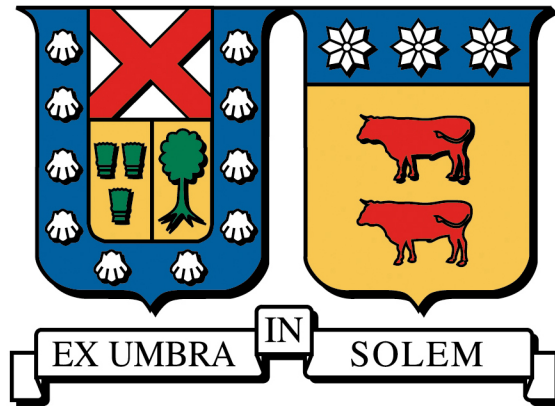


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO, CHILE



Propiedades variacionales del Conjunto de Umbrales Sustentables para sistemas de control a tiempo continuo

Tesis presentada por:

Alonso Salvador CARRASCO URBINA

Director de Tesis:

Cristopher HERMOSILLA JIMÉNEZ

*Como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias
Mención Matemática y al título profesional de Ingeniero Civil Matemático*

Julio 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Propiedades Variacionales del Conjunto de Umbrales Sustentables en sistemas de control a tiempo continuo

Nombre del candidato(a): Alonso Salvador Carrasco Urbina

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Matemática / Magíster en Ciencias Mención Matemáticas

Campus: Casa Centra

Departamento: Departamento de Matemática (Dmat)

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Christopher A. Hermosilla Jiménez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 13/10/2025

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 13/10/2025

Firma:

TÍTULO DE LA TESIS:

Propiedades variacionales del Conjunto de Umbrales Sustentables para sistemas de control a tiempo continuo.

AUTOR: Alonso Salvador Carrasco Urbina

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes	Institución	Firma
1)		_____
2)		_____
3)		_____

Valparaíso, julio 2025.

RESUMEN

En esta tesis se estudia el Conjunto de Umbrales Sustentables para sistemas de control desde el punto de vista del análisis variacional. Este conjunto corresponde a una colección de parámetros para las cuales se garantiza, dada una condición inicial, el cumplimiento de restricciones de control y estado durante un período de tiempo establecido. El objetivo es estudiar propiedades del Conjunto de Umbrales Sustentables cuando este es visto como una multifunción del estado inicial del sistema. La novedad de este trabajo consiste en que el análisis es realizado en el contexto de los sistemas de control a tiempo continuo, extendiendo resultados recientes reportados para sistemas en tiempo discreto. Haciendo uso de herramientas provenientes de la teoría de inclusiones diferenciales, se establecen condiciones bajo las cuales el Conjunto de Umbrales Sustentables define una multifunción cerrada. Asimismo, se investigan propiedades de convexidad de dicha multifunción usando resultados recientes del análisis de monotonía para sistemas dinámicos no lineales. Finalmente, se estudian las propiedades de continuidad de esta multifunción, con énfasis en la semicontinuidad inferior y la Lipschitz continuidad. Como un tema adicional de carácter exploratorio, se realizaron simulaciones numéricas basadas en un modelo de ejemplo sobre un sistema económico, las cuales ilustran varios de los aspectos computacionales asociados al tema.

ABSTRACT

In this thesis we investigate, from a variational analysis standpoint, the so-called *Set of Sustainable Thresholds* associated with a given control system. This set corresponds to a certain collection of parameters that ensure, for a given initial state, that the pathwise constraints of the control systems are satisfied within a prescribed period of time. Our goal is to study properties of the Set of Sustainable Thresholds when it is seen as a set-valued map that depends on the initial state of the control system. The novelty of this work is that our analysis is carried out in the context of continuous-time control systems, extending recent developments reported for the discrete-time framework. Using tools from differential inclusions, we establish conditions for ensuring that the Set of Sustainable Thresholds defines a closed set-valued map. Furthermore, we investigate convexity properties of this set-valued map by using some recent developments in monotonicity analysis for nonlinear dynamical systems. Finally, we study continuity properties of this set-valued mapping, with emphasis on lower semicontinuity and Lipschitz continuity. Additionally, we carry out numerical simulations based on an example from economics that gives insight into the computational aspects of the topic.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	4
1.1. Motivación e introducción al problema	4
1.2. Estado del arte y contribuciones	7
1.3. Herramientas matemáticas	8
1.3.1. Nociones de continuidad para multifunciones	8
1.3.2. Teoría de Inclusiones Diferenciales	10
1.3.3. Propiedades de monotonía para Sistema Dinámicos	12
2. Discusión de resultados	14
2.1. Propiedades Topológicas	14
2.2. Propiedades Estructurales	18
2.3. Propiedades de Continuidad	20
3. Simulaciones	21
3.1. Planteamiento del modelo	21
3.2. Enfoque computacional	22
3.3. Primer caso: recurso no esencial	23
3.4. Segundo caso: recurso débilmente esencial	26
4. Conclusiones	30
Apéndice	34

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación e introducción al problema

En este trabajo se realiza un estudio acerca del *Conjunto de Umbrales Sustentables* definido para sistemas de control a tiempo continuo. El objetivo principal es el de establecer y demostrar, en este nuevo contexto, propiedades análogas a las estudiadas en [17] para sistemas de control en tiempo discreto.

El conjunto de umbrales sustentables, presentado por primera vez en [24] para sistemas a tiempo continuo, fue introducido como una herramienta para establecer criterios cuantitativos que caractericen la sustentabilidad dentro de un sistema de control. Entenderemos por *sistema de control* a cualquier sistema cuya evolución en el tiempo pueda verse influenciada tanto por sus propias dinámicas internas como por acciones externas de decisión. Este tipo de sistemas puede modelar fenómenos que incorporen factores de diversa índole —tales como ecológicos, económicos o sociales— en los cuales las variables de interés, además de evolucionar naturalmente, pueden ser influenciadas por acciones externas con el fin de modificar sus valores a futuro.

En términos matemáticos, este tipo de sistemas se describe mediante un vector de *variables de estado* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que representa aquellas características dinámicas del sistema sobre las cuales no se puede ejercer un control directo. Adicionalmente, se incluye en el modelado un vector de *variables de control* $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ para incorporar las decisiones o acciones que pueden ser tomadas deliberadamente con tal de influir en el comportamiento del sistema.

La relación entre estos dos tipos de variables se describe mediante una función de *dinámica*, la cual describe la evolución de las variables de estado en base al tiempo, el estado actual y las variables de control escogidas. En específico, a lo largo de este trabajo se considerará el siguiente problema de Cauchy con control para describir los modelos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \text{c.t.p } t \in [0, T], \\ x(0) = \xi, \\ u: [0, T] \rightarrow \mathbf{U} \text{ una función medible,} \end{cases} \quad (1.1)$$

en donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ representa el estado inicial del sistema y $T > 0$ es un horizonte finito de tiempo. Adicionalmente, denotaremos por \mathcal{U} al conjunto de funciones medibles $u: [0, T] \rightarrow \mathbf{U}$. Este conjunto representará todas las posibles elecciones para función de control.

En este tipo de sistemas, el objetivo consiste en encontrar una función de control $u \in \mathcal{U}$ adecuada que guíe la evolución del sistema conforme a ciertos criterios preestablecidos, los cuales suelen expresarse mediante una función objetivo a optimizar. No obstante, uno de los principales desafíos en el ámbito de la economía sustentable es precisamente el de definir criterios concretos sobre lo que se entiende por sustentabilidad. Esta suele definirse como “la capacidad de satisfacer las necesidades del presente sin comprometer las posibilidades de las generaciones futuras para satisfacer las suyas”, por lo que invariablemente se asocia con la idea de la “conservación” de recursos y con el cumplimiento de ciertas “cuotas” económicas. Sin embargo, en ausencia de criterios específicos que precisen su significado, la sustentabilidad corre el riesgo de reducirse, en la práctica, a un mero compromiso ambiguo.

Para abordar esta problemática, se han aplicado numerosas ideas provenientes de la *Teoría de la Viabilidad* (véase [2] como referencia clásica sobre el tema). Dentro de este marco, Martinet en [24] se apoya en el uso de *indicadores* cuantitativos que reflejen diferentes aspectos relacionados con la sustentabilidad de un sistema. Como se discute en [31], el uso de indicadores de este tipo es común y cumple múltiples funciones. Estos se pueden clasificar, en términos generales, en indicadores sociales, económicos, medioambientales o institucionales. Siguiendo las recomendaciones establecidas en [23], los indicadores seleccionados debiesen de revelar información útil, tanto para los gestores como para las partes implicadas en el sistema, que permita realizar comparaciones y clasificaciones a la hora de evaluar diferentes estrategias de gestión.

Para los propósitos de este trabajo, se modelarán tales indicadores por medio de un conjunto de funciones $g_i: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$; y serán incorporados dentro del sistema (1.1) por medio de restricciones de desigualdad de la forma

$$g_i(x_\xi^u(t), u(t)) \leq c_i \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

en donde $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ corresponde a un *vector de umbrales* y $x_\xi^u \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ denota (en caso de existir y ser única) a la solución del problema (1.1). Habitualmente, se usará la notación más compacta

$$g(x_\xi^u(t), u(t)) \leq c \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \tag{1.2}$$

en donde $g(t, x, u) = (g_1(t, x, u), \dots, g_m(t, x, u))$ y la desigualdad se entiende componente a componente. Martinet, en [24], aborda el problema de establecer criterios de sustentabilidad mediante el uso de este tipo de umbrales, los cuales él interpreta como niveles mínimos (de alguna cantidad beneficiosa) que se deben garantizar a lo largo del tiempo. En nuestro caso, estos umbrales serán interpretados como niveles máximos (de alguna cantidad nociva) que nunca se deben sobrepasar. No obstante, observe que ambas interpretaciones son equivalentes mediante un cambio de signo en el indicador. El enfoque de Martinet consiste, en primer lugar, en determinar el conjunto de todos los umbrales que pueden mantenerse de forma sostenible en el tiempo. A continuación, y solo después de esta etapa, se seleccionan los umbrales preferidos dentro de dicho conjunto, de acuerdo con un criterio de optimización definido *a posteriori*. Este enfoque —que pospone la optimización con el fin de maximizar el rendimiento considerando únicamente los umbrales previamente identificados como sostenibles— es lo que Martinet denomina la resolución de un *problema maximin generalizado*.

En concordancia con el enfoque maximin propuesto por Martinet, este trabajo se centra en la etapa de identificación de umbrales sustentables. De esta forma, el foco estará puesto en modelos matemáticos que reúnen la ecuación dinámica (1.1) con las restricciones de desigualdad (1.2),

dando paso al siguiente tipo de *sistema de control con restricciones*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{c.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = \xi, \\ u: [0, T] \rightarrow \mathbf{U} \text{ una función medible,} \\ \text{sujeto a } g(x(t), u(t)) \leq c & \text{c.t.p. } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Definimos el Conjunto de Umbrales Sustentables asociado a este sistema con condición inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$ como

$$\mathbb{S}(\xi) := \left\{ c \in \mathbb{R}^m : \exists u \in \mathcal{U} \text{ tal que } g(t, x_\xi^u(t), u(t)) \leq c \text{ c.t.p. } t \in [0, T] \right\}. \quad (1.4)$$

En otras palabras, dado un estado inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$, el Conjunto de Umbrales Sustentables $\mathbb{S}(\xi)$ identifica todos aquellos umbrales para los cuales existe al menos una estrategia de control que permita respetar estas restricciones de desigualdad a lo largo de todo el horizonte de tiempo. El propósito de estudiar este conjunto no es el de optimizar (al menos, no inmediatamente), sino más bien el de evaluar la capacidad del sistema para alcanzar un equilibrio satisfactorio entre distintos objetivos de sustentabilidad, los cuales habitualmente se encuentran en conflicto entre sí. En lugar de establecer una jerarquía de prioridades o de agregar todos los objetivos en una única función objetivo —lo que podría introducir sesgos o generar controversias—, este enfoque considera de manera conjunta todas las configuraciones sostenibles posibles. Así, se adopta una perspectiva más holística de la sustentabilidad, centrada en la posibilidad de encontrar trayectorias que representen compromisos aceptables para todas las partes involucradas ([15]).

Cabe destacar que el enfoque adoptado en este trabajo para identificar metas de sustentabilidad a través del Conjunto de Umbrales Sustentables definido en (1.4) no ha sido muy explorado dentro del área de la Teoría de la Viabilidad. En contraste, gran parte de la atención se ha centrado en un objeto relacionado conocido como el *Kernel de Viabilidad*. Este último consiste, en un sentido matemático, en el objeto inverso del Conjunto de Umbrales Sustentables: mientras que el Kernel de Viabilidad responde a la pregunta de cuáles estados iniciales permiten cumplir un conjunto fijo de restricciones, el Conjunto de Umbrales Sustentables responde a cuáles umbrales son viables dada una condición inicial fija.

Sin embargo, y a pesar de estar intrínsecamente relacionado con el Kernel de Viabilidad, el Conjunto de Umbrales Sustentables ofrece ventajas significativas desde un punto de vista práctico. En primer lugar, posee una mayor capacidad de interpretación, ya que permite visualizar de forma directa las compensaciones entre distintos objetivos de sustentabilidad. Esto es especialmente útil en contextos con dos indicadores clave —por ejemplo, uno económico y otro ecológico—, donde el conjunto puede representarse fácilmente en el plano \mathbb{R}^2 , independientemente de la complejidad interna del sistema. Además, resulta más adecuado que el Kernel de Viabilidad en situaciones donde los tomadores de decisiones no controlan directamente el estado del sistema, pero sí pueden influir sobre los umbrales o cuotas de producción que este debe cumplir.

En conjunto, estas características posicionan al Conjunto de Umbrales Sustentables como una herramienta prometedora para la planificación de políticas sustentables, particularmente en contextos donde se deben equilibrar múltiples objetivos de sustentabilidad en conflicto.

1.2. Estado del arte y contribuciones

El Conjunto de Umbrales Sustentables fue definido inicialmente por V. Martinet en [24] para sistemas de control en tiempo continuo, con el objetivo de establecer criterios concretos de sustentabilidad mediante el enfoque *maximin* descrito en la introducción. En dicho artículo, Martinet se enfoca principalmente en discutir esta nueva propuesta de manera conceptual y de ilustrar su aplicación mediante un ejemplo. Posteriormente, V. Martinet, P. Gajardo y M. De Lara en [26] extienden la idea de los umbrales sustentables al contexto de sistemas en tiempo discreto. Su enfoque, sin embargo, difiere levemente, ya que su propósito es tratar los problemas de sustentabilidad como problemas de negociación, en los que las partes interesadas deben acordar una trayectoria de desarrollo común. Un trabajo con ideas similares, aunque sin llegar a definir explícitamente el Conjunto de Umbrales Sustentables, es [11], donde M. De Lara y V. Martinet proponen un enfoque para la toma de decisiones en sistemas de gestión pesquera bajo incertidumbre basado en la maximización de la probabilidad de cumplimiento de objetivos de sustentabilidad representados mediante funciones indicadoras y umbrales.

Desde la introducción del concepto de Conjunto de Umbrales Sustentables en la literatura, han surgido diversas propuestas que lo generalizan y lo aplican a contextos específicos. Por ejemplo, en [19] se define una extensión para sistemas discretos bajo incertidumbre, denominada *Conjunto de Umbrales Sustentables Robustos*. Por su parte, en [20], la noción es empleada para diseñar estrategias de recuperación de recursos naturales sobreexplotados. En otro ámbito, [4] aplica este marco a modelos epidemiológicos, con el objetivo de analizar las compensaciones entre distintas restricciones —como límites presupuestarios o el número máximo de personas infectadas— y así contribuir a la identificación de estrategias de control eficientes que mantengan condiciones adecuadas durante todo el período de intervención.

Además de los trabajos previamente mencionados —que extienden o aplican el concepto del Conjunto de Umbrales Sustentables—, algunas contribuciones se centran en estudiar sus propiedades matemáticas de manera más abstracta, sin asociarlo, necesariamente, a una generalización del concepto o a una aplicación práctica en específico. En particular, en [18] y [14] se caracteriza este conjunto para sistemas de evolución en tiempo discreto mediante la frontera de Pareto asociada a un problema *maximin* de optimización multiobjetivo. Adicionalmente, estos trabajos profundizan en el análisis estructural del conjunto, explorando su relación con otros conceptos matemáticos tales como el *Kernel de Viabilidad* o el *Principio de Programación Dinámica*. También, se enfocan en el desarrollo de algoritmos para su cálculo numérico. Sobre esta línea, destacamos el trabajo de P. Gajardo, T. Guilmeau y C. Hermosilla, quienes, motivados por analizar la sensibilidad del conjunto frente a variaciones en la condición inicial de sistemas de evolución a tiempo discreto, realizan en [17] un estudio que aborda al Conjunto de Umbrales Sustentables como una *multifunción* del estado inicial, avanzando así hacia un estudio más teórico y técnico acerca de este conjunto que incorpore herramientas provenientes de áreas como el análisis de multifunciones y el control óptimo.

De igual modo, este trabajo de tesis se enmarca dentro de la misma línea de investigación iniciada en [17], buscando extender los resultados obtenidos en dicha referencia para el caso de sistemas de control en tiempo continuo. En particular, se estudian las propiedades variacionales que satisface este objeto cuando es visto como una multifunción de la condición inicial del sistema. Tales propiedades abarcan aspectos topológicos y geométricos del grafo esta multifunción como la son su cerradura o su convexidad. Asimismo, se investigan distintas nociones de continuidad para multifunciones que el Conjunto de Umbrales Sustentables satisface bajo ciertas condiciones de

regularidad en los datos del sistema. El análisis desarrollado es de carácter esencialmente teórico, aunque se incluyen ejemplos ilustrativos simples que permiten visualizar los conceptos tratados y destacar la relevancia de las hipótesis impuestas.

De esta forma, la principal contribución de esta tesis consiste en la formulación y la demostración de versiones en tiempo continuo de los resultados centrales establecidos en [17] para el caso a tiempo discreto. Este proceso requirió una adaptación cuidadosa de los métodos originales, lo que motivó el uso de herramientas provenientes de la Teoría de Inclusiones Diferenciales, especialmente en lo relativo a las propiedades topológicas del conjunto en estudio. Además, se establecen condiciones suficientes para la convexidad del grafo del Conjunto de Umbrales Sustentables en el contexto de sistemas de control no lineales, utilizando conceptos generalizados de monotonía y convexidad para campos vectoriales. Finalmente, se analizan las propiedades de continuidad del Conjunto de Umbrales Sustentables empleando resultados de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos avances no solo consolidan el marco teórico para el estudio de este objeto en tiempo continuo, sino que también abren nuevas posibilidades para su análisis cualitativo y computacional en contextos más generales.

1.3. Herramientas matemáticas

El objetivo de esta sección es introducir las principales herramientas matemáticas que fueron utilizadas en este trabajo de tesis. Como fue señalado en la introducción, se adoptará el punto de vista de las *multifunciones* para realizar el análisis. Debido a que la principal motivación que suscitó el análisis del Conjunto de Umbrales Sustentables desde este punto de vista fue la de poder estudiar sus propiedades de sensibilidad con respecto a la condición inicial del sistema, se partirá por definir en la Sección 1.3.1 las nociones de continuidad para multifunciones que serán de interés en esta investigación. Posteriormente, en la Sección 1.3.2 se presentarán los resultados fundamentales acerca de Inclusiones Diferenciales que serán empleados para estudiar la cerradura del grafo del Conjunto de Umbrales Sustentables. Finalmente, en la Sección 1.3.3 se cerrará este apartado introduciendo nociones generalizadas de convexidad y monotonía para funciones y campos vectoriales que son habitualmente impuestas sobre ciertos tipos de sistemas de control, y que aquí serán utilizadas para estudiar propiedades de convexidad.

La exposición presentada se basa principalmente en las referencias [3] y [32].

1.3.1. Nociones de continuidad para multifunciones

Dados dos conjuntos no vacíos X e Y , una **multifunción** Φ de X a Y es una relación que a cada $x \in X$ le asocia un subconjunto $\Phi(x) \subseteq Y$. Usaremos la notación $\Phi: X \rightrightarrows Y$ para distinguir una multifunción de una función usual, a las cuales, en este contexto, se les suele llamar funciones *univaluadas*. De esta forma, el Conjunto de Umbrales Sustentables asociado al sistema (1.3) se considerará como una multifunción $\mathbb{S}: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ que a cada condición inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$ le asigna el subconjunto de umbrales en \mathbb{R}^m definido en (1.4).

Dada una multifunción $\Phi: X \rightrightarrows Y$, definimos su *dominio efectivo* como el conjunto

$$\text{dom}(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x) \neq \emptyset\},$$

y su *grafo* como el conjunto

$$\text{gr}(\Phi) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}.$$

Adicionalmente, si (X, \mathcal{F}) es un espacio medible y (Y, τ) un espacio topológico (habitualmente \mathbb{R}^n con la topología usual), diremos que la multifunción $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es \mathcal{F} medible cuando el conjunto

$$\{x \in X : \Phi(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

es \mathcal{F} medible para todo conjunto abierto $C \in \tau$.

Dentro de este contexto, como primera noción de continuidad para multifunciones introduciremos el concepto de *semicontinuidad inferior* de una multifunción.

Definición 1.3.1. Diremos que una multifunción $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es **semicontinua inferior** en $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$ si para cualquier $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$ y cualquier sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \text{dom}(\Phi)$ tal que $x_k \rightarrow \bar{x}$ existe una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $y_k \in \Phi(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $y_k \rightarrow \bar{y}$.

Adicionalmente, diremos que Φ es *semicontinua inferior* si lo es en todo $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$.

La semicontinuidad inferior se puede interpretar como un tipo de continuidad “interna” para una multifunción, en el sentido de que dado un punto $x \in \text{dom}(\Phi)$ siempre podemos aproximar todos los valores $y \in \Phi(x)$ con las imágenes de los puntos cercanos a x . Sin embargo, esta noción de continuidad no considera la posibilidad de que las imágenes de Φ en puntos cercanos a x incluyan, además, otros valores alejados del conjunto $\Phi(x)$. Es por ello que en este campo también se introduce la noción de *semicontinuidad superior* de una multifunción, la cual se puede interpretar como una especie de continuidad “externa”:

Definición 1.3.2. Diremos que una multifunción $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es **semicontinua superior** en $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$ si para cualquier $\mathcal{O} \subseteq Y$ abierto tal que $\Phi(\bar{x}) \subseteq \mathcal{O}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{B}_X(\bar{x}, \delta) \implies \Phi(x) \subseteq \mathcal{O}.$$

Diremos que Φ es *semicontinua superior* si lo es en todo $\bar{x} \in \text{dom}(\Phi)$.

La semicontinuidad superior controla el crecimiento de las imágenes de Φ en vecindades de un punto $x \in \text{dom}(\Phi)$. Cuando una función es semicontinua inferior y superior a la vez, decimos simplemente que es **continua**.

A partir de la definición del Conjunto de Umbrales Sustentables dada en (1.4), es directo notar que si $c \in \mathbb{R}^m$ pertenece a $\mathbb{S}(\xi)$, entonces $c + \alpha \mathbf{1}_m$, en donde $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)$ denota al vector de \mathbb{R}^m que en cada coordenada tiene el valor de 1, también pertenece a $\mathbb{S}(\xi)$ para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, a menos que sea vacío, el conjunto $\mathbb{S}(\xi)$ nunca es acotado. Una consecuencia de este hecho es que la noción de semicontinuidad superior (y, por lo tanto, la de continuidad) no estará bien adaptada para la multifunción \mathbb{S} , pues es un hecho conocido que las multifunciones de imágenes no acotadas rara vez cumplen con esta propiedad. No obstante, una propiedad relacionada que no se ve perjudicada por las imágenes no acotadas de \mathbb{S} es la de la tener un *grafo topológicamente cerrado*. Esta noción es, de hecho, equivalente a la semicontinuidad superior cuando las imágenes de la multifunción en cuestión son compactas, como afirma la siguiente proposición:

Proposición 1.3.1. Si Φ es *semicontinua superior* y sus imágenes son cerradas, entonces $\text{gr}(\Phi)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Recíprocamente, si $\text{gr}(\Phi)$ es cerrado y las imágenes de Φ son conjuntos compactos, entonces Φ es semicontinua superior.

Adicionalmente, otra noción de continuidad bien adaptada para multifunciones de imágenes no acotadas es la de **Lipschitz continuidad** de una multifunción. A diferencia del caso de funciones univaluadas, una multifunción puede ser Lipschitz continua sin ser necesariamente continua en el sentido anterior, con tal de que se considere la siguiente definición de Lipschitz continuidad:

Definición 1.3.3. *Asuma que X e Y son espacios vectoriales normados. Diremos que una multifunción $\Phi: X \rightrightarrows Y$ es Lipschitz continua si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\Phi(x) \subseteq \Phi(x') + L \|x - x'\|_X \mathbb{B}_Y \quad \forall x, x' \in X.$$

Esta noción también se puede hacer local pidiendo que se cumpla la condición anterior en alguna vecindad de todo $x \in \text{dom}(\Phi)$.

De esta forma, en este trabajo el interés estará en demostrar propiedades de semicontinuidad inferior y Lipschitz continuidad para la multifunción del Conjunto de Umbrales Sustentables, así como en establecer condiciones bajo las cuales el grafo de esta multifunción sea cerrado, considerando esta última característica tanto de interés en sí misma como a modo de propiedad de regularidad sustituta para la semicontinuidad superior de \mathbb{S} .

1.3.2. Teoría de Inclusiones Diferenciales

Es posible reformular el problema (1.1) de una manera conveniente haciendo uso de multifunciones. Definiendo la multifunción $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in \mathbf{U}\}, \quad (1.5)$$

en donde $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ representa el conjunto de controles admisibles, el sistema (1.1) puede expresarse como la siguiente *inclusión diferencial*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) & \text{c.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = \xi. \end{cases} \quad (1.6)$$

Se denotará por $\mathcal{S}_{[0, T]}(\xi)$ al conjunto de soluciones de (1.6). Esta nueva formulación permite aplicar resultados conocidos de la teoría de inclusiones diferenciales para establecer condiciones sobre la dinámica $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que garanticen existencia y propiedades de regularidad de las soluciones de (1.6). Para esto, serán de particular interés el Teorema de Existencia de Filippov, el Teorema de Selección de Filippov y el Lema de Gronwall tales como se encuentran enunciados en el Capítulo 2 de [32]. Usando estos teoremas, se pueden establecer las propiedades listadas en el Lema 3 de [7] bajo la hipótesis 1 presentada tal referencia y reproducida en Hipótesis 1 por completitud (ver el Capítulo 2), la cual establece las propiedades de regularidad necesarias en la función de dinámica f .

Adicionalmente, la formulación mediante inclusiones diferenciales presenta otra ventaja importante: al no hacer referencia directa a la variable de control, permite aplicar teoremas de compacidad sobre las trayectorias sin tener que considerar el límite de funciones que solo poseen regularidad medible. Este tipo de consideraciones será clave más adelante al analizar propiedades relacionadas con la cerradura del grafo del Conjunto de Umbrales Sustentables. En particular, haremos uso del Teorema de Compacidad de Trayectorias presentado en [32]:

Teorema 1.3.1 (Teorema de Compacidad de Trayectorias). *Considere una multifunción $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que*

- i) F tiene imágenes convexas, cerradas y no vacías en todo punto,*
- ii) F es $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ medible,*
- iii) Para cada $t \in [0, T]$ fijo, el grafo de $F(t, \cdot)$ es cerrado.*

Adicionalmente, considere una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ y una sucesión $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que $\|r_k\|_{L^1} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Suponga que

- iv) $\{\dot{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente integralmente acotada en $[0, T]$, y $\{x_k(0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.*
- v) existe $c \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que*

$$F(t, x_k(t)) \subseteq c(t) \mathbb{B} \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- vi) se cumple que*

$$x_k(t) \in F(t, x_k(t)) + r_k(t) \mathbb{B} \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, existe una subsucesión (que no renombramos) tal que

$$x_k \rightarrow x \quad \text{uniformemente en } C([0, T]; \mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \quad \text{débilmente en } L^1([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

para algún arco $x \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ satisfaciendo que

$$x(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T]$$

Dado que el Teorema 1.3.1 requiere en el ítem *i)* la hipótesis de convexidad de la dinámica, también será importante el Teorema de Relajación ([32, Teorema 2.7.2]) el cual sirve para aproximar trayectorias de sistemas con dinámica no convexa mediante trayectorias del sistema convexificado.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Relajación). *Considere una multifunción $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que sea $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ medible y de imágenes cerradas y no vacías. Adicionalmente, asuma que F es mediblemente Lipschitz continua, en el sentido de que existe $k \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que para todo $t \in [0, T]$*

$$F(t, x') \subseteq F(t, x'') + k(t) \|x' - x''\| \mathbb{B} \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}^n.$$

Adicionalmente, suponga que existe $c \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que

$$F(t, x) \subseteq c(t) \mathbb{B} \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Sea x cualquier trayectoria relajada de F y sea $\delta > 0$. Entonces, existe una trayectoria y de F tal que

$$y(0) = x(0) \quad \text{y} \quad \|y - x\|_\infty < \delta. \quad (1.7)$$

Se presentan los enunciados completos de ambos teoremas para futura referencia, ya que su uso es sustancial a lo largo de la Sección 3.2 de [7].

No obstante las ventajas de formular el problema (1.1) como una inclusión diferencial, la ausencia de una referencia explícita a la variable de control también impone ciertas limitaciones. En particular, restringe el tipo de condiciones del estilo de (1.2) que pueden incorporarse, sobre todo cuando la función de restricciones g depende explícitamente de la variable de control u . Esta dificultad requiere mayor atención y se aborda en la Sección 3.2.2 de [7].

1.3.3. Propiedades de monotonía para Sistema Dinámicos

Como se adelantó previamente, ahora se introducirán nociones generalizadas de convexidad y monotonía para funciones y campos vectoriales que son habitualmente impuestas sobre los sistemas de control usados para modelar la gestión de recursos naturales. La utilidad de estas propiedades ha sido ampliamente reconocida en la literatura, ya que permiten establecer resultados estructurales sobre el comportamiento del sistema y facilitan el análisis de viabilidad y sustentabilidad.

Por ejemplo, en [11] se imponen condiciones de monotonía tanto en la dinámica como en las restricciones del sistema con el objetivo de caracterizar controles de tipo *feedback* que maximizan la probabilidad de viabilidad. De forma similar, en [4] se adoptan hipótesis análogas (bajo el nombre de *sistemas cooperativos*) para poder hacer uso de algunos teoremas de comparación de trayectorias. En dicho trabajo, además, se señala que esta propiedad es común en una amplia clase de modelos compartimentales en epidemiología. Por su parte, el caso de estudio presentado en [20] sobre la Merluza Austral (*Merluccius Australis*) chilena también se ajusta a hipótesis de monotonía de este tipo.

Las propiedades de monotonía empleadas en los ejemplos anteriores pueden englobarse bajo la siguiente definición general, siguiendo la referencia [17] o bien [22]:

Definición 1.3.4. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$ un cono convexo, cerrado y de interior no vacío. Definimos la relación \preceq_K en \mathbb{R}^p como*

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K.$$

Usando esto, definimos las siguientes propiedades:

i) *Un campo de vectores $\Phi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es K -monótono si*

$$x \preceq_K y \implies \Phi(x) \preceq_K \Phi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

ii) *Una función $\varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ es K -monótona si*

$$x \preceq_K y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Si bien en [22] el requerimiento de que K tenga interior no vacío es omitido, para este trabajo sí será importante el incluirlo. Además de lo anterior, también se presenta la siguiente definición de convexidad generalizada:

Definición 1.3.5. *En el mismo contexto anterior, dado un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^q$ diremos que*

iii) *El campo de vectores $\Psi: S \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ es K -convexo si*

$$\Psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \preceq_K \lambda \Psi(x) + (1 - \lambda)\Psi(y) \quad \forall x, y \in S \quad \lambda \in [0, 1].$$

Las definiciones 1.3.4 y 1.3.5 serán relevantes en la Sección 4 de [7], en donde se estudia la convexidad del grafo del Conjunto de Umbrales Sustentables. En dicha sección se emplean herramientas similares a las utilizadas en [22] para demostrar que las trayectorias generadas por dinámicas que satisfacen las condiciones presentadas en la definición 1.3.4 preservan la relación \preceq_K a lo largo de su evolución. Véase, en particular, [22, Lema 2]. No obstante, en dicha referencia esta propiedad de preservación de orden depende únicamente de las condiciones iniciales de las trayectorias, y no considera los efectos derivados de la posibilidad de elegir diferentes funciones de control. Por esta razón, fue necesario incorporar la definición 1.3.5. Esta noción permite extender dichos resultados al contexto específico de este trabajo, en el cual las decisiones de control juegan un papel activo en la evolución del sistema (véase la demostración de [7, Teorema 10] para los detalles).

Capítulo 2

Discusión de resultados

En este capítulo se presentan y discuten los principales resultados obtenidos en este trabajo, los cuales se presentan en detalle en el artículo *Variational properties of the Set of Sustainable Threshold in a continuous-time framework* ([7]). Este artículo se encuentra bajo revisión a la fecha actual. El enfoque de este apartado estará puesto en destacar los aportes centrales, las dificultades enfrentadas y las principales técnicas de demostración utilizadas. Las demostraciones en sí han sido relegadas al apéndice, donde el artículo [7] se encuentra reproducido íntegramente.

El estudio se estructura en torno a tres ejes principales. En primer lugar, en la Sección 2.1 se abordan aspectos topológicos relacionados con la cerradura del grafo de la multifunción asociada al Conjunto de Umbrales Sustentables. Para ello, se hace uso extensivo de las herramientas provenientes de la teoría de Inclusiones Diferenciales revisadas previamente en la Sección 1.3.2. En segundo lugar, en la Sección 2.2 se analizan propiedades de convexidad que dicho conjunto satisface bajo ciertas condiciones estructurales del sistema, en particular, bajo las nociones de monotonía y convexidad generalizadas discutidas en la Sección 1.3.3. Finalmente, se estudia el análisis de sensibilidad del conjunto respecto de las condiciones iniciales, estableciendo resultados de continuidad en el sentido de multifunciones, conforme al marco teórico repasado en la Sección 1.3.1.

2.1. Propiedades Topológicas

Como fue discutido en la Sección 1.3.1, la cerradura del grafo del Conjunto de Umbrales Sustentables es una propiedad de regularidad relevante en el contexto de las multifunciones que se puede interpretar como un sustituto de la semicontinuidad superior dado que \mathbb{S} siempre tiene imágenes no acotadas (salvo cuando son vacías). Inclusive, esta noción se presenta en [17] como una propiedad “básica” que, en el contexto de los sistemas de control a tiempo discreto, es fácil de establecer solo con hipótesis de semicontinuidad inferior con respecto a las variables de estado y de control en la función de restricciones $g: \{1, \dots, T\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Esta simplicidad se debe a la posibilidad emplear un argumento por sucesiones y de garantizar usando técnicas de compacidad y semicontinuidad inferior la convergencia en el límite de las (finitas) instancias de controles y estados que existen a lo largo de la evolución del sistema. Sin embargo, para sistemas a tiempo continuo, argumentos de este tipo fallan debido a que la regularidad solo medible de la función de control no permite asegurar la convergencia en el límite de esta variable en todos los (infinitos) instantes de la evolución. Esto se ve ilustrado en el Ejemplo 2 de [7], el cual reproducimos en el Ejemplo 2.1.1, donde el Conjunto de Umbrales Sustentables **NO** es un conjunto cerrado.

Ejemplo 2.1.1. Para ilustrar la diferencia entre \mathbb{S} y \mathbb{S}_r , considere el caso con $T = 1$, conjunto de controles admisibles $\mathbf{U} = \{-1, 1\}$, dinámica $f(t, x, u) = u$, condición inicial $\xi = 0$, y restricciones de estado dadas por $g_1(t, x, u) = -x$ y $g_2(t, x, u) = x$. El sistema obtenido sería el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) & \text{c.t.p. } t \in [0, 1], \\ u : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} & \text{medible,} \\ x(0) = 0, \\ \text{sujeto a } -c^1 \leq x(t) \leq c_2 & \text{para todo } t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Al evaluar la condición inicial en g se obtiene el requerimiento de que $c^1, c_2 \geq 0$. Si c^1 o c_2 son estrictamente positivos, entonces se puede construir una función de control admisible que mantenga a $x(t)$ dentro de los límites impuestos alternado entre $u = 1$ y $u = -1$ con una frecuencia lo suficientemente rápida.

En contraste, considerando $c^1 = c_2 = 0$ se fuerza a que $x(t) \equiv 0$, lo cual no resulta factible para este sistema, dado que $\dot{x}(t)$ no puede ser cero. Por lo tanto, $\mathbb{S}(0) = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, el cual no es un conjunto cerrado.

No obstante, el punto límite $(0, 0)$ sí es admisible en un sentido relajado, de forma que $\mathbb{S}_r(0) = \mathbb{R}_+^2$. Esto sugiere que podemos incluir cualquier punto límite de \mathbb{S} haciendo uso de la noción de umbrales relajados.

Note que el Ejemplo 2.1.1 motiva la siguiente definición “relajada” del Conjunto de Umbrales Sustentables:

Definición 2.1.1. Definimos el Conjunto de Umbrales Sustentables relajados como la multifunción

$$\mathbb{S}_r : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$$

definida para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ como

$$\mathbb{S}_r(\xi) := \{c \in \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0, c + \varepsilon \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}(\xi)\},$$

en donde $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)$ denota el vector de unos de tamaño m .

En la definición anterior, no se pide que los umbrales establecidos se respeten exactamente, sino que existan controles que permitan respetarlos con errores arbitrariamente pequeños. De esta forma, se tiene que $\mathbb{S}(\xi)$ es un subconjunto de $\mathbb{S}_r(\xi)$ para cualquier condición inicial ξ , y que los umbrales adicionales que $\mathbb{S}_r(\xi)$ incorpora se introducen con el fin de recuperar propiedades de cerradura. Con respecto a esta última idea, tal relación se explicita en [7, Proposición 2]. Antes de comenzar a enunciar estos resultados, será necesario introducir algunas de las hipótesis generales de trabajo, en particular las hipótesis 1 y 2 presentadas en la Sección 2.2 de [7].

Hipótesis 1. El conjunto de controles admisibles $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d$ es compacto y no vacío, y las siguientes condiciones sobre $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se cumplen simultáneamente:

1. $(t, u) \mapsto f(t, x, u)$ es una función de Carathéodory para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ fijo.
2. Existe una función $\ell \in L^1([0, T])$ tal que $x \mapsto f(t, x, u)$ es $\ell(t)$ -Lipschitz continua para todo $(t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}$.
3. Existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y una función $\gamma \in L^1([0, T])$ tal que

$$\max_{u \in \mathbf{U}} \|f(t, x_0, u)\| \leq \gamma(t), \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T].$$

Hipótesis 2. La función de restricciones $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en todas sus variables.

Con esto en mano, se enuncian los siguientes resultados:

Proposición 2.1.1. La multifunción del Conjunto de Umbrales Sustentables relajado tiene imágenes cerradas. Adicionalmente, si se cumplen la Hipótesis 1 y 2, entonces

$$\overline{\text{gr}(\mathbb{S})} = \text{gr}(\mathbb{S}_r).$$

En particular, la proposición anterior establece que el grafo de la multifunción $\mathbb{S}_r : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es un conjunto cerrado, siendo así una generalización para el caso de sistemas de evolución en tiempo continuo de [17, Proposición 1]. Al trabajar con la versión relajada del Conjunto de Umbrales Sustentables, se evita la necesidad de asegurar la convergencia en el límite de sucesiones de controles (lo cual permitiría asegurar que los umbrales se cumplen *exactamente*), pues basta con solo asegurar cotas de error arbitrariamente pequeñas. Cabe mencionar, sin embargo, que la Proposición 2.1.1 requiere una mayor regularidad de la función de restricciones g , pues se pide que esta sea continua en todas sus variables, mientras que en [17] solo se requiere que sea semicontinua inferior en estado y control para todo tiempo fijo. En este caso, la continuidad de g es necesaria para establecer que estas cotas de error sean uniformes en todos los infinitos instantes de tiempo $t \in [0, T]$.

Si bien la Proposición 2.1.1 garantiza que la versión relajada del Conjunto de Umbrales Sustentables posee grafo cerrado, otro de los intereses de este trabajo consiste en determinar bajo qué condiciones la multifunción original $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ coincide con su versión relajada, y qué aspectos impiden que dicha igualdad se tenga. Debido a que tal análisis requiere considerar argumentos de paso al límite en la variable de control, resulta necesario situarse dentro del marco de la Teoría de Inclusiones Diferenciales para disponer de herramientas como el Teorema de Compacidad de Trayectorias 1.3.1.

El estudio acerca de este tema se divide en dos partes. En primer lugar, se analiza el caso con restricciones puras de estado, es decir, cuando la función g no depende de la variable de control u . Luego se examina un caso particular de restricciones mixtas, en donde g sí depende de la variable de control u .

Haciendo uso de las técnicas mencionadas de Inclusiones Diferenciales, se obtuvo el siguiente resultado ([7, Teorema 4]) para sistemas con restricciones de estado puras:

Teorema 2.1.1. Asuma que se cumplen las Hipótesis 1 y 2. Defina la multifunción de dinámica $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como

$$F(t, x) := \overline{\text{co}}\{f(t, x, u) : u \in \mathbf{U}\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

Entonces,

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^F),$$

en donde \mathbb{S}^F denota al Conjunto de Umbrales Sustentables del sistema asociado a la dinámica $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definido como

$$\mathbb{S}^F(\xi) = \{c \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathcal{S}_{[0, T]}(\xi) \text{ tal que } g(t, x(t)) \leq c, \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

En particular, si $f(t, x, \mathbf{U})$ es un conjunto convexo para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, entonces $\text{gr}(\mathbb{S})$ es cerrado.

La demostración del Teorema 2.1.1 se basa en el uso del Teorema de Compacidad de Trayectorias (teorema 1.3.1). Las hipótesis impuestas permiten verificar cada uno de los ítems necesarios para su aplicación (véase [7, Lema 3]). Haciendo uso de este resultado, se puede pasar de una sucesión de trayectorias que verifican un umbral aproximadamente a una trayectoria relajada límite que lo verifica de manera exacta, demostrando así que $\text{gr}(\mathbb{S}_r) \subseteq \text{gr}(\mathbb{S}^F)$. Conversamente, dada una trayectoria relajada que verifica un umbral de manera exacta, se puede utilizar la regularidad de g junto con el Teorema de Relajación (teorema 1.3.2) para aproximar trayectorias relajadas con un error uniforme de $\delta > 0$ (ver la ecuación (1.7) en el enunciado del Teorema de Relajación) que se pueda traducir precisamente en los errores que el Conjunto de Umbrales Sustentables relajados admite en su definición.

El Teorema 2.1.1 se apoya en el hecho de que la función de restricciones no depende de la variable de control, lo cual simplifica considerablemente su demostración. Sin embargo, en muchos modelos de gestión de recursos naturales es habitual que las restricciones incluyan explícitamente a dicha variable, lo que introduce dificultades adicionales en el análisis.

Motivados por estas situaciones y siguiendo la referencia [12], se recurrió a técnicas adicionales de Teoría de Inclusiones Diferenciales para extender el resultado anterior al caso de sistemas con restricciones mixtas. En particular, se siguió el enfoque presentado en [12], en donde las restricciones se absorben dentro de la definición de una nueva dinámica que define una inclusión diferencial. En concreto, para cualquier umbral $c \in \mathbb{R}^m$ defina

$$\Gamma_c(t, x) := \{f(t, x, u) : u \in \mathbf{U}, g(t, x, u) \leq c\} \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m,$$

y

$$F_c(t, x) := \overline{\text{co}}(\Gamma_c(t, x)) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m.$$

Dadas estas multifunciones, considere la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F_c(t, x(t)) \quad \text{para c.t.p. } t \in [0, T], \quad x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Por último, denote por $\mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$ al conjunto de arcos solución de (2.3). En este contexto, se demostró el siguiente resultado ([7, Teorema 7]):

Teorema 2.1.2. *Asuma que se satisfacen las Hipótesis 1 y 2. Entonces, si $\mathbb{S}^m : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es la multifunción definida por*

$$\mathbb{S}^m(\xi) := \left\{ c \in \mathbb{R}^m : \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi) \neq \emptyset \right\},$$

tendremos que

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) \subseteq \text{gr}(\mathbb{S}^m).$$

Adicionalmente, la igualdad entre estos dos conjuntos se alcanza si la multifunción Γ_c tiene imágenes convexas y no vacías, es decir, si $\text{gr}(\Gamma_c) = \text{gr}(F_c) \neq \emptyset$. En tal caso, tendremos que la multifunción del Conjunto de Umbrales Sustentables tiene grafo cerrado y que

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m) = \text{gr}(\mathbb{S}).$$

La demostración del teorema anterior se apoya en dos lemas previos que cumplen funciones complementarias. Por un lado, garantizan que las Hipótesis 1 y 2 proporcionan un marco adecuado para trabajar con la inclusión diferencial (2.3) (véase [7, Lema 5]). Por otro lado, establecen que los conjuntos de arcos solución $\mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi)$ son compactos en la topología débil de $AC([0, T]; \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Este último resultado es fundamental, ya que el argumento de existencia que permite deducir que $\text{gr}(\mathbb{S}_r) \subseteq \text{gr}(\mathbb{S}^m)$ se basa en la *Propiedad de la Intersección Finita*, una propiedad topológica que requiere más que la compacidad secuencial asegurada por el Teorema de Compacidad de Trayectorias.

Cabe señalar que, en trabajos previos como [12], se estudian esta clase de restricciones en un contexto donde las restricciones permanecen fijas. En el presente trabajo, a pesar de considerarse restricciones parametrizadas por umbrales, fue posible aplicar dichos resultados aprovechando ciertas propiedades de monotonía que satisfacen los pares factibles de estado y control respecto de estos parámetros. En particular, el uso de la Propiedad de la Intersección Finita se justifica por el hecho de que

$$\mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi) \subseteq \mathcal{S}_{[0,T]}^{c+\alpha \mathbf{1}_m}(\xi) \quad \forall \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por último, se concluye el estudio sobre la cerradura del grafo de la multifunción $\mathbb{S}: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ mediante una proposición que, si bien no garantiza que $\text{gr}(\mathbb{S})$ sea cerrado, sí permite establecer condiciones bajo las cuales se cumple la igualdad $\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m)$ (véase [7, Proposición 8]).

Proposición 2.1.2. *Asuma que se satisfacen las Hipótesis 1 y 2. Defina la multifunción $G_c: [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ definida por la fórmula*

$$G_c(t) := \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} : g(t, x, u) \leq c\} \quad \forall t \in [0, T].$$

Suponga que $c \in \mathbb{R}^m$ es tal que $\text{gr}(G_c) \neq \emptyset$, que para todo $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in \mathbf{U}$ tal que $(x, u) \in G_c(t)$ y que la Bounded Slope Condition se satisface, es decir, que existe una constante $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$ y para todo $(x, u) \in G_c(t)$

$$(\alpha, \beta) \in N_{G_c(t)}^P(x, u) \implies \|\alpha\| \leq \mathcal{K} \|\beta\|, \quad (BS)$$

en donde $N_G^P(x, u)$ denota el cono normal proximal al conjunto $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en el punto $(x, u) \in G$. Entonces,

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m)$$

La demostración de este último resultado se basa en probar que $\text{gr}(\mathbb{S}_r) \supset \text{gr}(\mathbb{S}^m)$ utilizando el Teorema de Relajación de forma análoga a como fue aplicado en la demostración del Teorema 2.1.1 (véase [7, Teorema 4]), pero ahora considerando la dinámica F_c . Para ello, además de emplear nuevamente [7, Lema 5], se recurre a [12, Corolario 1] para garantizar que la multifunción G_c cumple las propiedades de continuidad de tipo Lipschitz local necesarias para aplicar dicho resultado (ver el enunciado del Teorema 1.3.2). En este contexto, el cumplimiento de la *Bounded Slope Condition* resulta fundamental, ya que sin esta hipótesis no es evidente cómo garantizar la Lipschitz continuidad de F_c .

2.2. Propiedades Estructurales

En esta sección se discute acerca de la parte del trabajo dedicada al estudio de las propiedades de convexidad de $\text{gr}(\mathbb{S})$. En virtud de la Proposición 2.1.1, la distinción entre \mathbb{S}_r y \mathbb{S} no resulta relevante en lo que respecta a la convexidad.

En primera instancia, se demuestra un resultado análogo a [17, Proposición 2], el cual establece la convexidad de $\text{gr}(\mathbb{S})$ bajo las hipótesis de que el conjunto de controles admisibles es convexo, la dinámica es lineal (en el estado y el control), y las funciones de restricción son convexas. Este resultado se puede encontrar en [7, Proposición 9] y su demostración sigue de manera directa el argumento presentado en [17].

Sin embargo, la hipótesis de linealidad en la dinámica excluye una amplia gama de modelos de interés. Por esta razón, también se trabajó en obtener una versión para sistemas a tiempo continuo del resultado [17, Teorema 3]. Dicho teorema demuestra que la convexidad del grafo es una propiedad satisfecha por sistemas no lineales que cumplen con las nociones generalizadas de monotonía y convexidad presentadas en la Sección 1.3.3. Como tal, se obtuvo un resultado análogo (véase [7, Teorema 10]), el cual se enuncia a continuación:

Teorema 2.2.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convexo, cerrado y de interior no vacío. Asuma que se satisfacen la Hipótesis 1 y que además se cumple que (véase la Hipótesis 4 de [7]):*

- i) El conjunto de controles admisibles $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d$ es convexo, las funciones de restricción $g_1(t, \cdot, \cdot), \dots, g_m(t, \cdot, \cdot)$ son convexas en $\mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ para cualquier $t \in [0, T]$ fijo y $g_1(t, \cdot, u), \dots, g_m(t, \cdot, u)$ son funciones K -monótonas para cualquier $(t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}$ fijo.*
- ii) Para cualquier $t \in [0, T]$ fijo, $f(t, \cdot, \cdot)$ es un campo vectorial K -convexo y $f(t, \cdot, u)$ es una función K -monótona para cualquier $u \in \mathbf{U}$ fijo.*

Entonces, $\text{gr}(\mathbb{S}_r)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y se cumple la propiedad de monotonía

$$\xi_1 \preceq_K \xi_2 \implies \mathbb{S}_r(\xi_2) \subseteq \mathbb{S}_r(\xi_1), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Aunque el enunciado es similar al de [17, Teorema 3], la técnica empleada en su demostración es distinta. No obstante, ambos enfoques comparten el uso de una *función valor* auxiliar que permite caracterizar al Conjunto de Umbrales Sustentables como un subconjunto de nivel. Esta idea se discute para sistemas a tiempo discreto en la Sección 4 de [18], y se extiende al caso continuo en la Sección 2.3 de [7], específicamente en [7, Proposición 1].

En relación con esta función valor auxiliar, en [17] se recurre al Principio de Programación Dinámica (PPD) en tiempo discreto, junto con propiedades análogas a las formuladas en los ítems *i)* y *ii)* del enunciado del Teorema 2.2.1, para demostrar su convexidad y K -monotonía, a partir de lo cual se deriva el resultado deseado. Para el caso en tiempo continuo, la demostración sigue una lógica similar, pero se apoya en propiedades de monotonía de los flujos generados por sistemas de ecuaciones diferenciales en lugar del PPD. La principal referencia consultada con respecto a este tema es [22], en donde se presentan resultados de preservación de orden (en el sentido de la Definición 1.3.4) para trayectorias de una ecuación diferencial cuya dinámica es K -monótona. Sin embargo, dicha referencia aborda únicamente el caso en que las trayectorias difieren en su condición inicial, sin considerar situaciones en las que, compartiendo una misma condición inicial, las trayectorias se generan a partir de diferentes funciones de control. Por esta razón, fue necesario adaptar los argumentos desarrollados en [22] para incorporar el efecto de la variable de control en la dinámica del sistema. Las modificaciones realizadas se detallan en la demostración de [7, Teorema 10]; en términos generales, se emplea un argumento de perturbación que conduce a una contradicción bajo la hipótesis de que la función valor considerada no cumple con la propiedad de K -convexidad (respectivamente, K -monotonía).

2.3. Propiedades de Continuidad

Finalmente, en esta sección se aborda el análisis de sensibilidad de la multifunción $\mathbb{S}: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ con respecto a la condición inicial del sistema $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como se anticipó previamente, el foco estará en las nociones de semicontinuidad inferior y continuidad Lipschitz, las cuales fueron recapituladas en la Sección 1.3.1. Dado que ambas propiedades se preservan al tomar la cerradura de las imágenes de una multifunción, y en vista de la Proposición 2.1.1, la distinción entre \mathbb{S} y \mathbb{S}_r no resulta relevante en este contexto.

Con tal de establecer estas propiedades, se impondrán distintas hipótesis sobre la función de restricciones g , mientras que las hipótesis sobre la dinámica f permanecerán fijas. Estas condiciones específicas pueden encontrarse en los enunciados de las Proposiciones [7, Proposición 11] y [7, Proposición 12], que abordan la semicontinuidad inferior y la continuidad Lipschitz de \mathbb{S} , respectivamente. La diferencia principal entre ambas radica en que la segunda requiere continuidad Lipschitz de la función g , mientras que la primera no.

A continuación, se enuncian ambos resultados:

Proposición 2.3.1. *Asumiendo que la función de dinámica f satisface la Hipótesis 1 y que la función de restricción g satisface la Hipótesis 2, la multifunción $\mathbb{S}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es semicontinua inferior.*

Proposición 2.3.2. *Asumiendo que la función de dinámica f satisface la Hipótesis 1 y que la función de restricción g satisface que existe una constante $L_g > 0$ tal que*

$$\|g(t, x, u) - g(t, y, u)\| \leq L_g \|x - y\| \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

tendremos que $\mathbb{S}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una multifunción Lipschitz continua con constante de Lipschitz dada por $\kappa_{\mathbb{S}} = L_g L^F \sqrt{m}$, en donde L^F es una constante adecuada.

Las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 se apoyan en una misma idea central: si la condición inicial varía ligeramente, seguir una misma estrategia de control conduce a trayectorias similares. En efecto, en ambas demostraciones se parte de una tripleta (ξ, u, c) compuesta por una condición inicial, una función de control y un umbral sustentable; y se demuestra que, para condiciones iniciales suficientemente cercanas a $\xi \in \mathbb{R}^n$, la misma función de control $u \in \mathcal{U}$ genera umbrales sustentables próximos a $c \in \mathbb{R}^m$. De esta forma, se evita trabajar con resultados relacionados con la existencia de controles o con argumentos de compacidad en la variable de control. Si bien esto facilita las demostraciones, también introduce ciertas limitaciones en cuanto a su aplicabilidad a otros tipos de sistemas de control, como aquellos con restricciones de estado fijas (es decir, no parametrizadas por un umbral), en los cuales una misma estrategia de control puede ser factible o no, dependiendo del punto inicial del sistema.

Capítulo 3

Simulaciones

En este capítulo se presentan simulaciones numéricas basadas en un modelo matemático de producción y consumo en una economía que depende del uso de un recurso natural no renovable. Tanto el ejemplo como los resultados teóricos utilizados como referencia fueron tomados de [25].

El objetivo es ilustrar, a través de este modelo, las dificultades y limitaciones que enfrenta nuestra propuesta en un contexto práctico. Cabe destacar que las simulaciones aquí presentadas tienen un carácter exploratorio, y no buscan establecer una metodología computacional que sea aplicable en general. En consecuencia, las estrategias empleadas fueron seleccionadas *ad hoc* para el problema en cuestión, y algunas de las hipótesis formuladas en las secciones anteriores no se cumplen estrictamente.

A pesar de estas limitaciones, los resultados obtenidos proporcionan información relevante sobre el comportamiento del enfoque propuesto en aplicaciones prácticas, y permiten identificar posibles líneas de mejora. Así, esta sección constituye un primer acercamiento empírico que contribuye a orientar futuras investigaciones y al diseño de herramientas más robustas que sean aplicables en modelos más complejos.

3.1. Planteamiento del modelo

Se considerará una economía con un único bien de producción K , denominado *capital*, y un único recurso natural no renovable S . Se denotarán los niveles de capital y de stock del recurso natural en tiempo t por $K(t)$ y $S(t)$, respectivamente. Estas dos cantidades constituyen las variables de estado del sistema. Adicionalmente, se considerarán las variables de control $c(t)$, la cual representa la tasa de consumo del capital K en tiempo t ; y $r(t)$, que corresponde a la tasa de extracción del recurso natural S en tiempo t .

Para describir la dinámica del sistema, se considerará una *función de producción* o *función de tecnología* $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que determina la tasa de producción del capital K en base al capital ya existente y la tasa de extracción del recurso natural. De esta forma, el sistema económico en cuestión viene modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c(t), \\ \dot{S}(t) = -r(t), \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

A lo anterior se le añaden condiciones de no negatividad en todas las variables involucradas:

$$K(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0, \quad r(t) \geq 0.$$

Con respecto al modelo anterior, se busca estudiar restricciones de sustentabilidad asociadas a la factibilidad de poder mantener tanto un nivel de consumo mínimo garantizado del capital K como un nivel de stock mínimo del recurso natural S . Así, dados dos umbrales $c_{\#}, S_{\#} \geq 0$, el foco estará en el sistema con restricciones

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c(t), \\ \dot{S}(t) = -r(t), \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0, \\ K(t) \geq 0, \quad r(t) \geq 0, \\ c(t) \geq c_{\#}, \quad S(t) \geq S_{\#}. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2. Enfoque computacional

Dado un horizonte de tiempo finito $T > 0$ y una condición inicial (K_0, S_0) , se procura determinar el conjunto $\mathbb{S}(K_0, S_0)$, es decir, el conjunto de pares $(c_{\#}, S_{\#})$ tales que el sistema (3.2) pueda mantenerse dentro del intervalo temporal $[0, T]$. Con este fin, se buscará identificar la frontera de Pareto de dicho conjunto. Dado que el umbral $c_{\#}$ está asociado a una restricción en la variable de control, mientras que el umbral $S_{\#}$ corresponde a una restricción de estado, resulta natural parametrizar esta frontera utilizando $c_{\#}$ como variable libre, y determinar, para cada valor fijo de $c_{\#}$, el valor máximo de $S_{\#}$ tal que $(c_{\#}, S_{\#}) \in \mathbb{S}(K_0, S_0)$. En consecuencia, el enfoque consistirá en discretizar el espacio de valores factibles de $c_{\#}$, y para cada uno de ellos calcular el correspondiente valor máximo admisible de $S_{\#}$.

Ahora bien, según la forma específica que adopte la función de producción del sistema, podría darse la posibilidad de sostener un cierto nivel de consumo mínimo $c_{\#}^0 \geq 0$ sin necesidad de recurrir al uso del recurso natural, es decir, manteniendo una tasa de extracción nula en todo momento. Por otro lado, incluso permitiendo la utilización del recurso, sólo será factible garantizar niveles de consumo hasta un cierto umbral máximo $c_{\#}^{\max} > c_{\#}^0 > 0$. Estos dos valores delimitan el rango en el cual es necesario realizar el análisis computacional anteriormente descrito. En efecto, cualquier nivel de consumo $c_{\#}$ tal que $0 \leq c_{\#} \leq c_{\#}^0$ puede sostenerse sin agotar recurso, por lo que el par $(c_{\#}, S_0)$ será sustentable con el mayor nivel posible de recurso disponible. A su vez, cualquier valor $c_{\#}$ tal que $c_{\#} > c_{\#}^{\max}$ se considerará como no sustentable, pues su mantenimiento implicaría un agotamiento del recurso S superior a su disponibilidad inicial, la cual no se puede incrementar.

El primer paso del procedimiento consiste, entonces, en identificar estos dos umbrales extremos. Para ello, se plantean y resuelven los siguientes problemas de optimización:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \min\{c(t) : t \in [0, T]\} \\ \text{sujeto a:} & \\ \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c(t), & \\ \dot{S}(t) = -r(t), & \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0, & \\ K(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, & \\ c(t) \geq 0, \quad r(t) \geq 0. & \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Maximizar} & c \\ \text{sujeto a:} & \\ \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c, & \\ \dot{S}(t) = -r(t), & \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0, & \\ K(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, & \\ c \geq 0, \quad r(t) \geq 0. & \end{cases}$$

(a) Forma general del problema.

(b) Forma simplificada (consumo constante).

Figura 3.2.1: Formulaciones general y simplificada para el cálculo de los umbrales $c_{\#}^0$ y $c_{\#}^{\max}$.

El problema (3.2.1) (a) consiste en un problema de optimización general que permite caracterizar el máximo nivel de consumo que puede mantenerse a lo largo del tiempo sin comprometer la sostenibilidad del sistema. Resolviéndolo, se obtiene como solución el valor de $c_{\#}^{\max}$. Adicionalmente, podemos obtener el valor de $c_{\#}^0$ como solución de este mismo problema con función de extracción $r(t)$ idénticamente igual a 0.

No obstante, bajo ciertas condiciones específicas del modelo—en particular, cuando tener un consumo estrictamente mayor al mínimo no proporciona beneficios adicionales sino que simplemente agota más rápidamente el capital—es posible simplificar el problema original asumiendo que el consumo se mantiene constante en el tiempo. Esta simplificación, que corresponde al problema (3.2.1) (b), resulta particularmente útil para el sistema en cuestión.

Una vez resueltos estos dos problemas, se procede a determinar la frontera de Pareto del conjunto $\mathbb{S}(K_0, S_0)$ encontrando, para todo $c_{\#} \in (c_{\#}^0, c_{\#}^{\max})$, el mayor $S_{\#}$ tal que el sistema se mantenga sustentable en el intervalo $[0, T]$. El problema se plantea inicialmente en (3.2.2) (a) de forma general. Este problema busca maximizar el nivel mínimo de recurso disponible a lo largo del tiempo. Sin embargo, la hipótesis del consumo constante y el hecho de que el agotamiento del recurso es monótono permiten reformular este problema de manera equivalente como la maximización del valor de $S(t)$ en el instante final $t = T$ con un consumo fijo de $c_{\#}$, como se muestra en (3.2.2) (b).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad \min\{S(t) : t \in [0, T]\} \\ \text{sujeto a:} \\ \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c(t), \\ \dot{S}(t) = -r(t), \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0, \\ K(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, \\ c(t) \geq c_{\#}, \quad r(t) \geq 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad S(T) \\ \text{sujeto a:} \\ \dot{K}(t) = f(K(t), r(t)) - c_{\#}, \\ \dot{S}(t) = -r(t), \\ K(0) = K_0, \quad S(0) = S_0, \\ K(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, \\ r(t) \geq 0. \end{array} \right.$$

(a) Forma general del problema para determinar $S_{\#}$.

(b) Forma simplificada con consumo constante y agotamiento terminal.

Figura 3.2.2: Formulaciones general y simplificada para el cálculo del umbral $S_{\#}$ dado un consumo $c_{\#}$ fijo.

En lo que sigue, se aplicará este esquema computacional a dos casos particulares del sistema (3.2) obtenidos mediante la elección de diferentes funciones de producción. Los problemas de optimización fueron resueltos usando la librería de Python GEMPy [5].

3.3. Primer caso: recurso no esencial

Para este primer caso, se considerarán constantes positivas $\alpha, \beta > 0$ y la función de producción lineal dada por

$$f(K, r) = \alpha K + \beta r. \quad (3.3)$$

Dada esta función, el sistema es capaz de producir utilizando únicamente el capital disponible, sin necesidad estricta de recurrir al recurso natural S . No obstante, dicho recurso puede ser empleado

estratégicamente para acelerar la acumulación de capital en etapas iniciales, lo que a su vez permite aumentar los niveles de consumo que se pueden sostener en el largo plazo.

Se realizaron simulaciones utilizando los valores $\alpha = 1,5$ y $\beta = 2,7$ aplicando el esquema numérico descrito en la sección anterior. Para condiciones iniciales $K_0 = S_0 = 7$, se obtuvo el conjunto de umbrales sustentables de la figura 3.3.1.

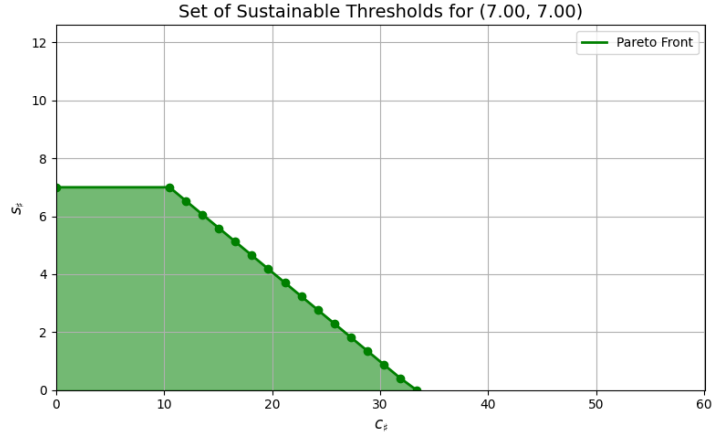


Figura 3.3.1: Conjunto de umbrales sustentables $\mathbb{S}(7,7)$.

En dicha figura, el primer segmento horizontal visible corresponde a los niveles de consumo comprendidos en el intervalo $[0, c_{\#}^0]$, los cuales pueden sostenerse durante todo el horizonte temporal sin necesidad de recurrir al recurso natural. A partir de ese umbral, se vuelve necesario realizar cierta extracción inicial del recurso con el fin de acumular capital suficiente para mantener el nivel de consumo solicitado.

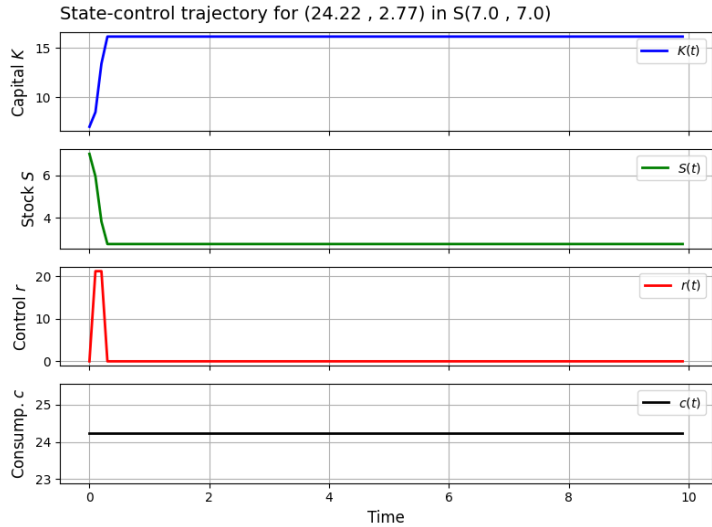


Figura 3.3.2: Trayectoria encontrada que permite mantener simultáneamente un consumo mínimo de $c_{\#} = 24,22$ y un nivel de recurso natural de $S_{\#} = 2,77$.

A modo de ejemplo, al resolver el problema (3.2.2) (b) para alcanzar el umbral $(24,22; 2,77) \in \mathbb{S}(7,7)$, se obtiene la trayectoria representada en la figura 3.3.2. Esta solución muestra que el

sistema recurre inicialmente al recurso natural hasta alcanzar un nivel de capital que permita mantener el nivel de consumo $c_{\#}$ de manera autosuficiente y sin necesidad de seguir agotando el recurso. A partir del análisis de esta trayectoria, se observa que el sistema alcanza un *equilibrio sustentable en tiempo finito*. Es decir, luego de una fase transitoria de extracción, se estabiliza en un estado donde el capital generado basta por sí solo para sostener el consumo deseado, sin necesidad de continuar explotando el recurso natural. Como consecuencia, el Conjunto de Umbrales Sustentables $\mathbb{S}(K_0, S_0)$ no depende del valor del horizonte temporal T , siempre que este sea suficientemente grande como para permitir que se complete dicha fase de transición.

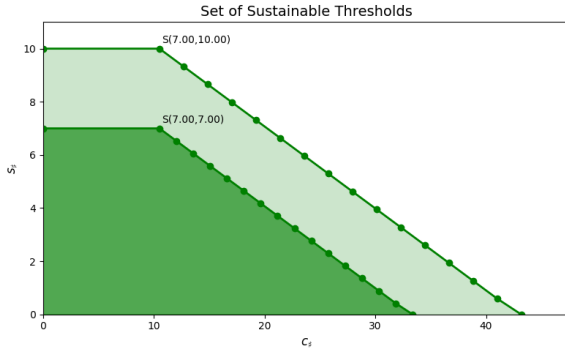


Figura 3.3.3: Comparación entre $\mathbb{S}(7, 7)$ y $\mathbb{S}(7, 10)$. Aquí, el nivel de capital inicial se mantiene constante.

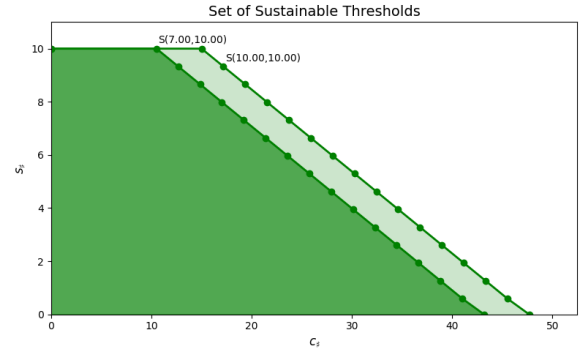


Figura 3.3.4: Comparación entre $\mathbb{S}(7, 10)$ y $\mathbb{S}(10, 10)$. Aquí, el nivel de recurso natural inicial se mantiene constante.

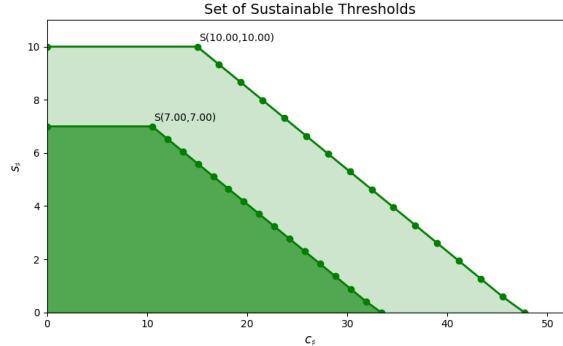


Figura 3.3.5: Comparación entre $\mathbb{S}(7, 7)$ y $\mathbb{S}(10, 10)$. Aquí, tanto el capital como el nivel de recurso natural iniciales varían.

Figura 3.3.6: Comparación del Conjunto de Umbrales Sustentables asociado a varias condiciones iniciales.

En cuanto al análisis de sensibilidad, los resultados teóricos presentados en [7] no son directamente aplicables debido a la presencia de la restricción de estado fija $K(t) \geq 0$. No obstante, las simulaciones presentadas en la figura 3.3.6 permiten observar cómo varía la estructura del conjunto $\mathbb{S}(K_0, S_0)$ frente a diferentes condiciones iniciales, y sugieren cierto grado de regularidad, aunque esta no será una propiedad que se vaya a demostrar formalmente aquí.

3.4. Segundo caso: recurso débilmente esencial

En este segundo caso se considerarán constantes positivas $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha > \beta$ y $\alpha + \beta \leq 1$. Dados estos parámetros, se estudiará la función de producción de Cobb-Douglas dada por

$$f(K, r) = K^\alpha r^\beta. \quad (3.4)$$

En este caso, la producción no puede sostenerse únicamente con el capital, por lo que es imprescindible una extracción incesante del recurso natural S . Sin embargo, esta función presenta una propiedad clave: dado un nivel de extracción $r > 0$, la producción puede ser arbitrariamente alta si se dispone de suficiente capital K . Como se discute en [25], esta propiedad permite alcanzar la sustentabilidad mediante un proceso de acumulación de capital que permita reducir la extracción requerida de manera constante hasta alcanzar, asintóticamente, un nivel de 0.

Aunque la expresión (3.4) es conceptualmente clara, su implementación numérica plantea dificultades debido a la singularidad de sus derivadas en los puntos (K, r) con $K = 0$ o $r = 0$. Por este motivo, en la práctica se trabajó con una versión regularizada de la forma

$$f(K, r) = K^\alpha \exp(\beta u), \quad \text{con } u = \log(r) \text{ y } K \geq 10^{-6}, \quad (3.5)$$

en la cual se introdujo el cambio de variable $u = \log(r)$ ¹ para evitar el comportamiento singular cerca de $r = 0$, y se impuso una cota inferior positiva a K por razones de estabilidad numérica.

Se realizaron simulaciones con parámetros $\alpha = 0,5$ y $\beta = 1/3 \approx 0,333$. A diferencia del caso anterior, en este sistema no es posible alcanzar un equilibrio sustentable en tiempo finito: el consumo deseado no puede mantenerse de manera indefinida sin agotar el recurso. En consecuencia, el Conjunto de Umbrales Sustentables sí depende del horizonte de tiempo T considerado. Denotando por \mathbb{S}_T el conjunto correspondiente a un tiempo final $T \in (0, +\infty]$, se tiene que:

$$T \leq T' \Rightarrow \mathbb{S}_T \supseteq \mathbb{S}_{T'} \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_\infty = \bigcap_{T>0} \mathbb{S}_T.$$

Teniendo lo anterior en consideración, la figura 3.4.1 ilustra la convergencia de los conjuntos de umbrales sustentables obtenidos en las simulaciones hacia el conjunto teórico calculado en [25].

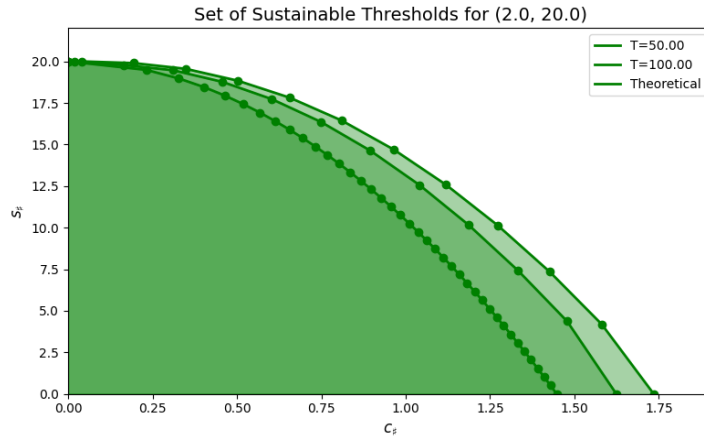


Figura 3.4.1: Conjuntos de Umbrales Sustentables $\mathbb{S}_\infty(2, 20) \subset \mathbb{S}_{100}(2, 20) \subset \mathbb{S}_{50}(2, 20)$.

¹No obstante, en todas las simulaciones se reportará el valor de r en lugar del de u .

A diferencia del primer caso, como el conjunto \mathbb{S}_T sí depende del valor del horizonte temporal T , se tiene que los valores $c_{\#}^0$ y $c_{\#}^{\max}$ también dependen del intervalo temporal escogido. Esto se refleja, por ejemplo, en la figura 3.4.1, en donde se observa cómo el umbral máximo sustentable $c_{\#}^{\max}$ decrece conforme aumenta T .

Para estudiar esta dependencia, se calcularon los valores de $c_{\#}^0$ y $c_{\#}^{\max}$ para distintos horizontes de tiempo T . Los resultados se presentan en la figura 3.4.2.

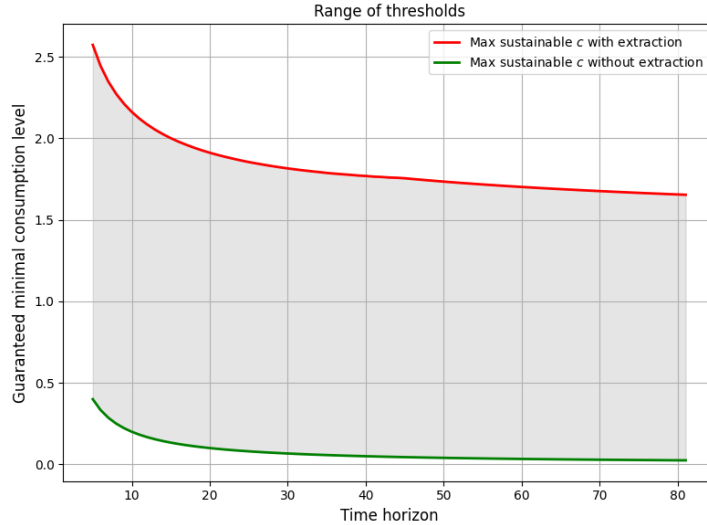


Figura 3.4.2: Valores de $c_{\#}^0$ y $c_{\#}^{\max}$ en función del horizonte temporal T .

Asumiendo que ambas curvas pueden aproximarse mediante una función de la forma

$$y = a x^e + b,$$

en donde $a, b, e \in \mathbb{R}$ son parámetros a estimar, tendríamos que el parámetro b corresponde al valor límite (asintótico) al cual tienden las curvas cuando $T \rightarrow \infty$. Al aplicar un ajuste de curva con la función `curve_fit` de la biblioteca `scipy`, se obtuvo que el valor asintótico estimado para $c_{\#}^0$ es, como era de esperarse, cercano a 0; mientras que para $c_{\#}^{\max}$ se estimó un valor de 1,4965. Este último se encuentra próximo al valor teórico reportado en [25], el cual es 1,4475.

No obstante lo anterior, las trayectorias obtenidas como solución de los problemas (3.2.2) (b) presentan un comportamiento indeseado hacia el final del horizonte temporal. La figura 3.4.3 ilustra una de estas trayectorias. Se observa que, en las etapas finales, la estrategia hallada consiste en cesar completamente la extracción del recurso natural y consumir de manera agresiva el capital acumulado, llevándolo a cero justo al finalizar el periodo considerado. Este tipo de comportamiento no es sustentable si se desea extender el horizonte temporal T , y tiende a sobreestimar artificialmente el nivel máximo de consumo que puede sostenerse.

Con el objetivo de desalentar este tipo de estrategias oportunistas —que agotan el capital en el último momento—, se propuso una modificación en el esquema de simulación. En concreto, se extendió artificialmente el horizonte de tiempo de la simulación en un 43% (por ejemplo, de un tiempo final de $T = 100$ pasamos a un tiempo de simulación de $T = 143$) y, durante esta etapa adicional, se incrementó la demanda de consumo en un 230%. Esta modificación busca simular un escenario en el cual el sistema debe seguir siendo funcional más allá de la ventana de tiempo

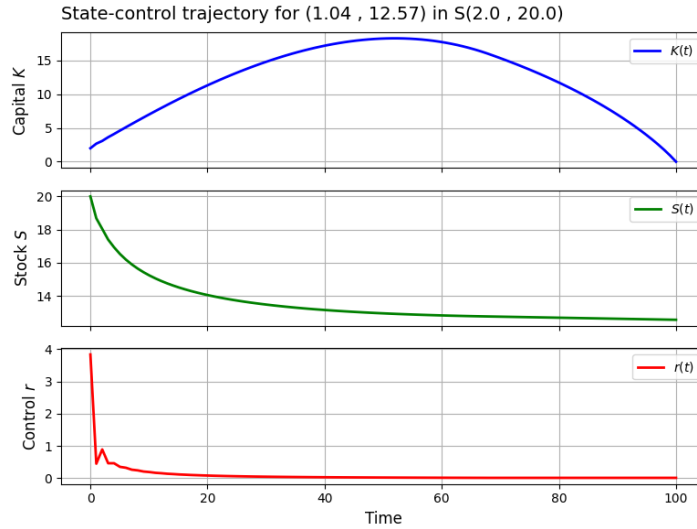


Figura 3.4.3: Trayectoria encontrada que permite mantener simultáneamente un consumo mínimo de $c_{\#} = 1,04$ y un nivel de recurso natural de $S_{\#} = 12,57$ durante un horizonte de tiempo de $T = 100$.

original, incentivando así trayectorias que mantengan un comportamiento sustentable también hacia el final del periodo relevante. La idea central es que, aunque el capital pueda agotarse al final de la simulación extendida, que este agotamiento se relegue al periodo temporal agregado y no contamine la estimación del comportamiento dentro del intervalo original.

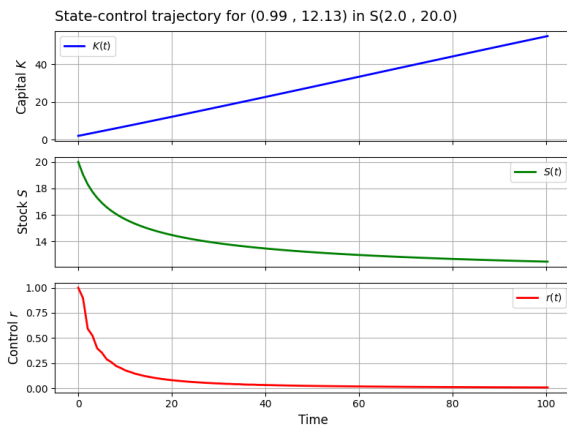


Figura 3.4.4: Trayectoria sustentable a tiempo final encontrada para $T = 100$.

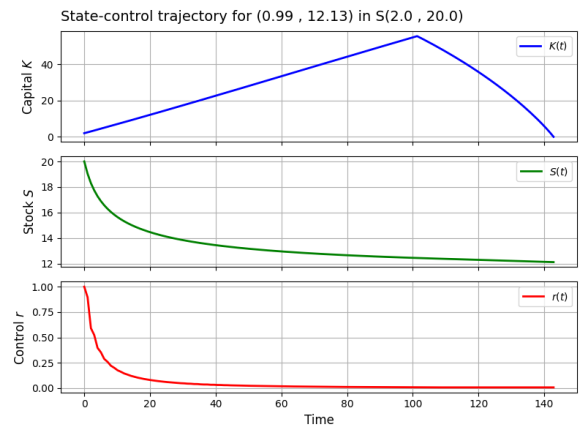


Figura 3.4.5: Trayectoria completa calculada para $T = 143$.

Las figuras 3.4.4 y 3.4.5 muestran los resultados de este enfoque. En la primera, se observa que la trayectoria correspondiente al intervalo $[0, 100]$ mantiene un comportamiento sustentable: el capital se acumula progresivamente y la extracción del recurso se reduce hasta aproximarse a cero. Por otra parte, la figura 3.4.5 muestra la trayectoria completa hasta $T = 143$, donde se aprecia cómo, una vez superado el punto $t = 100$ y ante el aumento de la demanda, el sistema opta por cesar la producción y agotar el capital restante. Al trasladar el agotamiento al tramo extendido, se preserva la validez del análisis de sustentabilidad en el periodo de interés original.

Finalmente, se repitió el cálculo del Conjunto de Umbrales Sustentables utilizando el esquema modificado con horizonte temporal extendido y aumento de demanda hacia el final del periodo. Los conjuntos obtenidos muestran una mejor aproximación al Conjunto de Umbrales Sustentables teórico correspondiente al caso $T = +\infty$, reportado en [25] (véanse las figuras 3.4.6 y 3.4.7). Esto sugiere que la estrategia adoptada permite mitigar, en cierta medida, la sobreestimación de los niveles de consumo sustentables que resulta del agotamiento oportunista del capital al final del horizonte de simulación.

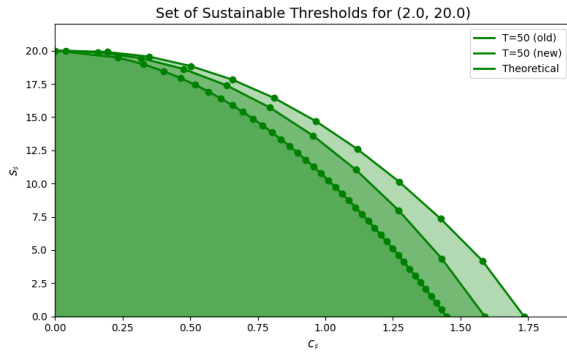


Figura 3.4.6: Comparación entre el Conjunto de Umbrales Sustentables calculado para $T = 50$ usando ambos métodos y el conjunto teórico para $T = +\infty$.

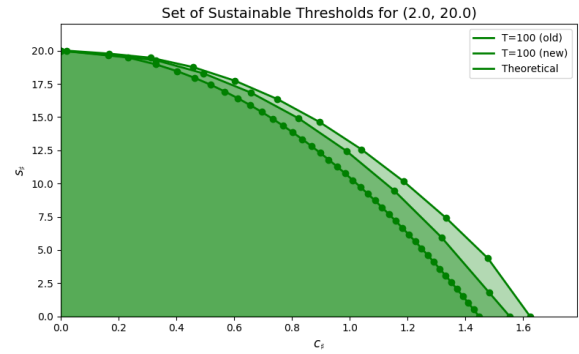


Figura 3.4.7: Comparación entre el Conjunto de Umbrales Sustentables calculado para $T = 100$ usando ambos métodos y el conjunto teórico para $T = +\infty$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se formularon y demostraron, para sistemas de control a tiempo continuo, versiones extendidas de los principales resultados teóricos disponibles en la literatura sobre las propiedades variacionales del Conjunto de Umbrales Sostenibles. El enfoque adoptado se centró en continuar y profundizar la línea de investigación iniciada en [17], pionera en el estudio de este objeto desde la perspectiva del análisis multivaluado. Esta tarea requirió una cuidadosa adaptación de técnicas previamente desarrolladas para sistemas a tiempo discreto, motivando el uso de herramientas provenientes de la teoría de inclusiones diferenciales y del análisis de sistemas dinámicos no lineales con propiedades de monotonía. Los resultados obtenidos no solo fortalecen las bases teóricas para el análisis del Conjunto de Umbrales Sostenibles, sino que también abren nuevas vías para su estudio cualitativo y computacional.

Las contribuciones de esta tesis se estructuran en torno a tres ejes principales: (i) las condiciones bajo las cuales el grafo del Conjunto de Umbrales Sostenibles es cerrado, (ii) la convexidad de dicho grafo bajo hipótesis generalizadas de monotonía y convexidad, y (iii) las propiedades de continuidad del conjunto cuando se le interpreta como una multifunción del estado inicial.

En relación con el primer eje, se introduce una noción clave propia del análisis en tiempo continuo: el *Conjunto Relajado de Umbrales Sostenibles*, el cual permite recuperar la propiedad de la cerradura topológica del grafo de la multifunción del Conjunto de Umbrales Sustentables relajado, propiedad que en general no se verifica para el conjunto original. Un resultado particularmente destacable en este contexto es el Teorema 2.1.2 (véase también [7, Teorema 7]), que aborda sistemas con restricciones mixtas. Para su demostración se emplea la metodología propuesta en [12], en donde las restricciones mixtas se “absorben” en la dinámica a través de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F_c(t, x(t)) := \{f(t, x, u) : u \text{ tal que } g(t, x, u) \leq c\} \quad \text{c.t.p.} \quad (4.1)$$

Aunque los problemas (4.1) y (1.3) son equivalentes bajo condiciones generales, demostrar que la multifunción F_c cumple propiedades de regularidad tipo Lipschitz resulta altamente no trivial. En la literatura, estas condiciones se verifican típicamente para un umbral fijo $c \in \mathbb{R}^m$ introduciendo hipótesis adicionales tales como la *Bounded Slope Condition* ([12]). Asegurarlas de forma uniforme sobre un conjunto de umbrales variables constituye un desafío adicional, abordado en el Teorema 2.1.2 mediante el uso de propiedades de monotonía satisfechas por los pares factibles de estado y control.

En cuanto a los otros dos ejes temáticos, se sigue de cerca la línea propuesta por [17] en su sección de Discusión y Perspectivas. En particular, se logran establecer extensiones directas de

sus resultados sobre la convexidad del grafo y la continuidad de la multifunción, adaptando las estrategias de demostración al marco de tiempo continuo en los puntos donde esto fue necesario.

Como una última sección adicional del trabajo, las simulaciones numéricas realizadas sobre el modelo de ejemplo (3.2) permitieron ilustrar tanto el alcance como las limitaciones del enfoque teórico desarrollado. Se observó que en el caso de una función de producción lineal, el sistema logra alcanzar un equilibrio sustentable en tiempo finito, lo que da lugar a conjuntos de umbrales bien comportados e independientes del horizonte temporal. Sin embargo, al considerar una función de tipo Cobb-Douglas, el sistema no logra alcanzar este tipo de equilibrio, y los resultados dependen del horizonte de simulación elegido.

Esta diferencia estructural evidenció la necesidad de adaptar el esquema computacional para evitar soluciones numéricamente válidas pero conceptualmente no sostenibles. El procedimiento propuesto —que extiende el horizonte de simulación y plantea una fase final con mayor exigencia de consumo— se mostró apto para obtener representaciones más conservadoras y fieles del Conjunto de Umbrales Sostenibles.

En conjunto, este trabajo aporta herramientas teóricas y evidencia computacional que refuerzan la pertinencia del análisis multivaluado en el estudio de sistemas dinámicos sujetos a indicadores, al tiempo que destaca la importancia de una formulación cuidadosa —tanto en lo matemático como en lo numérico— para garantizar interpretaciones robustas y útiles en aplicaciones prácticas. A partir de este trabajo, emergen diversas líneas prometedoras para investigaciones futuras. Por ejemplo, no se abordan aquí sistemas sujetos a restricciones de estado adicionales y fijas (es decir, no parametrizadas por umbrales), tales como restricciones de no negatividad. Este tipo de restricciones presentan desafíos teóricos adicionales debido a que, en estos casos, la existencia de soluciones puede no estar garantizada para todo control y condición inicial dados, ya que una estrategia factible desde un cierto estado inicial puede violar las restricciones fijas cuando se aplica desde otro estado inicial. Otra dirección interesante consiste en extender el análisis realizado al contexto de los sistemas de control en espacios de Wasserstein, donde las variables de estado representan distribuciones de probabilidad que modelan el estado (incierto) del sistema, y cuya evolución está gobernada por una ecuación de continuidad impulsada por un campo vectorial de velocidades que es influenciado por las variables de control. Avances recientes, como los presentados en [6], ofrecen las herramientas matemáticas necesarias para comenzar a explorar esta área novedosa y rica desde la perspectiva de inclusiones diferenciales que fue adoptada a lo largo de este trabajo.

Bibliografía

- [1] Albert Altarovici, Olivier Bokanowski y Hasnaa Zidani. “A general Hamilton-Jacobi framework for non-linear state-constrained control problems”. En: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 19.2 (2013), págs. 337-357.
- [2] Jean-Pierre Aubin, Alexandre M. Bayen y Patrick Saint-Pierre. *Viability Theory: New Directions*. 2.^a ed. Originally published by Birkhäuser Boston. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2011, págs. XXI, 803. ISBN: 978-3-642-16684-6. DOI: [10.1007/978-3-642-16684-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-16684-6).
- [3] Jean-Pierre Aubin y Arrigo Cellina. *Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory*. 1.^a ed. Vol. 264. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1984, págs. XIII + 342. ISBN: 978-3-642-69514-8. DOI: [10.1007/978-3-642-69512-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69512-4). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69512-4>.
- [4] Edwin Barrios, Pedro Gajardo y Olga Vasilieva. “Sustainable thresholds for cooperative epidemiological models”. En: *Mathematical Biosciences* 302 (2018), págs. 9-18. ISSN: 0025-5564. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2018.05.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556417305527>.
- [5] Logan D. R. Beal et al. “GEKKO Optimization Suite”. En: *Processes* 6.8 (2018). ISSN: 2227-9717. DOI: [10.3390/pr6080106](https://doi.org/10.3390/pr6080106). URL: <https://www.mdpi.com/2227-9717/6/8/106>.
- [6] Benoît Bonnet y Hélène Frankowska. “Differential Inclusions in Wasserstein Spaces: The Cauchy-Lipschitz Framework”. En: *Journal of Differential Equations* 271 (2021), págs. 594-637. DOI: [10.1016/j.jde.2020.08.031](https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.031). URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02906913>.
- [7] Alonso Carrasco Urbina y Cristopher Hermosilla. “Variational properties of the Set of Sustainable Threshold in a continuous-time framework”. En: (2025). Under review at *Set-Valued and Variational Analysis*.
- [8] Francis Clarke. *Necessary Conditions in Dynamic Optimization*. Vol. 816. Memoirs of the American Mathematical Society. Providence, RI: American Mathematical Society, ene. de 2005, págs. viii+113. ISBN: 978-0-8218-3581-5. DOI: [10.1090/memo/0816](https://doi.org/10.1090/memo/0816). URL: <https://bookstore.ams.org/memo-178-816>.
- [9] Francis Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990.
- [10] Earl A. Coddington, Norman Levinson y T. Teichmann. “Theory of Ordinary Differential Equations”. En: *Physics Today* 9.2 (feb. de 1956), págs. 18-18. ISSN: 0031-9228. DOI: [10.1063/1.3059875](https://doi.org/10.1063/1.3059875). eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/9/2/18/7386821/18_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3059875>.

- [11] Michel De Lara y Vincent Martinet. “Multi-criteria dynamic decision under uncertainty: A stochastic viability analysis and an application to sustainable fishery management”. En: *Mathematical Biosciences* 217.2 (2009), págs. 118-124. ISSN: 0025-5564. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.11.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556408001788>.
- [12] M. d. R. de Pinho e Igor Kornienko. “Differential Inclusion Approach for Mixed Constrained Problems Revisited”. En: *Set-Valued and Variational Analysis* 23.3 (2015), págs. 425-441. ISSN: 1877-0541. DOI: [10.1007/s11228-014-0315-2](https://doi.org/10.1007/s11228-014-0315-2). URL: <https://doi.org/10.1007/s11228-014-0315-2>.
- [13] Luc Doyen, Patrice Dumas y P. Ambrosi. “Optimal timing of CO2 mitigation policies for a cost-effectiveness model”. En: *Mathematical and Computer Modelling* 48.5 (2008), págs. 882-897. ISSN: 0895-7177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.11.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717707003688>.
- [14] Luc Doyen y Pedro Gajardo. “Sustainability standards, multicriteria maximin, and viability”. En: *Natural Resource Modeling* 33.3 (2020), e12250. DOI: <https://doi.org/10.1111/nrm.12250>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/nrm.12250>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/nrm.12250>.
- [15] Eduardo R. Fuentes. “Scientific research and sustainable development”. En: *Ecological Applications* 3.4 (1993), págs. 576-577.
- [16] Pedro Gajardo. “Sobre el conjunto de umbrales sostenibles”. En: *Revista de Modelamiento Matemático de Sistemas Biológicos* 1.1 (2021).
- [17] Pedro Gajardo, Thomas Guilmeau y Cristopher Hermosilla. “Sensitivity Analysis of the Set of Sustainable Thresholds”. En: *Set-Valued and Variational Analysis* 32.2 (2024), pág. 18. ISSN: 1877-0541. DOI: [10.1007/s11228-024-00721-7](https://doi.org/10.1007/s11228-024-00721-7). URL: <https://doi.org/10.1007/s11228-024-00721-7>.
- [18] Pedro Gajardo y Cristopher Hermosilla. “Pareto Fronts of the Set of Sustainable Thresholds for Constrained Control Systems”. En: *Applied Mathematics & Optimization* 83.2 (2021), págs. 1103-1121. ISSN: 1432-0606. DOI: [10.1007/s00245-019-09580-3](https://doi.org/10.1007/s00245-019-09580-3). URL: <https://doi.org/10.1007/s00245-019-09580-3>.
- [19] Pedro Gajardo, Cristopher Hermosilla y Athena Picarelli. “On the set of robust sustainable thresholds”. En: *Natural Resource Modeling* 34.4 (2021), e12334. DOI: <https://doi.org/10.1111/nrm.12334>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/nrm.12334>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/nrm.12334>.
- [20] Pedro Gajardo, Maximiliano Olivares y Héctor Ramírez. “Methods for the Sustainable Rebuilding of Overexploited Natural Resources”. En: *Environmental Modeling & Assessment* 23.6 (dic. de 2018), págs. 713-727. ISSN: 1573-2967. DOI: [10.1007/s10666-018-9611-9](https://doi.org/10.1007/s10666-018-9611-9). URL: <https://doi.org/10.1007/s10666-018-9611-9>. Published online: 18 April 2018.
- [21] Pedro Gajardo y Alberto Seeger. “Cross-nonnegativity and monotonicity analysis of nonlinear dynamical systems”. En: *Journal of Differential Equations* 300 (2021), págs. 33-52. ISSN: 0022-0396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.07.031>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039621004824>.
- [22] Pedro Gajardo y Alberto Seeger. “Cross-nonnegativity and monotonicity analysis of nonlinear dynamical systems”. En: *Journal of Differential Equations* 300 (2021), págs. 33-52.

- [23] R. Quentin Grafton et al. “Realizing resilience for decision-making”. En: *Nature Sustainability* 2.10 (2019), págs. 907-913. ISSN: 2398-9629. DOI: [10.1038/s41893-019-0376-1](https://doi.org/10.1038/s41893-019-0376-1). URL: <https://doi.org/10.1038/s41893-019-0376-1>.
- [24] Vincent Martinet. “A characterization of sustainability with indicators”. En: *Journal of Environmental Economics and Management* 61.2 (2011), págs. 183-197. ISSN: 0095-0696. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeem.2010.10.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009506961000104X>.
- [25] Vincent Martinet y Luc Doyen. “Sustainability of an economy with an exhaustible resource: A viable control approach”. En: *Resource and Energy Economics* 29.1 (2007), págs. 17-39. ISSN: 0928-7655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.reseneeco.2006.03.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0928765506000273>.
- [26] Vincent Martinet, Pedro Gajardo y Michel de Lara. “Bargaining with Intertemporal Maximin Payoffs”. En: *CESifo Working Paper Series* 7471 (2019). DOI: [10.2139/ssrn.3338825](https://doi.org/10.2139/ssrn.3338825). URL: <https://ssrn.com/abstract=3338825>. Available at SSRN.
- [27] Aïchouche Oubraham y Georges Zaccour. “A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources”. En: *Ecological Economics* 145 (2018), págs. 346-367. ISSN: 0921-8009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecolecon.2017.11.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921800917301386>.
- [28] R. Tyrrell Rockafellar y Roger J. B. Wets. *Variational Analysis*. 1.^a ed. Vol. 317. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, págs. XII+736. ISBN: 978-3-540-62772-2. DOI: [10.1007/978-3-642-02431-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3).
- [29] H. L. Royden y Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. 4.^a ed. Prentice Hall Modern Classics. Previous editions by H.L. Royden only. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010, pág. 505. ISBN: 978-0-13-143747-0.
- [30] Hal L. Smith. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. Vol. 41. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1995, págs. x+174. ISBN: 978-0-8218-0352-4. DOI: [10.1090/surv/041](https://doi.org/10.1090/surv/041). URL: <https://bookstore.ams.org/surv-41>.
- [31] United Nations. *Indicators of Sustainable Development: Guidelines and Methodologies*. Inf. téc. E.08.II.A.2. 07-53189—December 2007—2,300. New York: United Nations, oct. de 2007.
- [32] Richard Vinter. *Optimal Control*. 1.^a ed. Modern Birkhäuser Classics. Boston, MA: Birkhäuser, 2010, págs. XX+500. ISBN: 978-0-8176-8086-2. DOI: [10.1007/978-0-8176-8086-2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8086-2).

Apéndice

Variational properties of the Set of Sustainable Threshold in a continuous-time framework

Alonso Carrasco Urbina^{1†} and Christopher Hermosilla^{1*†}

^{1*}Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, 100190, State, Chile.

*Corresponding author(s). E-mail(s): christopher.hermosill@usm.cl;

Contributing authors: alonso.carrasco@usm.cl;

[†]These authors contributed equally to this work.

Abstract

In this paper we investigate, from a variational analysis standpoint, the so-called *Set of Sustainable Thresholds* associated with a given control system. This set corresponds to a certain collection of parameters that ensure, for a given initial state, that the pathwise constraints of the control systems are satisfied within a prescribed period of time. Our goal is to study properties of the Set of Sustainable Thresholds when it is seen as a set-valued map that depends on the initial state of the control system. The novelty of this work is that our analysis is carried out in the context of continuous-time control systems, extending recent developments reported for the discrete-time framework. Using tools from differential inclusions, we establish conditions for ensuring that the Set of Sustainable Thresholds defines a closed set-valued map. Furthermore, we investigate convexity properties of this set-valued map by using some recent developments in monotonicity analysis for nonlinear dynamical systems. Finally, we study continuity properties of this set-valued mapping, with emphasis on lower semicontinuity and Lipschitz continuity.

Keywords: Set-valued maps, Set of Sustainable Thresholds, Continuous-time systems, mixed-constraints, Semicontinuity, Lipschitz continuity, Convexity

MSC Classification: 49J53 , 37N35 , 93C15

1 Introduction

Motivated by the sustainable management of renewable natural resources, this paper examines models formulated as continuous-time control systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \text{for a.e. } t \in [0, T]; \\ u(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d, & \text{for a.e. } t \in [0, T]; \\ x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

These models comprise an initial state, a system of ordinary differential equations describing the dynamics of the system, which are in turn driven by a control function that represents external influences to be exerted by decision-makers. In this work, particular attention is put on a finite collection of indicators (thresholds) that are used for evaluating different aspects of the system and its performance. The mathematical tool used for such a purpose is the so-called *Set of Sustainable Thresholds* (SST for short) associated with the control systems (1) and the mixed control-state constraints

$$g_i(t, x(t), u(t)) \leq c_i, \quad t \in [0, T], \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

The SST corresponds, for a prescribed initial condition $\xi \in \mathbb{R}^n$, to the set $\mathbb{S}(\xi) \subset \mathbb{R}^m$ of all possible thresholds $c = (c^1, \dots, c^m) \in \mathbb{R}^m$, for which the constraints in (2) remain viable throughout the evolution of the system, for at least one trajectory of the control system (1); see Definition 1 for a technical description.

Our task in this work is to transpose the results reported in [1] for discrete-time control systems to continuous-time models. In particular, we aim at understanding some variational properties of the mapping $\xi \mapsto \mathbb{S}(\xi)$, regarding closedness and convexity, as well as its continuity properties.

It is worthy to point out that the SST can be a powerful tool for assessing and formulating sustainability policies, as well as for defining viability or safety indicators that remain within the system's capabilities. As noted in [2], such indicators serve multiple purposes and can be broadly categorized into social, economic, environmental, or institutional indicators. Following the recommendations of [3], the selected indicators should be useful to both managers and stakeholders, while also enabling comparisons and rankings when assessing different management strategies. As an illustrative example in the context of marine fisheries, we could mention the monetary value of the harvest as an economic indicator, alongside the biomass of the remaining stock as an ecological indicator. It is therefore relevant to understand the variational properties of the SST mapping, especially for developing practical schemes for computing their Pareto fronts, as done in [4] for discrete-time control systems.

The SST has been introduced in different ways across the literature. In [5], Martinet introduces the concept while seeking for a criterion to characterize sustainability with indicators, where he interprets the constraints as minimal rights to be guaranteed throughout time (note that in this interpretation the indicators should have an extra negative sign for the inequalities in (2) to be reversed). Thus, he uses the SST to describe all the levels of these indicators that are achievable for all future generations,

and then chooses from it the preferred thresholds as sustainability goals. Providing another perspective, Barrios et al. in [6] use this notion to incorporate measures on the transient behavior of epidemiological systems into decision-making. Because the constraints in (2) have to be satisfied for all time, this approach avoid possible biases originating from the pursue of end-goal objectives that could neglect what happens in the in-between.

An unifying theme, however, is that of evaluating the capabilities of a system in order to reach satisfactory trade-offs between multiple objectives that are usually at conflict with each other. As mentioned in [4], when viewed as a function of the initial condition the SST provides a good picture of the current state of a system in terms of the thresholds that can be maintained in a sustainable way. Smaller sets would signify more vulnerable states, and larger sets more robust ones. Besides, by considering all desirable sustainable situations as a whole, our approach avoids imposing a hierarchy of objectives or aggregating them into a single, potentially biased or controversial objective function. This allows sustainability challenges to be addressed in a more holistic manner, focusing on the possibility of finding a path that represents an acceptable compromise for all parties, as stated in [7].

Finally, we remark that, in a sense, the SST acts as an inverse object to the *Viability Kernel* from Viability Theory (see [8] for the general theory and [9] for a survey on applications to sustainable management). The fundamental difference is that SST focuses on the constraints that are possible to satisfy for a given fixed initial state, while the Viability Kernel focuses on the initial states for which a fixed set of constraints are viable. This new approach remains relevant because, in some contexts, the question of sustainability is more relevant than that of viability, specially when decision-makers lack the flexibility to alter the current state of a system at will, but have greater freedom to set thresholds and implement policies to guide future actions in alignment with the present situation.

We organized the manuscript as follows: in Section 2, we state the basic definitions, set the framework for continuous-time systems and discuss the hypotheses that will be imposed on the data. We also introduce the *relaxed* SST as a new definition that emerges due to the continuous-time nature of the setting and is intrinsically tied to it.

Section 3 is concerned with the study of closedness properties of the graph of the SST mapping. In Section 3.1 we show that, under mild conditions, the relaxed SST has a closed graph. In Section 3.2 we use the theory of differential inclusions to give more precise relationships between the SST and its relaxed counterpart for state-constrained systems and for mixed-constrained systems

Afterwards, following [1], in Section 4 we establish the convexity of the graph of the SST for systems satisfying a generalized notion of monotonicity and convexity. The main result of this section is analogous to [1, Theorem 3], but its proof uses a different strategy based on some new results reported in [10]. Finally, in Section 5 we study how this set changes with respect to the initial condition, focusing on lower semicontinuity and Lipschitz continuity.

2 Mathematical Background

This paper focuses on continuous-time dynamical systems. The data of our model comprises a finite time horizon $T > 0$, a control space which is a nonempty set $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, a controlled vector field $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ describing the dynamics of the system and a vector-valued function $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ defined as $g = (g_1, \dots, g_m)$, where each component g_i represents one of the m indicators of interest. The function g we will refer to as the *constraint function* to avoid confusion with the notion of *indicator function* from convex analysis or measure theory.

Respecting the notation, \mathbb{R} denotes the set of real numbers, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the Euclidean inner product on \mathbb{R}^n . We write \mathbb{B} for the unit closed ball of \mathbb{R}^n . If $a, b \in \mathbb{R}^m$, then $a \leq b$ means inequality component-wise, that is $a_i \leq b_i$ for $i = 1, \dots, m$. We write $\mathbf{1}_m = (1, 1, \dots, 1)$ for the 1-vector of size m .

Moreover, $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ stands for the (equivalence class of Lebesgue) measurable \mathbb{R}^n -valued arcs on $[0, T]$ that are p -integrable if $p < +\infty$ or essentially bounded if $p = +\infty$. Also, $AC([a, b]; \mathbb{R}^n)$ for the set of \mathbb{R}^n -valued absolutely continuous functions defined on $[a, b]$.

2.1 Basic definitions

With respect to the control functions, we will consider all measurable functions as feasible controls and denote the set of such functions as

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow \mathbf{U} : u \text{ is Lebesgue measurable}\}.$$

Formally, the SST mapping is defined as follows.

Definition 1 We define the *SST* as the set-valued mapping $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ that to each initial state $\xi \in \mathbb{R}^n$ assigns the set

$$\mathbb{S}(\xi) := \{c \in \mathbb{R}^m : \exists u \in \mathcal{U} \text{ such that } g(t, x_\xi^u(t), u(t)) \leq c, \text{ for a.e. } t \in [0, T]\}, \quad (3)$$

where $x_\xi^u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a solution (if any) of system (1) associated with the control $u \in \mathcal{U}$.

Example 1 We consider an example from [11], describing an economic production-consumption system based on the use of an exhaustible resource. The state variable is $x(t) = (K(t), S(t))$, where $K(t)$ is a reproducible capital stock and $S(t)$ is the remaining stock of the resource. The control variable is $u(t) = (r(t), c(t))$, where $r(t)$ is the extraction rate of the resource and $c(t)$ is the consumption rate. The controls are assumed to be nonnegative and bounded. Additionally, the dynamics is $f(x, u) = \varphi(K, r) - c$, where φ is a function representing the production technology. The mathematical models reads as follows.

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = \varphi(K(t), r(t)) - c(t), & \text{for a.e. } t \in [0, T], \\ \dot{S}(t) = -r(t), & \text{for a.e. } t \in [0, T], \\ S^\# \leq S(t), & \forall t \in [0, T], \\ c^\# \leq c(t) & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4)$$

Given an initial condition $\xi = (K_0, S_0)$, the SST for this system (after a sign change to reverse the inequalities) consists of all conservation thresholds $S^\#$ and minimum guaranteed consumption levels $c^\#$ that can be jointly maintained over time.

In this way, the SST allows us to shift from selecting a specific optimization target (what *must* be) to identifying feasible constraints that the system can sustain (what *can* be).

While definition 1 works well in the discrete-time setting, we will see that for continuous-time systems it will be necessary to adjust this definition to a somewhat more *relaxed* version of the original SST that allows arbitrarily small errors in each constraint function in order to regain closedness properties. In this vein, we introduce the following definition:

Definition 2 The *relaxed SST* is the set-valued mapping $\mathbb{S}_r: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ defined for each $\xi \in \mathbb{R}^n$ as follows

$$\mathbb{S}_r(\xi) := \{c \in \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0, c + \varepsilon \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}(\xi)\}, \quad (5)$$

where $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)$ denotes the 1-vector of size m (i.e., the vector of all ones).

Here, the subscript r stands for “relaxed”, and the condition in (5) is equivalent to asking that for every $\varepsilon > 0$ there exists a control $u \in \mathcal{U}$ such that

$$g(t, x_\xi^u(t), u(t)) \leq c + \varepsilon \mathbf{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Example 2 To illustrate the difference between \mathbb{S} and \mathbb{S}_r , consider the case with $T = 1$, control set $\mathbf{U} = \{-1, 1\}$, dynamics $f(t, x, u) = u$, initial state $\xi = 0$, and state constraints given by $g_1(t, x, u) = -x$ and $g_2(t, x, u) = x$. The system reads:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) & \text{for a.e. } t \in [0, 1], \\ u : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} & \text{measurable,} \\ x(0) = 0, \\ \text{Subject to } -c^1 \leq x(t) \leq c_2 & \text{for all } t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (6)$$

Evaluating the initial condition in g yields the requirement $c^1, c_2 \geq 0$. If either c^1 or c_2 is strictly positive, we can construct an admissible control that keeps $x(t)$ within the bounds by switching between $u = 1$ and $u = -1$ with sufficient high frequency.

In contrast, setting $c^1 = c_2 = 0$ forces $x(t) \equiv 0$, which is not feasible for this control system, since $\dot{x}(t)$ cannot vanish. Hence, $\mathbb{S}(0) = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, which is not closed.

However, this limiting point $(0, 0)$ is admissible in the relaxed sense, so $\mathbb{S}_r(0) = \mathbb{R}_+^2$. This suggests that we can attach the *limiting* points using the notion of relaxed thresholds.

Results about the relationship between these two sets are discussed in section 3.

2.2 Standing assumptions

In this section we present the basic assumptions over the data of the control system, as well as important background results and estimates that will be used in the proofs of the forthcoming sections. Regarding the dynamic of the system we will assume:

Hypothesis 1 The control space $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d$ is nonempty and compact, and the following conditions on $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ hold simultaneously:

1. $(t, u) \mapsto f(t, x, u)$ is a Carathéodory function for any fixed $x \in \mathbb{R}^n$.
2. There exists a function $\ell \in L^1([0, T])$ such that $x \mapsto f(t, x, u)$ is $\ell(t)$ -Lipschitz continuous for all $(t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}$.
3. There exists a point $x_0 \in \mathbb{R}^m$ and a function $\gamma \in L^1([0, T])$ such that

$$\max_{u \in \mathbf{U}} \|f(t, x_0, u)\| \leq \gamma(t), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Hypothesis 1 guarantees that for every fixed control $u \in \mathcal{U}$ and for any given initial state $\xi \in \mathbb{R}^n$ there will exist a unique absolutely continuous arc $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, solution of (1). We denote this unique solution by x_ξ^u .

Besides, the Lipschitz regularity of f yields a Lipschitz estimate in the uniform norm for the dependence of this solution with respect to the initial state ξ . More precisely, for any fixed $u \in \mathcal{U}$ we have that

$$\|x_\xi^u - x_{\xi'}^u\|_\infty \leq L^F \|\xi - \xi'\|, \quad \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

where $L^F > 0$ is given by $L^F = \exp\left(\int_0^T \ell(s) ds\right)$. Additionally, from Hypothesis 1, we get the estimate

$$\|f(t, x, u)\| \leq \gamma_1(t)\|x\| + \gamma_2(t), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}, \text{ for a.e. } t \in [0, T],$$

where $\gamma_1 := \ell$ and $\gamma_2 := \|x_0\|\ell + \gamma$ are $L^1([0, T])$ functions. Then, from Gronwall's inequality ([12, Lemma 2.4.4]), we obtain that

$$\|x_\xi^u\|_\infty \leq K := e^{\|\gamma_1\|_{L^1}} \left(\|\xi\| + e^{\|\gamma_2\|_{L^1}} \right) < +\infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U}. \quad (8)$$

We highlight that estimate (8) will play an important role in justifying the use of technical results in the subsequent analysis.

Regarding the constraint function, the regularity and structural assumptions we impose on it will vary depending on the context. However, one basic assumption we will enforce is the following:

Hypothesis 2 The constraint function $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ is continuous.

Additional assumptions, such as convexity or Lipschitz continuity will be introduced as needed.

2.3 Characterizations of the SST

Before going further, we present now an adaptation to the continuous-time setting of a characterization of the SST introduced in [4] for discrete-time systems. This characterization will play a fundamental role in the analysis presented in Section 4.1.

In [4], the authors describe the set $\mathbb{S}(\xi)$ for discrete-time systems in terms of its Pareto front, and introduce a multi-objective optimal control problem, similar to (9) given below, to characterize its Pareto front (and hence the values of the SST).

In the continuous-time setting we consider the following multi-objective optimal control problem

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \left(\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} g_1(t, x_\xi^u(t), u(t)), \dots, \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} g_m(t, x_\xi^u(t), u(t)) \right). \quad (9)$$

However, while problem (9) provides a global description of the structure of the Pareto front, it is not easy to handle in practice. Therefore, to avoid the formulation of a multi-objective optimization problem, the authors in [4] also presents an alternative characterization based on single-objective optimization problems instead. This formulation, rather than describing the entire Pareto front at once, is used to determine whether a specific threshold $c \in \mathbb{R}^m$ belongs to $\mathbb{S}(\xi)$ or not, to then recover $\mathbb{S}(\xi)$ as the set of points that satisfy a certain condition. Specifically, if we define the value function $\omega : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ as

$$\omega(t, \xi, c) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \max_{i=1, \dots, m} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [t, T]} (g_i(s, x_\xi^u(s), u(s)) - c_i) \right\}. \quad (10)$$

It is proved in [4] for the discrete-time setting that

$$\operatorname{gr}(\mathbb{S}) = \{(\xi, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \omega(0, \xi, c) \leq 0\}. \quad (11)$$

We will prove that characterization (11) also holds for the continuous-time setting, but in general only if we replace \mathbb{S} by its relaxed version \mathbb{S}_r .

Proposition 1 *The following characterization of the graph of \mathbb{S}_r holds:*

$$\operatorname{gr}(\mathbb{S}_r) = \{(\xi, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \omega(0, \xi, c) \leq 0\}.$$

Furthermore, for every $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $c \in \mathbb{R}^m$ we have that

$$c + \alpha \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}_r(\xi) \quad \text{if and only if} \quad \alpha \geq \omega(0, \xi, c).$$

Proof The proof is elementary, but we provide it by completeness. Take first $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$. By definition, for every $\varepsilon > 0$ there exists $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ such that

$$g_i(t, x_\xi^{u_\varepsilon}(t), u_\varepsilon(t)) \leq c_i + \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, m, \text{ for a.e. } t \in [0, T]. \quad (12)$$

Therefore, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary we get that $\omega(0, \xi, c) \leq 0$ because

$$\omega(0, \xi, c) \leq \max_{i=1, \dots, m} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, T]} (g_i(s, x_\xi^{u_\varepsilon}(s), u_\varepsilon(s)) - c_i) \leq \varepsilon.$$

Conversely, if $\omega(0, \xi, c) \leq 0$, then for every $\varepsilon > 0$ we can find $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ such that

$$\max_{i=1, \dots, m} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, T]} (g_i(s, x_\xi^{u_\varepsilon}(s), u_\varepsilon(s)) - c_i) \leq \omega(0, \xi, c) + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

This inequality leads to (12), and so $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$.

Finally, observe that

$$\max_{i=1,\dots,m} \{g_i(s, x, u) - (c_i + \alpha)\} = \max_{i=1,\dots,m} \{g_i(s, x, u) - c_i\} - \alpha,$$

and so

$$\omega(0, \xi, c + \alpha \mathbf{1}_m) = \omega(0, \xi, c) - \alpha, \quad \forall (x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ and } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Therefore, we get $\omega(0, \xi, c + \alpha \mathbf{1}_m) \leq 0$ if and only if $\omega(0, \xi, c) \leq \alpha$, and the conclusion follows from the characterization of the graph of \mathbb{S}_r proved earlier. \square

Remark 1 It is easy to verify that if $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$, then $c + \alpha \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}_r(\xi)$ for any $\alpha \geq 0$. Proposition 1 sharpens this observation by identifying the precise shift in the direction of $\mathbf{1}_m$ required to reach the Pareto front of $\mathbb{S}_r(\xi)$. Specifically, if $c \notin \mathbb{S}_r(\xi)$, it gives the minimal $\alpha \geq 0$ such that $c + \alpha \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}_r(\xi)$; and if $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$, it finds the maximal $\alpha \geq 0$ for which $c - \alpha \mathbf{1}_m$ remains in $\mathbb{S}_r(\xi)$. Notice how shifting by $+\alpha \mathbf{1}_m$ corresponds to relaxing the constraint imposed by g , while $-\alpha \mathbf{1}_m$ corresponds to tightening it.

3 Topological properties

In this section, we begin to investigate the regularity properties of the SST by studying the closedness of its graph when viewed as a multifunction of the initial condition. Because the images of the SST are always empty or unbounded (indeed, if $c \in \mathbb{S}(\xi)$ then for every $\alpha > 0$ $c + \alpha \mathbf{1}_m$ belongs to $\mathbb{S}(\xi)$ as well), the classical upper semicontinuity condition is often too strong to hold with any generality, so instead we consider the closedness of the graph as a more flexible alternative that still retains essential limit stability properties.

Following the discussion in 2.1, we open the section by clarifying the general relationship between the multifunction $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ and its relaxed counterpart $\mathbb{S}_r : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$; and then we move on to some particular cases where this relation can be made more explicit.

3.1 Properties of the relaxed SST

Recall the definition of the relaxed SST (Definition 2):

$$\mathbb{S}_r(\xi) = \{c \in \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0, c + \varepsilon \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}(\xi)\}. \quad (13)$$

Although this definition does not introduce new concepts from a theoretical standpoint, it proves to be better suited for non-convex dynamics. As illustrated in Example 2, this relaxed notion captures the presence of *limiting* thresholds that may otherwise be excluded. In fact, the following proposition shows that incorporating relaxed thresholds allows us to recover the closure of the original SST.

Proposition 2 *The relaxed SST mapping \mathbb{S}_r has closed images. Moreover, if Hypotheses 1 and 2 hold, then we have that*

$$\overline{\text{gr}(\mathbb{S})} = \text{gr}(\mathbb{S}_r).$$

Proof It is not difficult to see that $\text{gr}(\mathbb{S}) \subset \text{gr}(\mathbb{S}_r)$. Thus, if $\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \emptyset$, then $\text{gr}(\mathbb{S}) = \emptyset$, and the conclusion is straightforward. Similarly, from (13), if $\text{gr}(\mathbb{S}) = \emptyset$ then $\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \emptyset$, and the conclusion follows as well.

Let us assume now that $\text{gr}(\mathbb{S}) \neq \emptyset$. We will prove first that

$$\overline{\mathbb{S}(\xi)} = \mathbb{S}_r(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Let $\xi \in \text{dom}(\mathbb{S})$ and consider any $c \in \overline{\mathbb{S}(\xi)}$. By definition, there exists a sequence $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ contained in $\mathbb{S}(\xi)$ such that $c_k \rightarrow c$. Take any fixed $\varepsilon > 0$ and choose $k \in \mathbb{N}$ large enough such that $c_k \leq c + \varepsilon \mathbb{1}_m$. Since $c_k \in \mathbb{S}(\xi)$, there exists $u_k \in \mathcal{U}$ such that

$$g\left(t, x_\xi^{u_k}(t), u_k(t)\right) \leq c_k \leq c + \varepsilon \mathbb{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

It follows then that $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$.

Conversely, if $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$, then from (13) we have that for every $\varepsilon > 0$, $c + \varepsilon \mathbb{1}_m \in \mathbb{S}(\xi)$, and taking $\varepsilon \rightarrow 0$ we conclude that $c \in \overline{\mathbb{S}(\xi)}$, which proves (14). In particular, the relaxed SST mapping \mathbb{S}_r has closed images.

Assume now that Hypothesis 1 holds, \mathbf{U} is compact and g is continuous. Notice that (14) implies the inclusion $\text{gr}(\mathbb{S}_r) \subseteq \overline{\text{gr}(\mathbb{S})}$. Also, since $\mathbb{S}(\xi) \subseteq \mathbb{S}_r(\xi)$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, we directly have that

$$\text{gr}(\mathbb{S}) \subseteq \text{gr}(\mathbb{S}_r) \implies \overline{\text{gr}(\mathbb{S})} \subseteq \overline{\text{gr}(\mathbb{S}_r)}.$$

Therefore, the result would follow by proving that $\text{gr}(\mathbb{S}_r)$ is closed. For this purpose, fix $(\xi, c) \in \overline{\text{gr}(\mathbb{S}_r)}$. We need to prove that $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$. Take a sequence $\{(\xi_k, c_k)\} \subseteq \text{gr}(\mathbb{S})$ such that $(\xi_k, c_k) \rightarrow (\xi, c)$ and consider any $\varepsilon > 0$. Because $c_k \rightarrow c$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for all $k > N$ we have that $c_k \leq c + \frac{\varepsilon}{4} \mathbb{1}_m$, and since $c_k \in \mathbb{S}_r(\xi_k)$ we can take $u_k \in \mathcal{U}$ such that

$$g\left(t, x_{\xi_k}^{u_k}(t), u_k(t)\right) \leq c_k + \frac{\varepsilon}{4} \mathbb{1}_m \leq c + \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad \forall k > N. \quad (15)$$

Because the sequence $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converges, thanks to (8) we have that $\{x_{\xi_k}^{u_k}(t) : t \in [0, T]\}_{k \in \mathbb{N}}$ is uniformly bounded. Consequently, there is a compact set $A \subseteq \mathbb{R}^n$ such that $x_{\xi_k}^{u_k}(t) \in A$, for every $t \in [0, T]$ and $k \in \mathbb{N}$. Then, considering that g is uniformly continuous on the compact set $[0, T] \times A \times \mathbf{U}$, there is $\delta > 0$ such that

$$x, x' \in A \text{ and } \|x' - x\| \leq \delta \implies \|g(t, x', u) - g(t, x, u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [0, T], \forall u \in \mathbf{U}. \quad (16)$$

Now, fix $\bar{k} \in \mathbb{N}$ large enough so that (15) holds and satisfies $L^F \|\xi - \xi_{\bar{k}}\| < \delta$, where L^F is the constant defined in (7). Notice that, from (7) we have that

$$\|x_\xi^{u_{\bar{k}}} - x_{\xi_{\bar{k}}}^{u_{\bar{k}}}\|_\infty \leq L^F \|\xi - \xi_{\bar{k}}\| \leq \delta.$$

Therefore, from applying (16) with $u = u_{\bar{k}}(t)$, $x = x_{\xi_{\bar{k}}}^{u_{\bar{k}}}(t)$ and $x' = x_\xi^{u_{\bar{k}}}(t)$ we obtain that

$$\left\| g\left(t, x_{\xi_{\bar{k}}}^{u_{\bar{k}}}(t), u_{\bar{k}}(t)\right) - g\left(t, x_\xi^{u_{\bar{k}}}(t), u_{\bar{k}}(t)\right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

This implies that

$$g\left(t, x_\xi^{u_{\bar{k}}}(t), u_{\bar{k}}(t)\right) \leq g\left(t, x_{\xi_{\bar{k}}}^{u_{\bar{k}}}(t), u_{\bar{k}}(t)\right) + \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Finally, (15) implies that $g\left(t, x_\xi^{u_{\bar{k}}}(t), u_{\bar{k}}(t)\right) \leq c + \varepsilon \mathbb{1}_m$ for a.e. $t \in [0, T]$, and the conclusion follows. \square

3.2 Closedness of the graph

Having established in Proposition 2 a general relationship between \mathbb{S} and \mathbb{S}_r , we now aim at understanding when these two sets are equal and what may fail when they are not. Since answering these questions involve a limit-taking procedure on the trajectories of the control system (which was avoided in Section 3.1 by fixing the control function and using continuity estimates on g), it will be convenient to frame the analysis into a *differential inclusions* setting, where compactness results are available. We will divide the analysis in two case. First we consider the case with pure state constraints (g does not depend on the control variable), and later we study the case with mixed state and control constraints.

3.2.1 Case with pure state constraints

In this part we assume that the constraint function g is independent of the control variable; with a slight abuse of notation we simply write $g(t, x, u) = h(t, x)$. Let us define the multifunction $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ via the formula

$$F(t, x) = \overline{\text{co}} \{f(t, x, u) : u \in \mathbf{U}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]. \quad (17)$$

Consider the following state-constrained differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (18)$$

Let $\mathcal{S}_{[0, T]}(\xi)$ stands for the collection of arcs $x \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ that are solution of (18). In this scenario, the measurability and regularity hypotheses on f imposed in Hypothesis 1 guarantee that the multifunction F is measurably Lipschitz continuous with linear growth, and that it has compact and non-empty images on $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Moreover, from [12, Prop. 2.3.8], we have that F is an $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ measurable multifunction. Also, it is not difficult to see that if x_ξ^u is the solution of (1) associated with the control $u \in \mathcal{U}$ starting from the initial state ξ , then it also solves (18). Thanks to the Generalized Filippov Selection Theorem [12, Thm. 2.3.13], the dynamical systems (1) and (18) are equivalent provided that $f(t, x, \mathbf{U})$ is convex. This is summarized below.

Lemma 3 *Assume that Hypothesis 1 holds and let $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ be defined by (17).*

1. *It follows that $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is an $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ measurable multifunction with compact, convex and nonempty images. Moreover, for a.e. $t \in [0, T]$ we also have*

$$F(t, x) \subseteq F(t, x') + \ell(t)\|x - x'\|\mathbb{B}, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

and, for $\gamma_1 = \ell$ and $\gamma_2 = \|x_0\|\ell + \gamma$, we have

$$F(t, x) \subseteq (\gamma_1(t)\|x\| + \gamma_2(t))\mathbb{B}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. *If $x \in \mathcal{S}_{[0, T]}(\xi)$ and $f(t, x, \mathbf{U})$ is convex, then there is $u \in \mathcal{U}$ such that $x = x_\xi^u$.*

Therefore, under the conditions of the previous lemma, it is coherent to discuss about the SST for a state-constrained system described by a differential inclusion. Let \mathbb{S}^F stands for the SST associated with the differential inclusion (18), that is

$$\mathbb{S}^F(\xi) := \{c \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathcal{S}_{[0,T]}(\xi) \text{ such that } h(t, x(t)) \leq c, \forall t \in [0, T]\}.$$

Theorem 4 *Assume that Hypotheses 1 and 2 hold, and let $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be defined by (17). Then,*

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^F).$$

In particular, if $f(t, x, \mathbf{U})$ is convex for any $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, then $\text{gr}(\mathbb{S})$ is closed.

Proof Take $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}_r)$. By definition, for every $k \in \mathbb{N}$ there exists a control $u_k \in \mathcal{U}$ such that

$$h\left(t, x_\xi^{u_k}(t)\right) \leq c + \frac{1}{k} \mathbf{1}_m, \quad \forall t \in [0, T].$$

Notice that $x_\xi^{u_k} \in \mathcal{S}_{[0,T]}(\xi)$ and the sequence $\{x_\xi^{u_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in $AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ due to estimate (8). Also, Lemma 3 ensures that the hypotheses in the Compactness of Trajectories Theorem [12, Thm. 2.5.3] are satisfied. Therefore, there is a subsequence of $\{x_\xi^{u_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (which we do not relabel) converging uniformly to an arc $\bar{x} \in \mathcal{S}_{[0,T]}(\xi)$. In particular, by continuity of h , we get that $c \in \mathbb{S}^F(\xi)$, because

$$h(t, \bar{x}(t)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} h(t, x_\xi^{u_k}(t)) \leq c, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (19)$$

Conversely, if $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}^F)$, then there exists an arc $\bar{y} \in \mathcal{S}_{[0,T]}(\xi)$ such that

$$h(t, \bar{y}(t)) \leq c, \quad \forall t \in [0, T].$$

From (8) combined with Lemma 3, we can get that the set $\{(t, \bar{y}(t)) : t \in [0, T]\}$ is compact, and consequently h is uniformly continuous on a tube around this set. Therefore, for every $\varepsilon > 0$ we can choose $\delta > 0$ such that

$$\forall t \in [0, T], \quad \|y - \bar{y}(t)\| \leq \delta \implies h(t, y) \leq h(t, \bar{y}(t)) + \varepsilon \mathbf{1}_m. \quad (20)$$

Notice that Lemma 3 ensures that the hypotheses in the Relaxation Theorem [12, Thm 2.7.2] are satisfied, and thus, there exists $y_\delta \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ with $y_\delta(0) = \xi$ such that $\|y_\delta - \bar{y}\|_\infty < \delta$ and

$$\dot{y}_\delta(t) \in f(t, y_\delta(t), \mathbf{U}), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

From the Generalized Filippov Selection Theorem [12, Thm. 2.3.13], there is $u_\delta \in \mathcal{U}$ such that $y_\delta = x_\xi^{u_\delta}$. Finally from (20) we conclude that $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$, because $\varepsilon > 0$ is arbitrary and we have

$$h\left(t, x_\xi^{u_\delta}(t)\right) \leq h(t, \bar{y}(t)) + \varepsilon \mathbf{1}_m \leq c + \varepsilon \mathbf{1}_m, \quad \forall t \in [0, T].$$

□

Remark 2 Notice that inequality (19) can also be obtained if we ask $h(t, \cdot)$ to be just lower-semicontinuous for any $t \in [0, T]$ fixed. However, the continuity of h is essential to have an uniform $\delta > 0$ for which (20) remains true for all times.

Remark 3 Proposition 2 tells us that, for state-constrained systems, the lack of closedness in the SST stems from a more fundamental non-closedness in the set of trajectories of the system itself, a property which is closely related to the convexity of the dynamic. For this reason, the closedness of $\text{gr}(\mathbb{S})$ can be recovered through a relaxation procedure on the dynamic of the system.

3.2.2 Case with mixed constraints

For mixed-constrained systems, a differential inclusion approach can also be taken following [13], where the mixed constraints are included into the dynamic instead of being considered separately as in the case with pure state constraints. The difficulty we encounter in this case is that the thresholds appear in the definition of the multifunction. We will show that this difficulty can be overcome by using a type of monotonicity.

To begin with the analysis, given $c \in \mathbb{R}^m$, we define $\Gamma_c : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ as

$$\Gamma_c(t, x) := \{f(t, x, u) : u \in \mathbf{U}, g(t, x, u) \leq c\}, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Therefore, setting

$$F_c(t, x) = \overline{\text{co}}(\Gamma_c(t, x)), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

the differential inclusion that concerns us is the following

$$\dot{x}(t) \in F_c(t, x(t)), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (21)$$

Before going further, we present some properties of the mappings Γ_c and F_c that will be used later for studying the properties of the differential inclusion (21).

Lemma 5 *Assume that Hypotheses 1 and 2 hold. For any $c \in \mathbb{R}^m$ given, it follows that Γ_c and F_c are $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ measurable multifunctions with compact images. Moreover, for any $t \in [0, T]$ the graph of $\Gamma_c(t, \cdot)$ and $F_c(t, \cdot)$ are closed and have linear growth, that is, for where $\gamma_1 = \ell$ and $\gamma_2 = \|x_0\|\ell + \gamma$ we have*

$$\Gamma_c(t, x) \subset F_c(t, x) \subseteq (\gamma_1(t)\|x\| + \gamma_2(t))\mathbb{B}, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof Since $\Gamma_c = \overline{\text{co}}(F_c)$, it suffices to verify that the multifunction F_c satisfies all the properties stated in the lemma, as these are preserved under the operation $\overline{\text{co}}(\cdot)$ in finite-dimensional spaces.

To begin with, the $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ -measurability of Γ_c follows from the fact that f is a Carathéodory function. More precisely, applying [14, Example 14.15], measurability holds provided that the multifunction $(t, x) \mapsto \{u : g(t, x, u) \leq c\}$ is measurable and closed-valued. This is indeed the case due to the continuity of g (Hypothesis 2) and [14, Theorem 14.36].

The compactness of the values of Γ_c follows from the compactness of \mathbf{U} and the continuity of both g and f with respect to the state and control variables. These same continuity properties also ensure that the graph of $\Gamma_c(t, \cdot)$ is closed for each fixed t .

Lastly, the linear growth condition for Γ_c is inherited from Hypothesis 1. \square

Now, given any $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $c \in \mathbb{R}^m$, we will make use of the previous lemma to prove the compactness of the set of trajectories of (21), which will be required in the proof of the forthcoming Proposition 7. We may also point out that the common result in the literature, that is, the so-called Compactness of Trajectories Theorem (see e.g., [12, Thm. 2.5.3] or [15, Thm. 1.4.1]), is only concerned with the sequential compactness of the velocities of the trajectories in weak topology of $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$. The approach we take for proving Theorem 7 uses the *Finite intersection property*, and so [12, Thm. 2.5.3] may not be used directly, and further developments are required.

Lemma 6 *Let $\mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$ be the collection of arcs that verify (21). Then, for any $c \in \mathbb{R}^m$ fixed, the set $\mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$ is compact in the weak topology of $AC([0, T]; \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$.*

Proof Because the initial condition is fixed, we can prove the result by arguing that the set of velocities of all the absolutely continuous arcs verifying (21) is weakly closed in $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$. To do so, consider the set

$$W := \left\{ w \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n) : \alpha(t)w(t) = \dot{x}(t), \text{ for a.e. } t \in [0, 1], x \in \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi) \right\},$$

where $\alpha \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ is an integrable function satisfying

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha(t), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \forall x \in \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi), \quad (22)$$

which exists thanks to Lemma 5 and Gronwall's inequality ([12, Lemma 2.4.4]); see for instance (8). Additionally, consider the linear operator $A : L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ defined by $A(w) := \alpha w$. Since α is integrable, because of Hölder's inequality A is (strongly) continuous. Thus, it is also weak-*/weak continuous, that is, continuous when endowing $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ with the weak- \star topology and $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ with the weak topology. Now, using (22) we get that any element $y \in W$ is such that $\|y\|_\infty \leq 1$. Hence, W is contained in the unit closed ball of $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$, and by Alaoglu's Theorem W is relatively weakly- \star compact in $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$. We will prove that it is also weakly- \star closed and, thus, compact. For this purpose, we will use the separability of $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ to justify the use of weak- \star converging sequences through [16, Thm. 3.28]. Consider a sequence $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W$ such that $w_k \xrightarrow{*} w$ and let us prove that $w \in W$. By definition $\alpha w_k = \dot{x}_k$, for some $x_k \in \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$. Define

$$x(t) := \xi + \int_0^t \alpha(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Using the test functions of the form $\beta_t = \alpha \mathbb{1}_{[0, t]} \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ for any $t \in [0, T]$, the weak- \star convergence implies that

$$x_k(t) - \xi = \int_0^t \beta_t(s) w_k(s)ds \longrightarrow \int_0^t \beta_t(s) w(s)ds = \int_0^t \alpha(s)w(s)ds = x(t) - \xi.$$

In other terms, we have that the trajectories $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge to x point-wisely. Additionally, the continuity of the operator A implies that the sequence $\alpha w_k = \dot{x}_k$ converges to αw weakly in $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Therefore, using that the dynamic function F_c is convex-valued and that it has closed graph by Lemma 5, from Convergence Theorem [15, Thm. 1.4.1] we get that $x \in \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$ and therefore that $w \in W$. Thus, W is weakly- \star compact in $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ and, since A is weak-*/weak continuous, $A(W)$ is weakly compact in $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$, proving the result. \square

We now define $\mathbb{S}^m : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ as the SST associated with the differential inclusion (21), that is,

$$\mathbb{S}^m(\xi) := \left\{ c \in \mathbb{R}^m : \mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi) \neq \emptyset \right\}.$$

Notice that, for $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ fixed, the mapping $c \mapsto F_c(t, x)$ is monotone in the sense that if $c \leq c'$ (component-wise), then $F_c(t, x) \subseteq F_{c'}(t, x)$. In particular, this implies that

$$\mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi) \subset \mathcal{S}_{[0,T]}^{c+\alpha \mathbf{1}_m}(\xi), \quad \forall \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

This property turns out to be essential for proving the next result, which is a version of Theorem 4 for mixed control-state constrained systems.

Theorem 7 *Assume that Hypotheses 1 and 2 hold. Then, $\text{gr}(\mathbb{S}_r) \subset \text{gr}(\mathbb{S}^m)$. Equality holds if the multifunction Γ_c has convex and non empty images, that is, if $\Gamma_c = F_c \neq \emptyset$. As a matter of fact, in such case we have that the SST mapping \mathbb{S} has a closed graph and*

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m) = \text{gr}(\mathbb{S}).$$

Proof Take $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}_r)$. By definition, for every $\varepsilon > 0$ there exists a control $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ such that

$$g\left(t, x_\xi^{u_\varepsilon}(t), u_\varepsilon(t)\right) \leq c + \varepsilon \mathbf{1}_m, \quad \forall t \in [0, T].$$

In particular, $x_\xi^{u_\varepsilon}$ solves (21) with the threshold $c + \varepsilon \mathbf{1}_m$, and so $\mathcal{S}_{[0,T]}^{c+\varepsilon \mathbf{1}_m}(\xi) \neq \emptyset$. Then from (23), Lemma 6 and the finite intersection property, it follows that

$$\mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{S}_{[0,T]}^{c+\varepsilon \mathbf{1}_m}(\xi) \neq \emptyset.$$

Therefore, $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}^m)$.

On the other hand, take now $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}^m)$ fixed but arbitrary. By definition, there exists an arc $y \in \mathcal{S}_{[0,T]}^c(\xi)$. Notice that if Γ_c has convex images, then

$$\dot{y}(t) \in \Gamma_c(t, y(t)) = f(t, y(t), U_c(t)), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T],$$

where

$$U_c(t) := \{u \in \mathbf{U} : g(t, y(t), u) \leq c\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Also, observe that Hypothesis 1 implies that $(t, u) \mapsto f(t, y(t), u)$ is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ measurable and Hypothesis 2 implies that $\text{gr}(U_c)$ is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ measurable as well. Thus, from the Generalized Filippov Selection Theorem [12, Thm. 2.3.13], there is $u \in \mathcal{U}$ such that $y = x_\xi^u$ and

$$g\left(t, x_\xi^u(t), u(t)\right) \leq c, \quad \forall t \in [0, T].$$

This implies that $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S})$, and the conclusion follows since in any case $\text{gr}(\mathbb{S}) \subset \text{gr}(\mathbb{S}_r)$. \square

Remark 4 It is worthy to point out that the multifunction Γ_c has convex images under rather mild structural assumptions. For example, if the dynamics f is control-affine, \mathbf{U} is convex and g is quasi-convex with respect to the control variable. We refer also to the discussion in Section 5 of [13].

To finish this section, we would like to point out that if the so-called *Bounded Slope Condition* holds, then we can ensure that $\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m)$, although we cannot ensure that $\text{gr}(\mathbb{S})$ is closed. This affirmation is summarized below. Let us define the set-valued map $G_c : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ via the formula

$$G_c(t) := \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} : g(t, x, u) \leq c\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

This set-valued map plays a fundamental role in the Bounded Slope Condition.

Proposition 8 *Assume that Hypotheses 1 and 2 hold. Additionally, suppose that if $c \in \mathbb{R}^m$ is such that $\text{gr}(G_c) \neq \emptyset$, then for every $t \in [0, T]$ and $x \in \mathbb{R}^n$, there exists $u \in \mathbf{U}$ such that $(x, u) \in G_c(t)$ and the Bounded Slope Condition is satisfied, i.e., there exists a constant $\mathcal{K} > 0$ such that for all $t \in [0, T]$ and all $(x, u) \in G_c(t)$,*

$$(\alpha, \beta) \in N_{G_c(t)}^P(x, u) \implies \|\alpha\| \leq \mathcal{K}\|\beta\|, \quad (BS)$$

where $N_G^P(x, u)$ denotes the proximal normal cone to the set $G \subset \mathbb{R}^{n+m} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ at the point $(x, u) \in G$ (see [12, Chapter 4]). Then,

$$\text{gr}(\mathbb{S}_r) = \text{gr}(\mathbb{S}^m).$$

Proof In view of Proposition 7, it is enough to prove that $\text{gr}(\mathbb{S}^m) \subset \text{gr}(\mathbb{S}_r)$. Take $(\xi, c) \in \text{gr}(\mathbb{S}^m)$ fixed but arbitrary. By definition, there exists an arc $\bar{y} \in \mathcal{S}_{[0, T]}^c(\xi)$ and $\text{gr}(G_c) \neq \emptyset$. Additionally, from (8) combined with Lemma 5, we get that $\{(t, \bar{y}(t)) : t \in [0, T]\} \times \mathbf{U}$ is compact, and consequently g is uniformly continuous on a tube around this set. Therefore, for every $\varepsilon > 0$ we can choose $\delta > 0$ such that

$$\|y - \bar{y}(t)\| \leq \delta \implies g(t, y, u) \leq g(t, \bar{y}(t), u) + \varepsilon \mathbf{1}_m, \quad \forall t \in [0, T], \forall u \in \mathbf{U}. \quad (24)$$

Now, notice that (BS) ensures that the hypotheses in the Relaxation Theorem [12, Thm 2.7.2] are satisfied. It is important to remark that the locally Lipschitz character of the dynamics come from [13, Corollary 1]. For applying this results, $t \mapsto G_c(t)$ has to be \mathcal{L} measurable, but this follows from [14, Thm 14.36] because its graph is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^m$ measurable. Consequently, for any $\delta > 0$, there exists $y_\delta \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ with $y_\delta(0) = \xi$ such that $\|y_\delta - \bar{y}\|_\infty < \delta$ and

$$\dot{y}_\delta(t) \in \Gamma_c(t, y_\delta(t)), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

In particular, from the Generalized Filippov Selection Theorem [12, Thm. 2.3.13], there is $u_\delta \in \mathcal{U}$ such that $y_\delta = x_\xi^{u_\delta}$ and

$$g\left(t, x_\xi^{u_\delta}(t), u_\delta(t)\right) \leq c, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Therefore, from (24) we obtain that

$$g\left(t, x_\xi^{u_\delta}(t), u_\delta(t)\right) \leq g(t, \bar{y}(t), u_\delta(t)) + \varepsilon \mathbf{1}_m \leq c + \varepsilon \mathbf{1}_m, \quad \forall t \in [0, T].$$

Because $\varepsilon > 0$ is arbitrary, we conclude that $c \in \mathbb{S}_r(\xi)$. \square

4 Structural properties

4.1 Convexity of the graph

Another question of interest is that of identifying suitable conditions under which the SST multifunction has a convex graph. We will follow a similar approach as the one taken in [1] for discrete-time systems. It is worthy to point out that, while the statements are essentially the same as in [1], the techniques we require to account for the continuous-time nature of the problem are rather different.

We begin by examining the linear-convex case, in which the dynamics are linear and the data of the problem has an underlying convex structure in the following sense:

Hypothesis 3 (Convexity) The control space $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d$ is convex, the constraint functions $g_1(t, \cdot, \cdot), \dots, g_m(t, \cdot, \cdot)$ are convex on $\mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ for any $t \in [0, T]$ fixed and the dynamics $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is affine, that is, $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u + \zeta(t)$ for all $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$, where for any $t \in [0, T]$ fixed, $A(t)$ and $B(t)$ are matrices of dimension $n \times n$ and $n \times d$, respectively and $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$. Furthermore, the mappings $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto B(t)$ and $t \mapsto \zeta(t)$ are measurable.

Proposition 9 Assume that Hypothesis 3 holds. Then, the set-valued map $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ has convex graph with convex images.

Proof Given $(\xi^0, c^0), (\xi^1, c^1) \in \text{gr}(\mathbb{S})$, there are controls $u^0, u^1 \in \mathcal{U}$ such that, for $j = 0, 1$,

$$\begin{cases} \dot{x}_{\xi^j}^{u^j}(t) = A(t)x_{\xi^j}^{u^j}(t) + B(t)u^j(t) + \zeta(t), & \text{a.e. } t \in [0, T], \\ g(t, x_{\xi^j}^{u^j}(t), u^j(t)) \leq c^j, & \text{a.e. } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Let $\lambda \in [0, 1]$ and denote $u^\lambda = \lambda u^1 + (1 - \lambda)u^0$, $c^\lambda = \lambda c^1 + (1 - \lambda)c^0$ and $\xi^\lambda = \lambda \xi^1 + (1 - \lambda)\xi^0$. By the convexity of \mathbf{U} , we have that $u^\lambda \in \mathcal{U}$, and by linearity of the dynamic we obtain that $x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda} = \lambda x_{\xi^1}^{u^1} + (1 - \lambda)x_{\xi^0}^{u^0}$, that is, it is a feasible trajectory of the control system with initial condition given by ξ^λ . Now, because of the convexity of the constrain functions, we get that

$$g_i(t, x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t), u^\lambda(t)) \leq c_i^\lambda, \quad \text{a.e. } t \in [0, T], \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

This implies that $c^\lambda \in \mathbb{S}(\xi^\lambda)$, and the conclusion follows. \square

As noted in [1], the linearity condition in Hypothesis 3 excludes many relevant dynamical systems commonly encountered in applications. To address this limitation, the remainder of this section is devoted to extending [1, Thm. 3] to the continuous-time setting. This result allows to draw similar conclusions for nonlinear dynamics that satisfy certain monotonicity and convexity conditions, which we now introduce.

Definition 3 Let $K \subseteq \mathbb{R}^p$ be a closed convex cone with nonempty interior. We define the relation \preceq_K on \mathbb{R}^p as

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K.$$

Additionally, we define the following properties:

i) Given a nonempty convex set $S \subseteq \mathbb{R}^q$, a vector field $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^p$ is K -convex if

$$\Psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \preceq_K \lambda \Psi(x) + (1 - \lambda)\Psi(y), \quad \forall x, y \in S, \lambda \in [0, 1].$$

ii) A mapping $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ is K -monotone if

$$x \preceq_K y \implies \Phi(x) \preceq_K \Phi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

iii) A function $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ is K -monotone if

$$x \preceq_K y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Let us point out that, in contrast with [1], we do require K to be a closed convex cone with nonempty interior. However, the usual assumption that K is pointed (that is, that K contains no lines) may still be skipped, resulting in the relation \preceq_K not being antisymmetric, but still being reflexive and transitive.

Remark 5 A particular case of interest will be when $K = \mathbb{R}_+^d$ is the nonnegative orthant. Then, K -convexity and K -monotonicity mean component-wise convexity and monotonicity (increasing or decreasing) in the usual sense on \mathbb{R} , respectively. See [10, Prop. 3, Prop. 4 and Cor. 3] for further criteria ensuring the \mathbb{R}_+^d -monotonicity of vector fields.

Another concept related to cones that we will use is that of the *dual cone* of a set.

Definition 4 Let $K \subset \mathbb{R}^p$. The *dual cone* of K is defined as

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle y, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K\}.$$

In particular, we have the identity $K^* = -K^\circ$, where K° denotes the *polar cone* of K .

Two useful facts that we will use later are that if $y \in K^* \setminus \{0\}$, then the inequality in Definition 4 is strict for all $x \in \text{int}(K)$; and if $x \in \partial K$, then there exists $y \in K^* \setminus \{0\}$ such that $\langle y, x \rangle = 0$; see for instance [14].

Hypothesis 4 (Convexity and monotonicity) The control space $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^d$ is convex, the constraint functions $g_1(t, \cdot, \cdot), \dots, g_m(t, \cdot, \cdot)$ are convex on $\mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ for any $t \in [0, T]$ fixed and $g_1(t, \cdot, u), \dots, g_m(t, \cdot, u)$ are K -monotone functions for any $(t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}$ fixed.

Furthermore, for all $t \in [0, T]$ fixed, $f(t, \cdot, \cdot)$ is K -convex vector field and $f(t, \cdot, u)$ is a K -monotone mapping for every $u \in \mathbf{U}$ fixed.

We are now in a position to present the main result of this section.

Theorem 10 Let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a closed, convex cone with nonempty interior, and assume that Hypothesis 1 and 4 hold. Then, $\text{gr}(\mathbb{S}_r)$ is a convex subset of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ and we have the monotonicity property

$$\xi^1 \preceq_K \xi^2 \implies \mathbb{S}_r(\xi^2) \subseteq \mathbb{S}_r(\xi^1), \quad \forall \xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n.$$

Proof By Proposition 1, it suffices to prove that the function $\omega(0, \xi, c)$ defined in (10) is jointly convex in the variables (ξ, c) and K -monotone in the ξ variable.

We begin by proving the convexity. Consider the family of functions indexed by $t \in [0, T]$

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (u, \xi, c) \mapsto G_t(u, \xi, c) := \max_{i=1, \dots, m} (g_i(t, x_\xi^u(t), u(t)) - c_i).$$

We will prove that this is a convex function in all three variables, from which the desired conclusion follows as $\omega(0, \xi, c)$ is the marginal function obtained by minimizing the convex function $\text{ess sup}_{t \in [0, T]} G_t(u, \xi, c)$ with respect to the variable $u \in \mathcal{U}$.

Take $\lambda \in [0, 1]$ and $u^0, u^1 \in \mathcal{U}$, $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{R}^n$ and $c^0, c^1 \in \mathbb{R}^m$. Denote

$$u^\lambda = \lambda u^1 + (1 - \lambda)u^0, \quad \xi^\lambda = \lambda \xi^1 + (1 - \lambda)\xi^0, \quad \text{and} \quad c^\lambda = \lambda c^1 + (1 - \lambda)c^0.$$

We claim that

$$x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t) \preceq_K \lambda x_{\xi^1}^{u^1}(t) + (1 - \lambda)x_{\xi^0}^{u^0}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (25)$$

Observe that if (25) holds, then using the K -monotonicity of the functions g_i with respect to x we obtain that for every $t \in [0, T]$ and $i \in \{1, \dots, m\}$

$$g_i(t, x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t), u^\lambda(t)) - (c_i^\lambda) \leq g(t, \lambda x_{\xi^1}^{u^1}(t) + (1 - \lambda)x_{\xi^0}^{u^0}(t), u^\lambda(t)) - (c_i^\lambda).$$

Therefore, by convexity of the constraint functions we get

$$g_i(t, x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t), u^\lambda(t)) - (c_i^\lambda) \leq \lambda (g_i(t, x_{\xi^1}^{u^1}(t), u^1(t)) - c_i^1) + (1 - \lambda) (g_i(t, x_{\xi^0}^{u^0}(t), u^0(t)) - c_i^0).$$

Maximizing over $i \in \{1, \dots, m\}$ for any $t \in [0, T]$ fixed, this yields

$$G_t(u^\lambda, \xi^\lambda, c^\lambda) \leq \lambda G_t(u^1, \xi^1, c^1) + (1 - \lambda)G_t(u^0, \xi^0, c^0).$$

Thus, each G_t would be a convex function, and so, it suffices to prove (25) to obtain the convexity of $\text{gr}(\mathbb{S}_r)$.

To prove (25), we will adapt the perturbation argument used in the proof of [10, Lem. 2], which in turn is inspired in a proof from [17]. Let $p \in \text{int}(K) \setminus \{0\}$ and, for each $k \in \mathbb{N}$, consider for any given $u \in \mathcal{U}$ the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) + \frac{1}{k}p, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad x(0) = \xi + \frac{1}{k}p. \quad (26)$$

Denote by x_k^j the (unique) solution of (26) when taking $u = u^j$ and $\xi = \xi^j$ for $j = 0, 1$. We will argue that

$$x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t) \preceq_K \lambda x_k^1(t) + (1 - \lambda)x_k^0(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

and then deduce (25) by taking the limit when $k \rightarrow \infty$, as the convergence of $x_k^j \rightarrow x_{\xi^j}^{u^j}$, $j = 0, 1$, is justified by [18, Thm. 4.2], which holds under our hypotheses.

Now, denote

$$\gamma_k(t) = \lambda x_k^1(t) + (1 - \lambda)x_k^0(t) - x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(t).$$

Suppose by contradiction that (27) is not true. Thus, there exist $k \in \mathbb{N}$ and $\tau_k \in (0, T]$ such that $\gamma_k(\tau_k) \notin K$. As $\gamma_k(0) = \frac{1}{k}p \in \text{int}(K) \setminus \{0\}$ and γ_k is continuous, there exists $t_k \in (0, \tau_k)$ such that

$$\gamma_k(t) \in \text{int}(K), \quad \forall t \in (0, t_k) \quad \text{and} \quad \gamma_k(t_k) \in \partial K.$$

Hence, there exists $y \in K^*$ such that

$$\langle y, \gamma_k(t) \rangle \geq 0 \text{ for all } t \in [0, t_k) \quad \text{and} \quad \langle y, \gamma_k(t_k) \rangle = 0. \quad (28)$$

Note that (28) implies that

$$\limsup_{t \rightarrow t_k^-} \frac{\langle y, \gamma_k(t_k) \rangle - \langle y, \gamma_k(t) \rangle}{t_k - t} \leq 0.$$

On the other hand, from the the Fundamental Theorem of Calculus for absolutely continuous functions we obtain that

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow t_k^-} \frac{\langle y, \gamma_k(t_k) \rangle - \langle y, \gamma_k(t) \rangle}{t_k - t} &= \limsup_{t \rightarrow t_k^-} \left\langle y, \frac{1}{t_k - t} \int_t^{t_k} \dot{\gamma}_k(s) ds \right\rangle \\ &= \frac{1}{k} \langle y, p \rangle + \limsup_{t \rightarrow t_k^-} \left\langle y, \frac{1}{t_k - t} \int_t^{t_k} \theta_\lambda^k(s) ds \right\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

where the expression for θ_λ^k comes from the Cauchy problem and is given by

$$\theta_\lambda^k(s) := \lambda f\left(s, x_k^1(s), u^1(s)\right) + (1-\lambda) f\left(s, x_k^0(s), u^0(s)\right) - f\left(s, x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(s), u^\lambda(s)\right), \quad \forall s \in [0, T].$$

Now, since $p \in \text{int}(K) \setminus \{0\}$, we will have that $\langle y, p \rangle > 0$ and from (28) and (29) we deduce that

$$\limsup_{t \rightarrow t_k^-} \left\langle y, \frac{1}{t_k - t} \int_t^{t_k} \theta_\lambda^k(s) ds \right\rangle \leq -\frac{1}{k} \langle y, p \rangle < 0. \quad (30)$$

But since $\gamma_k(s) \in K$ for every $s \in [0, t_k]$, using the K -monotonicity of f followed by its K -convexity we arrive at the conclusion that

$$\begin{aligned} f\left(s, x_{\xi^\lambda}^{u^\lambda}(s), u^\lambda(s)\right) &\preceq_K f\left(s, \lambda x_k^1(s) + (1-\lambda)x_k^0(s), u^\lambda(s)\right) \\ &\preceq_K \lambda f\left(s, x_k^1(s), u^1(s)\right) + (1-\lambda) f\left(s, x_k^0(s), u^0(s)\right), \quad \forall s \in [0, t_k]. \end{aligned}$$

Notice that this implies that $\theta_\lambda^k(s) \in K$ for every $s \in [0, t_k]$, which combined with the fact that $y \in K^*$ gives that

$$\forall t \in [0, t_k], \quad \int_t^{t_k} \langle y, \theta_\lambda^k(s) \rangle ds \geq 0 \implies \liminf_{t \rightarrow t_k^-} \left\langle y, \frac{1}{t_k - t} \int_t^{t_k} \theta_\lambda^k(s) ds \right\rangle \geq 0.$$

But this is a contradiction with (30). Then, (27) holds true.

Finally, to prove the monotonicity property, we can take a similar approach claiming that for any fixed measurable control $u \in \mathcal{U}$

$$\xi \preceq_K \xi' \implies x_\xi^u(t) \preceq_K x_{\xi'}^u(t), \quad \forall t \in [0, t]. \quad (31)$$

We can prove (31) using the same perturbation technique used before, and we omit the details as this proof is the same as the one presented in [10, Lem. 2]. Given that (31) is true, using the K -monotonicity of g we have that for any $c \in \mathbb{R}^m$

$$g\left(t, x_\xi^u(t), u(t)\right) - c \leq g\left(t, x_{\xi'}^u(t), u(t)\right) - c, \quad \forall t \in [0, T].$$

As this is true for any measurable control $u \in \mathcal{U}$, we deduce that $\omega(0, \xi, c) \leq \omega(0, \xi', c)$, obtaining the desired result. \square

Remark 6 The Hypothesis 1 in Theorem 10 can be weakened. Indeed, it is not difficult to see that if the dynamic $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is Carathéodory (i.e., measurable in t and continuous in (x, u)), that there exists an integrable function $m \in L^1([0, T])$ such that

$$\|f(t, x, u)\| \leq m(t), \quad \forall (t, x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$$

and that for any initial condition $\xi \in \mathbb{R}^n$ and measurable control $u \in \mathcal{U}$ the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \text{for a.e. } t \in [0, T], \quad x(0)$$

has a unique solution, then the conclusion of Theorem 10 remains true. This is of particular interest regarding the following example.

Example 3 Let us check the validity of Theorem 10 for the system introduced in Example 1 with technology function given by the Cobb-Douglas production function $f(K, r) = K^\alpha r^\beta$, with $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Although f is not Lipschitz continuous, it satisfies the integrability condition in Remark 6 and the existence and uniqueness of solutions to the associated Cauchy problem is guaranteed. Hypothesis 4 is satisfied for $K = -\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_-^2$. Indeed, the function f is monotone in the state variable, and if $\alpha + \beta < 1$, it is known to be concave. Also, rewriting the constraints as

$$-S(t) \leq S^\sharp \quad \text{and} \quad -c(t) \leq c^\sharp, \quad \forall t \in [0, T],$$

we get the convexity and monotonicity for the constraint function with $K = \mathbb{R}_-^2$. Moreover, the controls are constrained to lie within a box. Thus, Theorem 10 applies, and we expect the graph of the SST of this system to be convex for any time horizon, including $T = +\infty$, which is understood as the intersection of the SSTs corresponding to all finite time horizons.

In fact, under the assumption $\alpha > \beta$ (otherwise the viability kernel is empty), [11, Proposition. 3.3] provides a characterization of the Viability Kernel from which the following description of SST for $T = +\infty$ can be inferred:

$$(c_\sharp, S_\sharp) \in \mathbb{S}(K_0, S_0) \iff S_0 \geq V(K_0, c_\sharp, S_\sharp),$$

where the function V is given by

$$V(K_0, c_\sharp, S_\sharp) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{c_\sharp}{1 - \beta} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} K_0^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} + S_\sharp. \quad (32)$$

Hence, the graph of \mathbb{S} can be written as the sublevel set

$$\text{gr}(\mathbb{S}) = \{(K_0, S_0, c_\sharp, S_\sharp) : 0 \geq V(K_0, c_\sharp, S_\sharp) - S_0\}.$$

Now, under the conditions $0 < \beta < \alpha < 1$ and $\alpha + \beta < 1$, we have

$$0 < \beta < \frac{1}{2} \implies \frac{1-\beta}{\beta} > 1 \quad \text{and} \quad \frac{\beta-\alpha}{\beta} < 0.$$

Therefore, the function V is linear in S_\sharp and S_0 , and the exponents associated with the variables c_\sharp and K_0 are either negative or greater than one. It follows that V is convex, which confirms that $\text{gr}(\mathbb{S})$ is indeed a convex set.

Moreover, it also follows that V is decreasing in both K_0 and S_0 , so we also verify the monotonicity property:

$$(S_0, K_0) \preceq_{\mathbb{R}_-^2} (S'_0, K'_0) \implies \mathbb{S}(S'_0, K'_0) \subseteq \mathbb{S}(S_0, K_0).$$

5 Continuity properties

Following the discussion in [1], we analyze the continuity properties of the SST. Continuity properties play a crucial role both practically and theoretically. On the one hand, from a practical standpoint, they ensure that SST do not exhibit abrupt variations when the initial position changes, which is particularly relevant in the presence of measurement errors. On the other hand, theoretically they provide ways of studying the stability analysis of numerical schemes designed to compute the SST.

Motivated by these considerations, this section extends to the continuous-time setting the results from [1] that focus on the continuity properties of the SST when viewed as a multifunction of the initial condition. The proof we present are essentially the same as [1], *mutatis mutandis*, however we provide them for the sake of completeness.

5.1 Lower semicontinuity

We begin by studying the lower-semicontinuity of the set-valued map $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$. Recall that a set-valued map $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is *lower semicontinuous* (l.s.c. for short) at $x \in \mathbb{R}^n$ if, for every $y \in \Gamma(x)$ and for every sequence $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converging to x , there exists a sequence $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converging to y such that $y_k \in \Gamma(x_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 11 *If Hypotheses 1 and 2 are satisfied, then $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is l.s.c.*

Proof Fix an initial condition $\xi \in \mathbb{R}^n$ and an arbitrary $c \in \mathbb{S}(\xi)$. Let $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ be any sequence of initial conditions in $\text{dom}(\mathbb{S})$ such that $\xi_k \rightarrow \xi$. We will prove the result by finding a sequence $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ such that $c_k \in \mathbb{S}(\xi_k)$ for every $k \in \mathbb{N}$ and $c_k \rightarrow c$. Now, by definition there exists a measurable control u such that

$$g(t, x_\xi^u(t), u(t)) \leq c, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Fixing this control, consider the sequence of arcs $\{x_{\xi_k}^u\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ obtained by solving the differential equation with initial condition ξ_k and control function u . Notice, that because of the Lipschitz regularity of the dynamic, we have that $x_{\xi_k}^u \rightarrow x_\xi^u$ in the uniform norm. In particular, we will have that all trajectories $\{x_{\xi_k}^u(t) : k \in \mathbb{N}, t \in [0, T]\}$ will lie inside a compact set. Call this set \mathbf{K} . Hence, we can take g to be uniformly continuous over the compact set $[0, T] \times \mathbf{K} \times \mathbf{U}$. Then, for every $j \in \mathbb{N}$ there will exist $\delta_j > 0$ such that

$$x \in \mathbf{K} \wedge \|x - x_\xi^u(t)\| < \delta_j \implies \|g(t, x, u(t)) - g(t, x_\xi^u(t), u(t))\| \leq \frac{1}{j}, \quad \forall t \in [0, T].$$

We remark that this estimate is uniform in $t \in [0, T]$ because of the uniform continuity of g . Now, due to the convergence $x_{\xi_n}^u \rightarrow x_\xi^u$, from the previous estimate we deduce the existence of $N_j \in \mathbb{N}$ such that

$$k > N_j \implies g(t, x_{\xi_k}^u(t), u(t)) \leq g(t, x_\xi^u(t), u(t)) + \frac{1}{j} \mathbb{1}_m \leq c + \frac{1}{j} \mathbb{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Finally, assuming without loss of generality that the N_j 's form an increasing sequence of natural numbers $N_1 < N_2 < \dots < N_j < \dots$, if we define

$$c_k = c + \frac{1}{j} \mathbb{1}_m, \quad \text{where } j \in \mathbb{N} \text{ is such that } k \in [N_j, N_{j+1}),$$

then we have that $c_k \in \mathbb{S}(\xi_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$ and that $c_k \rightarrow c$ as $k \rightarrow \infty$, concluding the result. \square

5.2 Lipschitz continuity

Building on the proof of Proposition 11, we can derive a more precise estimate for how the thresholds vary when the constraint function g is Lipschitz continuous. By employing a similar argument, we can in fact show that the multifunction \mathbb{S} satisfies a Lipschitz-type continuity property.

Recall that a multifunction $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is said to be *Lipschitz continuous* if there exists a constant $\kappa > 0$ such that

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \Gamma(x') \subseteq \Gamma(x) + \kappa \|x - x'\| \mathbb{B}.$$

Proposition 12 *Assume that Hypotheses 1 and 2 hold. Suppose in addition that there exists a constant $L_g > 0$ such that*

$$\|g(t, x, u) - g(t, y, u)\| \leq L_g \|x - y\|, \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbf{U}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Then, the SST mapping $\mathbb{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is Lipschitz continuous of modulus $\kappa_{\mathbb{S}} = L_g L^F \sqrt{m}$, where L^F is the constant in (7).

Proof Let ξ^1 and ξ^2 be two arbitrary initial conditions and choose any $c^1 \in \mathbb{S}(\xi^1)$. We want to prove the existence of a constant $\kappa_{\mathbb{S}}$ such that there exists a threshold $c^2 \in \mathbb{S}(\xi^2)$ for which

$$\|c^1 - c^2\| \leq \kappa_{\mathbb{S}} \|\xi^1 - \xi^2\|.$$

By definition, there exists a control $u \in \mathcal{U}$ such that

$$g\left(t, x_{\xi^1}^u(t), u(t)\right) \leq c^1, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

Since g is Lipschitz continuous, we have

$$\left\|g\left(t, x_{\xi^1}^u(t), u(t)\right) - g\left(t, x_{\xi^2}^u(t), u(t)\right)\right\| \leq L_g \left\|x_{\xi^1}^u(t) - x_{\xi^2}^u(t)\right\| \leq L_g \left\|x_{\xi^1}^u - x_{\xi^2}^u\right\|_{\infty}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Consequently, it follows that

$$g\left(t, x_{\xi^2}^u(t), u(t)\right) \leq g\left(t, x_{\xi^1}^u(t), u(t)\right) + L_g \left\|x_{\xi^1}^u - x_{\xi^2}^u\right\|_{\infty} \mathbf{1}_m.$$

Therefore,

$$g\left(t, x_{\xi^2}^u(t), u(t)\right) \leq c^1 + L_g \left\|x_{\xi^1}^u - x_{\xi^2}^u\right\|_{\infty} \mathbf{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T].$$

From (7), we have that there exists a constant $L^F > 0$ such that $\|x_{\xi^1}^u - x_{\xi^2}^u\|_{\infty} \leq L^F \|\xi^1 - \xi^2\|$. Then, we obtain that

$$g\left(t, x_{\xi^2}^u(t), u(t)\right) \leq c^1 + L_g L^F \|\xi^1 - \xi^2\| \mathbf{1}_m, \quad \text{for a.e. } t \in [0, T],$$

and thus, we deduce that $c^1 + L_g L^F \|\xi^1 - \xi^2\| \mathbf{1}_m \in \mathbb{S}(\xi^2)$. The conclusion follows with $\kappa_{\mathbb{S}} = L_g L^F \sqrt{m}$. \square

Remark 7 In virtue of Proposition 2, Propositions 11 and 12 also hold if we replace \mathbb{S} with \mathbb{S}_r as taking the closure of a lower semicontinuous (resp. Lipschitz continuous) multifunction preserves these properties.

Remark 8 The proofs of Propositions 11 and 12 are both based on the principle that the same control u produces similar sustainable thresholds for similar initial conditions. Fixing the control allows us to bypass the use of limit-taking procedures on the control variable, which was the main difficulty in Section 3.2.

6 Conclusion

In this work, we successfully formulated and proved continuous-time analogues of the main theoretical results available in the literature concerning the properties of the Set of Sustainable Thresholds (SST). Particularly, our focus was on extending the line of research initiated in [1], which was the first to study this object from the perspective

of set-valued analysis. This required a careful adaptation of the techniques originally employed for discrete-time systems, which prompted the use of mathematical tools coming from the theory of differential inclusions and the monotonicity analysis of nonlinear dynamical systems.

The contributions of this work are arranged around three central themes: the conditions under which the graph of the SST is closed, the convexity of this graph under generalized monotonicity and convexity assumptions, and the continuity properties of the SST when viewed as a multifunction of the initial condition.

Concerning the first theme, our results introduce a new notion that is inherently tied to the continuous-time nature of our framework, namely, the *relaxed* SST. This concept allows us to recover the closedness of the graph of the SST, a property that fails to hold in general. A particularly noteworthy result is Proposition 7, which addresses systems with mixed constraints. To prove this result, we adopted the approach developed in [13], where the mixed constraint is “absorbed” into the dynamics by considering the differential inclusion (21). Although problems (21) and (1) are equivalent under mild assumptions, ensuring that the associated multifunction F_c satisfies suitable non-emptiness and Lipschitz-type conditions is highly nontrivial. This typically requires stronger assumptions such as the Bounded Slope Condition. While these assumptions are usually verified for a fixed constraint level c , the monotonicity property highlighted prior to Theorem 7 enables their application even when c varies.

With respect to the remaining two themes, our approach closely follows the perspective outlined in the Discussion and Perspectives section of [1]. We provide continuous-time extensions of the theorems they proposed concerning the convexity of the graph and the continuity of the multifunction, adapting the proof strategies as needed to suit the continuous-time framework.

Altogether, this work reinforces the relevance of studying the SST from a set-valued analysis standpoint. Several promising directions for future research emerge from this study. For instance, systems subject to fixed (non-parametrized) state constraints (such as non-negativity constraints) are not treated here and pose additional theoretical challenges. In such cases, the existence of solutions can fail for a given control and initial condition, as a strategy feasible from one state may lead to a violation of the constraints when starting from another. Another compelling direction involves extending this framework to a Wasserstein space setting, in which the state variables represent probability distributions modeling the (uncertain) state of the system, and their evolution is governed by a continuity equation driven by a control velocity vector field. Recent advances, such as [19], provide the necessary mathematical tools to begin exploring this novel and rich area from the differential inclusion perspective adopted throughout this work.

Acknowledgements. This research was supported by Anid-Chile under project Fondecyt Regular 1231049; by Dirección de Postgrado of Universidad Técnica Federico Santa María under grant *Programa de Incentivo a la Iniciación Científica* (PIIC) N° 037/2025 (A. Carrasco).