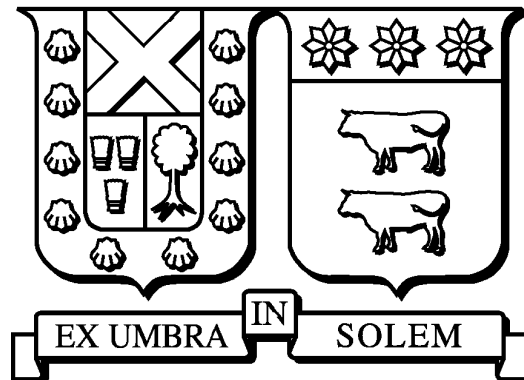


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO-CHILE



Control adaptativo para identificación de parámetros en modelos parabólicos de baterías

Tesis presentada por:

Esteban Francisco Hernández Urrutia

Como requisito parcial

para optar al grado académico de Magíster en Ciencias, mención Matemática

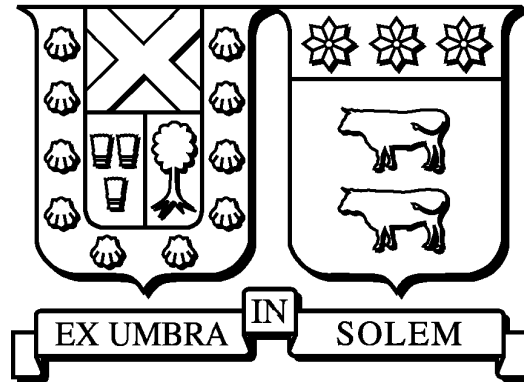
Profesor Guía:

Eduardo Cerpa Jeria

Marzo, 2017

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO-CHILE



Control adaptativo para identificación de parámetros en modelos parabólicos de baterías

Tesis presentada por:

Esteban Francisco Hernández Urrutia

Como requisito parcial

para optar al grado académico de Magíster en Ciencias, mención Matemática

Profesor Guía:

Eduardo Cerpa Jeria

Examinadores:

Eduardo Cerpa Jeria

Alberto Mercado Saucedo

Rodrigo Lecaros

Juan Yuz Eissmann

Marzo, 2017

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.

TÍTULO DE LA TESIS:

Control adaptativo para identificación de parámetros en modelos parabólicos de baterías.

AUTOR: Esteban Francisco Hernández Urrutia.

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito parcial para optar al grado académico de Magíster en Ciencias, mención Matemática.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes	Firma
Eduardo Cerpa Jeria Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____
Alberto Mercado Saucedo Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____
Rodrigo Lecaros Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____
Juan Yuz Eissmann Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____

Valparaíso, Marzo 2017.

Agradecimientos

A través de estas palabras quiero expresar mi gratitud a Dios, quién me ha guiado y sostenido a través de todo este proceso, sin lugar a dudas puedo decir que Él renueva sus bondades cada mañana y su perfecta fidelidad es un reflejo de su inmutable amor, a Él gracias.

Al profesor Dr. Eduardo Cerpa, quién me propuso el tema a desarrollar, agradezco mucho tu guía, sugerencias, correcciones, paciencia y preocupación durante todo este tiempo, a ti gracias.

A mi familia, mis padres Luis y Zenadia, por su gran ejemplo de vida, apoyo, aliento y por sobre todo sus incansables oraciones al Padre, a ustedes muchas gracias. A mi hermano Lucas, por tu compañía, palabras de aliento y oración, a ti gracias. A mis tios, Samuel y Erica, por su cariño y preocupación constante, a ustedes gracias.

A la familia Ávila Rozas, por el cariño de todos estos años y sus incontables oraciones en favor mío, a ustedes gracias.

A mis queridos Fabián, Magda, Diego, Esteban, Isaac, Jose Daniel, Katty e Ítalo por su amor fraterno y compañerismo a ustedes gracias.

A mis grandes amigos Carlos y Francisco, por todos estos años de profunda amistad, hermandad y lealtad, a ustedes gracias.

A mis amigos Pamela y Francisco, gracias por todas sus sugerencias en la preparación de esta tesis, pero aún más importante es darles las gracias por la sincera amistad que me han brindado y los gratos momentos compartidos.

Finalmente agradezco el apoyo económico de la Beca de Magíster Nacional 2014 y el FONDECYT N° 1140741, los cuales me permitieron solventar mis gastos personales durante la realización del magíster.

Valparaíso, marzo 2017.

A mi familia y amigos.

Notación.

Li	: Litio, [mol].
A	: Área de la sección transversal de la batería, [m^2].
a^j	: Área de superficie interfacial específica, [$\frac{m^2}{m^3}$].
c_e^0	: Concentración de Li en fase electrolita, [$\frac{mol}{m^3}$].
c_s^j	: Concentración de Li en fase sólida, [$\frac{mol}{m^3}$].
c_{ss}^j	: Concentración de Li en la superficie del electrodo j , [$\frac{mol}{m^3}$].
$c_{s,max}^j$: Concentración de Li máxima en fase sólida, [$\frac{mol}{m^3}$].
C_p	: Calor específico, [$\frac{J}{K \cdot Kg}$].
D_s^j	: Coeficiente de difusión en fase sólida, [$\frac{m^2}{s}$].
F	: Constante de Faraday, [$\frac{C}{mol}$].
h_{cell}	: Coeficiente de intercambio de calor, [$\frac{J}{s \cdot K}$].
I	: Corriente de entrada, [A].
i_0^j	: Densidad de corriente de intercambio, [V].
j	: Electrodo positivo (+) o negativo (-).
k^j	: Tasa de reacción, [$\frac{A \cdot mol^{1,5}}{m^{5,5}}$].
L^j	: Espesor electrodo, [m].
n_{Li}	: Número total de iones de Li , [mol].
R	: Constante universal de los gases. [$\frac{J}{molK}$].
R_f	: Resistencia filmica de interfase [Ω].
R_s^j	: Radio de la partícula sólida, [m].
r	: Coordenada radial, [m] o [m/m].
ρ	: Densidad, [$\frac{Kg}{m^3}$].
T	: Temperatura, [K].
T_{amb}	: Temperatura ambiente, [K].
U^j	: Potencial de equilibrio, [V].
t	: Tiempo, [s].
V	: Voltaje de salida, [V].
v	: Volumen, [v].
α^j	: Coeficiente de transferencia ánodo / cátodo.
ε_s^j	: Fracción de volumen fase sólida.

Índice general

Agradecimientos	v
Notación	vii
Índice general	viii
Índice de figuras	x
Índice de cuadros	xi
Resumen	xii
1. Introducción.	1
1.1. Modelo Electroquímico de Baterías.	1
1.2. Modelo de Partícula Simple (Single Particle Model).	6
1.3. Utilización, Estado de Carga y Estado de Salud.	12
1.4. Presentación del problema.	13
1.5. Esquema de esta tesis.	13
2. Estimación del Estado de Carga.	15
2.1. Diseño de observadores de estado de concentración.	15
2.2. Diseño del estimador del Estado de Carga.	28
2.3. Simulaciones.	29
3. Identificación de Parámetros y estimación del Estado de Salud.	34
3.1. Estimación del Número de iones de Litio en estado sólido, $n_{Li,s}$	34
3.2. Identificación de parámetros en la función de Voltaje.	35
3.3. Identificación de parámetros en la ecuación de variación de temperatura.	39
3.4. Simulaciones.	43
4. Inversión de la función de Voltaje y Temperatura.	47
4.1. Inversión de la función de voltaje y temperatura.	48
4.2. Análisis de estabilidad y convergencia.	48
4.3. Simulaciones.	52
5. Conclusiones y trabajo futuro.	54

A. Funciones de Bessel.	56
A.1. Funciones de Bessel J_n .	56
A.2. Función de Bessel Modificada $I_n(x)$.	57
B. Parámetros de Simulación.	58
Bibliografía	59

Índice de figuras

1.1. Celda Galvánica	2
1.2. Celda de intercalación	3
1.3. Esquema Batería	5
1.4. Esquema Modelo de Partícula Simple	7
2.1. Dominio Kernel $p(r,s)$	22
2.2. Corriente entrante.	30
2.3. Voltaje salida.	30
2.4. Temperatura.	31
2.5. Estado y observador.	31
2.6. Estado y observador.	32
2.7. Decaimiento exponencial de la norma.	32
2.8. Estado de carga $SOC(t)$ y estimador $\widehat{SOC}(t)$	33
3.1. Estimación de $n_{Li,s}$	43
3.2. Estimación de R_f	44
3.3. Estimación de φ_1	45
3.4. Estimación de φ_2	46
4.1. Inversión Cátodo.	53
4.2. Inversión Ánodo.	53

Índice de cuadros

B.1. Parámetros de simulación.	58
--	----

Control adaptativo para identificación de parámetros en modelos parabólicos de baterías

por ESTEBAN HERNÁNDEZ URRUTIA

Resumen

En la actualidad las baterías son elementos muy comunes en nuestro entorno, están presentes en un gran rango de aplicaciones tales como smartphones, notebooks, drones, vehículos eléctricos, redes eléctricas. Además en aplicaciones médicas, tales como desfibriladores portátiles, bombas de insulinas, entre muchas otras. El diseño y uso de baterías se han transformado en puntos claves en el desarrollo tecnológico, esto hace necesario el uso de métodos de control y estimación (Battery Management System), los cuales pueden conducirnos a una mejora sustancial en el uso de baterías.

En esta tesis estamos interesados en estudiar Modelos Electroquímicos de baterías de Litio dados por un sistema compuesto por ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones algebraicas. En particular el denominado Modelo de Partícula Simple.

Resolvemos el problema de dar una estimación on-line del Estado de Carga de la batería a partir de mediciones en el tiempo de la corriente entrante, voltaje de salida y temperatura, mediante el diseño de un observador de la concentración de iones de Litio y las entradas adecuadas para este observador. Empleando el método de Backstepping, introducido por Krstic en [7], damos forma a este observador. Además, se da una prueba de la convergencia y estabilidad asintótica del observador con respecto al verdadero valor de la concentración de iones de Litio.

Enfrentamos el problema de dar una noción del Estado de Salud de la batería, a través de un problema de identificación on-line de parámetros claves el Modelo de Partícula Simple relacionados al Estado de Salud. Empleando el análisis de Lyapunov se obtienen resultados de estabilidad y convergencia de los estimadores de tales parámetros.

Además del análisis matemático, ilustramos los resultados obtenidos con simulaciones numéricas.

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Modelo Electroquímico de Baterías.

1.1.1. Principios electroquímicos de las baterías.

El físico italiano Alejandro Volta creó la primera batería en 1800. Denominada Pila o celda Voltaica, esta consistía en dos metales en serie, zinc y cobre, emparejados mediante una solución electrolita de ácido sulfúrico, ver Figura 1.1. Volta construyó este sistema gracias a los experimentos realizados por su colega Luis Galvani, quien estaba fascinado por la interacción entre la electricidad y los sistemas nerviosos biológicos. Durante un experimento, Galvani descubrió que las piernas de una rana muerta daban patadas cuando se conectaban a dos metales distintos. Galvani llamó a la energía proveniente de dentro del animal, como “electricidad animal”. Volta creía que diferentes metales causaban este comportamiento y validó su hipótesis mediante la Pila Voltaica. Así, las celdas electroquímicas nacieron.

A groso modo, una batería convierte energía química en eléctrica mediante reacciones de óxido reducción¹. El sistema consiste en dos metales distintos (electrodos), inmersos en un electrolito. El cátodo (electrodo positivo) y el ánodo (electrodo negativo) son seleccionados en conjunto de forma tal que su diferencia de potencial electroquímico sea el mayor posible. Esto crea la propiedad de almacenamiento de energía electroquímica en una batería. Los electrodos son eléctricamente aislados por un separador. En consecuencia, el principio de conservación de la carga empuja a los electrones a circular por un circuito externo, alimentando algún aparato conectado, mientras que los cationes fluyen entre los electrodos dentro del electrolito.

¹Reacciones óxido reducción, reacción química en la que uno o más electrones se transfieren entre los reactivos, provocando un cambio en sus estados de oxidación.

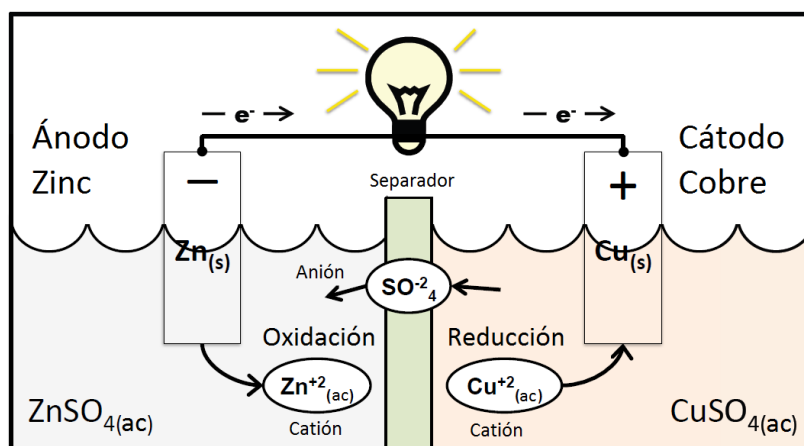


FIGURA 1.1: Un ejemplo de una celda Galvánica (o Voltaica) Zinc-Cobre, mostrando los principios de operación de una batería electroquímica. Figura tomada de [9].

1.1.2. Ideas y conceptos claves en la modelación de baterías de Litio.

Intercalación.

El proceso de mover iones dentro y fuera de un sitio intersticial de un “reticulado” es llamado *intercalación*. El común de las celdas de Li-Ion, son baterías del tipo de intercalación dual, en otras palabras, ambos electrodos poseen un “reticulado” que puede almacenar Litio, ver Figura 1.2.

La carga (descarga) en baterías de intercalación dual, provoca que los iones de Litio dejen el enrejado en el electrodo positivo (negativo) y se dirijan al enrejado del electrodo negativo (positivo). La diferencia de los estados de energía del Litio intercalado en el electrodo positivo y negativo, determina la energía almacenada en la batería.

Principio de funcionamiento de una batería de Li-Ion.

Una típica batería de Litio posee cuatro componentes principales, ver Figura 1.2. El *Electrodo negativo* está conectado a la terminal negativa de la batería. Este electrodo contiene usualmente grafito, el cual es un material de intercalación. Similarmente, el electrodo positivo está conectado a la terminal positiva de la celda. Además, contiene un *separator*, el cual es una delgada capa porosa, que separa el electrodo positivo del negativo. El separator es un aislante eléctrico, es decir, impide el flujo de electrones entre el ánodo y el cátodo. De todos modos, siendo un medio poroso, permite que los iones pasen a través de sí, por medio del electrolito. El *Electrolito*, es una solución concentrada que contiene las especies cargadas, las que pueden desplazarse en respuesta a un gradiente de potencial electroquímico. Notar que algunas baterías tienen un electrolito sólido, el cual sirve como un conductor iónico y a su vez como un aislante electrónico. En ambos casos la especie cargada que se intercala en la batería es el ión Li^+ . El electrodo negativo, positivo y el separator se encuentran inmersos

en este electrolito el cual rellena todos los poros del material sólido.

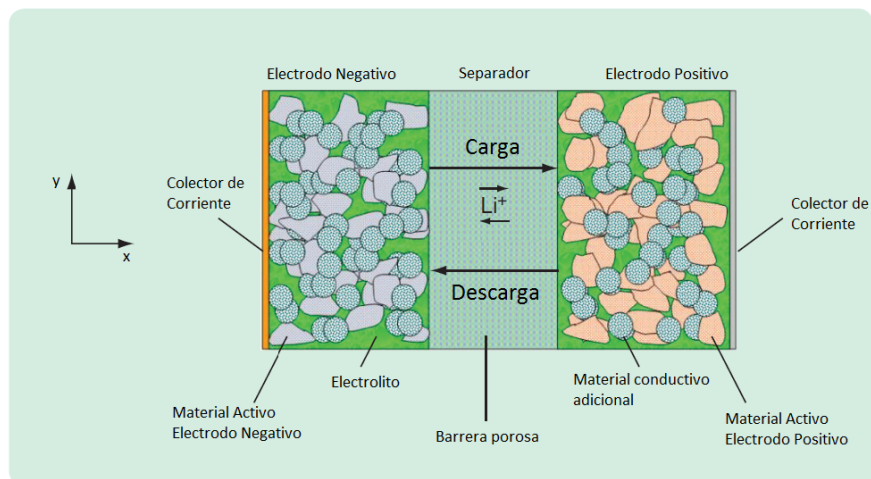


FIGURA 1.2: Anatomía de una celda de intercalación. Ambos electrodos están separados por un material aislante, el cual no permite el paso de electrones, pero es lo suficientemente poroso para permitir que los iones de Litio fluyan. Notar además la presencia de materiales conductivos adicionales en los electrodos. Estos materiales mantienen el electrodo unido y mejoran su conductividad. Figura tomada de [3]

Potencial de Circuito Abierto.

Como se mencionó anteriormente, la propiedad de almacenamiento de una batería está estrechamente relacionada a los potenciales electroquímicos propios de cada electrodo.

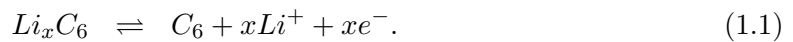
La energía libre del ión de Litio, cuando está ubicado en un intersticio del electrodo positivo, es diferente a la energía libre cuando está posicionado en un intersticio del electrodo negativo. En particular, comparado con el electrodo positivo, el Litio posee una alta energía cuando está almacenado en el electrodo negativo. Para un material dado, estas energías libres son conocidas y están estrechamente relacionadas al potencial electroquímico. Por medio de estos valores de potencial electroquímico, es posible expresar el potencial electrostático del electrodo positivo o negativo, mediante una función de los valores de Litio almacenados en cada electrodo. El cociente de la concentración de Litio y su máximo valor posible en el electrodo es llamado *utilización* del electrodo. El potencial electrostático es denominado *Potencial de Circuito Abierto* (Open Circuit Potential) OCP, por sus siglas en inglés.

Notar que ambos electrodos tienen un OCP asociado. Sea U^- denotando el OCP del electrodo negativo y U^+ el OCP del electrodo positivo. Entonces la diferencia $U^+ - U^-$, representa el OCP de la batería. El OCP de la celda también es llamado Voltaje de circuito abierto o Tensión de circuito abierto. El OCP de la celda corresponde al voltaje medido, asumiendo que no existen corrientes de entrada o salida.

1.1.3. Modelación.

Los modelos electroquímicos de baterías (EChM), capturan la dinámica espacial y temporal de la concentración de iones de Litio (Li), potencial eléctrico y cinéticas de intercalación. Muchos de los modelos en la literatura existente son derivados del modelo desarrollado por Doyle, Fuller y Newman (DFN), el cual está basado en electrodos porosos y teoría de soluciones concentradas, ver [15]

A carga completa, la mayor parte de los iones de Litio se encuentran en las partículas sólidas que conforman el ánodo, típicamente un carbono litiado Li_xC_6 . Estas partículas son idealizadas como esféricas. Durante la descarga, el Litio se propaga desde el interior hasta la superficie de estas partículas esféricas, ver Figura 1.3. En la superficie una reacción electroquímica separa el Litio en un ión positivo de Litio y un electrón según la ecuación



A continuación, el ion se mueve a través del separador desde el ánodo al cátodo. Dado que el separador es un aislante electrónico, el electrón correspondiente viaja a través de un circuito externo, alimentando el dispositivo conectado. El ion de Litio y el electrón se reúnen en la superficie del cátodo, típicamente un óxido metálico de Litio $LiMO_2$, bajo una reacción electroquímica reversible de acuerdo a la ecuación



El átomo de Litio resultante se difunde al interior de la partícula esférica que configura el cátodo. El proceso completo es reversible aplicando el suficiente potencial. Además de modelar la migración de Litio, este modelo también captura la dinámica espacio-temporal de los potenciales internos, la corriente electrolita y la densidad de corriente entre la fase sólida y electrolita. Ver Figura 1.3.

El modelo unidimensional espacial para una batería Li-Ion, considera la dinámica sólo a lo largo de un eje (eje X, por ejemplo), y omite la dinámica a lo largo de los dos ejes restantes (eje Y y eje Z.). Esta aproximación es aplicable en celdas con una gran área de sección transversal y bajas corrientes.

En cada dominio, a saber, electrodo negativo, separador y electrodo positivo, el Litio puede encontrarse en dos estados disjuntos, llamados *fases*. La primera fase representa el Litio intercalado en electrodo, mientras que la segunda fase involucra al Litio en un estado disuelto en el electrolito. Por lo tanto, en cada punto a lo largo del eje X el Litio puede existir, ya sea en fase sólida o en un estado disuelto en el electrolito, aunque en el dominio del separador sólo puede existir en fase electrolita. Se necesitan ecuaciones que describan la dinámica en cada una de las fases que tiene el ión de Litio en la batería.

Se modela la celda Li-Ion, asumiendo, como lo muestra la Figura 1.3, que las partículas

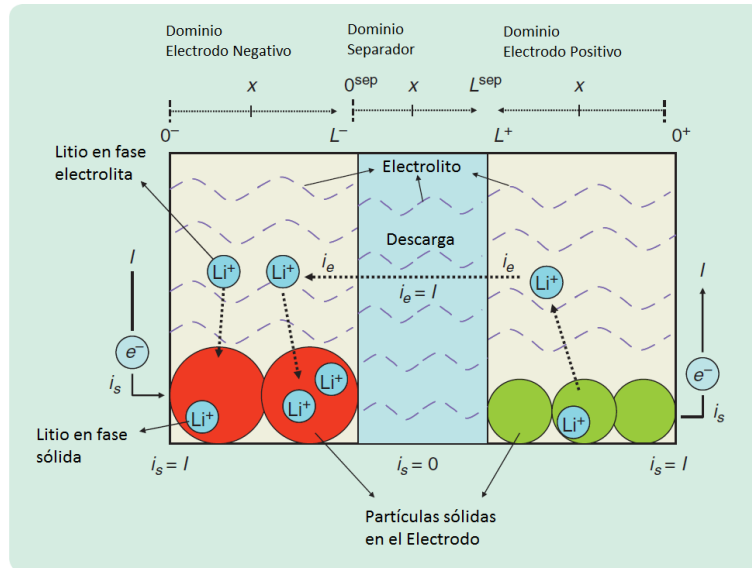


FIGURA 1.3: Esquema de la modelación del proceso de intercalación en una batería. En ambos electrodos el Litio puede presentarse en dos estados disjuntos, en un estado sólido (en aglomeraciones idealmente esféricas) o en un estado disuelto en el electrolito. El proceso de intercalación e iones puede ser representado como el transitar de iones de Litio desde y hacia estas partículas esféricas, que representan el estado sólido, cuando la batería es cargada o descargada respectivamente. Notar que el separador sólo posee Litio en estado electrolito. Así i_s , representa la corriente electrónica en la partícula sólida, la cual es cero en el separador, mientras que la corriente iónica en el electrolito, denotada por i_e , es igual a la corriente aplicada I . Figura tomada de [3].

esféricas existen en todo punto a lo largo del eje X . El proceso de intercalación es modelado por el movimiento de iones de Litio, hacia afuera (electrodo negativo) y hacia dentro (electrodo positivo), en estas partículas esféricas, las cuales están inmersas en el electrolito. Las variables de estado necesarias para describir el modelo unidimensional de espacio, en la posición x en el tiempo t y en el electrodo j son:

- $c_s^j(x, r, t)$, que es concentración de litio en fase sólida, donde la variable r representa la distancia al centro de la partícula esférica, posicionada en x en el tiempo t .
- $c_e(x, t)$, concentración de litio en fase electrolita.
- $\phi_s^j(x, t)$, potencial eléctrico en fase sólida.
- $\phi_e(x, t)$, potencial eléctrico en fase electrolita.
- $i_e^j(x, t)$, corriente iónica.
- j_n^j , flujo molar iónico.
- $T(t)$ la temperatura.

Entonces el modelo DFN, está dado por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{\partial c_s^j}{\partial t}(x, r, t) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[D_s^j r^2 \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(x, r, t) \right], \\ \frac{\partial c_e^j}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[D_e(c_e) \frac{\partial c_e}{\partial x}(x, t) + \frac{1-t_c^0}{\varepsilon_e F} i_e^j(x, t) \right], \\ \frac{\partial \phi_s^j}{\partial x}(x, t) &= \frac{i_e^j(x, t) - I(t)}{\sigma^j}, \\ \frac{\phi_e}{\partial x}(x, t) &= -\frac{i_e^j(x, t)}{\kappa(c_e)} + \frac{2RT}{F}(1-t_c^0) \left(1 + \frac{d \ln f_{c/a}}{d \ln c_e}(x, t) \right) \frac{\partial \ln c_e}{\partial x}(x, t), \\ \frac{\partial i_e^j}{\partial x}(x, t) &= a_s F j_n^j(x, t), \\ j_n^j(x, t) &= \frac{1}{F} i_0^j(x, t) \left[e^{\frac{\alpha_a F}{RT} \eta^j(x, t)} - e^{-\frac{\alpha_c F}{RT} \eta^j(x, t)} \right], \\ v \rho c_p \frac{dT}{dt} &= h_{cell} [T_{amb}(t) - T(t)] + I(t) V(t) - \int_{0^-}^{0^+} a_s F j_n(x, t) \Delta T(x, t) dx. \end{cases} \quad (1.3)$$

Donde, D_e , κ , $f_{c/a}$ son funciones de $c_e(x, t)$ y además

$$i_0^j(x, t) = k^j \sqrt{c_{ss}^j(x, t) c_e(x, t) (c_{s,max}^j - c_{ss}^j(x, t))}, \quad (1.4)$$

$$\eta^j(x, t) = \phi_s^j(x, t) - \phi_e(x, t) - U^j(c_{ss}^j(x, t)) - F R_f^j j_n^j(x, t), \quad (1.5)$$

$$c_{ss}^j = c_s^j(x, R_s^j, t), \quad (1.6)$$

$$\Delta T(x, t) = U^j(\bar{c}_{ss}^j(x, t)) - T(t) \frac{\partial U^j}{\partial T}(\bar{c}_s^j(x, t)), \quad (1.7)$$

$$\bar{c}_s^j(x, t) = \frac{3}{(R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} r^2 c_s^j(x, r, t) dr. \quad (1.8)$$

1.2. Modelo de Partícula Simple (Single Particle Model).

El Modelo de Partícula Simple (Single Particle Model, SPM), es una simplificación del Modelo DFN (1.3)-(1.8). Como se muestra en la Figura 1.4, cada electrodo es idealizado como una gran partícula esférica y entre ellos se ubica el separador. Para obtener este modelo a partir del modelo DFN, se asume que la variación de la concentración de Li en estado electrolito es constante espacial y temporalmente, i.e,

$$\frac{\partial c_e}{\partial x}(x, t) \approx 0, \quad \frac{\partial c_e}{\partial t}(x, t) \approx 0.$$

Para ver una deducción formal de este modelo, ver [3]. Matemáticamente el modelo consiste en dos ecuaciones diferenciales parciales de difusión, (Ley de Fick en coordenadas esféricas),

$$\frac{\partial c_s^j}{\partial t} = D_s^j \left[\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 c_s^j}{\partial r^2}(r, t) \right] \quad (r, t) \in (0, R_s^j) \times (0, \infty),$$

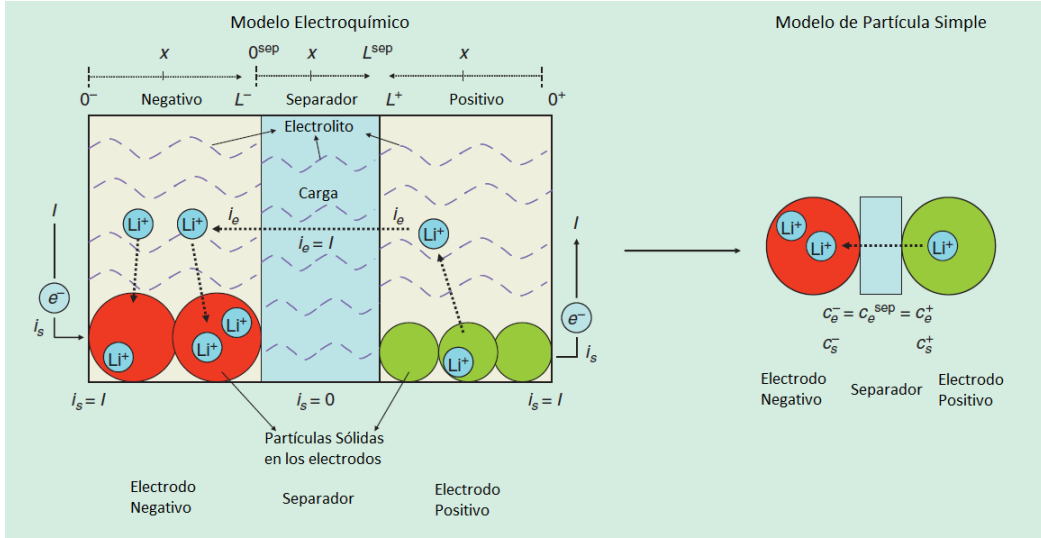


FIGURA 1.4: El Modelo de Partícula Simple, consiste en una simplificación del Modelo DFN, en la cual los electrodos son idealizados como un gran partícula esférica. Esta simplificación funciona bien para pequeñas corrientes o para un electrolito con una elevada conductividad iónica. Figura tomada de[3].

y condiciones de frontera

$$\frac{\partial c_s^j}{\partial r}(0, t) = 0 \quad t \in (0, \infty), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial c_s^j}{\partial r}(R_s^j, t) = -j \frac{I(t)}{D_s^j F a^j A L^j} \quad t \in (0, \infty). \quad (1.10)$$

Donde $j \in \{+, -\}$, indican el electrodo positivo y negativo respectivamente.

Las condiciones de frontera (1.9) y (1.10) implican que en la superficie de la partícula, i.e cuando $r = R_s^j$, la tasa a la cual los iones salen de la partícula y entran al electrolito es dado por el flujo molar $-j \frac{I(t)}{D_s^j F a^j A L^j}$ $j \in \{+, -\}$, y esta tasa en el centro de la partícula, i.e $r = 0$, es igual a cero.

El voltaje de salida es dado por una función no lineal de los valores de concentración en la frontera, $c_{ss}^j(t) = c_s(R_s^j, t)$ y de la corriente entrante $I(t)$. Se deduce a partir de la ecuación de Butler-Volmer para la cinética electroquímica de cada electrodo, ver [3].

Entonces el voltaje es dado por la siguiente igualdad

$$V(t) = \frac{RT(t)}{\alpha F} \sinh^{-1} \left(\frac{-I(t)}{2a^+ AL^+ i_0^+(c_{ss}^+(t))} \right) - \frac{RT(t)}{\alpha F} \sinh^{-1} \left(\frac{I(t)}{2a^- AL^- i_0^-(c_{ss}^-(t))} \right) + U^+(c_{ss}^+(t)) - U^-(c_{ss}^-(t)) - R_f I(t),$$

donde i_0^\pm reciben el nombre de densidad de corriente de intercambio y están dadas por

$$i_0^j(c_{ss}^j) = k^j \sqrt{c_s^0 c_{ss}^j(t) (c_{s, \text{máx}}^j - c_{ss}^j(t))}, \quad j \in \{+, -\}.$$

Las funciones $U^j(\cdot)$ son los potenciales de equilibrio de cada electrodo, funciones que dependen de la concentración $c_s^j(R_s^j, t)$. Matemáticamente, estas funciones son monótonas decreciente en sus argumentos.

Asumimos que la temperatura sólo varía con respecto al tiempo y la obtenemos mediante un balance de energía, ver [9]. Bajo las hipótesis del Modelo de Partícula Simple, tenemos que la evolución de la temperatura está dada por

$$\begin{aligned} v\rho C_p \frac{dT}{dt}(t) &= h_{cell}[T_{amb}(t) - T(t)] + I(t)V(t) + I(t)T(t) \left(\frac{\partial U^-}{\partial T}(c_{ss}^-(t)) - \frac{\partial U^+}{\partial T}(c_{ss}^+(t)) \right) \\ &\quad + I(t) (U^-(c_{ss}^-(t)) - U^+(c_{ss}^+(t))). \end{aligned} \quad (1.11)$$

En esta tesis consideramos un modelo simplificado del la ecuación (1.11), dada por

$$\begin{cases} \dot{T}(t) &= \frac{h_{cell}}{v\rho C_p}(T_{amb} - T(t)) + \frac{1}{v\rho C_p}I(t)V(t) \\ T(0) &= T_{amb}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Introducimos la siguiente reparametrización:

$$\varphi_1 = \frac{h_{cell}}{v\rho C_p}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{v\rho C_p}.$$

La cual permite reescribir la ecuación (1.12) de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \dot{T}(t) &= \varphi_1 (T_{amb} - T(t)) + \varphi_2 I(t)V(t), \\ T(0) &= T_{amb}. \end{cases}$$

Notar que los parámetros φ_1 y φ_2 ponderan las interacciones externas e internas respectivamente que contribuyen a la variación de la temperatura.

Mediante el método de Variación de parámetros damos la solución explícita para $T(t)$, en términos de la corriente $I(t)$, el voltaje $V(t)$ y los parámetros φ_1 y φ_2 .

$$T(t) = T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s)e^{\varphi_1(s-t)} ds.$$

A modo de resumen, recopilamos las ecuaciones que componen el Modelo de Partícula Simple que se emplea en esta tesis.

$$\begin{cases} \frac{\partial c_s^j}{\partial t} = D_s^j \left[\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 c_s^j}{\partial r^2}(r, t) \right] & (r, t) \in (0, R_s^j) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(R_s^j, t) = -j \frac{I(t)}{D_s^j F a^j A L^j}, & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{RT(t)}{\alpha F} \sinh^{-1} \left(\frac{-I(t)}{2a^+ AL^+ i_0^+(c_{ss}^+(t))} \right) - \frac{RT(t)}{\alpha F} \sinh^{-1} \left(\frac{I(t)}{2a^- AL^- i_0^-(c_{ss}^-(t))} \right) \\ & + U^+(c_{ss}^+(t)) - U^-(c_{ss}^-(t)) - R_f I(t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$T(t) = T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t I(s) V(s) e^{\varphi_1(s-t)} ds. \quad (1.15)$$

Donde $j \in \{+, -\}$, indica el electrodo positivo y negativo respectivamente.

Definición 1.2.1. (Número total de iones de Litio en estado sólido).

Se define el número total de iones de Litio en estado sólido, $n_{Li,s}$ como la suma total de iones en fase sólida en el ánodo y el cátodo respectivamente, ver [9], [11] y [12], mediante la siguiente ecuación:

$$n_{Li,s}(t) = \sum_{j \in \{+, -\}} \frac{\epsilon_s^j L^j A}{\frac{4}{3} \pi (R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} 4\pi r^2 c_s^j(r, t) dr. \quad (1.16)$$

1.2.1. Propiedades del Modelo de Partícula Simple.

Notar que las ecuaciones para las concentraciones c_s^+ y c_s^- son mutuamente independientes una de otra. Es más, están dadas por ecuaciones en derivadas parciales lineales, las cuales producen valores en la frontera, $c_{ss}^+(t)$ y $c_{ss}^-(t)$, los que su vez son argumentos en las funciones de voltaje (1.14) y temperatura (1.15), ver [3], [11], [12].

1.2.1.1. Estabilidad Marginal.

Cada subsistema en (1.13), modelando los estados de concentración c_s^j , $j \in \{+, -\}$, es un sistema estable, i.e, cada ecuación homogénea asociada es estable, ver [12]. En particular, cada subsistema contiene un valor propio igual a cero y el resto en el eje real negativo del plano complejo. En efecto, considerar la siguiente transformación de estado $c(r, t) = r c_s(r, t)$, omitimos la indicación del ánodo o cátodo ya que ambos casos son idénticos. Esta transformación es invertible, ver [11] y conduce al siguiente sistema en variables normalizadas, ver

sección 2.1.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}(r, t), & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ c(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial c}{\partial r}(1, t) - c(1, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (1.17)$$

El cual tiene asociado el siguiente problema de valores propios Sturm- Liouville.

$$\begin{cases} R''(r) - \mu R(r) = 0 \\ R(0) = 0 \\ R'(1) - R(1) = 0. \end{cases}$$

A partir de esto, se observa que los valores propios de este sistema, corresponden al siguiente conjunto

$$\{\mu \in \mathbb{R} \text{ tales que } \mu = -\sigma^2 \text{ y } \sigma = \tan(\sigma)\},$$

lo cual nos da la propiedad de estabilidad para la ecuación de estado (1.17) y mediante la propiedad de invertibilidad de la transformación de estado aplicada a (1.13), se concluye la propiedad de estabilidad marginal.

1.2.1.2. Conservación de iones de Litio.

El Modelo de Partícula Simple tiene la propiedad de conservar el número de iones de Litio en estado sólido, estableciendo una relación entre la concentración de iones de Litio (en estado sólido) en el ánodo y el cátodo. Esta conservación es mencionada en los artículos [11], [12], sin explicitar el cálculo. En la siguiente proposición comprobamos la afirmación.

Proposición 1.2.1. (*Conservación de iones de Litio en fase sólida*).

La concentración de iones de Litio se conserva, es decir,

$$\frac{d}{dt}(n_{Li,s}(t)) = 0. \quad (1.18)$$

Demostración. Derivando directamente (1.16), y usando el modelo para la concentraciones de iones, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{n}_{Li,s}(t) &= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} \int_0^{R_s^+} 4\pi r^2 \frac{\partial c_s^+}{\partial t}(r, t) dr + \frac{\varepsilon_s^- L^- A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^-)^3} \int_0^{R_s^-} 4\pi r^2 \frac{\partial c_s^-}{\partial t}(r, t) dr \\
&= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} \int_0^{R_s^+} 4\pi r^2 D_s^+ \left(\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^+}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_s^+}{\partial r^2} \right) dr + \\
&\quad \frac{\varepsilon_s^- L^- A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^-)^3} \int_0^{R_s^-} 4\pi r^2 D_s^- \left(\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^-}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_s^-}{\partial r^2} \right) dr, \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Se trabaja con I_1 , ya que I_2 es análogo.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} \int_0^{R_s^+} 8\pi D_s^+ r \frac{\partial c_s^+}{\partial r} dr + \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} \int_0^{R_s^+} 4\pi D_s^+ r^2 \frac{\partial^2 c_s^+}{\partial r^2} dr \\
&= I_{1,1} + I_{1,2}.
\end{aligned}$$

Integramos por partes $I_{1,2}$ y obtenemos lo que se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} (R_s^+)^2 4\pi D_s^+ \frac{\partial c_s^+}{\partial r}(R_s^+, t) - \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} \int_0^{R_s^+} 8\pi D_s^+ r \frac{\partial c_s^+}{\partial r} dr \\
&= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} (R_s^+)^2 4\pi D_s^+ \frac{\partial c_s^+}{\partial r}(R_s^+, t) - I_{1,1}.
\end{aligned}$$

Luego, por la igualdad $I_1 = I_{1,1} + I_{1,2}$, tenemos que,

$$I_1 = \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} (R_s^+)^2 4\pi D_s^+ \frac{\partial c_s^+}{\partial r}(R_s^+, t).$$

De forma similar, podemos obtener

$$I_2 = \frac{\varepsilon_s^- L^- A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^-)^3} (R_s^-)^2 4\pi D_s^- \frac{\partial c_s^-}{\partial r}(R_s^-, t).$$

Finalmente, utilizando las condiciones de frontera del modelo, se obtiene que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varepsilon_s^+ L^+ A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^+)^3} (R_s^+)^2 4\pi D_s^+ \frac{-I(t)}{D_s^+ F a^+ A L^+}, \\
I_2 &= \frac{\varepsilon_s^- L^- A}{\frac{4}{3}\pi(R_s^-)^3} (R_s^-)^2 4\pi D_s^- \frac{I(t)}{D_s^- F a^- A L^-}.
\end{aligned}$$

Imponiendo la siguiente relación entre las fracciones de volumen ε^j y los coeficientes de área específica interfacial,

$$\varepsilon_s^j = \frac{1}{3} a^j R_s^j, \quad j \in \{+, -\},$$

tenemos que

$$\frac{d}{dr} (n_{Li,s}(t)) = 0$$

■

1.3. Utilización, Estado de Carga y Estado de Salud.

La utilización local, en cada punto en el electrodo es el cociente de la concentración de Litio en estado sólido y su máximo valor posible en ese punto. Así, si $c_s(r, t)$ indica la concentración el radio r de la partícula esférica y $c_{\text{máx},s}$, señala el máximo valor posible, entonces la utilización del electrodo se define como $c_s(r, t)/c_{\text{máx},s}$. La utilización promedio del electrodo completo es llamada Estado de Carga (State of Charge, SOC) del electrodo. Notar que el SOC, es una cantidad adimensional, la cual mide la carga contenida en el electrodo calculado en términos de la concentración de Litio. Dado que la cantidad de Litio almacenada en los electrodos está relacionada con la cantidad de carga disponible, el SOC puede ser usado como un indicador de la energía disponible. Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.3.1. (Estado de Carga en el electrodo).

Considerando las concentraciones $c_s^j(r, t)$ dadas por (1.13), se define el Estado de Carga en el electrodo j (ver [3]), como

$$SOC^j(t) = \frac{3}{(R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} r^2 \frac{c_s^j(r, t)}{c_{s,\text{máx}}^j} dr. \quad (1.19)$$

El SOC^+ y el SOC^- están relacionados y por lo tanto es suficiente usar sólo SOC^- para representar el SOC de la batería, ver [3].

La métrica del *Estado de Salud* (State of Health, SOH) de una batería, indica una idea de la edad relativa de la batería.²

Estimar el Estado de Salud es particularmente difícil por varias razones. En primer lugar, no existe una definición universalmente aceptada para el SOH . En segundo lugar, podemos agregar que la dinámica de las baterías, está dada por ecuaciones en derivadas parciales obtenidas a partir de los principios electroquímicos involucrados. Además, las cantidades disponibles para ser medidas, a decir, voltaje, corriente y temperatura, están relacionadas a los estados de concentración de Litio, mediante funciones no lineales, lo que dificulta su estimación, [9].

Dos de las métricas de SOH más comunes son, el Charge Capacity Fade y Impedance Rise,

²Algunas métricas recurrentes del SOH , incluyen Capacidad de carga, impedancia interna y ciclos de carga y descarga.

i.e Power Fade. El Charge Capacity Fade, indica cómo la capacidad de carga ha decrecido con respecto a su valor original. Es decir, una celda inicialmente pudiese tener una capacidad de carga de $2Ah$ y después de dos años de uso, decrece a $1,6Ah$. El Power capacity fade, indica como la potencia que provee la batería inicialmente ha decrecido, por ejemplo inicialmente una batería provee $360W$ de potencia por 10 segundos, pero después de dos años de uso sólo $300W$. Cambios graduales en las métricas del SOH, están directamente relacionadas a cambios en los parámetros del modelo matemático, por lo que en algunas referencias estiman esos parámetros sin indicar claramente una métrica para el SOH, ver [9].

1.4. Presentación del problema.

El Modelo de Partícula Simple es uno de los tantos modelos matemáticos que se han desarrollado para describir en parte y estudiar el comportamiento una batería de iones de litio, ver [14]. El gran potencial que presenta el uso de baterías exige también de técnicas de control y estimación que se orienten a una mejora del uso y mejor aprovechamiento de las capacidades de una batería de iones de litio. En esta tesis estamos interesados en utilizar un Modelo de Partícula Simple, para determinar el Estado de Carga (State of Charge) y el Estado de Salud (State of Health) de la batería, todo esto a partir de mediciones on-line de la corriente entrante, el voltaje de salida y la temperatura.

1.5. Esquema de esta tesis.

Presentamos de manera general el contenido de los siguientes capítulos.

El capítulo 2, Estimación del Estado de Carga, está dividido en tres partes principales, en la sección 2.1, nos referimos al diseño de observadores para las concentraciones de iones en los electrodos mediante el método Backstepping en EDP. En la sección 2.2, se presenta un estimador del Estado de Carga a partir del observador desarrollado en la sección anterior y se estudia sus propiedades de convergencia. En la sección 2.3, se ilustran los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas.

En el capítulo 3, titulado Estimación de Parámetros y estimación del Estado de Salud, mediante técnicas usuales de control adaptativo como funciones de Lyapunov, se construyen estimaciones on-line de parámetros cruciales para identificar el Charge Capacity Fade y el Power Fade, además se muestra la convergencia de estos estimadores de parámetros. En la sección final de este capítulo, ejemplifican los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas. En el capítulo 4, Inversión de la función de Voltaje y Temperatura, se propone un esquema de inversión on-line para que a partir del Voltaje y Temperatura obtener los

input necesarios para los observadores ya construidos en el capítulo 2. Lo nuevo, propuesto en este capítulo, a diferencia de lo hecho en las referencias [12], [11] y [13] es que la inversión se lleva a cabo para obtener simultáneamente los input necesarios para el observador de concentración del cátodo y el ánodo, además damos una estimación de la convergencia de la inversión.

El capítulo 5, reúne algunas conclusiones y observaciones.

En el apéndice A, damos una breve referencia a funciones de Bessel, empleadas en esta tesis.

El apéndice B, contiene un cuadro resumen con los valores de los parámetros utilizados en la simulaciones presentadas en esta tesis.

Capítulo 2

Estimación del Estado de Carga.

Como se mencionó en la sección 1.3, el Estado de Carga, (SOC), se define mediante la siguiente ecuación

$$SOC(t) = \frac{3}{(R_s^-)^3 c_{s,\text{máx}}^-} \int_0^{R_s^-} r^2 c_s^-(r, t) dr. \quad (2.1)$$

Siguiendo las ideas presentadas en [11] y [12], se desarrollan observadores \hat{c}_s^j $j \in \{+, -\}$, para estimar la concentración de iones en el cátodo y ánodo simultáneamente. La cantidad SOC es estimada mediante el uso del observador \hat{c}_s^- .

Es importante señalar que en las referencias ya mencionadas sólo se construye el observador \hat{c}_s^- , ya que se asume que la difusión en el cátodo es mucho más rápida que en el ánodo, por lo que la concentración en el electrodo positivo está en su estado de equilibrio. En esta tesis no hacemos tal suposición, consideramos que los tiempos de difusión característicos son comparables en ambos electrodos, por lo cual no se puede asumir que la concentración en algún electrodo está en un estado de equilibrio.

2.1. Diseño de observadores de estado de concentración.

2.1.1. Normalización y transformación del estado.

Como ya se había mencionado en la sección 1.2, las ecuaciones del Modelo Electroquímico de Partícula Simple, que modelan las concentraciones de iones en los electrodos están dadas

por

$$\begin{cases} \frac{\partial c_s^j}{\partial t} = D_s^j \left[\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 c_s^j}{\partial r^2} \right] & (r, t) \in (0, R_s^j) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(0, t) = 0 & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(R_s^j, t) = -j \frac{I(t)}{D_s^j F a^j A L^j} & t \in (0, \infty), \end{cases}$$

donde $j \in \{+, -\}$ indica al cátodo y ánodo respectivamente.

A continuación aplicamos una normalización a las variables r, t y una transformación del estado, con el propósito de simplificar.

Definimos las variables adimensionales,

$$\bar{r} = \frac{r}{R_s^j}, \quad \bar{t} = \frac{D_s^j}{(R_s^j)^2} t \quad j \in \{+, -\},$$

de esta forma $\bar{r} \in (0, 1)$.

En lo que sigue, empleamos r y t como nuestras variables normalizadas, con el fin de simplificar la notación.

Así, las ecuaciones para las concentraciones de iones de litio, en el electrodo j se reescriben como

$$\begin{cases} \frac{\partial c_s^j}{\partial t} = \left[\frac{2}{r} \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 c_s^j}{\partial r^2} \right] & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(1, t) = -j \frac{R_s^j I(t)}{D_s^j F a^j A L^j} & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Lo siguiente es aplicar una transformación al estado c_s^j , que permita eliminar la derivada espacial de primer orden en la difusión. Para esto considere la ecuación de transformación

$$c^j(r, t) = r c_s^j(r, t) \quad j \in \{+, -\}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{\partial c^j}{\partial r}(r, t) = c_s^j(r, t) + r \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) \quad j \in \{+, -\}$$

y además

$$\frac{\partial^2 c^j}{\partial r^2}(r, t) = 2 \frac{\partial c_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 c_s^j}{\partial r^2}(r, t) \quad j \in \{+, -\}.$$

Esta normalización de variables y transformación del estado produce la siguiente EDP con condiciones de borde Dirichlet y Robin,

$$\begin{cases} \frac{\partial c^j}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 c^j}{\partial r^2}(r, t) & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c^j(0, t) = 0 & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial c^j}{\partial r}(1, t) - c^j(1, t) = -j\rho_j I(t), & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde $\rho_j = \frac{R_s^j}{D_s^j F a^j A L^j}$, $j \in \{+, -\}$ son parámetros plenamente conocidos.

2.1.2. Método de Backstepping.

En esta sección nos disponemos a desarrollar un observador lineal del estado de concentración de iones c^- , solución de la ecuación (2.3), basado en el método de Backstepping, ver [7]. El caso para c^+ se desarrolla de forma análoga.

Sea \hat{c}^- este observador. La estructura para la ecuación de \hat{c}^- , consiste en una copia del modelo original de estado de concentración (2.3), al cual se inyecta el error de observación en la frontera $r = 1$, i.e $\tilde{c}^-(1, t) = c^-(1, t) - \hat{c}^-(1, t)$, ponderado por una función $p_1(r)$ en la ecuación principal y por una constante p_{10} en la condición de frontera $r = 1$. Así, la ecuación para el observador \hat{c}^- toma la siguiente forma,

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{c}^-}{\partial r}(r, t) = \frac{\partial^2 \hat{c}^-}{\partial r^2} + p_1(r) [c^-(1, t) - \hat{c}^-(1, t)], & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ \hat{c}^-(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \hat{c}^-}{\partial r}(1, t) - \hat{c}^-(1, t) = \rho_- I(t) + p_{10} [c^-(1, t) - \hat{c}^-(1, t)], & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (2.4)$$

Observación 2.1.1. Hacemos notar que el observador \hat{c}^- requiere de la obtención de $c^-(1, t)$. De forma similar, para el caso del observador de c^+ es necesario contar con la medición de $c^+(1, t)$. En el capítulo 4, se propondrá un método de inversión de las funciones de voltaje y temperatura para la obtención de $c_s^-(1, t)$ y $c_s^+(1, t)$. Así, el error en el estado, medido en la frontera para cada electrodo es dado por

$$\tilde{c}^j(1, t) = \check{c}^j(t) - \hat{c}^j(1, t), \quad j \in \{+, -\}.$$

Donde \check{c}^j , $j \in \{+, -\}$ corresponde a la inversión de las funciones de voltaje y temperatura, para cada electrodo.

El método de Backstepping, ha sido utilizado en [11], [12] y [13] para diseñar la función $p_1(r)$ y la constante p_{10} , en el sistema del observador, (2.4). A continuación, basados en [7] y lo hecho en las referencias ya mencionadas, se muestra como obtener $p_1(r)$ y p_{10} .

2.1.2.1. Sistema de error y Sistema Objetivo.

Notemos que el error de observación (estimación) $\tilde{c}^-(r, t) = c - \hat{c}^-$, tiene por ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 \tilde{c}^-}{\partial r^2}(r, t) - p_1(r, t)\tilde{c}^-(1, t), & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tilde{c}^-(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial r}(1, t) - \tilde{c}^-(1, t) = -p_{10}\tilde{c}^-(1, t), & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (2.5)$$

El método Backstepping busca encontrar un kernel $p(r, s)$ tal que

$$\tilde{c}^-(r, t) = \tilde{w}(r, t) - \int_r^1 p(r, s)\tilde{w}(s)ds, \quad (2.6)$$

con \tilde{w} solución del siguiente sistema objetivo

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2}(r, t) + \lambda\tilde{w}(r, t), & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tilde{w}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}(1, t) = -\frac{1}{2}\tilde{w}(1, t), & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (2.7)$$

Acá, λ es un parámetro de ajuste.

La importancia del sistema (2.7) es que determina un sistema exponencialmente estable en norma $\mathcal{L}^2(0, 1)$. En efecto, consideremos la siguiente función de Lyapunov

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{w}^2(r, t)dr.$$

Tomando la derivada temporal,

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \int_0^1 \dot{\tilde{w}}(r, t)\tilde{w}(r, t)dr \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2}\tilde{w} + \lambda\tilde{w}^2(r, t)dr. \end{aligned}$$

Integrando por partes y usando la condiciones de frontera del sistema, tenemos que

$$\dot{W}(t) = -\frac{1}{2}\tilde{w}^2(1, t) - \int_0^1 \tilde{w}_r^2(r, t)dr + \lambda \int_0^1 \tilde{w}^2(r, t)dr.$$

Considere la siguiente desigualdad de Poincaré.

$$\int_0^1 w^2 dx \leq w^2(1) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 w^2 dx + \varepsilon \int_0^1 w_x^2 dx, \quad \varepsilon > 1.$$

Por lo tanto, si $\varepsilon = 2$, se tiene que

$$-\int_0^1 \tilde{w}_r^2 dr \leq \frac{1}{2} \tilde{w}^2(1) - \frac{1}{4} \int_0^1 \tilde{w}^2 dr.$$

En conclusión

$$\dot{W}(t) \leq -\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) \int_0^1 \tilde{w}^2 dr = -\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) W(t).$$

De esto, vemos que $W(t) \leq W(0) \exp\left[-\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)t\right]$. Esto implica que el sistema es exponencialmente estable si $\lambda \leq 1/4$.

Observación 2.1.2. Notar que la condición de estabilidad exponencial se tiene si $\lambda \leq \lambda_*$. Esta constante λ_* está relacionada a la constante de la desigualdad de Poincaré, la cual en este caso se puede mejorar.

En lo sucesivo se omite la indicación de ánodo, a no ser que sea necesario indicarlo.

2.1.2.2. Determinación de ganancias $p_1(r)$ y p_{10} .

En lo que sigue determinaremos las ganancias $p_1(r)$ y p_{10} incluidas en la ecuación del observador y la condición de frontera en $r = 1$. Para esto necesitamos derivar la transformación (2.6) respecto a r y a t , para lo cual emplearemos la regla de diferenciación de Leibniz:

$$\frac{d}{dr} \int_0^r f(r, s) ds = f(r, r) + \int_0^r f_r(r, s) ds.$$

Además, introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} p_r(r, r) &= \frac{\partial}{\partial r} p(r, s) \Big|_{s=r} \\ p_s(r, r) &= \frac{\partial}{\partial s} p(r, s) \Big|_{s=r} \\ \frac{d}{dr} p(r, r) &= p_r(r, r) + p_s(r, r) \end{aligned}$$

Derivamos la transformación (2.6) con respecto a r ,

$$\tilde{c}_r(r) = \tilde{w}_r(r) + p(r, r) \tilde{w}(r) - \int_r^1 p_r(r, s) \tilde{w}(s) ds.$$

y al hacerlo por segunda vez, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{rr}(r) &= \tilde{w}_{rr}(r) + \frac{d}{dr} (p(r, r)\tilde{w}(r)) + p_r(r, r)\tilde{w}(r) - \int_r^1 p_{rr}(r, s)\tilde{w}(s)ds. \\
&= \tilde{w}_{rr}(r) + \tilde{w}(r)\frac{d}{dr}p(r, r) + p_r(r, r)\tilde{w} + p_r(r, r)\tilde{w}(r) \\
&\quad - \int_r^1 p_{rr}(r, s)\tilde{w}(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Notar que omitimos la variable t , para simplificar notación.

Ahora, derivando la transformación (2.6), con respecto a t , tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t(r) &= \tilde{w}_t(r) - \int_r^1 p(r, s)\tilde{w}_t(s)ds. \\
&= \tilde{w}_t(r) - \int_r^1 p(r, s)\tilde{w}_{rr}(s)ds - \int_r^1 \lambda p(r, s)\tilde{w}(s)ds.
\end{aligned}$$

Integramos por partes dos veces el segundo término de la igualdad anterior para obtener que

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t(r) &= \tilde{w}_t(r) - p(r, 1)\tilde{w}_r(1) + p(r, r)\tilde{w}_r(r) \\
&\quad + \int_r^1 p_s(r, s)\tilde{w}_s(s)ds - \int_r^1 \lambda p(r, s)\tilde{w}(s)ds. \\
&= \tilde{w}_{rr} + \lambda\tilde{w} - p(r, 1)\tilde{w}_r(1) + p(r, r)\tilde{w}_r(1) + p_s(r, 1)\tilde{w}(1) \\
&\quad - p_s(r, r)\tilde{w}(r) - \int_r^1 p_{ss}(r, s)\tilde{w}(s)ds - \int_r^1 \lambda p(r, s)\tilde{w}(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Restamos la ecuación (2.8) a la ecuación (2.9),

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t - \tilde{c}_{rr} &= \left(\lambda - 2\frac{d}{dr}p(r, r) \right) \tilde{w}(r) - p(r, 1)\tilde{w}_r(1) + p_s(r, 1)\tilde{w}(1) \\
&\quad + \int_r^1 \{p_{rr}(r, s) - p_{ss}(r, s) - \lambda p(r, s)\} \tilde{w}(s)ds
\end{aligned} \tag{2.10}$$

De esta última igualdad, (2.10), obtendremos una ecuación para el kernel $p(r, s)$ y expresiones para las ganancias $p_1(r)$ y p_{10} .

En primer lugar, notar que $\tilde{c}_t - \tilde{c}_{rr} = -p_1(r)\tilde{c}(1)$ y que dada la condición de frontera en $r = 1$ del sistema (2.7) vemos que la ecuación (2.10) es equivalente a

$$\begin{aligned}
-p_1(r)\tilde{c}(1) &= \left(\lambda - 2\frac{d}{dr}p(r, r) \right) \tilde{w}(r) + \frac{1}{2}p(r, 1)\tilde{w}(1) + p_s(r, 1)\tilde{w}(1) \\
&\quad + \int_x^1 \{p_{rr}(r, s) - p_{ss}(r, s) - \lambda p(r, s)\} \tilde{w}(s)ds.
\end{aligned}$$

Además, notar que de la transformación (2.6) se tiene que $\tilde{c}(1) = \tilde{w}(1)$. Por lo tanto, esta última igualdad nos lleva a imponer

$$p_{rr}(r, s) - p_{ss}(r, s) - \lambda p(r, s) = 0, \quad (2.11)$$

$$\lambda - 2 \frac{d}{dr} p(r, r) = 0, \quad (2.12)$$

$$p(r, 0) = 0. \quad (2.13)$$

La condición $p(r, 0) = 0$ es agregada para tener una ecuación bien puesta. Así, la ganancia p_1 es dada por

$$p_1(r) = -\frac{1}{2}p(r, 1) - p_s(r, 1). \quad (2.14)$$

La ganancia p_{10} se obtiene a partir de la transformación (2.6).

$$\begin{aligned} \tilde{c}_r(1) - \tilde{c}(1) &= -p_{10}\tilde{c}(1) \\ &= \tilde{w}_r(1) + p(1, 1)\tilde{w}(1) - \tilde{w}(1). \end{aligned}$$

El valor $p(1, 1)$ lo obtenemos al notar que las condiciones (2.12) y (2.13) implican que

$$p(r, r) = \frac{\lambda}{2}r.$$

Finalmente, recordando que $\tilde{c}(1) = \tilde{w}(1)$ se llega a

$$\begin{aligned} \tilde{c}_r(1) - \tilde{c}(1) &= -p_{10}\tilde{c}(1) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{w}(1) + \frac{\lambda}{2}\tilde{w}(1) - \tilde{w}(1). \end{aligned}$$

En conclusión,

$$p_{10} = \frac{3 - \lambda}{2} \quad (2.15)$$

Hemos caracterizado las ganancias $p_1(r)$ y p_{10} (ver (2.14) y (2.15), respectivamente) en términos del kernel $p(r, s)$. En lo que sigue, determinaremos de una forma más explícita $p(r, s)$.

2.1.2.3. Cálculo del Kernel $p(r, s)$.

En la sección anterior determinamos tres condiciones para el kernel, dadas por

$$p_{rr}(r, s) - p_{ss}(r, s) = \lambda p(r, s), \quad (2.16)$$

$$p(0, s) = 0, \quad (2.17)$$

$$p(r, r) = \frac{\lambda}{2}r. \quad (2.18)$$

Estas tres condiciones son compatibles con un problema de ecuaciones en derivadas parciales. Esta EDP pudiésemos asociarla a una ecuación del tipo ondas con un término extra λp (s juega el rol del tiempo). El dominio de esta EDP, es el triángulo $\{0 \leq s \leq r \leq 1\}$, ver Figura 2.1. Las condiciones de frontera están preescritas sobre dos lados del triángulo. En esta sección estamos interesados en resolver la ecuación del kernel de forma explícita.

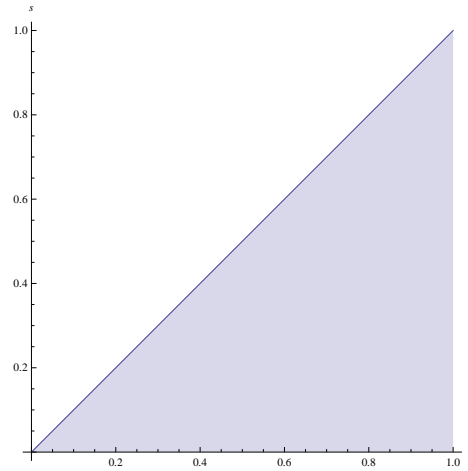


FIGURA 2.1: Dominio de la ecuación del kernel.

Para encontrar la solución a la ecuación (2.16), lo primero es transformarla a una ecuación integral, mediante el siguiente cambio de variables.

$$\xi = s + r, \quad \eta = r - s.$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} p(r, s) &= G(\xi, \eta), \\ p_r(r, s) &= G_\xi + G_\eta, \\ p_{rr}(r, s) &= G_{\xi\xi} + 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta}, \\ p_s(r, s) &= G_\xi - G_\eta, \\ p_{ss}(r, s) &= G_{\xi\xi} - 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.16)-(2.18), se reescriben como

$$G_{\xi\eta} = \frac{\lambda}{4} G(\xi, \eta), \tag{2.19}$$

$$G(-\xi, \xi) = 0, \tag{2.20}$$

$$G(\xi, 0) = \frac{\lambda}{4}. \tag{2.21}$$

Integramos con respecto a η de 0 a η , para obtener

$$G_\xi(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{4} - \int_0^\eta \frac{\lambda}{4} G(\xi, s) ds,$$

ya que a partir de (2.21) tenemos que $G_\xi(\xi, 0) = \frac{\lambda}{4}$.

Finalmente, integramos con respecto a ξ de $-\eta$ a ξ . Por (2.20), el término $G(-\eta, \eta) = 0$.

$$G(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{4}(\xi + \eta) + \frac{\lambda}{4} \int_{-\eta}^\xi \int_0^\eta G(\tau, s) ds d\tau \quad (2.22)$$

Hemos obtenido una ecuación integral, la cual es equivalente a la EDP (2.16), en el sentido que toda solución de (2.16) es una solución de (2.22). El motivo de transformar la EDP en una ecuación integral es poder utilizar el Método de Aproximaciones Sucesivas, ver [7], el cual da como solución la siguiente serie

$$G(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta) \xi^n \eta^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{n+1} \quad (2.23)$$

Notar que la función de Bessel modificada de primera especie, puede ser representada como la serie, ver apéndice A,

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

De esto, acomodando los términos de (2.23) tenemos

$$G(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{(\xi + \eta)}{\sqrt{\xi\eta\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{\xi\eta\lambda}}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.$$

Retornando a las variables originales r y s , obtenemos el kernel

$$p(r, s) = \lambda r \frac{I_1\left(\sqrt{\lambda(r^2 - s^2)}\right)}{\sqrt{\lambda(r^2 - s^2)}}. \quad (2.24)$$

2.1.2.4. Transformación Inversa.

Ahora bien, es necesario traspasar la propiedad de estabilidad exponencial del sistema (2.7) al sistema del error (2.5). Esto se tendrá gracias a que la transformación (2.6) es invertible. Definamos una transformación inversa de la forma

$$\tilde{w}(r) = \tilde{c}(r) + \int_r^1 l(r, s) \tilde{c}(s) ds, \quad (2.25)$$

donde $l(r, s)$ representa el kernel de la transformación. Reemplazando (2.25) en (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{c}(r) &= \tilde{w}(r) - \int_r^1 p(r, s)\tilde{w}(s)ds \\ &= \tilde{c}(r) + \int_r^1 l(r, s)\tilde{c}(s)ds - \int_r^1 p(r, s) \left(\tilde{c}(s) + \int_s^1 l(r, \xi)\tilde{c}(\xi)d\xi \right) ds.\end{aligned}$$

De forma equivalente tenemos que

$$0 = \int_r^1 l(r, s)\tilde{c}(s)ds - \int_r^1 p(r, s)\tilde{c}(s)ds - \int_r^1 \int_s^1 p(r, s)l(r, \xi)c(\xi)d\xi ds$$

Haciendo uso del Teorema de Fubini para el cambio en el orden de integración, obtenemos que

$$\begin{aligned}0 &= \int_r^1 l(r, s)\tilde{c}(s)ds - \int_r^1 p(r, s)\tilde{c}(s)ds - \int_r^1 \int_s^{\xi} p(r, s)l(r, \xi)\tilde{c}(\xi)dyd\xi \\ 0 &= \int_s^1 \tilde{c}(s) \left(l(r, s) - p(r, s) + \int_r^s p(r, \xi)l(\xi, s)d\xi \right) ds.\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una relación entre el kernel de la transformación (2.6) y kernel de la transformación inversa (2.25).

$$l(r, s) = p(r, s) + \int_r^s p(r, \xi)l(\xi, s)d\xi \quad (2.26)$$

Esta fórmula es general y no depende de los sistemas (2.5) o (2.7). Si bien no ayuda mucho a determinar explícitamente los kernels $p(r, s)$ o $l(r, s)$, permite establecer una relación entre los kernels de las transformaciones.

Para obtener el kernel de la transformación inversa (2.25), se procede de forma análoga a como se hizo para obtener $p(r, s)$.

Derivando respecto a t (2.25), tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{w}_t &= \tilde{c}_t + l(r, 1)\tilde{c}_r(1) - l(r, r)\tilde{c}_r(r) - l_s(r, 1)\tilde{c}(1) + l_s(r, r)c(r) \\ &\quad + \int_r^1 l_{ss}(r, s)\tilde{c}(s)ds - \tilde{c}(1) \int_r^1 l(r, s)\tilde{c}(s)ds.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Derivando dos veces respecto a x , se obtiene

$$\tilde{w}_{rr} = \tilde{c}_{rr} - \frac{d}{dr} (l(r, r)\tilde{c}(r)) - l_r(r, r)\tilde{c}(r) + \int_r^1 l_{rr}(r, s)\tilde{c}(s)ds. \quad (2.28)$$

Restando (2.28) de (2.27) y recordando que $\tilde{w}_t - \tilde{w}_{rr} = \lambda\tilde{w}$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{c}(1) \left(-p_1(r) - \int_r^1 l(r,s)\tilde{c}(s)ds + l(r,1) - l_s(r,1) \right) \\ &\quad + \left(2\frac{d}{dr}l(r,r) - \lambda \right) \tilde{c}(r) + \int_r^1 \{l_{ss}(r,s) - l_{rr}(r,s) - \lambda l(r,s)\} \tilde{c}(s)ds. \end{aligned}$$

De esta última igualdad obtenemos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} l_{ss}(r,s) - l_{rr}(r,s) - \lambda l(r,s) &= 0 \\ 2\frac{d}{dr}l(r,r) &= \lambda \\ l(r,0) &= 0; \end{aligned} \tag{2.29}$$

y una fórmula para transformar la ganancia $p_1(r)$

$$p_1(r) + \int_r^1 l(r,s)p_1(s)ds = l(r,1) - l_s(r,1) \tag{2.30}$$

Comparando la EDP (2.29), con la ecuación para obtener $p(r,s)$, (2.16), vemos que

$$l(r,s;\lambda) = -p(r,s;-\lambda)$$

De esta forma se concluye que

$$l(r,s) = \lambda \frac{J_1(\sqrt{\lambda(r^2 - s^2)})}{\sqrt{\lambda(r^2 - s^2)}}. \tag{2.31}$$

Donde J_1 es la función de Bessel de primer orden.

Hemos establecido de una forma explícita para la transformación inversa (2.25). A continuación se procede a mostrar la estabilidad exponencial del sistema (2.5), utilizando la propiedad de estabilidad exponencial del sistema (2.7).

2.1.3. Estabilidad y convergencia del observador.

Se define el siguiente operador

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{L}^2(0,1) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(0,1) \\ \tilde{c} &\longmapsto \Lambda(\tilde{c}) = \tilde{w}. \end{aligned}$$

Donde $\tilde{w} = \tilde{c} + \int_r^1 l(r,s)\tilde{c}(s)ds$.

Observación 2.1.3. El operador lineal Λ , es aquel que lleva el sistema del error de observación (2.5) en el sistema objetivo (2.7).

Proposición 2.1.1. (*Continuidad de Λ*).

Λ define un operador lineal continuo, i.e, existe una constante $M_1 > 0$ tal que

$$\|\Lambda(\tilde{c})\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leq M_1 \|\tilde{c}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}.$$

Demostración. En efecto, se tiene la siguiente desigualdad ,

$$|\tilde{w}| \leq |\tilde{c}| + \max_{0 \leq r \leq s \leq 1} |l(r, s)| \left(\int_0^1 |\tilde{c}|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la desigualdad y aplicando en el lado derecho la desigualdad de Young, obtenemos

$$|\tilde{w}|^2 \leq (1 + D)|\tilde{c}|^2 + (D^2 + D)\|\tilde{c}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}^2.$$

Donde $D = \max_{0 \leq r \leq s \leq 1} |l(r, s)|$. Finalmente integrando en $(0, 1)$, se observa que

$$\|\tilde{w}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}^2 \leq (D + 1)^2 \|\tilde{c}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}^2.$$

■

Proposición 2.1.2. (*Estabilidad exponencial del sistema de error*).

El sistema de error

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial r^2}(r, t) - p_1(r, t)\tilde{c}(1, t), & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tilde{c}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r}(1, t) - \tilde{c}(1, t) = -p_{10}\tilde{c}(1, t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Es exponencialmente estable en norma $\mathcal{L}^2(0, 1)$, si $\lambda \leq 1/4$.

Demostración. Λ es invertible y dada su continuidad por la proposición 2.1.1, podemos afirmar que Λ^{-1} es continua, (ver corolario 2.7 en [2]), i.e existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|\Lambda^{-1}(\tilde{w})\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leq M_2 \|\tilde{w}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}.$$

Finalmente, gracias a la estabilidad exponencial del sistema objetivo (2.7), tenemos lo siguiente

$$\|\tilde{c}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leq M_2 \|\tilde{w}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leq M_2 e^{-(\frac{1}{4}-\lambda)t} \|\tilde{w}_0\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leq M_2 M_1 e^{-(\frac{1}{4}-\lambda)t} \|\tilde{c}_0\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}. \quad (2.32)$$

Donde $\tilde{c}_0 = \tilde{c}(r, 0)$. Así se concluye la estabilidad exponencial del sistema de error de observación (2.5), si $\lambda < \frac{1}{4}$. ■

2.1.4. Observador en variables originales.

Recapitulando lo hecho hasta aquí, tenemos que inicialmente se normalizaron las variables r y t , la ecuación resultante fue sometida a una transformación de estado (ver ecuación (2.2)), con el fin de hacerla más simple.

El desarrollo posterior nos condujo al observador de concentración de iones en el ánodo, \hat{c}^- . Un procedimiento similar permite establecer un observador de la concentración de iones en el cátodo.

Presentamos a continuación las ecuaciones de los observadores de estado para cada electrodo.

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{c}^j}{\partial r}(r, t) = \frac{\partial^2 \hat{c}^j}{\partial r^2} + p_1(r) [c^j(1, t) - \hat{c}^j(1, t)], & (r, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \hat{c}^j(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \hat{c}^j}{\partial r}(1, t) - \hat{c}^j(1, t) = -j\rho_j I(t) + p_{10} [c^j(1, t) - \hat{c}^j(1, t)], & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Donde $j \in \{+, -\}$ y las ganancias $p_1(r)$ y p_{10} están dadas por

$$\begin{aligned} p_1(r) &= \frac{-\lambda r}{2\sqrt{\lambda(r^2 - 1)}} \left(I_1(\sqrt{\lambda(r^2 - 1)}) - \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda(r^2 - 1)}} I_2(\sqrt{\lambda(r^2 - 1)}) \right), \\ p_{10} &= \frac{3 - \lambda}{2}. \end{aligned}$$

Acá, I_1 e I_2 son funciones de Bessel modificadas de primer y segundo orden, ver Apéndice A y el parámetro λ es escogido de forma tal que $\lambda < 1/4$.

Además se demostró que el observador $\hat{c}^j \rightarrow c^j$, $j \in \{+, -\}$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $\lambda < 1/4$.

Para finalizar esta sección, retornamos el observador obtenido a las variables originales. Así, \hat{c}_s^j tiene por ecuación y condición de frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{c}_s^j}{\partial t} = D_s^j \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \hat{c}_s^j}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 \hat{c}_s^j}{\partial r^2}(r, t) \right) + \bar{p}_1^j(r) \left(c_{ss}^j(t) - \hat{c}_s^j(t) \right) & (r, t) \in (0, R_s^j) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \hat{c}_s^j}{\partial r}(0, t) = 0 & t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial \hat{c}_s^j}{\partial r}(R_s^j, t) = -j\rho_j I(t) + \bar{p}_{10}^j \left(c_{ss}^j(t) - \hat{c}_s^j(t) \right) & t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (2.33)$$

Donde las ganancias $\bar{p}_1^j(r)$ y \bar{p}_{10}^j son

$$\begin{aligned}\bar{p}_1(r) &= \frac{-\lambda D_s^j}{2R_s^j \bar{z}} \left(I_1(\bar{z}_j) - \frac{2\lambda}{\bar{z}} I_2(\bar{z}_j) \right), \\ \bar{p}_{10} &= \frac{3 - \lambda}{2R_s^j}.\end{aligned}$$

con $\bar{z}_j = \sqrt{\lambda \left(\frac{r^2}{(R_s^j)^2} - 1 \right)}$ y $j \in \{+, -\}$.

2.2. Diseño del estimador del Estado de Carga.

En la sección 2.1, se desarrolló un observador del estado de concentración de iones de Litio alojados en el ánodo en estado sólido $c_s^-(r, t)$, en lo que sigue se propone un estimador del Estado de Carga, tal como en [12].

Definición 2.2.1. (Estimador del Estado de Carga.)

Consideremos el observador $\hat{c}_s^-(r, t)$. Por lo tanto y dado la estructura del SOC, ver ecuación (2.1), se define el

$$\widehat{SOC}(t) = \frac{3}{(R_s^-)^3 c_{s,\text{máx}}^-} \int_0^{R_s^-} r^2 \hat{c}_s^-(r, t) dr. \quad (2.34)$$

2.2.1. Análisis de Estabilidad y convergencia del estimador $\widehat{SOC}(t)$.

En la siguiente proposición mostramos la convergencia del estimador propuesto (2.34).

Proposición 2.2.1. (Convergencia del estimador $\widehat{SOC}(t)$).

Considere el estimador $\widehat{SOC}(t)$ (2.34) y el Estado de Carga $SOC(t)$ (2.1). Si $\lambda < 1/4$, entonces $|SOC(t) - \widehat{SOC}(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Considere la ecuación del error de estimación del Estado de carga

$$SOC(t) - \widehat{SOC}(t) = \frac{3}{(R_s^-)^3 c_{s,\text{máx}}^-} \int_0^{R_s^-} r^2 \tilde{c}_s^-(r, t) dr$$

Donde $\tilde{c}_s^- = c_s^-(r, t) - \hat{c}_s^-(r, t)$. Aplicando el cambio de variable usado anteriormente, $r = \frac{r}{R_s^-}$ y la transformación de estado $\tilde{c}(r, t) = r \tilde{c}_s^-(r, t)$, tenemos que

$$SOC(t) - \widehat{SOC}(t) = \frac{3}{c_{s,\text{máx}}^-} \int_0^1 r \tilde{c}(r, t) dr$$

con \tilde{c} solución del sistema (2.5). En consecuencia, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por la proposición 2.1.2

$$\begin{aligned} |SOC(t) - \widehat{SOC}(t)| &\leq \frac{3}{c_{s,\text{máx}}^-} \left(\int_0^1 r^2 dr \right)^{1/2} \|\tilde{c}\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \\ &\leq K e^{-(\frac{1}{4}-\lambda)t} \|\tilde{c}_0\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Así vemos que $|SOC(t) - \widehat{SOC}(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $\lambda \leq 1/4$. ■

2.3. Simulaciones.

En esta sección nos dedicamos a mostrar algunas simulaciones numéricas con el fin de ilustrar los resultados de este capítulo

2.3.1. Simulación Modelo de Partícula simple.

Dados un par de perfiles iniciales constantes de concentración de iones en el cátodo y el ánodo, ver Tabla B.1 en el apéndice B, y una corriente entrante, ver Figura 2.2, se resuelven las ecuaciones de estado de concentración (1.13), (considerando la variable espacial normalizada), utilizando la herramienta *pdepe* de Matlab. Posteriormente se toman las concentraciones en la superficie de la partícula, es decir, $c(R_s^j, t)$ y se evalúan en las ecuaciones para el voltaje, ver ecuación (1.14) y temperatura, ver ecuación (1.15). Los parámetros empleados en la simulación del modelo se detallan en la tabla B.1 del Apéndice B. A continuación mostramos los resultados.

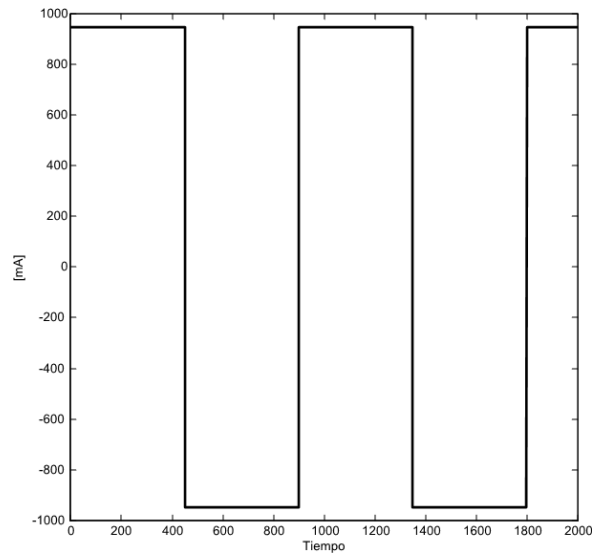


FIGURA 2.2: Corriente entrante $I(t)$ v/s el tiempo. Utilizamos una onda cuadrada para representar ciclos de uso de la batería, corrientes positivas indican una carga y corrientes negativas indican uso de la batería.

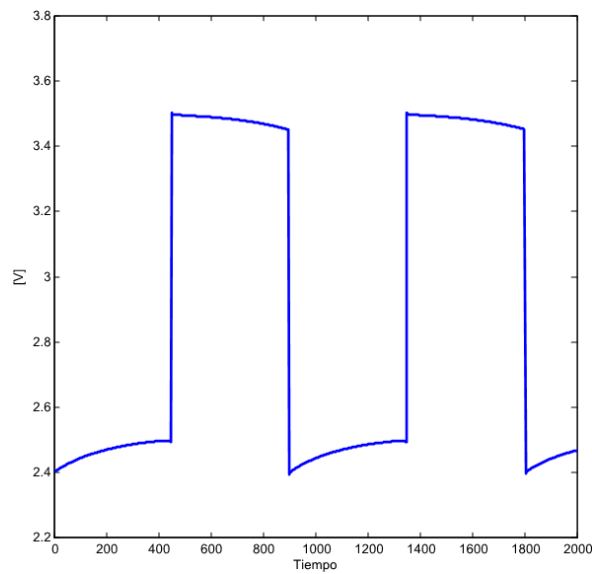


FIGURA 2.3: Voltaje de salida $V(t)$ v/s el tiempo. Se observa un desfase entre el voltaje y la corriente esto por la presencia de parámetro resistivo R_f en la ecuación de voltaje, ver (1.14)

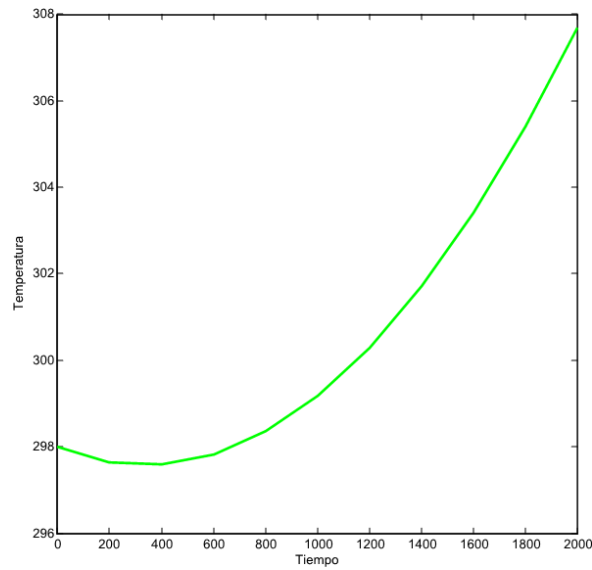


FIGURA 2.4: Temperatura $T(t)$ v/s el tiempo. A partir de los 600[s] vemos temperatura creciente, resultado que es de esperarse por el uso de la batería.

2.3.2. Simulación ecuación de estado y observador.

Presentamos a continuación dos simulaciones comparativas de la ecuación de estado de concentración de iones en el ánodo, ecuación (2.3), y su correspondiente observador, ecuación (2.4), con el fin de mostrar la incidencia de la elección del parámetro λ , ver Figura 2.5 y Figura 2.6.

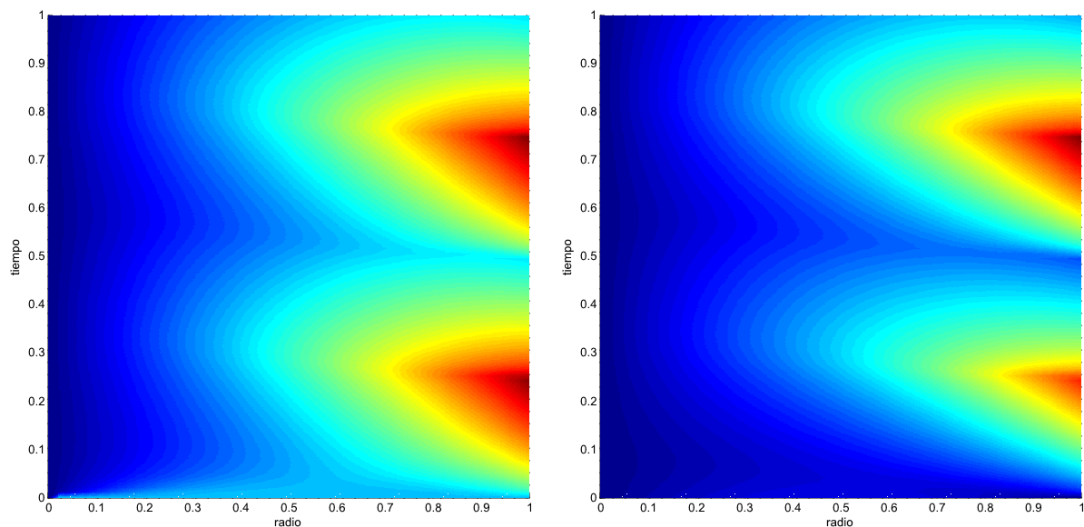


FIGURA 2.5: Estado de concentración de iones en el ánodo c_s^- y observador \hat{c}_s^- . En la izquierda se muestra el estado y al lado derecho su observador, considerando un valor del parámetro $\lambda = 2$, ver Observación 2.1.2.

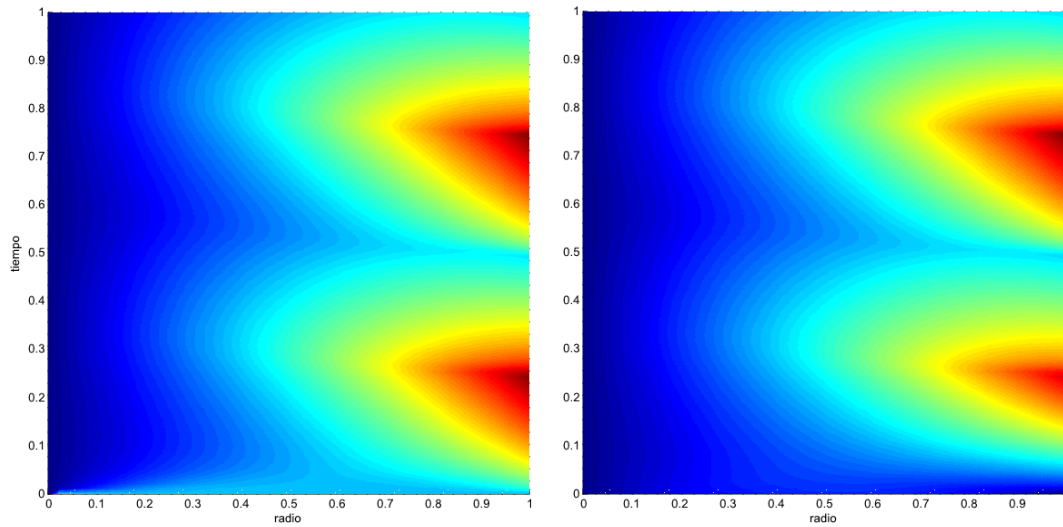


FIGURA 2.6: Estado de concentración de iones en el ánodo c_s^- y observador \hat{c}_s^- . En la izquierda se muestra el estado y al lado derecho su observador, considerando un valor del parámetro $\lambda = -5$.

Mostramos además gráficas de la norma $\|\tilde{c}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}$ v/s el tiempo, ver Figura 2.7, para verificar el decaimiento exponencial de la norma y la incidencia del parámetro λ .

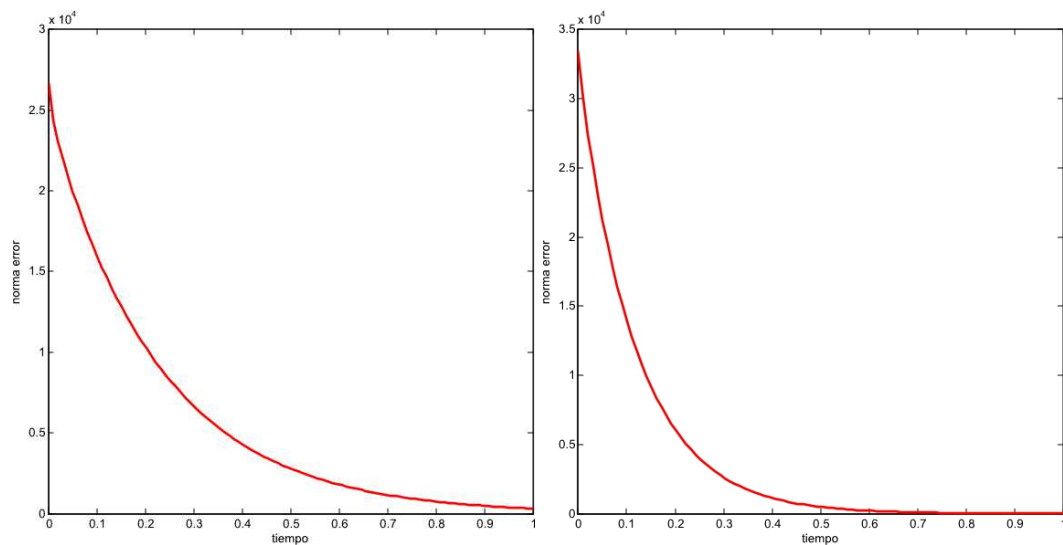


FIGURA 2.7: Norma del error $\|\tilde{c}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}$ v/s el tiempo. Se observa el decaimiento exponencial de la norma $\|\tilde{c}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(0,1)}$. A la izquierda se muestra la norma determinada con $\lambda = -1$ y a la derecha con $\lambda = -5$, mostrando así la incidencia del parámetro λ en la convergencia.

2.3.3. Simulación Estado de Carga y estimador $\widehat{SOC}(t)$.

Una vez obtenido el observador del ánodo, mostramos una simulación del estado de carga y del estimador \widehat{SOC} , ver Figura 2.3.3.

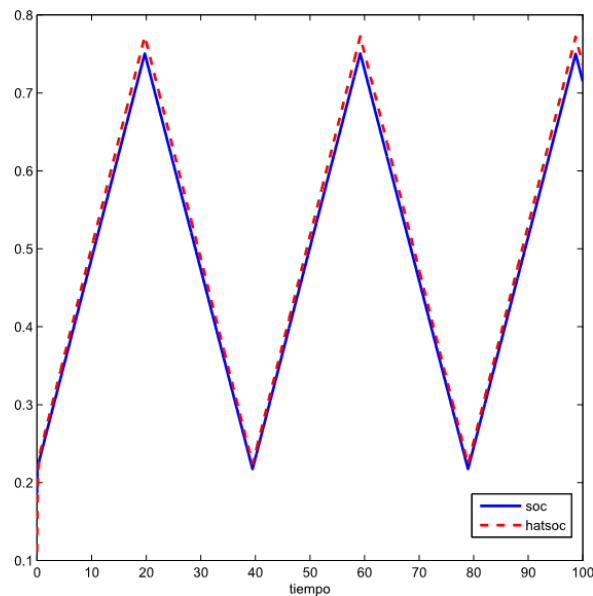


FIGURA 2.8: Estado de Carga $SOC(t)$ y estimador \widehat{SOC} . En color azul, el valor real del indicador del estado de carga $SOC(t)$ y el rojo el valor del estimador $\widehat{SOC}(t)$.

Se observa una rápida convergencia del estimador, lo cual se deriva de la convergencia exponencial del observador del estado de concentración.

Capítulo 3

Identificación de Parámetros y estimación del Estado de Salud.

En la sección 1.3 se mencionó que determinar variaciones ciertos parámetros del Modelo de Partícula Simple, puede ser utilizado como una forma de indicar variaciones en la edad relativa de la batería, i.e el Estado de Salud, SOH. En este capítulo abordamos el problema de determinar el Estado de Salud como un problema de identificación de parámetros del Modelo de Partícula Simple.

3.1. Estimación del Número de iones de Litio en estado sólido, $n_{Li,s}$.

Uno de los parámetros asociados al SOH es el Número de iones de Litio en estado sólido, $n_{Li,s}$, el cual esta relacionado al Charge Capacity Fade, ver [9] y [12].

En la sección 1.2, se estableció que el Número de iones de Litio en estado sólido, viene dado por la siguiente igualdad,

$$n_{Li,s}(t) = \sum_{j \in \{+, -\}} \frac{\varepsilon_s^j L^j A}{\frac{4}{3} \pi (R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} 4\pi r^2 c_s^j(r, t) dr. \quad (3.1)$$

Esta igualdad y lo ya presentado en el capítulo 2, motiva el siguiente estimador para el número de iones de Litio en estado sólido.

Definición 3.1.1. (Estimador del Número de iones de Litio en estado sólido).

Considere los observadores de la concentración de iones \hat{c}_s^j , $j \in \{+, -\}$.

Definimos un estimador del número de iones de Litio, mediante la siguiente igualdad

$$\hat{n}_{Li,s}(t) = \sum_{j \in \{+, -\}} \frac{\xi^j}{(R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} r^2 \hat{c}_s^j(r, t) dr. \quad (3.2)$$

Donde $\xi^j = 3\varepsilon_s^j L^j A$.

Proposición 3.1.1. (Convergencia del estimador $\hat{n}_{Li,s}(t)$).

Sea $\hat{n}_{Li,s}(t)$ definido como en (3.2). Entonces, si $\lambda < \frac{1}{4}$, $\hat{n}_{Li,s}(t) \rightarrow n_{Li,s}$, exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Notar que el error de estimación del número de iones esta dado por la siguiente igualdad

$$n_{Li,s} - \hat{n}_{Li,s}(t) = \sum_{j \in \{+, -\}} \frac{\xi^j}{(R_s^j)^3} \int_0^{R_s^j} r^2 \tilde{c}_s^j(r, t) dr.$$

Donde \tilde{c}_s^j indica el error de observación en el electrodo j . Aplicando una normalización a la variable espacial y la transformación de estado $\tilde{c}^j = r \tilde{c}_s^j$ se observa que

$$|n_{Li,s} - \hat{n}_{Li,s}(t)| \leq \sum_{j \in \{+, -\}} \xi^j \int_0^1 r |\tilde{c}^j(r, t)| dr.$$

Finalmente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la proposición 2.1.2, se tiene lo siguiente

$$|n_{Li,s} - \hat{n}_{Li,s}(t)| \leq e^{-(\frac{1}{4}-\lambda)t} \sum_{j \in \{+, -\}} \xi^j K^j \|\tilde{c}_0^j\|. \quad (3.3)$$

Así, $\hat{n}_{Li,s}(t) \rightarrow n_{Li,s}$, cuando $t \rightarrow \infty$, si $\lambda < \frac{1}{4}$. ■

3.2. Identificación de parámetros en la función de Voltaje.

En esta sección se propone un esquema de identificación on-line a parámetros de la función de voltaje de salida, a partir de mediciones de corriente entrante $I(t)$, el voltaje $V(t)$ y la temperatura $T(t)$.

Mediante un análisis de sensibilidad, se estudian que parámetros son posibles de identificar de forma única y posteriormente se implementa un esquema de mínimos cuadrados adaptativos, ver [5], para llevar a cabo la identificación del conjunto de parámetros deseados.

3.2.1. Identificabilidad.

Un primer paso en el desarrollo de un esquema de identificación de parámetros en una función no lineal, como es el caso de la función de voltaje de salida, es llevar a cabo un análisis de sensibilidad. En lo que sigue se realiza un procedimiento similar a lo mostrado en [8], el cual consiste a grandes rasgos en elaborar un ranking de parámetros mediante ortogonalización y estudiar las asociaciones lineales entre ellos, permitiendo escoger qué parámetros es posible identificar de forma única mediante una estimación online.

Recordemos que la función de voltaje está dada por,

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{R}{\alpha F} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{-I(t)}{2a^+ AL^+ k^+ \sqrt{c_e^0 c_{ss}^+(t) (c_{s,\text{máx}}^+ - c_{ss}^+(t))}} \right) \\
 & - \frac{R}{\alpha F} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{I(t)}{2a^+ AL^- k^- \sqrt{c_e^0 c_{ss}^-(t) (c_{s,\text{máx}}^- - c_{ss}^-(t))}} \right) \\
 & + U^+(c_{ss}^+(t)) - U^-(c_{ss}^-(t)) - R_f I(t)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Al menos tres parámetros de (3.4) pueden estar directamente relacionados con el SOH de la batería. Estos son la resistencia R_f y los coeficientes de las tasas de reacción k^+ y k^- . Asumimos que a^j , A , L^j y $\sqrt{c_e^0}$ son parámetros conocidos.

Definimos el vector de parámetros θ como

$$\theta = \left[\frac{1}{a^+ AL^+ k^+ \sqrt{c_e^0}}, \frac{1}{a^- AL^- k^- \sqrt{c_e^0}}, R_f \right]^T. \tag{3.5}$$

Consideremos ahora, la ecuación (3.4) en forma paramétrica, es decir

$$\begin{aligned}
 g(t; \theta) = V(t) = & \frac{F}{\alpha R} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{-\theta_1 I(t)}{2\sqrt{c_{ss}^+(t) (c_{s,\text{máx}}^+ - c_{ss}^+(t))}} \right) \\
 & - \frac{F}{\alpha R} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{\theta_2 I(t)}{2\sqrt{c_{ss}^-(t) (c_{s,\text{máx}}^- - c_{ss}^-(t))}} \right) \\
 & + U^+(c_{ss}^+(t)) - U^-(c_{ss}^-(t)) - \theta_3 I(t).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

El siguiente análisis de sensibilidad es efectuado en tiempo discreto, ya que los datos son suministrados de tal forma.

Sea $T = [0, t_{max}]$ un intervalo de tiempo positivo, y sea k el índice de una partición homogénea del intervalo T , $k \in 1, 2, \dots, n_T$. Se define la sensibilidad de la función (3.6), con respecto a variaciones en los parámetros θ_i en el tiempo $t = k\Delta T$ como

$$\Sigma_{i,k} = \frac{\partial g(k\Delta T, \theta)}{\partial \theta_i}. \tag{3.7}$$

Para cada parámetro θ_i , se agrupan las evaluaciones de (3.7) en los tiempos de índice $k = 1, 2, \dots, n_T$, es decir

$$S_i = [\Sigma_{i,1}, \Sigma_{i,2}, \dots, \Sigma_{i,n_T}]^T.$$

Se denota por $\Sigma = [\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3]$, tal que $\Sigma \in \mathcal{M}_{n_T \times 3}$.

Una particular descomposición de $\Sigma^T \Sigma$ revela información acerca de la dependencia lineal entre parámetros. Sea $\Sigma^T \Sigma = D^T C D$, donde

$$D = \begin{pmatrix} \|\Sigma_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|\Sigma_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|\Sigma_3\| \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle}{\|\Sigma_1\| \|\Sigma_2\|} & \frac{\langle \Sigma_1, \Sigma_3 \rangle}{\|\Sigma_1\| \|\Sigma_3\|} \\ \frac{\langle \Sigma_2, \Sigma_1 \rangle}{\|\Sigma_2\| \|\Sigma_1\|} & 1 & \frac{\langle \Sigma_2, \Sigma_3 \rangle}{\|\Sigma_2\| \|\Sigma_3\|} \\ \frac{\langle \Sigma_3, \Sigma_1 \rangle}{\|\Sigma_3\| \|\Sigma_1\|} & \frac{\langle \Sigma_3, \Sigma_2 \rangle}{\|\Sigma_3\| \|\Sigma_2\|} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Notar que $\|\cdot\|$, es la norma euclidiana y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que $-1 \leq \frac{\langle \Sigma_i, \Sigma_j \rangle}{\|\Sigma_i\| \|\Sigma_j\|} \leq 1$. Los valores de $\frac{\langle \Sigma_i, \Sigma_j \rangle}{\|\Sigma_i\| \|\Sigma_j\|}$ cercanos a 1 o -1 indican una fuerte dependencia lineal entre los parámetros θ_i y θ_j , en cambio valores cercanos a 0 implican ortogonalidad.

A continuación presentamos la matriz C obtenida mediante simulación, correspondiente a los parámetros del vector θ .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0,9081 & 0,9980 \\ 0,9081 & 1 & 0,9245 \\ 0,9980 & 0,9245 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar la fuerte dependencia lineal que existe entre los parámetros. Esto significa que es difícil determinar cuál parámetro cambia entre los tres, impidiendo una identificación única de dos o más simultáneamente. Como resultado, sólo identificamos el parámetro R_f .

El parámetro de resistencia R_f está en directa relación con el Power Fade, por lo tanto la identificación de este proporciona una medición directa del SOH, ver [12].

3.2.2. Estimación mediante mínimos cuadrados.

Ahora bien la meta inmediata es establecer un estimador del parámetro R_f . Utilizando la notación de la sección anterior, se define $\tilde{\theta}_3 = \theta_3 - \hat{\theta}_3$, donde $\hat{\theta}_3$, es un estimador del valor

real de θ_3 . A continuación, se reescribe la ecuación del voltaje de salida en términos de $\tilde{\theta}_3$

$$\begin{aligned} V(t; \theta_3) &= \frac{F}{\alpha R} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{-\theta_1 I(t)}{2\sqrt{c_{ss}^+(t)(c_{s,\text{máx}}^+ - c_{ss}^+(t))}} \right) \\ &\quad - \frac{F}{\alpha R} T(t) \sinh^{-1} \left(\frac{\theta_2 I(t)}{2\sqrt{c_{ss}^-(t)(c_{s,\text{máx}}^- - c_{ss}^-(t))}} \right) \\ &\quad + U^+(c_{ss}^+(t)) - U^-(c_{ss}^-(t)) - (\tilde{\theta}_3 + \hat{\theta}_3)I(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Notar que la ecuación (3.9), puede ser escrita de la siguiente forma

$$e_{\theta_3} = \tilde{\theta}_3 \Phi_{\theta_3}. \quad (3.10)$$

Donde

$$e_{\theta_3} = V(t; \theta_3) - V(t; \hat{\theta}_3), \quad \Phi_{\theta_3} = -I(t).$$

e_{θ_3} representa el error entre el voltaje V medido y el estimado $V(t; \hat{\theta}_3)$, el cual es obtenido mediante la continua actualización del estimador $\hat{\theta}_3$. Φ_{θ_3} representa la variable regresora en la ecuación del error de estimación (3.10). A continuación se escoge una ley de actualización del tipo mínimos cuadrados con adaptación, ver [5].

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_3 = p e_{\theta_3} \Phi_{\theta_3}, \\ \dot{p} = -p^2 \frac{\Phi_{\theta_3}^2}{m^2}, \end{cases} \quad (3.11)$$

donde $m^2 = 1 + \gamma_{\theta_3} \Phi_{\theta_3}^2$ con $\gamma_{\theta_3} > 0$ parámetro de diseño.

La siguiente proposición nos asegura la estabilidad y convergencia del esquema de estimación de mínimos cuadrados para $\hat{\theta}_3$.

Proposición 3.2.1. *(Estabilidad y convergencia del estimador $\hat{\theta}_3$).*

Consideremos la ley de actualización del estimador $\hat{\theta}_3$ dada por el sistema de ecuaciones (3.11). Si $\Phi_{\theta_3}(t)$ es acotado, entonces $\hat{\theta}_3 \rightarrow \theta_3$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. En efecto, considere la dinámica del error de estimación del parámetro θ_3 dada por,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_3 &= -\dot{\hat{\theta}}_3 \\ &= -p^2 \tilde{\theta}_3 I^2(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por otro lado, se escoge la siguiente función candidata a función de Lyapunov,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_3^2}{p}.$$

En consecuencia la derivada temporal está dada por,

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{2\dot{\tilde{\theta}}_3\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_3^2\dot{p}}{2p^2}, \quad (3.13)$$

utilizando las igualdades (3.12) en (3.13), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= -\tilde{\theta}_3^2 I^2(t) + \frac{I^2(t)}{2m^2} \tilde{\theta}_3^2 \\ &= \left(\frac{1-2m^2}{2m^2} \right) \tilde{\theta}_3^2 I^2(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Claramente, si $I(t)$ es acotada, entonces $\dot{\mathcal{V}} \leq -M\tilde{\theta}_3^2$, con $M > 0$ constante, en consecuencia $\tilde{\theta}_3 = 0$ es un punto de equilibrio estable, además por el teorema de LaSalle-Yoshizawa, ver [6], se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_3 = 0$, implicando así que $\hat{\theta}_3 \rightarrow \theta_3$. ■

3.3. Identificación de parámetros en la ecuación de variación de temperatura.

De manera muy similar a lo presentado en la Sección 3.2, se propone un esquema con el fin de estimar parámetros asociados a la ecuación que modela la variación temporal de temperatura de la batería a partir de mediciones de corriente entrante, voltaje de salida y temperatura.

En la sección 1.2, se estableció un modelo explícito para la temperatura, dado por la siguiente ecuación

$$T(t) = T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t (I(s)V(s)) e^{\varphi_1(s-t)} ds. \quad (3.15)$$

3.3.1. Identificabilidad.

Consideremos una versión paramétrica de la ecuación de temperatura, i.e, $T(t) = h(t; \varphi_1, \varphi_2)$, y las derivadas parciales respecto a los parámetros.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} &= \varphi_2 \int_0^t (I(s)V(s)) e^{\varphi_1(s-t)} (s-t) ds, \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi_2} &= \int_0^t (I(s)V(s)) e^{\varphi_1(s-t)} ds, \end{aligned}$$

con las cuales se procede a realizar el análisis de sensibilidad, ya descrito previamente en la sección 3.2.1.

Mediante simulación se obtiene la siguiente matriz de sensibilidad

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -0,999 \\ -0,999 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

Por esto se concluye que los parámetros φ_1 y φ_2 están fuertemente asociados de forma lineal, impidiendo una identificación conjunta única con respecto a mediciones de corriente $I(t)$, voltaje $V(t)$ y temperatura $T(t)$.

3.3.2. Estimación mediante mínimos cuadrados.

A continuación se presentan dos esquemas para la estimación individual e independiente de los parámetros φ_1 y φ_2 respectivamente.

3.3.2.1. Estimación del parámetro φ_1 .

Definimos, $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \hat{\varphi}_1(t)$, donde $\hat{\varphi}_1$, representa un estimador del parámetro φ_1 . Se escribe la ecuación (3.15), en términos de $\tilde{\varphi}_1$

$$T(t, \tilde{\varphi}_1) = T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp((\tilde{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_1)(s-t)) ds \quad (3.17)$$

una dificultad evidente es que el parámetro que buscamos identificar, φ_1 , aparece en forma no lineal en la ecuación anterior. Para lidiar con esto, se utiliza una expansión de Taylor de primer orden de $\exp((\tilde{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_1)(s-t))$ para valores de $\tilde{\varphi}_1$ cercanos a 0, es decir,

$$\exp((\tilde{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_1)(s-t)) = \exp(\hat{\varphi}_1(s-t)) (1 + \tilde{\varphi}_1(s-t)) + \mathcal{O}(|\tilde{\varphi}_1|^2) \quad (3.18)$$

Por lo tanto, usando la ecuación (3.18) en (3.17), tenemos que

$$\begin{aligned} T(t) &= T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp(\hat{\varphi}_1(s-t)) ds \\ &\quad + \tilde{\varphi}_1 \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp(\hat{\varphi}_1(s-t)) (s-t) ds + \mathcal{O}(|\tilde{\varphi}_1|^2). \end{aligned}$$

Truncando los términos de orden superior y definiendo las siguientes cantidades,

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= T_{amb} + \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp(\hat{\varphi}_1(s-t)) ds, \\ \Phi_{\varphi_1} &= \varphi_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp(\hat{\varphi}_1(s-t)) (s-t) ds. \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} e_{\varphi_1} &= T(t) - \hat{T}(t) \\ &= \tilde{\varphi}_1 \Phi_{\varphi_1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde e_{φ_1} , representa un modelo linealizado del error de estimación del valor real del parámetro φ_1 .

Mediante el esquema de estimación de mínimos cuadrados adaptativos, ver [5], establecemos una ley de actualización para el estimador $\hat{\varphi}_1$,

$$\begin{cases} \dot{\hat{\varphi}}_1 = p_{\varphi_1} e_{\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} \\ \dot{p}_{\varphi_1} = -p_{\varphi_1}^2 \frac{\Phi_{\varphi_1}^2}{m^2}, \end{cases} \quad (3.20)$$

Donde $m^2 = 1 + \gamma_{\varphi_1} \Phi_{\varphi_1}^2$ y $\gamma_{\varphi_1} > 0$ constante.

La siguiente proposición, nos permite establecer la convergencia (local) de la ley de actualización (3.20).

Proposición 3.3.1. *(Estabilidad y convergencia del estimador $\hat{\varphi}_1$).*

Consideremos la ley de actualización dada por el sistema de ecuaciones (3.20). Si $\Phi_{\varphi_1}(t)$ es acotada, entonces $\hat{\varphi}_1 \rightarrow \varphi_1$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Consideremos la dinámica del error de estimación, la cual viene dada por

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1 = p_{\varphi_1} \tilde{\varphi}_1 \Phi_{\varphi_1}^2 + p_{\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} \mathcal{O}(|\tilde{\varphi}_1|). \quad (3.21)$$

Consideremos la siguiente función de Lyapunov

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varphi}_1^2}{p_{\varphi_1}}, \quad (3.22)$$

Usando la ley de actualización (3.20), tenemos que

$$\dot{\mathcal{V}} = \left(\frac{1 - 2m^2}{2m^2} \right) \tilde{\varphi}_1^2 \Phi_{\varphi_1}^2. \quad (3.23)$$

Donde, $m^2 = 1 + \gamma_{\varphi_1} \Phi_{\varphi_1}^2$ y $\gamma_{\varphi_1} > 0$. Se observa que si, Φ_{φ_1} es acotada, entonces $\dot{\mathcal{V}} \leq -M_{\varphi_1} \tilde{\varphi}_1$, con $M_{\varphi_1} > 0$ constante. Por lo tanto, $\tilde{\varphi}_1 = 0$ es un punto de equilibrio localmente estable, además por el Teorema de LaSalle-Yoshizawa, ver [6], se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_1 = 0$, implicando así $\hat{\varphi}_1 \rightarrow \varphi_1$. ■

3.3.2.2. Estimación del parámetro φ_2 .

Muy similar a lo hecho anteriormente, se define $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 - \hat{\varphi}_2(t)$, donde $\hat{\varphi}_2$ es un estimador del valor del parámetro φ_2 . Con esto, reescribimos la ecuación de la temperatura en términos de $\tilde{\varphi}_2$ como

$$T(t) = T_{amb} + (\tilde{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_2) \int_0^T I(s)V(s) \exp(\varphi_1(s-t)) ds.$$

Además, si definimos

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= T_{amb} + \hat{\varphi}_2 \int_0^T I(s)V(s) \exp(\varphi_1(s-t)) ds, \\ \Phi_{\varphi_2} &= \int_0^T I(s)V(s) \exp(\varphi_1(s-t)), \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} e_{\varphi_2} &= T - \hat{T} \\ &= \tilde{\varphi}_2 \int_0^t I(s)V(s) \exp(\varphi_1(s-t)) ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De esta forma, se propone una ley de actualización del estimador $\hat{\varphi}_2$ del tipo mínimos cuadrados.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\varphi}}_2 &= p_{\varphi_2} e_{\varphi_2} \Phi_{\varphi_2}, \\ \dot{p}_{\varphi_2} &= -p_{\varphi_2}^2 \frac{\Phi_{\varphi_2}^2}{m^2}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Donde $m^2 = 1 + \gamma_{\varphi_2} \Phi_{\varphi_2}^2$, con $\gamma_{\varphi_2} > 0$ constante.

En lo que sigue se muestra la estabilidad y convergencia de la ley de actualización (3.25).

Proposición 3.3.2. (Estabilidad y convergencia del estimador $\hat{\varphi}_2$).

Consideremos las leyes de actualización dadas por el sistema (3.25). Si $\Phi_{\varphi_2}(t)$ es acotada, entonces $\hat{\varphi}_2 \rightarrow \varphi_2$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Consideramos la función de Lyapunov,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varphi}_2^2}{p_{\varphi_2}}. \quad (3.26)$$

Utilizando las igualdades del sistema (3.25), vemos que

$$\dot{\mathcal{V}} = \left(\frac{1 - 2m^2}{2m^2} \right) \tilde{\varphi}_2^2 \Phi_{\varphi_2}^2, \quad (3.27)$$

donde $m^2 = 1 + \gamma_{\varphi_2} \Phi_{\varphi_2}$, con $\gamma_{\varphi_2} > 0$. En consecuencia, si Φ_{φ_2} es acotada, $\dot{\mathcal{V}} \leq -M_{\varphi_2} \tilde{\varphi}_2^2$, con $M_{\varphi_2} > 0$. Por lo tanto, $\tilde{\varphi}_2 = 0$ es un punto de equilibrio estable, y por el Teorema LaSalle-Yoshizawa, ver [6], $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_2 = 0$ y así vemos que $\hat{\varphi}_2 \rightarrow \varphi_2$, cuando $t \rightarrow \infty$. ■

3.4. Simulaciones.

3.4.1. Estimación del número de iones de Litio en estado sólido $n_{Li,s}$.

Por simplicidad se simulan las ecuaciones de concentración de iones del cátodo y ánodo en su versión normalizada, ver ecuaciones (2.3) y sus respectivos observadores, ver ecuaciones (2.4). Fijamos la condición inicial del estimador $\hat{n}_{Li,s}(0) = 0,1n_{Li,s}$, la convergencia del esquema estimación se ejemplifica mediante la Figura 3.1. Notar que la tasa de convergencia está también condicionada a la elección del parámetro λ , ver desigualdad (3.3).

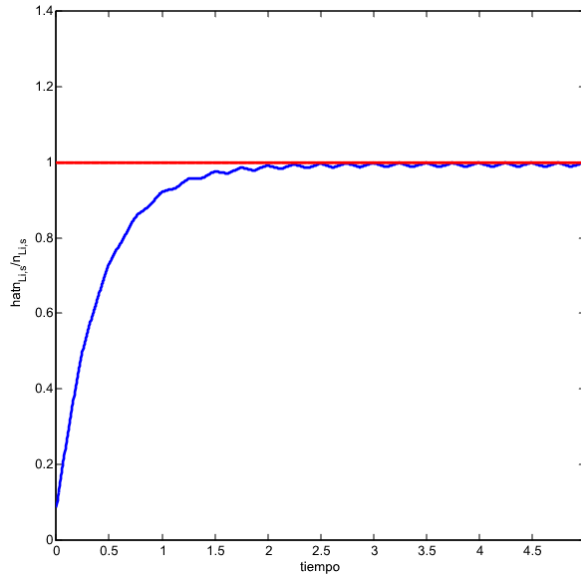


FIGURA 3.1: Estimador $\hat{n}_{Li,s}$. v/s tiempo. En color azul vemos la trayectoria del estimador normalizado $\hat{n}_{Li,s}/n_{Li,s}$ convergiendo al valor nominal 1 en color rojo.

3.4.2. Estimación del parámetro de Resistencia fílmica R_f .

Considerando una condición inicial $\hat{R}_f(0) = 1,75R_f$ i.e con un error del 75% de sobreestimación del valor real de la resistencia fílmica y con un valor de parámetro de ajuste $\gamma_{R_f} = 10^5$. Se ilustra la convergencia del estimador \hat{R}_f dado por la ley de actualización(3.11), ver Figura 3.2.

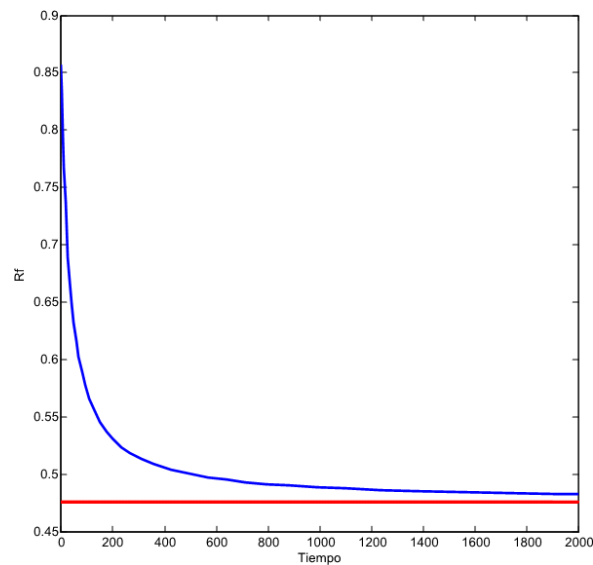


FIGURA 3.2: Estimador \hat{R}_f v/s el tiempo. En color azul vemos la trayectoria del estimador \hat{R}_f convergiendo al valor real, en color rojo, de la resistencia fílmica R_f .

Repetidamente las simulaciones mostraron que valores de magnitud inferiores al escogido para el parámetro γ_{R_f} exhiben mayores errores relativos en un horizonte de tiempo finito igual o superior al mostrado en la Figura 3.2.

3.4.3. Simulación estimación parámetros función temperatura.

3.4.3.1. Estimación parámetro φ_1 .

En la Figura 3.3 mostramos la simulación del estimador del $\hat{\varphi}_1$, el cual esta dado por la ley de actualización (3.20).

Se escoge una condición inicial para el estimador con un error del 70 % de sobreestimación del valor real de φ , es decir, $\hat{\varphi}_1(0) = 1,7\varphi_1$ y un valor del parámetro de ajuste $\gamma_{\varphi_1} = 10^{-1}$.

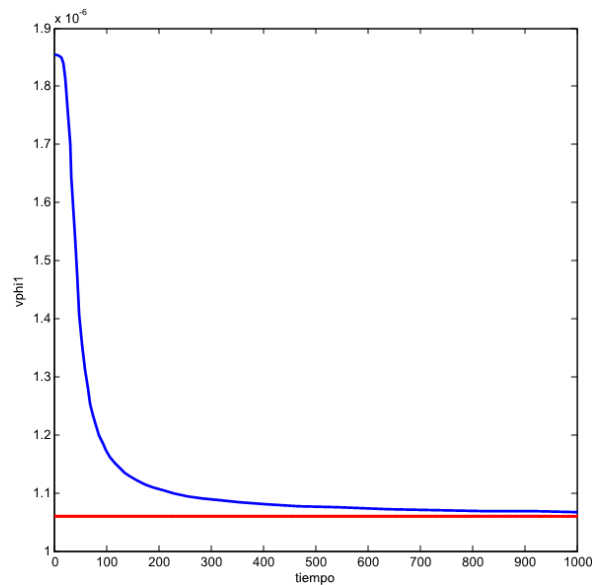


FIGURA 3.3: Estimador $\hat{\varphi}_1$ v/s el tiempo. En azul el estimador $\hat{\varphi}_1$ y en rojo el valor real del parámetro φ_1 .

La selección del parámetro γ_{φ_1} fue hecha mediante repetidas simulaciones bajo un horizonte de tiempo finito, en este caso $t = 1000$.

3.4.3.2. Estimación parámetro φ_2 .

La Figura 3.4 muestra la trayectoria del estimador $\hat{\varphi}_2$, dado por la ley de actualización (3.25).

De forma similar a lo anterior se escoge una condición inicial con error, en este caso se inicia el estimador con un error de 80 % de sobreestimación, es decir $\hat{\varphi}_2(0) = 1,8\varphi_2$, además el parámetro de ajuste se escoge como $\gamma_{\varphi_2} = 10^3$.

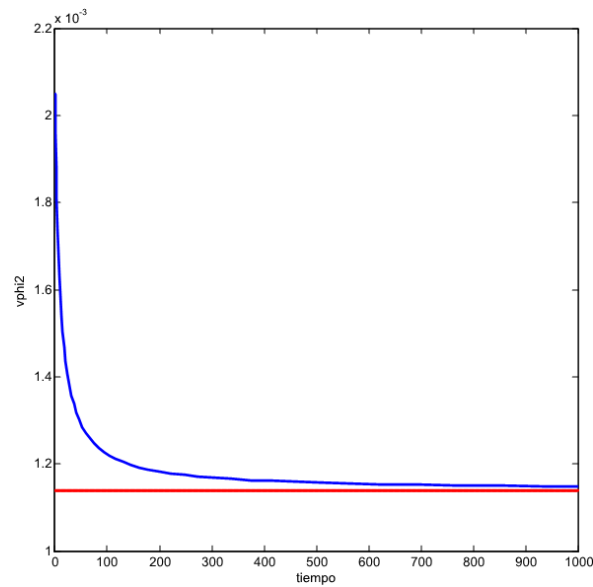


FIGURA 3.4: Estimador $\hat{\varphi}_2$ v/s el tiempo. En azul el estimador $\hat{\varphi}_2$ y en rojo el valor real del parámetro φ_2 .

La selección del parámetro γ_{φ_2} fue hecha mediante repetidas simulaciones bajo un horizonte de tiempo finito, en este caso $t = 1000$.

Capítulo 4

Inversión de la función de Voltaje y Temperatura.

En la sección 2.2, se diseñaron observadores de los estados de concentración c_s^+ y c_s^- , asumiendo en ambos casos acceso a la medición $c_{ss}^j(t) = c_s(R_s^j, t)$. En este capítulo desarrollamos un algoritmo del tipo gradiente para calcular $c_{ss}^+(t)$ y $c_{ss}^-(t)$ de forma simultánea, a partir de mediciones de la corriente entrante $I(t)$, el voltaje $V(t)$ y la temperatura $T(t)$.

Recordamos las ecuaciones para el voltaje y la temperatura.

$$V(t) = \frac{R}{\alpha F} T(t) \sinh^{-1}(-\theta_1 \omega_+(t, c_{ss}^+)) - \frac{R}{\alpha F} T(t) \sinh^{-1}(\theta_2 \omega_-(t, c_{ss}^-)) + U^+(c_{ss}^+) - U^-(c_{ss}^-) - R_f I(t), \quad (4.1)$$

$$T(t) = T(0) + \varphi_2 \int_0^t I(s) V(s) e^{\varphi_1(s-t)} ds. \quad (4.2)$$

Donde

$$\omega_j = \frac{I(t)}{2\sqrt{c_{ss}^j(t)(c_{s,\text{máx}}^j - c_{ss}^j(t))}}, j \in \{+, -\}.$$

Para llevar a cabo la inversión de estas funciones, reescribimos las ecuaciones (4.1) y (4.2), en una forma más compacta de la siguiente forma

$$F(c_{ss}, t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ T(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(c_{ss}^+, c_{ss}^-, t) \\ T(0) + \varphi_2 \int_0^t I(s) g(c_{ss}^+, c_{ss}^-, s) e^{\varphi_1(s-t)} ds \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Donde $c_{ss} = (c_{ss}^+, c_{ss}^-)^T$. En las secciones que siguen proponemos un método para la inversión de F , basados en la idea de inversión del voltaje en [13].

4.1. Inversión de la función de voltaje y temperatura.

Definimos por $\check{c}_{ss} = (\check{c}_{ss}^+, \check{c}_{ss}^-)^T$ el resultado del proceso de invertir F . Entonces, el error entre el valor real y resultado de la inversión lo denotamos por $\tilde{c}_{ss} = c_{ss} - \check{c}_{ss}$. Esto nos permite escribir la ecuación (4.3), de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} V(t) \\ T(t) \end{pmatrix} = F(\check{c}_{ss} + \tilde{c}_{ss}; t). \quad (4.4)$$

Luego, aproximamos el lado derecho de (4.4) usando una expansión de Taylor de primer orden considerando $\tilde{c}_{ss} \approx 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} V(t) \\ T(t) \end{pmatrix} = F(\check{c}_{ss}; t) + \nabla F(\check{c}_{ss}; t)\tilde{c}_{ss} + \mathcal{O}(\|\tilde{c}_{ss}\|^2). \quad (4.5)$$

Donde ∇F representa la matriz jacobiana de las primeras derivadas de F con respecto a c_{ss}^+ y c_{ss}^- . Truncando los términos de orden superior, definimos también el vector de error de inversión,

$$e_{nl}(t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ T(t) \end{pmatrix} - F(\check{c}_{ss}; t). \quad (4.6)$$

De esta forma tenemos un modelo (linealizado) del error de inversión, dado por

$$e_{nl}(t) = \nabla F(\check{c}_{ss}, t)\tilde{c}_{ss} \quad (4.7)$$

Una ley de actualización del tipo gradiente, ver [5], para $\check{c}(t)$ que minimiza $\frac{1}{2}\gamma\|e_{nl}(t)\|^2$ es dada por

$$\frac{d}{dt}\check{c}_{ss}(t) = \gamma\nabla F^T e_{nl}(t). \quad (4.8)$$

Donde $\gamma > 0$ es un parámetro constante que puede ser escogido y tiene incidencia en la tasa de convergencia del esquema.

4.2. Análisis de estabilidad y convergencia.

En la sección presente probaremos la convergencia local del esquema de inversión presentado en la sección 4.1 bajo la siguiente suposición.

Definición 4.2.1. (Condición de Excitación Persistente)

Una función Matricial, continua a trozos, $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que está persistentemente

excitada con nivel de excitación α_0 , si existen $\alpha_0 > 0$ y $T_0 > 0$ tales que

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi^T(s)\phi(s)ds \geq \alpha_0 I_{n \times n} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.9)$$

Observación 4.2.1. La condición de excitación persistente es frecuentemente utilizada en control adaptativo, ver [5], con el fin estimar parámetros de forma on-line.

Teorema 4.2.1. (*Convergencia local del esquema de inversión*).

Sea el error entre el verdadero valor y el valor procesado $\tilde{c}_{ss} = c_{ss} - \check{c}_{ss}$, tal que que la dinámica temporal evoluciona según

$$\frac{d}{dt} \tilde{c}_{ss}(t) = -\gamma \nabla F^T e_{nl}(t). \quad (4.10)$$

Donde $\gamma > 0$ constante, además

$$\begin{aligned} \nabla F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial c_{ss}^+}(c_{ss}^+; t) & \frac{\partial g}{\partial c_{ss}^-}(c_{ss}^-; t) \\ \varphi_2 \int_0^t I(s) \frac{\partial g}{\partial c_{ss}^+}(c_{ss}^+, s) e^{\varphi_1(s-t)} ds & \varphi_2 \int_0^t I(s) \frac{\partial g}{\partial c_{ss}^-}(c_{ss}^-, s) e^{\varphi_1(s-t)} ds \end{pmatrix}, \\ e_{nl} &= F(c_{ss}, t) - F(\check{c}_{ss}, t). \end{aligned}$$

Si ∇F cumple con la condición de excitación persistente (4.9), entonces $\tilde{c}_{ss} \rightarrow 0$, exponencialmente. Más específicamente, dadas dos condiciones iniciales $c_{ss}(0)$ y $\check{c}_{ss}(0)$, se tiene que

$$\|\tilde{c}_{ss}(t)\|^2 \leq e^{-\gamma t} \|c_{ss}(0) - \check{c}_{ss}(0)\|^2. \quad (4.11)$$

Demostración. Consideremos la siguiente función candidata a función de Lyapunov,

$$W(t) = \frac{1}{2\gamma} \|\tilde{c}_{ss}\|^2. \quad (4.12)$$

Así, utilizando (4.10), vemos que la derivada temporal de W queda

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= -\frac{1}{\gamma} \langle \gamma \nabla F^T e_{nl}, \tilde{c}_{ss} \rangle \\ &= -\|e_{nl}\|^2. \end{aligned}$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$, denota el producto interior en \mathbb{R}^2 .

Sea $T_0 > 0$, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} W(t+T_0) - W(t) &= \int_t^{t+T_0} \dot{W}(\tau) d\tau \\ &= -\int_t^{t+T_0} \|e_{nl}(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Notar además que

$$\nabla F(\tau)\tilde{c}_{ss}(\tau) = \nabla F(\tau)\tilde{c}_{ss}(t) + \nabla F(\tau)(\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t)). \quad (4.14)$$

Utilizando (4.14) en (4.13), se obtiene

$$W(t + T_0) - W(t) = - \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau)\tilde{c}_{ss}(t) + \nabla F(\tau)(\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t))\|^2 d\tau \quad (4.15)$$

La idea principal es acotar el lado derecho de (4.15) por algo de la forma $-\bar{\gamma}W(t)$, con $0 < \bar{\gamma} < 1$.

Comenzamos aplicando la desigualdad $-\|x + y\|^2 \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \|y\|^2$, en el lado derecho de (4.15), de esta forma obtenemos

$$W(t + T_0) - W(t) \leq I_1 + I_2.$$

Donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau)(\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t))\|^2 d\tau \\ I_2 &= -\frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau)\tilde{c}_{ss}(t)\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

En lo que sigue procedemos a acotar integral I_1 . Vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t) &= \int_t^\tau \dot{\tilde{c}}_{ss}(s) ds \\ &= -\gamma \int_t^\tau \nabla F^T(s)\nabla F(s)\tilde{c}_{ss}(s) ds. \end{aligned}$$

Multiplicando por izquierda por $\nabla F(\tau)$ y luego tomando norma, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\nabla F(\tau)(\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t))\| &\leq \gamma \int_t^\tau \|\nabla F(\tau)\nabla F^T(s)\nabla F(s)\tilde{c}_{ss}(s)\| ds \\ &\leq \gamma\beta^2 \int_t^\tau \|\nabla F(s)\tilde{c}_{ss}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde $\beta = \sup_{s>0} \|\nabla F(s)\|$.

Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en el lado derecho de (4.16) y elevando al cuadrado e integrando entre t y $t + T_0$, en ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$\int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau)(\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t))\|^2 d\tau \leq \gamma^2\beta^4 \int_t^{t+T_0} \int_t^\tau (\tau - t) \|\nabla F(s)\tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds d\tau.$$

Haciendo un cambio en el orden de integración, en el lado derecho de la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau) (\tilde{c}_{ss}(\tau) - \tilde{c}_{ss}(t))\|^2 d\tau &\leq \beta^4 \gamma^2 \int_t^{t+T_0} \int_s^{t+T_0} (\tau - t) \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 d\tau ds \\
 &= \beta^4 \gamma^2 \int_t^{t+T_0} \frac{T_0^2 - (s-t)}{2} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds \\
 &\leq \frac{\beta^4 \gamma^2 T_0^2}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds.
 \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que

$$I_1 \leq \frac{\beta^4 \gamma^2 T_0^2}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds. \quad (4.17)$$

Volviendo a la ecuación (4.13), tenemos que

$$\begin{aligned}
 - \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds &\leq \frac{\beta^4 \gamma^2 T_0^2}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau) \tilde{c}_{ss}(t)\|^2 d\tau
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Así, se tiene que

$$- \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds \leq - \frac{1}{1 + \frac{\beta^4 \gamma^2 T_0^2}{2}} \frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(\tau) \tilde{c}_{ss}(t)\|^2 d\tau \quad (4.19)$$

Utilizando la hipótesis de excitación persistente, (4.9), sobre ∇F se tiene que

$$\begin{aligned}
 - \int_t^{t+T_0} \|\nabla F(s) \tilde{c}_{ss}(s)\|^2 ds &\leq -\gamma_* \frac{1}{2\gamma} \|\tilde{c}_{ss}(t)\|^2 \\
 &= \gamma_* W(t)
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Acá, $\gamma_* = \frac{\alpha_0 T_0 \gamma}{1 + \frac{\beta^4 \gamma^2 T_0^2}{2}}$.

Así vemos que

$$W(t + T_0) \leq W(t) - \gamma_* W(t) = \bar{\gamma} W(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.21)$$

Donde $\bar{\gamma} = 1 - \gamma_*$. Además, $0 < \bar{\gamma} < 1$, ya que $\gamma_* > 0$ y $W(t) > 0 \forall t > 0$.

Para obtener el decaimiento exponencial utilizamos la desigualdad (4.21) inductivamente.

Notar que (4.21) se tiene para $\forall t \geq 0$, en particular para t de la forma $t = nT_0$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

Para $n = 0$ se observa que $W(T_0) \leq \bar{\gamma} W(0)$. Directamente para $n = 1$ tenemos que

$$W(T_0 + T_0) \leq \bar{\gamma} W(T_0) \leq \bar{\gamma}^2 W(0).$$

Así en general la siguiente desigualdad

$$W(nT_0) \leq \gamma^n W(0).$$

Por otro lado,

$$\bar{\gamma}^n = e^{-\frac{\log(|\bar{\gamma}|)t}{T_0}},$$

por lo tanto

$$\|\tilde{c}_{ss}(t)\|^2 \leq e^{-\frac{\log(|\bar{\gamma}|)t}{T_0}} \|c_{ss}(0) - \check{c}(0)\|^2. \quad (4.22)$$

■

Observación 4.2.2. Notar que el resultado del teorema 4.2.1 establece una tasa convergencia exponencial, la cual es de carácter local, por uso de una aproximación lineal, ver sección 4.1. Además, otro factor importante a considerar al momento de implementar el esquema, es la condición de Excitación Persistente, ver ecuación (4.9), la cual se impone sobre la matriz $\nabla F^T(\check{c}_{ss}, t)\nabla F(\check{c}_{ss}, t)$, si bien es una condición bastante fuerte, es la que permite asegurar una tasa exponencial de convergencia del error, además esta condición se reduce a una buena elección de la corriente entrante $I(t)$.

4.3. Simulaciones.

Ilustramos los resultados obtenidos en la sección 4.2 mediante simulaciones numéricas. Escogemos condiciones iniciales con error respecto al verdadero valor para cátodo y el ánodo. Se simula sobre un horizonte de tiempo $t = 2500$, obteniendo los resultados de inversión mostrados en las Figuras 4.3 y 4.1.

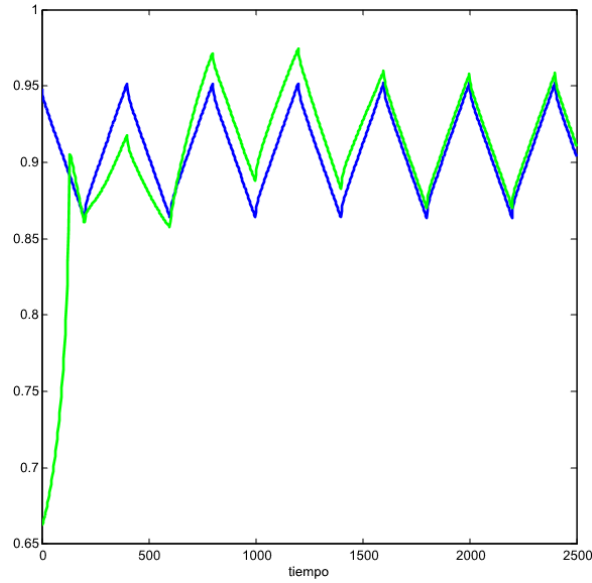


FIGURA 4.1: Inversión cátodo v/s tiempo. En color azul tenemos el verdadero valor de $\frac{c_{ss}^+(t)}{c_{s,máx}}$ y en color verde el resultado del esquema de inversión, i.e \check{c}_{ss}^+ .

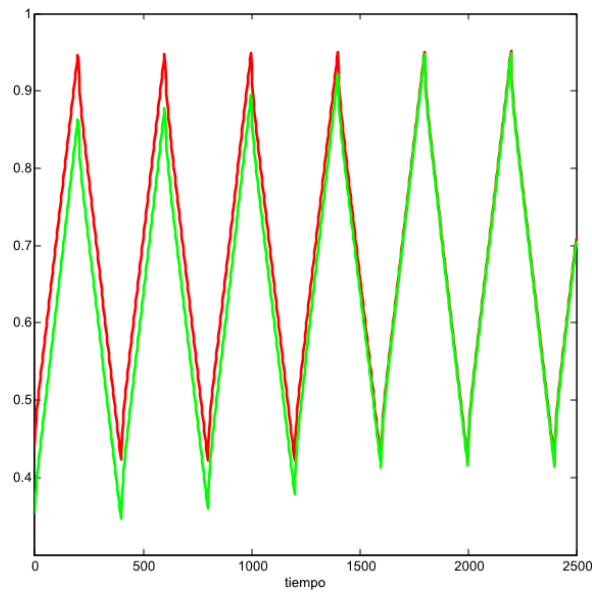


FIGURA 4.2: Inversión ánodo v/s tiempo. En color rojo tenemos el verdadero valor de $\frac{c_{ss}^-(t)}{c_{s,máx}}$ y en color verde el resultado del esquema de inversión, i.e \check{c}_{ss}^- .

Exhaustivas simulaciones exhiben el comportamiento local de la inversión, numéricamente utilizar condiciones iniciales con un error de más de 40% del valor real, impide tener la convergencia deseada.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro.

La estimación del Estado de Carga, se efectuó a través de la construcción de un observador mediante el método de Backstepping, ver sección 2.1, si bien ya en algunos artículos de Moura, Chatuverdi y Krstic ver [12], [11] se emplea este método introducido por Krstic en [7], sólo se ocupa para estimar la concentración de iones en el ánodo, ya que se asume que la difusión en el cátodo es mucho más rápida que en el ánodo, por lo tanto la concentración en el electrodo positivo permanece en su estado de equilibrio, una diferencia crucial es que en esta tesis no asumimos tal hipótesis, por el contrario asumimos que los tiempos característicos son comparables, por lo cual se desarrollan observadores para ambos electrodos. Estos observadores, ver ecuación (2.4) requieren la medición del estado real de concentración en la superficie $c_s^j(R_s^j, t)$, $j \in \{+, -\}$, se asume que estas mediciones no están disponibles, y que se deben obtener a partir de medir $I(t)$, $V(t)$ y $T(t)$ esto nos lleva al capítulo 4, en el cual se propone un esquema para estimar los inputs necesarios en los observadores a partir de la medición continua de $I(t)$, $V(t)$ y $T(t)$, en la sección 4.2, damos un prueba de la convergencia del esquema de inversión de las cantidades $I(t)$, $V(t)$ y $T(t)$ para obtener $c_s^j(R_s^j, t)$, $j \in \{+, -\}$. Si bien es un resultado local, hemos establecido una tasa exponencial de convergencia gracias al uso de una condición de Excitación Persistente, ver definición 4.2.1.

El problema de determinar el Estado de Salud, se enfrentó como un problema de estimación on-line de parámetros relacionados a la vida útil de la batería. La estimación del Charge Capacity Fade se asoció a la estimación del número de iones de Litio en estado sólido, $n_{Li,s}$, ver sección 3.1. Destacamos que fue posible dar una tasa de convergencia de la estimación, ver Proposición 3.1.1. La estimación del Power Fade, se asoció a la estimación del parámetro de Resistencia Fílmica, R_f , presente en la ecuación del voltaje saliente, ver ecuación 1.14. En este caso, a diferencia de lo hecho para estimar $n_{Li,s}$, sólo se pudo establecer la convergencia asintótica del esquema de identificación sin poder dar alguna tasa de esta convergencia, ver Proposición 3.2.1. Además, complementario a esto, se estudio la estimación on-line de los parámetros, φ_1 y φ_2 asociados a la función de temperatura, ver ecuación 1.15. En ambos

casos se logró dar una prueba de la convergencia de los estimadores, sin dar una tasa de esta, por lo que al igual que para el caso del estimador de R_f , queda abierto el problema de determinar las tasas de convergencia del esquema.

Finalmente, quisiéramos señalar algunos posibles trabajos futuros. Ligado a lo hecho en el capítulo 4, queda pendiente transformar la condición de Excitación Persistente impuesta sobre ∇F , en condiciones más explícitas para la corriente entrante $I(t)$. Junto a esto evaluar si es posible dar una prueba de estabilidad y convergencia al esquema de inversión 4.8, utilizando una condición de Excitación Persistente más débil, del tipo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \nabla F^T(s) \nabla F(s) ds \geq \alpha_0 I. \quad (5.1)$$

Mencionamos que es necesario dar un criterio para la elección de los parámetros de diseño en los esquemas de identificación y además establecer las tasas de convergencia para los estimadores de los parámetros R_f , φ_1 y φ_2 .

También podemos indicar como trabajo futuro, investigar la estabilidad y convergencia de un esquema de inversión de las cantidades $I(t)$, $V(t)$ y $T(t)$, con adaptatividad en los parámetros estimados en el capítulo 3 y evaluar la robustez de los esquemas de inversión e identificación cuando las mediciones presenten ruido.

Apéndice A

Funciones de Bessel.

A.1. Funciones de Bessel J_n .

La función $J_n(x)$ es una solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria.

$$x^2 y''_{xx} + xy'_x + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (\text{A.1})$$

Representación por serie:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!} \quad (\text{A.2})$$

Propiedades:

$$2nJ_n(x) = x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) \quad (\text{A.3})$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{A.4})$$

Diferenciación:

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^n J_{n+1} \quad (\text{A.6})$$

Propiedades asintóticas

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{A.7})$$

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.8})$$

A.2. Función de Bessel Modificada $I_n(x)$.

La función $y(x) = I_n(x)$, es una solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x - (x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{A.9})$$

Representación mediante series:

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!(m+n)!}. \quad (\text{A.10})$$

Relacion con $J_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(x), \quad I_n(ix) = i^n J_n(x) \quad (\text{A.11})$$

Diferenciacion:

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{1}{2}(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dx} (x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} I_n(x)) = x^{-n} I_{n+1}. \quad (\text{A.13})$$

Propiedades asintóticas

$$I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{A.14})$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Parámetros de Simulación.

Parámetros empleados en esta tesis, los cuales fueron obtenidos de [4].

Parámetro	valor
A	$0,62[m^2]$
a^+	$9,5296E6 \frac{m^2}{m^3}$
a^-	$5,2163E5 \frac{m^2}{m^3}$
c_0^e	$1,042E3 \frac{mol}{m^3}$
$c_s^+(0, t)$	$1,6949E3 \frac{mol}{m^3}$
$c_{s,máx}^+$	$1,7119E3 \frac{mol}{m^3}$
$c_s^-(0, t)$	$2,4790E4 \frac{mol}{m^3}$
$c_{s,máx}^-$	$8,8287E4 \frac{mol}{m^3}$
c_p	$2500 \frac{J}{K \cdot Kg}$
D_s^+	$8,25E - 14 \frac{m^2}{s^3}$
D_s^-	$1,7300E - 14 \frac{m^2}{s^3}$
F	$9,6485E4 \frac{C}{mol}$
h_{cell}	$0,093 \frac{J}{s \cdot K}$
k^+	$1,1270E - 7 \frac{A \cdot mol^{1,5}}{m^{5,5}}$
k^-	$8,6960e - 07 \frac{A \cdot mol^{1,5}}{m^{5,5}}$
L^+	$6,5210E - 5[m]$
L^-	$2,8850E - 5[m]$
R	$8,3143 \frac{J}{mol \cdot K}$
R_f	$0,4763 [\Omega]$
R_s^+	$1,6370E - 7[m]$
R_s^-	$3,5600E - 6[m]$
T_{amb}	$298[K]$
vol	$6,88E - 4[m^3]$
α^+	$0,5$
α^-	$0,5$
ε_s^+	$0,52$
ε_s^-	$0,6190$

CUADRO B.1: Parámetros de simulación.

Bibliografía

- [1] M. Armand and J. Tarascon. Building better batteries. *Nature*, 451:49–68, February 2008.
- [2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [3] N. A. Chatuverdi, R. Klein, J. Christensen, A. Jasi, and A. Kojic. Algorithms for advanced battery-management systems, modelling, estimation, and control challenges for lithium-ion batteries. *IEEE Control System Magazine*, pages 49–68, June 2010.
- [4] J. Forman, S. Moura, J. Stein, and H. Fathy. Parameter identification of the doyle-fuller-newman model based on experimental cycling of a li-ion lifepo4 battery using a genetic algorithm. *2011 American Control Conference*, 2011.
- [5] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 3rd edition, 1996.
- [6] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 3rd edition, 2002.
- [7] M. Krstic and A. Smyshlyaev. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. SIAM, 2008.
- [8] B. F. Lund and B. A. Foss. Parameter ranking by orthogonalization applied to nonlinear mechanistic models. *Automatica*, 2007.
- [9] S. J. Moura. Estimation and control of battery electrochemistry models: A tutorial. *54th IEEE Conference on Decision and Control*, 2015.
- [10] S. J. Moura, N. A. Chatuverdi, and M. Krstic. PDE estimation techniques for advanced battery management system- part II: SOH identification. *12 American Control Conference, Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada*, June 2012.
- [11] S. J. Moura, N. A. Chatuverdi, and M. Krstic. PDE estimation techniques for advanced battery management system- part I: SOC estimation. *12 American Control Conference, Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada*, June 2012.

-
- [12] S. J. Moura, N. A. Chaturvedi, and M. Krstic. Adaptive partial differential equation observer for battery state-of-charge/state-of-health estimation via an electrochemical model. *Journal of Dynamic System, Measurements and Control.*, 136:1–11, January 2014.
- [13] S. J. Moura, F. Bribiesca, R. Klein, A. Mirtabatabaei, and M. Krstic. Battery state estimation for a single particle model with electrolyte dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, page 16, June 2016.
- [14] S. Santhanagopalan, Q. Guo, P. Ramadass, and R. E. White. Review of models for predicting the cycling performance of. *Journal of Power Sources*, 156:620–628, 2006.
- [15] K. E. Thomas, R. M. Darling, and J. Newman. Mathematical modeling of lithium batteries. In *Advances in Lithium-Ion Batteries*, chapter XII, pages 345–392. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.