

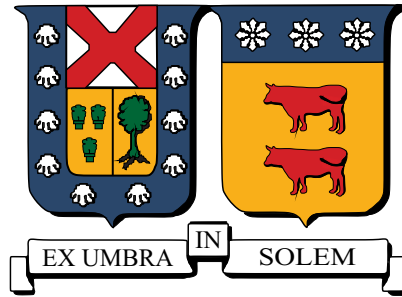
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

DESARROLLO DE UN CÓDIGO DE ELEMENTOS
FINITOS PARA MODELAR LA RESPUESTA SÍSMICA DE
SUELOS

FELIPE ANDRÉS KUNCAR GARCÍA

Ingeniero Civil
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Diciembre del 2016



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**DESARROLLO DE UN CÓDIGO DE ELEMENTOS
FINITOS PARA MODELAR LA RESPUESTA SÍSMICA DE
SUELOS**

Memoria de Título y Tesis de Grado presentada por
FELIPE ANDRÉS KUNCAR GARCÍA

Como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil
y al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Profesor Guía
Dra. Vivian Clarisa Aranda Núñez

Diciembre del 2016

TÍTULO DE LA TESIS

DESARROLLO DE UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS PARA MODELAR LA RESPUESTA SÍSMICA DE SUELOS

AUTOR

FELIPE ANDRÉS KUNCAR GARCÍA

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Vivian Aranda Núñez

Matías Silva Illanes

Gonzalo Suazo Fuentealba

Oscar Taiba Miranda

Valparaíso, Chile, Diciembre del 2016.

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer infinitamente a mis padres, Silvia y Héctor, por su cariño y apoyo incondicional durante el desarrollo de esta tesis. Las palabras no son suficientes para dar cuenta de la importancia que tuvieron para mí en este periodo. A ellos va dedicado este trabajo, que representa la síntesis de todo un proceso educativo en el que fueron fundamentales.

Quiero agradecer a mi compañera, Loreto, quien estuvo siempre a mi lado durante todo el proceso de la tesis, especialmente en las horas más difíciles. Sin sus innumerables consejos y su disposición ilimitada para escucharme, este trabajo no hubiese sido posible. Esta tesis la construimos juntos.

Agradezco a la profesora Vivian Aranda y al profesor Oscar Taiba, quienes estuvieron presentes desde un comienzo, cuando esta tesis era solo una idea. Agradezco especialmente la confianza que depositaron en mí y en este proyecto, así como el trato cordial que mantuvieron siempre conmigo.

Agradezco al profesor Gonzalo Suazo por la disposición que tuvo para ayudarme. Sus lúcidos comentarios y consejos fueron esenciales en el desarrollo de esta investigación.

Finalmente, agradezco al profesor Matías Silva, integrado recientemente al Departamento de Obras Civiles, por su disponibilidad para formar parte de la comisión de esta tesis.

RESUMEN

En las últimas décadas los análisis unidimensionales en el dominio de la frecuencia han sido utilizados ampliamente en el estudio de la respuesta sísmica de suelos. Sin embargo, las múltiples limitaciones que presenta este tipo de análisis ha resultado en que este enfoque ha sido desplazado por los análisis en el dominio del tiempo basados en métodos numéricos (como el método de elementos finitos) y modelos constitutivos formulados en base a la teoría de plasticidad. Este enfoque se encuentra en constante desarrollo debido a la complejidad de la respuesta no lineal del suelo bajo sismos de mediana y alta intensidad. En este sentido, el desarrollo de nuevos modelos constitutivos para suelos de distintas características es un tópico de investigación recurrente en ingeniería geotécnica. En la actualidad, existe una serie de programas computacionales disponibles en el mercado para realizar este tipo de modelación, sin embargo, estos ofrecen posibilidades acotadas de análisis y un tratamiento simplificado de la interacción suelo-fluido en los poros durante la respuesta sísmica. En este contexto, este trabajo de tesis pretende iniciar el desarrollo de un código computacional que posibilite una nueva línea de investigación en el Departamento de Obras Civiles, cuya orientación sea el mejoramiento de las técnicas de modelación numérica de la respuesta sísmica de suelos saturados en el contexto geológico y sísmico nacional.

En esta primera etapa de investigación se incorpora, en primer lugar, una relación constitutiva lineal elástica para la modelación del suelo. En segundo lugar, y con el propósito de considerar el comportamiento no lineal de este, se implementa el modelo constitutivo Mohr-Coulomb, basado en la teoría de plasticidad. La implementación de este modelo se lleva a cabo a través del esquema de retorno propuesto por Clausen et al. (2007) que incorpora la superficie de fluencia y el potencial plástico del modelo de manera exacta. La resolución del problema no lineal se lleva a cabo a través del método de Newton-Raphson de rigidez inicial. En el caso del análisis estático, se implementa además el procedimiento de corrección automática del tamaño del paso de carga propuesto por Van Langen & Vermeer (1990).

Para realizar la integración en el tiempo, en el caso del análisis dinámico, se implementa

el método de Newmark. Este ofrece la posibilidad de utilizar esquemas de integración incondicionalmente estables e incluir amortiguamiento numérico en la solución. Por otro lado, y con el propósito de incorporar una condición de borde artificial que permita truncar lateralmente el modelo de elementos finitos, se implementa la condición de borde viscoso estándar, propuesta por Lysmer & Kuhlmeyer (1969), que consiste en la inclusión de amortiguadores viscosos en los bordes del modelo. Con respecto a la incorporación del registro sísmico, esta se lleva a cabo a través de la imposición del desplazamiento del sismo en los grados de libertad horizontales de la base del modelo, utilizando para esto el método de penalización.

Finalmente, el código permite la modelación de suelos saturados en condición no drenada, condición que es especialmente relevante en el caso del análisis sísmico. Para esto se considera el caso completamente no drenado, en donde la formulación u-p, que describe la interacción entre el esqueleto sólido del suelo y el fluido en los poros, puede desacoplarse bajo ciertos supuestos. De esta manera, el análisis es separado en uno de tensiones efectivas y otro de generación de presiones de poros.

La validación del código es llevada a cabo a través de diferentes ejemplos numéricos, que involucran todas las posibilidades de análisis del programa. Para esto, las respuestas obtenidas mediante el código son comparadas con soluciones analíticas y con las respuestas obtenidas mediante un programa comercial de elementos finitos, de amplio uso, llamado Plaxis. Los resultados validan la implementación desarrollada y evidencian que el código entrega resultados confiables.

Como ejemplo de aplicación se desarrolla la modelación de la respuesta de sitio de un depósito de suelo ubicado en el centro de Viña del Mar, sometido al terremoto del Maule del 2010, utilizando el código desarrollado. La caracterización del suelo se realiza a partir de ensayos de mecánica de suelos y ensayos geofísicos disponibles. A través de este ejemplo se muestra que es indispensable la correcta calibración de la malla de elementos finitos, así como de los parámetros que definen el amortiguamiento de Rayleigh. Para la modelación del suelo se utiliza tanto el modelo lineal elástico como el modelo Mohr-Coulomb y los resultados obtenidos son comparados con los del método lineal equivalente, así como con el espectro de la norma de diseño sísmico de edificios para el caso en estudio.

El código desarrollado representa solo una primera etapa, ya que se espera que este

siga evolucionando en trabajos futuros. Teniendo esto en cuenta, y en base al estudio realizado, se proponen futuras líneas de investigación y desarrollo que permitan superar las limitaciones identificadas y extender las capacidades del programa.

ABSTRACT

In the last decades, one-dimensional analyzes in the frequency domain have been widely used in the study of the seismic response of soils. However, the multiple limitations of this type of analysis have resulted in the fact that this approach has been displaced by time domain analyzes based on numerical methods (such as the finite element method) and constitutive models formulated on the basis of theory of plasticity. This approach is in constant development due to the complexity of the nonlinear response of the soil under medium and high intensity earthquakes. In this sense, the development of new constitutive models for soils of different characteristics is a recurrent research topic in geotechnical engineering. Currently, there are a number of computer programs available in the market to perform this type of modeling, however, these offer limited possibilities of analysis and a simplified treatment of the soil-pore fluid interaction during the seismic response. In this context, this thesis aims to initiate the development of a computational code that will enable a new line of research in the Department of Civil Engineering, whose orientation will be the improvement of numerical modeling techniques of the seismic response of saturated soils in the geological and seismic national context.

In this first stage of research an elastic linear constitutive relationship is incorporated, firstly, for the soil modeling. Secondly, and for the purpose of considering the nonlinear behavior, the Mohr-Coulomb constitutive model, based on the theory of plasticity, is also implemented. The implementation of this model is performed through the return scheme proposed by Clausen et al. (2007), which incorporates exactly the yield surface and the plastic potential of the model. The resolution of the nonlinear problem is carried out by the initial stiffness method. For the static analysis case, the automatic step size correction procedure proposed by Van Langen & Vermeer (1990) is in addition implemented.

In order to integrate in time, in the dynamic analysis case, the Newmark method is implemented. This offers the possibility to use unconditionally stable integration schemes and to include numerical damping in the solution. On the other hand, and in

order to incorporate an artificial boundary condition that allows truncate laterally the finite element model, the standard viscous boundary, proposed by Lysmer & Kuhlmeyer (1969), is implemented. This involves the inclusion of viscous dampers at the boundaries of the model. Regarding the incorporation of the seismic record, this is carried out through the imposition of the displacement of the earthquake on the horizontal degrees of freedom in the bottom of the model, using for this the penalty method.

Finally, the code allows the modeling of saturated soils under undrained condition, a condition that is specially relevant in the case of seismic analysis. For this it is considered the completely undrained case, wherein the u-p formulation, which describes the interaction between the solid skeleton of the soil and the pore fluid, can be decoupled under certain assumptions. In this way, the analysis is separated into one of effective stresses and another of pore pressure generation.

The code validation is carried out through different numerical examples, involving all the analysis possibilities of the program. For this, the responses obtained by the code are compared with analytical solutions and with the responses obtained by a commercial finite element program, of extensive use, called Plaxis. The results validate the developed implementation and show that the results provided by the code are reliable.

As an example of application, the site response of a soil deposit located in the center of Viña del Mar, subject to the 2010 Maule Earthquake, is modeled using the code developed. The soil characterization is done from soil mechanics and geophysical test available. Through this example it shows that it is essential the correct calibration of both the finite element mesh and the parameters defining the Rayleigh damping. For the soil modeling, both the linear elastic and the Mohr-Coulomb model are used and the obtained results are compared with those of the equivalent linear method, as well as with the spectrum of the seismic design code for building, for the case of study.

The developed code represents only a first step, as it is expected that it continue evolving in future works. With this in mind, and based on the study conducted, future researches and developments are proposed in order to overcome the identified limitations and to extend the capabilities of the program.

GLOSARIO

a_x, a_y, a_z	Componentes del desplazamiento nodal en x, y y z.
A	Área del elemento finito.
A_h	Área horizontal del elemento infinitesimal.
\mathbf{a}	Vector de desplazamiento nodal.
\mathbf{a}_r	Vector de restricciones del método de penalización.
\mathbf{A}	Matriz de restricciones del método de penalización.
\mathbf{b}	Vector de fuerzas de cuerpo.
c	Cohesión.
c'	Cohesión efectiva o en condición drenada.
c_ξ	Amortiguamiento.
c_{ξ_x}, c_{ξ_y}	Amortiguamiento de la condición de borde absorbente en x y en y.
c_0, \dots, c_7	Constantes del método de Newmark.
C_1, C_2	Coefficientes de relajación.
\mathbf{C}	Matriz global de amortiguamiento.
\mathbf{C}^*	Matriz global de amortiguamiento modificada.
\mathbf{C}_{abs}	Matriz global de amortiguadores viscosos.
\mathbf{D}	Matriz o tensor de elasticidad. 6×6 en caso tridimensional y 4×4 en deformaciones planas.
\mathbf{D}^{ep}	Matriz constitutiva de tensión-deformación.
e	Error global.
e_{tol}	Tolerancia.
e_o	Razón inicial de vacíos del suelo.
E	Módulo de elasticidad.
E'	Módulo de elasticidad efectivo o en condición drenada.
E_u	Módulo de elasticidad en condición no drenada.
E_r	Módulo de elasticidad restringido.

E_{oed}	Módulo de elasticidad confinado.
f	Función o superficie de fluencia.
f_{r1}	Primera frecuencia natural del suelo.
f_{r2}	Segunda frecuencia natural del suelo.
f_{rmax}	Máxima frecuencia de interés del sismo incidente.
\mathbf{f}_c	Vector global de fuerzas de cuerpo.
\mathbf{f}_s	Vector global de fuerzas de superficie.
\mathbf{f}_{ext}	Vector global de fuerzas externas.
$\hat{\mathbf{f}}_{ext}$	Vector global de fuerza externa dinámica.
\mathbf{f}_{int}	Vector global de fuerzas internas.
g	Potencial plástico.
G	Módulo de corte del suelo.
G^*	Módulo de corte complejo del suelo.
G_{max}	Módulo de corte máximo del suelo.
G_{sec}	Módulo de corte secante del suelo.
\mathbf{g}_f	Gradiente de la superficie de fluencia.
\mathbf{g}_g	Gradiente del potencial plástico.
h	Profundidad del elemento finito.
\mathbf{J}	Jacobiano.
k	Número de onda.
k^*	Número de onda complejo.
k_p	Permeabilidad del suelo.
K'	Módulo de compresibilidad efectivo del suelo.
K_s	Módulo de compresibilidad de la fase sólida del suelo.
K_w	Módulo de compresibilidad del agua.
K_o	Coefficiente lateral de empuje.
\mathbf{K}	Matriz global de rigidez.
\mathbf{K}^e	Matriz elemental de rigidez.
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz global de rigidez dinámica.
\mathbf{K}_u	Matriz global de rigidez en tensiones totales para condición no drenada.
m	Masa del elemento infinitesimal.
M_s	Magnitud del sismo.
\mathbf{M}	Matriz global de masa.

\mathbf{M}^e	Matriz elemental de masa.
n	Porosidad del suelo.
\mathbf{n}	Vector unitario normal al borde del dominio, orientado hacia el exterior.
\mathbf{N}	Matriz de funciones de forma para aproximar el desplazamiento.
\mathbf{N}_p	Matriz de funciones de forma para aproximar la presión de poros.
p'	Tensión isotrópica efectiva.
p_w	Presión de poros.
P_l	Peso del punto de integración l .
q	Tensión de corte equivalente.
Q	Parámetro asociado a la compresibilidad del suelo.
\mathbf{Q}	Matriz de acoplamiento.
R^*	Factor de reducción de la aceleración espectral.
R_γ	Factor de reducción de la deformación angular.
\mathbf{r}	Vector de desbalance de fuerzas.
\mathbf{S}	Operador lineal para pequeñas deformaciones.
T_s	Periodo característico.
\mathbf{t}	Vector de fuerzas de superficie por unidad de área.
\mathbf{T}	Tensor de tensiones.
u, v, w	Componentes del desplazamiento en la dirección x , y y z .
\mathbf{u}	Vector de desplazamiento.
v_m	Velocidad de propagación de la onda longitudinal en una barra.
V_s	Velocidad de propagación de la onda de corte.
V_s^*	Velocidad de propagación de la onda de corte compleja.
V_p	Velocidad de propagación de la onda longitudinal.
W	Máxima energía elástica entregada en un ciclo de carga y descarga.
\mathbf{W}	Matriz diagonal de pesos de penalización.
α_R, β_R	Parámetros del amortiguamiento de Rayleigh.
α_m^*	Razón de impedancia compleja.
γ	Deformación angular.
γ_{ef}	Deformación angular efectiva.
γ_a	Amplitud de la deformación angular cíclica.
γ^p	Deformación angular plástica.
γ_{xy}	Deformación angular en la cara x en la dirección y .

γ_{yz}	Deformación angular en la cara y en la dirección z.
γ_{xz}	Deformación angular en la cara x en la dirección z.
γ_n	Peso específico natural del suelo.
γ_{sat}	Peso específico saturado del suelo.
γ_w	Peso específico del agua.
γ_N, β_N	Parámetros que definen el método de Newmark.
$d\lambda^p$	Multiplicador plástico.
Δl_{max}	Dimensión máxima de los elementos de la malla.
ΔW	Energía elástica disipada en un ciclo de carga y descarga.
$\Delta \sigma^p$	Corrector plástico.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Deformaciones en las direcciones x, y y z.
ϵ_q	Deformación desviadora.
ϵ_v	Deformación volumétrica.
ϵ_v^p	Deformación volumétrica plástica.
ϵ	Vector de deformaciones. 6×1 en caso tridimensional y 4×1 en deformaciones planas.
ϵ^e	Vector de deformaciones elásticas.
ϵ^p	Vector de deformaciones plásticas.
η	Viscosidad.
λ_{min}	Mínima longitud de onda de interés del sismo incidente.
ν	Módulo de Poisson.
ν'	Módulo de Poisson efectivo o en condición drenada.
ν_u	Módulo de Poisson en condición no drenada.
ξ	Razón de amortiguamiento.
ρ	Densidad del suelo.
σ	Tensión vertical en el ensayo triaxial.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiones en las direcciones x, y y z.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensiones principales 1, 2 y 3.
$\sigma_{max}, \sigma_{min}$	Tensiones principales máxima y mínima.
σ	Vector de tensiones. 6×1 en caso tridimensional y 4×1 en deformaciones planas.
σ'	Vector de tensiones efectivas.
σ^B	Predictor elástico.

τ	Tensión de corte.
τ_f	Resistencia al corte.
τ_{xy}	Tensión de corte en la cara x en la dirección y.
τ_{yz}	Tensión de corte en la cara y en la dirección z.
τ_{xz}	Tensión de corte en la cara x en la dirección z.
ϕ	Ángulo de fricción interna.
ϕ'	Ángulo de fricción interna efectivo o en condición drenada.
ψ	Ángulo de dilatancia.
ψ'	Ángulo de dilatancia efectivo o en condición drenada.
ω	Frecuencia angular.
ω_m y ω_m	Frecuencias angulares que controlan el amortiguamiento de Rayleigh.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
ABSTRACT	VII
GLOSARIO	IX
ÍNDICE DE FIGURAS	XXXI
ÍNDICE DE TABLAS	XXXIV
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	3
1. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA RES- PUESTA SÍSMICA DE SUELOS	5
1.1. Introducción	5
1.2. Propagación unidimensional de ondas en suelos	7
1.2.1. Generalidades	7
1.2.2. Suelo uniforme sin amortiguamiento sobre roca rígida	9
1.2.3. Suelo uniforme con amortiguamiento sobre roca rígida	11

1.2.4.	Depósito de suelo con varios estratos y amortiguamiento	15
1.2.5.	Análisis de la respuesta sísmica mediante el enfoque lineal	18
1.3.	Método lineal equivalente	20
1.4.	Limitaciones del análisis en el dominio de la frecuencia y motivación para el desarrollo de un código de elementos finitos	24
2.	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL PROBLEMA DE ELASTICIDAD	27
2.1.	Introducción	27
2.2.	Formulación general	29
2.3.	Formulación del problema de elasticidad	32
2.4.	MEF aplicado al caso de elasticidad plano	39
2.4.1.	Generalidades	39
2.4.2.	Aproximación del campo de desplazamientos	41
2.4.3.	Elementos isoparamétricos	43
2.4.4.	Integración numérica	46
2.4.5.	Matrices y vectores elementales	48
3.	ANÁLISIS NO LINEAL	55
3.1.	Introducción	55
3.2.	Resolución global del problema no lineal	57
3.2.1.	Formulación incremental del problema	57
3.2.2.	Método de Newton-Raphson	58
3.3.	Teoría de Plasticidad	63
3.3.1.	Generalidades	63

3.3.2.	Función de fluencia	64
3.3.3.	Regla de flujo y potencial plástico	65
3.3.4.	Regla de endurecimiento	67
3.3.5.	Relación incremental tensión-deformación total	67
3.4.	Modelo constitutivo Mohr-Coulomb	70
3.4.1.	Generalidades	70
3.4.2.	Región elástica	71
3.4.3.	Función de fluencia	71
3.4.4.	Regla de flujo y potencial plástico	74
3.4.5.	Limitaciones del modelo	76
3.5.	Integración Numérica del Modelo Mohr-Coulomb	78
3.5.1.	Generalidades	78
3.5.2.	Algoritmos de retorno	78
3.5.3.	Algoritmo de retorno aplicado al modelo de Mohr-Coulomb	80
4.	ANÁLISIS DINÁMICO	89
4.1.	Introducción	89
4.2.	Integración en el tiempo	91
4.3.	Formulación de la matriz de masa	97
4.3.1.	Generalidades	97
4.3.2.	Diagonalización de la matriz de masa en elementos triangulares lineales	98
4.3.3.	Diagonalización de la matriz de masa en elementos triangulares cuadráticos	98
4.4.	Formulación de la matriz de amortiguamiento	101

4.5.	Discretización del dominio	104
4.6.	Condiciones de borde artificial	105
4.6.1.	Generalidades	105
4.6.2.	Borde viscoso estándar	106
4.6.3.	Implementación del borde viscoso	110
4.7.	Imposición del registro sísmico	112
4.8.	Modelación del comportamiento dinámico utilizando el modelo Mohr-Coulomb	114
5.	MODELACIÓN DE LA RESPUESTA EN SUELOS SATURADOS	119
5.1.	Introducción	119
5.2.	Interacción suelo-fluido en los poros	121
5.3.	Desacople del sistema de ecuaciones u-p	126
5.3.1.	Generalidades	126
5.3.2.	Condición completamente drenada	126
5.3.3.	Condición completamente no drenada	126
5.4.	Modelación de la respuesta no drenada utilizando el modelo Mohr-Coulomb	132
5.4.1.	Modelo Mohr-Coulomb en el espacio p'-q	132
5.4.2.	Modelación de un ensayo triaxial consolidado no drenado	134
5.4.3.	Limitaciones del modelo Mohr-Coulomb en la modelación de la respuesta no drenada	137
6.	CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS	141
6.1.	Introducción	141
6.2.	Entrada de datos	144

6.2.1.	Tipo de análisis	144
6.2.2.	Geometría del depósito	144
6.2.3.	Propiedades del suelo	144
6.2.4.	Definición del nivel freático	145
6.2.5.	Análisis estático	145
6.2.6.	Análisis dinámico	146
6.2.7.	Malla de elementos finitos	147
6.2.8.	Proceso iterativo	147
6.2.9.	Selección de nodos para el análisis	148
6.3.	Etapa de solución	150
6.3.1.	Generación de la malla de elementos finitos	150
6.3.2.	Parámetros generales	152
6.3.3.	Largo máximo de los elementos	152
6.3.4.	Cambio de unidades a MKS, rad	152
6.3.5.	Determinación de propiedades del suelo	152
6.3.6.	Determinación de propiedades no drenadas del suelo	153
6.3.7.	Cálculo de la matriz de elasticidad de cada estrato	154
6.3.8.	Definición del esquema de integración para la cuadratura de Gauss-Legendre	155
6.3.9.	Cálculo de las matrices globales de rigidez y masa	156
6.3.10.	Cálculo del vector global de fuerzas externas nodales	157
6.3.11.	Determinación de los grados de libertad activos	158
6.3.12.	Cálculo de la matriz global de amortiguamiento	159
6.3.13.	Imposición de los bordes absorbentes	160

6.3.14. Cálculo de las tensiones efectivas iniciales	160
6.3.15. Cálculo de la presión de poros inicial	162
6.3.16. Determinación de la respuesta en el análisis estático	163
6.3.17. Determinación de la respuesta en el análisis dinámico	173
7. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO	179
7.1. Introducción	179
7.2. Análisis estático utilizando el modelo lineal-elástico	181
7.3. Análisis estático utilizando el modelo Mohr-Coulomb	186
7.3.1. Problema de zapata flexible sobre suelo seco	186
7.3.2. Problema de zapata flexible sobre suelo saturado. Condición no drenada	193
7.4. Respuesta dinámica	199
7.4.1. Respuesta dinámica utilizando el modelo lineal elástico	199
7.4.2. Respuesta dinámica utilizando el modelo Mohr-Coulomb. Condición drenada/no drenada.	202
7.4.3. Amortiguamiento de Rayleigh	205
8. MODELACIÓN DE LA RESPUESTA SÍSMICA DEL SUELO EN EL CENTRO DE VIÑA DEL MAR	209
8.1. Introducción	209
8.2. Caracterización del subsuelo	211
8.3. Estratigrafía y propiedades del modelo	215
8.3.1. Estratigrafía del modelo	215
8.3.2. Propiedades del modelo	216
8.4. Registro sísmico	221

8.5. Calibración de la malla de elementos finitos y de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh	224
8.6. Determinación de la respuesta sísmica del suelo en el centro de Viña del Mar	234
CONCLUSIONES	241
REFERENCIAS	247
ANEXOS	253
ANEXO A	253
ANEXO B	259

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Proceso de refracción que produce ondas casi verticales cerca de la superficie (modificada de Kramer, 1996).	7
1.2. Medio elástico sometido a un esfuerzo de corte (modificada de Verdugo).	8
1.3. Depósito de suelo lineal elástico sobre roca rígida (modificada de Kramer, 1996).	10
1.4. Influencia de la frecuencia en la respuesta estacionaria lineal elástica no amortiguada.	11
1.5. Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (Kramer, 1996).	12
1.6. Elipse formada por el modelo Kelvin-Voigt.	12
1.7. Influencia de la frecuencia en la respuesta estacionaria lineal elástica amortiguada.	15
1.8. Depósito de suelo con varios estratos (modificada de Bardet, 2000).	16
1.9. Nomenclatura utilizada en el análisis de respuesta de sitio (modificada de Bardet, 2000).	18
1.10. Módulo de corte máximo y secante (basada en Bardet, 2000).	20
1.11. Curvas de (a) degradación de la rigidez y de (b) razón de amortiguamiento de Darendeli del 2001 (Guerreiro et al., 2012).	21
1.12. Iteración del método lineal equivalente (modificada de Bardet, 2000).	23
2.1. Definición del problema general (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).	29
2.2. Estado tensional en un volumen infinitesimal.	33

2.3. Equilibrio en un elemento diferencial en el plano xz	34
2.4. Enfoques de (a) tensiones planas y (b) deformaciones planas.	40
2.5. Discretización en elementos triangulares (Zienkiewicz & Taylor, 2000).	41
2.6. Elemento triangular (a) lineal y (b) cuadrático.	43
2.7. Mapeo de elemento triangular lineal (basada en Jensen, 2013).	44
2.8. Mapeo de elemento triangular cuadrático (basada en Jensen, 2013).	45
2.9. Esquemas de integración numérica para elementos triangulares.	46
2.10. Funciones de forma para elemento unidimensional de dos nodos (modificado de Jensen, 2013).	51
2.11. Funciones de forma para elemento unidimensional de tres nodos (modificada de Jensen, 2013).	52
2.12. Fuerza nodal equivalente para (a) carga uniformemente distribuida y (b) carga triangular (Smith, 2004).	53
3.1. Algoritmo de Newton Raphson.	59
3.2. Algoritmos de (a) Newton-Raphson modificado y de (b) rigidez inicial.	60
3.3. Superficie de fluencia	65
3.4. Regla de flujo (modificada de Karstunen).	66
3.5. Regla de endurecimiento/reblandecimiento (basada en Potts et al., 1999).	67
3.6. (a) Modelación de un ensayo triaxial y (b) resultado típico de un triaxial para una arena inicialmente densa (basada en Vermeer et al., 1984).	70
3.7. Idea básica del modelo de Mohr-Coulomb (basada en PLAXIS, 2015).	71
3.8. Criterio de falla de Mohr-Coulomb	72
3.9. Planos que genera la función de fluencia en el espacio de tensiones principales	73
3.10. Superficie de fluencia	73

3.11. Ensayo de corte y ángulo de dilatancia (Vermeer et al., 1984).	75
3.12. Modelo de Mohr-Coulomb comparado con ensayos de Goldscheider (Vermeer et al., 1984).	77
3.13. Mapeo de retorno	79
3.14. Mapeo de retorno en tensiones principales (modificada de Clausen et al.,2007)	81
3.15. Superficie de fluencia(Clausen,2007).	82
3.16. Retorno a una línea (modificada de Clausen,2007).	84
3.17. Incremento de deformación plástico cuando se retorna a una línea (Clausen,2007).	85
3.18. Teorema de Koiter para el flujo plástico en una singularidad (modificada de De Borst, 1986).	86
3.19. Regiones de tensión y planos de frontera (Clausen, 2007).	87
4.1. Método de Newmark de (a) aceleración lineal y (b) aceleración promedio constante.	93
4.2. Matriz de masa concentrada para el elemento triangular lineal (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).	98
4.3. Matriz de masa concentrada para el elemento triangular cuadrático por el método de Lobatto (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).	99
4.4. Matriz de masa concentrada para el elemento triangular cuadrático por el método HRZ.	99
4.5. Amortiguamiento de Rayleigh (modificada de Tsai et al., 2014).	102
4.6. Tipos de condición de borde: (a) borde elemental con condición de desplazamiento cero; (b) borde local consistente en amortiguadores viscosos; (c) aproximación de Wolf a un borde consistente (basada en Kramer, 1996).	105

4.7. Onda armónica viajando a lo largo de (a) dos barras semi-infinitas conectadas y a lo largo de (b) una barra semi-infinita unida a un amortiguador viscoso (basada en Kramer, 1996).	107
4.8. Onda p incidente en una superficie libre (Kontoe, 2006).	109
4.9. Bordes viscosos y frente de ondas normales (a) p y (b) s (modificada de Pestana, 2006).	110
4.10. Largo de influencia utilizado para la implementación del borde viscoso en (a) los elementos triangulares lineales y (b) triangulares cuadráticos.	111
4.11. Ciclo histerético del modelo Mohr-Coulomb ante ensayo de corte simple cíclico.	115
4.12. Curva de degradación de la rigidez. Comparación entre el modelo Mohr-Coulomb y curvas experimentales.	116
4.13. Curva de razón de amortiguamiento. Comparación entre el modelo Mohr-Coulomb y curvas experimentales.	117
5.1. Representación de un suelo saturado.	120
5.2. Superficie de fluencia del modelo Mohr-Coulomb en el plano p^1 - q .	133
5.3. Esquema de un ensayo triaxial consolidado en compresión.	134
5.4. Comparación entre ensayo triaxial drenado y no drenado modelado mediante el modelo Mohr-Coulomb.	135
5.5. Resistencia al corte no drenado mediante el modelo de Mohr-Coulomb (basada en PLAXIS, 2015).	137
5.6. Ensayo triaxial no drenado modelado con el modelo Mohr-Coulomb con ángulo de dilatación positivo.	138
5.7. Ensayo triaxial no drenado modelado con el modelo Mohr-Coulomb con ángulo de dilatación negativo.	139
6.1. Definición de la geometría del depósito.	144

6.2. Definición del nivel freático.	145
6.3. Definición de la carga.	146
6.4. Sistema de coordenadas.	149
6.5. Esquemas de integración de la cuadratura de Gauss-Legendre utilizada para elementos de (a) 3 y (b) 6 nodos.	156
6.6. Ensamblaje de las matrices globales de rigidez y de masa.	157
6.7. Condición de borde para el análisis estático.	159
6.8. Condición de borde para el análisis dinámico. (a) Cálculo de periodos y (b) aplicación de la carga dinámica en la base.	159
6.9. Condición de borde absorbente.	160
6.10. Inicialización de las tensiones efectivas.	162
6.11. Inicialización de la presión de poros.	163
6.12. Algoritmo de Newton-Raphson de rigidez inicial utilizado en el cálculo de la respuesta estática.	166
6.13. Determinación de la tensión efectiva actualizada.	171
6.14. Algoritmo de Newton-Raphson de tensión inicial utilizado en el cálculo de la respuesta dinámica.	176
7.1. Problema de fundación rectangular flexible.	181
7.2. Modelo utilizado para representar la carga de una zapata flexible sobre un espacio semi-infinito.	182
7.3. Posición deformada usando mallas (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4. Elementos triangulares de 6 nodos. Escala: 100.	183
7.4. Posición deformada usando mallas (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4. Elementos triangulares de 6 nodos. Escala: 100.	183
7.5. Problema de zapata flexible (Huang & Griffiths, 2008).	186

7.6. Mallas utilizadas en el (a) código Matlab y en (b) Plaxis.	188
7.7. Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Factor de escala: 100.	188
7.8. Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado.	188
7.9. Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado.	189
7.10. Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Factor de escala: 50.	189
7.11. Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.	189
7.12. Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.	190
7.13. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis.	191
7.14. Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr-Coulomb asociado.	192
7.15. Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.	192
7.16. Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada. Factor de escala: 150.	193
7.17. Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada.	194
7.18. Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada.	194
7.19. Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada. Factor de escala: 100.	194

7.20. Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada.	195
7.21. Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada.	195
7.22. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis.	196
7.23. Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr- Coulomb asociado. Condición no drenada.	197
7.24. Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr- Coulomb no asociado. Condición no drenada.	198
7.25. Aceleración basal.	199
7.26. Modelo con (a) bordes libres y (b) bordes absorbentes.	200
7.27. Mallas de (a) código Matlab y (b) Plaxis.	200
7.28. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes libres.	201
7.29. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes.	202
7.30. Modelo de (a) suelo seco y (b) modelo de suelo saturado en condición no drenada.	203
7.31. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes.	204
7.32. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes.	205
7.33. Aceleración basal.	205
7.34. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes. Razón de amortiguamiento del 2%.207	
7.35. Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes. Razón de amortiguamiento del 2%.207	

8.1. Sitio modelado en el centro de Viña del Mar.	210
8.2. Ubicación de los sondajes de exploración del subsuelo (Petersen, 2001).	211
8.3. Localización aproximada de los perfiles sísmicos 1 y 2, y sus fuentes activas (Taiba, 2012).	214
8.4. Estratigrafía usada en el modelo.	216
8.5. Ubicación de la estación Valparaíso UTFSM.	221
8.6. Registro sísmico estación Valparaíso UTFSM, dirección E-O.	222
8.7. Curvas de degradación de la rigidez y razón de amortiguamiento utilizadas para (a) el estrato de arcilla (E1) y para (b) los estratos de arena (E2, E3 y E4).	223
8.8. Registro sísmico en la base del modelo.	223
8.9. Espectro de Fourier del registro sísmico en la base del modelo.	224
8.10. Malla 1. Ancho 45 m.	226
8.11. Malla 2. Ancho 100 m.	227
8.12. Malla 3. Ancho 190 m.	227
8.13. Comparación de la función de amplificación de EERA con las diferentes mallas de elementos finitos. Amortiguamiento de Rayleigh, $\xi = 4\%$, utilizando frecuencias f_{r1} y $5f_{r1}$	228
8.14. Comparación de la función de amplificación de EERA con las diferentes mallas de elementos finitos. Amortiguamiento de Rayleigh, $\xi = 4\%$, utilizando frecuencias f_{r1} y f_{r2}	229
8.15. Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 1.	230
8.16. Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 2.	230
8.17. Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 3.	231

8.18. Espectro elástico de aceleración. 5 % de amortiguamiento. Comparación entre EERA y código Matlab.	232
8.19. Espectro elástico de desplazamiento relativo. 5 % de amortiguamiento. Comparación entre EERA y código Matlab.	232
8.20. Registros de aceleración obtenidos en superficie mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente.	235
8.21. Espectros elásticos de aceleración obtenidos mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente. 5 % de amortiguamiento.	237
8.22. Espectros elásticos de desplazamiento relativo obtenidos mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente. 5 % de amortiguamiento.	238
8.23. Comparación de los espectros elásticos de aceleración con el espectro de diseño.	239
24. Clasificación sísmica de suelos de acuerdo al Decreto Supremo N°61. . .	259

ÍNDICE DE TABLAS

7.1. Convergencia de la malla de elementos triangulares de 6 nodos.	184
7.2. Convergencia de la malla de elementos triangulares de 3 nodos.	184
7.3. Propiedades de los modelos.	186
7.4. Diferencia porcentual en el cálculo del desplazamiento final.	191
7.5. Diferencia porcentual entre códigos.	197
7.6. Propiedades del modelo.	199
7.7. Propiedades del modelo.	203
7.8. Determinación de las frecuencias del amortiguamiento de Rayleigh. . .	206
7.9. Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 1.	206
8.1. Estratigrafía del depósito.	212
8.2. Características del suelo.	213
8.3. Velocidades de onda de corte para los perfiles 1 y 2.	214
8.4. Velocidades de onda de corte promedio por estrato.	215
8.5. Estratigrafía utilizada en la modelación	215
8.6. Valores típicos de peso específico para diferentes tipos de suelo (Coduto, 2001).	217
8.7. Pesos específicos asignados a cada estrato.	217

8.8. Determinación de la consistencia de arcillas según Terzaghi y Peck, 1948 (Sivakugan & Das, 2010).	218
8.9. Valores de referencia de las propiedades efectivas de suelos cohesivos de mediana plasticidad (Committe for Waterfront Structures, Harbours and Waterways, 2012).	218
8.10. Propiedades plásticas del suelo.	219
8.11. Propiedades elásticas del suelo.	220
8.12. Índice de vacíos típicos según Fredlund & Rahardjo (1993)	220
8.13. Índice de vacíos utilizados en la modelación.	220
8.14. Características de las diferentes mallas.	226
8.15. Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 1.	227
8.16. Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 2.	229
8.17. Propiedades utilizadas en la modelación de la respuesta sísmica.	234
8.18. Tiempo de cálculo en función del modelo constitutivo utilizado.	235
8.19. Comparación de los peaks de aceleración obtenidos mediante los diferentes análisis.	236
8.20. Clasificación utilizada para la determinación del espectro elástico de la norma NCh433 más DS61.	238

INTRODUCCIÓN

El estudio de los terremotos ocurridos en las últimas décadas ha develado la importancia que tienen las condiciones locales del suelo en la distribución y magnitud de los daños. Cuando ocurre un sismo, las ondas se propagan a través de la roca, recorriendo grandes distancias desde la fuente hasta a la superficie, sin embargo, los últimos metros del recorrido, constituidos en general por suelo, tienen una gran influencia en la respuesta en superficie. Estos depósitos de suelo actúan como filtros de las ondas sísmicas, atenuando el movimiento en ciertas frecuencias y amplificándolo en otras, y dado que las características del suelo pueden variar significativamente en cortas distancias, la intensidad del movimiento puede variar también dentro de una pequeña área. Estos cambios en la intensidad y en el contenido de frecuencias del movimiento tienen un directo impacto en la respuesta de las estructuras durante los eventos sísmicos, por lo que es de vital importancia caracterizar correctamente estos efectos, para de esta manera contribuir a mejorar los diseños y mitigar los daños asociados a los terremotos.

Los análisis de respuesta sísmica de suelos pueden dividirse en dos categorías: análisis en el dominio de la frecuencia y análisis en el dominio del tiempo. Los análisis del primer tipo, dentro de los que destaca el método lineal equivalente, se caracterizan por su simplicidad y bajo costo computacional, pero poseen múltiples limitaciones, entre las que se encuentra su incapacidad de predecir deformaciones remanentes, modelar escenarios con geometrías complejas y predecir cambios en las presiones de poros. Por otro lado, los análisis en el dominio del tiempo permiten caracterizar el comportamiento no lineal del suelo con una mayor exactitud, estimar el desarrollo de presiones de poros en suelos saturados y modelar una amplia gama de situaciones, pero a un costo computacional más elevado. Este tipo de análisis requiere de la solución numérica de la ecuación de movimiento, dentro de un esquema de diferencias finitas o de elementos finitos, y la incorporación de un modelo constitutivo que caracterice el comportamiento no lineal del suelo, generalmente formulado en base a la teoría de plasticidad.

Debido a la complejidad de la reproducción de la respuesta no lineal del suelo durante el movimiento sísmico, este último enfoque se encuentra en constante desarrollo científico. Se busca, por un lado, disminuir los altos tiempos de cálculo característicos de este tipo de análisis, y por otro, reproducir con mayor exactitud el comportamiento no lineal de los suelos en diferentes condiciones, modelando de manera más realista la interacción suelo-fluido en los poros.

Es en este contexto que nace la necesidad de desarrollar un código computacional que sirva como herramienta para el desarrollo de investigación en este campo, prescindiendo de los programas comerciales, cuyas características son limitadas. Para esto, se espera que el código tenga un desarrollo continuo a través de diferentes memorias y tesis que permitan expandir sus características y mejorar su eficiencia.

El propósito del presente trabajo es elaborar una primera versión del código, que sea la base para desarrollos futuros, estudiando los principales aspectos de modelación involucrados en el análisis de la respuesta sísmica de suelos.

OBJETIVOS

Objetivo General

Contribuir, en una etapa inicial, a la elaboración de un código computacional basado en el método de elementos finitos, que permita la modelación numérica, en dos dimensiones, de la respuesta sísmica de suelos saturados en el dominio del tiempo, y utilizar el programa desarrollado para modelar la respuesta sísmica de un depósito de suelo real, estudiando los principales aspectos de modelación involucrados.

Objetivos Específicos

- Desarrollar una primera etapa del código, donde se implemente el método de elementos finitos para la resolución del problema de elasticidad en dos dimensiones, utilizando un mallador que trabaje con elementos triangulares.
- Implementar el modelo constitutivo elastoplástico de Mohr-Coulomb, que permite una primera aproximación a la modelación del comportamiento no lineal de los suelos.
- Implementar el esquema de integración de Newmark para la resolución del problema dinámico y permitir la imposición de un registro sísmico en la base del dominio.
- Implementar la condición de borde absorbente, *borde viscoso estándar*, que permite modelar la radiación de energía hacia el infinito en un dominio truncado.
- Incorporar la modelación de la respuesta no drenada de suelos saturados a partir de parámetros efectivos.

- Validar el código frente a soluciones analíticas y frente a un programa comercial de elementos finitos.
- Caracterizar un depósito de suelo ubicado en el centro de Viña del Mar a partir de resultados de ensayos en terreno y generar un modelo que permita estimar la respuesta de sitio del depósito sometido al terremoto del Maule del 2010.
- Establecer futuras líneas de investigación y desarrollo del código.

ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA RESPUESTA SÍSMICA DE SUELOS

1.1. Introducción

En el presente capítulo se describe la teoría de propagación unidimensional de onda, que sirve como base para el análisis en el dominio de la frecuencia de la respuesta sísmica de suelos o respuesta de sitio. Se describen diferentes configuraciones de depósitos de suelo sometidos a una señal armónica en la roca basal y se deducen las funciones de transferencia asociadas, que permiten determinar la amplificación que sufre la señal en la superficie. Estas funciones, además permiten extender el análisis a cualquier tipo de señal de entrada, como por ejemplo un registro sísmico, a través del paso de la señal al dominio de las frecuencias. De este modo, las funciones de transferencia determinan cómo cada frecuencia de la señal de entrada es amplificada en el depósito de suelo. Esto permitirá, por un lado, entregar una comprensión general del comportamiento dinámico de los suelos y del fenómeno de amplificación sísmica, y por otro, describir el método lineal equivalente, que permite introducir de manera aproximada, y a través de

un proceso iterativo, ciertas no linealidades presentes en estos, las que tienen relación con la degradación del módulo de rigidez y el aumento de la disipación energética que sufre el suelo a medida que es sometido a ciclos de histéresis de mayor amplitud. Al final del capítulo se discuten las principales limitaciones de este tipo de análisis, las que justifican el uso de análisis en el dominio del tiempo para reproducir de manera más realista el comportamiento del suelo sometido a sismos de alta intensidad. Esto, a su vez, motiva el desarrollo de un código de elementos finitos.

1.2. Propagación unidimensional de ondas en suelos

1.2.1. Generalidades

Cuando se produce una ruptura a nivel de falla, esta perturbación genera ondas de cuerpo que viajan a través del interior de la tierra, en todas las direcciones. Al pasar por diferentes materiales, se van produciendo fenómenos de reflexión y refracción. Debido a que, en general, los materiales más cercanos a la superficie poseen una rigidez menor que la de los materiales más profundos, los rayos tienden a ser cada vez más verticales a medida que suben. Al momento de llegar a la superficie, debido a las múltiples refracciones, los rayos se encuentran en dirección casi vertical, como se representa en la Figura 1.1.

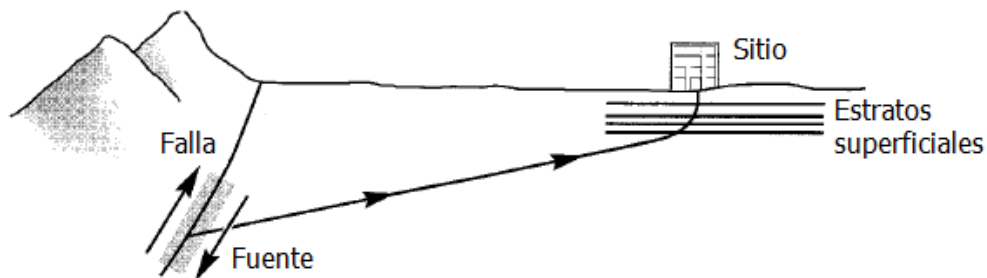


Figura 1.1: Proceso de refracción que produce ondas casi verticales cerca de la superficie (modificada de Kramer, 1996).

De esta manera, el análisis de propagación unidimensional de onda supone que todos los estratos de suelo son horizontales y que la sollicitación que experimenta el suelo está dada por la propagación vertical de ondas de corte desde la roca basal.

En primer lugar, considérese un medio elástico sometido a un esfuerzo de corte τ , como el mostrado en la Figura 1.2

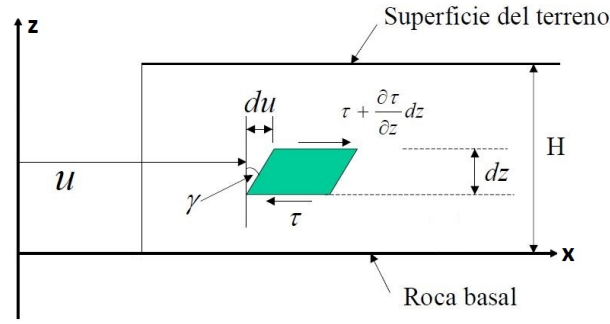


Figura 1.2: Medio elástico sometido a un esfuerzo de corte (modificada de Verdugo).

Empleando el segundo principio de Newton, el equilibrio dinámico puede ser encontrado en el elemento infinitesimal, según

$$\left(\tau A_h + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz A_h \right) - (\tau A_h) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.1)$$

donde A_h corresponde al área horizontal del elemento, sobre la cual se aplica el esfuerzo de corte, y m es la masa del elemento. Expresando esta última como $m = \rho A_h dz$, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.2)$$

Por otro lado, utilizando la relación tensión-deformación $\tau = G\gamma$, donde γ representa la deformación angular y G corresponde al módulo de corte del material, y la relación deformación-desplazamiento $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$, la ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.3)$$

Definiendo la velocidad de propagación de la onda de corte como

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.2.4)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$V_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.5)$$

que corresponde a la ecuación de propagación de onda unidimensional.

Esta ecuación tiene una solución del tipo

$$u(z, t) = f_o(V_s t - z) + g_o(V_s t + z) \quad (1.2.6)$$

donde f_o y g_o corresponden a cualquier función arbitraria de $(V_s t - z)$ y $(V_s t + z)$, respectivamente, que satisface 1.2.5. Como se puede apreciar, f_o se mantiene constante cuando z aumenta en el tiempo con velocidad V_s , y g_o se mantiene constante cuando z disminuye con el tiempo a velocidad V_s . En consecuencia, la ecuación 1.2.6 representa una onda estacionaria, compuesta por una onda f_o que viaja en el sentido de z positivo y otra, g_o , que viaja a la misma velocidad en sentido contrario.

1.2.2. Suelo uniforme sin amortiguamiento sobre roca rígida

En primer lugar se estudiará la solución para un suelo uniforme, sin amortiguamiento, sobre roca rígida, como el mostrado en la Figura 1.3, sometido a un movimiento armónico horizontal de la roca. La solución 1.2.6, para una sollicitación de este tipo, puede ser expresada en la forma

$$u(z, t) = A_o \cos(\omega t - kz) + B_o \cos(\omega t + kz). \quad (1.2.7)$$

o en la forma equivalente

$$u(z, t) = A e^{i(\omega t + kz)} + B e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.2.8)$$

donde ω corresponde a la frecuencia angular del movimiento basal, k es número de onda ($k = \omega/V_s$), y A y B son la amplitud de la onda que viaja en el sentido $-z$ y $+z$ respectivamente.

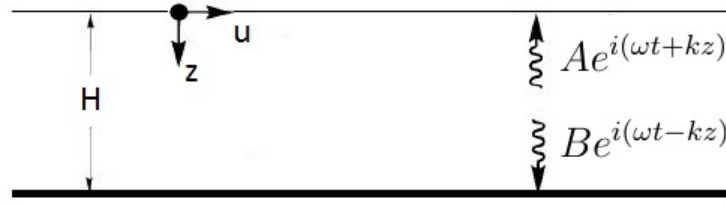


Figura 1.3: Depósito de suelo lineal elástico sobre roca rígida (modificada de Kramer, 1996).

En la superficie libre ($z = 0$), la tensión de corte, y en consecuencia la deformación de corte, son iguales a cero, es decir

$$\tau(0, t) = G\gamma(0, t) = G \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = 0 \quad (1.2.9)$$

Reemplazando la ecuación 1.2.8 en 1.2.9 y derivando se obtiene

$$Gik(Ae^{ik(0)} - Be^{ik(0)})e^{i\omega t} = Gik(A - B)e^{i\omega t} = 0 \quad (1.2.10)$$

que se satisface cuando $A = B$, por lo tanto, volviendo a la ecuación 1.2.8, se tiene la solución para el desplazamiento:

$$u(z, t) = 2A \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} e^{i\omega t} = 2A \cos(kz) e^{i\omega t} \quad (1.2.11)$$

que describe una onda estacionaria de amplitud $2A \cos(kz)$, producida por la interferencia constructiva de las ondas viajando hacia arriba y hacia abajo.

A través de la ecuación 1.2.11, puede definirse una *función de transferencia*, que describe la razón entre las amplitudes de los desplazamientos de dos puntos del suelo. Eligiendo los puntos superior e inferior, se obtiene la función de transferencia

$$F_1(\omega) = \frac{u_{max}(0, t)}{u_{max}(H, t)} = \frac{2Ae^{i\omega t}}{2A \cos(kH) e^{i\omega t}} = \frac{1}{\cos(kH)} = \frac{1}{\cos(\omega H/V_s)} \quad (1.2.12)$$

cuyo módulo representa la *función de amplificación*

$$|F_1(\omega)| = \left| \frac{1}{\cos(\omega H/V_s)} \right| \quad (1.2.13)$$

Dado que el denominador no puede ser mayor a 1, esto indica que el desplazamiento en la superficie siempre es a lo menos igual al de la roca, siendo muy superior en ciertas frecuencias. En el caso particular en que $\omega H/V_s$ tiende a $\pi/2 + n\pi$, el denominador tiende a cero y se produce una amplificación tendiente a infinito, o resonancia. En la Figura 1.4 se grafica esto, para un ejemplo donde $V_s = 400 [m/s]$, $H = 50 [m]$.

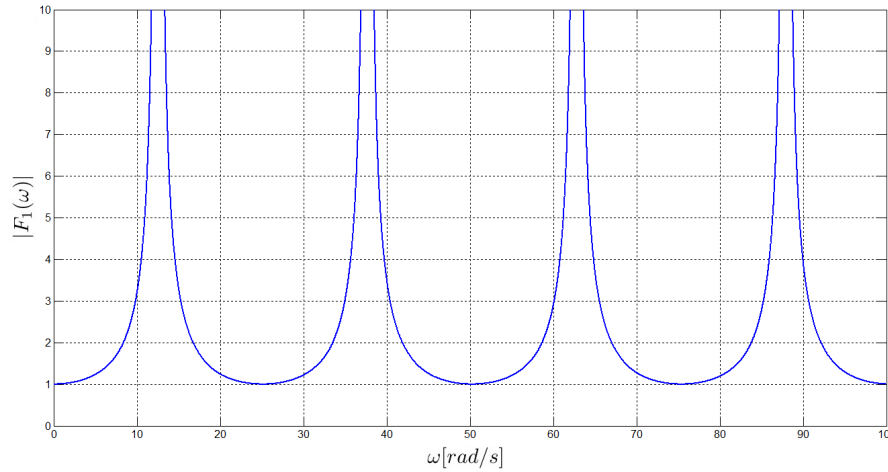


Figura 1.4: Influencia de la frecuencia en la respuesta estacionaria lineal elástica no amortiguada.

La ecuación 1.2.13 muestra que la respuesta de un depósito de suelo depende tanto de la frecuencia del movimiento basal (ω) como de la geometría del depósito (H) y las propiedades del suelo (V_s).

1.2.3. Suelo uniforme con amortiguamiento sobre roca rígida

A continuación se estudia un caso como el anterior, pero incluyendo amortiguamiento en el suelo. Esto, para considerar el hecho de que en la realidad, parte de la energía elástica de las ondas que se propagan siempre es convertida en calor, y esta conversión va acompañada con una disminución en la amplitud de la onda (Kramer, 1996). Para modelar este fenómeno se recurre al modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (ver Figura 1.5), que puede expresarse como

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \tag{1.2.14}$$

donde η , representa la viscosidad del material.

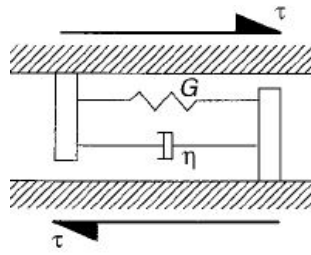


Figura 1.5: Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (Kramer, 1996).

Suponiendo una distorsión angular armónica de la forma $\gamma = \gamma_0 \text{sen}(\omega t)$, el esfuerzo de corte queda

$$\tau = G\gamma_0 \text{sen}(\omega t) + \omega\eta\gamma_0 \text{cos}(\omega t) \tag{1.2.15}$$

lo cual gráficamente representa una elipse, en el plano $\gamma - \tau$, como lo muestra la Figura 1.6.

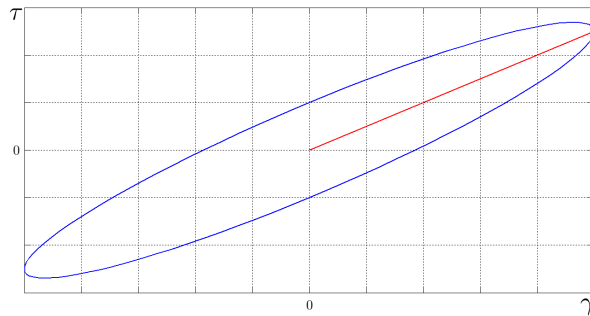


Figura 1.6: Elipse formada por el modelo Kelvin-Voigt.

La energía elástica disipada en un ciclo, ΔW , está dada por el área de la elipse, es decir

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} \tau \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt = \pi\eta\omega\gamma_0^2 \tag{1.2.16}$$

Por otro lado, la máxima energía elástica entregada en un ciclo, W , está dada por el área bajo la recta de la Figura 1.6, según

$$W = \frac{1}{2}G\gamma_0^2 \tag{1.2.17}$$

Se define la razón de amortiguamiento, ξ , como la disipación de energía normalizada por la máxima energía elástica entregada en un ciclo, dividido por 4π , lo que equivale a

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi\eta\omega\gamma_0^2}{\frac{1}{2}G\gamma_0^2} = \frac{\eta\omega}{2G} \quad (1.2.18)$$

Lo anterior implica que considerar una viscosidad η constante resulta en que la disipación de energía es directamente proporcional a la frecuencia de excitación ω . Esto no concuerda con lo observado en suelos, donde la disipación de energía es un fenómeno histerético, independiente de la frecuencia. Esta incompatibilidad entre el modelo y la realidad se soluciona utilizando una viscosidad variable, inversamente proporcional a la frecuencia, según

$$\eta = \frac{2G}{\omega}\xi \quad (1.2.19)$$

Reemplazando la ecuación 1.2.14, con $\gamma = \partial u / \partial z$, en 1.2.2 se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \quad (1.2.20)$$

Por otro lado, para ondas armónicas, el desplazamiento puede ser expresado como

$$u(z, t) = U(z)e^{i\omega t} \quad (1.2.21)$$

lo que al ser sustituido en 1.2.20 entrega la ecuación diferencial ordinaria

$$(G + i\omega\eta) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = G^* \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\rho\omega^2 U \quad (1.2.22)$$

donde $G^* = (G + i\omega\eta)$ es el módulo de corte complejo. Y usando la expresión 1.2.19 para eliminar la dependencia de la frecuencia, el módulo de corte complejo queda $G^* = G(1 + 2i\xi)$. La solución a esta ecuación diferencial se puede expresar como

$$u(z, t) = Ae^{i(\omega t + k^* z)} + Be^{i(\omega t - k^* z)} \quad (1.2.23)$$

donde $k^* = \omega\sqrt{\rho/G^*} = k_1 + ik_2$ es el número de onda complejo.

Repitiendo el álgebra utilizada en el caso no amortiguado, utilizando el número de onda complejo, se llega a la función de transferencia para el caso amortiguado:

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\cos(k^*H)} = \frac{1}{\cos(\omega H/V_s^*)} \quad (1.2.24)$$

donde la velocidad de onda de corte compleja se define como $V_s^* = \sqrt{G^*/\rho}$.

Se puede demostrar (ver por ejemplo Kramer, 1996), que para pequeños niveles de amortiguamiento, esta función de transferencia puede reescribirse como

$$F_2(\omega) \approx \frac{1}{\cos(k(1 - i\xi)H)} = \frac{1}{\cos[\omega H/V_s(1 + i\xi)]} \quad (1.2.25)$$

y la función de amplificación

$$|F_2(\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\cos^2(kH) + (\xi kH)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\omega H/V_s) + [\xi(\omega H/V_s)]^2}} \quad (1.2.26)$$

Esta ecuación indica que, al igual que en 1.2.13, existe una dependencia de la frecuencia de la sollicitación en la amplificación del movimiento en superficie. En este caso, se tendrá máximos locales cuando $kH \approx \pi/2 + n\pi$, y siempre que haya amortiguamiento ($\xi > 0$), el valor de la amplificación no tenderá a infinito como en el caso anterior, ya que el denominador siempre será mayor que cero. Esto se grafica en la Figura 1.7, donde se muestra un ejemplo para valores de $V_s = 400 [m/s]$, $H = 50 [m]$ en los casos de razones de amortiguamiento $\xi = 5\%$ y $\xi = 10\%$.

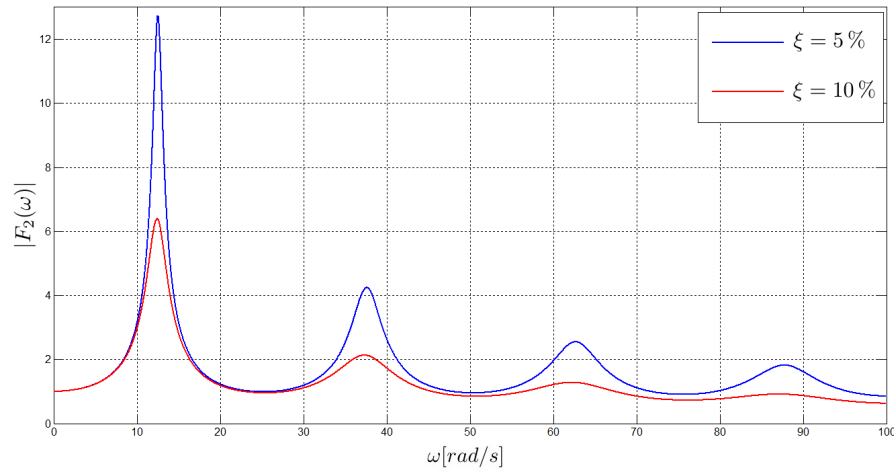


Figura 1.7: Influencia de la frecuencia en la respuesta estacionaria lineal elástica amortiguada.

Los máximos locales están asociados a las *frecuencias naturales*, ω_n , del depósito de suelo, que pueden expresarse como

$$\omega_n \approx \frac{V_s}{H} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.27)$$

Como se puede apreciar, el amortiguamiento tiene un efecto mayor en las frecuencias bajas, y va disminuyendo a medida que la frecuencia va creciendo. Es por esto, que la primera frecuencia natural ($n = 0$), donde se produce la máxima amplificación, se denomina *frecuencia fundamental*, y el periodo asociado a dicha frecuencia es llamado *periodo característico*. Este entrega una indicación útil sobre el periodo de vibración en el que se puede esperar una mayor amplificación en los suelos, y se puede expresar como

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4H}{V_s} \quad (1.2.28)$$

1.2.4. Depósito de suelo con varios estratos y amortiguamiento

En el caso de un depósito conformado por varios estratos de suelo, cada uno de propiedades G_m , ξ_m y ρ_m , como el mostrado en la Figura 1.8, se tiene que la solución

presentada en 1.2.23, a nivel de las coordenadas por estrato queda

$$u_m(z_m, t) = A_m e^{i(\omega t + k_m^* z_m)} + B_m e^{i(\omega t - k_m^* z_m)} \quad (1.2.29)$$

y el esfuerzo de corte puede expresarse como

$$\tau(z, t) = G^* \frac{\partial u}{\partial z} = (G + i\omega\eta) \frac{\partial u}{\partial z} = G(1 + 2i\xi) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.30)$$

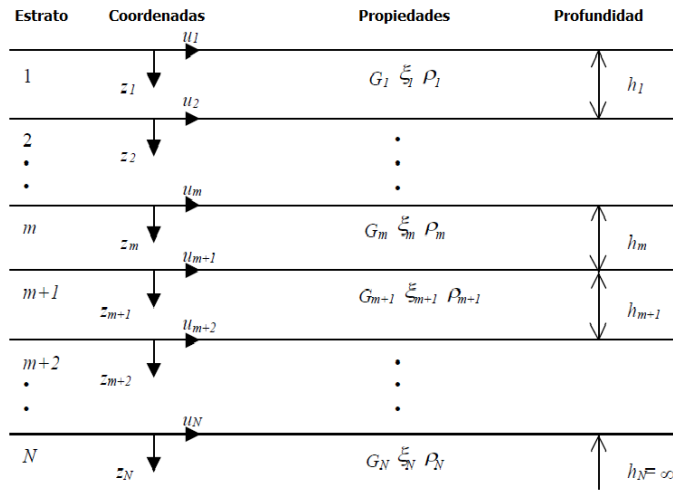


Figura 1.8: Depósito de suelo con varios estratos (modificada de Bardet, 2000).

Además, a nivel global, debe haber compatibilidad de desplazamientos y esfuerzos de corte en la interfaz entre dos estratos seguidos m y $m + 1$. Siguiendo los sistemas de referencia definidos en la Figura 1.8, esto se puede expresar como

$$u_m(z_m = h_m, t) = u_{m+1}(z_{m+1} = 0, t) \quad (1.2.31)$$

$$\tau_m(z_m = h_m, t) = \tau_{m+1}(z_{m+1} = 0, t) \quad (1.2.32)$$

Reemplazando las ecuaciones 1.2.29 y 1.2.30 en 1.2.31 y 1.2.32, y desarrollando algebraicamente, se llega a las siguientes fórmulas recursivas:

$$A_{m+1} = \frac{1}{2} A_m (1 + \alpha_m^*) e^{ik_m^* h_m} + \frac{1}{2} B_m (1 - \alpha_m^*) e^{-ik_m^* h_m} \quad (1.2.33)$$

$$B_{m+1} = \frac{1}{2}A_m(1 - \alpha_m^*)e^{ik_m^*h_m} + \frac{1}{2}B_m(1 + \alpha_m^*)e^{-ik_m^*h_m} \quad (1.2.34)$$

donde se define α_m^* como la razón de impedancia compleja según

$$\alpha_m^* = \frac{k_m^* G_m^*}{k_{m+1}^* G_{m+1}^*} = \frac{\rho_m^* (V_s^*)_m}{\rho_{m+1}^* (V_s^*)_{m+1}} \quad (1.2.35)$$

Por otro lado, la condición de borde en la superficie ($\tau = 0$) implica que $A_1 = B_1$. De esta manera, aplicando las ecuaciones 1.2.33 y 1.2.34 sucesivamente desde el estrato 1 al m , se puede llegar a ecuaciones que relacionen la amplitud del estrato m con la del 1 de la forma

$$A_m = a_m(\omega)A_1 \quad (1.2.36)$$

$$B_m = b_m(\omega)B_1 \quad (1.2.37)$$

Así, despejando para a_m y b_m , se obtiene la función de transferencia F_{ij} , que relaciona la amplitud de desplazamiento del estrato i con la del j :

$$F_{ij}(\omega) = \frac{|u_i|}{|u_j|} = \frac{a_i(\omega) + b_i(\omega)}{a_j(\omega) + b_j(\omega)} \quad (1.2.38)$$

La ecuación indica que conociendo el desplazamiento en un determinado estrato, el desplazamiento de cualquier otro estrato puede ser determinado. Y dado que para el movimiento armónico $|\ddot{u}| = \omega | \dot{u} | = \omega^2 |u|$, la ecuación también es válida para determinar la amplificación de la velocidad y aceleración.

Es común encontrar un esquema como el mostrado en la Figura 1.9, en el que existe un afloramiento rocoso que llega a la superficie. El análisis para este caso se realiza a continuación.

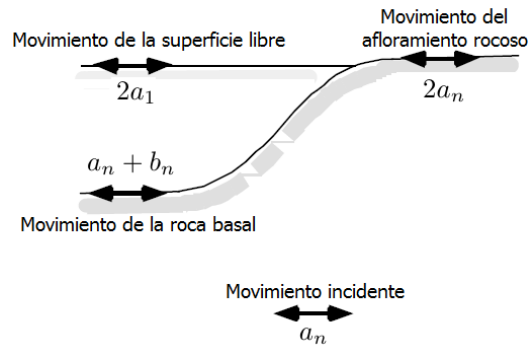


Figura 1.9: Nomenclatura utilizada en el análisis de respuesta de sitio (modificada de Bardet, 2000).

La onda incidente se propaga verticalmente hacia arriba a través de la roca (estrato n según Figura 1.8). Al no poseer una componente de onda hacia abajo, su amplitud con respecto a la superficie del suelo se reduce a a_n . Como se vio, la amplitud del movimiento en la roca basal con respecto a la superficie del suelo corresponde a $a_n + b_n$, es decir, a la superposición de ondas propagándose hacia arriba y hacia abajo. En el caso del afloramiento rocoso, al no haber esfuerzo de corte se tiene que $a_n = b_n$, y en consecuencia la amplitud con respecto a la superficie del suelo se puede escribir como $2a_n$. De esta forma, la función de transferencia que relaciona el movimiento en el afloramiento rocoso con el de la roca basal corresponde a

$$F_{nn}(\omega) = \frac{2a_n}{a_n + b_n} \quad (1.2.39)$$

Por otro lado, la función de transferencia que relaciona el movimiento en la superficie del suelo con el del afloramiento rocoso queda

$$F_{1n}(\omega) = \frac{2a_1}{2a_n} = \frac{a_1}{a_n} \quad (1.2.40)$$

1.2.5. Análisis de la respuesta sísmica mediante el enfoque lineal

La deducción de las funciones de transferencia descrita en las secciones anteriores se realizó considerando una señal en la base de tipo armónica. Sin embargo, el análisis puede ser extendido a registros sísmicos utilizando estas mismas funciones. Para

esto, el registro sísmico en la base, debe ser pasado al dominio de las frecuencias, representándolo como una serie de Fourier, normalmente utilizando una transformada rápida de Fourier. De este modo, cada término de la serie de Fourier del registro es multiplicado por la función de transferencia para producir la serie de Fourier del registro en superficie. Posteriormente, esta serie es traspasada al dominio del tiempo, mediante la transformada rápida de Fourier inversa, y de esta manera se obtiene el registro en superficie. En consecuencia, la función de transferencia determina cómo cada frecuencia del registro en la roca basal es amplificada por el depósito de suelo (Kramer, 1996). Dado que la deducción de las funciones de transferencia descansan en el principio de superposición, este enfoque está limitado a sistemas lineales. Sin embargo, el comportamiento no lineal puede ser aproximado mediante el método lineal equivalente que se describe en la siguiente sección.

1.3. Método lineal equivalente

El método lineal equivalente consiste en la modificación del modelo Kelvin-Voigt, descrito anteriormente, para incorporar ciertas no linealidades presentes en el suelo. Un suelo cualquiera, al ser ensayado en laboratorio con carga cíclica y simétrica, exhibe un ciclo de histéresis como el mostrado en la Figura 1.10. Existen dos características que describen este ciclo, que son la inclinación y el área de este. La inclinación que depende de la rigidez, puede ser descrita mediante el módulo de corte secante, G_s , según $G_s = \tau_f / \gamma_a$. Por otro lado, el área del ciclo, está asociada a la energía disipada, y en consecuencia se puede describir por medio de la razón de amortiguamiento ξ .

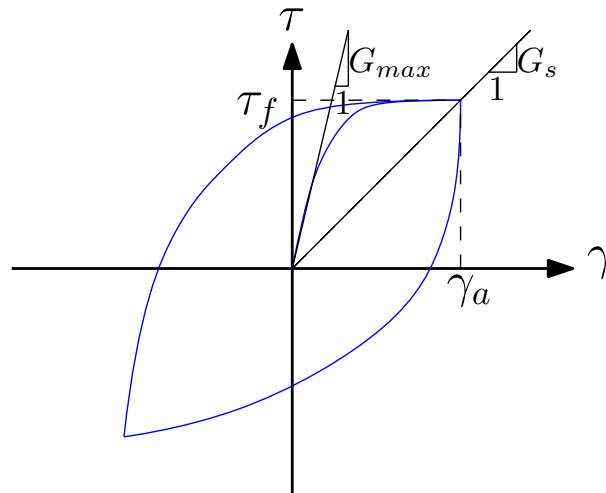


Figura 1.10: Módulo de corte máximo y secante (basada en Bardet, 2000).

Ensayos de laboratorio muestran que el módulo de corte secante de un elemento de suelo varía con la amplitud de la deformación angular cíclica. A bajos niveles de deformación, el módulo es alto, pero este decrece a medida que la amplitud de la deformación angular aumenta. Por otro lado, se observa que el área de los ciclos aumenta a medida que crecen los niveles de deformación angular cíclica, lo que indica que la razón de amortiguamiento se incrementa. Todo esto se puede observar en la Figura 1.11, que corresponde a curvas obtenidas por Darendeli (2001), a través de una extensa base de datos de varios proyectos de investigación, donde se ensayaron suelos que van desde arenas limpias hasta arcillas, a través de ensayos de columna resonante y torsión cíclica. A la curva 1.11(a) se le llama curva de degradación de la rigidez, y se grafica normalizando el valor del módulo de corte por el valor del módulo de corte máximo, G_{max} .

Esto tiene un sentido práctico, debido a que la determinación del G_{max} de un suelo se puede realizar indirectamente, midiendo la velocidad de corte V_s por medio de ensayos geofísicos (a muy bajas deformaciones), y luego obtener G_{max} , según $G_{max} = \rho V_s^2$, lo cual permite adaptar la curva de degradación al caso particular del suelo que se desea modelar.

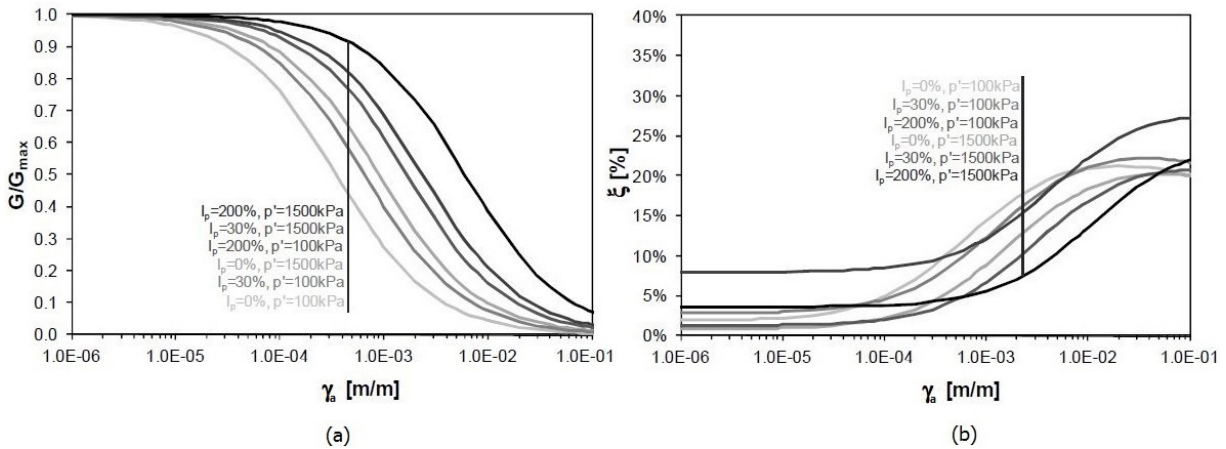


Figura 1.11: Curvas de (a) degradación de la rigidez y de (b) razón de amortiguamiento de Darendeli del 2001 (Guerreiro et al., 2012).

Como se describió anteriormente, la teoría de propagación unidimensional de onda considera valores de G y ξ constantes en cada estrato, y en consecuencia este enfoque debe ser modificado. Para considerar la no linealidad del problema, el método lineal equivalente utiliza las curvas empíricas de degradación de la rigidez y de razón de amortiguamiento para determinar los valores de G y ξ consistentes con el nivel de deformación inducido en cada estrato, mediante un proceso iterativo. El algoritmo se describe a continuación:

- 1) Iniciar con una estimación G_0 y ξ_0 para cada estrato. Generalmente, esta estimación corresponde a los valores asociados a la menor deformación.
- 2) Pasar la señal incidente al dominio de las frecuencias por medio de la transformada de Fourier.
- 3) Calcular las funciones de transferencia al centro de cada estrato desde la roca basal.
- 4) Calcular los valores de deformación angular al centro de cada estrato. Se obtienen directamente en el dominio armónico y luego se pasan al dominio del tiempo por

medio de la transformada de Fourier inversa. A partir de esta respuesta en el tiempo, determinar las amplitudes máximas de deformación angular γ_{max} para cada estrato.

5) Determinar la deformación angular efectiva de cada estrato γ_{ef} , según

$$\gamma_{ef} = R_{\gamma} \gamma_{max} \quad (1.3.41)$$

donde R_{γ} es igual para todos los estratos y se puede estimar en función de la magnitud del sismo (Idriss y Sun, 1992, como lo cita Kramer, 1996), M_s , a partir de

$$R_{\gamma} = \frac{M_s - 1}{10} \quad (1.3.42)$$

o bien como $R_{\gamma} = 0,65$ (Verdugo).

6) Calcular los nuevos valores lineales equivalentes G_{i+1} y ξ_{i+1} , correspondientes al nivel de deformación angular efectiva γ_{ef} .

7) Repetir los pasos desde el 2) hasta el 6) hasta que la diferencia entre los valores calculados para el módulo de corte y la razón de amortiguamiento, en dos iteraciones sucesivas, sea menor que cierta tolerancia (generalmente 5% a 10%). La convergencia de este método no está demostrada, pero normalmente bastan entre tres a cinco iteraciones (Schanabel et al., 1972 como lo cita Kramer, 1996).

Este algoritmo se muestra gráficamente en la Figura 1.12.

El método fue implementado originalmente en el programa SHAKE en 1972, y luego en el año 1998 fue desarrollado el programa EERA, el cual está implementado como un complemento de Excel.

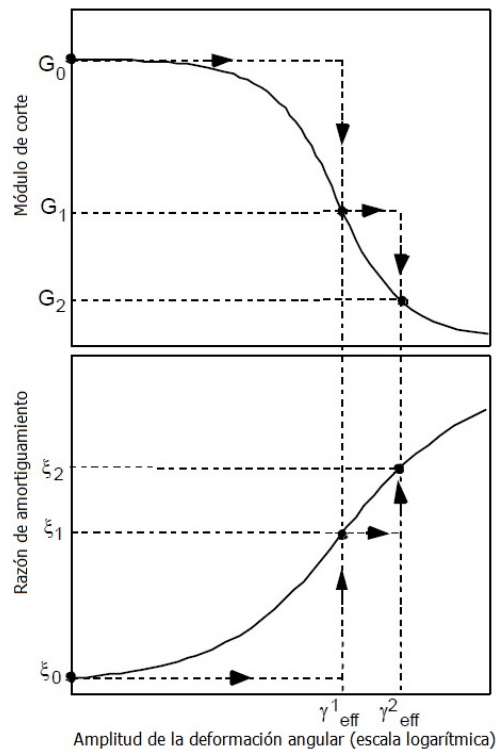


Figura 1.12: Iteración del método lineal equivalente (modificada de Bardet, 2000).

1.4. Limitaciones del análisis en el dominio de la frecuencia y motivación para el desarrollo de un código de elementos finitos

Como se ha podido constatar a lo largo del presente capítulo, el análisis en el dominio de la frecuencia ofrece un marco teórico que permite una comprensión del fenómeno de propagación de onda a través del suelo y los efectos de amplificación asociados. Además, bajo ciertas hipótesis, permite incorporar algunas no linealidades del suelo a través del método lineal equivalente. La simplicidad de este método y sus mínimos requerimientos computacionales han hecho que su uso en el estudio de la respuesta sísmica de suelos sea ampliamente adoptado. Sin embargo, este enfoque posee múltiples limitaciones, las cuales se manifiestan especialmente en el caso de movimientos sísmicos de alta intensidad y/o en el caso de grandes niveles de deformación en el suelo (Hashash et al., 2010), donde las no linealidades de este se acentúan (niveles de deformación sobre 0,2%-0,5% de acuerdo a Régner et al., 2016). Dentro de las limitaciones más relevantes del método se pueden destacar (Amorsi et al., 2010):

- El suelo es tratado bajo el enfoque de tensiones totales, no tomando en cuenta la interacción suelo-fluido en los poros, impidiendo la modelación de los cambios en la presión de poros y sus efectos en el comportamiento del suelo.
- El comportamiento cíclico del suelo es tratado bajo un modelo de histéresis completamente reversible, lo cual contrasta con el comportamiento cíclico observado, caracterizado por una alta no linealidad, una dependencia de la historia de tensión e irreversibilidad en los ciclo de histéresis.
- El método impide la modelación de problemas típicos encontrados en ingeniería en donde se requiere analizar situaciones con geometrías de mayor complejidad y/o interacción suelo-estructuras, en un dominio bidimensional o tridimensional.

Considerando lo anterior, se hace necesario recurrir al análisis en el dominio del tiempo, el cual permite superar en gran medida las limitaciones anteriormente señaladas. Esto es especialmente relevante en el contexto sismológico nacional, en donde se requiere estudiar la respuesta de sismos de gran intensidad que pueden inducir en los

suelos niveles elevados de deformación, y como consecuencia, de no linealidad y variación en la presión de poros. Este enfoque está basado en la discretización del dominio de estudio, lo que permite plantear la ecuación de movimiento dinámica utilizando métodos numéricos como el método de elementos finitos (Capítulo 2); la modelación del comportamiento no lineal del suelo se incorpora a través de modelos constitutivos, generalmente formulados en base a la teoría de plasticidad (Capítulo 3); la resolución de la ecuación de movimiento se lleva a cabo numéricamente a través de esquemas de integración en el tiempo y el modelo es truncado mediante condiciones de borde artificiales (Capítulo 4); y por último, la modelación de la interacción suelo-fluido en los poros se puede tratar de manera acoplada utilizando el enfoque de tensiones efectivas (Capítulo 5).

Debido a los diferentes aspectos de modelación involucrados en este tipo de análisis, este representa un nivel de complejidad superior al del análisis en el dominio de la frecuencia, y como consecuencia es un tema que se encuentra en constante desarrollo científico. Especial relevancia tiene el desarrollo de modelos constitutivos que puedan reproducir de manera realista el comportamiento no lineal de los suelos en un amplio rango de ciclos de histéresis, así como los cambios en la presión de poros en suelos saturados (que entre otras cosas pueden conducir al fenómeno de licuación).

Si bien existen programas comerciales que permiten realizar este tipo de modelación, estos ofrecen posibilidades acotadas de análisis. Como lo señalan Amorsi et al. (2010) en la mayor parte de los programas comerciales no se encuentran implementadas las formulaciones constitutivas más sofisticadas. Así mismo, estos ofrecen características limitadas en los demás aspectos de modelación (limitado número de condiciones de borde artificial, limitado número de esquemas de integración en el tiempo, etc.). Finalmente, muchos de estos programas (p. ej. PLAXIS) recurren a tratamientos simplificados de la interacción suelo-fluido en los poros, sin considerar una formulación completamente acoplada de esta interacción.

En este contexto surge la necesidad de desarrollar un código computacional que posibilite una línea de investigación orientada al mejoramiento de las técnicas de modelación numérica de la respuesta sísmica de suelos saturados en el contexto geológico y sísmico nacional. El objetivo a largo plazo es la implementación de la formulación hidromecánica completamente acoplada, que permite considerar simultáneamente la deformación

del esqueleto sólido del suelo y el flujo del fluido en los intersticios, en conjunto con la implementación de modelos constitutivos avanzados basados en la teoría de plasticidad para la caracterización de la fase sólida, que permitan reproducir de manera realista el comportamiento del suelo bajo un amplio rango de condiciones de carga. El propósito de este trabajo de tesis es contribuir de manera inicial a este objetivo, generando una primera versión del código, y en base a este, estudiar algunos de los principales aspectos de modelación involucrados.

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL PROBLEMA DE ELASTICIDAD

2.1. Introducción

El método de elementos finitos (MEF) es una de las herramientas numéricas más utilizadas en la actualidad para la modelación de problemas en ingeniería. Esto se debe a su extensa aplicabilidad en problemas físicos y al rápido desarrollo computacional que ha permitido su uso eficiente en la práctica.

En general, el problema físico a tratar puede ser idealizado bajo ciertos supuestos y expresado en un modelo matemático, conformado por un conjunto de ecuaciones diferenciales sujeto a condiciones de borde. Dado que las soluciones analíticas a estos problemas son muy acotadas y considerando la complejidad inherente a los problemas reales, se hace necesario recurrir a soluciones numéricas. En este contexto, el método de elementos finitos permite resolver el problema matemático de manera aproximada, mediante la discretización del dominio en un conjunto finito de partes llamadas elementos. A través de esta estrategia, el problema de ecuaciones diferenciales se trans-

forma en uno de ecuaciones matriciales definidas sobre cada elemento. El ensamblaje de las matrices asociadas a cada uno de los elementos resulta en la ecuación global que permite la solución del problema.

En el presente capítulo se aborda el método de elementos finitos en la solución del problema de elasticidad, que sirve como base para la modelación de suelos. Particularmente se desarrolla el método para el caso plano (en dos dimensiones), que será el caso implementado en el código.

2.2. Formulación general

En términos generales, se desea determinar el vector incógnita \mathbf{u} que satisface un set de ecuaciones diferenciales $\mathbf{A}(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ en cierto dominio volumétrico Ω , sumado a un conjunto de condiciones de borde, $\mathbf{B}(\mathbf{u})=\mathbf{0}$, en la frontera Γ del dominio. Se llamará a esta formulación del problema, *formulación diferencial (o formulación fuerte)*. El problema se ilustra en la Figura 2.1, donde además se ha incluido el subdominio Ω^e , correspondiente a uno de los elementos en los cuales se discretizará el continuo para la implementación del método de elementos finitos. Este elemento posee un borde Γ^e .

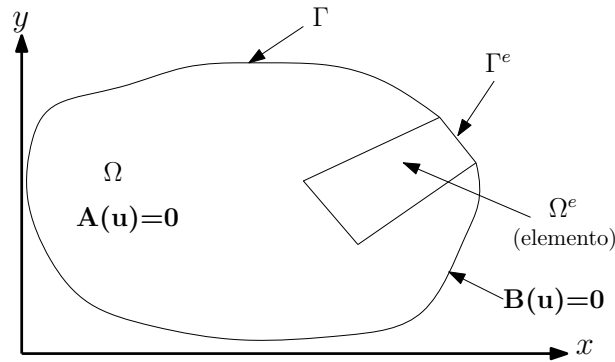


Figura 2.1: Definición del problema general (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).

En primer lugar, el problema es llevado desde su formulación diferencial a una formulación integral.

Dado que

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.2.1)$$

debe cumplirse para cada punto en el dominio Ω , entonces también debe resultar que

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} [v_1 A_1(\mathbf{u}) + v_2 A_2(\mathbf{u}) + \dots] d\Omega = 0 \quad (2.2.2)$$

donde

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.2.3)$$

es un vector de funciones arbitrarias suficientemente regulares, con un número de componentes igual al número de ecuaciones involucradas, que a su vez equivale al número de componentes del vector incógnita \mathbf{u} .

En general, es posible realizar una integración por partes de la ecuación 2.2.2, obteniéndose una expresión del tipo

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{u})d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g}(\mathbf{u})d\Gamma = \mathbf{0} \quad (2.2.4)$$

que consigue disminuir en un orden las derivadas de $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ en la integral de volumen. Esta expresión se denomina *formulación integral (o formulación débil)* del problema.

El método de elementos finitos permite encontrar una solución aproximada a este problema, de la forma:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.2.5)$$

donde \mathbf{N}_i se denominan funciones de forma y \mathbf{a}_i son parámetros a determinar.

Las funciones de forma se definen previamente en términos de variables independientes, a nivel local en cada elemento. Desde el punto de vista práctico, estas funciones deben ser algebraicamente simples, pudiendo ser polinomios o funciones trigonométricas. Por otro lado, siguiendo el método de Galerkin, el vector arbitrario \mathbf{v} puede ser expresado de la forma:

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \delta \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \delta \mathbf{a} \quad (2.2.6)$$

donde se utilizan las mismas funciones de forma \mathbf{N}_i que para \mathbf{u} y donde $\delta \mathbf{a}$ es un vector arbitrario.

Así, es posible plantear el problema aproximado para cada uno de los m elementos en que se discretiza el dominio y luego, mediante un proceso de ensamblaje, reescribir la ecuación global como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g} d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{g} d\Gamma \right) = \mathbf{0} \quad (2.2.7)$$

y resolver para \mathbf{a} .

2.3. Formulación del problema de elasticidad

Sea un cuerpo continuo, deformable, de un material lineal, elástico e isotrópico que ocupa el dominio acotado $\Omega \in \mathbb{R}^3$ como el mostrado en la Figura 2.1, con frontera $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ tal que $\Gamma = \Gamma_t \cap \Gamma_u \neq \emptyset$. Se desea determinar el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} u, v, w \end{bmatrix}^T \quad (2.3.8)$$

considerando que el cuerpo está sometido a fuerzas de cuerpo por unidad de volumen

$$\mathbf{b}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} b_x, b_y, b_z \end{bmatrix}^T \quad (2.3.9)$$

a fuerzas de superficie por unidad de área aplicadas sobre el borde Γ_t (condición de borde de Neumann)

$$\mathbf{t}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} t_x, t_y, t_z \end{bmatrix}^T \quad (2.3.10)$$

y además presenta desplazamiento nulo sobre el borde Γ_u (condición de borde de Dirichlet).

Interesa, además, determinar las deformaciones

$$\boldsymbol{\epsilon}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (2.3.11)$$

y las tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (2.3.12)$$

Las tensiones dependen de las deformaciones de acuerdo a la ley constitutiva del material y las deformaciones dependen de los desplazamientos de acuerdo a la cinemática de la deformación. En consecuencia, las tensiones son también dependientes del campo de desplazamiento, siendo este la incógnita a resolver para obtener las demás.

El material queda completamente caracterizado por su densidad ρ , su módulo de elasticidad E y su coeficiente de Poisson ν .

En la Figura 2.2 se muestra el estado tensional de un elemento volumétrico infinitesimal presente al interior del dominio Ω .

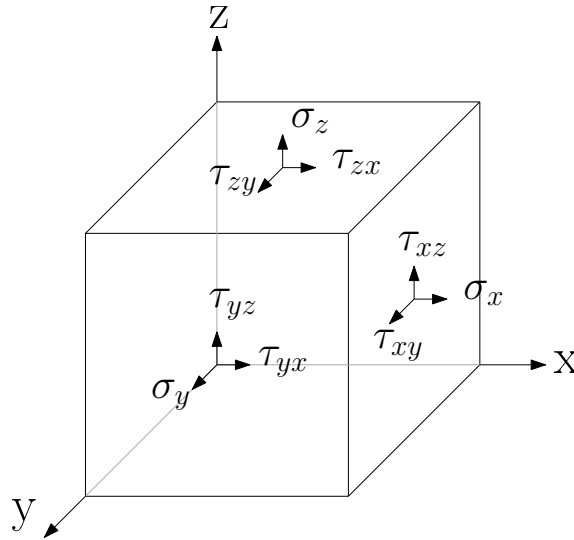


Figura 2.2: Estado tensional en un volumen infinitesimal.

Utilizando el segundo principio de Newton sobre el elemento, se obtienen las ecuaciones de equilibrio dinámico:

$$\sum F_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.3.13}$$

$$\sum F_y = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.3.14}$$

$$\sum F_z = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.3.15}$$

En la Figura 2.3 pueden visualizarse las tensiones y fuerzas de cuerpo actuando en un volumen $dx dy dz$ en el plano xz .

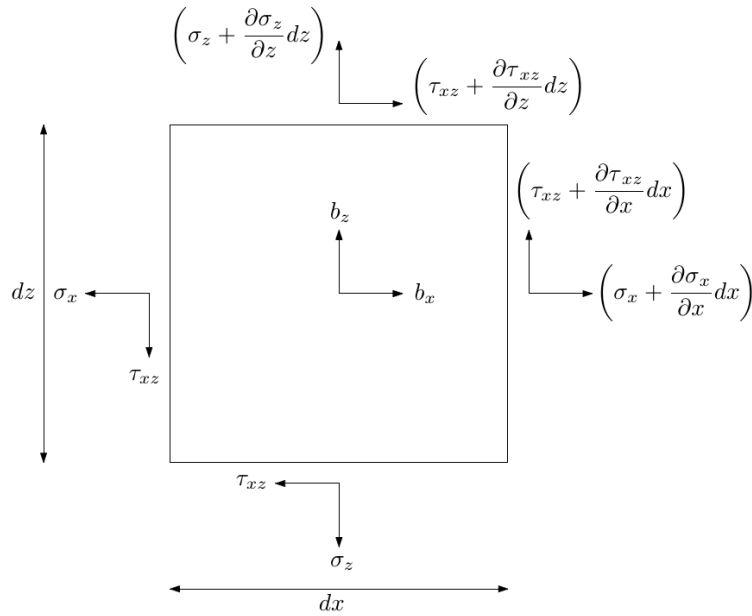


Figura 2.3: Equilibrio en un elemento diferencial en el plano xz .

Desarrollando para las fuerzas en el eje x se obtiene

$$\begin{aligned} \sum F_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + b_x (dx dy dz) = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

y simplificando

$$\sum F_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3.17)$$

Repitiendo el desarrollo para las fuerzas en y y en z se obtienen las *ecuaciones diferenciales de equilibrio*:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.3.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + b_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.3.20)$$

Como se mencionó, la tensión se relaciona con la deformación mediante la *ecuación constitutiva*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.3.21}$$

donde se define la matriz o tensor de elasticidad \mathbf{D} como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.3.22}$$

La deformación se relaciona con el desplazamiento mediante la *ecuación de compatibilidad de deformaciones*:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{2.3.23}$$

donde el operador lineal \mathbf{S} , para pequeñas deformaciones se define como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.3.24}$$

Reescribiendo la ecuación de equilibrio en la forma vectorial

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ A_3(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_x(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{u})}{\partial z} + b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{u})}{\partial z} + b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_z(\mathbf{u})}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{u})}{\partial y} + b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.25)$$

es posible llevar el problema a su formulación débil, como sigue:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[v_1 \left(\frac{\partial \sigma_x(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{u})}{\partial z} + b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + v_2 A_2(\mathbf{u}) + v_3 A_3(\mathbf{u}) \right] d\Omega = 0 \quad (2.3.26)$$

donde el vector arbitrario \mathbf{v} será expresado con la siguiente notación:

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} = \left[\delta u, \delta v, \delta w \right]^T \quad (2.3.27)$$

A continuación se integra la expresión 2.3.26 por partes mediante el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right) \right. \\ &+ \tau_{xz} \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) - \delta u \left(b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \delta v \left(b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ &\left. - \delta w \left(b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\delta u (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) + \delta v (\sigma_y n_y \right. \\ &\left. + \tau_{yx} n_x + \tau_{yz} n_z) + \delta w (\sigma_z n_z + \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y) \right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Los términos de la integral de volumen se pueden agrupar si se considera, de forma análoga a 2.3.23, la siguiente definición:

$$\delta \epsilon = \mathbf{Sv} = \mathbf{S} \delta \mathbf{u} \quad (2.3.29)$$

y además:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]^T \quad (2.3.30)$$

En el caso de la integral de superficie, aparece el término

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \quad (2.3.31)$$

que corresponde al vector unitario normal al borde Γ , orientado hacia el exterior del dominio. De esta forma, se puede definir el vector de fuerzas de superficie por unidad de área según

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (2.3.32)$$

donde \mathbf{T} corresponde al tensor de tensiones. Tomando en cuenta estas consideraciones se obtiene la formulación débil del problema:

$$\int_{\Omega} [\delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{b} - \rho\ddot{\mathbf{u}})] d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.3.33)$$

con lo cual es posible aplicar la aproximación por elementos finitos.

Derivando la expresión 2.2.5, se obtiene una aproximación para la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$:

$$\ddot{\mathbf{u}} \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{a}} \quad (2.3.34)$$

y el vector \mathbf{v} se aproxima mediante 2.2.6.

Además, se define la matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N} \quad (2.3.35)$$

y con esto:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\delta\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{N}\delta\mathbf{a} = \mathbf{B}\delta\mathbf{a} \quad (2.3.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.3.37)$$

Ahora, reemplazando estas expresiones en la formulación débil se obtiene:

$$\delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\Omega} [\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N}^T (\mathbf{b} - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}})] d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \right) = 0 \quad (2.3.38)$$

y finalmente, reordenando y considerando que $\delta \mathbf{a}$ es arbitrario, la ecuación queda:

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{a}} + \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{a} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.3.39)$$

lo cual presenta la estructura

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.3.40)$$

con la incógnitas $\mathbf{a}(t, x, y, z)$ y $\ddot{\mathbf{a}}(t, x, y, z)$.

Esta ecuación se denomina *ecuación global de movimiento* del sistema, donde se define:

M: Matriz global de masa.

K: Matriz global de rigidez.

\mathbf{f}_c : Vector global de fuerzas de cuerpo.

\mathbf{f}_s : Vector global de fuerzas de superficie.

\mathbf{f}_{ext} : Vector global de fuerzas externas.

Además, es usual incluir un término que incorpore efectos de disipación de energía. En este caso se utiliza el modelo de amortiguamiento viscoso, el cual genera una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, con lo que la ecuación de movimiento global queda:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.3.41)$$

donde se define:

C: Matriz global de amortiguamiento.

Una vez determinadas las incógnitas, es fácil obtener el campo de desplazamientos mediante 2.2.5.

2.4. MEF aplicado al caso de elasticidad plano

2.4.1. Generalidades

En esta sección se aplica el método de elementos finitos al problema de elasticidad en dos dimensiones. En este análisis particular, el campo de desplazamientos queda representado por solo dos componentes, cuyas direcciones coinciden con la de los ejes ortogonales x e y :

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.4.42)$$

En consecuencia, la deformación total en un punto queda definida, en el plano, por tres componentes y la ecuación de compatibilidad se reduce a:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t, x, y) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u}(t, x, y) \quad (2.4.43)$$

Con respecto a las tensiones, estas puede ser consideradas de dos maneras en el caso plano. El primer planteamiento es llamado *tensiones planas* y solo toma en cuenta las tres componentes de tensión en el plano xy , es decir σ_x , σ_y y τ_{xy} , siendo todas las demás iguales a cero. El segundo enfoque es el de *deformaciones planas*, que a diferencia del caso anterior, considera que la tensión en la dirección perpendicular al plano xy , σ_z , es distinta de cero, y esta puede ser evaluada a partir de las otras componentes.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la ecuación constitutiva para el caso de *tensiones planas* queda:

$$\boldsymbol{\sigma}(t, x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}(t, x, y) \quad (2.4.44)$$

En el caso de *deformaciones planas*, dado que la componente σ_z es distinta de cero el sistema queda:

$$\boldsymbol{\sigma}(t, x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1 - \nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}(t, x, y) \quad (2.4.45)$$

y dado que $\epsilon_z = 0$, la tensión en la dirección perpendicular al plano xy puede ser determinada directamente a partir de la siguiente expresión:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.4.46)$$

Como se visualiza en la Figura 2.4 el enfoque de *tensiones planas* supone que la dimensión del problema en la dirección z es muy pequeña con respecto a las otras dos. Este supuesto es válido en el análisis de cierto tipo de elementos estructurales, como placas cargadas en su plano. Por otro lado, el enfoque de *deformaciones planas* supone que la dimensión en la dirección z es muy grande con respecto a las otras dos y que las fuerzas aplicadas en el plano xy no varían a lo largo de z . En consecuencia, este último enfoque es más adecuado para problemas geotécnicos, como depósitos de suelo sujetos a carga distribuída o sometidos a un sismo en dirección x o y , que corresponde al estudio de este trabajo.

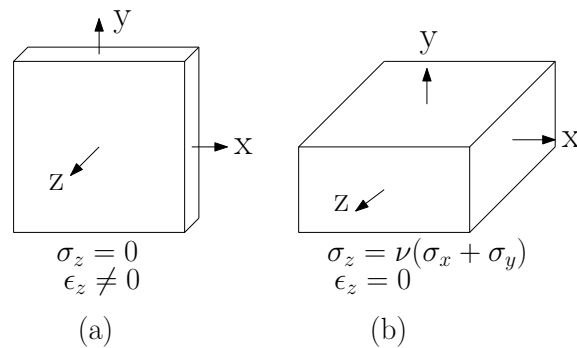


Figura 2.4: Enfoques de (a) tensiones planas y (b) deformaciones planas.

2.4.2. Aproximación del campo de desplazamientos

Como ya se ha mencionado, para aplicar el método se requiere dividir el dominio en subdominios llamados elementos, los cuales poseen cierta cantidad de nodos. A esta división del dominio se le llama malla. En la Figura 2.5 se muestra un ejemplo de malla que utiliza elementos triangulares de 3 nodos. Puede apreciarse que el desplazamiento de cada nodo es expresado en términos de una componente horizontal y una vertical. A cada una de estas componentes se le denomina grado de libertad, y son las incógnitas a resolver, agrupadas en el vector \mathbf{a} , el cual permite determinar el campo de desplazamiento en cualquier punto del dominio, como se describe a continuación.

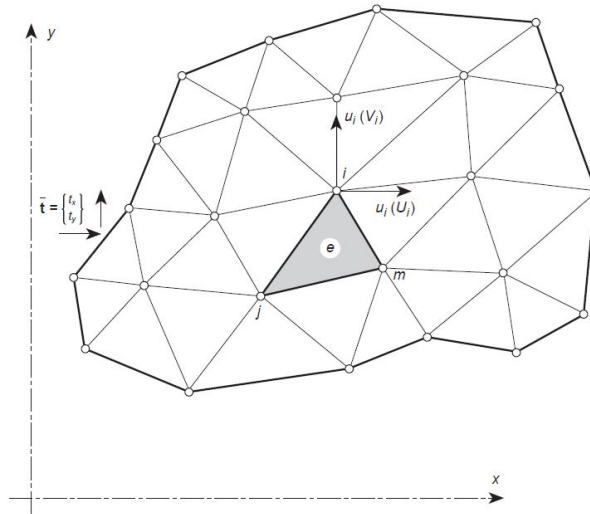


Figura 2.5: Discretización en elementos triangulares (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

La expresión de aproximación 2.2.5, puede ser utilizada para describir el desplazamiento \mathbf{u} en cualquier punto perteneciente al subdominio Ω^e correspondiente a un elemento e que posee n nodos, de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{Bmatrix} u(t, x, y) \\ v(t, x, y) \end{Bmatrix} \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k^e \mathbf{a}_k^e = \left[\mathbf{N}_i^e, \mathbf{N}_j^e, \dots, \mathbf{N}_n^e \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^e \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{a}^e(t) \tag{2.4.47}$$

donde el vector

$$\mathbf{a}_k^e(t) = \begin{Bmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{Bmatrix} \quad (2.4.48)$$

representa el desplazamiento del nodo k , el cual puede variar en el tiempo, y donde se definen n funciones de forma $N_k(x, y)$ agrupadas en las matrices

$$\mathbf{N}_k^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_k^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_k^e(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.4.49)$$

Las funciones de forma llamadas estándar son escogidas de forma tal que la función i cumpla que

$$N_i^e(x_i, y_i) = 1 \quad (2.4.50)$$

$$N_i^e(x_j, y_j) = \dots = N_i^e(x_n, y_n) = 0 \quad (2.4.51)$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas del nodo i y $(x_j, y_j) \dots (x_n, y_n)$ son las coordenadas de los $n - 1$ nodos restantes. Esto asegura que $\mathbf{u}(x_i, y_i) = \mathbf{a}_i^e$.

Las funciones definidas de esta manera cumplen la propiedad de partición de la unidad para cualquier punto (x, y) :

$$\sum_{k=1}^n N_k^e(x, y) = 1 \quad (2.4.52)$$

que asegura que al existir desplazamientos de cuerpo rígido estos no produzcan deformación en el elemento.

Además se cumple:

$$\sum_{k=1}^n N_k^e(x, y) x_i = x \quad (2.4.53)$$

$$\sum_{k=1}^n N_k^e(x, y) y_i = y \quad (2.4.54)$$

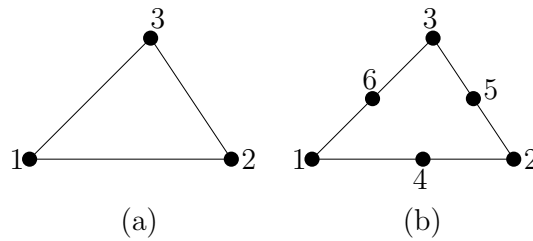


Figura 2.6: Elemento triangular (a) lineal y (b) cuadrático.

El elemento más simple en dos dimensiones es el elemento triangular. Su principal ventaja frente a los elementos rectangulares es que debido a su geometría, se adapta mejor a cualquier forma que presente el borde de un problema, aproximándolo mejor. En esta tesis se trabaja con el elemento triangular lineal (3 nodos) y el elemento triangular cuadrático (6 nodos), cuyos nodos son enumerados según se muestra en la Figura 2.6. Estos elementos son tratados según el enfoque isoparamétrico que se describe a continuación.

2.4.3. Elementos isoparamétricos

El enfoque de elementos isoparamétricos utiliza el mapeo de los elementos desde un sistema de coordenadas a otro. El primer sistema es llamado *sistema de coordenadas naturales* y el elemento expresado en dicho sistema de coordenadas $\xi\eta$ se denomina *elemento maestro*. El segundo sistema es llamado *sistema de coordenadas físicas*, debido a que este utiliza el sistema de coordenadas xy y representa al elemento como realmente se encuentra en el dominio del problema físico a tratar. La idea es trabajar sobre el elemento maestro, cuyas coordenadas son estándar, sus dimensiones unitarias y sus funciones de forma simples, realizando un mapeo mediante procedimientos matemáticos para que las propiedades obtenidas desde este elemento representen las del elemento real en coordenadas xy . La principal ventaja de trabajar así es que permite utilizar las técnicas de integración numérica de forma considerablemente más simple que si estas fueran aplicadas directamente sobre el elemento en el sistema de coordenadas físicas, dado que el elemento maestro posee un dominio normalizado.

El mapeo desde un punto (ξ, η) en las coordenadas naturales a un punto (x, y) en las

coordenadas físicas se realiza utilizando la propiedades 2.4.53 y 2.4.54:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i^e(\xi, \eta)x_i \tag{2.4.55}$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i^e(\xi, \eta)y_i \tag{2.4.56}$$

Además, el diferencial de área en coordenadas naturales puede ser mapeado a coordenadas físicas mediante

$$dxdy = \det(\mathbf{J})d\xi d\eta \tag{2.4.57}$$

donde \mathbf{J} es el Jacobiano, que se define como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.4.58}$$

cuyas componentes se obtienen derivando las expresiones 2.4.55 y 2.4.56:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{2.4.59}$$

La relación entre cada puntos del plano $\xi\eta$ y del plano xy debe ser biunívoca. Esto es equivalente a exigir que el diferencial de área $d\xi d\eta$ sea mapeado en un diferencial $dxdy$ no negativo, por lo que esta condición se asegura si el determinante del Jacobiano es positivo en todo el elemento. En términos prácticos, esto requiere evitar ángulos pequeños en los elementos, lo cual se consigue definiendo adecuadamente la malla.

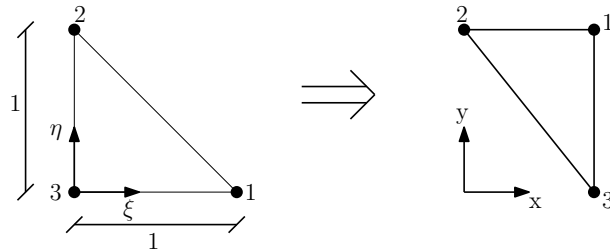


Figura 2.7: Mapeo de elemento triangular lineal (basada en Jensen, 2013).

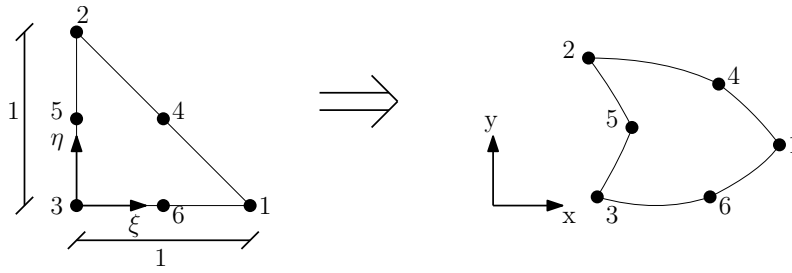


Figura 2.8: Mapeo de elemento triangular cuadrático (basada en Jensen, 2013).

En la Figura 2.7 se esquematiza el mapeo para el caso de un elemento triangular lineal, cuyas funciones de forma estándar en coordenadas naturales están dadas por:

$$N_1^e(\xi, \eta) = \xi \tag{2.4.60}$$

$$N_2^e(\xi, \eta) = \eta \tag{2.4.61}$$

$$N_3^e(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \tag{2.4.62}$$

formando la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{N}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1^e(\xi, \eta) & 0 & N_2^e(\xi, \eta) & 0 & N_3^e(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1^e(\xi, \eta) & 0 & N_2^e(\xi, \eta) & 0 & N_3^e(\xi, \eta) \end{bmatrix} \tag{2.4.63}$$

Por otro lado, en la Figura 2.8 se esquematiza el mapeo para el caso de un elemento triangular cuadrático, cuyas funciones de forma estándar en coordenadas naturales están dadas por:

$$N_1^e(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1) \tag{2.4.64}$$

$$N_2^e(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1) \tag{2.4.65}$$

$$N_3^e(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \tag{2.4.66}$$

$$N_4^e(\xi, \eta) = 4\xi\eta \tag{2.4.67}$$

$$N_5^e(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta) \tag{2.4.68}$$

$$N_6^e(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta) \tag{2.4.69}$$

formando la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{N}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1^e(\xi, \eta) & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e & 0 & N_5^e & 0 & N_6^e & 0 \\ 0 & N_1^e(\xi, \eta) & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e & 0 & N_5^e & 0 & N_6^e \end{bmatrix} \quad (2.4.70)$$

2.4.4. Integración numérica

La integración numérica juega un rol fundamental en el cálculo de las matrices y vectores elementales, y permite evitar la integración analítica, que es más compleja y en algunos casos imposible de realizar. El método más utilizado en la práctica es el de Cuadratura de Gauss-Legendre. Este es más eficiente que otros métodos debido a que especifica de forma óptima ciertos puntos de evaluación para llevar a cabo la aproximación de la integral en forma de sumatoria. En el caso de integración en dos dimensiones de una función $F(\xi, \eta)$, el método se expresa como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{l=1}^m F(\xi_l, \eta_l) P_l \quad (2.4.71)$$

para un esquema de integración de m puntos de evaluación, con sus respectivas parámetros de peso P_l .

En la Figura 2.9 se muestran algunos de los principales esquemas de integración sobre elementos triangulares.

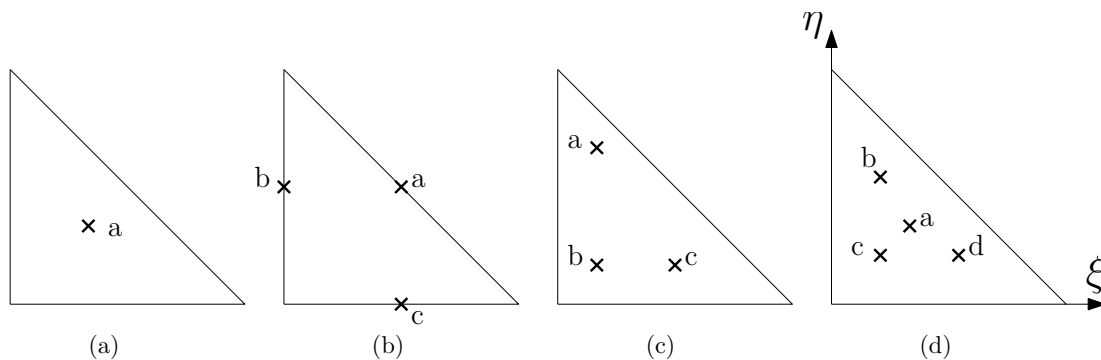


Figura 2.9: Esquemas de integración numérica para elementos triangulares.

En el caso del esquema de integración de $m = 1$ punto permite integrar exactamente un polinomio de grado 1 de la forma $F(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta$. Este esquema, corres-

pondiente a la Figura 2.9 caso (a), viene dado por el siguiente punto de evaluación y peso:

$$\xi_a = \frac{1}{3}, \eta_a = \frac{1}{3}, P_a = \frac{1}{2} \quad (2.4.72)$$

El esquema de $m = 3$ puntos permite integrar exactamente un polinomio de hasta grado 2 de la forma $F(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\eta^2$. Este corresponde a la Figura 2.9 caso (b):

$$\xi_a = \frac{1}{2}, \eta_a = \frac{1}{2}, P_a = \frac{1}{6} \quad (2.4.73)$$

$$\xi_b = 0, \eta_b = \frac{1}{2}, P_b = \frac{1}{6} \quad (2.4.74)$$

$$\xi_c = \frac{1}{2}, \eta_c = 0, P_c = \frac{1}{6} \quad (2.4.75)$$

Alternativamente se puede utilizar el esquema correspondiente a la Figura 2.9 caso (c):

$$\xi_a = \frac{1}{6}, \eta_a = \frac{2}{3}, P_a = \frac{1}{6} \quad (2.4.76)$$

$$\xi_b = \frac{1}{6}, \eta_b = \frac{1}{6}, P_b = \frac{1}{6} \quad (2.4.77)$$

$$\xi_c = \frac{2}{3}, \eta_c = \frac{1}{6}, P_c = \frac{1}{6} \quad (2.4.78)$$

El esquema de $m = 4$ puntos permite integrar exactamente un polinomio de hasta grado 3 de la forma $F(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2 + \alpha_9\xi^3 + \alpha_{10}\eta^3$. Este corresponde a la Figura 2.9 caso (d):

$$\xi_a = \frac{1}{3}, \eta_a = \frac{1}{3}, P_a = -\frac{27}{96} \quad (2.4.79)$$

$$\xi_b = 0.2, \eta_b = 0.6, P_b = \frac{25}{96} \quad (2.4.80)$$

$$\xi_c = 0.2, \eta_c = 0.2, P_c = \frac{25}{96} \quad (2.4.81)$$

$$\xi_d = 0.6, \eta_d = 0.2, P_d = \frac{25}{96} \quad (2.4.82)$$

2.4.5. Matrices y vectores elementales

2.4.5.1. Generalidades

A continuación se derivan las matrices y vectores a nivel de elemento, utilizando el enfoque de elementos isoparamétricos, de tal manera que la cuadratura de Gauss-Legendre sea aplicable de manera directa. El ensamblaje de estas matrices y vectores permite construir las matrices y vectores globales del sistema.

2.4.5.2. Matriz elemental de masa

A partir de la ecuación global 2.3.39 se define la *matriz elemental de masa* del elemento e como:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho(\mathbf{N}^e(x, y))^T \mathbf{N}^e(x, y) dx dy \quad (2.4.83)$$

la cual, utilizando el enfoque de elemento isoparamétrico, puede reescribirse como:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \rho(\mathbf{N}^e(\xi, \eta))^T \mathbf{N}^e(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (2.4.84)$$

Consideraciones sobre la matriz de masa serán tratadas en el Capítulo 4.

2.4.5.3. Matriz elemental de rigidez

A partir de 2.3.39 se define la *matriz elemental de rigidez* del elemento e como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e(x, y))^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e(x, y) dx dy \quad (2.4.85)$$

que puede reescribirse como:

$$\mathbf{K}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (\mathbf{B}^e(\xi, \eta))^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (2.4.86)$$

Para elementos triangulares lineales:

$$\mathbf{B}^e(\xi, \eta) = \mathbf{S}\mathbf{N}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.4.87)$$

y para elementos triangulares cuadráticos:

$$\mathbf{B}^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & \frac{\partial N_5^e}{\partial y} & \frac{\partial N_5^e}{\partial x} & \frac{\partial N_6^e}{\partial y} & \frac{\partial N_6^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.4.88)$$

donde los términos de las matrices pueden ser determinados utilizando la expresión

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.4.89)$$

2.4.5.4. Matriz elemental de amortiguamiento

En general, se utiliza un amortiguamiento tipo Rayleigh, que significa que la matriz elemental de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa y a la de rigidez, por medio de dos constantes. Se ahondará en este tema en el Capítulo 4.

2.4.5.5. Vector elemental de fuerzas de cuerpo

A partir de 2.3.39 se define el *vector elemental de fuerzas de cuerpo* del elemento e como:

$$\mathbf{F}_c^e = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^e(x, y))^T \mathbf{b} dx dy \quad (2.4.90)$$

que puede reescribirse como:

$$\mathbf{F}_c^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (\mathbf{N}^e(\xi, \eta))^T \mathbf{b} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (2.4.91)$$

En general, las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen corresponden al peso específico del cuerpo, y en consecuencia la expresión queda

$$\mathbf{F}_c^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (\mathbf{N}^e(\xi, \eta))^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (2.4.92)$$

Para el caso de elementos triangulares lineales la integral se reduce a

$$\mathbf{F}_c^e = -\gamma \det(\mathbf{J}) \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} 0, \xi, 0, \eta, 0, 1 - \xi - \eta \end{bmatrix}^T d\xi d\eta \quad (2.4.93)$$

y dado que los polinomios son de grado 1, se requiere un esquema de integración de solo un punto para que la integral calculada por cuadratura de Gauss-Legendre sea exacta, quedando:

$$\mathbf{F}_c^e = -\frac{1}{2} \gamma \det(\mathbf{J}) \begin{bmatrix} 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T = -\gamma A \begin{bmatrix} 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \quad (2.4.94)$$

Esto equivale asignar a cada nodo un tercio del peso del elemento.

2.4.5.6. Vector elemental de fuerzas de superficie

A partir de 2.3.39 se define el *vector elemental de fuerzas de superficie* del elemento e como:

$$\mathbf{F}_s^e = \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^e(x, y))^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.4.95)$$

Comúnmente en problemas geotécnicos se requiere aplicar una carga distribuida sobre la superficie horizontal del dominio simulando el peso de una fundación. Suponiendo una carga uniformemente distribuida $-q$, actuando verticalmente, el cálculo del vector elemental de fuerzas de superficie se reduce a determinar las cargas puntuales equivalente sobre los nodos superficiales del elemento, como lo muestra la Figura 2.12(a). Para esto se recurre a las funciones de forma de elementos unidimensionales.

En el caso de elementos triangulares lineales se trabaja con elementos unidimensionales de dos nodos. Las funciones de forma se muestran en la Figura 2.10, donde se ha considerado el largo del elemento $L = 2a$.

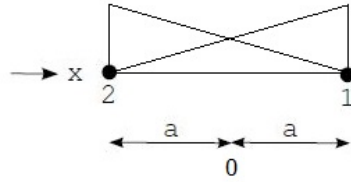


Figura 2.10: Funciones de forma para elemento unidimensional de dos nodos (modificado de Jensen, 2013).

Estas corresponden a

$$N_1^e(x, y) = \frac{a + x}{2a} \tag{2.4.96}$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{a - x}{2a} \tag{2.4.97}$$

$$\tag{2.4.98}$$

formando la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e(x, y) & 0 & N_2^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_1^e(x, y) & 0 & N_2^e(x, y) \end{bmatrix} \tag{2.4.99}$$

y desarrollando la integral se obtiene

$$\mathbf{F}_s^e = \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^e(x, y))^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} d\Gamma = -q \int_{-a}^a \left[0, \frac{a+x}{2a}, 0, \frac{(a-x)}{2a} \right]^T dx \tag{2.4.100}$$

$$\mathbf{F}_s^e = -q \left[0, a, 0, a \right]^T = -q \left[0, L/2, 0, L/2 \right]^T \tag{2.4.101}$$

En el caso de elementos triangulares cuadráticos se trabaja con elementos unidimensionales de tres nodos. Las funciones de forma se muestran en la Figura 2.11.

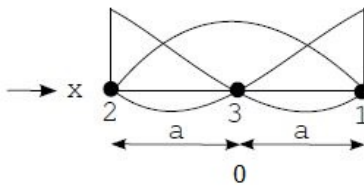


Figura 2.11: Funciones de forma para elemento unidimensional de tres nodos (modificada de Jensen, 2013).

Estas corresponden a

$$N_1^e(x, y) = \frac{x(a+x)}{2a^2} \quad (2.4.102)$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{-x(a-x)}{2a^2} \quad (2.4.103)$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad (2.4.104)$$

formando la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e(x, y) & 0 & N_2^e(x, y) & 0 & N_3^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_1^e(x, y) & 0 & N_2^e(x, y) & 0 & N_3^e(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.4.105)$$

y desarrollando la integral se obtiene

$$\mathbf{F}_s^e = \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^e(x, y))^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} d\Gamma = -q \int_{-a}^a \left[0, \frac{x(a+x)}{2a^2}, 0, \frac{-x(a-x)}{2a^2}, 0, \frac{a^2-x^2}{a^2} \right]^T dx \quad (2.4.106)$$

$$\mathbf{F}_s^e = -q \left[0, a/3, 0, a/3, 0, 4a/3 \right]^T = -q \left[0, L/6, 0, L/6, 0, 2L/3 \right]^T \quad (2.4.107)$$

Las distribuciones obtenidas se muestran en la Figura 2.12, donde también se ha incluido el caso de una carga distribuida triangular.

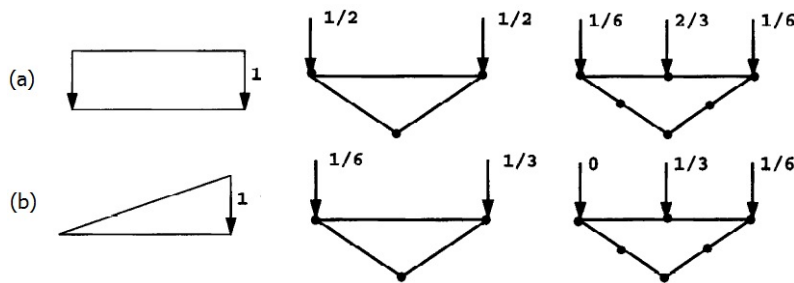


Figura 2.12: Fuerza nodal equivalente para (a) carga uniformemente distribuida y (b) carga triangular (Smith & Griffiths, 2004).

ANÁLISIS NO LINEAL

3.1. Introducción

Incluso a relativamente bajas deformaciones, los suelos presentan un comportamiento no lineal (Hashash et al., 2010). En consecuencia, es imprescindible incluir este aspecto en la modelación numérica. Manteniendo la teoría de elementos finitos para el problema elástico, tratada en el Capítulo 2, se debe agregar el análisis no lineal, que se desarrolla en dos niveles. En el primer nivel (global) se busca encontrar el equilibrio entre las fuerzas internas desarrolladas en el sistema y las fuerzas externas que actúan sobre este. Estas deben ser aplicadas de manera incremental debido a la no linealidad, y por lo mismo, el proceso es iterativo. Para esto se utiliza el método de Newton-Raphson, el cual, como se explicará, posee tres variantes. Por otro lado, en el segundo nivel (local) se busca evaluar la variación que experimenta la tensión en cada punto de integración del dominio (puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre) a medida que la fuerza externa se incrementa, para de este modo actualizar las fuerzas internas del sistema. En este caso se recurre a la teoría de plasticidad, que permite la formulación de modelos constitutivos que pueden describir, con mayor o menor exactitud, las principales características del comportamiento de los suelos observado en laboratorio. Dentro de estos modelos, el modelo Mohr-Coulomb representa una primera aproximación al comportamiento no lineal de los suelos, por lo que será el modelo implementado en el código de elementos finitos. Tiene como ventaja el utilizar pocos parámetros y el bajo

costo computacional que implica su uso, con respecto a otros modelos más avanzados. Uno de los problemas para su implementación dentro de un esquema numérico, es la presencia de singularidades en su superficie de fluencia. Este problema ha sido tratado por varios autores, y en este capítulo se presenta la formulación planteada por Clausen et al. (2007), que incorpora la superficie de fluencia y el potencial plástico de manera exacta.

El presente capítulo está acotado al análisis estático, pero en el Capítulo 4 este es extendido al caso dinámico.

3.2. Resolución global del problema no lineal

3.2.1. Formulación incremental del problema

El análisis con carga estática supone que las fuerzas externas son aplicadas lo suficientemente lento para que las fuerzas de inercia sean consideradas nulas. De esta forma, la formulación débil del problema de elasticidad 2.3.33 puede reescribirse, para el caso estático, de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.2.1)$$

que para el caso lineal elástico equivale a

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.2.2)$$

o bien

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.2.3)$$

Para abordar el problema no lineal, debe considerarse el hecho de que el material irá cambiando sus propiedades mecánicas a medida que se vaya produciendo el incremento en la carga aplicada sobre él y en consecuencia, no es factible utilizar la formulación anterior directamente con el valor total de la fuerza externa. Para afrontar esto, el análisis debe ser realizado aplicando la fuerza externa en forma creciente, a través de una serie de pasos de carga, verificando el equilibrio en cada paso. Es decir, para un paso de carga i , la fuerza externa aplicada será

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}^i = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{i-1} + \Delta \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.2.4)$$

y se deberá verificar el equilibrio global

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}^i - \mathbf{f}_{\text{int}}^i = 0 \quad (3.2.5)$$

donde:

$\mathbf{f}_{\text{ext}}^i$: Vector global de fuerzas externas nodales en el paso i .

$\mathbf{f}_{\text{int}}^i$: Vector global de fuerzas internas nodales en el paso i .

Para esto, la formulación débil se puede reescribir en la forma incremental

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^i d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}^i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{i-1} d\Omega \quad (3.2.6)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.2.7)$$

Aplicando la aproximación por el método de elementos finitos, tal como en el Capítulo 2, esta formulación puede ser expresada en los siguientes términos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^i d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i-1} d\Omega \quad (3.2.8)$$

presentando la estructura

$$\mathbf{K}^i \boldsymbol{\Delta} \mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^i - \mathbf{f}_{\text{int}}^{i-1} \quad (3.2.9)$$

donde

\mathbf{K}^i : Matriz de rigidez correspondiente a la configuración del sistema en el paso i .

3.2.2. Método de Newton-Raphson

3.2.2.1. Algoritmo

Dado que la relación constitutiva del material es no lineal, se requiere de un método iterativo para poder resolver el equilibrio (ecuación 3.2.5) en cada paso de carga. Para esto se recurre al método de Newton-Raphson, que para la iteración j del paso de carga i , se puede expresar como

$$\mathbf{K}^{i,j-1} \delta \mathbf{a}^j = \mathbf{f}_{\text{ext}}^i - \mathbf{f}_{\text{int}}^{i,j-1} = \mathbf{r}^{i,j-1} \quad (3.2.10)$$

y resolviendo para $\delta \mathbf{a}^j$, se obtiene

$$\mathbf{a}^{i,j} = \mathbf{a}^{i,j-1} + \delta \mathbf{a}^j \quad (3.2.11)$$

donde $\mathbf{r}^{i,j-1}$ se denomina vector de desbalance de fuerzas y $\delta \mathbf{a}^j$ corresponde al vector de sub-incremento del desplazamiento nodal en la interacción j , que contribuye al incremento de desplazamiento nodal del paso i :

$$\Delta \mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^n \delta \mathbf{a}^j \quad (3.2.12)$$

donde n es el número de iteraciones en el paso de carga i .

En cada iteración j , se determina el vector $\mathbf{a}^{i,j}$ que es utilizado para evaluar las tensiones internas y actualizar el vector \mathbf{f}_{int} y la matriz \mathbf{K} de la iteración $j + 1$. El vector de desbalance de fuerzas representa el hecho de que la fuerza externa del paso i aún no está en equilibrio con las tensiones internas en la iteración j , requiriéndose un sub-incremento adicional de los desplazamientos nodales. Este procedimiento iterativo se realiza hasta que el vector de desbalance tiende a cero, definiéndose un error que debe cumplir cierta tolerancia. De esta forma es posible obtener una aproximación para \mathbf{a}^i y continuar con el paso de carga $i + 1$.

El método se esquematiza en la Figura 3.1:

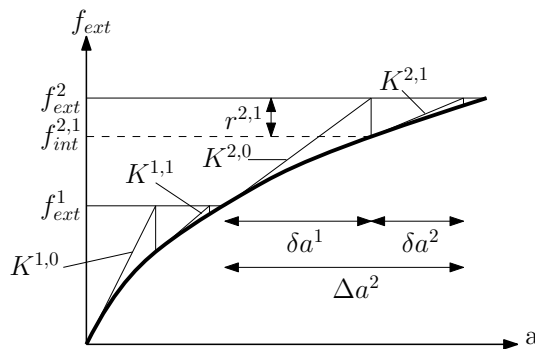


Figura 3.1: Algoritmo de Newton Raphson.

Como se puede apreciar, la rigidez $\mathbf{K}^{i,j-1}$ se actualiza en cada iteración, y corresponde a la rigidez tangente. Así el método, se le denomina *método de Newton-Raphson completo*, pero existen dos modificaciones de este algoritmo: si la matriz de rigidez solo se actualiza

al inicio de cada paso de carga i , es decir, \mathbf{K}^i , el método es llamado *Newton-Raphson modificado*. Si la rigidez solo se calcula inicialmente, es decir, \mathbf{K}^0 , el método se llama *método de rigidez inicial*. Estas variaciones son mostradas en la Figura 3.2.

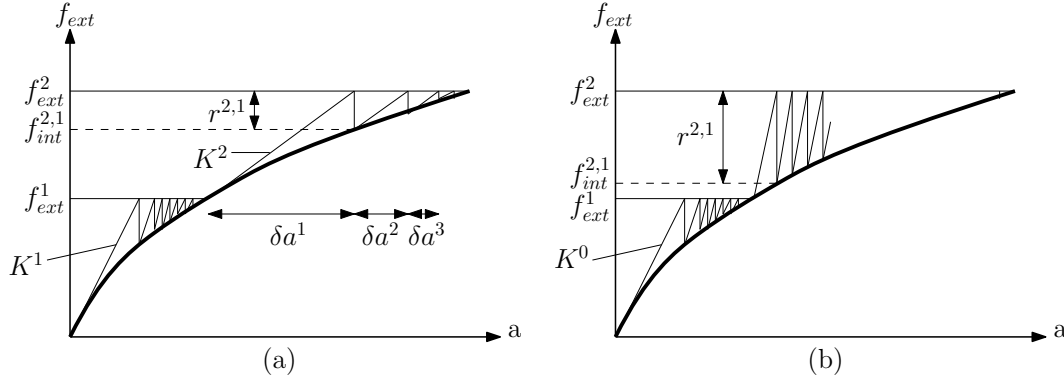


Figura 3.2: Algoritmos de (a) Newton-Raphson modificado y de (b) rigidez inicial.

Como lo señalan Dang et al. (2014), en general, el método de Newton Raphson completo tiene una convergencia rápida, pero requiere de un costo computacional elevado, especialmente cuando se utilizan leyes constitutivas complejas, como por ejemplo, cuando se ocupa una regla de flujo no asociada (tema que se verá en las próximas secciones), dado que normalmente esto genera una matriz global de rigidez no simétrica. Por otro lado, el método de Newton Raphson modificado requiere de un menor costo computacional, pero ofrece una velocidad de convergencia menor que el método de Newton-Raphson completo. Finalmente, el método de rigidez inicial es un método robusto con respecto a los otros dos, pero requiere de un gran número de iteraciones.

3.2.2.2. Actualización de las tensiones

Como se mencionó anteriormente, una vez determinado el sub-incremento de desplazamiento nodal $\delta \mathbf{a}^j$ al final de la iteración j , se debe actualizar el estado de tensiones del material. Esto se resuelve a nivel de cada punto de integración (puntos de la cuadratura Gauss-Legendre de cada elemento). En primer lugar se requiere determinar el sub-incremento de deformación, $\delta \boldsymbol{\epsilon}^j$, del punto (ξ, η) según

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^j = \mathbf{B}^e(\xi, \eta)(\delta \mathbf{a}^e)^j \quad (3.2.13)$$

y de esta forma se actualiza el incremento de deformación, $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^i$, según

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^i = \sum_{j=1}^n \delta \boldsymbol{\epsilon}^j = \mathbf{B}^e(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})(\Delta \mathbf{a}^e)^i \quad (3.2.14)$$

Luego, el estado de tensiones en el punto se debe calcular mediante

$$\boldsymbol{\sigma}^{i,j} = \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^i \quad (3.2.15)$$

resolviendo la integral

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^i = \int_{\boldsymbol{\epsilon}^{i-1}}^{\boldsymbol{\epsilon}^{i-1} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^i} \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2.16)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{i-1}$ corresponde al último estado de tensión aceptado del paso anterior ($i-1$), $\boldsymbol{\epsilon}^{i-1}$ es la deformación asociada a ese estado de tensión y \mathbf{D}^{ep} es la matriz constitutiva de tensión-deformación del material. Es importante que esta integración siempre se realice desde el último estado de deformación que tuvo convergencia ($\boldsymbol{\epsilon}^{i-1}$) hasta el estado de deformación actual, para que de esta manera el resultado final al momento de converger no esté afectado por los errores en los desplazamientos y deformaciones que surgieron durante el proceso iterativo (Bathe & Cimento, 1980).

La resolución de esta integral para un determinado modelo constitutivo basado en la teoría de plasticidad se tratará en profundidad en las siguientes secciones del presente capítulo.

3.2.2.3. Actualización del vector de fuerzas nodales internas

Una vez determinado el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}^{i,j}$ de todos los puntos de integración, el vector de fuerzas internas $\mathbf{f}_{\text{int}}^e{}^{i,j-1}$ se obtiene a nivel de elemento según

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e{}^{i,j} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i,j} d\Omega \quad (3.2.17)$$

que puede reescribirse como

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e{}^{i,j} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}(\xi, \eta)^T \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta)^{i-1} \det(\mathbf{J}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (3.2.18)$$

y ser integrado numéricamente mediante cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e{}^{i,j} \approx \sum_{l=1}^m \mathbf{B}(\xi_l, \eta_l)^T \boldsymbol{\sigma}(\xi_l, \eta_l)^{i-1} \det(\mathbf{J}(\xi_l, \eta_l)) W_l \quad (3.2.19)$$

3.2.2.4. Criterio de convergencia

Para definir cuándo se ha cumplido el equilibrio, se puede definir el error global según un criterio de fuerzas, como

$$e^{i,j} = \frac{\|\mathbf{r}^{i,j}\|_2}{\|\mathbf{f}_{\text{ext}}^i\|_2} \quad (3.2.20)$$

donde

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_k (x_k)^2} \quad (3.2.21)$$

y una cierta tolerancia e_{tol} . Con esto:

Si $e^{i,j} > e_{tol} \implies$ Se sigue iterando ($j = j + 1$).

Si $e^{i,j} \leq e_{tol} \implies$ Se pasa al siguiente paso de carga ($i = i + 1$).

3.3. Teoría de Plasticidad

3.3.1. Generalidades

Para determinar la relación entre los incrementos de deformación y tensión en suelos, son ampliamente utilizados los modelos constitutivos basados en la teoría de plasticidad. El comportamiento mecánico de los suelos tiene una fuerte dependencia del nivel de tensiones, la presión de poros, historia, dirección de los incrementos de cargas y estructura del material, y en este sentido, la teoría de plasticidad ofrece un marco teórico consistente, que permite su entendimiento y predicción. Debido a los avances en las capacidades de los computadores y métodos numéricos, a lo largo del tiempo se ha desarrollado una gran gama de modelos constitutivos que permiten representar la mayor parte de las características observadas en los suelos.

Una descripción extensa de la teoría de plasticidad puede encontrarse en Zienkiewicz et al. (1999) y Potts et al. (1999). A continuación se presentan los principales aspectos, con un enfoque en la implementación de estos modelos en el marco del método de elementos finitos.

Un primer supuesto de la teoría de plasticidad es que un incremento en la deformación total puede ser expresado como la suma de una componente elástica y una plástica:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (3.3.22)$$

Por otro lado, se supone que sólo la componente elástica de la deformación genera cambios en las tensiones. En consecuencia, la ecuación constitutiva 2.3.21, puede reescribirse de forma incremental como:

$$d\sigma = \mathbf{D}d\epsilon^e = \mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon^p) \quad (3.3.23)$$

El cálculo de las deformaciones plásticas se realiza por medio de tres propiedades que caracterizan el comportamiento del material: una *Función de Fluencia*, que define si el material ha iniciado el flujo plástico o si se encuentra en el rango elástico; una *Regla de Flujo*, que relaciona el incremento de deformación plástica con el estado actual de

tensiones y el incremento de estas; y una *Regla de Endurecimiento*, que especifica cómo la función de fluencia cambia a medida que se desarrolla el flujo plástico.

Conviene, como se explicará más adelante, trabajar en el espacio de las tensiones principales, es decir

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.3.24)$$

Para esto, dado el tensor general de tensiones

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.3.25)$$

las tensiones principales son obtenidas mediante la resolución del problema de valores y vectores propios

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) p_j^{(k)} \quad (3.3.26)$$

donde σ_{ij} son las componentes del tensor, las tensiones principales, σ_k , son los valores propios del tensor y las direcciones principales, $p_j^{(k)}$, son los vectores propios. Luego, las tensiones principales se obtienen resolviendo

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) = 0 \quad (3.3.27)$$

3.3.2. Función de fluencia

Se define la función de fluencia, o superficie de fluencia, como una función escalar dependiente del estado de tensiones y de los parámetros de estado \mathbf{k} relacionados con el endurecimiento del material:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = 0 \quad (3.3.28)$$

En el caso de modelos constitutivos elastoplásticos perfectos (sin endurecimiento), \mathbf{k} es constante y representa la magnitud de las tensiones en la fluencia, con lo que se tiene $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

La función divide el comportamiento puramente elástico del comportamiento elastoplástico. Así, el valor de f es utilizado para identificar el tipo de comportamiento del material, de la siguiente manera:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) < 0 : \text{Comportamiento elástico} \quad (3.3.29)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = 0 : \text{Comportamiento plástico o elastoplástico} \quad (3.3.30)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) > 0 : \text{Comportamiento inadmisibile} \quad (3.3.31)$$

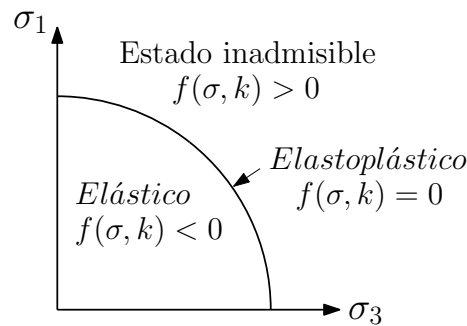


Figura 3.3: Superficie de fluencia.

Así por ejemplo, si la función f es expresada en términos de las tensiones principales σ_1 , σ_3 y $\sigma_2 = 0$, esto puede ser visualizado en la Figura 3.3. Lo anterior deja de manifiesto que el valor de f solo podrá ser igual o menor a 0 para que el problema tenga sentido físico.

3.3.3. Regla de flujo y potencial plástico

La regla de flujo define cómo evolucionan las deformaciones plásticas para cada estado de tensiones y se expresa de la siguiente forma:

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\lambda^p \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda^p \mathbf{g}_g \quad (3.3.32)$$

donde:

$d\lambda^p \geq 0$: Multiplicador plástico.

g : Potencial plástico.

En esta expresión, el multiplicador plástico, que se obtendrá más adelante, es un escalar que controla la magnitud del flujo plástico (incremento de deformaciones plásticas), mientras que \mathbf{g}_g controla la dirección de dicho flujo.

El potencial plástico, g , se define como una función escalar dependiente del estado de tensiones y de los parámetros de estado \mathbf{m} :

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = 0 \quad (3.3.33)$$

Se puede notar que el vector de incremento de deformación plástica es normal al potencial plástico. Esto se puede visualizar en la Figura 3.4, donde se ha graficado el potencial plástico en el espacio de tensiones principales, considerando $\sigma_2 = 0$.

Como se puede apreciar, debido a la forma de la regla de flujo, los ejes de las tensiones principales (direcciones principales) coinciden con los de los incrementos de deformación plástica. Esto difiere del problema elástico, en que las direcciones principales coinciden con los incrementos de deformación total.

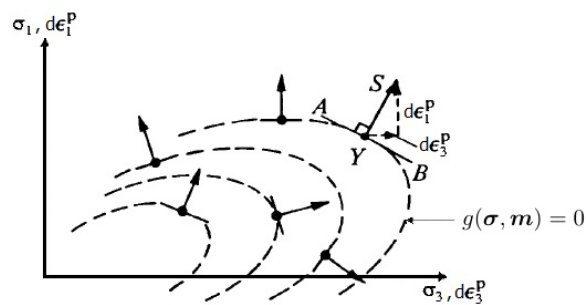


Figura 3.4: Regla de flujo (modificada de Karstunen).

En algunos casos se puede considerar que el potencial plástico coincide con la función de fluencia ($g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})$), y entonces se dice que la regla de flujo es *asociada*. En dicho caso, el vector de incremento de deformación plástica es normal a la superficie de fluencia. Sin embargo, para materiales como los suelos, el uso de una regla de flujo

asociada tiende a sobrestimar la dilatancia, que es la capacidad del suelo de aumentar su volumen al ser sometido a fuerzas de corte. Por esto, en general $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) \neq f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})$, y a este tipo de regla de flujo se le denomina *no asociada*.

3.3.4. Regla de endurecimiento

Las reglas de endurecimiento determinan cómo los parámetros de estado \mathbf{k} varían con las deformaciones plásticas, y en consecuencia cómo cambia la función de fluencia. Esto se puede ejemplificar pensando en un ensayo de compresión unidimensional. Una vez que el material ha llegado a la fluencia, la tensión de fluencia puede ser graficada, como en la Figura 3.5. Como se muestra en la figura, hay una variación de la tensión de fluencia (función de fluencia en el caso general) a medida que transcurren las deformaciones plásticas. Dependiendo del tipo de comportamiento a la regla se le llama de endurecimiento o reblandecimiento.

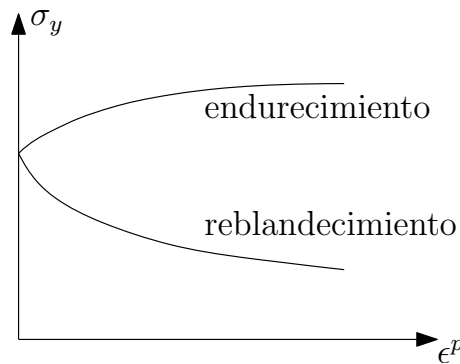


Figura 3.5: Regla de endurecimiento/reblandecimiento (basada en Potts et al., 1999).

3.3.5. Relación incremental tensión-deformación total

La relación constitutiva incremental 3.3.23 puede ser reescrita en términos de la deformación total $\boldsymbol{\epsilon}$. Para esto, se reemplaza la ecuación 3.3.32 en 3.3.23, obteniéndose

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{D} \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda^p \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (3.3.34)$$

Además, deben cumplirse las tres condiciones de carga-descarga de Kuhn-Tucker:

$$d\lambda^p \geq 0, \quad f \leq 0, \quad d\lambda^p f = 0 \quad (3.3.35)$$

La primera condición asegura que el multiplicador plástico no es negativo, mientras que la segunda indica que el estado de tensión debe permanecer o dentro o sobre la superficie de fluencia. La tercera condición asegura que las tensiones deben permanecer en la superficie de fluencia ($f = 0$) durante la carga plástica ($d\lambda^p > 0$). Para asegurar esta última condición, se debe imponer la condición de consistencia $df = 0$, que para materiales sin endurecimiento y deformaciones planas, puede expresarse como:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} d\sigma_z = 0 \quad (3.3.36)$$

o bien:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.3.37)$$

Reemplazando 3.3.35 en la ecuación anterior:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda^p \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = 0 \quad (3.3.38)$$

de donde se puede despejar el multiplicador plástico:

$$d\lambda^p = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad (3.3.39)$$

Esto permite, tras un trabajo algebraico, expresar la relación constitutiva de la siguiente manera:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.3.40)$$

donde se define la matriz tensión-deformación elastoplástica como:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p \quad (3.3.41)$$

y la matriz tensión-deformación plástica como:

$$\mathbf{D}^p = \frac{\mathbf{D} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad (3.3.42)$$

3.4. Modelo constitutivo Mohr-Coulomb

3.4.1. Generalidades

El modelo de Mohr-Coulomb representa una primera aproximación al comportamiento de los suelos. Este no presenta endurecimiento y queda definido por cinco parámetros:

E : Módulo de Young.

ν : Módulo de Poisson.

c : Cohesión.

ϕ : Ángulo de fricción interna.

ψ : Ángulo de dilatancia.

Para visualizar el tipo de aproximación que hace este modelo, en la Figura 3.6 se muestra la modelación de un ensayo triaxial mediante el modelo de Mohr-Coulomb junto a un resultado típico de un ensayo triaxial para una arena densa.

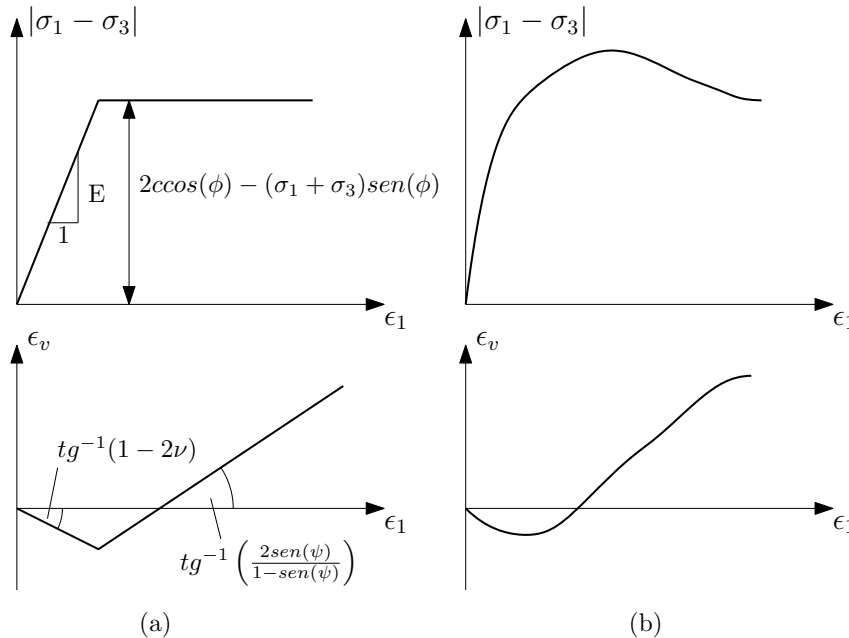


Figura 3.6: (a) Modelación de un ensayo triaxial y (b) resultado típico de un triaxial para una arena inicialmente densa (basada en Vermeer et al., 1984).

Las principales características del modelo se describen a continuación.

3.4.2. Región elástica

La idea básica del modelo de Mohr-Coulomb es representada en la Figura 3.7, para el caso unidimensional. El modelo describe un comportamiento elastoplástico perfecto (sin endurecimiento).

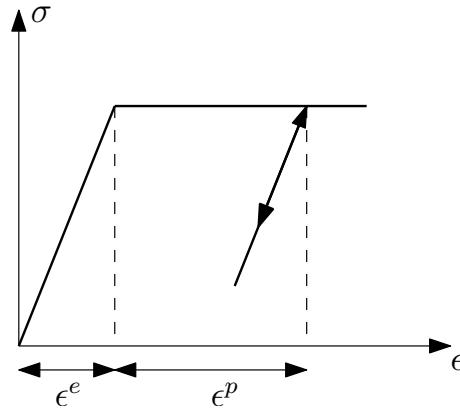


Figura 3.7: Idea básica del modelo de Mohr-Coulomb (basada en PLAXIS, 2015).

En consecuencia, a bajas deformaciones el modelo supone que el comportamiento del suelo es elástico, con lo cual, en esa región todas las deformaciones se recuperan en un ciclo de carga y descarga (al contrario de la región plástica), despreciando todo tipo de disipación de energía. La región elástica queda descrita por la ley de Hooke $\sigma = D\epsilon$, definida en el Capítulo 2, a través de los parámetros E y ν .

3.4.3. Función de fluencia

La transición desde el comportamiento elástico al comportamiento plástico es determinada por la función de fluencia f , que en el caso del modelo de Mohr-Coulomb es una extensión del criterio de falla de Mohr-Coulomb (Figura 3.8)

$$\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg}(\phi) = \tau_f \tag{3.4.43}$$

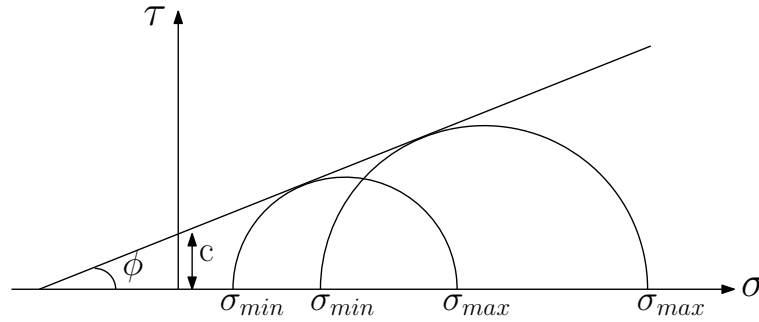


Figura 3.8: Criterio de falla de Mohr-Coulomb.

lo que significa que la masa de suelo entrará en fluencia en un determinado punto cuando la tensión de corte τ movilizada en dicho punto sea igual a la resistencia de corte τ_f , la cual se determina mediante los parámetros de resistencia c y ϕ .

Esto también se puede expresar como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tau - \sigma \cdot \operatorname{tg}(\phi) - c = 0 \quad (3.4.44)$$

y puede escribirse en términos de las tensiones principales máxima σ_{max} y mínima σ_{min} como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0 \quad (3.4.45)$$

generándose 6 casos, dependiendo de como se ordenen las magnitudes de las 3 tensiones principales

$$f_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad (3.4.46)$$

$$f_2 = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.4.47)$$

$$f_3 = (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_2 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.4.48)$$

$$f_4 = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 + \sigma_1)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad (3.4.49)$$

$$f_5 = (\sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 + \sigma_1)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad (3.4.50)$$

$$f_6 = (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_2)\operatorname{sen}(\phi) - 2c \cdot \operatorname{cos}(\phi) = 0, \text{ si } \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (3.4.51)$$

lo que se traduce, como lo muestra la figura 3.9, en seis planos en el espacio de tensiones principales

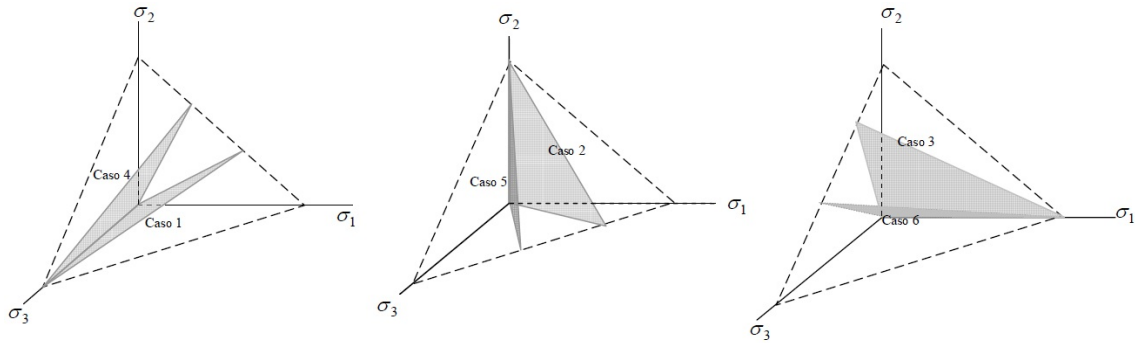


Figura 3.9: Planos que genera la función de fluencia en el espacio de tensiones principales (Biru, 2010).

que al ser interceptados conforman una superficie cónica hexagonal, como se visualiza en la Figura 3.10.

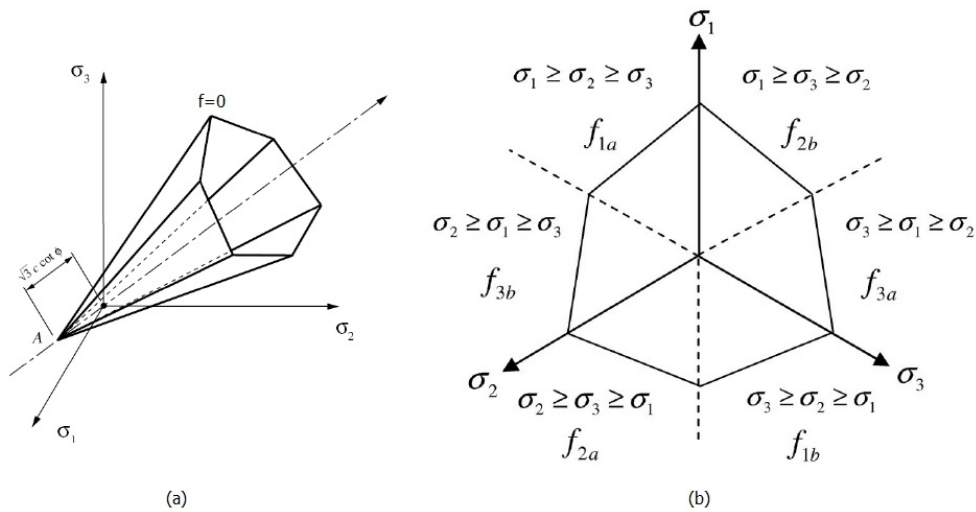


Figura 3.10: Superficie de fluencia (a) en el espacio de esfuerzos principales y (b) en la proyección sobre el plano desviatorio (Huang, 2008).

De esta forma, el interior de esta superficie ($f < 0$) equivale a la región elástica, mientras que el borde ($f = 0$), que representa el contacto con la envolvente de Coulomb, corresponde a la región plástica.

3.4.4. Regla de flujo y potencial plástico

El potencial plástico para este modelo se define en el espacio de las tensiones principales como

$$g = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\text{sen}(\phi) \quad (3.4.52)$$

Análogamente a lo que ocurre para la función de fluencia, existen 6 casos, dependiendo de como se ordenen las magnitudes de las 3 tensiones principales:

$$g_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad (3.4.53)$$

$$g_2 = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.4.54)$$

$$g_3 = (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad (3.4.55)$$

$$g_4 = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 + \sigma_1)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad (3.4.56)$$

$$g_5 = (\sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 + \sigma_1)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad (3.4.57)$$

$$g_6 = (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_2)\text{sen}(\psi), \text{ si } \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (3.4.58)$$

En consecuencia, la regla de flujo del modelo de Mohr-Coulomb queda definida por el ángulo de dilatancia ψ , que cumple con $\psi \leq \phi$.

Para entender esta regla de flujo, se expresará el potencial plástico en términos de las componentes del tensor de tensiones para deformaciones planas σ_x , σ_y y τ_{xy} , usando

$$\sigma^* = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.4.59)$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.4.60)$$

De esta forma, el potencial plástico queda

$$g = \tau^* - \sigma^* \text{sen}(\psi) + cte \quad (3.4.61)$$

y la regla de flujo, aplicando la ecuación 3.3.32, se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\epsilon_z^p \end{bmatrix} = d\lambda^p \begin{bmatrix} \partial g / \partial \sigma_x \\ \partial g / \partial \sigma_y \\ \partial g / \partial \tau_{xy} \\ \partial g / \partial \sigma_z \end{bmatrix} = d\lambda^p \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau^* + \text{sen}(\psi) \\ -(\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau^* + \text{sen}(\psi) \\ 2\tau_{xy} / \tau^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.62)$$

Ahora, usando

$$d\epsilon_v^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p \quad (3.4.63)$$

que representa la razón de cambio de la deformación volumétrica plástica, y

$$d\gamma^p = \sqrt{(d\epsilon_x^p - d\epsilon_y^p)^2 + (d\gamma_{xy}^p)^2} \quad (3.4.64)$$

que representa la razón de cambio de la distorsión angular plástica, se llega a la expresión

$$\text{sen}(\psi) = d\epsilon_v^p / d\gamma^p \quad (3.4.65)$$

Esta expresión entrega un significado al ángulo de dilatancia: este define la razón de cambio entre $d\epsilon_v^p$ y $d\gamma^p$.

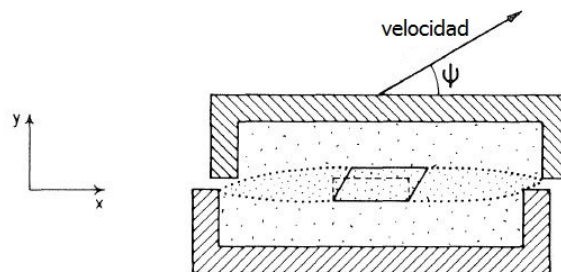


Figura 3.11: Ensayo de corte y ángulo de dilatancia (Vermeer et al., 1984).

Para entender mejor el significado físico de esto, considérese un ensayo de corte como el mostrado en la Figura 3.11. En la interfaz entre las dos mitades de la caja de corte se

forma una zona de ruptura, en la cual, se supondrá, no existen deformaciones paralelas, es decir

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^e + d\epsilon_x^p = 0 \quad (3.4.66)$$

y en particular

$$d\epsilon_x^p = 0 \quad (3.4.67)$$

Reemplazando esta última expresión en las ecuaciones 3.4.63 y 3.4.64, y luego en 3.4.65, se llega a

$$d\epsilon_y^p/d\gamma_{xy}^p = \tan(\psi) \quad (3.4.68)$$

y sea \dot{v} la velocidad vertical y \dot{u} la velocidad horizontal de un punto del material en la zona de ruptura, esa expresión se puede reescribir como

$$\dot{v}/\dot{u} = \tan(\psi) \quad (3.4.69)$$

interpretándose el ángulo de dilatancia, como el ángulo que forma la velocidad de la banda de corte, tal como lo muestra la Figura 3.11.

Es importante notar que se pueden dar los siguientes casos en el modelo:

- Si $\psi > 0$: Existe expansión volumétrica plástica, como en el caso de arenas densas.
- Si $\psi < 0$: Existe contracción volumétrica plástica, como en el caso de arenas sueltas.
- Si $\psi = 0$: No existe expansión ni contracción volumétrica plástica.
- Si $\psi = \phi$: Caso asociado.

3.4.5. Limitaciones del modelo

Si bien el modelo Mohr-Coulomb tiene como principal ventaja el uso de pocos parámetros con respecto a otros modelos más avanzados, este presenta varias limitaciones debido a su simplicidad. En primera instancia se pueden mencionar las siguientes:

- El modelo no considera endurecimiento, lo cual no se ajusta a la realidad que muestran los ensayos.
- El modelo considera un ángulo de fricción interna ϕ constante, mientras que los ensayos sugieren un ángulo de fricción variable.
- Al usar un ángulo de dilatancia ψ constante, se está suponiendo que la dilatación del suelo ocurre a una razón constante cuando este es sometido a corte, sin embargo los ensayos muestran que la dilatación tiende a cero a medida que el suelo tiende al estado crítico.
- Ensayos triaxiales en arenas, como los publicados por Goldscheider en 1984 (ver Figura 3.12), muestran que la función de fluencia y el potencial elástico no se ajustan totalmente con los propuestos por el modelo.

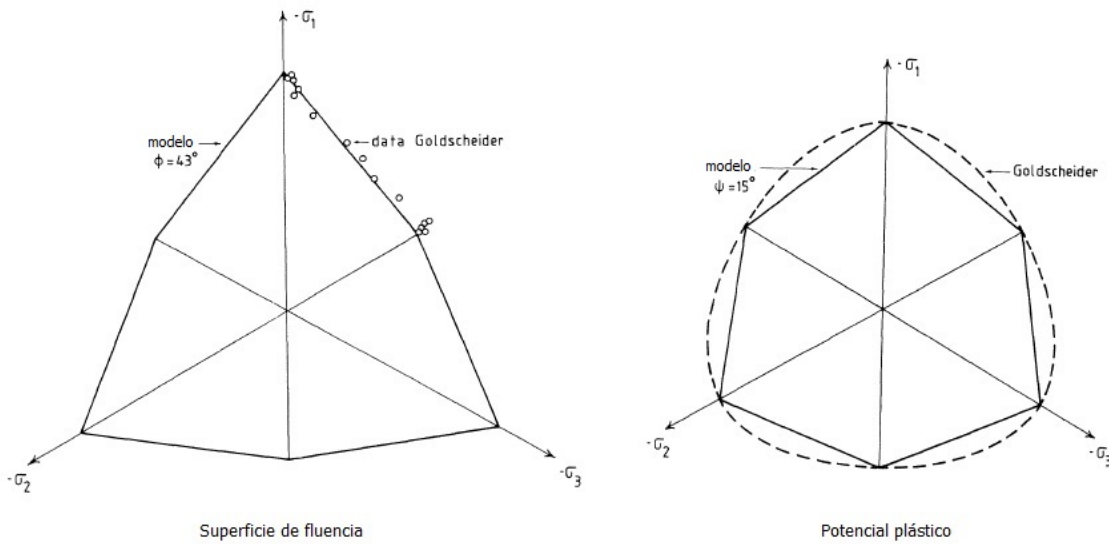


Figura 3.12: Modelo de Mohr-Coulomb comparado con ensayos de Goldscheider (Vermeer et al., 1984)

3.5. Integración Numérica del Modelo Mohr-Coulomb

3.5.1. Generalidades

Una de las componentes fundamentales en la implementación de los modelos de elastoplasticidad es la integración numérica de las ecuaciones constitutivas que los describen. Esta integración es llevada a cabo localmente, en cada punto de integración. En términos generales, los esquemas de integración pueden ser de dos tipos: explícitos (Euler hacia adelante) e implícitos (Euler hacia atrás). En el caso de los esquemas explícitos, el cambio en la deformación plástica se evalúa al inicio del incremento de tensión, mientras que en el caso de la integración implícita, este cambio se evalúa al final del incremento. Como lo señala Clausen (2007), una de las ventajas de los esquemas de integración explícitos es su simplicidad en el caso de la implementación de modelos constitutivos complejos, pero tiene como desventaja que en general requiere de pasos de carga más pequeños que los esquemas de integración implícitos, y en consecuencia, en el código de elementos finitos se utilizará un esquema de este último tipo.

3.5.2. Algoritmos de retorno

Dentro de la integración implícita, los esquemas más utilizados son los algoritmos de retorno. Estos comprenden una fase de predicción elástica, donde la ecuación constitutiva elástica es integrada considerando un incremento en las deformaciones totales, y otra de corrección plástica, donde el estado de tensiones es devuelto, iterativamente, a la superficie de fluencia (en el caso de ocurrir plasticidad).

Considerando un incremento finito de la deformación elástica, la ecuación 3.3.23 puede reescribirse como

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{D}(\Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p) = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta\boldsymbol{\sigma}^e - \Delta\boldsymbol{\sigma}^p \quad (3.5.70)$$

lo que puede ser entendido como que un incremento finito de tensión está compuesto de una componente elástica, seguida por una componente plástica. Aplicando este

incremento $\Delta\sigma$ a un cierto nivel inicial de tensión σ^A se obtiene

$$\sigma^C = \sigma^A + \Delta\sigma \quad (3.5.71)$$

lo que equivale a aplicar, en primer lugar, un incremento elástico:

$$\sigma^B = \sigma^A + \Delta\sigma^e \quad (3.5.72)$$

seguido de restar un incremento plástico:

$$\sigma^C = \sigma^B - \Delta\sigma^p \quad (3.5.73)$$

En estas ecuaciones el estado de tensión σ^B se conoce como predictor elástico y el término $\Delta\sigma^p$ es llamado corrector plástico, que representa el retorno a la superficie de fluencia. Así, el término σ^C representa el estado de tensión actualizado. Esto se esquematiza en la figura 3.13:

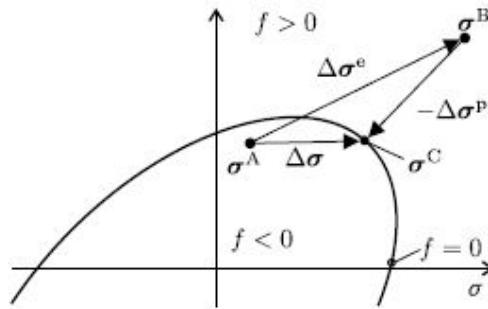


Figura 3.13: Mapeo de retorno (Clausen, 2007).

Dado que

$$d\sigma^p = \mathbf{D}d\epsilon^p \quad (3.5.74)$$

el corrector plástico se obtiene reemplazando 3.3.32 en 3.5.74 e integrando:

$$\Delta\sigma^p = \int_{\lambda^p}^{\lambda^p + \Delta\lambda^p} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\lambda^p \quad (3.5.75)$$

lo que arroja como solución

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^p = \Delta\lambda^p \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.76)$$

Si se considera una expansión de Taylor de primer orden para $f(\boldsymbol{\sigma}^C)$, partiendo de $f(\boldsymbol{\sigma}^B)$, como lo plantea Crisfield (1991), y reemplazando 3.5.76, se obtiene

$$f(\boldsymbol{\sigma}^C) = f(\boldsymbol{\sigma}^B) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta\boldsymbol{\sigma}^p = f(\boldsymbol{\sigma}^B) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta\lambda^p \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.77)$$

y dado que $f(\boldsymbol{\sigma}^C) = 0$ se puede despejar una expresión para $\Delta\lambda^p$:

$$\Delta\lambda^p = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}^B)}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.5.78)$$

con lo cual

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^p = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}^B)}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.79)$$

Si se considera que los materiales son isotrópicos, este procedimiento de actualización de los estados tensionales puede realizarse con respecto a cualquier sistema de ejes coordenados y como lo plantean Clausen et al. (2007) es conveniente desarrollarlo en el sistema de tensiones principales. Esta conveniencia se debe a que por un lado se reduce el número de dimensiones del sistema de 4 (en el caso de deformaciones planas) a 3, y por otro, el problema puede ser visualizado gráficamente, pudiéndose aplicar argumentos geométricos como los utilizados por Clausen et al. (2007) en su esquema de retorno. Considerando el hecho de que el retorno a la superficie de fluencia conserva las direcciones principales, resulta fácil devolver las tensiones actualizadas desde el sistema de tensiones principales al sistema original.

3.5.3. Algoritmo de retorno aplicado al modelo de Mohr-Coulomb

3.5.3.1. Retorno a la superficie de fluencia del modelo

Las superficies de fluencias lineales, como la de Mohr-Coulomb, son visualizadas como planos en el espacio de tensiones principales. Estos planos se interceptan en líneas,

y las líneas en puntos. En consecuencia existen tres posibles tipos de retorno a la superficie de fluencia:

- Retorno a un plano de fluencia.
- Retorno a una línea (intercepción de dos planos de fluencia).
- Retorno a un punto (intercepción de tres o más planos de fluencia).

Estas situaciones se muestran en la figura 3.14.

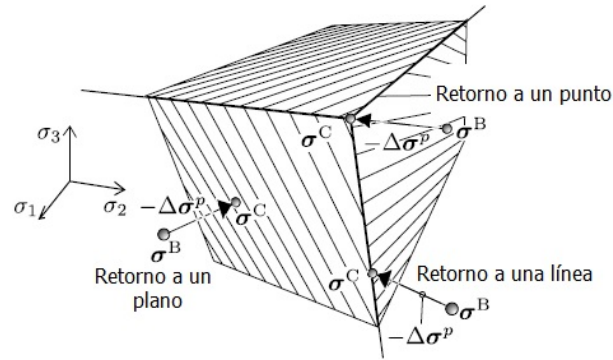


Figura 3.14: Mapeo de retorno en tensiones principales (modificada de Clausen et al., 2007).

Uno de los problemas que han sido tratados extensamente en la literatura es el tratamiento de las singularidades (retorno a una línea o un punto), en las cuales dos o más planos de fluencia están activos. Uno de los enfoques que se han utilizado es realizar una aproximación o redondeo de estas singularidades, evitándolas (ver, por ejemplo, Smith & Griffiths, 2004). El procedimiento que se utiliza en esta tesis (Clausen et al., 2007), similar al de De Borst (1987), tiene la virtud de que incorpora la superficie de fluencia y potencial plástico de manera exacta, y por otro lado, está basado en argumentos geométricos que hacen comprensible el esquema de retorno.

En este procedimiento, las tensiones principales se ordenan de forma tal que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{3.5.80}$$

con lo cual, la función de fluencia se reduce a

$$f = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen}(\phi) - 2c \cdot \cos(\phi) = 0 \quad (3.5.81)$$

y el potencial plástico a

$$g = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen}(\phi) \quad (3.5.82)$$

De esta forma, las tensiones solo tienen la posibilidad de retornar a uno de los seis planos de fluencia, a dos de las seis líneas (l_1 y l_2), o al punto, como se visualiza en la figura 3.15.

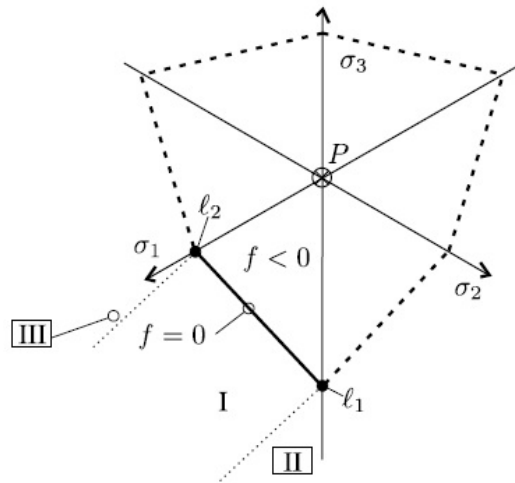


Figura 3.15: Superficie de fluencia (Clausen, 2007).

3.5.3.2. Retorno a un plano de fluencia

En general, cualquier función de fluencia puede ser reescrita como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}_f^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^f) = 0 \quad (3.5.83)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^f$ es un punto en el plano de fluencia y \mathbf{g}_f es el gradiente

$$\mathbf{g}_f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.84)$$

De la misma forma, el potencial plástico puede ser reescrito como

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}_g^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3.5.85)$$

donde

$$\mathbf{g}_g = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.86)$$

Así, la superficie de fluencia y el potencial plástico del modelo de Mohr-Coulomb pueden expresarse como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}_{f_1}^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_a) = k\sigma_1 - \sigma_3 - 2c\sqrt{k} = 0 \quad (3.5.87)$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}_{g_1}^T \boldsymbol{\sigma} = m\sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.5.88)$$

donde

$$\mathbf{g}_{f_1} = \left[k \quad 0 \quad -1 \right]^T, \quad k = \frac{1 + \text{sen}(\phi)}{1 - \text{sen}(\phi)} \quad (3.5.89)$$

$$\mathbf{g}_{g_1} = \left[m \quad 0 \quad -1 \right]^T, \quad m = \frac{1 + \text{sen}(\psi)}{1 - \text{sen}(\psi)} \quad (3.5.90)$$

y se utiliza como punto sobre el plano, el punto del vértice de la superficie de fluencia

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \frac{2c\sqrt{k}}{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.5.91)$$

De esta manera, el corrector plástico $\Delta\boldsymbol{\sigma}^p$, obtenido en 3.5.79 puede determinarse mediante

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^p = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}^B)}{\mathbf{g}_{g_1}^T \mathbf{D} \mathbf{g}_{f_1}} \mathbf{D} \mathbf{g}_{g_1} = f(\boldsymbol{\sigma}^B) \mathbf{r}_1^p \quad (3.5.92)$$

donde

$$\mathbf{r}_1^p = \frac{\mathbf{D} \mathbf{g}_{g_1}}{\mathbf{g}_{g_1}^T \mathbf{D} \mathbf{g}_{f_1}} \quad (3.5.93)$$

corresponde a la dirección del corrector plástico, que coincide con la dirección de las deformaciones plásticas, es decir, con la dirección del vector \mathbf{g}_{g_1} .

3.5.3.3. Retorno a una línea

En términos generales, la intersección entre dos planos de fluencia, $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ define una determinada línea l , como lo muestra la Figura 3.16, con la ecuación

$$l : \boldsymbol{\sigma} = t\mathbf{r}^l + \boldsymbol{\sigma}^l \quad (3.5.94)$$

donde t es un parámetro con las unidades de tensión, $\boldsymbol{\sigma}^l$ es un punto sobre la línea y \mathbf{r}^l es la dirección del vector asociado a la línea, el cual debe ser perpendicular a \mathbf{g}_{f_1} y a \mathbf{g}_{f_2} , es decir

$$\mathbf{r}^l \propto \mathbf{g}_{f_1} \times \mathbf{g}_{f_2} \quad (3.5.95)$$

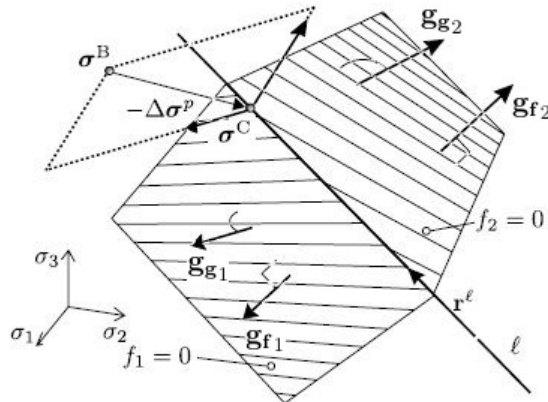


Figura 3.16: Retorno a una línea (modificada de Clausen, 2007).

Análogamente, la dirección del vector asociado a la línea de potencial plástico queda definida por

$$\mathbf{r}_g^l \propto \mathbf{g}_{g_1} \times \mathbf{g}_{g_2} \quad (3.5.96)$$

De esta forma, siguiendo la regla de flujo, el incremento de deformaciones plásticas debe ser perpendicular a la dirección de la línea de potencial plástico \mathbf{r}_g^l , como lo muestra la Figura 3.17

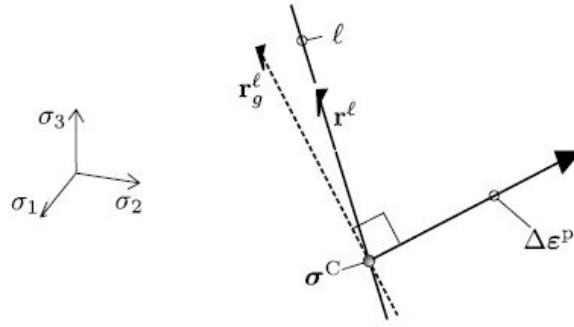


Figura 3.17: Incremento de deformación plástica cuando se retorna a una línea (Clausen, 2007).

Matemáticamente, esto equivale a

$$(\Delta \epsilon^p)^T \mathbf{r}_g^l = 0 \iff (\mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}^p)^T \mathbf{r}_g^l = (\boldsymbol{\sigma}^B - \boldsymbol{\sigma}^C)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}_g^l = 0 \quad (3.5.97)$$

con lo cual

$$(\boldsymbol{\sigma}^B)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}_g^l = (\boldsymbol{\sigma}^C)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}_g^l \quad (3.5.98)$$

y dado que la tensión actualizada $\boldsymbol{\sigma}^C$ pertenece a la línea l , la ecuación 3.5.94 puede ser reemplazada al lado derecho, pudiéndose despejar una expresión para t

$$t = \frac{(\mathbf{r}_g^l)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^B - \boldsymbol{\sigma}^l)}{(\mathbf{r}_g^l)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}^l} \quad (3.5.99)$$

En el caso particular del modelo de Mohr-Coulomb, el plano de fluencia activo está delimitado por las líneas l_1 y l_2 , como lo muestra la Figura 3.15, las cuales pueden ser definidas por las ecuaciones

$$l_1 : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^C = t_1 \mathbf{r}_1^l + \boldsymbol{\sigma}_a, \quad \mathbf{r}_1^l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \end{bmatrix}^T \quad (3.5.100)$$

$$l_2 : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^C = t_2 \mathbf{r}_2^l + \boldsymbol{\sigma}_a, \quad \mathbf{r}_2^l = \begin{bmatrix} 1 & k & k \end{bmatrix}^T \quad (3.5.101)$$

donde l_1 está asociada al ensayo triaxial en compresión y l_2 al ensayo triaxial en tracción.

Las direcciones del potencial plástico vienen dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_{g_1}^l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \end{bmatrix}^T \quad (3.5.102)$$

$$\mathbf{r}_{g_2}^l = \begin{bmatrix} 1 & m & m \end{bmatrix}^T \quad (3.5.103)$$

Con lo cual, los parámetros t_1 y t_2 pueden ser obtenidos según

$$t_1 = \frac{(\mathbf{r}_{g_1}^l)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^B - \boldsymbol{\sigma}_a)}{(\mathbf{r}_{g_1}^l)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}_{g_1}^l} \quad (3.5.104)$$

$$t_2 = \frac{(\mathbf{r}_{g_2}^l)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^B - \boldsymbol{\sigma}_a)}{(\mathbf{r}_{g_2}^l)^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}_{g_2}^l} \quad (3.5.105)$$

Este retorno equivale a la aplicación del teorema de Koiter, que muestra que cuando existen dos superficies de fluencias activas, el incremento de deformación plástica está dado por la combinación lineal de las direcciones de deformación plástica asociada a cada superficie de potencial plástico activa, es decir:

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\lambda_1^p \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda_2^p \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5.106)$$

Esto se muestra en la Figura 3.18:

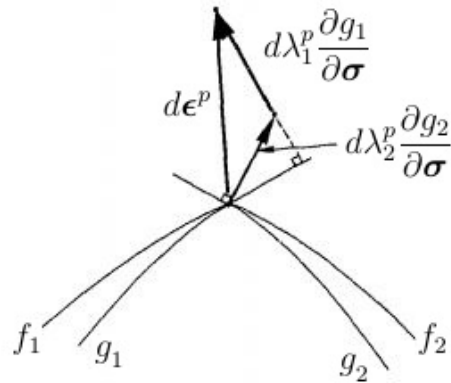


Figura 3.18: Teorema de Koiter para el flujo plástico en una singularidad (modificada de De Borst, 1986).

3.5.3.4. Retorno a un punto

En el caso de retorno a un punto, para el modelo de Mohr-Coulomb, este simplemente corresponde a punto del vértice

$$\sigma^C = \sigma_a \tag{3.5.107}$$

Este retorno también corresponde al teorema de Koiter, antes señalado, para el caso de múltiples superficies de fluencia activas (6 en el caso del modelo de Mohr-Coulomb).

3.5.3.5. Regiones de tensión

Para saber qué tipo de retorno corresponde a un determinado predictor elástico σ^B , Clausen et al. (2007) definen ciertas regiones de tensión. Cada región está asociada a un plano de fluencia, línea o punto, y cuando el predictor elástico se encuentra en dicha región, debe seguir el retorno correspondiente.

En el caso del modelo de Mohr-Coulomb existen cuatro retornos posibles: al plano de fluencia, a la línea l_1 , a la línea l_2 y al vértice σ_a , y en consecuencia hay cuatro regiones de tensión asociadas: I, II, III y IV, respectivamente. Estas cuatro regiones están separadas por cuatro planos de frontera: p_{I-II} , p_{I-III} , p_{I-IV} , como lo muestra la Figura 3.19:

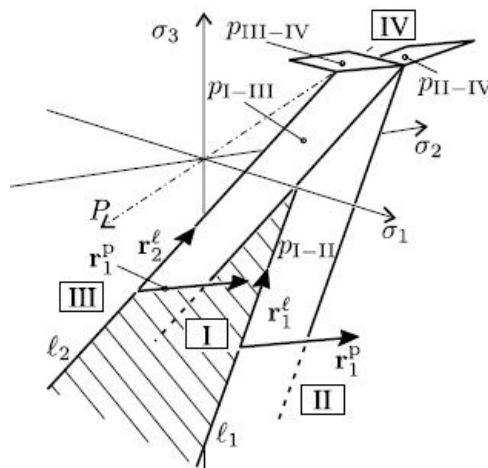


Figura 3.19: Regiones de tensión y planos de frontera (Clausen, 2007).

Así, por ejemplo, la orientación del plano p_{I-II} estará dada por la dirección del corrector plástico \mathbf{r}_1^p y la dirección del vector de la línea \mathbf{r}_1^l , y de esta manera este plano queda descrito por la ecuación

$$p_{I-II}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{r}_1^p \times \mathbf{r}_1^l)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{l_1}) = (\mathbf{r}_1^p \times \mathbf{r}_1^l)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_a) = 0 \quad (3.5.108)$$

y análogamente, el plano p_{I-III} , queda dado por

$$p_{I-III}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{r}_1^p \times \mathbf{r}_2^l)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{l_2}) = (\mathbf{r}_1^p \times \mathbf{r}_2^l)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_a) = 0 \quad (3.5.109)$$

Teniendo estos dos planos, y siempre que $f(\boldsymbol{\sigma}^B) \geq 0$, es posible obtener el retorno que aplica en cada uno de los siguientes casos:

Si $p_{I-II}(\boldsymbol{\sigma}^B) \geq 0$ y $p_{I-III}(\boldsymbol{\sigma}^B) \leq 0 \implies$ Región $I \implies$ Retorno a $f = 0$

Si $p_{I-II}(\boldsymbol{\sigma}^B) < 0$ y $p_{I-III}(\boldsymbol{\sigma}^B) < 0 \implies$ Región $II \implies$ Retorno a l_1

Si $p_{I-II}(\boldsymbol{\sigma}^B) > 0$ y $p_{I-III}(\boldsymbol{\sigma}^B) > 0 \implies$ Región $III \implies$ Retorno a l_2

Si $t_1 > 0$ y $t_2 > 0 \implies$ Región $IV \implies$ Retorno al vértice $\boldsymbol{\sigma}_a$

ANÁLISIS DINÁMICO

4.1. Introducción

En el caso de solicitaciones dinámicas, como puede ser un sismo, no es posible despreciar las fuerzas de inercia como en el caso estático, y en consecuencia es necesario resolver la ecuación de movimiento en su forma general (deducida en el Capítulo 2, Sección 2.3), que considera las matrices de masa y de amortiguamiento. Esto agrega dos incógnitas al sistema: el vector de velocidades nodales, $\dot{\mathbf{a}}$, y el vector de aceleraciones nodales, $\ddot{\mathbf{a}}$, y el problema pasa a ser uno dependiente del tiempo, t . Para resolver este sistema en el código de elementos finitos se recurre a los métodos de integración directa, y en particular, se implementa el método de Newmark, que permite el uso de una familia de algoritmos de integración.

Además, existe una serie de aspectos numéricos involucrados en la modelación de la respuesta dinámica de suelos, particularmente en el caso sísmico. Estos son discutidos en el capítulo, especificando la implementación escogida para el código. A continuación se señalan los temas a tratar:

- Formulación de la matriz de masa.
- Formulación de la matriz de amortiguamiento.
- Discretización del dominio.

- Condiciones de borde.
- Imposición del registro sísmico.

Finalmente, se evalúa el comportamiento del modelo Mohr-Coulomb en la modelación de la respuesta dinámica, a partir de las curvas de degradación de la rigidez y amortiguamiento que genera este al reproducir los ciclos de histéresis del suelo. Esto permite discutir las limitaciones del modelo.

4.2. Integración en el tiempo

Como se dedujo en el Capítulo 2, Sección 2.3, la ecuación de movimiento general corresponde a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4.2.1)$$

Esta representa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, y puede ser resuelto a través de métodos de integración directa. Como lo señala Bathe (1996), los métodos de integración directa están basados en dos ideas. En primer lugar, en vez de intentar resolver la ecuación 4.2.1 para todo tiempo t , se busca satisfacer esta ecuación solo cada ciertos intervalos de tiempo discretos Δt . En segundo lugar, estos métodos suponen previamente la manera en que los desplazamientos, velocidades y aceleraciones variarán al interior del intervalo Δt . Este supuesto es el que determinará la exactitud, estabilidad y costo computacional de cada método.

El método de Newmark, propuesto en 1959, corresponde a la familia de algoritmos probablemente más utilizada en la integración directa de la ecuación de movimiento (Kontoe, 2006). Este está basado en una expansión de Taylor truncada para aproximar el desplazamiento y la velocidad en el tiempo $t + \Delta t$, es decir, $\mathbf{a}(t + \Delta t) = \mathbf{a}^{t+\Delta t}$ y $\dot{\mathbf{a}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}$, suponiendo que el desplazamiento, velocidad y aceleración son conocidos en el tiempo t . De esta manera, partiendo de las series de Taylor

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{a}^t + \dot{\mathbf{a}}^t \Delta t + \ddot{\mathbf{a}}^t \frac{\Delta t^2}{2} + \ddot{\ddot{\mathbf{a}}}^t \frac{\Delta t^3}{6} + \dots \quad (4.2.2)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}^t + \ddot{\mathbf{a}}^t \Delta t + \ddot{\ddot{\mathbf{a}}}^t \frac{\Delta t^2}{2} + \ddot{\ddot{\ddot{\mathbf{a}}}}^t \frac{\Delta t^3}{6} + \dots \quad (4.2.3)$$

el método trunca estas ecuaciones y las expresa en la siguiente forma:

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{a}^t + \dot{\mathbf{a}}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta_N \right) \ddot{\mathbf{a}}^t + \beta_N \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (4.2.4)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}^t + \left[(1 - \gamma_N) \ddot{\mathbf{a}}^t + \gamma_N \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4.2.5)$$

donde los parámetros γ_N y β_N definen distintas implementaciones de la familia de algoritmos de Newmark y controlan la precisión y estabilidad del método.

La estabilidad de un método se da cuando los errores debido a las aproximaciones no crecen a medida que se desarrolla el proceso de integración (Bathe, 1996). Un algoritmo es *incondicionalmente estable* si la estabilidad se asegura independientemente del paso de tiempo Δt escogido. Para conseguir una formulación incondicionalmente estable del método de Newmark se requiere cumplir:

$$\gamma_N \geq 0,5; \beta_N \geq 0,25(0,5 + \gamma_N)^2 \quad (4.2.6)$$

Por otro lado, el algoritmo es *condicionalmente estable* si requiere de un paso de tiempo, Δt , menor a un determinado valor crítico, Δt_{crit} , para que este sea estable. En el caso del método de Newmark, esta condición está dada por:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-4\beta_N}} T_{min} \quad (4.2.7)$$

donde T_{min} corresponde al menor periodo natural del sistema. En el caso de un sistema de múltiples grados de libertad, como ocurre en general en la modelación de suelos, cumplir esta condición puede forzar la selección de un paso de tiempo, Δt , muy pequeño, lo que resulta muy restrictivo desde el punto de vista del costo computacional. En consecuencia, los algoritmos incondicionalmente estables son, por lo general, preferibles. En estos, el paso de tiempo Δt seleccionado solo define la exactitud de la solución (mientras más pequeño sea escogido este, mayor exactitud tendrá la solución).

Otra característica relevante de este tipo de algoritmos es la presencia de amortiguamiento numérico. En general, debido a la discretización espacial del método de elementos finitos, este no puede representar adecuadamente los modos asociados a las frecuencias altas, introduciéndose oscilaciones espurias en la respuesta. En consecuencia, una propiedad deseable de los algoritmos de integración directa es el amortiguamiento numérico, cuyo propósito es filtrar estas oscilaciones espurias, preservando solo los modos importantes, asociados a las frecuencias bajas (especialmente en el caso sísmico).

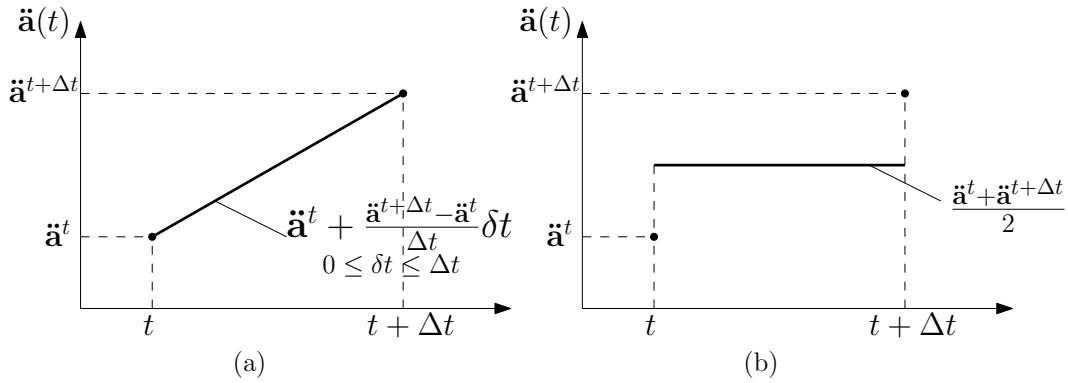


Figura 4.1: Método de Newmark de (a) aceleración lineal y (b) aceleración promedio constante.

Algunas de las formulaciones típicas del método de Newmark se describen a continuación:

- $\gamma_N = 1/2$ y $\beta_N = 1/6$: El método es llamado de aceleración lineal, ya que supone que la aceleración varía linealmente dentro del intervalo de tiempo Δt (ver Figura 4.1 (a)). El método es condicionalmente estable, debiéndose cumplir $\Delta t \leq 0,55T_{min}$ para asegurar estabilidad.
- $\gamma_N = 1/2$ y $\beta_N = 1/4$: El método se denomina de aceleración promedio constante (o regla trapezoidal), debido a que supone un valor uniforme de aceleración durante el intervalo de tiempo Δt (ver Figura 4.1 (b)). El método es incondicionalmente estable. Como lo prueba Dahlquist (1963, citado por Kontoe, 2006) esta es la formulación incondicionalmente estable que posee mayor exactitud. Su desventaja es la ausencia de amortiguamiento numérico.
- $\gamma_N = 0,6$ y $\beta_N = 0,3025$: El método incluye amortiguamiento numérico. Es incondicionalmente estable.

La ecuación de movimiento para el tiempo $t + \Delta t$ puede escribirse como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} \quad (4.2.8)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.2.4 y 4.2.5 en 4.2.8, esta puede ser reescrita como:

$$(c_0\mathbf{M} + c_1\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}(c_0\mathbf{a}^t + c_2\dot{\mathbf{a}}^t + c_3\ddot{\mathbf{a}}^t) + \mathbf{C}(c_1\mathbf{a}^t + c_4\dot{\mathbf{a}}^t + c_5\ddot{\mathbf{a}}^t) \quad (4.2.9)$$

que tiene la estructura

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} \quad (4.2.10)$$

donde

$\hat{\mathbf{K}}$: Matriz global de rigidez dinámica.

$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{t+\Delta t}$: Vector global de fuerza externa dinámica.

y donde $c_0 - c_5$ corresponden a distintas constantes:

$$c_0 = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \quad (4.2.11)$$

$$c_1 = \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \quad (4.2.12)$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta_N \Delta t} \quad (4.2.13)$$

$$c_3 = \frac{1}{2\beta_N} - 1 \quad (4.2.14)$$

$$c_4 = \frac{\gamma_N}{\beta_N} - 1 \quad (4.2.15)$$

$$c_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma_N}{\beta_N} - 2 \right) \quad (4.2.16)$$

De esta manera, para el caso lineal-elástico, el algoritmo se puede escribir como sigue.

Inicialmente:

1.1 Definir los valores iniciales: \mathbf{a}^0 , $\dot{\mathbf{a}}^0$ y $\ddot{\mathbf{a}}^0$.

1.2 Determinar la matriz global de rigidez dinámica:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + c_0\mathbf{M} + c_1\mathbf{C} \quad (4.2.17)$$

y para cada paso de tiempo:

2.1 Determinar el vector global de fuerza externa dinámica en el tiempo $t + \Delta t$:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}(c_0\mathbf{a}^t + c_2\dot{\mathbf{a}}^t + c_3\ddot{\mathbf{a}}^t) + \mathbf{C}(c_1\mathbf{a}^t + c_4\dot{\mathbf{a}}^t + c_5\ddot{\mathbf{a}}^t) \quad (4.2.18)$$

2.2 Determinar el desplazamiento en el tiempo $t + \Delta t$, $\mathbf{a}^{t+\Delta t}$, a partir de la ecuación 4.2.10.

2.3 Actualizar la aceleración y velocidad en el tiempo $t + \Delta t$, de acuerdo a:

$$\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = c_0(\mathbf{a}^{t+\Delta t} - \mathbf{a}^t) - c_2\dot{\mathbf{a}}^t - c_3\ddot{\mathbf{a}}^t \quad (4.2.19)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}^t + c_6\ddot{\mathbf{a}}^t + c_7\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \quad (4.2.20)$$

donde c_6 y c_7 son constantes definidas según

$$c_6 = \Delta t(1 - \gamma_N) \quad (4.2.21)$$

$$c_7 = \gamma_N\Delta t \quad (4.2.22)$$

En el caso no lineal, se requiere un proceso iterativo para resolver el paso 2.2. Utilizando el método de Newton-Raphson de rigidez inicial, la ecuación 4.2.10 puede escribirse, para la iteración j , como

$$\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{a}^j = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{t+\Delta t, j-1} \quad (4.2.23)$$

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t,j} = \mathbf{a}^{t+\Delta t,j-1} + \Delta \mathbf{a}^j \quad (4.2.24)$$

donde

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{t+\Delta t,j-1} = \mathbf{f}_{\text{int}}^{t+\Delta t,j-1} + (c_0 \mathbf{M} + c_1 \mathbf{C}) \mathbf{a}^{t+\Delta t,j-1} \quad (4.2.25)$$

En consecuencia, el proceso iterativo para la resolución del problema dinámico no lineal tiene la misma forma que para el caso estático (visto en el Capítulo 3), con la diferencia de que en el caso dinámico tanto la matriz de rigidez como los vectores de fuerza contienen la contribución de la inercia y amortiguamiento del sistema. En general, para el caso dinámico se obtiene una convergencia más rápida que para el caso estático y esta puede ser mejorada disminuyendo el tamaño del paso de tiempo Δt . Esto se debe a la contribución de la matriz de masa en la matriz de rigidez dinámica, que se hace más dominante a medida que el tamaño del paso de tiempo es menor (Bathe, 1996).

4.3. Formulación de la matriz de masa

4.3.1. Generalidades

Como se expuso en el Capítulo 2, Sección 2.4.5.1, la matriz de masa elemental puede ser definida como

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho(\mathbf{N}^e(x, y))^T \mathbf{N}^e(x, y) dx dy \quad (4.3.26)$$

Cuando la matriz global de masa se construye mediante el ensamblaje de estas matrices elementales, se denomina a esta *matriz de masa consistente*, la cual no es diagonal. Para la resolución del problema dinámico resulta más eficiente el uso de una matriz de masa global que sea diagonal, debido a que esta utiliza menos espacio de memoria (puede ser guardada como un vector), y en el caso de que todas sus entradas sean no negativas es fácilmente invertible, debido a que la inversa de una matriz diagonal es también diagonal (Felippa, 2005). Para lograr esto, existen métodos de diagonalización que permiten construir este tipo de matrices, llamadas *matrices de masa concentrada*. Estos métodos deben asegurar que el producto $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}$ entregue la fuerza total correcta en cada elemento, de acuerdo a la segunda ley de Newton (Cook et al., 2002).

La experiencia muestra que el uso de una matriz de masa consistente tiende a sobrestimar las frecuencias naturales del sistema y el uso de una matriz de masa concentrada tiende a subestimarlas (Kramer, 1996). En general, las matrices de masa consistente entregan mayor exactitud en problemas de flexibilidad, como en el caso de vigas y placas, mientras que las matrices de masa concentrada entregan mayor exactitud en problemas de propagación de onda, debido a que presentan menor cantidad de oscilaciones espurias (Cook et al., 2002). Por este motivo, y siguiendo un criterio de eficiencia, este último tipo de matrices serán las que se utilizarán en el código de elementos finitos. A continuación se presentan las formulaciones de la matriz de masa concentrada, tanto para elementos triangulares de 3 nodos como de 6.

4.3.2. Diagonalización de la matriz de masa en elementos triangulares lineales

En el caso de elementos de bajo orden, la matriz de masa concentrada puede ser construida a partir criterios de simetría (Zienkiewicz & Taylor, 2000). Este es el caso de el elemento triangular de 3 nodos, donde se toma la masa total del elemento, que corresponde a ρAh , y se distribuye en partes iguales en cada nodo, es decir

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Ah}{3} \mathbf{diag} \left[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right] = \frac{\rho Ah}{3} \mathbf{I}_6 \quad (4.3.27)$$

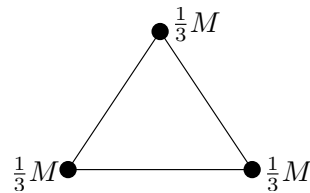


Figura 4.2: Matriz de masa concentrada para el elemento triangular lineal (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).

donde:

ρ : Densidad del material.

A : Área del elemento

h : Profundidad del elemento.

Esta distribución se representa en la Figura 4.2.

4.3.3. Diagonalización de la matriz de masa en elementos triangulares cuadráticos

Para elementos más complejos, como los elementos triangulares de 6 nodos, el proceso de diagonalización no es único (Felippa, 2005). Como consecuencia de esto, existen varios métodos que han sido propuestos en la literatura. Los dos más importantes son el método de Lobatto y el HRZ.

En el caso del método de Lobatto la matriz se forma en base a un esquema de integración donde se consideran los nodos de los elementos como puntos de integración.

En el caso del esquema de integración para elementos triangulares en que los puntos de integración coinciden con los nodos intermedios (ver Capítulo 2, Sección 2.2.4), el método entrega la siguiente matriz concentrada:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Ah}{3} \mathbf{diag} \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right] \quad (4.3.28)$$

que se representa en la Figura 4.3

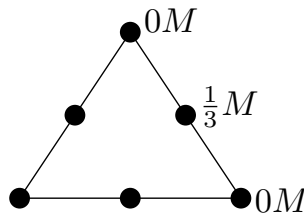


Figura 4.3: Matriz de masa concentrada para el elemento triangular cuadrático por el método de Lobatto (basada en Zienkiewicz & Taylor, 2000).

Sin embargo, los términos cero en esta matriz son particularmente difíciles de manejar, dado que resulta una matriz que no posee rango completo y en consecuencia podría no ser invertible (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

El método HRZ, por otro lado, consistente básicamente en mantener los términos diagonales de la matriz consistente y luego escalarlos para preservar la masa total del elemento. Este entrega la siguiente matriz concentrada:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Ah}{57} \mathbf{diag} \left[3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 16 \ 16 \ 16 \ 16 \ 16 \ 16 \right] \quad (4.3.29)$$

que se representa en la Figura 4.4

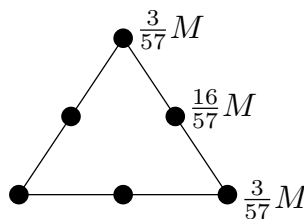


Figura 4.4: Matriz de masa concentrada para el elemento triangular cuadrático por el método HRZ.

Debido a que a partir de este método se obtiene una matriz sin entradas cero en la diagonal, será este el escogido para formar la matriz global de masa en el código de elementos finitos. Cabe mencionar que este método es también el implementado en el programa comercial PLAXIS.

4.4. Formulación de la matriz de amortiguamiento

En el análisis dinámico no lineal, los mecanismos de disipación de energía provienen de diversas fuentes. En general, pueden dividirse en amortiguamiento por radiación y amortiguamiento del material. El amortiguamiento por radiación, está asociado a la propagación de energía a través de un gran volumen de material, y su modelación será tratada más adelante, cuando se describa la condición de borde absorbente. Por otro lado, el amortiguamiento del material, puede ser de naturaleza histerética o viscosa. El amortiguamiento histerético es causado, principalmente, por el comportamiento no lineal del suelo, a través de los ciclos de carga y descarga, y depende del nivel de deformación y del número de ciclos. El amortiguamiento viscoso, por otra parte, es causado por la viscosidad de los fluidos al interior de los poros (Kontoe, 2006).

La fuente predominante de disipación de energía asociada al material proviene del amortiguamiento histerético del suelo y este es incluido a través del uso de modelos constitutivos no lineales. Sin embargo, como lo señala Kramer (1996), se puede incluir pequeños niveles de amortiguamiento viscoso, para considerar el amortiguamiento a muy pequeñas deformaciones y minimizar problemas numéricos que podrían ocurrir en la completa ausencia de este. Para esto, en general, se utiliza un amortiguamiento tipo Rayleigh, que significa que la matriz global de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa y a la de rigidez, es decir

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad (4.4.30)$$

Los parámetros α_R y β_R se obtienen resolviendo el sistema

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_m & \omega_m \\ 1/\omega_n & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_R \\ \beta_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} \quad (4.4.31)$$

donde ω_m y ω_n son dos frecuencias angulares que controlan la forma del amortiguamiento (ver Figura 4.5), y ξ_m y ξ_n corresponden a las razones de amortiguamiento.

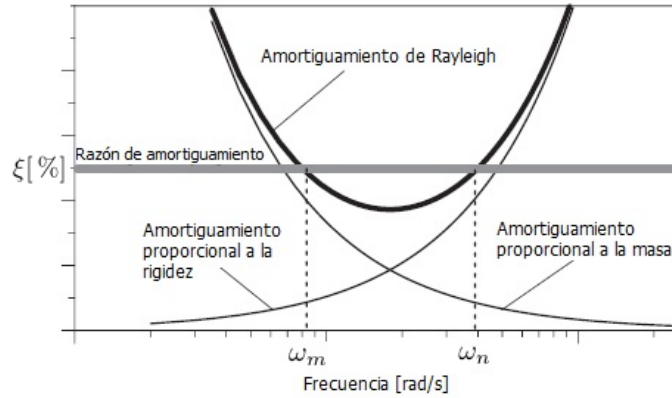


Figura 4.5: Amortiguamiento de Rayleigh (modificada de Tsai et al., 2014).

De esta forma, se llega a la solución

$$\alpha_R = 2\omega_m\omega_n \left(\frac{\omega_m\xi_n - \omega_n\xi_m}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \right) \quad (4.4.32)$$

$$\beta_R = 2 \left(\frac{\omega_m\xi_m - \omega_n\xi_n}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \right) \quad (4.4.33)$$

y suponiendo que la razón de amortiguamiento ξ es independiente de la frecuencia, la solución se reduce a

$$\alpha_R = 2\xi \left(\frac{\omega_m\omega_n}{\omega_m + \omega_n} \right) \quad (4.4.34)$$

$$\beta_R = 2\xi \left(\frac{1}{\omega_m + \omega_n} \right) \quad (4.4.35)$$

Para considerar el amortiguamiento a pequeñas deformaciones, se recomienda utilizar una razón de amortiguamiento en un rango de 1,5 – 4 % (Youssef et al., 2002) o 1 – 5 % (Tsai et al., 2014).

El amortiguamiento de Rayleigh es dependiente de la frecuencia: subestima el amortiguamiento en las frecuencias entre ω_m y ω_n y sobrestima el amortiguamiento a frecuencias inferiores a ω_m y superiores a ω_n . Sin embargo, como se mencionó en el Capítulo 1, el amortiguamiento observado en suelos es independiente de la frecuencia. Para reducir

esta dependencia de la frecuencia, Tsai et al. (2014) proponen un criterio que permite seleccionar de manera óptima las frecuencias ω_m y ω_n . En su estudio, se analizó la respuesta sísmica lineal de un depósito de suelo frente a diferentes movimientos, utilizando diferentes valores de ω_m y ω_n . La evaluación del desempeño de estos valores se realizó comparando la respuestas obtenidas mediante el análisis en el dominio del tiempo (utilizando amortiguamiento de Rayleigh) con las obtenidas mediante el análisis en el dominio de la frecuencia, cuyo amortiguamiento es independiente de la frecuencia (como se explicó en el Capítulo 1), buscando que se ajustaran a estas últimas. A partir de los resultados obtenidos el criterio propuesto fue el siguiente:

- En el caso de movimientos armónicos, se debe seleccionar la frecuencia predominante o frecuencia principal del movimiento como ω_n , utilizando un amortiguamiento de Rayleigh simplificado (solo proporcional a la matriz de rigidez).
- En el caso de movimientos sísmicos, para depósitos poco profundos (donde la frecuencia fundamental del suelo es mayor a la predominante del sismo), se debe seleccionar como ω_m la frecuencia fundamental del suelo y como ω_n utilizar $5\omega_m$.
- En el caso de movimientos sísmicos, para depósitos profundos (donde la frecuencia fundamental del suelo es menor a la predominante del sismo), se debe seleccionar como ω_m la frecuencia fundamental del suelo y como ω_n elegir el máximo valor entre la frecuencia predominante o principal del sismo y 5 veces la frecuencia fundamental del suelo.

4.5. Discretización del dominio

En la modelación de la respuesta sísmica, el tipo de discretización del dominio puede influir en la respuesta obtenida. En particular, el uso de un mallado grueso (elementos de grandes dimensiones) puede resultar en el filtrado de las frecuencias altas del sismo, dado que las longitudes de onda asociadas serán cortas y pueden no ser modeladas debido a la gran distancia entre los nodos de los elementos. En consecuencia, tanto el contenido de frecuencia del sismo incidente, como la velocidad de onda de corte V_s del suelo indicarán cuál será la discretización adecuada. Como propusieron Kuhlemeyer & Lysmer (1973) y Lysmer (1975) (de acuerdo a Kramer, 1996), la dimensión máxima de cualquier elemento Δl_{max} , para obtener una representación precisa de la transmisión de la onda, debe estar limitada según:

$$\Delta l_{max} \leq \left(\frac{\lambda_{min}}{8} \sim \frac{\lambda_{min}}{5} \right) \quad (4.5.36)$$

donde λ_{min} corresponde a la longitud de onda asociada a la máxima frecuencia de interés f_{rmax} del sismo incidente. Es decir:

$$\Delta l_{max} \leq \left(\frac{V_s}{8f_{rmax}} \sim \frac{V_s}{5f_{rmax}} \right) \quad (4.5.37)$$

En esta ecuación, V_s debe ser escogida como la mínima velocidad de onda de corte del suelo que se quiere modelar, y f_{rmax} puede ser obtenida a través de la transformada de Fourier del registro sísmico incidente, seleccionando la máxima frecuencia que contenga una cantidad de energía considerable.

4.6. Condiciones de borde artificial

4.6.1. Generalidades

Uno de los mayores problemas en el análisis dinámico es la modelación adecuada del campo lejano. La forma más común de restringir el dominio, teóricamente semi-infinito, es mediante condiciones de borde artificiales (Kontoe, 2006). Con el propósito de aumentar la eficiencia computacional del análisis, es deseable minimizar el tamaño del dominio. Sin embargo, en la medida en que la región discretizada disminuye su tamaño, la influencia de las condiciones de borde artificial se hace más significativa (Kramer, 1996).

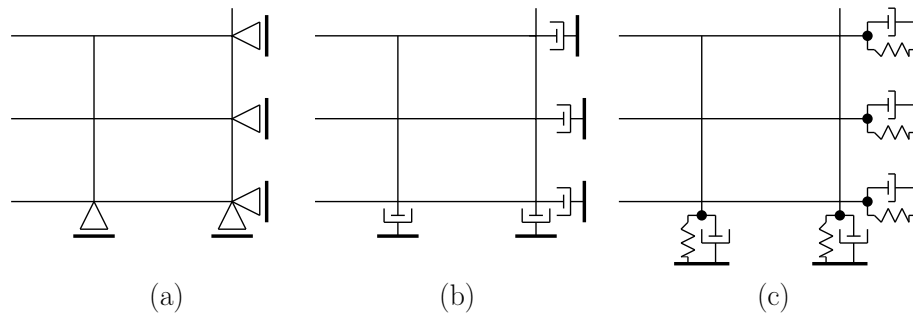


Figura 4.6: Tipos de condición de borde: (a) borde elemental con condición de desplazamiento cero; (b) borde local consistente en amortiguadores viscosos; (c) aproximación de Wolf a un borde consistente (basada en Kramer, 1996).

En general, los tipos de condiciones de borde artificial utilizadas en el análisis de elementos finitos se pueden dividir en tres grupos:

1) Borde elemental: Representa una condición de desplazamiento cero (condición de Dirichlet, ver Figura 4.6(a)) o tensión cero (Condición de Neumann). Puede ser utilizada para modelar la superficie libre (tensión cero). En el caso de los bordes laterales o inferior, la reflexión perfecta que este tipo de condición de borde impone, puede dejar energía atrapada en el dominio de análisis, que realmente debería irradiar hacia afuera de los contornos y lejos de la región de interés. Esto es conocido como efecto caja y puede producir errores importantes en la respuesta del suelo (Kramer, 1996). Para tratar este problema, eventualmente, se pueden posicionar estos bordes lejos del área de interés y emplear valores altos de amortiguamiento en los materiales. Sin embargo,

esta solución implica un costo computacional alto y además, la incorporación de amortiguamiento del material no puede modelar correctamente la condición de radiación (Luco et al., 1974 citado por Kontoe, 2006).

2) Borde Local: Este tipo de borde simula, de manera aproximada, los efectos de radiación que el borde elemental no permite. El que sea una formulación local significa que la solución en determinado grado de libertad del borde solo depende de la respuesta de los grados de libertad del borde adyacentes. Como se verá en la presente sección, el uso de amortiguadores viscosos representa un tipo común de borde local (ver Figura 4.6(b)). Dado que las ondas, en general, golpean el borde en diferentes ángulos de incidencia, este tipo de condición de borde siempre reflejará cierta cantidad de energía de la onda incidente. Problemas adicionales ocurren en presencia de ondas de superficie, dado que su velocidad de fase depende de la frecuencia (Kramer, 1996). En general, muchas de las formulaciones de borde local, entregan resultados aceptables y representan un costo computacional mucho menor que los bordes consistentes, que son más rigurosos en su tratamiento (Kontoe, 2006).

3) Borde consistente: Este tipo de borde satisface de manera exacta la condición de radiación, pudiendo absorber todo los tipos de ondas de cuerpo y superficie en todos los ángulos de incidencia y en todas las frecuencias (Kramer, 1996). La mayor parte de este tipo de bordes son dependientes de la frecuencia y en consecuencia están restringidos a problemas estacionarios (Kontoe, 2006). Wolf (1991), como lo cita Kramer (1996), desarrolló un modelo consistente en un ensamblaje de resortes, masas y amortiguadores, que puede aproximar el comportamiento de un borde consistente (ver Figura 4.6(c)).

4.6.2. Borde viscoso estándar

Uno de los tipos de borde local más utilizados es el *borde viscoso estándar*, desarrollado por Lysmer & Kuhlesmeyer (1969). Está implementado, por ejemplo, en el programa comercial de elementos finitos PLAXIS y en el programa comercial de diferencias finitas FLAC. Este consiste en la inclusión de amortiguadores viscosos, que absorben las ondas que llegan de manera normal a los contornos artificiales del dominio. La idea, fundamentalmente, consiste en la aplicación de una condición de tracción que impone la anulación de cualquier tensión reflejada. Este tipo de condición de borde pro-

porciona una precisión razonable en la absorción de ondas, a un costo computacional bajo. La gran ventaja de este enfoque es que las características de absorción son independientes de la frecuencia, y en consecuencia, puede absorber tanto ondas armónicas como no armónicas (Lysmer & Kuhlesmeyer, 1996).

Para comprender esta solución, se describe aquí el caso unidimensional, en que una onda se propaga, en dirección x , hacia la derecha, a través de un medio infinito. La idea es truncar el dominio y unir al borde artificial un amortiguador viscoso que permita representar la misma respuesta que tenía el problema anterior en esa posición (ver Figura 4.7).

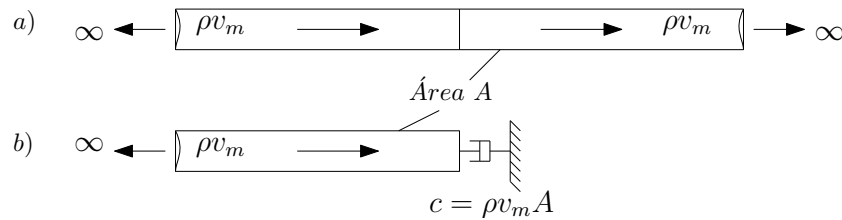


Figura 4.7: Onda armónica viajando a lo largo de (a) dos barras semi-infinitas conectadas y a lo largo de (b) una barra semi-infinita unida a un amortiguador viscoso (basada en Kramer, 1996).

La ecuación de onda en una dimensión, para una barra restringida, tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.6.38)$$

donde v_m corresponde a la velocidad de propagación, que puede escribirse como $v_m = \sqrt{E_r/\rho}$, donde E_r corresponde al módulo de elasticidad restringido, y ρ a la densidad del material.

La solución general corresponde a

$$u(x, t) = f_o(v_m t - x) + g_o(v_m t + x) \quad (4.6.39)$$

Dado que en este caso, solo existe una onda viajando hacia la derecha, la solución se

reduce a

$$u(x, t) = f_o(v_m t - x) \quad (4.6.40)$$

y en consecuencia, se pueden obtener las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -f'_o(v_m t - x) \quad (4.6.41)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v_m f'_o(v_m t - x) \quad (4.6.42)$$

Por lo tanto, despejando $f'_o(v_m t - x)$ se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{-1}{v_m} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (4.6.43)$$

Por otro lado, a través de la relación constitutiva, se llega a

$$\sigma_x(x, t) = E_r \epsilon_x = E_r \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (4.6.44)$$

y reemplazando la ecuación 4.6.43 en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\sigma_x(x, t) = E_r \epsilon_x = \frac{-E_r}{v_m} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (4.6.45)$$

Finalmente, dado que $E_r = \rho v_m^2$, la ecuación queda

$$\sigma_x(x, t) = -\rho v_m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\rho v_m \dot{u}(x, t) \quad (4.6.46)$$

donde $\dot{u}(x, t)$ corresponde a la velocidad de la partícula en x .

En consecuencia, sea $x = L$ la posición del borde artificial, para representar en L la misma situación que en el problema mostrado en la Figura 4.7(a), se debe imponer una fuerza en el borde equivalente a

$$F(L, t) = -\sigma_x(L, t)A = \rho v_m A \dot{u}(L, t) \quad (4.6.47)$$

y dado que la fuerza producida por un amortiguador viscoso se puede modelar según $F = -c_\xi \dot{u}$, esto equivale a adherir al borde artificial un amortiguador de coeficiente $c_\xi = \rho v_m A$.

Esta misma idea es extensible a dos dimensiones, tomando en cuenta las dificultades adicionales que esto conlleva, como la incidencia en diferentes ángulos de las ondas en el borde, en la presencia, por ejemplo, de una estructura. Como se puede ver en la Figura 4.8 una onda p en un espacio elástico, homogéneo, semi-infinito, incidente en un borde libre, generará dos ondas reflejadas: una onda p y otra s.

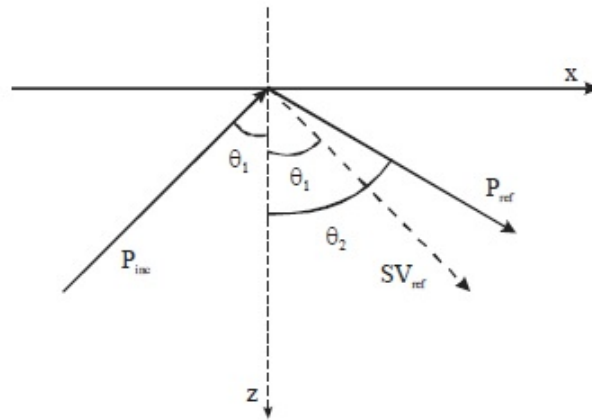


Figura 4.8: Onda p incidente en una superficie libre (Kontoe, 2006).

La solución propuesta por Lysmer y Kuhlesmeyer (1969), para el caso de dos dimensiones, involucra el uso de amortiguadores viscosos posicionados tanto normal como tangencialmente al borde (ver Figura 4.9), imponiendo las condiciones de tracción

$$\sigma_n = -C_1 \rho V_p \dot{a}_x \tag{4.6.48}$$

$$\tau = -C_2 \rho V_s \dot{a}_y \tag{4.6.49}$$

donde C_1 y C_2 corresponden a coeficientes de relajación para considerar la incidencia no perpendicular de las ondas al borde.

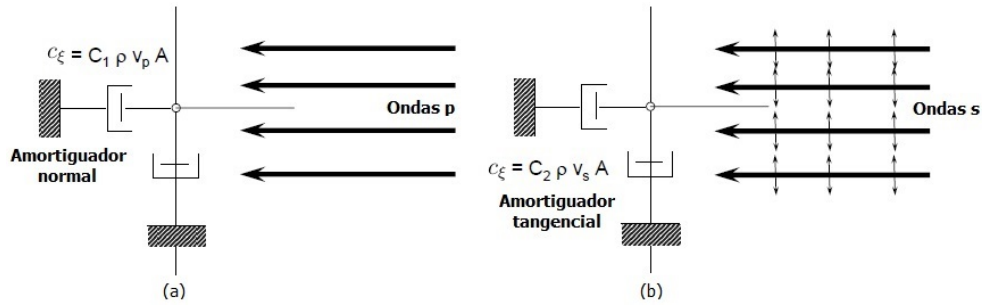


Figura 4.9: Bordes viscosos y frente de ondas normales (a) p y (b) s (modificada de Pestana, 2006).

La experiencia muestra que los valores $C_1 = 1$ y $C_2 = 0,25$ resultan en niveles razonables de absorción (Plaxis, 2015).

El desempeño de este tipo de condición de borde mejora significativamente cuando los bordes son puestos a una gran distancia de la región de interés (Kontoe, 2006).

4.6.3. Implementación del borde viscoso

Para implementar esta condición de borde se debe modificar la matriz de amortiguamiento según

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + \mathbf{C}_{abs} \quad (4.6.50)$$

donde \mathbf{C} corresponde a la matriz de amortiguamiento de Rayleigh y \mathbf{C}_{abs} es la matriz que contiene los coeficientes de los amortiguadores viscosos impuestos en los grados de libertad asociados al borde absorbente. Estos coeficientes, como lo muestra la Figura 4.9, para cada nodo en el borde, corresponden a

$$c_{\xi_x} = C_1 \rho V_p A_n \quad (4.6.51)$$

$$c_{\xi_y} = C_2 \rho V_s A_n \quad (4.6.52)$$

en el grado de libertad horizontal y vertical, respectivamente. Estos valores se reemplazan en los elementos diagonales de la matriz \mathbf{C}_{abs} asociados a los grados de libertad de interés. El valor de ρ corresponde a la densidad del elemento al que pertenece el nodo. Para efectos de implementación, se puede considerar A_n como el área de influencia del nodo (Ercoli et al., 2001), enfoque que es utilizado en el código. Dado que los elementos tienen una profundidad unitaria, el área de influencia equivale a un largo de influencia, con respecto al largo L del elemento en el lado perteneciente al borde viscoso. El largo de influencia utilizado para los nodos, tanto en los elementos triangulares lineales como para los cuadráticos, se muestra en la Figura 4.10, donde se ha utilizado como criterio la distribución de fuerza en los nodos que resulta de aplicar una fuerza de superficie uniformemente distribuida sobre el lado de un triángulo (Capítulo 2).

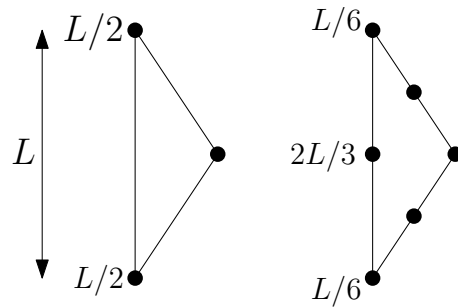


Figura 4.10: Largo de influencia utilizado para la implementación del borde viscoso en (a) los elementos triangulares lineales y (b) triangulares cuadráticos.

4.7. Imposición del registro sísmico

Para realizar un análisis sísmico se requiere de la imposición de un registro sísmico, normalmente, en el borde inferior del dominio. Dos de las técnicas existentes para imponer restricciones en ciertas zonas de dominio son el método del multiplicador de Lagrange y el método de penalización (Bathe, 1996). Con el propósito de imponer el registro sísmico como un desplazamiento prescrito en la base, en el código se implementa la segunda de estas técnicas. Esta tiene la ventaja de no requerir ecuaciones adicionales.

El método de penalización consiste básicamente en agregar valores grandes, llamados pesos de penalización, a los términos diagonales, i , de la matriz $\hat{\mathbf{K}}$, asociados a los grados de libertad i donde se quiere imponer cierta restricción, y agregar una fuerza, en esos mismos grados de libertad, tal que el desplazamiento producido en ellos se aproxime al deseado. Para esto se debe reformular la ecuación $\hat{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ según

$$(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})\mathbf{a} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T \mathbf{a}_r \quad (4.7.53)$$

donde la restricción impuesta se puede escribir como

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}_r \quad (4.7.54)$$

y \mathbf{W} corresponde a una matriz diagonal que contiene los pesos de penalización, w_i .

Así, el registro sísmico se puede imponer de la siguiente manera: el vector \mathbf{a}_r debe contener el valor de desplazamiento prescrito por el sismo en cada una de las componentes asociadas a los grados de libertad horizontales de la base del dominio, y la matriz \mathbf{A} debe ser una matriz diagonal, con valores 1 en las componentes asociadas a los grados de libertad restringidos, y valores 0 en las demás componentes. De esta manera, si se consideran pesos de penalización, w_i , de gran magnitud con respecto a las entradas de la matriz $\hat{\mathbf{K}}$, se obtiene para los grados de libertad horizontales en la base:

$$\mathbf{a} \approx \mathbf{a}_r \quad (4.7.55)$$

En el caso no lineal, el método de Newton-Raphson de rigidez inicial sigue siendo válido y se puede reescribir como

$$(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \Delta \mathbf{a}^j = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T \mathbf{a}_r - \hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{t+\Delta t, j-1} - (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{a}^{t+\Delta t, j-1} \quad (4.7.56)$$

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t, j} = \mathbf{a}^{t+\Delta t, j-1} + \Delta \mathbf{a}^j \quad (4.7.57)$$

4.8. Modelación del comportamiento dinámico utilizando el modelo Mohr-Coulomb

Si bien el modelo Mohr-Coulomb no está pensado, en primera instancia, para la modelación de problemas dinámicos (existen modelos más avanzados que toman en cuenta de mejor manera las características de los cíclicos de histéresis del suelo), este representa una primera aproximación dentro del marco de los modelos constitutivos basados en la teoría de plasticidad. Además, el modelo Mohr-Coulomb es la base para la comprensión e implementación de otros modelos más avanzados. En consecuencia, es posible su utilización de manera preliminar, comprendiendo las implicancias y limitaciones que tiene en la modelación del comportamiento dinámico de los suelos.

En este contexto, resulta ilustrativo deducir las curvas de degradación de la rigidez y de razón de amortiguamiento que resultan de utilizar este modelo (cabe recordar que en el Capítulo 1, Sección 1.3, se describen estas curvas, mostrando algunas obtenidas de manera experimental). Para esto, considérese la Figura 4.11 donde en azul se representa un ciclo de histéresis del modelo Mohr-Coulomb frente a un ensayo de corte simple cíclico, y en negro se esquematiza la forma de un ciclo de histéresis típico obtenido experimentalmente. En esta figura, τ_f corresponde a la resistencia al corte dada por $\tau_f = c + \sigma \cdot tg(\phi)$ según el modelo Mohr-Coulomb, donde σ es el valor de tensión vertical del ensayo (constante), y por otro lado, γ_a corresponde a la amplitud de deformación angular a la que se somete el suelo.

De la figura se desprende que para el modelo Mohr-Coulomb el módulo de corte secante, G_s , para amplitudes de deformación en el rango elástico ($\gamma_a < \tau_f/G$) equivale al módulo de corte elástico, G , y al máximo o inicial, G_{max} :

$$G_s = G = G_{max} \quad (4.8.58)$$

Luego, para este rango de deformaciones, la curva de degradación de rigidez corresponde a:

$$\frac{G_s}{G_{max}} = 1 \quad (4.8.59)$$

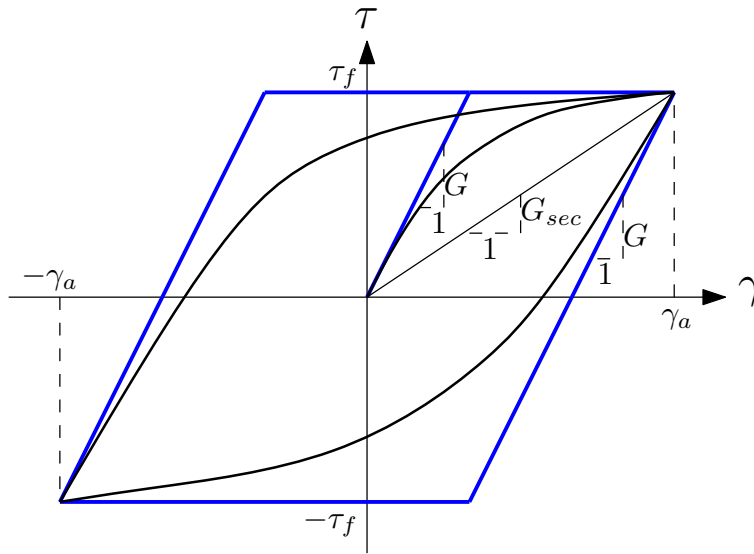


Figura 4.11: Ciclo histerético del modelo Mohr-Coulomb ante ensayo de corte simple cíclico.

Por otro lado, para amplitudes de deformación en el rango plástico ($\gamma_a \geq \tau_f/G$) puede visualizarse que el módulo de corte secante equivale a:

$$G_s = \frac{\tau_f}{\gamma_a} \tag{4.8.60}$$

y en consecuencia, la curva de degradación de rigidez en este rango corresponde a

$$\frac{G_s}{G_{max}} = \frac{\tau_f}{\gamma_a \cdot G_0} \tag{4.8.61}$$

En la Figura 4.12 se grafica esta curva para una arena de propiedades $G = 300$ [Mpa], $c = 0$, $\phi = 40^\circ$, con $\sigma = 0,1$ [Mpa]. Además, con el objetivo de comparar los resultados del modelo con el comportamiento real de los suelos, se grafican las curvas experimentales obtenidas por Ishibashi & Zhang (1993) y Darandeli (2001) para arenas con índice de plasticidad $IP = 0$ y presión de confinamiento $0,1$ [Mpa].

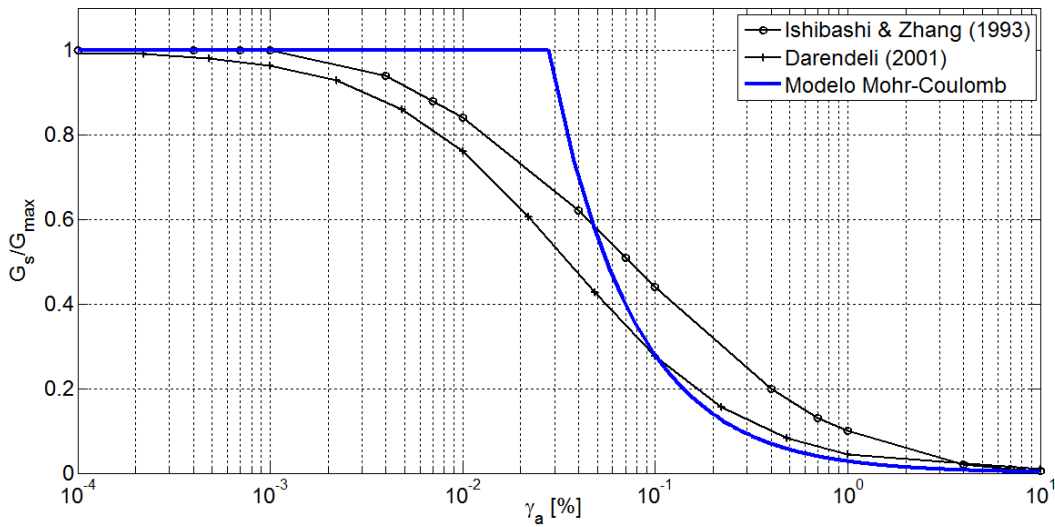


Figura 4.12: Curva de degradación de la rigidez. Comparación entre el modelo Mohr-Coulomb y curvas experimentales.

En el caso de la razón de amortiguamiento, ξ , se debe recordar la fórmula del Capítulo 1, Sección 1.2.3:

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (4.8.62)$$

donde ΔW corresponde a la energía disipada en un ciclo y equivale al área del paralelogramo que forma el ciclo de histéresis en el modelo de Mohr-Coulomb, y W corresponde a la energía elástica entregada en un ciclo y equivale al área bajo la recta que define al módulo de corte secante G_{sec} .

De esta forma se tiene que para amplitudes de deformación en el rango elástico $\Delta W = 0$ y en consecuencia:

$$\xi = 0 \quad (4.8.63)$$

Por otro lado, para amplitudes de deformación en el rango plástico se tiene:

$$\Delta W = 4\tau_f \left(\gamma_a - \frac{\tau_f}{G} \right) \quad (4.8.64)$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma_a \tau_f \tag{4.8.65}$$

y por lo tanto

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{4\tau_f \left(\gamma_a - \frac{\tau_f}{G} \right)}{\frac{1}{2} \gamma_a \tau_f} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\tau_f}{G \cdot \gamma_a} \right) \tag{4.8.66}$$

En la Figura 4.13 se grafica esta curva para la misma arena considerada con anterioridad y las curvas experimentales obtenida por Ishibashi & Zhang (1993) y Darandeli (2001).

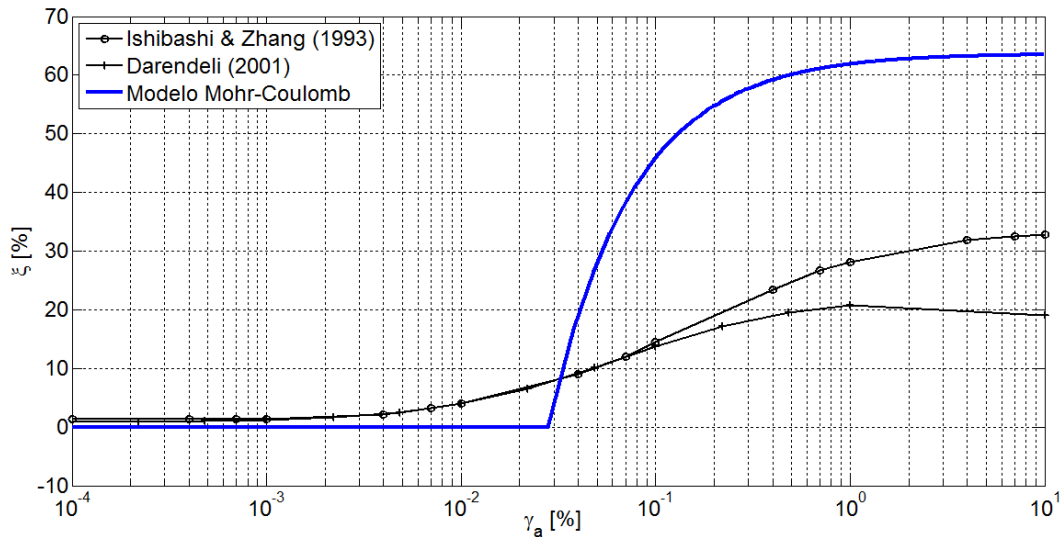


Figura 4.13: Curva de razón de amortiguamiento. Comparación entre el modelo Mohr-Coulomb y curvas experimentales.

De los resultados anteriores se pueden inferir algunas de las limitaciones del modelo Mohr-Coulomb en la modelación del comportamiento dinámico:

- El modelo sigue un patrón de carga, descarga y recarga con el mismo módulo de corte G , lo cual no corresponde al comportamiento real de los suelos.
- La degradación del módulo de corte y la razón de amortiguamiento solo se manifiestan cuando el suelo entra en el rango plástico, lo cual no coincide con el

comportamiento real de los suelos. Esto trae como consecuencia una subestimación de la degradación de rigidez y de la razón de amortiguamiento a bajos niveles de amplitud de deformación.

- Debido a la forma del ciclo de histéresis del modelo (paralelogramo) que produce un área de disipación mayor a la real, este sobrestima de manera considerable la razón de amortiguamiento en prácticamente todo el rango de amplitudes de deformación plástica.

MODELACIÓN DE LA RESPUESTA EN SUELOS SATURADOS

5.1. Introducción

En el caso de suelos saturados, el suelo puede ser dividido en dos fases: la fase sólida, o esqueleto sólido, que corresponde a los granos del suelo, y la fase líquida, que corresponde a los poros, o vacíos entre los granos, que se encuentran completamente saturados por el agua (ver Figura 5.1). Si el problema se piensa desde una escala macroscópica, este puede ser tratado como un medio continuo en el que existe una mezcla homogénea y donde en cada punto conviven las dos fases antes descritas. Dentro de este enfoque, es necesario definir los conceptos de tensión efectiva y presión de poros. El primero corresponde a los esfuerzos generados debido al contacto entre los granos del suelo (fase sólida), mientras que el segundo corresponde a la presión que se genera en el agua al interior de los poros (fase líquida).

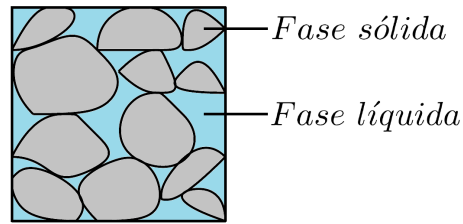


Figura 5.1: Representación de un suelo saturado.

De este modo, las tensiones totales que experimenta un suelo pueden dividirse entre estas dos componentes (idea que corresponde a la teoría de Terzaghi). La forma en que se repartirá la carga entre la fase sólida y la fase líquida quedará definida por las condiciones en que las solicitaciones sean aplicadas sobre el suelo y las características de este mismo. Matemáticamente, bajo ciertas simplificaciones, el fenómeno se puede modelar mediante un sistema de ecuaciones en donde los desplazamientos del esqueleto sólido del suelo quedan acoplados a la presión de poros (formulación simplificada $u-p$). Sin embargo, se pueden distinguir dos condiciones particulares, en que es posible desacoplar el sistema: la condición completamente drenada, en la cual no se producen variaciones en la presión de poros, y la condición completamente no drenada, en la que se producen variaciones en la presión de poros debido al comportamiento conjunto de la fases sólida y líquida. En este capítulo se describe la implementación de estas condiciones en el código de elementos finitos y se evalúa el comportamiento del modelo Mohr-Coulomb en su reproducción.

5.2. Interacción suelo-fluido en los poros

Siguiendo la teoría de Terzaghi, la tensión total, $\boldsymbol{\sigma}$, inducida en un suelo saturado con un fluido, como el agua, puede ser dividida en dos partes; la parte que le corresponde al esqueleto sólido del suelo, llamada tensión efectiva, $\boldsymbol{\sigma}'$ (negativa en compresión), y la presión del fluido al interior de los poros, p_w (negativa en compresión), según

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{m}p_w \quad (5.2.1)$$

donde para el caso general (tridimensional)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (5.2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \sigma'_y & \sigma'_z & \tau'_{xy} & \tau'_{yz} & \tau'_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (5.2.3)$$

y donde

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.2.4)$$

Este último vector \mathbf{m} tiene sus últimas 3 componentes nulas debido a que el agua no ofrece resistencia al corte y por lo tanto no hay generación de presión de poros asociada a esas componentes, siendo las tensiones de corte totales equivalentes a las efectivas. En este enfoque se supone además que la resistencia y las deformaciones del esqueleto sólido están relacionadas solamente con las tensiones efectivas y no dependen de la presión de poros.

En general, el comportamiento del esqueleto sólido es caracterizado por un modelo constitutivo elasto-plástico en términos de las tensiones efectivas. Sin embargo, para simplificar el problema y mostrar la naturaleza acoplada del fenómeno de interacción suelo-fluido en los poros, se supondrá acá una relación constitutiva del suelo lineal-elástica. Dado que la tensión efectiva es la responsable de generar deformaciones en el esqueleto sólido, la relación constitutiva queda

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.2.5)$$

Para obtener la primera ecuación de equilibrio se recurre a la conservación de la cantidad de movimiento global del sistema sólido-fluido. Si se desprecia la aceleración relativa del fluido con respecto a la fase sólida, se obtiene la ecuación de movimiento deducida en el Capítulo 2, Sección 2.3, que utiliza la aproximación de elementos finitos $\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a}$:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.2.6)$$

La simplificación utilizada (despreciar la aceleración relativa del fluido con respecto a la fase sólida) es válida para cargas de baja frecuencia, como lo demostraron Zienkiewicz & Shiomi (1984, como lo cita Sáez, 2013). Dado que en el caso sísmico las frecuencias son relativamente bajas ($< 20 [Hz]$ en general) la simplificación resulta adecuada (Sáez, 2013).

En esta ecuación, el tercer término del lado izquierdo no ha sido llevado aún a su forma matricial. Este término puede ser dividido en dos partes siguiendo la ecuación 5.2.1:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} p_w d\Omega \quad (5.2.7)$$

con lo cual la ecuación de movimiento puede ser escrita como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{p}}_w = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.2.8)$$

donde

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{a} \quad (5.2.9)$$

El término $\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{p}}_w$ de la ecuación 5.2.8 proviene de la aproximación de la presión de poros, p_w , utilizando el método de elementos finitos, según

$$p_w \approx \hat{p}_w = \sum_{i=1}^n N_{p_i} \tilde{p}_{w_i} = \mathbf{N}_p \tilde{\mathbf{p}}_w \quad (5.2.10)$$

donde N_{p_i} corresponde a las funciones de forma utilizadas para aproximar la presión de poros p_w (las cuales no necesariamente deben ser iguales a las funciones N_i utilizadas

para aproximar el campo de desplazamientos \mathbf{u}) y \tilde{p}_{w_i} corresponde a las presiones de poros nodales. Así \mathbf{N}_p es el vector que agrupa las funciones de forma N_{p_i} y $\tilde{\mathbf{p}}_w$ es el vector que agrupa las presiones de poros nodales \tilde{p}_{w_i} .

De este modo el término \mathbf{Q} , conocido como la matriz de acoplamiento, queda dado por

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (5.2.11)$$

Dado que la ecuación de movimiento queda acoplada a la presión en los poros se requiere de una ecuación adicional. Para esto se recurre a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

- Balance de la cantidad de movimiento en el fluido.
- Balance global de la masa.

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene una ecuación escalar que puede ser escrita en la siguiente forma (Zienkiewicz & Taylor, 2000):

$$\nabla^T (k_p \nabla p_w) - \frac{1}{Q} \dot{p}_w + \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (5.2.12)$$

donde k_p corresponde a la permeabilidad del suelo expresada en las dimensiones $[L^3 T / M]$, ϵ_v es la deformación volumétrica dada por

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (5.2.13)$$

y el término Q está relacionado con la compresibilidad del suelo, según

$$\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_w} + \frac{1-n}{K_s} \quad (5.2.14)$$

donde n es la porosidad (volumen de poros contenido en un volumen unitario de suelo), K_w es el módulo de compresibilidad del fluido en los poros y K_s es el módulo de compresibilidad de la fase sólida del suelo. En general se puede suponer que la fase sólida del suelo es incompresible ($K_s \rightarrow \infty$), con lo cual

$$Q = \frac{K_w}{n} \quad (5.2.15)$$

En la ecuación 5.2.12 se han despreciado los siguientes términos:

- La contribución de la aceleración relativa del fluido con respecto a la fase sólida, por los mismos motivos expuestos con anterioridad.
- La contribución de la aceleración de la fase sólida, debido a que su inclusión genera un sistema de ecuaciones asimétrico y su efecto es insignificante, como lo demostró Chang (1988, citado por Zienkiewicz et al., 1999).

Esta ecuación puede ser discretizada mediante el método de elementos finitos, para lo cual es necesario premultiplicar por \mathbf{N}_p^T e integrar, obteniéndose

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \nabla^T (k_p \nabla p_w) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \dot{p}_w d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \dot{\epsilon}_v d\Omega = 0 \quad (5.2.16)$$

y reemplazando las ecuaciones 5.2.10 y 5.2.13 se llega a

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \nabla^T (k_p \nabla (\mathbf{N}_p \tilde{p}_w)) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p \dot{\tilde{p}}_w d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} d\Omega = 0 \quad (5.2.17)$$

De este modo, desarrollando la integral del primer término por partes, la ecuación puede escribirse como sigue:

$$-\mathbf{H} \tilde{p}_w - \mathbf{S} \dot{\tilde{p}}_w + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{q} \quad (5.2.18)$$

donde \mathbf{H} y \mathbf{S} son matrices definidas de acuerdo a

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T k_p (\nabla \mathbf{N}_p) d\Omega \quad (5.2.19)$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (5.2.20)$$

y el término \mathbf{q} es un vector que contiene las condiciones de borde (prescripción de presión o flujo en el borde).

De esta manera, tomando 5.2.8 y 5.2.18 el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\tilde{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ \mathbf{Q}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\tilde{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ 0 & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{p}_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5.2.21)$$

que corresponde a un sistema de ecuaciones acoplado, con las incógnitas \mathbf{a} y \tilde{p}_w que permiten aproximar \mathbf{u} y p_w . A esta formulación se le denomina formulación acoplada simplificada o u-p, para distinguirla de la formulación acoplada completa de Biot, que considera la aceleración relativa entre el fluido y la fase sólida y en consecuencia aumenta el número de incógnitas. Como lo mencionan Zienkiewicz et al. (1999), la falta de exactitud en la formulación u-p solo se manifiesta en fenómenos de alta frecuencia y baja duración.

5.3. Desacople del sistema de ecuaciones u-p

5.3.1. Generalidades

Bajo ciertas condiciones particulares es posible desacoplar el sistema de ecuaciones 5.2.21. Estos casos se denominan *condición completamente drenada* y *condición completamente no drenada*, y la implementación numérica en esta tesis se limitará a estas dos situaciones.

5.3.2. Condición completamente drenada

La condición completamente drenada implica la hipótesis de que el agua puede escurrir libremente a través de los intersticios del suelo, lo que equivale a suponer que la permeabilidad del suelo tiende a infinito ($k_p \rightarrow \infty$) y que, en consecuencia, no habrá generación de exceso de presión de poros ($\dot{p}_w = 0$). Por lo tanto, en este caso el problema se reduce a resolver la ecuación 5.2.8, manteniendo la presión de poros inicial constante durante toda la aplicación de la carga. Esta presión inicial corresponde, en general, a la presión hidroestática generada bajo el nivel freático. La hipótesis de condición totalmente drenada es razonable en el caso de cargas lentas con respecto a la permeabilidad del suelo, debido a que en tales condiciones el agua tendrá tiempo de escurrir. En el caso dinámico no es adecuado utilizar esta hipótesis bajo la formulación simplificada u-p, debido a que la aceleración relativa del fluido con la fase sólida no puede despreciarse (considerando que el agua puede escurrir libremente a través del medio poroso).

5.3.3. Condición completamente no drenada

La condición completamente no drenada implica la hipótesis de que el agua no tiene tiempo de escurrir a través de los intersticios del suelo, debido a una sollicitación rápida con respecto a la permeabilidad del suelo, generándose exceso de presión de poros ($\dot{p}_w \neq 0$). Esto equivale a suponer que la permeabilidad del suelo tiende a cero

($k_p \rightarrow 0$). De esta manera, reemplazando 5.2.15, la ecuación 5.2.12 se reduce a

$$-\frac{n}{K_w} dp_w + d\epsilon_v = 0 \quad (5.3.22)$$

Si además se supone que el agua es incompresible ($K_w \rightarrow \infty$) se obtiene

$$d\epsilon_v = 0 \quad (5.3.23)$$

lo que implica que en condición completamente no drenada la variación en el volumen del suelo es nula. Sin embargo, en la realidad el módulo de compresibilidad del agua, K_w , es grande pero no infinito. Por ejemplo, en el caso de agua pura, sin burbujas de aire, este tiene un valor aproximado de $K_w = 2 \cdot 10^6$ [kPa]. De este modo, volviendo a la ecuación 5.3.22 y reemplazando 5.2.13 se obtiene la expresión para la determinación del exceso de presión de poros:

$$dp_w = \frac{K_w}{n} d\epsilon_v = \frac{K_w}{n} (d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z) \quad (5.3.24)$$

donde la porosidad se calcula mediante

$$n = \frac{e_0}{1 + e_0} \quad (5.3.25)$$

siendo e_0 la razón inicial de vacíos del suelo.

La ecuación 5.3.24 implica que los cambios en la presión de poros estarán determinados por los cambios que se produzcan en las deformaciones del suelo.

Por otro lado, derivando la expresión 5.2.1 se obtiene

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}' + m dp_w \quad (5.3.26)$$

donde, para el caso de deformaciones planas

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\tau_{xy} \quad d\sigma_z \right]^T \quad (5.3.27)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} d\sigma'_x & d\sigma'_y & d\tau'_{xy} & d\sigma'_z \end{bmatrix}^T \quad (5.3.28)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.3.29)$$

llegando a

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\tau'_{xy} \\ d\sigma'_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dp_w \\ dp_w \\ 0 \\ dp_w \end{Bmatrix} \quad (5.3.30)$$

Para escribir la ecuación constitutiva asociada a la tensión efectiva, $\boldsymbol{\sigma}'$, es necesario utilizar parámetros efectivos del suelo, es decir, parámetros que caractericen el suelo en su condición drenada (o a largo plazo), lo que en términos experimentales se traduce en la aplicación de la carga lo suficientemente lento para que no se produzcan excesos de presión de poros. En el caso elástico estos parámetros corresponden a E' y ν' , es decir, al módulo elástico y el módulo de Poisson efectivos. De esta manera la relación constitutiva, $d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}d\boldsymbol{\epsilon}$, queda

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\tau'_{xy} \\ d\sigma'_z \end{Bmatrix} = \frac{E'}{(1+\nu')(1-2\nu')} \begin{bmatrix} 1-\nu' & \nu' & 0 & \nu' \\ \nu' & 1-\nu' & 0 & \nu' \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2} & 0 \\ \nu' & \nu' & 0 & 1-\nu' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (5.3.31)$$

donde $d\epsilon_z = 0$ por tratarse de deformaciones planas. Invertiendo esta relación y reemplazando la ecuación 5.3.30 se llega a

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E'} \begin{bmatrix} 1 & -\nu' & 0 & -\nu' \\ -\nu' & 1 & 0 & -\nu' \\ 0 & 0 & 2+2\nu' & 0 \\ -\nu' & -\nu' & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x - dp_w \\ d\sigma_y - dp_w \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z - dp_w \end{Bmatrix} \quad (5.3.32)$$

Es posible, ahora, reescribir esta relación en términos de las tensiones totales, σ , reemplazando la ecuación 5.3.24 y realizando un cambio de variables que se describe a continuación. De este modo la relación queda

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_u} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_u & 0 & -\nu_u \\ -\nu_u & 1 & 0 & -\nu_u \\ 0 & 0 & 2 + 2\nu_u & 0 \\ -\nu_u & -\nu_u & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z \end{Bmatrix} \quad (5.3.33)$$

donde E_u y ν_u se definen como el módulo de elasticidad y el módulo de Poisson en condición no drenada, respectivamente. Experimentalmente estos parámetros se pueden determinar mediante la aplicación de la carga lo suficientemente rápido para que no exista drenaje, y están dados por el siguiente cambio de variables, que los asocian a los parámetros efectivos:

$$E_u = 2G(1 + \nu_u) \quad (5.3.34)$$

donde G corresponde al módulo de corte, que puede ser calculado mediante

$$G = \frac{E'}{2(1 + \nu')} \quad (5.3.35)$$

y

$$\nu_u = \frac{\nu' + \mu(1 + \nu')}{1 + 2\mu(1 + \nu')} \quad (5.3.36)$$

donde

$$\mu = \frac{1}{3n} \frac{K_w}{K'} \quad (5.3.37)$$

$$K' = \frac{E'}{3(1 - 2\nu')} \quad (5.3.38)$$

siendo K' definido como el módulo de compresibilidad efectivo del suelo.

En estas expresiones, usar un valor $\nu_u = 0,5$ equivale a considerar el agua como incompresible ($K_w \rightarrow \infty$), lo cual, como se explicó anteriormente, no es real, y por otro lado, numéricamente implica generar una matriz de rigidez singular. Como alternativa, se puede utilizar un valor de ν_u distinto pero cercano a 0,5 ($\nu_u = 0,495$ según Galavi, 2010), y de esta forma se considera que el agua es ligeramente compresible, lo que implica que pueden ocurrir pequeños cambios en la deformación volumétrica.

Luego de seguir este criterio, se despeja el módulo de compresibilidad del agua, K_w , reemplazando 5.3.38 en 5.3.37 y luego esta última en 5.3.36, de lo cual se obtiene

$$K_w = \frac{3K'n(\nu_u - \nu')}{(1 - 2\nu_u)(1 + \nu')} \quad (5.3.39)$$

Esta expresión (usando $\nu_u = 0,495$) asegura un valor del módulo de compresibilidad del agua grande en comparación al módulo de compresibilidad del suelo ($K_w \geq 30nK'$ siempre que $\nu' \leq 0,35$, según PLAXIS, 2015).

De este modo, es posible formar la matriz de rigidez global del sistema en términos de las tensiones totales, \mathbf{K}_u , utilizando los parámetros no drenados E_u y ν_u , a partir de la matriz \mathbf{D}_u :

$$\mathbf{D}_u = \frac{E_u}{(1 + \nu_u)(1 - 2\nu_u)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_u & \nu_u & 0 & \nu_u \\ \nu_u & 1 - \nu_u & 0 & \nu_u \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu_u}{2} & 0 \\ \nu_u & \nu_u & 0 & 1 - \nu_u \end{bmatrix} \quad (5.3.40)$$

pudiéndose reescribir la ecuación de movimiento 5.2.6 en la forma desacoplada

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_u\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.3.41)$$

Como se vio en el Capítulo 3, Sección 3.2.2, al resolver esta ecuación mediante el método de Newton-Raphson (para considerar el caso no lineal) se obtiene, en cada iteración j del paso de carga i , el subincremento del vector de desplazamiento nodal, $\delta\mathbf{a}^j$, que permite determinar el subincremento de deformaciones, $\delta\boldsymbol{\epsilon}^j$, y el incremento de deformaciones, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^i$, en cada punto de integración. Esto permite, por un lado, utilizar $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^i$ para actualizar las tensiones efectivas, $\boldsymbol{\sigma}^{i,j}$, según

$$\boldsymbol{\sigma}^{i,j} = \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^i \quad (5.3.42)$$

mediante la integración de la ecuación constitutiva, $d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}^{ep}d\boldsymbol{\epsilon}$, a través de

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^i = \int_{\boldsymbol{\epsilon}^{i-1}}^{\boldsymbol{\epsilon}^{i-1} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^i} \mathbf{D}^{ep}d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^i - \Delta\boldsymbol{\sigma}'^p \quad (5.3.43)$$

y por otro lado, utilizar $\delta\boldsymbol{\epsilon}^j$ para actualizar las presiones de poros, $p_w^{i,j}$, según

$$p_w^{i,j} = p_w^{i,j-1} + \delta p_w^j \quad (5.3.44)$$

recurriendo para esto a la ecuación 5.3.24 en la forma

$$\delta p_w^j = \frac{K_w}{n} \delta\epsilon_v^j = \frac{K_w}{n} (\delta\epsilon_x^j + \delta\epsilon_y^j + \delta\epsilon_z^j) \quad (5.3.45)$$

Finalmente, se realiza la actualización de las tensiones totales, $\boldsymbol{\sigma}$, a través de

$$\boldsymbol{\sigma}^{i,j} = \boldsymbol{\sigma}'^{i,j} + m p_w^{i,j} \quad (5.3.46)$$

lo que permite actualizar el vector de fuerzas internas:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^{e\ i,j} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i,j} d\Omega \quad (5.3.47)$$

A este enfoque se le denomina *análisis no drenado en tensiones efectivas (undrained effective stress analysis)*, debido a que se utilizan como valores de entrada parámetros efectivos (E' , ν' , c' , ϕ' , ψ' en el caso del modelo Mohr-Coulomb) y el análisis se separa en uno en tensiones efectivas y otro de generación de presión de poros.

5.4. Modelación de la respuesta no drenada utilizando el modelo Mohr-Coulomb

5.4.1. Modelo Mohr-Coulomb en el espacio p'-q

Para comprender el comportamiento que se obtiene al utilizar el modelo Mohr-Coulomb en condición no drenada resulta ilustrativo reproducir un ensayo triaxial. Para esto es conveniente expresar el modelo en términos de variables denominadas invariantes (debido a que se mantienen constantes independiente de la orientación del sistema de referencia que se utilice para definir las). A continuación estas se expresan en términos de las tensiones principales:

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) \quad (5.4.48)$$

$$q = q' = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2)} \quad (5.4.49)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (5.4.50)$$

$$\epsilon_q = \sqrt{\frac{2}{9}((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2)} \quad (5.4.51)$$

donde:

p' : Tensión isotrópica.

q : Tensión de corte equivalente.

ϵ_v : Deformación volumétrica.

ϵ_q : Deformación desviadora.

A partir de estos invariantes, el modelo Mohr-Coulomb puede ser expresado de la siguiente manera, en el caso de compresión triaxial:

- Región elástica:

$$\begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_q^e \end{Bmatrix} \quad (5.4.52)$$

- Superficie de fluencia:

$$f(p', q) = q - Mp' - c^* = 0 \quad (5.4.53)$$

donde

$$M = \frac{6\text{sen}(\phi')}{3 - \text{sen}(\phi')} \quad (5.4.54)$$

$$c^* = \frac{6c'\text{cos}(\phi')}{3 - \text{sen}(\phi')} \quad (5.4.55)$$

La superficie de fluencia puede ser visualizada en el plano $p' - q$, como se muestra en la Figura 5.2.

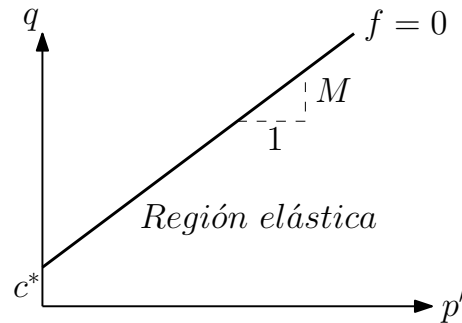


Figura 5.2: Superficie de fluencia del modelo Mohr-Coulomb en el plano p' - q .

- Potencial plástico:

$$g(p', q) = q - M^*p' + cte \quad (5.4.56)$$

donde

$$M^* = \frac{6\text{sen}(\psi')}{3 - \text{sen}(\psi')} \quad (5.4.57)$$

5.4.2. Modelación de un ensayo triaxial consolidado no drenado

La Figura 5.3 representa un ensayo triaxial consolidado en compresión en términos de las tensiones principales. Básicamente, en este ensayo se mantiene una tensión horizontal radial constante sobre la probeta ($\sigma_2 = \sigma_3$), mientras se produce el incremento de la tensión vertical axial (σ_1), a partir de un estado $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (lo que implica que inicialmente $q = 0$).

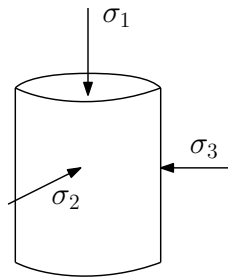


Figura 5.3: Esquema de un ensayo triaxial consolidado en compresión.

Considerando que $\sigma_2 = \sigma_3$, los invariantes definidos en la sección anterior (en términos de las tensiones totales) se reducen a

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \quad (5.4.58)$$

$$q = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5.4.59)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \quad (5.4.60)$$

$$\epsilon_q = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3) \quad (5.4.61)$$

Además, debido a las características del ensayo antes señaladas, este cumple la siguiente relación en el plano $p - q$:

$$q = 3p - 3\sigma_3 \quad (5.4.62)$$

Si el ensayo se realiza en condición drenada se tiene que $p = p'$ y no existe generación de presión de poros, mientras que si se realiza en condición no drenada, existe generación en la presión de poros y $p = p' + p_w$.

En la Figura 5.4 se esquematiza (en color azul) la trayectoria que sigue el modelo Mohr-Coulomb, con $\psi' = 0$, en un ensayo triaxial consolidado no drenado, para distintos planos de interés. Adicionalmente, y para efectos de comparación, se grafica (en negro) la trayectoria del modelo en un ensayo triaxial consolidado drenado.

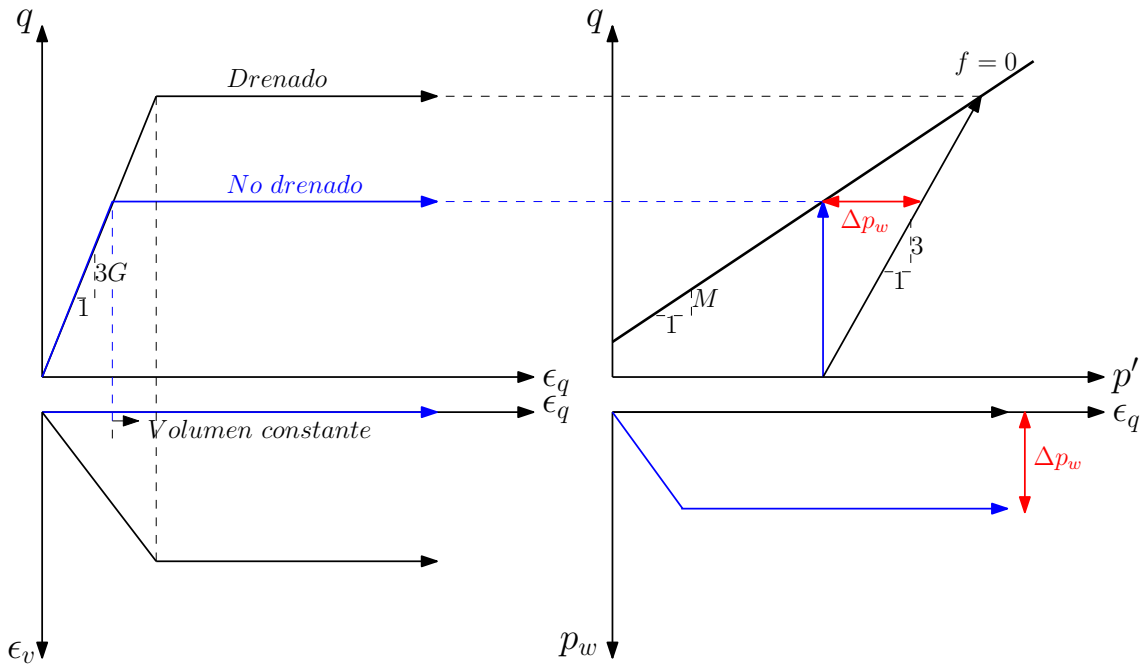


Figura 5.4: Comparación entre ensayo triaxial drenado y no drenado modelado mediante el modelo Mohr-Coulomb.

Para entender el comportamiento del modelo, considérese lo siguiente:

De la ecuación 5.4.52 se tiene que en la región elástica

$$dp' = K' d\epsilon_v^e \tag{5.4.63}$$

Como ya se mencionó, en el caso completamente no drenado se utiliza un valor ν_u cercano a 0,5 ($\nu_u = 0,495$), y por lo tanto el cambio en la deformación volumétrica, $d\epsilon_v$, es un valor cercano a 0, lo que trae como consecuencia que $dp' \rightarrow 0$. Esto quiere

decir que en el rango elástico se tendrá un valor de p' prácticamente constante, lo que explica la trayectoria vertical de las tensiones en el plano $p' - q$. Por otro lado, en el caso del ensayo drenado se tiene que $p' = p$, por lo que la trayectoria en el plano $p' - q$ sigue el mismo camino definido por la recta dada por la ecuación 5.4.62, que posee pendiente 3. Como consecuencia de lo anterior, se tiene que para el caso no drenado la trayectoria de tensiones en el plano $p' - q$ intercepta a la superficie de fluencia ($f = 0$) en una tensión de corte equivalente, q , menor que en el caso drenado, lo que explica las diferencias que se visualizan en el plano $\epsilon_q - q$.

En el plano $\epsilon_q - \epsilon_v$ se muestra la variación que tiene la deformación volumétrica, ϵ_v , a medida que transcurre el ensayo. Debido a que se utiliza un valor de $\psi' = 0$, la deformación volumétrica es constante una vez que la muestra entra en el rango plástico, tanto para el ensayo drenado como para el no drenado. Si bien, en el caso del ensayo no drenado se ha graficado como nula la deformación volumétrica, esta en realidad no lo es (debido al uso de $\nu_u = 0,495$) y su variación produce cambios importantes en la presión de poros debido al uso de un módulo de compresibilidad del agua, K_w , grande. Esto se puede visualizar en el plano $\epsilon_q - p_w$, donde existe un incremento de la presión de poros mientras el suelo se encuentra en la región elástica producto del incremento (en compresión) de la deformación volumétrica. Por otro lado, en el caso del ensayo drenado puede observarse que no hay cambios en la presión de poros, pero si cambios importantes en la deformación volumétrica.

5.4.3. Limitaciones del modelo Mohr-Coulomb en la modelación de la respuesta no drenada

Una de las limitaciones del modelo Mohr-Coulomb tiene que ver con la estimación de la resistencia al corte no drenada, S_u . La Figura 5.5 esquematiza (en negro) la trayectoria de tensiones típica que sigue un suelo (que podría ser una arcilla normalmente consolidada) en un ensayo triaxial consolidado no drenado. Como se puede apreciar, se produce una reducción significativa de p' a medida que el suelo se acerca a la falla, debido al exceso de presión de poros inducido por el corte. Por otro lado, en color azul se grafica la trayectoria obtenida mediante el modelo Mohr-Coulomb. Como ya se explicó, esta sigue un patrón vertical, manteniendo p' constante. Como consecuencia, el modelo tiende a sobrestimar la resistencia al corte no drenada S_u .

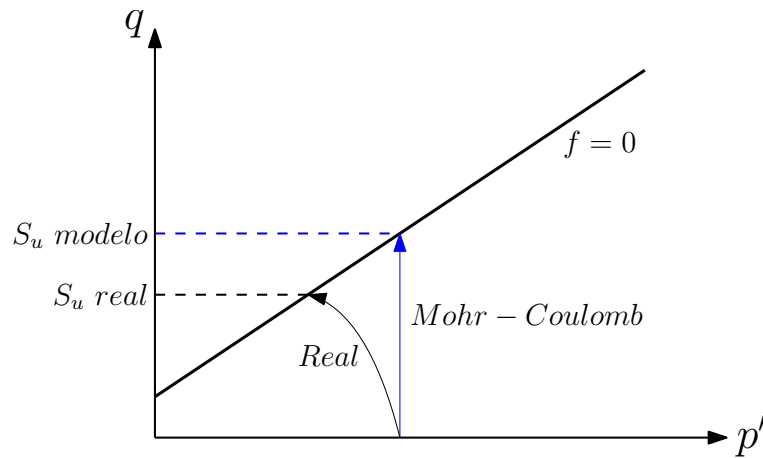


Figura 5.5: Resistencia al corte no drenado mediante el modelo de Mohr-Coulomb (basada en PLAXIS, 2015).

Otra situación que corresponde a una limitación del modelo se produce al utilizar un valor de ángulo de dilatación, ψ , distinto de 0 en condición no drenada. En la Figura 5.6 se grafica la trayectoria que sigue el modelo Mohr-Coulomb en la modelación de un ensayo triaxial consolidado no drenado considerando un ángulo de dilatación $\psi > 0$.

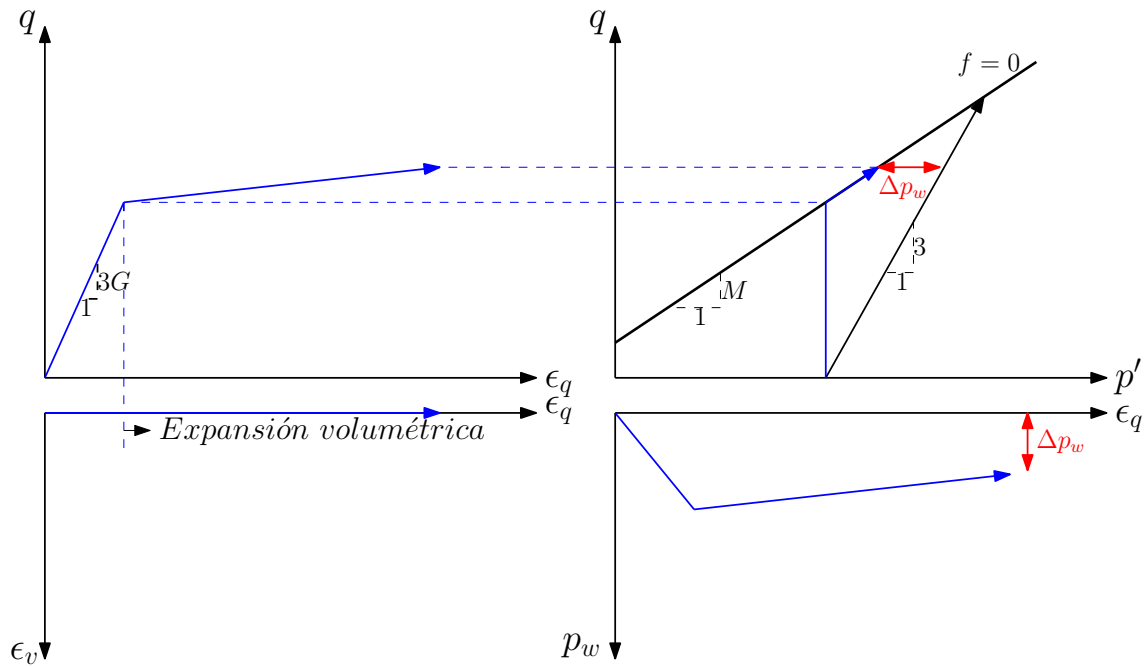


Figura 5.6: Ensayo triaxial no drenado modelado con el modelo Mohr-Coulomb con ángulo de dilatancia positivo.

Debido a que se utiliza un valor del ángulo de dilatancia $\psi > 0$, una vez que el estado de tensiones intercepta la superficie de fluencia se produce una expansión volumétrica $d\epsilon_v > 0$ (ver plano $\epsilon_q - \epsilon_v$). Si bien esta expansión es casi nula (condición no drenada), genera una disminución importante en las presiones de poros (ver plano $\epsilon_q - p_w$), lo que puede conducir a grandes presiones en tracción. Esto trae como consecuencia, que para equilibrar la ecuación $p = p' + p_w$ se produzca un aumento de p' a través de la superficie de fluencia (ver plano $p' - q$), que equivale a un aumento en la resistencia al corte no drenada. Debido a que el ángulo de dilatancia es constante en el modelo Mohr-Coulomb, esta situación representa un aumento en la presión de poros en tracción que no es realista y un aumento ilimitado en la resistencia al corte no drenada, S_u , que tampoco lo es.

El caso contrario es la situación en que se utiliza un ángulo de dilatancia $\psi < 0$. Esto se visualiza en la Figura 5.7.

En este caso se produce un aumento en la presión de poros (ver plano $\epsilon_q - p_w$) como consecuencia de una contracción volumétrica en el rango plástico (ver plano $\epsilon_q - \epsilon_v$).

Al igual que en el caso anterior, este aumento en la presión de poros no es realista y genera un comportamiento tipo licuación que tampoco lo es.

A partir de los dos casos descritos, la recomendación para el uso del modelo Mohr-Coulomb en la modelación de la condición no drenada, es la utilización de un ángulo de dilatación $\psi = 0$ (PLAXIS, 2015).

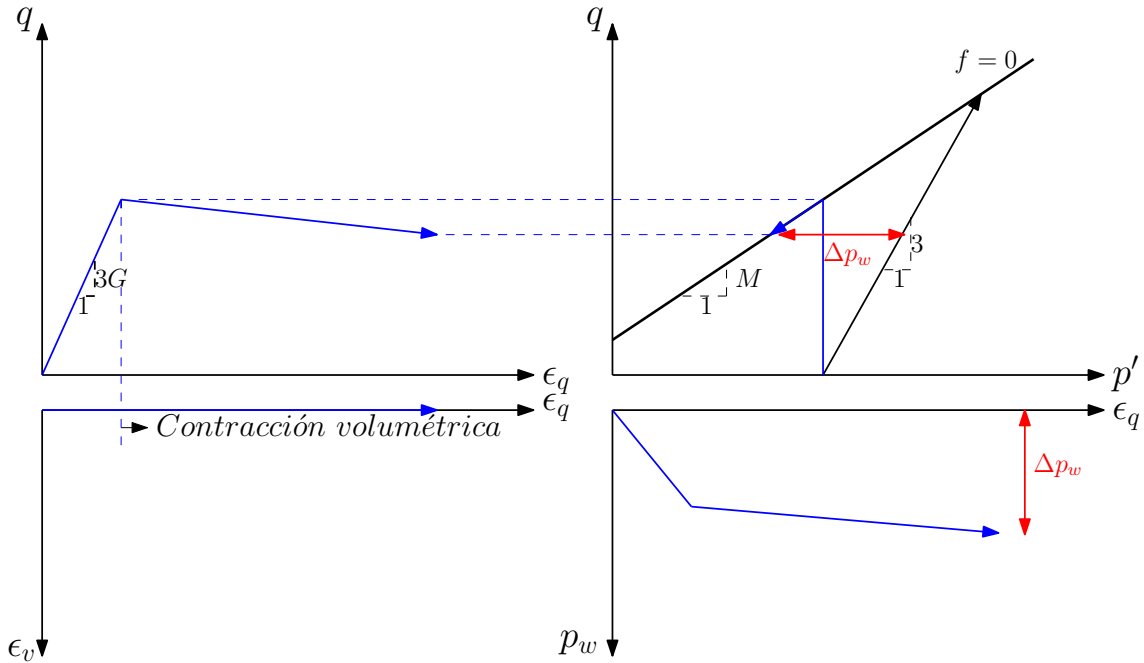


Figura 5.7: Ensayo triaxial no drenado modelado con el modelo Mohr-Coulomb con ángulo de dilatación negativo.

CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS

6.1. Introducción

En el presente capítulo se describe el código de elementos finitos desarrollado a partir de los fundamentos teóricos planteados en los capítulos 2-5. El programa fue desarrollado en Matlab y a continuación se resumen sus principales características:

- Permite el desarrollo de problemas en dos dimensiones.
- Utiliza un mallador que permite trabajar con elementos triangulares tanto de 3 como de 6 nodos.
- Permite realizar análisis tanto estático como dinámico. En el primer caso permite definir una carga distribuida en la superficie del depósito y en el segundo una aceleración impuesta en la base (caso sísmico).
- Incluye dos modelos constitutivos: el modelo lineal-elástico y el modelo Mohr-Coulomb.
- Permite definir un nivel freático bajo el cual el suelo se considera completamente saturado.

- Incluye dos condiciones relativas al suelo saturado: completamente drenada y completamente no drenada.
- Permite seleccionar para los bordes laterales la condición de borde viscoso estándar de Lysmer & Kuhlesmeyer.

A nivel interno, el código se divide en tres etapas:

1) Entrada de datos: Es la etapa que se maneja a nivel de usuario. En esta etapa se define:

- Tipo de análisis.
- Geometría del depósito.
- Propiedades del suelo.
- Nivel freático.
- Solicitaciones.
- Condición de borde.
- Características de la malla de elementos finitos.
- Características del proceso iterativo.
- Puntos utilizados para la salida de datos.

2) Etapa de solución: Es la etapa de procesamiento de la información de entrada para la resolución del problema. A través de diferentes rutinas se ejecutan los siguientes procedimientos:

- Generación de la malla de elementos finitos.
- Generación de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez.
- Generación de las tensiones y presiones de poros iniciales.
- Generación del vector de fuerzas externas y resolución del sistema de ecuaciones para obtener desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los puntos de interés.

3) Salida de datos: Es la etapa en que se define la información gráfica de salida.

A continuación se explican en detalle las primeras dos etapas, incluyendo la descripción de las 33 rutinas que utiliza el programa. El objetivo principal es facilitar el uso y modificación del código.

6.2. Entrada de datos

En la siguiente sección se describe cómo deben ser definidos los distintos parámetros de entrada por el usuario.

6.2.1. Tipo de análisis

- *analisis*: Se ingresa un valor 1 para realizar análisis estático y 2 para realizar análisis dinámico.

6.2.2. Geometría del depósito

- *ancho*: Ancho del depósito de suelo en [m].
- *prof(i)*: Profundidad a la que llega el estrato i en [m]. Se ingresa con signo positivo.

La Figura 6.1 muestra un ejemplo para un depósito de 3 estratos de suelo.

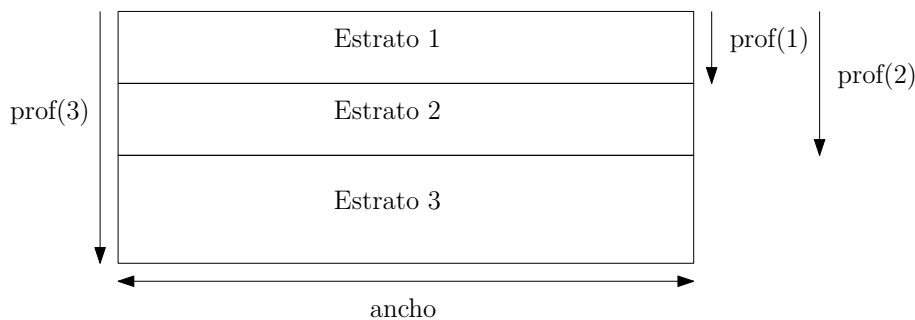


Figura 6.1: Definición de la geometría del depósito.

6.2.3. Propiedades del suelo

- *modelo(i)*: Modelo constitutivo utilizado para el estrato i . Se ingresa un valor 1 para el modelo lineal-elástico y un valor 2 para el modelo Mohr-Coulomb.
- *caso(i)*: Se ingresa 1 para condición drenada y 2 para condición no drenada.

- $E(i)$: Módulo de elasticidad efectivo E' del estrato i en $[kN/m^2]$.
- $\nu(i)$: Módulo de Poisson efectivo ν' del estrato i .
- $\gamma_n(i)$: Peso específico natural γ_n del estrato i en $[kN/m^3]$.
- $\gamma_{sat}(i)$: Peso específico saturado γ_{sat} del estrato i en $[kN/m^3]$.
- $c(i)$: Cohesión efectiva c' del estrato i en $[kN/m^2]$.
- $\phi(i)$: Ángulo de fricción efectivo ϕ' del estrato i en $[^\circ]$.
- $\psi(i)$: Ángulo de dilatación efectivo ψ' del estrato i en $[^\circ]$.
- $e_0(i)$: Razón inicial de vacíos e_0 del estrato i .

6.2.4. Definición del nivel freático

- $nivelf$: Profundidad a la que se encuentra la napa de agua en [m]. Se ingresa con signo positivo.
- γ_w : Peso específico del agua en $[kN/m^3]$. El valor estándar corresponde a 9,8.

La Figura 6.2 esquematiza la definición del valor $nivelf$.

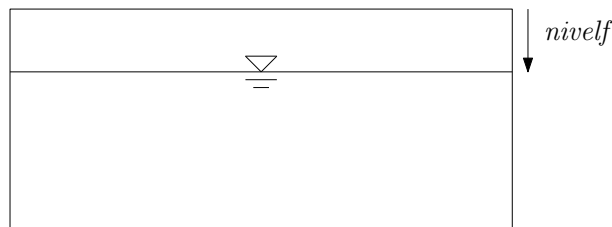


Figura 6.2: Definición del nivel freático.

6.2.5. Análisis estático

6.2.5.1. Definición de la carga

En el caso de que el análisis sea estático, se puede incorporar una carga uniformemente distribuida definida según

- xi_carga : Coordenada x donde se inicia la aplicación de la carga distribuida en [m].
- xf_carga : Coordenada x donde finaliza la aplicación de la carga distribuida en [m].
- $carga$: Magnitud de la carga distribuida en [kN/m²]. Signo positivo significa carga hacia abajo (sentido negativo del eje y).

La Figura 6.3 esquematiza la definición estos valores.

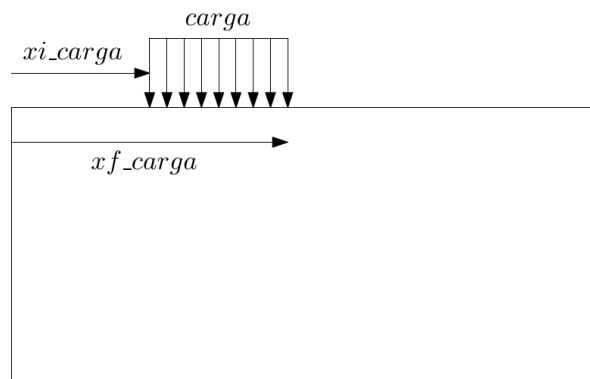


Figura 6.3: Definición de la carga.

6.2.6. Análisis dinámico

6.2.6.1. Registro de aceleración en la base

- *registro*: Se ingresa el registro de aceleración que será impuesto en los nodos de la base del dominio en la forma 'registro.txt'. El archivo *registro.txt* debe estar guardado en la carpeta principal del programa y debe contener dos columnas: en la primera columna deben ir los valores del tiempo en [s] y en la segunda columna deben ir los valores de aceleración en [cm/s²]. Los números decimales deben estar separados por puntos.

6.2.6.2. Razón de amortiguamiento de Rayleigh

- *ra*: Valor de la razón de amortiguamiento de Rayleigh. Valores usuales van entre 0.02 y 0.05.

6.2.6.3. Método de Newmark

- *b*: Parámetro β_N del método de Newmark.
- *g*: Parámetro γ_N del método de Newmark.

6.2.6.4. Bordas absorbentes

- *c1*: Coeficiente de relajación, C_1 , de los bordes absorbentes.
- *c2*: Coeficiente de relajación, C_2 , de los bordes absorbentes.

6.2.7. Malla de elementos finitos

- *nne*: Número de nodos por elemento. Las opciones disponibles son 3 y 6.
- *tam_max*: Valor de referencia que permite controlar el tamaño máximo de los elementos (en [m]).
- *factor_tam*: Factor que controla el refinamiento bajo la carga distribuida en el caso de realizar un análisis estático. Factores mayores a 1 generarán refinamiento.

6.2.8. Proceso iterativo

6.2.8.1. General

- *tol*: Error tolerado en el proceso iterativo.
- *it_max*: Número máximo de iteraciones permitidas dentro de un paso de carga.

6.2.8.2. Análisis estático

- *itd_min*: Número mínimo de iteraciones deseadas.
- *itd_max*: Número máximo de iteraciones deseadas.
- *p_max*: Número máximo de pasos permitidos para llegar a la carga final .
- *Dfini*: Delta inicial de carga. Por ejemplo, seleccionar un valor igual a 0,1 equivale aplicar un 10 % de la carga total en el primer paso de carga.

6.2.8.3. Análisis dinámico

- *pasos*: Número de pasos de carga utilizados para el análisis.

6.2.9. Selección de nodos para el análisis

- $x(1)$: Coordenada x del nodo 1 seleccionado para la obtención de la información de salida.
- $y(1)$: Coordenada y del nodo 1 seleccionado para la obtención de la información de salida.
- $x(2)$: Coordenada x del nodo 2 seleccionado para la obtención de la información de salida.
- $y(2)$: Coordenada y del nodo 2 seleccionado para la obtención de la información de salida.

La Figura 6.4 muestra cómo se define el sistema de coordenadas del dominio.

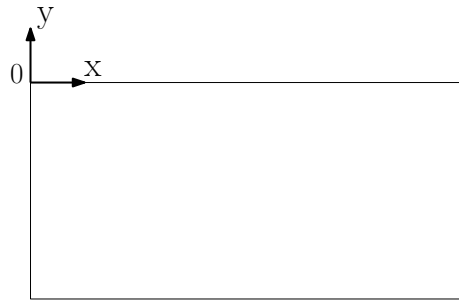


Figura 6.4: Sistema de coordenadas.

6.3. Etapa de solución

6.3.1. Generación de la malla de elementos finitos

Para la generación de la malla de elementos finitos se ha implementado el código **MESH2D**, desarrollado por Darren Engwirda (2009), que permite generar mallas no estructuradas en 2D. Este código, en un proceso iterativo, utiliza una triangulación de Delaunay para escoger, entre todas las posibilidades de triangulación sobre un determinado espacio, la triangulación que mejor evita ángulos pequeños. Específicamente se utiliza la rutina **meshfaces**, incluida en el código, que permite trabajar con una geometría definida a trozos, lo que significa poder trabajar con diferentes estratos en el caso de la modelación de suelos. El código funciona para elementos con 3 nodos, por lo cual se ha tenido que modificar para extender su uso a elementos de 6. Con este objetivo se ha introducido y adaptado el código **triangulation_L2Q**, desarrollado por John Burkardt (2010), que genera una triangulación de 6 nodos a partir de una de 3.

A continuación se describen las características de la rutina **meshfaces**, la cual se define en Matlab como

$$[p, t, fnum, stats] = meshfaces(node, edge, face, hdata, options)$$

donde los inputs son:

- *node*: Arreglo de la forma $[x1, y1; x2, y2; etc]$ que define los vértices del dominio.
- *edge*: Arreglo de la forma $[n1, n2; n3, n4; etc]$ que define la conectividad entre los puntos del vector *node*.
- *face*: Define las esquinas incluidas en cada estrato. Cada estrato *i* se define mediante un vector de la forma $face\{i\} = [ei1, ei2, etc]$.
- *hdata*: Estructura que contiene información relativa al tamaño del elemento. En el caso de este código solo se ha utilizado el campo *hdata.hmax* que define el tamaño máximo permitido a nivel global, en la forma $hdata.hmax = ho$, donde *ho* es ese tamaño.
- *options*: Estructura que permite ajustar ciertos parámetros para modificar el

algoritmo de mallado. En el caso de este código no se ha modificado el valor por defecto de este input.

y los outputs son:

- *p*: Arreglo de $N_n \times 2$ que contiene las coordenadas *xy* de cada uno de los N_n nodos de la malla.
- *t*: Arreglo de $N_e \times 3$ que contiene el índice en *p* de los 3 nodos externos de cada uno de los N_e elementos de la malla. Los nodos son asignados a los elementos en sentido anti-horario.
- *fnum*: Arreglo de $N_e \times 1$ que contiene el número del estrato al que pertenece cada uno de los N_e elementos.
- *stats*: Retorna estadísticas relacionadas con el algoritmo que aparecen en pantalla.

En el caso de seleccionar el uso de elementos de 6 nodos, el programa utiliza la rutina

$$[p, t] = \text{triangulation_l2q_mod}(p, t)$$

que modifica los arreglos *p* y *t*, de forma tal que se adicionan 3 nodos internos a cada uno de los elementos existentes. Con esto, *p* pasa a ser de $N_{nm} \times 2$, donde $N_{nm} > N_n$ y *t* pasa a ser de $N_e \times 6$.

De esta manera cada elemento queda definido por sus nodos en el arreglo *t*, en el orden mostrado en la Figura 2.6.

Para el caso de estratos horizontales, se ha automatizado el proceso de construcción de la malla, y en consecuencia no es necesario modificar la rutina *meshfaces* de manera manual. Para esto se ha desarrollado la siguiente rutina:

- **malla**: Utiliza los datos de entrada para construir la malla de elementos finitos según la geometría de la Figura 6.1. Esta incluye refinamiento bajo la carga distribuida en el caso de análisis estático a través de la inclusión de nodos adicionales en esta zona según el valor de *factor_tam* utilizado.

Inputs: $carga, xi_carga, xf_carga, tam_max, factor_tam, ancho, prof$

Outputs: $p, t, fnum, edge, node$

6.3.2. Parámetros generales

En esta sección del código se determinan ciertos parámetros de importancia que se utilizan a lo largo de todo el programa. Estos son:

- *profund*: Profundidad del depósito. Se determina mediante $profund = prof(end)$.
- *numelem*: Número de elementos. Equivale a $numelem = length(t(:, 1))$.
- *numnodos*: Número de nodos. Equivale a $numnodos = length(p(:, 1))$.

Todos estos parámetros son definidos como variables globales dentro del código.

6.3.3. Largo máximo de los elementos

En esta sección se utiliza la siguiente rutina:

- **Lmax**: Calcula el largo del lado más grande de todos los triángulos basándose para esto en las variables globales p, t y $numelem$.

Inputs: Variables globales.

Outputs: $largo_max$

6.3.4. Cambio de unidades a MKS, rad

En esta sección los parámetros $carga, E, gamma, gamma_sat, gamma_w$ y c , son transformados a unidades MKS. Los parámetros phi y psi son transformados a radianes.

6.3.5. Determinación de propiedades del suelo

En esta sección se calcula, para cada cada estrato, ciertas propiedades de interés a partir de los datos de entrada. Estas están definidas según

- G : Módulo de corte, G [N/m^2]:

$$G = \frac{E'}{2(1 + \nu')} \quad (6.3.1)$$

- E_{oed} : Módulo de rigidez confinado, E_{oed} [N/m^2]:

$$E_{oed} = \frac{(1 - \nu')E'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} \quad (6.3.2)$$

- V_p : Velocidad de onda primaria o longitudinal, V_p [m/s]:

$$V_p = \sqrt{\frac{E_{oed}}{\gamma_n/9,8}} \quad (6.3.3)$$

- V_s : Velocidad de onda secundaria o de corte, V_s [m/s]:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\gamma_n/9,8}} \quad (6.3.4)$$

En las últimas dos fórmulas, en el caso de que el estrato esté saturado el código utiliza γ_{sat} en vez de γ_n .

6.3.6. Determinación de propiedades no drenadas del suelo

En esta sección se calculan, para cada estrato, los siguientes parámetros (definidos en el capítulo 5, sección 5.3.3) referidos a la modelación de la condición no drenada:

- ν_u : Módulo de Poisson en condición no drenada $\nu_u = 0,495$.
- E_u : Módulo de elasticidad en condición no drenada E_u [N/m^2].

- K_{efe} : Módulo de compresibilidad efectivo del suelo K' [N/m^2].
- np : Porosidad del suelo n .
- K_w : Módulo de compresibilidad del agua K_w [N/m^2].

En el caso en que un determinado estrato i sea definido en condición drenada ($caso(i) = 1$), se redefine el parámetro $nuu(i)$ como el módulo de Poisson efectivo (en condición drenada), ν' , según $nuu(i) = nu(i)$ y el parámetro $Eu(i)$ como el módulo de elasticidad efectivo, E' , según $Eu(i) = E(i)$.

6.3.7. Cálculo de la matriz de elasticidad de cada estrato

En esta sección se calcula la matriz de elasticidad de cada estrato. Esta matriz se determina de tres maneras diferentes, dependiendo del uso que se le da en el código:

- D : Matriz de elasticidad utilizada para la construcción de la matriz de rigidez global, que a su vez se utiliza para el cálculo de desplazamientos en cada iteración de la resolución del problema no lineal. Se calcula en base a los parámetros E_u y ν_u (Eu y nuu en el código) debido a que el cálculo de desplazamientos se realiza en tensiones totales. Es de 3×3 , debido a que no considera la componente z dado que los desplazamientos en esa componente son cero (deformaciones planas):

$$\mathbf{D} = \frac{E_u}{(1 + \nu_u)(1 - 2\nu_u)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_u & \nu_u & 0 \\ \nu_u & 1 - \nu_u & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu_u}{2} \end{bmatrix} \quad (6.3.5)$$

- $D4$: Matriz de elasticidad utilizada para el cálculo de la variación del predictor de tensiones efectivas en cada iteración en la resolución del problema no lineal. Se calcula en base a los parámetros efectivos E' y ν (E y nu en el código). Es de 4×4 debido a que las tensiones en z son diferentes de cero en el enfoque de deformaciones planas:

$$\mathbf{D4} = \frac{E'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} \begin{bmatrix} 1 - \nu' & \nu' & 0 & \nu' \\ \nu' & 1 - \nu' & 0 & \nu' \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2} & 0 \\ \nu' & \nu' & 0 & 1 - \nu' \end{bmatrix} \quad (6.3.6)$$

- *Dprin*: Matriz de elasticidad en coordenadas principales utilizada para el cálculo de las tensiones efectivas en cada iteración de la resolución del problema no lineal. Se calcula en base a los parámetros efectivos E' y ν (E y ν en el código). Es de 3×3 debido a que se calcula en el espacio de las tensiones principales:

$$\mathbf{D}_{prin} = \frac{E'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} \begin{bmatrix} 1 - \nu' & \nu' & \nu' \\ \nu' & 1 - \nu' & \nu' \\ \nu' & \nu' & 1 - \nu' \end{bmatrix} \quad (6.3.7)$$

6.3.8. Definición del esquema de integración para la cuadratura de Gauss-Legendre

En esta sección se define el esquema de integración para la cuadratura de Gauss-Legendre a través del siguiente parámetro:

- *esquema_gauss*: Número de puntos de integración por elemento que utiliza la cuadratura de Gauss-Legendre. Este parámetro se define como variable global en el código.

Se escoge *esquema_gauss* = 1 para el caso de elementos de tres nodos ($nne = 3$) y *esquema_gauss* = 3 para el caso de elementos de seis nodos ($nne = 6$). Los esquemas son los mostrados en la Figura 6.5 y están definidos en el Capítulo 2, sección 2.4.4.

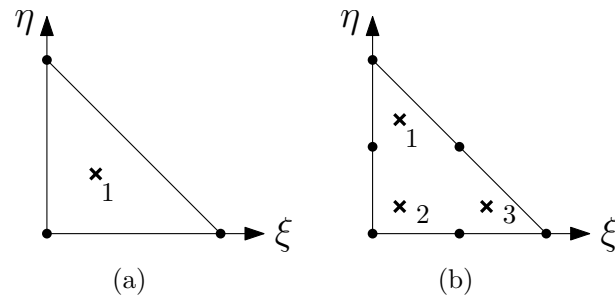


Figura 6.5: Esquemas de integración de la cuadratura de Gauss-Legendre utilizada para elementos de (a) 3 y (b) 6 nodos.

6.3.9. Cálculo de las matrices globales de rigidez y masa

En esta sección se calculan las matrices globales de rigidez y masa a través de un ciclo *for* de Matlab en el cual se ensambla el aporte de cada uno de los *numelem* elementos. El algoritmo se esquematiza en la Figura 6.6 y las rutinas utilizadas son las siguientes:

- **GLelemento:** Determina el vector de grados de libertad $GLElem$ del elemento $elem$. En total el sistema posee $2 \times numnodos$ grados de libertad (un grado de libertad horizontal y uno vertical por cada nodo) y cada elemento posee 6 grados de libertad en el caso de los elementos de 3 nodos, y 12 grados de libertad en el caso de los elementos de 6 nodos.

Inputs: $elem$

Outputs: $GLElem$

- **matrizK:** Recalcula la matriz de rigidez global K sumando el aporte del elemento $elem$. La matriz de rigidez elemental se construye integrando numéricamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre generada por la rutina **gauss**.

Inputs: $K, GLelem, D, elem$

Outputs: K

- **gauss:** Determina las coordenadas (e, n) , los pesos P y el número de *puntos* requeridos por elemento para la realización de la cuadratura de Gauss-Legendre, basándose para esto en la variable global $esquema_gauss$.

Inputs: Variables globales.

Outputs: $e, n, P, puntos$

- **matrizM**: Recalcula la matriz de masa global M sumando el aporte del elemento $elem$. La matriz de masa elemental se forma a través de la diagonalización HRZ descrita en el Capítulo 4, Sección 4.3. La rutina considera el peso específico saturado, $gamma_sat$, en el caso de los elementos que se encuentran bajo el nivel freático.

Inputs: $M, GLelem, gamma, gamma_sat, nivel f, elem$

Outputs: M

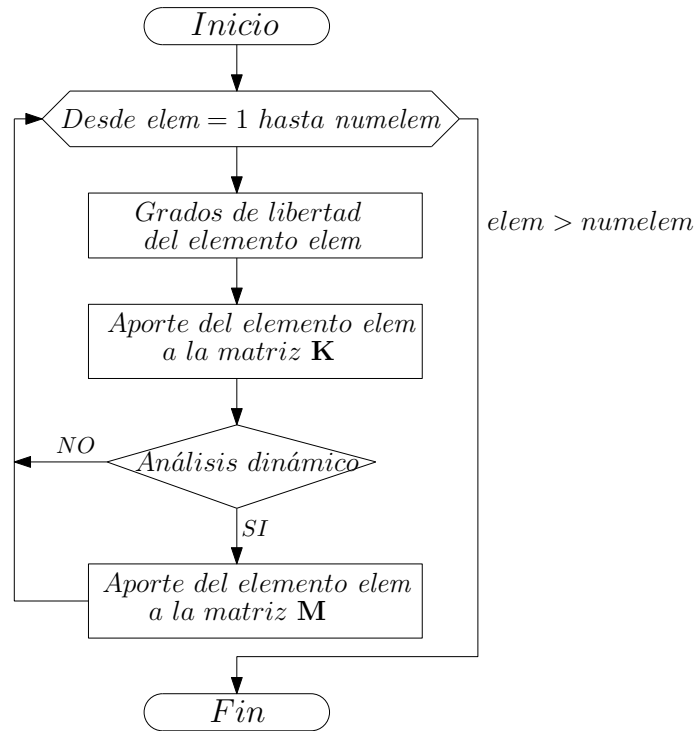


Figura 6.6: Ensamblaje de las matrices globales de rigidez y de masa.

6.3.10. Cálculo del vector global de fuerzas externas nodales

En el caso de que el análisis sea estático ($analisis = 1$) se construye el vector global de fuerzas externas nodales a través de la siguiente rutina:

- **f_sup**: Determina el vector global de fuerzas externas nodales, \mathbf{f}_{ext} (f_{ext} en el código), a partir de las características de la carga distribuida ingresada y el tipo de elemento utilizado.

Inputs: $carga, xi_carga, xf_carga$

Outputs: f_{ext}

6.3.11. Determinación de los grados de libertad activos

En esta sección se determinan los grados de libertad activos, es decir, los grados de libertad sin considerar los grados de libertad restringidos por la condición de borde impuesta. En el caso de que el análisis sea estático ($analisis = 1$) se utiliza la rutina **borde** y en el caso de que el análisis sea dinámico ($analisis = 2$) se utiliza la rutina **borde_din**. Estas se describen a continuación.

- **borde**: Determina el vector de grados de libertad activos $GLact$ imponiendo la condición de borde mostrada en la Figura 6.7.

Inputs: $ancho, profund$

Outputs: $GLact$

- **borde_din**: Determina el vector de grados de libertad activos $GLactd1$, utilizado para calcular los periodos del sistema, imponiendo la condición de borde mostrada en la Figura 6.8(a) y el vector de grados de libertad activos $GLactd2$, utilizado para la aplicación de la carga dinámica en la base, imponiendo la condición de borde mostrada en la Figura 6.8(b).

Inputs: $ancho, profund$

Outputs: $GLactd1, GLactd2, bordeinf, bordeizq, bordeder$

donde:

- $bordeinf$: Vector que contiene los grados de libertad pertenecientes al borde inferior del dominio de elementos finitos.
- $bordeizq$: Vector que contiene los grados de libertad pertenecientes al borde izquierdo del dominio de elementos finitos

- *bordeder*: Vector que contiene los grados de libertad pertenecientes al borde derecho del dominio de elementos finitos

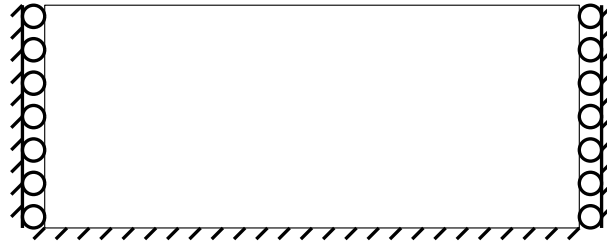


Figura 6.7: Condición de borde para el análisis estático.

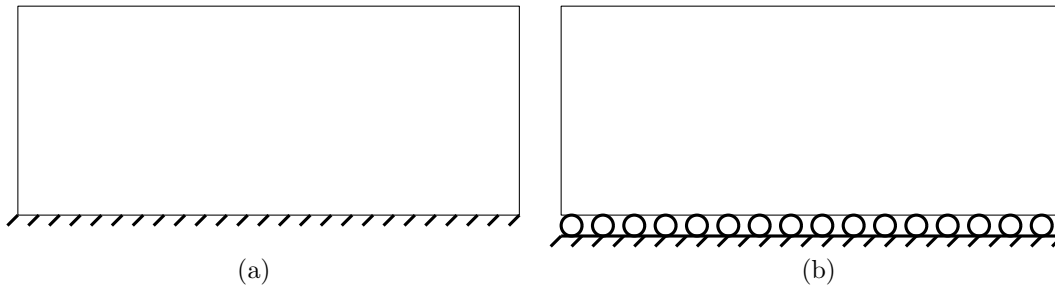


Figura 6.8: Condición de borde para el análisis dinámico. (a) Cálculo de periodos y (b) aplicación de la carga dinámica en la base.

6.3.12. Cálculo de la matriz global de amortiguamiento

Si el análisis es dinámico, se determina el vector $T = 2\pi/\omega$ que contiene los periodos naturales del sistema en orden descendente, a través de la función de Matlab *eigs* que resuelve el problema de valores y vectores propios $det(K - \omega^2 M) = 0$. Para esto se consideran los grados de libertad contenidos en el vector *GLactd1*. A continuación y utilizando la recomendación de Tsai et al. (2014), aplicable a estratos poco profundos (Capítulo 4, sección 4.4), se calculan los parámetros α_R y β_R del amortiguamiento de Rayleigh, a través de la siguiente rutina:

- **rayleigh**: Determina los parámetros *alpha* y *beta* a partir de la razón de amortiguamiento *ra* y el periodo fundamental del sistema $T(1)$.

Inputs: *ra*, *T*

Outputs: *alpha*, *beta*

Con esto se calcula la matriz global de amortiguamiento, C , como la combinación lineal de las matrices M y K , como se detalló en el Capítulo 4, sección 4.4.

Observación: La rutina **rayleigh** está configurada según el criterio de Tsai et al. (2014) solo como punto inicial. El usuario debe modificarla de acuerdo al criterio más adecuado para cada caso.

6.3.13. Imposición de los bordes absorbentes

Si el análisis es dinámico, se modifica la matriz de amortiguamiento C para incluir la condición de bordes absorbentes en el lado izquierdo y derecho del dominio, como se muestra en la Figura 6.9. Para esto se utiliza la siguiente rutina:

- **bordes_abs:** Genera la matriz C_{abs} que contiene, en los elementos de su diagonal asociados a los grados de libertad de los bordes laterales, los coeficientes de amortiguamiento correspondientes a los amortiguadores viscosos impuestos en estos bordes. La rutina utiliza en sus cálculos $gamma$ o $gamma_{sat}$ dependiendo si el nodo del borde lateral se encuentra en una zona seca o saturada.

Inputs: $c1, c2, gamma, gamma_{sat}, Vp, Vs, prof_{ini}, nivel f, bordeizq, bordeder, prof$

Outputs: C_{abs}

Una vez determinada la matriz C_{abs} , la matriz C se modifica según $C = C + C_{abs}$.

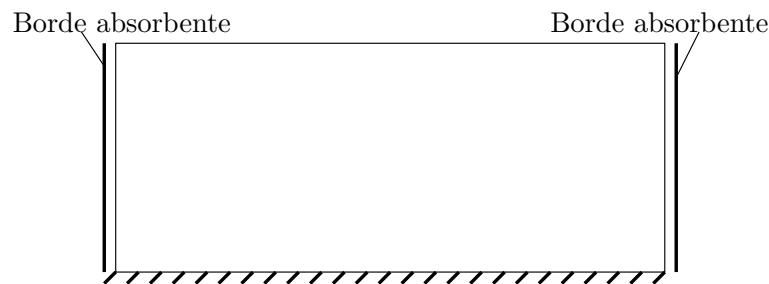


Figura 6.9: Condición de borde absorbente.

6.3.14. Cálculo de las tensiones efectivas iniciales

Como procedimiento de inicialización de las tensiones efectivas, para considerar las tensiones generadas por el peso propio del material, se utilizan las siguientes rutinas:

- **coord_gauss**: Determina las coordenadas en x y en y de cada uno de los puntos de integración del dominio. Estas se agrupan en los arreglos multidimensionales $xpto$ e $ypto$ respectivamente. Estos tienen la forma $xpto(elemento, punto, :) = [x]$, para un determinado elemento y un determinado punto de integración al interior de dicho elemento.

Inputs: Variables globales.

Outputs: $xpto, ypto$

- **tensiones_ini**: Calcula, para cada punto de integración, la tensión efectiva vertical, $\sigma'_v = \sigma'_y$, y horizontal, $\sigma'_h = \sigma'_x = \sigma'_z$, iniciales, suponiendo una geometría geostática (supuesto válido en el caso de estratos horizontales). Las tensiones se expresan en un arreglo multidimensional de la forma $tens_ini(elemento, punto, :) = [\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \sigma'_z]$, para un determinado elemento y un determinado punto de integración al interior de dicho elemento.

Inputs: $prof, gamma, gamma_sat, gamma_w, nivel f, Ko, ypto$

Outputs: $tens_ini$

La tensión efectiva vertical se determina según

$$\sigma'_v = \int_0^{-Y} \gamma_n dy \quad (6.3.8)$$

lo cual, la rutina **tensiones_ini** resuelve de manera discreta. Por ejemplo, en el caso de la Figura 6.10, la tensión efectiva vertical se determina según

$$\sigma'_v = -(\Delta y_1 \gamma_{n1} + \Delta y_2 \gamma_{n2} + \Delta y_3 \gamma_{n3}) \quad (6.3.9)$$

donde la coordenada y de cada punto de integración se obtiene previamente mediante la rutina **coord_gauss**. La convención de signos utilizada implica que tensiones de compresión son negativas.

Dado que se trata de la tensión efectiva, en el caso de que el punto de integración esté en una zona saturada se considera el peso específico boyante $\gamma_b = \gamma_{sat} - \gamma_w$ en vez de γ_n .

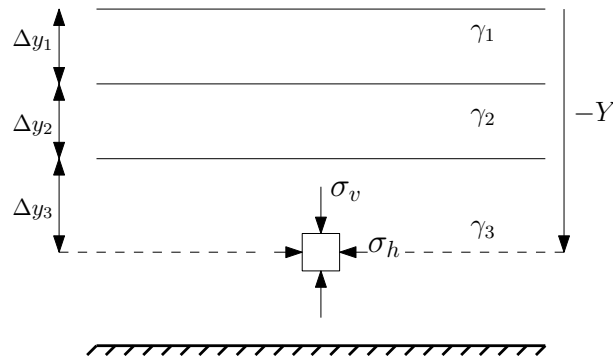


Figura 6.10: Inicialización de las tensiones efectivas.

Por otro lado, la tensión efectiva horizontal, σ'_h , se determina mediante el coeficiente lateral de empuje K_o , según

$$\sigma'_h = K_o \times \sigma'_v \quad (6.3.10)$$

Este se calcula previamente para cada estrato. En el caso de estratos modelados mediante el modelo lineal elástico se utiliza la fórmula para medio elástico

$$K_o = \frac{\nu'}{1 - \nu'} \quad (6.3.11)$$

y para estratos modelados según el modelo de Mohr-Coulomb, se utiliza la fórmula de Jaky

$$K_o = 1 - \text{sen}(\phi') \quad (6.3.12)$$

6.3.15. Cálculo de la presión de poros inicial

Para el cálculo de la presión de poros inicial se utiliza la siguiente rutina:

- **presiones_ini.** Calcula, para cada punto de integración ubicado bajo el nivel freático, la presión hidroestática $p_w = p_{w_x} = p_{w_y} = p_{w_z}$. Las presiones de poros se expresan en un arreglo multidimensional de la forma $pw_ini(\text{elemento}, \text{punto}, :)$ $= [p_{w_x}, p_{w_y}, 0, p_{w_z}]$, para un determinado elemento y un determinado punto de

integración al interior de dicho elemento.

Inputs: $\gamma_w, nivel, ypto$

Outputs: pw_ini

El cálculo se realiza según

$$\sigma'_v = \int_{-nivel}^{-Y} \gamma_w dy \quad (6.3.13)$$

lo cual la rutina resuelve de manera discreta. Por ejemplo, para el caso del punto mostrado en la Figura 6.11 esta expresión se reduce a

$$p_w = (-Y + nivel) \gamma_w \quad (6.3.14)$$

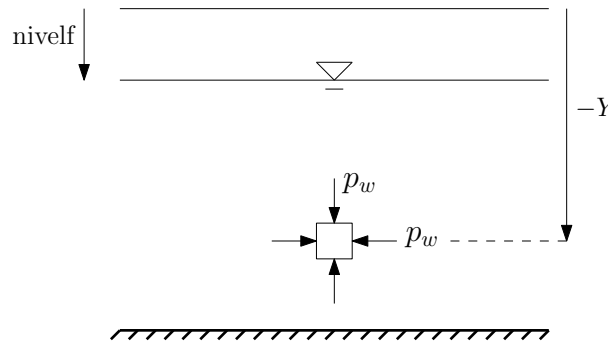


Figura 6.11: Inicialización de la presión de poros.

La convención de signos utilizada implica que presiones de compresión son negativas.

6.3.16. Determinación de la respuesta en el análisis estático

6.3.16.1. Esquema general

El análisis estático se desarrolla a través de la rutina **respuesta** en la que se ha implementado el método Newton-Raphson de rigidez inicial:

- **respuesta:** Determina la respuesta del suelo al ser sometido al vector global de fuerzas externas nodales, f_ext , considerando una tolerancia igual a tol . La

respuesta se expresa según las variables de salida (*outputs*) que se describen a continuación.

Inputs: *modelo, caso, x, y, itd_min, itd_max, p_max, it_max, tol, Dfini, K, GLact, f_ext, D4,*

Dprin, tens_ini, pw_ini, c, phi, psi, Kw, np

Outputs: *iteraciones, displ, Uy1, Uy2, factormult, plasticos*

Outputs:

- *iteraciones*: Vector que contiene el número de iteraciones realizadas en cada paso de carga.
- *displ*: Vector de desplazamientos nodales al final de la aplicación de la carga *f_ext*.
- *Uy1*: Vector que contiene el desplazamiento vertical del punto $(x(1), y(1))$ en cada paso de carga.
- *Uy2*: Vector que contiene el desplazamiento vertical del punto $(x(2), y(2))$ en cada paso de carga.
- *factormult*: Vector que contiene la proporción de la fuerza total aplicada en cada paso de carga.
- *plasticos*: Matriz que contiene los puntos de integración que entraron en el rango plástico al final de la aplicación de la carga.

6.3.16.2. Cálculos previos al proceso iterativo

Identificación de los elementos a los que pertenecen los puntos a evaluar

Para poder calcular el desplazamiento en los puntos $(x(1), y(1))$ y $(x(2), y(2))$, es necesario, previamente, identificar los elementos a los que estos puntos pertenecen. Para esto se utiliza la siguiente rutina:

- **nodos**: Determina el elemento *elem_obji* al que el punto $(x(1), y(1))$ pertenece y el vector de nodos, *nodos_obj1*, asociado al elemento.

Inputs: $x(1), y(1)$

Outputs: $nodos_obj1, elem_obj1$

Determinación de los parámetros de integración del modelo Mohr-Coulomb

Para obtener los parámetros de integración del modelo Mohr-Coulomb se define la siguiente rutina:

- **parametros_mc:** Determina, para cada estrato, los parámetros necesarios para evaluar la función de fluencia e integrar el modelo Mohr-Coulomb según el esquema de retorno de Clausen et al. (2007) descrito en el Capítulo 3, Sección 3.5.

Inputs: $phi, psi, c, Dprin$

Outputs: $k, rp, rl1, rl2, rl1g, rl2g, sigma_a$

donde:

- k : Parámetro k que permite obtener la función de fluencia en la forma $f(\boldsymbol{\sigma}') = k\sigma'_1 - \sigma'_3 - 2c'\sqrt{k}$.
- rp : Vector \mathbf{r}_1^p que corresponde a la dirección del corrector plástico cuando este regresa a un plano de la superficie de fluencia.
- $rl1$: Vector \mathbf{r}_1^l que corresponde a la dirección de la línea l_1 de la superficie de fluencia.
- $rl2$: Vector \mathbf{r}_2^l que corresponde a la dirección de la línea l_2 de la superficie de fluencia.
- $rl1g$: Vector \mathbf{r}_{g1}^l que corresponde a la dirección del potencial plástico asociado a la línea l_1 de la superficie de fluencia.
- $rl2g$: Vector \mathbf{r}_{g2}^l que corresponde a la dirección del potencial plástico asociado a la línea l_2 de la superficie de fluencia.
- $sigma_a$: Tensión σ'_a correspondiente al vértice de la superficie de fluencia en coordenadas principales.

6.3.16.3. Proceso iterativo

El proceso iterativo se esquematiza, de manera general, en la Figura 6.12 y a continuación se describen las etapas relevantes contenidas en él.

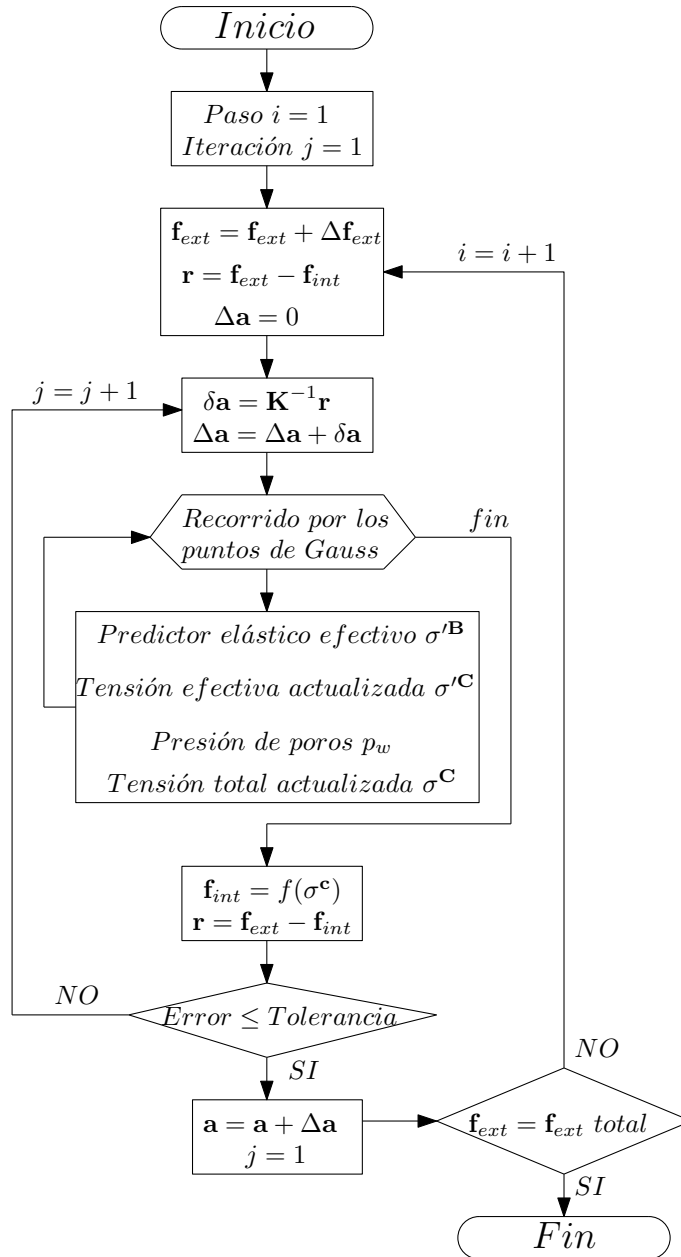


Figura 6.12: Algoritmo de Newton-Raphson de rigidez inicial utilizado en el cálculo de la respuesta estática.

Incremento del delta de carga

Para definir la fuerza externa \mathbf{f}_{ext}^i que se aplica en cada paso de carga i se define una variable $mult$ que va creciendo en cada paso y que multiplica el valor total de la fuerza a aplicar $\mathbf{f}_{ext-tot}$ según

$$\mathbf{f}_{ext}^i = \mathbf{f}_{ext}^{i-1} + \Delta\mathbf{f}_{ext} = mult \times \mathbf{f}_{ext-tot} \quad (6.3.15)$$

donde $mult$ se incrementa en el paso de carga i según

$$mult^i = mult^{i-1} + \Delta mult^i \quad (6.3.16)$$

La selección adecuada del tamaño del paso de carga es particularmente importante en modelos de plasticidad de tipo no asociada, ya que esta es crítica con respecto a la convergencia del proceso iterativo (Van Langen & Vermeer, 1990). Pasos de carga demasiado grandes pueden llevar a un proceso iterativo no-convergente y pasos de carga demasiado pequeños pueden generar un proceso iterativo muy costoso computacionalmente. Para resolver este problema Van Langen & Vermeer (1990) desarrollaron un procedimiento de corrección automática del tamaño del paso de carga, el cual se implementa en el código de elementos finitos. Este procedimiento está conformado por dos etapas. En primer lugar, una primera predicción del nuevo incremento de carga basado en el incremento del paso de carga anterior, es decir

$$\Delta mult^i = \Delta mult^{i-1} \quad (6.3.17)$$

En segundo lugar, un escalamiento del paso de carga $\Delta mult^i$ durante el proceso iterativo, basado en la estimación del número de iteraciones que se necesitan para llegar a la convergencia. Para entender la forma en que el procedimiento realiza esta estimación es necesario recordar la definición del vector de desbalance de fuerzas para el paso i en la iteración j :

$$\mathbf{r}^{i,j} = \mathbf{f}_{ext}^i - \mathbf{f}_{int}^{i,j} \quad (6.3.18)$$

De igual manera se puede obtener el vector de desbalance de fuerzas para el paso i en la iteración $j - 1$:

$$\mathbf{r}^{i,j-1} = \mathbf{f}_{ext}^i - \mathbf{f}_{int}^{i,j-1} \quad (6.3.19)$$

y restando estas ecuaciones se tiene que

$$\mathbf{r}^{i,j} = \mathbf{r}^{i,j-1} - (\mathbf{f}_{int}^{i,j} - \mathbf{f}_{int}^{i,j-1}) \quad (6.3.20)$$

Como lo señalan Van Langen & Vermeer (1990), utilizando una propiedad del método de poder (power iteration method), esta relación puede aproximarse de la siguiente manera, para un número suficientemente grande de iteraciones j :

$$\mathbf{r}^{i,j} \approx \alpha_m \mathbf{r}^{i,j-1} \quad (6.3.21)$$

donde $-1 \leq \alpha_m \leq 1$ y este puede ser estimado de acuerdo a

$$\alpha_m \approx \frac{(\mathbf{r}^{i,j-1})^T \mathbf{r}^{i,j}}{(\mathbf{r}^{i,j-1})^T \mathbf{r}^{i,j-1}} \quad (6.3.22)$$

A partir de la ecuación 6.3.21 y siguiendo la siguiente definición de error

$$e^{i,j} = \frac{\|\mathbf{r}^{i,j}\|_2}{\|\mathbf{f}_{ext}^i\|_2} \leq tol \quad (6.3.23)$$

se obtiene:

$$\varepsilon^{i,j} \approx |\alpha_m| \varepsilon^{i,j-1} \quad (6.3.24)$$

lo que implica que para un determinado número de iteraciones adicionales n :

$$\varepsilon^{i,j+n} \approx |\alpha_m|^n \varepsilon^{i,j} \quad (6.3.25)$$

Ahora, si se considera que n es el número de iteraciones adicionales requeridas en una determinada iteración j del paso i para obtener convergencia (definiendo convergencia como $\varepsilon^{i,j+n} = tol$), entonces se puede despejar n de acuerdo a

$$n = \frac{\log(tol) - \log(\varepsilon^{i,j})}{\log(|\alpha_m|)} \quad (6.3.26)$$

lo que permite estimar el número total de iteraciones para obtener convergencia como $j+n$. De este modo, el procedimiento de escalamiento opera en función de este número estimativo y de un rango de iteraciones deseadas definido por el usuario en los datos de entrada de acuerdo a itd_min y itd_max . Así, en una determinada iteración j del paso i se pueden tener tres situaciones, en función de las cuales el procedimiento toma una decisión de escalamiento del paso de carga:

- Si $j + n < itd_min$: Escalar hacia arriba según $\Delta mult^i = 2\Delta mult^i$.
- Si $itd_min \leq j + n \leq itd_max$: No escalar. $\Delta mult^i = \Delta mult^i$.
- Si $j + n > itd_max$: Escalar hacia abajo según $\Delta mult^i = 0,5\Delta mult^i$.

Además, después de cada acción de escalamiento se debe incrementar itd_max debido a que un cambio en el tamaño del paso de carga requiere iteraciones adicionales. De acuerdo a los ejemplos desarrollados por los autores del procedimiento este incremento puede ser tomado como 5 iteraciones adicionales.

Este procedimiento se diferencia de otros existentes en la literatura en cuanto este adapta el tamaño del paso de carga durante el proceso iterativo y no como extrapolación de los pasos de carga anteriores.

Cabe mencionar que el valor inicial del multiplicador, $\Delta mult^1$, viene dado por $Dfini$, definido por el usuario en los datos de entrada.

Actualización de las tensiones y presiones de poros

El proceso de actualización de las tensiones, en cada punto de integración, dentro de cada iteración, que se visualiza en la Figura 6.12, es llevado a cabo a través de tres rutinas:

- **tensiones_trial**: Determina el predictor elástico efectivo, $\boldsymbol{\sigma}'^B$ (*tens_trial* en el código), y el subincremento de deformación volumétrica, $\delta\epsilon_v$ (*dev* en el código), para cada punto de integración del dominio. Para esto utiliza como input el incremento de desplazamiento nodal, $\Delta\mathbf{a}$ (*Du* en el código), y el subincremento de desplazamiento nodal, $\delta\mathbf{a}$ (*du* en el código), respectivamente. El predictor elástico se expresa en un arreglo multidimensional de la forma $tens_trial(elemento, punto, :) = [\sigma_x'^B, \sigma_y'^B, \tau_{xy}'^B, \sigma_z'^B]$. Este se integra a partir del último estado de tensión que tuvo convergencia, el cual se guarda en el arreglo *tens_ant*.

Inputs: *D4, du, Du, tens_ant*

Outputs: *tens_trial, dev*

- **tensiones**: Determina la tensión efectiva actualizada, $\boldsymbol{\sigma}'^C$ (*tens* en el código), para cada punto de integración del dominio. Para esto se realiza el retorno del predictor elástico a la superficie de fluencia, siguiendo el esquema de retorno de Clausen et al. (2007), tal como se esquematiza en la Figura 6.13. La tensión efectiva actualizada se expresa en un arreglo multidimensional de la forma $tens(elemento, punto, :) = [\sigma_x'^C, \sigma_y'^C, \tau_{xy}'^C, \sigma_z'^C]$. Además se actualiza el número de puntos de integración que entraron en el rango plástico, *npp*, y se actualiza la matriz *plasticos*.

Inputs: *modelo, c, tens_trial, tens, Dprin, k, rp, rl1, rl2, rl1g, rl2g, sigma_a, npp*

Outputs: *tens, npp, plasticos*

- **tensiones_tot**: Actualiza la presión de poros, \mathbf{p}_w , para cada punto de integración del dominio (en el caso drenado este valor se mantiene constante). A partir de esto determina la tensión actualizada total, $\boldsymbol{\sigma}^C$ (*tens_tot* en el código), como la suma de la tensión actualizada efectiva, $\boldsymbol{\sigma}'^C$, y la presión de poros, \mathbf{p}_w . La tensión total actualizada se expresa en un arreglo multidimensional de la forma $tens_tot(elemento, punto, :) = [\sigma_x^C, \sigma_y^C, \tau_{xy}^C, \sigma_z^C]$.

Inputs: *caso, Kw, np, dev, tens, dpw, pw, tens_tot*

Outputs: *tens_tot, pw*

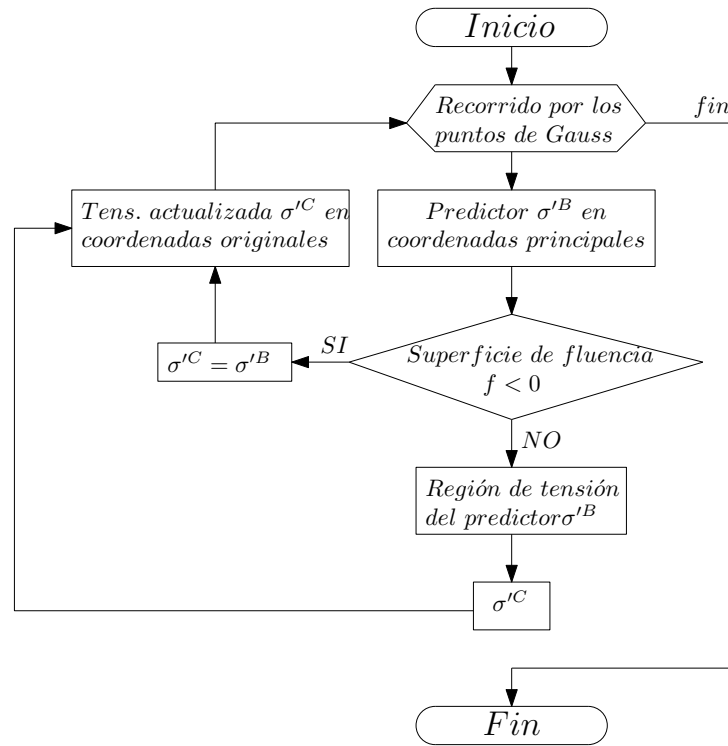


Figura 6.13: Determinación de la tensión efectiva actualizada.

Como se puede ver en la Figura 6.13, dentro del algoritmo es necesario transformar el predictor elástico efectivo, σ'^B , a coordenadas principales y también es necesario transformar la tensión actualizada efectiva, σ'^C , al sistema de coordenadas original. Para esto se utilizan las siguientes rutinas:

- **tensiones_prin:** Para cada elemento *elem* y punto de integración *pto* transforma el predictor elástico efectivo, σ'^B (*tens_trial* en el código), al espacio de las tensiones principales (*tens_prin*), guardando el ángulo de rotación (*ang*) y la dirección asociada (*ix, iy, iz*).

Inputs: *elem, pto, tens_trial*

Outputs: *tens_prin, ang, ix, iy, iz*

- **tensiones_org:** Una vez determinada la tensión actualizada efectiva en coordenadas principales (*tens_prin*), transforma esta al espacio original *x, y, z*.

Inputs: *tens_prin, ang, ix, iy, iz*

Outputs: *tens*

Actualización del vector de fuerza interna

El vector de fuerza interna, \mathbf{f}_{int} (f_int en el código), es actualizado en cada iteración a través de la rutina **f_interna**.

- **f_interna**: Hace un recorrido por todos los elemento del dominio y determina las fuerzas nodales que se desarrollan a partir del estado de tensiones totales, σ^C ($tens_tot$ en el código), en los puntos de integración de cada elemento, integrando numéricamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre.

Inputs: $tens_tot$

Outputs: f_int

Obtención del desplazamiento vertical en los puntos de interés

Cada vez que el algoritmo converge en un determinado paso de carga i , se requiere calcular y guardar el desplazamiento vertical en los puntos de interés, $(x(1), y(1))$ y $(x(2), y(2))$. Para esto se utilizan las siguientes rutinas:

- **forma**: Evalúa las funciones de forma $N1 - N6$ en el punto $(x(1), y(1))$. En el caso de que se utilicen elementos triangulares de 3 nodos $N4 = N5 = N6 = 0$.

Inputs: $x(1), y(1), nodos_obj1$

Outputs: $N1, N2, N3, N4, N5, N6$

- **desplazamiento**: Calcula, a partir de el vector global de desplazamientos nodales, \mathbf{a} (u en el código), y las funciones de forma $N1 - N6$, el desplazamiento horizontal, $despl_x$, y el desplazamiento vertical, $despl_y$, en el punto $(x(1), y(1))$.

Inputs: $u, nodos_obj1, N1, N2, N3, N4, N5, N6$

Outputs: $despl_x, displ_y$

Los desplazamientos verticales calculados en cada paso de carga i son guardado según: $Uy1(i + 1, 1) = displ_y$. Lo mismo aplica para el punto $(x(2), y(2))$ a través del vector $Uy2$.

6.3.17. Determinación de la respuesta en el análisis dinámico

6.3.17.1. Esquema general

El análisis dinámico se desarrolla a través de la rutina **respuesta_din** en la que se ha implementado el método Newton-Raphson de rigidez inicial junto con el método de Newmark para la integración en el tiempo:

- **respuesta_din**: Determina la respuesta dinámica del suelo al ser sometido a un *registro* en la base, considerando una tolerancia igual a *tol*. La respuesta se expresa según las variables de salida (*outputs*) que se describen a continuación.
Inputs: *modelo, caso, x, y, b, g, pasos, it_max, tol, M, K, C, GLactd2, registro, D4, Dprin, tens_ini, pw_ini, c, phi, psi, Kw, np, bordeinf*
Outputs: *iteraciones, tiempo, displ, Ux1, Ux2, Vx1, Vx2, Ax1, Ax2*

Outputs:

- *iteraciones*: Vector que contiene el número de iteraciones realizadas en cada paso de tiempo.
- *tiempo*: Vector que contiene cada paso de tiempo.
- *Ux1*: Vector que contiene el desplazamiento horizontal del punto $(x(1), y(1))$ en cada paso de tiempo.
- *Ux2*: Vector que contiene el desplazamiento horizontal del punto $(x(2), y(2))$ en cada paso de tiempo.
- *Vx1*: Vector que contiene la velocidad horizontal del punto $(x(1), y(1))$ en cada paso de tiempo.
- *Vx2*: Vector que contiene la velocidad horizontal del punto $(x(2), y(2))$ en cada paso de tiempo.
- *Ax1*: Vector que contiene la aceleración horizontal del punto $(x(1), y(1))$ en cada paso de tiempo

- *Ax2*: Vector que contiene la aceleración horizontal del punto $(x(2), y(2))$ en cada paso de tiempo.

6.3.17.2. Cálculos previos al proceso iterativo

Además de la identificación de los elementos a los que pertenecen los puntos a evaluar (rutina **nodos**) y la determinación de los parámetros de integración del modelo Mohr-Coulomb (rutina **parametros_mc**), descritas para el caso estático, en el caso dinámico se requiere realizar los siguientes cálculos, previo al proceso iterativo:

Manipulación del registro sísmico

Debido a que el registro sísmico se impone como desplazamiento prescrito en los nodos de la base del modelo, es necesario integrar numéricamente el registro de aceleración para obtener el registro de desplazamiento. Esto se hace a través de la siguiente rutina:

- **simpson**: El registro de aceleración incorporado en la matriz *registro* es integrado numéricamente mediante el método de Simpson. Se obtiene la matriz *registro_tuva*, que contiene en su primera columna el tiempo, en la segunda columna el registro de desplazamiento, en la tercera columna el registro de velocidad y en la cuarta columna el registro de aceleración.

Inputs: *registro*

Outputs: *registro_tuva*

Posteriormente se calcula el Δt (*dt* en el código) en base al parámetro *pasos* según

$$dt = \frac{\textit{Tiempo total del registro}}{\textit{pasos}} \quad (6.3.27)$$

A continuación se realiza la interpolación del registro para ajustarlo a *dt*, a través de la siguiente rutina:

- **interpolacion**: Interpola linealmente el registro, actualizando la matriz *registro_tuva* para ajustarla al delta de tiempo que se utiliza en el proceso iterativo (*dt*). Además convierte el desplazamiento, velocidad y aceleración a unidades *m - s*.

Inputs: $dt, registro_tuva$

Outputs: $registro_tuva$

Determinación de los coeficientes del método de Newmark

Dado que la integración en el tiempo se realiza por medio del método de Newmark, es necesario obtener los coeficientes del método. Para esto se utiliza la siguiente rutina:

- **parámetros_newmark:** Genera los coeficientes del método de Newmark, $c_0 - c_7$ ($co0 - co7$ en el código), a partir de dt y de los parámetros del método.

Inputs: dt, b, g

Outputs: $co0, co1, co2, co3, co4, co5, co6, co7$

Determinación de la matriz global de rigidez efectiva

Para aplicar el método de Newmark es necesario modificar la matriz de rigidez global \mathbf{K} (K en el código), obteniéndose la matriz de rigidez global efectiva $\hat{\mathbf{K}}$ ($Kdin$ en el código), según la ecuación 4.2.17.

Determinación de las matrices del método de penalización

La imposición del registro sísmico se realiza mediante el método de penalización descrito en el Capítulo 4, Sección 4.7. Para esto se utiliza la siguiente rutina:

- **penalizacion:** Genera las matrices \mathbf{A} (A en el código) y \mathbf{W} (W en el código) del método de penalización. Adicionalmente genera la matriz $Kp = A^T W A$ que se utiliza para modificar la matriz global de rigidez efectiva, $\hat{\mathbf{K}}$ ($Kdin$ en el código).

Inputs: $Kdin, GLsismo$

Outputs: Kp, W, A

Una vez determinada Kp , se actualiza la matriz global de rigidez efectiva de acuerdo a $Kdin = Kdin + Kp$.

6.3.17.3. Proceso iterativo

El proceso iterativo se esquematiza, de manera general, en la Figura 6.14 y a continuación se describen las etapas relevantes contenidas en él.

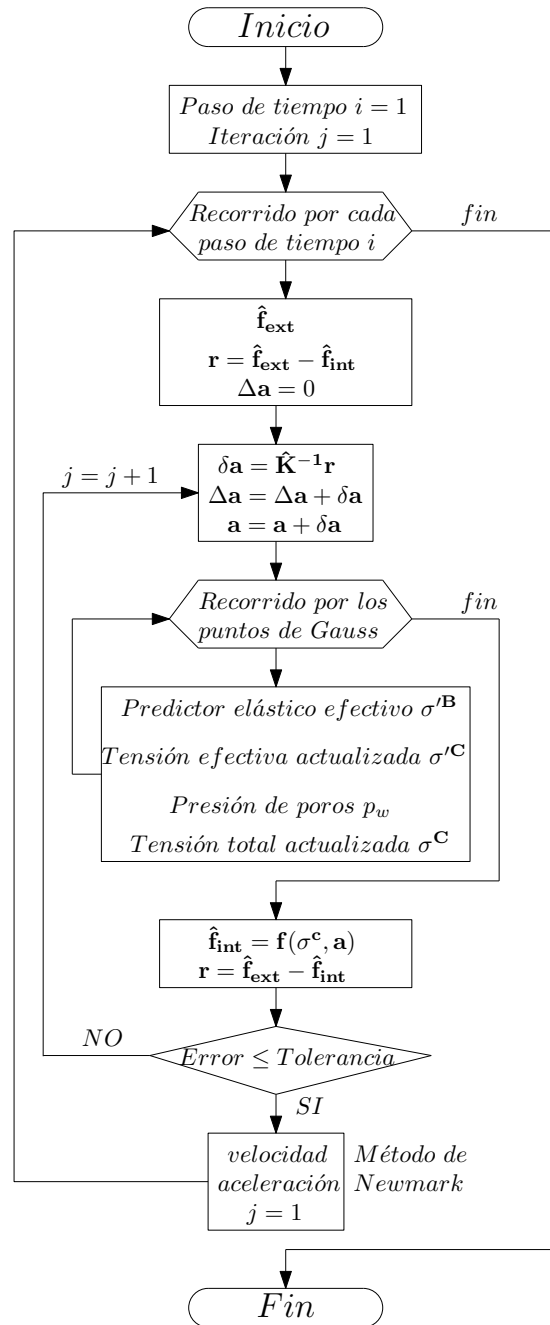


Figura 6.14: Algoritmo de Newton-Raphson de tensión inicial utilizado en el cálculo de la respuesta dinámica.

Actualización del vector de fuerza externa efectiva y aplicación del método de penalización

El vector de fuerza externa efectiva, $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ (*f_ext* en el código), en primer lugar es actualizado de acuerdo a la ecuación 4.2.18. Luego, para aplicar el método de penalización e imponer el registro sísmico en la base del modelo, el vector es modificado según $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{a}_r$, donde \mathbf{a}_r es un vector que contiene el registro de desplazamiento del sismo en cada una de las componentes asociadas a los grados de libertad horizontales de la base del dominio, para un determinado paso de tiempo i .

Actualización de las tensiones y presiones de poros

El proceso de actualización de las tensiones es idéntico al descrito para el caso estático.

Actualización del vector de fuerza interna efectiva

El vector de fuerza interna efectiva, $\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}$ (*f_int* en el código), en primer lugar es actualizado de acuerdo a la ecuación 4.2.25, donde \mathbf{f}_{int} es determinado de la misma forma que para el caso estático (utilizando la rutina **f_interna**). Luego, el vector es modificado, para considerar la fuerza asociada al método de penalización, de acuerdo a $f_{\text{int}} = f_{\text{int}} + Kp * u$.

Actualización de la velocidad y aceleración

Una vez que el algoritmo converge, en un determinado paso de tiempo i , se determina la velocidad y aceleración mediante el método de Newmark, a través de la siguiente rutina:

- **newmark**: Determina los vectores de velocidad nodal, $\dot{\mathbf{a}}$ (*v* en el código), y aceleración nodal, $\ddot{\mathbf{a}}$ (*a* en el código), a través del método de Newmark.

Inputs: *i, co0, co1, co2, co3, co4, co5, co6, co7, Du, v, a, registro_tuva, GLactd, GLsismo*

Outputs: *v, a*

Definición del error

En el caso dinámico, al igual que en el caso estático, se utiliza un error basado en un criterio de fuerza. Este se define según

$$e^{i,j} = \frac{\|\mathbf{r}^{i,j}\|_2}{\|\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^i\|_2} \leq tol \quad (6.3.28)$$

Obtención del desplazamiento, velocidad y aceleración horizontal en los puntos de interés

Cada vez que el algoritmo converge en un determinado paso de carga i , se requiere calcular y guardar el desplazamiento, velocidad y aceleración horizontal en los puntos de interés, $(x(1), y(1))$ y $(x(2), y(2))$. Para evaluar las funciones de forma se utiliza la misma rutina que para el caso estático (**forma**). Lo mismo ocurre para el caso de los desplazamientos (también se utiliza rutina **desplazamiento**). En el caso de la velocidad y aceleración se utilizan las siguientes rutinas:

- **velocidad:** Calcula, a partir de el vector global de velocidades nodales, $\dot{\mathbf{a}}$ (v en el código), y las funciones de forma $N1 - N6$, la velocidad horizontal, vel_x , en el punto $(x(1), y(1))$.

Inputs: $v, nodos_obj1, N1, N2, N3, N4, N5, N6$

Outputs: vel_x

- **aceleración:** Calcula, a partir de el vector global de aceleraciones nodales, $\ddot{\mathbf{a}}$ (a en el código), y las funciones de forma $N1 - N6$, la aceleración horizontal, $acel_x$, en el punto $(x(1), y(1))$.

Inputs: $a, nodos_obj1, N1, N2, N3, N4, N5, N6$

Outputs: $acel_x$

Los desplazamientos, velocidades y aceleraciones horizontales calculados en cada paso de carga i son guardado según: $Uy1(i+1, 1) = displ_x$, $Vy1(i+1, 1) = vel_x$, $Ay1(i+1, 1) = acel_x$, respectivamente. Lo mismo aplica para el punto $(x(2), y(2))$ a través de los vectores $Ux2$, $Vx2$ y $Ax2$.

VALIDACIÓN DEL CÓDIGO

7.1. Introducción

En el presente capítulo se realiza la validación del código en todas sus posibilidades de funcionamiento. Esto es:

- Análisis estático/dinámico.
- Modelo Lineal Elástico/Mohr-Coulomb.
- Condición drenada/no drenada.
- Condición de borde libre/borde viscoso estándar.
- Amortiguamiento numérico/amortiguamiento de Rayleigh.

Para esto se desarrollan diferentes ejemplos modelados con el código y los resultados obtenidos son comparados tanto con soluciones analíticas existentes en la literatura, como con los resultados obtenidos a través de un programa comercial de elementos finitos de amplio uso llamado Plaxis 2D.

Si bien este es el objetivo principal del capítulo, se realizan además los siguientes análisis:

- Evaluación del desempeño de los elementos triangulares de 3 nodos versus los de 6.
- Evaluación del desempeño del procedimiento de automatización del paso de carga implementado (Van Langen & Vermmer, 1990).

7.2. Análisis estático utilizando el modelo lineal-elástico

A continuación se determina el asentamiento elástico de un suelo homogéneo, producto de una fundación rectangular flexible, como la mostrada en la Figura 7.1.

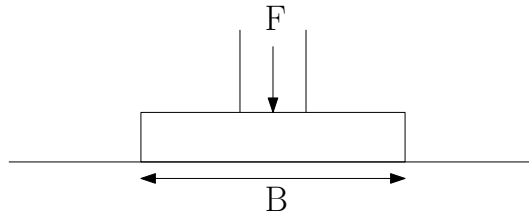


Figura 7.1: Problema de fundación rectangular flexible.

Una solución analítica fue propuesta por Harr (1996) para este problema, suponiendo un espacio semi-infinito:

$$S_e = \frac{Bq}{E}(1 - \nu^2)\alpha \quad (7.2.1)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1+m^2} + m}{\sqrt{1+m^2} - m} \right) + m \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{1+m^2} + 1}{\sqrt{1+m^2} - 1} \right) \right] \quad (7.2.2)$$

donde:

S_e : Asentamiento al centro de la fundación.

q : Carga distribuida.

B : Ancho de la fundación.

L : Largo de la fundación

m : L/B

Como ejemplo se tomará una arena de propiedades elásticas $E = 25000 [kN/m^2]$ y $\nu = 0,3$ y una zapata corrida de propiedades geométricas $B = 2[m]$ y $L = 30 [m]$. Como carga q se utilizará $150 [kN/m^2]$. Para este ejemplo, la solución analítica es $S_e = 3,06 [cm]$.

Dado que se ha considerado un largo de la fundación grande ($L/B = 15$), este problema se puede modelar, de forma aproximada, en dos dimensiones, como un problema de deformaciones planas. Para esto se ha desarrollado el modelo de elementos finitos esquematizado en la Figura 7.2, donde se aprecian las condiciones de borde impuestas. Como tamaño del dominio se consideró un depósito de $50 [m] \times 50 [m]$ para acercarse a la condición de espacio semi-infinito.

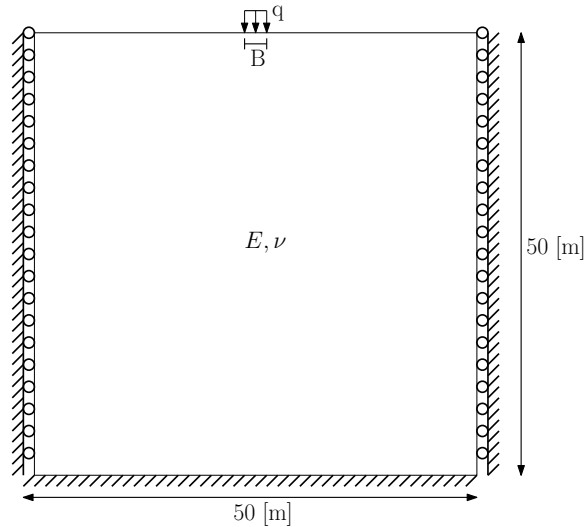


Figura 7.2: Modelo utilizado para representar la carga de una zapata flexible sobre un espacio semi-infinito.

Con el objetivo de comparar el desempeño de los elementos triangulares lineales (3 nodos) y cuadráticos (6 nodos), se ha modelado el problema a través de cuatro mallas diferentes para cada tipo de elemento. En todas las mallas se ha hecho un refinamiento bajo la carga, para considerar de mejor manera la carga distribuida y evaluar con mayor precisión el asentamiento bajo la zapata. La posición deformada obtenida luego de aplicar la carga para las distintas mallas puede visualizarse en las Figuras 7.3 y 7.4.

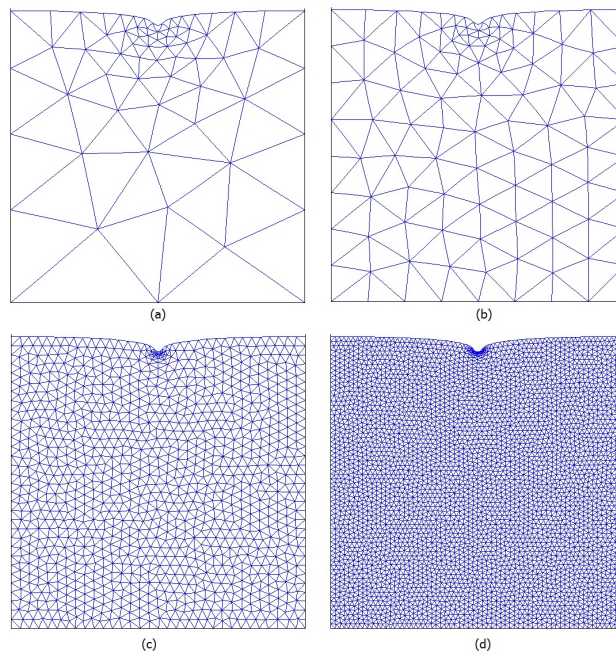


Figura 7.3: Posición deformada usando mallas (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4. Elementos triangulares de 6 nodos. Factor de escala: 100.

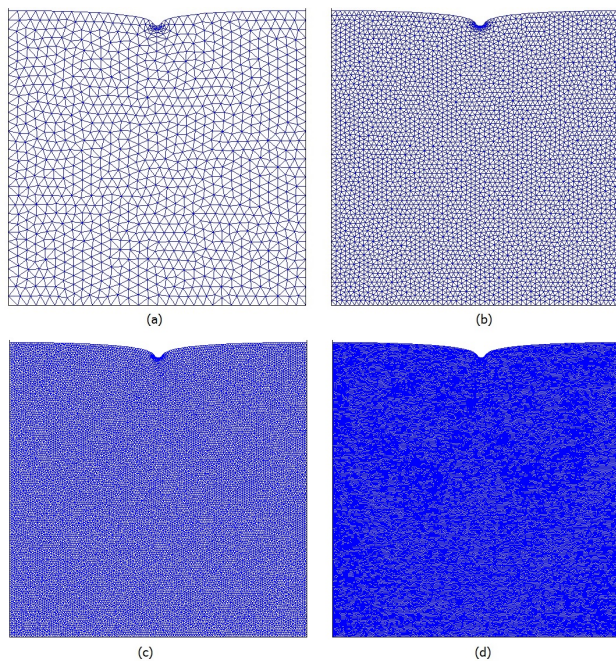


Figura 7.4: Posición deformada usando mallas (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4. Elementos triangulares de 3 nodos. Factor de escala: 100.

En las Tablas 7.1 y 7.2 se presenta el asentamiento vertical obtenido al centro de la zapata para las distintas mallas, en función del número de elementos utilizados. Además se indica el tiempo de cálculo de cada análisis, teniendo en cuenta que estos se llevaron a cabo en un computador laptop de procesador Intel(R) Core(TM) i7-4700MQ de 2,4 GHz y 8 GB de RAM.

<i>Malla</i>	<i>Número de elementos</i>	<i>Asentamiento vertical [cm]</i>	<i>Tiempo de cálculo [s]</i>
1	107	2,9897	0,174
2	181	2,9911	0,217
3	2102	3,0269	4,488
4	8296	3,0281	67,660

Tabla 7.1: Convergencia de la malla de elementos triangulares de 6 nodos.

<i>Malla</i>	<i>Número de elementos</i>	<i>Desplazamiento vertical [cm]</i>	<i>Tiempo de cálculo [s]</i>
1	2102	2,9583	1,061
2	8296	2,9931	7,162
3	33146	3,0124	152,080
4	131768	3,0227	2506,393

Tabla 7.2: Convergencia de la malla de elementos triangulares de 3 nodos.

Se observa que a medida que se refinan las mallas el asentamiento vertical converge a un valor cercano a 3,03 [cm]. En el caso de los elementos triangulares de 3 nodos, se requiere de una cantidad mucho mayor de elementos para obtener esta solución. Esto tiene sentido teórico, dado el menor orden de convergencia teórico que poseen estos elementos (orden 2 versus orden 3 en el caso de los elementos triangulares de 6 nodos). Como consecuencia, el costo computacional requerido al utilizar elementos triangulares lineales se incrementa de manera considerable si se desea obtener una respuesta con el mismo grado de precisión que con los elementos triangulares cuadráticos. En efecto, si se compara la malla 3 de los elementos triangulares cuadráticos con la malla 4 de los

elementos triangulares lineales (cuyas respuestas son comparables) existe un incremento de 0,7 horas en el tiempo de cálculo. Por este motivo, en los siguientes análisis realizados en este trabajo se opta por el uso de elementos triangulares cuadráticos, ya que estos ofrecen resultados de mejor calidad a un costo mucho menor. Además, este tipo de elementos está implementado en Plaxis, lo que permite una mejor comparación entre los programas.

Por otro lado, si se compara la solución analítica con la respuesta obtenida mediante la malla 4 de elementos triangulares cuadráticos, existe una diferencia porcentual de 1,04 %, lo que permite validar el funcionamiento del código en la resolución de este tipo de problemas.

7.3. Análisis estático utilizando el modelo Mohr-Coulomb

7.3.1. Problema de zapata flexible sobre suelo seco

A continuación se replica un ejemplo desarrollado por Huang & Griffiths (2008). El problema consiste en una zapata corrida flexible de 2 [m] de ancho cargada sobre un depósito de suelo uniforme (ver Figura 7.5).

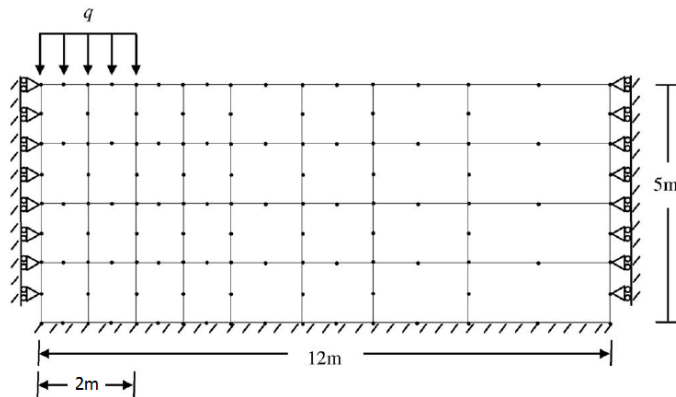


Figura 7.5: Problema de fundación flexible (Huang & Griffiths, 2008).

Huang & Griffiths (2008) modelaron el suelo a través del modelo Mohr-Coulomb, tanto para el caso en que la regla de flujo es asociada ($\psi = \phi$) como en el caso no asociado ($\psi \neq \phi$). Los parámetros usados se presentan en la Tabla 7.3. El modelo desprecia el peso del suelo.

<i>Propiedad</i>	<i>MC asociado</i>	<i>MC no asociado</i>
E' [kN/m ²]	10 ⁵	10 ⁵
ν'	0.3	0.3
c' [kN/m ²]	15	15
ϕ' [°]	20	20
ψ' [°]	20	0

Tabla 7.3: Propiedades de los modelos.

La capacidad de carga, q_{ult} , de la zapata (carga que produce la falla en el suelo) se puede estimar utilizando la fórmula analítica de Prandtl:

$$q_{ult} = cN_c \quad (7.3.3)$$

donde N_c es el factor de capacidad de carga por cohesión, equivalente a

$$N_c = (N_q - 1)cot\phi \quad (7.3.4)$$

y

$$N_q = tg^2(45 + \phi/2)e^{\pi tg\phi} \quad (7.3.5)$$

obteniéndose para este caso: $q_{ult} = 222,45 [kN/m^2]$.

Por otro lado, Huang & Griffiths determinaron la capacidad de carga a través del modelo de elementos finitos que muestra la Figura 7.5, definiendo esta carga como la carga que hace que las iteraciones para obtener convergencia se eleven considerablemente. Los resultados obtenidos fueron $q_{ult} = 230 [kN/m^2]$ para el caso asociado y $q_{ult} = 225 [kN/m^2]$ para el caso no asociado.

A continuación se desarrolla este ejemplo a través del código de Matlab, considerando una carga cercana al colapso ($q = 225 [kN/m^2]$ para el caso asociado y $q = 220 [kN/m^2]$ para el caso no asociado), y se determina el desplazamiento vertical en el punto medio de la zapata (a 1 [m] del borde izquierdo). Los resultados obtenidos, además, se comparan con los del programa comercial de elementos finitos Plaxis.

En la Figura 7.6 se muestran las mallas utilizadas en ambos programas. Se ha buscado conseguir mallas similares y en ambos casos se ha realizando un refinamiento de esta bajo la zapata, para considerar de mejor manera la carga distribuida y evaluar con mayor precisión el desplazamiento vertical bajo la zapata. En ambos casos se han utilizado elementos triangulares de 6 nodos. En el caso del código de Matlab la malla está compuesta por 76 elementos y en el caso de Plaxis por 97. Para definir el tamaño de los pasos de carga se ha utilizado el procedimiento de corrección automática del

tamaño del paso de carga propuesto por Van Langen & Vermmer (1990) implementado en el código.

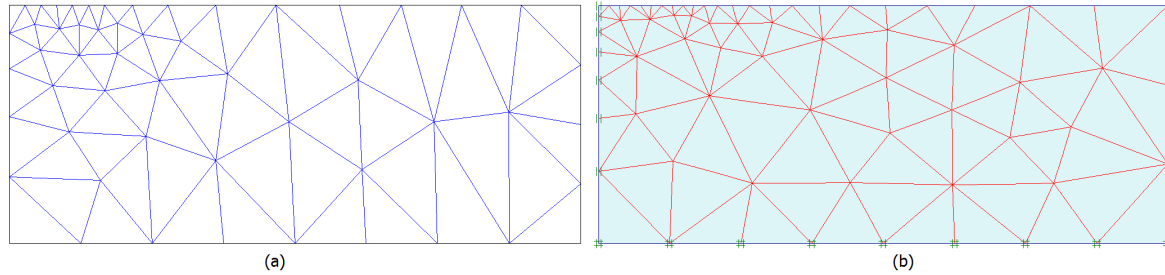


Figura 7.6: Mallas utilizadas en el (a) código Matlab y en (b) Plaxis.

El análisis no lineal se desarrolla considerando una tolerancia $Tol = 0,001$ en ambos programas. Para el caso del modelo Mohr-Colomb asociado, la deformada final se puede visualizar en la Figura 7.7, la distribución de vectores de desplazamiento en la Figura 7.8 y la distribución de los puntos de integración plastificados (puntos sobre la superficie de fluencia) en la Figura 7.9.

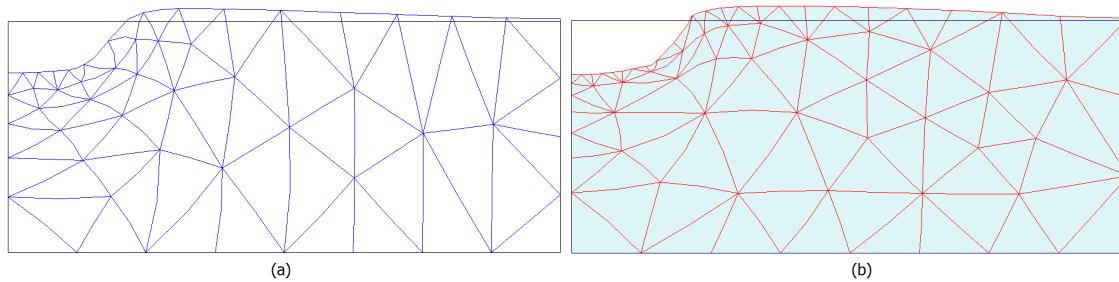


Figura 7.7: Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Factor de escala: 100.

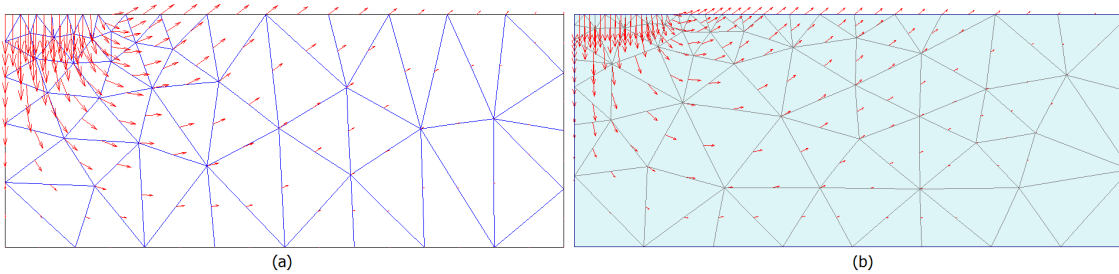


Figura 7.8: Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado.

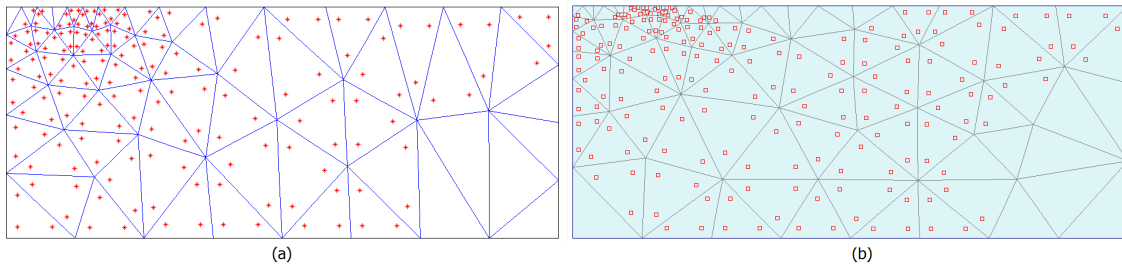


Figura 7.9: Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado.

En el caso no asociado la deformada final se puede observar en la Figura 7.10, la distribución de vectores de desplazamiento en la Figura 7.11 y la distribución de los puntos de integración plastificados en la Figura 7.12.

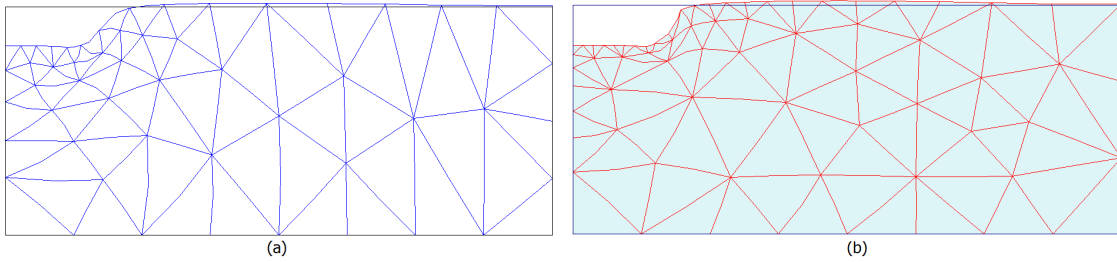


Figura 7.10: Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Factor de escala: 50.

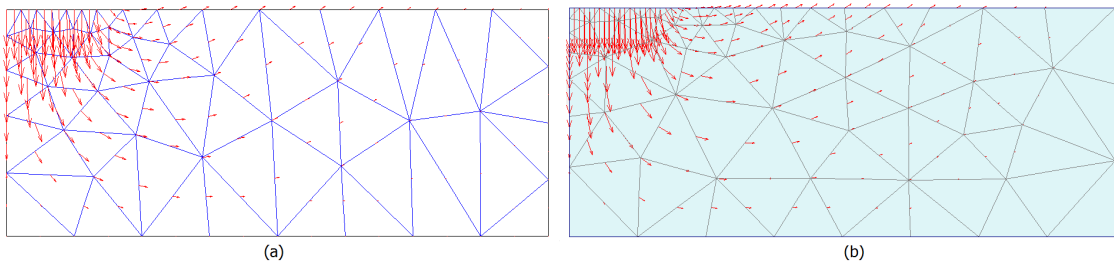


Figura 7.11: Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.

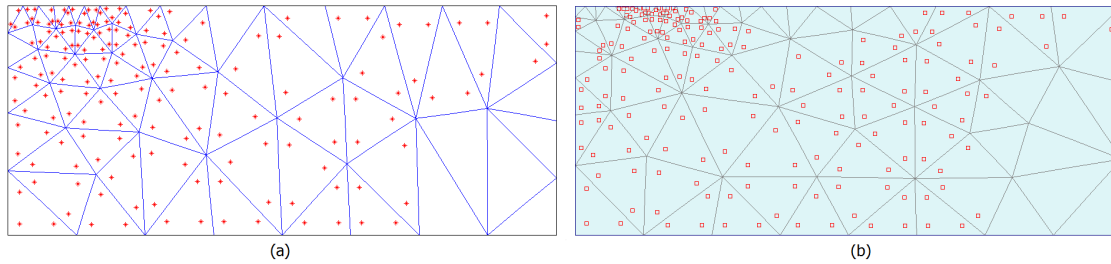


Figura 7.12: Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.

Las figuras anteriores muestran que, en general, se obtienen resultados muy similares entre el código de Matlab y Plaxis. En el caso asociado existe una cierta acumulación de desplazamientos por sobre la superficie adyacente a la zapata, que es mucho más importante que en el caso no asociado. Esto se debe a que en el caso asociado $\psi > 0$ y en consecuencia el modelo sufre una expansión volumétrica en el rango plástico. Además, se visualiza que la mayor parte de los puntos de integración han entrado en el rango plástico, tanto para el caso asociado como no asociado, lo que se explica por tratarse de un estado cercano al colapso.

En la Figura 7.13 se grafica el desplazamiento vertical bajo la zapata a medida que la fuerza aplicada va en aumento, para los dos modelos considerados. Además, para efectos de comparación se ha graficado la solución para el caso lineal elástico y la solución analítica de Prandtl para la carga última.

En la figura se comprueba que la carga aplicada está cerca de producir el colapso ya que la pendiente de esta se hace casi vertical en la parte final. Esta carga es similar en ambos casos, pero el caso no asociado presenta un mayor nivel de desplazamiento, lo que permite deducir que la expansión volumétrica plástica que ocurre en el caso asociado genera una cierta rigidización del sistema.

Como se puede apreciar en la figura, las modelaciones en el código de Matlab y en Plaxis siguen aproximadamente el mismo patrón de asentamiento. En la Tabla 7.4 se muestra la diferencia porcentual existente entre los dos programas (con respecto a Plaxis) en el cálculo del desplazamiento final.

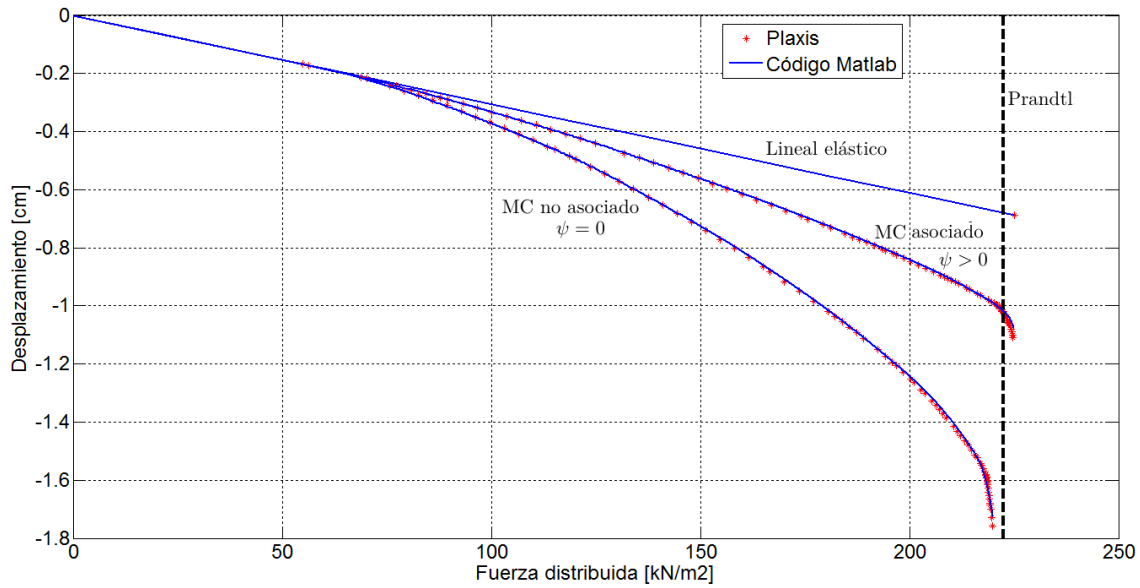


Figura 7.13: Comparación entre el código de Matlab y Plaxis.

<i>Modelo</i>	<i>Diferencia porcentual [%]</i>
Lineal elástico	0,0306
MC asociado	3,3989
MC no asociado	2,5743

Tabla 7.4: Diferencia porcentual en el cálculo del desplazamiento final.

Estas diferencias, aunque pequeñas, se pueden explicar por la configuración de las mallas, y en particular para el caso del modelo Mohr-Coulomb, por las diferencias que existen entre los programas en la implementación de la resolución del problema no lineal (integración del modelo constitutivo, algoritmo de Newton-Raphson, control del error, etc.).

Finalmente, en las Figuras 7.14 y 7.15 (caso asociado y no asociado respectivamente) se examina el desempeño del procedimiento de corrección automática del tamaño del paso de carga implementado en el código de Matlab. Como ya se explicó, en este procedimiento se selecciona, previo al análisis, un rango de iteraciones deseadas. En este caso se escogió un número mínimo de iteraciones deseado de 5 y un número máximo de 15. Este rango está marcado en rojo en las figuras. Además se grafica el número de

iteraciones que efectivamente se realizaron a medida que se fue aumentando la carga sobre el suelo.

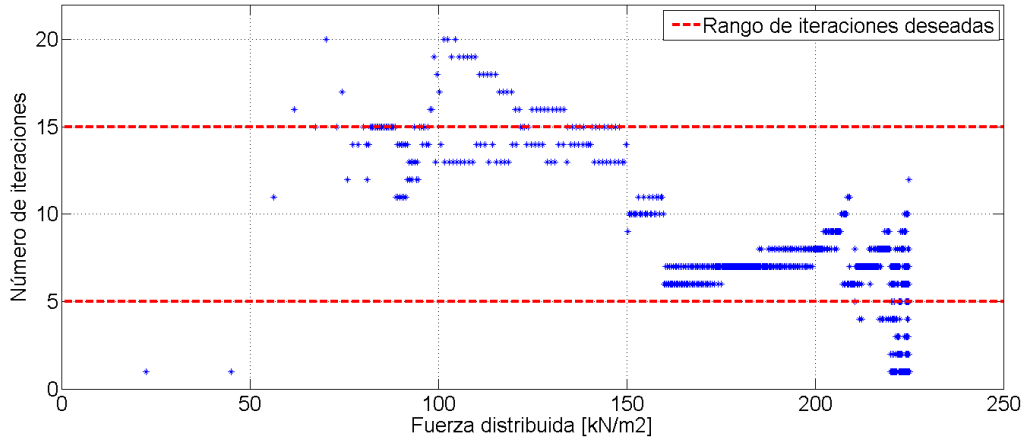


Figura 7.14: Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr-Coulomb asociado.

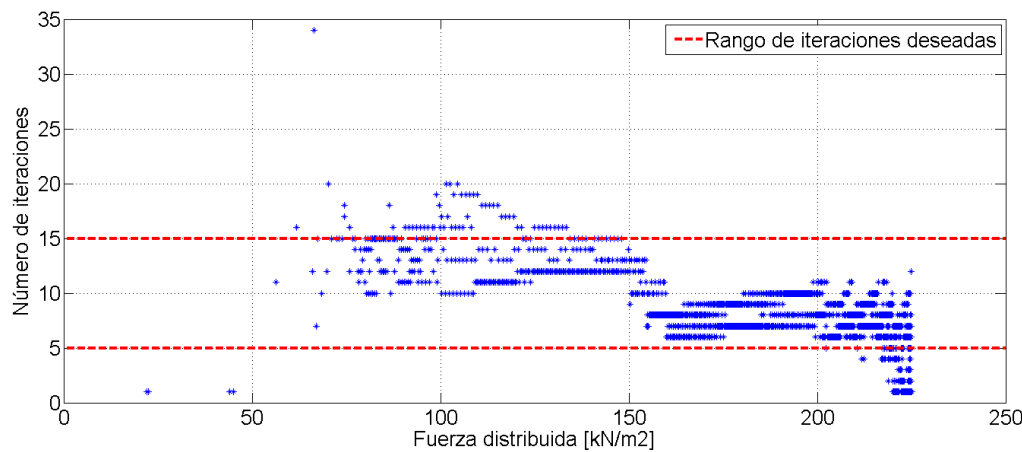


Figura 7.15: Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr-Coulomb no asociado.

En estas figuras se puede cuantificar el tamaño del paso de carga (en términos relativos) como la distancia horizontal entre puntos consecutivos. Como se visualiza, a medida que la carga va acercándose a su valor final, los puntos se encuentran más cercanos unos de otros, lo que significa que el tamaño del paso de carga es menor. Esto corresponde al resultado del procedimiento, que impone un tamaño de carga menor mientras más se ha plastificado el sistema, para así poder cumplir con el rango de iteraciones establecido

(de lo contrario el número de iteraciones se incrementaría considerablemente). En las figuras se observa que tanto para el caso asociado como no asociado el procedimiento funcionó adecuadamente, ya que una vez que este empieza a operar (cuando se empieza a requerir más de una iteración por paso de carga) la mayor parte de los puntos se encuentra en el rango deseado y en general los valores no se alejan demasiado de ese rango.

7.3.2. Problema de zapata flexible sobre suelo saturado. Condición no drenada

A continuación se modifica el ejemplo anterior, para validar la respuesta en suelos saturados en condición no drenada. Se utiliza la misma malla de elementos finitos del caso anterior pero en esta ocasión se especifica un nivel freático que coincide con la superficie del suelo, es decir, se considera todo el suelo como saturado. Además, para tomar en cuenta el peso, se especifica un peso específico saturado $\gamma_{sat} = 18[kN/m^3]$. En el caso no asociado ($\psi = 0^\circ$) se aplica una carga de $80 [kN/m^2]$ que lleva al suelo a una condición cercana al colapso, mientras que en el caso asociado ($\psi = 20^\circ$) se aplica una carga de $250 [kN/m^2]$, la cual produjo un nivel importante de desplazamiento y plastificación.

En las siguientes figuras se puede visualizar la deformada final, la distribución de vectores de desplazamiento y la distribución de los puntos de integración plastificados tanto para el caso asociado como no asociado.

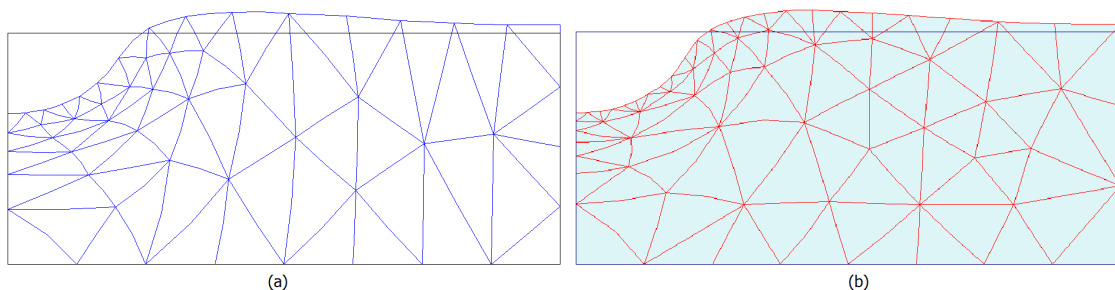


Figura 7.16: Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada. Factor de escala: 150.

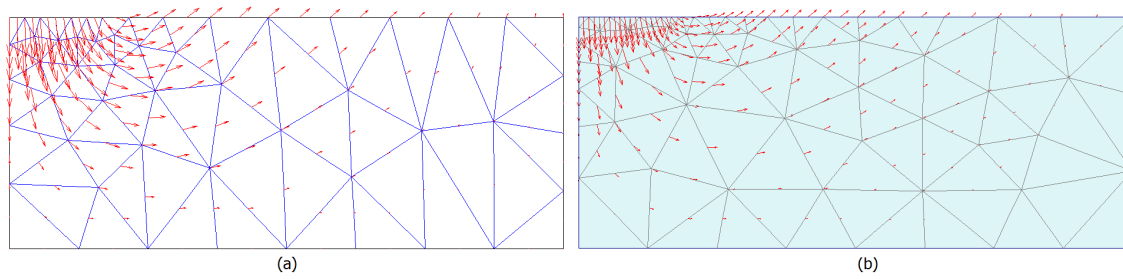


Figura 7.17: Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada.

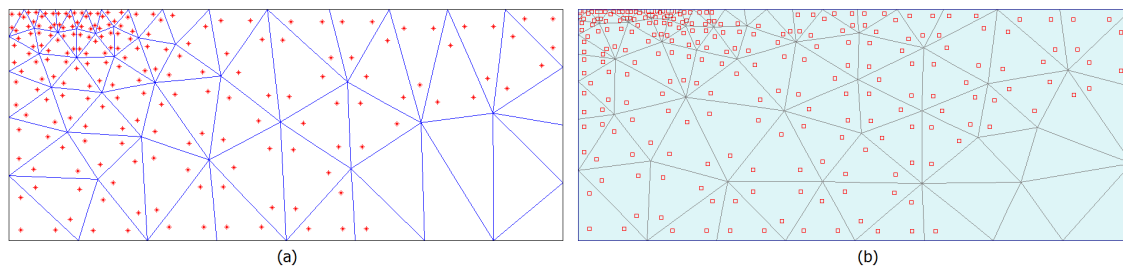


Figura 7.18: Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada.

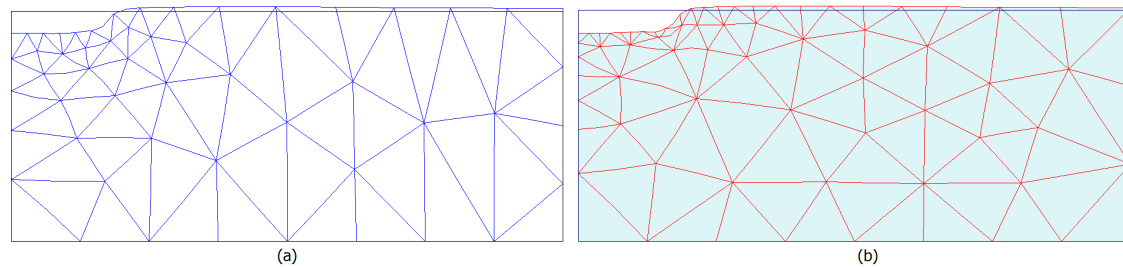


Figura 7.19: Deformada final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada. Factor de escala: 200.

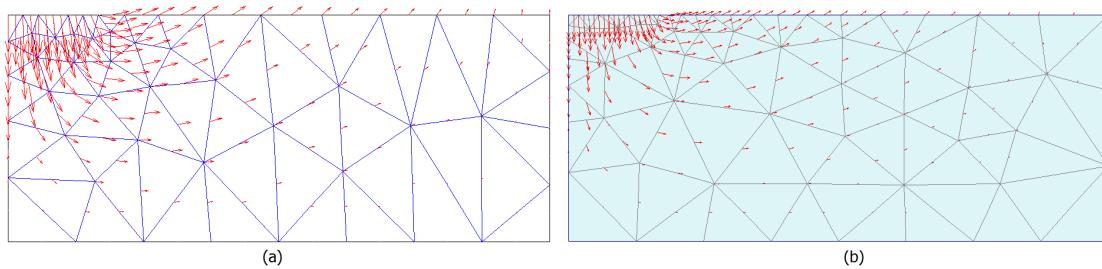


Figura 7.20: Vectores de desplazamiento final en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada.

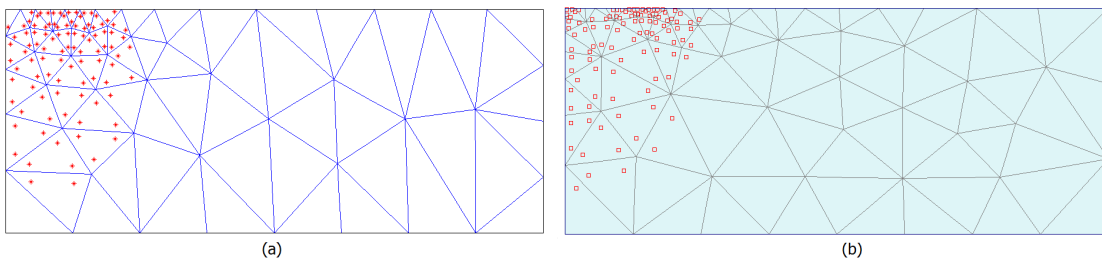


Figura 7.21: Distribución de puntos de integración plastificados en (a) código Matlab y (b) Plaxis. Modelo Mohr-Coulomb no asociado. Condición no drenada.

Las figuras anteriores muestran que se obtienen resultados muy similares entre el código de Matlab y Plaxis. Al tratarse de una respuesta en condición no drenada los modelos mantienen su volumen aproximadamente constante, lo que se puede apreciar en las Figuras 7.16 y 7.19. A diferencia de lo que ocurre en el caso asociado, en el caso no asociado (ver Figura 7.21) existe una concentración de los puntos plastificados en la zona inferior a la zapata.

En la Figura 7.22 se grafica el desplazamiento vertical bajo la zapata a medida que la fuerza aplicada va en aumento.

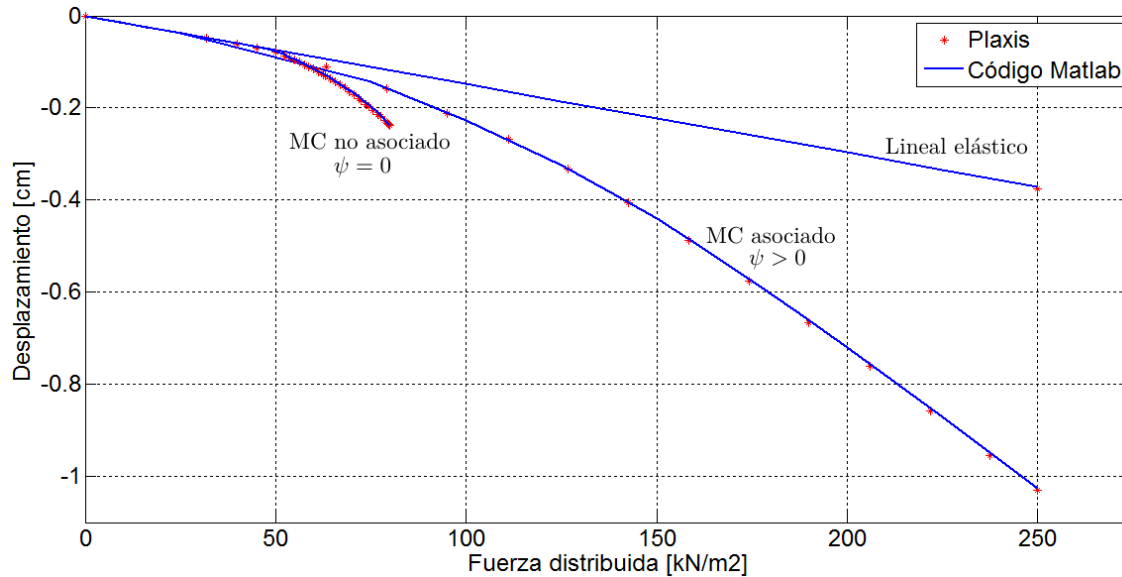


Figura 7.22: Comparación entre el código de Matlab y Plaxis.

En el caso no asociado puede observarse que el colapso se produce a una carga mucho menor que en el ejemplo anterior (suelo seco). Como se explicó en el Capítulo 5, Sección 5.4, esto se debe a que en condición no drenada los puntos de integración entran en el rango plástico a niveles de tensión de corte menor (resistencia al corte no drenada). Por otro lado, en el caso asociado se puede visualizar un incremento en la carga considerable sin que el suelo se acerque al colapso. Este incremento es ilimitado (se hicieron algunas pruebas numéricas para constatarlo). Como también se explicó en el Capítulo 5, Sección 5.4, esto se debe a que en este caso se utiliza un ángulo de dilatación $\psi > 0$, lo que implica que en el rango plástico se genera un incremento en la presión de poros en tracción, que se traduce en un aumento ilimitado de la resistencia al corte no drenada.

Como se puede apreciar en la figura, las modelaciones en el código de Matlab y en Plaxis siguen aproximadamente el mismo patrón de asentamiento. En la Tabla 7.5 se muestra la diferencia porcentual existente entre los dos programas (con respecto a Plaxis) en el cálculo del desplazamiento final.

<i>Modelo</i>	<i>Diferencia porcentual [%]</i>
Lineal elástico	0,9522
MC asociado	0,6142
MC no asociado	0,0882

Tabla 7.5: Diferencia porcentual entre códigos.

Al igual que en el ejemplo anterior, en este ejemplo se producen diferencias muy pequeñas entre los dos programas, e incluso menores en el caso del modelo Mohr-Coulomb.

En las Figuras 7.23 y 7.24 se vuelve a examinar el desempeño del procedimiento de corrección automática del tamaño del paso de carga. Como se puede observar, tanto para el caso asociado como no asociado el procedimiento funcionó adecuadamente, ya que una vez que este empieza a operar (cuando se empieza a requerir más de una iteración por paso de carga) la mayor parte de los puntos se encuentra en el rango deseado y en general los valores no se alejan demasiado de ese rango.

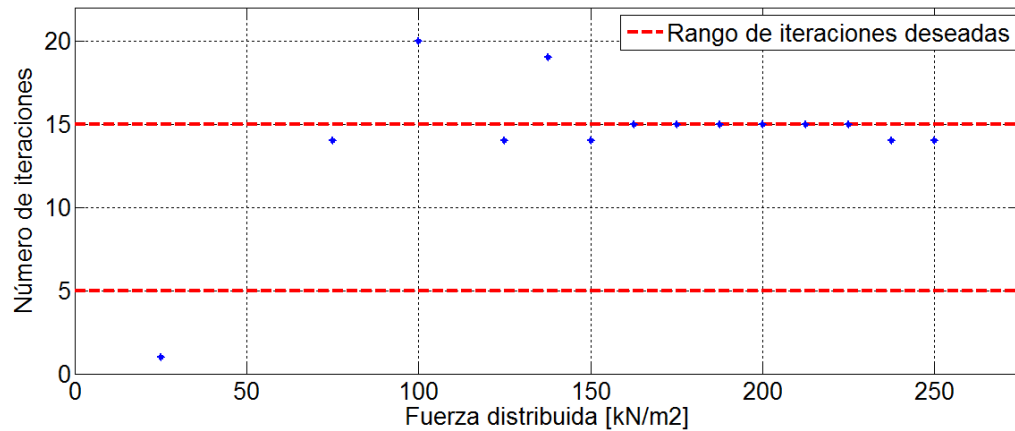


Figura 7.23: Número de iteraciones en función de la carga aplicada. Modelo Mohr-Coulomb asociado. Condición no drenada.

7.4. Respuesta dinámica

7.4.1. Respuesta dinámica utilizando el modelo lineal elástico

En esta sección se desarrolla la validación del código para la respuesta dinámica utilizando el modelo lineal elástico. Para esto se considera un depósito de suelo homogéneo y horizontal, de altura $H = 6 [m]$ sometido a una aceleración cíclica en la base. Como material se utiliza una arena caracterizada por una velocidad de onda de corte $V_s = 200 [m/s]$, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 7.6.

<i>Propiedad</i>	<i>Modelo lineal elástico</i>
$E' [kN/m^2]$	198367,35
ν'	0,35
$\gamma_n [kN/m^2]$	18

Tabla 7.6: Propiedades del modelo.

El suelo es sometido a una aceleración basal armónica de la forma $a_b(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t)$, con $\omega = 29,06 [rad/s]$ y $A = 1 [m/s^2]$, durante 4 [s] (ver Figura 7.25). Esto permite comparar la amplificación en superficie obtenida mediante el modelo de elementos finitos con la amplificación deducida en el Capítulo 1 según la teoría unidimensional de propagación de onda.

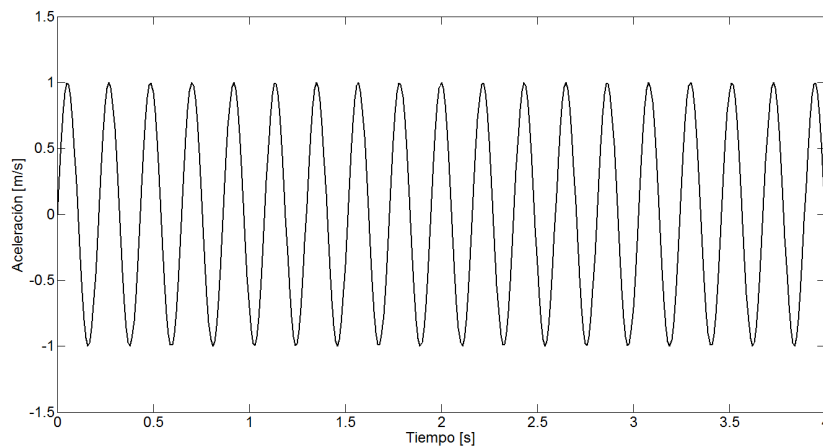


Figura 7.25: Aceleración basal.

Para analizar la influencia que tienen los bordes absorbentes en este tipo de problema se generan dos modelos de elementos finitos: el primero con bordes laterales libres y el segundo con bordes absorbentes en ambos lados (ver Figura 7.26). Como extensión lateral de los modelos, se ha escogido $L = 60$ [m].

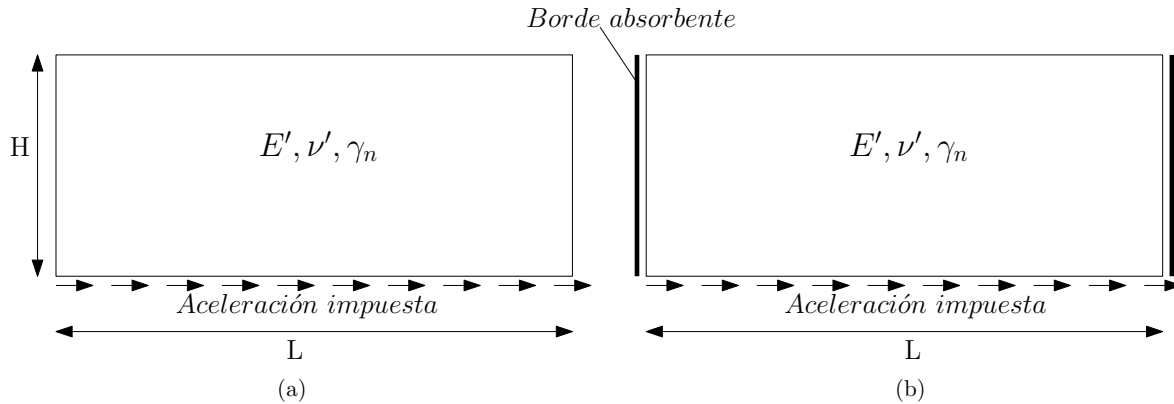


Figura 7.26: Modelo con (a) bordes libres y (b) bordes absorbentes.

En la Figura 7.27 se muestra la malla utilizada, tanto en el código de Matlab como en Plaxis. La malla (a) cuenta con 172 elementos, mientras que la malla (b) utiliza 242.

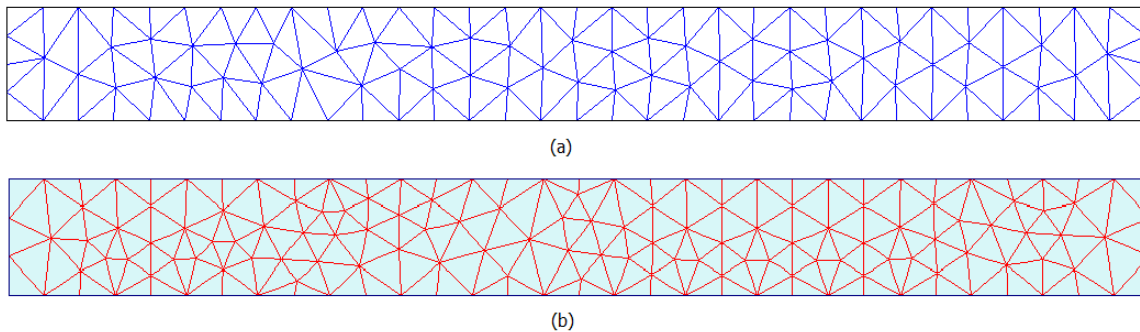


Figura 7.27: Mallas de (a) código Matlab y (b) Plaxis.

Los análisis dinámicos son llevados a cabo sin amortiguamiento de Rayleigh ($\xi = 0$), pero se ha incluido amortiguamiento numérico en el método de Newmark ($\beta_N = 0,3025$ y $\gamma_N = 0,6$) para evitar oscilaciones espurias que ocurrirían en la ausencia total de amortiguamiento.

En la Figura 7.28 se muestran los resultados obtenidos tanto en el código de Matlab como en el programa Plaxis, para la aceleración en superficie al centro del dominio,

considerando los bordes laterales como libres ($C_1 = 0$ y $C_2 = 0$). Se ha graficado además la aceleración máxima esperada según la teoría unidimensional de propagación de onda, utilizando la función de amplificación

$$|F_1(\omega)| = \left| \frac{1}{\cos(\omega H/v_s)} \right| = \left| \frac{1}{\cos(29,06 \cdot 6/200)} \right| = 1,55 \quad (7.4.6)$$

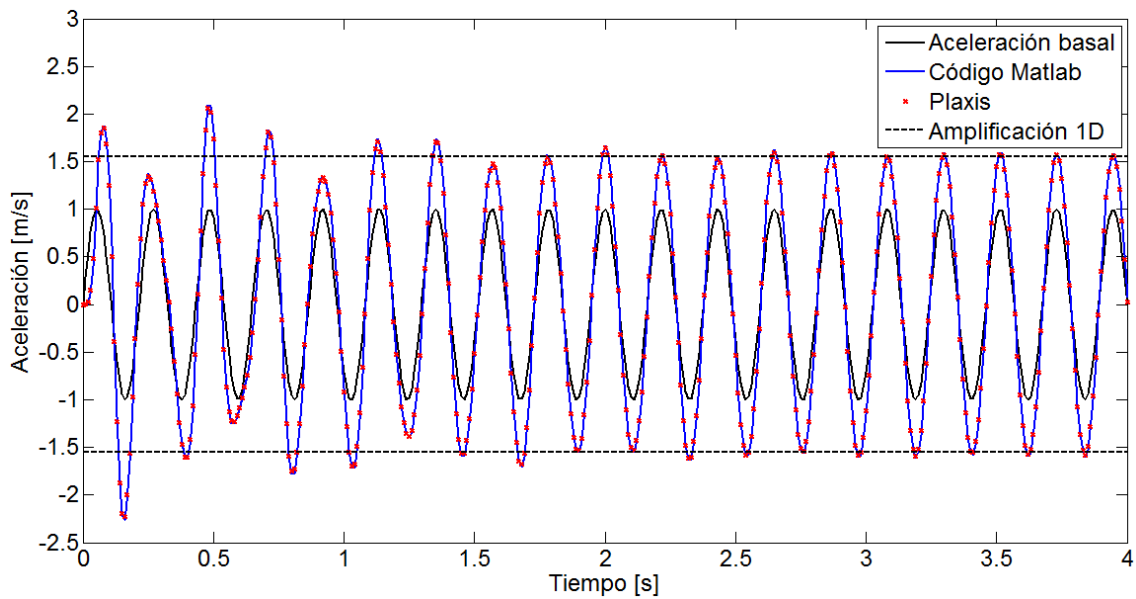


Figura 7.28: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes libres.

En la Figura 7.29 se muestran los resultados considerando la condición de bordes absorbentes (utilizando $C_2 = 1$ y $C_2 = 0,25$).

Como se observa en estas figuras, la respuestas obtenida mediante el código de Matlab y el programa Plaxis se ajustan de manera exacta a lo largo de todo el periodo de tiempo. Además, la envolvente de la respuesta en superficie coincide con la amplificación teórica derivada del análisis unidimensional de propagación de onda. Es necesario señalar que para obtener esta solución fue necesario extender lateralmente el dominio de elementos finitos de manera significativa, para de esta forma reducir la influencia de los bordes del modelo.

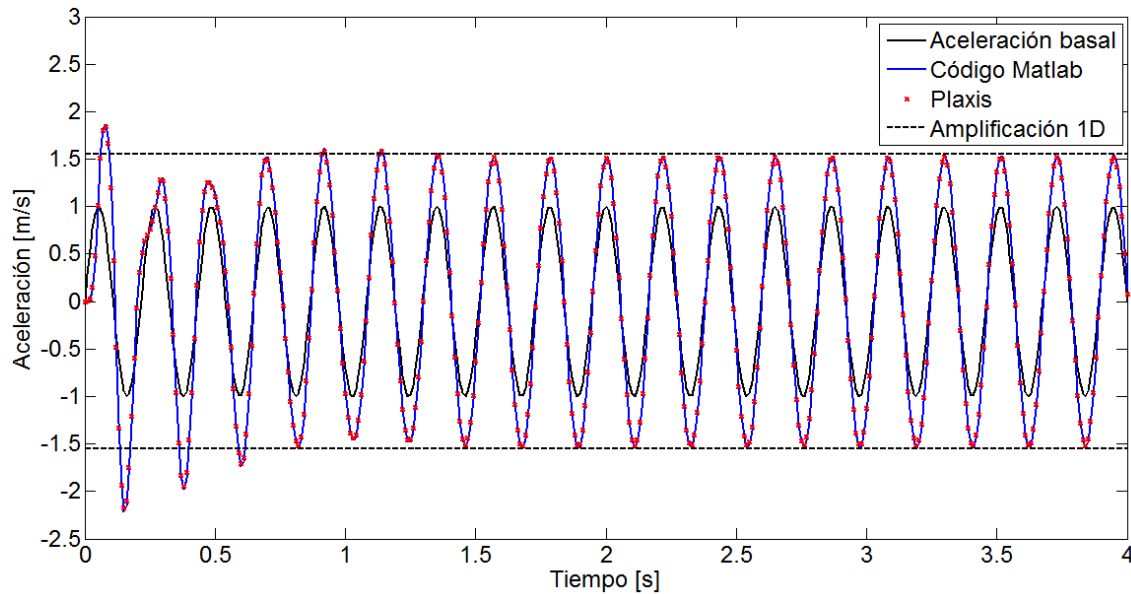


Figura 7.29: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes Absorbentes.

Con respecto al tipo de condición de borde lateral utilizada, se observa que la principal diferencia radica en el número de oscilaciones que le toma a la respuesta llegar a un régimen permanente. En el primer caso (bordes libres) existe una oscilación irregular que se extiende durante una mayor cantidad de tiempo que en el segundo caso (bordes absorbentes). Esto ratifica la importancia de utilizar bordes absorbentes, lo que es especialmente relevante en el caso sísmico (Capítulo 8), donde la sollicitación está compuesta de un contenido de frecuencias variable.

7.4.2. Respuesta dinámica utilizando el modelo Mohr-Coulomb. Condición drenada/no drenada.

En esta sección se desarrolla la validación del código para la respuesta dinámica utilizando el modelo Mohr-Coulomb, tanto para un suelo seco (condición drenada) como para un suelo saturado en condición no drenada. Las dimensiones de los modelos (ver Figura 7.30) son las mismas utilizadas en el ejemplo anterior, al igual que la sollicitación en la base. Se utilizan bordes absorbentes ($C_1 = 1$ y $C_2 = 0,25$) y las propiedades del suelo se muestran en la Tabla 7.7. Como se ve en la tabla, para el caso

no drenado se ha utilizado un ángulo de dilatación $\psi' = 0$, siguiendo la recomendación detallada en el Capítulo 5.

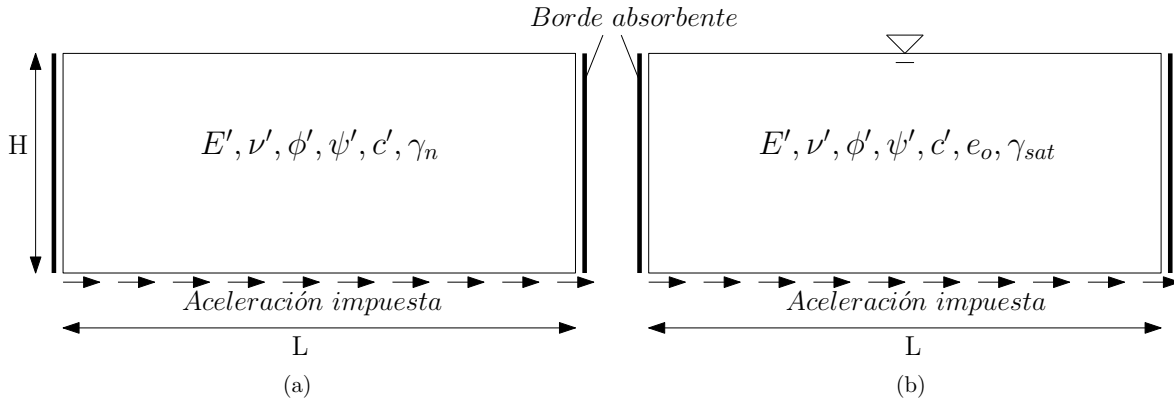


Figura 7.30: Modelo de (a) suelo seco y (b) modelo de suelo saturado en condición no drenada.

Los análisis dinámicos son llevados a cabo sin amortiguamiento de Rayleigh ($\xi = 0$), pero se ha incluido amortiguamiento numérico en el método de Newmark ($\beta_N = 0,3025$ y $\gamma_N = 0,6$). En cuanto a la tolerancia, se utiliza $Tol = 10^{-5}$ en el código de Matlab, ya que se ha verificado que usar una tolerancia menor no hace variar los resultados. En Plaxis, una tolerancia $Tol = 10^{-3}$ es suficiente. Esto se debe a que ambos programas determinan el error de forma diferente (en el caso de Plaxis, este tiene un control del error local a nivel de puntos plásticos).

<i>Propiedad</i>	<i>MC Drenado</i>	<i>MC No drenado</i>
$E' [kN/m^2]$	198367,35	198367,35
ν'	0,35	0,35
$\phi' [^\circ]$	36	36
$\psi' [^\circ]$	6	0
$c' [kN/m^2]$	0	0
e_o	—	0.5
$\gamma_n [kN/m^2]$	18	—
$\gamma_{sat} [kN/m^2]$	—	20

Tabla 7.7: Propiedades del modelo.

Los resultados de la aceleración horizontal en superficie al centro de los modelos se grafican en las Figuras 7.31 y 7.32. En las figuras también se ha graficado la aceleración máxima obtenida mediante la teoría unidimensional de propagación de onda, con el único objetivo de comparar las respuestas con el caso lineal elástico. Como se aprecia, las respuestas obtenidas mediante el código de Matlab, tanto para la respuesta drenada como no drenada, se ajustan bastante bien a las obtenidas a través del programa Plaxis, y en consecuencia los resultados validan el código para su utilización en la evaluación de la respuesta dinámica, lo que permite su uso en el Capítulo 8, donde se modela la respuesta sísmica de un depósito de suelo en el centro de Viña del Mar.

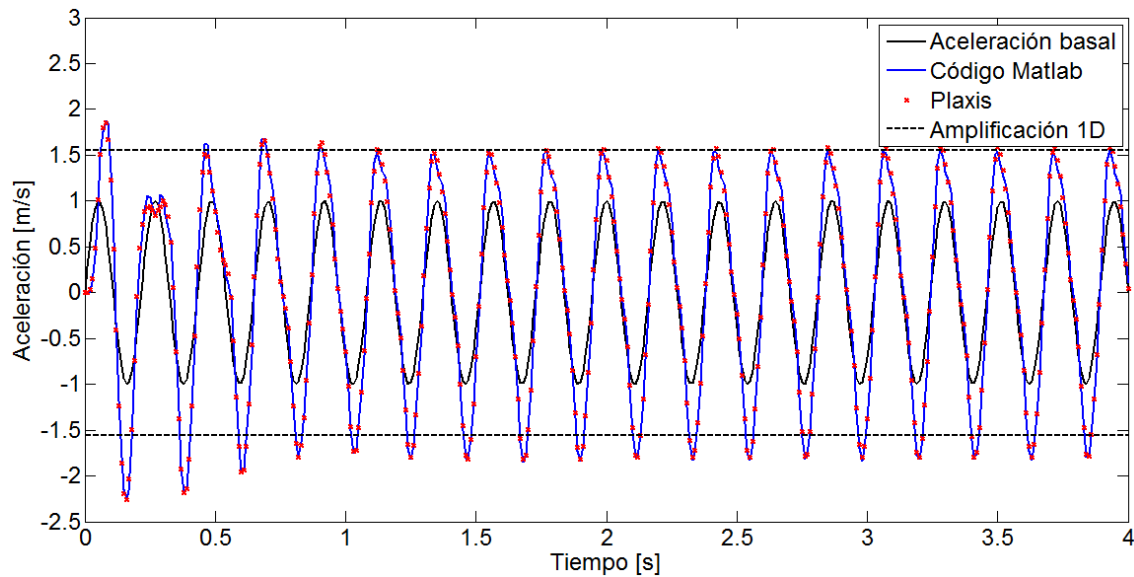


Figura 7.31: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes Absorbentes.

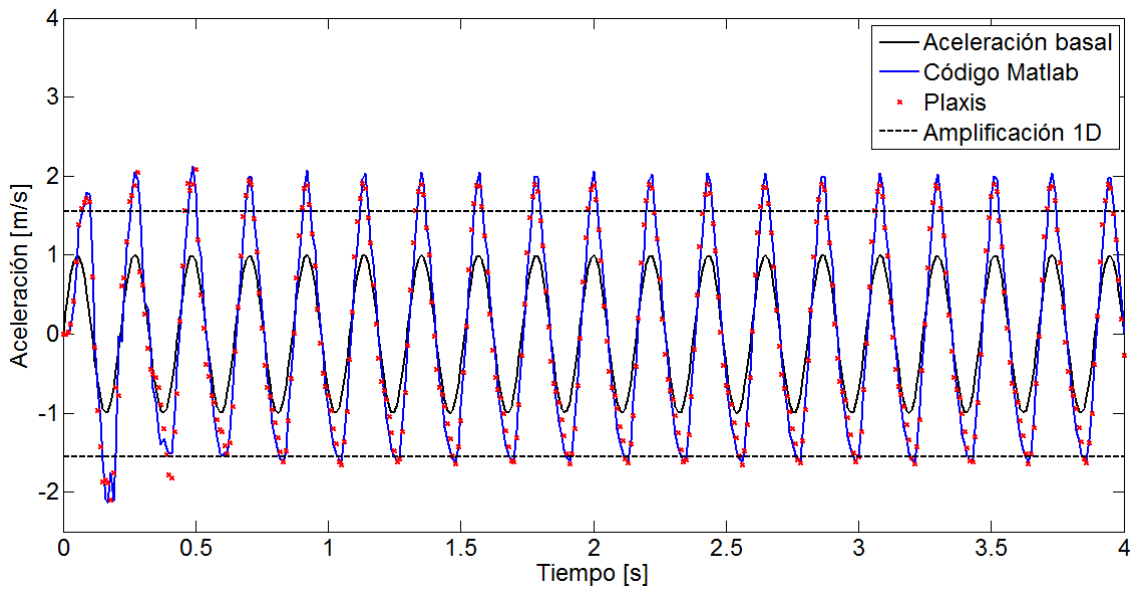


Figura 7.32: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes Absorbentes.

7.4.3. Amortiguamiento de Rayleigh

En los análisis anteriores se ha utilizado una razón de amortiguamiento $\xi = 0$, por lo que hace falta una validación del funcionamiento de la matriz \mathbf{C} considerando amortiguamiento de Rayleigh. Para esto, se replica el experimento numérico desarrollado para el modelo lineal elástico, pero esta vez con la aceleración basal mostrada en la Figura 7.33, lo que permite visualizar de mejor manera el efecto del amortiguamiento luego de la caída de la aceleración a cero, producida en el segundo 2,06.

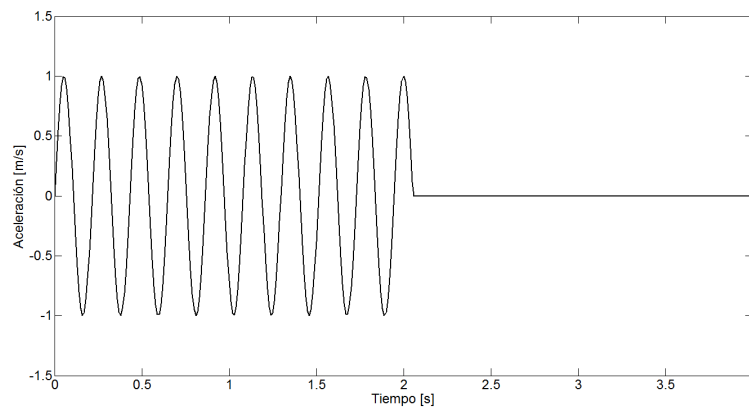


Figura 7.33: Aceleración basal.

Para determinar los parámetros α_R y β_R del amortiguamiento de Rayleigh es necesario definir las frecuencias angulares que condicionan la forma del amortiguamiento (w_m y w_n). Con el objetivo de evaluar una matriz de amortiguamiento que sea proporcional tanto a la matriz de masa como a la matriz de rigidez se eligen las dos frecuencias distintas de cero. En este caso se utilizará como primera frecuencia la frecuencia fundamental del suelo (f_{r1}) y como segunda frecuencia $5f_{r1}$. Esto implica que $w_m = 2\pi f_{r1}$ y $w_n = 5 \cdot 2\pi f_{r1}$.

Para determinar la frecuencia fundamental del suelo, en primer lugar se obtiene el periodo fundamental según la teoría unidimensional de propagación de onda:

$$T = \frac{4H}{V_s} = \frac{4 \cdot 6}{200} = 0,12 \text{ [s]} \quad (7.4.7)$$

Con esto se obtienen las frecuencias angulares que se muestran en la Tabla 7.8:

f_{r1} [Hz]	8,333
ω_m [rad/s]	53,360
ω_n [rad/s]	261,800

Tabla 7.8: Determinación de las frecuencias del amortiguamiento de Rayleigh.

En cuanto a la razón de amortiguamiento, ξ , se modelarán dos escenarios. En el primero se utiliza $\xi = 2\%$ y en el segundo $\xi = 5\%$. Con esto, los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh para cada caso quedan dados por la Tabla 7.9.

<i>Parámetro</i>	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>
ξ	0,02	0,05
α_R	1,745	4,363
β_R	$1,273 \cdot 10^{-4}$	$3,183 \cdot 10^{-4}$

Tabla 7.9: Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 1.

Los análisis dinámicos son llevados a cabo sin amortiguamiento numérico en el método

de Newmark ($\beta_N = 0,25$ y $\gamma_N = 0,5$) para que todo el amortiguamiento quede determinado por el amortiguamiento de Rayleigh, y se utilizan bordes absorbentes ($C_1 = 1$ y $C_2 = 0,25$). La aceleración horizontal en superficie obtenida en el centro de los modelos se grafica en las Figuras 7.34 y 7.35, tanto para el código de Matlab como para Plaxis.

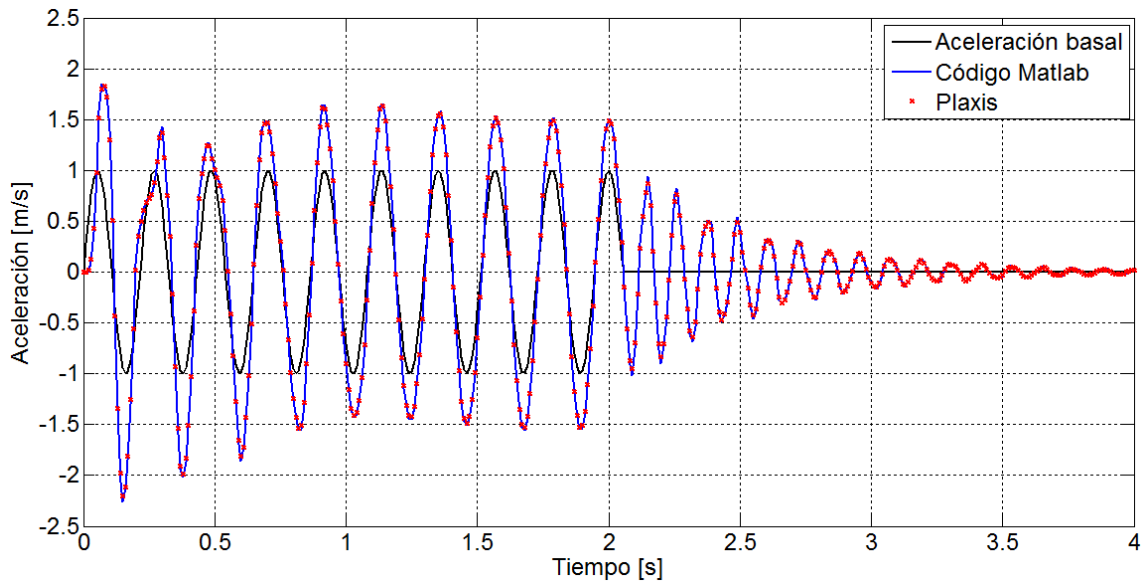


Figura 7.34: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes. Razón de amortiguamiento del 2 %.

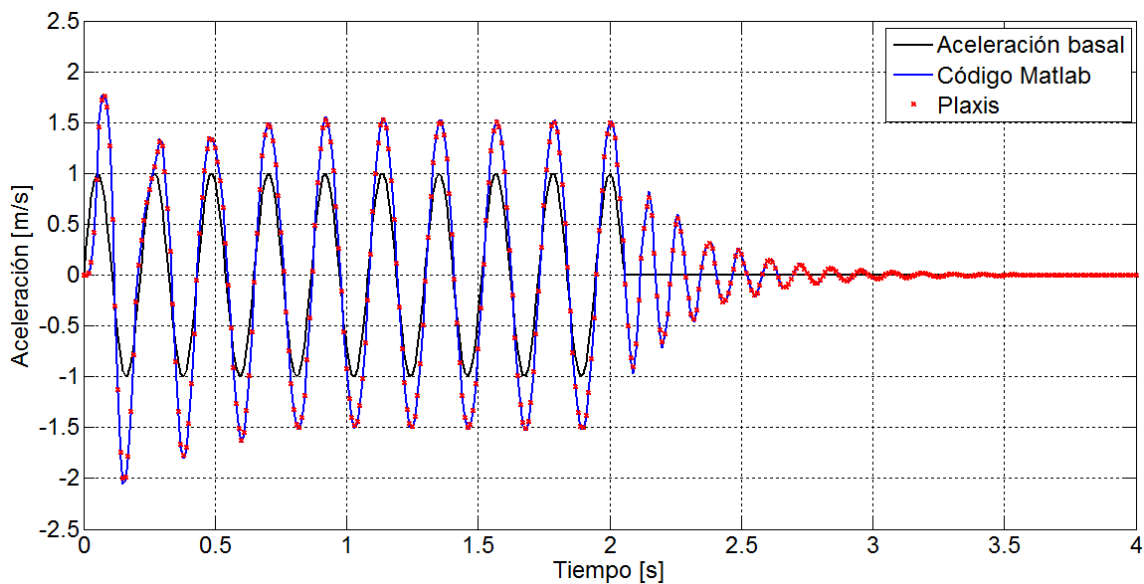


Figura 7.35: Aceleración horizontal en superficie. Comparación entre el código de Matlab y Plaxis. Bordes absorbentes. Razón de amortiguamiento del 5 %.

Como se puede apreciar, la solución de ambos programas se ajusta de manera exacta, con lo que se valida la implementación del amortiguamiento de Rayleigh. En cuanto al nivel de atenuación de la aceleración, este es mayor en el caso de $\xi = 5\%$, como era esperable.

MODELACIÓN DE LA RESPUESTA SÍSMICA DEL SUELO EN EL CENTRO DE VIÑA DEL MAR

8.1. Introducción

En el presente capítulo se utiliza el código de elementos finitos desarrollado, para modelar la respuesta sísmica de un depósito de suelo ubicado en el centro de Viña del Mar. El sitio modelado se encuentra en la intersección de las calles Viana y Traslaviña (ver Figura 8.1), que corresponde a la ubicación del edificio Cruciani. La caracterización del suelo se realiza en base a un estudio de mecánica de suelos que incluye un sondaje STP y la clasificación del suelo, y un estudio geofísico consistente en dos perfiles sísmicos, donde se ha utilizado el método de refracción por microtemores (ReMi). El sismo utilizado para la modelación corresponde al terremoto del Maule del 2010 de magnitud 8.8 M_w . La existencia de un registro en roca de este sismo en Valparaíso (estación UTFSM) permite estimar la aceleración en la base del depósito en estudio.

En el capítulo se muestra que la elección del ancho del modelo, así como la elección

de las frecuencias que definen el amortiguamiento de Rayleigh, tienen una influencia importante en la respuesta obtenida en la superficie del depósito. Debido a esto, se realiza un proceso de calibración del modelo, basado en la respuesta obtenida mediante el programa de propagación unidimensional de onda, EERA.

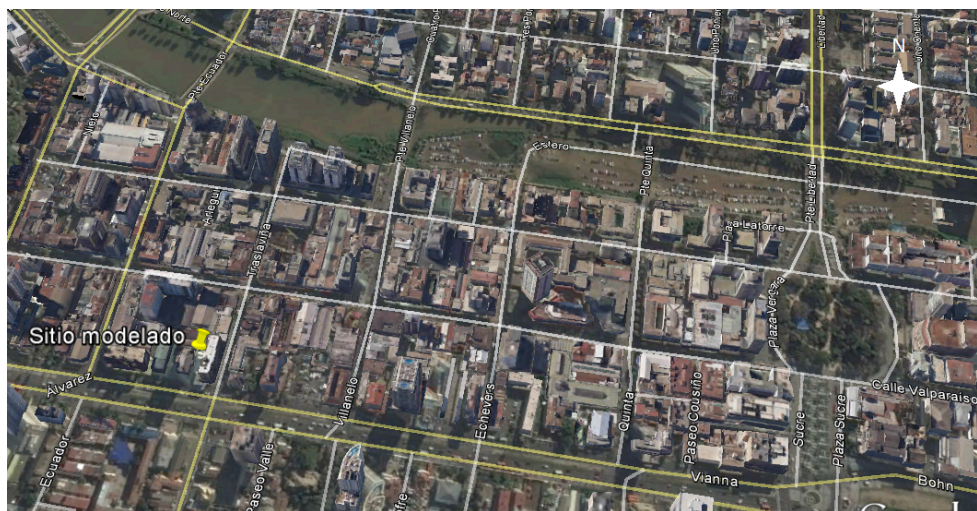


Figura 8.1: Sitio modelado en el centro de Viña del Mar.

La respuesta sísmica en la superficie del depósito es determinada utilizando los dos modelos implementados en el código (modelo lineal-elástico y modelo no lineal Mohr-Coulomb). Como punto de comparación se utiliza la respuesta no lineal obtenida mediante el método lineal equivalente a través del programa EERA. Finalmente, se obtienen los espectros de respuesta en superficie y estos son comparados con el espectro elástico de la norma de diseño sísmico de edificios.

8.2. Caracterización del subsuelo

La campaña de exploración geotécnica (Petersen, 2001) consistió en la ejecución de un sondaje SPT profundo de 34 [m] más tres sondajes de cono dinámico de hasta 10 [m] de profundidad cada uno, excavación de calicatas y ensayos de clasificación completa de todos los estratos. Estos sondajes se muestran en la Figura 8.2.

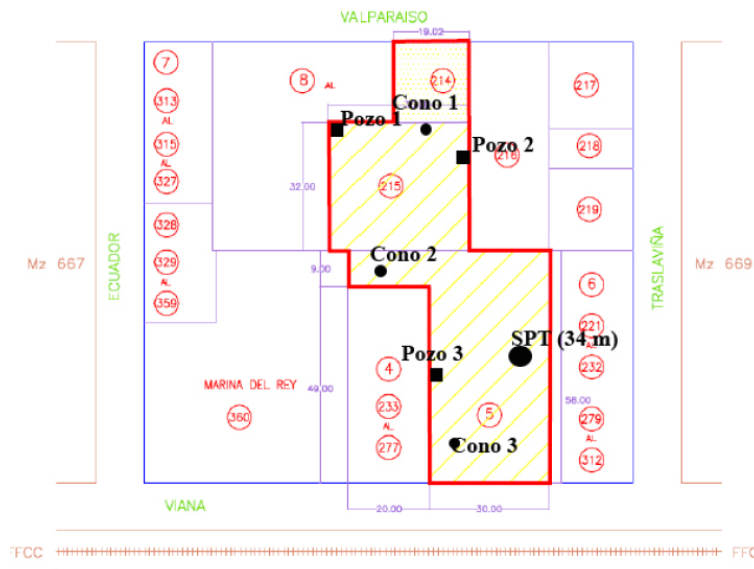


Figura 8.2: Ubicación de los sondajes de exploración del subsuelo (Petersen, 2001).

La estratigrafía general del terreno detectada en la exploración, a partir de la superficie del sitio en el punto del sondaje SPT, es la siguiente:

<i>Horizonte</i>	<i>Desde [m]</i>	<i>Hasta [m]</i>	<i>Espesor [m]</i>
H1	0	2	2
H2	2	4	2
H3	4	8,5	4,5
H4	8,5	11	2,5
H5	11	14,5	3,5
H6	14,5	17,5	3
H7	17,5	19,3	1,8
H8	19,3	22,32	3,02
Roca	22,32	-	-

Tabla 8.1: Estratigrafía del depósito.

El sondaje SPT, regulado por la norma ASTM D-1586, consiste en la hinca a golpes de un conjunto de barras de acero por medio de una masa de 63,5 [Kgf] de peso cayendo desde 76 [cm] de altura repetidas veces. En este sondaje las barras terminan en un cilindro cortante hueco llamado cuchara normal o muestrador Terzaghi, el cual sirve para obtener muestras de suelo clasificables metro a metro o metro y medio a metro y medio de penetración del conjunto, permitiendo la medición de la napa de agua y la obtención del número N o índice de penetración estándar, consistente en el registro del número de golpes en tramos de 30 [cm] de penetración, registro relacionado directamente con la compacidad y resistencia del suelo granular atravesado (Petersen, 2001). A partir de este ensayo se obtiene el número $(N1)_{60}$ corresponde al número de golpes SPT, N , corregido por efecto de la presión de confinamiento y por la eficiencia energética del equipo. La información obtenida por horizonte se resume en la Tabla 8.2, donde además se incluye el límite líquido (LL), índice de plasticidad (IP) y clasificación USCS del suelo.

<i>Horizonte</i>	LL [%]	IP [%]	N [golpes/30 cm]	$(N1)_{60}$ [golpes/30 cm]	<i>USCS</i>
H1	38	16	16	17	SC(CL)
H2	42	20	17	16	CL
H3	-	-	33 a 46	28 a 36	SW-SM
H4	25	5	42 a 43	29 a 31	SM y SC
H5	-	-	74 a 104	49 a 66	SM(ML)
H6	-	-	36 a 43	22 a 25	SP
H7	-	-	45 a >100	26 a >60	SM(ML)
H8	26	6	>100	>60	SM y SC

Tabla 8.2: Características del suelo.

Además, la exploración detectó la napa de agua libre a 3,51 [m] de profundidad.

Por otro lado, existe un estudio geofísico (Taiba, 2012), consistente en dos perfiles sísmicos de medición de onda de corte V_s , mediante el método de refracción de microtemores, ReMi. El método ReMi es un método híbrido (combina fuentes activas y pasivas) a través del cual se obtiene una curva de dispersión, que mediante inversión, posibilita la obtención de un perfil unidimensional de la velocidad de onda de corte en función de la profundidad de investigación alcanzada.

En la Figura 8.3 se muestra la ubicación de los perfiles en el sitio estudiado. Cada perfil consistió en un arreglo de 24 geófonos. En rojo se ilustra el perfil sísmico N°1, de 39,1 [m] de largo y en azul el perfil sísmico N°2, de 115 [m] de largo. Se señalan además las fuentes activas, que están distanciadas a 5 [m] de los respectivos perfiles.

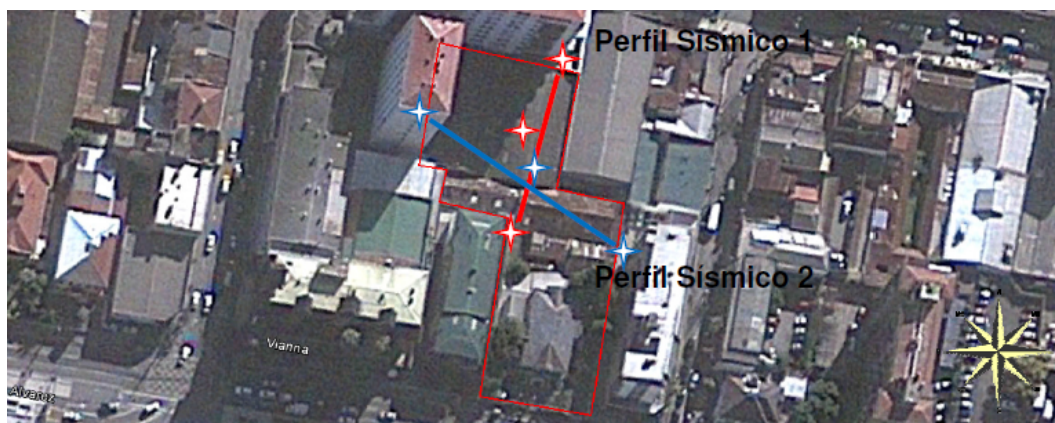


Figura 8.3: Localización aproximada de los perfiles sísmicos 1 y 2, y sus fuentes activas (Taiba, 2012).

Los resultados obtenidos para los perfiles sísmicos 1 y 2 se resumen en la Tabla 8.3.

<i>Desde [m]</i>	<i>Hasta [m]</i>	<i>V_s Perfil 1 [m/s]</i>	<i>V_s Perfil 2 [m/s]</i>
0	3	180	158
3	11	215	210
11	14,5	480	413
14,5	19,5	423	335
19,5	40	1464	1299

Tabla 8.3: Velocidades de onda de corte para los perfiles 1 y 2.

8.3. Estratigrafía y propiedades del modelo

8.3.1. Estratigrafía del modelo

Basado en la información descrita en la sección anterior, se propone una asignación promedio de velocidad de onda de corte a cada horizonte según la Tabla 8.4.

A partir de esta tabla se propone una simplificación de la estratigrafía para efectos de modelación, que reduce el perfil a 4 estratos, como se muestra en la Tabla 8.5 y se esquematiza en la Figura 8.4.

<i>Horizonte</i>	V_s [m/s]
H1	169
H2	169
H3	212,5
H4	212,5
H5	446,5
H6	379
H7	379
H8	379
Roca	1381,5

Tabla 8.4: Velocidades de onda de corte promedio por estrato.

<i>Estrato</i>	<i>Desde</i> [m]	<i>Hasta</i> [m]	<i>Espesor</i> [m]	V_s [m]	$(N1)_{60}$	<i>Tipo</i>
E1	0	4	4	169	16 a 17	Arcilla
E2	4	11	7	212,5	28 a 31	Arena
E3	11	14,5	3,5	446,5	49 a 66	Arena
E4	14,5	22,32	7,82	379	26 a >60	Arena

Tabla 8.5: Estratigrafía utilizada en la modelación

Se ha decidido incluir los horizontes 1 y 2 en un solo estrato definido como arcilla a pesar de que el horizonte 1 es en estricto rigor una arena arcillosa. Esta aproximación resulta válida si se toma en cuenta que según el informe de mecánica de suelos (Petersen, 2001) este horizonte contiene un 49% de finos. Además, se ha considerado el nivel freático a 4 [m] de profundidad, para hacerlo coincidir con los estratos y de esta manera no generar una excesiva cantidad de elementos al momento de realizar el análisis.

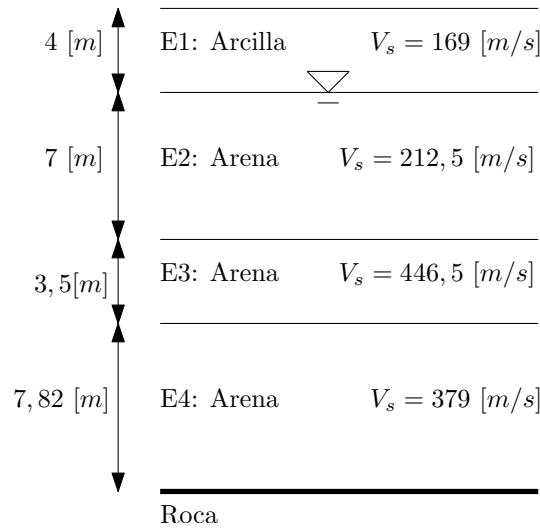


Figura 8.4: Estratigrafía usada en el modelo.

8.3.2. Propiedades del modelo

8.3.2.1. Peso específico

Dado que en el informe de mecánica de suelos (Petersen, 2001) no se determinó el peso específico de cada horizonte, se recurre a los valores de referencia que se muestran en la Tabla 8.6, tanto para el peso específico natural (sobre el nivel freático), γ_n , como para el peso específico saturado (bajo el nivel freático), γ_{sat} .

A partir de esta tabla se asignan valores promedio a cada estrato considerando el tipo de suelo presente. Esta asignación se muestra en la Tabla 8.7.

<i>Tipo de suelo</i>	γ_n [kN/m^3]	γ_{sat} [kN/m^3]
GP	17,5-20,5	19,5-22,0
GW	17,5-22,0	19,5-23,5
GM	16,0-20,5	19,5-22,0
GC	16,0-20,5	19,5-22,0
SP	15,0-19,5	19,0-21,0
SW	15,0-21,0	19,0-23,0
SM	12,5-21,0	17,5-22,0
SC	13,5-20,5	17,5-21,0
ML	11,5-17,5	12,5-20,5
MH	11,5-17,5	11,5-20,5
CL	12,5-17,5	11,5-20,5
CH	12,5-17,5	11,0-19,5

Tabla 8.6: Valores típicos de peso específico para diferentes tipos de suelo (Coduto, 2001).

<i>Estrato</i>	γ_n [kN/m^3]	γ_{sat} [kN/m^3]
E1	16	18
E2	17	20
E3	16	18
E4	16	19

Tabla 8.7: Pesos específicos asignados a cada estrato.

8.3.2.2. Cohesión, ángulo de fricción, ángulo de dilatación

En el caso del estrato *E1* compuesto por arcilla, es posible relacionar el $(N1)_{60}$ con su consistencia de acuerdo a la Tabla 8.8.

<i>Consistencia</i>	$(N1)_{60}$
Muy blanda	0 a 2
Blanda	2 a 4
Media	4 a 8
Firme	8 a 15
Muy firme	15 a 30
Dura	>30

Tabla 8.8: Determinación de la consistencia de arcillas según Terzaghi y Peck, 1948 (Sivakugan & Das, 2010).

De aquí se concluye que el suelo posee una consistencia muy firme (ya que $16 < (N1)_{60} < 17$). De esta forma es posible estimar valores para las propiedades efectivas c' y ϕ' siguiendo la Tabla 8.9.

<i>Consistencia</i>	c' [kN/m^2]	ϕ' [$^\circ$]
Blanda	0	25-30
Media	5-10	25-30
Firme	10-15	25-30

Tabla 8.9: Valores de referencia de las propiedades efectivas de suelos cohesivos de mediana plasticidad (Committe for Waterfront Structures, Harbours and Waterways, 2012).

Dado que la consistencia del suelo es muy firme, se opta por utilizar el mayor valor de cohesión de la tabla ($15[kN/m^2]$), mientras que en el caso del ángulo de fricción se utiliza un valor promedio. El ángulo de dilatación se estima como nulo para arcillas.

En el caso de los estratos $E2$, $E3$ y $E4$, compuestos de arenas, se utiliza la fórmula empírica propuesta por Hatanaka & Uchida (1996) y ajustada al 60 % de eficiencia por Mayne (2001) (de acuerdo a Tan et al., 2003), que entrega una correlación directa entre el valor de $(N1)_{60}$ y ϕ' para arenas:

$$\phi' = \sqrt{15,4(N1)_{60}} + 20^\circ \quad (8.3.1)$$

La asignación de esta propiedad se determina en base al valor $(N1)_{60}$ promedio de cada estrato.

Por otro lado, el ángulo de dilatancia, ψ' , se estima mediante la fórmula empírica para suelos granulares

$$\psi' = \phi' - 30^\circ \quad (8.3.2)$$

y la cohesión puede ser estimada como nula en arenas.

<i>Estrato</i>	c' [kN/m ²]	ϕ' [°]	ψ' [°]
E1	15	28	0
E2	0	41	11
E3	0	50	20
E4	0	45	15

Tabla 8.10: Propiedades plásticas del suelo.

8.3.2.3. Módulo de Poisson y módulo elástico

El módulo de Poisson efectivo de cada estrato se estima en base a la ecuación 8.3.3 propuesta por Duncan & Bursey (2007) que aplica tanto a arenas como arcillas:

$$\nu' = \frac{1 - \text{sen}(\phi')}{2 - \text{sen}(\phi')} \quad (8.3.3)$$

A partir del peso específico total, γ_t , y la velocidad de onda de corte, V_s , se obtiene el módulo de corte, G , y a partir de este y el módulo de Poisson efectivo, ν' , se determina el módulo de elasticidad efectivo, E' , de cada estrato. La información se resume en la Tabla 8.11.

<i>Estrato</i>	ν'	G [kN/m ²]	E' [kN/m ²]
E1	0,35	46630,20	125901,55
E2	0,25	92155,61	230389,03
E3	0,19	366175,56	871497,84
E4	0,23	278487,65	685079,63

Tabla 8.11: Propiedades elásticas del suelo.

8.3.2.4. Índice de vacíos

Para poder modelar la condición no drenada se requiere como input el índice de vacíos, e_o , del suelo. Para estimar este parámetro, se recurre a valores típicos propuestos por Fredlund & Rahardjo (1993):

<i>Tipo de suelo</i>	e_o máximo	e_o mínimo
<i>Arcilla</i>	1,8	0,25
<i>Arena</i>	0,95	0,2

Tabla 8.12: Índice de vacíos típicos según Fredlund & Rahardjo (1993)

A partir de esta tabla se selecciona un valor promedio tanto para el estrato de arcilla como para los estratos de arena. Los valores utilizados en cada estrato se indican en la Tabla 8.13.

<i>Estrato</i>	e_o
E1	1
E2	0,6
E3	0,6
E4	0,6

Tabla 8.13: Índice de vacíos utilizados en la modelación.

8.4. Registro sísmico

El sismo seleccionado para el análisis es el terremoto del Maule del 27 de Febrero del 2010. Este terremoto de subducción interplaca tipo thrust, fue el primer terremoto de magnitud de momento $M_W = 8.8$ registrado por una red de acelerómetros a nivel mundial. Se obtuvieron acelerogramas a nivel del suelo en la mayoría de las ciudades más importantes dañadas por el terremoto, cubriendo sus 500 [Km] de longitud de ruptura, a través de 32 estaciones acelerográficas (Saragoni & Ruiz, 2012). El epicentro fue estimado a 43 [Km] al sur oeste de la localidad de Cobquecura (VIII Región).

En Valparaíso existe un registro en roca aflorante, tomado desde la estación que se encuentra en la Universidad Técnica Federico Santa María, cuya ubicación se muestra en la Figura 8.5. El registro de aceleración se muestra en la Figura 8.6. Este corresponde a la dirección E-O, que es la componente que presentó un mayor peak de aceleración (0,299 [g]). El registro ha sido procesado con un filtro Butterworth de orden 4, pasa banda 0,01 – 25 [Hz] y corrección lineal de la línea de base.



Figura 8.5: Ubicación de la estación Valparaíso UTFSM.

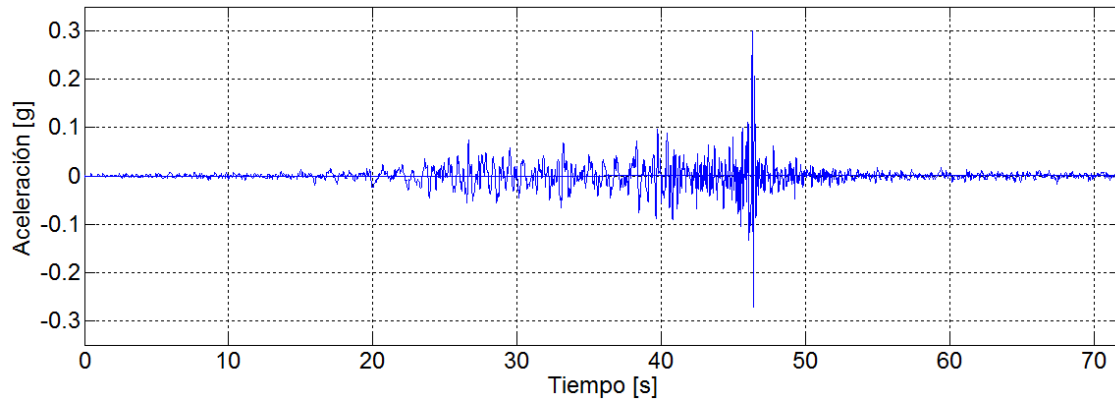


Figura 8.6: Registro sísmico estación UTFSM, dirección E-O.

Dado que el registro se obtuvo de roca aflorante, este contiene cierta amplificación debido a la propagación de la onda a través del estrato rocoso y en consecuencia difiere del registro que debe imponerse en la base del depósito de suelo del centro de Viña del Mar (ver esquema ilustrado en la Figura 1.9). Tal como lo mencionan Mejía & Dawson (2006), un procedimiento comúnmente utilizado para obtener una estimación del registro en la base a partir del registro en roca aflorante consiste en realizar la deconvolución de este registro, usando para esto un programa de propagación unidimensional de onda.

En el presente estudio se utiliza el programa EERA para realizar la deconvolución del registro de la estación UTFSM y así poder especificar el registro en los grados de libertad horizontales de la base del modelo de elementos finitos (análisis de base rígida). Dado que el movimiento en la base incorpora las ondas que se propagan hacia abajo a través del suelo (notar en la Figura 1.9 que el movimiento en la roca basal es la superposición de las ondas viajando hacia arriba y hacia abajo), el comportamiento no lineal del suelo debe ser incluido en el análisis unidimensional (Mejía & Dawson, 2006). Para esto se utiliza el método lineal equivalente, y en consecuencia es necesario definir las curvas de degradación de la rigidez y de razón de amortiguamiento para cada estrato. En este caso se utilizan las siguientes curvas experimentales (ver Figura 8.7):

- Arcilla (estrato 1): Curva de degradación de la rigidez propuesta por Seed & Sun (1989, de acuerdo a Bardet et al., 2000) y curva de razón de amortiguamiento propuesta por Idriss (1990, de acuerdo a Bardet et al., 2000).

- Arena (estratos 2, 3 y 4): Curvas de degradación de la rigidez y de razón de amortiguamiento propuestas por Ishibashi & Zhang (1993, de acuerdo a Guerreiro et al., 2012).

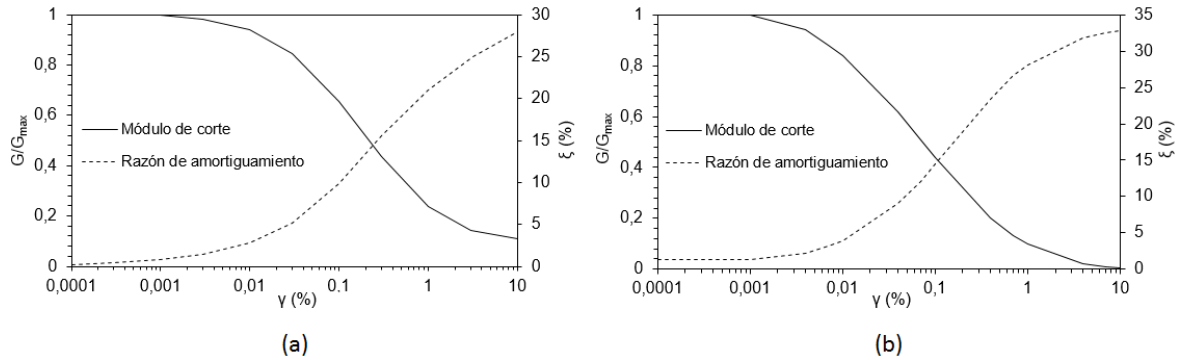


Figura 8.7: Curvas de degradación de la rigidez y razón de amortiguamiento utilizadas para (a) el estrato de arcilla (E1) y para (b) los estratos de arena (E2, E3 y E4).

De este modo, en el programa EERA, el registro original (estación UTFSM) es ingresado como input a nivel del estrato rocoso, definiéndolo como *outcrop*, para establecer que el movimiento pertenece al afloramiento rocoso. Luego de realizar el análisis sísmico, considerando la no linealidad del suelo, es posible obtener como output el registro en la base de la roca definido como *inside* en EERA. Este registro se muestra en la Figura 8.8, y presenta un peak de aceleración de 0,227 [g], inferior al del registro en roca aflorante.

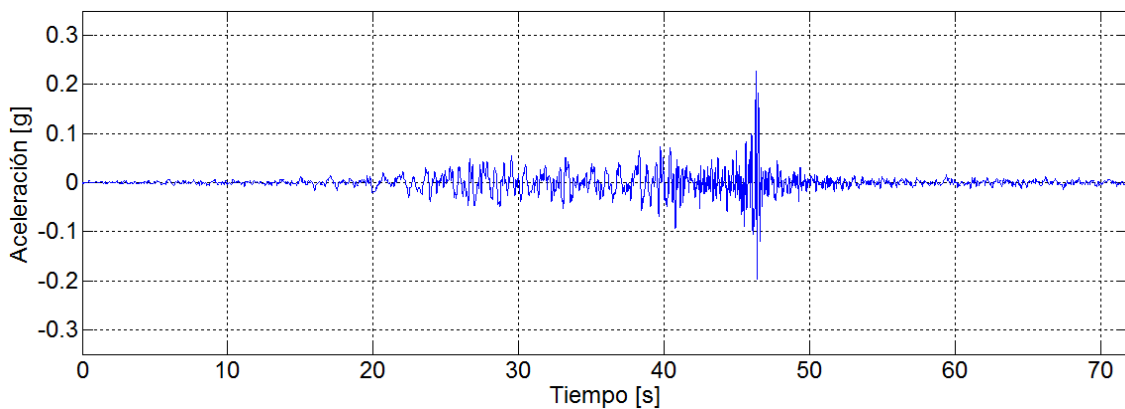


Figura 8.8: Registro sísmico en la base del modelo.

8.5. Calibración de la malla de elementos finitos y de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh

Para llevar a cabo el análisis mediante el método de elementos finitos es necesario calibrar la malla de elementos para que esta logre reproducir de manera adecuada la respuesta de sitio. De la misma manera, es necesaria la calibración de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh, ya que tal como concluye Peña (2016), la selección de estos parámetros puede condicionar la forma del espectro de respuesta con un alto grado de sensibilidad.

En primer lugar se realiza la determinación del largo máximo que deben tener los elementos para representar de manera adecuada la propagación de onda. Dado que el uso de elementos muy grandes no reproduce de manera adecuada el paso de la onda entre los nodos y el uso de elementos muy pequeños se traduce en costos computacionales muy elevados, es necesario acotar el largo máximo del elemento. La Figura 8.9 muestra el espectro de Fourier del registro sísmico a aplicar en la base del modelo.

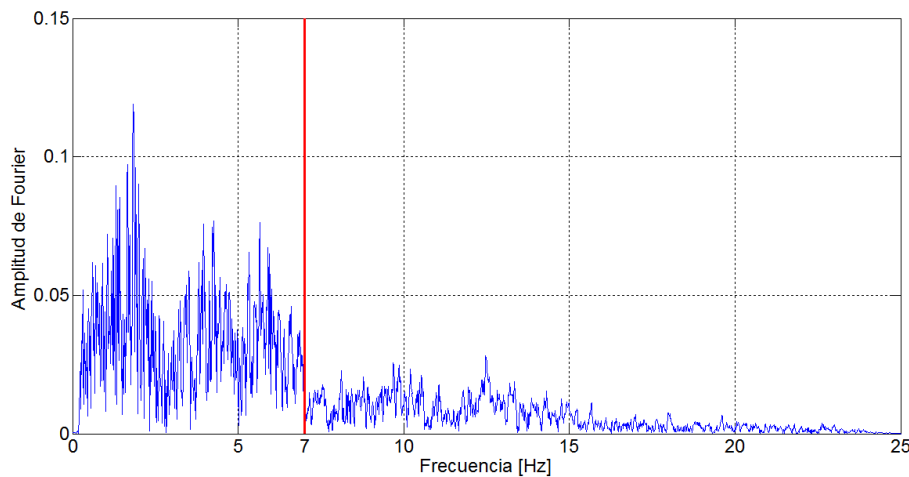


Figura 8.9: Espectro de Fourier del registro sísmico en la base del modelo.

Para determinar el largo máximo se sigue el criterio de Kuhlmeier & Lysmer (1973) y Lysmer et al. (1975) tratado en el Capítulo 4, Sección 4.5. En la figura se señala la frecuencia de 7 [Hz] que ha sido escogida para delimitar el intervalo de frecuencias que contiene una cantidad de energía relevante. Como velocidad de onda de corte se ha

escogido la menor de todos los estratos, para considerar el caso más desfavorable. De esta manera se llega a un largo máximo, Δl_{max} , acotado según

$$\Delta l_{max} \leq \left(\frac{V_s}{8f_{r_{max}}} \sim \frac{V_s}{5f_{r_{max}}} \right) = \left(\frac{169}{8 \cdot 7} \sim \frac{169}{5 \cdot 7} \right) = (3,02 [m] \sim 4,83 [m]) \quad (8.5.4)$$

Por otro lado, se debe definir el ancho que tendrá el modelo. La idea es extender el dominio lo suficiente para minimizar la influencia de los bordes en la respuesta, ya que esta se determina en la zona central del modelo. Sin embargo, tal como lo mencionan Visone et al. (2008), no existen indicaciones claras en la literatura al respecto. Como consecuencia de esto, se pueden encontrar análisis similares al del presente estudio con anchos del modelo muy fluctuantes: Jara et al. (2015) y Peña (2016) utilizan una relación ancho/altura igual a 2, basados en un estudio de Sharahi (2010); Mancilla (2013) utiliza una relación igual a 4,48; Amorsi et al. (2007), como lo mencionan Visone et al. (2008), utilizan una relación igual a 8 para obtener resultados aceptables; Visone et al. (2008) utilizan una relación igual a 17 y Pinto (2012) igual a 17.65.

Debido a esto, y a que escoger una relación ancho/altura muy grande aumenta de manera considerable el costo computacional del análisis no lineal, en el presente estudio se realiza una calibración de esta relación, utilizando como criterio que el modelo pueda reproducir de manera adecuada la respuesta de sitio para el caso lineal-elástico, ya que para este caso existe la solución analítica entregada por la teoría de propagación unidimensional de onda (análisis en el dominio de la frecuencia que se puede realizar en el programa EERA). Esta calibración además sirve para ajustar los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh, siguiendo el criterio de Tsai et al. (2014), de ajustar el amortiguamiento de Rayleigh al del análisis en el dominio de la frecuencia, ya que en este último el amortiguamiento es independiente de la frecuencia, tal como ocurre en el comportamiento real de los suelos.

Para esto se utilizan 3 mallas diferentes, las cuales se describen en la Tabla 8.14 y se muestran en las Figuras 8.10, 8.11 y 8.12. Como se ve en la tabla estas mallas cumplen con el criterio de Lysmer et al. (1975) para el largo máximo del elemento. Utilizar el criterio más restrictivo hubiese significado aumentar considerablemente el número de elementos. Además, cualquier inexactitud que eventualmente se diera en la propagación de la onda bajo el criterio menos restrictivo, solo afectaría al primer estrato de suelo por ser el de menor velocidad de onda de corte y a las frecuencias cercanas a 7 [Hz]. De

este modo, se opta por mantener un equilibrio entre exactitud y costo computacional.

<i>Malla</i>	<i>Ancho [m]</i>	<i>Ancho/Altura</i>	<i>N° de elementos</i>	Δl_{max} [m]
1	45	2,01	436	3,21
2	100	4,48	640	4,69
3	190	8,51	1208	4,59

Tabla 8.14: Características de las diferentes mallas.

Cada modelo es sometido a un análisis dinámico y se obtiene la aceleración en superficie, al centro del dominio. El análisis tiene las siguientes características:

- Propiedades elásticas definidas en Sección 8.3.2, considerando nivel freático y análisis drenado.
- Sismo definido en la Figura 8.8, prescrito en los nodos de la base como desplazamiento.
- $\Delta t = 0,005$ que coincide con el muestreo del sismo, para así considerar toda la información de este. Esto equivale a 14402 pasos de carga (por lo tanto $pasos = 14402$).
- Bordes absorbentes a ambos lados, con coeficientes $C_1 = 1$ y $C_2 = 0,25$.
- Método de Newmark de aceleración promedio constante ($\gamma_N = 1/2$ y $\beta_N = 1/4$).
- Amortiguamiento de Rayleigh con razón de amortiguamiento $\xi = 4\%$ (valor de acuerdo a los criterios de Youssef et al. (2002) y Tsai et al. (2014) para pequeñas deformaciones).

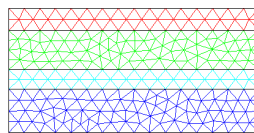


Figura 8.10: Malla 1. Ancho 45 [m].

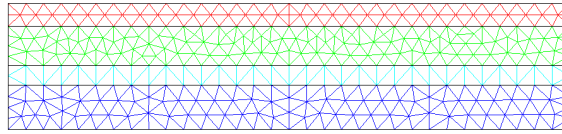


Figura 8.11: Malla 2. Ancho 100 [m].

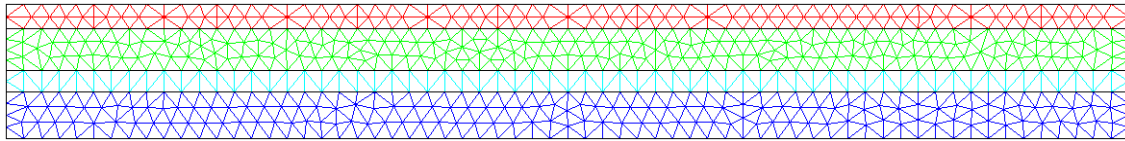


Figura 8.12: Malla 3. Ancho 190 [m].

Este mismo análisis (lineal elástico) se realiza en el programa EERA, considerando igualmente una razón de amortiguamiento $\xi = 4\%$ para todos los estratos.

Para determinar los parámetros α_R y β_R del amortiguamiento de Rayleigh es necesario definir las frecuencias angulares que condicionan la forma del amortiguamiento. Como punto de partida se considera el criterio de Tsai et al. (2014) para depósitos poco profundos (Capítulo 4, Sección 4.4). Esto quiere decir, tomar $w_m = 2\pi f_{r1}$ y $w_n = 5 \cdot 2\pi f_{r1}$, donde f_{r1} es la primera frecuencia natural del suelo (frecuencia fundamental), la cual, para este análisis se obtiene de EERA. La determinación de los parámetros se resume en la Tabla 8.15.

f_{r1} [Hz]	3,711
ω_m [rad/s]	23,32
ω_n [rad/s]	116,58
α_R	1,555
β_R	$5,718 \cdot 10^{-4}$

Tabla 8.15: Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 1.

Una vez obtenida la respuesta en superficie para cada malla, se determina la función de amplificación. Esta, como se vio en el Capítulo 1, corresponde al módulo de la función de transferencia, y puede determinarse como la razón entre el espectro de Fourier de la aceleración en superficie y el espectro de Fourier de la aceleración en la base. La función

de amplificación indica cómo cada frecuencia de sismo incidente es amplificada en la superficie y permite comparar de manera adecuada las respuestas obtenidas usando las distintas mallas con la respuesta que entrega EERA. Esta comparación se muestra en la Figura 8.13.

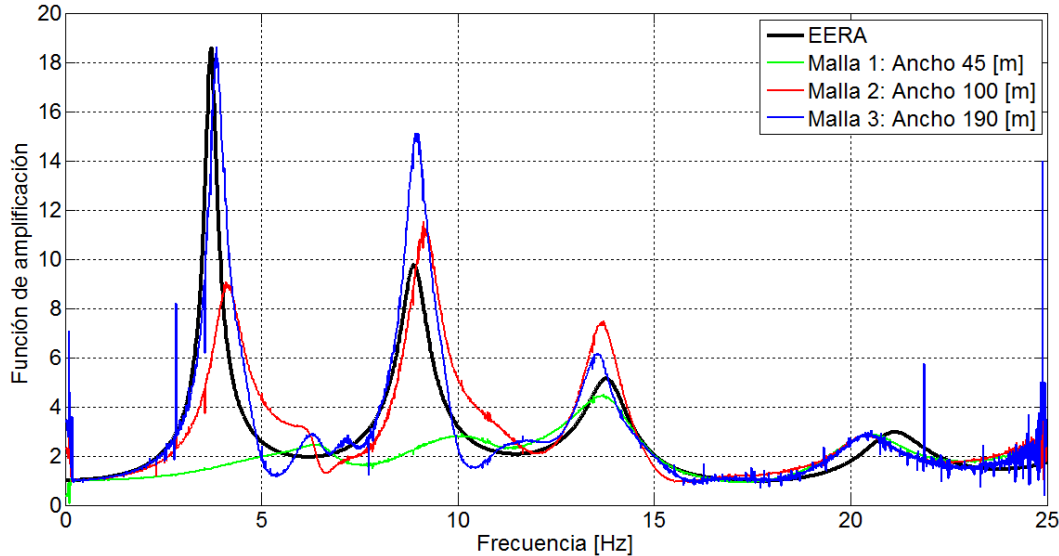


Figura 8.13: Comparación de la función de amplificación de EERA con las diferentes mallas de elementos finitos. Amortiguamiento de Rayleigh, $\xi = 4\%$, utilizando frecuencias f_{r1} y $5f_{r1}$.

Como se aprecia, existe una diferencia sustancial entre los resultados obtenidos mediante las diferentes mallas, lo que reafirma la necesidad de una adecuada calibración del ancho del dominio. En este caso, la malla 3 es la única que se ajusta de manera aproximada a la amplificación que sufre el sismo en la primera frecuencia natural del suelo. Con respecto a la segunda frecuencia natural, se ajusta a esta en cuanto a posición, pero sobrestima de manera importante la amplificación que en dicha frecuencia ocurre. En el caso de la tercera y cuarta frecuencia natural los resultados son peores en cuanto a la posición del peak. Esto es esperable, considerando que a medida que las frecuencias son más altas el modelo de elementos finitos es menos capaz de reproducir la propagación de onda.

Tomando en cuenta lo anterior y siguiendo el criterio propuesto por Visone et al. (2008), se considerará como adecuada una respuesta que pueda reproducir de manera aproximada la amplificación en la primera y segunda frecuencia natural del suelo.

Siguiendo este criterio, resulta necesario ajustar los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh para que la malla 3 mejore la calidad de su respuesta en la segunda frecuencia natural del suelo. Para esto es necesario cambiar las frecuencias angulares que definen el amortiguamiento. En este nuevo caso, se utiliza $w_m = 2\pi f_{r1}$ y $w_n = 2\pi f_{r2}$, donde f_{r2} es la segunda frecuencia natural del suelo (selección de frecuencias utilizada también por Pinto, 2012). Cabe mencionar que tanto f_{r1} como f_{r2} son obtenidas de EERA. La determinación de los parámetros se resume en la Tabla 8.16 y los nuevos resultados obtenidos se muestran en la Figura 8.14.

f_{r1} [Hz]	3,711
f_{r2} [Hz]	8,890
ω_m [rad/s]	23,32
ω_n [rad/s]	55,86
α_R	1,316
β_R	$1,010 \cdot 10^{-3}$

Tabla 8.16: Determinación de los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh. Caso 2.

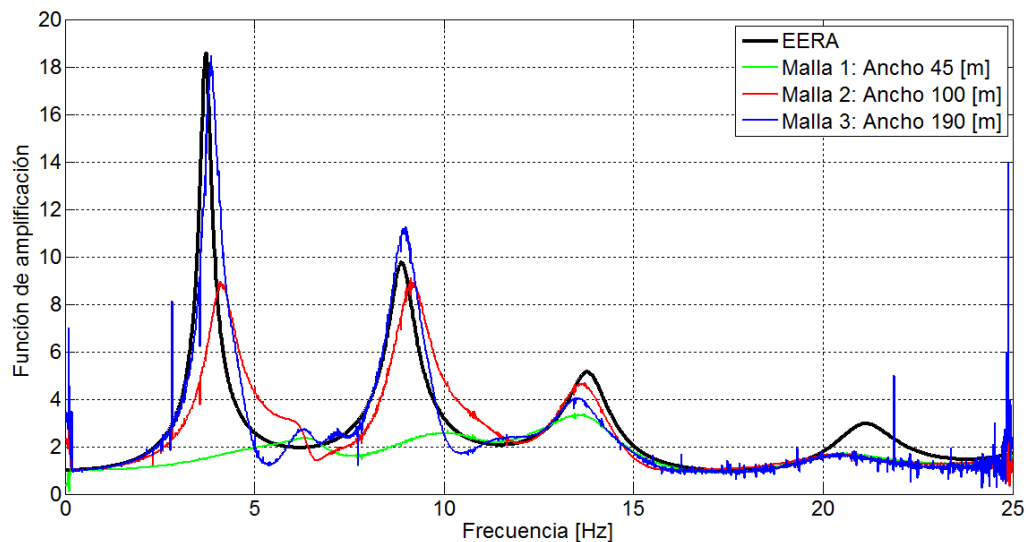


Figura 8.14: Comparación de la función de amplificación de EERA con las diferentes mallas de elementos finitos. Amortiguamiento de Rayleigh, $\xi = 4\%$, utilizando frecuencias f_{r1} y f_{r2} .

Como se puede ver en la figura, el cambio en los parámetros del amortiguamiento de Rayleigh permite un mejor ajuste de la malla 3 en la amplificación asociada a la segunda frecuencia natural del sistema. Si bien se sigue sobrestimando esta amplificación, la diferencia se redujo de manera considerable.

Considerando este segundo caso, en las figuras 8.15, 8.16 y 8.17 se han graficado las respuestas en el tiempo obtenidas utilizando las 3 mallas versus la respuesta obtenida en EERA.

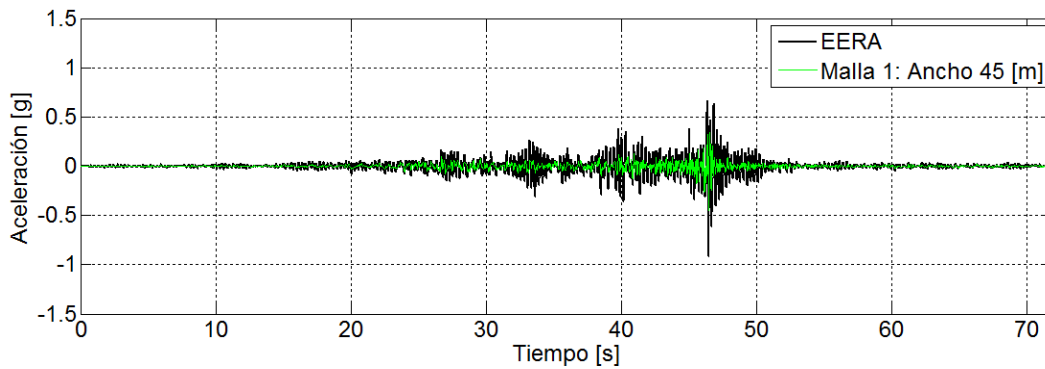


Figura 8.15: Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 1.

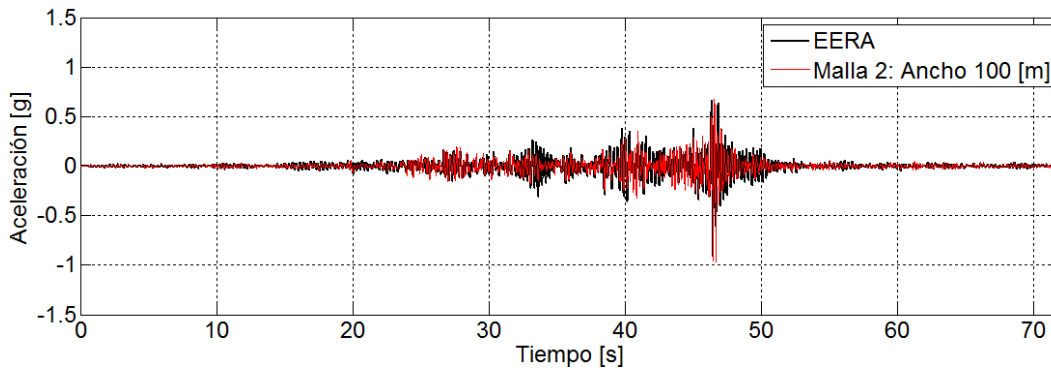


Figura 8.16: Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 2.

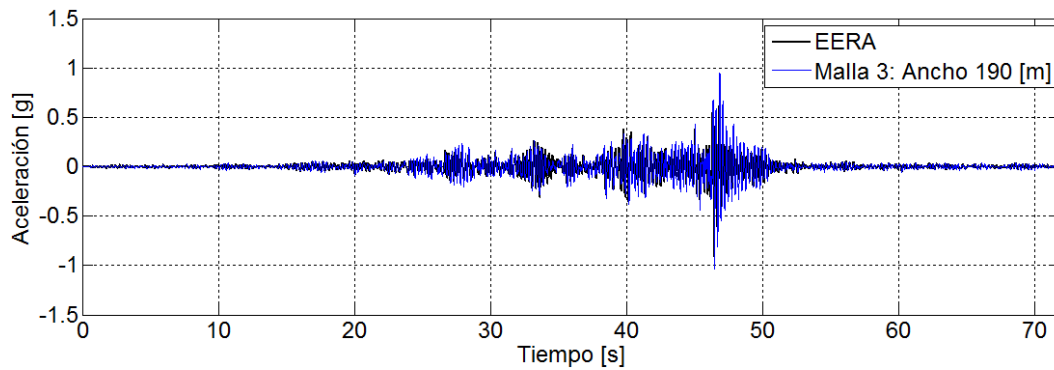


Figura 8.17: Aceleración en superficie. Comparación entre EERA y código Matlab con malla 3.

Como se verifica en las figuras, la respuesta que mejor se ajusta a la respuesta de EERA es la obtenida mediante la malla 3, mientras que el uso de la malla 1 induce diferencias significativas.

Una última comparación se realiza en las figuras 8.18 y 8.19, en las cuales las respuestas son comparadas a nivel de espectros elásticos de respuesta (espectro de aceleración y espectro de desplazamiento relativo, respectivamente). Para la generación de estos espectros se ha utilizado una razón de amortiguamiento igual a 5 %.

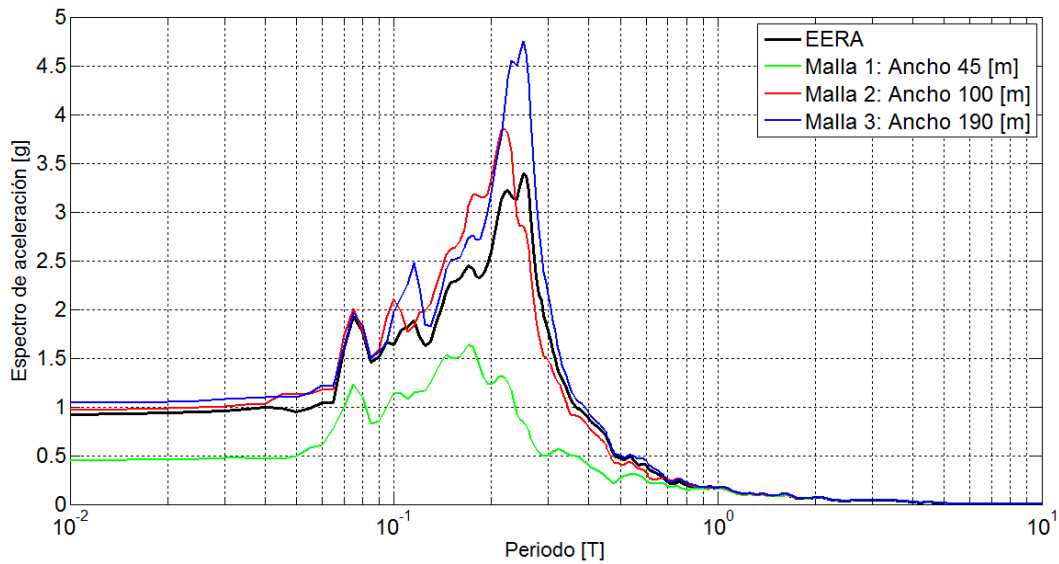


Figura 8.18: Espectro elástico de aceleración. 5% de amortiguamiento. Comparación entre EERA y código Matlab.

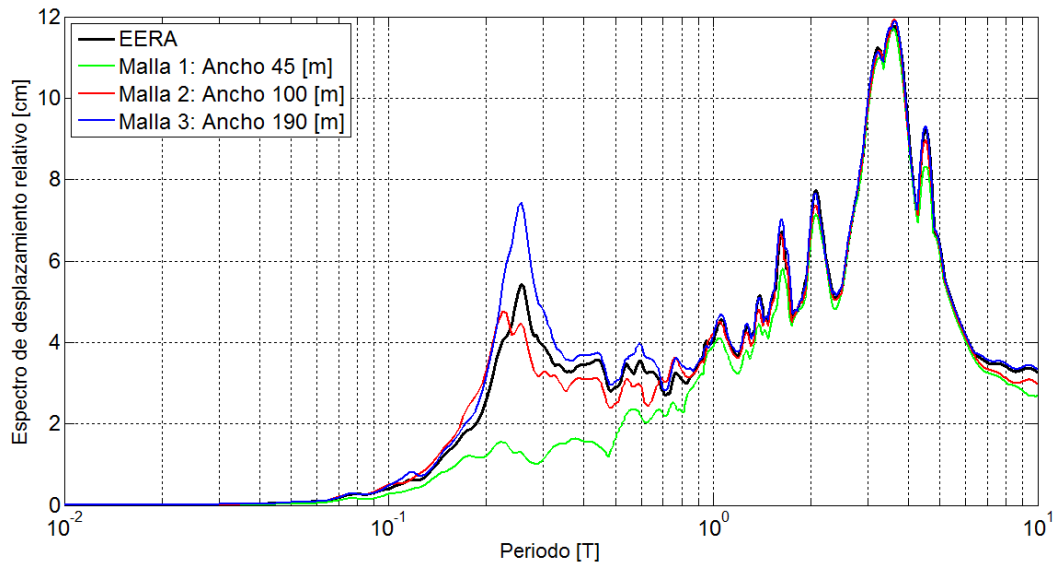


Figura 8.19: Espectro elástico de desplazamiento relativo. 5% de amortiguamiento. Comparación entre EERA y código Matlab.

Como se aprecia en las figuras, nuevamente se confirma que la malla 1 es la que tiene el peor desempeño. En el caso de la malla 3, esta se ajusta bastante bien a los espectros obtenidos en EERA, con excepción del rango de periodos que va aproximadamente entre 0,2 y 0,3 [s], asociado a estructuras de baja-mediana altura, en donde el uso de

la malla 3 genera una sobrestimación tanto de las aceleraciones como de los desplazamientos relativos. A pesar de esto, se selecciona esta malla para el análisis, ya que tomando en cuenta las distintas comparaciones, es la que mejor se ajusta a la respuesta unidimensional obtenida en EERA.

En resumen, como resultado del proceso de calibración, se selecciona la malla 3 (Figura 8.12) con amortiguamiento de Rayleigh de $\xi = 4\%$ determinado en base a las frecuencias f_{r1} y f_{r2} .

8.6. Determinación de la respuesta sísmica del suelo en el centro de Viña del Mar

A partir de la calibración realizada, en esta sección se determina la respuesta sísmica en la superficie del depósito. Para esto el suelo es modelado a través del modelo no lineal implementado en el código (modelo Mohr-Coulomb). Para efectos de comparación, adicionalmente se determina la respuesta utilizando el modelo lineal elástico.

La información de entrada con la que se llevó a cabo el análisis no lineal en el código está detallada en el Anexo A. Este análisis tiene las siguientes características:

- Propiedades resumidas en la Tabla 8.17, considerando condición no drenada bajo el nivel freático (estratos E2, E3 y E4). Como se muestra en la tabla, para estos estratos se considera $\psi = 0$, siguiendo la recomendación detallada en el Capítulo 5.
- Sismo definido en la Figura 8.8, prescrito en los nodos de la base como desplazamiento.
- $\Delta t = 0,005$
- Bordes absorbentes a ambos lados, con coeficientes $C_1 = 1$ y $C_2 = 0,25$.
- Método de Newmark de aceleración promedio constante ($\gamma_N = 1/2$ y $\beta_N = 1/4$).
- Amortiguamiento de Rayleigh con razón de amortiguamiento $\xi = 4\%$.
- Tolerancia $Tol = 10^{-5}$.

<i>Estrato</i>	E' [kN/m^2]	ν'	c' [kN/m^2]	ϕ' [°]	ψ' [°]	e_o	γ_n [kN/m^3]	γ_{sat} [kN/m^3]
E1	125901,55	0,35	15	28	0	-	16	-
E2	230389,03	0,25	0	41	0	0,6	-	20
E3	871497,84	0,19	0	50	0	0,6	-	18
E4	685079,63	0,23	0	45	0	0,6	-	19

Tabla 8.17: Propiedades utilizadas en la modelación de la respuesta sísmica.

En la Tabla 8.18 se indica el tiempo de cálculo que tomó realizar el análisis con cada modelo constitutivo, teniendo en cuenta que el computador utilizado fue un laptop de procesador Intel Core i7-4700MQ de 2,4 GHz y 8 GB de RAM.

<i>Modelo</i>	<i>Tiempo de cálculo [hrs]</i>
<i>Lineal – elástico</i>	2,521
<i>Mohr – Coulomb</i>	6,534

Tabla 8.18: Tiempo de cálculo en función del modelo constitutivo utilizado.

Como punto de comparación se lleva a cabo además la determinación de la respuesta en superficie mediante el método lineal equivalente en EERA, utilizando para esto las curvas de degradación de la rigidez y razón de amortiguamiento de la Figura 8.7. Si bien el método es aproximado, este toma en cuenta las no linealidades presentes en el suelo al ser sometido a una sollicitación cíclica, y por lo tanto es adecuado para generar una primera estimación de la respuesta sísmica del suelo.

En la Figura 8.20 se muestra la comparación entre los registros de aceleración obtenidos en superficie mediante el código y mediante el método lineal equivalente.

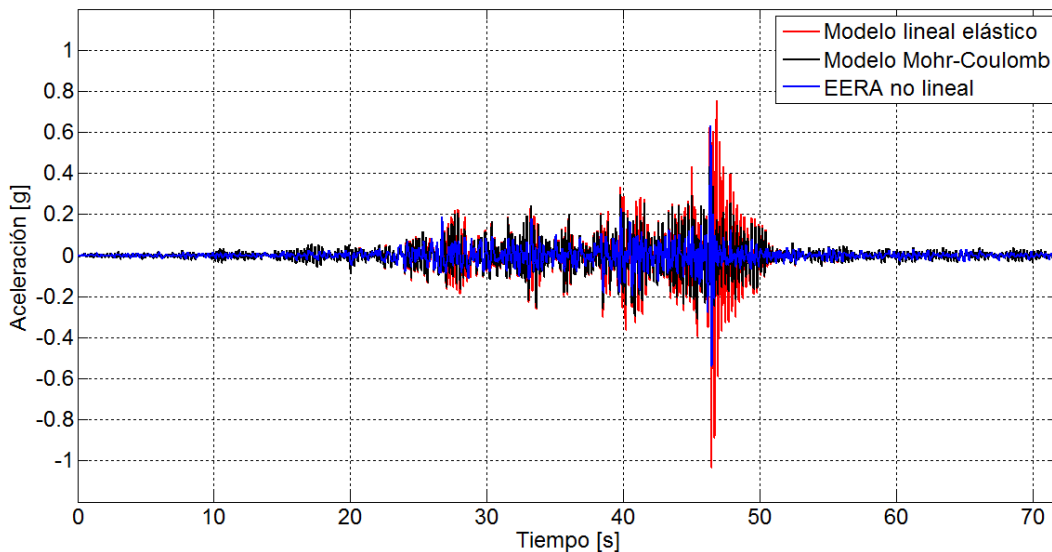


Figura 8.20: Registros de aceleración obtenidos en superficie mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente.

En la tabla 8.19, se comparan además los peaks de aceleración obtenidos en los dife-

rentes análisis.

<i>Modelo</i>	<i>Peak de aceleración [g]</i>
<i>Lineal – elástico</i>	1,036
<i>Mohr – Coulomb</i>	0,438
<i>EERA no lineal</i>	0,541

Tabla 8.19: Comparación de los peaks de aceleración obtenidos mediante los diferentes análisis.

Como se observa en la Figura 8.20, la modelación del suelo a través del modelo Mohr-Coulomb tiene como efecto una reducción de las aceleraciones obtenidas en superficie con respecto al modelo lineal elástico. Esta reducción es más importante a medida que la aceleración es mayor, como queda en evidencia en la Tabla 8.19, en donde se aprecia que existe una reducción cercana al 60% en el peak de aceleración. Por otro lado, si se comparan estos dos modelos con el análisis lineal equivalente, se aprecia que en general, a lo largo del tiempo, hay una sobrestimación de la aceleración en el caso de los análisis llevados a cabo a través del código, sin embargo, el modelo Mohr-Coulomb se ajusta mucho mejor a los resultados de EERA. En efecto, puede verse en la Tabla 8.19, que los peaks de aceleración obtenidos solo difieren en 0,1 [g].

En la Figura 8.21 se muestra la comparación entre los espectros elásticos de aceleración obtenidos mediante el código y mediante el método lineal equivalente. Como se puede apreciar, en términos generales la respuesta obtenida a través del modelo Mohr-Coulomb se ajusta bastante bien a la obtenida a través del método lineal equivalente. Por otro lado, el modelo lineal elástico genera una sobrestimación considerable del espectro de aceleración, con respecto al método lineal equivalente, en todo el rango de periodos que llega hasta aproximadamente los 0,3 [s]. En el rango de periodos entre los 0,3 y 0,5 [s], sin embargo, el modelo Mohr-Coulomb tiene un ajuste menor. Para periodos mayores, asociados a estructuras de mayor altura, las diferencias entre los 3 espectros se reduce considerablemente.

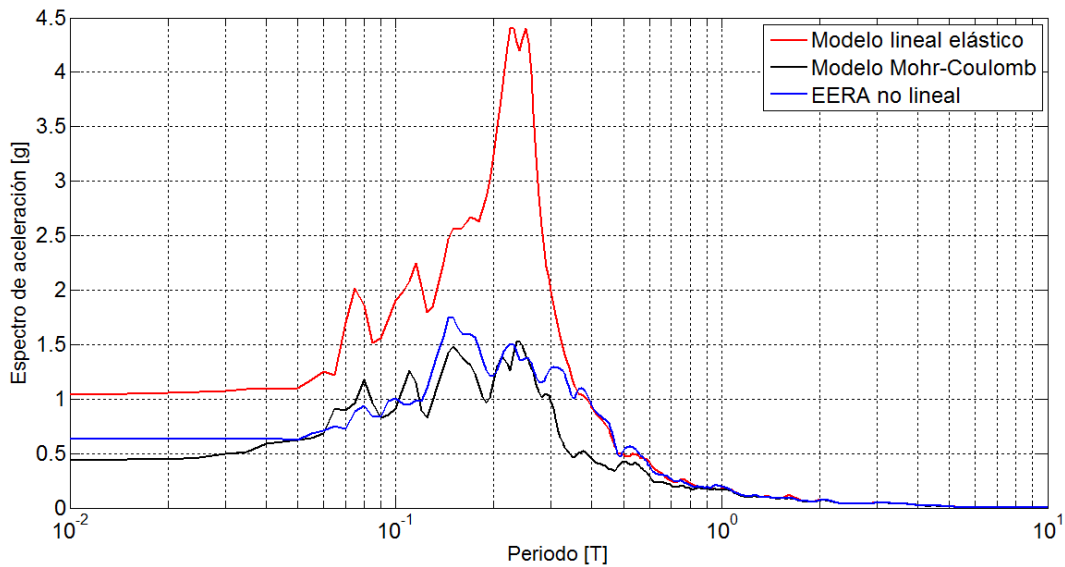


Figura 8.21: Espectros elásticos de aceleración obtenidos mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente. 5% de amortiguamiento.

En la Figura 8.22 se muestra la comparación entre los espectros elásticos de desplazamiento relativo obtenidos. Similar a lo que ocurre en el caso del espectro de aceleración, el modelo lineal elástico sobrestima de manera considerable el espectro obtenido mediante el método lineal equivalente hasta los 0,3 [s], sin embargo entre 0,3 y 0,8 [s] el ajuste del modelo Mohr-Coulomb es menor. Nuevamente, para periodos mayores, las diferencias entre los 3 espectros se reduce considerablemente.

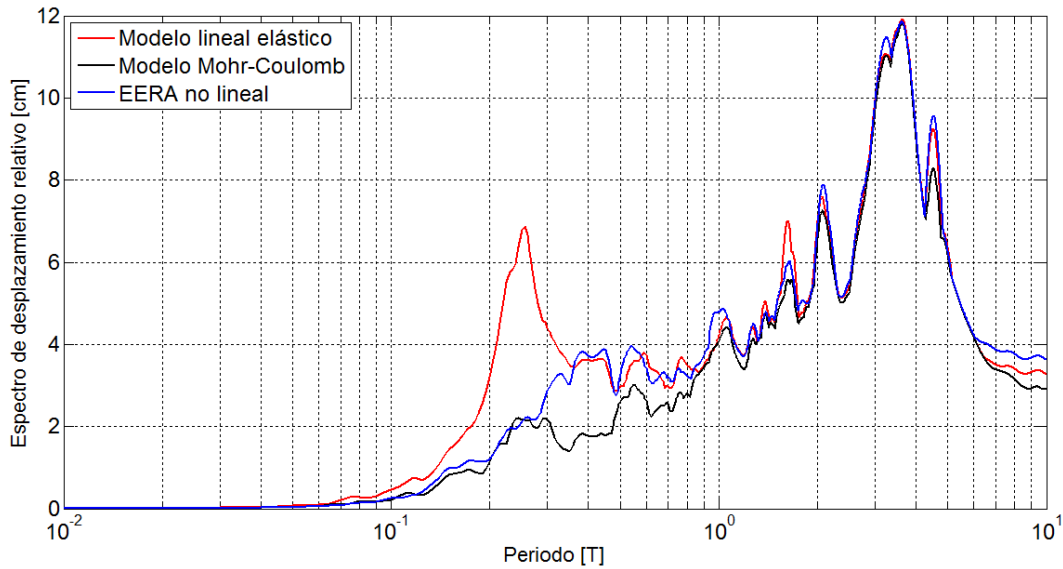


Figura 8.22: Espectros elásticos de desplazamiento relativo obtenidos mediante el código de Matlab y el método lineal equivalente. 5 % de amortiguamiento.

Finalmente, en la Figura 8.23 se realiza la comparación de los espectros de aceleración obtenidos mediante el modelo Mohr-Coulomb y el método lineal equivalente con el espectro elástico de diseño de la norma de diseño sísmico de edificios (NCh433 más DS61). Este último se determina de acuerdo a las clasificaciones mostradas en la Tabla 8.20 y utilizando un valor $R^* = 1$ para considerar el espectro elástico. El suelo clasifica como D de acuerdo a la norma (ver Anexo B), en base a la velocidad de corte promedio, V_{s30} , obtenida por Taiba (2012) que equivale a $V_{s30} = 339$ [m/s] en el caso del perfil sísmico más desfavorable.

<i>Zona sísmica</i>	3
<i>Tipo de suelo</i>	D
<i>Categoría del edificio</i>	II

Tabla 8.20: Clasificación utilizada para la determinación del espectro elástico de la norma NCh433 más DS61.

En la figura además se grafica el espectro de aceleración obtenido a partir del registro en la base del modelo.

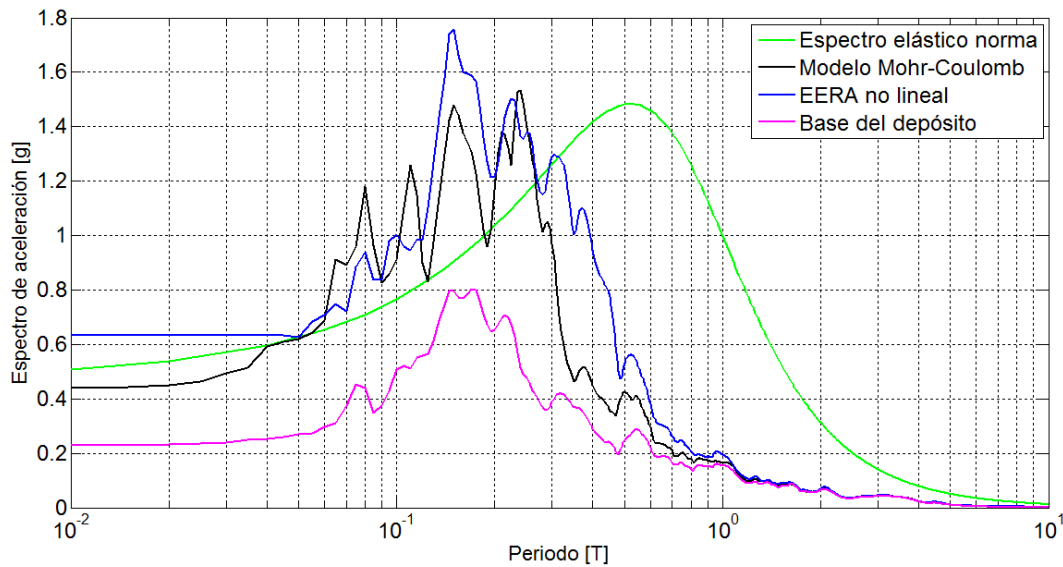


Figura 8.23: Comparación de los espectros elásticos de aceleración con el espectro de diseño.

Como se puede visualizar en la figura, ambos espectros superan el espectro elástico de la norma en un rango de periodos similar, aproximadamente entre 0,05 y 0,25 [s]. Para un rango de periodos mayores a estos, el espectro elástico de la norma supera con creces a los espectros calculados numéricamente. Este rango de periodos está asociado a las estructuras de mayor altura, como el edificio Cruciani que se encuentra en el sitio modelado y cuyo periodo fundamental es 0,458 [s] (Mancilla, 2013), por lo que el espectro de diseño, y en consecuencia el diseño estructural de estos edificios, estaría siendo conservador para el terremoto considerado.

Por otro lado, en la figura se visualiza el efecto que tiene la amplificación sísmica en el espectro de aceleración. Como se puede observar, a diferencia de los espectros obtenidos en superficie, el espectro generado a partir del registro sísmico en la roca basal es inferior al espectro de diseño en todo el rango de periodos. Además, si se comparan los espectros en superficie con el de la base, se obtiene un incremento máximo de la aceleración espectral de 205 % en el caso del modelo Mohr-Coulomb y 241 % en el caso del método lineal equivalente.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis se logró desarrollar, de manera íntegra, un código de elementos finitos aplicado a la modelación de problemas geotécnicos en dos dimensiones. Si bien, el objetivo inicial era modelar la respuesta sísmica de un depósito de suelo (respuesta de sitio), en el transcurso del trabajo fue necesario realizar una validación del código de tipo estática, lo que permitió extender el objetivo inicial, agregando a las capacidades del programa la modelación de fundaciones flexibles.

Es importante mencionar que la herramienta numérica elaborada constituye solo una primera etapa de desarrollo, ya que se espera que el código siga evolucionando en trabajos futuros. En este sentido, el principal aporte del trabajo consistió en generar, en etapas tempranas, un programa de código abierto, cuyo funcionamiento fue validado y que a continuación puede ser modificado, abriendo espacio para la investigación en torno a los diferentes tópicos involucrados en la modelación numérica de suelos.

Para incorporar la no linealidad del suelo en la modelación se recurrió en esta etapa al modelo constitutivo Mohr-Coulomb, el cual se enmarca dentro de la teoría de plasticidad, estudiada en el Capítulo 3. Este modelo constituye una primera aproximación al comportamiento de los suelos y su principal virtud frente a otros modelos es la utilización de pocos parámetros, lo que hace posible caracterizar el suelo con facilidad a partir de los ensayos que comúnmente se encuentran disponibles en los proyectos de ingeniería. Sin embargo, tal como se discutió, el modelo es insuficiente para representar con exactitud todas las características de los suelos, y en consecuencia es necesario, en trabajos futuros, investigar e implementar modelos constitutivos que puedan suplir las deficiencias de este modelo. Dicho esto, el trabajo actual representa un punto de partida en esta línea, ya que la teoría de plasticidad ofrece múltiples opciones para la generación de modelos de este tipo.

A partir de la validación del código, llevada a cabo en el Capítulo 7, se pueden destacar

las siguientes conclusiones:

- El funcionamiento del código fue validado en todas sus posibilidades de análisis: análisis estático/dinámico, análisis drenado/no drenado, modelo lineal-elástico/Mohr-Coulomb. Además se validó el funcionamiento de la condición de borde absorbente, borde viscoso estándar.
- Dentro de los tipos de elementos implementados en el código, se recomienda el uso de los elementos triangulares de 6 nodos frente a los de 3 nodos, debido a que con los primeros se obtiene un nivel de precisión mayor a un menor costo computacional.
- El procedimiento de corrección automática del tamaño del paso de carga, implementado para el análisis estático, mostró un desempeño adecuado. El procedimiento permite un control del número de iteraciones en cada paso de carga, lo que a su vez permite evitar problemas de divergencia y costos computacionales excesivos.
- Al modelar la respuesta de un depósito frente a una sollicitación armónica en la base, pudo observarse que la condición de borde absorbente implementada permite que la respuesta alcance el régimen permanente de manera más rápida que con los bordes libres.

La modelación de la respuesta sísmica del suelo en el centro de Viña del Mar, desarrollada en el Capítulo 8, permite extraer las siguientes conclusiones:

- Tanto la elección del ancho del modelo de elementos finitos como la selección de las frecuencias que controlan el amortiguamiento de Rayleigh juegan un rol fundamental en la correcta modelación de la respuesta de sitio. Como se demostró, la respuesta generada por el modelo es muy sensible a estos dos aspectos y en consecuencia es estrictamente necesario realizar un proceso de calibración antes de llevar a cabo el análisis no lineal. Esto implica revisar trabajos anteriores, desarrollados en esta misma línea, en donde estos aspectos no fueron considerados adecuadamente.

- De acuerdo a la calibración realizada, el criterio que mejor se ajustó en la selección de las frecuencias asociadas al amortiguamiento de Rayleigh fue considerar las dos primeras frecuencias naturales del suelo. Este criterio difiere del propuesto por Tsai et al. (2014), por lo que se sugiere estudiar caso a caso el criterio que mejor se adapte al problema en estudio, siguiendo la metodología descrita en este trabajo.
- De acuerdo a la calibración realizada, la relación ancho/altura del modelo seleccionada fue de 8,51. Esto concuerda con el trabajo de Amorsi et al. (2007) donde se requirió una relación igual a 8. Esta relación ancho/altura implica extender el área del dominio de manera considerable, lo que deriva en costos computacionales elevados al momento de llevar a cabo el análisis no lineal. Lo anterior evidencia que la condición de borde absorbente, borde viscoso estándar, no tiene un desempeño adecuado en la modelación de la respuesta de sitio, por lo que se sugiere, en trabajos futuros, implementar otro tipo de condición de borde artificial.
- El tiempo de cálculo requerido por el código para determinar la respuesta sísmica utilizando el modelo no lineal fue cercano a 6,5 [hrs], lo que representa un incremento del 159 % del costo computacional con respecto a utilizar el modelo lineal-elástico. Por esto, es crucial, en futuros trabajos, mejorar la eficiencia del código en la solución del problema no lineal, ya que de otra manera el tiempo de cálculo aumentará significativamente al implementar modelos constitutivos más complejos o al modelar problemas de mayores dimensiones.
- El principal efecto que tuvo la modelación mediante el modelo Mohr-Coulomb en comparación con el modelo lineal elástico, fue la reducción de la aceleración obtenida en superficie, lo cual se acentuó en el caso de las aceleraciones de mayor magnitud, llegando a una reducción del 60 % en el caso de la aceleración peak.
- A pesar de las limitaciones del modelo Mohr-Coulomb en la reproducción de la respuesta sísmica, este entregó una respuesta cercana a la que se obtuvo mediante el método lineal equivalente. Por otro lado, el modelo lineal sobrestimó de manera considerable tanto la aceleración peak como la aceleración espectral en un rango amplio de periodos.
- La comparación del espectro elástico de diseño con los espectros de aceleración ob-

tenidos mediante el modelo Mohr-Coulomb y el método lineal equivalente muestra que estos últimos solo superan el espectro de diseño en un rango de periodos bajos, mientras que en el rango de periodos asociados a los edificios de altura el espectro de diseño es muy superior. Esto indica que la norma de diseño sísmico de edificios estaría siendo bastante conservadora para el caso en estudio, lo que refleja las limitaciones de esta. Estas limitaciones se deben en parte a que la norma solo utiliza el parámetro V_{s30} para la caracterización sísmica del suelo, sin considerar, por ejemplo, la profundidad del depósito.

- El efecto de la amplificación sísmica en el espectro de aceleración fue considerable, obteniéndose incrementos superiores al 200 % en la aceleración espectral, al comparar el espectro obtenido en superficie con el espectro en la base del depósito.

En base a las limitaciones del código identificadas, se sugiere, para futuros trabajos:

- Implementar la condición de borde repetible (repeteable boundary condition), también llamada condición de nodos atados (tied nodes), propuesta por Zienkiewicz et al. (1999) para los bordes laterales, como alternativa a la condición de borde viscoso estándar.
- Implementar el método de Newton-Raphson completo y Newton-Raphson modificado, con el propósito de mejorar la eficiencia del código en la resolución del problema no lineal.
- Implementar, como siguiente modelo, el modelo constitutivo Cam-Clay, desarrollado en la Universidad de Cambridge, diseñado para la modelación de arcillas. Este modelo presenta endurecimiento y permite modelar de manera realista el cambio de volumen por corte, considerando el estado crítico del suelo.

Además, con el objetivo de extender las capacidades del código, se sugiere:

- Implementar un proceso de inicialización de tensiones que permita modelar problemas en que los estratos no son horizontales.
- Implementar elementos tipo frame e interfaces para poder modelar problemas de interacción suelo-estructura.

-
- Extender la modelación a problemas con geometría axisimétrica.

REFERENCIAS

- Amorsi A., Boldini D., Elia G. (2010). Parametric study on seismic ground response by finite element modelling. *Computers & Geotechnics*, 37, 515-528.
- Bardet J.P., Ichii K., Lin H. (2000). EERA, A computer program for equivalent-linear earthquake site response analyses of layered soil deposits. Los Angeles: Department of Civil Engineering, University of Southern California.
- Bathe K. J. (1996). Finite element procedures. New Jersey: Prentice Hall.
- Bathe K. J., Cimento A. P. (1980). Some practical procedures for the solution of non-linear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22, 59-85.
- Burkardt J. (2010). Triangulation_L2Q. *mathworks.com*.
- De Borst R. (1986). Integration of plasticity equations for singular yield functions. *Computers & Structures*, 26(5), 823-829.
- Clausen J. (2007). Efficient Non-Linear Finite Element Implementation of Elastoplasticity for Geotechnical Problems. (Ph.D. Thesis). Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Clausen J., Damkilde L., Andersen L. (2007). An efficient return algorithm for non-associated plasticity with linear yield criteria in principal stress space. *Computers & Structures*, 85, 1795-1807.
- Coduto D. (2001). Foundation Design, Principles and Practices. (2th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Committee for waterfront structures, harbours and waterways (2012). Recommendations of the committee for waterfront structures, harbours and waterways. (9th ed.). Berlin: Ernst & Sohn.

- Cook R., Malkus D., Plesha M., Witt R. (2002). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. (4th ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Crisfield M.A. (2000). Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials. Chichester: John Wiley & Sons.
- Crisfield M.A. (2000). Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics. Chichester: John Wiley & Sons.
- Dang H. K., Yacoub T., Curran J., Visser M., Wai D. (2014). Evaluate the performance of an accelerated initial stiffness method in three dimensional finite element analysis. *Computers & Geotechnics*, 60, 293-303.
- Duncan J. M., Bursey A. (2007). Soil and Rock Modulus Correlations for Geotechnical Engineering. Blacksburg: Center for Geotechnical Practice and Research, Virginia Tech.
- Ercoli N., Ezeberry J. (2001). Análisis Dinámico considerando Interacción Suelo-Estructura. *Mecánica Computacional*, 20, 406-413.
- Engwirda D. (2009). MESH2D - Automatic Mesh Generation. *mathworks.com*.
- Felippa C. (2005). Apuntes del curso ASEN 5007 - Introduction to Finite Element Methods. University of Colorado Boulder.
- Galavi V. (2010). Groundwater flow, fully coupled flow deformation and undrained analyses in PLAXIS 2D and 3D. Internal report, Research Department, Plaxis.
- Guerreiro P., Kontoe S., Taborda D. (2012). Comparative Study of Stiffness Reduction and Damping Curves. 15th World Conference in Earthquake Engineering. Lisboa, Portugal.
- Hashash Y., Groholski D., Phillips C. (2010). Recent advances in non-linear site response analysis. Fifth International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. San Diego, California, United States.
- Huang J., Griffiths D.V. (2009). Return mapping algorithms and stress predictors for failure analysis in geomechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, April, 276-284.
- Jara M., Villalobos F., Corral G., Taiba O. (2015). Análisis numérico de la respuesta sísmica de excavaciones sostenidas con muro Berlinés en arena. *Obras y Proyectos*, 17,

69-77.

Jensen H. (2013), Apuntes del curso IPO401 - Método de Elementos Finitos. Departamento de Obras Civiles, Universidad Técnica Federico Santa María.

Kontoe S. (2006). Development of time integration schemes and advanced boundary conditions for dynamic geotechnical analysis. (Ph.D. Thesis). Imperial College of Science, Technology and Medicine. London, England.

Kramer S. L. (1996). Geotechnical Earthquake Engineering. New Jersey: Prentice Hall.

Lysmer J., Kuhlmeyer R. L. (1969), Finite Dynamic Model for Infinite Media. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 859-877.

Mancilla C. (2013). Respuesta sísmica del suelo en el centro de Viña del Mar. (Memoria de Ingeniería Civil inédita). Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso, Chile.

Mejia L. H., Dawson E. M. (2006). Earthquake deconvolution for FLAC. 4th International FLAC Symposium on Numerical Modeling in Geomechanics. Madrid, España.

Nesru F. (2012), Matlab FEM Code – From Elasticity to Plasticity. (Master Thesis). Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, Norway.

Peña R. (2016). Respuesta sísmica del suelo en el centro de Concepción. (Memoria de Ingeniería Civil inédita). Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso, Chile.

Pestana J. M. (2006). Presentación: Simulación de Terremotos con el Método de Elementos Finitos. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Petersen M. (2001). Revisión N°1 del Estudio de Mecánica de Suelos para edificio en Viña del Mar.

Pinto P. A. (2012). Study of constitutive models for soils under cyclic loading. (Master Thesis). Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa, Portugal.

PLAXIS (2015). Material Models Manual, PLAXIS 2D.

PLAXIS (2015). Reference Manual, PLAXIS 2D.

PLAXIS (2015). Scientific Manual, PLAXIS 2D.

Potts D., Zdravkovic L. (1999). *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering, Theory*. London: Thomas Telford.

Régnier et al. (2016). International Benchmark on Numerical Simulations for 1D, Non-linear Site Response (PRENOLIN): Verification Phase Based on Canonical Cases. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 106(5), 2112-2135.

Sáez E. (2013). Apuntes del curso ICE3663 - Dinámica de Suelos. Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Saragoni, Ruiz (2012). Implicaciones y Nuevos Desafíos de Diseño Sísmico de los Acelogramas del Terremoto del 2010. En: *Mw=8.8 Terremoto de Chile*. Santiago: Universidad de Chile.

Sivakugan N., Das B. (2010). *Geotechnical Engineering, a practical problem solving approach*. U.S.A: J. Ross Publishing.

Smith, I.M., Griffiths, D.V. (2004). *Programming the Finite Element Method*. (4th ed.). Chichester: John Wiley & Sons.

Taiba O. (2012). Informe de mediciones geofísicas, Edificio Cruciani, Viña del Mar, Región de Valparaíso.

Tan T. S., Phoon K. K., Hight D. W., Leroueil S. (2003). *Characterisation and Engineering Properties of Natural Soils*. A.A. Lisse: Balkema Publishers.

Thiers R. (2014). Daños en edificios de hormigón armado y su relación con el suelo - Terremoto de Chile 2010. (Tesis de Magíster inédita). Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso, Chile.

Tsai Ch., Park D., Chen Ch. (2014). Selection of the optimal frequencies of viscous damping formulation in nonlinear time-domain site response analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 67, 353-358.

Van Langen, H., Vermeer, P.A. (1990). Automatic step size correction for non-associated plasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 579-598.

Van Langen, H. (1991). Numerical analysis of soil-structure interaction. (Ph.D. Thesis). Delf University of Technology. Delf, The Netherlands.

Verdugo R. (sin año encontrado). Apunte de Amplificación Sísmica. Curso CI-79F Dinámica de Suelos, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

Vergara C.E. (1999), Modelación Numérica de la Respuesta Sísmica de Depósitos de Suelos Saturados. (Memoria de Ingeniería Civil inédita). Universidad de Chile. Santiago, Chile.

Vermeer, P.A., de Borst, R. (1984). Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron*, 29 (3).

Visone C., Bilotta E., Santucci F. (2008). Remarks on Site Response Analysis by using Plaxis Dynamic Module. *Plaxis Bulletin*, 23, 14-18.

Viswanadham B. V. S. (sin año encontrado). Apuntes del curso Advanced Geotechnical Engineering, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Bombay.

Youssef M.A., Hashash, Park D. (2002). Viscous damping formulation and high frequency motion propagation in non-linear site response analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22, 611-624.

Zienkiewicz O. C., Chan A.H. C., Pastor M., Schrefler B.A., Shiomi T. (1999). Computational Geomechanics with special Reference to Earthquake Engineering. Chichester: John Wiley & Sons.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000). The Finite Element Method, Volume 1, The Basis. (5th ed.). Oxford: Butterworth Heinemann.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2005). The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. (6th ed.). Oxford: Butterworth Heinemann.

ANEXO A

El presente anexo contiene la entrada de datos utilizada en el código para la modelación de la respuesta sísmica desarrollada del Capítulo 8, mediante el modelo Mohr-Coulomb.

```
%=====
% 1. ENTRADA DE DATOS
%=====

%-----
% TIPO DE ANALISIS
%-----

% analisis=1: Analisis estatico
% analisis=2: Analisis dinamico

analisis=2;

%-----
% GEOMETRIA DEL DEPOSITO
%-----

ancho=190;
prof(1)=4;
prof(2)=11;
prof(3)=14.5;
prof(4)=22.32;

%-----
% PROPIEDADES DEL SUELO
%-----
```

```
% modelo(i)=1 : Lineal elastico
% modelo(i)=2 : Elastoplastico Mohr-Coulomb

% caso(i)=1    : Drenado
% caso(i)=2    : No drenado

% Estrato 1
modelo(1)=2;
caso(1)=1;
E(1)=125901.55;
nu(1)=0.35;
gamma(1)=16;
gamma_sat(1)=18;
c(1)=15;
phi(1)=28;
psi(1)=0;
eo(1)=1;

% Estrato 2
modelo(2)=2;
caso(2)=2;
E(2)=230389.03;
nu(2)=0.25;
gamma(2)=17;
gamma_sat(2)=20;
c(2)=0;
phi(2)=41;
psi(2)=0;
eo(2)=0.6;

% Estrato 3
modelo(3)=2;
caso(3)=2;
```

```
E(3)=871497.84;  
nu(3)=0.19;  
gamma(3)=16;  
gamma_sat(3)=18;  
c(3)=0;  
phi(3)=50;  
psi(3)=0;  
eo(3)=0.6;
```

```
% Estrato 4
```

```
modelo(4)=2;  
caso(4)=2;  
E(4)=685079.63;  
nu(4)=0.23;  
gamma(4)=16;  
gamma_sat(4)=19;  
c(4)=0;  
phi(4)=45;  
psi(4)=0;  
eo(4)=0.6;
```

```
%
```

```
% PROPIEDADES DEL AGUA
```

```
%
```

```
nivelf=4;
```

```
gamma_w=9.8;
```

```
%
```

```
% RAZON DE AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH
```

```
%
```

```
ra=0.04;

%-----
% REGISTRO DE ACELERACION DEL SISMO EN LA BASE
%-----

registro='registro_base.txt';

%-----
%METODO DE NEWMARK
%-----

% Metodo de aceleracion lineal:          b=1/6 y g=1/2
% Metodo de aceleracion constante:      b=1/4 y g=1/2
% Metodo de Newmark amortiguado:        b=0.3025 y g=0.6

b=1/4;
g=1/2;

%-----
% COEFICIENTES DE RELAJACION DE LOS BORDES ABSORBENTES
%-----

% Bordes absorbentes: c1=1 y c2=0.25
% Bordes libres:      c1=0 y c2=0

c1=1;
c2=0.25;

%-----
% MALLA DE ELEMENTOS FINITOS
%-----
```

```
% Elementos triangulares de 3 nodos: nne=3
% Elementos triangulares de 6 nodos: nne=6
nne=6;

tam_max=2.32;

% factor_tam controla el refinamiento bajo la carga
% distribuida.
factor_tam=2;

%-----
% ANALISIS ITERATIVO
%-----

% Si las iteraciones en un determinado paso son superiores a
% it_max se detiene el proceso.
it_max=60;

% Tolerancia global
tol=10-5;

%-----
% ANALISIS DINAMICO: ANALISIS ITERATIVO
%-----

% Pasos para el analisis dinamico
pasos=14402;

%-----
% SELECCION DE NODOS PARA EL ANALISIS (2 NODOS)
%-----

% Fondo
```

```
x(1)=0;  
y(1)=-22.32;
```

```
% Superficie
```

```
x(2)=95;
```

```
y(2)=0;
```

```
%
```

```
% GRAFICOS
```

```
%
```

```
escala=10;
```

```
%
```

ANEXO B

El presente anexo contiene la clasificación sísmica de suelos de acuerdo al Decreto Supremo N°61 del Ministerio de Vivienda y Urbanismo, vigente en Chile para el diseño sísmico de Edificios.

Suelo Tipo		V_{s30} (m/s)	RQD	q_u (MPa)	(N_1) (golpes/pie)	S_u (MPa)
A	Roca, suelo cementado	≥ 900	$\geq 50\%$	≥ 10 ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)		
B	Roca blanda o fracturada, suelo muy denso o muy firme	≥ 500		$\geq 0,40$ ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)	≥ 50	
C	Suelo denso o firme	≥ 350		$\geq 0,30$ ($\epsilon_{qu} \leq 2\%$)	≥ 40	
D	Suelo medianamente denso, o firme	≥ 180			≥ 30	$\geq 0,05$
E	Suelo de compacidad, o consistencia mediana	< 180			≥ 20	$< 0,05$
F	Suelos Especiales	*	*	*	*	*

Figura 24: Clasificación sísmica de suelos de acuerdo al Decreto Supremo N°61.

Donde:

V_{s30} : Velocidad de ondas de corte promedio de los 30 metros superiores del terreno.

RQD : Rock Quality Designation, según norma ASTM D 6032.

q_u : Resistencia a la compresión simple del suelo.

(N_1) : Índice de penetración estándar normalizado por presión de confinamiento de 0,1 MPa. Aplicable sólo a suelos que clasifican como arenas.

S_u : Resistencia al corte no-drenada del suelo.

ϵ_{qu} : Deformación unitaria desarrollada cuando se alcanza la resistencia máxima en el ensayo de compresión simple.