de forma independiente tres tipos de cortes en el algoritmo de descomposición, estos son *Bender's cuts*, *Integer Optimality cuts* y *Strengthened Bender's cuts*. De los experimentos realizados, se obtuvo un buen desempeño de la descomposición anidada utilizando cortes del tipo *Strengthened Bender*, logrando reducir los tiempos de simulación a 75-81 % respecto a la metodología tradicional.

El segundo caso de estudio tiene como objetivo comparar el desempeño de cada corte de forma individual, para analizar diferencias en tiempos de simulación y convergencia del algoritmo. La finalidad es identificar las ventajas y desventajas de cada uno de los tipos de corte, con el fin de proponer un patrón de estos que asegure converger en menores tiempos de simulación. Los resultados reafirmaron el mejor desempeño de los cortes tipo *Strengthened Bender* en cuanto a convergencia y tiempos de simulación, sin embargo se plantea la necesidad de alternar esos cortes con los del tipo *Integer Optimality*, dado que estos son los únicos que aseguran una solución óptima.

Finalmente, en el tercer caso de estudio se analizó el desempeño de los patrones de cortes, propuestos en base a los resultados del caso de estudio anterior. La finalidad fue encontrar una configuración que entregue resultados a un criterio de convergencia razonable en menores tiempos de simulación. De los patrones propuestos, se encontró que la combinación de usar 3 cortes del tipo *Strengthened Bender* y 1 de *Integer Optimality* consiguió un mejor desempeño, reduciendo los tiempos de resolución a 69 % respecto a la metodología tradicional.

En base al desarrollo y análisis de los experimentos computacionales, se concluyó sobre la utilidad y desempeño de la descomposición anidada en problemas de expansión de capacidad de generación y transmisión, mostrando que es posible obtener resultados a una convergencia razonable en menores tiempos de simulación, utilizando un patrón de cortes

del tipo (3SB+I).

Adicionalmente, se proponen ideas de trabajo futuro incorporando más aspectos de la operación de corto plazo en la planificación de largo plazo y/o técnicas de descomposición. Es posible complementar lo anterior haciendo sensibilidades con una mayor cantidad de escenarios, sistemas de mayor magnitud, simulaciones de mayor horizonte y/o la incorporación de restricciones de no-anticipatividad a la metodología de descomposición anidada.

Abstract

This work presents an implementation of a nested decomposition algorithm applied to the co-optimization of generation and transmission capacity expansion planning problem in power systems. The proposed methodology has been gaining relevance in the last years, as it can solve large mixed-integer problems efficiently and faster than the conventional methodology (mixed-integer linear problems with extensive formulation).

In order to test the algorithm's performance and cuts configuration, three case studies were conducted, applied on two IEEE test systems of 6 and 24 nodes each.

The first case study compares the performance between the nested decomposition algorithm and the traditional methodology (Mixed Integer Linear Programming). Differences in solution times and convergence are analyzed, considering three cuts families of decomposition algorithm: *Bender's cuts*, *Integer Optimality cuts* and *Strengthened Bender's cuts*. The results showed that using the nested decomposition algorithm with *Strengthened Bender's cuts* can reduce the run times to 75-81 % of the time spent with traditional methodology.

The second case study compares the performance of each cut type, analyzing differences in simulation times and algorithm convergence. The objective is identifying advantages and disadvantages of each kind of cut, in order to propose a pattern which ensures convergence with less solution times. The results confirmed that the *Strengthened Bender's cuts* have a better performance regarding convergence and run times, however it was raise the need of using this cuts together with the *Integer Optimality cuts*, as they are the only that guarantee an optimal solution.

Finally, the third case study case tests the performance of the proposed cut patterns, based on the previous study case. This aims to find the optimal configuration of cut patterns that allows to solve the problem to a reasonable convergence with an improvement of simulation run times. The best performance was by the pattern with the combination of using 3 *Strengthened Bender's cuts* with 1 *Integer Optimality cut*, which reduced the run times to 69 % of the spent with the traditional methodology.

Based on the results of the study cases and their analysis, conclusions are made about capability and performance of the nested decomposition algorithm applied to the capacity expansion planning problem, showing that is possible to get results at a reasonable convergence in less simulation times, using a pattern of cuts (3SB+I).

In addition, ideas for future work are suggested, regarding adding more features of the short term planning into the long term planning and/or including new decomposition techniques. It is possible to complement above doing sensitivities over the samples quantity, large-scale power systems, simulations with a longer horizon and/or the integration of non-anticipativity constraints to the nested decomposition algorithm.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

En la planificación energética de un sistema eléctrico hay mayor conciencia en la realización de planes de expansión de generación y transmisión en base a un desarrollo sustentable. Esto es, desarrollar planes de expansión de generación que permitan abastecer el crecimiento de la demanda energética intentando disminuir el uso de gases que contribuyan al efecto invernadero.

Este nuevo paradigma generalmente es apoyado a través de leyes y cambios regulatorios por entidades gubernamentales, fomentando el uso de Energías Renovables de Fuente Variable (ERFV). A nivel nacional se tiene la *ley 20/25* [1] y la *Hoja de Ruta 2050* [2], las cuales entregan lineamientos para aumentar la capacidad de generación ERFV, fijando metas por períodos, tanto de capacidad instalada como de energía anual generada. Las políticas anteriores han desencadenado un incremento sostenido en la inyección de ERFV en el Sistema Eléctrico Nacional (SEN), principalmente por parques eólicos y solares fotovoltaicos, cambiando la forma en la que se opera y consume la energía. De acuerdo a la literatura, Chile tiene un gran potencial eólico y solar, siendo esta última fuente la de mayor aprovechamiento, debido a las características presentes en el norte grande de nuestro país [3].

La operación de sistemas con alta penetración ERFV es un gran desafío, ya que los *Operadores Independientes de un Sistema* (ISO, por sus siglas en inglés), o en el caso nacional el *Coordinador Eléctrico Nacional*¹, han tenido que tomar medidas que permitan la operación segura y flexible del sistema, bajo condiciones de alta variabilidad de generación renovable. Por ejemplo, es necesario incrementar los niveles de reserva en giro, para poder hacer frente a la incertidumbre de la generación ERFV [4], utilizando centrales que permitan una toma de carga rápida. Además, se está presentando el problema de que centrales térmicas convencionales tengan que operar a mínimo técnico o simplemente se despachen centrales ineficientes con el fin de aportar reserva, de acuerdo a la variabilidad de la generación ERFV [5,6].

Desde el punto de vista de un planificador central, el ejercicio de planificación a largo plazo de sistemas eléctricos es un desafío aún mayor. Esto se debe a que las metodologías utilizadas actualmente, son incapaces de replicar las condiciones de una eventual operación

¹<https://www.coordinadorelectrico.cl/>.

real, al no considerar restricciones de corto plazo que tomen en cuenta la intermitencia y variabilidad de la generación ERFV [7–9].

Generalmente, para la planificación de expansión de sistemas eléctricos se utilizan modelos matemáticos, los cuales usan técnicas de optimización. El objetivo es minimizar los costos totales de operación e inversión, sujeto a restricciones de balance de energía y transmisión principalmente, entregando un plan de obras óptimo. Ya que este tipo de estudios se realizan a largo plazo (horizontes de 15 a 20 años) y el objetivo principal es planificar el aumento de capacidad en un sistema, se hacen algunas aproximaciones que impiden una representación fiel de la operación diaria. Por ejemplo, no se toma en cuenta el hecho de que pueden haber variaciones bruscas de generación ERFV, lo que haría necesaria una central generadora flexible, con una rampa de toma de carga rápida y un mínimo técnico tal que permita operar a bajos niveles de generación, sin tener que ser sacada de servicio. Dado que no se modelan las restricciones de corto plazo, no es necesario utilizar el perfil completo de demanda, por lo que generalmente se utiliza una aproximación de la curva de duración de la demanda, representada por bloques. Esto último empeora más el problema de representación de corto plazo, ya que impide considerar perfiles de generación ERFV, al no considerar cronología horaria.

El problema de no incorporar restricciones de corto plazo en la planificación de largo plazo, se debe a que es necesario agregar más variables y restricciones al problema de optimización. Esto puede llegar a ser casi imposible de resolver computacionalmente, ya que las restricciones de corto plazo tienen validez en bloques de tiempo horarios, lo que implicaría tener una gran cantidad de variables, de las cuales muchas son enteras. Dado lo anterior, es que se han utilizado técnicas de descomposición para acelerar la solución del problema como la relajación Lagrangeana (RL) o la descomposición de Benders, siendo esta última la más utilizada [10]. De todas formas, los tiempos de solución del problema están condicionados a la cantidad de variables enteras/binarias que se tengan, por lo tanto, en problemas grandes como la planificación de expansión de generación sigue siendo un desafío el análisis con resolución horaria.

En la literatura se ha abordado el problema presentado en la planificación de expansión de generación con restricciones de corto plazo, utilizando la descomposición de Dantzig Wolfe [11]. Esta solución mostró que sistemas térmicos de gran tamaño se pueden descomponer en subproblemas por años (o etapas), extensible a la descomposición por escenarios (pensando en programación estocástica), mostrando mejoras en los tiempos de simulación. Esto aún está limitado a sistemas hidrotérmicos, ya que a pesar de que se pueden acoplar las variables temporales en el problema maestro, sería necesario agregar una gran cantidad de columnas (nuevas variables) lo que no haría conveniente utilizar esa metodología en sistemas de mayor magnitud.

Pensando en el acoplamiento temporal de variables para los modelos de programación de sistemas hidrotérmicos, además de la programación dinámica, la RL [12, 13] ha mostrado que es una buena metodología de descomposición para restricciones complicantes. Esto ya se ha aplicado en la coordinación hidrotérmica de corto plazo, mostrando que es posible incorporar variables enteras, al utilizar un algoritmo iterativo de programación dinámica con RL [14, 15]. A pesar de que el algoritmo muestra una mejora en los tiempos de simulación, utilizar la programación dinámica en sistemas grandes con mayor horizonte de planificación aumenta mucho el esfuerzo computacional requerido [16].

Actualmente los trabajos académicos relacionados con la planificación de expansión se

ha centrado principalmente en los siguientes puntos:

- Generación de escenarios: se elige una cantidad reducida de escenarios que permitan representar la totalidad de la incertidumbre con el fin de disminuir en magnitud el problema de optimización.
- Mejor representación operacional: incorporar restricciones de corto plazo en la planificación de largo plazo, enfatizando la flexibilidad operacional de las centrales ante gran generación ERFV.
- Modelar nuevas tecnologías de generación: incorporación de nuevas tecnologías de generación renovable en los modelos de optimización, como por ejemplo los almacenadores a bombeo o plantas de concentración solar (CSP).
- Métodos de descomposición y paralelización: reducción de tiempos de simulación y hacerlos tratables computacionalmente por medio de estrategias matemáticas.

En base a los desafíos anteriormente mencionados, el aporte de este trabajo es plantear un algoritmo que permita la co-optimización de expansión de generación y transmisión en sistemas eléctricos, bajo el supuesto de una planificación centralizada. Este deberá ser capaz de incluir restricciones de corto plazo, con el fin de considerar la eventual operación horaria ante una gran penetración ERFV. Para esto se utilizarán técnicas de representación horaria con un algoritmo de descomposición paralelizable, con el fin de hacer un análisis estocástico de largo plazo.

1.2. Hipótesis

El trabajo se basa en las siguientes hipótesis:

- La creciente penetración de generación ERFV en los sistemas eléctricos requiere incorporar restricciones de flexibilidad operacional de corto plazo en los estudios de planificación de expansión de capacidad para estimar de mejor forma la operación del sistema y los costos en los que se incurriría.
- Si bien los recursos computacionales actuales permiten trabajar con problemas de optimización de mayor magnitud, la utilización de técnicas de linealización, descomposición y/o paralelización son necesarias para obtener resultados para sistemas reales en tiempos de cálculo razonables.
- El uso de descomposición anidada multi-etapa permitiría resolver de manera eficiente problemas de planificación de expansión de la generación y transmisión en sistemas eléctricos de tamaño real.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo principal

El objetivo principal de esta tesis es proponer un algoritmo matemático, capaz de resolver la co-optimización de expansión de generación y transmisión en sistemas eléctricos

con alta penetración ERFV. Para ello se considerarán restricciones de corto plazo (*Unit Commitment* UC), utilizando estrategias para representar condiciones de la operación de corto plazo. Además, se hará uso de un algoritmo de descomposición multi-etapa, con el fin de acelerar la resolución computacional.

1.3.2. Objetivos específicos

- Formular un modelo que resuelva el problema de planificación de expansión de generación y transmisión, considerando la formulación eficiente de restricciones operacionales de corto plazo.
- Plantear, implementar y validar un algoritmo de optimización de expansión para sistemas eléctricos, que incluya restricciones de corto plazo, utilizando una metodología de descomposición anidada multi-etapa.
- Evaluar el desempeño del algoritmo implementado en casos de prueba.

1.4. Aporte del trabajo

El principal aporte de este trabajo será el desarrollo de un modelo de planificación de expansión en capacidad de generación y transmisión con inclusión de restricciones operacionales de corto plazo en estudios de largo plazo. Esto permitirá la evaluación y desarrollo de estudios de expansión en sistemas eléctricos que consideren la integración de la generación ERFV, al contemplar restricciones de flexibilidad operacional.

Además, el trabajo permitirá fomentar la investigación y desarrollo de la descomposición anidada (multi-etapa), que debido a su complejidad y aplicación en sistemas de prueba principalmente, no ha sido el centro de atención en la literatura referente a la optimización en problemas de planificación de sistemas eléctricos.

Adicionalmente, la utilización del lenguaje Julia para programar el modelo permitirá contribuir con la difusión de esta nueva herramienta gratuita que es fácil de aprender y que permite la implementación rápida de algoritmos para la resolución de problemas de optimización.

1.5. Estructura del Documento

El trabajo se desarrolla en siete capítulos, incluyendo el actual. En el Capítulo 2 se presenta una revisión del estado del arte, en el cuál se analizan las metodologías y formulaciones que hay en la literatura para abordar problemas de planificación en sistemas eléctricos. En el Capítulo 3 se formula matemáticamente el problema de co-optimización de expansión de generación y transmisión en sistemas eléctricos que se va a modelar. Posteriormente, en el Capítulo 4 se presenta el algoritmo de Descomposición Anidada que se utilizará en el trabajo, el cual se aplicará a la co-optimización de expansión de capacidad en generación y transmisión de sistemas eléctricos. Luego, en el Capítulo 5 se describe la metodología propuesta del trabajo realizado, para validar la eficiencia del algoritmo. En el Capítulo 6 se presentan los resultados de los experimentos numéricos propuestos en la metodología, con los análisis respectivos por caso de estudio. Finalmente, en el Capítulo

7 se exponen las conclusiones y se proponen trabajos futuros para dar una continuidad al presente trabajo.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Planificación de un sistema eléctrico

2.1.1. Planificación de expansión de generación

Corresponde a una planificación de los sistemas eléctricos donde se evalúan alternativas de inversión en generación para un horizonte de largo plazo (entre 15 a 30 años) [17–19]. El principal objetivo de este problema es definir **qué** tecnología instalar, **cuántas** unidades, en **qué** lugar y **cuándo** instalarlas con el fin de abastecer una demanda futura. Los modelos clásicos de esta optimización consideran restricciones de capacidad y flujos óptimos de potencia, para demandas aproximadas por bloques (mensuales o anuales).

Debido a los nuevos desafíos por cambiar a una matriz de generación sustentable y menos contaminante, es que la formulación matemática original [20, 21] se ha ido complejizando, con el fin de incorporar señales técnico-económicas que sean compatibles con el medio ambiente y con la operación flexible y segura de un sistema eléctrico. Uno de los aspectos que se vienen incorporando de hace tiempo es el de control de emisiones de gases de efecto invernadero en la evaluación de nuevas inversiones. Una alternativa es modelar restricciones de emisiones en la formulación [22–25] o internalizar los costos externos de la operación en la evaluación de largo plazo [26–30]. Independiente como se formule, esta consideración ha mostrado que las señales de inversión pueden cambiar considerablemente [31–35].

La intermitencia en la generación ERFV también ha sido tema de investigación, ya que es necesario darle representación en las evaluaciones de largo plazo. Su incorporación en la formulación es variada [36–40], aunque en la literatura se destacan dos corrientes principales:

- Métodos probabilísticos: estos métodos utilizan restricciones de confiabilidad como el LOLE (*Lost of Load Expectation*), LOLP (*Lost of Load Probability*) o una estimación del ELCC (*Effective Load Carrying Capacity*) [41–44], con el fin de optimizar suficiencia en el sistema [45–48].
- Programación estocástica con representación de corto plazo: es la más estudiada en la actualidad, ya que se hace necesaria la evaluación de flexibilidad y comportamiento del parque generador ante variaciones significativas en generación renovable y/o

contingencias. Últimamente se han incorporado aproximaciones de representación del corto plazo², las cuales permiten dar una estimación, incluso de forma horaria, de la operación de un sistema eléctrico. En [8,9,49–51] incluso se modela la reserva, mostrando que considerar restricciones de corto plazo afectan significativamente en las señales de inversión en una planificación de largo plazo.

Un desafío que siempre ha estado presente en este tipo de planificación es el manejo de la incertidumbre [52–54]. En general las técnicas utilizadas incluyen los métodos probabilísticos [55–57], utilizando la estadística como base para generar escenarios. Debido a que en la práctica hay escenarios más probables que otros [19,38,58,59] además de la necesidad de tener problemas con tamaños computacionalmente razonables, es que las técnicas de *agrupamiento* [40,60,61] han tomado importancia. Actualmente las metodologías más sofisticadas utilizan la técnica del *Scenario Sampling* [62–65] y evaluación con métricas de riesgo [66–69].

En la práctica, la planificación de expansión en generación (GCEP por sus siglas en inglés) se evalúa para un determinado conjunto de alternativas de inversión. Por ello es que la programación entera-mixta es la más utilizada en las formulaciones matemáticas al problema de optimización [17,18,70,71]. Esta formulación en general incluye todos los aspectos mencionados anteriormente [72], aunque dependiendo del país se consideran algunas restricciones y otras no.

2.1.2. Planificación de expansión de transmisión

Corresponde a la planificación de obras en transmisión, que sean capaces de evacuar la generación, con el fin de satisfacer el crecimiento de demanda a mínimo costo, bajo condiciones técnico-económicas [73–76]. Similar a la planificación de expansión de generación, el objetivo es decidir **qué** tecnología de transmisión instalar, **cuántos** circuitos, en **qué** tramos y en **qué** momento hacerlo.

Debido a que esta planificación estima los mejores tiempos para la puesta en servicio de nuevos circuitos, su optimización preferentemente es dinámica. Esto es, considerar una gran cantidad de años, para definir una estrategia óptima para todo el período [77–83].

En la literatura se distinguen tres categorías para resolver este tipo de planificación [84]:

- Modelos de optimización matemática: se busca minimizar costos totales de operación e inversión sujeto a restricciones técnicas, modeladas como un solo problema de optimización. Las metodologías en esta categoría son amplias, contemplando programación lineal [85], programación dinámica [86,87], programación no-lineal [88–90] y programación entera mixta [91–95]. Esta última es la más utilizada, debido a los avances en las técnicas de descomposición y paralelización en problemas con variables enteras [96–101].
- Métodos heurísticos: consiste en procesos iterativos, que en base a reglas empíricas o sensibilidades se ordena la búsqueda de soluciones al problema de planificación. Los criterios generalmente incluyen costos de operación e inversión, sobrecargas en las líneas y energía no servida. La forma más usual es ubicar los nuevos circuitos

²Se detallan en la sección 2.2

utilizando criterios de sensibilidad [102–104]. Básicamente se evalúa iterativamente el beneficio de construir una línea, por lo que la solución generalmente se hace con métodos de *punto interior* [105, 106].

- Métodos meta-heurísticos: integra aspectos de optimización matemática y heurísticas. En esta categoría se consideran métodos como los *algoritmos genéticos*, *algoritmo de recocido simulado* (*simulated annealing*), *búsqueda tabú*, entre otros [84, 107, 108].

2.1.3. Co-optimización de expansión de generación y transmisión

Esta planificación de expansión es la más atractiva, ya que además de incorporar aspectos de las optimizaciones de expansión revisadas anteriormente, indica planes de obra más económicos al ser realizados en conjunto, pero implica un mayor desafío computacional al ser necesario incluir una mayor cantidad de variables y restricciones en el problema de optimización [109–113].

En este caso se utilizan las mismas metodologías de optimización mencionadas anteriormente, aunque hay implementaciones que dentro de la literatura son las más estudiadas y utilizadas. Una metodología que facilita el tratamiento computacional son los modelos multi-nivel, los cuales permiten por medio de un proceso iterativo obtener el plan de obras óptimo para generación y transmisión [114–118]. A pesar que esta metodología funciona bien bajo supuestos clásicos (por ejemplo, aproximación por curva de duración de demanda), fue necesario incorporar la variabilidad para la generación variable [119–121] e incluso nuevas tecnologías [122] considerando el auge de los *smartgrid* [123, 124].

También hay planteamientos que utilizan métricas de confiabilidad como el LOLE y el LOLP, los cuales además de buscar minimizar costos, buscan planificar sistemas eléctricos seguros, bajo supuestos de aleatoriedad de energías renovables [43, 125–127]. Con el mismo fin, pero con menor aplicación están las metodologías probabilísticas [56, 128, 129]. A pesar de su fácil implementación, no necesariamente obtienen un óptimo global, por lo que no son tan estudiadas en la práctica.

Por otro lado, hay metodologías cuyo objetivo persigue señales de inversión que impliquen un equilibrio en el mercado, utilizando formulaciones de programación entera-mixta [130, 131] o con metodologías dinámicas [132, 133].

En los últimos años se incorporado la formulación dinámica (multi-etapa) permitiendo la utilización de variables enteras [101, 134]. Este tipo de metodología es útil, considerando las necesidades de descomponer el problema por etapas, con el fin de agregar mayor resolución temporal para modelar la operación de corto plazo. Al respecto se han planteado algoritmos de descomposición anidada [135–139] de forma determinista, los cuales permiten incorporar variables enteras de decisión de inversión en generación y transmisión, en un algoritmo de descomposición dual, basado en el algoritmo de la *programación estocástica dinámica dual* (SDDP por sus siglas en inglés). A pesar de que la metodología se ha probado en sistemas térmicos puros, no se ha tratado la ventaja que tiene para valorizar la generación de embalses en sistemas hidrotérmicos.

2.1.4. Coordinación hidrotérmica

En sistemas hidrotérmicos con gran capacidad hídrica es importante optimizar la operación de los embalses, ya que son la mejor alternativa para prestar servicios complementarios respecto a toma de diferencias de carga y generación bajo escenarios de contingencia. Considerando los nuevos desafíos por la penetración de energías intermitentes en los sistemas eléctricos, se hace fundamental incorporar los efectos de corto plazo, en la optimización de operación de los embalses o mejor conocida como coordinación hidrotérmica [140–142].

La coordinación hidrotérmica tiene 3 aspectos que la hacen más compleja que la operación de un sistema térmico puro [143,144]:

- A diferencia de las centrales térmicas, los embalses no tienen un costo variable obtenido directamente. Es necesario valorizar y darle un costo de oportunidad a la generación con los embalses para el corto plazo.
- La operación de centrales hidráulicas está relacionada con la operación anterior (horas o incluso días) de otras centrales hidráulicas, de acuerdo a la topología que tenga una cuenca.
- La incertidumbre de cuánto recurso hídrico habrá en el futuro, lo que afecta directamente en las decisiones de operación en el corto plazo.

En la mayoría de los mercados marginalistas la coordinación hidrotérmica se lleva a cabo utilizando el algoritmo de SDDP propuesto en [145–147], el cual considera aperturas en cadenas de árboles de decisión como forma de manejar la incertidumbre. Esta metodología al ser multi-etapa, resuelve el problema de valorizar la generación con embalse para el corto plazo. Para mercados de subastas, se utiliza una adaptación del algoritmo SDDP [148–150], el cual valoriza el costo de generación con embalses para ofertar energía en el corto plazo.

La metodología del SDDP, a pesar de ser eficiente para la coordinación hidrotérmica es incapaz de ser incorporada en estudios de planificación de expansión de sistemas eléctricos [151,152] debido a la estructura dinámica que posee, siendo incapaz de incorporar variables enteras de la forma que se realiza en los modelos convencionales de expansión de generación y/o transmisión. Se han propuesto metodologías iterativas [153–156], las cuales no han sido exitosas debido a que no aseguran un óptimo global de la solución, se mantiene la representación por curva de duración de bloques y tiempos de simulación excesivamente altos.

Otras soluciones propuestas en la literatura ha sido incorporar la incertidumbre hidrológica en la programación entera-mixta en la planificación de expansión [143,157]. Para hacer tratable computacionalmente el problema se han propuesto metodologías deterministas evaluando los escenarios de forma paralela [158,159], aunque los más utilizados son los que utilizan la programación estocástica [160–163]. Adicionalmente, es recurrente el uso de metodologías de reducción de escenarios, para facilitar la resolución computacional, sin perder información de posibles escenarios de ocurrencia [60,164].

2.1.5. Planificación de programación de operación

Corresponde a la programación de corto plazo en los sistemas eléctricos. La resolución es horaria y su horizonte de simulación es diario o semanal [165, 166]. Se divide en dos subproblemas [141, 167]:

- Predespacho (o *Unit Commitment*): se determina el estado de encendido, apagado y operación de las centrales térmicas para el horizonte de planificación.
- Despacho: se determinan los niveles de generación óptimos para los estados de operación obtenidos del predespacho.

En general el objetivo es minimizar los costos de operación al decidir la cantidad de agua a utilizar en los embalses (sistemas hidrotérmicos) y los niveles de generación de las centrales térmicas, que permitan abastecer la demanda y pérdidas del sistema, sujeto a restricciones técnicas [168, 169]. Estas restricciones generalmente son tiempos mínimos de operación y detención, límites de generación, sistema de transmisión, rampas de toma y rechazo de carga y reservas de operacionales [141, 165, 170]. Hay varias metodologías de optimización para resolver este problema, siendo la programación entera-mixta la más utilizada [171, 172].

Debido a que la operación se programa con parámetros que contienen cierta incertidumbre, como lo son la demanda o la generación ERFV, los planteamientos matemáticos comunes de la literatura consideran esta programación del tipo estocástica [173–180]. En la literatura se proponen metodologías alternativas que permiten evaluar una programación de operación ante una cantidad de escenarios de ocurrencia posibles, como por ejemplo la programación robusta [181–184].

El hecho de considerar una mayor cantidad de variables, restricciones y escenarios en los problemas de programación de operación ha impulsado el uso de técnicas de descomposición y paralelización.

Otros aspectos que se están considerando en la formulación de la programación de operación tienen relación con las nuevas necesidades de demanda de los sistemas eléctricos. Esto es, por ejemplo, representar de mejor forma el sistema de transmisión para incluir las pérdidas o considerar los nuevos regímenes de consumo por la electro-movilidad [185–189].

Últimamente, las formulaciones se enfocan en tratar la flexibilidad operacional por la alta inyección de generación ERFV [190–192]. Esto se ha vuelto una necesidad en los modelos que resuelven el problema de UC, ya que la variabilidad de generación ERFV hace que unidades térmicas convencionales tengan un mayor ciclaje [193, 194]. Además es necesario aumentar los requerimientos de reserva operacional en el sistema, considerando la intermitencia que puede tener la generación ERFV [195, 196].

2.2. Estrategias de representación del corto plazo en estudios de largo plazo

La necesidad de incorporar restricciones de corto plazo en los estudios de largo plazo debido a la penetración ERFV, ha impulsado el desarrollo e investigación de técnicas que permitan estimar los requerimientos de flexibilidad en la operación de un sistema eléctrico. Dar una representatividad fiel a la operación implica incorporar una gran cantidad de

restricciones y variables (muchas de ellas enteras), haciendo más crítica la optimización al tener un problema de mayor dimensión, dificultando su resolución computacionalmente hablando, como se comentó en las secciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3. Por esta razón, las estrategias para representar los efectos de corto plazo en la planificación de largo plazo, se enfocan en supuestos y aproximaciones que permiten reducir las dimensiones del problema de optimización, especialmente el uso de variables enteras. Las estrategias validadas más utilizadas en la literatura son las siguientes:

- **Agrupamiento por tecnologías:** más conocido en la literatura como *Clustered Unit Commitment* (CUC), es una metodología que permite reducir la cantidad de variables en los problemas de UC, al agrupar unidades por tecnología y/o características similares. De esta forma, las variables binarias de operación de las unidades pertenecientes a un grupo de centrales, se reemplazan por una sola variable entera o se toma alguna aproximación [197–199].

Esta formulación en los modelos de planificación ha mostrado disminución significativa en los tiempos de simulación a costa de menor precisión en los resultados obtenidos. Por esto último, es que los trabajos relacionados con el CUC apuntan a métodos para el agrupamiento de centrales y la elección de los parámetros técnicos que representen al grupo de centrales [200–205].

- **Semanas y días representativos:** como se ha comentado anteriormente, la alta penetración ERFV en los sistemas eléctricos crea la necesidad de representar la variabilidad y flexibilidad de la operación en una planificación de largo plazo. Por esta razón, es que la discretización por curva de duración de bloques [206,207] queda obsoleta al ser incapaz de captar los efectos horarios y de corto plazo de la operación de un sistema.

Una alternativa que se planteó, fue definir los bloques de horas, de tal forma que estos se relacionen con la generación variable de las centrales ERFV [208–213]. A pesar de que se pueden incluir aspectos de corto plazo, se siguen ignorando restricciones exclusivamente horarias y de flexibilidad, como las rampas de tomas de carga y los mínimos técnicos de las centrales.

Por la razón anterior, es que la alternativa más utilizada para representar los efectos horarios, es el uso de semanas y días “tipo”, escalando por la cantidad de horas totales que tiene la etapa (en estudios de largo plazo podrían ser semanales e incluso mensuales) [214–221]. A partir de este tipo de estrategia, se ha mostrado el efecto directo que tiene en la planificación de expansión en los sistemas eléctricos, debido a los requerimientos de reserva y respuestas rápidas (rampas de toma y rechazo de carga), por la variabilidad de generación ERFV.

- **Reducción de escenarios:** la cantidad de escenarios utilizados en la programación estocástica, toma relevancia a medida que los problemas de optimización se hacen más complejos al considerar mayor cantidad de restricciones. La idea es reducir la cantidad de escenarios utilizados, sin perder la representatividad y variabilidad de la variable estocástica. Se han realizado trabajos, mostrando que el *trade-off* de la reducción de escenarios versus la pérdida de información es positiva, ya que permite reducir los tiempos de simulación y magnitud del problema de optimización [222–227]. Esta estrategia también se ha aplicado a problemas de expansión

de transmisión, principalmente con incertidumbre hidrológica, corroborando los beneficios que tiene aplicar técnicas de *clustering* en la generación de escenarios para problemas entero-mixtos de gran tamaño [39, 60, 228–232].

2.3. Métodos de descomposición en problemas de optimización de sistemas eléctricos

A pesar de que el aumento en recursos computacionales ha permitido trabajar con problemas de optimización de mayor tamaño, la magnitud de algunos (especialmente los que tienen gran cantidad de variables enteras) hacen imposible su resolución de forma directa. Es por ello, que las técnicas de descomposición matemática en optimización han sido de gran utilidad al momento de abordar problemas de gran tamaño, respecto al recurso computacional actualmente disponible. En la literatura se distinguen dos metodologías, que han sido las bases para las técnicas utilizadas en la actualidad: *Descomposición de Dantzig-Wolfe* y *Descomposición de Benders*.

La descomposición de Dantzig-Wolfe [233–238] permite dividir el problema, en el que cada subproblema se pueden resolver de forma independiente de los demás, ya que relaja las restricciones “*complicantes*”. Para ello se agregan restricciones y variables a cada subproblema, permitiendo que cada solución independiente asegure ser un límite superior en el problema maestro. En la literatura se ha mostrado que esta metodología es fácil y rápida de implementar computacionalmente y que la aplicación puede ser una alternativa para la resolución de problemas de planificación de expansión de sistemas eléctricos [11, 160, 217, 239–243].

La descomposición de Benders [244–249], por su parte, permite dividir el problema de acuerdo al tipo de variables. Se resuelve iterativamente la resolución de un problema maestro, que generalmente contiene solamente variables enteras, con el o los subproblemas. En base a cortes de Benders, se agregan restricciones que condicionan la solución de las variables enteras, permitiendo obtener soluciones factibles como resultado. Esta metodología es la más utilizada, ya que por la estructura que tiene, permite paralelizar la resolución de los subproblemas, de forma fácil y rápida [250–256]. Por la razón anterior, es que en la literatura se pueden encontrar diversos trabajos asociados a la planificación de sistemas eléctricos [257–264]. También se ha mostrado que la programación multinivel que ofrece la descomposición de Benders [251, 265–271], permite abordar problemas no-lineales [272–277] o incluso incorporar aspectos ajenos a la planificación, como por ejemplo, la confiabilidad de los sistemas eléctricos [250, 278–280].

De este último método, tomando la herramienta de los “cortes de Benders”, se han desarrollado metodologías que permiten descomponer los problemas de optimización de planificación de sistemas eléctricos en etapas, utilizando programación dinámica. La más conocida es la Programación Estocástica Dual (SDDP por sus siglas en inglés) [145, 281–285]. A pesar de que esta metodología permite resolver problemas de gran tamaño en subproblemas de menor magnitud, se limita a resolver optimización lineal sin la posibilidad de incorporar variables enteras. Por la razón anterior, es que su aplicación en los sistemas eléctricos ha sido principalmente en la coordinación hidrotérmica, utilizando solamente restricciones de balance energético e hídrico, con el fin de entregar directrices a una optimización posterior del tipo lineal entero-mixto.

Derivados de las metodologías anteriores, con aplicación a la resolución de problemas

de optimización de sistemas eléctricos en la literatura, son la *Relajación Lagrangeana* [286–292] y el *Progressive Hedging* [293–300]. Ambos algoritmos permiten paralelizar la resolución de problemas entero-mixtos, encontrando soluciones en tiempos de simulación razonables. A pesar de que su desempeño se reduce considerablemente en problemas de gran magnitud, se valida que los tratamientos realizados con las variables enteras para dividir el problema maestro, dan una aproximación moderada del resultado.

Tomando como base el algoritmo del SDDP y herramientas de la Relajación Lagrangeana, se han desarrollado metodologías que permiten la incorporación de variables enteras en los subproblemas. En un primer acercamiento a los sistemas eléctricos, el algoritmo se aplicó en problemas de expansión de transmisión (SDDiP o Descomposición Anidada) [135, 301–304], obteniendo los mismos resultados que la formulación extensiva, pero en tiempos de resolución menores. La evolución de esta metodología junto a la disponibilidad de mejores recursos computacionales, han permitido el estudio y su implementación en los problemas de planificación de expansión de sistemas eléctricos [134, 136, 305–307].

2.4. Direcciones futuras y necesidades de investigación

Según lo revisado, la metodología del SDDiP es interesante de desarrollar e investigar, en el sentido de que ha demostrado tener un buen desempeño aplicado a problemas de expansión en sistemas eléctricos, principalmente asociados a la transmisión. A pesar de que ya se ha mostrado la capacidad que tiene esta metodología de descomponer problemas de planificación de expansión, hay algunos aspectos en los cuales no hay mucho desarrollo y que se podrían explorar más.

Uno de ellos es la incorporación de variables enteras propias de la operación, como lo son los estados de encendido y apagado de las unidades generadoras. Actualmente los trabajos han incorporado exitosamente variables enteras que tienen índices por período de inversión (generalmente por año), lo que involucra disponer de un número acotado de variables no convexas en el problema. Una hipótesis que se puede sacar de esto, es que los comportamientos que tengan los cortes utilizados por la metodología SDDiP en cuanto a convergencia sean muchos más estables ya que la consecuencia entre etapas es directa, esto es, la decisión de inversión en un año se mantiene para los años siguientes. En cambio, cuando ya se incorpora una cantidad mayor de variables enteras, que tienen índices que representan una temporalidad horaria, se podría esperar un comportamiento distinto, donde las decisiones de inversión afectarían en cómo operará el parque generador.

Otro punto que no se ha evaluado en la literatura, es la de analizar el comportamiento del SDDiP en sistemas hidrotérmicos que tengan embalses con una regulación considerable. Tomando en cuenta que los embalses pueden actuar como una “batería” de gran magnitud, la operación en base a la incertidumbre hidrológica podría condicionar o no la entrada de nuevos proyectos, adelantando o retrasando su ingreso en operación.

En base a estos antecedentes, el trabajo de tesis se enfocará en implementar y probar el desempeño de la descomposición anidada en un problema de co-optimización de expansión de generación y transmisión incorporando restricciones de corto plazo.

Capítulo 3

Formulación Matemática

En este capítulo se presenta la formulación matemática del problema de co-optimización de planificación de expansión de generación y transmisión en la forma extensiva, definido en base a la revisión bibliográfica. Posteriormente, se plantea la formulación dinámica del problema, la cual fue utilizada con el algoritmo de descomposición anidada propuesto en la tesis.

3.1. Nomenclatura

Conjuntos

G_{th}^E	Generadores térmicos existentes
G_R^E	Parques ERFV existentes
G_{th}^B	Generadores térmicos candidatos a construir
G_R^B	Parques ERFV candidatos a construir
Ω_b	Barras del sistema
Ω_l	Corredores del sistema
S	Escenarios de generación ERFV
Y	Circuitos candidatos del sistema
D_r	Días representativos del año
T	Horas del día representativo
T_p	Años del horizonte de planificación

Parámetros

$CI_{g,y}$	Costo anualizado de inversión de la central g en el año de planificación y [USD/MW]
$CV_{g,y}$	Costo variable de la central g en el año de planificación y [USD/MWh]
C_{falla}	Costo de falla [USD/MWh]
$f_{y,d}$	Factor de escalamiento del día representativo d del año de planificación y
SR	Requerimiento de reserva en giro del sistema [MW]
$c_{km,y}$	Costo anualizado del elemento de transmisión $k - m$ en el año de planificación y [USD/MW]
α_t	Factor de actualización de capital
P_g^{max}	Potencia máxima del generador térmico g [MW]
P_g^{min}	Potencia mínima del generador térmico g [MW]
P_g^S	Potencia máxima del generador térmico g posterior a sincronización [MW]
$P_{g,s,y,d,t}^{EFV}$	Potencia máxima disponible del parque ERFV g , en el escenario s , en el año y , en el día representativo d , en la hora t
Rup_g	Rampa máxima de toma de carga del generador térmico g
Rdn_g	Rampa máxima de rechazo de carga del generador térmico g
A^G	Matriz de punto de inyección
A^T	Matriz de incidencia para los circuitos existentes
A_T^T	Matriz de incidencia para los circuitos candidatos
$d_{k,s,y,d,t}$	Demanda en el nodo k , en el escenario s , en el año y , el día representativo d , en la hora t
X_{km}^0	Número de circuitos en el corredor $k - m$ en el caso base
f_{km}^M	Flujo máximo que puede circular por circuito en el corredor $k - m$
b_{km}	Susceptancia por circuito en el corredor $k - m$
$2 \cdot \theta^M$	Parámetro disyuntivo
θ^M	Ángulo de tensión máximo de barra
X_{km}^M	Número máximo de circuitos en el corredor $k - m$ a construir en el horizonte de planificación
n_g^M	Número máximo de centrales g a construir en el horizonte de planificación
i	Tasa de descuento
π_s	Probabilidad de ocurrencia del escenario s

Variables

$P_{g,s,y,d,t}^{th}$	Potencia despachada por la central térmica g , en el escenario s , en el año de planificación y , en el día representativo d , en la hora t
$P_{g,s,y,d,t}^R$	Potencia despachada por el parque ERFV g , en el escenario s , en el año de planificación y , en el día representativo d , en la hora t
$f_{km,s,y,d,t}^0$	Flujo que circula por el corredor base $k - m$, en el escenario s , en el año de planificación y , en el día representativo d , en la hora t
$f_{km,y_l,s,y,d,t}$	Flujo que circula por el corredor $k - m$, en el escenario s , en el año de planificación y , en el día representativo d , en la hora t
$n_{g,s,y}^{th}$	Número total de unidades del generador térmico g a construirse en el escenario s , en el año y
$n_{g,s,y}^R$	Número total de unidades del parque ERFV g a construirse en el escenario s , en el año y
$X_{km,s,y}$	Decisión de invertir en un nuevo circuito en el corredor $k - m$, en el escenario s , en el año y
$P_{k,s,y,d,t}^F$	Potencia no suministrada en el nodo k , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t
$\theta_{k,s,y,d,t}$	Ángulo de tensión de la barra k , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t
$r_{g,s,y,d,t}$	Reserva en giro que presta el generador g , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t
$u_{g,s,y,d,t}$	Estado operativo del generador g , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t
$S_{g,s,y,d,t}$	Cantidad de partidas del generador g , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t
$D_{g,s,y,d,t}$	Cantidad de detenciones del generador g , en el escenario s , en el año de planificación y , el día representativo d , en la hora t

3.2. Formulación extensiva**3.2.1. Función objetivo**

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{s \in S} \pi_s \sum_{y \in T_p} \alpha_t \left[\sum_{g \in G_{th}^B} CI_{g,y} \cdot (n_{g,s,y}^{th} - n_{g,s,y-1}^{th}) \cdot P_g^{max} + \sum_{g \in G_R^B} CI_{g,y} \cdot (n_{g,s,y}^R - n_{g,s,y-1}^R) \cdot P_g^{max} \right. \\
& + \sum_{km \in Y} c_{km,y} \cdot (X_{km,s,y} - X_{km,s,y-1}) \cdot f_{km}^M \\
& \left. + \sum_{d \in D_r} f_{y,d} \cdot \sum_{t \in T} \left(\sum_{g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B} P_{g,s,y,d,t}^{th} \cdot CV_{g,y} + \sum_{k \in \Omega_b} P_{k,s,y,d,t}^F \cdot C_{falla} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2.2. Restricciones de Inversión

Inversión en generadores

$$n_{g,s,y-1}^* \leq n_{g,s,y}^* \quad \forall g \in G_{th}^B \cup G_R^B, s \in S, y \in T_p | y > 1 \quad (3.2)$$

$$0 \leq n_{g,s,y}^* \leq n_g^M \quad \forall g \in G_{th}^B \cup G_R^B, s \in S, y \in T_p \quad (3.3)$$

Inversión en transmisión

$$X_{km,s,y} \leq X_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p \quad (3.4)$$

$$X_{km,s,y-1} \leq X_{km,s,y} \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p \quad (3.5)$$

3.2.3. Restricciones de Operación

Balance nodal de energía

$$A^G P_{g,s,y,d,t}^* + A^T f_{km,s,y,d,t}^0 + A_T^T f_{km,yl,s,y,d,t} + P_{k,s,y,d,t}^F = d_{k,s,y,d,t} \quad (3.6)$$

$$\forall g, k \in \Omega_b, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T, y_l \in Y$$

Restricción de reserva

$$\sum_{g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B} r_{g,s,y,d,t} \geq SR \quad \forall s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.7)$$

Límites de generación y reserva

$$u_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{min} \leq P_{g,s,y,d,t}^{th} + r_{g,s,y,d,t} \leq u_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{max} \quad (3.8)$$

$$\forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T$$

$$P_{g,s,y,d,t}^R \leq P_{g,s,y,d,t}^{EFV} \quad \forall g \in G_R^E \cup G_R^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.9)$$

Estados operativos de generadores térmicos

$$u_{g,s,y,d,t} \leq n_{g,s,y}^{th} \quad \forall g \in G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.10)$$

$$u_{g,s,y,d,t} \leq u_{g,s,y,d,t-1} + S_{g,s,y,d,t} - D_{g,s,y,d,t} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.11)$$

Rampas de toma/rechazo de carga

$$P_{g,s,y,d,t}^{th} - P_{g,s,y,d,t-1}^{th} \leq u_{g,s,y,d,t-1} \cdot Rup_g + S_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^S \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.12)$$

$$P_{g,s,y,d,t-1}^{th} - P_{g,s,y,d,t}^{th} \leq u_{g,s,y,d,t-1} \cdot Rdn_g + D_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{max} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.13)$$

Flujo por las líneas o transformadores

$$f_{km,s,y,d,t}^0 = b_{km} \cdot X_{km}^0 \cdot (\theta_{k,s,y,d,t} - \theta_{m,s,y,d,t}) \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.14)$$

$$|f_{km,s,y,d,t}^0| \leq X_{km}^0 \cdot f_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.15)$$

$$\left| -\frac{f_{km,y_l,s,y,d,t}}{b_{km}} + (\theta_{k,s,y,d,t} - \theta_{m,s,y,d,t}) \right| \leq 2 \cdot \theta^M \cdot (1 - X_{km,s,y}) \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.16)$$

$$|f_{km,y_l,s,y,d,t}| \leq X_{km,s,y} \cdot f_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.17)$$

Restricciones angulares

$$|\theta_{k,s,y,d,t}| \leq \theta^M \quad \forall k \in \Omega_b, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.18)$$

$$\theta_{k,s,y,d,t} = 0 \quad \forall k \in \Omega_b | k = ref, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (3.19)$$

3.3. Formulación dinámica

La resolución de problemas como el presentado en la sección 3.2 puede ser un desafío para grandes magnitudes, ya que el problema crece exponencialmente con el número de escenarios y el número de etapas. Debido a que en este trabajo se utiliza una metodología de descomposición anidada, se requiere reescribir el problema utilizando las ecuaciones de Bellman, propias de la Programación Dinámica.

Una forma simplificada de la formulación extensiva se puede definir como:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{n \in N} p_n c^T x_n \\
 \text{s.t.} \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \quad \forall n \in N \\
 & x_{a(n)} \leq x_n \quad \forall n \in N \setminus \{1\} \\
 & B_n X_n \leq b_n \quad \forall n \in N
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde:

- p_n Factores de actualización de costos por etapa, incidencia de escenarios, entre otros
- c Costos en función objetivo de variables del problema
- x_n Variables de estado del problema
- x_a Variables de estado en etapa anterior
- X_n Totalidad de variables del problema
- B_n Matriz de restricciones del problema
- b_n Vector “lado derecho” del problema

La ecuación 3.20 es equivalente a la siguiente formulación dinámica para cada nodo $n \in N$:

$$\begin{aligned}
 Q_n(x_{a(n)}) = \text{mín} \quad & c^T x_n + \sum_{m \in C(n)} q_{nm} Q_m(x_n) \\
 \text{(s.t.)} \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\
 & x_{a(n)} \leq x_n \\
 & B_n X_n \leq b_n
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Donde $Q_n(\cdot)$ es la función objetivo en el nodo n . Como se observa, mantiene la relación de las variables de estado entre etapas ($x_{a(n)}$ afecta la solución que toma x_n). Adicionalmente, esta función se define como el costo futuro esperado en el nodo n , en base a soluciones de nodos de etapas temporalmente posteriores.

Resolver el problema con esta formulación reduce significativamente la magnitud del problema al poder ser resuelta por etapas, de hecho en esto se basa la metodología del SDDP. Sin embargo, la dificultad se encuentra en cómo estimar los costos futuros esperados, ya que es necesaria una discretización de variables al estar en presencia de problemas del tipo Lineal Entero Mixto (MILP por sus siglas en inglés).

Capítulo 4

Descomposición Anidada

4.1. Fundamentos e idea del algoritmo

En [135] se propuso un algoritmo de descomposición multi-etapa, el cual resuelve de forma dinámica subproblemas (n) del tipo MILP, acotando iterativamente la solución de cada uno, aproximando una función de costos futuros esperados $Q_n(\cdot)$. El algoritmo se basa principalmente en:

1. registrar localmente las variables de estado (en este caso, variables relacionadas temporalmente)
2. acotar iterativamente la aproximación de borde inferior de la función objetivo

Para lograr lo anterior, se introduce una nueva variable auxiliar por cada variable de estado (k) a cada subproblema $z_{n,k}$ la cual corresponde al estado anterior temporal (o *Parent Node*, según la literatura) de la variable $x_{a(n),k}$. La variable $z_{n,k}$ no necesariamente se hace entera, lo que permite finalmente valorizar los costos futuros, en este caso, de inversión.

Por lo tanto, el problema dinámico (DP) a resolver por etapa es el siguiente:

$$\begin{aligned} Q_n(x_{a(n)}) = \text{mín} \quad & c^T x_n + \sum_{m \in C(n)} q_{nm} Q_m(x_n) \\ (s.t.) \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \leq x_n \\ & z_n = x_{a(n)} \\ & B_n X_n \leq b_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2. Descripción del algoritmo

Cada iteración i consiste en dos fases o pasos de optimización: fase **forward** y fase **backward**. En la fase forward, se optimiza desde la etapa $t = 1$ hasta T , resolviendo cada

nodo, considerando la función de costo futuro esperado. Al terminar esta fase, se almacenan las variables de decisión de las inversiones y se calcula el borde superior UB (Upper Bound, por sus siglas en inglés), escalados según sea el peso del escenario, valorizando un costo total de inversión.

En la fase backward, se optimiza cada escenario desde la última etapa T hasta la 2, contemplando los resultados de las variables de decisión de interés obtenidos por la fase forward. A partir de la desigualdad obtenida por la nueva optimización, se define una aproximación de una valorización futura de las decisiones tomadas en la fase forward. Finalmente, cuando se llega al inicio (etapa $t = 2$), se calcula el borde inferior LB (Lower Bound, por sus siglas en inglés).

Para cada iteración se hace una comparación entre el UB y LB del problema. En caso de que ambos bordes cumplan con el criterio de convergencia (diferencia menor a un porcentaje) el algoritmo finaliza, reportando los resultados por etapa. También está la posibilidad de limitar el algoritmo por número de iteraciones, si es que no se visualiza una tendencia a la convergencia que se requiere.

Fase Forward

Para cada iteración i , se optimiza cada escenario de forma independiente, desde la etapa $t = 1$ hasta T , resolviendo para cada nodo la aproximación de (4.1). Entonces, para cada nodo $n \in N$:

$$\begin{aligned}
 (P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^i)) : \quad \underline{Q}_n(x_{a(n)}) = \text{mín} \quad & c^T x_n + \Psi_n^i(x_n) \\
 (s.t.) \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\
 & z_n \in \{0, 1\}^K \\
 & z_n \leq x_n \\
 & z_n = x_{a(n)}^i \\
 & B_n X_n \leq b_n
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde $\Psi_n^i(x_n)$ es la aproximación del costo esperado futuro de las variables de decisión de inversión. Esta, se aproxima mediante distintos tipos de cortes que se verán más adelante, la cuál consiste en dos parámetros: $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$. Esta función se puede interpretar como una recta, en la cual ν_m^i es el intercepto y π_m^i es la pendiente. Entonces, para cada nodo $n \in N$, $\Psi_n^i(x_n)$ se obtiene como:

$$\Psi_n^i(x_n) := \text{mín}\{\alpha_n : \alpha_n \geq \sum_{m \in C(n)} q_{nm}(\nu_m^l + (\pi_m^l)^T x_n), \forall l = 1, \dots, i-1\} \tag{4.3}$$

Una vez resuelto cada nodo, se almacenan y pasan los resultados de las variables de decisión x_n^i a la siguiente etapa. Esto se realiza de forma sucesiva hasta haber resuelto la última etapa del horizonte. Por lo tanto, la principal finalidad de la fase forward, es entregar resultados de las variables de decisión para cada etapa, para ser utilizadas posteriormente por la fase backward.

Fase Backward

Posteriormente a resolver los problemas de la fase forward, se resuelven los escenarios de forma independiente desde la etapa $t = T$ hasta la 2. Para cada nodo $n \in N$ se van optimizando los problemas tomando como dato los resultados de las variables de decisión obtenidos de la fase forward, permitiendo que para cada nodo se obtengan los valores $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$, resolviendo un problema auxiliar (R_n^i) , que serán utilizados en la iteración posterior $(\Psi_{a(n)}^{i+1})$ en la fase forward.

Criterio de convergencia

Como se mencionó anteriormente, por cada fase se almacenan dos valores, UB y LB, los cuales se comparan al terminar cada iteración y definen si el algoritmo finaliza o no, de acuerdo al criterio de convergencia definido anteriormente.

Para una iteración i , el valor de UB^i se obtiene por $\sum_{n \in N} p_n c^T x_n^i$. Esto finalmente representa los costos totales de inversión de todos los nodos del problema. Por otro lado, el valor LB^i corresponde a $(P_1^i(\Psi_1^i))$, que viene a ser la aproximación de los costos futuros en el nodo 1 del problema.

El algoritmo se detiene, si es que se cumple:

$$\frac{|UB^i - LB^i|}{UB^i} \leq \epsilon \quad (4.4)$$

Donde ϵ es el criterio de convergencia definido (%).

4.3. Resumen del algoritmo

En resumen, el algoritmo de descomposición a utilizar en este trabajo se describe a continuación:

Algorithm Descomposición Anidada

Dato: Criterio de convergencia ϵ
Inicialización: $i = 0$, $UB^0 = 0$, $LB^0 = -10^6$
Resultado: Solución óptima de inversiones para cada nodo $(x_n)_{n \in N}$

- 1: **while** $\frac{|UB^i - LB^i|}{UB^i} \leq \epsilon$ **do**
- 2: $i \leftarrow i + 1$
- /* Fase Forward
- 3: **for all** $t = 1 \dots T$ **do**
- 4: **for all** $n \in N : t(n) == t$ **do**
- 5: resolver $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^i))$
- 6: almacenar soluciones de inversiones x_n^i
- 7: almacenar la aproximación de costo futuro en el nodo maestro Ψ_1^i
- 8: **end for**
- 9: **end for**
- /* Fase Backward
- 10: **for all** $t = T \dots 2$ **do**
- 11: **for all** $n \in N : t(n) == t$ **do**
- 12: resolver problema auxiliar de $(P_n^i(x_{a(n)}^i), \Psi_n^{i+1}), (R_n^i)$
- 13: almacenar los coeficientes de los cortes $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$ para calcular $\Psi_{a(n)}^{i+1}$
- 14: **end for**
- 15: **end for**
- /* Cálculo de UB y LB
- 16: $LB^i = c^T x_1^i + \Psi_1^i$
- 17: $UB^i = \sum_{n \in N} p_n c^T x_n^i$
- 18: **end while**
- 19: **return** $(x_n)_{n \in N}$

4.4. Tipos de cortes

En el documento [135] se definen tres condiciones que deben cumplir los cortes que usa el algoritmo: **válido**, **ajustado** y **finito**. Se menciona y se prueba que si se cumplen las condiciones anteriores, se asegura que la convergencia se da al valor óptimo.

Para la definición de las condiciones mencionadas, cito la definición **Definition 2** del documento [135]:

Definition 4.1. Sea $\{(\nu_n^i, \pi_n^i)\}_{n \in \Omega^i}$ los coeficientes de un corte, obtenido de la fase backward, en la iteración i del algoritmo SND o SDDiP. La colección de cortes es:

válido, si para todo $n \in \Omega^i$ y para toda iteración i , el corte $\nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)}$ es válido para el valor real de la función $Q_n(X_{a(n)})$, que es:

$$Q_n(x_{a(n)}) \geq \nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)} \quad \forall x_{a(n)} \in \{0, 1\}^d \quad (4.5)$$

ajustado, si para todo $n \in \Omega^i$ y para toda iteración i , el corte $\nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)}$ coincide con el valor aproximado de la función $Q_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1})$ en la solución de la fase forward

$x_{a(n)}^i$, obtenida en la interacción i , que es:

$$Q_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}) = \nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)}^i \quad (4.6)$$

finito, si es cada iteración i de los algoritmos *SND* y *SDDiP*, en la fase *backward* se puede generar una cantidad finita de cortes distintos (ν_n^i, π_n^i)

Para ello, los autores mencionan cuatro tipos de cortes, llamados **Bender's cuts**, **Integer Optimality cuts**, **Lagrangean cuts** y **Strengthened Bender's cuts**. Cada uno de ellos obtiene los parámetros $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$, necesarios para la descomposición anidada.

Observación: es importante recordar, que los parámetros de los cortes se obtienen en la fase *backward*.

4.4.1. Bender's cuts

Estos cortes fueron propuestos por primera vez en [244]. Para cada iteración i , se resuelve un problema auxiliar (R_n^i) que corresponde a una relajación lineal del problema $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}))$. De aquí, se obtiene el parámetro π_n^i , que es la variable dual de la restricción $z_n = x_{a(n)}^i$.

Sea $Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i)$ el valor óptimo de (R_n^i) . De esta forma, el corte de Bender i se agrega al nodo padre $a(n)$ como:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} (Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i) + (\pi_m^i)^T (x_{a(n)} - x_{a(n)}^i)) \quad (4.7)$$

De acuerdo a (4.3), se obtiene que el intercepto de la curva ν_n^i se obtiene por:

$$\nu_n^i = Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i) - \pi_n^i x_{a(n)}^i \quad (4.8)$$

Intuitivamente se aprecia de que este tipo de corte es válido y finito, sin embargo al resolver una relajación lineal, no necesariamente se puede asegurar que sea ajustado. Por lo tanto, el uso de este tipo de corte no asegura el valor óptimo.

4.4.2. Integer Optimality cuts

Estos cortes fueron introducidos en [308] para resolver programación estocástica de dos etapas con variables de primera etapa binarias. Se adaptó para la Descomposición Anidada en [135]. En este caso, el problema auxiliar (R_n^i) es tal cual $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}))$, sin relajación como en los cortes de Bender.

Sea ν_n^i el valor óptimo de (R_n^i) . El i -ésimo corte que se agrega al nodo padre $a(n)$ es:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} \nu_m^i (1 + \sum_{k \in K} (x_{a(n),k}^i - 1) x_{a(n),k} + \sum_{k \in K} (x_{a(n),k} - 1) x_{a(n),k}^i) \quad (4.9)$$

A diferencia del corte anterior, este al resolver el problema considerando las variables enteras, cumple con la condición de ajuste. Por la misma razón, este corte no es computacionalmente eficiente.

4.4.3. Lagrangian cuts

En [135] se introducen estos cortes. Ahí mismo se prueba que cumplen con las tres condiciones, las cuales fueron comprobadas en [309], en la cual se introdujeron técnicas para mejorar los cortes resolviendo una relajación lagrangiana adaptada.

La idea base de este corte es resolver una relajación lagrangiana de $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}))$ con la restricción $z_n = x_{a(n)}^i$. Esto es:

$$(R_n^i) : \max_{\pi_n} \mathcal{L}_n^i(\pi_n) + \pi_n^T x_{a(n)}^i \quad (4.10)$$

Donde el lagrangiano $\mathcal{L}_n^i(\pi_n)$ está definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^i(\pi_n) = \min \quad & c^T x_n + \alpha_n - \pi_n^T z_n \\ (s.t.) \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \leq x_n \\ & B_n X_n \leq b_n \\ & \alpha_n \geq \sum_{m \in C(n)} q_{nm} (\nu_m^l + (\pi_m^l)^T x_n), \forall l = 1, \dots, i \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por lo tanto, los coeficientes $\{\nu_n^i, \pi_n^i\}$ corresponden al costo de la función objetivo de la ecuación (4.11) y a la solución dual de la ecuación (4.10), respectivamente.

A pesar de que este corte se demuestra que cumple con las tres condiciones, su implementación es más difícil, además de no ser eficiente si lo que se busca es acelerar los tiempos de resolución.

4.4.4. Strengthened Bender's cuts

Estos cortes fueron producto de propiedades de los cortes de Bender y de los cortes lagrangianos. La idea de fondo consiste en revolver un problema adicional por nodo, correspondiente a la relajación lagrangiana de 4.11.

Concretamente, en la i -ésima fase backward, en el nodo n , la metodología es:

- Resolver una relajación lineal de $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}))$.
- Almacenar el coeficiente π_n^i de la variable dual asociada con la restricción $z_n = x_{a(n)}^i$.
- Resolver la relajación lagrangiana de (4.11) fijando π_n con π_n^i .

- Almacenar el coeficiente ν_n^i , dado por $\nu_n^i = \mathcal{L}_n^i(\pi_n)$.

Posteriormente, el corte viene dado por:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} (\nu_m^i + (\pi_m^i)^T x_{a(n)}) \quad (4.12)$$

Este corte está condicionado de igual forma que los cortes de Bender tradicional respecto a la condición de ajuste. Finalmente, la pendiente del corte estará dada por la misma pendiente obtenida del corte de Bender, y su intercepto estará dado por:

$$\forall m \in C(a(n)), \nu_m^i = \mathcal{L}_m^i(\pi_m) \geq Q_m^{LP}(x_{a(n)}^i) - (\pi_m^i)^T x_{a(n)}^i \quad (4.13)$$

A pesar de que este corte es una versión mejorada del corte de Bender tradicional, aún no se asegura la convergencia del algoritmo, ya que no es certera la condición de ajuste.

La siguiente tabla resume si los cortes revisados anteriormente cumplen o no con las condiciones de convergencia mencionadas:

Condición	(B)	(I)	(L)	(SB)
Válido?	Sí	Sí	Sí	Sí
Ajustado?	No	Sí	Sí	No
Finito?	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 4.1

CUMPLIMIENTO DE CONDICIONES DE CONVERGENCIA. (B), (I), (L) Y (SB) DENOTAN BENDER'S, INTEGER OPTIMALITY, LAGRANGIAN Y STRENGTH BENDER'S

Capítulo 5

Metodología

La formulación y algoritmo mostrados en los capítulos anteriores se implementó utilizando el lenguaje de programación Julia [310]. También se implementó la formulación extensiva del problema de estudio para su resolución por el método tradicional (programación lineal entera mixta).

Para evaluar el desempeño de la descomposición anidada sobre problemas de expansión de capacidad de sistemas eléctricos, se proponen los siguientes casos de estudio.

5.1. Caso 1: comparación con formulación extensiva

Con la finalidad de analizar diferencias en los tiempos de resolución y/o convergencia, se resolvió un problema de co-optimización de expansión de generación y transmisión, utilizando la forma extensiva y descomposición anidada. En este último caso, se utilizaron los distintos cortes de forma separada para evaluar su desempeño por sí solos.

Lo anterior se aplicó sobre dos sistemas de prueba: uno de 6 nodos y el otro de 24, los cuales se describen en el apéndice (B).

De todas las simulaciones realizadas se compararon los tiempos de resolución, valores de la función objetivo y métricas de convergencia.

Adicionalmente, en base al desempeño individual de cada corte en la descomposición anidada, se busca validar las condiciones mencionadas en la sección 4.4 respecto a la convergencia de los cortes.

5.2. Caso 2: comparación de familia de cortes

Como se mostró en el capítulo anterior, hay una variedad de tipos de cortes que tienen aplicación en la descomposición anidada. Con el fin de evaluar su desempeño de forma independiente, complementando los análisis del caso de estudio anterior, se hizo una comparación de la convergencia, analizando su evolución por cada iteración.

Dado que el principal objetivo de este caso de estudio es analizar los comportamientos de la convergencia por cada tipo de corte, se fijó que la descomposición anidada realice **50 iteraciones**, independientemente se haya cumplido con el criterio de convergencia, además

de fijar un gap sumamente pequeño. De esta forma es posible identificar las ventajas y desventajas que tiene cada corte.

Los experimentos computacionales se llevaron a cabo sobre los mismos sistemas de prueba del caso de estudio anterior.

5.3. Caso 3: desempeño de patrones de cortes

En base a los resultados y análisis realizados de los casos de estudio anteriores, se llevaron a cabo sensibilidades que consisten en probar distintas combinaciones en el uso de cortes en la descomposición anidada.

La finalidad de este caso de estudio es para evaluar y proponer un patrón de cortes que permita reducir los tiempos de simulación, asegurando converger a un nivel razonable.

Para evaluar el desempeño de cada patrón de cortes, se compararán los estados y gap de convergencia, tiempos de resolución y número de iteraciones realizadas.

Nuevamente, los experimentos se desarrollaron sobre los sistemas de prueba de 6 y 24 nodos.

5.4. Comentarios

Debido a que el principal objetivo es encontrar una mejora en los tiempos de resolución del problema, se descarta el corte Lagrangiano dentro de la familia de cortes a analizar, dada la poca eficiencia que tendría en el esquema de la descomposición anidada como se menciona en la sección 4.4.3. Por lo tanto, solamente se considerarán los cortes *Bender's cuts* (B), *Integer Optimality cuts* (I) y *Strengthened Bender's cuts* (SB).

La implementación se hizo en el lenguaje de programación Julia v0.6 [310], utilizando como librerías principales JuMP [311] y SDDP [312] (primera versión).

Todas las pruebas fueron hechas en un computador personal con sistema operativo linux Ubuntu 20³ con Procesador Intel Core i5-3230M de cuatro núcleos (2.60 GHz) con memoria RAM de 4 GB.

Se utilizó el solver comercial CPLEX [313] con licencia académica de CPLEX Optimization Studio.

³<https://ubuntu.com/>.

Capítulo 6

Experimentos Computacionales

En este capítulo se presentan los resultados y análisis de los casos de estudio propuestos en la metodología.

Para los casos de estudio y dada la estructura de los problemas a resolver, es que se fijaron valores de $\text{gap}=1.5\text{E-}4$ para los experimentos sobre el caso de prueba IEEE 6 nodos y un $\text{gap}=1.0\text{E-}4$ para el caso de prueba IEEE 24 nodos. Respecto a el algoritmo de descomposición anidada, se fija un número de iteraciones máximo de 50.

Adicionalmente, para incorporar el efecto de los árboles de decisión, se generan tres muestras equiprobables para ser utilizadas en todas las pruebas documentadas a continuación⁴.

6.1. Caso 1: comparación con formulación extensiva

6.1.1. Sistema IEEE de 6 nodos

Resolviendo de forma extensiva para el sistema de prueba IEEE de 6 nodos, se obtiene que la convergencia se alcanzó con un tiempo de simulación de **1335 segundos**. El valor óptimo ponderado por las tres muestras encontrado fue de **53915.2 [MMUSD]**.

Los resultados de desempeño de los cortes *Bender's cuts* (B), *Integer Optimality cuts* (I) y *Strengthened Bender's cuts* (SB) se muestran en la siguiente tabla:

	(B)	(I)	(SB)
Convergencia	No	No	Sí
Tiempo [s]	- (100*)	-	998
Nº iteraciones	50 (8*)	50	32
Valor óptimo [MMUSD]	48865.8	6245.0	53913.8
Gap relativo	11 %	85 %	0 %

Tabla 6.1

RESULTADOS DE DESEMPEÑO DE CORTES. CASO 1, SISTEMA IEEE 6 NODOS. *VALORES EN LOS CUALES SE ESTABILIZA EL GAP.

⁴En el apéndice (B) se muestra la banda estocástica de los recursos solares y eólicos.

De tabla anterior se pueden hacer los siguientes análisis por tipo de corte:

- ***Bender's cuts***: Utilizando solo este tipo de corte, no es posible cumplir con el criterio de convergencia definido. Sin embargo, el gap relativo se estanca rápidamente en 11 % después de la iteración 8 pasados los 100 segundos. Esto tiene sentido, ya que como se mencionó en el capítulo (4), el hecho de resolver una linealización del problema original, implica que se vean diferencias significativas si es que se consta de un número superior de variables enteras. A partir de esto, se demuestra que este tipo de cortes no cumple con el criterio de ajuste.
- ***Integer Optimality cuts***: Este tipo de corte fue el más rápido en iterar, realizando el máximo de 50 iteraciones en solo 281 segundos. Sin embargo, su convergencia nunca mejora del 85 %. A pesar de que este corte permite asegurar encontrar un valor óptimo por cumplir con las tres condiciones de convergencia, su uso exclusivo no sería suficiente para abordar el problema que se quiere resolver. Básicamente se asegura que la solución entera es factible en un óptimo local, pero a una convergencia mala.
- ***Strengthened Bender's cuts***: Este fue el único de los cortes que pudo converger al criterio definido. Lo logró con 32 iteraciones en un tiempo de 998 segundos, aproximadamente un 75 % del obtenido con la metodología extensiva. A pesar de mostrar el mejor desempeño de los cortes, el hecho de no cumplir con el criterio de ajuste, utilizar solamente este corte no aseguraría que la solución encontrada sea la óptima.

6.1.2. Sistema IEEE de 24 nodos

Resolviendo de forma extensiva para el sistema de prueba IEEE de 24 nodos, se obtiene que la convergencia se alcanzó con un tiempo de simulación de **538 segundos**. El valor óptimo ponderado por las tres muestras encontrado fue de **1084.6 [Miles MMUSD]**.

Los resultados de desempeño de los cortes *Bender's cuts* (B), *Integer Optimality cuts* (I) y *Strengthened Bender's cuts* (SB) se muestran en la siguiente tabla:

	(B)	(I)	(SB)
Convergencia	No	No	Sí
Tiempo [s]	- (174*)	-	436
Nº iteraciones	50 (5*)	50	15
Valor óptimo [Miles MMUSD]	1054.3	92.1	1083.2
Gap relativo	3%	89%	0%

Tabla 6.2

RESULTADOS DE DESEMPEÑO DE CORTES. CASO 1, SISTEMA IEEE 24 NODOS. *VALORES EN LOS CUALES SE ESTABILIZA EL GAP.

De tabla anterior se pueden hacer los siguientes análisis por tipo de corte:

- ***Bender's cuts***: Nuevamente, utilizar solamente este corte no permitió alcanzar el criterio de convergencia definido, estancándose en un gap relativo de 3 % después de la iteración 5 a los 174 segundos. A diferencia del experimento realizado con el

sistema de prueba IEEE 6 nodos, la convergencia fue mucho menor, bajando del 11 % de gap relativo obtenido anteriormente. Esto puede atribuirse a que al existir una mayor cantidad de ofertas en inversión, no habrían diferencias significativas entre la solución entera y la resuelta con linealización. Dicho de otra forma, a mayor cantidad de variables enteras, existen más soluciones factibles, por lo que los cortes no entregan señales “tan discretas”.

- ***Integer Optimality cuts***: Al igual que el experimento realizado en el sistema IEEE 6 nodos, este fue el corte más rápido en iterar. Sin embargo su convergencia oscila en un gap relativo de 89 %. De los tres cortes utilizados se remarca en que este es el único que permitiría asegurar que el valor encontrado sea el óptimo para la convergencia dada. Por esta razón, se descarta utilizarlo de forma exclusiva, solo en conjunto de otro corte que guíe la solución a una mejor convergencia.
- ***Strengthened Bender’s cuts***: Se repite el análisis del experimento anterior. Este fue el único de los tres cortes utilizados que cumplió con el criterio de convergencia definido, en un tiempo mucho menor que resolviendo el problema con formulación extensiva (~81 % del tiempo total).

6.1.3. Análisis

A partir de los resultados obtenidos en este caso de estudio, solamente los cortes del tipo *Strengthened Bender* permitirían reducir los tiempos de simulación respecto a la resolución por programación lineal entera mixta de forma extensiva, cumpliendo con el criterio de convergencia establecido. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, por no cumplir con el criterio de ajuste (capítulo (4)), no aseguraría que el resultado encontrado corresponda al valor óptimo.

A pesar de lo anterior, está la posibilidad de establecer valores de gap pequeños y así asegurar que al menos las decisiones de inversión (generación y transmisión) sean las mismas encontradas con la formulación extensiva.

De todas formas y para mantener la pulcritud, es que se hace necesario complementar este corte con otro que asegure que el valor encontrado sea el óptimo. Por ejemplo, los cortes del tipo *Integer Optimality*.

6.2. Caso 2: comparación de familia de cortes

6.2.1. Sistema IEEE de 6 nodos

Para complementar la información de la tabla (6.1.1), la figura (6.1) muestra la evolución de la convergencia para los dos tipos de cortes utilizados en el sistema de prueba IEEE 6 nodos que mostraron converger en cierto punto: *Bender’s cuts* (B) y *Strengthened Bender’s cuts* (SB), fijando como criterio de término el máximo de 50 iteraciones. Los cortes *Integer Optimality cuts* (I) se omiten, por el valor de gap alto en el que se “estancó”.

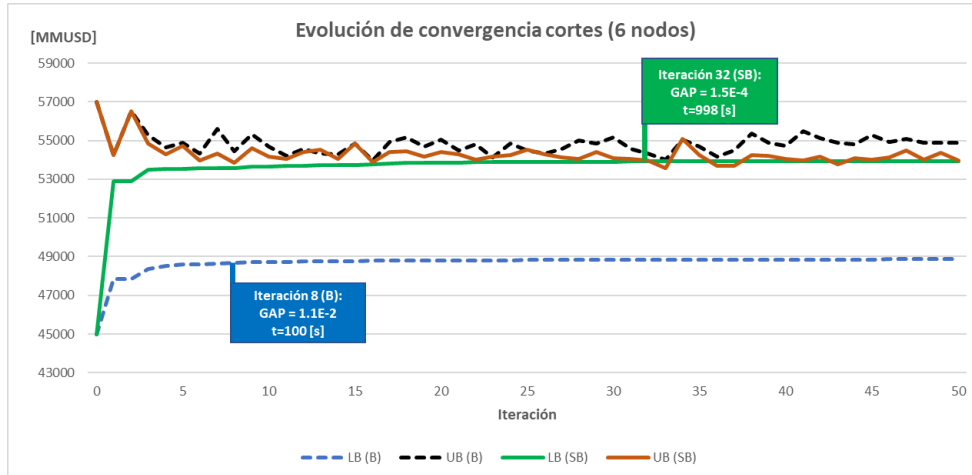


Figura 6.1. Evolución de convergencia cortes (B) y (SB) para caso de estudio 2, sistema IEEE 6 nodos.

Como se aprecia en el gráfico, el corte de **Bender** tradicional converge en un par de iteraciones a su valor final, que está en torno al 11 % de gap relativo. Este valor se explicaría por las cualidades que tiene el sistema de prueba simulado, en el que hay pocas ofertas en inversión y el sistema se puede considerar “ajustado” en cuanto a los requerimientos por restricciones de operación de corto plazo. Solo por concepto de inversión, el hecho de resolver una versión linealizada del problema original implica que pueden haber diferencias en la función objetivo de hasta 800 [MMUSD] (costo de inversión de una central térmica), respecto a la mejor solución del problema entero. Lo anterior también se puede comprobar observando la evolución del borde superior de la convergencia: **UB (B)**, el cual no es estable y oscila en torno a un valor.

Por otro lado, el corte **Strengthened Bender** mostró tener un desempeño mucho mejor. Además de ser el único que pudo alcanzar la convergencia definida con un comportamiento mucho más suave, fue capaz de reducir los tiempos de simulación, respecto a la resolución convencional: formulación extensiva con programación lineal entera-mixta.

A pesar de que ninguno de los cortes anteriores asegura encontrar una solución óptima, debido a que no cumplen el criterio de ajuste mencionado en el capítulo (4), se descarta el uso del corte de Bender tradicional para una propuesta posterior de un patrón de cortes. A priori, dado lo anterior, los patrones de cortes debiesen contener tanto cortes **Strengthened Bender** para valorizar de forma aproximada los costos futuros y los cortes **Integer Optimality** para asegurar que la convergencia se hace a un valor óptimo, dado que cumple con los tres criterios de convergencia definidos anteriormente.

6.2.2. Sistema IEEE de 24 nodos

De la misma forma, se muestra la evolución de convergencia para los dos tipos de cortes utilizados que mostraron converger en un punto: *Bender's cuts* (B) y *Strengthened Bender's cuts* (SB):

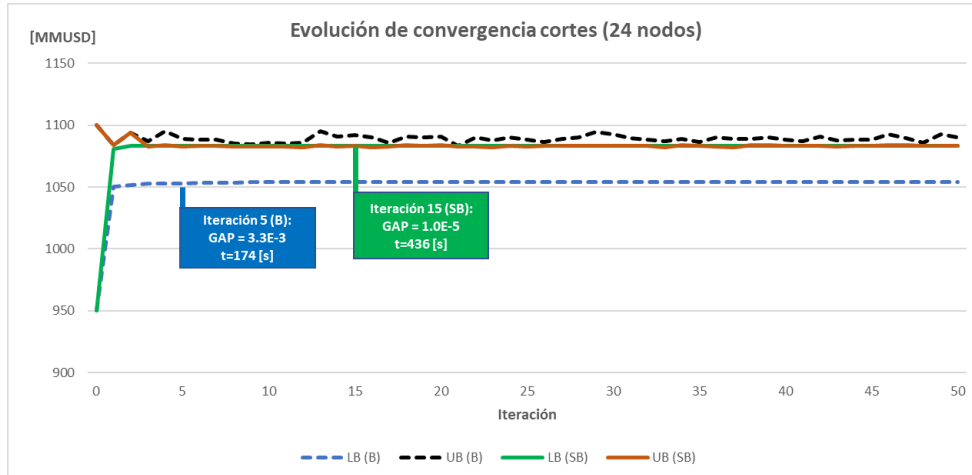


Figura 6.2. Evolución de convergencia cortes (B) y (SB) para caso de estudio 2, sistema IEEE 24 nodos.

Al igual que en el experimento realizado sobre el sistema IEEE 6 nodos, se repiten los mismos comportamientos. Por un lado, los cortes de *Bender* tradicional no son capaces de converger al criterio definido. En este caso, la convergencia alcanzada fue mucho mejor que en el experimento realizado con el sistema de prueba IEEE 6 nodos, exclusivamente por la estructura del problema. Esto se puede corroborar haciendo una comparación de la evolución del borde superior de la figura (6.2) con la figura (6.1). A pesar de que en ambos casos oscila en torno a un valor (inestabilidad que implica que no alcance la convergencia exigida), el comportamiento en el experimento realizado sobre el sistema de prueba IEEE 24 nodos es mucho más suave, lo que finalmente se tradujo en una mejora de gap relativo de 11 % a 3 %.

Respecto a los cortes *Strengthened Bender*, se muestra que son los únicos capaces de entregar un resultado en la convergencia exigida, que además redujo los tiempos de simulación respecto a la resolución convencional por programación lineal entera mixta con formulación extensiva.

6.2.3. Análisis

De los tres cortes utilizados, solo los del tipo *Bender* y *Strengthened Bender* muestran una evolución en la convergencia. El primero de ellos, a pesar de no converger dentro de los criterios definidos, requiere pocas iteraciones para alcanzar un valor en el que se estabiliza, el cual dependerá exclusivamente de la estructura del problema entero mixto que se está resolviendo. Por otro lado, los cortes *Strengthened Bender* logran converger al criterio definido con una mejora en los tiempos de simulación, respecto a la resolución convencional por medio de programación lineal entera mixta de forma extensiva. Sin embargo, por sí solos no aseguran que el resultado obtenido sea el óptimo por no cumplir con el criterio de ajuste, mencionado en el capítulo (4).

Respecto a los cortes del tipo *Integer Optimality*, a pesar de su rapidez en iterar, no entregan señales que permitan visualizar una evolución en mejorar la convergencia. Por otro lado, es el único corte de los tres que asegura que el resultado obtenido corresponda al valor óptimo para esa convergencia en particular.

A partir de lo anterior, y dado el desempeño observado por cada corte, se propone definir patrones que utilicen: (1) *Integer Optimality cuts* para asegurar que el resultado obtenido sea óptimo para variables enteras, y así disponer de un punto de partida para que posteriormente (2) *Strengthened Bender's cuts* (mayormente) para reducir los tiempos de simulación y converger a un criterio definido. Por lo tanto, cada patrón de cortes siempre iniciará con un *Integer Optimality cuts* y luego se aplicarán los del tipo *Strengthened Bender's cuts*.

6.3. Caso 3: desempeño de patrones de cortes

En base a los análisis del caso anterior, se hizo la sensibilidad de utilizar los siguientes patrones de cortes en el algoritmo de descomposición:

- **(2SB+I)**: de cada 3 cortes, 2 son (SB) y 1 es (I)
- **(3SB+I)**: de cada 4 cortes, 3 son (SB) y 1 es (I)
- **(4SB+I)**: de cada 5 cortes, 4 son (SB) y 1 es (I)
- **(5SB+I)**: de cada 6 cortes, 5 son (SB) y 1 es (I)

Nuevamente se fija el algoritmo para finalizar a las 50 iteraciones, manteniendo los mismos Gap para cada sistema de prueba.

6.3.1. Sistema IEEE de 6 nodos

Los resultados de desempeño de la sensibilidad de patrones de cortes propuestos para el sistema de prueba IEEE 6 nodos se muestran en la siguiente tabla:

	(SB)	(2SB+I)	(3SB+I)	(4SB+I)	(5SB+I)
Convergencia	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Gap convergencia	1.3E-4	1.1E-4	9.7E-5	8.4E-5	1.2E-4
Tiempo [s]	998	924	922	1302	1594
Nº iteraciones	32	37	33	50	49

Tabla 6.3

RESULTADOS DE DESEMPEÑO DE PATRONES DE CORTES. CASO 3, SISTEMA IEEE 6 NODOS.

Gráficamente, la evolución de la convergencia por iteración para cada uno de los patrones de cortes propuestos se muestran en la figura (6.3):

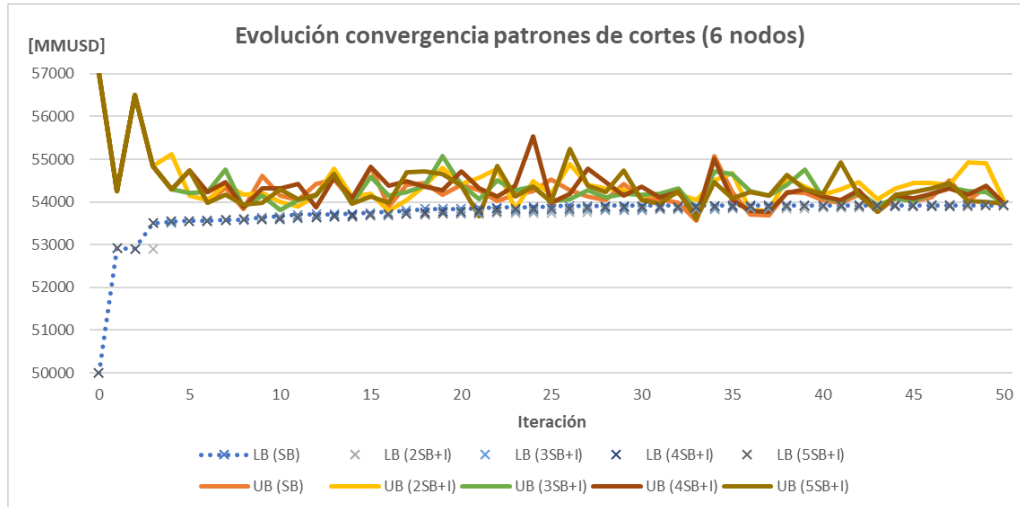


Figura 6.3. Evolución de convergencia de patrones de cortes propuestos para caso de estudio 3, sistema IEEE 6 nodos.

Como se aprecia, a modo general el comportamiento de la convergencia es similar. Entre la iteración 30 y la 50 (máxima) se da la convergencia para cualquiera de los cortes. El hecho de considerar *Integer Optimality cuts* entre medio de *Strengthened Bender’s cuts* permite acotar las señales de optimización que se resuelve en cada una de las etapas, ya que representa de mejor forma una valorización futura de variables enteras. Posteriormente, los cortes del tipo *Strengthened Bender* valoran de mejor forma la interacción de las variables enteras con de las variables continuas (operación de etapas futuras por decisiones de inversiones actuales).

Más allá de la cantidad de iteraciones necesarias para resolver el problema, es necesario considerar los tiempos de simulación que tomaron los patrones de cortes en converger al criterio definido. En la figura (6.4), se muestra una comparación de los tiempos totales de simulación por patrón:



Figura 6.4. Tiempos de resolución de patrones de cortes para caso de estudio 3, sistema IEEE 6 nodos.

Como se observa, para el sistema de prueba IEEE de 6 nodos, en el incremento de cantidad de cortes *Strengthened Bender* por cada corte *Integer Optimality* muestra un punto de inflexión en la combinación óptima de estos.

En primer lugar tenemos el patrón (2SB+I), el cuál de por sí ya mostró mejoras respecto a utilizar solamente los cortes *Strengthened Bender*. El poder acotar de mejor forma el comportamiento de las variables enteras por medio de un corte *Integer Optimality* cada dos *Strengthened Bender*, permitió reducir 7% del tiempo de simulación.

Posteriormente, cambiar el patrón incorporando un corte *Strengthened Bender* adicional antes de aplicar el corte *Integer Optimality* redujo aún más los tiempos, pero no de forma tan significativa. De todas maneras, esta combinación es la que tuvo el menor tiempo de resolución, permitiendo bajar a un 69% del tiempo empleado con la metodología extensiva).

Sin embargo, con los patrones (4SB+I) y (5SB+I), ocurrió totalmente lo opuesto. Los tiempos de simulación subieron significativamente superando los obtenidos solamente por utilizar cortes *Strengthened Bender* e incluso, superando el tiempo de la resolución por formulación extendida, en el caso de utilizar el patrón (5SB+I).

6.3.2. Sistema IEEE de 24 nodos

Los resultados de desempeño de la sensibilidad de patrones de cortes propuestos para el sistema de prueba IEEE 24 nodos se muestran en la siguiente tabla:

	(SB)	(2SB+I)	(3SB+I)	(4SB+I)	(5SB+I)
Convergencia	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Gap convergencia	2.1E-5	6.0E-5	6.7E-5	7.7E-5	7.7E-5
Tiempo [s]	436	396	372	445	398
Nº iteraciones	15	15	15	15	15

Tabla 6.4

RESULTADOS DE DESEMPEÑO DE PATRONES DE CORTES. CASO 3, SISTEMA IEEE 24 NODOS.

Gráficamente, la evolución de la convergencia por iteración para cada uno de los patrones de cortes propuestos se muestran en la figura (6.5):

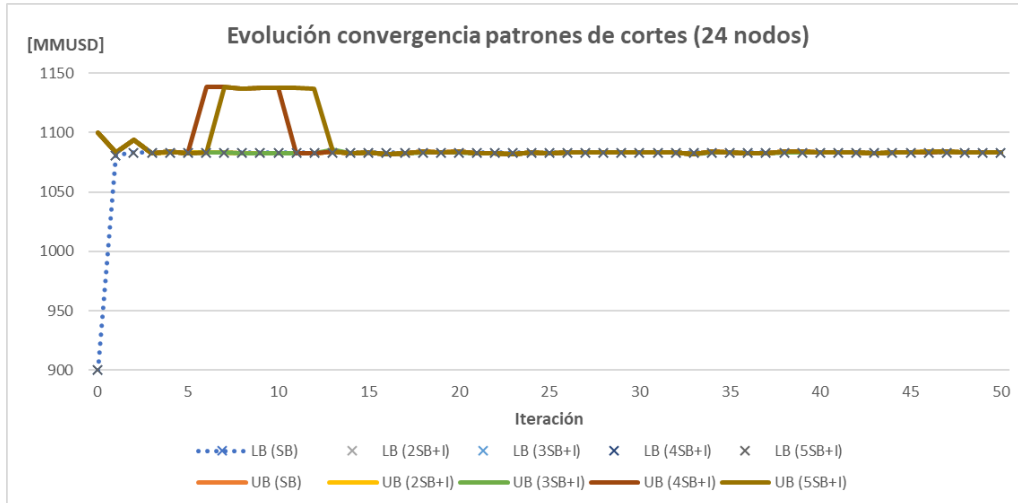


Figura 6.5. Evolución de convergencia de patrones de cortes propuestos para caso de estudio 3, sistema IEEE 24 nodos.

Como se aprecia, la convergencia en cualquier de los patrones fue de 15 iteraciones, incluso cuando solamente se ocupa el corte *Strengthened Bender*. Sin embargo, se aprecia un comportamiento particular en los patrones (4SB+I) y (5SB+I), en el que posterior a la aplicación del primer corte del tipo *Integer Optimality* en las iteraciones 5 y 6 respectivamente, ocurre un aumento en el valor del borde superior (UB). Este se mantiene alto hasta que nuevamente se aplica el segundo corte del tipo *Integer Optimality* (iteraciones 11 y 13, respectivamente). Lo anterior se debe, a que es necesario ir acotando las soluciones por una aproximación que considere el comportamiento discreto de las variables enteras, que en este caso está siendo realizado por los cortes *Integer Optimality*. Por lo tanto, se puede concluir de que para este problema en particular, al menos debe ir un corte *Integer Optimality* antes de la iteración 4.

Respecto al resto de los patrones, dado que convergen a un mismo número de iteraciones, es necesario analizar cuánto tiempo les tomó a cada uno. En la figura (6.6) se muestran los tiempos totales de simulación por patrón de cortes:

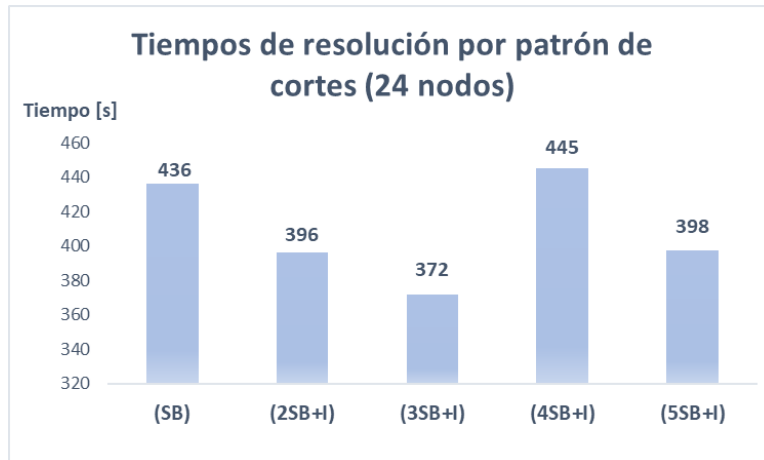


Figura 6.6. *Tiempos de resolución de patrones de cortes para caso de estudio 3, sistema IEEE 24 nodos.*

Al igual que en el experimento realizado sobre el sistema IEEE 6 nodos, se observa un punto de inflexión en los tiempos de simulación. Hay una mejora considerable en el tiempo al considerar un patrón (2SB+I) respecto a solo utilizar cortes del tipo *Strengthened Bender*. Si se considera uno de estos cortes adicional (patrón 3SB+I) implica una mejora leve en los tiempos. Nuevamente, el patrón (3SB+I) es el de mejor desempeño, reduciendo los tiempos de resolución a un 69% respecto a la metodología tradicional (extensiva).

Además de la oscilación del borde superior (UB) en los patrones (4SB+I) y (5SB+I), no se visualiza una mejora en los tiempos de simulación. Por lo tanto, los dos patrones anteriores se descartan como prácticos para ser utilizados en el problema de estudio.

6.3.3. Análisis

Los resultados de este caso de estudio muestran que alternar el uso de cortes del tipo *Strengthened Bender* con *Integer Optimality* permitiría reducir considerablemente los tiempos de simulación, respecto a la resolución convencional (programación lineal entera mixta con formulación extensiva).

Por un lado, los cortes *Strengthened Bender* permiten una convergencia rápida al ser eficientes en encontrar una aproximación numéricamente razonable de los costos de etapas futuras. Esto implica que en una cantidad reducida de iteraciones, se logre converger al criterio definido. Como se mencionó en el capítulo (4), este corte por sí solo no asegura que el resultado sea el valor óptimo. Por esta razón fue necesario complementarlo con los cortes *Integer Optimality*.

En base a los resultados, para el problema de estudio, el patrón adecuado para utilizar sería la configuración (3SB+I). De esta forma se podría reducir los tiempos de simulación considerablemente, sin sacrificar tanto convergencia como optimalidad del problema.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo Futuro

A partir de la revisión, desarrollo y análisis del trabajo, se pueden concluir los siguientes puntos:

- Dados los nuevos desafíos que trae la penetración de generación por fuentes renovables, toma cada vez más relevancia el considerar restricciones operativas de corto plazo en una planificación de expansión de capacidad para largo plazo. Las limitaciones técnicas de operación deben ser consideradas en los estudios de largo para poder asegurar que la generación efectivamente se dé a un mínimo costo y de forma segura.
- Considerar restricciones de corto plazo en la planificación de expansión de capacidad de largo plazo implica incorporar una gran cantidad de variables al problema (continuas y enteras), por lo que es necesario contemplar nuevas técnicas si se quiere resolver en tiempos razonables, sin perder la representación de las restricciones operativas. Lo anterior se puede llevar a cabo por medio de supuestos que agrupen variables; por ejemplo el *Clustered Unit Commitment* o la representación por días tipo; y/o por medio de técnicas de descomposición.
- El algoritmo de Descomposición Anidada es una metodología que permite abordar programación estocástica, permitiendo optimizar árboles de decisión sin sacrificar convergencia. Además, es capaz de reducir los tiempos de simulación.
- De los tipos de cortes estudiados, solamente los del tipo **Bender** y **Strengthened Bender** muestran evolución en la convergencia. Respecto al corte del tipo **Integer Optimality**, se mostró que es el más rápido en iterar de los 3, asegurando optimalidad, pero no evoluciona en convergencia.
- Los diversos tipos de cortes disponibles para la Descomposición Anidada, tienen distintos desempeños en la resolución de problemas de planificación de expansión de capacidad. Algunos de ellos incluso no son capaces de converger a un criterio definido ni asegurar la optimalidad del resultado. Sin embargo, la aplicación de patrones de cortes aseguran obtener un resultado óptimo en tiempos de simulación mucho menores, respecto a la resolución tradicional por medio de la programación lineal entera mixta con formulación extensiva.

- De los patrones propuestos, el que mejor tuvo desempeño fue el **(3SB+I)**, el cual aplica tres cortes del tipo *Strengthened Bender* por cada uno del tipo *Integer Optimality*. Permitió reducir considerablemente los tiempos de simulación, cumpliendo con los criterios de convergencia definidos.
- La aplicación de la Descomposición Anidada ofrece mejoras en la resolución convencional de problemas de gran magnitud como lo son la co-optimización de expansión de capacidad de generación y transmisión en sistemas eléctricos de potencia.

Dadas las mejoras que se obtuvieron por utilizar la Descomposición Anidada en el problema de expansión de capacidad, se proponen los siguientes trabajos futuros para dar continuidad a la investigación y desarrollo del algoritmo:

- Probar el desempeño de cada corte, por familia de variable de decisión: como se analizó en los experimentos computacionales, la estructura del problema influye en el desempeño de algunos tipos de corte. Se podría analizar cómo afectan los tipos de corte a cada familia de variables de decisión del problema de estudio (decisiones de inversión en generación, decisiones de inversión en transmisión, recurso hídrico utilizado en los embalses, etc.). El tipo de restricciones que condiciona a una variable de decisión, podría mostrar distintos cumplimientos para cada tipo de corte.
- Replicar los experimentos numéricos, pero con sistemas de prueba mucho más exigentes computacionalmente hablando: los casos de estudio en este trabajo se desarrollaron en virtud de tener la capacidad de simularlos en un computador personal. Sería interesante realizar los mismos casos de estudio con sistemas de prueba de mayor magnitud para corroborar los resultados obtenidos en esta tesis.
- Incorporar nuevas técnicas o aproximaciones al modelo, de forma de reducir aún más los tiempos de resolución sin perder precisión en los resultados.
- Realizar sensibilidades sobre la cantidad de escenarios y cantidad de etapas (simulación con mayor horizonte) para evaluar el desempeño de la descomposición anidada en problemas más grandes a los utilizados en este trabajo.
- Revisar formas para incorporar restricciones de no-anticipatividad en la Descomposición Anidada.

Apéndice A

Resumen ejecutivo

Generation and Transmission Expansion Planning using a Nested Decomposition algorithm

Carlos Vergara Branje
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile
carlos.vergarab@alumnos.usm.cl

Dr. Esteban Gil Sagás
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile
esteban.gil@usm.cl

Abstract—This work presents an implementation of a nested decomposition algorithm applied to the co-optimization of generation and transmission capacity expansion planning problem in power systems, including operational constraints. The proposed methodology has been gaining relevance in the last years, as it can solve large mixed-integer problems efficiently and faster than the conventional methodology (mixed-integer linear problems with extensive formulation).

In order to test the algorithm's performance and cuts configuration, three case studies were conducted, applied on IEEE test systems. The first case study compares the performance between the nested decomposition algorithm and the traditional methodology. The second case study compares the performance of each cut type, analyzing differences in simulation times and algorithm convergence. The third case study tests the performance of the proposed cut patterns, based on the previous study case.

Based on the results of the study cases and their analysis, conclusions are made about capability and performance of the nested decomposition algorithm applied to the capacity expansion planning problem, showing that is possible to get results at a reasonable convergence in less simulation times, using a pattern of cuts.

Index Terms—capacity expansion planning, operational constraints, nested decomposition, SDDiP

I. INTRODUCTION

Generation and transmission capacity expansion planning is a fundamental problem in the electricity industry, aiming to optimize the long-term investment decisions for the generation and transmission assets while satisfying various operational constraints [1]. Due to the growing demand for electricity, power system planners must ensure that the system can meet the future load growth while maintaining reliability and economic efficiency [2]. The problem involves determining the optimal mix of generation technologies and transmission expansion plans over a multi-year planning horizon to meet the future electricity demand while minimizing the overall cost. This problem is commonly known as Generation Capacity and Transmission Expansion Planning (GCTEP).

Over the years, numerous planning models and optimization techniques have been developed to address the complexity and uncertainty associated with power systems. These models and techniques have evolved from traditional deterministic programming to stochastic programming [3], and from single-stage to multi-stage optimization frameworks [4]. Deterministic models assume that all the inputs and parameters are known with certainty, whereas stochastic models take into account the uncertainty associated with load growth, fuel prices, and other factors [5]. The deterministic models include linear programming, mixed-integer linear programming, and nonlinear programming, while the stochastic models include stochastic programming and robust optimization.

In recent years, there has been a growing interest in developing planning models that incorporate short-term operational constraints [6], such as ramping constraints, minimum up/down times, and startup/shutdown costs. These constraints can have a significant impact on the operational flexibility of power systems, and hence, including them in planning models is crucial for achieving a reliable and efficient power system operation. In addition, there has been significant progress in developing models that consider the integration of renewable energy sources, storage systems, and demand response programs [7].

Including more constraints in the planning models related with the operational aspects, makes the GCTEP problem size growth significantly. Thus, several decomposition methodologies have been proposed to solve large-scale generation and transmission capacity expansion planning problems efficiently. Bender's decomposition [8], Dantzig-Wolfe decomposition [9], Lagrangian relaxation [10], and Progressive Hedging [11] are some of the widely used decomposition techniques in power system optimization. These methods decompose the original problem into subproblems that can be solved separately and efficiently.

In this paper, we focus on the performance evaluation of Nested Decomposition (ND) called Stochastic Dual Dynamic Integer Programming (SDDiP) [12, 13], another optimization technique that has gained significant attention in the recent literature. SDDiP is an iterative algorithm that decomposes the original problem into subproblems that can be solved separately, and then combines the solutions using dynamic programming, optimizing the generation and transmission expansion planning problem under uncertainty by constructing a sequence of linear programming problems that approximate the original nonlinear problem [14, 15].

In the next section, we present a detailed problem formulation for GCTEP problem. Then, we introduce the SDDiP

algorithm. In the subsequent section, we present the methodology and study cases. Then we show and discuss the numerical results of the simulations. Finally, we draw conclusions and provide suggestions for future research.

II. PROBLEM FORMULATION

The GCTEP is a mathematical optimization problem that seeks the optimal mix of generation and transmission investments. The objective is to determine the optimal capacity expansion plan that minimizes the total cost of building and operating the power system over a given planning horizon, subject to a variety of technical, environmental, and regulatory constraints.

Below is the extensive formulation (EF) used for this work:

A. Sets

G_{th}^E	Existing thermal generators
G_R^E	Existing renewable farms
G_{th}^B	Candidate thermal generators
G_R^B	Candidate renewable farms
Ω_b	Nodes
Ω_l	Transmission lines
S	Scenarios of renewable profiles
Y	Candidate transmission lines
D_r	Representative days of the year
T	Hours of the representative day
T_p	Years of the planning horizon

B. Params

$CI_{g,y}$	Annualized cost for generator g for planning year y [USD/MW]
$CV_{g,y}$	Variable cost of generator g for planning year y [USD/MWh]
C_{falla}	Value of Unserved Energy [USD/MWh]
$f_{y,d}$	Scalar for representative day d of planning year y
SR	Spin-up reserve requirement [MW]
$c_{km,y}$	Annualized cost of line $k - m$ for planning year y [USD/MW]
α_t	Period discount factor
P_g^{max}	Max capacity of thermal generator g [MW]
P_g^{min}	Min stable level of generation of thermal generator g [MW]
P_g^S	Max capacity of thermal generator g after sincronization [MW]
$P_{g,s,y,d,t}^{EFV}$	Rating for renewable farm g , for scenario s , for year y , for representative day d , for hour t
Rup_g	Max Ramp Up rate for thermal generator g
Rdn_g	Max Ramp Down rate for thermal generator g
A^G	Generator's injection matrix
A^T	Existing line's connection matrix
A_T^T	Candidate line's connection matrix
$d_{k,s,y,d,t}$	Load demand in the node k , for scenario s , for year y , for representative day d , for hour t
X_{km}^0	Number of existing circuits in line $k - m$

f_{km}^M	Max flow of line $k - m$
b_{km}	Susceptance of line $k - m$
$2 \cdot \theta^M$	Disjunctive parameter
θ^M	Max angle for nodes
X_{km}^M	Max circuits of line $k - m$ to build in the planning horizon
n_g^M	Max units of generator g to build in the planning horizon
i	Discount rate
π_s	Probability of scenario s

C. Variables

$P_{g,s,y,d,t}^{th}$	Generation of thermal generator g , scenario s , year y , representative day d , hour t
$P_{g,s,y,d,t}^R$	Generation of renewable farm g , scenario s , year y , representative day d , hour t
$f_{km,s,y,d,t}^0$	Base flow in line $k - m$, scenario s , year y , representative day d , hour t
$f_{km,y,t,s,y,d,t}$	Flow in line $k - m$, scenario s , year y , representative day d , hour t
$n_{g,s,y}^{th}$	Units built of thermal generator g scenario s , year y
$n_{g,s,y}^R$	Units built of renewable farm g scenario s , year y
$X_{km,s,y}$	Decision to invest on a new circuit of line $k - m$, scenario s , year y
$P_{k,s,y,d,t}^F$	Unserved Energy in node k , scenario s , year y , representative day d , hour t
$\theta_{k,s,y,d,t}$	Angle in node k , scenario s , year y , representative day d , hour t
$r_{g,s,y,d,t}$	Spin-up reserve provision by generator g , scenario s , year y , representative day d , hour t
$u_{g,s,y,d,t}$	Operational state (on-off) of generator g , scenario s , year y , representative day d , hour t
$S_{g,s,y,d,t}$	Starts of generator g , scenario s , year y , representative day d , hour t
$D_{g,s,y,d,t}$	Shutdowns of generator g , scenario s , year y , representative day d , hour t

D. Equations

$$\begin{aligned}
 \min \sum_{s \in S} \pi_s \sum_{y \in T_p} \alpha_t & \left[\sum_{g \in G_{th}^B} CI_{g,y} \cdot (n_{g,s,y}^{th} - n_{g,s,y-1}^{th}) \cdot P_g^{max} \right. \\
 & + \sum_{g \in G_R^B} CI_{g,y} \cdot (n_{g,s,y}^R - n_{g,s,y-1}^R) \cdot P_g^{max} \\
 & + \sum_{km \in Y} c_{km,y} \cdot (X_{km,s,y} - X_{km,s,y-1}) \cdot f_{km}^M \\
 & + \sum_{d \in D_r} f_{y,d} \cdot \sum_{t \in T} \left(\sum_{g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B} P_{g,s,y,d,t}^{th} \cdot CV_{g,y} \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k \in \Omega_b} P_{k,s,y,d,t}^F \cdot C_{falla} \right) \right] \tag{1}
 \end{aligned}$$

subject to:

$$n_{g,s,y-1}^* \leq n_{g,s,y}^* \quad \forall g \in G_{th}^B \cup G_R^B, s \in S, y \in T_p | y > 1 \quad (2)$$

$$0 \leq n_{g,s,y}^* \leq n_g^M \quad \forall g \in G_{th}^B \cup G_R^B, s \in S, y \in T_p \quad (3)$$

$$X_{km,s,y} \leq X_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p \quad (4)$$

$$X_{km,s,y-1} \leq X_{km,s,y} \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p \quad (5)$$

$$A_g^G P_{g,s,y,d,t}^* + A^T f_{km,s,y,d,t}^0 + A_T^T f_{km,y_l,s,y,d,t} + P_{k,s,y,d,t}^F = d_{k,s,y,d,t} \quad (6)$$

$$\forall g, k \in \Omega_b, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T, y_l \in Y$$

$$\sum_{g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B} r_{g,s,y,d,t} \geq SR \quad \forall s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (7)$$

$$u_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{min} \leq P_{g,s,y,d,t}^{th} + r_{g,s,y,d,t} \leq u_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{max} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (8)$$

$$P_{g,s,y,d,t}^R \leq P_{g,s,y,d,t}^{EFV} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (9)$$

$$u_{g,s,y,d,t} \leq n_{g,s,y}^{th} \quad \forall g \in G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (10)$$

$$u_{g,s,y,d,t} \leq u_{g,s,y,d,t-1} + S_{g,s,y,d,t} - D_{g,s,y,d,t} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (11)$$

$$P_{g,s,y,d,t}^{th} - P_{g,s,y,d,t-1}^{th} \leq u_{g,s,y,d,t-1} \cdot Rup_g + S_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^S \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (12)$$

$$P_{g,s,y,d,t-1}^{th} - P_{g,s,y,d,t}^{th} \leq u_{g,s,y,d,t-1} \cdot Rdn_g + D_{g,s,y,d,t} \cdot P_g^{max} \quad \forall g \in G_{th}^E \cup G_{th}^B, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (13)$$

$$f_{km,s,y,d,t}^0 = b_{km} \cdot X_{km}^0 \cdot (\theta_{k,s,y,d,t} - \theta_{m,s,y,d,t}) \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (14)$$

$$|f_{km,s,y,d,t}^0| \leq X_{km}^0 \cdot f_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (15)$$

$$\left| -\frac{f_{km,y_l,s,y,d,t}}{b_{km}} + (\theta_{k,s,y,d,t} - \theta_{m,s,y,d,t}) \right| \leq 2 \cdot \theta^M \cdot (1 - X_{km,s,y}) \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (16)$$

$$|f_{km,y_l,s,y,d,t}| \leq X_{km,s,y} \cdot f_{km}^M \quad \forall km \in \Omega_l, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (17)$$

$$|\theta_{k,s,y,d,t}| \leq \theta^M \quad \forall k \in \Omega_b, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (18)$$

$$\theta_{k,s,y,d,t} = 0 \quad \forall k \in \Omega_b | k_{ref}, s \in S, y \in T_p, d \in D_r, t \in T \quad (19)$$

Equation (1) is the objective function, which minimizes both investment and operational costs. The problem has a lot of equations to represent the conditions and constraints that must be respected, among them the investment for generators (2)-(3), investment of new lines (4)-(5), nodal demand balance (6), spin-up reserve requirements (7), limits for generation and reserve (8)-(9), operating state of thermal generators (10)-(11), maximum ramp up/down rates (12)-(13), line and transformer flows (14)-(15)-(16)-(17) and node angle limits (18)-(19).

E. Dynamic Formulation

The resolution of problems like presented before can be challenging to solve, specially for large-scale systems. As a decomposition methodology is used in this work, it is necessary to re-write the problem, using Bellman's equations in order to use Dynamic Programming.

A simplified form of the EF can be written as:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{n \in N} p_n c^T x_n \\ \text{s.t.} \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \quad \forall n \in N \quad (20) \\ & x_{a(n)} \leq x_n \quad \forall n \in N \setminus \{1\} \\ & B_n X_n \leq b_n \quad \forall n \in N \end{aligned}$$

Where p_n are the factors for cost restatements and scenario's weight, c are the costs for the variables of the problem, x_n are the variables of the problem, x_a are the variables of the previous stage, X_n are all the variables of the system, B_n is the constraints matrix and b_n is the right-hand-side vector of the optimization problem.

The equation (20) is equivalent to the next dynamic formulation, for each scenario tree node $n \in N$:

$$\begin{aligned} Q_n(x_{a(n)}) = \min \quad & c^T x_n + \sum_{m \in C(n)} q_{nm} Q_m(x_n) \\ \text{(s.t.)} \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \quad (21) \\ & x_{a(n)} \leq x_n \\ & B_n X_n \leq b_n \end{aligned}$$

Where $Q_n(\cdot)$ is the objective function of the node n . As you can see, it keeps the relation of the state-variables between the stages ($x_{a(n)}$ affects the solution of x_n). Additionally, this function is known as the expected future cost of the node n , based on the results of nodes that temporary occurs after.

Solving the problem using this formulation reduce significantly the scale of the problem, as it is decomposed in stages. This is what SDDP does indeed. Nevertheless, it is complex to estimate the expected future costs, since it's necessary to use integer variables.

III. NESTED DECOMPOSITION ALGORITHM

A. Algorithm idea

The nested decomposition algorithm SDDiP solves multi-stage problems, optimizing sub-problems (n) with integer variables, using the dynamic approach presented on the previous

section [16, 17]. Iteratively, the algorithm aims to find a future cost function $q_n(\cdot)$ that limits the values that the integer values can take. The algorithm is based on:

- 1) storage locally the state variables (in this case, variables linked temporarily)
- 2) limit iteratively the lower bound of the objective function

To achieve above, it is necessary to introduce a new ancillary variable for each state-variable (k) in every sub-problem $z_{n,k}$, which corresponds to the state of the previous stage (or *Parent Node*) of the variable $x_{a(n),k}$ [18–20]. The variable $z_{n,k}$ is not integer which allows the approximation of future costs, in this case, investment decisions.

Thus, the dynamic problem (DP) to solve for each stage is formulated as follows:

$$\begin{aligned} Q_n(x_{a(n)}) = \min \quad & c^T x_n + \sum_{m \in C(n)} q_{nm} Q_m(x_n) \\ (s.t.) \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \leq x_n \\ & z_n = x_{a(n)} \\ & B_n X_n \leq b_n \end{aligned} \quad (22)$$

Each iteration i has two optimization phases: **forward pass** and **backward pass**.

Forward Pass

For each iteration i , it is optimized each scenario independently, from stage $t = 1$ to T , solving for each node the dynamic approximation (22). So, for each node $n \in N$:

$$\begin{aligned} (P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^i)) : \quad & Q_n(x_{a(n)}) = \min \quad c^T x_n + \Psi_n^i(x_n) \\ (s.t.) \quad & x_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \in \{0, 1\}^K \\ & z_n \leq x_n \\ & z_n = x_{a(n)}^i \\ & B_n X_n \leq b_n \end{aligned} \quad (23)$$

Where $\Psi_n^i(x_n)$ is the approximation of the expected future costs of the investment decision variables. This costs are computed using different types of cuts, which are going to be review later, that uses two parameters: $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$. This function can be understand as a line, where ν_m^i is the intercept and π_m^i is the slope. Thus, for each node $n \in N$, $\Psi_n^i(x_n)$ is calculated as:

$$\begin{aligned} \Psi_n^i(x_n) := \min \{ \alpha_n : \alpha_n \geq \sum_{m \in C(n)} q_{nm} (\nu_m^l + (\pi_m^l)^T x_n), \\ \forall l = 1, \dots, i-1 \} \end{aligned} \quad (24)$$

Once the problem is solved for each node, all the investment results x_n^i are stored and passed to the next stage. This is

made subsequent until the last stage of the horizon is solved. Therefore, the main objective of the Forward Pass phase is provide results of the decision variables for each stage, to be used later by the Backward Pass phase.

Backward Pass

After completing the Forward Pass, all the scenarios are solved independently from stage $t = T$ to the second. For each node $n \in N$ the problems are optimized using the results obtained in the Forward Pass phase, making possible to retrieve the parameters $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$ for each node, solving the ancillary problem (R_n^i). This params are going to be included in the Forward Pass phase of the next iteration ($\Psi_{a(n)}^{i+1}$).

Convergence criteria

For every iteration i two values are computed: the Upper Bound (UB) and Lower Bound (LB).

The UB^i is calculated as $\sum_{n \in N} p_n c^T x_n^i$. This param represents the total costs of investment of all the scenario tree nodes of the problem.

On the other side, LB^i is calculated as ($P_1^i(\Psi_1^i)$), which corresponds to the future costs approximation on the node 1 of the problem.

The algorithm stops if:

$$\frac{|UB^i - LB^i|}{UB^i} \leq \epsilon \quad (25)$$

Where ϵ is the defined convergence criteria (%).

Basically, if both parameters are closed enough (based on the convergence criteria), is because the future costs approximation function is well represented. In other words, is possible to estimate the future costs of the system based on the decisions made in the first stage of the horizon.

B. Types of cuts

In the literature, there are mentioned three conditions that a the cuts of this algorithm must met: **valid**, **tight** and **finite**. This ensures that the result obtained at the given convergence criteria is an optimal value.

If $\{(\nu_n^i, \pi_n^i)\}_{n \in \Omega^i}$ are the coefficients of a cut, computed in the Backward Pass phase, in the iteration i of the ND algorithm, the definition for each condition is listed below:

The cut is **valid** if:

$$Q_n(x_{a(n)}) \geq \nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)} \quad \forall x_{a(n)} \in \{0, 1\}^d \quad (26)$$

The cut is **tight** if:

$$Q_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}) = \nu_n^i + (\pi_n^i)^T x_{a(n)}^i \quad (27)$$

The cut is **finite** if its possible to compute a finite number of different coefficients (ν_n^i, π_n^i) for each iteration i in the Backward Pass phase.

Considering the conditions above, there are four types of cuts [21–24] that are highly mentioned and used in ND algorithm: **Bender's cuts**, **Integer Optimality cuts**, **Lagrangean cuts** y **Strengthened Bender's cuts**. All of them use the params $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$ required for the algorithm.

Bender's cuts

This cuts were presented by the first time in [25]. For each iteration i , it is solved an ancillary problem (R_n^i) which is a linear relaxation of the problem ($P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1})$). The param π_n^i is obtained from the dual variable of the constraint $z_n = x_{a(n)}^i$.

With $Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i)$ as the optimal value of (R_n^i). Thus, the Bender's cut i is added to the parent node $a(n)$ as:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} (Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i) + (\pi_m^i)^T (x_{a(n)} - x_{a(n)}^i)) \quad (28)$$

According to (24), the intercept ν_n^i is computed by:

$$\nu_n^i = Q_n^{LP}(x_{a(n)}^i) - \pi_n^i x_{a(n)}^i \quad (29)$$

This type of cut is valid and finite, but as it involves to solve a linear relaxation, it doesn't met the requirement of being tight. Therefore, this type of cut by itself doesn't ensure an optimal value.

Integer Optimality cuts

This cuts were introduced in [26] to solve two-stage stochastic programming problems with binary variables at the first stage. It was adapted to ND in [27]. In this case, the ancillary problem (R_n^i) is as it is ($P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1})$), without any relaxation like in Bender's cuts.

Where ν_n^i is the optimal value of (R_n^i). Thus, the cut added to the parent node $a(n)$ is:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} \nu_m^i (1 + \sum_{k \in K} (x_{a(n),k}^i - 1) x_{a(n),k} + \sum_{k \in K} (x_{a(n),k} - 1) x_{a(n),k}^i) \quad (30)$$

Unlike Bender's cuts, as the Integer Optimality cuts consider the variables as integer, the tight condition is met. On the other side, this approach makes this type of cut inefficient.

Lagrangian cuts

This cuts were also adapted in [27] to ND. In that paper and [28] is proved that this type of cut met the three conditions.

The idea is to solve a Lagrangian relaxation of ($P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1})$) with the constraint $z_n = x_{a(n)}^i$. i.e.:

$$(R_n^i) : \max_{\pi_n} \mathcal{L}_n^i(\pi_n) + \pi_n^T x_{a(n)}^i \quad (31)$$

Where the lagrangian term $\mathcal{L}_n^i(\pi_n)$ is defined by:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^i(\pi_n) = \min c^T x_n + \alpha_n - \pi_n^T z_n \\ (s.t.) x_n \in \{0, 1\}^K \\ z_n \in \{0, 1\}^K \\ z_n \leq x_n \\ B_n X_n \leq b_n \\ \alpha_n \geq \sum_{m \in C(n)} q_{nm} (\nu_m^i + (\pi_m^i)^T x_n), \forall l = 1, \dots, i \end{aligned} \quad (32)$$

The coefficients $\{\nu_n^i, \pi_n^i\}$ are computed as the objective function value of the equation (32) and the dual solution of the equation (31), respectively.

Despite this cut meets the three conditions, its implementation is complex, furthermore, its not efficient considering that the algorithm aims to reduce the simulation times.

Strengthened Bender's cuts

This cuts are a product of properties of Bender's and Lagrangian cuts. Specifically, at the i Backward Pass iteration, in the node n , the methodology is:

- Solve a linear relaxation of ($P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1})$).
- Storage the coefficient π_n^i of the dual variable associate with the constraint $z_n = x_{a(n)}^i$.
- Solve the lagrangian relaxation of (32) setting π_n equals to π_n^i .
- Storage the coefficient ν_n^i , given by $\nu_n^i = \mathcal{L}_n^i(\pi_n)$.

Afterwards, the cut is computed as:

$$\alpha_{a(n)} \geq \sum_{m \in C(a(n))} q_{a(n)m} (\nu_m^i + (\pi_m^i)^T x_{a(n)}) \quad (33)$$

Finally, the slope of the cut is the same that the one obtained with Bender's cut, and its intercept is given computed as:

$$\forall m \in C(a(n)), \nu_m^i = \mathcal{L}_m^i(\pi_m) \geq Q_m^{LP}(x_{a(n)}^i) - (\pi_m^i)^T x_{a(n)}^i \quad (34)$$

Despite this is an improved version of Bender's cuts, this type of cut by itself doesn't ensure an optimal solution as it doesn't met the tight condition.

The next table summarizes the conditions met by each type of cut:

TABLE I
CONDITIONS COMPLETION BY CUT. (B), (I), (L) Y (SB) STANDS FOR BENDER'S, INTEGER OPTIMALITY, LAGRANGIAN Y STRENGTH BENDER'S

Condition	(B)	(I)	(L)	(SB)
Valid	Yes	Yes	Yes	Yes
Tight	No	Yes	Yes	No
Finite	Yes	Yes	Yes	Yes

C. Algorithm summary

Overall, the Nested Decomposition algorithm can be summarized as:

Algorithm Nested Decomposition

Input: Convergence criteria ϵ
Initialization: $i = 0$, $UB^0 = 0$, $LB^0 = -10^6$
Result: Optimal investment decisions for each scenario tree node $(x_n)_{n \in N}$

```

while  $\frac{UB^i - LB^i}{UB^i} \leq \epsilon$  do
   $i \leftarrow i + 1$ 
/* Forward pass
  for all  $t = 1 \dots T$  do
    for all  $n \in N : t(n) == t$  do
      solve  $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^i))$ 
      storage investment results  $x_n^i$ 
      storage future cost function in the master node  $\Psi_1^i$ 
    end for
  end for
/* Backward pass
  for all  $t = T \dots 2$  do
    for all  $n \in N : t(n) == t$  do
      solve ancillary problem  $(P_n^i(x_{a(n)}^i, \Psi_n^{i+1}), (R_n^i))$ 
      storage cuts coefficients  $\{\nu_m^i, \pi_m^i\}$  for  $\Psi_{a(n)}^{i+1}$ 
    end for
  end for
/* Compute UB and LB
   $LB^i = c^T x_1^i + \Psi_1^i$ 
   $UB^i = \sum_{n \in N} p_n c^T x_n^i$ 
end while
return  $(x_n)_{n \in N}$ 

```

IV. METHODOLOGY AND SIMULATION CASES

To test the performance of the ND algorithm in capacity expansion planning problems in power systems, three simulation cases were conducted.

For all simulation cases, two systems IEEE (6 and 24 nodes) were adapted to include short-term params, yearly representative days and stochastic inputs for wind and solar farms.

A. Case I: Comparison with Extensive Formulation

In order to analyze differences in simulation times and convergence, a GCTEP problem was solve using both EF and ND methodologies. For this test, the cuts were used independently to conclude about it's performance.

This simulation case aims to compare the resolution times, objective function values and convergence metrics.

Additionally, based on the individual performance of each cut in the ND algorithm, we aimed to confirm the conditions of each type of cut.

B. Case II: Nested Decomposition cuts

As a way to test the performance by each type of cut bu itself, supplementing the analysis made in the previous

simulation case, it was made a comparison of the convergence, commenting about their avolution throughout each iteration.

The main objective in this case is to analyze the behaviour of the convergence of each type of cut, the simulation was set to do **50 iterations**, regardless it met the convergence criteria or not. Thus, is it possible to identify benefits and drawbacks that each cut has.

C. Case III: Performance of cuts patterns

Based on the results and analysis of all previous simulation cases, different sets of cuts combinations were tested using the ND algorithm.

The objective of this simulation case is to assess and propose a pattern of cuts able to reduce resolution times and ensure convergence at a reasonable level.

To test the performance of each pattern of cuts, the convergence gap, resolution times and number of iterations were compared.

D. Comments

Due to the main objective is to aim to lower resolution times, the Lagrangian cut was discarded as it requires to solve additional problems, make it inefficient for the ND scheme. Hence, the simulations only considered *Bender's cuts* (B), *Integer Optimality cuts* (I) and *Strengthened Bender's cuts* (SB).

The relative GAP params used for the simulations were 1.5E-4 for IEEE-6Nodes system and 1.0E-4 for IEEE-24Nodes system. It was set a maximum of 50 iterations for the ND algorithm.

The simulation considered 3 scenarios, to include wind and solar uncertainty. For EF methodology the samples were solved sequentially (Montecarlo) and in ND there were solved simultaneously in parallel.

The implementation of both EF and ND methodologies were made using the programming language Julia v0.6 [29], using the libraries JuMP [30] and SDDP [31] (first version). The solver used was CPLEX granted by the academic license of CPLEX Optimization Studio.

The test were conducted on a personal laptop with Linux Ubuntu 20 OS¹, Intel Core i5-3230M (2.60 GHz), 4 cores, 4 GB RAM.

V. SIMULATION RESULTS

A. Results of Case I

Using the EF with IEEE-6Nodes system, the tolerance was reached in **1335 seconds**. The solution value weighted by the three samples was **53915.2 [MMUSD]**. With IEEE-24Nodes system, the EF met the gap in **538 seconds**. The weighted solution value for this system was **1084.6 [1000 MMUSD]**.

Tables II and III summarizes the simulation results using ND by each type of cut, with systems of 6 and 24 nodes, respectively.

From the results, we can list the next analysis for each type of cut:

¹<https://ubuntu.com/>.

TABLE II
CUTS PERFORMANCE. CASE I, IEEE-6NODES. *VALUES WHICH THE GAP STABILIZES.

	(B)	(I)	(SB)
Converged	No	No	Yes
Time [s]	- (100*)	-	998
N° iterations	50 (8*)	50	32
Solution value [MMUSD]	48865.8	6245.0	53913.8
Relative Gap	11%	85%	0%

TABLE III
CUTS PERFORMANCE. CASE I, IEEE-24NODES. *VALUES WHICH THE GAP STABILIZES.

	(B)	(I)	(SB)
Converged	No	No	Yes
Time [s]	- (174*)	-	436
N° iterations	50 (5*)	50	15
Solution value [1000 MMUSD]	1054.3	92.1	1083.2
Relative Gap	3%	89%	0%

- **Bender's cuts:** This type of cut could not met the convergence criteria in any of the two test systems. However, the relative gap stagnates fast at its final value, with a low count of iterations: 11% at iteration 8th after 100 seconds and 3% at iteration 5th after 174 seconds. This makes sense, because this cuts uses linear relaxations of the original problem, which involves more differences in case there is a lot of integer variables. Based on the above, it is proven that this type of cut doesn't met the tight condition.
- **Integer Optimality cuts:** This cut was the fastest to iterate, completing 50 iterations in just 281 seconds for the IEEE-6Nodes system simulation. Nevertheless, the relative gap couldn't get better than 85% and 89% for test systems of 6 and 24 nodes, respectively. Despite this type of cut ensures a factible solution, using only Integer Optimality cuts wouldn't be enough to get an optimal value.
- **Strengthened Bender's cuts:** This was the only type of cut that could met the convergence criteria. Using ND with this cut reduced the simulation times to 75% and ~81% than using EF methodology.

Based on previous comments, it would be necessary to use *Strengthened Bender's* cut to reduce simulation times and lead to an optimal solution, and also use *Integer Optimality* cuts to ensure a feasible solution, as this is the unique cut studied in this work that mets the tight condition.

B. Results of Case II

The convergence progress of *Bender's cuts* (B) and *Strengthened Bender's cuts* (SB) are presented in Figure 1 for IEEE-6Nodes system, and Figure 2 for IEEE-24Nodes system. The *Integer Optimality cuts* (I) were omitted due to the big gap it got "stucked".

The results shows again that **Bender's** cuts converged in a few iterations to its final value. The relative gaps reached were 11% in IEEE-6Nodes system and 3% in IEEE-24Nodes system. This improvement of gap could be explained by the

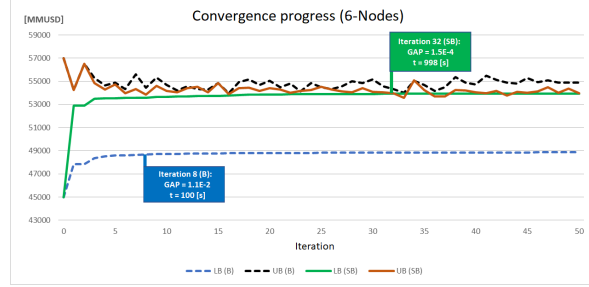


Fig. 1. Convergence progress for (B) and (SB) cuts, Case II, IEEE-6Nodes.

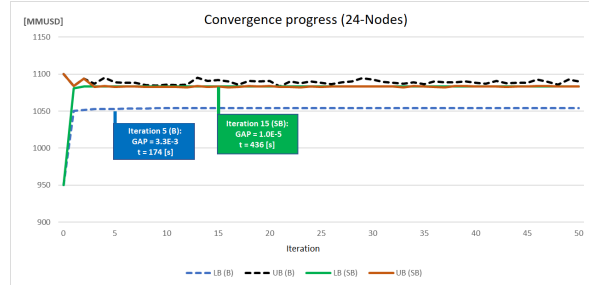


Fig. 2. Convergence progress for (B) and (SB) cuts, Case II, IEEE-24Nodes.

problem structure. The system of 6 Nodes has a less quantity of candidates for expansion (generation and transmission), so one capacity expansion plan could differs from other by 800 [MMUSD] (cost of a thermal unit). Thus, there are not so many options to choose, that's why the **UB (B)** is not steady and oscillates around a value. On the other hand, the system of 24 Nodes has more candidates, that makes the problem more flexible as it has more feasible options, making possible to trade-off operational costs with the investment ones.

The **Strengthened Bender's** cuts had the better performance of the two. Besides this type of cut could met the convergence criteria, their progress along the iterations was smooth. This cuts can reduce the simulation times in regard to EF. Despite this cut is interesting to explode, only using them in ND is not necessary to ensure a feasible solution, as it was mentioned before.

Therefore, it is proposed to use a pattern of cuts which contains: (1) *Integer Optimality cuts* to ensure that the solution is integer feasible and set an initial solution, and then (2) *Strengthened Bender's cuts* mainly to reduce simulation times and met the convergence criteria. Thus, the patterns will always start with an (I) cut, then the (SB) cuts.

C. Results of Case III

Based on the previous study cases, the next pattern of cuts were tested:

- **(2SB+I):** every 3 cuts, 2 are (SB) and 1 is (I)
- **(3SB+I):** every 4 cuts, 3 are (SB) and 1 is (I)

- **(4SB+I)**: every 5 cuts, 4 are (SB) and 1 is (I)
- **(5SB+I)**: every 6 cuts, 5 are (SB) and 1 is (I)

For this simulations, it was set to complete the 50 iterations, despite the convergence criteria was met.

The performance results for the pattern of cuts are presented in Table IV for IEEE-6Nodes system. The convergence progress for this system are shown in Figure 3.

TABLE IV
PATTERN OF CUTS PERFORMANCE. CASE III, IEEE-6NODES.

	(SB)	(2SB+I)	(3SB+I)	(4SB+I)	(5SB+I)
Converged	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Relative Gap	1.3E-4	1.1E-4	9.7E-5	8.4E-5	1.2E-4
Time [s]	998	924	922	1302	1594
N° iterations	32	37	33	50	49

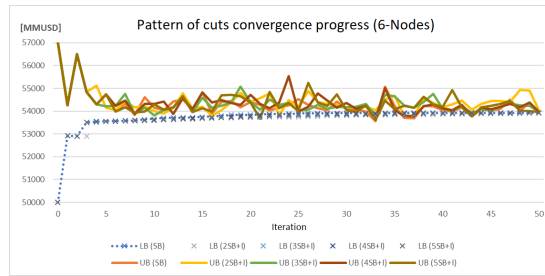


Fig. 3. Convergence progress, Case III, IEEE-6Nodes.

As it is noted, the behaviour is similar between the pattern of cuts. Among iteration 30th and 50th (maximum allowed) all of the patterns reach the convergence criteria. Using *Integer Optimality cuts* and *Strengthened Bender's cuts* together allows to obtain better signals between stages. (I) cuts gives a real estimation of investment costs, then (SB) cuts valorizes better the way the integer variables interact with the continuous ones (operational costs because of the investment decisions).

Beyond the iterations completed, it is important to consider the simulation times that each pattern of cuts took to get to the convergence criteria. Figure 4 shows a comparison of the run times by each pattern of cuts.

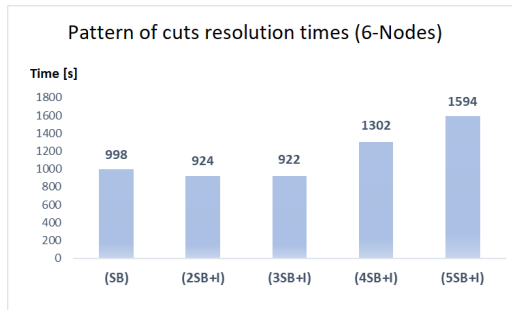


Fig. 4. Simulation times by pattern of cuts, Case III, IEEE-6Nodes.

The pattern (2SB+I) already improved the simulation times than using only *Strengthened Bender's cuts*. Just including the *Integer Optimality cuts* reduced an additional 7% of the simulation times.

Including an additional (SB) cut didn't improve significantly the performance (pattern (3SB+I)). Anyway this set of cuts had the best performance of all, leading to reduce the simulation times to 69% than using EF methodology.

Adding more (SB) cuts had a opposite effect on the performance. The patterns (4SB+I) and (5SB+I) had an opposite effect on the performance. The simulation times were higher, actually the pattern (5SB+I) took more time than EF methodology.

For IEEE-24Nodes system, the performance results by pattern of cuts are presented in Table V. The convergence progress for this system are shown in Figure 5.

TABLE V
PATTERN OF CUTS PERFORMANCE. CASE III, IEEE-24NODES SYSTEM.

	(SB)	(2SB+I)	(3SB+I)	(4SB+I)	(5SB+I)
Converged	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Relative Gap	2.1E-5	6.0E-5	6.7E-5	7.7E-5	7.7E-5
Time [s]	436	396	372	445	398
N° iterations	15	15	15	15	15

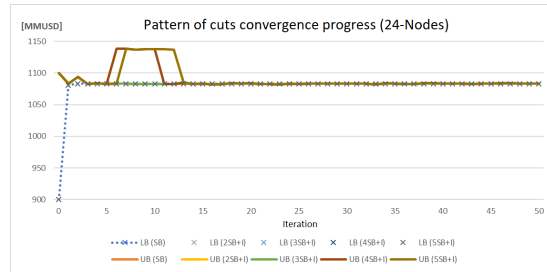


Fig. 5. Convergence progress, Case III, IEEE-24Nodes system.

For this system, all of the patterns converged at 15 iterations. However, the patterns (4SB+I) and (5SB+I) had a particular behaviour, especially when the second *Integer Optimality* was applied (iterations 5th and 6th, respectively). The (UB) increased and kept high until the third (I) cuts were used (iterations 11th and 13th, respectively). This evidence the fact that working with integer variables could led to this unstability in the convergence, if the cuts application is not proper. So forth, we can conclude than for this system, it is necessary to use a (I) cut before the iteration N° 4.

Figure 6 shows the simulation times by each pattern of cuts for IEEE-24Nodes system.

Same as with IEEE-6Nodes system, the pattern (3SB+I) had the best performance of all. It reduced the simulation times to 69% in regard to EF methodology. Also, the patterns (4SB+I) and (5SB+I) had this negative effect, proving that having more (SB) cuts on a pattern doesn't imply a better performance.

From the results, we can conclude that the pattern (3SB+I) is the best option to be used in ND. It met the convergence

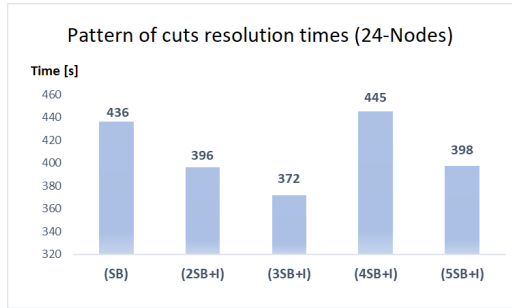


Fig. 6. Simulation times by pattern of cuts, Case III, IEEE-24Nodes.

criteria in less simulation times. In addition, we highlight that patterns (4SB+I) and (5SB+I) are not useful for this type of problem, so they are discarded for future research.

VI. CONCLUSIONS

The ND algorithm can deal with stochastic programming, optimizing several scenario trees without compromising convergence and optimality. In addition, it can reduce simulation times.

From the types of cuts studied, only **Bender's** and **Strengthened Bender's** shows a progress at convergence. The **Integer Optimality** cuts are the fastest to iterate, ensuring optimality, but it doesn't improve to low relative gaps.

As the cuts by themselves are not enough to get to an feasible integer solution, because of the properties that each type has, it is necessary to use patterns of cuts that imply less simulation times to an acceptable convergence.

The pattern (3SB+I) had the best performance, which uses 3 *Strengthened Bender's* cuts after 1 *Integer Optimality* cut. Besides this pattern of cuts had the lowest simulation times, reducing to 69% in regard to EF methodology, this set of cuts met the conditions required by the ND algorithm.

Based on the work done on this paper, the next research ideas are proposed to complement this study:

- Include more variables that could have a long-term effect in operational/investment costs. For example, the Gas Fuel contracts or Huge Dam Storages could have an important effect on the investment decisions, as they can delay the entrance of new units, because of the energy management they can have.
- Test the ND algorithm on large-scale power systems, to check if the pattern of cuts has the same behaviour.
- Include new techniques to the algorithm, in order to keep reducing the simulation times without giving up precision of results.
- Analyze how the number of samples and stages affect in the ND performance.
- Include Non-anticipativity constraints in the ND scheme.

ACKNOWLEDGMENT

The authors thank the support of the Chilean National Agency of Research and Development (ANID) under grants

Fondecyt 1231892 and Fondef ID22I10341 and Basal Project FB0008, Advanced Center for Electrical and Electronic Engineering (AC3E).

REFERENCES

- [1] Keshtkar, M., Fotuhi-Firuzabad, M. (2020). A comprehensive review on generation expansion planning. *Electric Power Systems Research*, 184, 106253.
- [2] H. H. Mohamed, M. A. Abido, and Y. A. Attia, "Optimal integrated generation and transmission expansion planning considering renewable energy sources," *Electric Power Systems Research*, vol. 190, 106844, 2021.
- [3] Pineda, D., Ferreira, L. A. F. M. (2021). A stochastic unit commitment and transmission expansion planning model for power systems with high penetration of renewables. *Electric Power Systems Research*, 190, 106826.
- [4] J. Zhang, W. Chen, and Z. Zhang, "A multistage transmission expansion planning model considering generation expansion and environmental constraints," *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, vol. 123, pp. 106278, 2021.
- [5] T. Morstyn, A. Ramos, and G. Strbac, "Planning power systems for net zero emissions: a review of models and optimization techniques," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 146, pp. 111229, 2021.
- [6] M. Gao, Y. Li, Y. Cheng, J. Li, and J. Liu, "Optimal investment planning for wind power under operational constraints," *Applied Energy*, vol. 287, pp. 116474, 2021.
- [7] P. Zhang, Y. Zhao, J. Wu, and B. Yan, "Joint expansion planning of generation and transmission systems considering demand response and renewable energy integration: A comprehensive review," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 146, pp. 111220, 2021.
- [8] L. Liu, Y. Xue, Y. Wang, X. Zhang, and J. Lu, "A two-stage stochastic mixed-integer linear programming model for generation and transmission expansion planning using Benders decomposition," *Electric Power Systems Research*, vol. 190, pp. 106797, 2021.
- [9] Y. Xue, H. Guo, Z. Huang, and J. Wang, "A Dantzig-Wolfe decomposition-based approach for multi-region generation and transmission expansion planning," *Electric Power Systems Research*, vol. 191, pp. 106848, 2021.
- [10] Y. Chen, W. Li, Y. Guo, and Z. Chen, "Lagrangian relaxation-based joint optimization of generation and transmission expansion planning with renewable integration," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 15, no. 13, pp. 2207-2218, 2021.
- [11] Y. Xu, S. Lu, X. Liu, and C. Chen, "Probabilistic generation and transmission expansion planning under uncertain demand and renewable energy with progressive hedging algorithm," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 12, no. 1, pp. 83-96, 2021.
- [12] H. A. Ahmed, A. S. A. Khalid, and K. H. Kim, "A new formulation for transmission expansion planning using SDDiP method," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 130, pp. 106798, 2021.
- [13] Z. Wu, J. Xu, Y. Zhao, Z. Chen, and F. Li, "Stochastic dual dynamic integer programming for joint generation and transmission expansion planning considering flexible demands," *Electric Power Systems Research*, vol. 198, pp. 107326, 2021.
- [14] J. W. Park, K. H. Kim, J. W. Shin, and Y. Song, "An SDDiP approach for generation expansion planning considering renewable uncertainties," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 128, pp. 106471, 2021.
- [15] X. Sun, C. Xie, Y. Li, and H. Li, "A novel stochastic dual dynamic integer programming for transmission expansion planning under high penetration of renewable energy," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 15, no. 3, pp. 265-272, 2021.
- [16] Y. Wu, Z. Zhu, and Z. Dong, "A novel nested decomposition algorithm for generation and transmission expansion planning problems," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 36, no. 2, pp. 1358-1370, 2021.
- [17] Y. Li, J. Zhao, L. Wang, Y. Zhou, and J. Li, "A nested decomposition algorithm for multi-period generation and transmission expansion planning considering renewable energy integration," *Energy*, vol. 208, p. 118266, 2020.
- [18] C. Zhang, X. Wang, Z. Liu, and X. Fan, "A nested decomposition algorithm for joint planning of generation, transmission and energy storage with renewable energy sources," *Applied Energy*, vol. 295, p. 116956, 2021.

- [19] C. Huang, Y. Liu, Y. Sun, and C. Chen, "A nested decomposition algorithm for joint transmission and distribution planning considering renewable energy integration," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 12, no. 2, pp. 1127–1137, 2021.
- [20] M. Bai, Z. Chen, and W. Gao, "A nested decomposition algorithm for integrated generation and transmission expansion planning under uncertainty," *Electric Power Systems Research*, vol. 191, p. 106879, 2021.
- [21] A. F. Souza, F. L. Almeida, and R. M. F. Lima, "Stochastic Dual Dynamic Programming for Generation and Transmission Expansion Planning Considering Operational Constraints," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 36, no. 4, pp. 4128–4137, 2021.
- [22] T. B. Nguyen, P. V. H. Pham, and N. T. Nguyen, "Stochastic Dual Dynamic Programming for Generation and Transmission Expansion Planning Considering Renewable Energy Integration," *Energies*, vol. 14, no. 6, p. 1631, 2021.
- [23] Y. Chen, J. Wang, and J. Zhang, "Stochastic Dual Dynamic Programming for Large-Scale Generation and Transmission Expansion Planning Considering Carbon Trading," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 36, no. 6, pp. 6694–6705, 2021.
- [24] M. C. Macedo, F. L. Almeida, and R. M. F. Lima, "Stochastic Dual Dynamic Programming for Generation and Transmission Expansion Planning with Demand Response," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 132, p. 107056, 2021.
- [25] BNNOBRS, J. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 1962, vol. 4, no. 1, p. 238–252.
- [26] LAPORTE, Gilbert; LOUVEAUX, François V. The integer L-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations research letters*, 1993, vol. 13, no. 3, p. 133–142.
- [27] ZOU, Jikai, et al. Nested decomposition of multistage stochastic integer programs with binary state variables. *Optimization Online*, 2016, vol. 5436.
- [28] THOMÉ, F. S. Application of Decomposition Technique with Evaluation of Implicit Multipliers in Electrical Systems Generation and Network Expansion Planning. 2008. Tesis Doctoral. Dissertação de Mestrado, COPPE/UF RJ, Rio de Janeiro, Brazil (in portuguese).
- [29] Jeff Bezanson, Alan Edelman, Stefan Karpinski, and Viral B. Shah, "Julia: A fresh approach to numerical computing," *SIAM Review*, vol. 59, no. 1, pp. 65–98, 2017.
- [30] JUMP Dev Team. (2022). Jump: JuMP - A Modeling Language for Mathematical Optimization [Computer software]. Retrieved from <https://github.com/JuMP-dev/JuMP.jl>
- [31] Linderoth, J. T., Conroy, R. W. (2020). SDDP.jl: An open-source algebraic modeling language embedded in Julia for stochastic dynamic programming. *Journal of Open Source Software*, 5(47), 1855. doi: 10.21105/joss.01855

Apéndice B

Sistemas de prueba

En esta sección se presentan los datos de los sistemas de prueba IEEE, utilizados en los experimentos computacionales mencionados en el capítulo 6.

B.1. Sistema IEEE 6 nodos

El sistema de prueba IEEE de 6 nodos utilizado en el trabajo, consiste en lo siguiente:

- 6 nodos.
- 6 líneas de transmisión existentes, 39 candidatas.
- 6 centrales térmicas existentes, 11 candidatas.
- 3 parques ERFV existentes, 3 candidatos.

El horizonte de estudio es de 5 años, fijando un requerimiento de reserva en giro equivalente al 6% de la demanda instantánea.

A continuación se presenta el detalle de los datos usados.

B.1.1. Datos generación

Central	Barra	Pmin [MW]	Pmax [MW]	CVar [USD/MWh]	Rampa [MW/h]	Estado	Costo inversión [USD/kW]	Unidades (max)
Gas-1	1	22.5	30	35	15	Existente	-	1
Gas-2	1	22.5	30	35	15	Existente	-	1
Gas-3	1	22.5	30	35	15	Existente	-	1
Gas-4	1	60	80	30	30	Existente	-	1
Gas-5	3	39	60	50	30	Existente	-	1
Gas-6	3	39	60	50	30	Existente	-	1
Gas-cand-1	6	90	120	30	40	Candidato	2500	1
Gas-cand-2	6	180	240	30	30	Candidato	3500	2
Coal-cand	3	24	120	80	20	Candidato	3000	3
Diesel-cand	5	48	240	180	35	Candidato	500	2
Coal-cand	2	130	200	40	30	Candidato	3000	3

Tabla B.1

PARQUE GENERADOR TÉRMICO, SISTEMA IEEE 6 NODOS.

Parque	Barra	Pmax por unidad [MW]	Estado	Costo inversión [USD/kW]	Unidades (max)
Sol	1	30	Existente	-	1
Eolico-1	3	30	Existente	-	1
Eolico-2	5	30	Existente	-	1
Sol-cand-1	4	30	Candidato	2000	1
Sol-cand-2	6	30	Candidato	2000	1
Eolico-cand-1	2	30	Candidato	2000	1

Tabla B.2

PARQUE GENERADOR ERFV, SISTEMA IEEE 6 NODOS.

B.1.2. Datos transmisión

En este sistema, es posible construir hasta 3 unidades de cualquiera de las unidades disponibles. Algunas de ellas ya tienen unidades al inicio del ejercicio.

Línea	Nodo A	Nodo B	Unidades iniciales	x [pu]	Flujo máximo por unidad [MW]	Costo inversión [MMUSD]
1	1	2	1	0.40	100	40
2	1	3	0	0.38	100	38
3	1	4	1	0.60	80	60
4	1	5	1	0.20	100	20
5	1	6	0	0.68	70	68
6	2	3	1	0.20	100	20
7	2	4	1	0.40	100	40
8	2	5	0	0.31	100	31
9	2	6	0	0.30	100	30
10	3	4	0	0.59	82	59
11	3	5	1	0.20	100	20
12	3	6	0	0.48	100	48
13	4	5	0	0.63	75	63
14	4	6	0	0.30	100	30
15	5	6	0	0.61	78	61

Tabla B.3

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN, SISTEMA IEEE 6 NODOS.

Nodo	Ponderación demanda [%]
1	11
2	31
3	6
4	21
5	31
6	0

Tabla B.4

PONDERACIÓN DE DEMANDA POR NODO, SISTEMA IEEE 6 NODOS.

B.1.3. Datos demanda

Año	Demanda anual [GWh]
1	5920
2	7893
3	10524
4	14033
5	18710

Tabla B.5

DEMANDA POR AÑO [GWh], SISTEMA IEEE 6 NODOS.

B.2. Sistema IEEE 24 nodos

El sistema de prueba IEEE de 24 nodos utilizado en el trabajo, consiste en lo siguiente:

- 24 nodos.
- 38 líneas de transmisión existentes, 85 candidatas.
- 24 centrales térmicas existentes, 17 candidatas.
- 16 parques ERFV existentes, 48 candidatos.

El horizonte de estudio es de 5 años, fijando un requerimiento de reserva en giro equivalente al 6% de la demanda instantánea.

A continuación se presenta el detalle de los datos usados.

B.2.1. Datos generación

Central	Barra	Pmin [MW]	Pmax [MW]	CVar [USD/MWh]	Rampa [MW/h]	Estado	Costo inversión [USD/kW]	Unidades (max)
Coal-1	1	200	300	30	15	Existente	-	1
Coal-2	1	200	300	31	15	Existente	-	1
Coal-3	1	150	300	30	25	Existente	-	1
Coal-4	2	200	300	40	10	Existente	-	1
Coal-7	19	100	200	33	15	Existente	-	3
Coal-8	21	100	200	32	15	Existente	-	1
Coal-12	23	250	350	42	15	Existente	-	2
Coal-13	23	200	300	35	15	Existente	-	1
Diesel-3	14	20	100	100	40	Existente	-	1
Diesel-4	18	100	150	100	20	Existente	-	1
Diesel-5	21	50	150	95	15	Existente	-	1
Gas-2	2	120	250	34	15	Existente	-	1
Gas-3	2	20	100	80	25	Existente	-	1
Gas-6	7	150	300	32	10	Existente	-	1
Gas-8	13	150	300	31	10	Existente	-	2
Gas-10	13	250	350	30	15	Existente	-	2
Gas-11	14	100	200	40	15	Existente	-	1
Gas-13	16	200	300	40	15	Existente	-	1
Gas-15	22	150	250	33	15	Existente	-	1
Coal-5	18	100	300	33	10	Candidato	4000	1
Coal-6	18	150	300	36	15	Candidato	3500	1
Coal-9	21	150	250	31	15	Candidato	3500	1
Coal-10	21	150	300	30	15	Candidato	3500	1
Coal-11	22	100	250	31	15	Candidato	3500	1
Diesel-1	6	20	100	100	30	Candidato	500	1
Diesel-2	13	50	150	100	30	Candidato	500	1
Diesel-6	23	50	200	100	15	Candidato	500	1
Gas-1	1	150	300	35	25	Candidato	3500	1
Gas-4	7	100	200	32	15	Candidato	3500	1
Gas-5	7	120	250	33	15	Candidato	3500	1
Gas-7	13	150	300	30	10	Candidato	4000	1
Gas-9	13	250	350	32	15	Candidato	3500	1
Gas-12	16	150	350	32	15	Candidato	3500	2
Gas-14	22	120	250	32	15	Candidato	3500	1
Gas-16	23	100	250	32	15	Candidato	3500	1

Tabla B.6

PARQUE GENERADOR TÉRMICO, SISTEMA IEEE 24 NODOS.

Parque	Barra	Pmax por unidad [MW]	Estado	Costo inversión [USD/kW]	Unidades (max)
Eolico-5	15	100	Existente	-	7
Eolico-6	17	100	Existente	-	1
Sol-5	14	50	Existente	-	8
Eolico-1	2	150	Candidato	2000	2
Eolico-2	7	50	Candidato	2000	1
Eolico-3	12	50	Candidato	2000	1
Eolico-4	13	50	Candidato	2000	2
Eolico-7	18	50	Candidato	2000	4
Eolico-8	21	50	Candidato	2000	4
Eolico-9	22	100	Candidato	2000	3
Eolico-10	23	50	Candidato	2000	5
Eolico-11	24	50	Candidato	2000	2
Sol-1	2	100	Candidato	2000	3
Sol-2	6	50	Candidato	2000	4
Sol-3	7	50	Candidato	2000	2
Sol-4	13	50	Candidato	2000	4
Sol-6	18	50	Candidato	2000	4
Sol-7	23	50	Candidato	2000	5
Sol-8	24	50	Candidato	2000	2

Tabla B.7

PARQUE GENERADOR ERFV, SISTEMA IEEE 24 NODOS.

B.2.2. Datos transmisión

En este sistema, es posible construir hasta 3 unidades de cualquiera de las unidades disponibles. Algunas de ellas ya tienen unidades al inicio del ejercicio.

Línea	Nodo A	Nodo B	Unidades iniciales	x [pu]	Flujo máximo por unidad [MW]	Costo inversión [MMUSD]
1	1	2	1	0.01	175	3
2	1	3	1	0.21	175	55
3	1	5	1	0.08	175	22
4	2	4	1	0.13	175	33
5	2	6	1	0.19	175	50
6	3	9	1	0.12	175	31
7	3	24	1	0.08	400	50
8	4	9	1	0.10	175	27
9	5	10	1	0.09	175	23
10	6	10	1	0.06	175	16
11	7	8	1	0.06	175	16
12	8	9	1	0.17	175	43
13	8	10	1	0.17	175	43
14	9	11	1	0.08	400	50
15	9	12	1	0.08	400	50
16	10	11	1	0.08	400	50
17	10	12	1	0.08	400	50
18	11	13	1	0.05	500	66
19	11	14	1	0.04	500	58
20	12	23	1	0.10	500	134
21	13	23	1	0.09	500	120
22	14	16	1	0.04	500	54
23	15	16	1	0.02	500	25
24	15	21	2	0.05	500	68
25	15	24	1	0.05	500	72
26	16	17	1	0.03	500	36
27	16	19	1	0.02	500	32
28	17	18	1	0.01	500	20
29	17	22	1	0.11	500	146
30	18	21	2	0.03	500	36
31	19	20	2	0.04	500	55
32	20	23	2	0.02	500	30
33	21	22	1	0.07	500	94
34	12	13	1	0.05	500	66
35	1	8	0	0.13	500	35
36	2	8	0	0.13	500	33
37	6	7	0	0.19	500	50
38	13	14	0	0.04	500	62
39	14	23	0	0.06	500	86
40	16	23	0	0.08	500	114
41	19	23	0	0.06	500	84

Tabla B.8

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN, SISTEMA IEEE 24 NODOS.

Nodo	Ponderación demanda [%]	Nodo	Ponderación demanda [%]
1	3	13	0
2	2	14	11
3	4	15	5
4	2	16	8
5	2	17	2
6	3	18	8
7	7	19	5
8	13	20	3
9	4	21	0
10	5	22	0
11	0	23	12
12	0	24	0

Tabla B.9

PONDERACIÓN DE DEMANDA POR NODO, SISTEMA IEEE 24 NODOS.

B.2.3. Datos demanda

Año	Demanda anual [TWh]
1	78
2	104
3	139
4	186
5	247

Tabla B.10

DEMANDA POR AÑO [GWh], SISTEMA IEEE 24 NODOS.

B.3. Otros datos

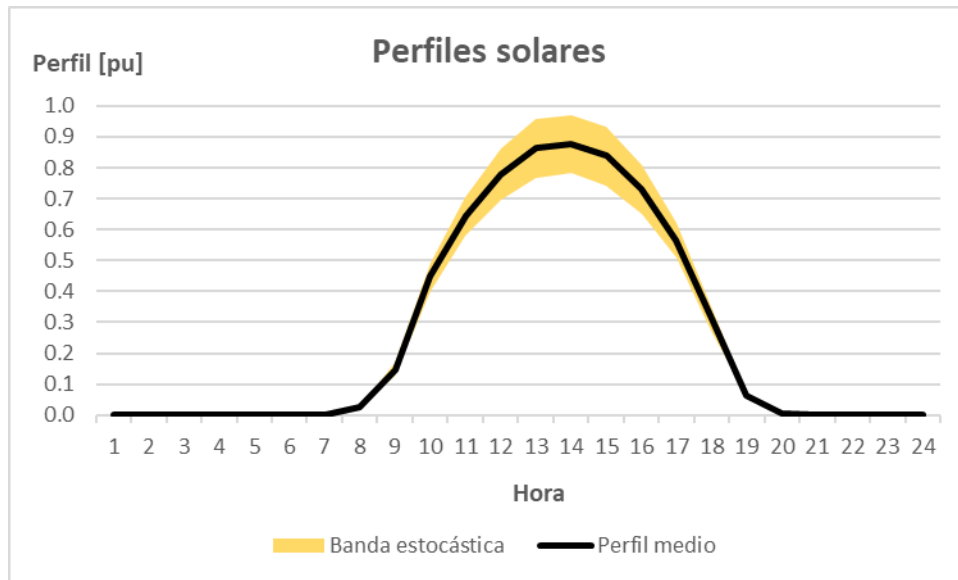


Figura B.1. Perfiles solares [pu].

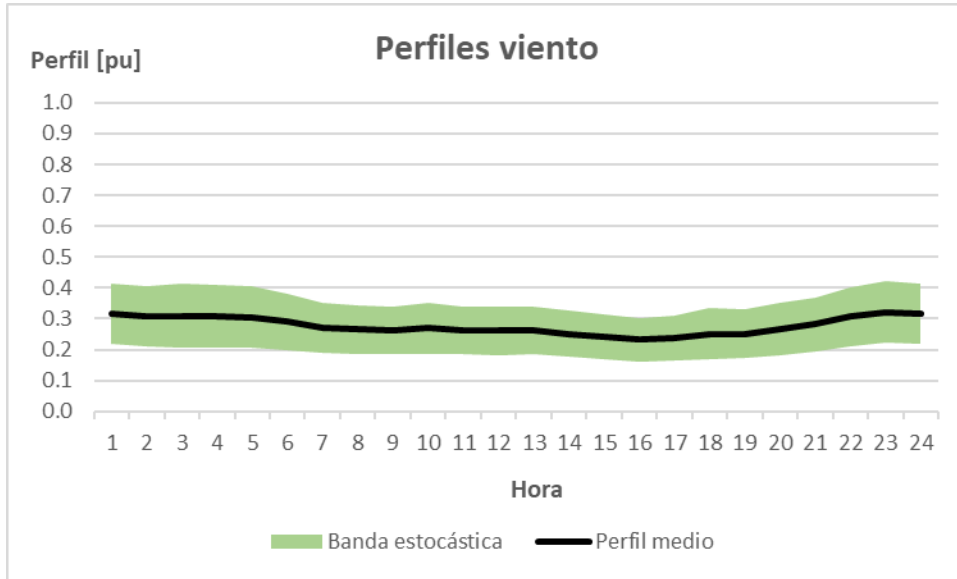


Figura B.2. *Perfiles eólicos [pu].*

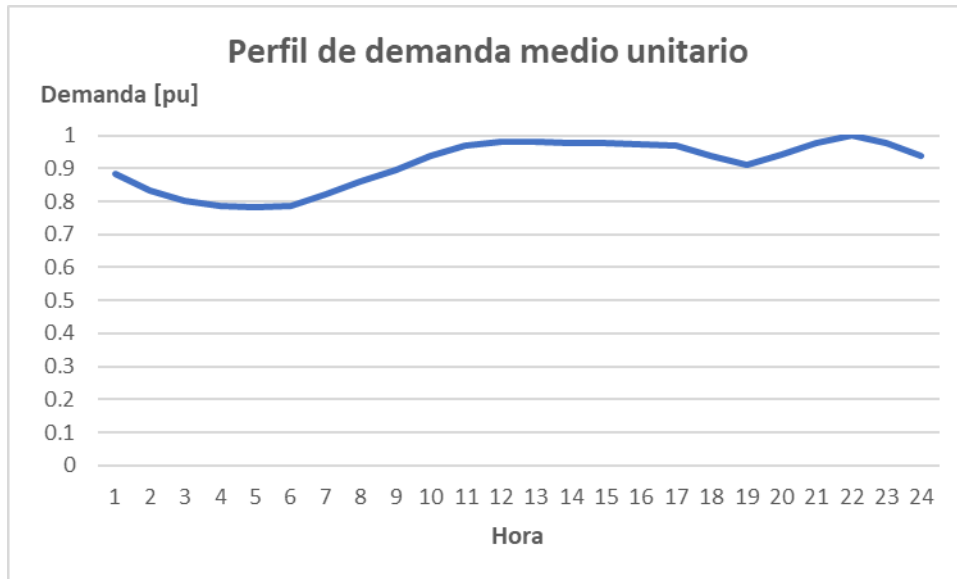


Figura B.3. *Perfil de demanda media unitaria [pu].*

Bibliografía

- [1] Ministerio de Energía. Ley 20/25. <https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1055402>, 2013. [Online; 22-oct-2013].
- [2] Comité Consultivo de Energía. 2050. *Ministerio de Energía, Hoja de Ruta*, 2050, 2014.
- [3] Guillermo Jimenez-Estevez, Rodrigo Palma-Behnke, Roberto Roman Latorre, and Luis Moran. Heat and dust: The solar energy challenge in chile. *IEEE Power and Energy Magazine*, 13(2):71–77, 2015.
- [4] Esteban Gil. Power system reliability impacts of wind generation and operational reserve requirements. *Ingeniería e Investigación*, 35:82–88, 2015.
- [5] Julia Hentschel, Hartmut Spliethoff, et al. A parametric approach for the valuation of power plant flexibility options. *Energy Reports*, 2:40–47, 2016.
- [6] NERC Intermittent and Variable Generation Task Force. Accommodating high levels of variable generation. *North American Electric Reliability Corp.(NERC)*, 2009.
- [7] Niamh Troy, Eleanor Denny, and Mark O’Malley. Base-load cycling on a system with significant wind penetration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(2):1088–1097, 2010.
- [8] Bryan Stephen Palmintier. *Incorporating operational flexibility into electric generation planning: Impacts and methods for system design and policy analysis*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2013.
- [9] Arne Van Stiphout, Kris Poncelet, Kristof De Vos, and Geert Deconinck. The impact of operating reserves in generation expansion planning with high shares of renewable energy sources. 2014.
- [10] Arthur M Geoffrion. Generalized benders decomposition. *Journal of optimization theory and applications*, 10(4):237–260, 1972.
- [11] Angela Flores-Quiroz, Rodrigo Palma-Behnke, Golbon Zakeri, and Rodrigo Moreno. A column generation approach for solving generation expansion planning problems with high renewable energy penetration. *Electric Power Systems Research*, 136:232–241, 2016.
- [12] Hugh Everett III. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations research*, 11(3):399–417, 1963.

-
- [13] Arthur M Geoffrion. Lagrangean relaxation for integer programming. In *Approaches to integer programming*, pages 82–114. Springer, 1974.
- [14] Fanny González, Luís Fariña, Eustaquio Martínez, Esteban Vargas, and Anastacio Arce. Lagrangean relaxation parallel method for optimizing of a hydroelectric generation system. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 281:101–111, 2011.
- [15] Frank José Demetrio Leañez Grau. Estudio comparativo de la relajación lagrangeana y la programación entera-mixta en el problema del pre-despacho de sistemas medianos. 2013.
- [16] Richard E Bellman and Stuart E Dreyfus. *Applied dynamic programming*. Princeton university press, 2015.
- [17] Xifan Wang and James Rufus McDonald. *Modern power system planning*. McGraw-Hill Companies, 1994.
- [18] Can Li, Antonio J Conejo, Peng Liu, Benjamin P Omell, John D Sirola, and Ignacio E Grossmann. Mixed-integer linear programming models and algorithms for generation and transmission expansion planning of power systems. *European Journal of Operational Research*, 297(3):1071–1082, 2022.
- [19] Nnamdi Nwulu, Saheed Lekan Gbadamosi, and Nnamdi Nwulu. Generation capacity expansion planning. *Optimal Operation and Control of Power Systems Using an Algebraic Modelling Language*, pages 213–252, 2021.
- [20] Pierre Masse and Robert Gibrat. Application of linear programming to investments in the electric power industry. *Management Science*, 3(2):149–166, 1957.
- [21] Yongli Wang, Danyang Zhang, Siyi Tao, Yuze Ma, Guoliang Zhu, and Shanshan Wei. Capacity expansion planning of integrated energy system based on multi-energy coupling. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1920, page 012030. IOP Publishing, 2021.
- [22] Jiraporn Sirikum and Anulark Techanitisawad. Power generation expansion planning with emission control: a nonlinear model and a ga-based heuristic approach. *International Journal of Energy Research*, 30(2):81–99, 2006.
- [23] C Cormio, Minoia Dicorato, A Minoia, and M Trovato. A regional energy planning methodology including renewable energy sources and environmental constraints. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 7(2):99–130, 2003.
- [24] Diego Adolfo Mejía Giraldo, JESUS LOPEZ LEZAMA, and Luis Alfonso Gallego Pareja. Energy generation expansion planning model considering emissions constraints. *Dyna*, 77(163):75–84, 2010.
- [25] Tayenne Dias de Lima, Alejandra Tabares, Nataly Banol Arias, and John F Franco. Investment & generation costs vs co2 emissions in the distribution system expansion planning: A multi-objective stochastic programming approach. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 131:106925, 2021.

- [26] Wolfram Krewitt. External costs of energy—do the answers match the questions?: Looking back at 10 years of externe. *Energy Policy*, 30(10):839–848, 2002.
- [27] Aidid Chee Tahir and René Bañares-Alcántara. A knowledge representation model for the optimisation of electricity generation mixes. *Applied energy*, 97:77–83, 2012.
- [28] Peter Rafaj and Socrates Kypreos. Internalisation of external cost in the power generation sector: Analysis with global multi-regional markal model. *Energy Policy*, 35(2):828–843, 2007.
- [29] Ger Klaassen and Keywan Riahi. Internalizing externalities of electricity generation: An analysis with message-macro. *Energy Policy*, 35(2):815–827, 2007.
- [30] Rouzbeh Haghghi, Hossein Yektamoghadam, Majid Dehghani, and Amirhossein Ni-koofard. Generation expansion planning using game theory approach to reduce carbon emission: A case study of iran. *Computers & Industrial Engineering*, 162:107713, 2021.
- [31] Qixin Chen, Chongqing Kang, Qing Xia, and Jin Zhong. Power generation expansion planning model towards low-carbon economy and its application in china. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(2):1117–1125, 2010.
- [32] Sami H Karaki, Farid B Chaaban, Nicholas Al-Nakhl, and Khalil A Tarhini. Power generation expansion planning with environmental consideration for lebanon. *International journal of electrical power & energy systems*, 24(8):611–619, 2002.
- [33] Khanh Q Nguyen. Internalizing externalities into capacity expansion planning: The case of electricity in vietnam. *Energy*, 33(5):740–746, 2008.
- [34] Nir Becker, David Soloveitchik, and Moshe Olshansky. Incorporating environmental externalities into the capacity expansion planning: An israeli case study. *Energy conversion and management*, 52(7):2489–2494, 2011.
- [35] Martín Larsen and Enzo Sauma. Economic and emission impacts of energy storage systems on power-system long-term expansion planning when considering multi-stage decision processes. *Journal of Energy Storage*, 33:101883, 2021.
- [36] J Charles Smith, Michael R Milligan, Edgar A DeMeo, and Brian Parsons. Utility wind integration and operating impact state of the art. *IEEE transactions on power systems*, 22(3):900–908, 2007.
- [37] Erik Ela, Michael Milligan, Brian Parsons, Debra Lew, and David Corbus. The evolution of wind power integration studies: Past, present, and future. In *Power & Energy Society General Meeting, 2009. PES'09. IEEE*, pages 1–8. IEEE, 2009.
- [38] Mohammad Reza Ansari, Sasan Pirouzi, Mostafa Kazemi, Amirreza Naderipour, and Mohamed Benbouzid. Renewable generation and transmission expansion planning coordination with energy storage system: A flexibility point of view. *Applied Sciences*, 11(8):3303, 2021.
- [39] Yuzhou Zhou, Qiaozhu Zhai, Wei Yuan, and Jiang Wu. Capacity expansion planning for wind power and energy storage considering hourly robust transmission constrained unit commitment. *Applied Energy*, 302:117570, 2021.

- [40] Can Li, Antonio J Conejo, John D Sirola, and Ignacio E Grossmann. On representative day selection for capacity expansion planning of power systems under extreme operating conditions. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 137:107697, 2022.
- [41] Michael Milligan and Kevin Porter. Determining the capacity value of wind: An updated survey of methods and implementation. In *Wind power*, 2008.
- [42] LT Al-Bahrani, W Saaed, and M Al-Kaabi. Generation reliability enhancement based on reliability indices. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1844, page 012010. IOP Publishing, 2021.
- [43] Isa S Qamber. Lole calculation and capacity margin probabilities neurofuzzy model development. *International Journal of Computing and Digital Systems*, 13(1):487–493, 2023.
- [44] Joe Oteng-Adjei, Abdul-Majid Issah Malori, and Emmanuel Kwaku Anto. Generation system expansion planning using loss of load expectation criterion. In *2020 IEEE PES/IAS PowerAfrica*, pages 1–5. IEEE, 2020.
- [45] AJM Van Wijk, N Halberg, and WC Turkenburg. Capacity credit of wind power in the netherlands. *Electric Power Systems Research*, 23(3):189–200, 1992.
- [46] Anne Sjoerd Brouwer, Machteld Van Den Broek, Ad Seebregts, and André Faaij. Impacts of large-scale intermittent renewable energy sources on electricity systems, and how these can be modeled. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 33:443–466, 2014.
- [47] Omar H Abdalla. Security and reliability criteria for electricity generation and transmission system planning. *Journal of the Egyptian Society of Engineers*, 61(1):3–10, 2022.
- [48] Seolhee Cho, Can Li, and Ignacio E Grossmann. Recent advances and challenges in optimization models for expansion planning of power systems and reliability optimization. *Computers & Chemical Engineering*, page 107924, 2022.
- [49] Artur Wyrwa, Wojciech Suwała, Marcin Pluta, Maciej Raczyński, Janusz Zyśk, and Stanisław Tokarski. A new approach for coupling the short-and long-term planning models to design a pathway to carbon neutrality in a coal-based power system. *Energy*, 239:122438, 2022.
- [50] Qirun Sun, Zhi Wu, Wei Gu, Tao Zhu, Lei Zhong, and Ting Gao. Flexible expansion planning of distribution system integrating multiple renewable energy sources: An approximate dynamic programming approach. *Energy*, 226:120367, 2021.
- [51] Fabian Neumann and Tom Brown. The near-optimal feasible space of a renewable power system model. *Electric Power Systems Research*, 190:106690, 2021.
- [52] BG Gorenstin, NM Campodonico, JP Costa, and MVF Pereira. Power system expansion planning under uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(1):129–136, 1993.

-
- [53] Adam F Abdin, Aakil Caunhye, Enrico Zio, and Michel-Alexandre Cardin. Optimizing generation expansion planning with operational uncertainty: A multistage adaptive robust approach. *Applied Energy*, 306:118032, 2022.
- [54] Rujing Yan, Jiangjiang Wang, Shuaikang Lu, Zherui Ma, Yuan Zhou, Lidong Zhang, and Youliang Cheng. Multi-objective two-stage adaptive robust planning method for an integrated energy system considering load uncertainty. *Energy and Buildings*, 235:110741, 2021.
- [55] Eric Hirst and Martin Schweitzer. Electric-utility resource planning and decision-making: The importance of uncertainty. *Risk Analysis*, 10(1):137–146, 1990.
- [56] Camile A Moraes, Leonardo W de Oliveira, Edimar J de Oliveira, Daniel F Botelho, Arthur Neves de Paula, and Milena F Pinto. A probabilistic approach to assess the impact of wind power generation in transmission network expansion planning. *Electrical Engineering*, pages 1–12, 2022.
- [57] Vijaykumar K Prajapati and Vasundhara Mahajan. Reliability assessment and congestion management of power system with energy storage system and uncertain renewable resources. *Energy*, 215:119134, 2021.
- [58] Antje Kann and John P Weyant. Approaches for performing uncertainty analysis in large-scale energy/economic policy models. *Environmental Modeling & Assessment*, 5(1):29–46, 2000.
- [59] Yang Lei, Dan Wang, Hongjie Jia, Jingcheng Chen, Jingru Li, Yi Song, and Jiayi Li. Multi-objective stochastic expansion planning based on multi-dimensional correlation scenario generation method for regional integrated energy system integrated renewable energy. *Applied energy*, 276:115395, 2020.
- [60] Esteban Gil, Ignacio Aravena, and Raúl Cárdenas. Generation capacity expansion planning under hydro uncertainty using stochastic mixed integer programming and scenario reduction. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(4):1838–1847, 2015.
- [61] Fardin Niazvand, Saeed Kharrati, Farshad Khosravi, and Abdollah Rastgou. Scenario-based assessment for optimal planning of multi-carrier hub-energy system under dual uncertainties and various scheduling by considering ccus technology. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 46:101300, 2021.
- [62] Steffen Rebennack. Generation expansion planning under uncertainty with emissions quotas. *Electric Power Systems Research*, 114:78–85, 2014.
- [63] Shan Jin. Electricity system expansion studies to consider uncertainties and interactions in restructured markets. 2012.
- [64] Fei Mei, Jiatang Zhang, Jixiang Lu, Jinjun Lu, Yuhan Jiang, Jiaqi Gu, Kun Yu, and Lei Gan. Stochastic optimal operation model for a distributed integrated energy system based on multiple-scenario simulations. *Energy*, 219:119629, 2021.
- [65] Hamed Bakhtiari, Jin Zhong, and Manuel Alvarez. Predicting the stochastic behavior of uncertainty sources in planning a stand-alone renewable energy-based microgrid using metropolis-coupled markov chain monte carlo simulation. *Applied Energy*, 290:116719, 2021.

- [66] Frank J Fabozzi, Petter N Kolm, Dessislava A Pachamanova, and Sergio M Focardi. *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons, 2007.
- [67] Zeinolabedin Sadeghi, Yahya Hatami, Seyed Abdolmajid Jalaei, and Amir Abdollahi. Generation capacity expansion economic-environmental planning under uncertainty of demand and supply. *Environment Systems and Decisions*, 40:544–559, 2020.
- [68] Desta Z Fitiwi, Muireann Lynch, and Valentin Bertsch. Enhanced network effects and stochastic modelling in generation expansion planning: Insights from an insular power system. *Socio-economic planning sciences*, 71:100859, 2020.
- [69] Farzaneh Pourahmadi and Jalal Kazempour. Distributionally robust generation expansion planning with unimodality and risk constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(5):4281–4295, 2021.
- [70] Jose L Ceciliano Meza, Mehmet Bayram Yildirim, and Abu SM Masud. A model for the multiperiod multiobjective power generation expansion problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(2):871–878, 2007.
- [71] Thomas Kleinert, Martine Labbé, Ivana Ljubić, and Martin Schmidt. A survey on mixed-integer programming techniques in bilevel optimization. *EURO Journal on Computational Optimization*, 9:100007, 2021.
- [72] Vishwamitra Oree, Sayed Z Sayed Hassen, and Peter J Fleming. Generation expansion planning optimisation with renewable energy integration: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 69:790–803, 2017.
- [73] Gerardo Latorre, Rubén Darío Cruz, Jorge Mauricio Areiza, and Andrés Villegas. Classification of publications and models on transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(2):938–946, 2003.
- [74] Reza Hemmati, Rahmat-Allah Hooshmand, and Amin Khodabakhshian. State-of-the-art of transmission expansion planning: Comprehensive review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 23:312–319, 2013.
- [75] Xu Deng and Tao Lv. Power system planning with increasing variable renewable energy: A review of optimization models. *Journal of Cleaner Production*, 246:118962, 2020.
- [76] Bhuvanesh Ananthan. Transmission-constrained generation expansion planning for a real-world power industry. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice*, 30(1), 2023.
- [77] Guillermo Vinasco, Marcos J Rider, and Ruben Romero. A strategy to solve the multistage transmission expansion planning problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(4):2574–2576, 2011.
- [78] S Binato and GC Oliveira. A heuristic procedure to cope with multi-year transmission expansion planning. In *Proc. IEEE/KTH Stockholm Power Tech. Conf.*, 1995.

- [79] R Romero, C Rocha, M Mantovani, and JRS Mantovani. Analysis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion systems. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, 150(5):521–526, 2003.
- [80] R Romero, M Mantovani, C Rocha, and JRS Mantovani. Evaluation of hybrid models for static and multistage transmission system planning. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 18(1):106–114, 2007.
- [81] Antonio H Escobar, Ramón Alfonso Gallego, and Rubén Romero. Multistage and coordinated planning of the expansion of transmission systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(2):735–744, 2004.
- [82] Ehsan Naderi, Mahdi Pourakbari-Kasmaei, and Matti Lehtonen. Transmission expansion planning integrated with wind farms: A review, comparative study, and a novel profound search approach. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 115:105460, 2020.
- [83] Shiwei Xie, Zhijian Hu, and Jueying Wang. Two-stage robust optimization for expansion planning of active distribution systems coupled with urban transportation networks. *Applied Energy*, 261:114412, 2020.
- [84] Sumit Verma, Vivekananda Mukherjee, et al. Transmission expansion planning: A review. In *Energy Efficient Technologies for Sustainability (ICEETS), 2016 International Conference on*, pages 350–355. IEEE, 2016.
- [85] R Villasana, LL Garver, and SJ Salon. Transmission network planning using linear programming. *IEEE transactions on power apparatus and systems*, (2):349–356, 1985.
- [86] YP Dusonchet and Ahmed El-Abiad. Transmission planning using discrete dynamic optimizing. *IEEE Transactions on Power apparatus and Systems*, (4):1358–1371, 1973.
- [87] AN de Paula, EJ de Oliveira, LW Oliveira, and CA Moraes. Reliability-constrained dynamic transmission expansion planning considering wind power generation. *Electrical Engineering*, 102:2583–2593, 2020.
- [88] IG Sanchez, R Romero, JRS Mantovani, and MJ Rider. Transmission-expansion planning using the dc model and nonlinear-programming technique. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, 152(6):763–769, 2005.
- [89] ZM Al-Hamouz and AS Al-Faraj. Transmission expansion planning using nonlinear programming. In *Transmission and Distribution Conference and Exhibition 2002: Asia Pacific. IEEE/PES*, volume 1, pages 50–55. IEEE, 2002.
- [90] Masoud Esmaili, Mohammad Ghamsari-Yazdel, Nima Amjady, CY Chung, and Antonio J Conejo. Transmission expansion planning including tcscs and sfcls: A minlp approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(6):4396–4407, 2020.
- [91] S Haffner, A Monticelli, A Garcia, J Mantovani, and R Romero. Branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, 147(3):149–156, 2000.

- [92] MJ Rider, AV Garcia, and R Romero. Power system transmission network expansion planning using ac model. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 1(5):731–742, 2007.
- [93] Khalid A Alnowibet, Ahmad M Alshamrani, and Adel F Alrasheedi. A bilevel stochastic optimization framework for market-oriented transmission expansion planning considering market power. *Energies*, 16(7):3256, 2023.
- [94] Dina Khastieva. Investment planning for flexibility sources and transmission lines in the presence of renewable generation. 2020.
- [95] Sini Han, Hyeon-Jin Kim, and Duehee Lee. A long-term evaluation on transmission line expansion planning with multistage stochastic programming. *Energies*, 13(8):1899, 2020.
- [96] Sergio Granville and Mario VF Pereira. *Analysis of the linearized power flow model in Benders decomposition*. Stanford Univ., 1985.
- [97] R Romero and A Monticelli. A hierarchical decomposition approach for transmission network expansion planning. *IEEE transactions on power systems*, 9(1):373–380, 1994.
- [98] MJ Rider, AV Garcia, and R Romero. Transmission system expansion planning by a branch-and-bound algorithm. *IET generation, transmission & distribution*, 2(1):90–99, 2008.
- [99] Saber Armaghani, Ali Hesami Naghshbandy, and S Mohammad Shahrtash. A novel multi-stage adaptive transmission network expansion planning to countermeasure cascading failure occurrence. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 115:105415, 2020.
- [100] Bining Zhao, Jesse Bukenberger, and Mort Webster. Scenario partitioning methods for two-stage stochastic generation expansion under multi-scale uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 37(3):2371–2383, 2021.
- [101] Cristiana L Lara, John D Sirola, and Ignacio E Grossmann. Electric power infrastructure planning under uncertainty: stochastic dual dynamic integer programming (sddip) and parallelization scheme. *Optimization and Engineering*, 21:1243–1281, 2020.
- [102] Mario VF Pereira and Leontina MVG Pinto. Application of sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, (2):381–389, 1985.
- [103] Erik F Alvarez, Miguel Paredes, and Marcos J Rider. Semidefinite relaxation and generalised benders decomposition to solve the transmission expansion network and reactive power planning. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 14(11):2160–2168, 2020.
- [104] Luiz Eduardo de Oliveira, JT Saraiva, Phillipe Vilaça Gomes, Camile Moraes, Augusto Oliveira, and Isabela Miranda de Mendonça. Reduction of the computational burden of the tep problem by a minimum-effort heuristic algorithm. In *2021 IEEE Madrid PowerTech*, pages 1–6. IEEE, 2021.

- [105] Gary L Schultz and Robert R Meyer. An interior point method for block angular optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 1(4):583–602, 1991.
- [106] K Ponnambalam, VH Quintana, and A Vannelli. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(2):892–899, 1992.
- [107] Dundun Liu, Shenxi Zhang, Haozhong Cheng, Lu Liu, Jianping Zhang, and Xiaohu Zhang. Reducing wind power curtailment by risk-based transmission expansion planning. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 124:106349, 2021.
- [108] Zhi Yuan, Weiqing Wang, Haiyun Wang, and Noradin Ghadimi. Probabilistic decomposition-based security constrained transmission expansion planning incorporating distributed series reactor. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 14(17):3478–3487, 2020.
- [109] Venkat Krishnan, Jonathan Ho, Benjamin F Hobbs, Andrew L Liu, James D McCalley, Mohammad Shahidehpour, and Qipeng P Zheng. Co-optimization of electricity transmission and generation resources for planning and policy analysis: review of concepts and modeling approaches. *Energy Systems*, 7(2):297–332, 2016.
- [110] Sergio D Saldarriaga Zuluaga, Jesús María López Lezama, and Nicolás M Galeano. Planeamiento de la expansión integrada generación-transmisión: una revisión del estado del arte. *Revista Tecno Lógicas*, 19(37):79–92, 2016.
- [111] Isaac-Camilo Gonzalez-Romero, Sonja Wogrin, and Tomas Gómez. Review on generation and transmission expansion co-planning models under a market environment. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 14(6):931–944, 2020.
- [112] Mohammad Navidi, Seyed Masoud Moghaddas Tafreshi, and Amjad Anvari-Moghaddam. A game theoretical approach for sub-transmission and generation expansion planning utilizing multi-regional energy systems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 118:105758, 2020.
- [113] Mojtaba Moradi-Sepahvand and Turaj Amraee. Integrated expansion planning of electric energy generation, transmission, and storage for handling high shares of wind and solar power generation. *Applied Energy*, 298:117137, 2021.
- [114] Mohammad R Hesamzadeh, Darryl R Biggar, Nasser Hosseinzadeh, and Peter J Wolfs. Transmission augmentation with mathematical modeling of market power and strategic generation expansion—part i. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(4):2040–2048, 2011.
- [115] David Pozo, Enzo E Sauma, and Javier Contreras. A three-level static milp model for generation and transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(1):202–210, 2013.
- [116] Saheed Lekan Gbadamosi and Nnamdi I Nwulu. A multi-period composite generation and transmission expansion planning model incorporating renewable energy sources and demand response. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 39:100726, 2020.

- [117] Mohamed M Refaat, Shady HE Abdel Aleem, Yousry Atia, Essam El Din Aboul Zahab, and Mahmoud M Sayed. A new decision-making strategy for techno-economic assessment of generation and transmission expansion planning for modern power systems. *Systems*, 11(1):23, 2023.
- [118] Xavier Blanchot, François Clautiaux, Aurélien Froger, and Manuel Ruiz. Solving a bilevel stochastic generation and transmission expansion planning problem. 2023.
- [119] Xiufan Ma and Ying Zhou. Coordination of generation and transmission planning for power system with large wind farms. *Energy Procedia*, 16:1979–1985, 2012.
- [120] Mohammad Sadegh Javadi, Mohsen Saniei, Habib Rajabi Mashhadi, and Guillermo Gutiérrez-Alcaraz. Multi-objective expansion planning approach: distant wind farms and limited energy resources integration. *IET Renewable Power Generation*, 7(6):652–668, 2013.
- [121] Michael Emmanuel, Kate Doubleday, Burcin Cakir, Marija Marković, and Bri-Mathias Hodge. A review of power system planning and operational models for flexibility assessment in high solar energy penetration scenarios. *Solar Energy*, 210:169–180, 2020.
- [122] Bernhard Graeber, Randall Spalding-Fecher, and Brian Gonah. Optimising transnational power generation and transmission investments: a southern african example. *Energy Policy*, 33(18):2337–2349, 2005.
- [123] Amin Khodaei and Mohammad Shahidehpour. Microgrid-based co-optimization of generation and transmission planning in power systems. *IEEE transactions on power systems*, 28(2):1582–1590, 2013.
- [124] Jeffrey English, Taco Niet, Benjamin Lyseng, Victor Keller, Kevin Palmer-Wilson, Bryson Robertson, Peter Wild, and Andrew Rowe. Flexibility requirements and electricity system planning: Assessing inter-regional coordination with large penetrations of variable renewable supplies. *Renewable Energy*, 145:2770–2782, 2020.
- [125] Guk-Hyun Moon, Sung-Kwan Joo, Don Hur, Hae-Sung Jeong, Heon-Su Ryu, and Kang-Wook Cho. Stochastic integrated generation and transmission planning method with gradient radar step (grs). In *Transmission & Distribution Conference & Exposition: Asia and Pacific, 2009*, pages 1–4. IEEE, 2009.
- [126] Jae Hyung Roh, Mohammad Shahidehpour, and Lei Wu. Market-based generation and transmission planning with uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(3):1587–1598, 2009.
- [127] Mahdi Mehrtash and Amin Kargarian. Risk-based dynamic generation and transmission expansion planning with propagating effects of contingencies. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 118:105762, 2020.
- [128] Jamshid Aghaei, Nima Amjady, Amir Baharvandi, and Mohammad-Amin Akbari. Generation and transmission expansion planning: Milp-based probabilistic model. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(4):1592–1601, 2014.

- [129] Hani Mavalizadeh, Abdollah Ahmadi, and Alireza Heidari. Probabilistic multi-objective generation and transmission expansion planning problem using normal boundary intersection. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 9(6):560–570, 2014.
- [130] Enzo E Sauma and Shmuel S Oren. Proactive planning and valuation of transmission investments in restructured electricity markets. *Journal of Regulatory Economics*, 30(3):358–387, 2006.
- [131] Yuechuan Tao, Jing Qiu, Shuying Lai, Junhua Zhao, and Yusheng Xue. Carbon-oriented electricity network planning and transformation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(2):1034–1048, 2020.
- [132] Behnam Alizadeh and Shahram Jadid. A dynamic model for coordination of generation and transmission expansion planning in power systems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 65:408–418, 2015.
- [133] Hasan Mehrjerdi. Dynamic and multi-stage capacity expansion planning in micro-grid integrated with electric vehicle charging station. *Journal of Energy Storage*, 29:101351, 2020.
- [134] Ghita Kassara, Pierre Carpentier, Camila Nunes Metello, Mario Veiga Pereira, and Rio Botafogo. Master thesis nested decomposition algorithm to solve multistage transmission expansion planning problems.
- [135] Jikai Zou, Shabbir Ahmed, and Xu Andy Sun. Nested decomposition of multistage stochastic integer programs with binary state variables. *Optimization Online*, 5436, 2016.
- [136] Cristiana L Lara, Dharik S Mallapragada, Dimitri J Papageorgiou, Aranya Venkatesh, and Ignacio E Grossmann. Deterministic electric power infrastructure planning: Mixed-integer programming model and nested decomposition algorithm. *European Journal of Operational Research*, 271(3):1037–1054, 2018.
- [137] Tao Ding, Ming Qu, Can Huang, Zekai Wang, Pengwei Du, and Mohammad Shahidehpour. Multi-period active distribution network planning using multi-stage stochastic programming and nested decomposition by sddip. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(3):2281–2292, 2020.
- [138] Tomas Valencia Zuluaga, Amelia Musselman, and Ignacio Aravena. Deterministic dual dynamic programming applied to optimal power system restoration. In *2022 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*, pages 1–5. IEEE, 2022.
- [139] Shujin Hou, Ying Fan, and Bo-Wen Yi. Long-term renewable electricity planning using a multistage stochastic optimization with nested decomposition. *Computers & Industrial Engineering*, 161:107636, 2021.
- [140] Walter Brokering Christie, Rodrigo Palma Behnke, and Luis Vargas Díaz. *Ñom Lüfke (El Rayo Domado) o los sistemas eléctricos de potencia*. Pearson Educación, 2008.
- [141] Allen J Wood and Bruce F Wollenberg. *Power generation, operation, and control*. John Wiley & Sons, 2012.

- [142] Alexander Franz, Julia Rieck, and Jürgen Zimmermann. A long-term unit commitment problem with hydrothermal coordination for economic and emission control in large-scale electricity systems. *OR spectrum*, 42(1):235–259, 2020.
- [143] Benjamín Maluenda Philippi et al. Expansion planning under long-term uncertainty for hydrothermal systems with volatile resources. 2017. Repositorio UC.
- [144] Felipe DR Machado, Andre Luiz Diniz, Carmen LT Borges, and Lilian C Brandão. Asynchronous parallel stochastic dual dynamic programming applied to hydrothermal generation planning. *Electric Power Systems Research*, 191:106907, 2021.
- [145] Mario VF Pereira and Leontina MVG Pinto. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical programming*, 52(1-3):359–375, 1991.
- [146] Andre Luiz Diniz, Maria Elvira P Maceira, Cesar Luis V Vasconcellos, and Debora Dias J Penna. A combined sddp/benders decomposition approach with a risk-averse surface concept for reservoir operation in long term power generation planning. *Annals of Operations Research*, 292(2):649–681, 2020.
- [147] Daniel Ávila, Anthony Papavasiliou, and Nils Löhdorf. Batch learning sddp for long-term hydrothermal planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2023.
- [148] Hubert Abgottspon and Göran Andersson. Multi-horizon modeling in hydro power planning. *Energy Procedia*, 87:2–10, 2016.
- [149] Ali Thaeer Hammid, Omar I Awad, Mohd Herwan Sulaiman, Saraswathy Shami-ni Gunasekaran, Salama A Mostafa, Nallapaneni Manoj Kumar, Bashar Ahmad Khalaf, Yasir Amer Al-Jawhar, and Raed Abdulkareem Abdulhasan. A review of optimization algorithms in solving hydro generation scheduling problems. *Energies*, 13(11):2787, 2020.
- [150] Roger Z Rios-Mercado. *A Security-Constrained Hydrothermal Unit Commitment Model in the Day-Ahead Electricity Market*. PhD thesis, Tecnológico de Monterrey, 2022.
- [151] Reza Hemmati, Rahmat-Allah Hooshmand, and Amin Khodabakhshian. Comprehensive review of generation and transmission expansion planning. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 7(9):955–964, 2013.
- [152] MEP Maceira, ACG Melo, JFM Pessanha, CB Cruz, VA Almeida, and TC Justino. Wind uncertainty modeling in long-term operation planning of hydro-dominated systems. In *2022 17th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS)*, pages 1–6. IEEE, 2022.
- [153] N Campodónico, S Binato, R Kelman, M Pereira, M Tinoco, F Montoya, M Zhang, and F Mayaki. Expansion planning of generation and interconnections under uncertainty. In *3rd Balkans Power Conference*, 2003.
- [154] Gerson C Oliveira, Silvio Binato, and Mario VF Pereira. Value-based transmission expansion planning of hydrothermal systems under uncertainty. *IEEE Transactions on power systems*, 22(4):1429–1435, 2007.

- [155] Guillermo Vinasco, Diego Tejada, Emivan F Da Silva, and Marcos J Rider. Transmission network expansion planning for the colombian electrical system: Connecting the ituango hydroelectric power plant. *Electric Power Systems Research*, 110:94–103, 2014.
- [156] Yaping Ren, Leilei Meng, Chaoyong Zhang, Fu Zhao, Ulah Saif, Aihua Huang, Gamin P Mendis, and John W Sutherland. An efficient metaheuristics for a sequence-dependent disassembly planning. *Journal of Cleaner Production*, 245:118644, 2020.
- [157] Francisco Muñoz. Economic analysis and algorithms for transmission and generation planning under hydro uncertainty and risk aversion. 2021.
- [158] Amin Khodaei, Mohammad Shahidehpour, Lei Wu, and Zuyi Li. Coordination of short-term operation constraints in multi-area expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(4):2242–2250, 2012.
- [159] Ali Hajebrahimi, Innocent Kamwa, Morad Mohamed Abdelmageed Abdelaziz, and Ali Moeini. Scenario-wise distributionally robust optimization for collaborative intermittent resources and electric vehicle aggregator bidding strategy. *IEEE transactions on power systems*, 35(5):3706–3718, 2020.
- [160] Arun P Sanghvi and Ira H Shavel. Investment planning for hydro-thermal power system expansion: Stochastic programming employing the dantzig-wolfe decomposition principle. *IEEE transactions on power systems*, 1(2):115–121, 1986.
- [161] JP Costa, NM Campodónico, BG Gorenstin, and MVF Pereira. A model for optimal energy expansion in interconnected hydrosystems. *10th PSCC, Austria*, 1990.
- [162] F Kenfack, A Guinet, and JM Ngundam. Investment planning for electricity generation expansion in a hydro dominated environment. *International journal of energy research*, 25(10):927–937, 2001.
- [163] Razan AH Al-Lawati, Jose L Crespo-Vazquez, Tasnim Ibn Faiz, Xin Fang, and Md Noor-E-Alam. A two-stage stochastic optimization approach to aid in decision making under uncertainty for a variable resource generator participating in a sequential energy market.
- [164] Stian Backe, Mohammadreza Ahang, and Asgeir Tomasgard. Stable stochastic capacity expansion with variable renewables: Comparing moment matching and stratified scenario generation sampling. *Applied Energy*, 302:117538, 2021.
- [165] Christian Alberto Soto Ruiz. Desarrollo de una herramienta para la programación de la operación a corto plazo en el sic. 2013.
- [166] Bernard Knueven, James Ostrowski, and Jean-Paul Watson. On mixed-integer programming formulations for the unit commitment problem. *INFORMS Journal on Computing*, 32(4):857–876, 2020.
- [167] Roberto Ponciroli, Nicolas E Stauff, Jackson Ramsey, Francesco Ganda, and Richard B Vilim. An improved genetic algorithm approach to the unit commitment/economic dispatch problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5):4005–4013, 2020.

- [168] Rodrigo Palma, Christie Walter BROKERING, and Luis VARGAS. *Ñom lufke (el rayo domado) o los sistemas eléctricos de potencia*, 2008.
- [169] Álinson S Xavier, Feng Qiu, and Shabbir Ahmed. Learning to solve large-scale security-constrained unit commitment problems. *INFORMS Journal on Computing*, 33(2):739–756, 2021.
- [170] Kris Poncelet, Erik Delarue, and William D’haeseleer. Unit commitment constraints in long-term planning models: Relevance, pitfalls and the role of assumptions on flexibility. *Applied Energy*, 258:113843, 2020.
- [171] Benjamin F Hobbs, Michael H Rothkopf, Richard P O’Neill, and Hung-po Chao. *The next generation of electric power unit commitment models*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2006.
- [172] Luis Montero, Antonio Bello, and Javier Reneses. A review on the unit commitment problem: Approaches, techniques, and resolution methods. *Energies*, 15(4):1296, 2022.
- [173] Qipeng P Zheng, Jianhui Wang, and Andrew L Liu. Stochastic optimization for unit commitment—a review. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(4):1913–1924, 2015.
- [174] Anthony Papavasiliou, Shmuel S Oren, and Barry Rountree. Applying high performance computing to transmission-constrained stochastic unit commitment for renewable energy integration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(3):1109–1120, 2015.
- [175] Hao Quan, Dipti Srinivasan, Ashwin M Khambadkone, and Abbas Khosravi. A computational framework for uncertainty integration in stochastic unit commitment with intermittent renewable energy sources. *Applied energy*, 152:71–82, 2015.
- [176] David Pozo, Javier Contreras, and Enzo E Sauma. Unit commitment with ideal and generic energy storage units. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(6):2974–2984, 2014.
- [177] Mohammad Reza Norouzi, Abdollah Ahmadi, Ali Esmaeel Nezhad, and Amir Ghaedi. Mixed integer programming of multi-objective security-constrained hydro/thermal unit commitment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 29:911–923, 2014.
- [178] Murilo Reolon Scuzziato, Erlon Cristian Finardi, and Antonio Frangioni. Solving stochastic hydrothermal unit commitment with a new primal recovery technique based on lagrangian solutions. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 127:106661, 2021.
- [179] Matthieu Paturet, Uros Markovic, Stefanos Delikaraoglou, Evangelos Vrettos, Petros Aristidou, and Gabriela Hug. Stochastic unit commitment in low-inertia grids. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5):3448–3458, 2020.
- [180] Ibrahim AlHajri, Ali Ahmadian, and Ali Elkamel. Stochastic day-ahead unit commitment scheduling of integrated electricity and gas networks with hydrogen energy

- storage (hes), plug-in electric vehicles (pevs) and renewable energies. *Sustainable Cities and Society*, 67:102736, 2021.
- [181] Yongpei Guan and Jianhui Wang. Uncertainty sets for robust unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(3):1439–1440, 2014.
- [182] Luca Moretti, Emanuele Martelli, and Giampaolo Manzolini. An efficient robust optimization model for the unit commitment and dispatch of multi-energy systems and microgrids. *Applied Energy*, 261:113859, 2020.
- [183] Siyuan Wang, Chaoyue Zhao, Lei Fan, and Rui Bo. Distributionally robust unit commitment with flexible generation resources considering renewable energy uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 37(6):4179–4190, 2022.
- [184] Morteza Azimi Nasab, Mohammad Zand, Sanjeevikumar Padmanaban, Mahajan Sagar Bhaskar, and Josep M Guerrero. An efficient, robust optimization model for the unit commitment considering renewable uncertainty and pumped-storage hydropower. *Computers and Electrical Engineering*, 100:107846, 2022.
- [185] Yong Fu, Mohammad Shahidehpour, and Zuyi Li. Security-constrained unit commitment with ac constraints. *IEEE transactions on power systems*, 20(3):1538–1550, 2005.
- [186] Amin Nasri, S Jalal Kazempour, Antonio J Conejo, and Mehrdad Ghandhari. Network-constrained ac unit commitment under uncertainty: A benders’ decomposition approach. *IEEE transactions on power systems*, 31(1):412–422, 2016.
- [187] Darin Madzharov, Erik Delarue, and William D’haeseleer. Integrating electric vehicles as flexible load in unit commitment modeling. *Energy*, 65:285–294, 2014.
- [188] Masoumeh Ahrabi, Mehrdad Abedi, Hamed Nafisi, Mohammad Amin Mirzaei, Behnam Mohammadi-Ivatloo, and Mousa Marzband. Evaluating the effect of electric vehicle parking lots in transmission-constrained ac unit commitment under a hybrid igdt-stochastic approach. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 125:106546, 2021.
- [189] Uwe Langenmayr, Weimin Wang, and Patrick Jochem. Unit commitment of photovoltaic-battery systems: An advanced approach considering uncertainties from load, electric vehicles, and photovoltaic. *Applied Energy*, 280:115972, 2020.
- [190] Goran Strbac, Anser Shakoor, Mary Black, Danny Pudjianto, and Thomas Bopp. Impact of wind generation on the operation and development of the uk electricity systems. *Electric Power Systems Research*, 77(9):1214–1227, 2007.
- [191] Hannele Holttinen, Peter Meibom, Antje Orths, Bernhard Lange, Mark O’Malley, John Olav Tande, Ana Estanqueiro, Emilio Gomez, Lennart Söder, Goran Strbac, et al. Impacts of large amounts of wind power on design and operation of power systems, results of iea collaboration. *Wind Energy*, 14(2):179–192, 2011.
- [192] Anna Schwele, Jalal Kazempour, and Pierre Pinson. Do unit commitment constraints affect generation expansion planning? a scalable stochastic model. *Energy Systems*, 11(2):247–282, 2020.

- [193] Kenneth Van den Bergh and Erik Delarue. Cycling of conventional power plants: technical limits and actual costs. *Energy Conversion and Management*, 97:70–77, 2015.
- [194] Zakariya Dalala, Murad Al-Omari, Mohammad Al-Addous, Mathhar Bdour, Yaqoub Al-Khasawneh, and Malek Alkasrawi. Increased renewable energy penetration in national electrical grids constraints and solutions. *Energy*, 246:123361, 2022.
- [195] Kenneth Bruninx, Kenneth Van den Bergh, Erik Delarue, and William D’haeseleer. Optimization and allocation of spinning reserves in a low-carbon framework. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(2):872–882, 2016.
- [196] Raphael Saavedra, Alexandre Street, and Jose M Arroyo. Day-ahead contingency-constrained unit commitment with co-optimized post-contingency transmission switching. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(6):4408–4420, 2020.
- [197] K Poncelet, A van Stiphout, E Delarue, W D’haeseleer, and G Deconinck. A clustered unit commitment problem formulation for integration in investment planning models. *Tech. Rep.*, 2014.
- [198] Pavlos Nikolaidis and Andreas Poullikkas. Enhanced lagrange relaxation for the optimal unit commitment of identical generating units. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 14(18):3920–3928, 2020.
- [199] K. Al-Ali, M.H. Albadi, and H.E. Vinagre. Clustering power plants based on techno-economic similarity for expansion planning. *Electric Power Systems Research*, 154:8–16, 2018.
- [200] T Senjyu, AY Saber, T Miyagi, K Shimabukuro, N Urasaki, and T Funabashi. Fast technique for unit commitment by genetic algorithm based on unit clustering. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, 152(5):705–713, 2005.
- [201] Shantanu Chakraborty, Takayuki Ito, Tomonobu Senjyu, and Ahmed Yousuf Saber. Unit commitment strategy of thermal generators by using advanced fuzzy controlled binary particle swarm optimization algorithm. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 43(1):1072–1080, 2012.
- [202] F.M. Khoury and M.E. El-Hawary. Clustering of power plants for operational planning: A comparison of hierarchical and k-means algorithms. *IEEE Access*, 8:172938–172949, 2020.
- [203] V. Sharma, R.K. Singh, and S. Singh. Clustering thermal power plants for optimal maintenance scheduling. *Journal of Engineering, Design and Technology*, 2021.
- [204] S. Shukla and S.K. Singh. Cluster analysis of wind power plants for operational planning. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects*, 43(4):455–466, 2021.
- [205] P. Jain and V.K. Jain. Optimal clustering of hydro power plants for efficient operation. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 131:107033, 2021.

- [206] Hossein Seifi and Mohammad Sadegh Sepasian. *Electric power system planning: issues, algorithms and solutions*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [207] Sebastian Gonzato, Kenneth Bruninx, and Erik Delarue. Long term storage in generation expansion planning models with a reduced temporal scope. *Applied Energy*, 298:117168, 2021.
- [208] Sonja Wogrin, David Galbally, and Javier Reneses. Optimizing storage operations in medium-and long-term power system models. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(4):3129–3138, 2016.
- [209] Mohamed Elsobki, Khaled El-Metwally, and Emad Ebeid. Load duration curve-based multi-objective approach for optimal power generation capacity expansion planning. *Electric Power Systems Research*, 186:106479, 2020.
- [210] Yanfeng Sun, Qiang Zhang, Chen Liu, and Wei Zhang. Capacity expansion planning for power systems considering load duration curve-based risk assessment. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 131:107042, 2021.
- [211] Yanan Zhang, Shuyong Guo, Haifeng Wang, and Zhaoyang Y Dong. Optimal planning of renewable energy integration based on load duration curve and probabilistic optimization. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 132:106920, 2021.
- [212] Satyajit Sahu and Tomonobu Senjyu. Power capacity expansion planning for a renewable energy dominant power system using load duration curve and monte carlo simulation. *Applied Energy*, 304:117856, 2021.
- [213] Yong Ouyang, Lei Wu, and Shuo Yang. A novel approach for power system capacity expansion planning based on load duration curve and integrated learning model. *Energy*, 239:122652, 2022.
- [214] James Nelson, Josiah Johnston, Ana Mileva, Matthias Fripp, Ian Hoffman, Autumn Petros-Good, Christian Blanco, and Daniel M Kammen. High-resolution modeling of the western north american power system demonstrates low-cost and low-carbon futures. *Energy Policy*, 43:436–447, 2012.
- [215] Bryan S Palmintier and Mort D Webster. Impact of operational flexibility on electricity generation planning with renewable and carbon targets. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 7(2):672–684, 2016.
- [216] Álvaro García-Cerezo, Luis Baringo, and Raquel García-Bertrand. Representative days for expansion decisions in power systems. *Energies*, 13(2):335, 2020.
- [217] Zexuan Wang, Fang Jiang, Lei Wang, and Yonghua Song. Capacity expansion planning of power systems using representative days approach. *Electric Power Systems Research*, 181:106086, 2020.
- [218] Nataliya Malyshkina, Arild Helseth, and Espen Løken. Optimization of the generation and transmission capacity expansion under uncertainty using representative days. *Applied Energy*, 262:114504, 2020.

- [219] Seung-Hwan Lee, Young-Sik Lee, and Seung-Ill Moon. Optimal design of a renewable energy system with a representative day in a microgrid. *Energies*, 14(11):3042, 2021.
- [220] Adeel Javed, Muhammad Aziz, Muhammad Ali Farooq, and Muhammad Ali Saqib. Capacity expansion planning of power systems using a representative day approach. In *2021 4th International Conference on Intelligent Sustainable Systems (ICISS)*, pages 1165–1170. IEEE, 2021.
- [221] Lujia Zhao, Hongbo Guo, Hao Zhang, and Zhi Zhou. A comparative study of representative days for power system capacity expansion planning under uncertainty. *Applied Energy*, 308:117307, 2022.
- [222] Ignacio Aravena and Esteban Gil. Hydrological scenario reduction for stochastic optimization in hydrothermal power systems. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(2):231–240, 2015.
- [223] Fan Wu, Jianhui Wang, Yajing Guan, Chengshan Wang, and Lin Cheng. Scenario reduction for long-term capacity expansion planning of power systems considering renewable uncertainties. *Applied Energy*, 278:115646, 2020.
- [224] Lingdi Cui, Yang Liu, Lijun Li, and Yongping Li. Capacity expansion planning of regional power systems under uncertainty using scenario reduction and a hybrid decomposition method. *Energy*, 193:116763, 2020.
- [225] Mohamed Thabet, Anouar Ben Mabrouk, and Tarek Bouktir. Multi-objective capacity expansion planning for power systems under uncertainty using scenario reduction and a novel heuristic algorithm. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 129:107888, 2021.
- [226] Yuan Ma, Fushuan Wen, Peng Li, and Yong Tang. Capacity expansion planning of power systems under uncertainty using scenario reduction and dynamic programming. *Energy*, 239:121829, 2022.
- [227] Xunpeng Shi, Jiayu Huang, and Jianhui Wang. Risk-based scenario reduction for robust capacity expansion planning of power systems considering demand-side uncertainty. *Applied Energy*, 307:117573, 2022.
- [228] Yonghan Feng and Sarah M Ryan. Scenario construction and reduction applied to stochastic power generation expansion planning. *Computers & Operations Research*, 40(1):9–23, 2013.
- [229] Xiaotong Meng, Lei Wu, Xiaofeng Huang, and Jianhui Wang. Multi-scenario clustering and scenario reduction for capacity expansion planning of power systems under uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5):4028–4040, 2020.
- [230] Ahmad Jafari, Mohsen Parsa Moghaddam, and Saeid Bahrami. Multi-objective long-term capacity expansion planning of power systems based on scenario clustering and artificial neural network. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 130:106969, 2021.
- [231] Xinyu Liu, Tao Lu, and Peng Gao. Scenario clustering-based capacity expansion planning considering carbon emission constraints. *Applied Energy*, 308:117897, 2022.

- [232] Shifeng Zhu, Zhaoyang Y Dong, Yang Zhao, and Qing Xia. A two-stage clustering-based scenario reduction method for power system capacity expansion planning under uncertain input parameters. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 138:107485, 2022.
- [233] George B Dantzig and Philip Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations research*, 8(1):101–111, 1960.
- [234] Jinyue Tang, Qi Wang, Haoran Zhao, and Fushuan Wen. Towards an efficient dantzig-wolfe decomposition approach for power systems optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5):3847–3858, 2020.
- [235] Hongxin Liu, Pengfei Bi, Chenxi Liu, and Xiaodong Lai. Enhanced dantzig-wolfe decomposition for unit commitment considering battery degradation. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 13(1):331–341, 2022.
- [236] Chenpeng Song, Zhe Zhang, Jianhui Wang, and Hongbin Sun. Enhanced dantzig-wolfe decomposition for unit commitment considering grid-friendly load. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2022.
- [237] Yixiao Gong, Ziyou Gao, Yi Wang, Jie Fang, Tianqi Liu, and Hongbin Sun. An optimized dantzig-wolfe decomposition method for the unit commitment problem with large-scale integration of renewable energy. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 12(3):1233–1243, 2021.
- [238] Jinyue Tang, Qi Wang, Haoran Zhao, and Fushuan Wen. Towards efficient parallelizable dantzig-wolfe decomposition for multi-stage stochastic programming with endogenous uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(5):4275–4286, 2021.
- [239] Kavinesh J Singh, Andy B Philpott, and R Kevin Wood. Dantzig-wolfe decomposition for solving multistage stochastic capacity-planning problems. *Operations Research*, 57(5):1271–1286, 2009.
- [240] Qi Wang, Jinyue Tang, Haoran Zhao, and Fushuan Wen. Dantzig-wolfe decomposition for long-term capacity expansion planning of integrated electricity-gas systems. *Applied Energy*, 266:114872, 2020.
- [241] Haoran Zhao, Qi Wang, Jinyue Tang, and Fushuan Wen. Dantzig-wolfe decomposition for capacity expansion planning with endogenous uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(5):3622–3634, 2021.
- [242] Qi Wang, Jinyue Tang, Haoran Zhao, and Fushuan Wen. Dantzig-wolfe decomposition for integrated planning of power, gas and heat systems. *Applied Energy*, 293:116932, 2021.
- [243] Xiaolei Jiang, Shuai Li, Qian Zhao, and Xiaoning Liu. Capacity expansion planning with electric and natural gas interdependent systems using dantzig-wolfe decomposition. *Energy*, 238:121991, 2021.
- [244] Jacques F Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 4(1):238–252, 1962.

- [245] Han Chen, Salah Abada, and Martin Kühn. Benders decomposition for the integrated gas and electricity network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(2):1352–1362, 2020.
- [246] Qi Wang, Chenyu Li, Xiaoling Li, and Fushuan Wen. Benders decomposition for long-term transmission expansion planning considering carbon emission constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(2):1121–1131, 2020.
- [247] Xiangning He, Wei Lin, Rui Ma, and Jin Zhang. Benders decomposition for integrated power system planning and operation under multi-level uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2021.
- [248] Xue Qiao, Xue Li, Han Qiao, and Xiaoqiang Sun. Dynamic stochastic benders decomposition with upper bound constraints for multi-objective energy system expansion planning. *Energy*, 220:119732, 2021.
- [249] Xiaohong Liu, Yuzhang Wu, Jiajie Xu, Hao Wang, and Jian Wang. Benders decomposition based large-scale unit commitment considering multiple uncertainties in the electricity market. *Applied Energy*, 291:116851, 2021.
- [250] R Entriken. Parallel decomposition of two-stage stochastic linear programs. In *Proceedings of the Workshop on Resource Planning Under Uncertainty for Electric Power Systems, Department of Operations Research, Stanford University*, 1989.
- [251] John R Birge and Francois Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [252] Siyuan Sun, Ke Li, and Xiaohui Yuan. Accelerated benders decomposition for hydro-thermal scheduling using gpu parallelization. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 14(20):4081–4091, 2020.
- [253] Yuwei Li, Victor DeMiguel, Xueying Zhang, Rania El-Khatib, and David Izraelevitz. Parallelized benders decomposition for high-dimensional capacity expansion planning problems. In *2020 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*, pages 1–5. IEEE, 2020.
- [254] Wensong Li, Yafei Zhao, and Haoxiang Xu. An improved parallel benders decomposition algorithm for multi-regional interconnected power system optimal scheduling. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 12(1):391–402, 2021.
- [255] Yang Zhang, Hongsen Yan, Ning Wang, Jinsong Tan, and Zhaoyang Dong. Benders decomposition for large-scale stochastic unit commitment with parallel computing. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(1):377–387, 2021.
- [256] Hyojin Lee, Shuang Yang, Thiagarajan Ramachandran, and James D McCalley. Parallel benders decomposition for coordinated real-time dispatch of interdependent natural gas and electric power systems. In *2021 IEEE Power & Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*, pages 1–5. IEEE, 2021.
- [257] YF Li, GH Huang, YP Li, Y Xu, and WT Chen. Regional-scale electric power system planning under uncertainty—a multistage interval-stochastic integer linear programming approach. *Energy Policy*, 38(1):475–490, 2010.

- [258] Daniel Bienstock and Jeremy F Shapiro. Optimizing resource acquisition decisions by stochastic programming. *Management Science*, 34(2):215–229, 1988.
- [259] Fernanda S Thomé, Silvio Binato, Mario VF Pereira, Nora Campodónico, Marcia HC Fampa, and Luiz Carlos da Costa Jr. Decomposition approach for generation and transmission expansion planning with implicit multipliers evaluation. *Pesquisa Operacional*, 33(3):343–359, 2013.
- [260] Yifeng Zhang, Xiuli Wang, and Jie Wu. Benders decomposition based capacity expansion planning with multiple fuel options and emission constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5):4131–4143, 2020.
- [261] Xiaojie Zhang, Morgan Bazilian, Sofia Simoes, Yuan Qi, Georges Kariniotakis, Shuhan Guo, Weiwei Tao, and Lichao Wu. Stochastic benders decomposition for natural gas and power systems expansion planning under deep decarbonization. *Energy*, 223:119785, 2021.
- [262] Yu-Ting Hsiao, Jie Wu, Wei-Hsiang Lin, Yao Liu, and Ning-Yi Chen. Benders decomposition approach for strategic energy storage capacity expansion planning. *Applied Energy*, 302:117566, 2021.
- [263] Yang Zhang, Ying Zhang, Hongsen Yan, and Zhaoyang Dong. Multi-regional generation capacity expansion planning based on improved benders decomposition. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, pages 1–10, 2021.
- [264] Shaoxuan Wu, Murat Yilmaz, Vijay Vittal, and Anna Scaglione. Strategic capacity expansion planning of electricity systems using a benders decomposition method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2021.
- [265] Robert Nürnberg and Werner Römisch. A two-stage planning model for power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty. *Optimization and Engineering*, 3(4):355–378, 2002.
- [266] Csaba I Fábián and Zoltán Szőke. Solving two-stage stochastic programming problems with level decomposition. *Computational Management Science*, 4(4):313–353, 2007.
- [267] Haiyan Cheng, Wenxing Shi, Xinyu Li, and Xinmin Li. Mixed integer linear programming with benders cuts for multilevel optimization. *Journal of Global Optimization*, 81(3):599–620, 2021.
- [268] A Mokhtari, A Harati, M Saidi-Mehrabad, S Fallahi, and R Azizipanah-Abarghooee. Bilevel multi-objective optimization using an adaptive benders decomposition algorithm. *Journal of Cleaner Production*, 273:122764, 2020.
- [269] Jiarui Liu, Haifeng Xu, and Jie Shen. Multilevel distributionally robust linear programming via benders’ cuts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(6):2719–2734, 2020.
- [270] Arda Sanisoglu and Amirali Ahmadi. Benders decomposition and cutting plane methods for multi-level mixed integer programming. *Optimization and Engineering*, pages 1–26, 2021.

- [271] Kaiyong Shen, Xun Yuan, Kejun Ma, Naiqing Cui, and Wenping Cheng. Benders decomposition based method for multilevel economic load dispatch with demand response. *Electric Power Systems Research*, 194:106452, 2021.
- [272] Frank Noonan and Richard J Giglio. Planning electric power generation: a nonlinear mixed integer model employing benders decomposition. *Management Science*, 23(9):946–956, 1977.
- [273] M. Cao, Z. Guo, and Y. Yuan. A global optimization algorithm based on interval analysis and bender’s decomposition for nonlinear integer programming problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 50(2):746–756, Feb. 2020.
- [274] A. J. Kengne, A. R. Ndjomo, and P. Woafu. Benders decomposition for global optimization of nonlinear programs with quadratic constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 185(3):914–936, Mar. 2020.
- [275] S. S. Nikulin and V. F. Boiko. Nonlinear programming with bender’s cuts and active-set methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 60(11):1776–1787, Nov. 2020.
- [276] H. Zhao, L. Huang, X. Li, and Y. Xiong. An improved benders decomposition method for nonlinear programming with complementarity constraints. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:6625512, Feb. 2021.
- [277] C. T. Nguyen and A. H. C. Tsang. Benders decomposition for global optimization of nonconvex nonlinear mixed-integer programs. *Journal of Global Optimization*, 80(2):425–444, Feb. 2021.
- [278] Shayan Aminpour and Jalal Kazempour. Reliability-constrained power system planning using benders’ decomposition. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(2):1291–1301, 2020.
- [279] Ali Behnamfar, Ali Ahmadian, Bahman Bakhshizadeh, Jamshid Aghaei, and Masoud Rabbani. Reliability-constrained capacity expansion planning for wind-power integrated power systems via benders decomposition. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(1):613–625, 2021.
- [280] Mohammad Reza Tahanan, Hamidreza Zareipour, Claudio A Cañizares, and Kankar Bhattacharya. Multiobjective planning of integrated energy systems with variable generation using benders decomposition. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(5):3646–3657, 2021.
- [281] H. Javani, R. Bozorgmehri, and M. Amiri. Stochastic dual dynamic programming for large-scale hydrothermal scheduling. *Electric Power Systems Research*, 190:106663, 2020.
- [282] X. Wu, Y. Zheng, W. Wei, L. Zhang, and Y. Wang. Stochastic dual dynamic programming with adaptive importance sampling for probabilistic power system security assessment. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(2):1239–1249, 2020.

- [283] H. Zhang, Y. Li, F. Li, and Q. Wang. Stochastic dual dynamic programming for integrated generation and transmission planning considering renewable energy uncertainties. *Applied Energy*, 278:115646, 2020.
- [284] S. Yang, C. Li, X. Li, J. Qiu, and J. Wang. Stochastic dual dynamic programming with aggregated energy storage for scheduling of integrated energy systems. *Applied Energy*, 284:116423, 2021.
- [285] Y. Liu, W. Tang, J. Wu, J. Huang, and Q. Chen. Stochastic dual dynamic programming for integrated energy systems with uncertainties. *Applied Energy*, 283:116237, 2021.
- [286] N Jiménez Redondo and AJ Conejo. Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: solution of the dual problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):89–95, 1999.
- [287] Samer Takriti, John R Birge, and Erik Long. A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3):1497–1508, 1996.
- [288] Yu Peng, Guoqiang Zhang, and Li Wang. Lagrangian relaxation-based energy storage operation with battery cycle aging constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(2):1594–1604, 2021.
- [289] Lin Zhang, Feng Li, Zhongming Li, Chao Xu, and Bo Tang. A lagrangian relaxation-based method for optimal placement of phasor measurement units. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(1):638–647, 2020.
- [290] Jie Li, Guangfu Li, and Ying Wang. A lagrangian relaxation-based heuristic algorithm for multi-objective optimal allocation of charging stations in distribution network. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(6):4973–4983, 2020.
- [291] Kai Wang, Shuhui Huang, and Wen Yang. A novel lagrangian relaxation-based algorithm for optimal power flow considering power system constraints. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 131:106956, 2021.
- [292] Yongjie Fan, Yuan Chen, and Bo Wang. An adaptive lagrangian relaxation-based approach for distribution network reconfiguration considering load and dg uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(3):2913–2924, 2021.
- [293] John M Mulvey and Hercules Vladimirov. Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. *Annals of Operations Research*, 31(1):399–424, 1991.
- [294] Thorkell Helgason and Stein W Wallace. Approximate scenario solutions in the progressive hedging algorithm. *Annals of Operations Research*, 31(1):425–444, 1991.
- [295] Stein W Wallace and Thorkell Helgason. Structural properties of the progressive hedging algorithm. *Annals of Operations Research*, 31(1):445–455, 1991.
- [296] Shuo Wang, Richard P O’Neill, Jean-Paul Watson, and Alexander Lurie. Progressive hedging algorithm with approximate subproblems for two-stage stochastic mixed integer programming. *INFORMS Journal on Computing*, 32(4):913–927, 2020.

-
- [297] Carlos Bentes and Secundino Soares. Progressive hedging applied to capacity expansion planning under uncertainty in power systems. *Electric Power Systems Research*, 184:106229, 2020.
- [298] Yuzhuo Hou and Hui Lin. Progressive hedging based energy procurement planning for manufacturing companies. *Applied Energy*, 268:114915, 2020.
- [299] Liwen Mo, Siyao Guo, Zhipeng Huang, and Yiping Wang. A progressive hedging based approach for the optimization of stochastic combined cooling, heating and power systems with energy storage. *Applied Thermal Engineering*, 184:116254, 2021.
- [300] Wenqi Xu, Shu Li, and Fangxing Wu. Progressive hedging based strategy for optimal energy management of electric vehicle integrated microgrids. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 128:106773, 2021.
- [301] Wolf Fichtner and Manuel Ruppert. Stochastic dual dynamic integer programming for energy system planning under uncertainty. *Applied Energy*, 281:116061, 2021.
- [302] Yubin Li, Xiaojun Liu, Yanyan Xu, Xuelei Wu, and Yonghua Zhang. Robust long-term transmission network planning based on the stochastic dual dynamic integer programming method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(1):292–301, 2021.
- [303] Marcus Aurelio Paim, Mario Vitor F Pereira, and Ricardo C L de Oliveira. Stochastic dual dynamic integer programming approach for hydrothermal scheduling problem considering cascaded reservoirs. *Applied Energy*, 282:116319, 2021.
- [304] Anderson D Santos, Otavio Ponce, and Leticia P Schmitz. Stochastic dual dynamic integer programming for hydropower reservoir operation under uncertainty. *Energy*, 207:118255, 2020.
- [305] Hamidreza Daneshvar and Nima Amjady. Enhanced stochastic dual dynamic programming for optimal capacity expansion planning with discrete decisions. *Electric Power Systems Research*, 181:106066, 2020.
- [306] Xi Qiu, Yue Zhao, Yue Song, Qiuwei Wu, and Mohammad Shahidehpour. Progressive hedging based stochastic dual dynamic programming for power generation expansion planning under uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(6):4618–4630, 2020.
- [307] Yongchen Song, Siyi Gong, Yong Huang, Jianhui Wang, and Yutian Liu. A mixed-integer stochastic dual dynamic programming approach for optimal transmission and generation expansion planning under uncertain renewable power. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(3):2633–2646, 2021.
- [308] Gilbert Laporte and François V Louveaux. The integer l-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations research letters*, 13(3):133–142, 1993.
- [309] FS Thomé. *Application of Decomposition Technique with Evaluation of Implicit Multipliers in Electrical Systems Generation and Network Expansion Planning*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil (in portuguese), 2008.

-
- [310] Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B Shah, and Alan Edelman. Julia: A fast dynamic language for technical computing. *arXiv preprint arXiv:1209.5145*, 2012.
 - [311] Iain Dunning, Joey Huchette, and Miles Lubin. Jump: A modeling language for mathematical optimization. *SIAM Review*, 59(2):295–320, 2017.
 - [312] O. Dowson and L. Kapelevich. SDDP.jl: a Julia package for stochastic dual dynamic programming. *INFORMS Journal on Computing*, 2020. in press.
 - [313] IBM ILOG Cplex. V12. 1: User’s manual for cplex. *International Business Machines Corporation*, 46(53):157, 2009.