



Universidad Técnica Federico Santa María.
Departamento de Física.

Soluciones Cosmológicas en Gravedad Afín Polinomial en 3 y 4 Dimensiones

Bastián Grez Pardo

Advisor: Oscar Castillo-Felisola

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Magister en Ciencias, mención física, de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Agosto, 2023

TÍTULO DE LA TESIS:

**SOLUCIONES COSMOLÓGICAS EN GRAVEDAD AFÍN
POLINOMIAL EN 3 Y 4 DIMENSIONES**

AUTOR:

BASTIÁN GREZ PARDO

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Magister en Ciencias, mención física, de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EXAMINADORA:

Oscar Castillo-Felisola (UTFSM)

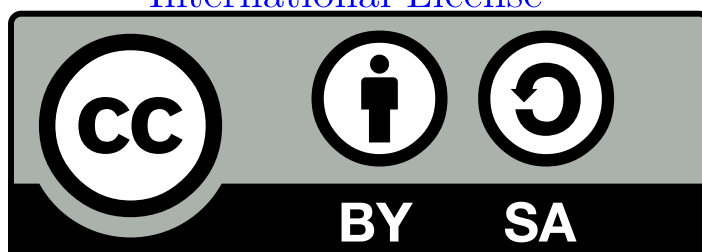
Iván Schmidt Andrade (UTFSM)

Aureliano Skirzewski (UDELAR)

16 de agosto de 2023

a mi familia

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



Resumen

La Gravedad Afín Polinomial es un modelo de gravedad que tiene como campo fundamental a la conexión, que está relacionada con el concepto de paralelismo, a diferencia de la teoría de Relatividad General que tiene como campo fundamental a la métrica, que está relacionada con el concepto de distancia. La acción de este modelo se construye en base a la invarianza bajo difeomorfismos y se utiliza un análisis sobre la estructura de índices. Se analizan las soluciones en el contexto cosmológico, es decir, en un espacio-tiempo isotrópico y homogéneo. Para lograr que la conexión cumpla con el principio cosmológico, se utiliza la derivada de Lie y se escogen como vectores de Killing a los vectores generadores de traslaciones y rotaciones. Se buscan soluciones para el modelo en tres y en cuatro dimensiones y se indican posibles caminos para encontrar más soluciones. Se analizan el tensor de Ricci y los tensores simétricos formados con la torsión para ver si estos pueden ser interpretados como métrica emergente.

Agradecimientos

Parto agradeciendo a mi familia, quienes desde que era pequeño me apoyaron e incentivaron a estudiar, aprender y cada vez dar lo mejor de mí. A ellos también pertenece el crédito de este trabajo de tesis ya que gracias a todos sus esfuerzos me convertí en la persona que soy y que fue capaz de realizar este trabajo.

Agradezco también a mis amigos por acompañarme durante mi vida, haciendo amenos los momentos de mayor estrés y motivándome constantemente a la escritura de este trabajo.

Un gran agradecimiento al profesor Oscar por permitirme trabajar con el grupo de investigación y así poder completar el programa de magíster. Gracias por todas las enseñanzas, consejos y por la infinita paciencia en transmitir sus conocimientos.

Finalmente, agradezco a la Universidad Técnica Federico Santa María por aceptarme en el programa de magíster y por la beca de magíster No. 034/2021 que me permitió costear mis estudios.

Índice general

1. Introducción	1
2. Geometría diferencial	3
2.1. Topología	3
2.1.1. Homeomorfismo	4
2.2. Variedad	4
2.2.1. Vectores, covectores y tensores	5
2.2.2. Fibrado	7
2.2.3. Derivada de Lie	8
2.3. Conexión afín	10
2.3.1. Torsión y Curvatura	14
2.4. Métrica	16
2.4.1. No Metricidad	17
3. Formulaciones de Gravedad	19
3.1. Relatividad General	19
3.2. Gravedad Afín Polinomial	21
3.2.1. Acción	22
3.2.2. Ecuaciones de Campo	22
3.2.3. Métricas Emergentes	24
4. Modelo en Tres Dimensiones	25
4.1. Acción	25
4.2. Ecuaciones de Campo	26
4.3. Soluciones Cosmológicas	26
4.3.1. Ansatz Cosmológico	26
4.3.2. Campo \mathcal{B}	26
4.3.3. Campo \mathcal{A}	28
4.3.4. Campo Γ	29
4.3.5. Ecuaciones	32
4.3.6. Soluciones	33
5. Modelo en Cuatro Dimensiones	43
5.1. Acción	43
5.2. Ecuaciones de Campo	44

5.3. Soluciones Cosmológicas	44
5.3.1. Ansatz cosmológico	44
5.3.2. Campo \mathcal{B}	45
5.3.3. Campo \mathcal{A}	47
5.3.4. Campo Γ	48
5.3.5. Ecuaciones	51
5.3.6. Soluciones	51
6. Conclusión	55
A. Ecuaciones de Campo en 4 Dimensiones	57
A.1. Ecuaciones de Campo Γ	57
A.2. Ecuaciones para \mathcal{B}	58
A.3. Ecuaciones para \mathcal{A}	59
Bibliografía	62

Introducción

La teoría de relatividad especial nos indica cómo transforman las coordenadas de distintos eventos físicos, cuando hay un cambio de referencia entre observadores inerciales. Para extender su teoría relativista a sistemas de referencia acelerados, Einstein utilizó el principio de equivalencia e identificó que un sistema con aceleración era localmente indistinguible a un sistema en un campo gravitacional. Esto le indicó, que una teoría general de relatividad, debía ser una teoría de gravedad. Adicionalmente, debido a las consecuencias del principio de equivalencia junto con la relatividad especial, Einstein interpretó a la gravedad como una consecuencia de la estructura del espacio-tiempo. De este modo, la matemática que da cuenta de esta estructura es la geometría diferencial [1, 2, 3, 4].

Si bien la relatividad general logró explicar fenómenos que no se podían explicar con la teoría de gravitación de Newton, como la precesión del perihelio de Mercurio, y predijo varios resultados que luego serían confirmados experimentalmente [5], como la deflexión de la luz debido a objetos masivos, el corrimiento al rojo de la luz al viajar por zonas con distinto potencial gravitatorio y la existencia de ondas gravitacionales, entre otros, la teoría tiene algunos problemas. Uno de estos problema es que no se puede cuantizar la teoría del mismo modo que en la teoría cuántica de campos y encontrar una versión cuántica renormalizable [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

En relatividad general, el campo fundamental que media las interacciones gravitacionales, es la *métrica*, que adicionalmente se utiliza para calcular distancias en el espacio-tiempo. Por otro lado, está la conexión afín, que está relacionado con el concepto de paralelismo. La conexión de Levi-Civita es una conexión derivada de la métrica, que se obtiene con la condición de metricidad $\nabla g = 0$. Como ejemplo de distintas reformulaciones de gravedad están la teoría de Einstein–Cartan que extiende a la relatividad general, permitiendo que exista una componente antisimétrica de la conexión, esta componente tiene el nombre de *torsión* [13, 14]. El modelo de Lovelock que corresponde a una generalización de la relatividad general a más dimensiones [15]. El modelo Lovelock–Cartan que un modelo de Lovelock considerando una torsión no nula [16].

Un tipo distinto de formulaciones de gravedad, se centra en considerar a la conexión como campo fundamental. Estos modelos se conocen como modelos *afines* y el primero fue propuesto por Sir A. Eddington [17]. En este modelo, la acción se define como la raíz cuadrada del tensor de Ricci.

Reformular la gravedad como un modelo afín acercan las interacciones gravitacionales a las otras tres interacciones fundamentales, las interacciones electromagnética, la interacción nuclear fuerte y la interacción nuclear débil. Esto es porque estas tres interacciones se modelan con teorías de gauge en donde el campo fundamental es una conexión.

El modelo que analizaremos es el modelo llamado *Gravedad Afín Polinomial* [18, 19, 20].

En este modelo, la acción está compuesta por términos que dependen polinomialmente de las componentes irreducibles de la conexión y en donde la restricción es que estos elementos sean invariantes bajo difeomorfismos. Y una vez obtenida la acción, se procederá a encontrar las ecuaciones de campo siguiendo el esquema de Kijowski [21].

Las soluciones que se buscarán serán en el contexto cosmológico, es decir, exigiremos que la conexión cumpla con el principio cosmológico buscando qué forma deben tener las componentes para que sean isotrópicas y homogéneas. Para lograr esto se utilizará la derivada de Lie usando como vectores de Killing los generadores de rotaciones y traslaciones.

Este trabajo lo haremos en dos contextos, en $(2 + 1)$ dimensiones y en $(3 + 1)$ dimensiones. La coordenada adicional en el modelo en cuatro dimensiones aumenta bastante el número de términos que pueden entrar en la acción y el número de componentes de la conexión, sin embargo, al analizar el caso cosmológico, el modelo en cuatro dimensiones es más restrictivo (hay más vectores de Killing), resultando en que el número de funciones independientes que aparecerán en las funciones de campo será menor que en el modelo en tres dimensiones.

Este trabajo se organizará de la siguiente forma: en el capítulo 2 se describirán los elementos de geometría diferencial que utilizaremos durante el trabajo. En el capítulo 3 explicaremos los aspectos importantes de la teoría de relatividad general e introduciremos el modelo de *gravedad afín polinomial*, explicando el método para construir la acción, las ecuaciones de campo y veremos cómo podemos general una métrica en este modelo cuando se cumplen ciertas condiciones. En el capítulo 4 detallaremos cómo es el modelo en tres dimensiones, viendo explícitamente la acción, ecuaciones de campo, el ansatz cosmológico y soluciones de las ecuaciones de campo. Repetiremos el proceso para cuatro dimensiones en el capítulo 5. El capítulo 6 corresponde a la conclusión. Las ecuaciones de campo en cuatro dimensiones fueron escritas en el apéndice A, debido a la extensión que tienen.

Geometría diferencial

En relatividad general, las interacciones gravitacionales se describen con el comportamiento del espacio-tiempo. Esto hace necesario desarrollar las herramientas matemáticas que den cuenta de la estructura del espacio-tiempo con el que se esté trabajando. En esta sección, se definirá una variedad, que es el espacio en el que se desarrolla la teoría y luego se definirán las distintas estructuras que se le pueden agregar a esta de modo de definir cantidades y conceptos con los que se tratan en la física como distancia y paralelismo. Este capítulo de geometría diferencial está basado en las referencias [22, 23, 24, 25, 26]

2.1. Topología

Para describir los distintos eventos en un sistema, es necesario indicar el lugar y el tiempo en el cual ocurrieron estos eventos, es decir, se requieren conocer las coordenadas del evento. El espacio-tiempo es el conjunto de todas estas coordenadas. Pero no basta con solo definirlo como un conjunto ya que un conjunto arbitrario de elementos es algo más general. Es entonces necesario definir una estructura sobre el conjunto. Esta primera estructura será la topología.

Topología. Sea el conjunto X y el conjunto $\mathcal{O} \subseteq P(X)$ donde $P(X)$ es el conjunto potencia de X .¹ Entonces, \mathcal{O} será una topología si cumple que

1. El conjunto vacío y X pertenecen a \mathcal{O} .
2. Si dos conjuntos Y y Z pertenecen a \mathcal{O} , entonces $Y \cap Z$ también pertenece a \mathcal{O} .
3. Cualquier unión de conjuntos pertenecientes a \mathcal{O} , pertenece a \mathcal{O} .

Un conjunto X con una topología \mathcal{O} , forman un espacio topológico. Como ejemplo de una topología, está la topología estandar, que con el conjunto \mathbb{R}^n forman el espacio topológico del espacio Euclideo.

Topología Estándar. La topología estándar es la que se extrae naturalmente del espacio Euclideo. Se define una bola entorno a un punto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ como,

$$B_r(p) = \left\{ q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2 < r \right\}$$

para un $r \in \mathbb{R}^+$. Luego, la topología estándar \mathcal{O}_{std} es tal que un conjunto U estará en la topología si para todo $p \in U$ entonces existe una bola $B_r(p) \in U$.

¹El conjunto potencia $P(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X .

Un conjunto U que es elemento de una topología se llama *abierto*. Un conjunto $N(x)$ será un *vecindario* de x si $N(x)$ es un abierto y $x \in N(x)$. De este modo, con el conjunto de distintos vecindarios, podemos definir el concepto de “cercanía” a un punto. Esta idea la podemos extraer de lo que conocemos del espacio Euclideo y de la topología estándar. Los puntos q que están “cerca” de un valor p , son con los que la cantidad $\sum_i (p_i - q_i)^2$ es un valor pequeño (en comparación con los que no están “cerca”). Es decir, si consideramos los vecindarios de un punto p , los elementos que están “cerca” de p pertenecerán a vecindarios mas pequeños (con menos elementos).

2.1.1. Homeomorfismo

Un *mapa* $f : X \rightarrow Y$ relaciona cada elemento $x \in X$ a un elemento $y = f(x) \in Y$. Si para cada elemento del conjunto de llegada $y \in Y$, existe un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$, el mapa es **sobreyectivo**.

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, es decir, los elementos en el conjunto de llegada que tienen preimagen tienen una única preimagen, entonces el mapa es **inyectivo**. Si el mapa cumple con sobreyectividad e inyectividad, entonces, el mapa es **biyectivo**.

Dados dos espacios topológicos (X, \mathcal{O}_X) y (Y, \mathcal{O}_Y) , el mapa $f : X \rightarrow Y$ es **continuo** con respecto a \mathcal{O}_X y \mathcal{O}_Y , si $\forall U \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow \text{preim}_f(U) \in \mathcal{O}_X$.

Un mapa entre los espacios topológicos (X, \mathcal{O}_X) y (Y, \mathcal{O}_Y) es un *homeomorfismo* f si cumple con,

1. f tiene un inverso f^{-1} , tal que, $f^{-1}(f(x)) = x$. Para que esto pueda suceder, f debe ser biyectivo.
2. f es continuo con respecto a \mathcal{O}_X y \mathcal{O}_Y .
3. f^{-1} es continuo con respecto a \mathcal{O}_X y \mathcal{O}_Y .

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos, entonces, dichos espacios topológicos son *homeomórficos*.

2.2. Variedad

Una *variedad* es un espacio topológico, en donde cada punto tiene un vecindario homeomorfo a \mathbb{R}^n . Es decir, para cada punto en la variedad, existe una *carta* (U, ϕ) donde U es un abierto y ϕ es un homeomorfismo de la variedad hacia \mathbb{R}^n . Esta definición de variedad, permite trasladar las propiedades de \mathbb{R}^n a un espacio topológico general.

El punto $\phi(p) = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene el nombre de *coordenada* de p . Un *atlas* es la colección de todas las cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ con $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ donde X es la variedad. Es decir, con el atlas, se puede asignar una coordenada a cada punto de la variedad.

Dada dos cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, el mapa $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ que va desde \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n tiene el nombre de *mapa de transición*. Este mapa nos permite describir los elementos en $U_\alpha \cap U_\beta$ con dos coordenadas diferentes. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , los puntos pueden ser descritos con coordenadas cartesianas o coordenadas esféricas y el mapa $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ corresponde a las transformaciones de coordenadas.

Sobre la variedad X , se pueden definir funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, que toman puntos $x \in X$ y lo llevan a puntos $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. Utilizaremos el hecho de que la variedad es homeomorfa a \mathbb{R}^n para determinar si la función f es diferenciable, es decir, diremos que f es diferenciable en x si es que la función $(f \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es diferenciable en el sentido usual del cálculo en varias variables.

2.2.1. Vectores, covectores y tensores

En un espacio Euclideo, la noción de vector está asociada a una “flecha” que parte en un punto y va a otro. En otras palabras, una línea recta direccionada. Sin embargo, cuando estamos en espacios más generales, este podría no ser plano, sino que curvo, por lo que es necesario definir vectores de otra forma. Para definir vectores en una variedad general, se utilizará el concepto de velocidad como un vector tangente a una trayectoria.

Sea una trayectoria $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\gamma(\lambda_0) = x$ para un $x \in X$ y un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. La velocidad de la trayectoria γ , en el punto x , es un mapa lineal que actúa sobre las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v_{\gamma,x} : C^\infty(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto v_{\gamma,x}(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

El conjunto de todas las velocidades definidas mediante todas las curvas que pasan por un punto x , en la variedad X , y con las operaciones,

$$(\alpha v_x + \beta w_x)(f) = \alpha v_x(f) + \beta w_x(f), \quad (2.2)$$

forman un espacio vectorial llamado *espacio tangente* de la variedad X , en el punto x y se denotará como $T_x X$.

Si bien los vectores son objetos geométricos, usualmente trataremos los vectores utilizando una carta (U, ϕ) . Para expresar un vector mediante la carta, se puede hacer uso de la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(\lambda_0) &= ((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))'(\lambda_0) \\ &= ((\phi \circ \gamma)'(\lambda_0))^i \cdot (f \circ \phi^{-1})'_i((\phi \circ \gamma)(\lambda_0)) \\ &= ((\phi \circ \gamma)'(\lambda_0))^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\ &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{f} \Big|_{\phi(x)} \\ &= V[f]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde se han definido $((\phi \circ \gamma)'(\lambda_0))^i = V^i$, $\bar{f} = f \circ \phi^{-1}$ (esta expresión es como se ve la función f , usando la carta ϕ) y se ha denotado la componente i de $\phi(x)$, como x^i , es decir, $\phi(x) = (x^1, \dots, x^n)$. Los escalares V^i son las componentes del vector V y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ es la base inducida por la carta ϕ llamada *base natural* (esto implica que la dimensión del espacio $T_x X$ es la misma que la de la variedad sobre la cual está definido). A veces se denotará $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.

Si tenemos dos cartas (U_1, ϕ) y (U_2, ϕ') , nos gustaría saber cómo cambian las componentes del vector V^i cuando hay un cambio de coordenadas,

$$\begin{aligned}
 V[f] &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{f} \Big|_{\phi(x)} \\
 &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\
 &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi'^{-1} \circ \phi' \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\
 &= V^i (f \circ \phi'^{-1})'_j(\phi(x)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (\phi' \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \right)^j \\
 &= V^i \frac{\partial}{\partial x'^j} \bar{f}' \Big|_{\phi'(x)} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \\
 &= V'^j \frac{\partial}{\partial x'^i} \bar{f}' \Big|_{\phi'(x)}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por lo tanto, las componentes del vector V , cambian de acuerdo a la siguiente regla,

$$V'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} V^i. \tag{2.5}$$

Se puede asociar al espacio tangente de vectores $T_x X$, un espacio dual $T_x^* X$ que consiste en mapas desde $T_x X$ hacia los escalares sobre los cuales está definido el campo, es decir,

$$T_x^* X = \{\omega | \omega : T_x X \rightarrow \mathbb{R}\}. \tag{2.6}$$

La forma en la que actúa este mapa está dada por el *gradiente* de una función. Sea $f \in C^\infty(X)$, el gradiente de f en el punto x está definido por,

$$\begin{aligned}
 (df)_x : T_x X &\rightarrow \mathbb{R} \\
 V &\mapsto (df)_x(V) = V[f].
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Los elementos $\omega \in T_x^* X$ tienen el nombre de *covectores*. Dada la base natural de los vectores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$, la base de los covectores está dada por $\{dx^i\}$, de modo que,

$$(dx^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta_j^i. \tag{2.8}$$

Con esta base, un covector general se puede escribir de forma general, como $\omega = \omega_i dx^i$ y el mapa de un covector aplicado a un vector es,

$$\omega(V) = \langle \omega, V \rangle = \langle \omega_i dx^i, V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \omega_i V^j \langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \omega_i V^j \delta_j^i = \omega_i V^i. \tag{2.9}$$

Sabiendo cómo transforman las componentes V^i , se puede obtener cómo transforman ω_i .

$$\omega(V) = \omega_i V^i = \omega'_i V'^i = \omega'_i V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \Rightarrow \omega'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \omega_j. \tag{2.10}$$

Con esta misma idea de definir el espacio dual, como un mapa del espacio de los vectores a los escalares, se puede definir un tensor, como un mapa multilinear sobre un producto de espacios vectoriales hacia \mathbb{R} . De este modo, un tensor de rango $\binom{p}{q}$ sobre $T_x X$ es el mapa

$$T : \otimes^p T_x^* X \otimes^q T_x X \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Dada una carta (U, ϕ) y dadas las bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ y $\{dx^i\}$, el tensor puede ser escrito de la siguiente forma,

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}. \quad (2.12)$$

Las cantidades $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ son las componentes del tensor. Sabiendo cómo transforman los vectores y covectores, se puede obtener cómo transforman las componentes del tensor,

$$T'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{l_p}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_q}}{\partial x'^{j_q}} T'^{l_1 \dots l_p}_{k_1 \dots k_q}, \quad (2.13)$$

es decir, con un factor de la forma $\frac{\partial x'}{\partial x}$ por cada índice superior y uno de la forma $\frac{\partial x}{\partial x'}$ por cada índice inferior.

2.2.2. Fibrado

Los vectores fueron definidos de tal forma que los espacios vectoriales a los cuales pertenecen están asociados a un punto $x \in X$ de la variedad. Es decir, no tenemos forma de comparar los vectores de dos puntos distintos. El primer paso para habilitar una comparación entre vectores, es establecer una estructura llamada *fibrado*.

Un fibrado es un triplete (E, B, π) donde E es una variedad llamada *espacio total*, B es una variedad llamada *espacio base* y π es un mapa sobreyectivo $\pi : E \rightarrow B$ llamado *proyección*. Dado un punto $x \in B$, la preimagen de este punto con respecto al mapa π tiene el nombre de *fibra*,

$$F = \text{preim}_\pi(x). \quad (2.14)$$

Una *sección* σ , es un mapa desde el espacio base hacia el espacio total $B \rightarrow E$, tal que, $\pi \circ \sigma = \text{Id}_B$.

Dada nuestra variedad X , podemos crear un fibrado utilizando los espacios tangentes asociado a cada punto $T_x X$. El espacio total, será la unión de todos estos espacios tangentes,

$$TX = \coprod_x T_x X. \quad (2.15)$$

La proyección π , será el mapa que lleve el vector $V \in T_x X$, al punto en el cual el espacio tangente al que pertenece está definido,

$$\pi(V) = x. \quad (2.16)$$

Para que el espacio total TX tenga estructura de variedad, debe tener una topología y ser localmente homeomorfo a un \mathbb{R}^p . La topología en TX , \mathcal{O}_{TX} puede ser definida a través de la topología ya presente en la variedad X ,

$$\mathcal{O}_{TX} = \{\text{preim}_\pi(U) \mid U \in \mathcal{O}_X\}. \quad (2.17)$$

Para que el espacio sea homeomorfo a algún \mathbb{R}^p , debe existir un atlas $\mathcal{A}_{TX} = \{(U_{TX}, \xi_x)\}$. La carta (U_{TX}, ξ_x) , está dada por,

$$\xi_x(V) = \left((x^1 \circ \pi)(V), \dots, (x^n \circ \pi)(V), (dx^1)_{\pi(V)}(V), \dots, (dx^n)_{\pi(V)}(V) \right). \quad (2.18)$$

Los primeros n términos corresponden a las n coordenadas x^j del punto en el que V está definido mientras que los n últimos corresponden a las j -ésimas componentes del vector V en la carta (U, x) . Por lo tanto, el espacio total TX , tiene $2n$ dimensiones y es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{2n} . Lo que ganamos con esta nueva estructura, es que ahora tenemos un espacio TX con vectores definidos en cada punto $x \in X$ y como este espacio total es una variedad, podemos definir diferenciabilidad mediante la carta (U, ξ_x) .

Un *campo vectorial* es una sección sobre el fibrado (TX, X, π) , que asocia a cada punto $x \in X$, un vector del espacio total $V_x \in TX$. De forma análoga, se pueden extender estos conceptos utilizando los espacios cotangentes y tensores para definir campos cotangentes y campos tensoriales.

2.2.3. Derivada de Lie

Es útil conocer cómo cambia un objeto definido en una variedad, no tan solo los escalares, sino que también tensores, ya que de esto podemos deducir si los campos tienen alguna simetría. O de forma más general, vislumbrar qué forma deben tener los campos para que cumplan cierta simetría. El objeto que indica esta variación es la *derivada de Lie*. La derivada de Lie es un mapa \mathcal{L} que toma un objeto T (un campo escalar, vectorial o tensorial) que es el objeto a derivar y un vector V que indica “dirección” en la que estamos derivando. La derivada de Lie debe tener las siguientes propiedades,

1. $\mathcal{L}_V f = V[f]$ donde f es una función escalar. Es decir, la derivada de Lie de una función escalar, se reduce simplemente a la derivada direccional, en la dirección V .
2. $\mathcal{L}_V W = [V, W]$ donde W es un campo vectorial y el conmutador $[V, W]$ es un vector, que aplicado sobre una función, es $[V, W][f] = V[W[f]] - W[V[f]]$.
3. $\mathcal{L}_V(T + S) = \mathcal{L}_V T + \mathcal{L}_V S$ donde T y S son campos tensoriales del mismo tipo. Es decir, la derivada de Lie es lineal.
4. Debe cumplir con la regla de Leibniz, $\mathcal{L}_V(T \otimes S) = (\mathcal{L}_V T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_V S)$.
5. $\mathcal{L}_{V+W} T = \mathcal{L}_V T + \mathcal{L}_W T$.

Con estas propiedades algebraicas, podemos obtener la derivada de Lie dada un carta (U, ϕ) . La derivada de Lie de un escalar está dada por,

$$\mathcal{L}_V f = V[f] = V^i \partial_i f. \quad (2.19)$$

Para obtener la derivada de Lie de un campo vectorial, aplicamos el conmutador sobre una función,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_V W[f] &= [V, W][f] \\
 &= V[W[f]] - W[V[f]] \\
 &= V[w^i \partial_i f] - W[v^i \partial_i f] \\
 &= v^j \partial_j (w^i \partial_i f) - w^j \partial_j (v^i \partial_i f) \\
 &= v^j (\partial_j w^i) (\partial_i f) + v^j w^i \partial_j \partial_i f - w^j (\partial_j v^i) (\partial_i f) - w^j v^i \partial_j \partial_i f \\
 &= (v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i) \partial_i f.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Luego, las componentes de la derivada de Lie siguen la siguiente regla,

$$\mathcal{L}_V w^i = v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i. \tag{2.21}$$

Para obtener cómo es la derivada de Lie sobre la componente de un covector ω_i , se puede utilizar la regla de Leibniz, el hecho de que $\omega_i a^i$ es un escalar y que ya obtuvimos la derivada de Lie sobre la componente de un vector a^i . Por un lado, debido a que $\omega_i a^i$ es un escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_V (\omega_i a^i) &= v^j \partial_j (\omega_i a^i) \\
 &= v^j a^i \partial_j \omega_i + v^j \omega_i \partial_j a^i.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por otro lado, utilizando la regla de Leibniz,

$$\mathcal{L}_V (\omega_i a^i) = (\mathcal{L}_V \omega_i) a^i + (\mathcal{L}_V a^i) \omega_i. \tag{2.23}$$

En esta última expresión, podemos utilizar el resultado 2.21 y luego igualar a 2.22,

$$\begin{aligned}
 v^j a^i \partial_j \omega_i + v^j \omega_i \partial_j a^i &= (\mathcal{L}_V \omega_i) a^i + (v^j \partial_j a^i - a^j \partial_j v^i) \omega_i \\
 \Rightarrow (\mathcal{L}_V \omega_i - v^j \partial_j \omega_i - \omega_j \partial_i v^j) a^i &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como el vector $A = a^i \partial_i$ es arbitrario, la cantidad dentro del paréntesis debe ser cero, de la cual se obtiene que,

$$\mathcal{L}_V \omega_i = v^j \partial_j \omega_i + \omega_j \partial_i v^j. \tag{2.25}$$

Con este mismo procedimiento, se pueden obtener las derivadas de Lie de otras cantidades tensoriales. Por ejemplo, para obtener cómo es la derivada de Lie de un tensor T_{ij} , primero se obtiene la derivada de Lie de $T_{ij} a^j$, que es la derivada de un covector 2.25 y se utiliza la regla de Leibniz para despejar $\mathcal{L}_V T_{ij}$. En particular, las derivadas de Lie que utilizaremos son 2.21, la derivada,

$$\mathcal{L}_V \mathcal{B}_i^k{}_j = v^\sigma \partial_\sigma \mathcal{B}_i^k{}_j - \mathcal{B}_i^\sigma{}_j \partial_\sigma v^k + \mathcal{B}_\sigma^k{}_j \partial_i v^\sigma + \mathcal{B}_i^k{}_\sigma \partial_j v^\sigma, \tag{2.26}$$

y la derivada de Lie de una conexión $\Gamma_i^j{}_k$ que será presentada en la siguiente sección.

2.3. Conexión afín

Si queremos comparar dos vectores, el procedimiento que hacemos es trasladar paralelamente los vectores hacia el origen del sistema de coordenadas y comparar las componentes. En el caso de las variedades que hemos estado construyendo, esta tarea no es tan fácil de realizar debido a que no tenemos una noción de *transportar paralelamente*. Para poder generalizar este procedimiento hacia variedades más generales, es necesario introducir una nueva estructura, la *conexión afín*.

Esta nueva estructura nos debe indicar cómo cambia un vector cuando hacemos un desplazamiento en una cierta dirección. Por lo tanto, podemos pensar en la conexión afín como una derivada direccional de los vectores. De este modo, la conexión será una extensión de la derivada direccional desde las funciones f a otro tipo de objetos como vectores y, en general, tensores.

Una conexión ∇ , es un mapa que toma un vector tangente para definir la dirección en la cual se deriva, se aplica sobre un objeto y devuelve el mismo tipo de objeto, es decir, $\nabla : T_x X \otimes T_q^p X \rightarrow T_q^p X$. El mapa debe cumplir con las siguientes propiedades,

1. En el caso de las funciones, debe corresponder a la derivada direccional $\nabla_V f = V[f]$.
2. $\nabla_V(T + S) = \nabla_V T + \nabla_V S$, donde T y S son el mismo tipo de objeto.
3. $\nabla_{fV+gW} T = f\nabla_V T + g\nabla_W T$, donde V, W son vectores y f, g son funciones.
4. $\nabla_V(T \otimes S) = (\nabla_V T) \otimes S + T \otimes (\nabla_V S)$.

Analícemos cómo se ve esta derivada aplicada a un vector W dada una carta (U, ϕ) ,

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= \nabla_{V^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= V^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= V^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} W^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + V^i W^j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \end{aligned} \tag{2.27}$$

el factor $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ del último término, debe corresponder a un vector por las propiedades de la derivada covariante. Utilizando la base $\{\partial_k\}$, cada componente k de este vector depende de dos índices i y j , por lo tanto, definimos,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{i j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{2.28}$$

Con esta definición, escribimos el resultado de la ecuación 2.27, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} W^k + W^j \Gamma_{i j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \Rightarrow (\nabla_V W)^k &= V^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} W^k + W^j \Gamma_{i j}^k \right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Así, para determinar la conexión, debemos especificar todas las funciones $\Gamma_{i^j k}$, que en su forma más general son n^3 funciones, donde n es la dimensión de la variedad.

Podemos realizar un procedimiento similar para extender la derivada covariante a otro tipo de objetos. Obtengamos la derivada covariante de $\omega_i a^i$, que sabemos que es un escalar,

$$\begin{aligned}\nabla_V(\omega_i a^i) &= V[\omega_i a^i] \\ &= V^j \partial_j (\omega_i a^i) \\ &= V^j (\partial_j \omega_i) a^i + V^j \omega_i (\partial_j a^i).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Por otro lado, utilizando la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned}\nabla_V(\omega_i a^i) &= (\nabla_V \omega_i) a^i + \omega_i (\nabla_V a^i) \\ &= (\nabla_V \omega_i) + \omega_i (V^j \partial_j a^i + V^j \Gamma_{j^i k} a^k).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Igualando las ecuaciones 2.30 y 2.31, reduciendo términos y agrupando, se obtiene,

$$(\nabla_V \omega_i - V^j \partial_j \omega_i + V^j \Gamma_{j^i l} \omega_l) a^i = 0.\tag{2.32}$$

Como el vector a^i es arbitrario, la cantidad dentro del paréntesis debe ser cero, de lo cual se obtiene que,

$$\nabla_V \omega_i = V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i - V^j \Gamma_{j^i l} \omega_l.\tag{2.33}$$

Siguiendo un procedimiento similar, se puede obtener la derivada covariante de cualquier objeto tensorial, cuyo resultado general es el siguiente,

$$\begin{aligned}\nabla_V T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= V^k \partial_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + V^k \Gamma_{k^i_1 l} T^{l i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + V^k \Gamma_{k^i_p l} T^{i_1 \dots i_{p-1} l}_{j_1 \dots j_q} \\ &\quad - V^k \Gamma_{k^l j_1} T^{i_1 \dots i_p}_{l j_2 \dots j_q} - V^k \Gamma_{k^l j_q} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} l}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

De la definición de los coeficientes Γ , podemos ver cómo transforma la conexión dado un cambio de coordenadas. La conexión expresada en una carta (U, x') , está dada por,

$$\Gamma'^k_{i^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x'^j}.\tag{2.35}$$

Para ver cómo se relaciona esta conexión Γ' con la conexión usando la carta (U, x) , Γ , podemos utilizar la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^l}.\tag{2.36}$$

Utilizando esta expresión, el lado izquierdo de 2.35 se puede escribir como,

$$\Gamma'^k_{i^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} = \Gamma'^k_{i^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^l}.\tag{2.37}$$

Mientras que el lado derecho está dado por,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x'^j} \right) &= \nabla_{\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^m}} \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\
 &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\
 &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \left[\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^n} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^n} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{m \ n}^r \frac{\partial}{\partial x^r} \right] \\
 &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \left[\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^s \partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^s}{\partial x^m} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{m \ n}^l \right] \frac{\partial}{\partial x^l}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Reemplazando estos dos resultados en 2.35, e igualando las componentes, obtenemos que,

$$\Gamma'^k_{i \ j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \left[\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^s \partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^s}{\partial x^m} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{m \ n}^l \right]. \tag{2.39}$$

Luego, contrayendo ambos lados con $\frac{\partial x^t}{\partial x^l}$ y utilizando la expresión, $\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \delta_i^j$, obtenemos el siguiente resultado,

$$\Gamma'^t_{i \ j} = \frac{\partial x'^t}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x'^t}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{m \ n}^l. \tag{2.40}$$

Podemos ver que la conexión no transforma como un tensor debido a un término adicional. Por esta razón, es de esperar que la derivada de Lie no corresponda la misma expresión que la de un tensor de rango $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para calcular la derivada de Lie de la conexión, utilizaremos otra definición equivalente de la derivada de Lie. Dado un campo vectorial V en la variedad X , se puede definir el *flujo* de V , denotado como σ , como el mapa $\sigma : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ que cumple con la siguiente relación,

$$\frac{d}{dt} \sigma_t(x) = V[\sigma_t(x)]. \tag{2.41}$$

Es decir, para un punto x_0 el campo V consiste en los vectores tangentes a σ en $\sigma_t(x_0)$. Podemos ver que σ toma un punto $x \in X$ y lo lleva a otro punto $\sigma(t, x) \in X$, es decir, podemos pensar en σ como las transformaciones producidas por el campo V . Con esta herramienta, podemos definir la derivada de Lie como el cambio de Γ en la dirección V ,

$$\mathcal{L}_V \Gamma^k_{i \ j} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\sigma_t^{-1} \left(\Gamma^k_{i \ j}(\sigma_t(x)) - \Gamma^k_{i \ j}(x) \right) \right]. \tag{2.42}$$

Es decir, tomamos la conexión, la evaluamos en $\sigma_t(x)$ y luego introducimos un operador σ_t^{-1} sobre el resultado para evaluar al objeto geométrico Γ , en el mismo punto x , considerando

además que en $t = 0$, $\sigma_0(x)$ corresponde a la identidad. La transformación producida por V corresponde a,

$$\begin{aligned} x'^i &= x^i + V^i dt \\ \Rightarrow \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} &= \delta_j^i + \frac{\partial V^i}{\partial x^j} dt \\ \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} &= \delta_j^i - \frac{\partial V^i}{\partial x'^j} dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En la última derivada, el lado derecho puede ser escrito en términos de x utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial V^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \left(\delta_j^k - \frac{\partial V^k}{\partial x'^j} dt \right). \quad (2.44)$$

Luego, reemplazando nuevamente en $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$, obtenemos,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta_j^i - \frac{\partial V^i}{\partial x^j} dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (2.45)$$

Con esta transformación, podemos reescribir el primer término de 2.42 utilizando una serie de Taylor,

$$\begin{aligned} \sigma_t^{-1} \Gamma_i^k{}_j(\sigma_t(x)) &= \sigma_t^{-1} \Gamma_i^k{}_j(x^n + V^n dt) \\ &\simeq \sigma_t^{-1} \Gamma_i^k{}_j(x) + \left. \frac{\partial \sigma_t^{-1} \Gamma_i^k{}_j}{\partial \sigma_t^l(x)} \right|_{t=0} V^l dt. \end{aligned} \quad (2.46)$$

El segundo término del lado derecho, puede ser escrito simplemente en términos de x ya que en $t = 0$, el mapa $\sigma_t(x)$ es la identidad,

$$\left. \frac{\partial \sigma_t^{-1} \Gamma_i^k{}_j}{\partial \sigma_t^l(x)} \right|_{t=0} V^l dt = \frac{\partial \Gamma_i^k{}_j}{\partial x^l} V^l dt. \quad (2.47)$$

Por otro lado, el primer término, corresponde a Γ definido en x' pero debemos arrastrarlo al punto x utilizando la transformación de coordenadas dada por 2.43. Sin embargo, para utilizar la transformación de la conexión 2.40, debemos cambiar todas las expresiones primadas por no primadas y vice versa. Esto es equivalente a decir que estamos haciendo la transformación inversa o en la “dirección” opuesta,

$$\sigma_t^{-1}(\Gamma_i^t{}_j) = \frac{\partial x^t}{\partial x'^l} \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^t}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^j} \Gamma_m^l{}_n. \quad (2.48)$$

Por un lado tenemos que,

$$\frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_j^l + \frac{\partial V^l}{\partial x^j} dt \right) = \frac{\partial V^l}{\partial x^i \partial x^j} dt. \quad (2.49)$$

Al reemplazar tenemos que,

$$\begin{aligned}\sigma_t^{-1}(\Gamma_{i^k j}) &= \left(\delta_l^k - \frac{\partial V^k}{\partial x^l} dt\right) \left(\frac{\partial V^l}{\partial x^i \partial x^j} dt\right) + \left(\delta_l^k - \frac{\partial V^k}{\partial x^l} dt\right) \left(\delta_i^m + \frac{\partial V^m}{\partial x^i} dt\right) \left(\delta_j^n + \frac{\partial V^n}{\partial x^j} dt\right) \Gamma_{m^l n} \\ &= \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial V^n}{\partial x^j} \Gamma_{i^k n} + \frac{\partial V^m}{\partial x^i} \Gamma_{m^k j} - \frac{\partial V^k}{\partial x^l} \Gamma_{i^l j}\right) dt + \Gamma_{i^k j} + \mathcal{O}(dt^2).\end{aligned}\tag{2.50}$$

Luego, reemplazando en 2.42, obtenemos la derivada de Lie de una conexión,

$$\mathcal{L}_V \Gamma_{i^j k} = V^l \frac{\partial \Gamma_{i^j k}}{\partial x^l} - \Gamma_{i^l j} \frac{\partial V^k}{\partial x^l} + \Gamma_{i^k n} \frac{\partial V^n}{\partial x^j} + \Gamma_{m^k j} \frac{\partial V^m}{\partial x^i} + \frac{\partial V^k}{\partial x^i \partial x^j}.\tag{2.51}$$

Dado un campo vectorial W , se dice que se *transporta paralelamente* a lo largo de una curva γ , si se cumple que,

$$\nabla_{v_\gamma} W = 0,\tag{2.52}$$

para cada punto de la curva γ . Mientras que una curva γ se dice que es *autoparalela* si cumple con,

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0.\tag{2.53}$$

Dada una carta (U, x) , la ecuación 2.53 se puede escribir como,

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{j^i k} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0.\tag{2.54}$$

Donde la derivación $\dot{\gamma}$ es con respecto al parámetro λ que parametriza la curva $\gamma(\lambda)$. Esta ecuación equivale a la ecuación de la geodésica cuando la conexión es un tipo de conexión especial llamada conexión de Levi-Civita.

2.3.1. Torsión y Curvatura

Si bien la conexión no es un tensor, se puede definir un primer tensor, llamado *torsión* \mathcal{T} que es un tensor de rango $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, y se define como,

$$\mathcal{T}(V, \omega, W) = \omega(\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W]),\tag{2.55}$$

donde, V, W son vectores y ω es un covector. Dada una carta (U, x) , y la base natural, las componentes \mathcal{T} están dadas por,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\partial_i, dx^k, \partial_j) &= dx^k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \right) \\ &= \Gamma_{i^k j} - \Gamma_{j^k i} \\ &= 2\Gamma_{[i^k j]},\end{aligned}\tag{2.56}$$

en donde se utilizó el hecho de que usando la base natural, el conmutador $[\partial_i, \partial_j]$ se anula y los corchetes que envuelven a los índices i y j corresponde a una antisimetrización.

Otro tensor que se puede formar usando la conexión, es el tensor de *curvatura*. Este es un tensor de rango $\binom{1}{3}$ y está definido por,

$$\mathcal{R}(V, W, \omega, Z) = \omega \left(\nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V, W]} Z \right). \quad (2.57)$$

Usando nuevamente una base natural, las componentes de este tensor están dadas por,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_i, \partial_j, dx^k, \partial_l) &= \mathcal{R}_{ij}{}^k{}_l \\ &= \partial_i \Gamma_j{}^k{}_l - \partial_j \Gamma_i{}^k{}_l + \Gamma_i{}^k{}_n \Gamma_j{}^n{}_l - \Gamma_j{}^k{}_n \Gamma_i{}^n{}_l \\ &= 2 \left(\partial_{[i} \Gamma_{j]}{}^k{}_l + \Gamma_{[i}{}^k{}_n \Gamma_{j]}{}^n{}_l \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Para interpretar los dos tensores, calculemos dos cantidades. Utilizaremos la notación $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$,

$$\begin{aligned} [\nabla_i, \nabla_j]f &= \nabla_i \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i f \\ &= 2 \left(\partial_{[i} (\nabla_{j]} f) - \Gamma_{[i}{}^k{}_{j]} \partial_k f \right) \\ &= 2 \left(\partial_{[i} \partial_{j]} f - \Gamma_{[i}{}^k{}_{j]} \partial_k f \right) \\ &= -\mathcal{T}_i{}^k{}_j \partial_k f, \end{aligned} \quad (2.59)$$

en donde se utilizó que $\partial_{[i} \partial_{j]} f$ es cero debido a que las derivadas parciales conmutan, por lo que es simétrico y antisimétrico en los índices i y j , es decir, solo puede ser 0.

La otra cantidad a calcular es,

$$\begin{aligned} [\nabla_i, \nabla_j]V^k &= \nabla_i \nabla_j V^k - \nabla_j \nabla_i V^k \\ &= 2 \left(\partial_{[i} (\nabla_{j]} V^k) + \Gamma_{[i}{}^k{}_{l]} \nabla_{j]} V^l - \Gamma_{[i}{}^l{}_{j]} \nabla_l V^k \right) \\ &= 2 \left(\partial_{[i} (\partial_{j]} V^k) + \partial_{[i} (\Gamma_{j]}{}^k{}_l V^l) + \Gamma_{[i}{}^k{}_l \partial_{j]} V^l + \Gamma_{[i}{}^k{}_l \Gamma_{j]}{}^l{}_m V^m - \Gamma_{[i}{}^l{}_{j]} \nabla_l V^k \right) \\ &= 2 \left((\partial_{[i} \Gamma_{j]}{}^k{}_l) V^l + \Gamma_{[j]}{}^k{}_l \partial_{[i]} V^l + \Gamma_{[i}{}^k{}_l \partial_{j]} V^l + \Gamma_{[i}{}^k{}_l \Gamma_{j]}{}^l{}_m - \Gamma_{[i}{}^l{}_{j]} \nabla_l V^k \right) \\ &= 2 \left(\partial_{[i} \Gamma_{j]}{}^k{}_m + \Gamma_{[i}{}^k{}_l \Gamma_{j]}{}^l{}_m \right) V^m - 2 \Gamma_{[i}{}^l{}_{j]} \nabla_l V^k \\ &= \mathcal{R}_{ij}{}^k{}_m V^m - \mathcal{T}_i{}^l{}_j \nabla_l V^k. \end{aligned} \quad (2.60)$$

De los resultados 2.59 y 2.60, podemos ver que la torsión y la curvatura nos dan información acerca de la diferencia entre obtener la derivada covariante en una dirección V y luego en otra W comparado con hacer la misma derivada en el orden opuesto.

Un tensor importante que se obtiene a partir de la curvatura, es el *tensor de Ricci* \mathcal{R}_{ij} definido como la siguiente contracción,

$$\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ki}{}^k{}_j, \quad (2.61)$$

en donde se contrae el índice superior con el primer índice inferior. También se puede contraer el índice superior con el segundo inferior, sin embargo, debido a que la curvatura es antisimétrica en los dos primeros índices, esta contracción corresponde a

$$\mathcal{R}_{ij}{}^j{}_k = -\mathcal{R}_{ji}{}^j{}_k = -\mathcal{R}_{ik} \quad (2.62)$$

La tercera contracción se da al contraer con el último de índice se obtiene la *traza de la curvatura*,

$$\mathcal{R}_{ij}{}^k{}_k. \quad (2.63)$$

2.4. Métrica

Un tensor de vital importancia para definir los conceptos de distancia, magnitud de un vector y ángulo entre ellos es la métrica. La métrica, g , es un tensor de rango $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que cumple con las siguientes dos propiedades,

1. Debe ser simétrico $g(V, W) = g(W, V)$.
2. Debe ser *no degenerado*, es decir, invertible.

Dada una carta (U, x) y una base, las componentes del tensor se denotan como $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$. Con este tensor, se hace posible definir el concepto de “distancia”. Los elementos de línea ds^2 , corresponden a,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.64)$$

Las componentes de la métrica inversa se pueden escribir como g^{ij} y se relacionan con g_{ij} de la siguiente forma,

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (2.65)$$

La métrica permite hacer una correspondencia entre los vectores y covectores mediante el proceso de subir y bajar índices,

$$V^i g_{ij} = V_j, \quad V_i g^{ij} = V^j. \quad (2.66)$$

Con esta correspondencia, se hace posible definir “productos punto” entre vectores,

$$V \cdot W = g_{ij} V^i W^j = V^i W_i, \quad (2.67)$$

y en particular, el producto punto de un vector consigo mismo, nos da la “norma” al cuadrado de un vector,

$$V \cdot V = V^2 = g_{ij} V^i V^j = V^i V_i. \quad (2.68)$$

El signo de este resultado, permite clasificar a los vectores en tipo tiempo, tipo espacio o tipo luz.

Con una base adecuada, se puede escribir la métrica en la forma,

$$g_{ij} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1). \quad (2.69)$$

La signatura se define como (p, n) donde p son la cantidad de 1's y n la cantidad de -1 's. Una métrica es *Riemanniana* si es que su signatura es $(p, 0)$ y es *Lorentziana* si su signatura es $(1, n)$ o $(p, 1)$. Como ejemplo, en relatividad especial, la métrica de Minkowski es una métrica Lorentziana.

Utilizando la métrica y la curvatura, se puede definir el escalar de curvatura \mathcal{R} de la siguiente forma,

$$\mathcal{R} = g^{ij} \mathcal{R}_{ki}{}^k{}_j = g^{ij} \mathcal{R}_{ij}. \quad (2.70)$$

Este escalar es de gran interés, pues forma parte de las ecuaciones de campo en relatividad general, mediante la construcción del tensor de Einstein.

Siguiendo la idea del elemento de línea, ecuación (2.64), se puede definir el largo de una curva sumando todas las longitudes formadas por los elementos de línea. Entonces, dada una curva $\gamma(\lambda) : (0, 1) \rightarrow X$, el largo de la curva se define como,

$$L[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{g(v_{\gamma(\lambda)}, v_{\gamma(\lambda)})} d\lambda. \quad (2.71)$$

Una curva γ , es una *geodésica* si el largo $L[\gamma]$ es un valor estacionario con respecto a las variaciones $\delta\gamma$ de la curva. Para obtener este tipo de curvas, se pueden aplicar las ecuaciones de Euler–Lagrange que da como resultado, la ecuación de la geodésica,

$$\ddot{\gamma}^i + \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{kj} - \partial_i g_{kl}) \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l = 0. \quad (2.72)$$

2.4.1. No Metricidad

La conexión de Levi–Civita está determinada por la métrica y tiene la siguiente forma,

$$\Gamma_{k\ l}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{kj} - \partial_i g_{kl}). \quad (2.73)$$

Utilizando esta conexión y comparando la ecuación de las curvas autoparalelas (2.54) con la de las geodésicas (2.72), podemos ver que ambas son equivalentes.

Adicionalmente, decimos que esta conexión es compatible con la métrica, esto es, que la métrica es covariantemente constante,

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \quad (2.74)$$

Con una conexión general, la condición de compatibilidad con la métrica no se cumple necesariamente. Se define entonces la *no metricidad* como el siguiente tensor,

$$\mathcal{Q}_{kij} = \nabla_k g_{ij}. \quad (2.75)$$

Se puede analizar cuál es el efecto de la no metricidad en teorías de gravitación [27].

Formulaciones de Gravedad

3.1. Relatividad General

En esta sección revisaremos la teoría de relatividad general de Einstein. Esta teoría es la primera en interpretar a la gravedad como un efecto de la geometría del espacio tiempo. La sección está basada principalmente en las referencias [28, 29].

La teoría de relatividad especial describe cómo distintos eventos son descritos por distintos sistemas de referencia inerciales. De acuerdo a los postulados de la relatividad especial,

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. La velocidad de la luz c es una constante.

Se puede concluir que las transformaciones de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales, están dadas por las transformaciones de *Lorentz*. En términos geométricos, estas transformaciones son aquellas que dejan a la métrica de Minkowski, $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, invariante. Para extender esta idea a sistemas de referencia no inerciales se puede recurrir al principio de equivalencia.

El principio de equivalencia, relaciona sistemas con aceleración y sistemas en presencia de gravedad. Consideremos las siguientes situaciones:

1. Una persona dentro de una nave, en el espacio exterior suficientemente lejos de cualquier fuente de gravedad que pudiera afectar a la nave. La persona dentro de la nave estaría flotando, junto con la nave.
2. La persona y la nave van en caída libre hacia la superficie de la Tierra. Si bien la persona, junto con la nave, están acelerando hacia la Tierra, lo hacen con la misma aceleración, por lo tanto la persona seguirá sintiendo que está flotando dentro de la nave.
3. Ahora la persona con la nave, están en la superficie de la Tierra. En ese caso la persona siente una fuerza que la nave ejerce sobre ella, la fuerza normal ejercida por el piso sobre el cual está parada la persona.
4. Y finalmente, la persona y nave, están en el espacio exterior sin fuentes de gravedad, pero la nave está acelerando. En este caso, la persona siente una fuerza que la nave ejerce sobre ella, la fuerza que hace que la persona acelere junto con la nave.

De estas situaciones, se puede deducir que el efecto de la gravedad es el mismo que el de un sistema acelerado. Esto quiere decir que una teoría de relatividad general, debe ser una teoría de gravitación.

En la relatividad general, la gravedad ya no es considerada como una fuerza en el sentido dado por las leyes de Newton, sino que la gravedad es la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto, los objetos masivos son responsables de curvar el espacio-tiempo, mientras que las partículas que son afectadas por la gravedad, en realidad están en “caída libre”, siguiendo la trayectoria de una “línea recta”. Sin embargo, lo que equivale a una línea recta en un espacio curvo y en particular utilizando la conexión de Levi-Civita, que es la que se utiliza en relatividad general, son las trayectorias que corresponden a geodésicas. De este modo, la ecuación de movimiento de una partícula en relatividad general, está dada por la ecuación de la geodésica (2.72).

Por otro lado, lo que dicta cómo se curva el espacio-tiempo, está dado por las ecuaciones de campo de Einstein, cuya solución corresponde a la métrica g_{ij} . En este sentido, la métrica se considera como el campo fundamental

Las ecuaciones de campo de Einstein, deben ser una extensión de la ley de gravitación de Newton,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.1)$$

donde G es la constante de Newton y ρ es la densidad de masa. Para extender esto, hay que encontrar una ecuación tensorial para que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas ($\partial x'/\partial x$). La generalización de la densidad de masa ρ está dada por el tensor de *energía-momentum* $T_{\mu\nu}$. Este tensor contiene la información de la densidad energía, que si está en forma de masa se escribe como ρc^2 , información de la densidad de momentum y del flujo de energía y momentum. Este tensor es simétrico $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ y es conservado $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, si generalizamos el lado derecho de (3.1) a algo proporcional a $T_{\mu\nu}$, el lado izquierdo también debe ser una cantidad tensorial, simétrica y covariantemente constante. Este tensor debe contener la información de la variedad, en particular la métrica se puede asociar a un potencial gravitatorio, Φ , en el límite Newtoniano. Por lo tanto, de $\nabla^2\Phi$, el lado izquierdo debe contener dobles derivadas de g . El tensor que tiene este tipo de términos es el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, sin embargo, no cumple con las mismas propiedades que $T_{\mu\nu}$.

Podemos formar un tensor con las simetrías requeridas a partir del tensor de curvatura y utilizando la métrica para subir y bajar índices. El tensor de curvatura se puede reescribir como,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\delta g_{\mu\gamma}. \quad (3.2)$$

Este tensor cuenta con algunas simetrías. Las que utilizaremos son dos, el intercambio entre los dos primeros índices y el intercambio entre los dos últimos,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (3.3)$$

De esta forma, el tensor de Ricci se puede escribir como,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\alpha\mu}{}^\alpha{}_\nu = \mathcal{R}_{\alpha\mu\gamma\nu} g^{\gamma\alpha}. \quad (3.4)$$

En el caso de relatividad general, resulta también que el tensor de Ricci es simétrico,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\nu\mu}. \quad (3.5)$$

Con estas propiedades, se puede construir un tensor de rango $\binom{0}{2}$ covariantemente constante y simétrico en sus índices. Para esto, comenzamos manipulando una ecuación de la

curvatura que es la identidad de Bianchi,

$$\nabla_\alpha \mathcal{R}_{\beta\gamma\delta\sigma} + \nabla_\gamma \mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\sigma} + \nabla_\beta \mathcal{R}_{\gamma\alpha\delta\sigma} = 0. \quad (3.6)$$

Nuestro objetivo será formar el escalar de curvatura con el primer término.

Para esto, comenzamos contrayendo toda la ecuación con $g^{\delta\beta}$ y recordando además que $\nabla_\alpha g^{\beta\gamma} = 0$, obtenemos que,

$$\nabla_\alpha \mathcal{R}_{\gamma\sigma} - \nabla_\gamma \mathcal{R}_{\alpha\sigma} + \nabla_\beta (g^{\delta\beta} \mathcal{R}_{\gamma\alpha\delta\sigma}) = 0. \quad (3.7)$$

Luego, contraemos con $g^{\gamma\sigma}$,

$$\nabla_\alpha \mathcal{R} - \nabla_\gamma (\mathcal{R}_{\alpha\sigma} g^{\gamma\sigma}) - \nabla_\beta (g^{\delta\beta} \mathcal{R}_{\alpha\delta}) = 0. \quad (3.8)$$

Notar que los últimos dos términos son iguales. El escalar de curvatura ya fue construido, pero para agrupar todo sobre una misma derivada covariante, podemos contraer con $g^{\alpha\mu}$,

$$\nabla_\alpha (\mathcal{R} g^{\alpha\mu} - 2\mathcal{R}^{\alpha\mu}) = 0. \quad (3.9)$$

Esta última ecuación motiva la definición del *tensor de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

Con el cual las ecuaciones de campo de Einstein están dadas por,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

La constante κ se obtiene cuando se procede a tomar el límite Newtoniano. Para que las ecuaciones de campo convergan a 3.1, se debe cumplir que,

$$\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.12)$$

Hemos indicado que $G_{\mu\nu}$ cumplía con ser un tensor simétrico y covariantemente constante, sin embargo en relatividad general, utilizando la conexión de Levi-Civita, la métrica también cumple con estas propiedades, por lo que se podría agregar a la ecuación 3.11. Al hacer esto, se obtiene que la ecuación es,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

La constante Λ tiene el nombre de *constante cosmológica*.

3.2. Gravedad Afín Polinomial

En el modelo de gravedad afín polinomial, el campo fundamental responsable de las interacciones gravitacionales es la conexión afín. En esta sección se describirá el modelo, se explicará el método utilizado para generar la acción, se trabajarán las ecuaciones de campo y se indicará la posibilidad que encontrar métricas emergentes en el modelo.

3.2.1. Acción

Para construir la acción del modelo, es útil primero separar a la conexión en componentes. Las componentes de la conexión general $\hat{\Gamma}$ puede ser descompuesta en sus partes simétricas y antisimétrica

$$\hat{\Gamma}_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho} = \hat{\Gamma}_{(\mu}^{\lambda}{}_{\rho)} + \hat{\Gamma}_{[\mu}^{\lambda}{}_{\rho]}$$

Adicionalmente, es posible descomponer la parte antisimétrica en una parte con traza y otra sin traza, de este modo se define $\mathcal{A}_{\mu} = \hat{\Gamma}_{[\mu}^{\lambda}{}_{\lambda]}$ y $\mathcal{B}_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho}$ como la parte sin traza de la componente antisimétrica de la conexión. Así la descomposición de la conexión es

$$\hat{\Gamma}_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho} = \Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho} + \mathcal{B}_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho} + \delta_{[\mu}^{\lambda} \mathcal{A}_{\rho]}$$

donde se ha escrito $\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\rho} \equiv \hat{\Gamma}_{(\mu}^{\lambda}{}_{\rho)}$. Se definen las formas de volumen como el producto cuña de las coordenadas $dV^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_D} = dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_D}$, donde D es la dimensión en la que se trabajará. Para construir la acción del modelo, se utilizarán los campos \mathcal{A} , \mathcal{B} , $dV^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_D}$ y la parte simétrica de la conexión Γ , sin embargo, como esta última no es un tensor, entonces entrará en la acción mediante la derivada covariante. Con estos cuatro campos, se procede a construir la densidad escalar más general posible, para esto se analizará la estructura de índices.

Se define un *operador de índice* \mathcal{N} que, aplicado sobre una cantidad, da el valor $+1$ por cada índice superior y da el valor -1 por cada índice inferior y se define un *operador de peso* \mathcal{W} que da el valor del peso de una densidad tensorial. De este modo, estos operadores aplicados a los campos utilizados para construir la acción, son de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{A}) &= -1, & \mathcal{N}(\mathcal{B}) &= -1 + 1 - 1 = -1, & \mathcal{N}(\nabla) &= -1, & \mathcal{N}(dV) &= D, \\ \mathcal{W}(\mathcal{A}) &= 0, & \mathcal{W}(\mathcal{B}) &= 0, & \mathcal{W}(\nabla) &= 0, & \mathcal{W}(dV) &= 1. \end{aligned}$$

Para un término polinomial de la forma general $\mathcal{O} = \mathcal{A}^m \mathcal{B}^n \nabla^p dV^q$, los operadores aplicados sobre este término dan,

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}) = -m - n - p + Dq, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}) = q. \tag{3.15}$$

Los términos que irán en la acción deben ser densidades escalares, es decir, no debe tener índices libres $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = 0$ y el peso debe ser $\mathcal{W}(\mathcal{O}) = q = 1$.

3.2.2. Ecuaciones de Campo

A través de la acción, se pueden obtener las ecuaciones de campo utilizando las ecuaciones de Euler–Lagrange. Las ecuaciones para cada campo están dadas por

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho} &= 0 \\
 \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{B}_\nu^\lambda{}_\rho} &= 0 \\
 \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana. Para obtener estas ecuaciones, es útil encontrar versiones covariantes de las ecuaciones. Para esto se toma la ecuación para Γ y se define el momento canónico conjugado

$$\Pi_\Gamma^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho}$$

La derivada de la parte simétrica de la conexión Γ solo aparece en la acción a través de la curvatura por lo que se puede utilizar la regla de la cadena y obtener,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta} \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho}$$

El segundo factor se puede calcular explícitamente de la definición de $\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta$ y tiene el valor de,

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda{}_\rho} = 4\delta_\lambda^\gamma \delta_{[\alpha}^\mu \delta_{\beta]}^{\nu\rho}$$

Definiendo $z_\Gamma^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}$ se obtiene que

$$\Pi_\Gamma^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\rho = z_\Gamma^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta 4\delta_\lambda^\gamma \delta_{[\alpha}^\mu \delta_{\beta]}^{\nu\rho} = 2z_\Gamma^{[\mu\nu]}{}_\lambda{}^\rho + 2z_\Gamma^{[\mu\rho]}{}_\lambda{}^\nu$$

De un modo similar, se puede trabajar el segundo término de la ecuación de Euler–Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta} \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho} = z_\Gamma^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho}$$

Sin embargo esto es referido solo a los elementos de la acción que contienen la curvatura. Por la definición de curvatura se puede calcular que,

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho} = 4 \left(\delta_\lambda^\gamma \delta_{[\alpha}^{\nu\rho} \Gamma_{\beta]}^\lambda{}_\delta + \delta_\delta^\rho \delta_{[\beta}^{\nu\lambda} \Gamma_{\alpha]}^\gamma{}_\delta \right)$$

Y utilizar este resultado para obtener,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_\nu^\lambda{}_\rho} &= 2 \left(z_\Gamma^{[\beta\rho]}{}_\gamma{}^\delta \Gamma_{\beta}^\gamma{}_\lambda + z_\Gamma^{[\beta\nu]}{}_\gamma{}^\rho \Gamma_{\beta}^\gamma{}_\lambda + z_\Gamma^{[\nu\beta]}{}_\lambda{}^\delta \Gamma_{\beta}^\rho{}_\delta + z_\Gamma^{[\rho\beta]}{}_\lambda{}^\delta \Gamma_{\beta}^\nu{}_\delta \right) \\
 &= \Pi_\Gamma^{\mu\nu}{}_\gamma{}^\rho \Gamma_{\mu}^\gamma{}_\lambda - \Pi_\Gamma^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\delta \Gamma_{\mu}^\rho{}_\delta - \Pi_\Gamma^{\mu\rho}{}_\lambda{}^\delta \Gamma_{\mu}^\nu{}_\delta.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Estos resultados, se pueden reemplazar en las ecuaciones de campo para reescribirlas como,

$$\nabla_{\mu}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{\partial^*\mathcal{L}}{\partial\Gamma_{\nu}^{\lambda\rho}}, \quad (3.18)$$

donde el asterisco en la derivada parcial es para indicar que la derivada es sólo con respecto a los elementos Γ que no esté contenidos en el tensor de curvatura, es decir, aquellos que aparezcan explícitamente y aquellos que aparecen de las derivadas covariantes de \mathcal{B} y \mathcal{A} . Esta relación se obtiene utilizando el hecho que el momento conjugado es una densidad y por lo tanto,

$$\nabla_{\sigma}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\lambda\rho} = \partial_{\sigma}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\lambda\rho} + \Gamma_{\sigma}^{\mu}{}_{\tau}\Pi_{\Gamma}^{\tau\nu\lambda\rho} + \Gamma_{\sigma}^{\nu}{}_{\tau}\Pi_{\Gamma}^{\mu\tau\lambda\rho} - \Gamma_{\sigma}^{\tau}{}_{\lambda}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\tau\rho} + \Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\tau}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\lambda\tau} - \Gamma_{\sigma}^{\tau}{}_{\rho}\Pi_{\Gamma}^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (3.19)$$

cuando se contraen μ y σ , se cancelan el segundo y el último término del lado derecho, recuperando así todos los términos que aparecen en la ecuación de campo.

Se puede hacer un tratamiento similar para el campo \mathcal{B} y \mathcal{A} , y escribir,

$$\nabla_{\mu}\Pi_{\mathcal{B}}^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{B}_{\nu}^{\lambda\rho}}, \quad (3.20)$$

$$\nabla_{\mu}\Pi_{\mathcal{A}}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}_{\nu}}. \quad (3.21)$$

Notar que la variación con respecto a \mathcal{B} está dada por,

$$\frac{\partial\mathcal{B}_{\alpha}^{\beta\gamma}}{\partial\mathcal{B}_{\nu}^{\lambda\rho}} = 2\delta_{\lambda}^{\beta}\delta_{\alpha\gamma}^{\nu\rho} + \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\gamma\lambda}^{\nu\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\gamma}^{\beta}\delta_{\alpha\lambda}^{\nu\rho}, \quad (3.22)$$

para el caso de $4D$ y

$$\frac{\partial\mathcal{B}_{\alpha}^{\beta\gamma}}{\partial\mathcal{B}_{\nu}^{\lambda\rho}} = 2\delta_{\lambda[\alpha}^{\beta[\nu}\delta_{\gamma]}^{\rho]}, \quad (3.23)$$

para $3D$. Estas expresiones están construidas de modo que se anulen cuando se tome la traza, es decir, se anula cuando se contraen α con β por ejemplo.

3.2.3. Métricas Emergentes

Si bien este modelo es un modelo afín, sin métrica definida, se pueden generar tensores de rango dos y simétricos en sus índices a partir de los elementos de la conexión. Si estos tensores además son invertibles, pueden ser considerados como métricas que emergen de la conexión. Los tensores que se tomarán en consideración son, el tensor de Ricci,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda(\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu)}, \quad (3.24)$$

el tensor de Poplawski [30], que corresponde a una contracción de la torsión,

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} \propto \mathcal{T}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\sigma}\mathcal{T}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\lambda}, \quad (3.25)$$

y similar a esto, un tensor que viene de la contracción de solo el campo \mathcal{B} ,

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} \propto \mathcal{B}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\sigma}\mathcal{B}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\lambda}. \quad (3.26)$$

Modelo en Tres Dimensiones

4.1. Acción

En este modelo se tiene que $D = 3$ y la forma de volumen está dada por $dV^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}$. Esto quiere decir que los operadores \mathcal{N} y \mathcal{W} aplicados a un elemento de la forma $\mathcal{A}^m \mathcal{B}^n \nabla^p dV^q$ tienen los valores,

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}) = m + n + p - 3q = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}) = q = 1. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, se debe cumplir la ecuación

$$m + n + p = 3$$

Las posibles combinaciones que cumplen esta ecuación son las de la tabla

m	n	p	Término
3	0	0	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}$
2	1	0	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}$
2	0	1	$\mathcal{A}\mathcal{A}\nabla$
1	2	0	$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}$
1	1	1	$\mathcal{A}\mathcal{B}\nabla$
1	0	2	$\mathcal{A}\nabla\nabla$
0	3	0	$\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{B}$
0	2	1	$\mathcal{B}\mathcal{B}\nabla$
0	1	2	$\mathcal{B}\nabla\nabla$
0	0	3	$\nabla\nabla\nabla$

Una vez que se tienen la forma de los términos, se escriben todas las posibles combinaciones con respecto a las contracciones de los índices y luego se eliminan los términos redundantes y aquellos que no aportan a las ecuaciones de campo. De esta forma, la acción más general queda escrita como

$$S = \int dV^{\alpha\beta\gamma} \left(B_1 \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma + B_2 \mathcal{A}_\alpha \mathcal{F}_{\beta\gamma} + B_3 \mathcal{A}_\alpha \nabla_\mu \mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma + B_4 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\nu \mathcal{B}_\beta{}^\nu{}_\lambda \mathcal{B}_\gamma{}^\lambda{}_\mu + B_5 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu \mathcal{A}_\gamma \right. \\ \left. + B_6 \mathcal{R}_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\nu \mathcal{B}_\beta{}^\nu{}_\gamma + B_7 \Gamma_{\alpha}{}^\mu{}_\mu \partial_\beta \Gamma_{\gamma}{}^\nu{}_\nu + B_8 \left(\Gamma_{\alpha}{}^\mu{}_\nu \partial_\beta \Gamma_{\gamma}{}^\nu{}_\mu + \frac{2}{3} \Gamma_{\alpha}{}^\mu{}_\nu \Gamma_{\beta}{}^\nu{}_\lambda \Gamma_{\gamma}{}^\lambda{}_\mu \right) \right) \quad (4.3)$$

Donde los B_i son constantes de acoplamiento y $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

4.2. Ecuaciones de Campo

Para obtener las ecuaciones de campo, es simple utilizar las ecuaciones de campo en su forma covariante, aplicada a la acción del modelo. Al hacer esto, se obtienen las ecuaciones para \mathcal{A} ,

$$-2B_1\mathcal{A}_\mu\mathcal{B}_\sigma{}^\mu{}_\tau - 2B_2\mathcal{F}_{\sigma\tau} - B_3\nabla_\mu\mathcal{B}_\sigma{}^\mu{}_\tau - B_5\mathcal{R}_{\sigma\tau}{}^\mu{}_\mu = 0. \quad (4.4)$$

Las ecuaciones para \mathcal{B} son,

$$2B_1\mathcal{A}_\sigma\mathcal{A}_\lambda - 2B_3\nabla_{(\sigma}\mathcal{A}_{\lambda)} + 3B_4\mathcal{B}_\sigma{}^\rho{}_\gamma\mathcal{B}_\lambda{}^\gamma{}_\rho + 2B_6\mathcal{R}_{\mu(\sigma}{}^\mu{}_{\lambda)} = 0. \quad (4.5)$$

Y las ecuaciones para Γ están dadas por,

$$\begin{aligned} B_32\mathcal{A}_\lambda\mathcal{B}_\tau{}^\nu{}_\sigma + B_5\left(2\delta_\lambda^\nu\mathcal{F}_{\tau\sigma} + 2\delta_{[\tau}^\nu\mathcal{F}_{\sigma]\lambda}\right) + B_6\left(-\nabla_\lambda\mathcal{B}_\tau{}^\nu{}_\sigma + \delta_\lambda^\nu\nabla_\mu\mathcal{B}_\tau{}^\mu{}_\sigma + 2\nabla_{[\tau}\mathcal{B}_{\sigma]}{}^\nu{}_\lambda\right) \\ + B_7\left(2\mathcal{R}_{\tau\sigma}{}^\mu{}_\mu\delta_\lambda^\nu + 2\delta_{[\tau}^\nu\mathcal{R}_{\sigma]\lambda}{}^\mu{}_\mu\right) + B_8\left(2\mathcal{R}_{\tau\sigma}{}^\nu{}_\lambda + 2\delta_{[\tau}^\nu\mathcal{R}_{\sigma]\mu}{}^\mu{}_\lambda\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3. Soluciones Cosmológicas

4.3.1. Ansatz Cosmológico

Para obtener campos que cumplan con el principio cosmológico, estos deben ser isotrópicos y homogéneos. En esta sección se encontrará la forma más general que pueden tener estos campos con tal de satisfacer la isotropía y homogeneidad. Para esto, se exigirá que la derivada de Lie se anule cuando se ocupen como vectores de Killing,

$$J = (0, 0, 1), \quad (4.7)$$

para el caso de la isotropía y

$$P_x = \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(0, \cos(\phi), \frac{\sin(\phi)}{r} \right) \quad (4.8)$$

$$P_y = \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(0, \sin(\phi), \frac{\sin(\phi)}{r} \right), \quad (4.9)$$

para el caso de la homogeneidad.

4.3.2. Campo \mathcal{B}

Se asignarán funciones a las componentes de \mathcal{B} de forma que,

$$\mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\rho = B_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi). \quad (4.10)$$

Notar que el primer índice en la función $B(t, r, \phi)$ se corresponde con el índice superior de la componente de \mathcal{B} . Además, debido a la antisimetría del campo \mathcal{B} , $\mathcal{B}_t{}^t{}_r = B_{001}(t, r, \phi)$ y $\mathcal{B}_r{}^t{}_t = -B_{001}(t, r, \phi)$, es decir, no es necesario definir funciones para todas las componentes.

Exigir que el \mathcal{B} sea isotrópico es directo ya que la derivada de Lie a lo largo de J es solo la derivada con respecto a ϕ , es decir,

$$\mathcal{L}_J \mathcal{B}_{\mu}^{\nu}{}_{\rho} = \frac{\partial B_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, las funciones no deben depender de ϕ . Luego se redefinen las funciones por funciones independientes de ϕ ,

$$B_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi) \rightarrow B_{\nu\mu\rho}(t, r). \quad (4.12)$$

Para obtener el ansatz homogéneo, primero se obtiene la derivada de Lie a lo largo de P_x . La única ecuación que da información que se puede utilizar directamente es,

$$B_{012}(t, r) + (\kappa r^3 - r) \frac{\partial B_{012}}{\partial r} = 0. \quad (4.13)$$

La solución de esta ecuación indica que la parte radial de la función B_{012} debe ser de la forma $r/\sqrt{1 - \kappa r^2}$. Es decir, la función se redefine como,

$$B_{012}(t, r) \rightarrow B_{012}(t) \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (4.14)$$

Para obtener más información, se calcula la expresión $\mathcal{L}_{P_y} \mathcal{B} \sin(\phi) + \mathcal{L}_{P_x} \mathcal{B} \cos(\phi)$. Al calcular esta derivada de Lie, se obtienen las ecuaciones,

$$\kappa \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow F(t), \quad (4.15)$$

para las funciones B_{101} y B_{202} .

$$\kappa r F(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow \frac{F(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (4.16)$$

para las funciones B_{001} y B_{212} .

$$r \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} - F(t, r) = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow F(t)r, \quad (4.17)$$

para las funciones B_{002} y B_{112} .

$$(2\kappa r^2 - 1)F(t, r) - (\kappa r^3 - r) \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow F(t)r\sqrt{1 - \kappa r^2}, \quad (4.18)$$

para la función B_{102} . Y,

$$(2\kappa r^2 - 1)F(t, r) + (\kappa r^3 - r) \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow \frac{F(t)}{r\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (4.19)$$

para la función B_{201} . Para obtener más ecuaciones, se calcula la expresión $\mathcal{L}_{P_y} \mathcal{B} \sin(\phi) - \mathcal{L}_{P_x} \mathcal{B} \cos(\phi)$, que da la ecuación,

$$F = 0, \quad (4.20)$$

para las funciones B_{002} , B_{001} , B_{212} y B_{112} . Por lo tanto todas estas funciones deben ser nulas. Además, se tienen las ecuaciones,

$$B_{201}(t) = -B_{102}(t) \quad \text{y} \quad B_{202}(t) = -B_{102}(t). \quad (4.21)$$

Estas últimas condiciones, hacen que las funciones no sean independientes y que las componentes de \mathcal{B} dependan de menos funciones. Por ejemplo, en este punto, la componente $\mathcal{B}_t^\phi_r$ está dada por,

$$\mathcal{B}_t^\phi_r = \frac{B_{201}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2 r}} = \frac{-B_{102}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2 r}}. \quad (4.22)$$

De este modo, \mathcal{B} pasa de depender de dos funciones arbitrarias $B_{201}(t)$ y $B_{102}(t)$ a depender solo de $B_{102}(t)$ (sin contar las funciones arbitrarias asociadas a las otras componentes). Con estas condiciones, el campo \mathcal{B} queda completamente isotrópico y homogéneo y sus componentes están dadas por,

$$\mathcal{B}_r^t_\phi = -\mathcal{B}_\phi^t_r = \frac{rB_{012}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{B}_t^r_r = -\mathcal{B}_r^t_t = B_{101}(t) \quad (4.24)$$

$$\mathcal{B}_t^r_\phi = -\mathcal{B}_\phi^r_t = \sqrt{1 - \kappa r^2} r B_{102}(t) \quad (4.25)$$

$$\mathcal{B}_t^\phi_r = -\mathcal{B}_r^\phi_t = \frac{-B_{102}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2 r}} \quad (4.26)$$

$$\mathcal{B}_t^\phi_\phi = -\mathcal{B}_\phi^\phi_t = B_{101}(t). \quad (4.27)$$

Pero notar que el campo \mathcal{B} no tiene traza por lo que,

$$\mathcal{B}_t^t_t + \mathcal{B}_t^r_r + \mathcal{B}_t^\phi_\phi = B_{101}(t) + B_{101}(t) = 0. \quad (4.28)$$

Por lo tanto, solo hay dos funciones arbitrarias que definen al campo \mathcal{B} , se hace la definición $B_{012}(t) = -\xi(t)$ y $B_{102}(t) = \psi(t)$, de modo que el campo \mathcal{B} adquiere la siguiente forma,

$$\mathcal{B}_\phi^t_r = -\mathcal{B}_r^t_\phi = \xi(t) \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{B}_t^r_\phi = -\mathcal{B}_\phi^r_t = \psi(t) r \sqrt{1 - \kappa r^2}, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{B}_r^\phi_t = -\mathcal{B}_t^\phi_r = \frac{\psi(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2 r}}. \quad (4.31)$$

4.3.3. Campo \mathcal{A}

Para el campo \mathcal{A} , se define una función arbitraria para cada componente, de modo que,

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu(t, r, \phi). \quad (4.32)$$

El ansatz isotrópico se obtiene calculando $\mathcal{L}_J \mathcal{A}$. Al igual que para \mathcal{B} , esta derivada corresponde a la derivada parcial con respecto a ϕ ,

$$\mathcal{L}_J \mathcal{A}_\mu = \frac{\partial A_\mu(t, r, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, ninguna de estas funciones debe depender de ϕ , es decir,

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu(t, r). \quad (4.34)$$

Para encontrar el ansatz homogéneo, primero se obtiene la derivada de Lie a lo largo de P_x . La única ecuación resultante de esta derivada que da información directa es,

$$\frac{\partial A_0(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (4.35)$$

Esto quiere decir, que la función A_0 no depende de r , por lo tanto, se hace la redefinición $A_0(t, r) \rightarrow A_0(t)$. En orden de encontrar más ecuaciones, se calcula la expresión $\mathcal{L}_{P_y} \mathcal{A} \sin(\phi) + \mathcal{L}_{P_x} \cos(\phi)$. Con esta expresión, se obtienen dos ecuaciones,

$$\kappa r A_1(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial A_1}{\partial r} = 0, \quad (4.36)$$

la solución de esta ecuación, indica que se debe hacer la redefinición

$$A_1(t, r) \rightarrow \frac{A_1(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (4.37)$$

La segunda ecuación es,

$$r \frac{\partial A_2}{\partial r} - A_2(t, r) = 0, \quad (4.38)$$

en donde la solución de esta ecuación requiere que,

$$A_2(t, r) \rightarrow r A_2(t). \quad (4.39)$$

Finalmente, con estas nuevas redefiniciones, se vuelve a calcular $\mathcal{L}_{P_x} \mathcal{A}$, que da como ecuaciones,

$$F_2(t) = 0 \quad \text{y} \quad F_1(t) = 0. \quad (4.40)$$

Por lo tanto, el campo \mathcal{A} completamente isotrópico y homogéneo está definido solo por la componente $A_t = A_0(t)$. Esta función será renombrada como $\eta(t)$, de modo que $A_t = \eta(t)$.

4.3.4. Campo Γ

Similar al caso de \mathcal{B} , se definen funciones para las componentes de Γ de la siguiente forma,

$$\Gamma_{\mu}^{\nu}{}_{\rho} = G_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi), \quad (4.41)$$

donde el primer índice de la función $G_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi)$ se corresponde con el índice superior de la componente $\Gamma_{\mu}^{\nu}{}_{\rho}$. Además notar que no es necesario definir una función para cada una de las componentes ya que por ejemplo, por simetría $\Gamma_t^r{}_{\phi} = \Gamma_{\phi}^r{}_t = G_{102}(t)$.

Para obtener el ansatz homogéneo, se obtiene la derivada de Lie a lo largo de J ,

$$\mathcal{L}_J \Gamma_{\mu}^{\nu}{}_{\rho} = \frac{G_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.42)$$

Una vez más, para que Γ sea isotrópica, solo basta con que sus componentes no dependan ϕ ,

$$G_{\nu\mu\rho}(t, r, \phi) \rightarrow G_{\nu\mu\rho}(t, r). \quad (4.43)$$

El ansatz homogéneo se obtiene usando P_x y P_y como vectores de Killing. La derivada de Lie a lo largo de P_x indica que,

$$\frac{\partial G_{000}(t, r)}{\partial r} = 0, \quad (4.44)$$

entonces, se debe redefinir $G_{000}(t, r) \rightarrow G_{000}(t)$. Luego, para obtener más ecuaciones se calcula $\mathcal{L}_{P_y}\Gamma \sin(\phi) + \mathcal{L}_{P_x}\Gamma \cos(\phi)$. El primer tipo de ecuación es,

$$\frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0, \quad (4.45)$$

para las funciones G_{101} y G_{202} . Esto implica que estas funciones deben ser independientes de r y deben ser redefinidas de la forma,

$$F(t, r) \rightarrow F(t). \quad (4.46)$$

Luego, están las ecuaciones del tipo,

$$r \frac{\partial F}{\partial r} - F(t, r) = 0, \quad (4.47)$$

para las funciones G_{002} , G_{112} y G_{222} . Estas tres funciones deben ser redefinidas siguiendo la forma,

$$F(t, r) \rightarrow rF(t). \quad (4.48)$$

Y luego, vienen las ecuaciones individuales,

$$\kappa r G_{001}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial G_{001}}{\partial r} = 0, \quad (4.49)$$

$$2\kappa r G_{011}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial G_{011}}{\partial r} = 0, \quad (4.50)$$

$$(\kappa r^3 - r) \frac{\partial G_{012}}{\partial r} + G_{012}(t, r) = 0, \quad (4.51)$$

$$r \frac{\partial G_{022}}{\partial r} - 2G_{022}(t, r) = 0, \quad (4.52)$$

$$\kappa r G_{100}(t, r) - (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial G_{100}}{\partial r} = 0, \quad (4.53)$$

$$(2\kappa r^2 - 1)G_{102}(t, r) - (\kappa r^3 - r) \frac{\partial G_{102}}{\partial r} = 0, \quad (4.54)$$

$$(\kappa^2 r^3 - \kappa r)G_{111}(t, r) + (\kappa r^2 - 1)^2 \frac{\partial G_{111}}{\partial r} - \kappa = 0, \quad (4.55)$$

$$(3\kappa r^2 - 2)G_{122}(t, r) - (\kappa r^3 - r) \frac{\partial G_{122}}{\partial r} + \kappa r^3 - r = 0, \quad (4.56)$$

$$r \frac{\partial G_{200}}{\partial r} + G_{200}(t, r) = 0, \quad (4.57)$$

$$(2\kappa r^2 - 1)G_{201}(t, r) + (\kappa r^3 - r) \frac{\partial G_{201}}{\partial r} = 0, \quad (4.58)$$

$$(3\kappa r^2 - 1)G_{211}(t, r) + (\kappa r^3 - r) \frac{\partial G_{211}}{\partial r} = 0, \quad (4.59)$$

$$\kappa r^3 G_{212}(t, r) + (\kappa r^4 - r^2) \frac{\partial G_{212}}{\partial r} - 1 = 0. \quad (4.60)$$

Para que estas ecuaciones se cumplan, se hacen las redefiniciones,

$$G_{001}(t, r) \rightarrow \frac{G_{001}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad G_{011}(t, r) \rightarrow \frac{G_{011}(t)}{1 - \kappa r^2}, \quad (4.61)$$

$$G_{012}(t, r) \rightarrow G_{012}(t) \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad G_{022}(t, r) \rightarrow G_{022}(t) r^2, \quad (4.62)$$

$$G_{100}(t, r) \rightarrow G_{100}(t) \sqrt{1 - \kappa r^2}, \quad G_{102}(t, r) \rightarrow G_{102}(t) r \sqrt{1 - \kappa r^2}, \quad (4.63)$$

$$G_{200}(t, r) \rightarrow \frac{G_{200}(t)}{r}, \quad G_{201}(t, r) \rightarrow \frac{G_{201}}{r \sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (4.64)$$

$$G_{211}(t, r) \rightarrow \frac{G_{211}(t)}{r(1 - \kappa r^2)}, \quad G_{212}(t, r) \rightarrow \frac{G_{212}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} + \frac{1}{r}, \quad (4.65)$$

$$G_{111}(t, r) \rightarrow \frac{G_{111}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} + \frac{r\kappa}{1 - \kappa r^2}, \quad (4.66)$$

$$G_{122}(t, r) \rightarrow G_{122}(t) r^2 \sqrt{1 - \kappa r^2} + \kappa r^3 - r. \quad (4.67)$$

Con estas redefiniciones, se procede a calcular nuevamente $\mathcal{L}_{P_x} \Gamma$. Notar que para este punto, todas las funciones arbitrarias son funciones que dependen solo de t . Aparece la ecuación trivial,

$$F = 0, \quad (4.68)$$

para G_{002} , G_{001} , G_{012} , G_{200} y G_{100} . También resultan tres ecuaciones que disminuyen la cantidad de funciones arbitrarias, relacionándolas entre ellas,

$$G_{022}(t) = G_{011}(t), \quad (4.69)$$

$$G_{201}(t) = -G_{102}(t), \quad (4.70)$$

$$G_{202}(t) = G_{101}(t). \quad (4.71)$$

Y finalmente, hay un sistema de ecuaciones lineales homogéneo,

$$G_{211}(t) + 2G_{112}(t) = 0, \quad (4.72)$$

$$-G_{111}(t) + G_{122}(t) + G_{212}(t) = 0, \quad (4.73)$$

$$2G_{112}(t) - G_{222}(t) = 0, \quad (4.74)$$

$$G_{111} - 2G_{212}(t) = 0, \quad (4.75)$$

$$G_{112} + G_{211} - G_{222} = 0, \quad (4.76)$$

$$G_{122} + 2G_{212} = 0. \quad (4.77)$$

La solución de este sistema es la trivial, por lo que todas las funciones, G_{211} , G_{112} , G_{111} , G_{122} , G_{212} y G_{222} son cero. De este modo, la conexión queda totalmente isotrópica y homogénea, y sus componentes son,

$$\begin{aligned} \Gamma_{t^t}^t &= G_{000}(t), & \Gamma_{i^t}^t &= G_{011}(t), \\ \Gamma_{i^k}^k &= \gamma_i^k, & \Gamma_{t^i}^i &= G_{101}(t)\delta_j^i + G_{102}(t)S^{ik}\varepsilon_{kj}\frac{r}{\sqrt{1-\kappa r^2}}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Donde,

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\kappa r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

y,

$$\gamma_r^r = \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}, \quad \gamma_\phi^r = -r(1-\kappa r^2), \quad \gamma_r^\phi = \gamma_\phi^r = \frac{1}{r}.$$

Estas cuatro funciones arbitrarias se renombrarán de la siguiente forma, $G_{000}(t) \rightarrow j(t)$, $G_{011}(t) \rightarrow g(t)$, $G_{101}(t) \rightarrow h(t)$ y $G_{102}(t) \rightarrow f(t)$.

4.3.5. Ecuaciones

Una vez obtenido el ansatz cosmológico, se pueden reemplazar las componentes en las ecuaciones de campo. Con esto, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales,

$$2B_8gf - B_3\xi\eta - 2B_6(g\psi + h\xi) = 0, \quad (4.79a)$$

$$B_6(\dot{\xi} - 2h\xi) + 2B_8fg = 0, \quad (4.79b)$$

$$B_8(\dot{g} - 2gh - \kappa) - 2B_6f\xi = 0, \quad (4.79c)$$

$$B_3\eta\psi + B_8(\dot{f} + 2hf) - B_6\dot{\psi} = 0, \quad (4.79d)$$

$$B_1\eta^2 - B_3\dot{\eta} + 3B_4\psi^2 - 2B_6(\dot{h} + h^2 - f^2) = 0, \quad (4.79e)$$

$$B_3g\eta - 3B_4\psi\xi + B_6(\dot{g} + \kappa) = 0, \quad (4.79f)$$

$$2B_1\eta\xi + B_3(\dot{\xi} + 2g\psi) = 0. \quad (4.79g)$$

4.3.6. Soluciones

La estrategia utilizada para encontrar soluciones comienza manipulando las ecuaciones 4.79. De las ecuaciones 4.79b y 4.79g se puede despejar $\dot{\xi}$ en cada una y luego igualarlas, obteniendo,

$$\left(\psi - \frac{B_8}{B_6}f\right)g + \left(h + \frac{B_1}{B_3}\eta\right)\xi = 0. \quad (4.80)$$

Del mismo modo, se despeja \dot{g} de las ecuaciones 4.79c y 4.79f para obtener,

$$(B_3B_8\eta + 2B_6B_8h)g + (2B_6^2f - 3B_4B_8\psi)\xi + 2B_6B_8\kappa = 0. \quad (4.81)$$

Luego, sumando la ecuación 4.79a con $2B_6$ veces la ecuación 4.80, se obtiene

$$(2B_6B_1 - B_3^2)\eta\xi = 0. \quad (4.82)$$

Esta última ecuación, junto con 4.79a y 4.81 pueden ser consideradas como un sistema de ecuaciones lineal para g , ξ y κ , de la siguiente forma,

$$(2B_8f - 2B_6\psi)g - (B_3\eta + 2B_6h)\xi + 0 \cdot \kappa = 0, \quad (4.83a)$$

$$0 \cdot g + (2B_6B_1 - B_3^2)\eta\xi + 0 \cdot \kappa = 0, \quad (4.83b)$$

$$(B_3B_8\eta + 2B_6B_8h)g + (2B_6^2f - 3B_4B_8\psi)\xi + 2B_6B_8\kappa = 0, \quad (4.83c)$$

donde κ está restringido a ser $\kappa = -1, 0, 1$. Definiendo la matriz,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (2B_8f - 2B_6\psi) & (-B_3\eta + 2B_6h) & 0 \\ 0 & (2B_6B_1 - B_3^2)\eta & 0 \\ (B_3B_8\eta + 2B_6B_8h) & 2B_6^2f - 3B_4B_8\psi & 2B_6B_8 \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

el espacio de soluciones se divide en dos casos, uno con $\det(\mathcal{M}) \neq 0$ y otro con $\det(\mathcal{M}) = 0$. En esta manipulación, se hizo la suposición de que las constantes B_3 , B_6 y B_8 son distintas de cero, por lo que también se agregan los casos excepcionales en donde estas constantes se anulan.

El valor de la determinante de esta matriz es,

$$\det(\mathcal{M}) = (2B_8f - 2B_6\psi)\eta(2B_6B_1 - B_3^2)(2B_6B_8). \quad (4.85)$$

Por lo tanto, el caso con $\det(\mathcal{M}) = 0$ se divide en tres casos,

$$\eta = 0, \quad (4.86)$$

$$\psi = \frac{B_8}{B_6} f, \quad (4.87)$$

$$(2B_6B_1 - B_3^2) = 0. \quad (4.88)$$

Para organizar las soluciones, estas serán agrupadas de acorde al tipo de métrica emergente que pueden generar. Con el ansatz cosmológico, las posibles métricas tienen la siguiente forma general,

$$\text{Ric} = (2f^2 - 2h^2 - 2\dot{h}) dt \otimes dt + (\kappa + \dot{g}) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right), \quad (4.89)$$

$$\text{Bmet} = -\frac{1}{2}\psi^2 dt \otimes dt - \frac{\psi\xi}{2} \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right), \quad (4.90)$$

$$\text{Popl} = \left(-\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{8}\eta^2 \right) dt \otimes dt - \frac{\psi\xi}{2} \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \quad (4.91)$$

1. Soluciones sin métrica emergente

a) Soluciones con g

Esta solución, proveniente del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ y con la condición $\kappa = 0$, tiene como única función no nula a g que tiene un valor constante,

$$g(t) = C_g. \quad (4.92)$$

Se puede, comprobar que al reemplazar las funciones en las métricas 4.89-4.91, todas se anulan.

b) Soluciones con h

Al igual que el caso anterior, esta solución viene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ y con la condición $\kappa = 0$. La única función que aparece en la conexión es,

$$h(t) = \frac{1}{t - C_h}. \quad (4.93)$$

Nuevamente, todas las posibles métricas se anulan.

c) Soluciones con g y ξ

Solución del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ con $\kappa = 0$. Las únicas funciones no nulas son g y ξ , que son constantes,

$$g(t) = C_g, \quad \xi(t) = C_\xi. \quad (4.94)$$

d) Soluciones con h y ψ

Esta solución es del caso $B_6 = 0$ y tiene como condición que B_4 y κ sean cero. Las funciones $h(t)$ y $\psi(t)$ son funciones arbitrarias y las posibles métricas son,

$$\begin{aligned}\text{Ric} &= (-2h^2 - 2\dot{h}) dt \otimes dt, \\ \text{Bmet} = \text{Popl} &= -\frac{1}{2}\psi^2 dt \otimes dt,\end{aligned}$$

que no son cero pero no son invertibles, por lo que no sirven como métricas emergentes.

e) Soluciones con h y η

Pertenece al caso $B_6 = 0$ con la condición $\kappa = 0$. Aquí, la función $h(t)$ es arbitraria y $\eta(t)$ es,

$$\eta(t) = \frac{-1}{\frac{B_1}{B_3}t + C_\eta}. \quad (4.95)$$

El tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ es el mismo del caso anterior, $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ es cero y $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ está determinado por,

$$\text{Popl} = \frac{1}{8}\left(C_\eta + \frac{B_1}{B_3}t\right)^2 dt \otimes dt, \quad (4.96)$$

que nuevamente no se anula pero no puede usarse como métrica.

f) Soluciones con f y ψ

Esta solución viene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6}f$, con la condición $\kappa = 0$ y con una condición sobre los parámetros $3B_4B_8^2 - 2B_6^3 = 0$. Las componentes de la conexión están parametrizadas por las funciones,

$$f(t) = \text{arbitraria}, \quad \psi(t) = \frac{B_8}{B_6}f(t). \quad (4.97)$$

g) Soluciones con f , h y ξ

Es del caso B_6 con la condición $\kappa = 0$. La conexión queda determinada por las funciones,

$$f(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \frac{-\dot{f}}{2f}, \quad \xi(t) = \text{arbitraria}. \quad (4.98)$$

h) Soluciones con f , h , ψ y η

Hay dos soluciones de este tipo. La primera, viene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6}f$ con las restricciones $\kappa = 0$ y $\eta = \frac{-2B_6}{B_3}h$. La conexión queda determinada por las siguientes funciones,

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \text{arbitraria}, & f(t) &= \pm \sqrt{\frac{2B_3^2 B_6^3 - 4B_1 B_6^4}{2B_3^2 B_6^3 + 3B_3^2 B_4 B_8}} h(t), \\
 \eta(t) &= \frac{-2B_6}{B_3} h(t), & \psi(t) &= \pm \frac{B_8}{B_6} \sqrt{\frac{2B_3^2 B_6^3 - 4B_1 B_6^4}{2B_3^2 B_6^3 + 3B_3^2 B_4 B_8}} h(t).
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

Si se agregan las condiciones $B_3^2 - 2B_1 B_6 = 0$ y $2B_6^3 + 3B_4 B_8^2 = 0$, la solución queda dada por,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \text{arbitraria}, \\
 \psi(t) &= \frac{B_8}{B_6} f, & \eta(t) &= \frac{-2B_6}{B_3}.
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

El segundo tipo de solución se da en el caso B_6 . Con la condición $\kappa = 0$, las funciones que determinan la conexión son,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \frac{-\dot{f}}{2f} \mp \frac{B_3 \eta}{2B_8 f} \sqrt{\frac{B_3}{3B_4} \dot{\eta} - \frac{B_1}{3B_4} \eta^2}, \\
 \eta(t) &= \text{arbitraria}, & \psi(t) &= \pm \sqrt{\frac{B_3}{3B_4} \dot{\eta} - \frac{B_1}{3B_4} \eta^2}.
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Si adicionalmente se exige que $B_3 = 0$, la solución queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \frac{-\dot{f}}{2f}, \\
 \eta(t) &= \text{arbitraria}, & \psi(t) &= \pm \sqrt{\frac{-B_1}{3B_4}} \eta.
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

En todos estos caso, las posibles métricas no se anulan, pero son degeneradas, por lo que no sirven como métricas emergentes.

2. Soluciones con métrica $\mathcal{R}_{\mu\nu}$

a) Soluciones con g y h

Hay dos tipos de soluciones con esta forma, sin embargo solo una de ellas genera una métrica emergente. La primera solución, del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ tiene la siguiente forma,

$$g(t) = -\kappa t + \kappa C_h, \quad h = \frac{1}{t - C_h}. \tag{4.103}$$

Sin embargo, las posibles métricas emergentes se anulan.

El segundo tipo de solución pertenece al caso $B_6 = 0$ y las funciones que determinan la conexión son,

$$g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \frac{\dot{g} - \kappa}{2g}. \tag{4.104}$$

Al reemplazarla en 4.89 se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Ric} = & \left(-\frac{\left(\kappa - \frac{\partial g}{\partial t}\right)^2}{2g^2} - \frac{\left(\kappa - \frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial t}}{g^2} - \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}{g} \right) dt \otimes dt \\ & + (\kappa + \dot{g}) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \end{aligned} \quad (4.105)$$

b) Soluciones con g , h y ξ

Hay dos soluciones de este tipo, una más general que la otra. La primera solución viene del caso B_6 , con la condición $B_3 = 0$ y está dada por,

$$g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \frac{\dot{g} - \kappa}{2g}, \quad \xi(t) = \text{arbitraria}. \quad (4.106)$$

La otra solución es más restrictiva sobre ξ pero no exige que B_3 sea cero,

$$g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \frac{\dot{g} - \kappa}{2g}, \quad \xi(t) = C_\xi. \quad (4.107)$$

Ambas soluciones generan el mismo tensor de Ricci escrito en 4.105.

c) Soluciones con g , h y η

Esta solución proviene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$, con las condiciones adicionales $\kappa = 0$, $2B_1 B_6 = B_3^2$ y $\eta = \frac{-2B_6}{B_3} h$. Las funciones que determinan a la conexión están dadas por,

$$g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \frac{\dot{g}}{2g}, \quad \eta(t) = -\frac{B_6}{B_3} \cdot \frac{\dot{g}}{g}. \quad (4.108)$$

El tensor de Ricci que genera es el mismo que en 4.105 pero con $\kappa = 0$.

d) Soluciones con g , h , ξ y η

Viene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ con las condiciones $\kappa = 0$, $2B_1 B_6 = B_3^2$ y $\eta = \frac{-2B_6}{B_3} h$. Las funciones son,

$$\begin{aligned} g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) &= \frac{\dot{g}}{2g}, \\ \xi(t) = C_\xi g(t), \quad \eta(t) &= \frac{-B_6 \dot{g}}{B_3 g}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

e) Soluciones con g , h , ψ y η

Esta solución aparece en el caso con $B_6 = 0$ y está dada por,

$$\begin{aligned} g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) &= \frac{\dot{g} - \kappa}{2g}, \\ \eta(t) = \text{arbitraria}, \quad \psi(t) &= \pm \sqrt{\frac{-B_1}{3B_4}} \eta(t). \end{aligned} \quad (4.110)$$

El tensor de Ricci que genera está dado por 4.105.

f) Soluciones con f , g y h

Este tipo de solución viene del caso $B_6 = 0$, con la condición $B_3 = 0$ y está dada por las funciones,

$$f(t) = \text{arbitraria}, \quad g(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \text{arbitraria}. \quad (4.111)$$

En este caso, el tensor de Ricci obtiene su forma general 4.89. Esto se debe a que en esta solución, solo ψ , ξ y η se anulan, pero estas funciones son las que determinan a los campos \mathcal{B} y \mathcal{A} , que no participan en la construcción del tensor de Ricci.

g) Soluciones con f , h y η

Proviene del caso $B_6 = 0$, con la condición $B_8 = 0$. Las funciones que determinan la conexión están dadas por,

$$f(t) = \text{arbitraria}, \quad h(t) = \text{arbitraria}, \quad \eta(t) = \frac{-1}{\frac{B_3}{B_1}t + C_\eta}. \quad (4.112)$$

El tensor de Ricci que forma esta solución es,

$$\text{Ricc} = (2f^2 - 2h^2 - 2\dot{h}) dt \otimes dt + \kappa \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - kr^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \quad (4.113)$$

h) Soluciones con f , h y ψ

Esta solución viene del caso $B_6 = B_8 = 0$ y con la condición adicional $B_4 = 0$. Las funciones que parametrizan la conexión están dadas por las tres funciones arbitrarias f , h y ψ . El tensor de Ricci que genera es nuevamente 4.113 ya que este tensor está determinado por f y h . Cabe notar que para que este tensor sea no degenerado κ debe ser distinto de cero.

i) Soluciones con f , g , h y ξ

Este tipo de soluciones se encuentran en el caso $B_6 = 0$, con la condición $B_3 = B_8 = 0$ y parecido al caso anterior, la conexión está determinada por las funciones f , g , h y ξ , todas arbitrarias. El tensor de Ricci que genera está dado por 4.89.

j) Soluciones con f , g , h , ξ y η

La solución proviene del caso $B_6 = 0$, con la condición $B_8 = 0$. Las funciones que definen las componentes de la conexión son las funciones arbitrarias $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\eta(t)$ y la función constante,

$$\xi(t) = C_\xi \quad (4.114)$$

k) Soluciones con f , g , h , ψ y η

Esta solución aparece en el caso $B_6 = 0$, con la condición $B_8 = 0$ y está dada por funciones arbitrarias $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\eta(t)$ y por,

$$\psi(t) = \pm \sqrt{\frac{-B_1}{3B_4}} \eta(t). \quad (4.115)$$

3. Soluciones con métricas $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{B}_{\mu\nu}$

 a) Soluciones con g , h , ξ y ψ

El caso que contiene este tipo de solución es $B_6 = 0$ con la condición de que $B_4 = 0$. Aquí, las componentes de la conexión están dadas por,

$$\begin{aligned} g(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \frac{\dot{g} - \kappa}{2g}, \\ \xi(t) &= \text{arbitraria}, & \psi(t) &= \frac{\dot{\xi}}{2g}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

En este tipo de solución, se generan las tres posibles métricas. El tensor de Ricci, está dado por 4.105. Los tensores $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ están dados por,

$$\text{Bmet} = \text{Popl} = \frac{-(\dot{\xi})^2}{8g^2} dt \otimes dt - \frac{d(\xi^2)}{8g} \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \quad (4.117)$$

 b) Soluciones con f , g , ξ y ψ

Esta solución viene del caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$ y con la condición sobre los parámetros, dada por $3B_4 B_8^2 + 2B_6^3 = 0$. Las funciones que definen a la conexión son,

$$\begin{aligned} g(t) &= C_g, & f(t) &= \mp \frac{B_8 \kappa}{2B_6 \sqrt{\frac{2B_8^2}{B_6^2} C_g \kappa t + 2C_\xi}}, \\ \xi(t) &= \pm \sqrt{\frac{2B_8^2}{B_6^2} C_g \kappa t + 2C_\xi}, & \psi(t) &= \mp \frac{B_8^2 \kappa}{2B_6^2 \sqrt{\frac{2B_8^2}{B_6^2} C_g \kappa t + 2C_\xi}}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Con estas funciones, se generan las tres métricas,

$$\text{Ricc} = \frac{B_8^2 \kappa^2}{4(B_8^2 C_g \kappa t + B_6^2 C_\xi)} dt \otimes dt + \kappa \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right) \quad (4.119)$$

$$\text{Bmet} = \text{Popl} = \frac{B_8^2}{4B_6^2} \left(\frac{-B_8^2 \kappa^2}{4(B_8^2 C_g \kappa t + B_6^2 C_\xi)} dt \otimes dt + \kappa \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right) \right). \quad (4.120)$$

La métrica $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ pareciera ser igual a $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ salvo por el factor $\frac{B_8^2}{4B_6^2}$, sin embargo el término $dt \otimes dt$ tiene un signo opuesto, es decir, tiene signaturas diferentes.

 c) Soluciones con f , h , ξ , y ψ

Hay dos de este tipo de soluciones, ambas del caso $B_6 = 0$. La primera, se encuentra con la condición $B_8 = 0$ y está dada por las funciones,

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \text{arbitraria}, \\ \xi(t) &= C_\xi, & \psi(t) &= \text{arbitraria}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Las métricas emergentes que forma esta solución son,

$$\text{Ricc} = (2f^2 - 2h^2 - 2\dot{h}) dt \otimes dt + \kappa \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right), \quad (4.122)$$

$$\text{Bmet} = \text{Popl} = -\frac{\psi}{2} \left(\psi dt \otimes dt + C_\xi \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right) \right). \quad (4.123)$$

El segundo tipo de solución tiene como condición $\kappa = 0$ y sus funciones son,

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{arbitraria}, & h(t) &= \frac{-\dot{f}}{2f}, \\ \xi(t) &= C_\xi, & \psi(t) &= \text{arbitraria}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

En esta segunda solución, como tanto g como κ son cero, el tensor de Ricci queda no invertible. Por lo que los tensores que sirven como métrica son $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ y son iguales a 4.123, pero con $\kappa = 0$.

d) Soluciones con f, g, h, ξ y ψ

El caso que contiene esta solución es el caso $B_6 = 0$, con la condición sobre los parámetros $B_4 = B_8 = 0$. La conexión queda determinada por las funciones $f(t)$, $h(t)$, $\xi(t)$, $\psi(t)$, todas arbitrarias, y por,

$$g(t) = \frac{-\dot{\xi}}{2\psi}. \quad (4.125)$$

Los tensores que forman esta solución, son,

$$\text{Ricc} = (2f^2 - 2h^2 - 2\dot{h}) dt \otimes dt + \left(\kappa - \frac{\dot{\xi}}{2\psi} \right) \left(\frac{dr \otimes r}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \quad (4.126)$$

La métrica de Poplawski es igual a la métrica formada con el campo \mathcal{B} ya que η es cero, mientras que $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ adquiere su forma general 4.90. Notar que en este caso, g fue escrito en función de ξ y ψ ; si se hubiera escrito ψ en función de ξ y g , sería el tensor de Ricci el que adquiere su forma general 4.89 y el tensor $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ se vería distinto.

e) Soluciones con f, g, h, ξ, ψ y η

Para encontrar esta solución, se debe ir al caso $\psi = \frac{B_8}{B_6} f$, con la condición adicional $\eta = \frac{-2B_6}{B_3} h$ y las siguientes condiciones sobre los parámetros $3B_4 B_8^2 + 2B_6^3 = 0$ y $2B_1 B_6 = B_3^2$. En este caso, todas las funciones pueden ser escritas en términos de una sola función arbitraria,

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \text{arbitraria}, & \xi(t) &= \pm \left(C_\xi g^2 + \frac{2g^2 B_8^2 \kappa}{B_6^2} \int \frac{1}{g(t)} dt \right)^{1/2}, \\
 h(t) &= \frac{\dot{g}}{2g}, & f(t) &= \mp \frac{B_8 \kappa}{2B_6} \left(C_\xi g^2 + \frac{2g^2 B_8^2 \kappa}{B_6^2} \int \frac{1}{g(t)} dt \right)^{-1/2}, \\
 \eta(t) &= \frac{-B_6 \dot{g}}{B_3 g}, & \psi(t) &= \mp \frac{B_8^2 \kappa}{2B_6^2} \left(C_\xi g^2 + \frac{2g^2 B_8^2 \kappa}{B_6^2} \int \frac{1}{g(t)} dt \right)^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.127}$$

Esta última solución, genera los tres tipos de métrica emergente. Definiendo,

$$G(t) = \left(\frac{2B_8^2 \kappa g^2 \int \frac{1}{g(t)} dt}{B_6^2} + C_\xi g^2 \right), \tag{4.128}$$

las métricas emergentes, adquieren la siguiente forma,

$$\text{Ricc} = \left(\frac{B_8^2 \kappa^2}{2B_6^2 G(t)} + \frac{(\dot{g})^2}{2g^2} - \frac{\ddot{g}}{g} \right) dt \otimes dt + (\kappa + \dot{g}) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right), \tag{4.129}$$

$$\text{Bmet} = \frac{-B_8^4 \kappa^2}{8B_6^4 G(t)} dt \otimes dt + \frac{B_8^2 \kappa}{4B_6^2} \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right), \tag{4.130}$$

$$\text{Popl} = \left(\frac{-B_8^4 \kappa^2}{8B_6^4 G(t)} + \frac{B_6^2 (\dot{g}^2)}{8B_3^2 g^2} \right) dt \otimes dt + \frac{B_8^2 \kappa}{4B_6^2} \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \right). \tag{4.131}$$

4. Caso con $\det \mathcal{M} \neq 0$

Cuando el determinante de la matriz (4.84) es distinto de cero, se tiene que $g = \xi = \kappa = 0$. Al reemplazar este resultado en las ecuaciones de campo, se obtienen solo dos ecuaciones,

$$2B_8 f h + B_3 \psi \eta + B_8 \dot{f} - B_6 \dot{\psi} = 0, \tag{4.132a}$$

$$-2B_6 (\dot{h} + h^2 - f^2) + 3B_4 \psi^2 + B_1 \eta^2 - B_3 \dot{\eta} = 0. \tag{4.132b}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas f, h, ψ, η y esto implica que no se puede resolver. Una estrategia que se puede intentar es escoger dos de las cuatro funciones como funciones paramétricas y luego resolver para las dos funciones restantes.

En particular, la segunda ecuación (4.132b) corresponde a una ecuación de Riccati para h o para η que en general no se puede resolver. Considerando el caso especial en que η es proporcional a h , $\eta = \alpha h$, al resolver para h , obtenemos que la ecuación puede ser reescrita como,

$$\dot{h}(2B_6 + \alpha B_3) + h^2(2B_6 - \alpha^2 B_1) = 2B_6 f^2 + 3B_4 \psi^2 = \sigma(t), \tag{4.133}$$

en donde hemos definido $2B_6 f^2 + 3B_4 \psi^2 = \sigma(t)$.

En esta ecuación, se pueden identificar los siguientes casos,

- a) Cuando $\sigma = 0$, se obtiene una ecuación de Bernoulli de segundo grado para h , cuya solución es,

$$h(t) = \frac{2B_6 + B_3\alpha}{(2B_6 - \alpha^2 B_1)t - (2B_6 + \alpha B_3)C_h} \quad (4.134)$$

- b) Si $\alpha = -\frac{2B_6}{B_3}$, la ecuación se transforma en una ecuación cuadrática para h . La solución está dada por,

$$h(t) = \pm \sqrt{\frac{\sigma(t)}{2B_6 - \alpha^2 B_1}}. \quad (4.135)$$

- c) El caso $\alpha = \pm\sqrt{\frac{2B_6}{B_1}}$, se elimina el término con h^2 y se obtiene,

$$h(t) = C_h + \frac{1}{2B_6 + \alpha B_3} \int \sigma(t) dt. \quad (4.136)$$

- d) Si $\alpha = -\frac{2B_6}{B_3}$ y $\alpha = \pm\sqrt{\frac{2B_6}{B_1}}$, la función h desaparece de la ecuación y se obtiene,

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{2B_6}{3B_4}} f. \quad (4.137)$$

En cualquier otro caso, la ecuación puede ser reescrita como,

$$\dot{h} = U_{2,\alpha} h^2 + U_{0,\alpha}, \quad (4.138)$$

en donde se definió,

$$U_{2,\alpha} = -\frac{2B_6 - \alpha^2 B_1}{2B_6 + \alpha B_3} \quad \text{y} \quad U_{0,\alpha} = \frac{-\sigma(t)}{2B_6 + \alpha B_3}. \quad (4.139)$$

Utilizando el cambio de variable $u = e^{-U_{2,\alpha} \int h(t) dt}$, la ecuación (4.138) adquiere la forma de una ecuación tipo Schrödinger,

$$\ddot{u} + V(t)u = 0, \quad (4.140)$$

considerando el potencial,

$$V(t) = U_{0,\alpha} U_{2,\alpha}. \quad (4.141)$$

Modelo en Cuatro Dimensiones

5.1. Acción

Para obtener la acción en cuatro dimensiones, se puede utilizar el mismo procedimiento de análisis de índices que se ocupó en tres dimensiones. Solo que esta vez la forma de volumen es de la forma $dV^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} \wedge dx^{\alpha_4}$ y por lo tanto, para un término general $\mathcal{O} = \mathcal{A}^m \mathcal{B}^n \nabla^p dV^q$, los operadores \mathcal{N} y \mathcal{W} tienen los valores

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}) = -m - n - p + 4q, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}) = q. \quad (5.2)$$

Nuevamente, como lo que se busca es una densidad escalar, $\mathcal{W}(\mathcal{O}) = q = 1$ y $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = 0$, es decir, se debe cumplir la ecuación,

$$m + n + p = 4. \quad (5.3)$$

Las posibles combinaciones están dadas en la siguiente tabla

\mathcal{A}	\mathcal{B}	∇	Término
4	0	0	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}$
3	1	0	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}$
3	0	1	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\nabla$
2	2	0	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}$
2	1	1	$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}\nabla$
2	0	2	$\mathcal{A}\mathcal{A}\nabla\nabla$
1	3	0	$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{B}$
1	2	1	$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}\nabla$
1	1	2	$\mathcal{A}\mathcal{B}\nabla\nabla$
1	0	3	$\mathcal{A}\nabla\nabla\nabla$
0	4	0	$\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{B}$
0	3	1	$\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{B}\nabla$
0	2	2	$\mathcal{B}\mathcal{B}\nabla\nabla$
0	1	3	$\mathcal{B}\nabla\nabla\nabla$
0	0	4	$\nabla\nabla\nabla\nabla$

Luego, de identificar los tipos de términos que pueden aparecer en la acción, se procede a escribir todas las combinaciones de contracciones de índices y se eliminan las redundantes y las que no aportan a las ecuaciones de campo como los términos de borde o términos topológicos.

La acción más general que se puede construir es,

$$\begin{aligned}
 S = \int dV^{\alpha\beta\gamma\delta} & \left[B_1 \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\nu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\rho{}_\delta + B_2 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta \mathcal{B}_\mu{}^\rho{}_\nu + B_3 \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^\mu{}_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\nu{}_\gamma \mathcal{A}_\delta + B_4 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\rho{}_\delta \mathcal{A}_\sigma \right. \\
 & + B_5 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \mathcal{A}_\sigma + C_1 \mathcal{R}_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\nu \nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta + C_2 \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta + D_1 \mathcal{B}_\nu{}^\mu{}_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\alpha \nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\lambda{}_\delta \\
 & + D_2 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\mu{}^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta + D_3 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\nu \mathcal{B}_\beta{}^\lambda{}_\gamma \nabla_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\delta + D_4 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \nabla_\lambda \mathcal{A}_\sigma + D_5 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\sigma \nabla_\lambda \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \\
 & + D_6 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\gamma \nabla_\lambda \mathcal{A}_\delta + D_7 \mathcal{B}_\alpha{}^\lambda{}_\beta \mathcal{A}_\lambda \nabla_\gamma \mathcal{A}_\delta + E_1 \nabla_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\rho{}_\beta \nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta + E_2 \nabla_\rho \mathcal{B}_\alpha{}^\rho{}_\sigma \nabla_\gamma \mathcal{A}_\delta \\
 & \left. + F_1 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta \mathcal{B}_\mu{}^\lambda{}_\rho \mathcal{B}_\sigma{}^\rho{}_\lambda + F_2 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\lambda \mathcal{B}_\delta{}^\lambda{}_\rho \mathcal{B}_\mu{}^\rho{}_\nu + F_3 \mathcal{B}_\nu{}^\mu{}_\lambda \mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\alpha \mathcal{B}_\beta{}^\lambda{}_\gamma \mathcal{A}_\delta + F_4 \mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta \mathcal{B}_\gamma{}^\nu{}_\delta \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right]
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2. Ecuaciones de Campo

Obtener las ecuaciones de campo en $4D$ es bastante más complicado que en $3D$ debido a la cantidad de elementos de la acción. Las formas explícitas de estas ecuaciones se encuentran en el apéndice.

5.3. Soluciones Cosmológicas

5.3.1. Ansatz cosmológico

Para encontrar un ansatz isotrópico de la conexión, se exigirá que la derivada de Lie sea cero para cada componente utilizando como vectores de Killing, los vectores generadores de rotaciones,

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (0, 0, -\cos(\phi), \cot(\theta) \sin(\phi)) \\
 J_2 &= (0, 0, \sin(\phi), \cot(\theta) \cos(\phi)) \\
 J_3 &= (0, 0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Se obtiene la condición de homogeneidad, utilizando como vectores de Killing, los vectores generadores de traslaciones,

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(0, \cos(\phi) \sin(\theta), \frac{\cos(\phi) \cos(\theta)}{r}, -\frac{\sin(\phi)}{r \sin(\theta)} \right), \\
 P_2 &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(0, \sin(\phi) \sin(\theta), \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r}, \frac{\cos(\phi)}{r \sin(\theta)} \right), \\
 P_3 &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(0, \cos(\theta), -\frac{\sin(\theta)}{r}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Sin embargo, se calculará la derivada de Lie las componentes ya isotópicas, de modo que solo es necesario obtener la derivada de Lie a lo largo de solo uno de los P_i . Se utiliza P_3 por simplicidad.

5.3.2. Campo \mathcal{B}

1. Isotropía

Se asignarán funciones a las componentes de \mathcal{B} de forma que,

$$\mathcal{B}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho} = B_{\nu\mu\rho}(t, r, \theta, \phi). \quad (5.5)$$

Notar que el primer índice en la función $B(t, r, \theta, \phi)$ se corresponde con el índice de arriba de la componente de \mathcal{B} . Recordando la antisimetría en los índices de \mathcal{B} , vemos que $\mathcal{B}_t{}^t{}_r = B_{001}(t, r, \theta, \phi)$ y $\mathcal{B}_r{}^t{}_t = -B_{001}(t, r, \theta, \phi)$, es decir, no es necesario definir funciones para absolutamente cada una de las componentes de \mathcal{B} ya que estas están relacionadas por la antisimetría. La derivada de Lie con respecto a J_3 es,

$$\mathcal{L}_{J_3}\mathcal{B}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho} = \frac{\partial \mathcal{B}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial \phi}. \quad (5.6)$$

Para que esta derivada sea cero, ninguna componente debe depender de ϕ . Es decir

$$\mathcal{B}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho} = B_{\nu\mu\rho}(t, r, \theta). \quad (5.7)$$

La derivada de Lie a lo largo de J_1 , da ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.8)$$

para las funciones B_{001} y B_{101} . Esto quiere decir que ninguna de ellas depende de θ . Y ecuaciones del tipo,

$$F \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.9)$$

para las funciones B_{023} y B_{123} . La solución de estas ecuaciones dice que estas funciones son de la forma $B_{\mu\nu\rho}(t, r, \theta) \rightarrow B_{\mu\nu\rho}(t, r) \sin(\theta)$.

Las otras ecuaciones que da esta derivada no pueden ser resueltas directamente. Para obtener más información, se calculan las expresiones $\mathcal{L}_{J_2}\mathcal{B} \sin(\phi) - \mathcal{L}_{J_1}\mathcal{B} \cos(\phi)$. De esta resta de derivadas de Lie, se obtienen ecuaciones del tipo,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.10)$$

para las funciones B_{002} , B_{012} , B_{102} , B_{112} , B_{201} , B_{202} , B_{212} , B_{303} , B_{313} y B_{323} . Esto quiere decir, que todas estas funciones son de la forma $B_{\mu\nu\rho}(t, r, \theta) \rightarrow B_{\mu\nu\rho}(t, r)$.

También hay ecuaciones de la forma,

$$F \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.11)$$

para las funciones B_{003} , B_{013} , B_{103} , B_{113} , B_{203} , B_{213} y B_{223} . Por lo tanto, todas estas funciones son de la forma, $B_{\mu\nu\rho}(t, r, \theta) \rightarrow B_{\mu\nu\rho}(t, r) \sin(\theta)$. El tercer tipo de ecuaciones es,

$$F \cos(\theta) + \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.12)$$

para las funciones B_{301} , B_{302} y B_{312} . Estas funciones, son de la forma $B_{\mu\nu\rho}(t, r, \theta) \rightarrow B_{\mu\nu\rho}(t, r)/\sin(\theta)$.

Luego, se obtienen ecuaciones desde la expresión, $\mathcal{L}_{J_2}\mathcal{B}\sin(\phi) + \mathcal{L}_{J_1}\mathcal{B}\cos(\phi)$. El primer tipo de ecuaciones son ecuaciones triviales del tipo $F = 0$. Esto impone la condición de que las funciones B_{003} , B_{002} , B_{013} , B_{012} , B_{003} , B_{103} , B_{102} , B_{113} , B_{112} , B_{301} , B_{323} , B_{201} y B_{223} sean todas nulas. Finalmente hay dos ecuaciones del tipo $B_{\mu\nu\rho} + B_{\mu'\nu'\rho'} = 0$ que permite escribir funciones en términos de otras. En particular,

$$B_{202} = B_{303} \quad \text{y} \quad B_{213} = -B_{312} \quad (5.13)$$

De esta forma, el campo \mathcal{B} queda totalmente isotrópico.

2. Homogeneidad

Al calcular la derivada a lo largo de P_3 , se obtienen ecuaciones del tipo $F = 0$ para las funciones B_{001} , B_{023} , B_{203} y B_{212} . Ecuaciones del tipo,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(t, r) \rightarrow F(t), \quad (5.14)$$

para las funciones B_{101} y B_{202} . Una ecuación para $B_{213}(t, r)$,

$$\kappa r B_{213}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial B_{213}(t, r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow B_{213}(t, r) \rightarrow \frac{B_{213}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}.$$

Una ecuación para $B_{123}(t, r)$,

$$\begin{aligned} (3\kappa r^2 - 2)B_{123}(t, r) - (\kappa r^3 - r) \frac{\partial B_{123}(t, r)}{\partial r} &= 0 \\ \Rightarrow B_{123}(t, r) &\rightarrow B_{123}(t)r^2\sqrt{1 - \kappa r^2}. \end{aligned}$$

Y dos ecuaciones que relacionan funciones, disminuyendo la cantidad de funciones independientes,

$$B_{101}(t, r) = B_{202}(t, r) \quad \text{y} \quad r^2(\kappa r^2 - r)B_{213}(t, r) = B_{123}(t, r).$$

Donde esta última igualdad hace que la ecuación para $B_{123}(t, r)$ sea redundante. De esta forma, el campo \mathcal{B} queda totalmente isotrópico y homogéneo y sus componentes no nulas son,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t^r{}_r &= -\mathcal{B}_r^r{}_t = B_{101}(t), & \mathcal{B}_\theta^r{}_\phi &= -\mathcal{B}_\phi^r{}_\theta = \sqrt{1 - \kappa r^2}r^2 B_{123}(t) \sin(\theta), \\ \mathcal{B}_t^\theta{}_\theta &= -\mathcal{B}_\theta^\theta{}_t = B_{101}(t), & \mathcal{B}_\phi^\theta{}_r &= -\mathcal{B}_r^\theta{}_\phi = \frac{B_{123}(t) \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \\ \mathcal{B}_t^\phi{}_\phi &= -\mathcal{B}_\phi^\phi{}_t = B_{101}(t), & \mathcal{B}_r^\phi{}_\theta &= -\mathcal{B}_\theta^\phi{}_r = \frac{B_{123}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2} \sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Falta imponer otra condición, que es que la traza del campo \mathcal{B} sea cero, es decir, $\mathcal{B}_\mu{}^\nu{}_\nu = 0$. Esta condición obliga a la función $B_{101}(t)$ ser cero. Así las componentes no nulas de \mathcal{B} son simplemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\theta^r{}_\phi &= -\mathcal{B}_\phi^r{}_\theta = \sqrt{1 - \kappa r^2} r^2 B_{123}(t) \sin(\theta), \\ \mathcal{B}_\phi^\theta{}_r &= -\mathcal{B}_r^\theta{}_\phi = \frac{B_{123}(t) \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \\ \mathcal{B}_r^\phi{}_\theta &= -\mathcal{B}_\theta^\phi{}_r = \frac{B_{123}(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2} \sin(\theta)}.\end{aligned}$$

Esta única función $B_{123}(t)$ será renombrada como $\psi(t)$.

5.3.3. Campo \mathcal{A}

1. Isotropía

Se definen las funciones para las componentes de \mathcal{A} en la forma general, $\mathcal{A}_\mu = A_\mu(t, r, \theta, \phi)$. La derivada de Lie a lo largo de J_3 está dada por,

$$\mathcal{L}_{J_3} A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial \phi}, \quad (5.15)$$

por lo tanto, ninguna función depende de ϕ . La derivada de Lie a lo largo de J_1 da ecuaciones del tipo,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.16)$$

para las funciones A_0 y A_1 . Es decir, ninguna de estas dos funciones depende de θ . Para obtener más información, se obtienen ecuaciones desde $\mathcal{L}_{J_2} \mathcal{A} \sin(\phi) - \mathcal{L}_{J_1} \mathcal{A} \cos(\phi)$. Esta expresión da las ecuaciones,

$$\frac{\partial A_2}{\partial \theta} = 0, \quad (5.17)$$

$$A_3 \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{\partial A_3}{\partial \theta} = 0, \quad (5.18)$$

por lo tanto, $A_2 \rightarrow F_2(t, r)$ y $A_3 \rightarrow F_3(t, r) \sin(\theta)$. Con funciones de esta forma, el campo \mathcal{A} es isotrópico.

2. Homogeneidad

La derivada a lo largo de P_3 da las ecuaciones,

$$\frac{\partial F_0}{\partial r} = 0 \quad \text{y} \quad F_1 = 0, \quad (5.19)$$

por lo tanto, $F_0(t, r) \rightarrow F_0(t)$ y $F_1(t, r) \rightarrow 0$. Así, el campo \mathcal{A} queda homogéneo e isotrópico y su única componente no nula es,

$$A_t = F_0(t). \quad (5.20)$$

Esta función $F_0(t)$ será renombrada como $\eta(t)$.

5.3.4. Campo Γ

1. Isotropía

Se asignan funciones para las componentes de Γ de la forma general, $\Gamma_{\mu}^{\nu} = G_{\nu\mu\rho}(t, r, \theta, \phi)$, donde nuevamente, el primer índice de G se corresponde con el índice de arriba de Γ . De este modo y considerando la simetría, se puede notar no es necesario definir funciones para todas las componente ya que por ejemplo, $\Gamma_{\theta}^t = \Gamma_{\phi}^t = G_{203}(t, r, \theta, \phi)$. La derivada de Lie a lo largo de J_3 indica nuevamente que ninguna de las funciones debe depender de ϕ . En el caso de la derivada a lo largo de J_1 , las únicas ecuaciones de las que se puede extraer información directamente son del tipo

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0. \quad (5.21)$$

Esta ecuación la cumplen las funciones G_{000} , G_{001} , G_{011} , G_{100} , G_{101} y G_{111} . Por lo tanto, ninguna de estas funciones depende de θ .

Para obtener más información, se calculan las derivadas $(\mathcal{L}_{J_2}\Gamma) \sin(\phi) - (\mathcal{L}_{J_1}\Gamma) \cos(\phi)$. El primer tipo de ecuaciones es,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.22)$$

indica qué ecuaciones no dependen de θ . Las funciones que cumplen esta ecuación son G_{002} , G_{012} , G_{022} , G_{102} , G_{112} , G_{122} , G_{200} , G_{201} , G_{202} , G_{211} , G_{212} , G_{222} , G_{303} y G_{313} .

La siguiente ecuación que se puede resolver es,

$$F \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.23)$$

cuya solución son funciones de la forma $F(t, r, \theta) \rightarrow F(t, r) \sin(\theta)$. Las funciones que dependen de esta forma de la coordenada θ son G_{003} , G_{013} , G_{023} , G_{103} , G_{113} , G_{123} , G_{203} , G_{213} , G_{223} y G_{333} .

Ecuaciones del tipo,

$$2F \cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.24)$$

$$F(t, r, \theta) \rightarrow F(t, r) \sin^2(\theta), \quad (5.25)$$

son para las funciones G_{033} y G_{133} . También está la única ecuación,

$$2G_{233} \cos(\theta) - \left(\frac{\partial G_{233}}{\partial \theta} - 1 \right) \sin(\theta) = 0, \quad (5.26)$$

lo que indica que

$$G_{233}(t, r, \theta) \rightarrow G_{233}(t, r) \sin^2(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta).$$

El penúltimo tipo de ecuación que sale de esta derivada es,

$$F \cos(\theta) + \sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad (5.27)$$

$$F(t, r, \theta) \rightarrow F(t, r) / \sin(\theta). \quad (5.28)$$

Que la cumplen las funciones G_{300} , G_{301} , G_{302} , G_{311} , G_{312} y G_{322} . La última ecuación que se puede resolver es,

$$\sin^2(\theta) \frac{\partial G_{323}}{\partial \theta} + 1 = 0,$$

$$G_{323}(t, r, \theta) \rightarrow G_{323}(t, r) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

La siguiente derivada que se calcula es $(\mathcal{L}_{J_2}\Gamma) \sin(\phi) + (\mathcal{L}_{J_1}\Gamma) \cos(\phi)$. Las funciones que cumplen con la ecuación trivial $F = 0$ son G_{003} , G_{002} , G_{013} , G_{012} , G_{023} , G_{103} , G_{102} , G_{113} , G_{112} , G_{123} , G_{300} , G_{301} , G_{311} , G_{200} , G_{201} y G_{211} . Luego, están las ecuaciones que relacionan las funciones. El primer conjunto de ecuaciones es,

$$\begin{aligned} G_{022} &= G_{033}, & G_{203} &= -G_{302}, & G_{213} &= -G_{312}, \\ G_{122} &= G_{133}, & G_{202} &= G_{303}, & G_{212} &= G_{313}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones relacionan estas funciones haciendo que de las 12 que aparecen, solo 6 sean independientes. El segundo conjunto de ecuaciones es,

$$\begin{aligned} 2G_{223} &= -G_{322}, & 2G_{223} &= G_{333}, & G_{223} &= G_{333} - G_{322}, \\ G_{222} &= G_{233} + G_{323}, & G_{222} &= 2G_{323}, & G_{233} &= -2G_{323}. \end{aligned}$$

En este caso, las 6 funciones que aparecen forman un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, cuya solución es la solución trivial, es decir, todas estas funciones son nulas. Con funciones de esta forma, Γ es isotrópico.

2. Homogeneidad

Calculando la derivada de Lie a lo largo de P_3 , se tienen las ecuaciones del tipo $F = 0$ para las funciones G_{001} , G_{203} , G_{213} y G_{100} . Las funciones que son independientes de r , es decir, que cumplen con la ecuación,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (5.29)$$

son G_{000} , G_{101} y G_{202} . Se obtiene un sistema de ecuaciones lineales,

$$\kappa r^3 + (\kappa r^2 - 1)r^2 G_{111}(t, r) - (\kappa r^2 - 1)r^2 G_{212}(t, r) + G_{122}(t, r) = 0, \quad (5.30)$$

$$3\kappa r^2 + (\kappa r^2 - 1)r G_{111}(t, r) - 2(\kappa r^2 - 1)r G_{212}(t, r) - 2 = 0, \quad (5.31)$$

$$\kappa r^3 - 2(\kappa r^2 - 1)r^2 G_{212}(t, r) - r + G_{122}(t, r) = 0, \quad (5.32)$$

$$\kappa r^3 - r - G_{122}(t, r) = 0, \quad (5.33)$$

$$r G_{212}(t, r) - 1 = 0. \quad (5.34)$$

Este sistema tiene como solución,

$$G_{122}(t, r) = -(1 - \kappa r^2)r, \quad (5.35)$$

$$G_{212}(t, r) = \frac{1}{r}, \quad (5.36)$$

$$G_{111}(t, r) = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}. \quad (5.37)$$

Se tienen también las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$2\kappa r G_{011}(t, r) + (1 - \kappa r^2) \frac{\partial G_{011}(t, r)}{\partial r} = 0, \quad (5.38)$$

$$r \frac{\partial G_{022}(t, r)}{\partial r} - 2G_{022}(t, r) = 0, \quad (5.39)$$

Cuyas soluciones implican que,

$$\Rightarrow G_{011}(t, r) \rightarrow \frac{G_{011}(t)}{1 - \kappa r^2}, \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow G_{022}(t, r) \rightarrow G_{022}(t) r^2. \quad (5.41)$$

Y finalmente las relaciones,

$$G_{202}(t, r) = G_{101}(t, r) \quad y \quad G_{022}(t, r) = G_{011}(t, r)(1 - \kappa r^2)r^2. \quad (5.42)$$

Las cuales implican que,

$$G_{202}(t) \rightarrow G_{101}(t) \quad y \quad G_{022}(t, r) \rightarrow G_{011}(t)r^2 \quad (5.43)$$

De este modo, el campo Γ es isotrópico y homogéneo y sus componentes están dadas por,

$$\Gamma_{t^t}^t = G_{000}(t), \quad \Gamma_{i^j}^t = G_{011}(t)S_{ij}, \quad (5.44)$$

$$\Gamma_{t^j}^i = G_{101}(t)\delta_j^i, \quad \Gamma_{i^j}^k = \gamma_{i^j}^k, \quad (5.45)$$

donde,

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_{r^r}^r &= \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}, & \gamma_{r^\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, \\ \gamma_{\theta^r}^r &= \kappa r^3 - r, & \gamma_{\phi^\theta}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta, \\ \gamma_{\phi^r}^r &= (\kappa r^3 - r) \sin^2 \theta, & \gamma_{r^\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\ \gamma_{\theta^\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Las funciones arbitrarias se renombrarán como $G_{000}(t) \rightarrow f(t)$, $G_{011}(t) \rightarrow g(t)$ y $G_{101}(t) \rightarrow h(t)$. También se reparametrizará t de modo que la función $f(t)$ sea cero.

5.3.5. Ecuaciones

Utilizando este ansatz en las ecuaciones de campo, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left(B_3(2\kappa + gh + \dot{g}) + 2B_4(gh - \dot{g}) + 2D_6\eta g - 2F_3\psi^2\right)\psi = 0, \quad (5.47a)$$

$$\left(B_3\eta\psi - 2B_4\eta\psi - C_1(2h\psi - \dot{\psi})\right)g = 0, \quad (5.47b)$$

$$(B_3 + 2B_4)\eta g\psi + 2C_1(\kappa\psi + 4gh\psi - g\dot{\psi} - \psi\dot{g}) + 2\psi^3(-D_1 + 2D_2 - D_3) = 0, \quad (5.47c)$$

$$B_3(h\eta\psi - \dot{\psi}\eta - \psi\dot{\eta}) - 2B_4(-h\eta\psi - \dot{\psi}\eta - \psi\dot{\eta}) + C_1(4h^2\psi + 2\psi\dot{h} - \ddot{\psi}) + D_6\eta^2\psi = 0, \quad (5.47d)$$

$$2B_3\kappa\eta + (B_3 + 2B_4)gh\eta + (B_3 - 2B_4)\dot{g}\eta + C_1(2\kappa h + 4gh^2 + 2g\dot{h} - \ddot{g}) + 6h\psi^2(-D_1 + 2D_2 - D_3) + D_6\eta^2g - 6F_3\eta\psi^2 = 0. \quad (5.47e)$$

Antes de comenzar a analizar las ecuaciones, notemos que con este ansatz,

$$\text{Ricc} = (-3h^2 - 3\dot{h})dt \otimes dt + (gh + 2\kappa\dot{g})\left(\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)d\varphi \otimes d\varphi)\right), \quad (5.48)$$

$$\text{Bmet} = \frac{\psi^2}{2}\left(-\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)d\varphi \otimes d\varphi)\right), \quad (5.49)$$

$$\text{Popl} = \frac{\eta^2}{8}dt \otimes dt + \frac{\psi^2}{2}\left(-\frac{dr \otimes dr}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)d\varphi \otimes d\varphi)\right). \quad (5.50)$$

Por lo tanto, en este modelo $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ no se puede interpretar como una métrica emergente. Y para que Popl pueda ser una métrica emergente, necesariamente η debe ser distinto de cero, es decir, el campo \mathcal{A} no debe anularse.

5.3.6. Soluciones

Notemos que este es un sistema de 5 ecuaciones para las funciones $\{g, h, \eta, \psi\}$. La estrategia para encontrar soluciones comienza notando que las primeras dos ecuaciones están compuestas por la multiplicación de dos factores igualada a cero, esto genera cuatro posibles casos,

1. Caso I

Las primeras dos ecuaciones 5.47a y 5.47b se anulan debido a las siguientes condiciones

$$g = 0 \quad \text{y} \quad \psi = 0. \quad (5.51)$$

Para este primer caso, al hacer cero g y ψ , se cumplen todas las ecuaciones trivialmente menos la última 5.47e, que queda de la forma,

$$2B_3\kappa + 2\kappa h C_1 = 0. \quad (5.52)$$

De aquí aparecen dos tipos de soluciones, la primera se da cuando $\kappa = 0$. En tal caso,

$$g = 0, \quad \psi = 0, \quad h = \text{arbitraria}, \quad \eta = \text{arbitraria}. \quad (5.53)$$

El segundo tipo se da cuando $\eta = \frac{-C_1}{B_3}h$. En este caso, las soluciones están dadas por,

$$g = 0, \quad \psi = 0, \quad \eta = \frac{-C_1}{B_3}h, \quad h = \text{arbitraria}. \quad (5.54)$$

Mientras que κ puede tomar cualquier valor $\kappa = -1, 0, 1$.

2. Caso II

Para que las primeras dos ecuaciones se cumplan, se establecen las condiciones,

$$\psi = 0 \quad \text{y} \quad (B_3 - 2B_4)\eta\psi - 2C_1h\psi + C_1\dot{\psi} = 0 \quad (5.55)$$

En este caso también se cumplen trivialmente las primeras cuatro ecuaciones 5.47a-5.47d, esto se debe a que las primeras cuatro tienen un factor de ψ o de $\dot{\psi}$. La quinta ecuación 5.47e queda de la forma

$$2B_3\kappa\eta + (B_3 + 2B_4)gh\eta + (B_3 - 2B_4)\dot{g}\eta + C_1(2\kappa h + 4gh^2 + 2g\dot{h} - \ddot{g}) + D_6\eta^2g = 0. \quad (5.56)$$

Resulta entonces una ecuación y tres incógnitas g , h y η , por lo que para resolver el sistema se deben considerar dos de las tres funciones como funciones paramétricas y resolver para la función restante.

Cabe notar que si hacemos $\eta = 0$ (esto es equivalente a analizar el sector sin torsión ya que $\psi = 0$), los únicos términos que quedan son aquellos con C_1 . Este término se obtiene también de las ecuaciones de campo de relatividad general en el vacío. Para encontrar soluciones en este caso se pueden exigir condiciones sobre el tensor de Ricci [31].

3. Caso III

Las condiciones en este caso están dadas por,

$$g = 0, \quad (5.57)$$

$$2\kappa B_3 + (B_3 + 2B_4)gh + (B_3 - 2B_4)\dot{g} + 2D_6\eta g - 2F_3\psi^3 = 0.$$

Para esta situación, la condición $g = 0$ se puede aplicar a la segunda condición, de la cual se obtiene que,

$$\psi^2 = \kappa \frac{B_3}{F_3}. \quad (5.58)$$

Es decir, la función ψ es una constante y por lo tanto $\dot{\psi}$ es cero. Aplicando estas condiciones al resto de las ecuaciones 5.47c - 5.47e y asumiendo que $\kappa \neq 0$ para que ψ no sea nula, se obtiene la solución,

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{-1}{\alpha t + C_h}, & g &= 0, \\
 \eta &= \frac{C_1}{B_3} \cdot \frac{1}{\alpha t + C_h}, & \psi &= \pm \sqrt{\frac{\kappa B_3}{F_3}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

Donde C_h es una constante de integración, $\kappa \neq 0$ y

$$\alpha = \frac{2B_4C_1B_3 - D_6C_1^2 - 3C_1B_3^2}{3C_1B_3^2 - 2B_4C_1B_3}.
 \tag{5.60}$$

Además, en esta solución hay una restricción sobre el espacio de parámetros,

$$C_1F_3 = B_3(D_1 - 2D_2 + D_3).
 \tag{5.61}$$

4. Caso IV

Las condiciones que se cumplen en este caso son las más complejas,

$$\begin{aligned}
 (B_3 - 2B_4)\eta\psi - 2C_1h\psi + C_1\dot{\psi} &= 0, \\
 2\kappa B_3 + (B_3 + 2B_4)gh + (B_3 - 2B_4)\dot{g} + 2D_6\eta g - 2F_3\psi^3 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.62}$$

Utilizando estas condiciones, el sistema de ecuaciones toma la siguiente forma,

$$2\kappa B_3 + (B_3 + 2B_4)gh + (B_3 - 2B_4)\dot{g} + 2D_6\eta g - 2F_3\psi^2 = 0,
 \tag{5.63a}$$

$$B_3\eta\psi - 2B_4\eta\psi - C_1(2h\psi - \dot{\psi}) = 0,
 \tag{5.63b}$$

$$(B_3 + 2B_4)\eta g\psi + 2C_1(\kappa\psi + 4gh\psi - g\dot{\psi} - \psi\dot{g}) + 2\psi^3D = 0,
 \tag{5.63c}$$

$$B_3(h\eta\psi - \dot{\psi}\eta - \psi\dot{\eta}) - 2B_4(-h\eta\psi - \dot{\psi}\eta - \psi\dot{\eta}) + C_1(4h^2\psi + 2\psi\dot{h} - \ddot{\psi}) - D_6\eta^2\psi = 0,
 \tag{5.63d}$$

$$C_1(2\kappa h + 4gh^2 + 2g\dot{h} - \ddot{g}) + 6h\psi^2D - D_6\eta^2g - 4F_3\eta\psi^2 = 0,
 \tag{5.63e}$$

donde $D = -D_1 + 2D_2 - D_3$.

Las condiciones en este caso, no ayudan mucho a simplificar el sistema de ecuaciones. Una posible estrategia es imponer condiciones sobre las constantes. Por ejemplo, si consideramos $B_3 = 2B_4$, el sistema de ecuaciones queda de la forma,

$$2\kappa B_3 + 2B_3gh + 2D_6\eta g - 2F_3\psi^2 = 0,
 \tag{5.64a}$$

$$C_1(2h\psi - \dot{\psi}) = 0,
 \tag{5.64b}$$

$$2B_3\eta g\psi + 2C_1(\kappa\psi + 4gh\psi - g\dot{\psi} - \psi\dot{g}) - 2\psi^3D = 0,
 \tag{5.64c}$$

$$2B_3h\eta\psi + C_1(4h^2\psi + 2\psi\dot{h} - \ddot{\psi}) + D_6\eta^2\psi = 0,
 \tag{5.64d}$$

$$C_1(2\kappa h + 4gh^2 + 2g\dot{h} - \ddot{g}) + 6h\psi^2D - D_6\eta^2g - 4F_3\eta\psi^2 = 0.
 \tag{5.64e}$$

De la ecuación (5.64b), se puede despejar h en función de ψ y luego reemplazar ese valor en el resto de las ecuaciones. El resultado de este proceso es que las ecuaciones se reducen a,

$$2\kappa B_3 + B_3 g \frac{\dot{\psi}}{\psi} + 2D_6 \eta g - 2F_3 \psi^2 = 0, \quad (5.65a)$$

$$2B_3 \eta g \psi + 2C_1 (\kappa \psi + g \dot{\psi} - \psi \dot{g}) + 2\psi^3 D = 0, \quad (5.65b)$$

$$\eta (B_3 \dot{\psi} + D_6 \eta^2 \psi) = 0, \quad (5.65c)$$

$$C_1 \left(\kappa \frac{\dot{\psi}}{\psi} + g \frac{\ddot{\psi}}{\psi} - \ddot{g} \right) + 3\dot{\psi} \psi D - D_6 \eta^2 g - 4F_3 \eta \psi^2 = 0. \quad (5.65d)$$

Se desprenden dos casos de la ecuación (5.65c), $\eta = 0$ y $\eta = \pm \sqrt{\frac{-B_3 \dot{\psi}}{D_6 \psi}}$. Al reemplazar alguna de estas condiciones en las otras ecuaciones para eliminar la variable η , queda un sistema de tres ecuaciones para las incógnitas g y ψ . De todos modos las ecuaciones no se pueden resolver, pero se puede tomar un ansatz. Viendo el caso $\eta = 0$ y suponiendo que la función ψ es constante, se tiene que,

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{\kappa B_3}{2F_3}} \quad \text{y} \quad g = C_{g,1} t + C_{g,0}, \quad (5.66)$$

donde $C_{g,0}$ es una constante de integración y $C_{g,1}$ también lo es pero queda determinada por la tercera ecuación (son dos incógnitas y tres ecuaciones) y tiene el valor de,

$$C_{g,1} = \kappa \frac{2C_1 F_3 - B_3 D}{2C_1 F_3}. \quad (5.67)$$

Por lo tanto, para que en esta solución g sea variable, κ debe ser distinto de cero.

Conclusión

En esta tesis analizamos las ecuaciones y obtuvimos soluciones para el caso tres dimensional y cuatro dimensional. El modelo se construyó con una conexión general $\hat{\Gamma}$ que fue descompuesta en sus componentes irreducibles Γ correspondiente a la parte simétrica, \mathcal{B} correspondiente a la torsión sin traza y \mathcal{A} que contiene la información de la traza de la torsión. Estos campos fueron utilizados para construir la acción del modelo de modo que los términos sean invariantes bajo difeomorfismos. El hecho de que el modelo no cuente con una métrica, hace que no podamos subir ni bajar índices. Esto restringe la cantidad de términos que pueden entrar en la acción. Utilizando un análisis de la estructura de índices, se pueden encontrar todos los términos que cumplen los requisitos para entrar en la acción.

Se obtuvieron las ecuaciones de campo utilizando el formalismo de Kijowski para escribir las ecuaciones de Euler–Lagrange de la acción de una forma covariante. Se obtuvieron las ecuaciones para ambos modelos, en $3D$ y en $4D$ para componentes de la acción de forma general (sin la imposición de ninguna simetría).

Estas ecuaciones difícilmente pueden ser resueltas en su forma general, por lo que analizamos el contexto cosmológico, en donde exigimos que la conexión fuese isotrópica y homogénea. Con esta imposición, la conexión en el modelo tres dimensional queda determinada por seis funciones f , g , h , ξ , ψ y η y las ecuaciones de campo corresponden a ecuaciones diferenciales para estas funciones. En el caso de cuatro dimensiones la conexión queda determinada por cuatro funciones g , h , ψ y η . Si bien uno esperaría que haya más funciones por determinar en cuatro dimensiones, esto no es así ya que en cuatro dimensiones hay más vectores de Killing, es decir, es más restrictivo.

Con la conexión, se pueden construir tensores simétricos. Si estos tensores resultaban ser no degenerados, podían ser interpretados como métricas emergentes. Estas posibles métricas son el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, la métrica de Poplawski $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ y la contracción de la parte sin traza de la torsión $\mathcal{B}_{\mu\nu}$.

Las soluciones del modelo en tres dimensiones se pueden organizar de acuerdo al tipo de métrica que se pueden formar. El tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ (4.89) depende de las funciones f , g y h . Este tensor no se puede usar como métrica cuando ambos \dot{g} y κ son cero o cuando la combinación $f^2 - h^2 - \dot{h}$ se hace cero.

Las otras dos métricas vienen de la torsión. La métrica $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ se anula totalmente cuando $\psi = 0$, ya que es ψ la función que determina las componentes $\mathcal{B}_{\mu}^{\nu\lambda}$. La métrica $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ depende adicionalmente de η ya que considera la torsión total.

Resulta que hay tres tipos de soluciones. Soluciones sin métrica emergente, soluciones con métrica $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, y soluciones con los tres tipos de métrica emergente.

Junto este tipo de soluciones, hay un conjunto de soluciones determinadas por una ecuación de Riccati (4.138) para la función h , que depende paramétricamente de f y ψ . Con un cambio

de variable, se puede reescribir esta ecuación como una ecuación tipo Schrödinger (4.140).

Para el caso en cuatro dimensiones, a pesar de tener menos funciones a determinar, es más difícil generar soluciones. De todos modos, de la estructura de las ecuaciones, se desprenden cuatro casos. El caso con $g = \psi = 0$ y el caso con $g = 0$ y $\psi^2 = \kappa \frac{B_3}{F_3}$, son los únicos que tiene soluciones cerradas.

En el caso II con $\psi = 0$, la segunda condición es redundante y el sistema de ecuaciones se reduce a una sola ecuación con tres incógnitas, es decir, hay que considerar dos funciones paramétricas.

Para el caso IV, las ecuaciones no se reducen considerablemente y para encontrar soluciones hay que recurrir a otros métodos. Un posible método es poner restricciones sobre el espacio de parámetros. En el ejemplo, la restricción $B_3 = 2B_4$ y la suposición de que ψ es constante, permite resolver el sistema y encontrar una solución cerrada. De esto podemos desprender que hay un espacio de soluciones que se pueden explorar, considerando un ansatz para la función ψ y analizar si el sistema de ecuaciones es consistente.

Otra posibilidad no explorada aquí es hacer un tratamiento similar a [31]. Exigir que las métricas emergentes sean covariantemente constante, solo que en este contexto, tenemos un modelo cosmológico general, que permite la existencia de componentes no nulas de la torsión.

De las soluciones encontradas, las que tiene métricas emergentes permite avanzar a investigar las distintas propiedades del modelo ya que con una métrica, se pueden definir vectores tipo tiempo, tipo espacio y tipo luz, se pueden subir y bajar índices. Esto último abre la posibilidad de ingresar materia al modelo mediante el acoplamiento de un campo escalar ϕ .

Ecuaciones de Campo en 4 Dimensiones

En este apéndice, se presentarán las ecuaciones de campo en 4 dimensiones. Debido a la extensión de estas ecuaciones, se han separado las contribuciones por componente. Las ecuaciones se obtienen utilizando 3.18 para Γ , 3.20 para \mathcal{B} y 3.21 para \mathcal{A} .

A.1. Ecuaciones de Campo Γ

$$B_1: \nabla_\mu \left(2\delta_\lambda^{[\mu} \mathcal{B}_\alpha^{\nu]} \mathcal{B}_\gamma^\rho \tau + 2\delta_\lambda^{[\mu} \mathcal{B}_\alpha^{\rho]} \mathcal{B}_\gamma^\nu \tau \right) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$B_2: \nabla_\mu \left(4\mathcal{B}_\gamma^\sigma \delta \mathcal{B}_\sigma^{(\rho} \lambda) \varepsilon^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1b})$$

$$B_3: \nabla_\mu \left(2\delta_\lambda^{[\mu} \mathcal{B}_\beta^{\nu]} \gamma \mathcal{A}_\delta \varepsilon^{\rho\beta\gamma\delta} + 2\delta_\lambda^{[\mu} \mathcal{B}_\beta^{\rho]} \gamma \mathcal{A}_\delta \varepsilon^{\nu\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1c})$$

$$B_4: \nabla_\mu \left(-4\mathcal{B}_\gamma^{(\rho} \delta \mathcal{A}_\lambda) \varepsilon^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1d})$$

$$B_5: \nabla_\mu \left(-4\mathcal{B}_\gamma^\sigma \delta \mathcal{A}_\sigma \delta_\lambda^{(\rho)} \varepsilon^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1e})$$

$$C_1: \nabla_\mu \left(2\nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma^\rho \delta \delta_\lambda^{[\mu} \varepsilon^{\nu]\beta\gamma\delta} + 2\nabla_\beta \mathcal{B}_\gamma^\nu \delta \delta_\lambda^{[\mu} \varepsilon^{\rho]\beta\gamma\delta} \right) + 2\mathcal{R}_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\lambda \mathcal{B}_\gamma^{(\rho} \delta \varepsilon^{\nu)\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.1f})$$

$$C_2: \nabla_\mu \left(-4\nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma^\sigma \delta \delta_\lambda^{(\rho} \varepsilon^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) + 2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\sigma \left(2\mathcal{B}_\lambda^{(\nu} \delta \varepsilon^{\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_\lambda^{(\nu} \mathcal{B}_\gamma^{\rho)} \delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1g})$$

$$D_1: 2\mathcal{B}_\tau^\sigma \lambda \mathcal{B}_\sigma^\tau \alpha \mathcal{B}_\gamma^{(\rho} \delta \varepsilon^{\nu)\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.1h})$$

$$D_2: 2\mathcal{B}_\alpha^\sigma \beta \mathcal{B}_\sigma^{(\nu} \tau \left(2\mathcal{B}_\lambda^\tau \delta \varepsilon^{|\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_\lambda^\tau \mathcal{B}_\gamma^{|\rho)} \delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1i})$$

$$D_3: 2\mathcal{B}_\alpha^\sigma \tau \mathcal{B}_\beta^{(\nu} \gamma \left(\delta_\sigma^{(\rho)} \mathcal{B}_\lambda^\tau \delta + \delta_\delta^{(\rho)} \mathcal{B}_\sigma^\tau \lambda - \delta_\lambda^\tau \mathcal{B}_\sigma^{|\rho)} \delta \right) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.1j})$$

$$D_4: 2\mathcal{B}_\alpha^{(\nu} \beta \mathcal{B}_\gamma^{\rho)} \delta \mathcal{A}_\lambda \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.1k})$$

$$D_5: 2\mathcal{B}_\alpha^{(\nu} \beta \mathcal{A}_\sigma \left(2\mathcal{B}_\lambda^\sigma \delta \varepsilon^{|\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_\lambda^\sigma \mathcal{B}_\gamma^{|\rho)} \delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1l})$$

$$D_6: -2\mathcal{B}_\alpha^{(\nu} \beta \mathcal{A}_\gamma \mathcal{A}_\lambda \varepsilon^{\rho)\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (\text{A.1m})$$

$$E_1: 4\nabla_\sigma \mathcal{B}_\alpha^\sigma \beta \left(2\mathcal{B}_\lambda^{(\nu} \delta \varepsilon^{\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_\lambda^{(\nu} \mathcal{B}_\gamma^{\rho)} \delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1n})$$

$$E_2: 2\mathcal{F}_{\alpha\beta} \left(\mathcal{B}_\lambda^{(\nu} \delta \varepsilon^{\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_\lambda^{(\nu} \mathcal{B}_\gamma^{\rho)} \delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{A.1ñ})$$

A.2. Ecuaciones para \mathcal{B}

$$B_1: -4\mathcal{R}_{\mu(\sigma}{}^\mu{}_{\lambda)}\mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\nu\rho\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\mu\tau}{}^\mu{}_\sigma\mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\mu\sigma}{}^\mu{}_\tau\mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$B_2: -2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\sigma\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\lambda\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - 2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{[\nu}{}_{\lambda}\mathcal{B}_\gamma{}^{\rho]}\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\sigma\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\tau\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} \\ - \frac{2}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\tau{}_\tau\mathcal{B}_\gamma{}^{[\nu}\delta_\lambda^{\rho]}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{[\nu}{}_\tau\delta_\lambda^{\rho]}\mathcal{B}_\gamma{}^\tau{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2b})$$

$$B_3: -2\mathcal{R}_{\mu\lambda}{}^\mu{}_\alpha\mathcal{A}_\beta\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\mu\tau}{}^\mu{}_\alpha\mathcal{A}_\beta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2c})$$

$$B_4: -2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\lambda\mathcal{A}_\sigma\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\tau\mathcal{A}_\sigma\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2d})$$

$$B_5: -2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\tau{}_\tau\mathcal{A}_\lambda\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\tau{}_\tau\mathcal{A}_\delta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\delta\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2e})$$

$$C_1: \nabla_\mu \left(-2\mathcal{R}_{\sigma\alpha}{}^\sigma{}_\lambda\varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} + \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\sigma\alpha}{}^\sigma{}_\tau\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\mu\tau\alpha} \right) = 0 \quad (\text{A.2f})$$

$$C_2: \nabla_\mu \left(2\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\sigma\delta_\lambda^\mu\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + \frac{4}{3}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\sigma\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\mu\alpha\beta} \right) = 0 \quad (\text{A.2g})$$

$$D_1: \nabla_\mu \left(-2\mathcal{B}_\sigma{}^\theta{}_\lambda\mathcal{B}_\theta{}^\sigma{}_\alpha \right) \varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} - 2\mathcal{B}_\lambda{}^{[\nu}{}_\alpha\nabla_\beta\mathcal{B}_\gamma{}^{\rho]}\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2\mathcal{B}_\lambda{}^{[\nu}{}_\sigma\nabla_\beta\mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{|\rho|\beta\gamma\delta} \\ - \frac{2}{3}\delta_\lambda^{[\nu}\mathcal{B}_\tau{}^{\rho]}\alpha\nabla_\beta\mathcal{B}_\gamma{}^\tau{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3}\mathcal{B}_\tau{}^{[\nu}\sigma\delta_\lambda^{\rho]}\nabla_\beta\mathcal{B}_\gamma{}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\tau\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2h})$$

$$D_2: \nabla_\mu \left(2\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\mathcal{B}_\sigma{}^\mu{}_\lambda\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + \frac{4}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\mathcal{B}_\sigma{}^\mu{}_\tau\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} \right) \\ - 2\mathcal{B}_\lambda{}^\mu{}_\sigma\nabla_\mu\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - 2\mathcal{B}_\alpha{}^{[\nu}{}_\beta\nabla_\lambda\mathcal{B}_\gamma{}^{\rho]}\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{B}_\tau{}^\mu{}_\sigma\nabla_\mu\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} \\ - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\tau{}_\beta\nabla_\tau\mathcal{B}_\gamma{}^{[\nu}\delta_\lambda^{\rho]}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^{[\nu}{}_\beta\delta_\lambda^{\rho]}\nabla_\tau\mathcal{B}_\gamma{}^\tau{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2i})$$

$$D_3: \nabla_\mu \left(-2\mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma\mathcal{B}_\alpha{}^{[\nu}\lambda\varepsilon^{\rho]\alpha\beta\gamma} - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma\mathcal{B}_\alpha{}^{[\nu}\tau\delta_\lambda^{\rho]}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} \right) - 2\mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma\nabla_\mu\mathcal{B}_\lambda{}^{[\rho}\delta\varepsilon^{\nu]\beta\gamma\delta} \\ - 2\mathcal{B}_\gamma{}^\mu{}_\sigma\nabla_\lambda\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\nu\rho\gamma\delta} - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\beta{}^\mu{}_\gamma\nabla_\mu\mathcal{B}_\tau{}^{[\nu}\delta_\lambda^{\rho]}\varepsilon^{\tau\beta\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{B}_\gamma{}^\mu{}_\sigma\nabla_\tau\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\delta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2j})$$

$$D_4: -4\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\nabla_{(\lambda}\mathcal{A}_{\sigma)}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{4}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\nabla_\tau\mathcal{A}_\sigma\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} - \frac{4}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\nabla_\sigma\mathcal{A}_\tau\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2k})$$

$$D_5: \nabla_\mu \left(2\mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta\mathcal{A}_\lambda\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + \frac{4}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta\mathcal{A}_\tau\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} \right) - 2\nabla_\lambda\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\mathcal{A}_\sigma\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{4}{3}\nabla_\tau\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\mathcal{A}_\sigma\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2l})$$

$$D_6: -2\mathcal{A}_\gamma\nabla_\lambda\mathcal{A}_\delta\varepsilon^{\nu\rho\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{A}_\gamma\nabla_\tau\mathcal{A}_\delta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2m})$$

$$D_7: -\mathcal{A}_\lambda\mathcal{F}_{\gamma\delta}\varepsilon^{\nu\rho\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{A}_\tau\mathcal{F}_{\gamma\delta}\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\tau\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2n})$$

$$E_1: \nabla_\mu \left(4\delta_\lambda^\mu\nabla_\sigma\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + \frac{8}{3}\nabla_\sigma\mathcal{B}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\mu\alpha\beta} \right) = 0 \quad (\text{A.2ñ})$$

$$E_2: \nabla_\mu \left(2\delta_\lambda^\mu\mathcal{F}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + \frac{4}{3}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\mu\alpha\beta} \right) = 0 \quad (\text{A.2o})$$

$$F_1: -4\mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\tau\mathcal{B}_\lambda{}^\tau{}_\sigma\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - 4\mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta\mathcal{B}_\gamma{}^{[\nu}\delta\mathcal{B}_\mu{}^{\rho]}\lambda\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{8}{3}\mathcal{B}_\alpha{}^\mu{}_\beta\mathcal{B}_\mu{}^\sigma{}_\tau\mathcal{B}_\kappa{}^\tau{}_\sigma\delta_\lambda^{[\nu}\varepsilon^{\rho]\kappa\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2p})$$

$$\begin{aligned}
F_2: & -2\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\lambda^\mu \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} + 2\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\lambda^\mu \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \\
& - 2\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\mu^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\alpha\beta\gamma} - 2\mathcal{B}_\alpha^{[\nu} \mathcal{B}_\beta^{\rho]} \mathcal{B}_\gamma^\sigma \mathcal{B}_\delta^\lambda \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{4}{3}\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\kappa^\mu \delta_\lambda^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\kappa\alpha\beta} \\
& - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\mu^{[\nu} \delta_\lambda^{\rho]} \varepsilon^{\alpha\beta\tau\gamma} + \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\mu^\tau \delta_\lambda^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\alpha\beta\gamma} \\
& - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\mu^\tau \delta_\lambda^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\alpha\beta\gamma} - \frac{2}{3}\mathcal{B}_\alpha^\tau \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{B}_\mu^{[\nu} \delta_\lambda^{\rho]} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0
\end{aligned} \tag{A.2q}$$

$$\begin{aligned}
F_3: & -2\mathcal{B}_\lambda^{[\nu} \mathcal{B}_\beta^{\rho]} \mathcal{A}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2\mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{A}_\gamma \mathcal{B}_\lambda^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\alpha\beta\gamma} - 2\mathcal{B}_\sigma^\mu \mathcal{B}_\mu^\sigma \mathcal{A}_\beta \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \\
& + \frac{2}{3}\mathcal{B}_\beta^\tau \mathcal{A}_\delta \mathcal{B}_\tau^{[\nu} \delta_\lambda^{\rho]} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3}\mathcal{B}_\tau^{[\nu} \delta_\lambda^{\rho]} \mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{A}_\gamma \varepsilon^{\tau\alpha\beta\gamma} = 0
\end{aligned} \tag{A.2r}$$

$$F_4: -4\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\lambda \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - \frac{8}{3}\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\sigma \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\tau \delta_\lambda^{[\nu} \varepsilon^{\rho]\tau\alpha\beta} = 0 \tag{A.2s}$$

A.3. Ecuaciones para A

$$B_3: -\mathcal{R}_{\sigma\tau}{}^\sigma{}_\alpha \mathcal{B}_\beta^\tau \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0, \tag{A.3a}$$

$$B_4: -\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\nu{}_\sigma \mathcal{B}_\gamma^\sigma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0, \tag{A.3b}$$

$$B_5: -\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \mathcal{B}_\gamma^\nu \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0, \tag{A.3c}$$

$$D_4: \nabla_\mu [\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\nu \mathcal{B}_\gamma^\tau] \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0, \tag{A.3d}$$

$$D_5: -\mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{B}_\beta^\nu \nabla_\sigma \mathcal{B}_\gamma^\tau \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0, \tag{A.3e}$$

$$D_6: \nabla_\mu [\mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\nu \mathcal{A}_\gamma] \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} + \mathcal{B}_\alpha^\mu \mathcal{B}_\beta^\nu \nabla_\mu \mathcal{A}_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0, \tag{A.3f}$$

$$D_7: \nabla_\mu [\mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{B}_\beta^\nu \mathcal{A}_\sigma] \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \mathcal{B}_\alpha^\nu \mathcal{F}_{\gamma\tau} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0, \tag{A.3g}$$

$$E_2: \nabla_\mu [\nabla_\sigma \mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{B}_\beta^\nu] \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \tag{A.3h}$$

$$F_3: -\mathcal{B}_\sigma^\tau \mathcal{B}_\tau^\sigma \mathcal{B}_\beta^\lambda \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0, \tag{A.3i}$$

$$F_4: -2\mathcal{B}_\alpha^\sigma \mathcal{B}_\beta^\nu \mathcal{B}_\gamma^\tau \mathcal{A}_\sigma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau} = 0. \tag{A.3j}$$

Bibliografía

- [1] A. Einstein, “Grundgedanken der allgemeinen relativitätstheorie und anwendung dieser theorie in der astronomie,” *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* **315** (1915) 778–786.
- [2] A. Einstein, “The field equations of gravitation,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1915** (1915) 844–847.
- [3] A. Einstein, “Sitzungsber,” *Preuss. Akad. Wiss* **23** (1925) .
- [4] A. Einstein, *Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie*, vol. 49. JA Barth, 1922.
- [5] C. Will, “Living rev. rel. 17, 4 (2014),” *arXiv preprint arXiv:1403.7377* **24** .
- [6] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory,” *Physical Review* **160** no. 5, (1967) 1113.
- [7] A. Ashtekar, “New hamiltonian formulation of general relativity,” *Physical Review D* **36** no. 6, (1987) 1587.
- [8] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity,” *Physical review letters* **57** no. 18, (1986) 2244.
- [9] G. t’Hooft, “Martin veltman one-loop divergences in the theory of gravitation *Annales Poincaré Phys.*,” 1974.
- [10] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, “Nonrenormalizability of the quantized dirac-einstein system,” *Physical Review D* **10** no. 2, (1974) 411.
- [11] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, “One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields,” *Physical Review D* **10** no. 2, (1974) 401.
- [12] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory,” *Physical Review* **162** no. 5, (1967) 1195.
- [13] É. Cartan, “Sur une généralisation de la notion de courbure de riemann et les espaces à torsion,” *Comptes Rendus, Ac. Sc. Paris* **174** (1922) 593–595.
- [14] É. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie),” in *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*, vol. 40, pp. 325–412. 1923.

- [15] D. Lovelock, “The einstein tensor and its generalizations,” *Journal of Mathematical Physics* **12** no. 3, (1971) 498–501.
- [16] A. Mardones and J. Zanelli, “Lovelock-cartan theory of gravity,” *Classical and Quantum Gravity* **8** no. 8, (1991) 1545.
- [17] A. Eddington, “1923the mathematical theory of relativity,” *Cambridge Univer-sityPress* **223** .
- [18] O. Castillo-Felisola and A. Skirzewski, “A polynomial model of purely affine gravity,” *Revista mexicana de física* **61** no. 6, (2015) 421–427.
- [19] O. Castillo-Felisola and A. Skirzewski, “Einstein’s gravity from a polynomial affine model,” *Classical and Quantum Gravity* **35** no. 5, (2018) 055012.
- [20] O. Castillo-Felisola, “Beyond einstein: a polynomial affine model of gravity,” *Gravity: Geoscience Applications, Industrial Technology and Quantum Aspect* (2018) 183.
- [21] J. Kijowski, “On a new variational principle in general relativity and the energy of the gravitational field,” *General Relativity and Gravitation* **9** (1978) 857–877.
- [22] C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, and Y. Choquet-Bruhat, *Analysis, manifolds and physics*. North-holland, 1978.
- [23] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor analysis on manifolds*. Courier Corporation, 2012.
- [24] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*. Courier Dover Publications, 2020.
- [25] J. L. Synge and A. Schild, *Tensor calculus*, vol. 5. Courier Corporation, 1978.
- [26] D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, differential forms, and variational principles*. Courier Corporation, 1989.
- [27] D. Iosifidis, “Metric-affine gravity and cosmology/aspects of torsion and non-metricity in gravity theories,” *arXiv preprint arXiv:1902.09643* (2019) .
- [28] T.-P. Cheng, *Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction*, vol. 11. Oxford University Press, 2009.
- [29] K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and C. W. Misner, *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [30] N. Popławski, “Affine theory of gravitation,” *General Relativity and Gravitation* **46** (2014) 1–11.
- [31] O. Castillo-Felisola, J. Perdiguero, O. Orellana, and A. R. Zerwekh, “Emergent metric and geodesic analysis in cosmological solutions of (torsion-free) polynomial affine gravity,” *Classical and Quantum Gravity* **37** no. 7, (2020) 075013.