

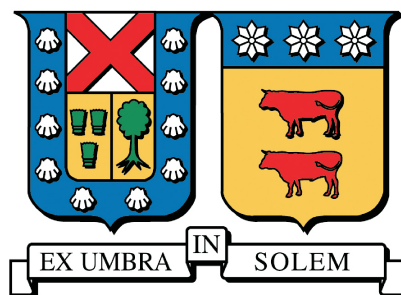
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS FÍSICOS EN  
SISTEMAS ESTRUCTURALES POR MEDIO DE  
MÉTODOS BAYESIANOS

CRISTÓBAL ANDRÉS FIGUEROA ITURRIETA

Ingeniero Civil  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil

Agosto, 2024



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS FÍSICOS EN  
SISTEMAS ESTRUCTURALES POR MEDIO DE  
MÉTODOS BAYESIANOS

Tesis presentada por  
**CRISTÓBAL ANDRÉS FIGUEROA ITURRIETA**

en cumplimiento de los requisitos para el grado de  
**Ingeniero Civil**

y el grado de  
**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil**

Supervisor  
Dr. Hector Jensen Velasco

Agosto, 2024

IDENTIFICACIÓN BAYESIANA MEDIANTE MÉTODOS DE CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL

AUTOR

**CRISTÓBAL ANDRÉS FIGUEROA ITURRIETA**

TRABAJO DE MEMORIA, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Dr. Héctor A. Jensen

---

Dr. Danko J. Jerez

---

Dr. Fernando Labbé

---

Valparaíso, Chile, Agosto 2024.



*Tempus edax rerum*



---

# AGRADECIMIENTOS

---

Primero, quiero agradecer a mi profesor guía y asesor, el Dr. Héctor Jensen. Realmente agradezco la paciencia que ha tenido conmigo en el proceso de realización de esta tesis, además de la motivación y confianza que me entregó en muchas oportunidades y que necesitaba para avanzar. También quería agradecer la gran cantidad de conocimientos que me entregó, tanto en mis estudios como en la realización de este trabajo, que la verdad abrió un mundo de nuevos conceptos que desconocía. Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Danko Jerez, quien, al haber pasado por los mismos estudios que yo, me ayudó en la resolución de muchas dudas y en la clarificación de varios conceptos durante el proceso. Además, me proporcionó varias herramientas imprescindibles para completar esta tesis. También quiero agradecer al Dr. Marcos Valdebenito, pues fue el quien me introdujo de forma temprana a los conceptos fundamentales para el desarrollo de esta tesis. Sin el tiempo ni los conocimientos que me entregó, habría tardado mucho más en comprender los nuevos conceptos que necesitaría más adelante. Quiero también agradecer al Dr. Danilo Kusanovic por sus conocimientos en programación, los cuales fueron fundamentales para la implementación de mi trabajo en software externos que utilizan otros lenguajes. Además, agradezco su disposición a enseñarme del tema, ya que tengo un gran interés en aprender en este. Me gustaría agradecer profundamente a mi mamá Lidia, ya que ella es quien siempre está velando por mi bienestar, mi salud y mi felicidad en todo momento. Sin ella y su cariño, no habría llegado a donde estoy ahora. También quiero agradecer a mi hermana Nicole, que me ha pavimentado el camino en muchas cosas que tuve que hacer en mi etapa escolar y en la vida también, además de todo su cariño. Asimismo, quiero agradecer a mi papá Félix por todo su apoyo, compañía y cariño que me ha dado. Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a mis estudios de pregrado financiados por el programa de gratuidad del gobierno, así como a mis estudios de posgrado en el programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María. También quiero agradecer a la red de exalumnos y, por último, al financiamiento del proyecto FAPESP 2019 CODIGO 2019/13080-9.

---

# ABSTRACT

---

In this work, a probabilistic framework is developed and implemented to identify parameters in various application problems. A Bayesian model updating approach based on reliability analysis methods is considered herein. The formulation, known as BUS (Bayesian Updating with Structural Reliability Methods), allows exploiting the features of applications' robustness, dimension sustainability, and efficiency of reliability methods to address complex identification problems in structural engineering applications. Specifically, a technique based on the well-known subset simulation method is implemented in this work. Within this framework, two methods are considered to generate samples conditioned to the corresponding intermediate failure regions. The first is the Metropolis-Hastings method, which is based on generating Markov chains by means of a given proposal distribution. The second is the Hamiltonian method, which uses physics concepts to explore the parameter space, simulating trajectories under a fictitious potential associated with the distribution of interest. Finally, for stopping the sample generation, the criterion will be that the threshold value associated with the current intermediate failure region is greater than the maximum observed log-likelihood value. The performance of these methods is assessed in various situations, ranging from academic problems with analytical solutions to high-dimensional problems involving structural dynamic systems, nonlinear behavior, and identification data in the time domain. The results show that the proposed probabilistic framework provides efficient and effective tools to correctly identify parameters in the different applications presented in this thesis. It is important to note that there are situations where the identified parameter values do not match the target ones. However, this is not due to inherent flaws in the methods, but rather to the inherent complexity of the problem and the quality of the measurements used. The latter emphasizes the importance of having a deep understanding of the physics of the problems and corroborating the consistency in the parameters identified through different executions. Results show that both methods are excellent alternatives as tools for parameter identification, as they both manage to generate the corresponding posterior samples, in addition to exhibiting similar performance.

---

# RESUMEN

---

En este trabajo, se desarrolla e implementa un marco probabilístico para identificar parámetros en diversos problemas de aplicación. Se considera un enfoque de *Bayesian model updating* basado en métodos de análisis de confiabilidad. La formulación, conocida como BUS (Actualización Bayesiana con Métodos de confiabilidad estructural), permite explotar las características de la robustez de las aplicaciones, la sostenibilidad para dimensiones y la eficiencia de los métodos de confiabilidad para abordar problemas complejos de identificación en aplicaciones de ingeniería estructural. Específicamente, se implementa una técnica basada en el conocido método *subset simulation* en este trabajo. Dentro de este marco, se consideran dos métodos para generar muestras condicionadas a las correspondientes regiones de falla intermedia. El primero es el método Metropolis-Hastings, que se basa en generar cadenas de Markov mediante una distribución propuesta dada. El segundo es el método Hamiltoniano, que utiliza conceptos de física para explorar el espacio de parámetros, simulando trayectorias bajo un potencial ficticio asociado con la distribución de interés. Finalmente, para detener la generación de muestras, el criterio será que el valor del umbral asociado con la región de falla intermedia actual sea mayor que el valor máximo de log-verosimilitud observado. El rendimiento de estos métodos se evalúa en diversas situaciones, que van desde problemas académicos con soluciones analíticas hasta aquellos con alta dimensión que involucran sistemas dinámicos estructurales, comportamientos no lineales y datos de identificación en el dominio del tiempo. Los resultados muestran que el marco probabilístico propuesto proporciona herramientas eficientes y efectivas para identificar correctamente parámetros en las diferentes aplicaciones presentadas en esta tesis. Es importante señalar que hay situaciones en las que los valores de parámetros identificados no coinciden con los valores objetivo. Sin embargo, esto no se debe a defectos inherentes en los métodos, sino a la complejidad inherente del problema y a la calidad de las mediciones utilizadas. Lo anterior enfatiza la importancia de tener una comprensión profunda de la física de los problemas y de corroborar la consistencia en los parámetros identificados a través de diferentes ejecuciones. Los resultados muestran que ambos métodos son excelentes alternativas como herramientas en la identificación de parámetros, ya que ambos logran generar las correspondientes muestras a posteriori, además de presentar rendimientos similares.

---

# GLOSARIO

---

- **Bayesian Model Updating:** Marco general para caracterizar la plausibilidad de los valores posibles para los parámetros de un modelo matemático dado, basado en los datos de medición disponibles.
- **Distribución a Priori:** Es la asignación de probabilidades a los parámetros de un modelo antes de observar los datos. Representa el conocimiento previo sobre los valores posibles de los parámetros antes del análisis de datos.
- **Distribución a Posteriori:** Es una actualización de la distribución de probabilidad de los parámetros de un modelo después de observar los datos. Refleja la combinación de la información previa (a priori) y la nueva evidencia proporcionada por los datos observados.
- **Función de Verosimilitud:** Evalúa qué tan probable es que los datos observados sean generados por un conjunto dado de valores de parámetros. Es esencial en la estimación de parámetros ya que nos ayuda a identificar qué valores de los parámetros son más plausibles en función de los datos recopilados.
- **Evidencia:** Es una constante de normalización en la función de distribución a posteriori, sin embargo permite discernir cuantitativamente entre modelos de clase, es decir, entre mayor evidencia mejor es el modelo de clase.
- **Región de Falla:** Es un área dentro del espacio de parámetros donde, al evaluar dichos parámetros utilizando una función de demanda normalizada o criterio predefinido, se supera un umbral crítico.
- **Intervalo de Confianza:** Son los rangos en que se tiene contenido con cierta confianza todos los valores de una respuesta, como por ejemplo que en cierto rango de valores están todas las respuestas con un 95% de certeza.
- **Cadenas de Markov:** Modelos que describen secuencias de eventos donde la probabilidad de un evento futuro depende solo del evento presente, sin tener en cuenta los eventos pasados.

---

# Contenidos

---

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>iii</b>
<b>GLOSARIO</b>	<b>iv</b>
<b>CONTENIDOS</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>xvii</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos Generales . . . . .	2
1.2 Objetivos específicos . . . . .	2
1.3 Estructura de la Tesis . . . . .	3
<b>2 ESTADO DEL ARTE</b>	<b>4</b>
2.1 Algoritmos de generación de muestras . . . . .	4
2.1.1 Algoritmo Metropolis-Hastings . . . . .	4
2.1.2 Algoritmo Hamiltoniano . . . . .	6
<b>3 FORMULACIÓN BAYESIAN MODEL UPDATING</b>	<b>8</b>
3.1 Actualización Bayesiana con métodos de confiabilidad estructural . . . . .	9
3.1.1 Demostración de la formulación basada en BUS . . . . .	10
3.2 Marco de trabajo de subset simulation . . . . .	12
3.2.1 Evidencia estimada . . . . .	13
3.2.2 Etapas intermedias . . . . .	13
3.2.3 Detalles generales de implementación . . . . .	14
	<b>v</b>

<b>4</b>	<b>APLICACIÓN 1: PROBLEMA DE PRUEBA</b>	<b>15</b>
4.1	Descripción del problema . . . . .	15
4.2	Detalles de la implementación . . . . .	17
4.3	Resultados: Bayesian Model Updating . . . . .	18
4.3.1	Muestras a posteriori . . . . .	18
4.3.2	Evidencia estimada . . . . .	22
4.3.3	Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios . . . . .	22
4.4	Conclusiones . . . . .	24
<b>5</b>	<b>APLICACIÓN 2: SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD</b>	<b>25</b>
5.1	Descripción del problema . . . . .	25
5.2	Detalles de la implementación . . . . .	26
5.3	Resultados: Bayesian Model Updating . . . . .	27
5.3.1	Muestras a posteriori . . . . .	27
5.3.2	Evidencia estimada . . . . .	30
5.3.3	Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios . . . . .	31
5.4	Conclusiones . . . . .	32
<b>6</b>	<b>APLICACIÓN 3: SISTEMA DINÁMICO DE UN GRADO DE LIBERTAD</b>	<b>34</b>
6.1	Descripción del problema . . . . .	34
6.2	Problema de actualización . . . . .	35
6.2.1	Mediciones . . . . .	37
6.2.2	Parámetros inciertos del modelo . . . . .	38
6.2.3	Función de verosimilitud . . . . .	39
6.3	Detalles de la implementación . . . . .	39
6.4	Resultados: Bayesian Model Updating . . . . .	39
6.4.0.1	Muestras a posteriori . . . . .	39
6.4.1	Evidencia estimada . . . . .	44
6.4.2	Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori . . . . .	45
6.4.3	Evolución de subset simulation . . . . .	47
6.4.3.1	Muestras obtenidas en las distintas etapas . . . . .	47
6.4.4	Evolución del umbral intermedio y auxiliar . . . . .	54
6.5	Conclusiones . . . . .	55
<b>7</b>	<b>APLICACIÓN 4: EDIFICIO A CORTE DE 10 PISOS</b>	<b>57</b>
7.1	Descripción del problema . . . . .	57

7.2	Problema de actualización . . . . .	59
7.2.1	Parámetros inciertos del modelo . . . . .	60
7.2.2	Mediciones . . . . .	60
7.2.3	Parámetros objetivos . . . . .	61
7.2.4	Función de verosimilitud . . . . .	63
7.3	Detalles de la implementación . . . . .	64
7.3.1	Resultados: Bayesian Model Updating . . . . .	64
7.3.1.1	Muestras a posteriori . . . . .	64
7.3.2	Evidencia estimada . . . . .	80
7.3.3	Identificación de propiedades . . . . .	81
7.3.4	Comparación de las mediciones y las predicciones a posteriori . . . . .	83
7.3.5	Comparación entre mediciones no observadas y predicciones a posteriori . . . . .	84
7.3.6	Evolución del umbral intermedio y auxiliar . . . . .	85
7.4	Conclusiones . . . . .	88
<b>8</b>	<b>APLICACIÓN 5: MODELO DE PUENTE</b>	<b>90</b>
8.1	Descripción del problema . . . . .	90
8.1.1	Modelo estructural . . . . .	91
8.1.2	Subestructuras y esquema de parametrización . . . . .	92
8.1.3	Matrices dinámicas . . . . .	93
8.2	Mediciones . . . . .	97
8.2.1	Caso objetivo 1: Parámetros del modelo nominal . . . . .	97
8.2.2	Caso objetivo 2: Parámetros del modelo perturbados . . . . .	99
8.2.3	Función de Verosimilitud . . . . .	101
8.2.4	Escenarios . . . . .	102
8.3	Detalles de la implementación . . . . .	102
8.4	Escenario A . . . . .	102
8.4.1	Parámetros de identificación y distribuciones a priori . . . . .	103
8.5	Resultados caso “All”: Bayesian model updating . . . . .	104
8.5.1	Muestras a posteriori . . . . .	104
8.5.2	Evidencia estimada . . . . .	107
8.5.3	Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori . . . . .	108
8.5.4	Muestras obtenidas durante las diferentes etapas de subset simulation . . . . .	110
8.5.5	Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios . . . . .	117
8.6	Problema de aplicación Puente: Escenario B . . . . .	120

8.6.1	Parámetros de identificación y distribuciones a priori . . . . .	120
8.7	Resultados caso “All”: Bayesian model updating . . . . .	121
8.7.1	Muestras a posteriori . . . . .	121
8.7.2	Evidencia estimada . . . . .	130
8.7.3	Identificación de propiedades modales . . . . .	131
8.7.4	Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori . . . . .	133
8.7.5	Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios . . . . .	135
8.8	Resultados caso “Spans”: Bayesian model updating . . . . .	140
8.8.1	Muestras a posteriori . . . . .	140
8.8.2	Evidencia estimada . . . . .	147
8.8.3	Identificación de propiedades modales . . . . .	148
8.8.4	Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori . . . . .	150
8.8.5	Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios . . . . .	152
8.9	Conclusiones . . . . .	156
<b>9</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>158</b>
<b>A</b>	<b>SUBSET SIMULATION</b>	<b>160</b>
A.1	Idea principal . . . . .	160
A.2	Definición de eventos de falla intermedios . . . . .	161
<b>B</b>	<b>METROPOLIS-HASTINGS</b>	<b>163</b>
B.1	Muestreo condicional . . . . .	163
B.2	Actualización parámetro de dispersión . . . . .	165
<b>C</b>	<b>HAMILTONIAN MONTE CARLO</b>	<b>166</b>
C.1	Derivación del método . . . . .	166
C.2	Muestreo condicional . . . . .	168
C.3	Regla adaptativa para seleccionar $t_f$ . . . . .	170
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>171</b>

---

# Lista de Figuras

---

4.1	Función de densidad de probabilidad a priori y posteriori, y función de verosimilitud . . . . .	17
4.2	Evolución de las muestras en el espacio de parámetros normal estándar obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano . . . . .	19
4.3	Evolución de las muestras en el espacio de parámetros incierto $(\theta, u)$ obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano . . . . .	20
4.4	Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	21
4.5	Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	21
4.6	Evolución de los umbrales intermedios $(d_{\kappa}^*)$ obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	23
4.7	Evolución de los umbrales intermedios $(d_{\kappa}^*)$ obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	23
5.1	Modelo de la estructura. . . . .	25
5.2	Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	27
5.3	Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	27
5.4	Evolución de las muestras en el espacio de parámetros inciertos $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Metropolis . . . . .	28

5.5	Evolución de las muestras en el espacio de parámetros inciertos $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano . . . . .	29
5.6	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	32
5.7	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	32
6.1	Modelo dinámico del sistema. . . . .	35
6.2	Fuerza puntual aplicada. . . . .	36
6.3	Datos de entrada y medición para el escenario. Nivel de ruido $\gamma = 10\%$ . . . . .	38
6.4	Muestras a posteriori en términos de proyecciones bidimensionales e histogramas marginales con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	40
6.5	Muestras a posteriori en términos de proyecciones bidimensionales e histogramas marginales con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	41
6.6	Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	42
6.7	Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	43
6.8	Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	46
6.9	Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración del bloque con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	47
6.10	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 0$ de subset simulation con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	48
6.11	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 1$ de subset simulation con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	49
6.12	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 8$ de subset simulation con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	50
6.13	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 0$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	51
6.14	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 1$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	52

6.15	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 8$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	53
6.16	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	54
6.17	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	55
7.1	Modelo mecánico del edificio a corte de 10 pisos. . . . .	58
7.2	Registro del movimiento del suelo. . . . .	60
7.3	Datos de entrada del movimiento de suelo y mediciones para el escenario. Izquierda: Nivel de ruido $\gamma = 0\%$ (Caso Ideal). Derecha: Nivel de ruido $\gamma = 10\%$ . . . . .	63
7.4	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_1$ a $\hat{\theta}_7$ mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	66
7.5	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_8$ a $\hat{\theta}_{13}$ mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	67
7.6	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{14}$ a $\hat{\theta}_{19}$ mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	68
7.7	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{20}$ a $\hat{\theta}_{25}$ mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	69
7.8	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{26}$ a $\hat{\theta}_{31}$ mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	70
7.9	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_1$ a $\hat{\theta}_7$ mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	71
7.10	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_8$ a $\hat{\theta}_{13}$ mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	72
7.11	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{14}$ a $\hat{\theta}_{19}$ mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	73
7.12	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{20}$ a $\hat{\theta}_{25}$ mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	74
7.13	Histogramas marginales a posteriori de $\hat{\theta}_{26}$ a $\hat{\theta}_{31}$ mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	75

7.14	Gráficos de muestras a posteriori por pares de diferentes parámetros ( $\hat{\theta}_{11} = c_1/\bar{c}_1$ , $\hat{\theta}_{21} = m_1/\bar{m}_1$ , y $\hat{\theta}_2 = k_2/\bar{k}_2$ ) con respecto al primer parámetro ( $\hat{\theta}_1 = k_1/\bar{k}_1$ ), $\gamma = 10\%$ , Método Metropolis (Izquierda), Método Hamiltoniano (Derecha) . . . . .	76
7.15	Gráficos de muestreo a posteriori por pares para algunos parámetros de rigidez ( $\hat{\theta}_7 = k_7/\bar{k}_7$ , $\hat{\theta}_8 = k_8/\bar{k}_8$ , $\hat{\theta}_9 = k_9/\bar{k}_9$ ) y ( $\hat{\theta}_{10} = k_{10}/\bar{k}_{10}$ ), $\gamma = 10\%$ , Método Metropolis (Izquierda), Método Hamiltoniano (Derecha) . . . . .	77
7.16	Aceleraciones en los pisos 1 y 10. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). $\gamma=10\%$ . Método Metropolis (Izquierda). Método Hamiltoniano (Derecha) . . . . .	84
7.17	Desplazamientos de los pisos 2, 4, 6 y 8. Mediciones no observadas (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). $\gamma=10\%$ . Método Metropolis (Izquierda). Método Hamiltoniano (Derecha) . . . . .	85
7.18	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	87
7.19	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes $\gamma = 10\%$ . . . . .	88
8.1	Modelo de elementos finitos de la estructura del puente equipada con rodamientos no lineales. . . . .	92
8.2	Registro del movimiento del suelo. Primeros 20 segundos de “El Centro”(PGA = 5 m/s). . . . .	92
8.3	Subestructuras del modelo del puente. . . . .	93
8.4	Datos de medición asociados al caso “Spans”. Modelo nominal. Nivel de ruido $\gamma = 10\%$ . . . . .	99
8.5	Datos de medición asociados al caso “Spans”. Modelo perturbado. Nivel de ruido $\gamma = 10\%$ . . . . .	101
8.6	Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . .	106
8.7	Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . .	107

8.8	Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Línea negra sólida: Mediciones. Línea roja discontinua: Media de las respuestas predichas a posteriori. Línea azul punteada: Intervalo de confianza del 95% de las respuestas a posteriori con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	109
8.9	Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% de las respuestas a posteriori (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	110
8.10	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 0$ de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	111
8.11	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 4$ de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	112
8.12	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 16$ de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	113
8.13	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 0$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	114
8.14	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 4$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	115
8.15	Muestras obtenidas durante la etapa $\kappa = 21$ de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	116
8.16	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	118
8.17	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	119
8.18	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_1$ a $\theta_5$ (Módulo de Young de la cubierta) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	123
8.19	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_6$ a $\theta_9$ (Módulo de Young de los pilares) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	124

8.20	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{10}$ a $\theta_{13}$ (Módulo de Young de los pilotes) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	125
8.21	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{14}$ a $\theta_{16}$ (Módulo de reacción de la subrasante) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	126
8.22	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{17}$ a $\theta_{18}$ (coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	126
8.23	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{19}$ (desviación estándar del error de predicción) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	127
8.24	Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	132
8.25	Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	133
8.26	Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	134
8.27	Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	135
8.28	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	138
8.29	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All” . . . . .	140
8.30	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_1$ a $\theta_5$ (Módulo de Young de la cubierta) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	141

8.31	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_6$ a $\theta_9$ (Módulo de Young de los pilares) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	142
8.32	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{10}$ a $\theta_{13}$ (Módulo de Young de los pilotes) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	143
8.33	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{14}$ a $\theta_{16}$ (Módulo de reacción de la subrasante) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	144
8.34	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{17}$ a $\theta_{18}$ (coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	144
8.35	Histogramas marginales a posteriori de $\theta_{19}$ (desviación estándar del error de predicción) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	145
8.36	Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	149
8.37	Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	150
8.38	Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	151
8.39	Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	152
8.40	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	155
8.41	Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	156

A.1	Ejemplo de generación de cadenas de Markov durante subset simulation - dos eventos . . . . .	161
A.2	Definición del primer evento de falla intermedia ( $F_1$ ). Los eventos de falla intermedia subsiguientes siguen la misma idea . . . . .	162

---

# Lista de Tablas

---

4.1	Esperanza y desviación estándar de $\theta$ correspondiente a cada ejecución con el método Metropolis . . . . .	21
4.2	Esperanza y desviación estándar de $\theta$ correspondiente a cada ejecución con el método Hamiltoniano . . . . .	21
4.3	Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	22
4.4	Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	22
4.5	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis .	23
4.6	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano	23
5.1	Valores medios a posteriori con sus rigideces y frecuencias correspondientes en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	29
5.2	Valores medios a posteriori con sus rigideces y frecuencias correspondientes en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	30
5.3	Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis . . . . .	30
5.4	Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano . . . . .	31
5.5	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}} \times 10^{-4}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis	31
5.6	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}} \times 10^{-4}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano . . . . .	32
6.1	Valores de los parámetros objetivos. . . . .	37
6.2	Error de medición para el escenario. . . . .	37

6.3	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	43
6.4	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	44
6.5	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	44
6.6	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	44
6.7	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	45
6.8	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	45
6.9	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. $\gamma = 10\%$ . . . . .	54
6.10	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano. $\gamma = 10\%$ . . . . .	55
7.1	Valores de los parámetros objetivos . . . . .	62
7.2	Desviación estándar del error de predicción . . . . .	62
7.3	Valores modales objetivos . . . . .	62
7.4	Valores medios a posteriori en cinco ejecuciones independientes mediante el método Metropolis, $\gamma = 10\%$ . . . . .	79
7.5	Valores medios a posteriori en cinco ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano, $\gamma = 10\%$ . . . . .	80
7.6	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independiente mediante el método Metropolis $\gamma = 10\%$ . . . . .	81
7.7	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independiente mediante el método Hamiltoniano, $\gamma = 10\%$ . . . . .	81
7.8	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes mediante el método Metropolis, $\gamma = 10\%$ . . . . .	82
7.9	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano, $\gamma = 10\%$ . . . . .	82
7.10	Razones de amortiguamiento identificadas (en %) en tres ejecuciones independientes mediante el método Metropolis, $\gamma = 10\%$ . . . . .	83

7.11 Razones de amortiguamiento identificadas (en %) en tres ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano, $\gamma = 10\%$ . . . . .	83
7.12 Umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	86
7.13 Umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes, $\gamma = 10\%$ . . . . .	87
8.1 Descripción de las diferentes subestructuras del modelo de puente. . . . .	95
8.2 Propiedades parametrizadas para las distintas subestructuras. . . . .	96
8.3 Valores nominales de los parámetros. . . . .	98
8.4 Frecuencias naturales objetivo asociadas con los primeros diez modos. Valores nominales de los parámetros. . . . .	98
8.5 Valores de los parámetros perturbados. . . . .	100
8.6 Frecuencias naturales objetivo asociadas con los primeros diez modos. Valores de los parámetros perturbados. . . . .	100
8.7 Descripción de los parámetros a identificar. Escenario A. . . . .	103
8.8 Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A. Caso “All”. . . . .	104
8.9 Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A. Caso “All”. . . . .	105
8.10 Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	105
8.11 Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	105
8.12 Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	108
8.13 Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	108
8.14 Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All” . . . . .	118
8.15 Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All” . . . . .	119

8.16	Descripción de los parámetros a identificar. Escenario B. . . . .	121
8.17	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	128
8.18	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	129
8.19	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	129
8.20	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	130
8.21	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	130
8.22	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	130
8.23	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	131
8.24	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes del enfoque propuesto con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “All”. . . . .	132
8.25	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All” . . . . .	137
8.26	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All” . . . . .	139
8.27	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”. . . . .	145
8.28	Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”. . . . .	146
8.29	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”. . . . .	146
8.30	Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”. . . . .	147
8.31	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el enfoque propuesto con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”. . . . .	147

8.32	Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el enfoque propuesto con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . . . .	147
8.33	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . . .	148
8.34	Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B, $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans” . .	149
8.35	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “Spans” . . . . .	154
8.36	Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltonianos. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “Spans” . . . . .	155



---

# Capítulo 1

---

## INTRODUCCIÓN

La identificación de parámetros en modelos mediante la recolección de datos medidos es uno de los desafíos más importantes en la ingeniería moderna, lo cual puede abordarse utilizando un enfoque probabilístico bayesiano. En esta formulación, los parámetros se tratan como inciertos y la plausibilidad de sus valores se actualiza a medida que se obtiene información, presentándose en términos de su distribución de probabilidad a posteriori [1]. Este enfoque proporciona un marco robusto y riguroso. Sin embargo, para modelos de alta complejidad, se requieren herramientas computacionales eficientes que puedan manejar un número significativo de parámetros inciertos para calcular las estadísticas posteriores. Esto conlleva grandes esfuerzos computacionales, ya que implica resolver integrales de alta dimensionalidad que no pueden abordarse analíticamente. Dado lo anterior, es posible plantear un problema de actualización bayesiana como un problema de confiabilidad, utilizando el método BUS (Bayesian Updating with Structural Reliability Methods) [2]. Este enfoque permite una formulación eficiente cuando se acompaña del método subset simulation, el cual se basa en la simulación de muestras condicionadas a criterios de falla que permiten la evolución de las regiones de muestreo en cada etapa. Ahora bien, la implementación de esta estrategia posee dos aspectos importantes para tener en cuenta. El primero es la generación de muestras condicionadas de acuerdo con un criterio de falla intermedio. Para ello, en este trabajo se establecen dos metodologías. La primera es Metropolis-Hastings [3], basada en la generación de cadenas de Markov dada una distribución propuesta que genera muestras de falla para cada etapa, y junto a ello, también una calibración del parámetro de dispersión que controla la distancia entre la muestra inicial y la propuesta. Por otro lado, el segundo método es el Hamiltoniano [4], el cual es una forma más natural de generación

de muestras, pues se basa en conceptos de física para explorar las regiones por medio de un espacio de fases de posición y momento que no requiere de distribuciones adicionales, tan solo la calibración del tiempo de simulación para las trayectorias en las que la posición serán las muestras condicionadas. El segundo aspecto por considerar es la necesidad de un algoritmo de detención, pues debido a la formulación en los criterios de falla, no existe una cota superior en los umbrales. Sin embargo, si estos ya superan el valor máximo de log-verosimilitud, implicaría que ya se están generando muestras a posteriori, que es lo deseado. Por lo tanto, el algoritmo de detención debe comparar la máxima verosimilitud observada con el umbral de falla de cada etapa. Es en este contexto que se llevan a cabo cinco ejemplos de aplicación con el objetivo de mostrar de manera rigurosa que el marco de trabajo utilizado proporciona métodos de identificación de parámetros eficientes y que son posibles de implementar en cualquier modelo de simulación que se desee.

## 1.1 Objetivos Generales

Este trabajo desarrolla un marco probabilístico para abordar dos problemas asociados con la identificación de parámetros para distintos casos de aplicación. Por lo tanto, se formulan los siguientes objetivos generales:

1. Implementar y evaluar el enfoque de actualización Bayesiana para la identificación de parámetros en cada problema de aplicación basándose en la información a disposición en cada caso.
2. Verificar que ambos métodos de generación de muestras reproduzcan los mismos resultados.

## 1.2 Objetivos específicos

Los siguientes objetivos específicos han sido formulados para alcanzar los objetivos generales:

1. Comparar los valores objetivos con los parámetros actualizados por medio de ambos métodos.
2. Comparar las mediciones empleadas en la actualización de parámetros con las generadas por las muestras a posteriori mediante ambos métodos.

3. Verificar que se obtienen los mismos valores de evidencia, de modo que se llegan a las mismas áreas del espacio muestral a posteriori para ambos métodos.
4. Evaluar la consistencia de los métodos utilizados mediante múltiples ejecuciones independientes, garantizando la reproducibilidad y la estabilidad de los resultados obtenidos.

### 1.3 Estructura de la Tesis

Esta tesis consiste en ocho capítulos, estructurados de la siguiente forma.

- **Capítulo 1:** Descripción del problema, con sus consideraciones y relevancia. También se formulan los objetivos generales y específicos.
- **Capítulo 2:** Evaluación del estado del arte respecto a los algoritmos de generación de muestra.
- **Capítulo 3:** Formulación del enfoque estocástico en conjunto con el criterio de detención propuesto.
- **Capítulo 4:** Primer problema de aplicación enfocado en demostrar con valores teóricos los parámetros estadísticos actualizados.
- **Capítulo 5:** Segundo problema de aplicación enfocado en la identificación de rigideces del sistema que tiene como mediciones sus frecuencias naturales.
- **Capítulo 6:** Tercer problema de aplicación para un caso dinámico simple implementado en un software externo con mediciones en el dominio temporal.
- **Capítulo 7 :** Cuarto problema de aplicación para un caso dinámico de alta dimensionalidad aplicado a un edificio a corte con mediciones en el dominio temporal.
- **Capítulo 8 :** Quinto problema de aplicación para un caso dinámico de alta dimensionalidad aplicado a un puente con aisladores basados en fricción y mediciones en el dominio temporal.
- **Capítulo 9:** Discusión de las principales conclusiones.

---

## Capítulo 2

---

# ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se dará una revisión del estado del arte sobre los algoritmos utilizados para este trabajo, esto es, Metropolis-Hastings y Hamiltonian Monte Carlo.

### 2.1 Algoritmos de generación de muestras

Dentro de esta primera sección se describirán a grandes rasgos estos algoritmos junto a sus ventajas y limitaciones para cada caso.

#### 2.1.1 Algoritmo Metropolis-Hastings

El Algoritmo Metropolis-Hastings [3] es un método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov (MCMC) que se utiliza para obtener muestras de una distribución de probabilidad deseada, especialmente cuando la forma de la distribución es compleja y no se puede muestrear directamente. Este algoritmo es fundamental en la inferencia Bayesiana y se utiliza para estimar distribuciones a posteriori.

Para su implementación es necesario establecer la distribución objetivo  $\pi(x)$  y definir una distribución propuesta  $q(x'|x)$  que sugiere nuevos estados  $x'$  basados en el estado actual  $x$ . Para poder establecer si quedarnos con el estado  $x'$  propuesto es que se genera el siguiente criterio de aceptación

$$\alpha(x, x') = \min \left( 1, \frac{\pi(x')q(x|x')}{\pi(x)q(x'|x)} \right) \quad (2.1.1)$$

El valor  $\alpha(x, x')$  compara la probabilidad del nuevo estado  $x'$  con la probabilidad del estado

actual  $x$ . Si el nuevo estado tiene una mayor probabilidad, se aceptará. Si tiene una menor probabilidad, el nuevo estado tendrá una probabilidad de  $\alpha$  de ser aceptado. Esta tasa de aceptación puede llegar simplificarse si es que la distribución propuesta es simétrica, es decir,  $q(x|x') = q(x'|x)$ , como es en el caso de una distribución gaussiana o uniforme. Así se obtiene

$$\alpha(x, x') = \min \left( 1, \frac{\pi(x')}{\pi(x)} \right) \quad (2.1.2)$$

El problema principal de este algoritmo surge cuando se quiere llevar a altas dimensiones, puesto que las cadenas de Markov generadas eran altamente correlacionadas [5]. De modo que se desarrolló el *Modified Metropolis algorithm* (MMA), que usa el mismo criterio pero por componente, es decir que  $\pi(x) = \prod_{k=1}^d \pi_k(x_k)$  con  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $x' \in \mathbb{R}^d$ . Esto implica que, para usar el método, las distribuciones  $\pi(x)$  deben expresarse como el producto de distribuciones independientes asociadas a cada componente del estado  $x$  [5].

A partir del método anterior se han llegado a proponer más modificaciones, como es el caso de *Metropolis–Hastings algorithm with Delayed Rejection* (MMHDR), donde, en caso de rechazar el estado propuesto  $x'$ , se continúen generando hasta que uno sea aceptado. Si bien esta alternativa reduce la correlación entre los estados, el costo computacional es muy elevado, y el rendimiento no es tan significativo [5]. Un aspecto con mayor relevancia es la elección de la distribución propuesta  $q(x'|x)$ . Más allá del tipo de distribución, es su dispersión, y por ende su desviación estándar  $\sigma$ , tiene un mayor impacto [2]. Si  $\sigma$  es demasiado pequeña, los estados estarán muy correlacionados debido a su proximidad. Por otro lado, si  $\sigma$  es demasiado grande, la tasa de aceptación disminuirá. Por ello, de manera heurística, se ha determinado que el valor óptimo de  $\sigma$  debe calibrarse de tal forma que la tasa de aceptación este entre el 30% y el 50%.

#### **Ventajas:**

- El algoritmo es ampliamente aplicable y no requiere la normalización de la distribución objetivo.
- Es eficaz para muestrear desde distribuciones complejas y de alta dimensionalidad [2].

#### **Limitaciones:**

- La eficiencia del algoritmo depende en gran medida de la elección de la función de propuesta.
- Se requieren simulaciones adicionales para la calibración del parámetro de dispersión utilizado en la distribución propuesta.

- Las muestras pueden no llegar a explorar toda la zona asociada a la distribución de interés.
- Requieren de *Burn-in period*, es decir, un periodo de generación de muestras necesario para tender a la distribución estacionaria.
- Requiere que los parámetros a identificar sean independientes.

### 2.1.2 Algoritmo Hamiltoniano

El Método Hamiltoniano, también conocido como Monte Carlo Hamiltoniano o HMC [4, 6, 7] por sus siglas en inglés, es un algoritmo de Monte Carlo que utiliza conceptos de la mecánica Hamiltoniana para generar muestras de una distribución de probabilidad objetivo. Este método es especialmente útil para muestrear distribuciones de alta dimensionalidad y con correlación entre las variables aleatorias.

El Método Hamiltoniano se basa en la formulación Hamiltoniana de la dinámica de sistemas físicos, donde se consideran tanto las posiciones como los momentos de las partículas en el espacio fase. Al aplicar este enfoque a problemas de muestreo, se introduce un conjunto de "momentos" artificiales que interactúan con las coordenadas de las variables de interés. Esto permite explorar eficientemente el espacio de estados sin depender únicamente de cadenas aleatorias, se puede ver más en detalle su derivación en la sección C.1. La forma en que el espacio de posiciones y momentos evoluciona a partir de una energía potencial, que depende únicamente de la posición, y una energía cinética que puede depender de la posición y el momento. Debido a este grado de libertad se pueden elegir infinitas alternativas, como  $S$  que dependiendo de la métrica  $M$  en el espacio de posiciones, inducirá una estructura inversa en el espacio de momentos [4], definiendo de la siguiente forma la energía cinética,

$$K(q, p) = \frac{1}{2} p^T \cdot M^{-1} \cdot p + \log |M| + \text{const.} \quad (2.1.3)$$

Para casos en que las regiones de integración presenten fuertes curvaturas, están las  $\Sigma$ , donde la métrica dependerá de la covarianza de la posición actual de la partícula [4], definiendo de la siguiente forma la energía cinética,

$$K(q, p) = \frac{1}{2} p^T \cdot \Sigma^{-1}(q) \cdot p + \frac{1}{2} \log |\Sigma(q)| + \text{const.} \quad (2.1.4)$$

Si bien, la distribución de momentos no necesita ser necesariamente gaussiana, si se recomienda, pues tienen más base teórica y tienen un mejor rendimiento en altas dimensiones que distribuciones no gaussianas [4]. Por último, desde el punto de vista de la resolución

de la ecuación diferencial requerida por el método, existen alternativas para los casos sin solución analítica, como el uso de técnicas de integración numérica ad-hoc, tales como el *Leapfrog Integration* [4].

**Ventajas:**

- El algoritmo es ampliamente aplicable y no requiere la normalización de la distribución objetivo.
- Conservación de la energía: El método conserva la energía total a lo largo de las trayectorias simuladas, lo que garantiza una exploración eficiente del espacio de estados.
- Eficiencia en espacios de alta dimensión: A diferencia de los *random walk methods*, el HMC puede explorar eficazmente distribuciones de probabilidad en espacios de alta dimensión.
- Muestras correlacionadas: Las muestras generadas por el HMC tienden a estar menos correlacionadas que las obtenidas por métodos MCMC más simples, lo que puede mejorar la eficiencia del muestreo.
- Puede implementarse en problemas cuyos parámetros identificación no sean independientes.

**Limitaciones:**

- Requiere cálculos costosos: En algunos casos el método requiere el cálculo de derivadas parciales de la función de energía, lo que puede ser computacionalmente costoso en algunos casos.
- Sensibilidad a parámetros: La efectividad del HMC puede depender de la selección adecuada de parámetros como la longitud de la trayectoria y el tamaño del paso de integración.
- Implementación compleja: La implementación del algoritmo HMC puede ser más compleja que otros métodos de Monte Carlo debido a sus fundamentos teóricos y la eventual necesidad de resolver ecuaciones diferenciales mediante métodos especializados.

# FORMULACIÓN BAYESIAN MODEL UPDATING

El objetivo de Bayesian Model Updating, desde una perspectiva basada en simulación, es obtener muestras de los parámetros inciertos  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  que siguen la distribución a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta} | D, M)$  correspondiente a un modelo de clase  $M$  y datos de medición disponibles  $D$  [1]. De acuerdo con el teorema de Bayes, esta distribución viene dada por

$$p(\boldsymbol{\theta} | D, M) = \frac{p(\boldsymbol{\theta} | M)p(D | \boldsymbol{\theta}, M)}{P[D | M]} \quad (3.0.1)$$

donde  $p(\boldsymbol{\theta} | M)$  es la distribución a priori,  $p(D | \boldsymbol{\theta}, M)$  es la función de verosimilitud, y  $P[D | M]$  es la evidencia. En este contexto,  $p(\boldsymbol{\theta} | M)$  representa el grado de plausibilidad para cada valor de los parámetros del modelo antes de cualquier nuevo conocimiento acerca del comportamiento del sistema sea incorporado. Por otro lado, la función de verosimilitud  $p(D | \boldsymbol{\theta}, M)$  mide cuán plausible es obtener mediciones  $D$  desde el modelo  $M$  con valores de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$ . Esta función cuantifica la semejanza entre datos de medición y el modelo de predicción bajo una configuración probabilística. Finalmente, la evidencia  $P[D | M]$  es una constante de normalización que asegura que al integrar la distribución a posteriori se obtenga la unidad. Esta cantidad es fundamental en el contexto de los problemas de selección de clases del modelo Bayesiano y se define como

$$P[D | M] = \int_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p(\boldsymbol{\theta} | M)p(D | \boldsymbol{\theta}, M)d\boldsymbol{\theta} \quad (3.0.2)$$

Para aplicaciones realistas, la distribución a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta} \mid D, M)$  no se puede definir analíticamente ni sigue una distribución de probabilidad estándar. En este sentido, varias técnicas para modelos de actualización basados en simulación estocástica han sido desarrollados MCS [8], MCMC [9, 10], TMCMC [11], MMA [5] y HMC [4, 12]. Este trabajo considera el marco de *Actualización Bayesiana con métodos de confiabilidad estructural* o *Bayesian model updating with reliability methods* (BUS), en el que el problema de generar muestras a posteriori se transforma en un problema de obtener muestras de fallas asociadas con un evento de falla especialmente diseñado. En particular, un enfoque basado en subset simulation es implementado.

### 3.1 Actualización Bayesiana con métodos de confiabilidad estructural

En el contexto de BUS, los parámetros del modelo siguen la distribución a priori, esto es,  $\boldsymbol{\theta} \sim p(\boldsymbol{\theta} \mid M)$ , y una variable auxiliar uniformemente distribuida entre  $[0, 1]$  es introducida como  $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$  [13]. Además, por simplicidad, la función de verosimilitud es escrita como  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = p(D \mid \boldsymbol{\theta}, M)$ . Por lo tanto, el espacio aumentado de variables aleatorias es  $\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle$ , y el evento de falla auxiliar se define como

$$\Omega_F = \{\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\} \quad (3.1.1)$$

y, equivalentemente

$$\begin{aligned} \Omega_F &= \{\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) > u\} \\ \Rightarrow \Omega_F &= \left\{ \langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{u} > c^{-1} \right\} \\ \Rightarrow \Omega_F &= \{\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : \ln(\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) - \ln(u) > \ln(c^{-1})\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Entonces, introduciendo la función de log-verosimilitud o log-likelihood  $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln(\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}))$ , la *función de demanda auxiliar*  $d(u, \boldsymbol{\theta}) = \ell(\boldsymbol{\theta}) - \ln(u)$  y el *umbral auxiliar*  $d^* = \ln(c^{-1})$ , el dominio de falla auxiliar  $\Omega_F$  puede ser escrito como

$$\Omega_F = \{\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : d(u, \boldsymbol{\theta}) > d^*\} \quad (3.1.3)$$

Note que, en la Ec. (3.1.3), el multiplicador de verosimilitud  $c$  no aparece en la definición de la demanda auxiliar, sino que sólo en el correspondiente umbral.

La distribución marginal de  $\boldsymbol{\theta}$  condicionado al evento de falla  $F$  coincide con la distribución a posteriori del problema de Actualización Bayesiana, esto es

$$p(\boldsymbol{\theta} | F) = p(\boldsymbol{\theta} | D, M), \quad (3.1.4)$$

siempre y cuando  $c \leq 1/\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  o, equivalentemente,  $d^* \geq \max_{\boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta})$  [13–15]. Sin embargo, encontrar el máximo de la función de verosimilitud es inviable para la mayoría de los casos prácticos y, por el contrario, hacer una aproximación demasiado conservadora (i.e. elegir un valor alto para  $d^*$ ) puede reducir la eficiencia del proceso de muestreo general de manera significativa. En este trabajo se implementa un enfoque que no requiere conocer de antemano el multiplicador de verosimilitud. El esquema propuesto se basa en subset simulation y explota la habilidad de este método para explorar sucesivamente regiones del espacio de parámetros inciertos que tienen cada vez valores más grandes para la función de demanda [13].

### 3.1.1 Demostración de la formulación basada en BUS

**Teorema:** Sea  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$  un vector aleatorio distribuido como:  $q(\boldsymbol{\theta})$  y  $U$  sea una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre  $[0, 1]$ ; con  $\boldsymbol{\theta}$  y  $U$  independientes. Sea  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  una función escalar no negativa de  $\boldsymbol{\theta}$ . Se define  $Y = \ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})/U]$  y  $b = -\ln c$ , donde  $c \in \mathbb{R}$  [13]. Entonces, para cualquier  $b > \ln[\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})]$

1. La distribución de  $\boldsymbol{\theta}$  condicionado por  $\{Y > b\}$  es  $p_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}) = P_{\mathcal{D}}^{-1}q(\boldsymbol{\theta})\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  donde  $P_{\mathcal{D}} = \int q(z)\mathcal{L}(z)dz$  es una constante de normalización
2.  $P_{\mathcal{D}} = e^b P(Y > b)$ .

*Demostración 1:* Note que los eventos  $\{Y > b\}$  y  $\{c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) > U\}$  son equivalentes. Además, dado que,  $c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) < 1$ , ya que,  $c < [\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$ , o de forma equivalente  $b > \ln[\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})]$ ; se puede definir la siguiente función de distribución auxiliar

$$p_{\boldsymbol{\theta}', U'}(\boldsymbol{\theta}, u) = P_F^{-1}q(\boldsymbol{\theta})I(0 \leq u \leq 1)I(u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.1.5)$$

donde

$$P_F = \iint q(\boldsymbol{\theta})I(0 \leq u \leq 1)I(u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}))dud\boldsymbol{\theta} \quad (3.1.6)$$

Por lo tanto, podemos simplificar ambas funciones indicatriz en una sola e integrar la variable aleatoria uniforme de la distribución (3.1.5) resultando en

$$p_{\theta', U'}(\boldsymbol{\theta}, u) = P_F^{-1}q(\boldsymbol{\theta})I(0 \leq u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} p_{\theta'}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_0^1 p_{\theta', U'}(\boldsymbol{\theta}, u) du \\ &= \int_0^1 P_F^{-1}q(\boldsymbol{\theta})I(0 \leq u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) du \\ &= P_F^{-1}q(\boldsymbol{\theta}) \int_0^1 I(0 \leq u < c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) du \\ &= P_F^{-1}q(\boldsymbol{\theta})c\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto p_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Tanto el criterio de falla auxiliar como la cota para el multiplicador de verosimilitud son esenciales para garantizar que el problema de actualización bayesiana converja a la distribución a posteriori.

*Demostración 2:* Para calcular la probabilidad de ocurrencia del evento  $\{Y > b\}$  se tiene

$$\begin{aligned} P(Y > b) &= \iint q(\theta)I(0 < u < 1)I\left(\ln\left[\frac{\mathcal{L}(\theta)}{u}\right] > b\right) dud\theta \\ &= \int q(\theta) \int_0^1 I(u < e^{-b}\mathcal{L}(\theta)) dud\theta \\ &= e^{-b} \int q(\theta)\mathcal{L}(\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

El desarrollo anterior se explica debido a que  $b > \ln[\max_{\theta} \mathcal{L}(\theta)]$ , implica que  $e^{-b}\mathcal{L}(\theta) < 1$ . Por último, como  $P_{\mathcal{D}} = \int q(z)\mathcal{L}(z)dz$  se tiene que

$$P_{\mathcal{D}} = e^b P(Y > b) \quad (3.1.10)$$

o también como

$$\ln(P_{\mathcal{D}}) = b + \ln(P(Y > b)) \quad (3.1.11)$$

En resumen este teorema proporciona una base matemática sólida para la implementación de los procedimientos desarrollados en este documento. Cabe destacar que el pilar fundamental de este teorema se basa en poder hallar el valor máximo de log-verosimilitud, lo cual no es posible de asegurar, ya que, en la práctica lo único que es posible obtener es un valor máximo observado.

### 3.2 Marco de trabajo de subset simulation

En el contexto de subset simulation, una secuencia de dominios de falla intermedios  $\Omega_{F_\kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, \dots, m$ , se definen como

$$\Omega_{F_\kappa} = \{\langle u, \boldsymbol{\theta} \rangle : d(u, \boldsymbol{\theta}) > d_\kappa^*\}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, m \quad (3.2.1)$$

donde  $\Omega_{F_0} \supset \Omega_{F_1} \supset \dots \supset \Omega_{F_m} = \Omega_F$  y  $-\infty = d_0^* < d_1^* < \dots < d_m^* = d^*$ . Los umbrales intermedios,  $d_\kappa^*$ ,  $\kappa = 1, \dots, m$ , son definidos de forma adaptativa para garantizar  $P[F_\kappa | F_{\kappa-1}] = p_0$  donde, típicamente,  $p_0 \in [0.1, 0.3]$ . Por lo tanto, subset simulation puede interpretarse como un método que explora regiones del espacio de parámetros inciertos con valores cada vez más grandes para la función de demanda sin requerir a priori especificar un umbral objetivo  $d^*$  [13].

En el contexto de BUS, la implementación de subset simulation implica que las muestras de falla asociadas con valores cada vez más grandes de umbrales intermedios pueden ser generadas sin necesidad de saber el valor máximo de la función log-likelihood antes de que la simulación entre en proceso. De hecho, una alternativa es detener el proceso de simulación cuando el umbral intermedio es mayor que el máximo valor de la función log-likelihood observada durante el proceso de generación de muestras. Sobre la base de esta idea, una alternativa de implementación de subset simulation en el contexto de BUS es propuesta. De hecho, sólo el criterio de detención de la tradicional implementación de subset simulation necesita ser cambiada, el resto del algoritmo queda igual. Ciertamente esto es muy beneficioso del punto de vista práctico.

El criterio de detención tradicional es

<b>Subset simulation - Criterio de detención tradicional</b>
Si $d_\kappa^* > d^*$ , establecer $m = \kappa$ , $d_m^* = d^*$ , y detener el proceso de simulación.

En cambio el criterio de detención propuesto es

**Subset simulation - Criterio de detención propuesto**

Si  $d_\kappa^* > d^{\text{aux}}$ , establecer  $d^* = d^{\text{aux}}$ ,  $m = \kappa$ ,  $d_m^* = d^*$ , y detener el proceso de simulación, donde

$$d^{\text{aux}} = \max_{p=0,1,\dots,\kappa} \max_{q=1,\dots,N} d(\theta_p^q, u_p^q) + \ln(u_p^q)$$

con  $\langle \theta_p^q, u_p^q \rangle$ ,  $q = 1, \dots, N$ , el conjunto de muestras obtenidas durante la etapa  $p = 0, 1, \dots, \kappa$ .

Note que  $d^{\text{aux}}$  es el valor máximo observado de la función log-likelihood y es convenientemente escrita en términos de la función de demanda  $d(\cdot)$ . De este modo, se reduce el número de cambios en la implementación tradicional de subset simulation y, por lo tanto, se mejora la viabilidad de integrar este enfoque con las herramientas computacionales disponibles.

**3.2.1 Evidencia estimada**

La evidencia  $P[D | M]$  se puede estimar mediante el enfoque propuesto como [13]

$$P[D | M] = P[F] \times e^{d^*} \quad (3.2.2)$$

o, equivalentemente, la log-evidencia esta dada por

$$\ln(P[D | M]) = \ln(P[F]) + d^* \quad (3.2.3)$$

y luego,

$$\ln(P[D | M]) = \ln(P[F]) + \max_{\kappa=0,1,\dots,m} \max_{q=1,\dots,N} [d(\theta_\kappa^q, u_\kappa^q) + \ln(u_\kappa^q)] \quad (3.2.4)$$

**3.2.2 Etapas intermedias**

En el marco de trabajo propuesto, las muestras generadas por los parámetros de identificación durante las diferentes etapas de subset simulation siguen distribuciones que se acercan cada vez más a la distribución a posteriori. Además, las muestras condicionadas a los eventos de falla intermedios,  $F_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, m$  (ver Sección 3.1), se extraen de distribuciones asociadas con valores de multiplicadores de verosimilitud que disminuyen sucesivamente. Dado que el multiplicador de verosimilitud asociado al evento de falla intermedio  $F_\kappa$  es mayor que el valor óptimo real, cada conjunto de muestras se obtiene en realidad de una distribución truncada,  $p(\theta | F_\kappa) = p_{\text{trunc}}(\theta; d_\kappa^*)$ . Esta distribución trun-

cada es proporcional a la región de la distribución a posteriori [15], cuyos valores de función de verosimilitud son menores que el inverso del multiplicador de verosimilitud asociado al umbral intermedio actual ( $c_{\kappa}^{-1} = \exp(d_{\kappa}^*)$ ), y proporcional a la distribución a priori en el resto del dominio. Formalmente, esta distribución se expresa como

$$p_{\text{trunc}}(\boldsymbol{\theta}; d_{\kappa}^*) \propto p(\boldsymbol{\theta}) \times \min(\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}), \exp(d_{\kappa}^*)), \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (3.2.5)$$

Por lo tanto, aunque las muestras obtenidas durante las etapas intermedias de subset simulation no siguen la distribución a posteriori real, aún proporcionan información valiosa sobre la sensibilidad de la función de densidad de probabilidad a posteriori con respecto a los diferentes parámetros de identificación.

### 3.2.3 Detalles generales de implementación

En este trabajo se consideran los siguientes detalles de implementación:

#### Algoritmo Metropolis:

- El proceso de muestreo se realiza en el espacio normal estándar.
- La distribución propuesta B.1.2, a nivel de componente, se toma como local y uniforme con propagación  $\chi$ .
- Cada 100 muestras, el valor de  $\chi$  aumenta o disminuye dependiendo de si la tasa de aceptación observada está por encima 50% o debajo de 30%, respectivamente [12].

#### Algoritmo Hamiltoniano:

- En el espacio de fase, las distribuciones asociadas a la posición y al momento son gaussianas con métricas euclidiana igual a la identidad.
- Cada 5 cadenas intermedias, el valor de  $t_f$  aumenta o disminuye dependiendo de si la tasa de aceptación observada está por encima 50% o debajo de 30%, respectivamente [12].

En base a estas consideraciones, los parámetros del algoritmo que debe definir el usuario son el número de muestras por etapa,  $N_s$ , y la probabilidad condicional,  $p_0$ . Recuerde que estos valores deben elegirse de tal manera que  $N_s \times p_0$  y  $1/p_0$  sean valores enteros.

# APLICACIÓN 1: PROBLEMA DE PRUEBA

En este capítulo, como introducción al método BUS en la aplicación de un problema de prueba, se presenta una distribución a priori y una función de verosimilitud que dan como resultado una distribución a posteriori analítica [14]. Esto permite comparar los resultados del método directamente con los valores exactos para las estadísticas de los parámetros a identificar.

### 4.1 Descripción del problema

Obtener  $E(\theta)$  y  $\sigma(\theta)$  de las muestras condicionales tal que  $Y > d^*$ , donde  $d^*$  corresponde a la máxima log-verosimilitud observada.

Donde se define

$$(\theta, u) \sim (q(\theta) \times U_{[0,1]}) \quad \text{Distribución aumentada}$$

$$q(\theta) = \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{Distribución a priori del parámetro } \theta$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{N}(3, 0.3) = \frac{1}{0.3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-3}{0.3}\right)^2} \quad \text{Función de verosimilitud}$$

$$Y = \log\left(\frac{\mathcal{L}(\theta)}{u}\right) \quad \text{Función de demanda auxiliar}$$

De modo que el máximo valor de log-verosimilitud es

$$\max \log \mathcal{L}(\theta) = -\log(0.3\sqrt{2\pi}) = 0.285 \quad (4.1.1)$$

Para el cálculo de la distribución a posteriori se tiene

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}}(\theta) &= \frac{q(\theta)\mathcal{L}(\theta)}{p_{\mathcal{D}}} \\ \mu_{\text{prior}} &= \mu_p, \quad \mu_{\text{likelihood}} = \mu_l, \quad \sigma_{\text{prior}} = \sigma_p, \quad \sigma_{\text{likelihood}} = \sigma_l \\ p_{\mathcal{D}}(\theta) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_l}{\sigma_l}\right)^2\right) \\ p_{\mathcal{D}}(\theta) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \left(\frac{\sigma_p^2 \cdot \mu_l + \sigma_l^2 \cdot \mu_p}{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}\right)}{\frac{\sigma_p \cdot \sigma_l}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}}}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Por lo tanto  $p_{\mathcal{D}}(\theta)$  también es una distribución normal, y ya que al integrar sobre todo el espacio el resultado debe ser igual a la unidad, la forma explícita de  $p_{\mathcal{D}}(\theta)$  es

$$p_{\mathcal{D}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\sigma_p^2 \cdot \sigma_l^2}{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \left(\frac{\sigma_p^2 \cdot \mu_l + \sigma_l^2 \cdot \mu_p}{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_p^2 \cdot \sigma_l^2}{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}}}\right)^2\right) \quad (4.1.3)$$

De modo que, si se tiene una distribución normal para la función a priori y verosimilitud, la función a posteriori también lo será.

En cuanto a los estimadores se tienen los siguientes valores

$$\mu_{\text{posterior}} = \frac{\sigma_p^2 \cdot \mu_l + \sigma_l^2 \cdot \mu_p}{\sigma_p^2 + \sigma_l^2} = \frac{1^2 \cdot 3 + 0.3^2 \cdot 0}{1^2 + 0.3^2} = 2.7523 \quad (4.1.4)$$

$$\sigma_{\text{posterior}} = \frac{\sigma_p \cdot \sigma_l}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_l^2}} = \frac{1 \cdot 0.3}{\sqrt{1^2 + 0.3^2}} = 0.2873 \quad (4.1.5)$$

Por último, como  $P_{\mathcal{D}} = \int q(\theta)\mathcal{L}(\theta)d\theta$  se puede demostrar que para este caso es igual a

$$P_{\mathcal{D}} = \frac{e^{-\frac{(\mu_p - \mu_l)^2}{2(\sigma_p^2 + \sigma_l^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_p^2 + \sigma_l^2)}} = 6.1551 \times 10^{-3} \quad (4.1.6)$$

$$\log(P_D) = -\frac{(\mu_p - \mu_l)^2}{2(\sigma_p^2 + \sigma_l^2)} - \frac{1}{2} \log(2\pi(\sigma_p^2 + \sigma_l^2)) = -5.0905 \quad (4.1.7)$$

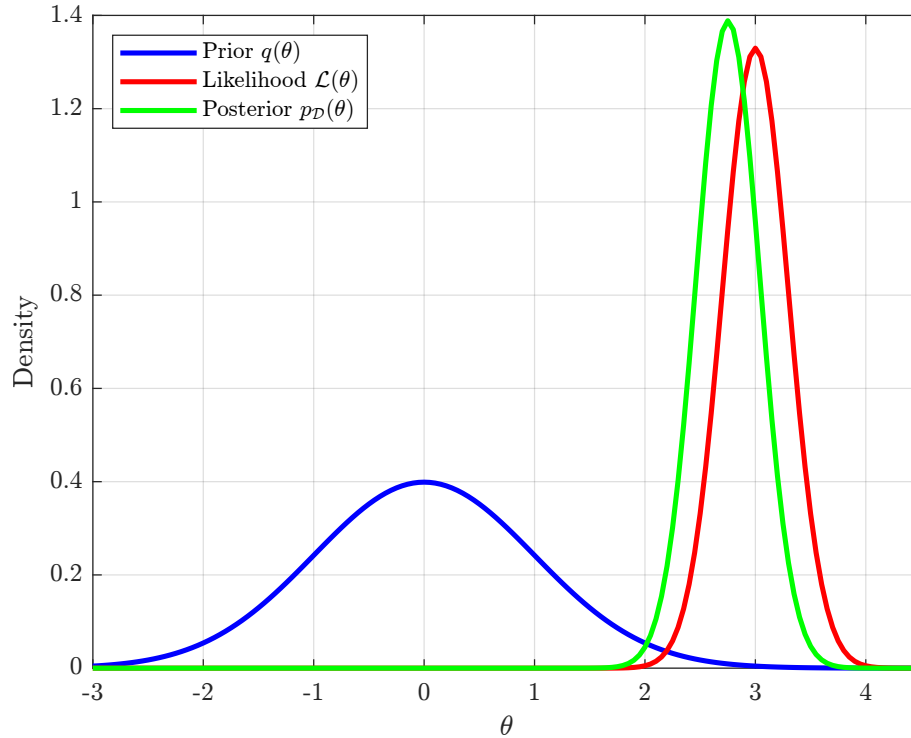


Figura 4.1: Función de densidad de probabilidad a priori y posteriori, y función de verosimilitud

## 4.2 Detalles de la implementación

BUS con subset simulation se implementa de acuerdo a la sección 3.1. Los siguientes parámetros definidos por el usuario son considerados en este escenario

- Número de muestras por etapa:  $N_s = 10.000$ .
- Probabilidad condicional:  $p_0 = 0.1$ .
- Se consideran seis ejecuciones independientes, empleando distintas semillas para la generación de números aleatorios.
- Se considera una etapa adicional a modo de generar una mayor cantidad de muestras.

## 4.3 Resultados: Bayesian Model Updating

### 4.3.1 Muestras a posteriori

Para ejemplificar el funcionamiento de la formulación BUS en conjunto con subset simulation la Figura 4.2 representa la evolución de las muestras en el espacio normal estándar, mientras que la Figura 4.3 representa el mapeo de las muestras en el espacio físico y uniforme. Se puede apreciar claramente como en la última etapa las muestras se distribuyen de acuerdo con la distribución a posteriori como se ve en la Figura 4.1.

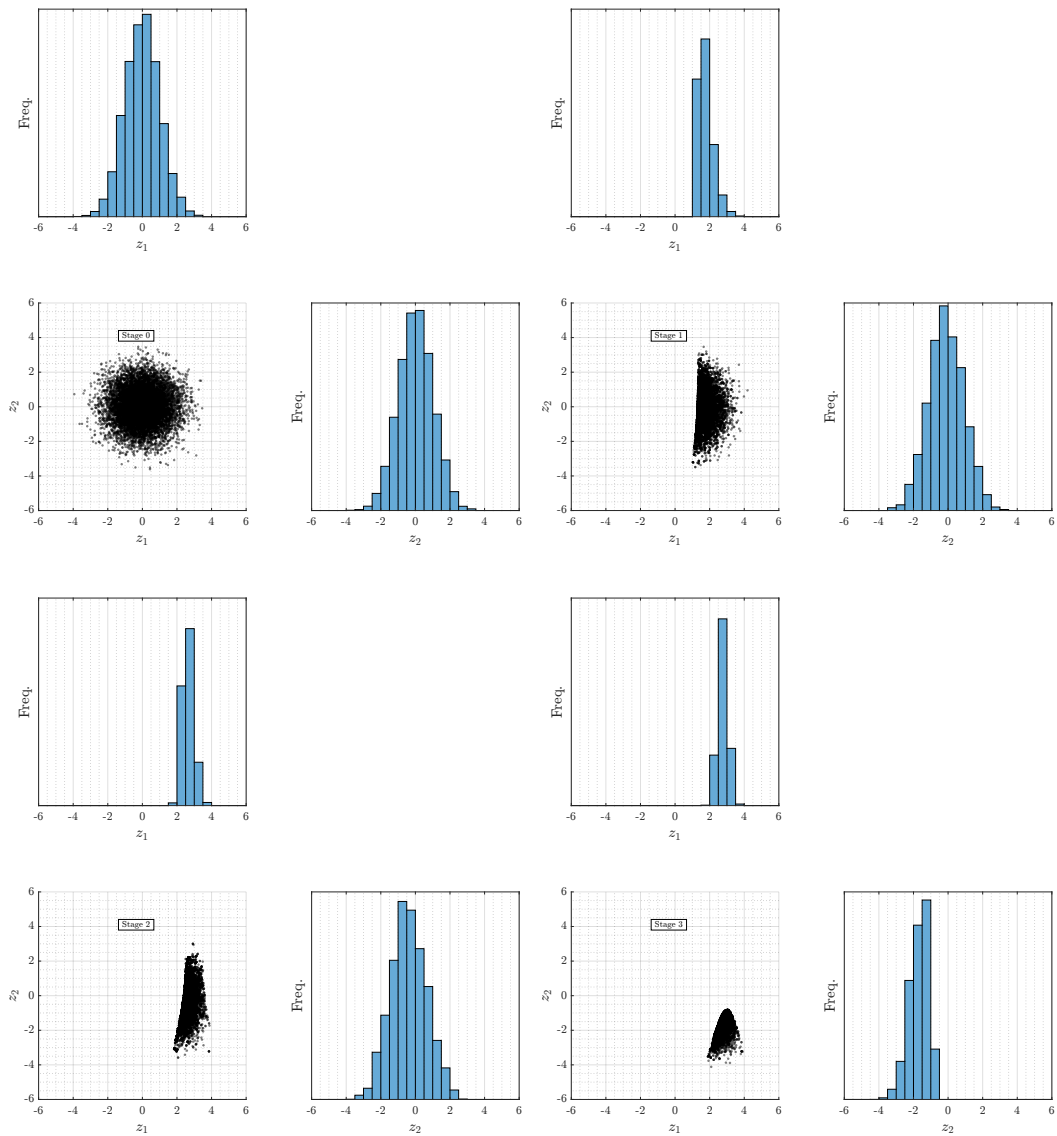


Figura 4.2: Evolución de las muestras en el espacio de parámetros normal estándar obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano

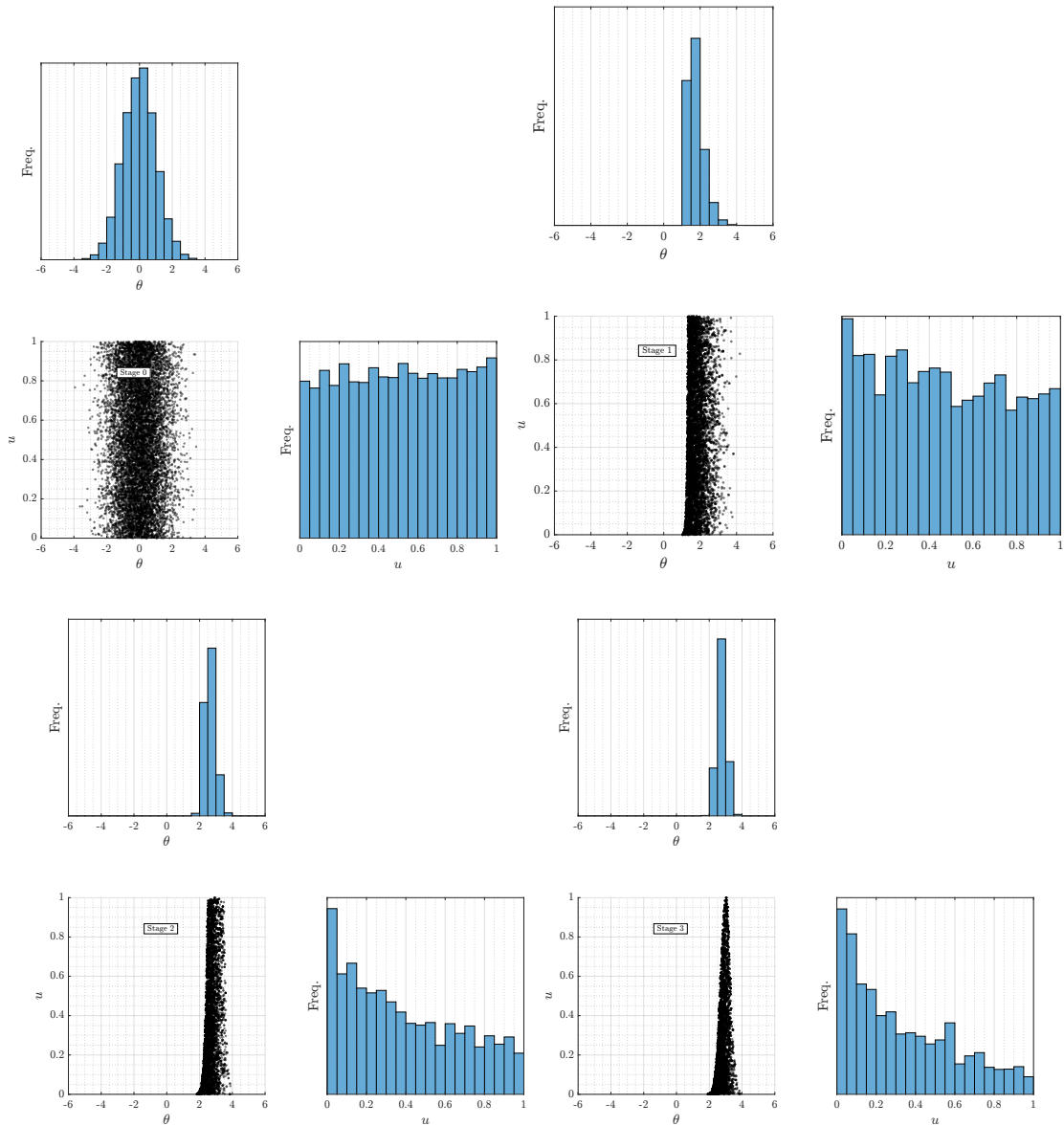


Figura 4.3: Evolución de las muestras en el espacio de parámetros incierto  $(\theta, u)$  obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano

Las Figuras 4.4 y 4.5 muestran los histogramas marginales de  $\theta$  en cada ejecución, y como se observa, todos se distribuyen siguiendo la forma de la distribución a posteriori exacta 4.1.

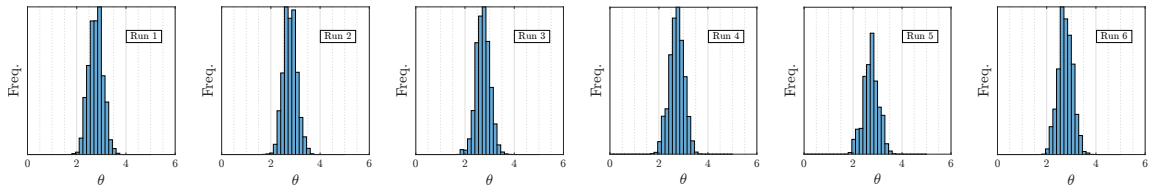


Figura 4.4: Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis

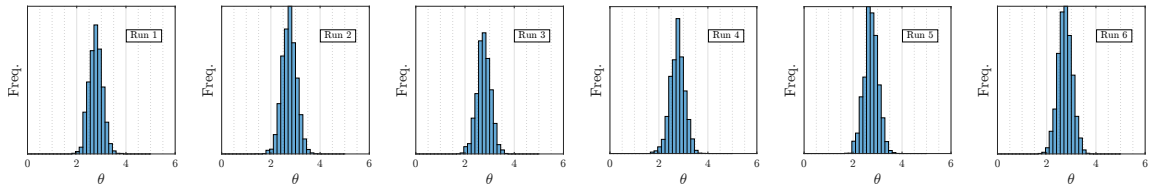


Figura 4.5: Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

En cuanto al parámetro  $\theta$  se generaron 6 ejecuciones independientes para la estimación de su esperanza y desviación estándar, a modo de verificar la consistencia del método.

	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5	Run 6
$E(\theta)$	2.7748	2.7799	2.7310	2.7203	2.7283	2.7595
$\sigma(\theta)$	0.2847	0.2693	0.2731	0.3003	0.3122	0.2904

Tabla 4.1: Esperanza y desviación estándar de  $\theta$  correspondiente a cada ejecución con el método Metropolis

	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5	Run 6
$E(\theta)$	2.7697	2.7471	2.7602	2.7563	2.7336	2.7475
$\sigma(\theta)$	0.2695	0.2941	0.2797	0.2944	0.2901	0.2870

Tabla 4.2: Esperanza y desviación estándar de  $\theta$  correspondiente a cada ejecución con el método Hamiltoniano

Como se observa en las Tablas 4.1 y 4.2,  $E(\theta)$  y  $\sigma(\theta)$  presentan leves diferencias en sus valores, sin embargo, hay consistencia en ambos métodos.

Si tomamos el promedio de ambos estimadores para todas las ejecuciones del método Metropolis tenemos

$$E(\theta) = 2.7490 \quad \text{y} \quad \sigma(\theta) = 0.2883$$

Y para el método Hamiltoniano obtenemos

$$E(\theta) = 2.7524 \quad \text{y} \quad \sigma(\theta) = 0.2858$$

Los estimadores de los valores esperados y desviación estándar se parecen a los parámetros asociados a la función de verosimilitud, siendo 3 y 0.3 respectivamente, sin embargo no son los mismos, esto es debido a que los valores tienden a los estimadores de la función de distribución a posteriori 4.1.4 4.1.5.

Por lo tanto, en base a los estimadores obtenidos, se puede concluir que para este ejemplo de aplicación el método genera que las muestras sigan la distribución a posteriori.

### 4.3.2 Evidencia estimada

Como se observa en las Tablas 4.3 y 4.4, la formulación BUS con ambos métodos proporciona estimaciones de log-evidence que son bastante cercanas al valor exacto 4.1.7.

Tabla 4.3: Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	0.2850	-5.3104	-5.0254
2	0.2850	-5.3621	-5.0771
3	0.2850	-5.4266	-5.1416
4	0.2850	-5.2852	-5.0002
5	0.2850	-5.4271	-5.1420
6	0.2850	-5.3414	-5.0564

Tabla 4.4: Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	0.2850	-5.1952	-4.9102
2	0.2850	-5.2943	-5.0093
3	0.2850	-5.3021	-5.0171
4	0.2850	-5.1506	-4.8656
5	0.2850	-5.3124	-5.0274
6	0.2850	-5.3587	-5.0737

### 4.3.3 Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios

Se puede apreciar tanto en las Tablas 4.5 y 4.6, como en las Figuras 4.6 y 4.7 que los valores máximos de log-verosimilitud son los mismos que la solución exacta 4.1.1.

Tabla 4.5: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$
0	-15.1462	0.2831	-14.8854	0.2845	-14.6738	0.2849
1	-0.9492	0.2850	-1.1869	0.2848	-1.4750	0.2849
2	1.8651	0.2850	1.7889	0.2850	1.8060	0.2850
3	4.1752	0.2850	4.0570	0.2850	4.4115	0.2850

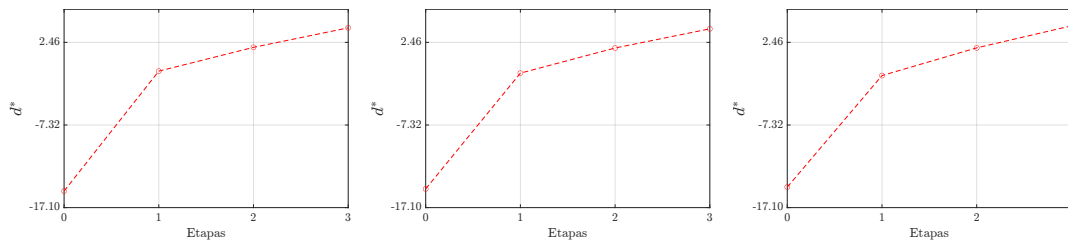


Figura 4.6: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis

Tabla 4.6: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}})$
0	-15.1462	0.2831	-14.8854	0.2845	-14.6738	0.2849
1	-1.0569	0.2850	-1.3008	0.2849	-1.2348	0.2850
2	1.8628	0.2850	1.8203	0.2850	1.7562	0.2850
3	4.0541	0.2850	4.3080	0.2850	4.0155	0.2850

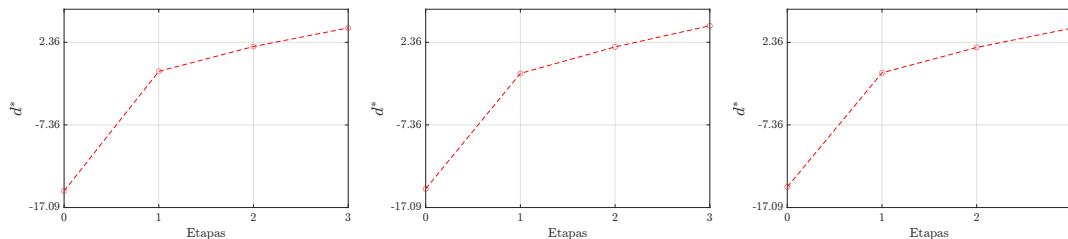


Figura 4.7: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

Como se menciona anteriormente, el proceso puede extenderse por más etapas, en este caso se ejecutó una etapa adicional, la cual proporciona  $N_s = 10.000$  muestras adicionales. Por

otro lado, el parámetro  $d^*$  se estabiliza en la etapa uno, ya que, se alcanzó su máximo de 0.285 como se ve en las Figuras 4.6 y 4.7.

## 4.4 Conclusiones

En este ejemplo de muestras condicionadas se utilizaron dos algoritmos, tanto el Metropolis como el Hamiltoniano, ambos arrojando resultados prácticamente idénticos y demostrando un rendimiento equivalente.

Se extraen las siguientes conclusiones generales

- (a) Como se esperaba, el enfoque usando Metropolis-Hastings permite generar muestras a posteriori de manera efectiva. Por otro lado, usando Hamiltonian Monte Carlo se llegan a los mismos valores y en la misma cantidad de etapas, demostrando que es una excelente alternativa en la identificación de parámetros.
- (b) Los estadísticos convergen de manera muy precisa a los valores teóricos esperados.
- (c) La evidencia obtenida por medio de la formulación BUS empleando ambos métodos son muy cercanos al valor teórico.
- (d) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy cercano al valor máximo teórico. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori se explora efectivamente en este escenario.

# APLICACIÓN 2: SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

En este capítulo, se considera un sistema físico de dos grados de libertad, con mediciones de sus frecuencias naturales. De esta manera, se identificarán las rigideces asociadas a las muestras a posteriori obtenidas.

## 5.1 Descripción del problema

Se considera una estructura de dos pisos modelada como un sistema a corte de dos grados de libertad sin amortiguamiento. Las masas de la estructura son conocidas y se disponen de mediciones de sus frecuencias naturales [14, 16].

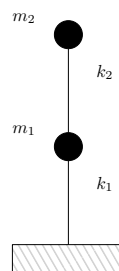


Figura 5.1: Modelo de la estructura.

Donde tenemos como datos los siguientes valores

$$m_1 = 16.5 \cdot 10^3 \text{ kg} , m_2 = 16.1 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$\hat{f}_1 = 3.13 \text{ hz} , \hat{f}_2 = 9.83 \text{ hz} \quad \text{Frecuencias medidas}$$

Las muestras generadas serán mapeadas al espacio físico, siguiendo las siguientes distribuciones, las cuales están asociadas a las rigideces del sistema.

$$\mu_{\theta_1} = 1.3 , \mu_{\theta_2} = 0.8 , \sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2} = 1$$

$$\mu_i = \log\left(\frac{\mu_{\theta_i}^2}{\sqrt{(\mu_{\theta_i}^2 + \sigma_{\theta_i}^2)}}\right)$$

$$\sigma_i = \log\left(1 + \frac{\sigma_{\theta_i}^2}{\mu_{\theta_i}^2}\right)$$

$$\theta_i \sim \text{LogNormal}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad \text{Distribución a priori}$$

$$k_1 = \bar{k}_1 \theta_1 , k_2 = \bar{k}_2 \theta_2$$

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 29.7 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

Finalmente, se obtendrán las frecuencias naturales correspondientes a cada muestra, con el fin de evaluar su similitud con las frecuencias medidas, utilizando la función de verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta) = \exp(-0.5 \cdot J(\theta)/\sigma_e^2) \quad \text{Función de verosimilitud}$$

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^2 \left( \left( \frac{f_i(\theta)}{\hat{f}_i} \right)^2 - 1 \right)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\sigma_e = \frac{1}{16}$$

$$f_i(\theta) \quad \text{Frecuencia } i\text{-ésima de la muestra } \theta$$

## 5.2 Detalles de la implementación

BUS con subset simulation se implementa de acuerdo a la sección 3.1. Los siguientes parámetros definidos por el usuario son considerados en este escenario

- Número de muestras por etapa:  $N_s = 10.000$ .
- Probabilidad condicional:  $p_0 = 0.1$ .
- Se consideran seis ejecuciones independientes, empleando distintas semillas para la

generación de números aleatorios.

- Se considera una etapa adicional a modo de generar una mayor cantidad de muestras.

### 5.3 Resultados: Bayesian Model Updating

#### 5.3.1 Muestras a posteriori

Las Figuras 5.2 y 5.3 muestran los histogramas marginales de las muestras a posteriori para seis ejecuciones del método propuesto. Como se puede observar, los parámetros tienden a dos valores localmente identificables.

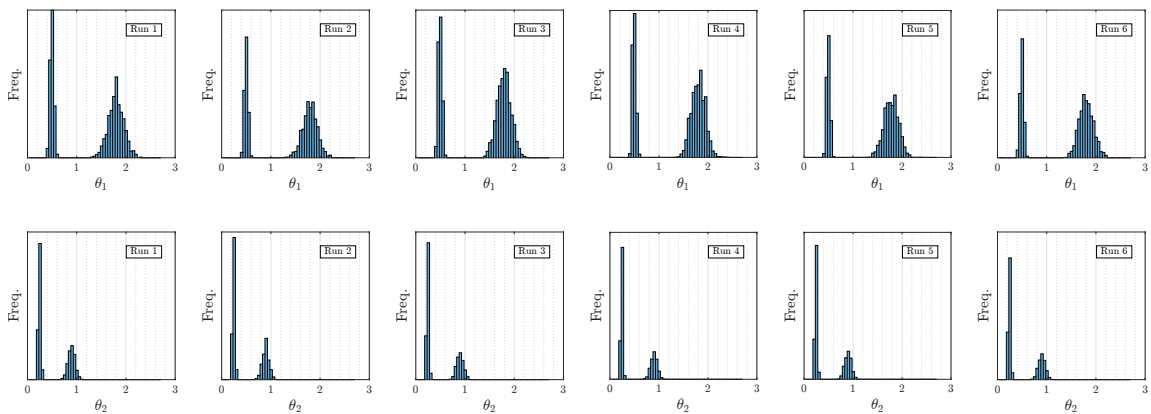


Figura 5.2: Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis

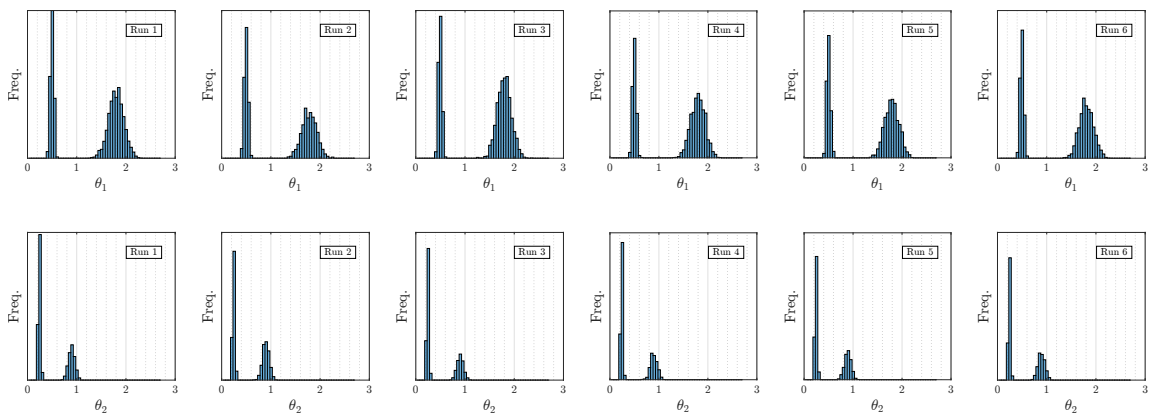


Figura 5.3: Histogramas marginales de las muestras a posteriori obtenidas en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran la evolución de las muestras, y cómo estas convergen en

dos grupos densamente poblados, los cuales están asociadas a las rigideces para cada piso, y estas a su vez dan como resultado frecuencias naturales muy cercanas a las que fueron medidas. Por qué se ven dos grupos es debido a que, el conjunto solución para las rigideces con uno frecuencia natural conocida toma la forma de una hipérbola, y dado que, se tienen dos mediciones, se intersectarán dos hipérbolas en dos puntos, que son precisamente los centros de cada grupo de muestras. El hecho de que la distribución a posteriori no este más concentrada es debido a la desviación estándar del error que se asume en las predicciones. Otra observación importante es que, en el primer grupo, las frecuencias naturales son altamente sensibles a los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , ya que están muy concentrados. En contraste, en el segundo grupo, las frecuencias naturales muestran una alta sensibilidad sólo con  $\theta_2$ , mientras que  $\theta_1$  puede asumir un rango más amplio de valores plausibles.

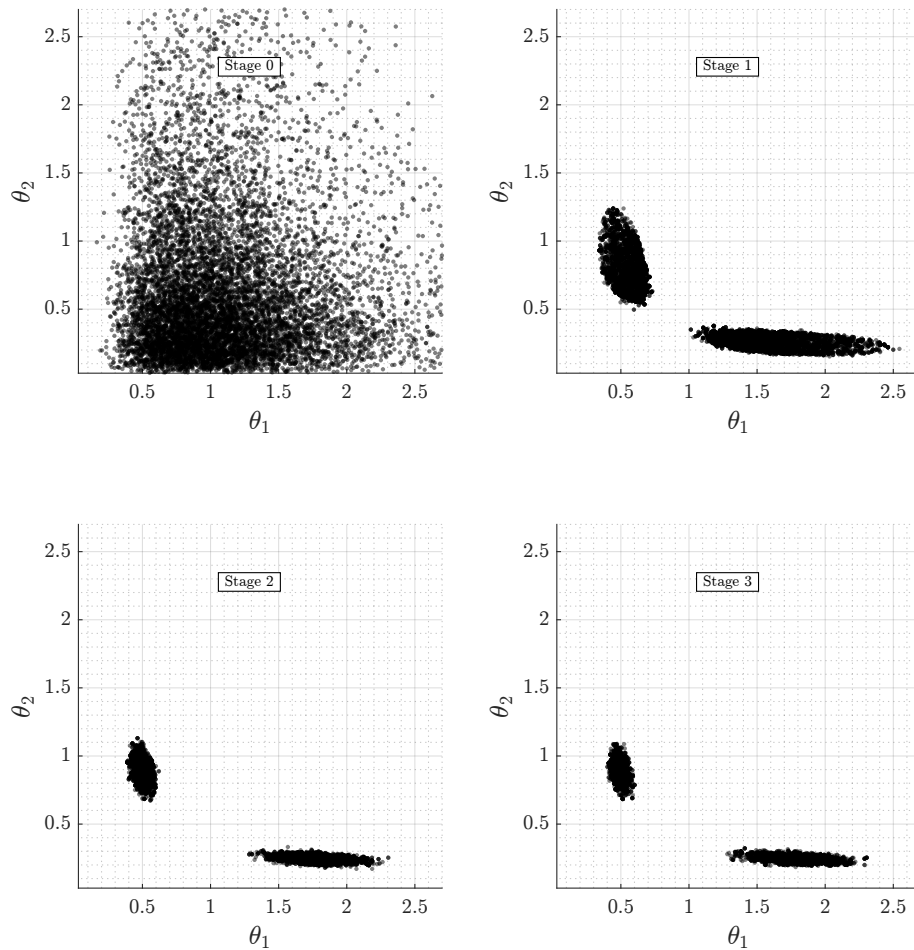


Figura 5.4: Evolución de las muestras en el espacio de parámetros inciertos  $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$  obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Metropolis

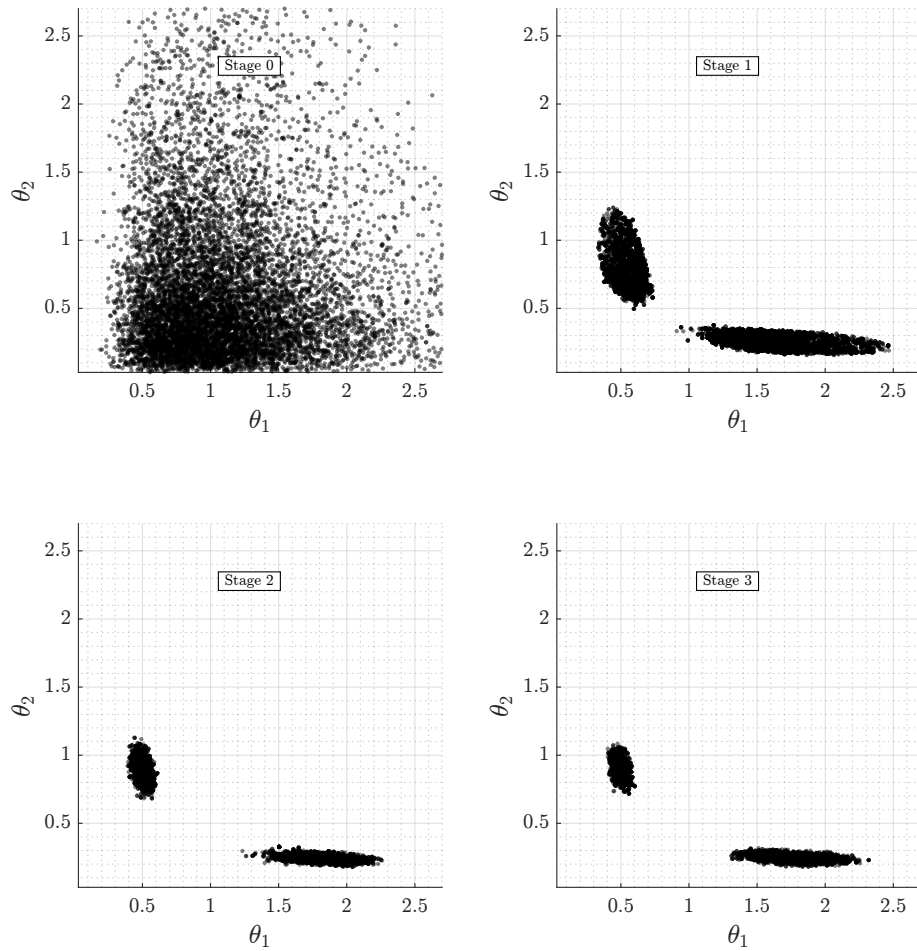


Figura 5.5: Evolución de las muestras en el espacio de parámetros inciertos  $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$  obtenidas durante las distintas etapas de subset simulation en una ejecución con el método Hamiltoniano

Parámetro	Run 1		Run 2		Run 3	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
$\hat{\theta}_1$	0.4950	1.7998	0.4979	1.7942	0.4938	1.7931
$\hat{\theta}_2$	0.8953	0.2431	0.8935	0.2437	0.8989	0.2447
$k_1 \times 10^6$	14.7007	53.4547	14.7867	53.2888	14.6661	53.2544
$k_2 \times 10^6$	26.5905	7.2189	26.5359	7.2390	26.6976	7.2666
$f_1$ Hz	3.1616	3.1386	3.1689	3.1416	3.1593	3.1465
$f_2$ Hz	9.8389	9.8471	9.8347	9.8361	9.8539	9.8362

Tabla 5.1: Valores medios a posteriori con sus rigideces y frecuencias correspondientes en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis

Parámetro	Run 1		Run 2		Run 3	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
$\hat{\theta}_1$	0.4995	1.8026	0.4980	1.7790	0.4943	1.7970
$\hat{\theta}_2$	0.8972	0.2428	0.8991	0.2445	0.9019	0.2449
$k_1 \times 10^6$	14.8354	53.5389	14.7909	52.8367	14.6807	53.3719
$k_2 \times 10^6$	26.6471	7.2122	26.7034	7.2611	26.7877	7.2733
$f_1$ Hz	3.1600	3.1370	3.1564	3.1430	3.1471	3.1476
$f_2$ Hz	9.7786	9.7350	9.7852	9.6854	9.7930	9.7281

Tabla 5.2: Valores medios a posteriori con sus rigideces y frecuencias correspondientes en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

### 5.3.2 Evidencia estimada

Dada la formulación de la función de verosimilitud, esta no estaba normalizada, lo que significa que no constituía precisamente una distribución de probabilidad. Sin embargo, esto no resulta relevante debido a que en primer lugar, la desviación estándar no es un parámetro a identificar, cosa que se verá próximas aplicaciones. Por lo tanto, es suficiente con utilizar una función proporcional a esta. En cuanto a los valores obtenidos, según se muestra en las Tablas 5.3 y 5.4, el máximo valor observado de log-verosimilitud es prácticamente 0, como era de esperar dada la formulación. Además, en ambos métodos utilizados, los valores de log-evidencia obtenidos son prácticamente idénticos independientemente de la ejecución y el método, lo que demuestra la robustez de ambos enfoques.

Tabla 5.3: Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Metropolis

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$-0.0325 \times 10^{-4}$	-4.9268	-4.9268
2	$-0.1908 \times 10^{-4}$	-4.9252	-4.9253
3	$-3.1182 \times 10^{-4}$	-4.6760	-4.6763
4	$-0.6097 \times 10^{-4}$	-4.8123	-4.8124
5	$-2.6486 \times 10^{-4}$	-4.7164	-4.7167
6	$-1.0434 \times 10^{-4}$	-4.8152	-4.8153

Tabla 5.4: Estimaciones de la evidencia en seis ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$-2.9147 \times 10^{-4}$	-4.8706	-4.8709
2	$-1.5947 \times 10^{-4}$	-4.9110	-4.9112
3	$-0.4713 \times 10^{-4}$	-4.8309	-4.8310
4	$-2.5950 \times 10^{-4}$	-4.6686	-4.6689
5	$-0.8310 \times 10^{-4}$	-4.7295	-4.7296
6	$-6.1307 \times 10^{-4}$	-4.8147	-4.8153

### 5.3.3 Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios

Según el enfoque descrito en la Sección 3.1, el proceso de muestreo continúa hasta que el umbral auxiliar ( $d_{\text{aux}}$ ) es menor que el umbral intermedio correspondiente ( $d_{\kappa}^*$ ). Recordemos que el umbral auxiliar es el valor máximo del logaritmo de la verosimilitud observado hasta la etapa actual. Como se puede apreciar en las Tablas 5.5 y 5.6, este criterio se cumple en la etapa 2, lo que indica que el método podría detenerse en este punto. Sin embargo, se tiene la opción de agregar muestras adicionales mediante la inclusión de más etapas durante el proceso. En este caso, se ha añadido una etapa adicional, y se puede observar que el valor de  $d_{\kappa}^*$  permanece prácticamente inalterado. Esto se debe a que el valor teórico máximo de la log-verosimilitud es 0, como se aprecia en las Figuras 5.6 y 5.7.

Tabla 5.5: Los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}} \times 10^{-4}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_{\kappa}^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$	$(d_{\kappa}^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$	$(d_{\kappa}^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$
0	-9.9216	-137.3590	-9.8845	-35.4473	-9.6710	-188.2427
1	-0.5361	-50.2729	-0.5247	-35.4473	-0.2046	-8.0702
2	1.9985	-2.8122	1.8164	-4.1743	2.1904	-3.1182
3	4.2924	-0.0325	4.3616	-0.1908	4.4714	-3.1182

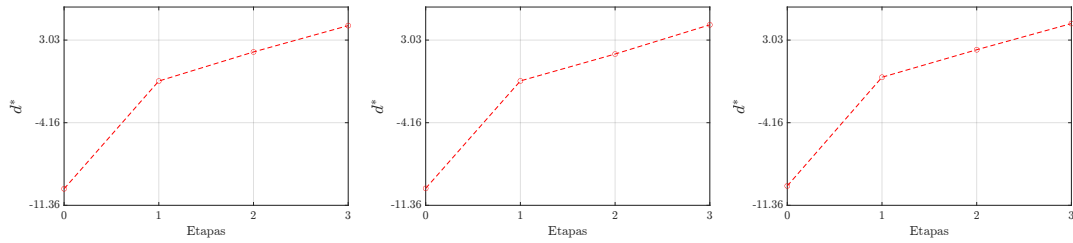


Figura 5.6: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis

Tabla 5.6: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}} \times 10^{-4}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$	$(d_k^*)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^{-4})$
0	-9.9216	-137.3590	-9.8845	-35.4473	-9.6710	-188.2427
1	-0.3869	-7.3267	-0.4330	-35.4473	-0.3418	-17.8399
2	2.0522	-4.8752	1.7623	-7.3689	1.9012	-12.9609
3	4.4935	-2.9147	4.1985	-1.5947	4.1234	-0.4713

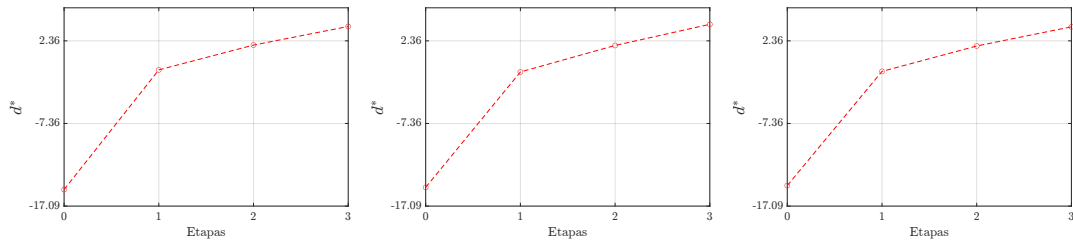


Figura 5.7: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano

## 5.4 Conclusiones

Este ejemplo demuestra que ambos métodos pueden implementarse de manera igualmente eficiente en problemas que involucran fenómenos estructurales. Por lo tanto, el mapeo a parámetros físicos al implementar Metropolis-Hastings ó Hamiltonian Monte Carlo no es un inconveniente.

Se extraen las siguientes conclusiones generales

- (a) Ambos enfoques son capaces de generar muestras a posteriori de manera efectiva y

eficiente.

- (b) Se lograron identificar los dos grupos de soluciones asociados a las rigideces de cada piso, que reproducen las mismas frecuencias naturales a las que se dan como evidencia.
- (c) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy cercano al valor máximo teórico. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori se explora efectivamente en este escenario.

# APLICACIÓN 3: SISTEMA DINÁMICO DE UN GRADO DE LIBERTAD

En este capítulo se explorará la aplicación de subset simulation en un problema de identificación dinámica de baja dimensionalidad, el cual cuenta con un registro temporal como datos de medición. También se examinará la aplicabilidad del método al utilizar un software externo, como es el caso de Seismo-VLAB. El ejemplo en particular es *A04-DY\_Lin\_1DPointMass\_Elastic\_ZeroLength* [17].

## 6.1 Descripción del problema

Este trabajo considera como ejemplo de aplicación un modelo lineal de un oscilador masa-resorte-amortiguamiento de un grado de libertad, el cual es sometido a una fuerza externa sinusoidal como se ve en la Figura 6.1. El comportamiento del sistema se rige por la ecuación de movimiento

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t) \quad (6.1.1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son los parámetros físicos asociados a la masa, viscosidad y rigidez del sistema,  $P(t)$  es una fuerza nodal aplicada al sistema. En este caso, la fuerza puntual se

modela como una sinusoidal  $P(t) = \sin(\omega \cdot t)$  [N], donde  $\omega = 2$  [rad/s], para un registro total de 9.5 segundos 6.2.

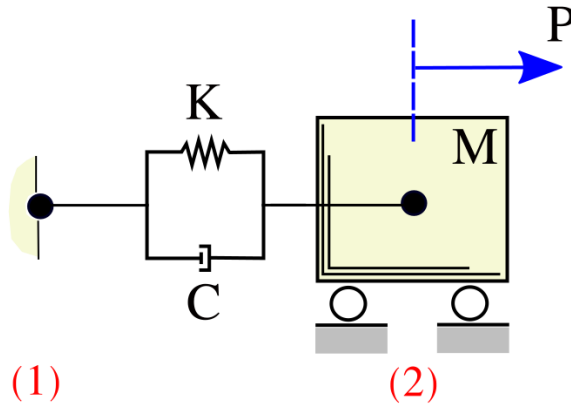


Figura 6.1: Modelo dinámico del sistema.

## 6.2 Problema de actualización

Para evaluar el desempeño del método propuesto e ilustrar algunas de sus características, se estudia el siguiente escenario:  $\theta_1$  corresponde a la masa del carro,  $\theta_2$  es la rigidez del resorte,  $\theta_3$  es la razón de amortiguamiento, y finalmente  $\theta_4$  es la desviación estándar del error de predicción que simula el error instrumental del sensor que mide la aceleración del carro.

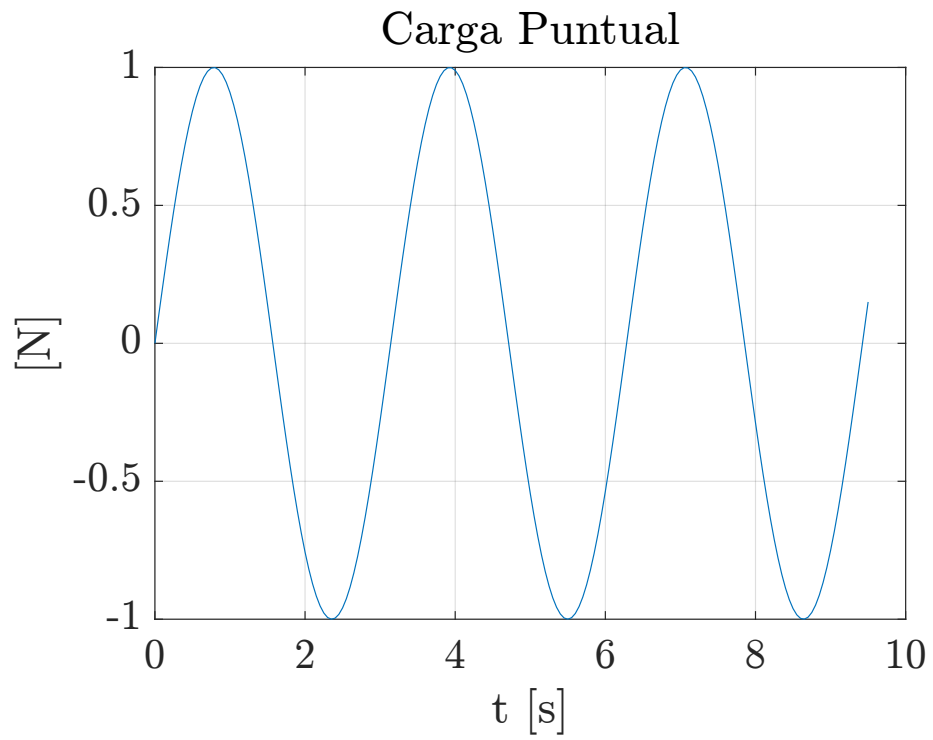


Figura 6.2: Fuerza puntual aplicada.

### 6.2.1 Mediciones

En este ejemplo de aplicación se consideran mediciones sintéticas. Estos datos se denotan como  $\tilde{y}(t_k)$ , donde  $t_k, k = 1, \dots, N_T$  son distintos instantes de tiempo. Las mediciones sintéticas se generan luego como

$$\tilde{y}(t_k) = y(t_k, \tilde{\theta}) + \varepsilon(t_k) \quad k = 1, \dots, N_T \quad (6.2.1)$$

donde  $y(t_k, \tilde{\theta})$  son las predicciones asociadas con los parámetros reales del modelo  $\tilde{\theta}$ , y  $\varepsilon(t_k)$  son perturbaciones aleatorias que representan ruido de medición. En esta configuración,  $\tilde{\theta}$  corresponde a los valores objetivo del problema de actualización.

En este ejemplo de aplicación, los datos de medición incluyen la aceleración registrada en el carro durante la duración de la fuerza puntual. Además, la duración de la fuerza puntual es  $T = 9.5$  s con un salto de tiempo de  $\Delta t = 0.05$  s, que deja un total de  $N_T = 191$  instantes de tiempo. Además, y con fines ilustrativos, los errores de medición  $\varepsilon(t_k), k = 1, \dots, N_T$  se toman como variables gaussianas independientes de media cero tales que  $\varepsilon(t_k) \sim N(0, \sigma_l)$ , donde  $\sigma_l = \gamma \times RMS[\mathbf{y}]$ ,  $RMS[\mathbf{y}]$  es la media cuadrática o root-mean-square (RMS) del conjunto completo de mediciones  $y(t_k, \tilde{\theta}), k = 1, \dots, N_T$ , y  $\gamma$  cuantifica el nivel de ruido. En cuanto al nivel de ruido, se considera  $\gamma = 10\%$ . Note que  $\gamma = 0$  representa un caso idealizado donde no hay errores de medición presentes en el proceso de monitoreo estructural, sin embargo, este caso se omite, ya que el error de medición también es un parámetro a identificar, que se asume no nulo.

En este caso, los parámetros del modelo estructural se toman como  $M = 2.3$  kg ,  $K = 4.2$  N/m,  $C = 0.2$  Ns/m, como se muestran en la tabla 6.1 . La medición correspondiente al nivel de ruido  $\gamma = 10\%$  está mostrado en la Fig. 6.3.

Tabla 6.1: Valores de los parámetros objetivos.

Masa ( $M$ ) (Kg)	Rigidez ( $K$ ) (N/m)	Amortiguamiento ( $C$ ) (Ns/m)
2.3	4.2	0.2

Tabla 6.2: Error de medición para el escenario.

$\sigma_l$ (m/s <sup>2</sup> )
$6.4632 \times 10^{-2}$

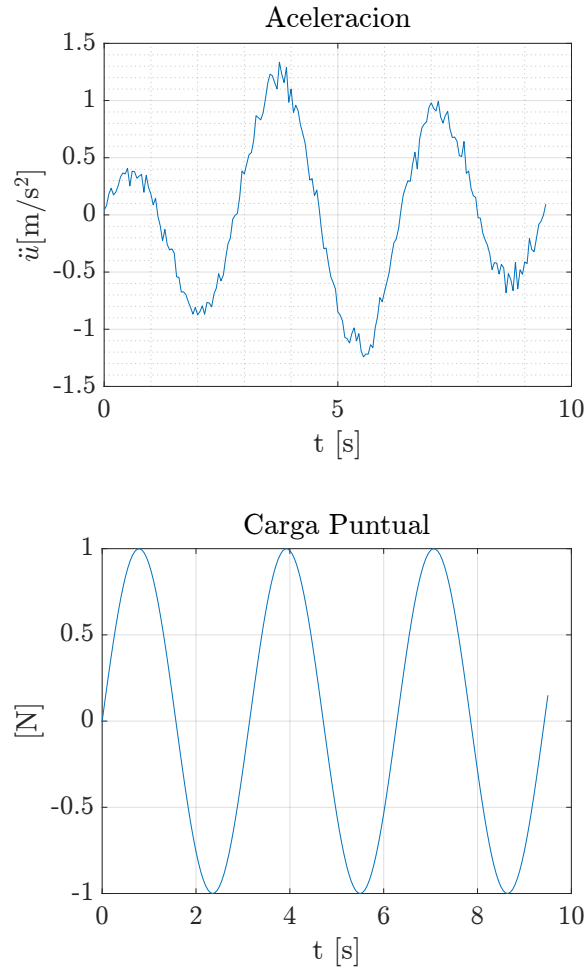


Figura 6.3: Datos de entrada y medición para el escenario. Nivel de ruido  $\gamma = 10\%$

### 6.2.2 Parámetros inciertos del modelo

En este escenario se consideran cuatro parámetros inciertos, esto es,  $\boldsymbol{\theta} = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \rangle^T$ , donde  $\theta_1$  es la masa del sistema,  $\theta_2$  corresponde a la rigidez,  $\theta_3$  al amortiguamiento, y  $\theta_4$  a la desviación estándar del error de predicción. La distribución a priori correspondiente considera independencia entre los parámetros inciertos, i.e.  $p(\boldsymbol{\theta}) = p(\theta_1)p(\theta_2)p(\theta_3)p(\theta_4)$ . En particular,  $\theta_1$  sigue una distribución normal con media de  $\bar{m} = 2$  kg y un coeficiente de variación igual a 10%,  $\theta_2$  sigue una distribución log-normal con media  $\bar{k} = 3$  N/m y un coeficiente de variación igual a 30%,  $\theta_3$  sigue una distribución uniforme con límite inferior  $c_I = 0$  Ns/m y límite superior  $c_U = 0.7$  Ns/m, y por último  $\theta_4$  sigue una distribución log-normal con media  $\bar{\sigma} = 0.3$   $\text{m/s}^2$  y un coeficiente de variación igual a 30%.

### 6.2.3 Función de verosimilitud

Uno de los elementos más importantes en el marco de *Bayesian model updating* es la función de verosimilitud o likelihood, ya que proporciona un medio cuantitativo para evaluar la similitud entre las predicciones del modelo y las mediciones reales [18]. En este trabajo se asume que los denominados errores de predicción son variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal con valor medio igual a cero y desviación estándar constante  $\sigma$ . Bajo esta suposición, que es bastante común en aplicaciones realistas, la función de likelihood  $\mathcal{L}(\theta)$  está dada por

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N_T/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{N_T} (\tilde{y}(t_k) - y(t_k, \theta))^2 \right] \quad (6.2.2)$$

donde  $y(t_k, \theta)$  es la predicción para la respuesta de interés  $l$  en el instante de tiempo  $t_k$  obtenido del modelo dado por  $\theta$ , y todos los demás términos han sido definidos previamente.

## 6.3 Detalles de la implementación

BUS con subset simulation se implementa de acuerdo a la sección 3.1. Los siguientes parámetros definidos por el usuario son considerados en este escenario

- Número de muestras por etapa:  $N_s = 2.000$ .
- Probabilidad condicional:  $p_0 = 0.1$ .
- Se consideran cinco ejecuciones independientes, empleando distintas semillas para la generación de números aleatorios.
- Se considera una etapa adicional a modo de generar una mayor cantidad de muestras.

## 6.4 Resultados: Bayesian Model Updating

### 6.4.0.1 Muestras a posteriori

Las Figuras 6.6 y 6.7 muestran los histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes del proceso de muestreo para  $\gamma = 10\%$ . A modo de referencia, los parámetros se han normalizado con respecto al valor objetivo, i.e.  $\hat{\theta}_i = \theta_1 / \theta_i^{target}$ . Tenga en cuenta que las muestras a posteriori están densamente concentradas alrededor

del valor objetivo. En todos los casos, se necesitan siete etapas de subset simulation para obtener las muestras de falla requeridas. Los tamaños de muestra correspondientes a las diferentes ejecuciones del enfoque propuesto se muestran en las Tablas 6.3 6.4.

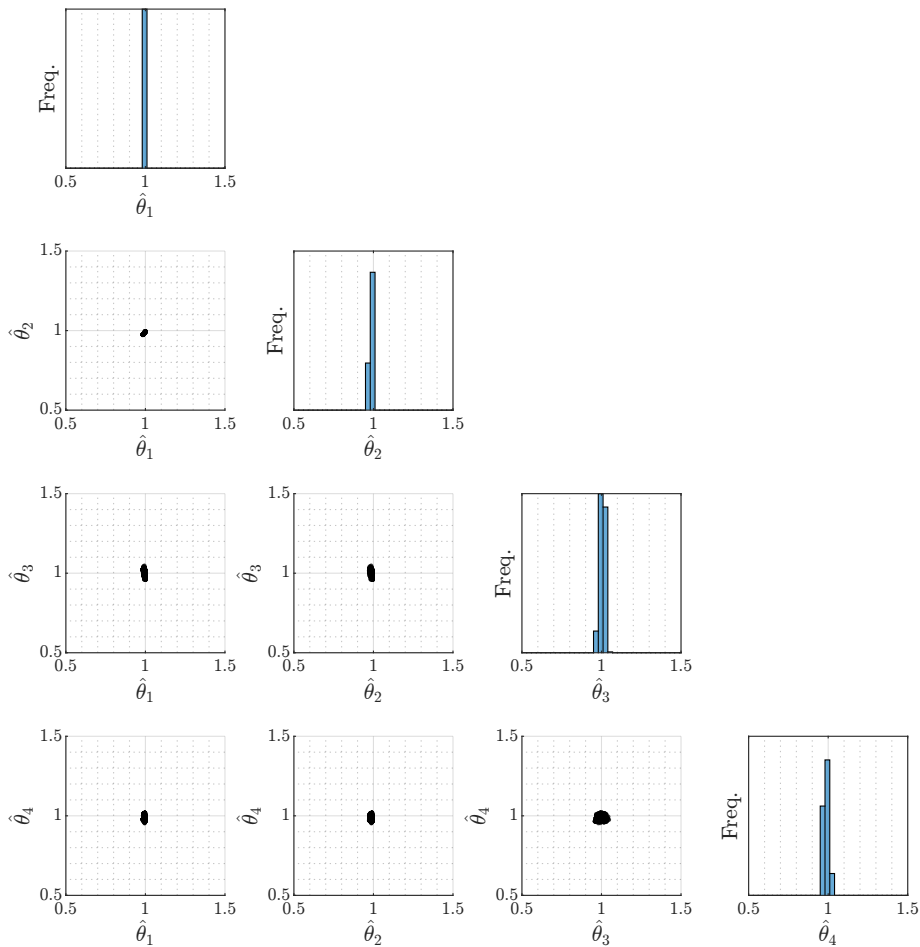


Figura 6.4: Muestras a posteriori en términos de proyecciones bidimensionales e histogramas marginales con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

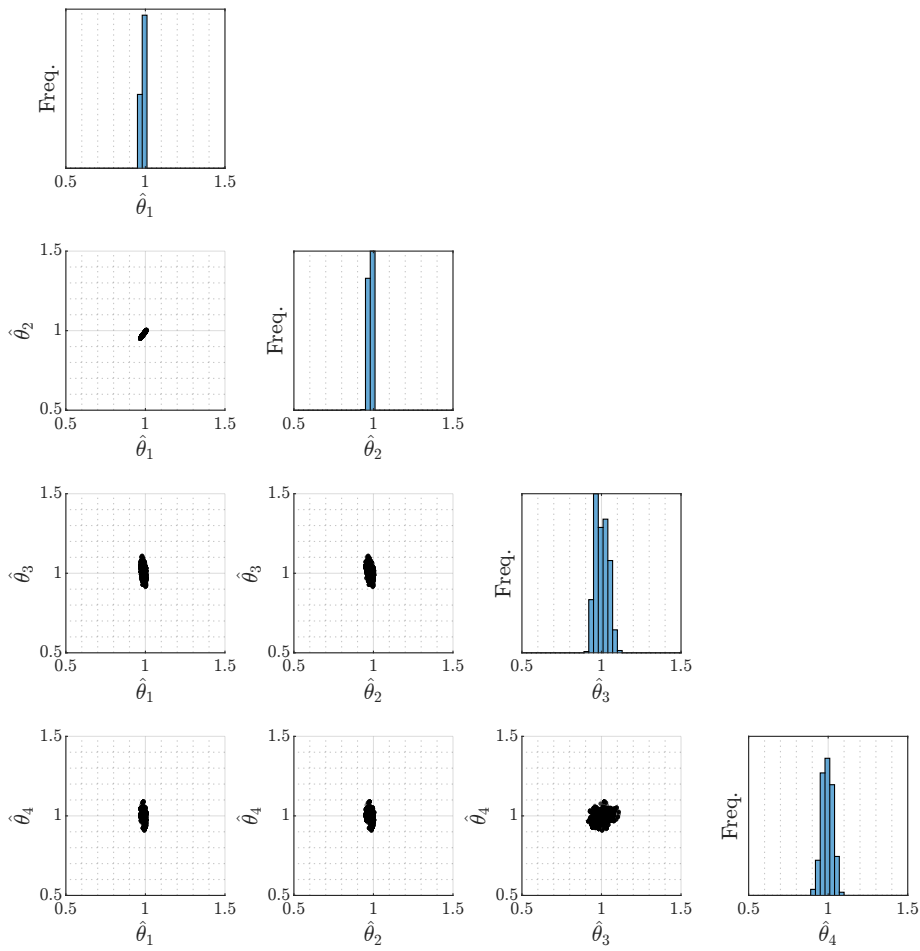


Figura 6.5: Muestras a posteriori en términos de proyecciones bidimensionales e histogramas marginales con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

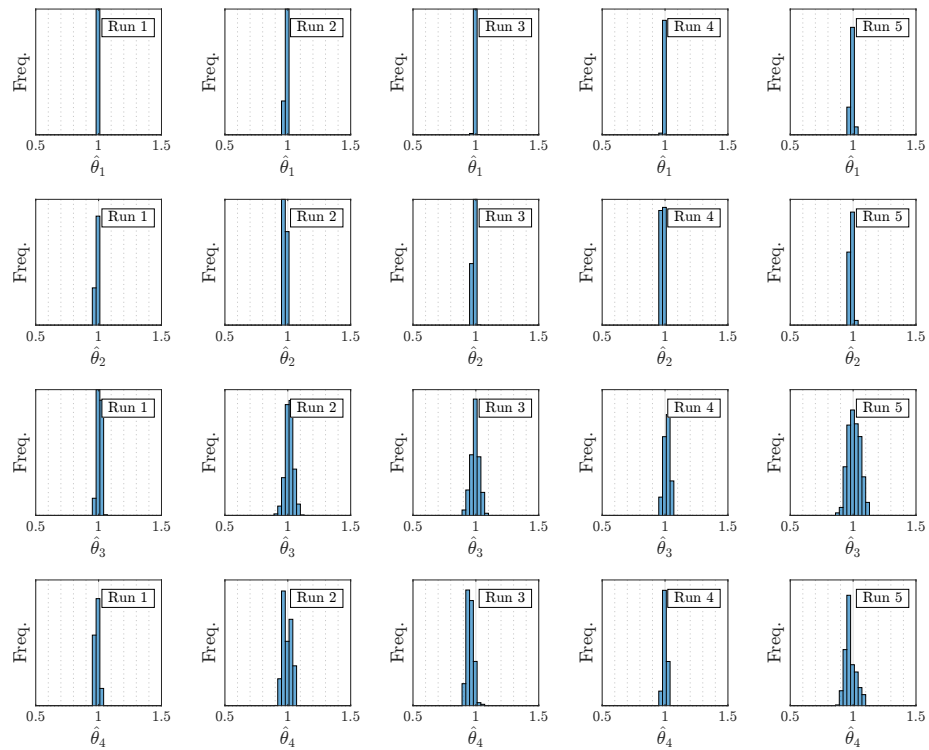


Figura 6.6: Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

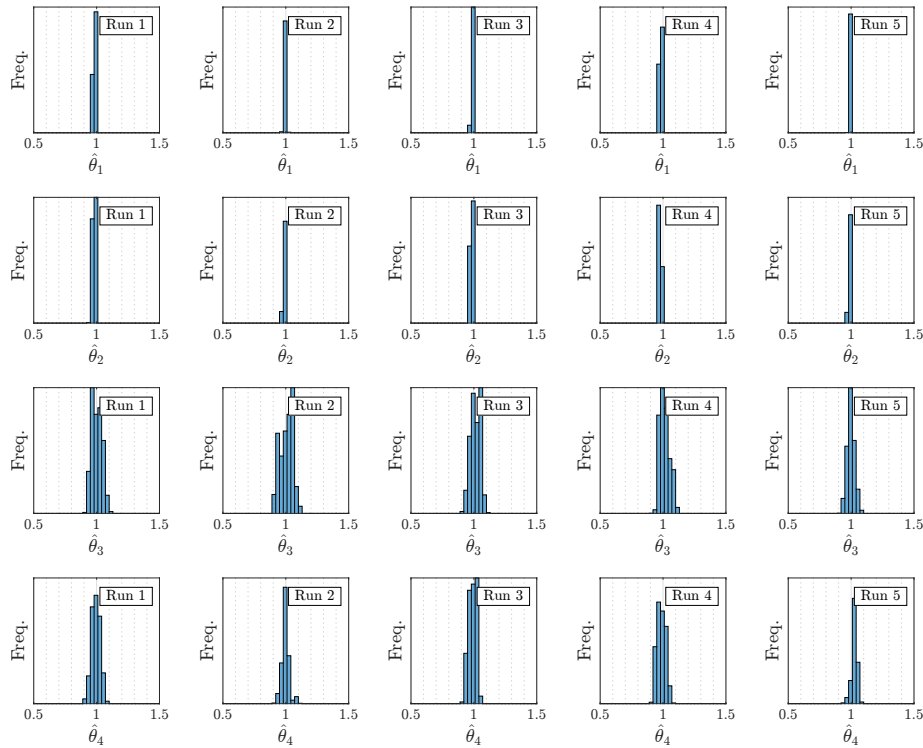


Figura 6.7: Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

Como se evidencia tanto en los histogramas como en las proyecciones bidimensionales de los parámetros a identificar, se ven que están densamente concentrados en sus valores objetivos, y que además  $\theta_3$ , el parámetro asociado al amortiguamiento viscoso es el que se aprecia una mayor dispersión en sus muestras a posteriori, y esto es debido a que como se trata de un problema que posee una carga externa aplicada, la respuesta permanente es más relevante, y es en esta en donde la viscosidad no tiene tanta relevancia.

Tabla 6.3: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

Run No.	Número de muestras a posteriori
1	2325
2	2643
3	2318
4	2771
5	2275

Tabla 6.4: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

Run No.	Número de muestras a posteriori
1	2852
2	2707
3	2376
4	2773
5	2841

Tabla 6.5: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

Parámetro	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5
$\hat{\theta}_1$	0.9919	0.9871	0.9929	0.9894	0.9930
$\hat{\theta}_2$	0.9834	0.9770	0.9849	0.9800	0.9843
$\hat{\theta}_3$	1.0059	1.0117	0.9925	1.0131	1.0063
$\hat{\theta}_4$	0.9880	0.9946	0.9537	1.0001	0.9770

Tabla 6.6: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

Parámetro	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5
$\hat{\theta}_1$	0.9884	0.9980	0.9908	0.9841	0.9951
$\hat{\theta}_2$	0.9789	0.9912	0.9815	0.9731	0.9878
$\hat{\theta}_3$	1.0017	1.0042	1.0135	1.0121	0.9984
$\hat{\theta}_4$	0.9949	0.9971	0.9900	0.9857	1.0270

A partir de las Tablas 6.5 y 6.6, así como de las Figuras 6.6 y 6.7, se observa que todos los parámetros son identificables, ya que se encuentran centrados y densamente poblados en sus valores objetivo. Además, esto es independiente del número de ejecución y del método utilizado.

### 6.4.1 Evidencia estimada

Las Tablas 6.7 6.8 presenta los valores máximos de likelihood observados, estimaciones de probabilidad de falla y los valores obtenidos de log-evidence para cinco ejecuciones independiente de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ . Tenga en cuenta que los resultados obtenidos en diferentes ejecuciones del enfoque propuesto son muy similares.

Tabla 6.7: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$ 

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$2.5578 \times 10^2$	-17.9352	$2.3785 \times 10^2$
2	$2.5580 \times 10^2$	-17.2529	$2.3854 \times 10^2$
3	$2.5575 \times 10^2$	-13.3518	$2.4240 \times 10^2$
4	$2.5579 \times 10^2$	-21.6765	$2.3411 \times 10^2$
5	$2.5567 \times 10^2$	-13.4971	$2.4217 \times 10^2$

 Tabla 6.8: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$ 

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$2.5574 \times 10^2$	-16.9714	$2.3876 \times 10^2$
2	$2.5576 \times 10^2$	-17.1580	$2.3860 \times 10^2$
3	$2.5578 \times 10^2$	-15.4868	$2.4029 \times 10^2$
4	$2.5580 \times 10^2$	-14.7661	$2.4103 \times 10^2$
5	$2.5578 \times 10^2$	-16.9844	$2.3879 \times 10^2$

Como se puede apreciar, el valor máximo de log-verosimilitud observado es el mismo en todas las ejecuciones como también en ambos métodos, eso quiere decir que en cada caso la desviación estándar del error de predicción fue identificado correctamente y que los parámetros físicos identificados reproducen el mismo registro de aceleración, mas eso no implica que estén correctamente identificados, aunque en este caso si ocurre.

### 6.4.2 Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori

La Figura 6.8 muestra las respuestas de aceleración medidas en los sensores (línea negra sólida) así como las correspondientes predicciones asociadas al valor medio a posteriori de los parámetros (línea roja) para el caso  $\gamma = 10\%$ . Además, se presenta el intervalo de confianza del 95% (línea punteada azul) de las respuestas, que están asociadas a la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Se ve que para cada instante las magnitudes concuerdan muy bien y, por tanto, el método propuesto es capaz de identificar correctamente el comportamiento estructural para este escenario. Resultados similares se obtienen en diferentes ejecuciones de subset simulation tanto con el método Metropolis-Hastings como con Hamiltonian Monte Carlo.

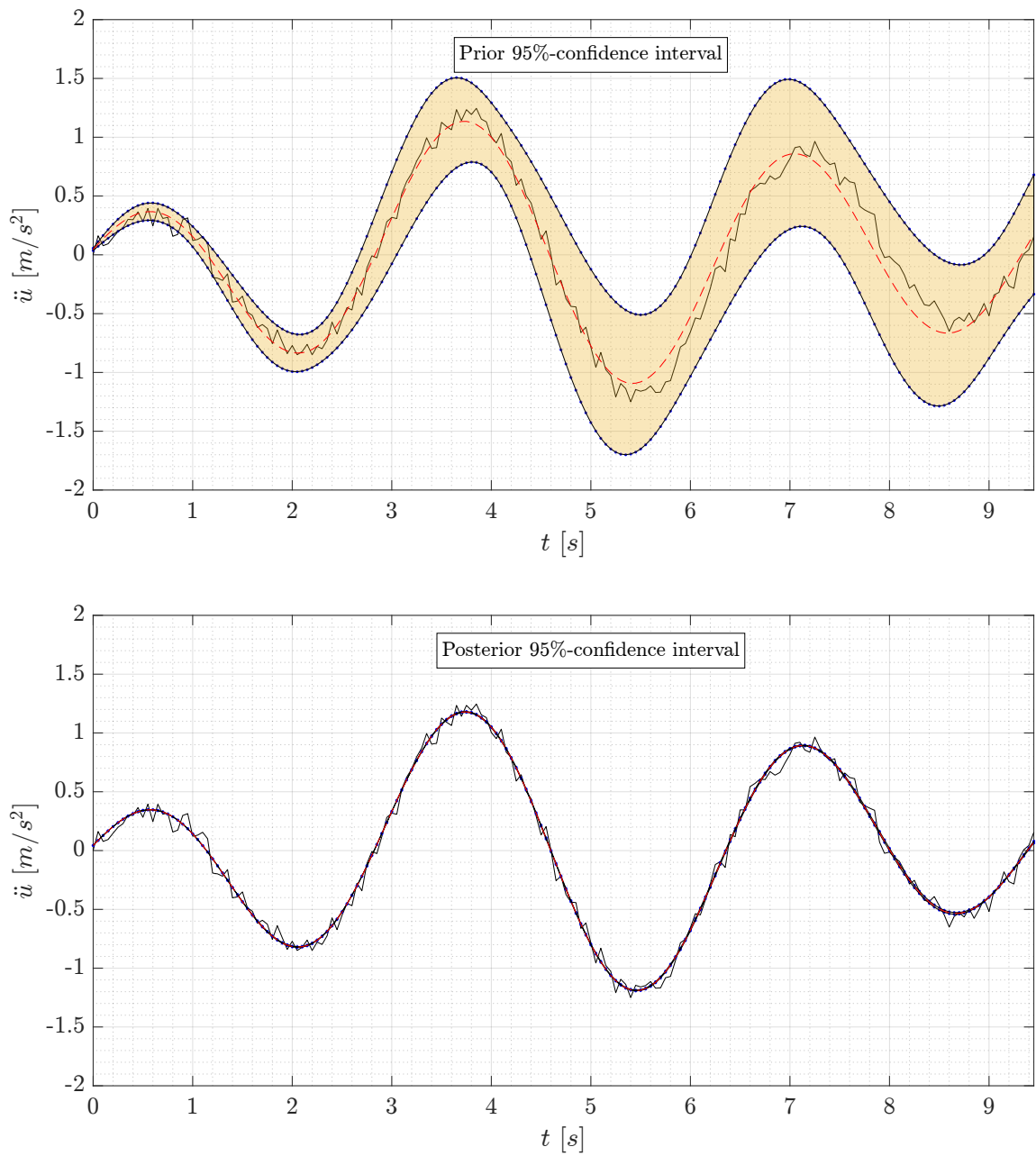


Figura 6.8: Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

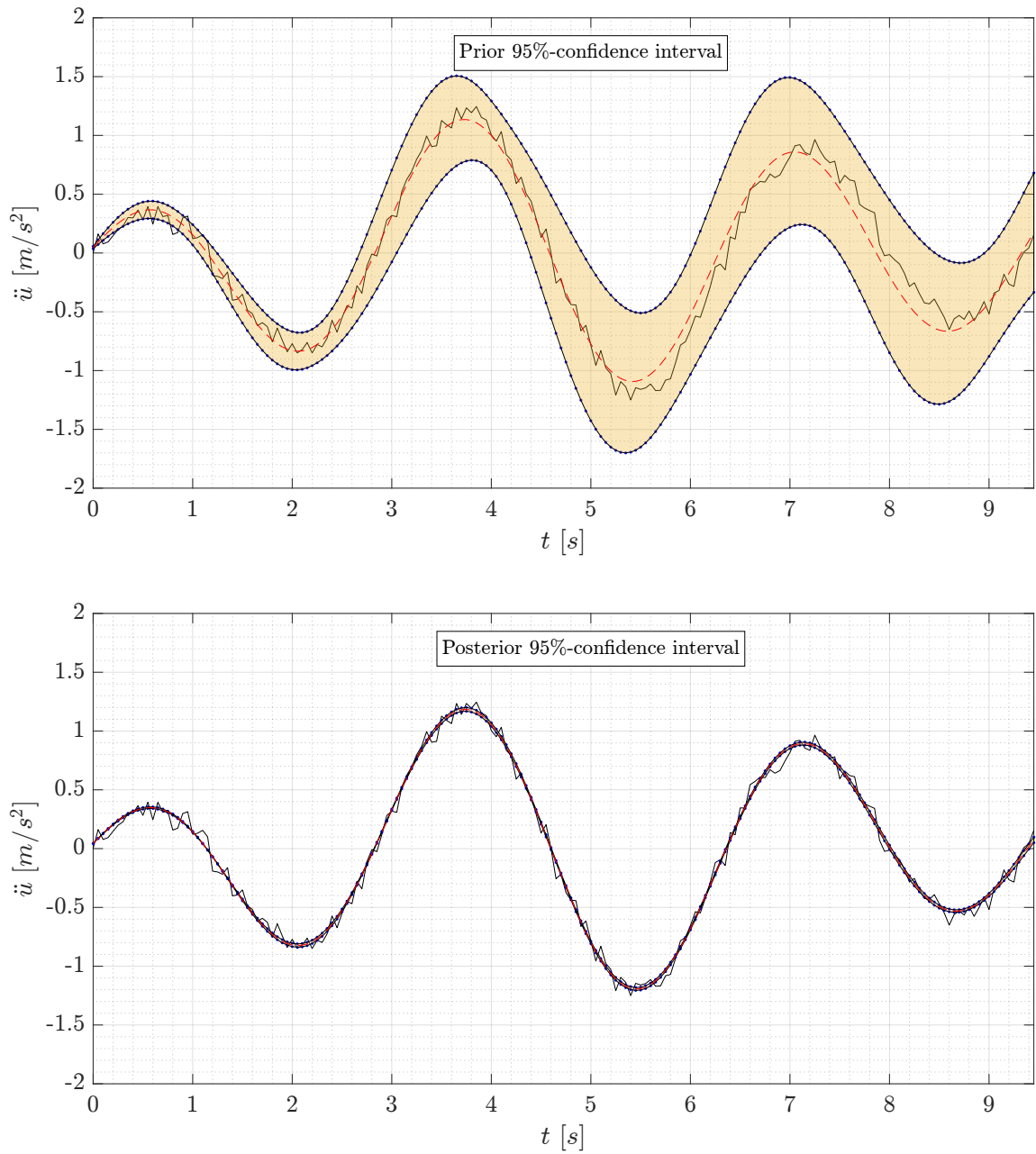


Figura 6.9: Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración del bloque con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

### 6.4.3 Evolución de subset simulation

#### 6.4.3.1 Muestras obtenidas en las distintas etapas

En las Figuras de la 6.10 a la 6.12 como de la 6.13 a la 6.15 muestran los parámetros inciertos,  $\theta$ , obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ .

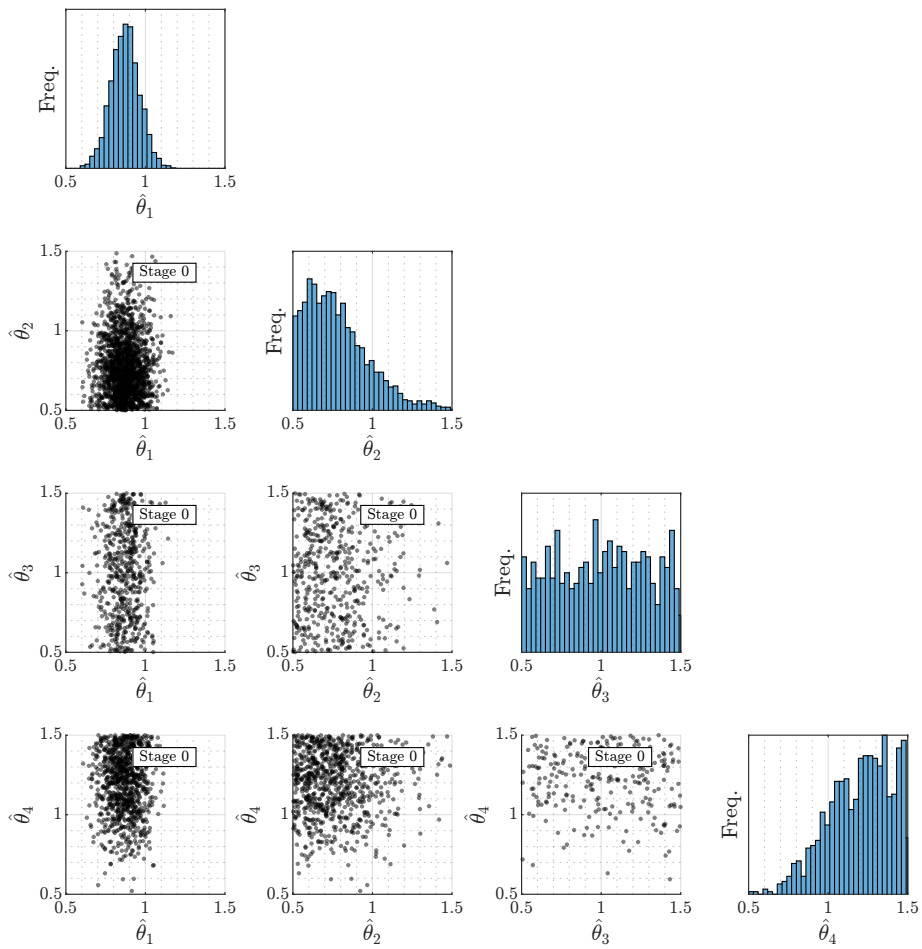


Figura 6.10: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 0$  de subset simulation con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

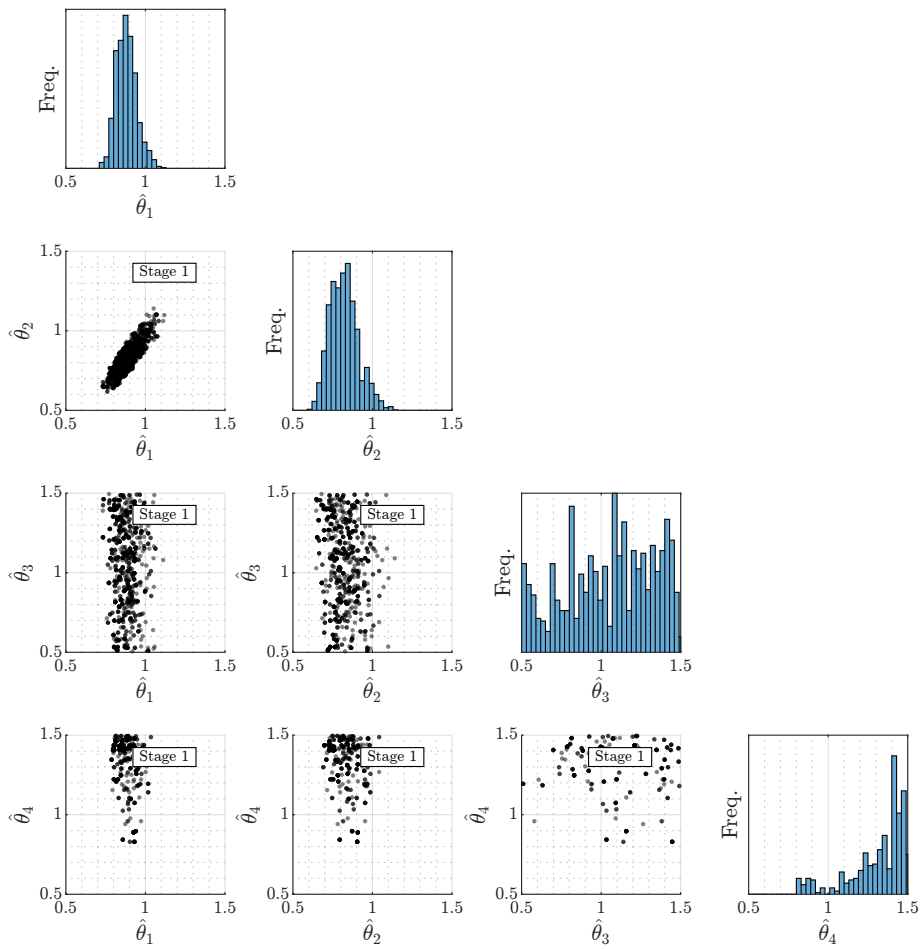


Figura 6.11: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 1$  de subset simulation con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

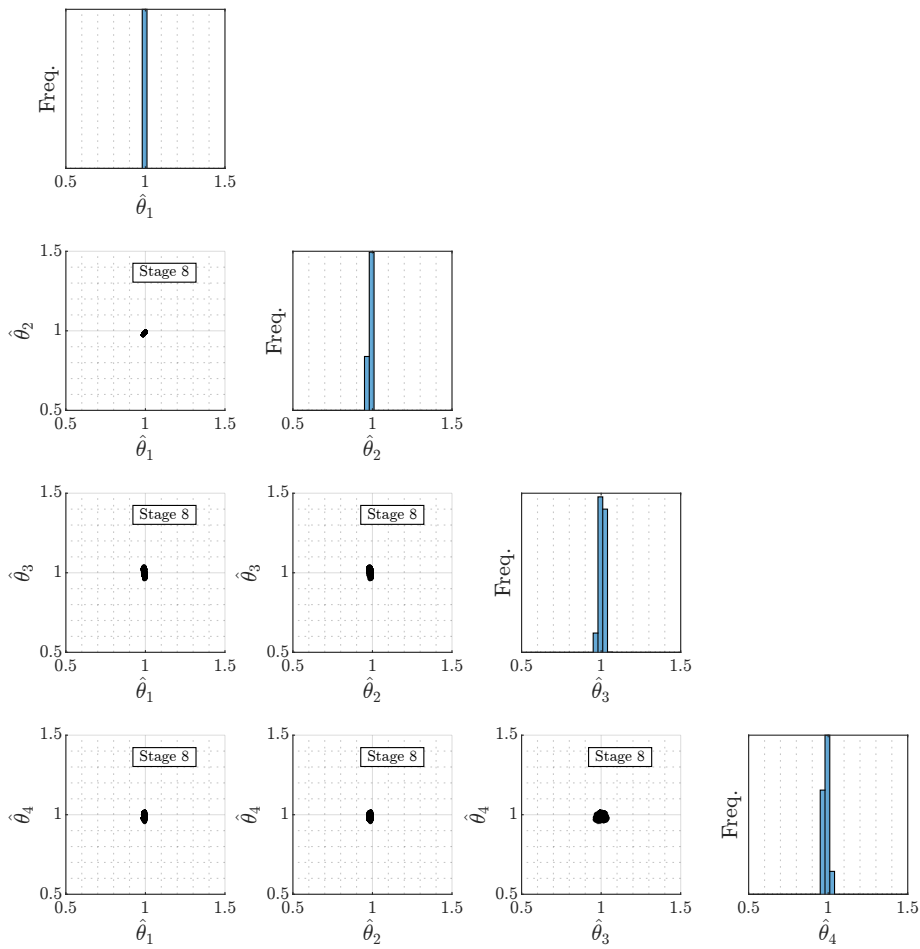


Figura 6.12: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 8$  de subset simulation con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$

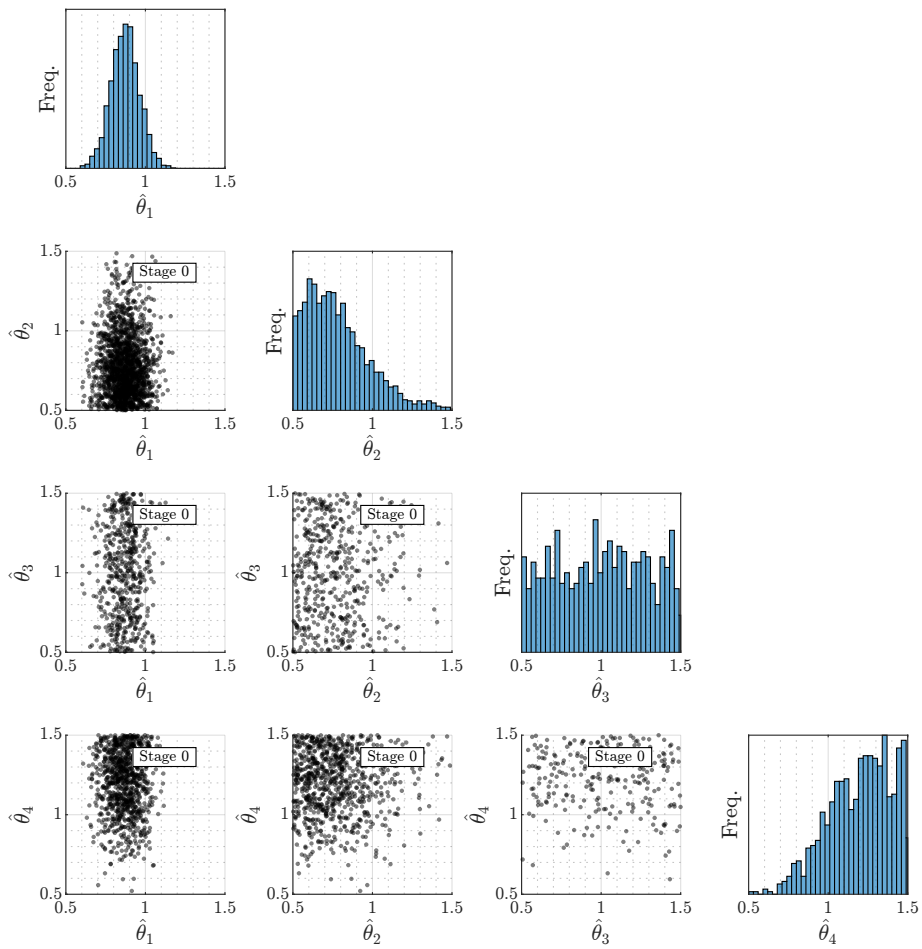


Figura 6.13: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 0$  de subset simulation con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

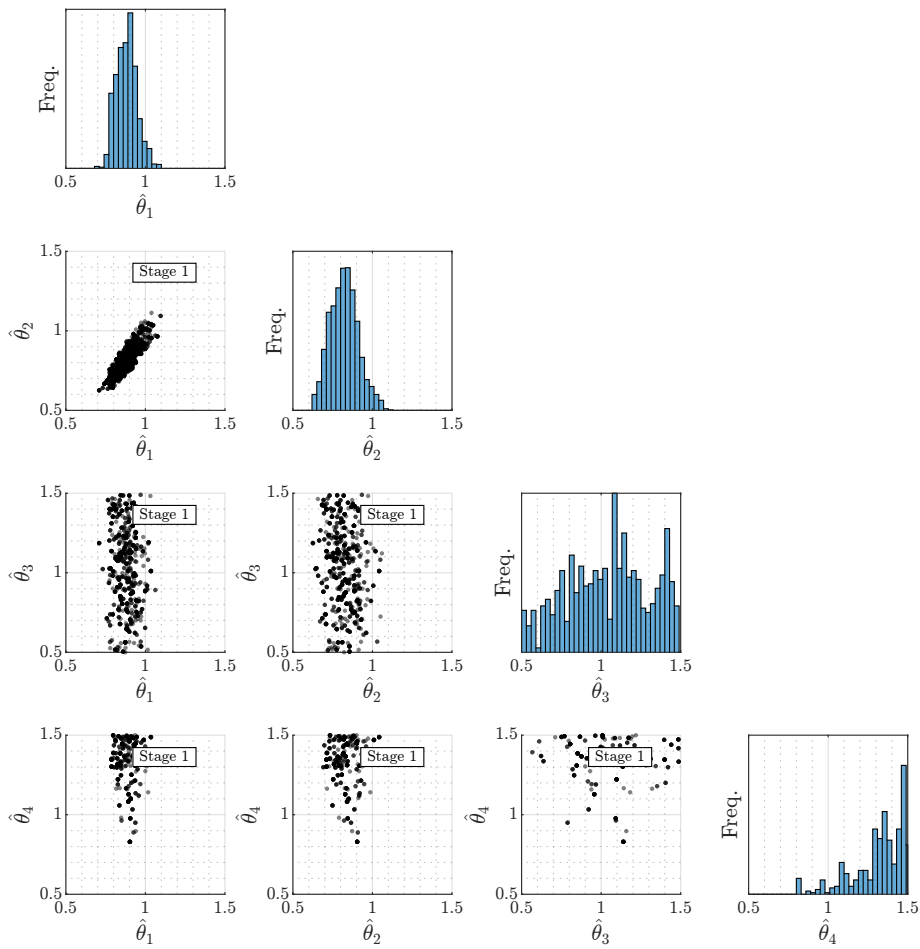


Figura 6.14: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 1$  de subset simulation con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

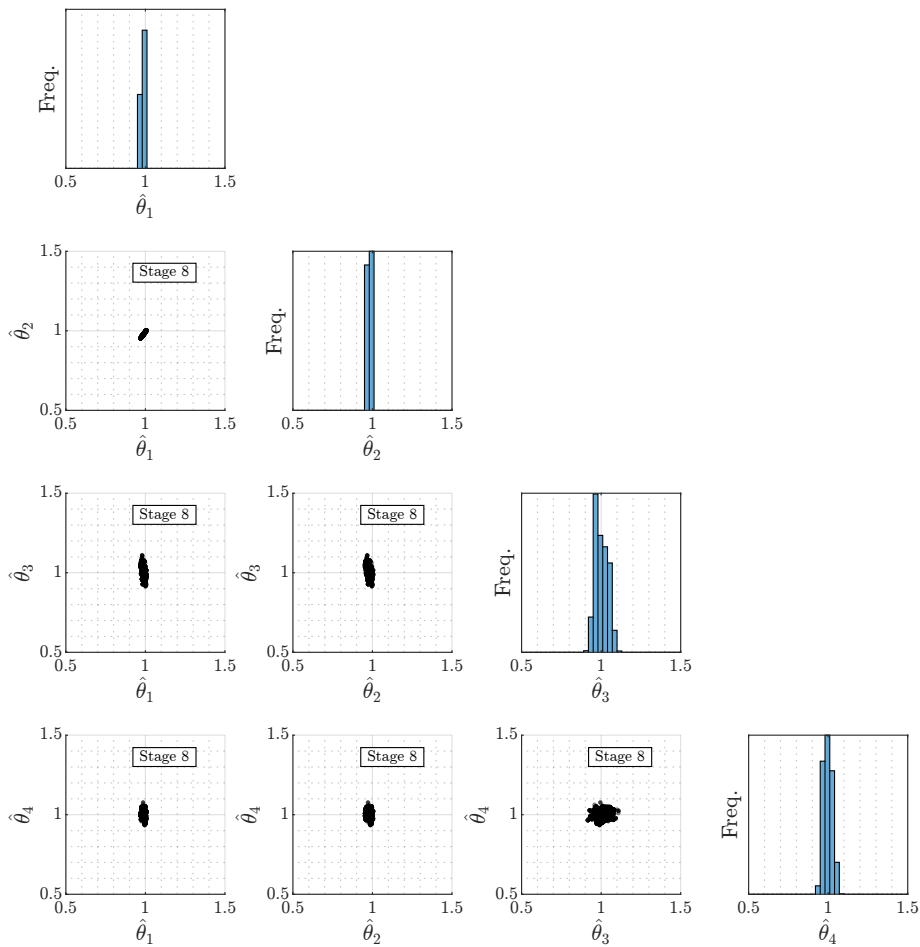


Figura 6.15: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 8$  de subset simulation con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$

Como se puede observar en las Figuras 6.11 y 6.14, en el gráfico de  $\theta_1$  versus  $\theta_2$  se evidencia claramente una relación. Esto se debe a que, al tratarse de un problema dinámico, la masa y la rigidez están relacionadas con la frecuencia natural de la siguiente manera:  $\omega^2 = k/m$ . En este contexto, esta relación se expresa como  $\theta_2 = \omega^2\theta_1$ , que representa precisamente la ecuación de una recta. Esto es exactamente lo que se puede observar en los gráficos.

Referente a las Figuras 6.12 y 6.15 si bien ambas poseen resultados similares, se puede apreciar una mayor dispersión en la distribución a posteriori del parámetro  $\theta_3$  mediante el método Hamiltoniano. Esto puede deberse a que en las últimas etapas de Metropolis-Hastings, los estados estaban muy correlacionados, concentrado las muestras en una sola región, de modo que no reflejan la verdadera sensibilidad que entrega la razón de amortiguamiento en el registro de aceleraciones del carro, que es muy poca.

### 6.4.4 Evolución del umbral intermedio y auxiliar

Según la sección 3.1, la aplicación propuesta de subset simulation sigue hasta el umbral auxiliar  $d^{\text{aux}}$  es menor que el correspondiente umbral intermedio  $d_k^*$ . Recordemos que el umbral auxiliar corresponde en realidad al valor máximo de log-likelihood observado en todas las etapas. A modo de referencia, las Tablas 6.9 y 6.10 muestran los umbrales auxiliares e intermedios obtenidos durante las diferentes etapas de tres ejecuciones de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ , como también las Figuras 6.16 y 6.17.

Tabla 6.9: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$ .

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$
0	0.5996	2.4469	0.5908	2.2715	0.5422	2.3496
1	1.7501	2.4469	1.7512	2.4166	1.7069	2.3496
2	2.1746	2.5369	2.1666	2.4320	2.1798	2.5311
3	2.4084	2.5369	2.3638	2.5184	2.4253	2.5539
4	2.5051	2.5518	2.4828	2.5388	2.5297	2.5542
5	2.5420	2.5564	2.5252	2.5538	2.5580	2.5567
6	2.5535	2.5568	2.5512	2.5577	2.5694	2.5575
7	2.5585	2.5578	2.5622	2.5577	-	-
8	2.5605	2.5578	2.5689	2.5580	-	-

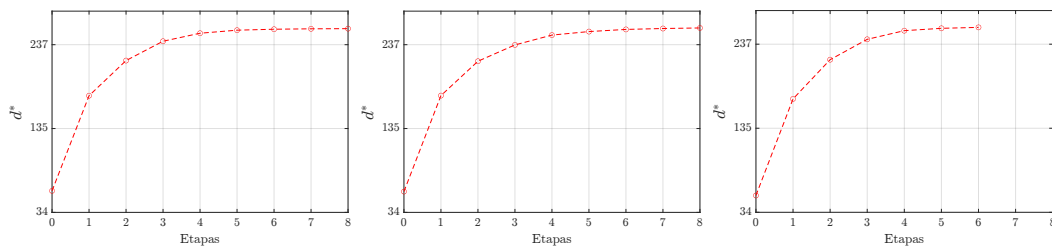
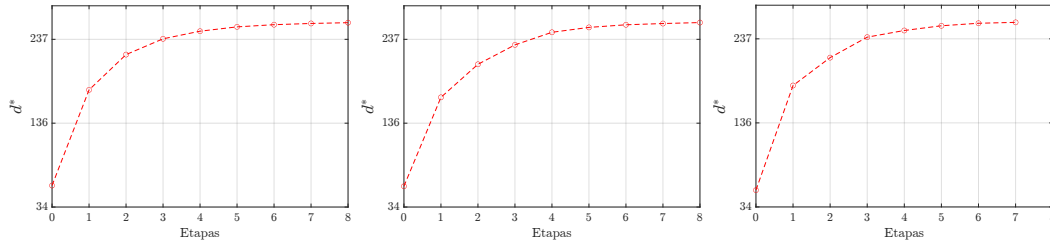


Figura 6.16: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis.  $\gamma = 10\%$ .

Tabla 6.10: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$ .

Etapa (k)	Run 1		Run 2		Run 3	
	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$	$(d_k^* \times 10^2)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^2)$
0	0.5996	2.4469	0.5908	2.2715	0.5422	2.3496
1	1.7592	2.4469	1.6690	2.3385	1.8076	2.3823
2	2.1872	2.4469	2.0697	2.3385	2.1450	2.4796
3	2.3785	2.5202	2.3048	2.5079	2.3926	2.5309
4	2.4710	2.5331	2.4576	2.5454	2.4732	2.5439
5	2.5233	2.5496	2.5170	2.5514	2.5303	2.5557
6	2.5498	2.5563	2.5486	2.5560	2.5606	2.5565
7	2.5648	2.5570	2.5638	2.5571	2.5715	2.5578
8	2.5741	2.5574	2.5756	2.5576	-	-


 Figura 6.17: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano.  $\gamma = 10\%$ .

Una vez alcanzada la condición de detención, se puede notar que, en la etapa adicional, el valor de  $d_k^*$  apenas experimenta cambios. Además, se observa que, en ambos métodos, en todas las ejecuciones, el valor de  $d_k^*$  logra converger al mismo valor. La presencia de una meseta en los gráficos indica una gran certeza de que este valor puede utilizarse como una aproximación del máximo teórico para fines prácticos.

## 6.5 Conclusiones

Este ejemplo demuestra que ambos métodos pueden implementarse eficazmente en problemas dinámicos con mediciones en el dominio del tiempo. Además, a pesar de las diferencias en las distribuciones a priori de cada parámetro, las distribuciones a posteriori resultaron ser notablemente similares y cercanas a una distribución normal. Esto es esperable, dada

la estructura de la función de verosimilitud, que va adquiriendo un mayor peso a medida que aumenta la cantidad de datos disponibles.

Se extraen las siguientes conclusiones generales

- (a) Ambos enfoques son capaces de generar muestras a posteriori de manera efectiva y eficiente.
- (b) Todos los parámetros físicos fueron correctamente identificados, inclusive el amortiguamiento viscoso, el cual es el que presenta una mayor desviación en su distribución a posteriori.
- (c) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy similar en todos los casos. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori se explora efectivamente en este escenario.
- (d) La inclusión de la desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) en el conjunto de parámetros de actualización no afecta la calidad de los resultados de identificación asociados con los parámetros estructurales.
- (e) La desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) se identifica correctamente en este caso.
- (f) Existe una clara relación lineal entre los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , puesto que la razón entre ambos se es igual al cuadrado de la frecuencia natural del sistema.

# APLICACIÓN 4: EDIFICIO A CORTE DE 10 PISOS

En este capítulo se considera un modelo de un edificio a corte de 10 grados de libertad sometido a una aceleración basal. En este ejemplo de aplicación, se observará un escenario de alta dimensionalidad que consta de 31 parámetros a identificar con datos de identificación en el dominio del tiempo con el objetivo verificar la viabilidad y robustez de ambos métodos en un sistema estructural dinámico [19].

## 7.1 Descripción del problema

Este trabajo considera como ejemplo de aplicación un modelo lineal de un edificio a corte de diez pisos, el cual se representa esquemáticamente en la Figura 7.1. El comportamiento del sistema se rige por la ecuación de movimiento

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{G}\ddot{u}_g(t) \quad (7.1.1)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices de masa, viscosidad y rigidez del sistema,  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de desplazamientos relativo al suelo,  $\mathbf{G}$  es el vector de acoplamiento, que en este caso es un vector de unos, y  $\ddot{u}_g(t)$  es la aceleración del suelo. En este caso, el registro "El Centro" es usado. En particular, los primeros 10 segundos de la componente norte-sur son considerados con un intervalo de tiempo de 0.1 s. Además, los valores de la aceleración

fueron escalados para que el peak de aceleración del suelo (PGA) sea igual a  $0.6 \text{ m/s}^2$ . El registro correspondiente está representado en la Fig. 7.2.

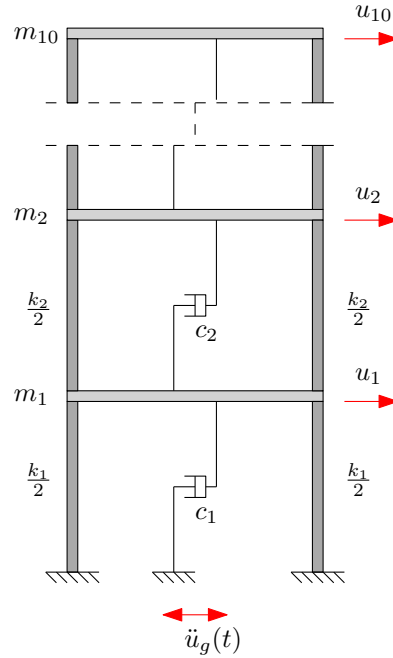


Figura 7.1: Modelo mecánico del edificio a corte de 10 pisos.

Con respecto a los parámetros modales, debido a que el amortiguamiento no es proporcional se debe usar la siguiente formulación

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{G}\ddot{u}_g(t) \quad (7.1.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}\mathbf{G} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (7.1.3)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{G} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (7.1.4)$$

$$\mathbf{M}^*\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{w}(t) = -\mathbf{G}^*\ddot{u}_g(t) \quad (7.1.5)$$

Donde

$$\mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{Bmatrix} \quad (7.1.6)$$

Y de este último se puede conducir a un problema de valores y vectores propios

$$([K^*] + \lambda[M^*])\{\phi\} = \{0\} \quad (7.1.7)$$

$$\lambda_j = d_j + i\omega_{dj} \quad (7.1.8)$$

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (7.1.9)$$

$$d_j = -\xi_j \omega_j$$

## 7.2 Problema de actualización

Para evaluar el desempeño del enfoque propuesto e ilustrar algunas de sus características, se analizará el siguiente escenario de identificación

La rigidez entre piso, el amortiguamiento entre piso, las masas de cada piso, y la desviación estándar del error de predicción son parámetros a identificar. Por lo tanto, se contienen un total de 31 parámetros a identificar en el vector  $\theta$ . Específicamente,  $\theta_i = k_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , son los valores de la rigidez entre pisos,  $\theta_i = c_{i-10}$ ,  $i = 11, \dots, 20$  son los amortiguamientos entre piso,  $\theta_i = m_{i-20}$ ,  $i = 21, \dots, 30$  representan las masas de cada piso, y  $\theta_{31}$  es la desviación estándar del error de predicción que cuantifica el error de medición de los sensores. Cómo se puede apreciar este escenario, se considera de alta dimensionalidad desde la perspectiva de un modelo Actualización Bayesiana.

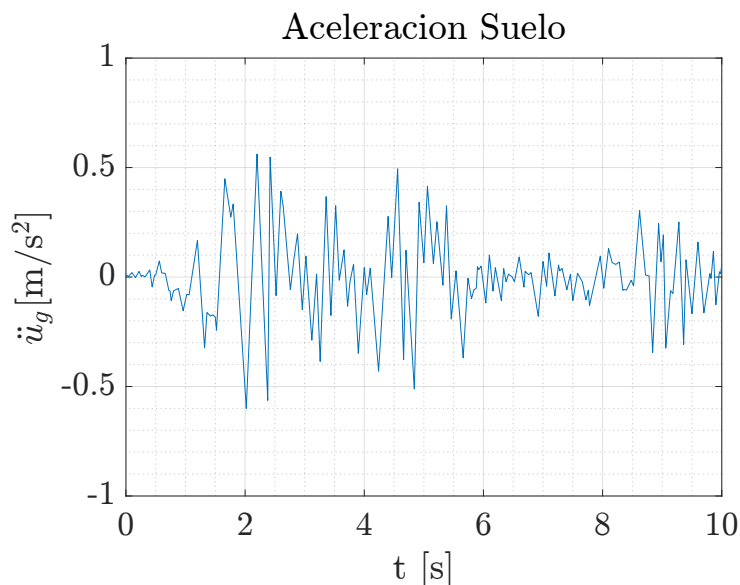


Figura 7.2: Registro del movimiento del suelo.

### 7.2.1 Parámetros inciertos del modelo

En este escenario, son 31 los parámetros inciertos que se consideran a efectos de identificación, es decir,  $\boldsymbol{\theta} = \langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{31} \rangle^T$ , donde  $\theta_i = k_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  son las rigideces entre pisos,  $\theta_i = c_{i-10}$ ,  $i = 11, \dots, 20$  son las constantes de amortiguación,  $\theta_i = c_{i-20}$ ,  $i = 21, \dots, 30$  son las masas de los pisos, y  $\theta_{31} = \sigma$  asociado a la desviación estándar del error de predicción. La correspondiente distribución a priori considera variables aleatorias independientes, donde  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  siguen una distribución normal con valor medio  $\bar{k} = 2 \times 10^7$  N/m y un coeficiente de variación de 30%;  $\theta_i$ ,  $i = 11, \dots, 20$  siguen una distribución normal con valor medio  $\bar{c} = 6 \times 10^4$  Ns/m y un coeficiente de variación de 30%, y  $\theta_i$ ,  $i = 21, \dots, 30$  siguen una distribución normal con valor medio  $\bar{k} = 2 \times 10^4$  kg y un coeficiente de variación de 10%. Para  $\theta_{31}$  se tiene una distribución log-normal, con media  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$  y coeficiente de variación igual a 50%. Nótese que, en este caso, los valores medios de los parámetros inciertos no coinciden con los valores objetivo correspondientes (ver Tabla 7.1 y 7.2).

### 7.2.2 Mediciones

En este ejemplo de aplicación se consideran mediciones sintéticas. Estos datos se denotan como  $\tilde{y}_l(t_k)$ , donde  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N_T$  son distintos instantes de tiempo y  $l = 1, \dots, N_L$  corresponde a diferentes tipos de respuestas y/o localización de sensores. Las mediciones

sintéticas se generan luego como

$$\tilde{y}_l(t_k) = y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \varepsilon_l(t_k) \quad k = 1, \dots, N_T, l = 1, \dots, N_L \quad (7.2.1)$$

donde  $y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$  son las predicciones asociadas con los parámetros reales del modelo  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\varepsilon_l(t_k)$  son perturbaciones aleatorias que representan ruido de medición. En esta configuración,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  corresponde a los valores objetivo del problema de actualización.

En este ejemplo de aplicación, los datos de medición incluyen las aceleraciones totales registradas en el 1° y 10° piso durante la duración del movimiento del suelo, i.e.  $N_L = 2$ , las respuestas de interés se consideran con fines de identificación. Además, la duración del movimiento del suelo es  $T = 10$  s con un salto de tiempo de  $\Delta t = 0.01$  s, que deja un total de  $N_T = 1001$  instantes de tiempo. Además, y con fines ilustrativos, los errores de medición  $\varepsilon_l(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N_T$  se toman como variables gaussianas independientes de media cero tales que  $\varepsilon_l(t_k) \sim N(0, \sigma_l)$ , donde  $\sigma_l = \gamma \times RMS[\mathbf{y}]$ ,  $RMS[\mathbf{y}]$  es la media cuadrática o root-mean-square (RMS) del conjunto completo de mediciones  $y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ ,  $k = 1, \dots, N_T$ ,  $l = 1, \dots, N_L$ , y  $\gamma$  cuantifica el nivel de ruido. En cuanto al nivel de ruido, se consideran el caso  $\gamma = 10\%$ . Note que  $\gamma = 0$  representa un caso idealizado donde no hay errores de medición presentes en el proceso de monitoreo estructural.

### 7.2.3 Parámetros objetivos

Los parámetros que definen el modelo estructural se definen como indica las tablas 7.1 y 7.2. Para fines referenciales, las frecuencias naturales correspondientes,  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , y las razones de amortiguamiento modal,  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , se presentan en la Tabla 7.3. Las mediciones correspondientes a los niveles de ruido  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 10\%$  están mostrados en la Fig. 7.3.

Tabla 7.1: Valores de los parámetros objetivos

Piso ( $i$ )	$k_i$ (N/m)	$c_i$ (Ns/m)	$m_i$ (Kg)
1	$2.16 \times 10^7$	$7.70 \times 10^4$	$1.92 \times 10^4$
2	$1.74 \times 10^7$	$7.78 \times 10^4$	$1.97 \times 10^4$
3	$2.04 \times 10^7$	$7.86 \times 10^4$	$1.95 \times 10^4$
4	$1.99 \times 10^7$	$7.28 \times 10^4$	$2.06 \times 10^4$
5	$1.74 \times 10^7$	$7.19 \times 10^4$	$2.05 \times 10^4$
6	$1.68 \times 10^7$	$7.37 \times 10^4$	$1.98 \times 10^4$
7	$1.87 \times 10^7$	$7.10 \times 10^4$	$1.94 \times 10^4$
8	$1.77 \times 10^7$	$7.11 \times 10^4$	$2.06 \times 10^4$
9	$1.84 \times 10^7$	$6.90 \times 10^4$	$1.90 \times 10^4$
10	$1.72 \times 10^7$	$7.57 \times 10^4$	$2.01 \times 10^4$

Tabla 7.2: Desviación estándar del error de predicción

$$\frac{\sigma_l \text{ (m/s}^2\text{)}}{6.4632 \times 10^{-2}}$$

Tabla 7.3: Valores modales objetivos

Modo ( $i$ )	$\omega_i$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)	$\xi_i$
1	4.6134	0.7343	0.0092
2	13.5515	2.1568	0.0271
3	22.3589	3.5585	0.0445
4	30.7220	4.8896	0.0603
5	37.9947	6.0470	0.0765
6	44.6307	7.1032	0.0911
7	50.5585	8.0466	0.1014
8	54.0964	8.6097	0.1112
9	58.4270	9.2989	0.1158
10	60.5417	9.6355	0.1192

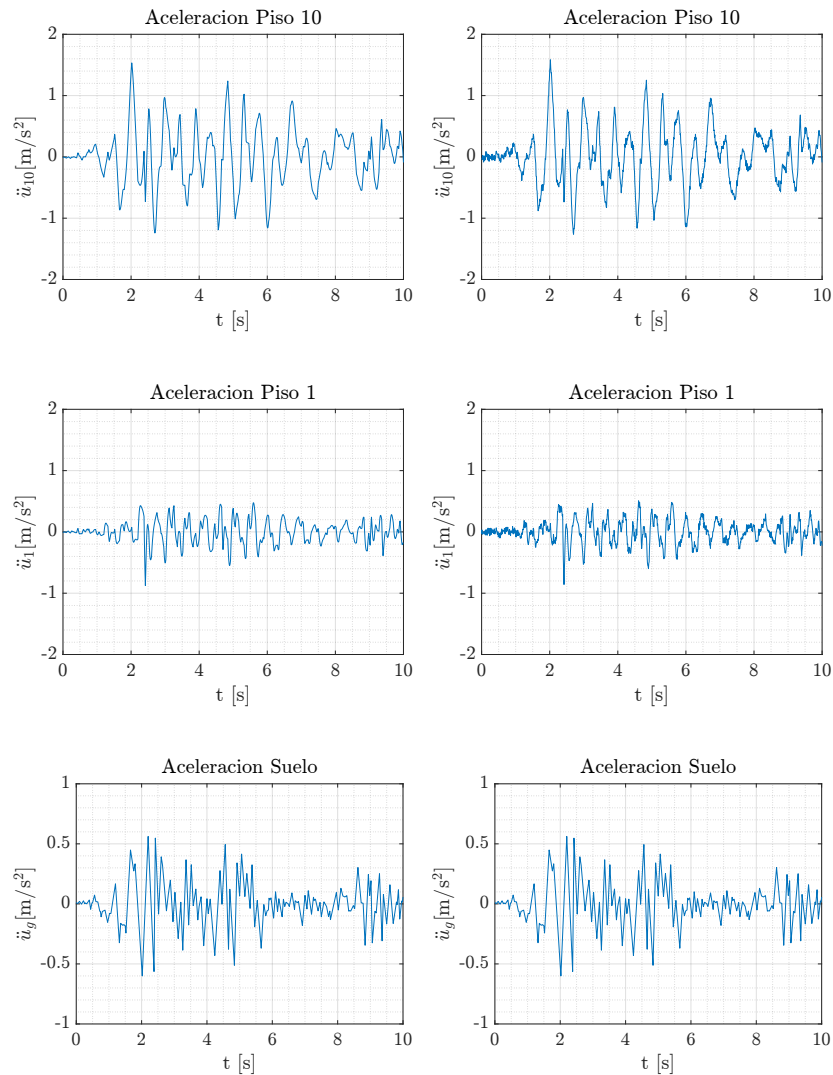


Figura 7.3: Datos de entrada del movimiento de suelo y mediciones para el escenario. Izquierda: Nivel de ruido  $\gamma = 0\%$ (Caso Ideal). Derecha: Nivel de ruido  $\gamma = 10\%$

### 7.2.4 Función de verosimilitud

Uno de los elementos más importantes en el marco de *Bayesian Model Updating* es la función de verosimilitud o likelihood, ya que proporciona un medio cuantitativo para evaluar la similitud entre las predicciones del modelo y las mediciones reales. En este trabajo se asume que los denominados errores de predicción son variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal con valor medio igual a cero y desviación estándar constante  $\sigma$ . Bajo esta suposición, que es bastante común en aplicaciones realistas, la

función de likelihood  $\mathcal{L}(\theta)$  está dada por

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N_L N_T/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{k=1}^{N_T} (\tilde{y}_l(t_k) - y_l(t_k, \theta))^2 \right] \quad (7.2.2)$$

donde  $y_l(t_k, \theta)$  es la predicción para la respuesta de interés  $l$  en el instante de tiempo  $t_k$  obtenido del modelo dado por  $\theta$ , y todos los demás términos han sido definidos previamente.

### 7.3 Detalles de la implementación

BUS con subset simulation se implementa de acuerdo a la sección 3.1. Los siguientes parámetros definidos por el usuario son considerados en este escenario

- Número de muestras por etapa:  $N_s = 10.000$ .
- Probabilidad condicional:  $p_0 = 0.1$ .
- Se consideran cinco ejecuciones independientes, empleando distintas semillas para la generación de números aleatorios.
- Se considera una etapa adicional a modo de generar una mayor cantidad de muestras.

Hay que tener en cuenta que en este escenario se considera un número relativamente grande de muestras, ya que el objetivo de este ejemplo es evaluar la eficacia del método en un caso de alta dimensionalidad e ilustrar algunas de sus características.

#### 7.3.1 Resultados: Bayesian Model Updating

##### 7.3.1.1 Muestras a posteriori

Para ilustrar las muestras a posteriori obtenidas para cinco ejecuciones independientes, para ambos métodos, las Figuras 7.4, 7.5 y 7.6 muestran los histogramas marginales a posteriori asociados a los parámetros de rigidez, amortiguación, masa y ruido de la medición respectivamente, mediante el método Metropolis, del mismo modo, las Figuras 7.9, 7.10 y 7.11 mediante el método Hamiltoniano. Notar que los parámetros inciertos se han normalizado con respecto al valor objetivo (ver Tablas 7.1 y 7.2).

En general, las muestras a posteriori tienden a concentrarse relativamente cerca de los valores objetivo. No obstante, este caso puede considerarse estrictamente no identificable en base a las mediciones disponibles, ya que diferentes combinaciones de los parámetros

del modelo pueden dar lugar al mismo comportamiento estructural en las ubicaciones de los sensores. En base a las Figuras 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 y 7.8 para el método Metropolis, y las Figuras 7.9, 7.10, 7.11, 7.12 y 7.13 escasamente se pueden identificar de manera correcta la masa y la rigidez de los pisos en que se encuentran los sensores puesto que tienen una mayor relevancia en el tipo de medición empleada, y también la desviación estándar del error de medición, dado que la función de verosimilitud es muy sensible a este valor.

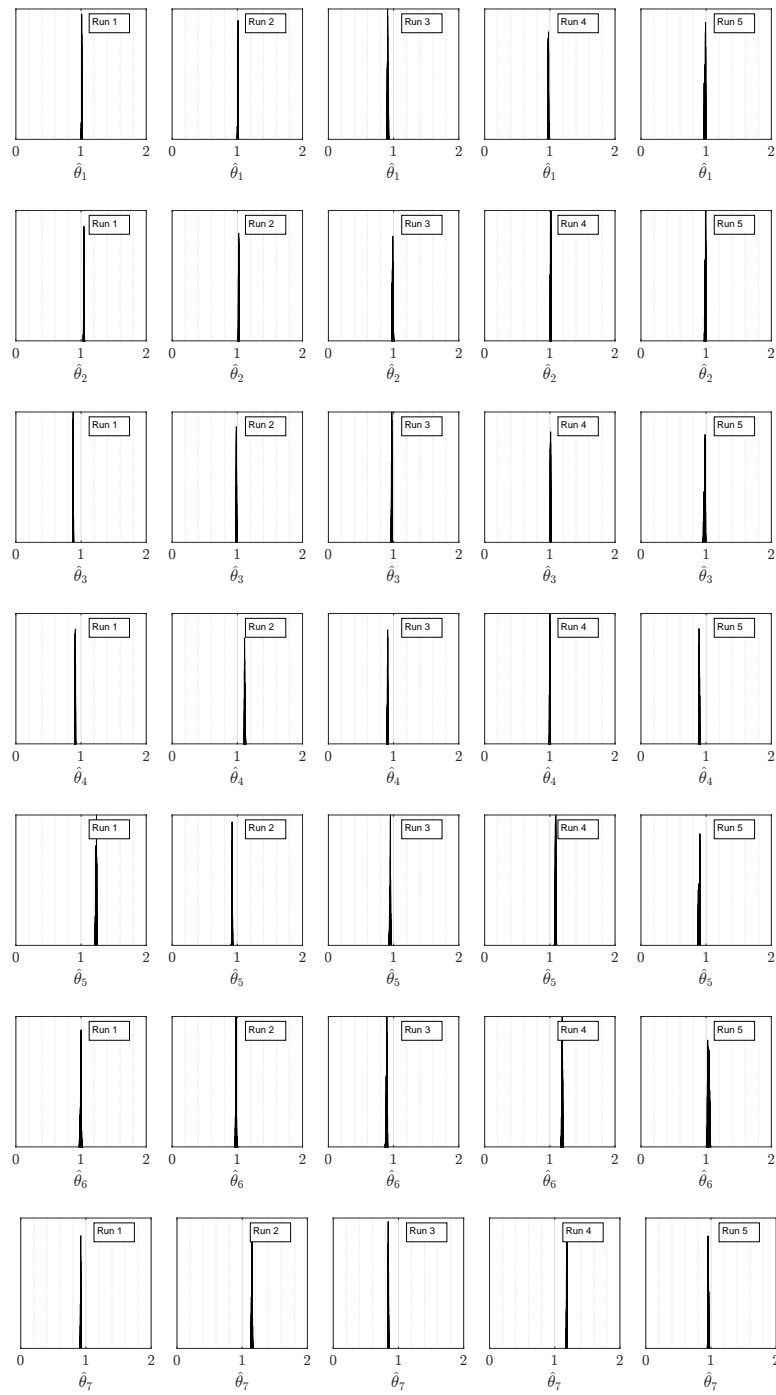


Figura 7.4: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_1$  a  $\hat{\theta}_7$  mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

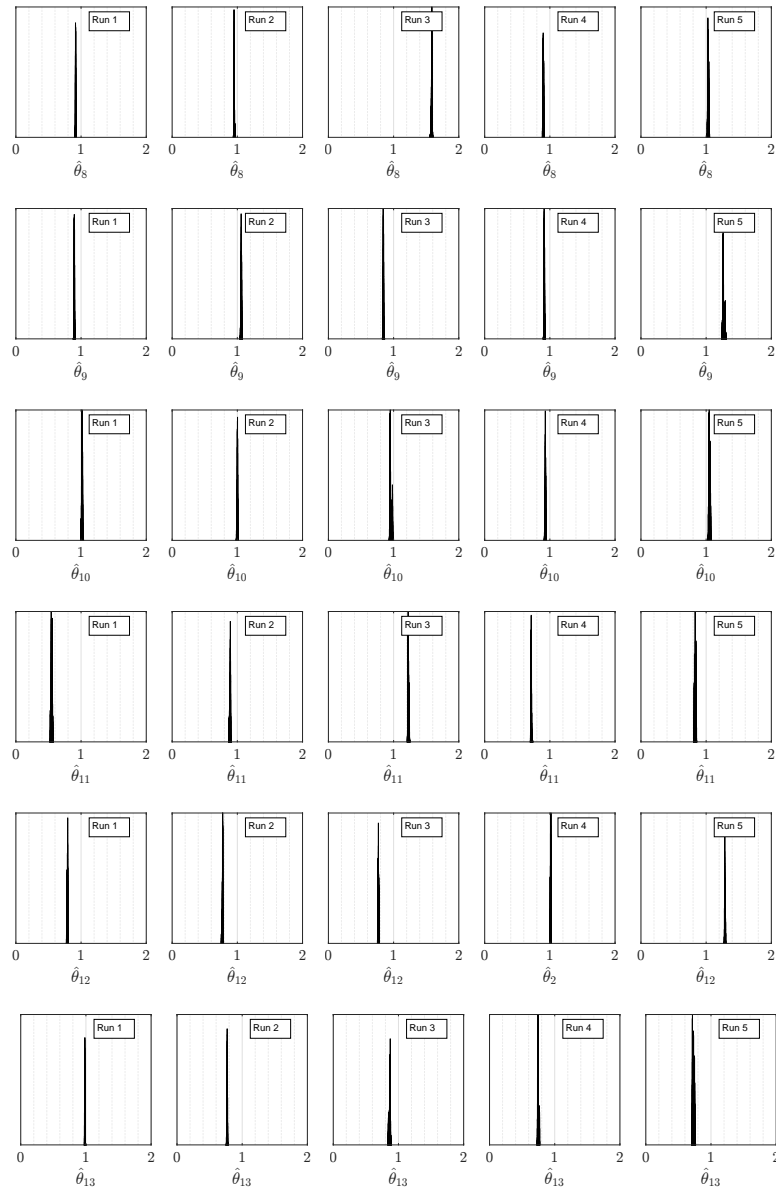


Figura 7.5: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_8$  a  $\hat{\theta}_{13}$  mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

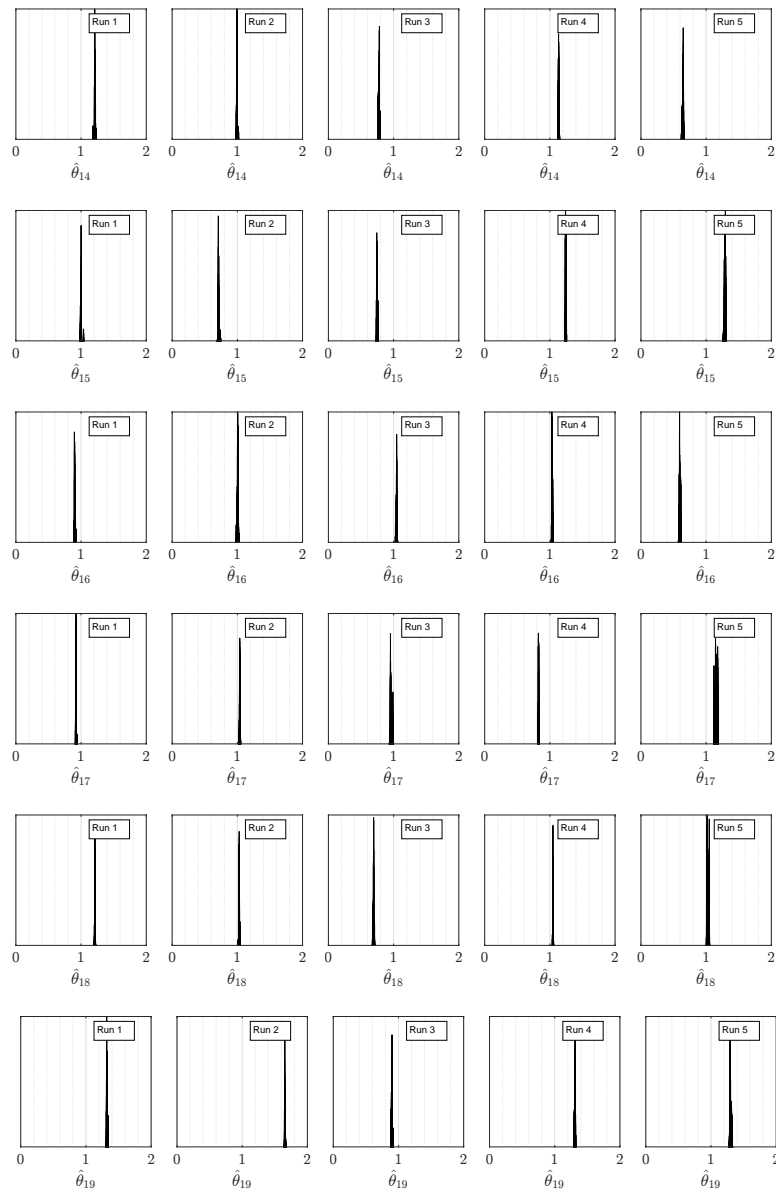


Figura 7.6: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{14}$  a  $\hat{\theta}_{19}$  mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

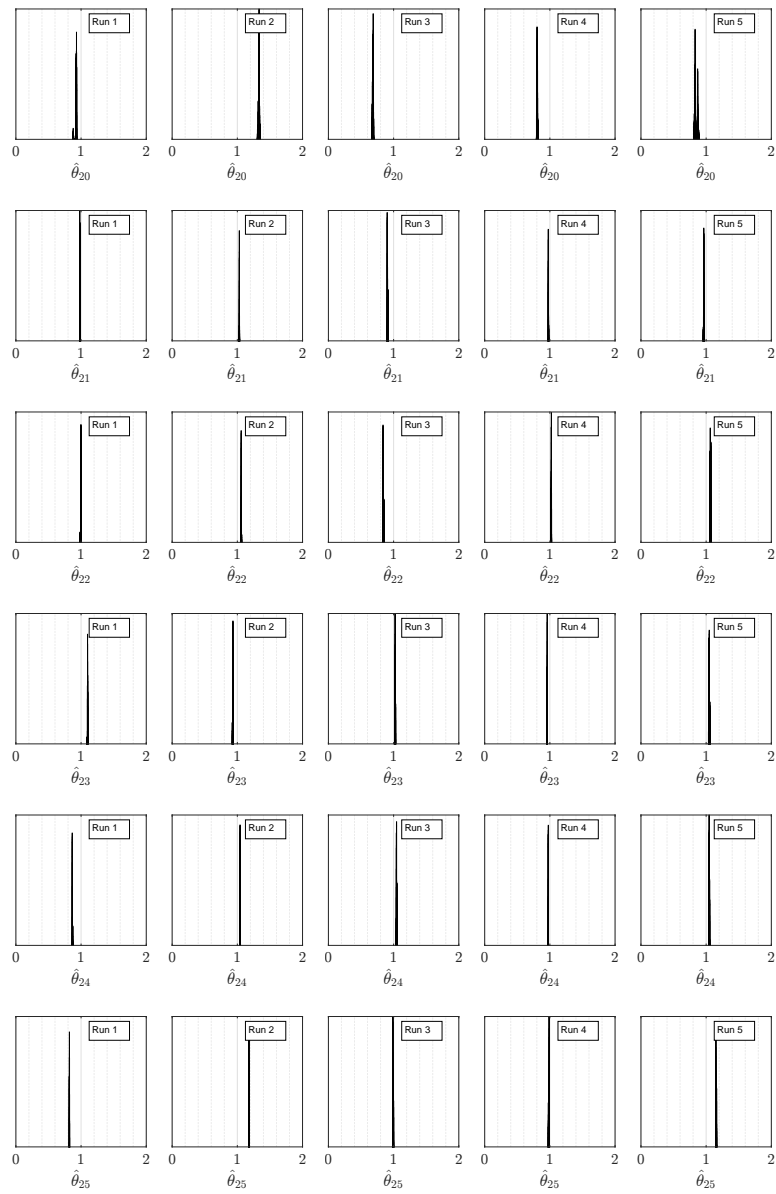


Figura 7.7: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{20}$  a  $\hat{\theta}_{25}$  mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

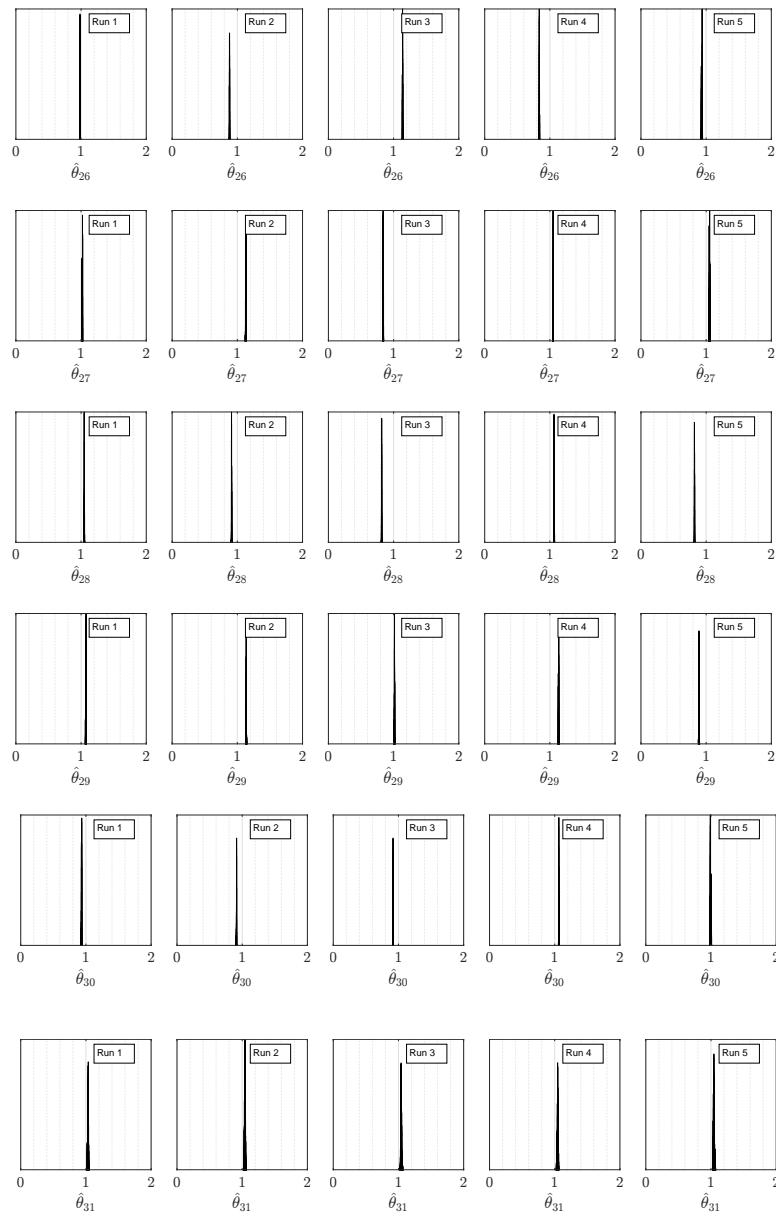


Figura 7.8: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{26}$  a  $\hat{\theta}_{31}$  mediante el método Metropolis, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

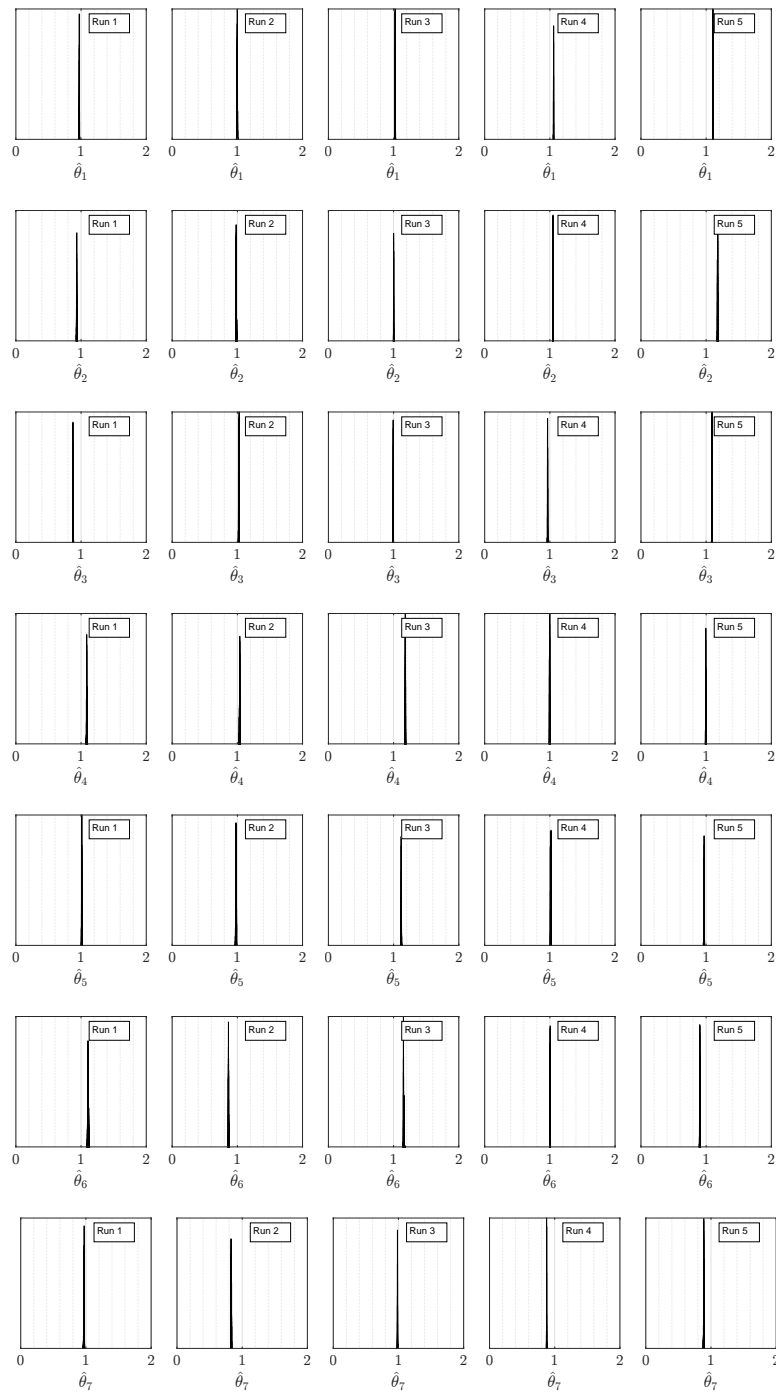


Figura 7.9: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_1$  a  $\hat{\theta}_7$  mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

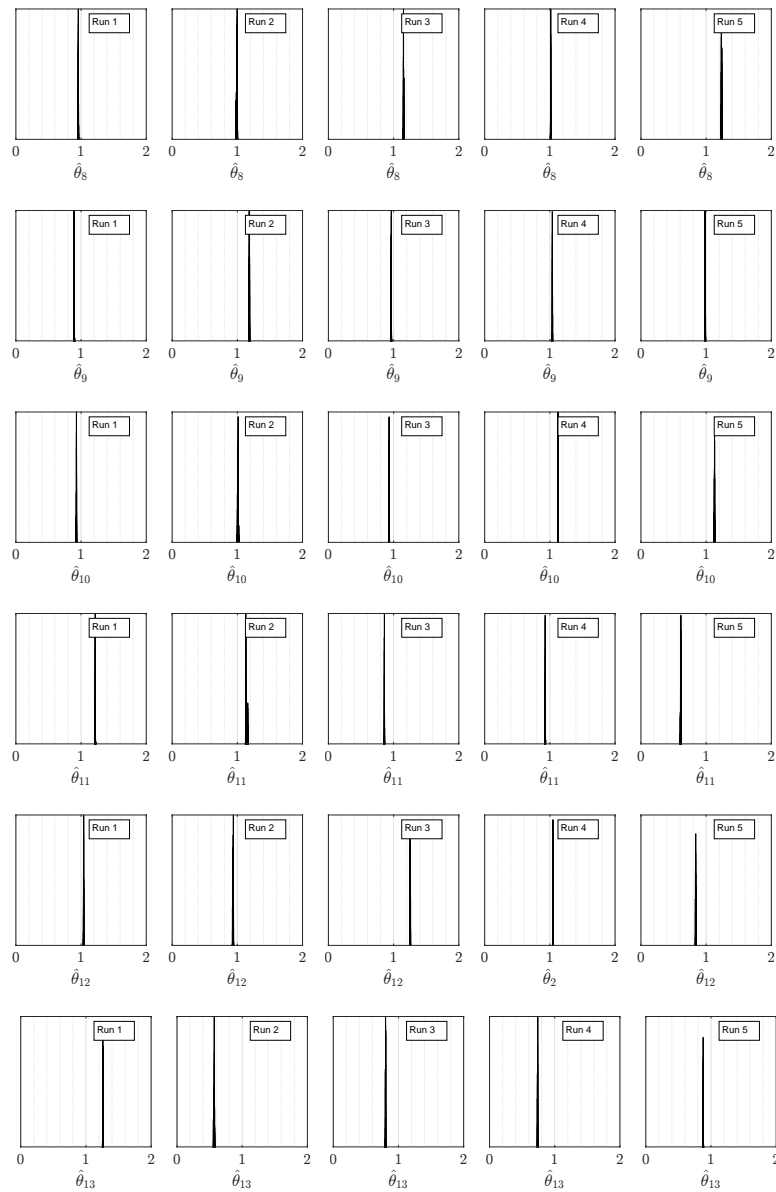


Figura 7.10: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_8$  a  $\hat{\theta}_{13}$  mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

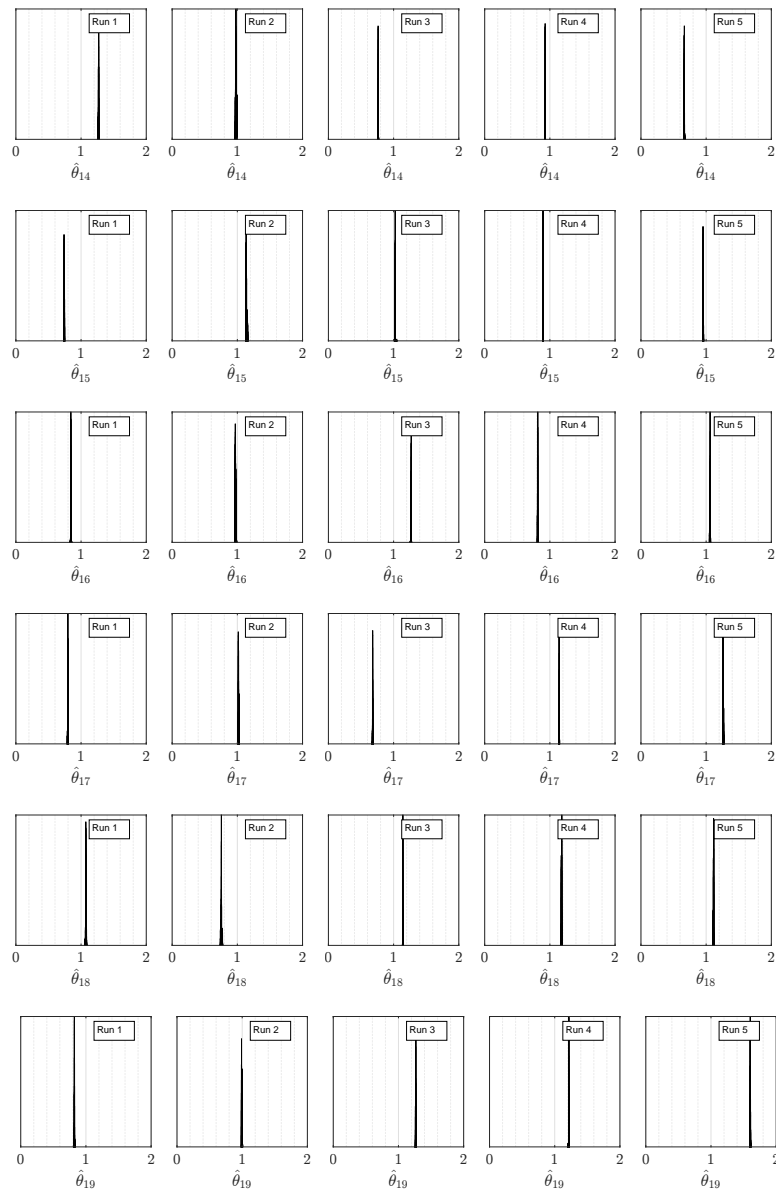


Figura 7.11: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{14}$  a  $\hat{\theta}_{19}$  mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

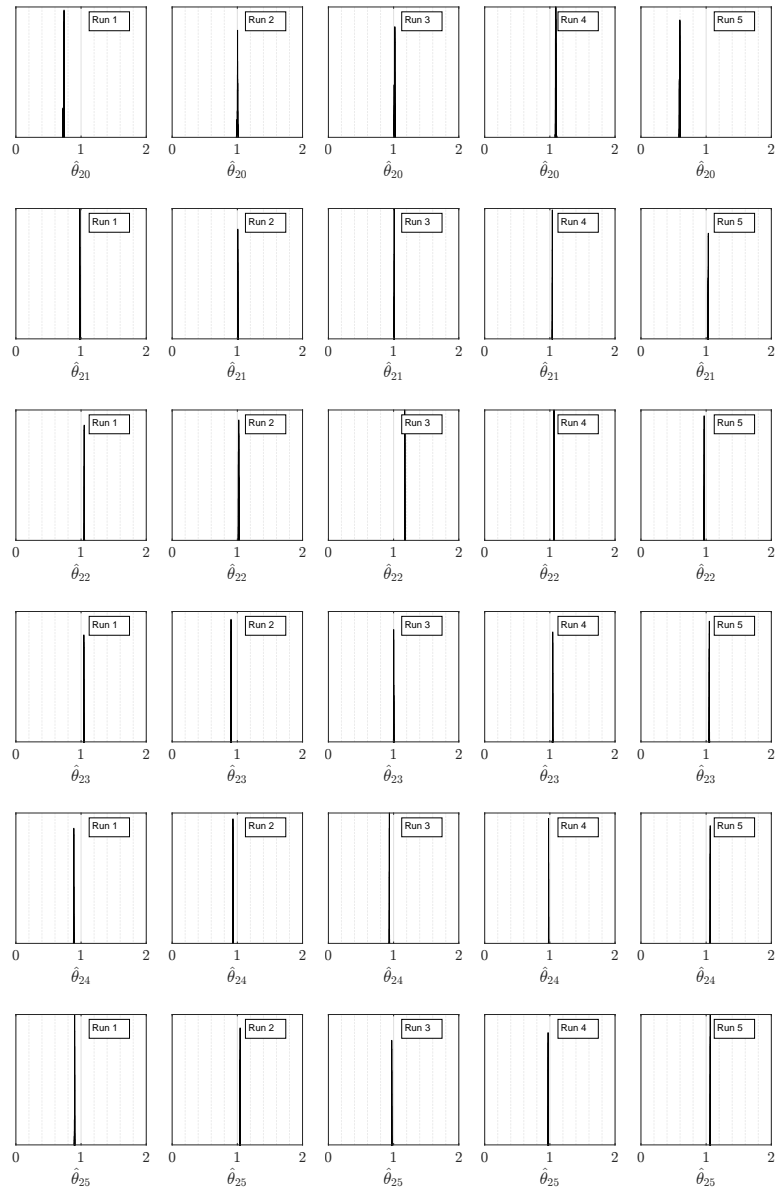


Figura 7.12: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{20}$  a  $\hat{\theta}_{25}$  mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

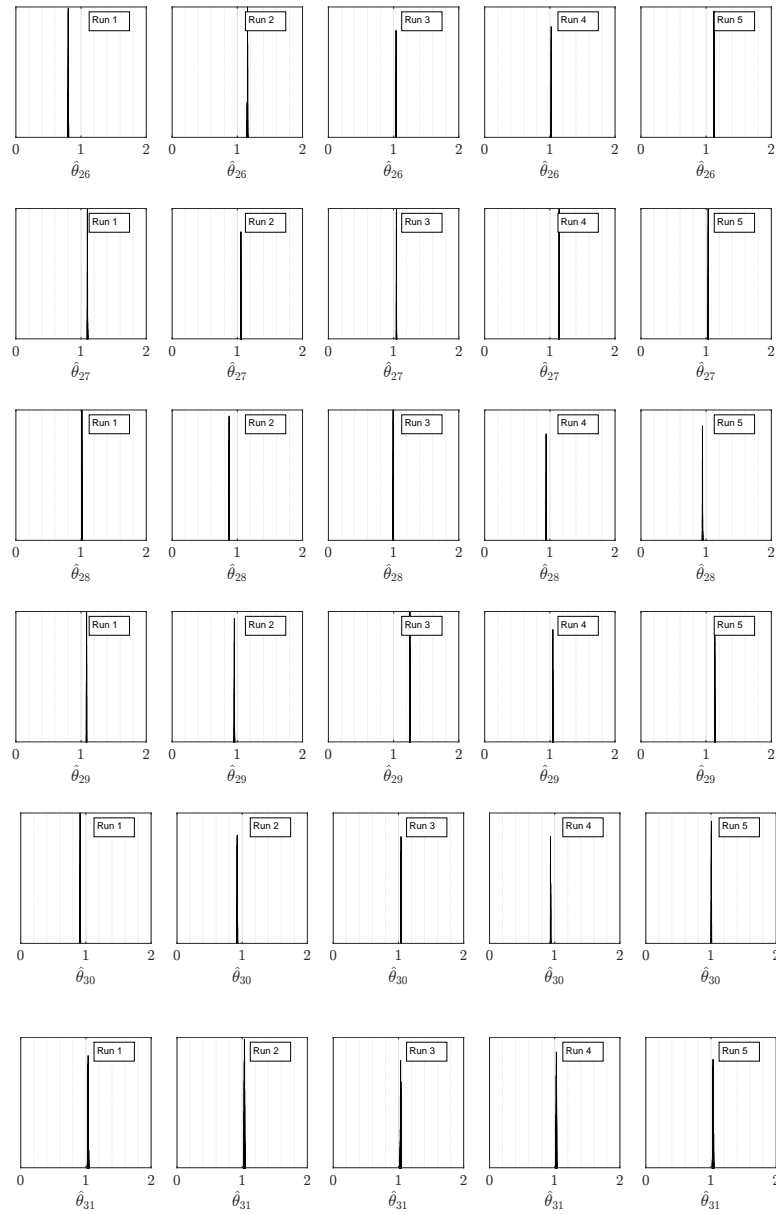


Figura 7.13: Histogramas marginales a posteriori de  $\hat{\theta}_{26}$  a  $\hat{\theta}_{31}$  mediante el método Hamiltoniano, obtenidos en cinco ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

Con fines ilustrativos, las Figuras. 7.14 y 7.15 muestran las proyecciones bidimensionales de las muestras a posteriori correspondientes a diferentes combinaciones de los parámetros inciertos normalizados. En general, las muestras tienden a situarse cerca de los valores objetivo, como se observa en los correspondientes histogramas marginales a excepción de  $\theta_{11}$ , pues al tratarse de un amortiguador, el tipo de medición no es muy sensible a este, por lo que no necesariamente converge al valor objetivo.

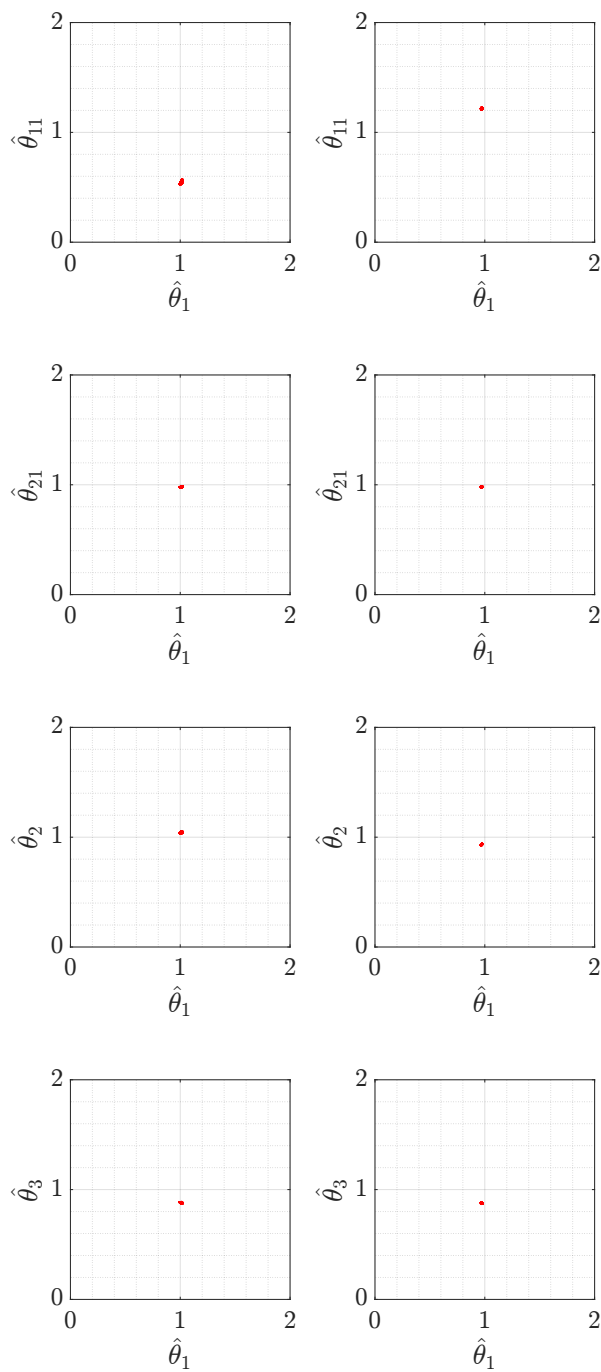


Figura 7.14: Gráficos de muestras a posteriori por pares de diferentes parámetros ( $\hat{\theta}_{11} = c_1/\bar{c}_1$ ,  $\hat{\theta}_{21} = m_1/\bar{m}_1$ , y  $\hat{\theta}_2 = k_2/\bar{k}_2$ ) con respecto al primer parámetro ( $\hat{\theta}_1 = k_1/\bar{k}_1$ ),  $\gamma = 10\%$ , Método Metropolis (Izquierda), Método Hamiltoniano (Derecha)

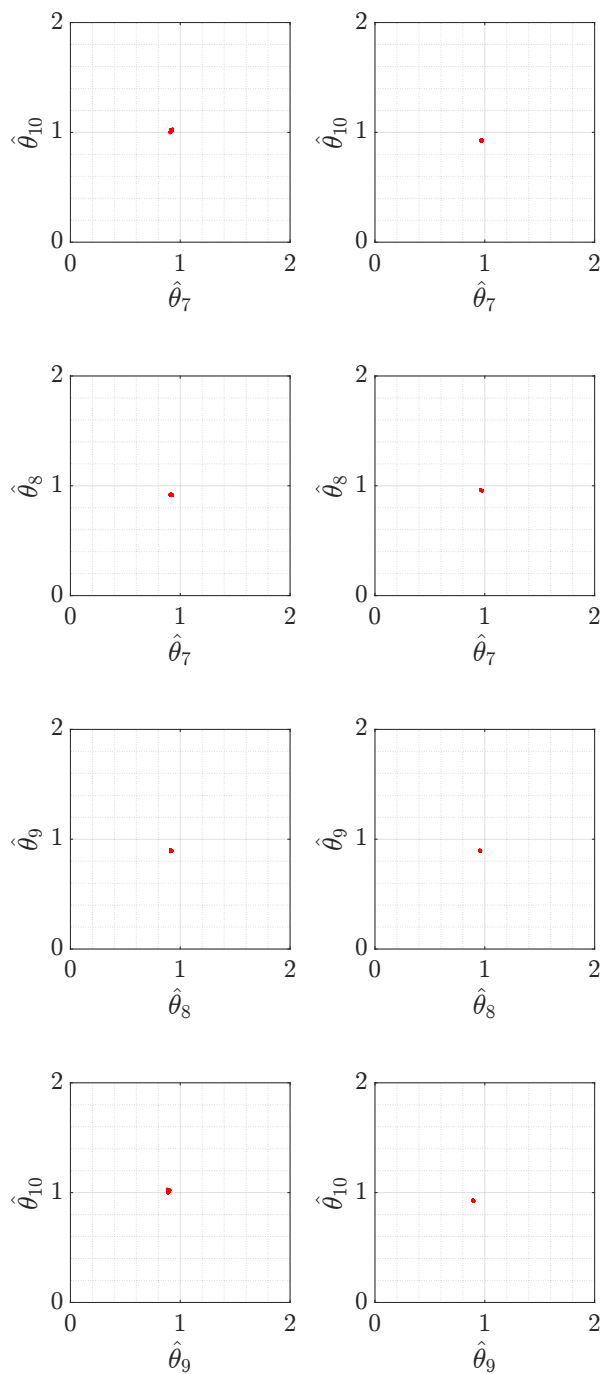


Figura 7.15: Gráficos de muestreo a posteriori por pares para algunos parámetros de rigidez ( $\hat{\theta}_7 = k_7/\bar{k}_7$ ,  $\hat{\theta}_8 = k_8/\bar{k}_8$ ,  $\hat{\theta}_9 = k_9/\bar{k}_9$ ) y ( $\hat{\theta}_{10} = k_{10}/\bar{k}_{10}$ ),  $\gamma = 10\%$ , Método Metropolis (Izquierda), Método Hamiltoniano (Derecha)

Por último, las Tablas 7.4 y 7.5 muestran los valores medios a posteriori de los parámetros inciertos normalizados mediante el método Metropolis y Hamiltoniano obtenidos en cinco

ejecuciones independientes de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ . El error relativo máximo para el método Metropolis es del orden de 65%, que se observa en la ejecución 2, y está asociado a la razón de amortiguamiento del piso 9. Sin contar las razones de amortiguamiento, los errores en promedio son alrededor del 9%. El error relativo máximo para el método Hamiltoniano es del orden de 60%, que se observa en la ejecución 5, el cual está asociado a la razón de amortiguamiento del piso 9. Sin contar las razones de amortiguamiento, los errores en promedio son alrededor del 7.5%.

Por lo tanto, se observa que este problema de identificación, que involucra datos dinámicos, es de alta dimensionalidad y estrictamente no identificable en base a las mediciones disponibles. No obstante, estas diferencias no afectan a la calidad de la identificación desde la perspectiva del comportamiento estructural, como se muestra en las secciones 7.3.3, 7.3.4 y 7.3.5. Esto es debido a la naturaleza del problema. Dado que la excitación externa es un movimiento basal, las mediciones no dependerán de las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  de manera independiente, si no de la relación de  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$  y  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . Por ende, como el método está construido para actualizar los parámetros mediante el nivel de verosimilitud entre las respuestas y las mediciones, donde estas últimas sólo dependen de los parámetros modales, genera que los parámetros a identificar elegidos sean no identificables. Si se tiene el conocimiento previo, uno puede elegir una distribución a priori más centrada y con una menor desviación en aquellos parámetros que se tenga una mayor certeza en sus valores, de esa manera direccionará la distribución a posteriori a los valores más probables.

Tabla 7.4: Valores medios a posteriori en cinco ejecuciones independientes mediante el método Metropolis,  $\gamma = 10\%$

Variable	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5
$\hat{\theta}_1$	1.0116	1.0094	0.9098	0.9757	0.9851
$\hat{\theta}_2$	1.0426	1.0209	0.9854	1.0124	0.9878
$\hat{\theta}_3$	0.8788	0.9858	0.9716	1.0103	0.9772
$\hat{\theta}_4$	0.9112	1.1131	0.9079	0.9996	0.8943
$\hat{\theta}_5$	1.2317	0.9204	0.9484	1.0870	0.8954
$\hat{\theta}_6$	0.9944	0.9794	0.8939	1.1896	1.0379
$\hat{\theta}_7$	0.9198	1.1487	0.8445	1.1842	0.9582
$\hat{\theta}_8$	0.9165	0.9514	1.5834	0.8997	1.0323
$\hat{\theta}_9$	0.8959	1.0606	0.8431	0.9137	1.2673
$\hat{\theta}_{10}$	1.0157	1.0003	0.9548	0.9304	1.0513
$\hat{\theta}_{11}$	0.5492	0.8897	1.2266	0.7135	0.8323
$\hat{\theta}_{12}$	0.7893	0.7731	0.7677	1.0269	1.2883
$\hat{\theta}_{13}$	0.9839	0.7695	0.8654	0.7455	0.7321
$\hat{\theta}_{14}$	1.2104	0.9932	0.7756	1.1338	0.6450
$\hat{\theta}_{15}$	0.9994	0.7112	0.7458	1.2432	1.2902
$\hat{\theta}_{16}$	0.9034	1.0054	1.0454	1.0352	0.5964
$\hat{\theta}_{17}$	0.9228	1.0360	0.9596	0.8262	1.1510
$\hat{\theta}_{18}$	1.2120	1.0275	0.6914	1.0469	1.0264
$\hat{\theta}_{19}$	1.3204	1.6543	0.8970	1.3108	1.3000
$\hat{\theta}_{20}$	0.9253	1.3316	0.6828	0.8063	0.8413
$\hat{\theta}_{21}$	0.9813	1.0304	0.9056	0.9768	0.9631
$\hat{\theta}_{22}$	0.9978	1.0590	0.8397	1.0212	1.0650
$\hat{\theta}_{23}$	1.1002	0.9309	1.0252	0.9578	1.0468
$\hat{\theta}_{24}$	0.8662	1.0415	1.0451	0.9753	1.0474
$\hat{\theta}_{25}$	0.8208	1.1787	0.9921	0.9853	1.1541
$\hat{\theta}_{26}$	0.9818	0.8802	1.1377	0.8383	0.9347
$\hat{\theta}_{27}$	1.0193	1.1301	0.8378	1.0484	1.0524
$\hat{\theta}_{28}$	1.0491	0.9115	0.8162	1.0650	0.8213
$\hat{\theta}_{29}$	1.0761	1.1354	1.0131	1.1335	0.8903
$\hat{\theta}_{30}$	0.9331	0.9131	0.9163	1.0630	0.9936
$\hat{\theta}_{31}$	1.0323	1.0420	1.0420	1.0440	1.0440

Tabla 7.5: Valores medios a posteriori en cinco ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano,  $\gamma = 10\%$

Variable	Run 1	Run 2	Run 3	Run 4	Run 5
$\hat{\theta}_1$	0.9719	0.9979	1.0241	1.0566	1.1044
$\hat{\theta}_2$	0.9335	0.9816	1.0005	1.0475	1.1756
$\hat{\theta}_3$	0.8755	1.0239	0.9939	0.9648	1.0894
$\hat{\theta}_4$	1.0869	1.0362	1.1797	0.9963	0.9948
$\hat{\theta}_5$	1.0103	0.9803	1.1172	1.0129	0.9677
$\hat{\theta}_6$	1.1078	0.8644	1.1544	1.0018	0.9026
$\hat{\theta}_7$	0.9710	0.8311	0.9852	0.8757	0.8887
$\hat{\theta}_8$	0.9572	0.9927	1.1528	1.0129	1.2361
$\hat{\theta}_9$	0.8927	1.1833	0.9634	1.0385	0.9841
$\hat{\theta}_{10}$	0.9277	1.0105	0.9307	1.1255	1.1285
$\hat{\theta}_{11}$	1.2164	1.1364	0.8585	0.9291	0.6105
$\hat{\theta}_{12}$	1.0392	0.9345	1.2556	0.8501	0.8398
$\hat{\theta}_{13}$	1.2606	0.5705	0.8024	0.7374	0.8792
$\hat{\theta}_{14}$	1.2680	0.9789	0.7630	0.9271	0.6634
$\hat{\theta}_{15}$	0.7416	1.1393	1.0244	0.8951	0.9529
$\hat{\theta}_{16}$	0.8435	0.9715	1.2682	0.8126	1.0598
$\hat{\theta}_{17}$	0.7975	1.0185	0.6786	1.1424	1.2604
$\hat{\theta}_{18}$	1.0740	0.7544	1.1419	1.1790	1.1133
$\hat{\theta}_{19}$	0.8231	0.9946	1.2654	1.2181	1.6026
$\hat{\theta}_{20}$	0.7365	1.0013	1.0155	1.0892	0.5940
$\hat{\theta}_{21}$	0.9808	1.0080	1.0090	1.0380	1.0326
$\hat{\theta}_{22}$	1.0488	1.0204	1.1712	1.0633	0.9693
$\hat{\theta}_{23}$	1.0429	0.9032	1.0014	1.0438	1.0489
$\hat{\theta}_{24}$	0.8879	0.9339	0.9351	0.9800	1.0640
$\hat{\theta}_{25}$	0.9009	1.0417	0.9710	0.9739	1.0634
$\hat{\theta}_{26}$	0.8035	1.1556	1.0382	1.0206	1.1202
$\hat{\theta}_{27}$	1.0980	1.0559	1.0436	1.1438	1.0320
$\hat{\theta}_{28}$	1.0124	0.8731	0.9936	0.9425	0.9441
$\hat{\theta}_{29}$	1.0838	0.9546	1.2509	1.0450	1.1316
$\hat{\theta}_{30}$	0.9112	0.9243	1.0399	0.9363	1.0062
$\hat{\theta}_{31}$	1.0326	1.0346	1.0334	1.0253	1.0316

### 7.3.2 Evidencia estimada

Las Tablas 7.6 y 7.7 presentan los valores de máxima verosimilitud observados, las estimaciones de probabilidad de falla y los valores de log-evidencia mediante el método Metropolis y Hamiltoniano, respectivamente, obtenidos en cinco ejecuciones independientes de subset simulation. Nótese que, para ambos enfoques, las estimaciones obtenidas en diferentes eje-

cuciones son muy similares entre sí, lo que implica que las regiones a las que convergieron las muestras durante cada ejecución presentan la misma plausibilidad.

Tabla 7.6: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independiente mediante el método Metropolis  $\gamma = 10\%$

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$3.8094 \times 10^3$	-68.8689	$3.7405 \times 10^3$
2	$3.7912 \times 10^3$	-77.8745	$3.7134 \times 10^3$
3	$3.7871 \times 10^3$	-68.6510	$3.7184 \times 10^3$
4	$3.7899 \times 10^3$	-99.0052	$3.6908 \times 10^3$
5	$3.7845 \times 10^3$	-76.8325	$3.7076 \times 10^3$

Tabla 7.7: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independiente mediante el método Hamiltoniano,  $\gamma = 10\%$

Run No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$3.8100 \times 10^3$	-94.1029	$3.7159 \times 10^3$
2	$3.8109 \times 10^3$	-100.8742	$3.7100 \times 10^3$
3	$3.8112 \times 10^3$	-80.1548	$3.7310 \times 10^3$
4	$3.8201 \times 10^3$	-93.7573	$3.7264 \times 10^3$
5	$3.8066 \times 10^3$	-103.2082	$3.7034 \times 10^3$

### 7.3.3 Identificación de propiedades

Las Tablas 7.8 y 7.9 muestran las frecuencias naturales correspondientes al valor medio a posteriori de los parámetros del modelo mediante el método Metropolis y Hamiltoniano, respectivamente, en tres ejecuciones de simulación independientes al considerar  $\gamma = 10\%$ . En este caso, el error relativo máximo para cada método es de alrededor de 11.8% y 4.8%, donde el método Hamiltoniano es mucho más bajo, y además para ambos casos se obtienen para frecuencias más altas. Al mismo tiempo, el error relativo máximo para ambos métodos es menor que 1.1% y 0.5%, esto cuando se consideran sólo las cinco primeras frecuencias naturales. Del mismo modo, las tablas 7.10 y 7.11 muestran las correspondientes relaciones de amortiguación modal. En general, los errores tienden a ser relativamente más altos para estas cantidades, lo cual es de esperar ya que la respuesta estructural es más sensible a las frecuencias naturales que a las correspondientes relaciones de amortiguamiento para el tipo de excitación considerado. Sin embargo, el error relativo máximo para ambos métodos se sitúa en torno a 28.3% y 16.6% en este caso.

Tabla 7.8: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes mediante el método Metropolis,  $\gamma = 10\%$

Modo	Objetivo	Run 1		Run 2		Run 3	
No. ( $i$ )	$\tilde{\omega}_i$	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	4.6134	4.6101	0.0714	4.6107	0.0584	4.6103	0.0685
2	13.5515	13.5523	-0.0057	13.5551	-0.0270	13.5517	-0.0016
3	22.3589	22.3877	-0.1288	22.3630	-0.0184	22.3750	-0.0720
4	30.7220	30.6887	0.1083	30.6958	0.0853	30.6918	0.0985
5	37.9947	37.9564	0.1008	38.4011	-1.0696	38.0131	-0.0485
6	44.6307	44.5513	0.1779	42.9376	3.7936	45.0977	-1.0463
7	50.5585	50.0006	1.1035	50.8347	-0.5462	49.1467	2.7924
8	54.0964	54.3745	-0.5141	54.0957	0.0012	52.5198	2.9144
9	58.4270	56.3289	3.5911	59.2714	-1.4453	60.9717	-4.3554
10	60.5417	62.8309	-3.7812	61.3561	-1.3451	67.6687	-11.7720

Tabla 7.9: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano,  $\gamma = 10\%$

Modo	Objetivo	Run 1		Run 2		Run 3	
No. ( $i$ )	$\tilde{\omega}_i$	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	4.6134	4.6098	0.0786	4.6096	0.0823	4.6110	0.0533
2	13.5515	13.5482	0.0242	13.5523	-0.0058	13.5512	0.0019
3	22.3589	22.3693	-0.0465	22.3609	-0.0089	22.3419	0.0762
4	30.7220	30.7453	-0.0756	30.7274	-0.0175	30.7027	0.0631
5	37.9947	38.1050	-0.2903	37.8335	0.4242	38.1324	-0.3626
6	44.6307	44.0451	1.3122	44.3066	0.7263	44.3143	0.7089
7	50.5585	50.5224	0.0714	49.0921	2.9003	49.8832	1.3356
8	54.0964	52.8498	2.3044	52.8107	2.3767	53.9468	0.2765
9	58.4270	58.0763	0.6002	61.2860	-4.8932	58.6369	-0.3593
10	60.5417	62.4768	-3.1962	62.3200	-2.9372	63.1279	-4.2718

Tabla 7.10: Razones de amortiguamiento identificadas (en %) en tres ejecuciones independientes mediante el método Metropolis,  $\gamma = 10\%$

Modo	Objetivo	Run 1		Run 2		Run 3	
No. ( <i>i</i> )	$\tilde{\xi}_i$	$\xi_i$	Error (%)	$\xi_i$	Error (%)	$\xi_i$	Error (%)
1	0.9211	0.8637	6.2281	0.7937	13.8276	0.8796	4.5026
2	2.7078	2.7114	-0.1318	2.7273	-0.7203	2.6846	0.8560
3	4.4533	4.6919	-5.3586	4.6681	-4.8241	4.1063	7.7925
4	6.0274	6.2893	-4.3466	6.2945	-4.4319	6.0658	-0.6375
5	7.6525	7.6819	-0.3841	7.7879	-1.7699	7.1592	6.4463
6	9.1138	8.9739	1.5348	9.2440	-1.4287	8.7142	4.3845
7	10.1358	10.5141	-3.7322	8.6114	15.0395	8.9073	12.1210
8	11.1208	12.3067	-10.6636	13.5973	-22.2688	9.8920	11.0496
9	11.5798	10.6062	8.4077	12.5091	-8.0257	10.6182	8.3035
10	11.9189	12.1789	-2.1808	9.8950	16.9805	8.5425	28.3282

Tabla 7.11: Razones de amortiguamiento identificadas (en %) en tres ejecuciones independientes mediante el método Hamiltoniano,  $\gamma = 10\%$

Modo	Objetivo	Run 1		Run 2		Run 3	
No. ( <i>i</i> )	$\tilde{\xi}_i$	$\xi_i$	Error (%)	$\xi_i$	Error (%)	$\xi_i$	Error (%)
1	0.9211	1.0009	-8.6581	0.9068	1.5560	0.8768	4.8050
2	2.7078	2.7361	-1.0459	2.7302	-0.8251	2.7285	-0.7638
3	4.4533	4.2361	4.8776	4.4404	0.2896	4.5772	-2.7832
4	6.0274	6.1182	-1.5073	6.0211	0.1030	5.5291	8.2669
5	7.6525	7.9365	-3.7116	7.5481	1.3639	7.4233	2.9941
6	9.1138	8.6254	5.3587	8.9551	1.7414	8.9915	1.3414
7	10.1358	10.2453	-1.0799	10.2232	-0.8620	10.5857	-4.4390
8	11.1208	10.8830	2.1390	11.1659	-0.4053	11.7650	-5.7921
9	11.5798	12.2155	-5.4905	10.4171	10.0406	10.8450	6.3451
10	11.9189	11.2237	5.8329	9.9406	16.5979	10.1653	14.7130

### 7.3.4 Comparación de las mediciones y las predicciones a posteriori

La figura 7.16 muestra las respuestas de aceleración medidas en los sensores (línea negra sólida) así como las correspondientes predicciones asociadas al valor medio a posteriori de los parámetros (línea roja) para el caso  $\gamma = 10\%$ . Además, el intervalo de 95% de confianza (línea punteada azul) de la respuesta, que están asociados con la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Se observa que todas las magnitudes coinciden muy bien y, por tanto, los métodos propuestos son capaces de identificar correctamente el comportamiento estructural.

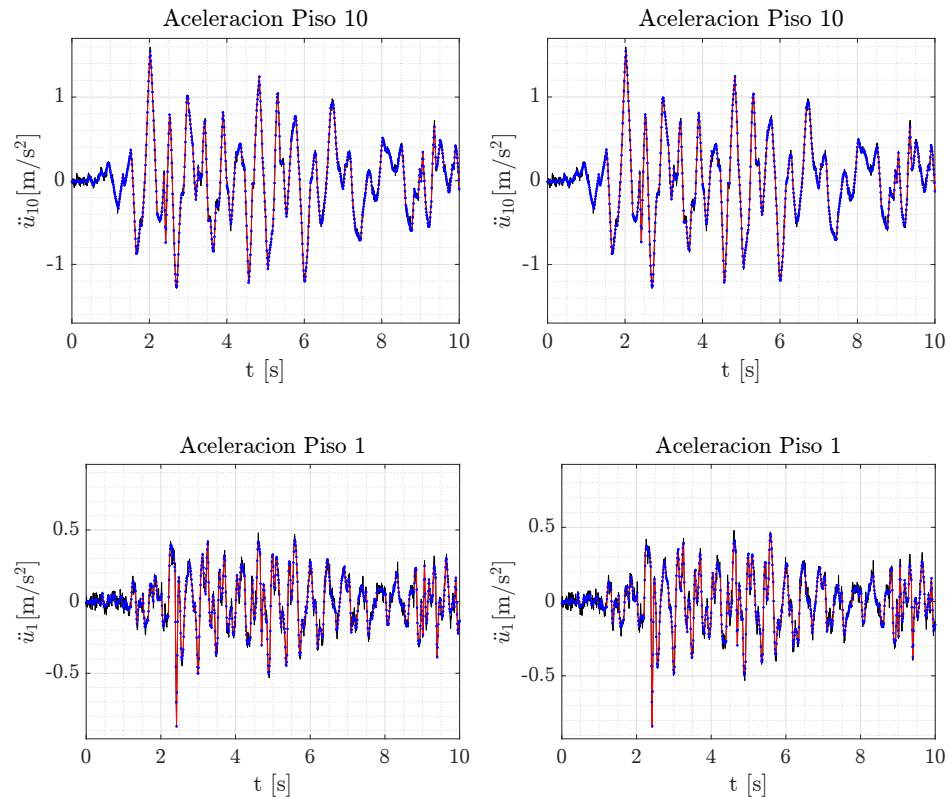


Figura 7.16: Aceleraciones en los pisos 1 y 10. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada).  $\gamma=10\%$ . Método Metropolis (Izquierda). Método Hamiltoniano (Derecha)

### 7.3.5 Comparación entre mediciones no observadas y predicciones a posteriori

La figura 7.17 muestra las respuestas de desplazamiento no observadas en algunos pisos (solid-black line) así como las correspondientes predicciones asociadas al valor medio de los parámetros a posteriori (línea roja) para el caso  $\gamma = 10\%$ . Además, el intervalo de 95% de confianza (línea punteada azul) de la respuesta, que está asociado con la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Se ve que todas las cantidades concuerdan muy bien y, por tanto, ambos métodos propuestos son capaces de identificar correctamente el comportamiento estructural para este escenario.

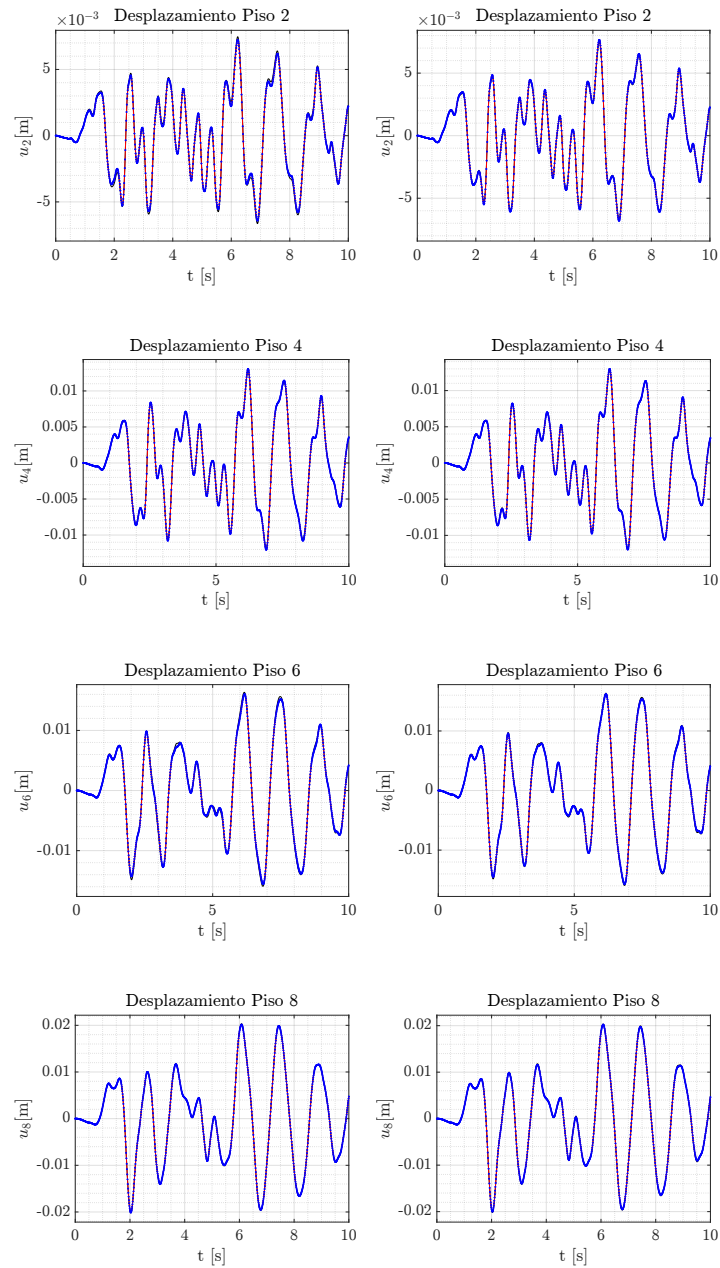


Figura 7.17: Desplazamientos de los pisos 2, 4, 6 y 8. Mediciones no observadas (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada).  $\gamma=10\%$ . Método Metropolis (Izquierda). Método Hamiltoniano (Derecha)

### 7.3.6 Evolución del umbral intermedio y auxiliar

Según la sección 3.1, el método propuesto sigue hasta que el umbral auxiliar  $d^{\text{aux}}$  es menor que el correspondiente umbral intermedio  $d_{\kappa}^*$ . Recordemos que el umbral auxiliar

corresponde en realidad al valor máximo de log-likelihood observado en todas las etapas. A modo de referencia, las Tablas 7.12 y 7.13 muestran los umbrales auxiliares e intermedios obtenidos durante las diferentes etapas de tres ejecuciones de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ , como también las Figuras 7.18 y 7.19.

Tabla 7.12: Umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

Etapas ( $\kappa$ )	Run 1		Run 2		Run 3	
	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$
0	0.4711	2.8556	0.4404	2.8734	0.4920	2.6936
1	1.8698	2.9006	1.8701	3.2716	1.9000	3.0664
2	2.4359	3.2037	2.4269	3.3206	2.4099	3.1931
3	2.7798	3.4657	2.7793	3.4485	2.7650	3.3079
4	3.0362	3.4657	3.0588	3.4522	3.0523	3.5228
5	3.2283	3.4766	3.2476	3.5086	3.2469	3.5940
6	3.3689	3.5586	3.3852	3.5576	3.4006	3.6330
7	3.4676	3.6343	3.4811	3.6315	3.5256	3.6976
8	3.5341	3.6955	3.5376	3.6640	3.5990	3.6976
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	3.7939	3.8009	3.7544	3.7615	3.7632	3.7681
20	3.7981	3.8016	3.7592	3.7672	3.7668	3.7708
21	3.8008	3.8034	3.7638	3.7697	3.7700	3.7779
22	3.8028	3.8050	3.7676	3.7730	3.7729	3.7792
23	3.8042	3.8057	3.7708	3.7761	3.7762	3.7811
24	3.8053	3.8064	3.7738	3.7786	3.7794	3.7813
25	3.8063	3.8073	3.7767	3.7801	3.7812	3.7827
26	3.8073	3.8078	3.7792	3.7825	3.7826	3.7833
27	3.8080	3.8081	3.7814	3.7842	3.7837	3.7842
28	3.8087	3.8089	3.7837	3.7854	3.7848	3.7851
29	3.8091	3.8091	3.7854	3.7866	3.7857	3.7855
30	3.8096	3.8094	3.7868	3.7878	3.7865	3.7867
31	-	-	3.7883	3.7892	3.7872	3.7871
32	-	-	3.7896	3.7897	-	-
33	-	-	3.7906	3.7904	-	-
34	-	-	3.7915	3.7912	-	-

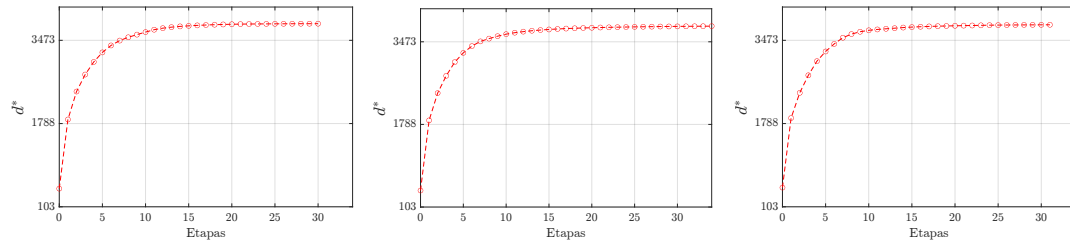


Figura 7.18: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

Tabla 7.13: Umbrales intermedios ( $d_{\kappa}^*$ ) y umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes,  $\gamma = 10\%$

Etapa ( $\kappa$ )	Run 1		Run 2		Run 3	
	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$	$d_{\kappa}^* (\times 10^3)$	$d^{\text{aux}} (\times 10^3)$
0	0.4404	2.8734	0.5245	2.7364	0.4748	2.9568
1	1.8558	2.8734	1.9148	2.7364	1.8883	2.9568
2	2.3979	3.3199	2.4310	2.7941	2.4107	3.0717
3	2.7382	3.3199	2.6882	3.2548	2.7779	3.2954
4	2.9797	3.4064	2.9036	3.4204	3.0289	3.2954
5	3.2237	3.4708	3.1539	3.4909	3.1609	3.4263
6	3.3448	3.5319	3.2821	3.5129	3.2985	3.5510
7	3.4413	3.6021	3.3970	3.5679	3.4082	3.5909
8	3.5177	3.6338	3.4822	3.6212	3.4853	3.6645
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	3.8037	3.8053	3.7978	3.7997	3.8084	3.8097
29	3.8046	3.8059	3.7991	3.8023	3.8089	3.8097
30	3.8053	3.8065	3.8005	3.8035	3.8094	3.8099
31	3.8059	3.8067	3.8019	3.8042	3.8099	3.8103
32	3.8064	3.8070	3.8033	3.8047	3.8103	3.8106
33	3.8069	3.8075	3.8044	3.8054	3.8106	3.8107
34	3.8074	3.8082	3.8053	3.8057	3.8108	3.8108
35	3.8079	3.8084	3.8060	3.8064	3.8111	3.8111
36	3.8083	3.8086	3.8067	3.8071	3.8112	3.8112
37	3.8087	3.8090	3.8073	3.8077	-	-
38	3.8090	3.8093	3.8079	3.8083	-	-
39	3.8093	3.8095	3.8085	3.8090	-	-
40	3.8096	3.8096	3.8091	3.8096	-	-
41	3.8099	3.8099	3.8097	3.8099	-	-
42	3.8101	3.8100	3.8103	3.8103	-	-
43	-	-	3.8108	3.8107	-	-
44	-	-	3.8112	3.8109	-	-

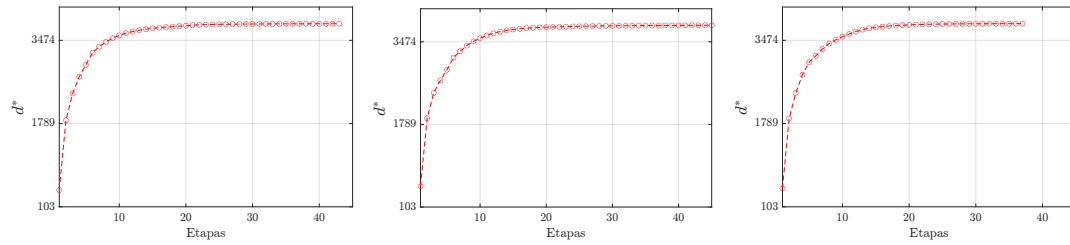


Figura 7.19: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes  $\gamma = 10\%$

Como se puede apreciar en las Figuras 7.18 y 7.19, a partir de la etapa 20 el valor  $d_k^*$  crece muy lentamente y el algoritmo no se detiene hasta casi llegar a las 40 etapas, esto se debe principalmente a la alta dimensionalidad del problema, puesto que el volumen de espacio muestral a explorar es muy grande, lo que da mucha más libertad a los parámetros de actualizarse a zonas con mayor verosimilitud, aunque el aumento es muy leve.

## 7.4 Conclusiones

Este ejemplo demuestra que hay que tener cierta cautela en la identificación de parámetros, ya que, dada la naturaleza del problema, los datos de medición que se tienen a disposición no permiten que estos sean identificables. La razón por la que los parámetros a posteriori logran reproducir los mismos registros es que los parámetros modales coinciden con los valores objetivos, y son identificables. Por lo tanto, cualquier combinación de parámetros físicos que comparta estos mismos parámetros modales tendrá la misma plausibilidad.

Se extraen las siguientes conclusiones generales:

- (a) Ambos enfoques son capaces de generar muestras a posteriori de manera efectiva y eficiente.
- (b) Las propiedades modales, es decir, las frecuencias naturales y formas modales, se actualizan adecuadamente utilizando los datos de medición disponibles.
- (c) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy similar en todos los casos. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori posee la misma plausibilidad en cada uno de ellos.
- (d) La inclusión de la desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) en el conjunto

de parámetros de actualización no afecta la calidad de los resultados de identificación asociados con los parámetros estructurales.

- (e) La desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) se identifica correctamente en este caso.
- (f) Si bien los parámetros modales se adecúan muy bien a las mediciones, los parámetros físicos no son identificables dada la naturaleza del problema.

# APLICACIÓN 5: MODELO DE PUENTE

En este capítulo se ejemplifica el rendimiento y las capacidades de los métodos propuestos debido a que se aplica en un modelo de elementos finitos de una estructura de puente equipada con dispositivos basados en fricción y sujeta a movimiento sísmico. Se consideran medidas sintéticas de aceleración con fines de identificación. Se abordan dos escenarios diferentes en términos del número de parámetros de identificación siendo el último de alta dimensionalidad. Así, este ejemplo de aplicación considera sistemas dinámicos estructurales, comportamiento no lineal y datos de identificación en el dominio temporal [20].

## 8.1 Descripción del problema

Este trabajo toma como ejemplo de aplicación un modelo de elementos finitos que simula un puente equipado con dispositivos no lineales y sujeto a un movimiento sísmico. Se explorarán dos escenarios en términos del número de parámetros de identificación. Estos parámetros se actualizarán utilizando dos conjuntos de datos, siendo uno con un número menor de locaciones.

### 8.1.1 Modelo estructural

Este trabajo considera como ejemplo de aplicación de *Bayesian model updating* un puente de hormigón armado sometido a una excitación sísmica, cuyo modelo de elementos finitos (FE) se ilustra en la Figura 8.1. Se utilizan elementos tipo *shell* y *frame* para modelar la losa, los pilares y los pilotes del sistema; lo que resulta en 10067 grados de libertad. Se colocan resortes lineales sin masa a lo largo de los diferentes pilotes en las direcciones  $x$  e  $y$  para modelar la interacción suelo-estructura. El efecto neto de estos elementos es aumentar la rigidez horizontal de los pilotes. Para mejorar el rendimiento sísmico, se asignan dos deslizadores curvos en cada estribo. Estos rodamientos basados en fricción muestran un fuerte comportamiento no lineal y su coeficiente de fricción se modela mediante un modelo validado experimentalmente que considera las principales fuentes de degradación del rendimiento durante eventos sísmicos [21–25] (carga normal, efecto cíclico y efecto de velocidad). Se asume que la estructura principal (losa, pilares y pilotes) permanece lineal, mientras que el comportamiento no lineal ocurre en los dispositivos basados en fricción. Por lo tanto, el comportamiento dinámico del sistema estructural se modela mediante la ecuación de movimiento

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{q}(t)) = -\mathbf{M}\mathbf{G}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (8.1.1)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente;  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de desplazamiento;  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{q}(t))$  es el vector de fuerzas de restauración no lineales;  $\mathbf{q}(t)$  es el vector de variables de estado de los componentes no lineales;  $\mathbf{G}$  es la matriz de conectividad; y  $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$  representa el vector de excitación del suelo. En este ejemplo, se considera una excitación del suelo unidimensional aplicada a  $50^\circ$  con respecto al eje  $x$ . Con fines de referencia, la Figura 8.2 muestra la excitación del suelo correspondiente, que corresponde con los primeros 20 segundos del registro “El Centro” y se escala a una aceleración máxima del suelo (PGA) de  $5 \text{ m/s}^2$ . Finalmente, con fines de análisis dinámico, se consideran los primeros 20 modos y se impone un coeficiente de amortiguamiento modal del 5%.

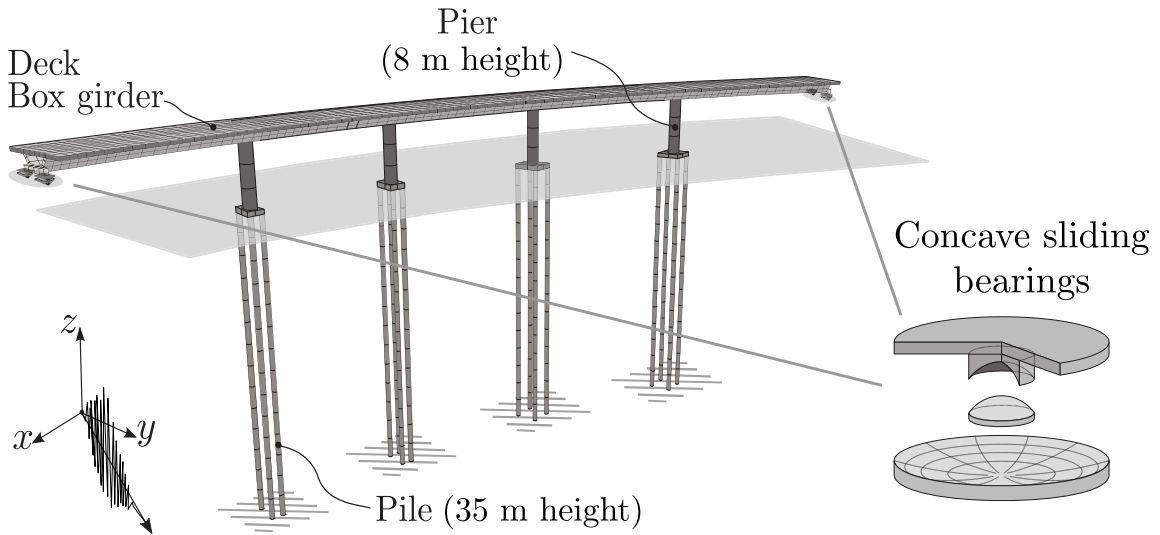


Figura 8.1: Modelo de elementos finitos de la estructura del puente equipada con rodapiés no lineales.

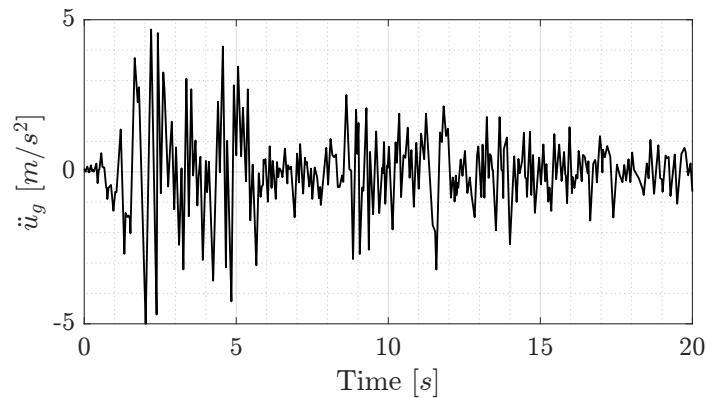


Figura 8.2: Registro del movimiento del suelo. Primeros 20 segundos de “El Centro” (PGA = 5 m/s).

### 8.1.2 Subestructuras y esquema de parametrización

En este trabajo, el modelo de elementos finitos se divide en dieciocho ( $n_s = 18$ ) subestructuras, como se ilustra en la Figura 8.3. La descripción de las diferentes subestructuras se proporciona en la Tabla 8.1. Se puede observar que las subestructuras del 1 al 16 son lineales, mientras que las subestructuras 17 y 18 incluyen dispositivos basados en fricción y, por lo tanto, presentan un comportamiento no lineal.

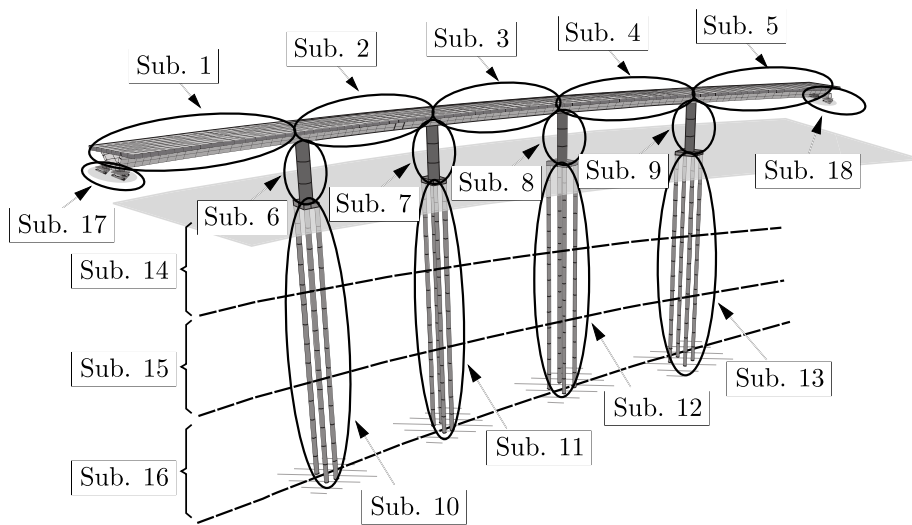


Figura 8.3: Subestructuras del modelo del puente.

A efectos del modelo, a cada subestructura se le asocia un solo parámetro, que modifica una única propiedad de los elementos correspondientes de la subestructura. La Tabla 8.2 presenta las propiedades de los diferentes parámetros. Tenga en cuenta que las propiedades parametrizadas asociadas a las subestructuras lineales (es decir, las subestructuras del 1 al 16) corresponden a los módulos de elasticidad de los materiales y las rigideces de los resortes que modelan la interacción suelo-estructura. Por lo tanto, la matriz de rigidez de cada subestructura es lineal con respecto a la propiedad parametrizada correspondiente. Por otro lado, la matriz de masa del modelo completo es independiente de las propiedades enumeradas en la Tabla 8.2. Con fines de referencia, los parámetros correspondientes de las subestructuras se denotan como  $\boldsymbol{\chi} = \langle \chi_1, \dots, \chi_{18} \rangle$ . Además, se observa que cada parámetro de identificación  $\chi_i$  puede estar potencialmente vinculado a una o varias subestructuras. De la misma forma, algunos parámetros de las subestructuras pueden ser independientes del conjunto de parámetros de identificación.

### 8.1.3 Matrices dinámicas

En principio, las matrices de masa y rigidez del modelo del puente pueden ensamblarse directamente para cada realización de los parámetros  $\boldsymbol{\chi}$ , utilizando cualquier implementación de elementos finitos disponible. Sin embargo, esto puede ser computacionalmente muy costoso, ya que el número de evaluaciones del modelo en el contexto de simulaciones basadas en *Bayesian model updating* suelen ser del orden de cientos o miles. Por lo tanto, en este trabajo se considera una parametrización directa de la matriz de rigidez para reducir el

tiempo computacional general [20]. Cabe recordar que la matriz de masa no cambia con los valores de los parámetros  $\gamma$ , por lo tanto, solo necesita evaluarse una vez, es decir,  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{M}^{(0)}$ .

La matriz de rigidez global evaluada en una realización dada de los parámetros del modelo  $\boldsymbol{\chi}$ , es decir,  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\chi})$ , se expresa como:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\chi}) = \bar{\mathbf{K}}^{(0)} + \sum_{s=1}^{16} (\chi_s - 1) \bar{\mathbf{K}}^{(s)} \quad (8.1.2)$$

Donde  $\bar{\mathbf{K}}^{(0)}$  es la matriz de rigidez del modelo estructural nominal, y  $\bar{\mathbf{K}}^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, 16$  son matrices de rigidez asociadas a las diferentes subestructuras. Nótese que los parámetros  $\chi_{17}$  y  $\chi_{18}$  están relacionados con el coeficiente de fricción de los dispositivos de disipación basados en fricción  $\gamma$ , por lo tanto, no afectan la matriz de rigidez del sistema estructural. Además, se observa que la matriz de rigidez nominal se obtiene cuando  $\chi_s = 1$ ,  $s = 1, \dots, 16$ , mientras que las matrices  $(\chi_s - 1) \bar{\mathbf{K}}^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, 16$ , representan perturbaciones con respecto al modelo nominal. Para calcular la matriz de masa y las matrices de rigidez anteriores, se utiliza el conocido software SAP2000(v.20).

Tabla 8.1: Descripción de las diferentes subestructuras del modelo de puente.

Subestructura	Descripcion
1	Primer tramo de la cubierta.
2	Segundo tramo de la cubierta.
3	Tercer tramo de la cubierta.
4	Cuarto tramo de la cubierta.
5	Quinto tramo de la cubierta.
6	Primer pilar.
7	Segundo pilar.
8	Tercer pilar.
9	Cuarto pilar.
10	Primer conjunto de pilotes.
11	Segundo conjunto de pilotes.
12	Tercer conjunto de pilotes.
13	Cuarto conjunto de pilotes.
14	Resortes traslacionales, de 0 a 10 metros de profundidad.
15	Resortes traslacionales, de 10 a 22 metros de profundidad.
16	Resortes traslacionales, de 22 a 35 metros de profundidad.
17	Primer conjunto de dispositivos basados en fricción.
18	Segundo conjunto de dispositivos basados en fricción.

Tabla 8.2: Propiedades parametrizadas para las distintas subestructuras.

Subestructura	Parámetro	Propiedad parametrizada
1	$\chi_1$	Módulo de Young (tramo de la cubierta - elementos tipo shell)
2	$\chi_2$	Módulo de Young (tramo de la cubierta - elementos tipo shell)
3	$\chi_3$	Módulo de Young (tramo de la cubierta - elementos tipo shell)
4	$\chi_4$	Módulo de Young (tramo de la cubierta - elementos tipo shell)
5	$\chi_5$	Módulo de Young (tramo de la cubierta - elementos tipo shell)
6	$\chi_6$	Módulo de Young (pilar - elemento tipo frame)
7	$\chi_7$	Módulo de Young (pilar - elemento tipo frame)
8	$\chi_8$	Módulo de Young (pilar - elemento tipo frame)
9	$\chi_9$	Módulo de Young (pilar - elemento tipo frame)
10	$\chi_{10}$	Módulo de Young (pilote - elemento tipo frame)
11	$\chi_{11}$	Módulo de Young (pilote - elemento tipo frame)
12	$\chi_{12}$	Módulo de Young (pilote - elemento tipo frame)
13	$\chi_{13}$	Módulo de Young (pilote - elemento tipo frame)
14	$\chi_{14}$	Módulo de reacción de la subrasante (rigidez de los resortes)
15	$\chi_{15}$	Módulo de reacción de la subrasante (rigidez de los resortes)
16	$\chi_{16}$	Módulo de reacción de la subrasante (rigidez de los resortes)
17	$\chi_{17}$	Coefficiente de fricción inicial (dispositivos no lineales)
18	$\chi_{18}$	Coefficiente de fricción inicial (dispositivos no lineales)

## 8.2 Mediciones

Las mediciones sintéticas se consideran en el marco de este ejemplo de aplicación. Estos datos se denotan como  $\tilde{y}_l(t_k)$ , donde  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N_T$  son distintos instantes de tiempo y  $l = 1, \dots, N_L$  corresponde a diferentes tipos de respuestas y/o localización de sensores. Las mediciones sintéticas se generan luego como:

$$\tilde{y}_l(t_k) = y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \varepsilon_l(t_k) \quad k = 1, \dots, N_T, l = 1, \dots, N_L \quad (8.2.1)$$

donde  $y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$  son las predicciones asociadas con los parámetros reales del modelo  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\varepsilon_l(t_k)$  son perturbaciones aleatorias que representan ruido de medición. En esta configuración,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  corresponde a los valores objetivo del problema de actualización.

En este ejemplo de aplicación, los datos de las mediciones incluyen las aceleraciones totales a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  registradas en diferentes ubicaciones a lo largo de la línea central de la losa. Se consideran dos casos en términos del número de puntos de medición:

- **Caso “All”:** Se consideran un total de 21 ubicaciones equidistantes (42 respuestas de aceleración). Estos corresponden a tres puntos de medición en cada tramo de la losa de la cubierta, un punto de medición en cada estribo y un punto de medición en la parte superior de cada pilar.
- **Caso “Spans”:** Se consideran un total de 5 ubicaciones (10 respuestas de aceleración). Estos corresponden a una ubicación en el punto medio de cada tramo de la losa de la cubierta.

Además, con fines ilustrativos, los errores de medición  $\varepsilon_l(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N_T$  se toman como variables gaussianas independientes de media cero tales que  $\varepsilon_l(t_k) \sim N(0, \sigma_l)$ , donde  $\sigma_l = \gamma \times RMS[\mathbf{y}]$ ,  $RMS[\mathbf{y}]$  es la media cuadrática o root-mean-square (RMS) del conjunto completo de mediciones  $y_l(t_k, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ ,  $k = 1, \dots, N_T$ ,  $l = 1, \dots, N_L$ , y  $\gamma$  cuantifica el nivel de ruido. En cuanto al nivel de ruido, se considera el caso  $\gamma = 10\%$ . Note que  $\gamma = 0\%$  representa un caso idealizado donde no hay errores de medición presentes en el proceso de monitoreo estructural.

### 8.2.1 Caso objetivo 1: Parámetros del modelo nominal

Los parámetros de las subestructuras se definen como  $\chi_s = 1$ ,  $s = 1, \dots, 16$ . Es decir, el modelo objetivo corresponde al modelo nominal del puente. Como referencia, se muestran las diez primeras frecuencias naturales asociadas al modelo nominal en la Tabla 8.4.

Además, con fines ilustrativos, se presentan las mediciones de aceleración asociadas al caso “Spans” para el nivel de ruido  $\gamma = 10\%$  en la Figura 8.4.

Tabla 8.3: Valores nominales de los parámetros.

Parámetro	Valor
$\chi_1, \dots, \chi_{18}$	1.0

Tabla 8.4: Frecuencias naturales objetivo asociadas con los primeros diez modos. Valores nominales de los parámetros.

Modo ( $i$ )	$\omega_i$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)
1	3.8189	0.6078
2	4.4591	0.7097
3	4.5712	0.7275
4	11.9089	1.8954
5	15.4127	2.4530
6	22.7713	3.6242
7	25.7977	4.1058
8	26.9038	4.2819
9	27.7786	4.4211
10	29.4630	4.6892

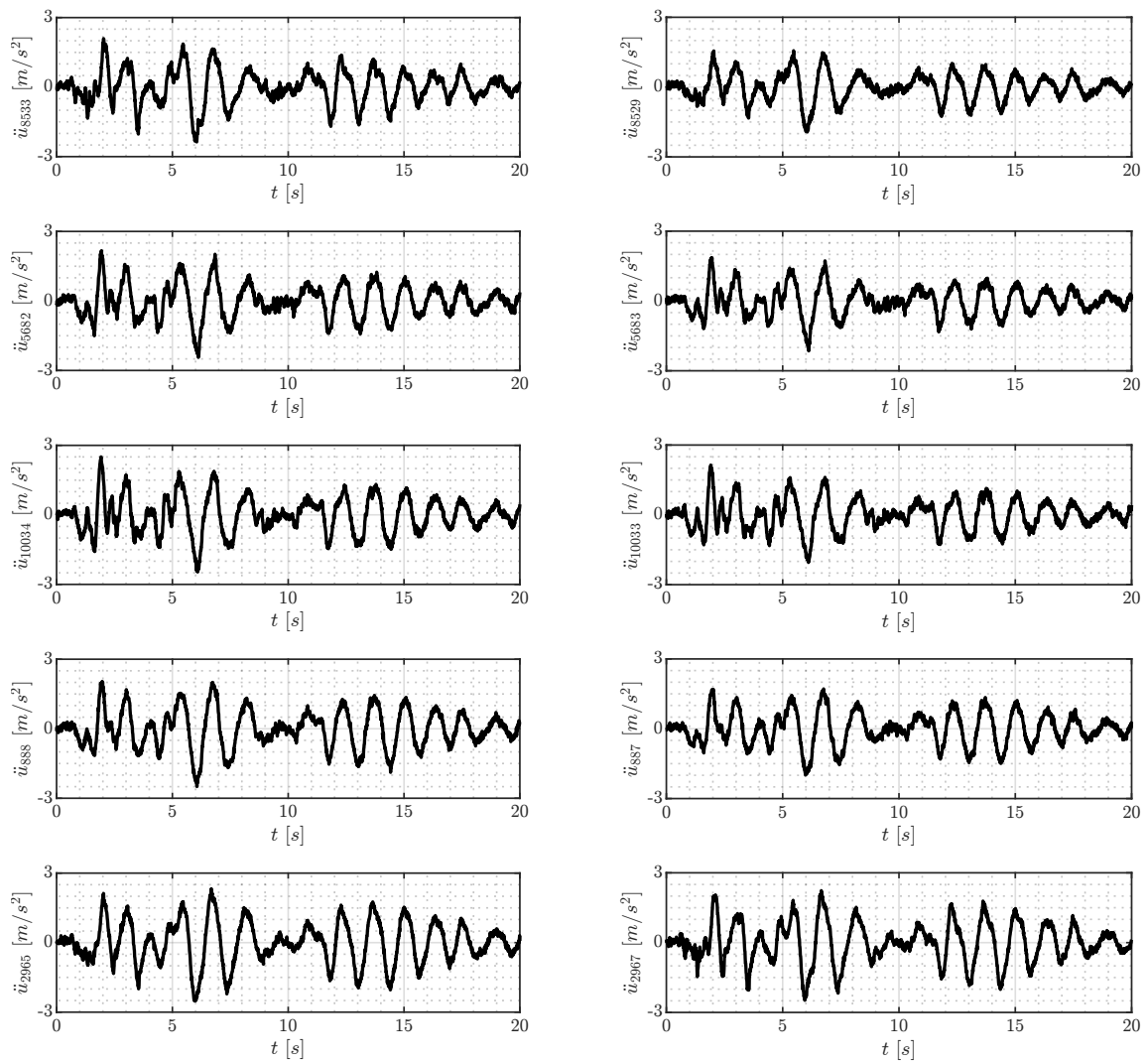


Figura 8.4: Datos de medición asociados al caso “Spans”. Modelo nominal. Nivel de ruido  $\gamma = 10\%$ .

### 8.2.2 Caso objetivo 2: Parámetros del modelo perturbados

En este caso, los datos de medición se obtienen a partir de un modelo perturbado, donde los valores de los parámetros de las subestructuras correspondientes se muestran en la Tabla 8.5. Cada valor objetivo se ha extraído de una distribución uniforme para un rango de 0.85 a 1.15. Con fines ilustrativos, se presentan las mediciones de aceleración asociadas al caso “Spans” para el nivel de ruido  $\gamma = 10\%$  en la Figura 8.5.

Tabla 8.5: Valores de los parámetros perturbados.

Localización	Parámetro	Valor
Cubierta	$\chi_1$	0.87
	$\chi_2$	1.07
	$\chi_3$	0.93
	$\chi_4$	0.98
	$\chi_5$	1.01
Pilares	$\chi_6$	1.13
	$\chi_7$	0.98
	$\chi_8$	1.14
	$\chi_9$	0.94
Pilotes	$\chi_{10}$	1.06
	$\chi_{11}$	0.95
	$\chi_{12}$	1.04
	$\chi_{13}$	1.06
Suelo	$\chi_{14}$	1.05
	$\chi_{15}$	0.90
	$\chi_{16}$	0.89
Aisladores	$\chi_{17}$	1.12
	$\chi_{18}$	0.90

Tabla 8.6: Frecuencias naturales objetivo asociadas con los primeros diez modos. Valores de los parámetros perturbados.

Modo ( $i$ )	$\omega_i$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)
1	3.8475	0.6123
2	4.4929	0.7151
3	4.5879	0.7302
4	11.7932	1.8769
5	15.1700	2.4144
6	21.9000	3.4855
7	25.6730	4.0860
8	27.0140	4.2994
9	27.6195	4.3958
10	29.1366	4.6372

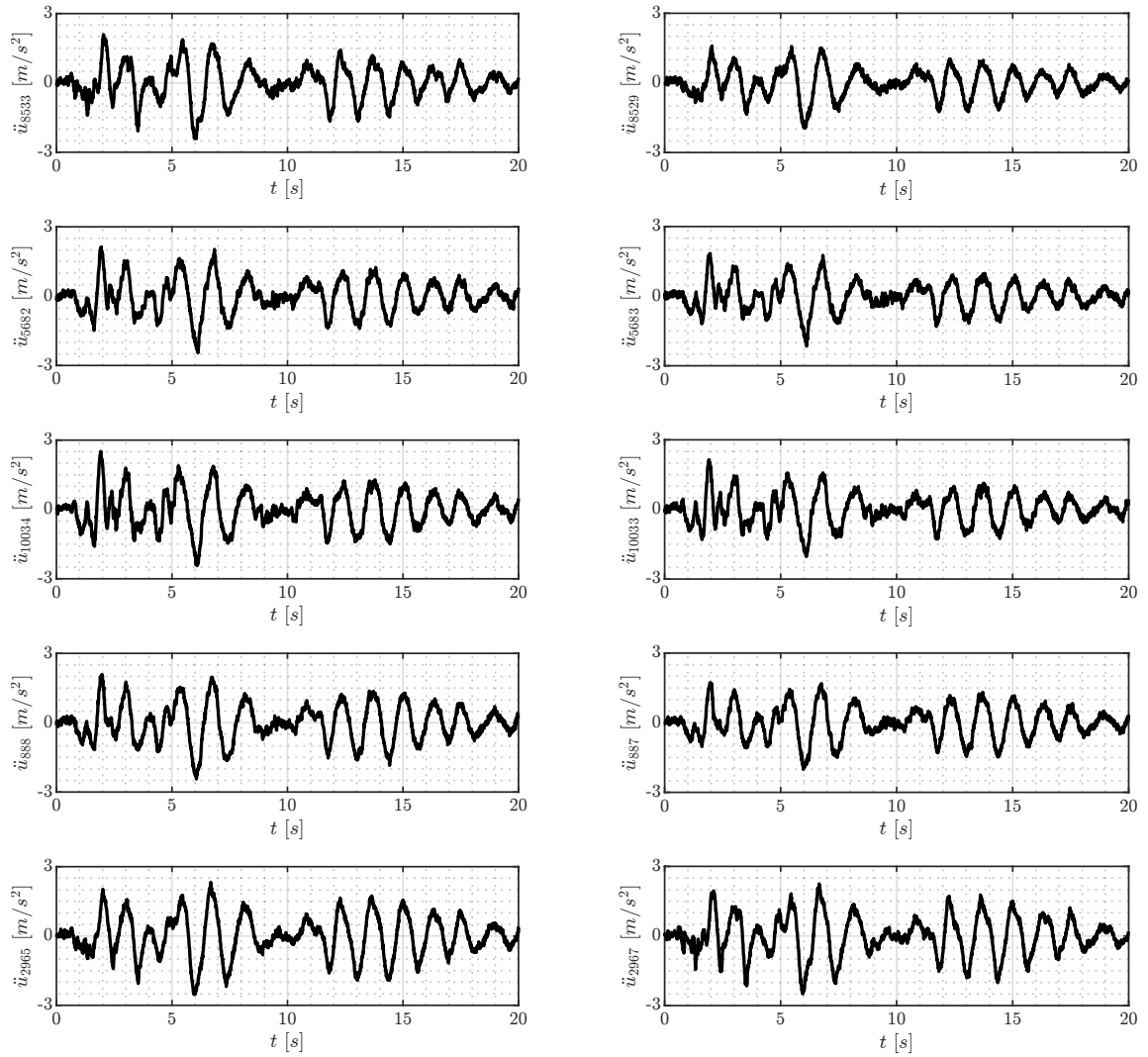


Figura 8.5: Datos de medición asociados al caso “Spans”. Modelo perturbado. Nivel de ruido  $\gamma = 10\%$ .

### 8.2.3 Función de Verosimilitud

La función de likelihood  $\mathcal{L}(\theta)$  esta dada por

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N_L N_T/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{k=1}^{N_T} (\tilde{y}_l(t_k) - y_l(t_k, \theta))^2 \right] \quad (8.2.2)$$

donde  $y_l(t_k, \theta)$  es la predicción para la respuesta de interés  $l$  en el instante de tiempo  $t_k$  obtenido del modelo dado por  $\theta$ , y todos los demás términos han sido definidos previamente.

### 8.2.4 Escenarios

Para evaluar el desempeño del enfoque del modelo de actualización propuesto e ilustrar algunas de sus características, se estudian dos escenarios diferentes en cuanto a los parámetros a identificar.

- **Escenario A:** Este escenario considera cinco parámetros de identificación ( $n_\theta = 5$ ), que están asociados con los módulos de Young de la cubierta, los pilares y los pilotes, el coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales y la desviación estándar del error de predicción. En particular,  $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = \theta_1$  (módulo de elasticidad de la cubierta),  $\chi_6 = \chi_7 = \chi_8 = \chi_9 = \theta_2$  (módulo de elasticidad de los pilares),  $\chi_{10} = \chi_{11} = \chi_{12} = \chi_{13} = \theta_3$  (módulo de elasticidad de los pilotes),  $\chi_{17} = \chi_{18} = \theta_4$  (coeficiente de fricción inicial), y  $\sigma = \theta_5$  (desviación estándar de los errores de predicción).
- **Escenario B:** Este escenario considera diecinueve parámetros de identificación ( $n_\theta = 19$ ), que corresponden al conjunto completo de parámetros de las subestructuras, además de la desviación estándar de los errores de predicción. Es decir,  $\chi_i = \theta_i, i = 1, \dots, 18$  y  $\sigma = \theta_{19}$ .

## 8.3 Detalles de la implementación

BUS con subset simulation se implementa de acuerdo con la sección 3.1. Los siguientes parámetros definidos por el usuario son considerados en este escenario

- Número de muestras por etapa:  $N_s = 2.000$ .
- Probabilidad condicional:  $p_0 = 0.1$ .
- Se consideran cinco ejecuciones independientes, empleando distintas semillas para la generación de números aleatorios.

## 8.4 Escenario A

El objetivo de este escenario es estudiar la sensibilidad de los diferentes parámetros estructurales en el proceso de actualización del modelo, además de incluir la desviación estándar de los errores de predicción (ver Ec. (8.2.2)) en el conjunto de parámetros de identificación.

Con fines de identificación, los valores objetivo de los parámetros corresponden a los valores nominales, y los datos de medición correspondientes se obtienen siguiendo la Sección 8.2 con un nivel de ruido de  $\gamma = 10\%$  para todos los casos.

### 8.4.1 Parámetros de identificación y distribuciones a priori

En este escenario se consideran cinco parámetros de identificación ( $n_\theta = 5$ ). Estos están asociados al módulo de elasticidad de la cubierta ( $\theta_1$ ), al módulo de elasticidad de los pilares ( $\theta_2$ ), al módulo de elasticidad de los pilotes ( $\theta_3$ ), al coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales ( $\theta_4$ ), y a la desviación estándar de los errores de predicción ( $\theta_5$ ). En términos del esquema de parametrización introducido en la Ec. 8.1.2, los parámetros de identificación están vinculados a los parámetros de las diferentes subestructuras como  $\chi_s = \theta_1, s = 1, \dots, 5$ ;  $\chi_s = \theta_2, s = 6, \dots, 9$ ;  $\chi_s = \theta_3, s = 10, \dots, 13$ ; y  $\chi_{17} = \chi_{18} = \theta_4$ . Por otro lado, los elementos de resorte traslacionales que modelan el suelo se mantienen en sus valores nominales, es decir,  $\chi_s = 1, s = 14, 15, 16$ . Además,  $\sigma = \theta_5$  (ver Ec. (8.2.2)). De esta manera, ( $\theta_1$ ) está vinculado a las subestructuras 1 a 5, ( $\theta_2$ ) está vinculado a las subestructuras 6 a 9, ( $\theta_3$ ) está vinculado a las subestructuras 10 a 13, ( $\theta_4$ ) está vinculado a las subestructuras 17 y 18, y ( $\theta_5$ ) no está vinculado a ninguna subestructura. La descripción de los diferentes parámetros del modelo así como sus valores objetivo correspondientes se describen en la Tabla 8.7. Se debe tener en cuenta que el valor objetivo para la desviación estándar de los errores de predicción está asociado con el nivel de ruido  $\gamma = 10\%$ . Finalmente, la distribución a priori para ( $\theta_i, i = 1, \dots, 4$ ) se toma como uniforme en  $[0.5, 1.5]$ , es decir, ( $\theta_i \sim U[0.5, 1.5]$ ), ( $i = 1, \dots, 4$ ), mientras que ( $\theta_5$ ) sigue una distribución log-normal con una mediana igual a ( $0.1 \text{ m/s}^2$ ) y una desviación estándar logarítmica de 0.3, lo que da como resultado un coeficiente de variación de aproximadamente 30%.

Tabla 8.7: Descripción de los parámetros a identificar. Escenario A.

Parámetro	Descripción	Valor Objetivo
$\theta_1$	Módulo de elasticidad de las subestructuras 1 - 5	1.0000
$\theta_2$	Módulo de elasticidad de las subestructuras 6 - 9	1.0000
$\theta_3$	Módulo de elasticidad de las subestructuras 10 - 13	1.0000
$\theta_4$	Coefficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales	1.0000
$\theta_5$	Desviación estándar de los errores de predicción	$7.4278 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ ("All")

## 8.5 Resultados caso “All”: Bayesian model updating

### 8.5.1 Muestras a posteriori

Las Tablas 8.8 y 8.9 presentan las muestras a posteriori, y las Figuras 8.6 y 8.7 histogramas marginales, obtenidas en una única ejecución para ambos enfoques propuestos. Con fines de presentación, los parámetros de identificación se han normalizado con respecto a los valores objetivo (ver Tabla 8.7) como  $\hat{\theta}_i = \theta_i / \theta_i^{\text{target}}$ . Las figuras muestran que las muestras a posteriori llenan densamente una región alrededor de  $\hat{\theta}_i = 1, i = 1, \dots, 5$ . En otras palabras, la masa de probabilidad de la distribución a posteriori de los parámetros de identificación está densamente concentrada en la vecindad de los valores objetivo. Además, la Tabla 8.9 muestra los valores medios a posteriori de los parámetros de identificación normalizados. Los resultados indican que, para los parámetros estructurales, los valores son muy similares a los objetivos, distando a lo más en un 8%, excepto  $\theta_2$ , que llega a tener diferencias mayores al 20%; estos están asociados a los pilares, que son las subestructuras de la 6 a la 9. Por otro lado, la desviación estándar del error de medición en el peor de los casos presenta una diferencia menor al 1%, haciendo posible obtener la información probabilística sobre los parámetros del sistema para este escenario. En estos casos, donde el error en la identificación de algún parámetro es muy grande, puede deberse a que éste en particular tenga menor relevancia en el comportamiento estructural para este registro sísmico.

Tabla 8.8: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A. Caso “All”.

Ejecución	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$
No	( $\gamma = 10\%$ )	( $\gamma = 10\%$ )	( $\gamma = 10\%$ )	( $\gamma = 10\%$ )	( $\gamma = 10\%$ )
1	1.0002	0.8195	1.0879	0.9969	1.0114
2	1.0000	1.0141	0.9957	0.9983	1.0023
3	1.0004	0.9960	1.0018	0.9990	1.0022
4	1.0003	0.9983	1.0009	0.9993	1.0038
5	1.0000	1.0271	0.9909	0.9987	1.0034

Tabla 8.9: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A. Caso “All”.

Ejecución No	$\hat{\theta}_1$ ( $\gamma = 10\%$ )	$\hat{\theta}_2$ ( $\gamma = 10\%$ )	$\hat{\theta}_3$ ( $\gamma = 10\%$ )	$\hat{\theta}_4$ ( $\gamma = 10\%$ )	$\hat{\theta}_5$ ( $\gamma = 10\%$ )
1	1.0004	0.9950	1.0022	0.9990	1.0069
2	0.9985	1.2460	0.9332	1.0017	1.0063
3	1.0002	1.0208	0.9928	0.9986	1.0026
4	1.0005	1.0029	0.9991	0.9995	1.0044
5	1.0000	1.0266	0.9912	0.9987	1.0037

Tabla 8.10: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	339
2	869
3	270
4	385
5	322

Tabla 8.11: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	321
2	250
3	313
4	500
5	1378

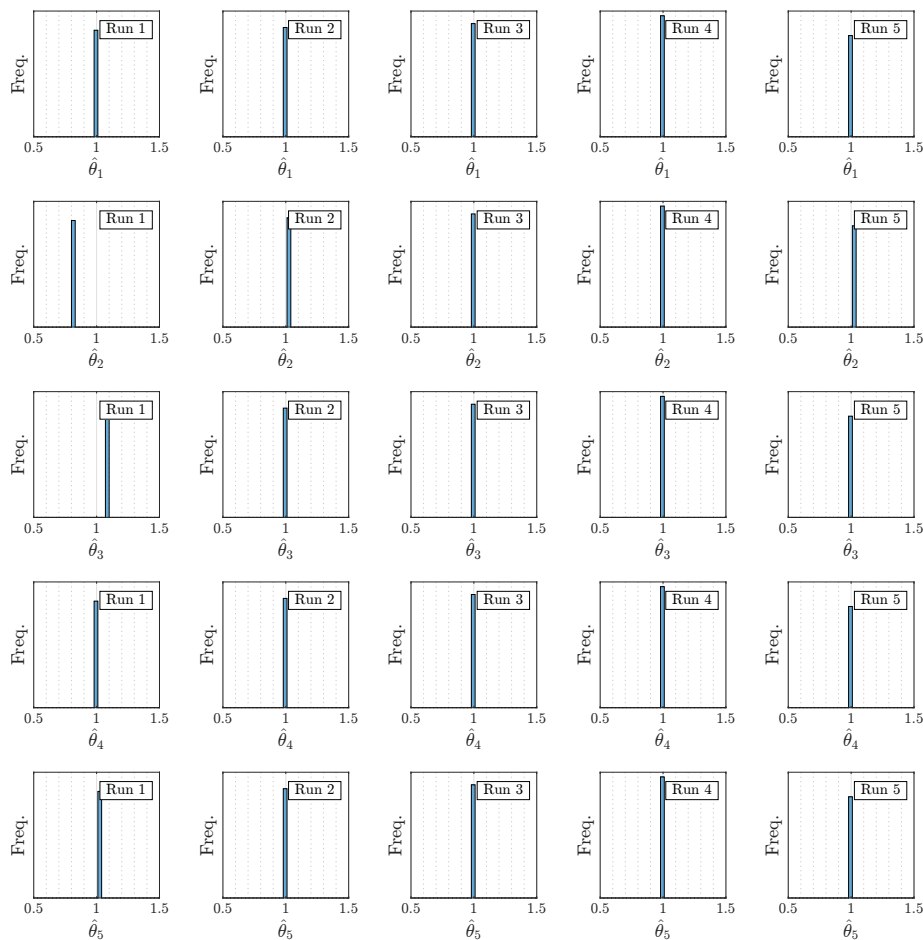


Figura 8.6: Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

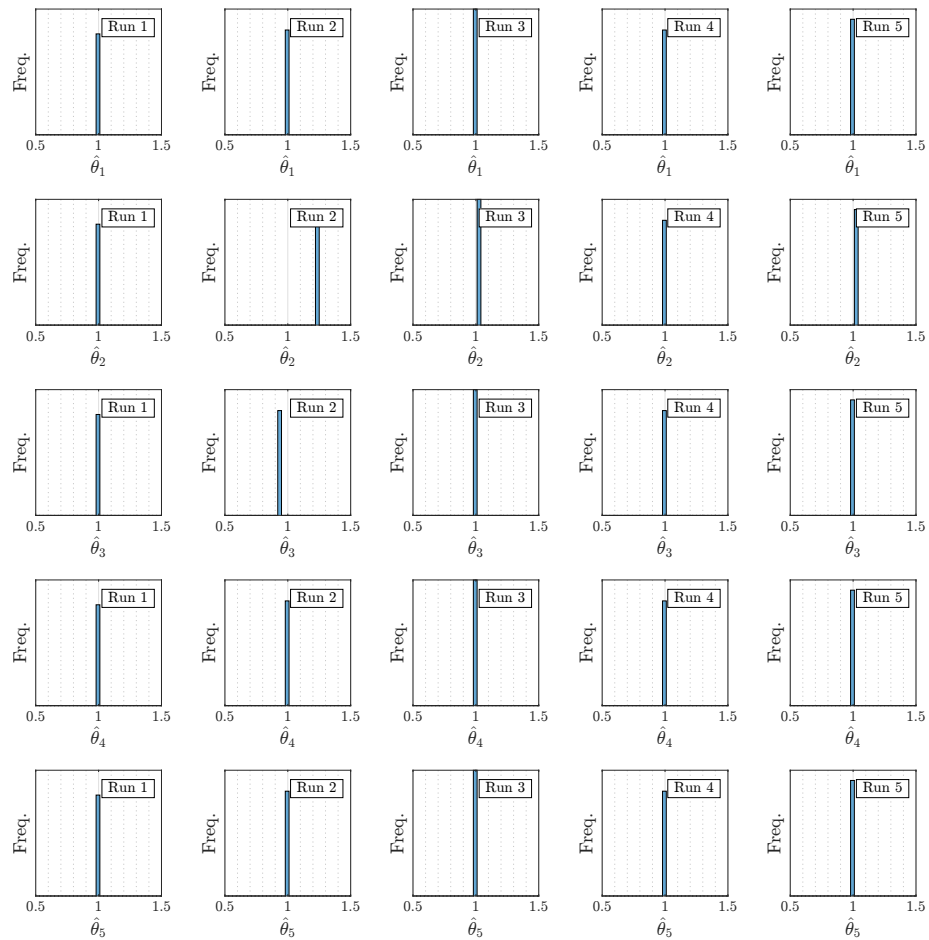


Figura 8.7: Histogramas marginales a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

### 8.5.2 Evidencia estimada

Las Tablas 8.12 8.13 presentan los valores máximos de likelihood observados, estimaciones de probabilidad de falla y los valores obtenidos de log-evidence para cinco ejecuciones independientes de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ . Tenga en cuenta que los resultados obtenidos en diferentes ejecuciones de ambos enfoques propuestos son muy similares, lo que implica que las regiones a las que convergieron las muestras durante cada ejecución presentan la misma plausibilidad.

Tabla 8.12: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$9.8940 \times 10^4$	-63.9447	$9.8876 \times 10^4$
2	$9.9070 \times 10^4$	-37.6749	$9.9033 \times 10^4$
3	$9.9069 \times 10^4$	-36.5413	$9.9032 \times 10^4$
4	$9.9067 \times 10^4$	-29.2787	$9.9038 \times 10^4$
5	$9.9069 \times 10^4$	-29.4574	$9.9040 \times 10^4$

Tabla 8.13: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$9.9067 \times 10^4$	-47.8812	$9.9019 \times 10^4$
2	$9.8879 \times 10^4$	-32.0130	$9.8847 \times 10^4$
3	$9.9069 \times 10^4$	-38.6961	$9.9031 \times 10^4$
4	$9.9068 \times 10^4$	-42.8328	$9.9025 \times 10^4$
5	$9.9070 \times 10^4$	-32.6087	$9.9038 \times 10^4$

### 8.5.3 Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori

Las Figuras 8.8 y 8.9 muestran las respuestas de aceleración medidas en grados de libertad seleccionados (línea negra sólida), así como las predicciones correspondientes asociadas al valor promedio posterior de los parámetros (línea roja discontinua) para  $\gamma = 10\%$ . Además, en las figuras también se presentan los intervalos de confianza al 95% de las respuestas (líneas azules punteadas), que están asociados a la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Las respuestas de interés son las aceleraciones del tablero a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  en el primer estribo, el primer pilar, el centro del tablero, el cuarto pilar y el segundo estribo que son parte del conjunto de mediciones del caso “All”. Se observa que todas las cantidades concuerdan muy bien y, por lo tanto, ambos métodos propuestos son capaces de identificar correctamente el comportamiento estructural en este escenario. Se obtienen resultados similares para diferentes ejecuciones de subset simulation.

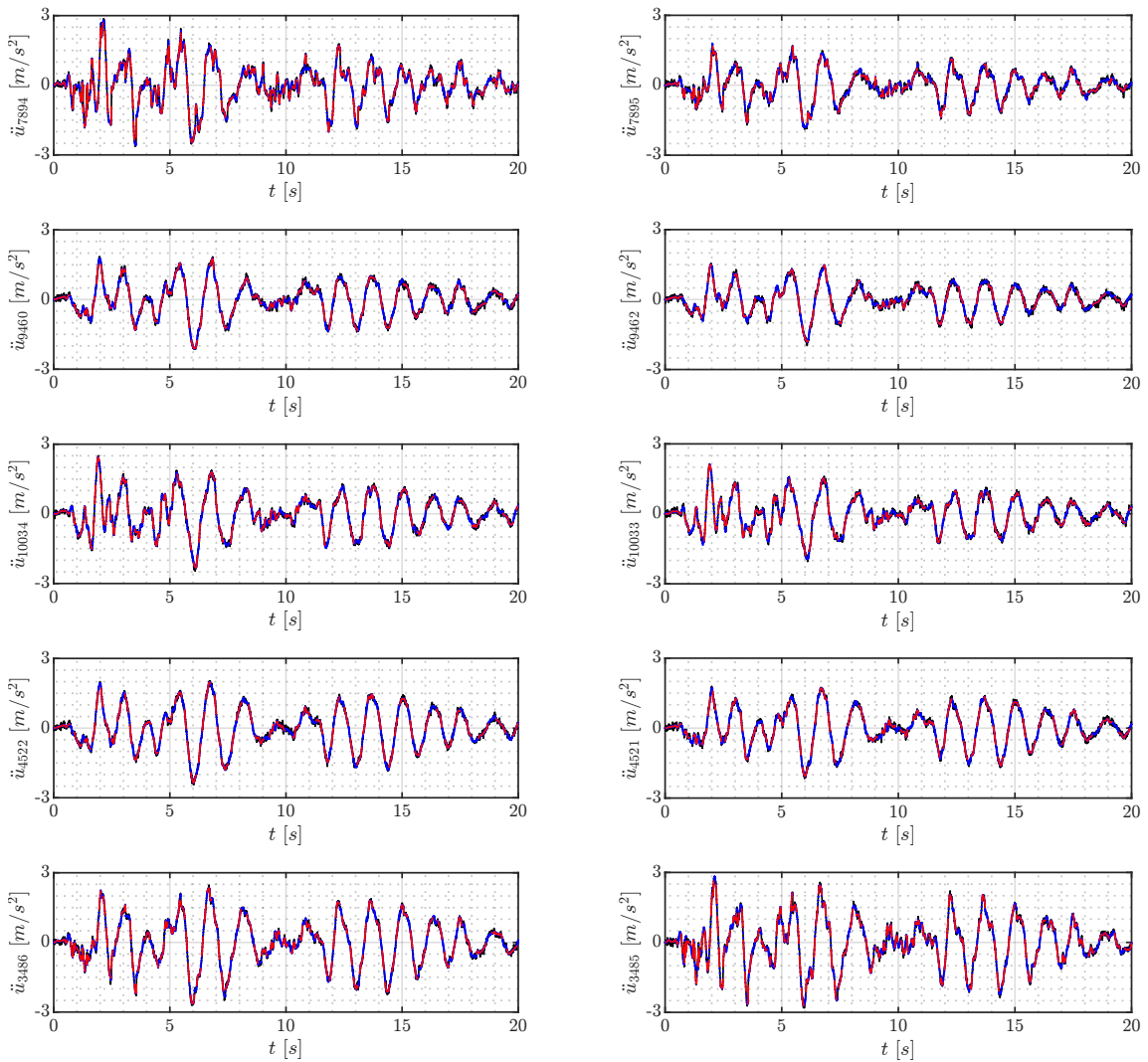


Figura 8.8: Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Línea negra sólida: Mediciones. Línea roja discontinua: Media de las respuestas predichas a posteriori. Línea azul punteada: Intervalo de confianza del 95% de las respuestas a posteriori con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

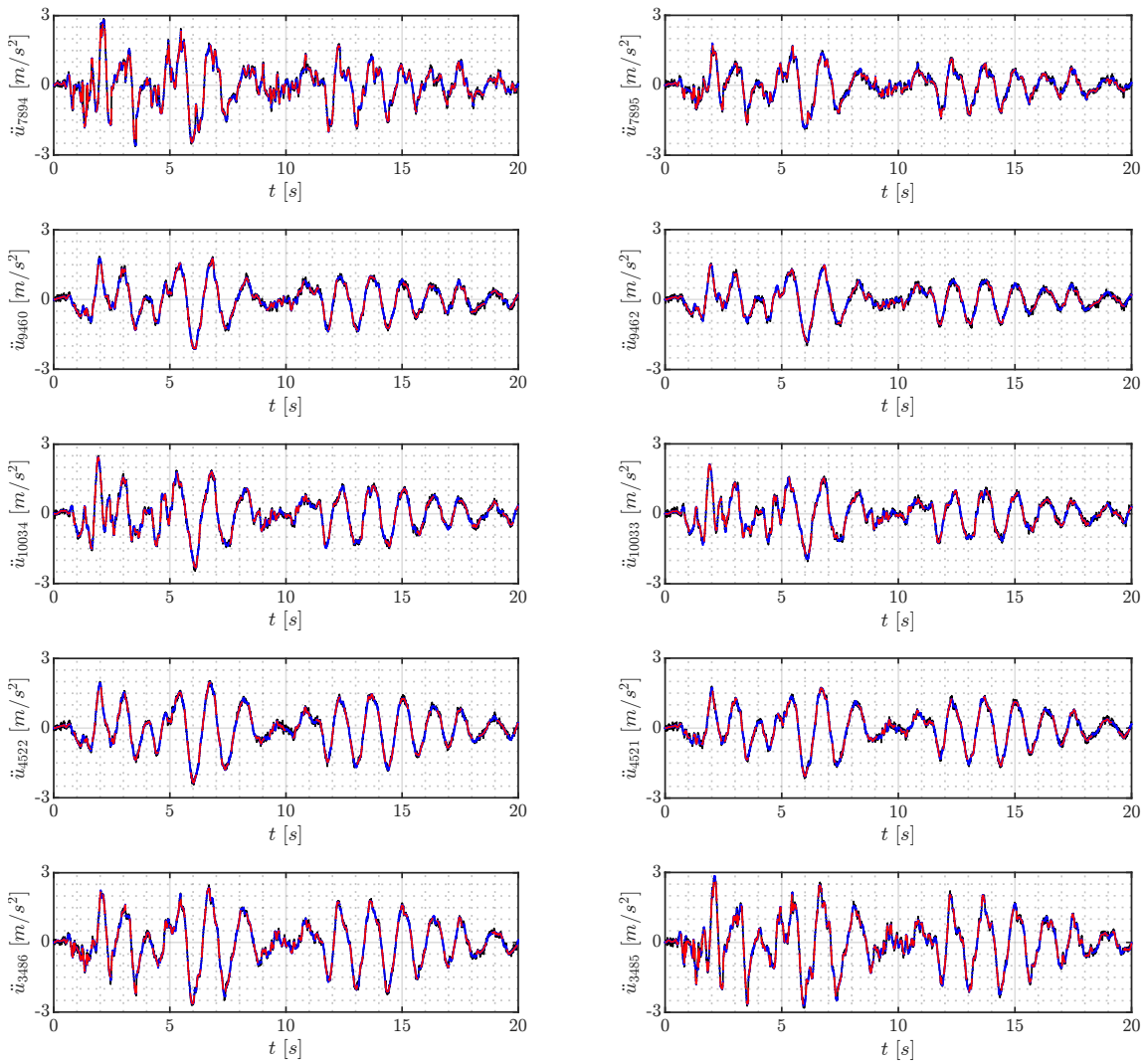


Figura 8.9: Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% de las respuestas a posteriori (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

### 8.5.4 Muestras obtenidas durante las diferentes etapas de subset simulation

En las Figuras de la 8.10 a la 8.12 como de la 8.10 a la 8.12 muestran los parámetros inciertos,  $\theta$ , obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation para el escenario A.

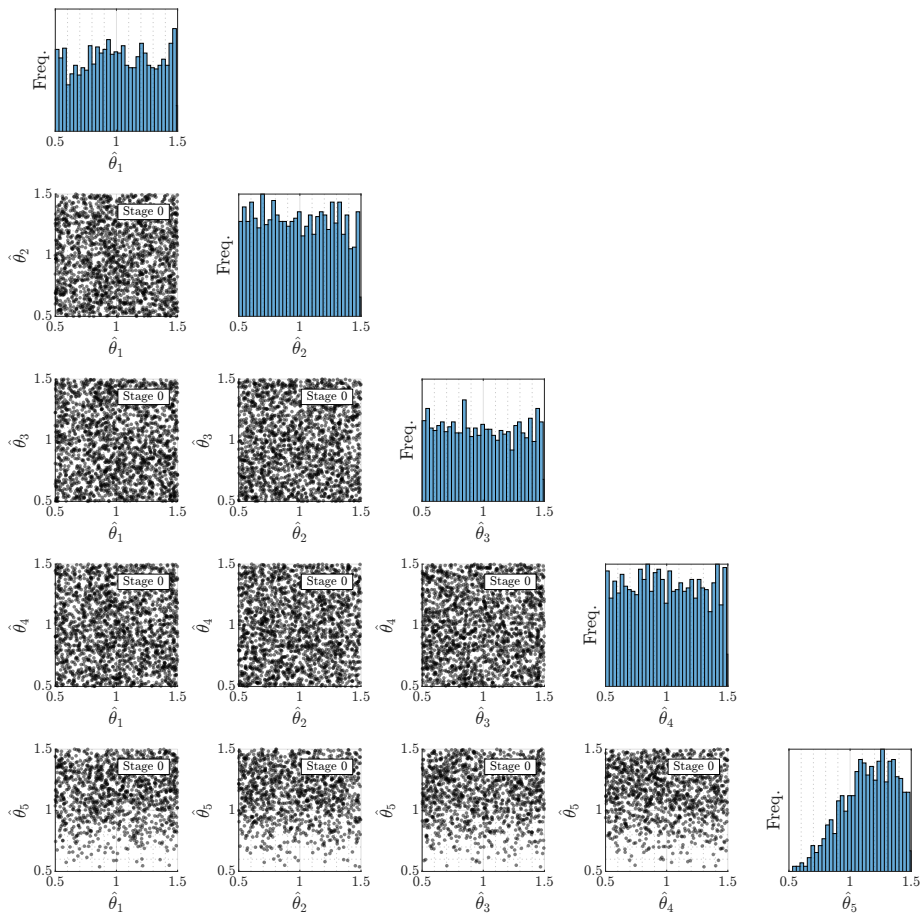


Figura 8.10: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 0$  de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

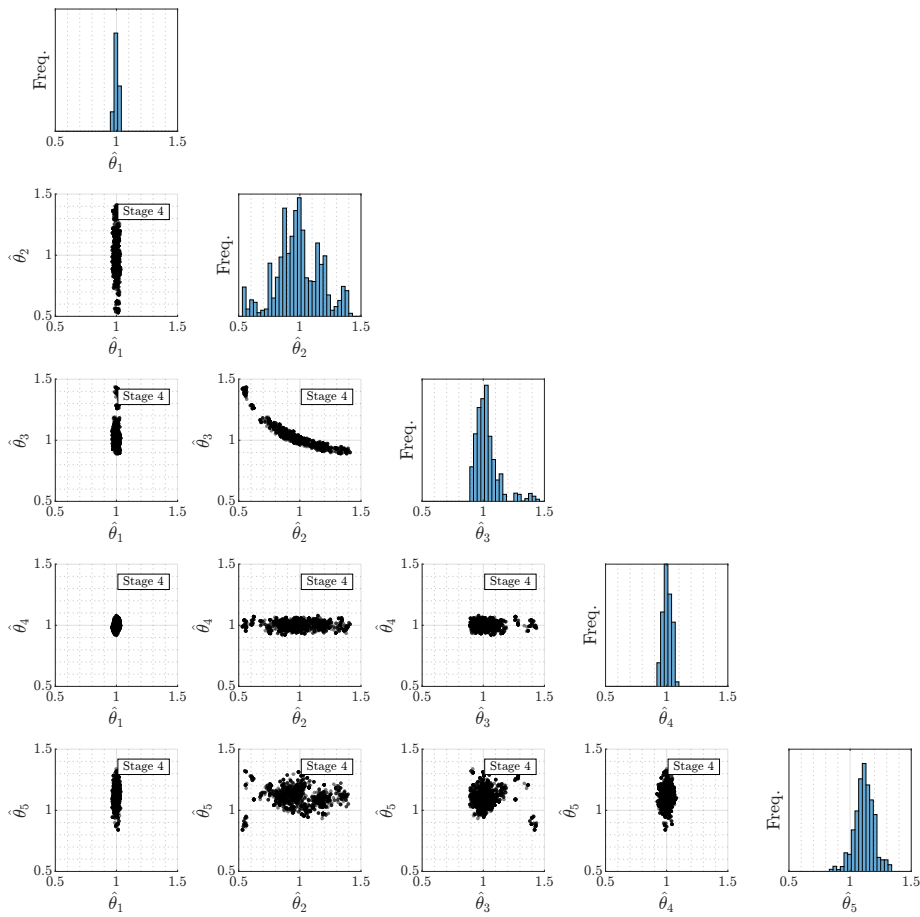


Figura 8.11: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 4$  de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

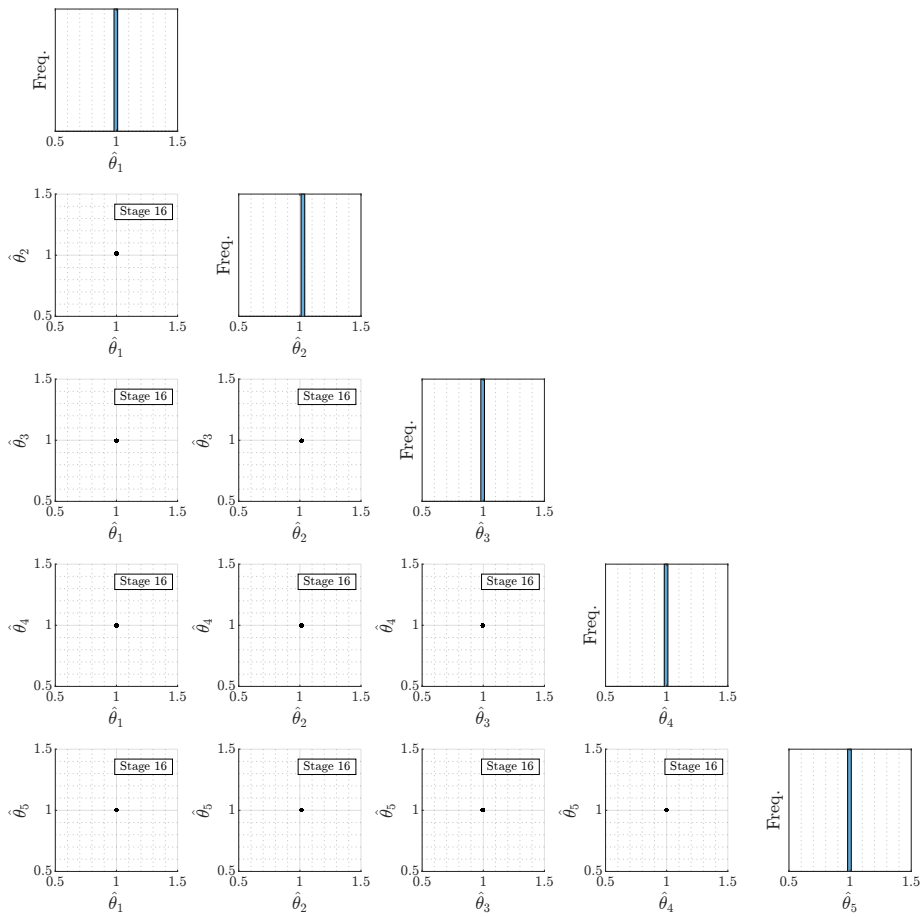


Figura 8.12: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 16$  de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

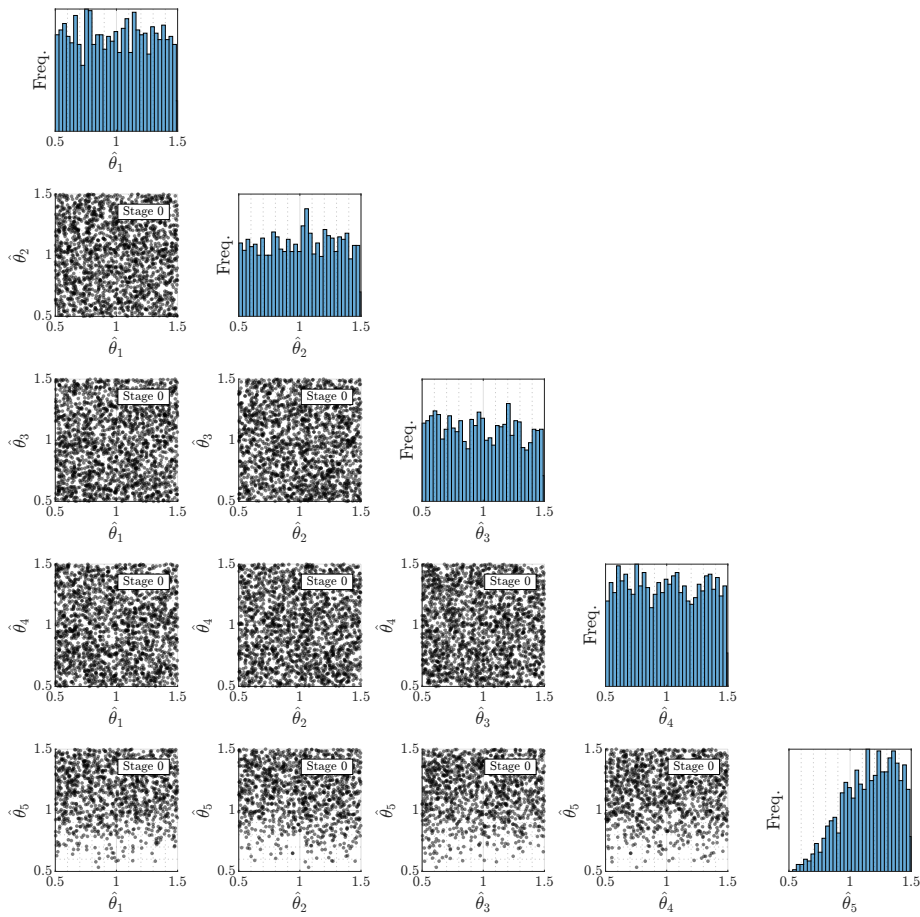


Figura 8.13: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 0$  de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

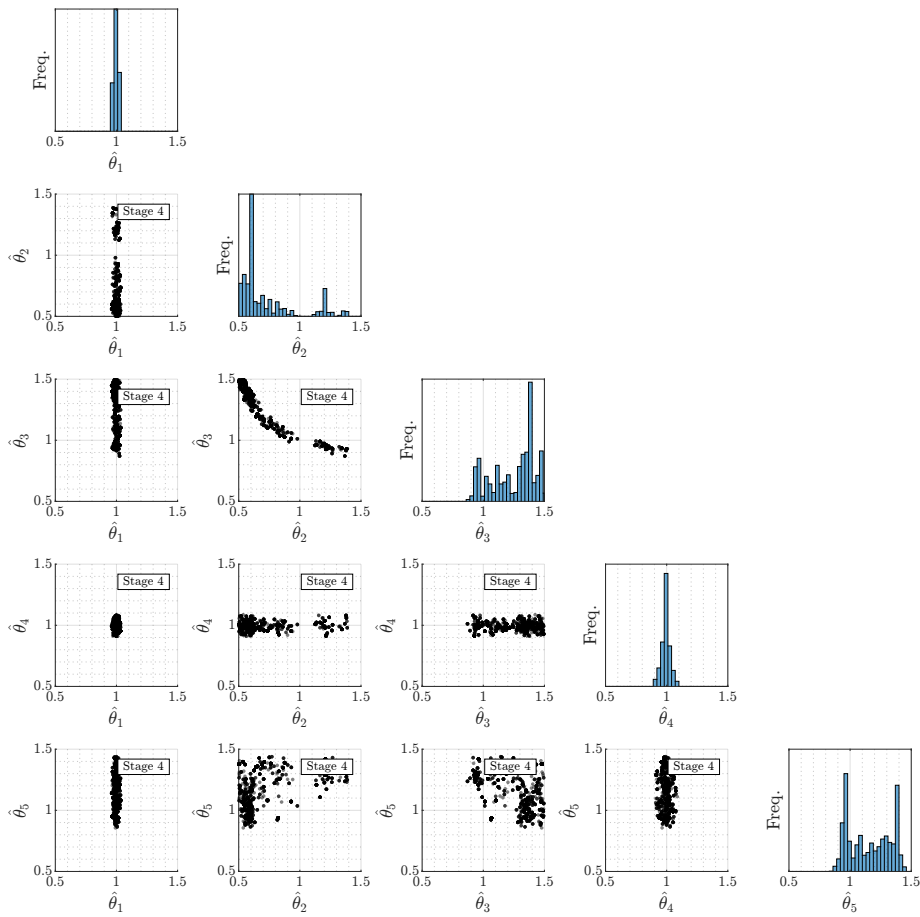


Figura 8.14: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 4$  de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

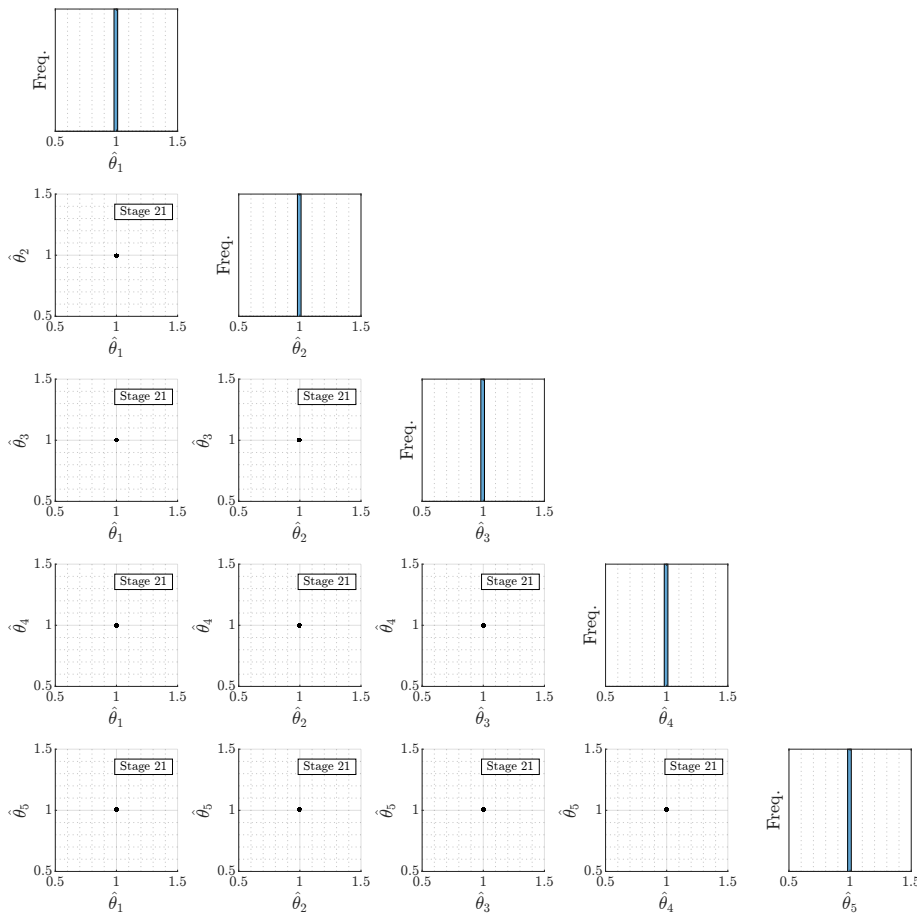


Figura 8.15: Muestras obtenidas durante la etapa  $\kappa = 21$  de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

Aquí finalmente se puede apreciar el porque se presentan diferencias en ciertas ejecuciones para  $\theta_2$ , como se puede apreciar en las Figuras 8.6 y 8.7. En la etapa número cuatro se puede observar una cierta relación entre los parámetros  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , que es muy parecida al conjunto solución para las rigideces de un sistema de dos grados de libertad del cual se sabe sólo una frecuencia natural.

Por lo tanto, es muy probable que al evolucionar las muestras, algunas hayan convergido en cualquier punto de la hipérbola, y habrían generado las mismas respuestas estructurales que las objetivo; y dado que la respuesta estructural en los grados de libertad medidos parecen ser menos sensibles a  $\theta_2$ , fue la que más diferencia tuvo durante una de sus ejecuciones con respecto a su valor objetivo. Este comportamiento se debe a la dispersión en la distribución a priori de los parámetros  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Si el dominio de estas distribuciones hubiera sido más restringido, no se habría observado este fenómeno de acoplamiento entre los dos parámetros.

### 8.5.5 Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios

Según el enfoque descrito en la Sección 3.1, el proceso de muestreo continúa hasta que el umbral auxiliar ( $d_{\text{aux}}$ ) es menor que el umbral intermedio correspondiente ( $d_{\text{int}}$ ). Recordemos que el umbral auxiliar es el valor máximo del logaritmo de la verosimilitud observado hasta la etapa actual. Con fines de referencia, las Tablas 8.14 y 8.15 muestran los umbrales auxiliares e intermedios obtenidos durante las diferentes etapas de tres ejecuciones independientes de subset simulation para ( $\gamma = 10\%$ ), como también las Figuras 8.16 y 8.17.

Dado que el método busca el valor máximo de la función de log-verosimilitud, podemos asumir que los parámetros físicos del modelo  $\tilde{\theta}$  efectivamente minimizan los errores de predicción, de modo que queda por saber cuál es el valor de  $\sigma$  que maximiza la función de verosimilitud 8.2.2. Por medio de la estimación de máxima verosimilitud se llega a

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_L N_T} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{k=1}^{N_T} (\tilde{y}_l(t_k) - y_l(t_k, \theta))^2 \quad (8.5.1)$$

Lo cual tiene sentido dado que  $\sigma$  es el parámetro asociado a la desviación estándar del error de predicción. Ahora, usando este resultado, podemos reemplazarlo en la función de verosimilitud para obtener el máximo en función de  $\sigma$ :

$$\max \ln(L(\sigma)) = -\frac{N_L N_T}{2} (\log(2\pi\sigma^2) + 1) \quad (8.5.2)$$

Cabe destacar que este es un valor de referencia para comparar si se ha explorado de forma efectiva la región de la función de distribución a posteriori, dado que se está asumiendo que  $\sigma$  es identificado correctamente.

Por lo que, en este escenario el valor de referencia máximo sería de  $\max \ln(L(\sigma)) = 9.92042 \times 10^4$ . Por lo tanto, los valores máximos basados en las muestras obtenidas en diferentes ejecuciones concuerdan bien con el valor máximo de referencia. Esto ilustra la efectividad del enfoque propuesto para explorar las regiones más importantes en de la distribución a posteriori. Algo interesante que ocurrió fue que la ejecución 2 para ambos métodos se tuvo un valor máximo de likelihood ligeramente menor a los demás, esto debido a que las muestras convergieron en un  $\theta_2$  y  $\theta_3$  más alejados del objetivo como se ve en las Tablas 8.8 y 8.9.

Tabla 8.14: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario A, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All”

Etapa (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$
0	0.6688	8.9263	-0.1160	8.7298	-0.2835	9.5756
1	6.0302	9.0756	5.9825	9.2601	6.0722	9.5756
2	8.2404	9.6264	8.2884	9.5889	8.1912	9.6152
3	9.1538	9.7841	9.2601	9.6856	9.2765	9.8643
4	9.6193	9.8335	9.6493	9.8757	9.6537	9.8643
5	9.7909	9.8864	9.8082	9.9004	9.8083	9.8731
6	9.8506	9.8988	9.8688	9.9028	9.8594	9.8931
7	9.8832	9.9037	9.8946	9.9050	9.8822	9.9031
8	9.8982	9.9062	9.9023	9.9059	9.8913	9.9031
9	9.9042	9.9065	9.9047	9.9062	9.8992	9.9063
10	9.9063	9.9068	9.9056	9.9067	9.9037	9.9064
11	9.9066	9.9068	9.9064	9.9067	9.9060	9.9067
12	9.9068	9.9069	9.9066	9.9068	9.9069	9.9067
13	9.9069	9.9070	9.9068	9.9069	-	-
14	9.9070	9.9070	9.9068	9.9069	-	-
15	9.9070	9.9070	9.9069	9.9069	-	-
16	9.9071	9.9070	-	-	-	-

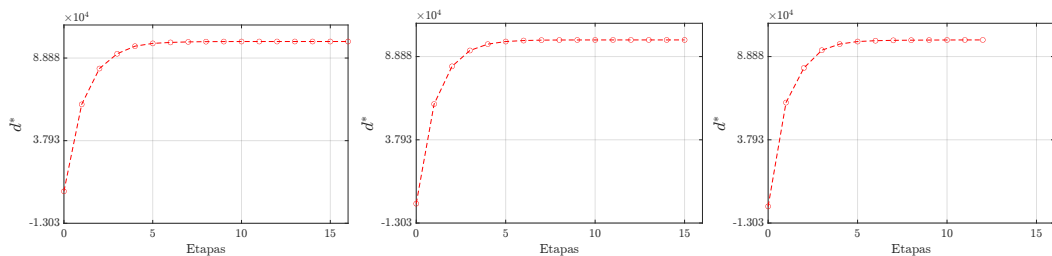


Figura 8.16: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

Tabla 8.15: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario A, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All”

Etapa (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$
0	-0.0094	7.0455	0.0282	8.6074	-0.1160	8.7298
1	6.3261	8.8452	6.2943	8.8785	5.8341	9.1271
2	8.1625	8.9721	8.4761	9.6370	7.7924	9.2521
3	8.8453	9.6078	9.0702	9.7690	8.8355	9.6021
4	9.3390	9.7581	9.5545	9.7690	9.3932	9.7931
5	9.5774	9.7581	9.7691	9.8758	9.6625	9.8230
6	9.7248	9.8306	9.8323	9.8758	9.7716	9.8766
7	9.8075	9.8887	9.8611	9.8758	9.8368	9.8971
8	9.8629	9.8998	9.8721	9.8794	9.8709	9.9043
9	9.8880	9.9043	9.8781	9.8829	9.8966	9.9043
10	9.8987	9.9043	9.8821	9.8866	9.9022	9.9060
11	9.9018	9.9057	9.8838	9.8866	9.9050	9.9064
12	9.9046	9.9060	9.8866	9.8879	9.9063	9.9067
13	9.9057	9.9063	9.8874	9.8879	9.9066	9.9068
14	9.9060	9.9064	9.8879	9.8879	9.9068	9.9069
15	9.9063	9.9065	-	-	9.9069	9.9070
16	9.9064	9.9065	-	-	9.9069	9.9070
17	9.9065	9.9066	-	-	9.9070	9.9070
18	9.9066	9.9067	-	-	-	-
19	9.9066	9.9067	-	-	-	-
20	9.9067	9.9067	-	-	-	-
21	9.9067	9.9067	-	-	-	-

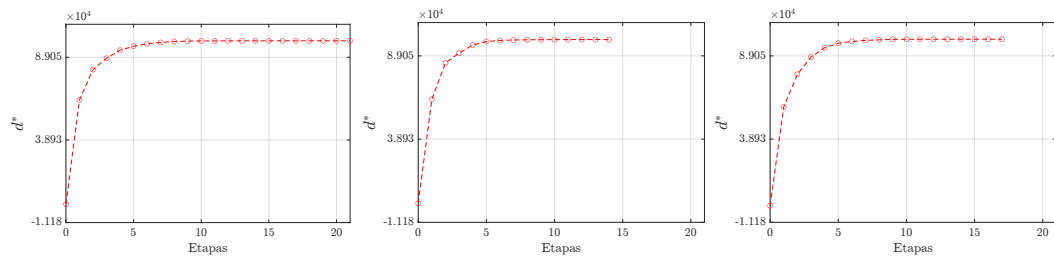


Figura 8.17: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario A,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

Como conclusión de esta primera parte del escenario, se destaca la importancia de contar con información adicional sobre la evolución de las muestras en cada etapa. Esto permite

realizar un análisis de sensibilidad en los parámetros a identificar, brindando una idea de la fiabilidad de las muestras a posteriori. Es crucial recordar que la verosimilitud se evalúa a partir de las respuestas y no de los parámetros del modelo. Dado que dos modelos distintos pueden generar respuestas similares, se llevan a cabo múltiples ejecuciones para corroborar y verificar los resultados.

## 8.6 Problema de aplicación Puente: Escenario B

El objetivo de este escenario es estudiar el rendimiento de los enfoques Bayesianos propuestos en la actualización de modelos para un caso que involucra un espacio de alta dimensionalidad para los parámetros de identificación, datos dinámicos con ruido y un sistema estructural no lineal complejo bajo excitación sísmica. Se consideran todos los parámetros de las subestructuras en el conjunto de parámetros de identificación, así como la desviación estándar de los errores de predicción, lo que da como resultado un total de diecinueve parámetros que deben actualizarse. Con fines de identificación, los valores objetivo para los parámetros corresponden a los valores perturbados de la Tabla 8.5, y los datos de medición correspondientes se obtienen siguiendo la Sección 8.2 con un nivel de ruido de  $\gamma = 10\%$  para todos los casos. Con el fin de explorar el efecto de la cantidad de información disponible sobre el comportamiento del sistema, se abordan en esta sección los dos casos en términos del número de ubicaciones de medición descritas en la Sección 8.2.

### 8.6.1 Parámetros de identificación y distribuciones a priori

Este escenario considera diecinueve parámetros de identificación ( $n_\theta = 19$ ). Los parámetros del  $\theta_1$  al  $\theta_{18}$  están asociados con los diferentes parámetros estructurales presentados en la Tabla 8.1, mientras que  $\theta_{19}$  está relacionado con la desviación estándar de los errores de predicción. En términos del esquema de parametrización introducido en la Sección 8.1.2,  $\chi_i = \theta_i, i = 1, \dots, 18$ . Además,  $\sigma = \theta_{19}$  (ver Ecuación (8.2.2)). La descripción de los diferentes parámetros del modelo, así como sus valores objetivo correspondientes, se proporciona en la Tabla 8.2. Cabe señalar que en este escenario se consideran los valores perturbados de los parámetros del modelo. Por otro lado, el valor objetivo para la desviación estándar de los errores de predicción está asociado con el nivel de ruido  $\gamma = 10\%$  y varía ligeramente según los datos de medición disponibles (“All” o “Spans” según se describe en la Sección 8.2). Finalmente, la distribución a priori para  $\theta_i, i = 1, \dots, 18$  se toma como uniforme en  $[0.5, 1.5]$ , es decir,  $\theta_i \sim U[0.5, 1.5], i = 1, \dots, 18$ , mientras que  $\theta_{19}$

sigue una distribución Log-normal con mediana igual a  $0.1 \text{ m/s}^2$  y una desviación estándar logarítmica de 0.3, lo que lleva a un coeficiente de variación de aproximadamente 30%.

Tabla 8.16: Descripción de los parámetros a identificar. Escenario B.

Parámetro	Descripción	Valor Objetivo
$\theta_1$	Primer tramo de la cubierta ( $\chi_1$ )	0.8700
$\theta_2$	Segundo tramo de la cubierta ( $\chi_2$ )	1.0700
$\theta_3$	Tercer tramo de la cubierta ( $\chi_3$ )	0.9300
$\theta_4$	Cuarto tramo de la cubierta ( $\chi_4$ )	0.9800
$\theta_5$	Quinto tramo de la cubierta ( $\chi_5$ )	1.0100
$\theta_6$	Primer pilar ( $\chi_6$ )	1.1300
$\theta_7$	Segundo pilar ( $\chi_7$ )	0.9800
$\theta_8$	Tercer pilar ( $\chi_8$ )	1.1400
$\theta_9$	Cuarto pilar ( $\chi_9$ )	0.9400
$\theta_{10}$	Primer conjunto de pilotes ( $\chi_{10}$ )	1.0600
$\theta_{11}$	Segundo conjunto de pilotes ( $\chi_{11}$ )	0.9500
$\theta_{12}$	Tercer conjunto de pilotes ( $\chi_{12}$ )	1.0400
$\theta_{13}$	Cuarto conjunto de pilotes ( $\chi_{13}$ )	1.0600
$\theta_{14}$	Resortes traslacionales, de 0 a 10 metros de profundidad ( $\chi_{14}$ )	1.0500
$\theta_{15}$	Resortes traslacionales, de 10 a 22 metros de profundidad ( $\chi_{15}$ )	0.9000
$\theta_{16}$	Resortes traslacionales, de 22 a 35 metros de profundidad ( $\chi_{16}$ )	0.8900
$\theta_{17}$	Primer conjunto de dispositivos basados en fricción ( $\chi_{17}$ )	1.1200
$\theta_{18}$	Segundo conjunto de dispositivos basados en fricción ( $\chi_{18}$ )	0.9000
$\theta_{19}$	Desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ )	$7.4116 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ (“All”) $7.3101 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ (“Spans”)

## 8.7 Resultados caso “All”: Bayesian model updating

### 8.7.1 Muestras a posteriori

Las Figuras 8.18 a 8.23 muestran los histogramas marginales a posteriori asociados con diferentes grupos de parámetros mediante el método Metropolis y Hamiltoniano. En particular, la Figura 8.18 está asociada con los parámetros del tablero ( $\theta_1$  a  $\theta_5$ ), la Figura 8.19

con los parámetros de los pilares ( $\theta_6$  a  $\theta_9$ ), la Figura 8.20 con los parámetros de los pilotes ( $\theta_{10}$  a  $\theta_{13}$ ), la Figura 8.21 con los parámetros del suelo ( $\theta_{14}$  a  $\theta_{16}$ ), la Figura 8.22 y con los parámetros de los dispositivos basados en fricción ( $\theta_{17}$  y  $\theta_{18}$ ), y la Figura 8.23 corresponde a la desviación estándar de los errores de predicción ( $\theta_{19}$ ). Con fines de referencia, el valor objetivo para cada parámetro de identificación (ver Tabla 8.16) también se incluye en las figuras con una línea roja discontinua. En base a los resultado obtenidos, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Los histogramas marginales a posteriori de los parámetros asociados con la cubierta, los dispositivos no lineales y la desviación estándar en las Figuras 8.18, 8.22 y 8.23, respectivamente, están densamente concentrados en las proximidades de los valores objetivo para distintas ejecuciones del método.
2. En general, los histogramas marginales a posteriori asociados con los pilares, los pilotes y las capas de suelo (ver Figuras 8.19, 8.20 y 8.21) no se concentran en las proximidades de sus valores objetivo. Esto puede atribuirse a la interacción entre estos parámetros, ya que los pilares están conectados en serie con los pilotes y elementos de resorte. Similar al comportamiento y resultados obtenidos en el Escenario A. Observamos que las desviaciones máximas entre el valor medio a posteriori y los valores objetivos de los parámetros de identificación están en el rango del 36% al 60%. Estas desviaciones se observan principalmente en los parámetros asociados a los pilares ( $\theta_6$  a  $\theta_9$ ), pilotes ( $\theta_{10}$  a  $\theta_{13}$ ) y capas más profundas del suelo ( $\theta_{15}$  y  $\theta_{16}$ ). Estos resultados coinciden con los obtenidos en el Escenario A, indicando cierta interacción entre las rigideces de los pilares y pilotes.
3. Una excepción con respecto al punto 2 se observa en el parámetro  $\theta_{14}$ , que corresponde a la capa más superficial de resortes traslacionales que representa la interacción suelo-estructura. Esta excepción puede atribuirse presumiblemente a una mayor sensibilidad del comportamiento dinámico del sistema con respecto a este parámetro, lo cual es razonable desde un punto de vista estructural, ya que la influencia de las capas superficiales del suelo suele ser mayor en el comportamiento dinámico de los sistemas estructurales en comparación con las capas más profundas. Dicha sensibilidad afecta la “altura efectiva” de los elementos pilar-pilote.

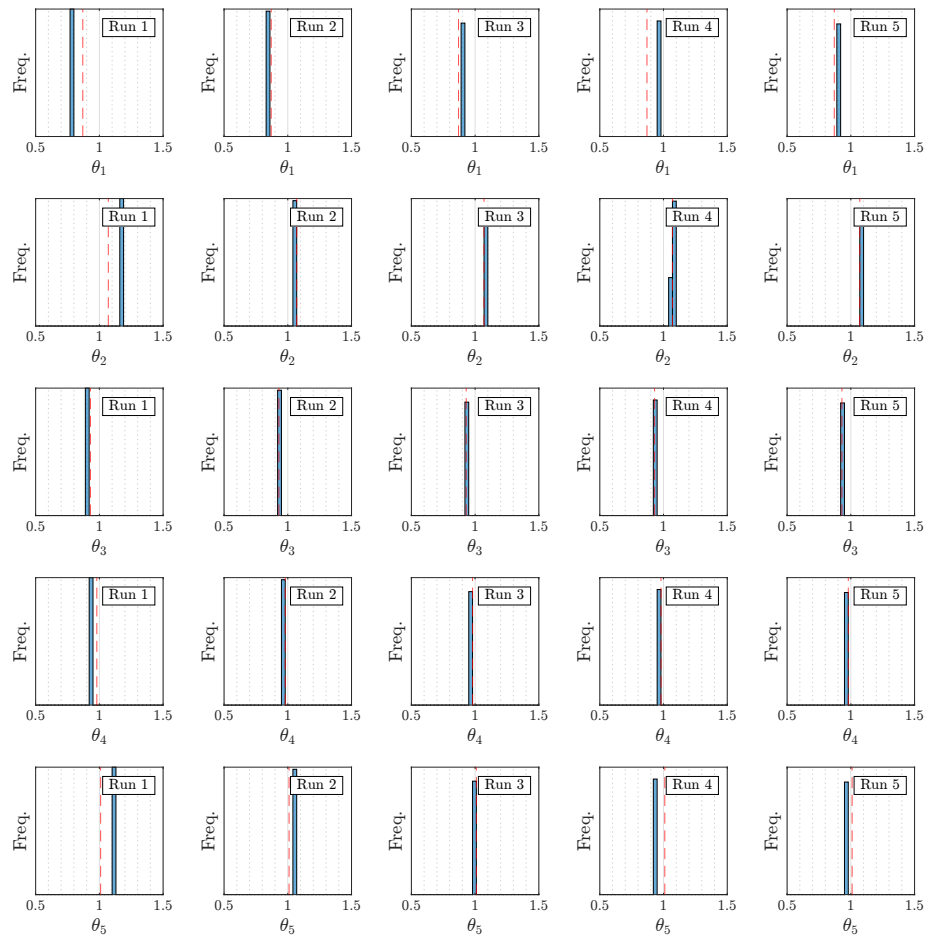


Figura 8.18: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_1$  a  $\theta_5$  (Módulo de Young de la cubierta) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

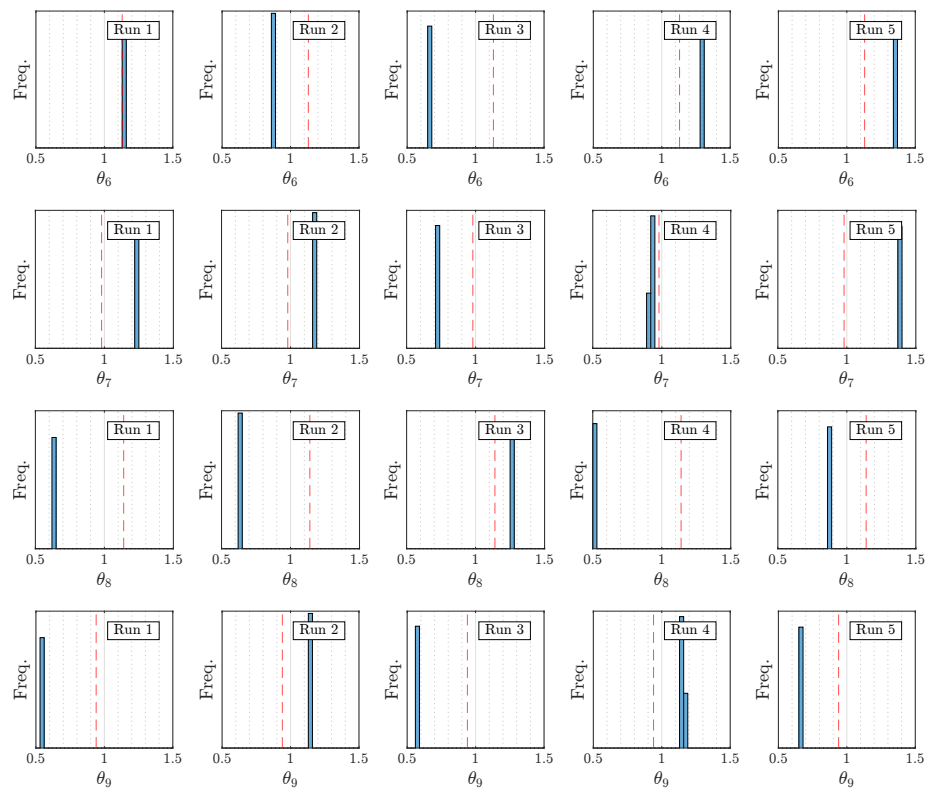


Figura 8.19: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_6$  a  $\theta_9$  (Módulo de Young de los pilares) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

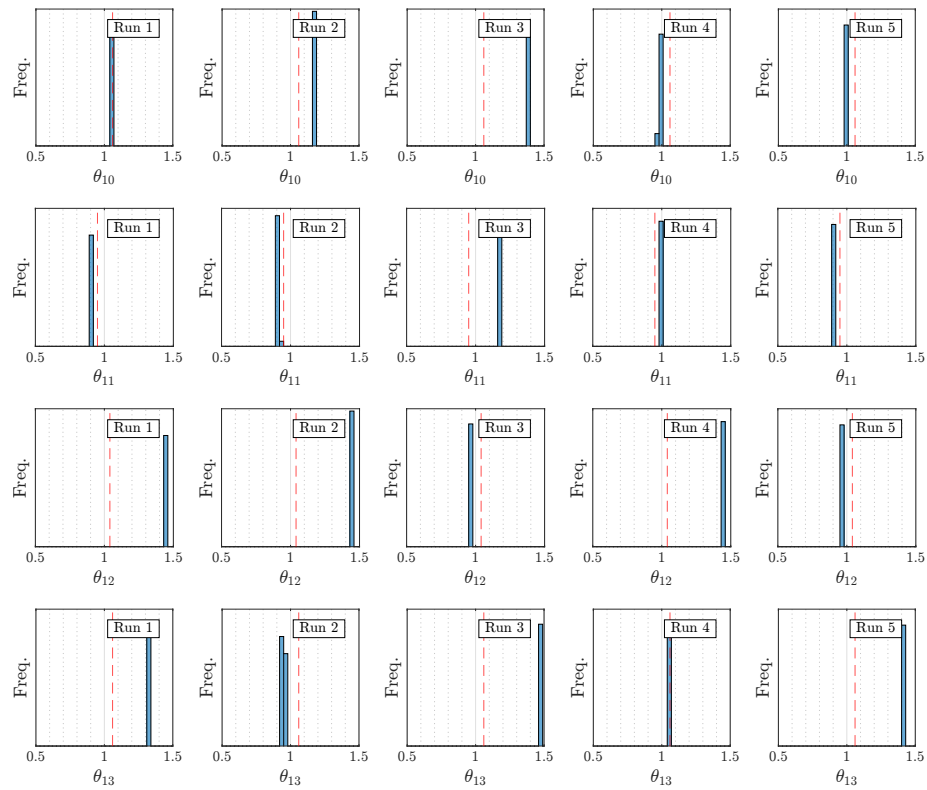


Figura 8.20: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{10}$  a  $\theta_{13}$  (Módulo de Young de los pilotes) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

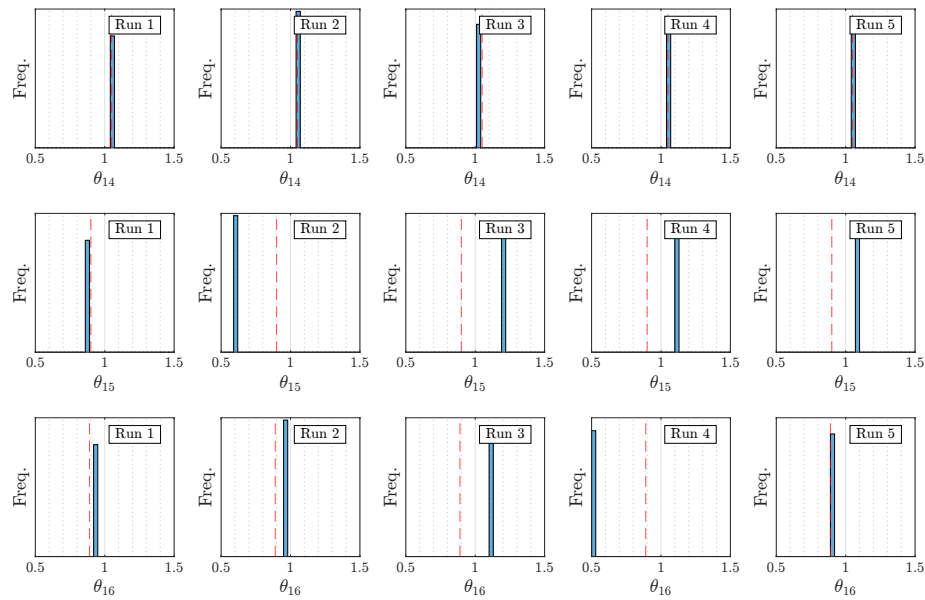


Figura 8.21: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{14}$  a  $\theta_{16}$  (Módulo de reacción de la subrasante) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

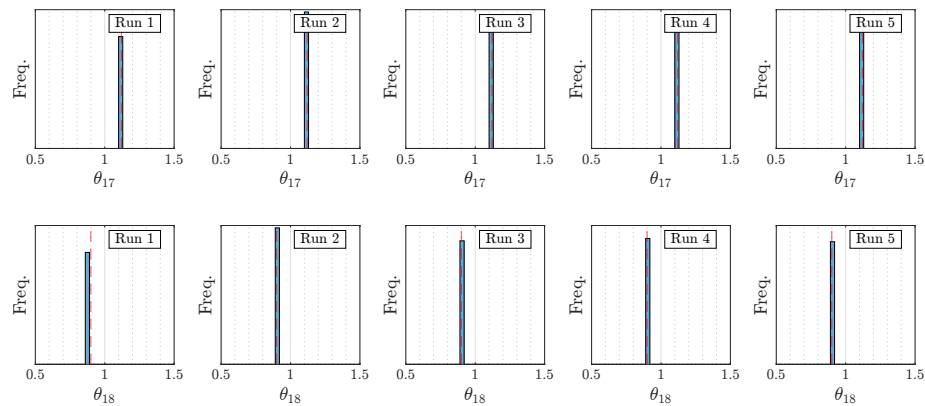


Figura 8.22: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{17}$  a  $\theta_{18}$  (coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

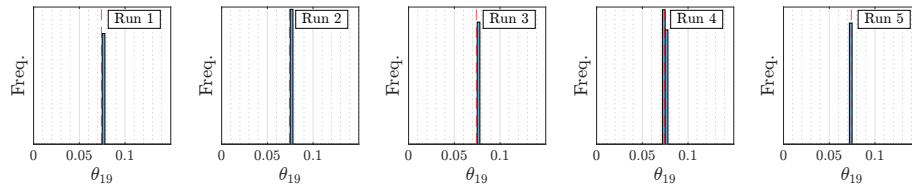


Figura 8.23: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{19}$  (desviación estándar del error de predicción) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Las Tablas 8.17 y 8.18 presentan los valores medios a posteriori normalizados de los parámetros de identificación obtenidos en cinco ejecuciones independientes. En este caso, los parámetros se han normalizado con respecto a sus valores objetivos, es decir,  $\hat{\theta}_i = \theta_i / \theta_i^{\text{target}}$  (ver Tabla 8.16).

Adicionalmente, se observa que el proceso de identificación requiere entre 38 y 46 etapas para obtener las muestras a posteriori necesarias. Esta cantidad puede bajar si la desviación estándar se considera como un parámetro determinístico empleando un valor lo suficientemente pequeño. Sin embargo, esto requiere un ajuste adecuado de  $\sigma$ , que puede tener una influencia significativa tanto en la calidad de los resultados de identificación como en los costos computacionales totales.

Tabla 8.17: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Parámetro	Ejecución 1	Ejecución 2	Ejecución 3	Ejecución 4	Ejecución 5
$\hat{\theta}_1$	1.1110	0.9877	0.9943	0.9931	1.0252
$\hat{\theta}_2$	0.9303	1.0881	0.9328	0.9577	1.0395
$\hat{\theta}_3$	1.0120	0.9839	1.0195	1.0174	1.0080
$\hat{\theta}_4$	1.0785	0.9185	1.0682	1.0227	0.9252
$\hat{\theta}_5$	0.9005	1.0042	1.0002	1.0111	0.9913
$\hat{\theta}_6$	0.5467	1.0341	0.8867	0.9294	1.0219
$\hat{\theta}_7$	1.4262	1.3658	1.2661	0.6632	1.3500
$\hat{\theta}_8$	1.2075	0.6737	1.0449	1.2404	1.1369
$\hat{\theta}_9$	0.6560	0.9148	0.9809	1.0205	0.6459
$\hat{\theta}_{10}$	1.3506	1.0064	1.0605	1.0774	1.0166
$\hat{\theta}_{11}$	0.9760	0.8453	0.9342	1.0678	0.8945
$\hat{\theta}_{12}$	0.8094	1.3856	1.0237	1.1611	0.8933
$\hat{\theta}_{13}$	1.4118	1.0006	0.9749	0.9083	1.3994
$\hat{\theta}_{14}$	0.9993	0.9952	0.9923	0.9903	0.9860
$\hat{\theta}_{15}$	0.7942	1.5982	0.9368	1.1319	0.8564
$\hat{\theta}_{16}$	1.1102	1.5742	1.6517	1.3609	1.6132
$\hat{\theta}_{17}$	0.9906	0.9967	1.0004	0.9980	0.9955
$\hat{\theta}_{18}$	1.0005	0.9921	0.9965	0.9935	1.0017
$\hat{\theta}_{19}$	1.0051	1.0140	1.0148	1.0163	0.9997

Tabla 8.18: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Parámetro	Ejecución 1	Ejecución 2	Ejecución 3	Ejecución 4	Ejecución 5
$\hat{\theta}_1$	0.9017	0.9724	1.0337	1.0947	1.0386
$\hat{\theta}_2$	1.0991	0.9809	1.0045	1.0008	1.0020
$\hat{\theta}_3$	0.9663	1.0170	0.9911	1.0024	0.9972
$\hat{\theta}_4$	0.9458	0.9835	0.9888	0.9706	0.9981
$\hat{\theta}_5$	1.1146	1.0402	0.9752	0.9330	0.9610
$\hat{\theta}_6$	1.0179	0.7707	0.5779	1.1558	1.2003
$\hat{\theta}_7$	1.2709	1.2076	0.7521	0.9396	1.4237
$\hat{\theta}_8$	0.5548	0.5563	1.1193	0.4547	0.7756
$\hat{\theta}_9$	0.5772	1.2074	0.6024	1.2336	0.7045
$\hat{\theta}_{10}$	0.9958	1.1142	1.3072	0.9255	0.9444
$\hat{\theta}_{11}$	0.9576	0.9676	1.2376	1.0580	0.9370
$\hat{\theta}_{12}$	1.3761	1.3864	0.9204	1.3943	0.9202
$\hat{\theta}_{13}$	1.2626	0.8963	1.3836	0.9948	1.3375
$\hat{\theta}_{14}$	0.9962	1.0000	0.9903	1.0017	1.0004
$\hat{\theta}_{15}$	0.9681	0.6751	1.3517	1.2367	1.1934
$\hat{\theta}_{16}$	1.0598	1.0742	1.2682	0.5753	1.0317
$\hat{\theta}_{17}$	0.9961	0.9986	0.9933	0.9877	0.9871
$\hat{\theta}_{18}$	0.9879	0.9926	0.9910	0.9989	1.0023
$\hat{\theta}_{19}$	1.0185	1.0260	1.0215	1.0118	1.0073

Tabla 8.19: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	275
2	248
3	765
4	229
5	705

Tabla 8.20: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	645
2	295
3	890
4	272
5	265

### 8.7.2 Evidencia estimada

Las Tablas 8.21 y 8.22 presentan los valores máximos de likelihood observados, estimaciones de probabilidad de falla y los valores obtenidos de log-evidence para cinco ejecuciones independientes de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ . Tenga en cuenta que los resultados obtenidos en diferentes ejecuciones de los enfoques propuestos son muy similares, lo que implica que las regiones a las que convergieron las muestras durante cada ejecución presentan la misma plausibilidad.

Tabla 8.21: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$9.8583 \times 10^4$	-103.2979	$9.8480 \times 10^4$
2	$9.8654 \times 10^4$	-87.2831	$9.8567 \times 10^4$
3	$9.9023 \times 10^4$	-106.8799	$9.8916 \times 10^4$
4	$9.8898 \times 10^4$	-101.1783	$9.8797 \times 10^4$
5	$9.8836 \times 10^4$	-100.0539	$9.8736 \times 10^4$

Tabla 8.22: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$9.8475 \times 10^4$	-88.6299	$9.8386 \times 10^4$
2	$9.8939 \times 10^4$	-107.8328	$9.8832 \times 10^4$
3	$9.8924 \times 10^4$	-95.2157	$9.8829 \times 10^4$
4	$9.8805 \times 10^4$	-91.7959	$9.8713 \times 10^4$
5	$9.8749 \times 10^4$	-107.9401	$9.8641 \times 10^4$

### 8.7.3 Identificación de propiedades modales

Las Tablas 8.23 y 8.24 muestran las primeras diez frecuencias naturales correspondientes al valor promedio de los parámetros del modelo a posteriori,  $\bar{\theta}$ , en tres ejecuciones independientes para  $\gamma = 10\%$ . Además, las Figuras 8.24 y 8.25 muestran los valores de *Modal Assurance Criterion* (MAC) [26] correspondientes a los primeros diez modos del modelo objetivo y el modelo asociado al valor promedio de los parámetros de identificación a posteriori obtenidos durante una ejecución de ambos métodos basados en subset simulation. Estos resultados y la alta precisión en la estimación del valor promedio a posteriori del coeficiente de fricción inicial (ver Tabla 8.18) indican que el enfoque propuesto es capaz de identificar las propiedades dinámicas importantes de este sistema estructural no lineal. Sin embargo, dada la cantidad de parámetros a identificar como también la sensibilidad al tipo de mediciones que se tiene a disposición, ya se pueden apreciar leves diferencias entre el modelo actualizado con el modelo real para los modos de vibrar con las frecuencias más altas. Otra razón es que los errores de medición en el registro de aceleraciones afecte en mayor medida a identificar modos de vibrar más altos.

Tabla 8.23: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Modo No. ( $i$ )	Objetivo $\tilde{\omega}_i$	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
		$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	3.8189	3.8563	-0.979	3.8480	-0.762	3.8438	-0.654
2	4.4591	4.5141	-1.234	4.5225	-1.424	4.4945	-0.795
3	4.5712	4.5867	-0.338	4.5871	-0.348	4.5880	-0.368
4	11.9089	11.7885	1.011	11.7892	1.005	11.7883	1.013
5	15.4127	15.1654	1.604	15.1638	1.615	15.1605	1.636
6	22.7713	22.6762	0.418	21.9602	3.562	21.7585	4.448
7	25.7977	25.6185	0.695	25.7204	0.300	25.5419	0.992
8	26.9038	26.7053	0.738	27.0700	-0.618	26.9255	-0.081
9	27.7786	27.6226	0.562	27.6986	0.288	27.4887	1.044
10	29.4630	28.8804	1.978	29.1269	1.141	29.2335	0.779

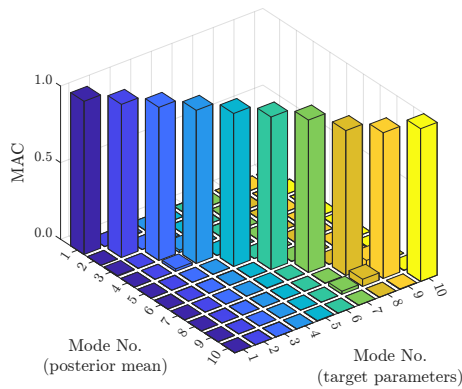


Figura 8.24: Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Tabla 8.24: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes del enfoque propuesto con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

Modo No. ( $i$ )	Objetivo $\tilde{\omega}_i$	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
		$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	3.8189	3.8461	-0.712	3.8416	-0.596	3.8506	-0.830
2	4.4591	4.5566	-2.188	4.5201	-1.368	4.5230	-1.434
3	4.5712	4.5868	-0.341	4.5877	-0.361	4.5876	-0.359
4	11.9089	11.7821	1.066	11.7903	0.996	11.7786	1.094
5	15.4127	15.1983	1.391	15.1756	1.538	15.1702	1.574
6	22.7713	21.3236	6.358	21.7084	4.668	22.2766	2.173
7	25.7977	25.8688	-0.275	25.6895	0.420	25.7576	0.156
8	26.9038	27.5873	-2.541	27.0947	-0.710	27.1599	-0.952
9	27.7786	28.2117	-1.559	27.6247	0.554	27.9061	-0.459
10	29.4630	29.3429	0.408	29.4579	0.017	29.2326	0.782

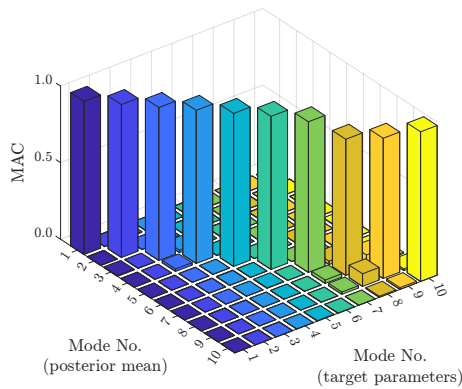


Figura 8.25: Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

### 8.7.4 Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori

La Figura 8.26 muestra las respuestas de aceleración medidas en grados de libertad seleccionados (línea negra sólida), así como las predicciones correspondientes asociadas al valor promedio posterior de los parámetros (línea roja discontinua) para  $\gamma = 10\%$ . Además, en las figuras también se presentan los intervalos de confianza al 95% de las respuestas (líneas azules punteadas), que están asociados a la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Las respuestas de interés son las aceleraciones del tablero a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  en el primer estribo, el primer pilar, el centro del tablero, el cuarto pilar y el segundo estribo. Se observa que todas las cantidades concuerdan muy bien y, por lo tanto, ambos métodos propuestos son capaces de identificar correctamente el comportamiento estructural en este escenario. Se obtienen resultados similares para diferentes ejecuciones de subset simulation.

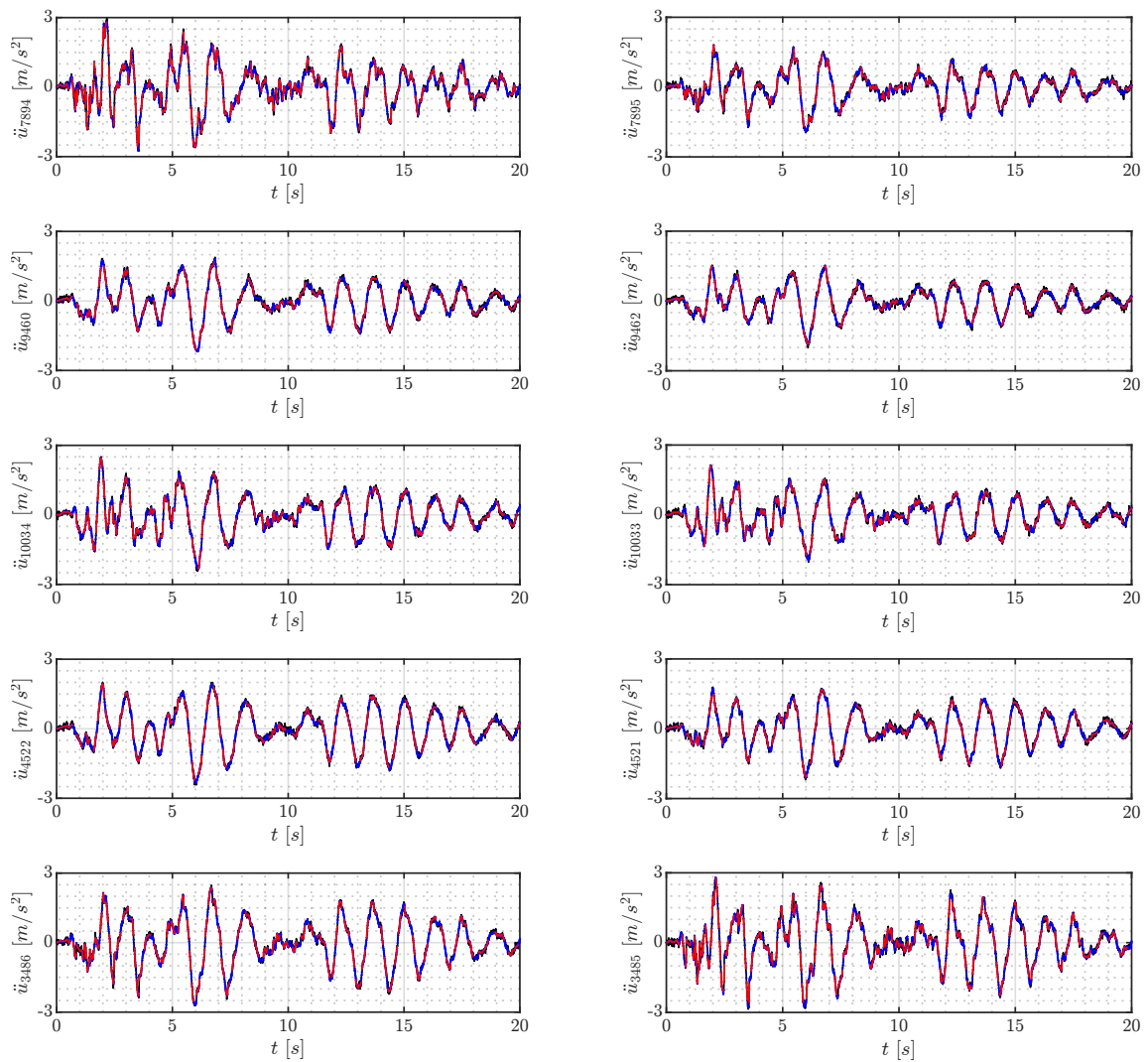


Figura 8.26: Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

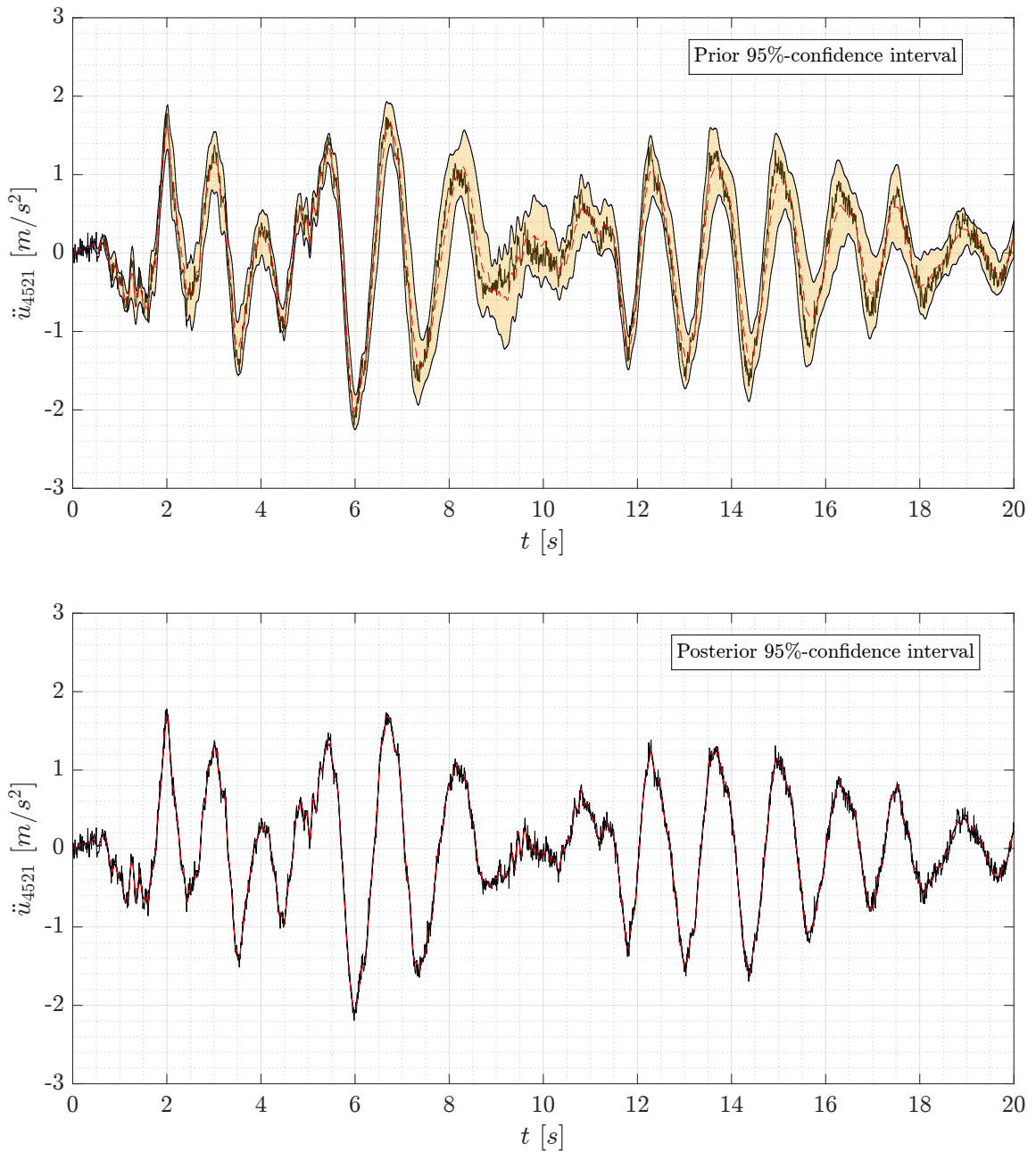


Figura 8.27: Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”.

### 8.7.5 Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios

Según el enfoque descrito en la Sección 3.1, el proceso de muestreo continúa hasta que el umbral auxiliar ( $d_{aux}$ ) es menor que el umbral intermedio correspondiente ( $d_{int}$ ). Recorde-

mos que el umbral auxiliar es el valor máximo del logaritmo de la verosimilitud observado hasta la etapa actual. Con fines de referencia, las Tablas 8.25 y 8.26 muestran los umbrales auxiliares e intermedios obtenidos durante las diferentes etapas de tres ejecuciones independientes de subset simulation para ( $\gamma = 10\%$ ), como también las Figuras 8.28 y 8.29.

Tal como se señaló en el escenario anterior, si se tiene como parámetro de identificación la desviación estándar de los errores de predicción, se puede demostrar que el máximo de la función de log-verosimilitud será

$$\max \ln(L(\sigma)) = -\frac{N_L N_T}{2} (\log(2\pi\sigma^2) + 1) \quad (8.7.1)$$

Por lo que, en este escenario el valor máximo referencial sería de  $\max \ln(L(\sigma)) = 9.92042 \times 10^4$ . Por lo tanto, los valores máximos basados en las muestras obtenidas en diferentes ejecuciones concuerdan bien con el valor máximo referencial. Esto ilustra la efectividad del enfoque propuesto para explorar las regiones más importantes en de la distribución a posteriori.

Tabla 8.25: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d_k^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All”

Etapa (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$
0	0.9913	8.0863	0.8548	6.4577	0.7545	6.5720
1	4.8104	8.0863	4.9330	7.5208	4.9052	7.6019
2	6.5646	8.0863	6.4775	8.6124	6.6059	8.3448
3	7.6017	8.4935	7.4644	8.8604	7.5644	8.7039
4	8.2388	9.1568	8.1376	8.8604	8.2605	9.2076
5	8.6560	9.1568	8.6126	9.1019	8.7289	9.2770
6	8.8964	9.2202	8.9081	9.3275	9.0109	9.4603
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	9.8480	9.8516	9.8647	9.8650	9.8941	9.8954
29	9.8495	9.8554	9.8648	9.8651	9.8953	9.8969
30	9.8514	9.8554	9.8650	9.8651	9.8963	9.8979
31	9.8529	9.8562	9.8651	9.8652	9.8973	9.8990
32	9.8546	9.8569	9.8652	9.8653	9.8983	9.8990
33	9.8561	9.8570	9.8652	9.8654	9.8989	9.9001
34	9.8566	9.8575	9.8653	9.8654	9.8995	9.9005
35	9.8572	9.8580	9.8654	9.8654	9.9000	9.9006
36	9.8576	9.8581	9.8654	9.8654	9.9005	9.9012
37	9.8580	9.8581	9.8654	9.8654	9.9008	9.9012
38	9.8581	9.8582	-	-	9.9011	9.9014
39	9.8582	9.8582	-	-	9.9013	9.9019
40	9.8582	9.8582	-	-	9.9017	9.9019
41	9.8583	9.8583	-	-	9.9019	9.9020
42	9.8583	9.8583	-	-	9.9021	9.9021
43	9.8583	9.8583	-	-	9.9021	9.9021
44	9.8583	9.8583	-	-	9.9022	9.9022
45	-	-	-	-	9.9023	9.9023
46	-	-	-	-	9.9023	9.9023

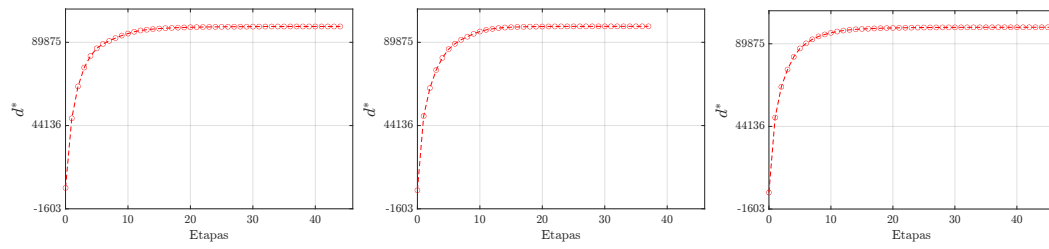


Figura 8.28: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

Tabla 8.26: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d_k^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltoniano. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “All”

Etapa (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d_k^{\text{aux}} \times 10^4)$
0	0.7545	6.5720	0.9946	6.6450	0.8063	6.4805
1	4.7432	7.2667	4.7149	6.7390	4.6093	7.2714
2	6.2398	8.0086	6.3707	8.4684	6.4339	7.5156
3	7.2943	8.3041	7.2238	8.6515	7.2717	8.7791
4	7.9485	8.8227	7.9543	8.7146	8.0489	8.9277
5	8.3229	9.1765	8.4581	9.0055	8.4975	9.0097
6	8.6724	9.1765	8.8249	9.1921	8.8062	9.2438
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	9.8452	9.8459	9.8861	9.8891	9.8891	9.8908
29	9.8455	9.8459	9.8876	9.8896	9.8898	9.8908
30	9.8458	9.8463	9.8888	9.8896	9.8905	9.8910
31	9.8461	9.8464	9.8895	9.8900	9.8909	9.8915
32	9.8463	9.8466	9.8900	9.8904	9.8912	9.8917
33	9.8465	9.8470	9.8904	9.8907	9.8915	9.8918
34	9.8467	9.8470	9.8907	9.8912	9.8917	9.8920
35	9.8470	9.8471	9.8910	9.8913	9.8919	9.8920
36	9.8472	9.8473	9.8913	9.8917	9.8920	9.8921
37	9.8473	9.8474	9.8916	9.8918	9.8921	9.8921
38	9.8474	9.8474	9.8919	9.8925	9.8922	9.8922
39	9.8476	9.8475	9.8921	9.8927	9.8922	9.8923
40	-	-	9.8925	9.8928	9.8923	9.8923
41	-	-	9.8928	9.8930	9.8924	9.8924
42	-	-	9.8931	9.8932	9.8924	9.8924
43	-	-	9.8933	9.8936	-	-
44	-	-	9.8935	9.8937	-	-
45	-	-	9.8937	9.8938	-	-
46	-	-	9.8938	9.8938	-	-
47	-	-	9.8940	9.8939	-	-

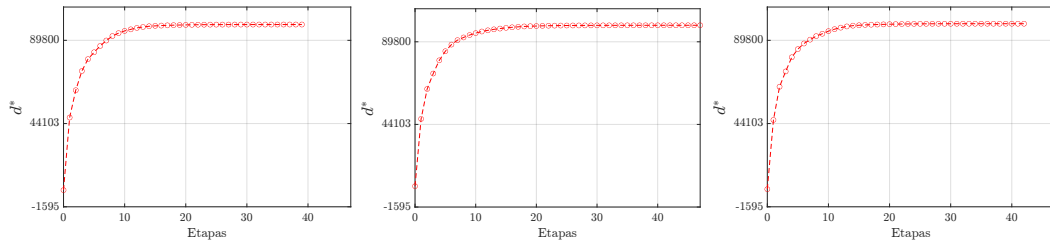


Figura 8.29: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “All”

## 8.8 Resultados caso “Spans”: Bayesian model updating

### 8.8.1 Muestras a posteriori

Las Figuras 8.30 a la 8.35 muestran los histogramas marginales a posteriori asociados con diferentes grupos de parámetros mediante el método Metropolis y Hamiltoniano. En particular, la Figura 8.30 está asociada con los parámetros del tablero ( $\theta_1$  a  $\theta_5$ ), la Figura 8.31 con los parámetros de los pilares ( $\theta_6$  a  $\theta_9$ ), la Figura 8.32 con los parámetros de las pilas ( $\theta_{10}$  a  $\theta_{13}$ ), la Figura 8.33 con los parámetros del suelo ( $\theta_{14}$  a  $\theta_{16}$ ), la Figura 8.34 con los parámetros de los dispositivos basados en fricción ( $\theta_{17}$  y  $\theta_{18}$ ), y la Figura 8.35 corresponde a la desviación estándar de los errores de predicción ( $\theta_{19}$ ). Con fines de referencia, el valor objetivo para cada parámetro de identificación (ver Tabla 8.16) también se incluye en las figuras con una línea roja discontinua. Los resultados son muy similares a los obtenidos en el caso “All”.

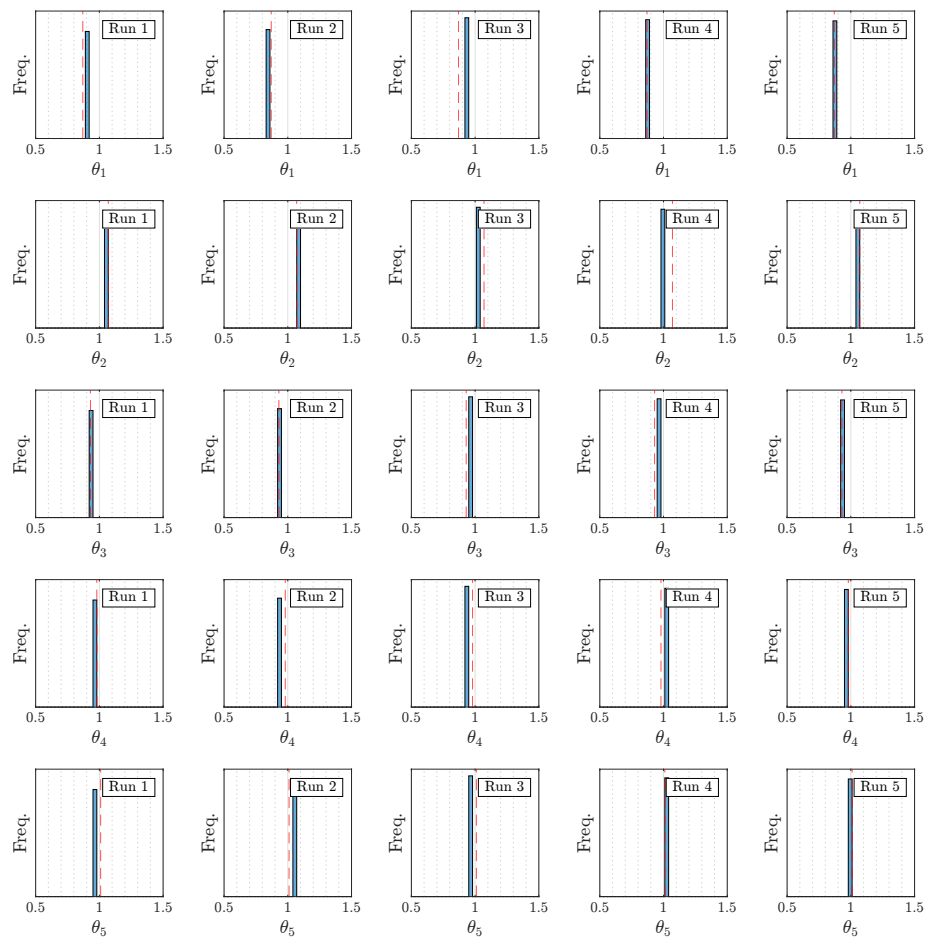


Figura 8.30: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_1$  a  $\theta_5$  (Módulo de Young de la cubierta) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

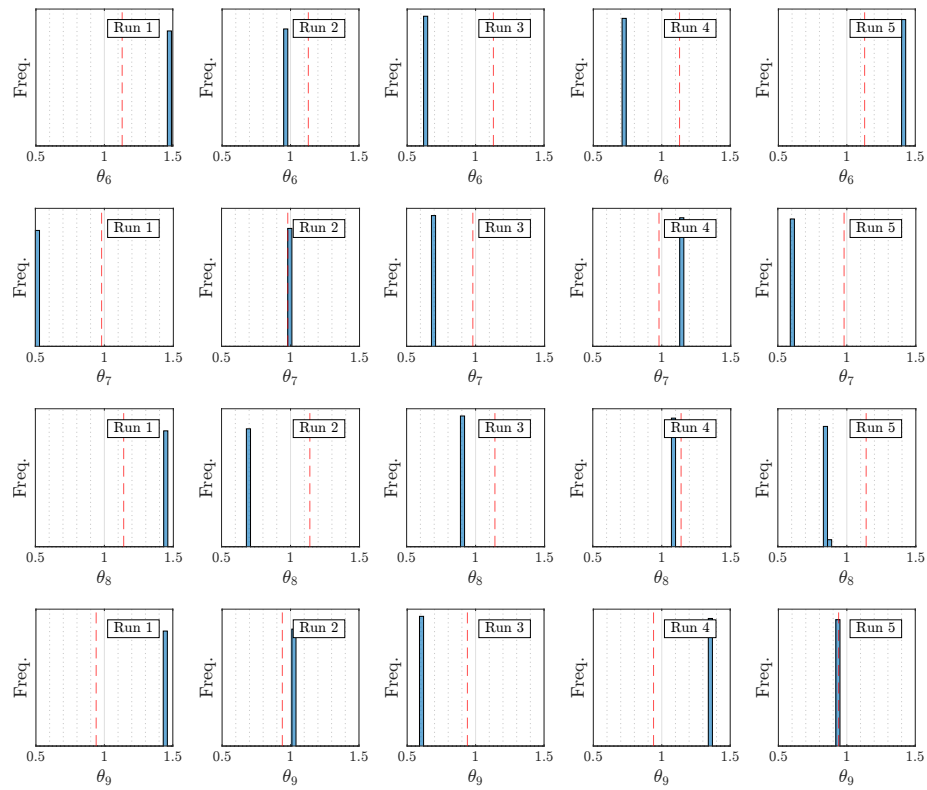


Figura 8.31: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_6$  a  $\theta_9$  (Módulo de Young de los pilares) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

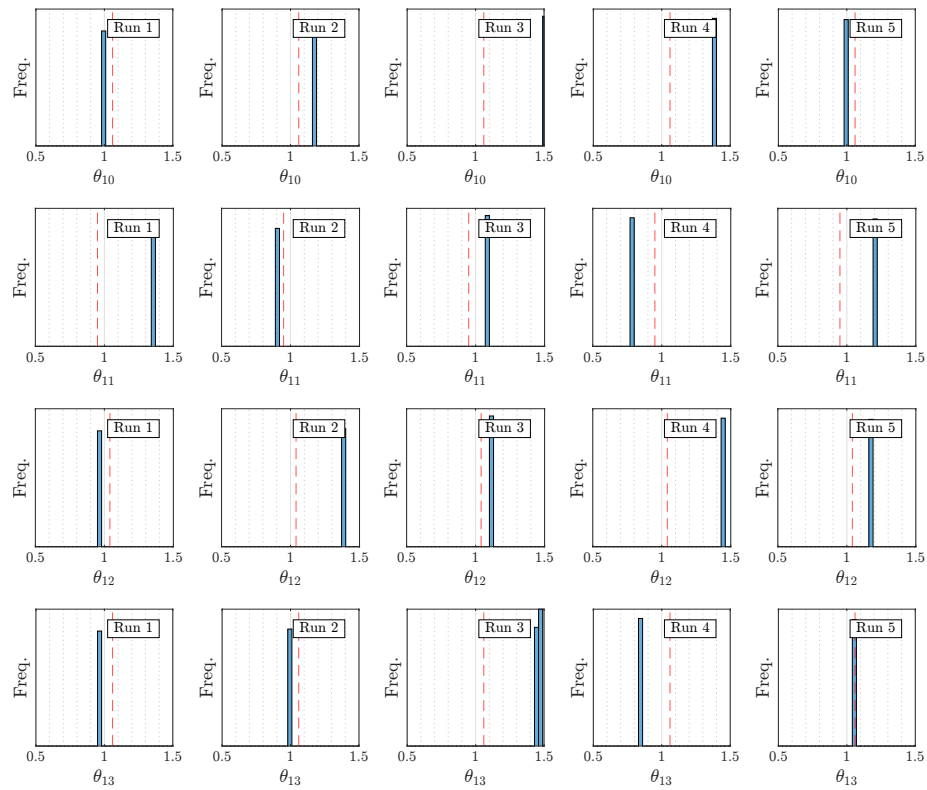


Figura 8.32: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{10}$  a  $\theta_{13}$  (Módulo de Young de los pilotes) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

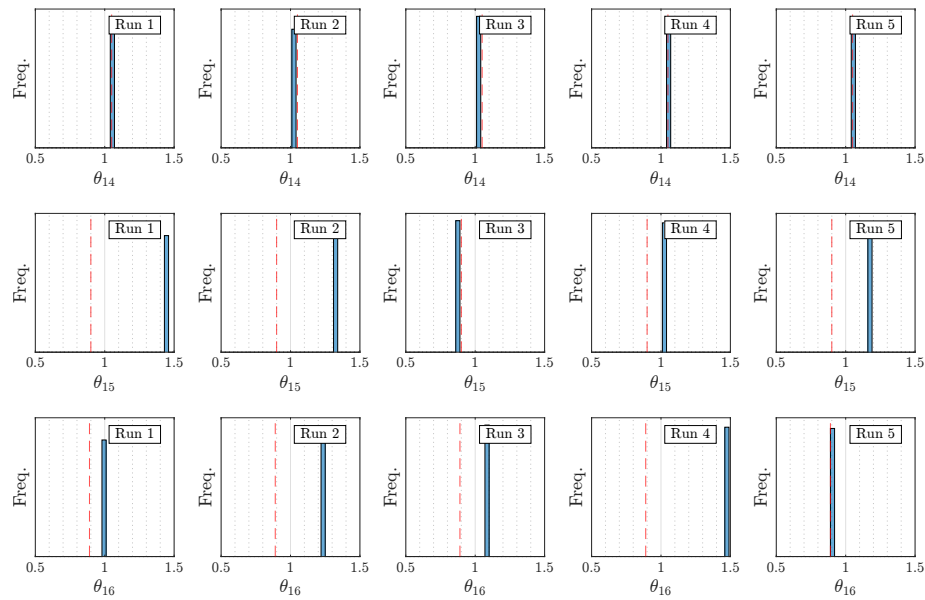


Figura 8.33: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{14}$  a  $\theta_{16}$  (Módulo de reacción de la subrasante) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

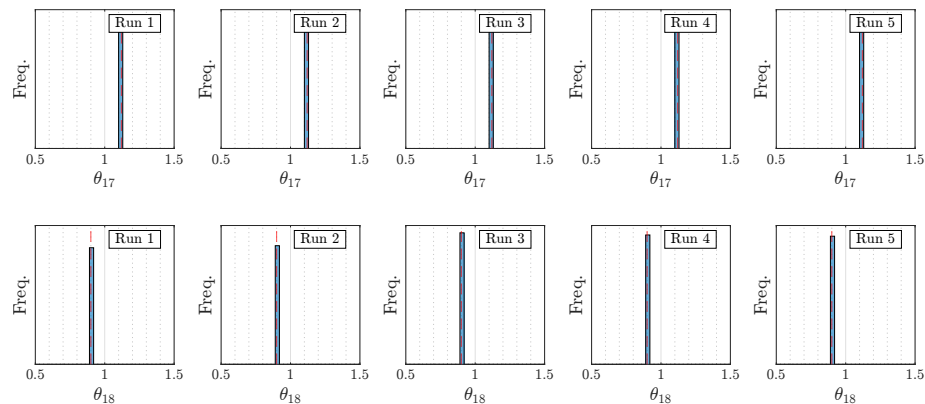


Figura 8.34: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{17}$  a  $\theta_{18}$  (coeficiente de fricción inicial de los dispositivos no lineales) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

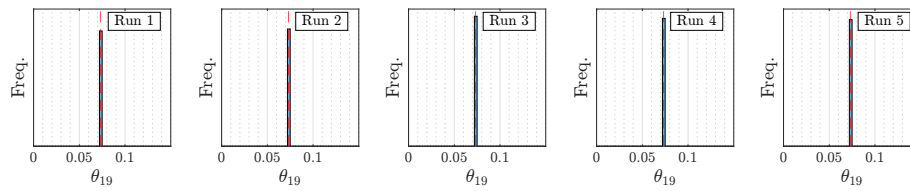


Figura 8.35: Histogramas marginales a posteriori de  $\theta_{19}$  (desviación estándar del error de predicción) obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Tabla 8.27: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Parámetro	Ejecución 1	Ejecución 2	Ejecución 3	Ejecución 4	Ejecución 5
$\hat{\theta}_1$	1.2796	1.0277	1.0740	1.0667	1.0104
$\hat{\theta}_2$	0.9046	1.0061	1.1176	1.0098	1.0042
$\hat{\theta}_3$	1.0282	0.9903	0.9800	0.9900	0.9939
$\hat{\theta}_4$	1.0826	0.9903	0.8845	0.9873	0.9822
$\hat{\theta}_5$	0.8023	0.9693	0.9372	0.9457	1.0033
$\hat{\theta}_6$	0.6246	0.8538	1.0539	0.6956	0.7818
$\hat{\theta}_7$	1.1687	1.2807	0.6088	1.3651	1.1628
$\hat{\theta}_8$	1.2490	0.7858	0.9572	0.8316	0.5779
$\hat{\theta}_9$	0.8145	1.1660	1.3154	1.0951	0.6692
$\hat{\theta}_{10}$	1.2526	1.0603	0.9457	1.0809	1.0639
$\hat{\theta}_{11}$	0.8632	0.8696	1.3684	1.1373	1.1396
$\hat{\theta}_{12}$	0.8822	1.3879	0.8423	0.7664	0.9511
$\hat{\theta}_{13}$	1.2884	0.8789	1.0536	1.1310	1.4038
$\hat{\theta}_{14}$	1.0031	0.9919	1.0030	0.9880	0.9875
$\hat{\theta}_{15}$	0.9460	1.6273	1.0780	0.8788	1.0101
$\hat{\theta}_{16}$	1.2984	1.5138	0.5722	1.3365	1.2630
$\hat{\theta}_{17}$	0.9863	1.0013	0.9897	1.0016	0.9933
$\hat{\theta}_{18}$	1.0056	0.9920	0.9986	1.0001	0.9985
$\hat{\theta}_{19}$	1.0269	1.0091	1.0200	1.0109	1.0121

Tabla 8.28: Valores medios a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Parámetro	Ejecución 1	Ejecución 2	Ejecución 3	Ejecución 4	Ejecución 5
$\hat{\theta}_1$	1.0488	0.9660	1.0748	0.9938	1.0138
$\hat{\theta}_2$	0.9937	1.0190	0.9686	0.9369	0.9941
$\hat{\theta}_3$	1.0011	1.0042	1.0289	1.0240	1.0028
$\hat{\theta}_4$	0.9855	0.9603	0.9653	1.0409	0.9874
$\hat{\theta}_5$	0.9626	1.0435	0.9562	1.0025	0.9941
$\hat{\theta}_6$	1.2981	0.8473	0.5649	0.6484	1.2586
$\hat{\theta}_7$	0.5176	1.0193	0.7100	1.1754	0.6316
$\hat{\theta}_8$	1.2655	0.6168	0.7893	0.9435	0.7521
$\hat{\theta}_9$	1.5505	1.0996	0.6394	1.4382	0.9983
$\hat{\theta}_{10}$	0.9296	1.1056	1.4103	1.3182	0.9334
$\hat{\theta}_{11}$	1.4129	0.9567	1.1301	0.8167	1.2541
$\hat{\theta}_{12}$	0.9305	1.3338	1.0819	1.3981	1.1274
$\hat{\theta}_{13}$	0.9147	0.9447	1.3774	0.7988	1.0036
$\hat{\theta}_{14}$	0.9908	0.9896	0.9812	0.9929	0.9972
$\hat{\theta}_{15}$	1.6199	1.4743	0.9821	1.1525	1.3115
$\hat{\theta}_{16}$	1.1208	1.3807	1.2245	1.6467	1.0062
$\hat{\theta}_{17}$	0.9986	0.9967	0.9886	1.0006	0.9973
$\hat{\theta}_{18}$	0.9943	0.9939	1.0019	0.9972	0.9985
$\hat{\theta}_{19}$	1.0124	1.0071	1.0053	1.0149	1.0104

Tabla 8.29: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	1081
2	1337
3	276
4	250
5	203

Tabla 8.30: Tamaños de muestras a posteriori obtenidos en cinco ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Ejecución No.	Número de muestras a posteriori
1	504
2	1282
3	379
4	932
5	923

### 8.8.2 Evidencia estimada

Las Tablas 8.31 y 8.32 presentan los valores máximos de likelihood observados, estimaciones de probabilidad de falla y los valores obtenidos de log-evidence para cinco ejecuciones independientes de subset simulation para  $\gamma = 10\%$ . Tenga en cuenta que los resultados obtenidos en diferentes ejecuciones de los enfoques propuestos son muy similares.

Tabla 8.31: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el enfoque propuesto con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$2.3692 \times 10^4$	-78.9032	$2.3614 \times 10^4$
2	$2.3847 \times 10^4$	-99.4139	$2.3747 \times 10^4$
3	$2.3778 \times 10^4$	-87.1762	$2.3691 \times 10^4$
4	$2.3792 \times 10^4$	-71.1570	$2.3720 \times 10^4$
5	$2.3775 \times 10^4$	-75.9704	$2.3699 \times 10^4$

Tabla 8.32: Estimaciones de la evidencia en cinco ejecuciones independientes con el enfoque propuesto con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Ejecución No	Valor máximo observado de Log-likelihood	Logaritmo de la probabilidad de falla	Log-evidence estimado
1	$2.3887 \times 10^4$	-84.2714	$2.3803 \times 10^4$
2	$2.3872 \times 10^4$	-78.7326	$2.3793 \times 10^4$
3	$2.3806 \times 10^4$	-84.5564	$2.3721 \times 10^4$
4	$2.3814 \times 10^4$	-79.0515	$2.3735 \times 10^4$
5	$2.3897 \times 10^4$	-69.8508	$2.3827 \times 10^4$

### 8.8.3 Identificación de propiedades modales

Las Tablas 8.33 y 8.34 muestran las primeras diez frecuencias naturales correspondientes al valor promedio de los parámetros del modelo a posteriori,  $\bar{\theta}$ , en tres ejecuciones independientes para  $\gamma = 10\%$ . Además, las Figuras 8.36 y 8.37 muestran los valores de *Modal Assurance Criterion* (MAC) [26] correspondientes a los primeros diez modos del modelo objetivo y el modelo asociado al valor promedio de los parámetros de identificación a posteriori obtenidos durante una ejecución de ambos métodos basados en subset simulation. Estos resultados y la alta precisión en la estimación del valor promedio a posteriori del coeficiente de fricción inicial (ver Tabla 8.28) indican que el enfoque propuesto es capaz de identificar las propiedades dinámicas importantes de este sistema estructural no lineal. Al igual que el caso anterior las mayores diferencias se ven para las frecuencias más altas, y además podemos descartar la cantidad de mediciones a disposición, puesto que sin importar el número siempre tendrán un grado de error que afecte en la identificación de éstas frecuencias.

Tabla 8.33: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Modo No. ( $i$ )	Objetivo $\tilde{\omega}_i$	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
		$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	3.8189	3.8649	-1.206	3.8373	-0.483	3.8585	-1.036
2	4.4591	4.4949	-0.805	4.5091	-1.122	4.4795	-0.459
3	4.5712	4.5871	-0.347	4.5878	-0.364	4.5875	-0.357
4	11.9089	11.7880	1.016	11.7741	1.133	11.7874	1.021
5	15.4127	15.1902	1.443	15.1558	1.667	15.1825	1.493
6	22.7713	23.6872	-4.022	22.1306	2.814	22.5969	0.766
7	25.7977	25.4553	1.328	25.5942	0.789	25.7436	0.210
8	26.9038	25.9578	3.516	26.7088	0.725	26.6223	1.046
9	27.7786	27.6273	0.544	27.5103	0.966	28.0823	-1.093
10	29.4630	28.8223	2.175	29.2194	0.827	29.1147	1.182

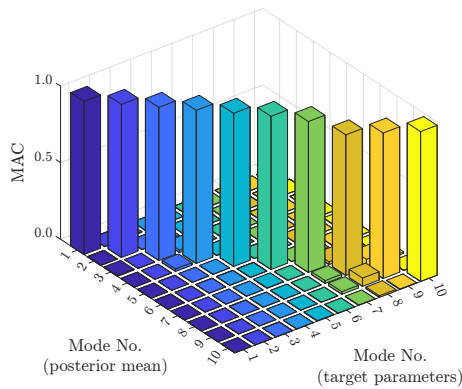


Figura 8.36: Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Metropolis. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Tabla 8.34: Frecuencias naturales identificadas (rad/s) en tres ejecuciones independientes con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

Modo No. ( $i$ )	Objetivo $\tilde{\omega}_i$	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
		$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)	$\omega_i$	Error (%)
1	3.8189	3.8507	-0.834	3.8494	-0.799	3.8588	-1.046
2	4.4591	4.4688	-0.219	4.5154	-1.263	4.5294	-1.578
3	4.5712	4.5880	-0.369	4.5877	-0.360	4.5875	-0.356
4	11.9089	11.7787	1.093	11.7893	1.004	11.7915	0.986
5	15.4127	15.1707	1.570	15.1739	1.549	15.1800	1.510
6	22.7713	22.2128	2.453	21.7327	4.561	22.5334	1.045
7	25.7977	25.6599	0.534	25.7433	0.211	25.7585	0.152
8	26.9038	26.6948	0.777	27.2133	-1.150	27.0448	-0.524
9	27.7786	27.6792	0.358	27.7001	0.283	27.8256	-0.169
10	29.4630	29.3427	0.408	29.3448	0.401	29.3692	0.319

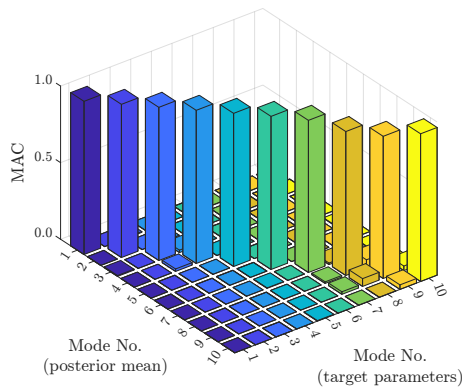


Figura 8.37: Valores del Modal assurance criterion (MAC) entre las formas modales calculadas a partir del modelo objetivo y el modelo asociado a la media de las muestras a posteriori de los parámetros de identificación con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

### 8.8.4 Comparación entre mediciones y predicciones a posteriori

Las Figura 8.38 muestran las respuestas de aceleración medidas en grados de libertad seleccionados (línea negra sólida), así como las predicciones correspondientes asociadas al valor promedio posterior de los parámetros (línea roja discontinua) para  $\gamma = 10\%$ . Además, en los gráficos también se presentan los intervalos de confianza al 95% de las respuestas (líneas azules punteadas), que están asociados a la distribución a posteriori de los parámetros inciertos. Las respuestas de interés son las aceleraciones del tablero a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  en todas las localizaciones correspondientes a este caso. Se observa que todas las cantidades concuerdan muy bien y, por lo tanto, ambos métodos propuestos son capaces de identificar correctamente el comportamiento estructural en este escenario. Se obtienen resultados similares para diferentes ejecuciones de subset simulation.

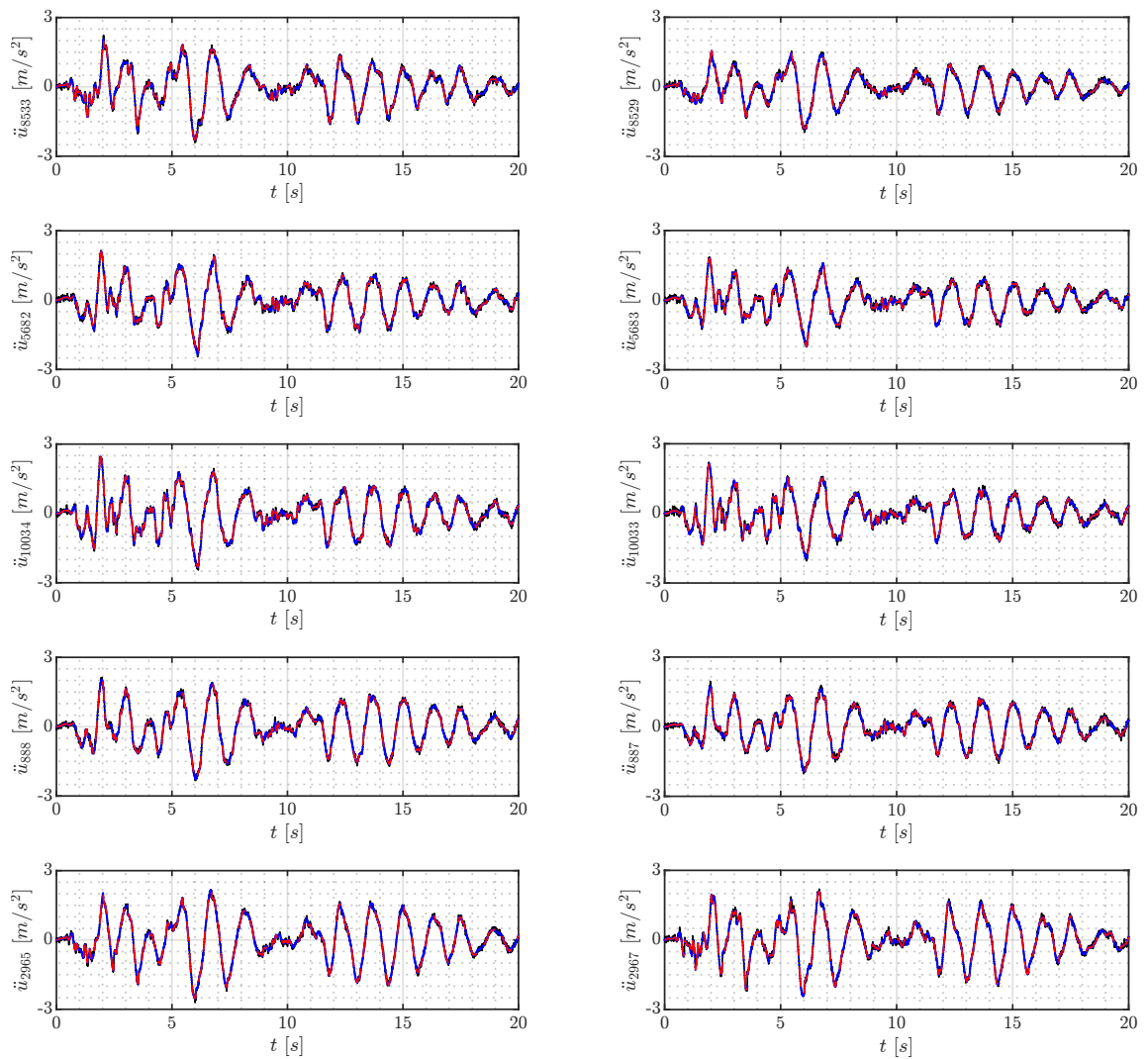


Figura 8.38: Mediciones de aceleraciones en diez grados de libertad. Mediciones (Línea negra sólida). Media de las respuestas predichas a posteriori (Línea roja discontinua). Intervalo de confianza del 95% (Línea azul punteada). Método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

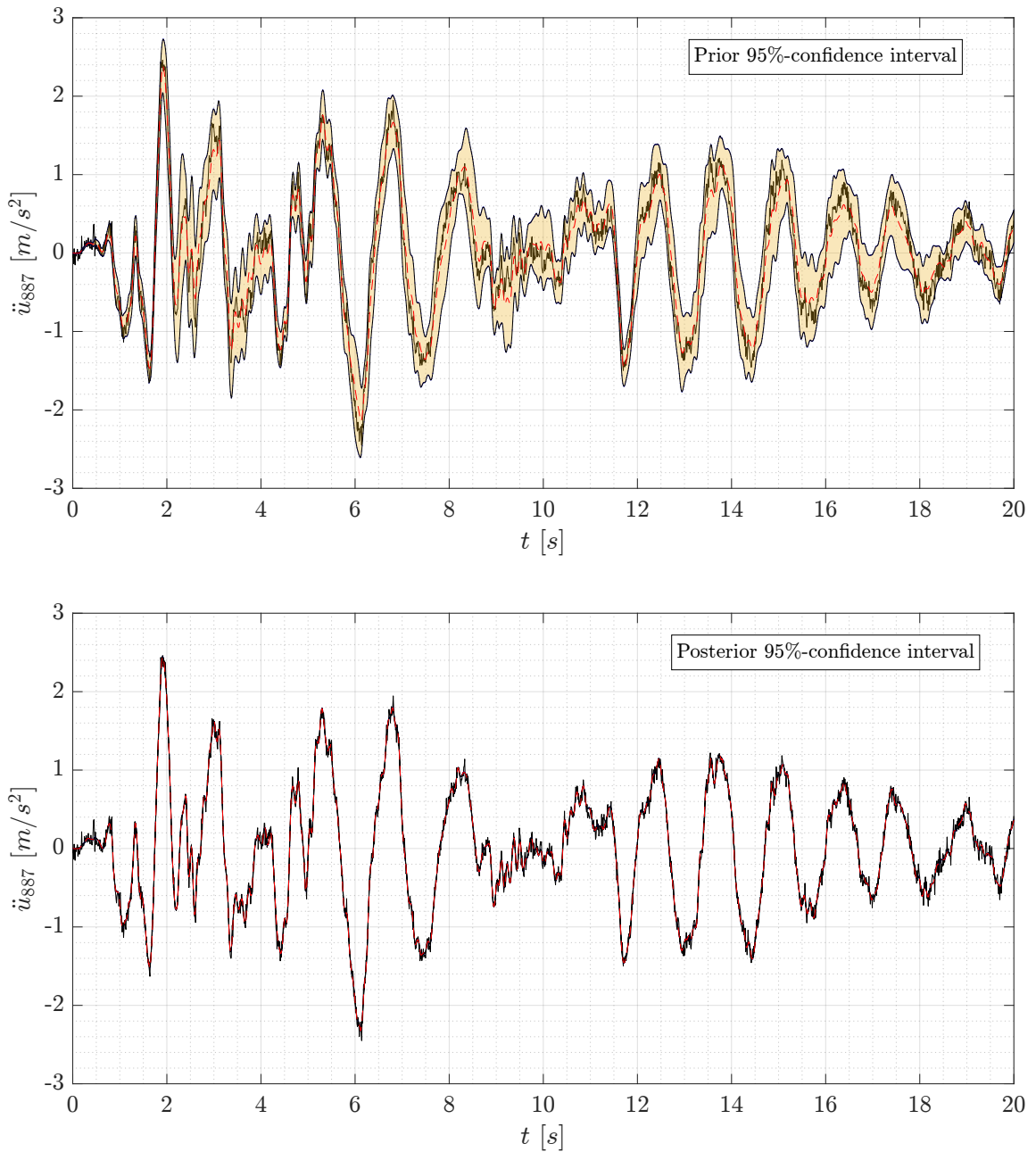


Figura 8.39: Intervalos de confianza del 95% a priori (superior) y a posteriori (inferior) de la respuesta de aceleración en un grado de libertad arbitrario con el método Hamiltoniano. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”.

### 8.8.5 Evolución de los umbrales auxiliares e intermedios

Según el enfoque descrito en la Sección 3.1, el proceso de muestreo continúa hasta que el umbral auxiliar ( $d_{\text{aux}}$ ) es menor que el umbral intermedio correspondiente ( $d_{\text{int}}$ ). Recorde-

mos que el umbral auxiliar es el valor máximo del logaritmo de la verosimilitud observado hasta la etapa actual. Con fines de referencia, las Tablas 8.35 y 8.36 muestran los umbrales auxiliares e intermedios obtenidos durante las diferentes etapas de tres ejecuciones independientes de subset simulation para ( $\gamma = 10\%$ ), como también las Figuras 8.40 y 8.41.

Tal como se señaló en el escenario anterior, si se tiene como parámetro de identificación la desviación estándar de los errores de predicción, se puede demostrar que el máximo de la función de log-verosimilitud sería:

$$\max \ln(L(\sigma)) = -\frac{N_L N_T}{2} (\log(2\pi\sigma^2) + 1) \quad (8.8.1)$$

Por lo que, en este escenario el valor máximo referencial sería de  $\max \ln(L(\sigma)) = 2.38838 \times 10^4$ . Por lo tanto, los valores máximos basados en las muestras obtenidas en diferentes ejecuciones concuerdan bien con el valor máximo referencial. Esto ilustra la efectividad del enfoque propuesto para explorar las regiones más importantes en de la distribución a posteriori.

Tabla 8.35: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{\text{aux}}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Metropolis. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “Spans”

Etapa (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{\text{aux}} \times 10^4)$
0	0.5770	1.7236	0.5400	1.7688	0.4893	1.6802
1	1.3630	1.9062	1.3461	1.9870	1.3297	2.0375
2	1.7183	1.9866	1.7138	1.9870	1.6915	2.0375
3	1.9011	2.0682	1.9309	2.1470	1.9043	2.1692
4	2.0119	2.1873	2.0614	2.2271	2.0594	2.2229
5	2.0916	2.2041	2.1377	2.2343	2.1514	2.2479
6	2.1487	2.2125	2.1907	2.2658	2.2043	2.2902
7	2.1934	2.2715	2.2315	2.2738	2.2469	2.3145
8	2.2244	2.2748	2.2596	2.3150	2.2838	2.3379
9	2.2557	2.2951	2.2850	2.3353	2.3143	2.3528
10	2.2777	2.3138	2.3035	2.3455	2.3312	2.3548
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	2.3676	2.3683	2.3825	2.3835	2.3775	2.3776
29	2.3681	2.3684	2.3830	2.3836	2.3776	2.3776
30	2.3684	2.3688	2.3834	2.3838	2.3776	2.3777
31	2.3687	2.3690	2.3837	2.3840	2.3777	2.3777
32	2.3690	2.3692	2.3839	2.3840	2.3777	2.3777
33	2.3692	2.3692	2.3840	2.3843	2.3777	2.3777
34	2.3694	2.3692	2.3842	2.3844	2.3778	2.3778
35	-	-	2.3843	2.3844	2.3778	2.3778
36	-	-	2.3844	2.3845	2.3778	2.3778
37	-	-	2.3845	2.3845	2.3778	2.3778
38	-	-	2.3845	2.3846	-	-
39	-	-	2.3846	2.3846	-	-
40	-	-	2.3846	2.3846	-	-
41	-	-	2.3846	2.3846	-	-
42	-	-	2.3847	2.3847	-	-
43	-	-	2.3847	2.3847	-	-

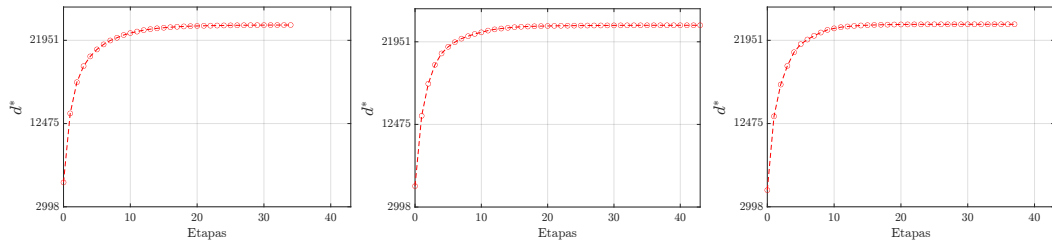


Figura 8.40: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Metropolis en tres ejecuciones independientes. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”

Tabla 8.36: Los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) y los umbrales auxiliares ( $d^{aux}$ ) durante tres ejecuciones independientes de subset simulation con el método Hamiltonianos. Escenario B, ( $\gamma = 10\%$ ). Caso “Spans”

Etapas (k)	Ejecución 1		Ejecución 2		Ejecución 3	
	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{aux} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{aux} \times 10^4)$	$(d_k^* \times 10^4)$	$(d^{aux} \times 10^4)$
0	0.5770	1.7236	0.5400	1.7688	0.4893	1.6802
1	1.3064	1.8412	1.3224	1.8513	1.3277	1.7418
2	1.6797	2.1285	1.6948	1.9622	1.6395	2.0172
3	1.8413	2.1285	1.8787	2.1258	1.8304	2.1333
4	1.9586	2.2026	2.0527	2.2847	1.9668	2.1844
5	2.0806	2.2665	2.1293	2.2847	2.0781	2.2039
6	2.1591	2.2839	2.2013	2.3104	2.1620	2.2710
7	2.2218	2.2845	2.2772	2.3278	2.2164	2.3053
8	2.2665	2.3460	2.3010	2.3366	2.2611	2.3144
9	2.2991	2.3460	2.3239	2.3481	2.2891	2.3318
10	2.3248	2.3560	2.3414	2.3616	2.3098	2.3385
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	2.3884	2.3885	2.3870	2.3871	2.3794	2.3798
29	2.3885	2.3886	2.3871	2.3871	2.3796	2.3799
30	2.3886	2.3886	2.3871	2.3871	2.3799	2.3803
31	2.3886	2.3886	2.3871	2.3871	2.3800	2.3803
32	2.3886	2.3886	2.3871	2.3871	2.3803	2.3804
33	2.3886	2.3887	2.3872	2.3872	2.3805	2.3805
34	2.3887	2.3887	2.3872	2.3872	2.3805	2.3805
35	2.3887	2.3887	-	-	2.3806	2.3806
36	2.3887	2.3887	-	-	2.3806	2.3806

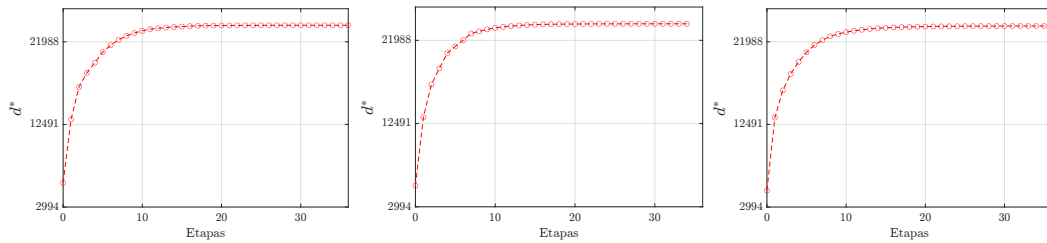


Figura 8.41: Evolución de los umbrales intermedios ( $d_k^*$ ) obtenidos durante las diferentes etapas de subset simulation mediante el método Hamiltoniano en tres ejecuciones independientes. Escenario B,  $\gamma = 10\%$ . Caso “Spans”

En conclusión de este escenario, es importante destacar que, en la identificación de parámetros, la densa concentración de muestras al finalizar el proceso no garantiza que efectivamente representen los valores reales de la estructura. Esto se debe a la posible inclusión de variables aleatorias en la parametrización del modelo, las cuales pueden no ser sensibles a la información utilizada para actualizar el modelo. Se requiere un análisis detallado de las distintas etapas del proceso, ya que ciertas interacciones entre parámetros pueden no ser apreciadas completamente en las etapas finales. Además, un buen entendimiento estructural sobre cómo influyen ciertos parámetros ante diferentes escenarios es fundamental para una identificación precisa y fiable. Por último, el mayor cambio en la identificación de parámetros entre el conjunto de datos “All” y “Spans” es el valor de la evidencia, sin embargo, esto no reflejó una diferencia significativa en los valores a posteriori, lo que implica un mayor número de datos a disposición no conlleva necesariamente una mejor identificación, también se puede concluir que el registro de aceleraciones de la cubierta es la medición más sensible en relación a los parámetros de físicos a identificar.

## 8.9 Conclusiones

En este ejemplo se desarrolló y probó en casos de alta dimensionalidad, aplicándose a un modelo complejo de elementos finitos que representa un puente realista, y se demostraron los efectos de modificar la cantidad de mediciones que se tiene a disposición para la identificación de parámetros.

Se abordaron dos escenarios, variando el número de parámetros estructurales. De estos, se extraen las siguientes conclusiones generales:

1. **Escenario A:** Cinco parámetros de identificación ( $n_\theta = 5$ )

- (a) Ambos enfoques son capaces de generar muestras a posteriori de manera efectiva y eficiente.
- (b) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy similar al valor máximo referencial. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori posee la misma plausibilidad en cada uno de ellos.
- (c) La desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) se identifica correctamente en este caso.
- (d) Las muestras obtenidas durante las primeras etapas de subset simulation proporcionan información sobre la sensibilidad de la distribución posterior con respecto a los parámetros de identificación, así como sobre la interacción entre los parámetros de identificación.
- (e) Los resultados indican una fuerte interacción entre las rigideces de los pilares y los pilotes, lo cual es razonable debido a la topología del sistema estructural (pilares y pilotes están conectados “en serie”) y al tipo de respuestas consideradas (aceleraciones del tablero).

2. **Escenario B:** Diecinueve parámetros de identificación ( $n_\theta = 19$ )

- (a) Ambos enfoques son capaces de generar muestras a posteriori de manera efectiva y eficiente.
- (b) El máximo valor observado de la función de log-verosimilitud es muy similar al valor máximo referencial. Por lo tanto, la región de la distribución a posteriori posee la misma plausibilidad en cada uno de ellos.
- (c) El enfoque propuesto es capaz de obtener muestras a posteriori en un espacio de identificación de alta dimensionalidad.
- (d) La desviación estándar de los errores de predicción ( $\sigma$ ) se identifica correctamente en este caso.
- (e) A pesar de la fuerte interacción entre algunos de los parámetros del modelo, las características dinámicas relevantes del sistema (frecuencias naturales, formas modales y parámetros asociados a los componentes no lineales) se actualizan adecuadamente en este escenario.
- (f) No se observan diferencias significativas, en términos de las distribuciones a posteriori, entre los casos “All” y “Spans”.
- (g) Los valores de evidencia obtenidos en diferentes ejecuciones para el caso “All” son mayores que para el caso “Spans”, debido a que el segundo posee significativamente menos información que el primero.

---

## Capítulo 9

---

# CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado de manera efectiva la implementación de actualización Bayesiana mediante métodos de confiabilidad estructural para la identificación de parámetros en todos los problemas de aplicación evaluados usando el método Metropolis como el Hamiltoniano. El enfoque se validó inicialmente en un problema de prueba con resultados analíticos para demostrar su fiabilidad. Esta validación fue crucial, ya que estableció una base sólida para abordar problemas de mayor complejidad. Al demostrar la convergencia a los valores teóricos, se confirmó la efectividad del enfoque y fue posible avanzar hacia problemas más realistas.

En el segundo problema, se definió con mayor claridad la medición disponible, siendo esta las frecuencias naturales del sistema para identificar las rigideces. Desde el punto de vista algebraico, se podrían obtener los valores exactos, que en este caso corresponden a dos puntos en las que se intersectan dos hipérbolas. Tal como se reflejó en la concentración de los parámetros a posteriori en dos grupos. Como resultado, ambos métodos demostraron ser efectivos en la resolución del problema de identificación.

En el tercer problema, que involucra un carro empujado por una fuerza, la complejidad radica en los parámetros a identificar, y en la entrega de mediciones en el dominio del tiempo que además son afectadas por errores de medición. A pesar de estos desafíos, cada parámetro, incluido el nivel de error en la predicción, se logra identificar gracias a la formulación empleada. Es importante resaltar que las respuestas fueron procesadas en un software externo, lo que destaca la robustez y generalidad de este tipo de métodos para ser integrados con diversas herramientas de simulación utilizadas en ingeniería.

Para el cuarto problema de aplicación, asociado a un edificio a corte, se abordó un caso de

alta dimensionalidad con mediciones en el dominio del tiempo. Se buscó explorar cómo se comportan los casos en que los parámetros de identificación no se limitan a un único valor, sino que, para este caso, se traten de distintas combinaciones entre las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento. Esto resultó en que los parámetros actualizados, en general, no convergieran a los valores objetivos. Sin embargo, lograron reproducir las mismas mediciones, ya que, para la función de verosimilitud ambos casos son indistinguibles al poseer la misma plausibilidad. También se observó que las frecuencias naturales identificadas son prácticamente las mismas, lo cual es esperado, ya que, el registro de aceleraciones generado por una excitación basal puede obtenerse sólo con los parámetros modales.

En el último problema de aplicación, se abordó un puente con aisladores basados en fricción, lo que añade una complejidad adicional debido a su naturaleza no lineal. Se actualizaron los parámetros utilizando dos conjuntos de mediciones, resultando en la identificación de los mismos parámetros. Sin embargo, este proceso resalta una consideración importante: aunque aumentar la evidencia puede ser beneficioso, algunos parámetros pueden tener poca relevancia en la generación de mediciones disponibles, lo que dificulta su identificación precisa, y también que algunas mediciones poseen una mayor relevancia y son más sensibles a algún cambio en los parámetros, por lo que, agregar mediciones poco sensibles a estos no ayudará.

Por lo tanto, al monitorear la integridad de una estructura, es crucial tener conocimientos previos sobre la relevancia de cada parámetro en relación con las mediciones utilizadas para actualizarlo. Cumplir con este criterio aumenta la probabilidad de obtener valores precisos para los parámetros estructurales. En el caso específico mencionado, se identificaron con éxito las rigideces de la cubierta, el módulo de reacción de la subrasante para los primeros metros, la fricción inicial en los dispositivos de disipación y el error de predicción, lo que resalta la importancia de comprender la relevancia de cada parámetro en el proceso de identificación.

Además, es importante destacar que en todas las aplicaciones se alcanzaron los máximos valores de verosimilitud y en otros casos los máximos valores referenciales. Este logro simboliza que en cada ejecución con ambos métodos se exploraron de manera precisa las regiones asociadas a cada distribución a posteriori, lo que confirma la robustez del algoritmo tanto en la generación de muestras, como en la detención de la misma. Este dato adicional subraya aún más la confiabilidad y la eficacia de los métodos empleados en este estudio.

En base a todo lo anterior, se puede concluir que la formulación BUS aplicada con ambos métodos de identificación de parámetros es altamente confiable, y que el método de detención aplicado logra converger la distribución a posteriori deseada en cada caso.

---

# Apéndice A

---

## SUBSET SIMULATION

Este apéndice describe el subset simulation, el método de simulación estocástica considerado en este trabajo para llevar a cabo la generación de muestras según la distribución a posteriori correspondiente de cada aplicación.

Se discute la idea básica del algoritmo, se describen sus principales características y se proporcionan los algoritmos utilizados para la generación de muestras condicionales.

### A.1 Idea principal

Subset simulation [5, 10, 27, 27–29] se basa en descomponer la región de falla  $F$  en  $m$  secuencias de *eventos de falla intermedios* anidadas  $F_\kappa = 1, \dots, m$  tal que

$$F = F_m \subset F_{m-1} \subset \dots \subset F_2 \subset F_1 = \bigcap_{\kappa=1}^m F_\kappa \quad (\text{A.1.1})$$

lo cual permite calcular la probabilidad de falla  $P_F$  como

$$P_F = P(F) = P(F_1) \times \prod_{\kappa=2}^m P(F_\kappa | F_{\kappa-1}) \quad (\text{A.1.2})$$

Nótese que la probabilidad de falla  $P_F$  se calcula ahora en términos de la probabilidad de falla no condicionada  $P(F_1)$  y las probabilidades de falla condicionales  $P(F_\kappa | F_{\kappa-1})$ ,  $\kappa = 2, \dots, m$ . Una definición apropiada de la secuencia de eventos de falla intermedios permite calcular estas cantidades de manera muy eficiente con técnicas de muestreo. En este con-

texto, deben abordarse dos problemas prácticos principales para implementar esta técnica de simulación: (1) la definición de los eventos de falla intermedios y (2) la generación de muestras condicionales a dichos eventos de falla intermedios. Estos temas se discuten en las siguientes secciones.

En este apéndice, se asume que los parámetros inciertos son variables aleatorias gaussianas estándar independientes,  $\theta \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$ . Esta suposición no representa ninguna pérdida de generalidad, ya que las técnicas de transformación disponibles permiten el mapeo desde el espacio gaussiano estándar al espacio de parámetros físicos [30, 31].

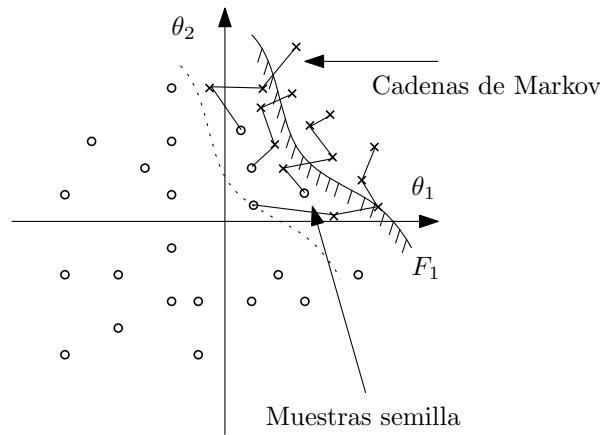


Figura A.1: Ejemplo de generación de cadenas de Markov durante subset simulation - dos eventos

## A.2 Definición de eventos de falla intermedios

El evento de falla intermedia  $F_\kappa$  se define en términos del nivel de umbral intermedio  $\mu_\kappa^*$  como

$$F_\kappa = \{\theta \in \Omega_\theta : \mu(\theta) < \mu_\kappa^*\}, \quad \kappa = 1, \dots, m \quad (\text{A.2.1})$$

La selección de los eventos de falla intermedia, que en realidad es la definición de los niveles de umbral intermedios, tiene un impacto significativo en el rendimiento del método. En la implementación estándar [5, 8, 32], que es la considerada aquí, los niveles de umbral intermedios se definen de forma adaptativa de modo que las probabilidades de falla condicionales sean iguales a un valor preestablecido. Es decir, los eventos de falla intermedia verifican  $P(F_1) = P(F_\kappa | F_{\kappa-1}) = p_0, \kappa = 2, \dots, m$ , donde el parámetro  $p_0$  se llama probabilidad de falla condicional. Cálculos de validación muestran que la elección de cualquier valor de  $p_0$  entre 0.1 y 0.3 llevará a una eficiencia similar siempre y cuando el subset simulation se

implemente correctamente [5, 33].

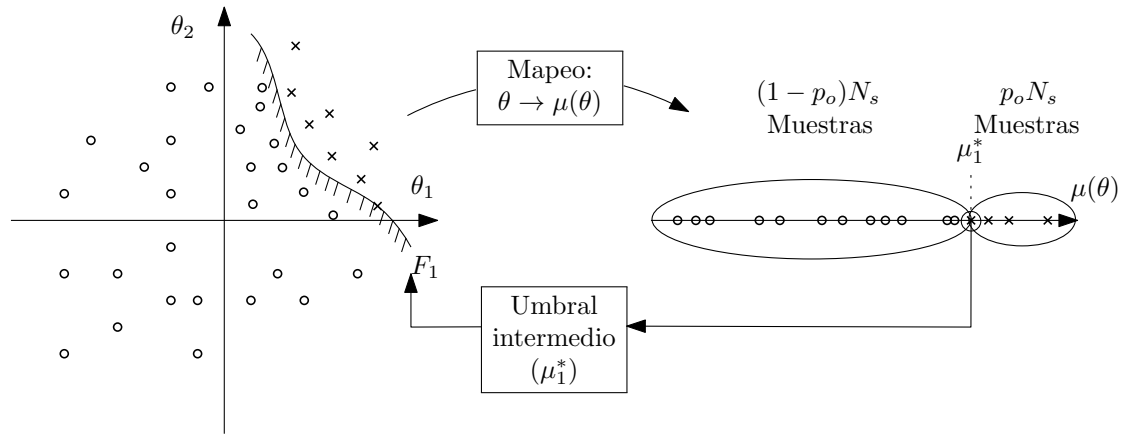


Figura A.2: Definición del primer evento de falla intermedia ( $F_1$ ). Los eventos de falla intermedia subsiguientes siguen la misma idea

En este trabajo, se implementa un tamaño de muestra constante  $N_s$ , es decir,  $N_\kappa = N_s, \kappa = 1, \dots, m$ . Ahora, considere el conjunto de muestras  $\{\theta_{\kappa-1,i} : i = 1, \dots, N_s\}$  generadas durante la  $\kappa$ -ésima etapa de subset simulation. Los valores correspondientes de la función de desempeño [34] son  $\{\mu(\theta_{\kappa-1,i}) : i = 1, \dots, N_s\}$ . Entonces, el nivel de umbral  $\mu_\kappa^*$  asociado al evento de falla intermedia  $F_\kappa$  se define como el  $(p_0 N_s)$ -ésimo valor más grande de este último conjunto. De esta manera, hay  $p_0 N_s$  muestras que se encuentran en el dominio de falla intermedia  $F_\kappa$  y se cumple  $P(F_\kappa | F_{\kappa-1}) = p_0$ . Esto se representa esquemáticamente en la Figura A.2.

## METROPOLIS-HASTINGS

Este apéndice detalla el uso del algoritmo de Metropolis-Hastings para generar muestras distribuidas de acuerdo con una función de densidad de probabilidad condicionada a una función de desempeño o región de falla.

### B.1 Muestreo condicional

Para generar muestras distribuidas de acuerdo a una función de densidad de probabilidad condicionada a cualquier función de desempeño o región de falla, se puede aplicar el algoritmo de Metropolis-Hastings [3, 35]. El algoritmo de Metropolis originalmente formulado no puede ser implementado directamente en problemas que involucren un alto número de variables aleatorias. Por esta razón, se propuso una versión modificada del algoritmo que es aplicable a estos problemas, la cual se presenta a continuación [8].

- 1. Determinar el número  $N_s$  de muestras a generar.
- 2. Escoger una muestra de falla. Dicha muestra pasa a ser  $z_F^{(1)}$ . Evidentemente,

$$I_F(z_F^{(1)}) = 1 \tag{B.1.1}$$

- 3. Se escoge un parámetro  $\chi$  que controla la amplitud de la distribución uniforme que se utiliza para generar muestras candidatas.
- 4. Para  $j = 2, \dots, N_s$

- (a) Se genera un vector  $\mathbf{u}_1$  uniformemente distribuido entre -1 y 1 de igual dimensión que  $z$ .
- (b) Se calcula el vector  $\tilde{z}$  según la fórmula

$$\tilde{z}_i = z_{F,i}^{(j-1)} + \chi u_{1,i}, i = 1, \dots, n_z \quad (\text{B.1.2})$$

donde  $n_z$  es el número de variables aleatorias involucradas en el problema (es decir, la dimensión del vector  $z$  es  $n_z$ );  $z_{F,i}^{(j-1)}$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $z_F^{(j-1)}$ ; y  $u_{1,i}$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{u}_1$ .

- (c) Se calculan los cuocientes

$$r_i = \frac{f_z(\tilde{z}_i)}{f_z(z_{F,i}^{(j-1)})}, i = 1, \dots, n_z \quad (\text{B.1.3})$$

donde  $\tilde{z}_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\tilde{z}$  y  $f_z(\cdot)$  su función de densidad de probabilidad.

- (d) Se genera un vector  $\mathbf{u}_2$  compuesto de números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1. El vector debe tener una dimensión igual a la del vector  $z$ .
- (e) La muestra candidata  $z_c$  se selecciona según el siguiente criterio:

$$z_{c,i} = \begin{cases} \tilde{z}_i & \text{si } \min(r_i, 1) \geq u_{2,i} \\ z_{F,i}^{(j-1)} & \text{si } \min(r_i, 1) < u_{2,i} \end{cases}, i = 1, \dots, n_z \quad (\text{B.1.4})$$

donde  $z_{c,i}$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{z}_c$  y  $u_{2,i}$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{u}_2$ .

- (f) Se verifica si es que  $z_c$  corresponde a una muestra de falla. Dicha verificación define la próxima muestra que se selecciona para la cadena de Markov. En términos matemáticos, dicha selección se realiza de la siguiente manera

$$z_F^{(j)} = \begin{cases} z_c & \text{si } I_F(z_c) = 1 \\ z_F^{(j-1)} & \text{si } I_F(z_c) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1.5})$$

- (g) Se continua para  $j = j + 1$

## B.2 Actualización parámetro de dispersión

Un importante aspecto de subset simulation es la definición de la *proposal distribution*. En concreto, el parámetro de dispersión  $\chi$  de la distribución uniforme, que afecta el rendimiento del proceso de simulación. Este parámetro afecta el tamaño de la región que cubre las muestras de la cadena de Markov, y por lo tanto, la eficiencia del método. Si  $\chi$  es demasiado pequeño, las muestras estarán muy próximas entre sí, dando lugar a cadenas de Markov muy correlacionadas que empeoran la calidad de la estimación de la probabilidad de falla. Por otra parte, si el parámetro  $\chi$  es demasiado grande, es probable que disminuya la tasa de aceptación, aumentando así el número de muestras repetidas de la cadena de Markov y ralentizando la convergencia. De modo que la elección del parámetro  $\chi$  es un intercambio entre la tasa de aceptación y la correlación debido a la proximidad. La experiencia práctica indica que la tasa de rechazo óptima oscila aproximadamente entre 50 % y 70 % [5]. . En este contexto, la presente aplicación implica una definición adaptativa del parámetro de dispersión. Es decir, el valor de  $\chi$  se reduce o aumenta durante la simulación en función de si la tasa de rechazo  $R$  se encuentra en el intervalo  $[R_L, R_U]$ , donde  $R_L$  y  $R_U$  son los límites inferior y superior de la tasa de rechazo. En concreto, después de que se hayan generado  $N_{mc} < p_0 N_s$  cadenas de Markov, se calcula la tasa de rechazo observada  $R^*$  asociada a estas cadenas y, a continuación, se puede aumentar el parámetro de dispersión  $\chi$  (si  $R^* < R_L$ ) o disminuirlo (si  $R^* > R_U$ ). El siguiente procedimiento se incluye en la  $\kappa$ -ésima etapa ( $\kappa = 2, \dots, m$ ) de subset simulation para actualizar el parámetro de dispersión.

1. Establecer  $\chi = 1$ .
2. Generar  $N_{mc}$  cadenas de Markov de longitud  $1/p_0$ . Calcular el número total de rechazos de muestras candidatas obtenidas en estas cadenas,  $N_R$ , y la tasa media de rechazo como  $R^* = N_R / (N_{mc}/p_0)$ .
3. Si  $R^* > R_U$ , dejar  $\chi \leftarrow \gamma_1 \times \chi$ . Si  $R^* < R_L$ , dejar  $\chi \leftarrow \gamma_2 \times \chi$ .
4. Si el número total de muestras necesarias para la etapa actual ( $N_s$ ) se ha generado, continúe con la etapa siguiente. En caso contrario, vuelva al paso 2.

En el procedimiento anterior,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los factores de actualización. Esta configuración conduce a un total de  $N_g = N_s p_0 / N_{mc}$  pasos para actualizar el parámetro de dispersión durante cada etapa. Dentro de cada implementación usando este procedimiento se utilizó  $\gamma_1 = 0.8$ ,  $\gamma_2 = 1.2$ ,  $R_U = 70\%$  y  $R_L = 50\%$ .

---

# Apéndice C

---

## HAMILTONIAN MONTE CARLO

Este apéndice detalla el uso del algoritmo Hamiltonian Monte Carlo, que utiliza la mecánica Hamiltoniana para simular el movimiento de partículas en el espacio de fase, generando muestras distribuidas de acuerdo con la función de densidad de probabilidad deseada,

### C.1 Derivación del método

El método Hamiltoniano es una poderosa técnica utilizada en física y mecánica estadística para simular sistemas complejos. Esta metodología combina la mecánica Hamiltoniana con la estadística para muestrear configuraciones del sistema de acuerdo con la distribución de probabilidad deseada [4].

La idea principal del método Hamiltoniano es considerar las muestras como las posiciones de una partícula en un espacio físico, donde en diferentes instantes estas posiciones seguirían la forma de la función de distribución deseada. Sin embargo, para lograr esto, es necesario que estas partículas también tengan movimiento, es decir, momentos asociados. Por lo tanto, se postula en la mecánica estadística que la probabilidad de tener una posición  $q$  dado un momento  $p$  depende de la energía del sistema. Cuanto menor sea la energía, más probable es que la partícula esté en esa configuración, siguiendo la siguiente relación

$$\pi(q, p) = \frac{1}{Z} e^{-H(q, p)} \tag{C.1.1}$$

Donde  $H(q, p)$  es el hamiltoniano del sistema y  $Z$  es una constante de normalización. Siguiendo el teorema de Bayes, la función de distribución conjunta anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$\pi(q, p) = \pi(q)\pi(p|q) \quad (\text{C.1.2})$$

Donde  $\pi(q)$  es la función de distribución que se busca modelar y  $\pi(p|q)$  es la distribución de momentos dada la posición de la partícula.

Igualando ambas expresiones y aplicando el logaritmo natural a ambas, se obtiene

$$-H(q, p) = \log(\pi(q)) + \log(\pi(p|q)) \quad (\text{C.1.3})$$

Dado que  $H(q, p)$  es el hamiltoniano y representa la suma de la energía potencial y la energía cinética, se tiene

$$-(V(q) + K(q, p)) = \log(\pi(q)) + \log(\pi(p|q)) \quad (\text{C.1.4})$$

Como se puede apreciar la función asociada la energía cinética puede tomar infinitas configuraciones, sin embargo, se puede optar por la versión más simple de ella, es decir

$$-(V(q) + \frac{p^T M^{-1} p}{2}) = \log(\pi(q)) + \log(\pi(p|q)) \quad (\text{C.1.5})$$

De esta relación, se puede relacionar cada término energético con cada función de distribución

$$V(q) = -\log(\pi(q)) \quad (\text{C.1.6})$$

Por lo tanto, se puede inferir que el potencial depende de la función de distribución que se busca modelar.

$$\frac{p^T M^{-1} p}{2} = -\log(\pi(p|q)) \quad (\text{C.1.7})$$

Asumiendo que la matriz  $M$  es la identidad, se puede ver que la función que describe el momento de la partícula sigue una distribución normal  $p \sim N(0, I)$ .

Finalmente, para resolver el problema, se deben seguir las ecuaciones de Hamilton, que son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

Entre las soluciones analíticas más sencillas, se puede definir que la función de distribución asociada al potencial sea una distribución normal. En este caso, las ecuaciones diferenciales quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q\end{aligned}\tag{C.1.9}$$

Cuya solución es

$$q(t) = p_0 \sin(t) + q_0 \cos(t)\tag{C.1.10}$$

$$p(t) = p_0 \cos(t) - q_0 \sin(t)\tag{C.1.11}$$

Estas soluciones proporcionan una descripción dinámica de cómo evolucionan las posiciones y los momentos de las partículas en el sistema a lo largo del tiempo, lo que es fundamental para comprender su comportamiento y propiedades físicas.

## C.2 Muestreo condicional

Para generar muestras distribuidas de acuerdo a una función de densidad de probabilidad condicionada a cualquier función de desempeño o región de falla, se puede aplicar el algoritmo Hamiltoniano. El cual se basa en generar pares de posición y momento para emular un sistema dinámico, el cual evoluciona a partir de un potencial relacionado con la función de distribución escogida para la generación de muestras, siendo en este caso en particular la distribución normal estándar [6, 7, 12].

1. Determinar el número  $N_s$  de muestras a generar.
2. Escoger una muestra de falla y un momento de la misma dimensión. Dicha muestra pasa a ser  $u_F^{(1)}$  y el momento  $P^{*(1)}$ . Evidentemente,

$$I_F(u_F^{(1)}) = 1\tag{C.2.1}$$

3. Se escoge un parámetro  $t_f$  y  $\alpha$  para controlar la posición y el momento.
4. Para  $j = 2, \dots, N_s$

(a) Se genera un  $P_{initial}$ , tal que

$$P_{initial} \sim N(0, I) \quad (C.2.2)$$

(b) Se calcula el siguiente momento,

$$P^{(j-1)} = \alpha P^{*(j-1)} + \sqrt{1 - \alpha^2} P_{initial} \quad (C.2.3)$$

$\alpha = 0 \implies$  Cada trayectoria con diferentes  $P_{initial}$

$\alpha = 1 \implies$  Usa el  $P^*$  anterior

(c) Se calcula la posición y momento de la muestra candidata como:

$$q^*(t_f) = P^{(j-1)} \sin(t_f) + q_F^{(j-1)} \cos(t_f) \quad (C.2.4)$$

$$P^*(t_f) = P^{(j-1)} \cos(t_f) - q_F^{(j-1)} \sin(t_f) \quad (C.2.5)$$

$$t_f = \text{Tuning parameter} \quad (C.2.6)$$

$t_f$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$q^*$	$q_F^{(j-1)}$	$P^{(j-1)}$	$-q_F^{(j-1)}$	$-P^{(j-1)}$	$q_F^{(j-1)}$

(d) Se verifica si es que  $q^*$  corresponde a una muestra de falla. Dicha verificación define la próxima muestra que se selecciona para la cadena de Markov. En términos matemáticos, dicha selección se realiza de la siguiente manera

$$q_F^{(j)} = \begin{cases} q^* & \text{si } I_F(q^*) = 1 \\ q_F^{(j-1)} & \text{si } I_F(q^*) = 0 \end{cases} \quad (C.2.7)$$

$$P^{*(j)} = \begin{cases} P^* & \text{si } I_F(q^*) = 1 \\ P^{*(j-1)} & \text{si } I_F(q^*) = 0 \end{cases} \quad (C.2.8)$$

(e) Se continua para  $j = j + 1$

En la implementación de este algoritmo el valor del parámetro  $\alpha$  será 0, para todas las etapas.

### C.3 Regla adaptativa para seleccionar $t_f$

Para cada etapa de subset simulation se tiene  $p_o N_s$  muestras, que serán las semillas para la cadena de Markov, la que se subdividen en  $N_E$  etapas intermedias con  $N_a$  cadenas cada una para la siguiente etapa, es decir, que la cantidad de etapas intermedias son  $N_E = p_o N_s / N_a$ . Para cada etapa intermedia con  $N_a$  cadenas se calcula la tasa de aceptación  $a$ .

$$N_a = 10, 20, 50, \text{ etc.}$$

Se inicializa con  $t_f = \frac{\pi}{4}$

Para  $j = 2, \dots, N_E$

**Si**  $a < 0.3$

$$t_f^{(j)} = \arcsin(\sin(t_f^{(j-1)}) \exp(\frac{a - 0.3}{2}))$$

Tasa de aceptación baja  $\implies t_f$  se reduce

**Si**  $a > 0.5$

$$t_f^{(j)} = \arcsin(\sin(t_f^{(j-1)}) \exp(\frac{a - 0.5}{2}))$$

Tasa de aceptación alta  $\implies t_f$  se incrementa

---

# Referencias

---

- [1] K.V. Yuen. *Bayesian methods for structural dynamics and civil engineering*. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] S.-K. Au and J.L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4):263–277, 2001.
- [3] Nicholas Metropolis, Arianna W Rosenbluth, Marshall N Rosenbluth, Augusta H Teller, and Edward Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
- [4] Michael Betancourt. A conceptual introduction to hamiltonian monte carlo. *arXiv preprint arXiv:1701.02434*, 2017.
- [5] Konstantin M Zuev, James L Beck, Siu-Kui Au, and Lambros S Katafygiotis. Bayesian post-processor and other enhancements of subset simulation for estimating failure probabilities in high dimensions. *Computers & structures*, 92:283–296, 2012.
- [6] Simon Duane, Anthony D Kennedy, Brian J Pendleton, and Duncan Roweth. Hybrid monte carlo. *Physics letters B*, 195(2):216–222, 1987.
- [7] Radford M Neal et al. Mcmc using hamiltonian dynamics. *Handbook of markov chain monte carlo*, 2(11):2, 2011.
- [8] Siu-Kui Au and James L Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic engineering mechanics*, 16(4):263–277, 2001.
- [9] S.-K. Au and E. Patelli. Rare event simulation in finite-infinite dimensional space. *Reliability Engineering & System Safety*, 148(Supplement C):67 – 77, 2016.
- [10] Siu Kui Au, J Ching, and JL Beck. Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems. *Structural safety*, 29(3):183–193, 2007.

- 
- [11] Panagiotis Angelikopoulos, Costas Papadimitriou, and Petros Koumoutsakos. X-tmcmc: Adaptive kriging for bayesian inverse modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289:409–428, 2015.
- [12] Ziqi Wang, Marco Broccardo, and Junho Song. Hamiltonian monte carlo methods for subset simulation in reliability analysis. *Structural Safety*, 76:51–67, 2019.
- [13] FA DiazDelaO, A Garbuno-Inigo, SK Au, and I Yoshida. Bayesian updating and model class selection with subset simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317:1102–1121, 2017.
- [14] Daniel Straub and Iason Papaioannou. Bayesian updating with structural reliability methods. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(3):04014134, 2015.
- [15] Wolfgang Betz, James L Beck, Iason Papaioannou, and Daniel Straub. Bayesian inference with reliability methods without knowing the maximum of the likelihood function. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 53:14–22, 2018.
- [16] James L Beck and Siu-Kui Au. Bayesian updating of structural models and reliability using markov chain monte carlo simulation. *Journal of engineering mechanics*, 128(4):380–391, 2002.
- [17] Seismo-VLAB: An open-source finite element software for meso-scale simulations. <https://seismovlab.com/>, s.f. Seismo-VLAB se distribuye bajo los términos de la Licencia Pública General de GNU (GPL) v3. Consulta la Licencia Pública General de GNU para obtener más detalles: <http://www.gnu.org/licenses>.
- [18] HA Jensen, C Vergara, C Papadimitriou, and E Millas. The use of updated robust reliability measures in stochastic dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267:293–317, 2013.
- [19] Danko J Jerez, Hector A Jensen, and Michael Beer. An effective implementation of reliability methods for bayesian model updating of structural dynamic models with multiple uncertain parameters. *Reliability Engineering & System Safety*, 225:108634, 2022.
- [20] HA Jensen, F Mayorga, and MA Valdebenito. On the reliability of structures equipped with a class of friction-based devices under stochastic excitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 364:112965, 2020.
-

- 
- [21] Giuseppe Lomiento, Noemi Bonessio, and Gianmario Benzoni. Friction model for sliding bearings under seismic excitation. *Journal of Earthquake Engineering*, 17(8):1162–1191, 2013.
- [22] Gianmario Benzoni and Frieder Seible. Design of the caltrans seismic response modification device (srmd) test facility. Technical report, 1998.
- [23] Gaël Bondonet and André Filiatrault. Frictional response of ptfе sliding bearings at high frequencies. *Journal of Bridge Engineering*, 2(4):139–148, 1997.
- [24] Mauro Dolce, Donatello Cardone, and F Croatto. Frictional behavior of steel-ptfe interfaces for seismic isolation. *Bulletin of earthquake engineering*, 3:75–99, 2005.
- [25] Michalakis C Constantinou, Panos Tsopelas, Amarnath Kasalanati, and Eric D Wolff. *Property modification factors for seismic isolation bearings*. Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research Buffalo, NY, 1999.
- [26] Miroslav Pastor, Michal Binda, and Tomáš Harčarik. Modal assurance criterion. *Procedia Engineering*, 48:543–548, 2012.
- [27] Feng Miao and Michel Ghosn. Modified subset simulation method for reliability analysis of structural systems. *Structural Safety*, 33(4-5):251–260, 2011.
- [28] J Ching, James L Beck, and SK Au. Hybrid subset simulation method for reliability estimation of dynamical systems subject to stochastic excitation. *Probabilistic engineering mechanics*, 20(3):199–214, 2005.
- [29] Jianye Ching, Siu-Kui Au, and James L Beck. Reliability estimation for dynamical systems subject to stochastic excitation using subset simulation with splitting. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(12-16):1557–1579, 2005.
- [30] Pei-Ling Liu and Armen Der Kiureghian. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic engineering mechanics*, 1(2):105–112, 1986.
- [31] Loren D Lutes and Shahram Sarkani. *Random vibrations: analysis of structural and mechanical systems*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [32] Siu-Kui Au and Yu Wang. *Engineering risk assessment with subset simulation*. John Wiley & Sons, 2014.
-

- 
- [33] Enrico Zio. From complexity science to reliability efficiency: a new way of looking at complex network systems and critical infrastructures. *International journal of critical infrastructures*, 3(3-4):488–508, 2007.
- [34] GI Schueller. On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Computers & structures*, 85(5-6):235–243, 2007.
- [35] W Keith Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. 1970.